Н. П. ЕРУГИН

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ И КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК БССР
Минск 1963

В этой книге рассматриваются системы линейных дифференциальных уравнений (частично и нелинейные) с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Даются методы доказательства существования и построения ограниченных, неограниченных и периодических решений таких систем дифференциальных уравнений. Показана роль в этом аналитической теории линейных систем дифференциальных уравнений и методов, развитых Лаппо-Данилевским (теория функций от матриц). Используются многие идеи и методы А. М. Ляпунова.

Книга рассчитана на широкий круг математиков — научных работников, аспирантов и студентов старших курсов математических факультетов, а также физиков и инженеров.

Николай Павлович Еругин

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ И КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИМИ
КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Издательство Академии наук БССР
Минск, Ленинский проспект, 68

Редактор издательства *С. Холявский*
Технический редактор *И. Волоханович*
Корректор *А. Логинович*

АТ 05681. Сдано в набор 24/XII 1962 г. Подписано к печати 2/IV 1963 г. Тираж 3000 экз. Формат $60 \times 90\ ^1/_{16}$. Печ. л. 17,0. Уч.-изд. л. 18,0. Изд. заказ 27. Тип. заказ 2. Цена 1 р. 5 к.

Типография Издательства АН БССР
Минск, Ленинский проспект, 68

ОТ АВТОРА

В 1956 г. автором была издана монография «Метод Лаппо-Данилевского в теории линейных дифференциальных уравнений» (Издательство Ленинградского университета). Она была написана [1] к 25-летию со дня смерти выдающегося русского математика И. А. Лаппо-Данилевского и этому событию посвящена.

Предполагалось, что эта работа будет опубликована в журнале «Успехи математических наук» или в серии «Проблемы современной математики», выходящей под руководством редакции данного журнала. Поэтому изложение было весьма кратким и во многих местах почти конспективным. Настоящая монография является значительной переработкой упомянутой книги. Материал излагается здесь намного подробнее, значительно пополнено и содержание книги. Поэтому изменилось и само ее название.

Автор отдает себе отчет в том, что, может быть, и сейчас следовало бы еще несколько подробнее изложить некоторые пункты § 1, а также, например, § 37, 43, 44 и другие. Впрочем, более подробные рассуждения по теме § 37 читатель может найти непосредственно в работе Ляпунова. Здесь же нам это потребовалось лишь для законченности и полноты решения вопросов об ограниченных решениях уравнения $\ddot{x}+p(t)x=0$ с периодической знакопеременной функцией $p(t)$. Мы не коснулись и других методов решения этой задачи, отсылая читателей к обзорной статье В. М. Старжинского.

---

[1] Монография написана в 1954 г. Доклад на эту тему был сделан 20 апреля 1954 г. на научной сессии физико-математического сектора АН КазССР [66].

ВМЕСТО ПРЕДИСЛОВИЯ

В § 1 излагаются основы теории функций от одной матрицы по Лаппо-Данилевскому. На основе формул Лаппо-Данилевского дается метод построения минимального полинома Лагранжа от матрицы A, представляющего функцию от матрицы A. Показывается, что аналитическое продолжение $f(A)$, осуществляемое при помощи формулы Лагранжа, приводит ко всем возможным значениям $f(A)$ и в том числе к иррегулярным, если $f(A)$ — многозначная функция. Дается общее представление функции $Y = \ln X$, выясняется, когда эта функция может иметь вещественные значения, и указывается вид главного и регулярного значения.

В § 2 исследуется вопрос о разложении в ряд по степеням ε матричной функции $f\left(\sum_{k=0}^{\infty} X_k \varepsilon^k\right)$ (X_k — матрицы). При этом речь идет как о регулярных значениях $f\left(\sum_{k=0}^{\infty} X_k \varepsilon^k\right)$, так и об иррегулярных.

В § 3 рассматриваются функции от многих матриц по Лаппо-Данилевскому.

В § 4 и 5 указываются некоторые классы систем линейных дифференциальных уравнений, интегрируемых в замкнутой форме. Эти классы уравнений могут иметь значение при построении приближенных решений систем линейных дифференциальных уравнений.

В § 6 доказываются некоторые общие теоремы о разложении в ряд интегральной матрицы линейной системы дифференциальных уравнений по параметру ε, входящему в коэффициенты системы. В основном мы следуем здесь Ляпунову.

В § 7 приводятся результаты, относящиеся к решению проблемы Пуанкаре — Лаппо-Данилевского из аналитической теории линейных систем дифференциальных уравнений. Именно, здесь указываются методы построения показательной матрицы W, характеризующей многозначность интегральной матрицы $X(z) = (z-a)^W \cdot N(z-a)$ в окрестности особой точки $z = a$, где $N(z-a)$ — однозначная матрица в окрестности точки $z = a$. Указываются общие представления W для случая, когда $z = a$ — регулярная особая точка (Лаппо-Данилевский), а также и в случае иррегулярной особой точки [5, 29]. Приводятся разложения W в ряд по малым параметрам (входящим в коэффициенты системы дифференциальных уравнений), которые построил Лаппо-Данилевский. Все это имеет значение, как показано далее, в теории линейных систем с периодическими коэффициентами.

В § 8 формулируются некоторые проблемы из теории линейных систем дифференциальных уравнений с вещественными периодическими коэффициентами. Речь идет о представлении интегральной матрицы $X(t)$ в виде (задача Флоке) $X(t) = \exp At \cdot N(t)$, где A — постоянная матрица, а $N(t)$ — матрица периодическая. Здесь выясняется, когда можно получить A и $N(t)$ вещественными, указываются, какой период при этом будет у функции $N(t)$ и в каком случае A является регулярным значением $\ln X(2\pi)$, где $X(2\pi)$ — интегральная подстановка, т. е. матрица, на которую умножается интегральная нормированная в точке $t = 0$ матрица $X(t)$ при увеличении t на период 2π матрицы коэффициентов.

В § 9 дается общее решение проблемы, поставленной в § 8. Именно, здесь указывается способ построения W при помощи формул, найденных в работах [5, 29] для общего представления $\ln X$ и приведенных в § 1.

Приводится пример, в котором W получено вещественной, а $N(t)$ — с периодом, вдвое бо́льшим, чем период матрицы коэффициентов заданной системы дифференциальных уравнений. Для системы вида

$$\frac{dX}{dt} = XP(t)\lambda \quad (\lambda \text{ — параметр})$$

указывается способ нахождения матриц W и $N(t)$ в виде рядов по степеням параметра λ. Оценивается радиус сходимости этих разложений в зависимости от максимумов модулей элементов матрицы коэффициентов, а также область сходимости рядов, построенных Лаппо-Данилевским и представляющих показательную подстановку (§ 7). Указывается, что при нахождении инвариантов матрицы A (§ 8) может быть использовано разложение, полученное Лаппо-Данилевским для некоторой особой показательной матрицы $W = H$. Для матрицы A второго порядка приводятся неравенства общего вида, при которых характеристические числа матрицы A будут обладать заданными свойствами.

В § 10 и 11 для системы общего вида

$$\frac{dX}{dt} = X\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t)\,\varepsilon^k$$

указываются различные способы построения матриц A и $N(t)$ (§ 8) в виде рядов по параметру ε.

В § 12 даны приближенные способы построения интегральной матрицы. Эти способы основаны на том, что в представлении интегральной матрицы

$$X(t) = \exp At \cdot N(t),$$

где

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k\varepsilon^k, \quad N(t) = \sum_{k=0}^{\infty} N_k(t)\,\varepsilon^k,$$

берутся отрезки рядов для A и $N(t)$. Указывается, как иногда можно предварительно представить заданную систему дифференциальных уравнений в виде, где при $\varepsilon=0$ получим систему, интегрируемую в замкнутой форме, в которой A и $N(t)$ легко находятся. Здесь имеют значения системы, рассмотренные в § 4 и 5.

В § 13 рассматривается отдельно тот случай, когда в системе, изученной в § 10, первые $m+1$ матриц $P_0(t), P_1(t), \ldots, P_m(t)$ постоянные. Здесь приводятся и такие системы, где матрица коэффициентов системы дифференциальных уравнений не будет голоморфной функцией от малого параметра ε.

В § 14 дается случай, когда P_0 — постоянная матрица, а матрица $\exp P_0 t$ периодическая.

В § 15 приведен пример системы двух уравнений к § 14, в котором матрица $P_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$. Рассматриваются разные способы представления интегральной матрицы $X(t)$ в форме

$$X(t) = \exp At \cdot N(t)$$

и в том числе такой, когда $2\pi A$ берется в виде иррегулярного значения $\ln X(2\pi)$, где $X(2\pi)$ — интегральная подстановка матрицы $X(t)$.

В § 16 исследуются канонические системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = X\left(P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t)\,\varepsilon^k\right)$$

с периодическими матрицами $P_k(t) = P_k(t+2\pi)$ и постоянной матрицей P_0. Выводятся условия (Н. А. Артемьева), при которых интегральная матрица $X(t)$ такой системы будет ограниченной.

В § 17 рассматривается система, изученная в § 16, при условии, что $P_0 = P_1 = \ldots = P_{m-1} = 0$.

В § 18 рассматривается задача Н. А. Артемьева об условиях ограниченности интегральной матрицы канонической системы

$$\frac{dX}{dt} = XP(t, \mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon),$$

где

$$P(t + 2\pi, \mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon) = P(t, \mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon)$$

и $\mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon$ — параметры. Здесь речь идет об области значений параметров $\mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon$, в которой интегральная матрица $X(t)$ будет ограниченной.

В § 19 находится все множество вещественных матриц $Z(t)$, ограниченных вместе с $Z^{-1}(t)$ и переводящих по формуле $X = YZ(t)$ систему

$$\frac{dX}{dt} = XP(t), \quad P(t + 2\pi) = P(t)$$

в систему

$$\frac{dY}{dt} = YB$$

с вещественной канонической матрицей B.

В § 20, 21 изучается система вида

$$\frac{dX}{dt} = X\left[P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t)\ \varepsilon^k\right] = XP(t), \tag{20.1}$$

где матрицы $P_k(t)$ квазипериодические:

$$P_k(t) = \Sigma\, C_{\mu_k}^{(k)} e^{i\mu_k t}.$$

Здесь $C_{\mu_k}^{(k)}$ — постоянные матрицы и μ_k — вещественные числа. Такие системы впервые рассмотрел И. З. Штокало [10, 38]. В этих параграфах и излагается метод Штокало нахождения условий, при которых интегральная матрица $X(t) \to 0$ при $t \to \infty$ (теорема 24.1).

В § 22—24 на основе метода И. З. Штокало выводятся некоторые приближенные интегральные матрицы (20.1). Даются и оценки приближения этих решений. Строятся приближенные решения и условия асимптотической устойчивости решений некоторых нелинейных систем дифференциальных уравнений. Формулируются некоторые проблемы для линейных систем дифференциальных уравнений (§ 24). Дан критерий приводимости линейной системы с квазипериодическими коэффициентами, найденный А. Е. Гельманом [40].

В § 25 получены другие приближенные формы решений (и при других предположениях) на основе методов И. З. Штокало и Н. Н. Боголюбова [79, 80].

В § 26 рассматривается задача Б. П. Демидовича нахождения условий ограниченности при малых ω интегральной матрицы системы

$$\frac{dX}{dt} = XP(t),$$

где матрица $P(t)$ периодическая с периодом ω и существует

$$\lim \frac{1}{\omega} \int\limits_0^{\omega} P(t)\, dt = M \text{ при } \omega \to 0.$$

В § 27 подробно рассматривается одна частная задача Н. А. Артемьева и дается другая задача (рассмотренная некоторыми авторами [49]), иная формулировка которой приводит к задаче Н. А. Артемьева.

В § 28 устанавливается связь между проблемами Пуанкаре — Лаппо-Данилевского (П — Л-Д) и проблемой Флоке о представлении интегральной матрицы системы

$$\frac{dX}{dt} = XP(t), \ P(t + 2\pi) = P(t)$$

в виде

$$X = \exp At \cdot N(t),$$

где A — матрица постоянная и $N(t)$ — периодическая. Показывается, как может решаться в некоторых случаях проблема Флоке на основе методов решений проблемы П—Л-Д при помощи некоторых общих соображений, высказанных Ляпуновым. Здесь упрощаются некоторые формулы, полученные Лаппо-Данилевским, и указывается, что в этих вопросах может иметь значение полученная им показательная подстановка специальной интегральной матрицы.

В § 29 указываются некоторые общие признаки ограниченности и неограниченности и периодичности решений линейных систем двух дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

В § 30 рассматривается вопрос об ограниченности и периодичности решений систем дифференциальных уравнений, изученных в § 3 и 4.

В § 31 исследуются вопросы ограниченности и периодичности решений системы двух дифференциальных уравнений.

Рассматривается пример. При помощи особой показательной подстановки Лаппо-Данилевского находится связь между параметрами системы, при которой имеется периодическое решение с заданным периодом (равным или кратным периоду матрицы коэффициентов). Приближенно и строится такое периодическое решение.

В § 32 иначе находятся условия периодичности решений системы, рассмотренной в § 3.

В § 33 изучается уравнение

$$\ddot{x} + p(t)x = 0, \; p(t+1) = p(t). \tag{33.1}$$

Следуя Ляпунову, мы здесь исследуем вопрос об ограниченности решений этого уравнения. Для случая, когда имеется однопараметрическое семейство решений, обладающих свойством $x \to 0$ при $t \to \infty$, находится все множество начальных значений $x(0)$, $x'(0)$ таких решений. Находятся характеристические числа решений этого уравнения.

В § 34 устанавливаются условия, при которых все решения уравнения (33.1) будут ограничены, и условия, при которых имеются периодические решения, находится все множество начальных значений периодических решений.

В § 35 находится область значений параметров ε, μ, λ, входящих в уравнение

$$\ddot{x} + P(t, \varepsilon, \mu, \lambda)x = 0,$$

которой соответствуют периодические решения с периодом, соизмеримым с периодом функции $P(t, \varepsilon, \mu, \lambda)$. Даются методы построения этих решений. Доказывается, что периодические решения системы n уравнений

$$\frac{dX}{dt} = XP(t, \varepsilon), \; P(t+2\pi, \varepsilon) = P(t, \varepsilon)$$

можно представить в виде рядов по положительным степеням ε, сходящимся в той же области, в какой сходится ряд

$$P(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t)\, \varepsilon^k.$$

Отсюда получается область сходимости рядов, представляющих периодические решения системы n уравнений

$$\frac{dX}{dt} = XP(t, \mu, \varepsilon),$$

где μ определяется как функция ε таким образом, чтобы периодические решения существовали.

В § 36 доказывается, что система двух линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = xP(t)$$

с периодической матрицей $P(t) = P(t+\omega)$ не имеет решений с периодом, несоизмеримым с периодом ω. Этим показано, что в предыдущих параграфах найдены все периодические решения уравнения. Установлено, что это утверждение не имеет места для системы n уравнений при $n > 2$. Показано, как найти у такой системы условия, при которых она не имеет (или имеет) периодические решения с периодом, несоизмеримым с периодом матрицы $P(t)$. Рассмотрен вопрос о периодических решениях линейных систем с непериодической матрицей коэффициентов.

В § 37, следуя Ляпунову, мы приводим способы решения вопросов существования ограниченных и периодических решений уравнения

$$\ddot{x} + p(t)x = 0$$

со знакопеременной периодической функцией $p(t)$.

В § 38 излагается преобразование В. М. Старжинского, переводящее систему двух линейных однородных дифференциальных уравнений с периодической матрицей коэффициентов в уравнение $\ddot{x} + p(t)x = 0$ с периодической функцией $p(t) \geqslant 0$.

В § 39 и 40 строится преобразование системы двух линейных дифференциальных уравнений с периодической матрицей коэффициентов, переводящее эту систему в каноническую с периодической матрицей коэффициентов.

В § 41 делается замечание о преобразовании системы n линейных уравнений в каноническую систему.

В § 42 выводятся необходимые и достаточные условия, при выполнении которых корни полинома с вещественными коэффициентами будут расположены на единичной окружности. Дается способ установления наличия корней этого полинома внутри единичной окружности.

В § 43 исследуется поведение корней полинома как функций параметра ε, входящего в коэффициенты полинома. Указываются условия, при которых корни полинома будут находиться на единичной окружности при малых ε, если они находились на единичной окружности при $\varepsilon = 0$. Дается метод нахождения всей области изменения ε на вещественной оси, в которой эти корни будут оставаться на единичной окружности.

В § 44 рассматривается система линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = XP(t, \varepsilon), \; P(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t)\,\varepsilon^k, \tag{44.1}$$

где матрицы $P(t+2\pi) = P(t)$. Даются способы нахождения условий, при которых интегральная матрица системы (44.1) обладает свойством $X(t) \to 0$ при $t \to \infty$ или будет ограниченной колеблющейся. Рассматриваются каноническая и неканоническая системы (44.1). Эти вопросы решаются на основании интегральной матрицы, т. е. при их решении не появляется показательной подстановки, как это было в предыдущих параграфах. Поэтому все ряды по степеням ε, при помощи которых решаются все эти вопросы, сходятся в той же области, в которой сходится и ряд в системе (44.1).

В § 45 такими же методами решается вопрос о том, когда интегральная матрица $X(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Здесь используется и работа И. С. Аржаных [70] о нахождении условий, которым следует подчинить параметры системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = XP(t, \mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon),$$

где матрица $P(t+2\pi, \mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon) = P(t, \mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon)$, чтобы интегральная матрица $X(t)$ была ограниченной колеблющейся. Причем теперь эту систему мы можем не предполагать канонической. Метод решения этого вопроса такой же, как в § 44, 45.

В § 46 дан другой метод решения задачи Н. А. Артемьева.

В § 47 делаются некоторые извлечения из [32] по теории неявных функций, а именно рассматривается неявная функция $y = y(x)$, определенная уравнением

$$P_m(x, y) + P_{m+1}(x, y) + \ldots = 0, \tag{47.40}$$

где $P_k(x, y)$ — однородные полиномы k-ой степени с вещественными коэффициентами и ряд (47.40) сходится в окрестности точки $x = 0$, $y = 0$. Выясняются необходимые и достаточные условия существования вещественных функций $y \to 0$ при $x \to 0$, удовлетворяющих уравнению. Находятся все такие решения. Определяется вся область сходимости рядов, представляющих такие функции. Доказывается, что все функции $y = y(x)$, определяемые уравнением (47.40), в области сходимости ряда (47.40) не имеют таких особых точек $x = \overset{*}{x}$, что при $x \to \overset{*}{x}$ функция $y(x)$ не имеет предела.

В § 48 и 49 полностью изучены неявные функции $x = x(z)$, $y = y(z)$, определяемые уравнениями (48.4) и (48.5).

В работе [32] рассматриваются неявные функции $x(z)$, $y(z)$, определяемые и такими равенствами

$$\Phi(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0,$$

где функции $\Phi(x, y, z)$, $F(x, y, z)$ не являются голоморфными в окрестности точки $x = y = z = 0$. Например, это рассматривается в § 2 и 5 [32]. Здесь мы это не затрагиваем, хотя и эти случаи имеют отношение к содержанию настоящей книги при изучении дифференциальных уравнений, правые части которых удовлетворяют некоторым соответствующим предположеииям.

В этой работе мы не затронули вопросы точных разложений (таких, например, как в [76—78]) и вопросы асимптотики линейных дифференциальных уравнений (как, например, в [45]).

§ 1. ФУНКЦИЯ ОТ ОДНОЙ МАТРИЦЫ

В этой работе мы будем пользоваться матричным исчислением, поэтому изложим сначала некоторые факты, относяшиеся к теории функций от матрицы[1]. Мы считаем, что алгебра матриц и приведение их к каноническому виду читателю известны. Будем рассматривать только квадратные матрицы.

Функция $f(A)$ от матрицы A называется аналитической в том случае, когда ее можно представить в окрестности матрицы $a\mathrm{I}$, где a — число и I — единичная матрица, в виде ряда Тейлора с численными (скалярными) коэффициентами, т. е.

$$f(A)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(A-a\mathrm{I})^k, \tag{1.1}$$

причем α_k — числа (может быть комплексные). Функция $f(A)$ называется целой, если ряд (1.1) сходится при всех конечных значениях матрицы A. Если A есть матрица, то под матрицей $\exp A=e^A$, по определению, понимают сумму матричного ряда:

$$\exp A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k. \tag{1.2}$$

Заметим, что ряд (1.2) сходится при всякой матрице A, элементы которой суть комплексные числа, т. е. ряд (1.2) целый.

Аналитическая функция $f(A)$ обладает свойством

$$f(SAS^{-1})=Sf(A)S^{-1}, \tag{1.3}$$

где S — произвольная матрица с определителем $D(S)$, отличным от нуля. Это следует из равенства

$$[SAS^{-1}]^k=SA^kS^{-1}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

[1] См. также [1 — 3].

Запишем характеристическое уравнение матрицы A порядка n

$$(-1)^n D(A-\lambda I) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \quad (1.4)$$

Здесь a_k ($k=1, 2, \ldots, n$) суть с точностью до знака известные из алгебры основные симметрические функции от характеристических чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A и в то же время a_k — полиномы от элементов матрицы A.

Известно, что характеристическое уравнение матрицы SAS^{-1} совпадает с (1.4) при произвольной матрице S с $D(S) \neq 0$.

Основные симметрические функции от $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ будем называть инвариантами матрицы A.

Если в ряде (1.1) α_k и a суть некоторые симметрические функции от $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то $f(A)$, очевидно, также обладает свойством (1.3).

Если же α_k и a зависят от $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, но не являются симметрическими функциями, то $f(A)$ в формуле (1.1) вообще определено только тогда, когда введено условие о том, как нумеруются характеристические числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Это условие нумерации может быть и таким, что и для несимметрических функций $\alpha_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ свойство (1.3) сохраняется. Например, это будет, если числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ нумеруются по их каким-нибудь числовым свойствам. Если же они будут нумероваться в порядке их расположения в канонической форме матрицы $A = SJS^{-1}$, то их нумерация будет зависеть от выбора матрицы S, а тогда матрица $f(A)$ уже не будет иметь свойства (1.3).

Известна формула Лагранжа, позволяющая аналитическую функцию от матрицы $f(A)$ представить в виде полинома от матрицы A. В случае, когда характеристические числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A различны, эта формула имеет вид

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(A-\lambda_1)\ldots(A-\lambda_{k-1})(A-\lambda_{k+1})\ldots(A-\lambda_n)}{(\lambda_k-\lambda_1)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\ldots(\lambda_k-\lambda_n)} f(\lambda_k). \quad (1.5)$$

При всех остальных предположениях относительно характеристических чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ для $f(A)$ строится также полином степени не выше $n-1$, который получается, например, предельным переходом из (1.5). Можно, однако, всегда этот полином построить таким[1], что степень его будет на единицу меньше суммы наивысших порядков элементарных делителей, принадлежащих различным характеристическим числам матрицы A. Таким образом, если матрица A имеет, например, лишь одно характеристическое число и высший

[1] См. также § 6 гл. IV и § 1, 2 гл. V работы Ф. Р. Гантмахера [3].

порядок элементарного делителя равен двум, то для $f(A)$ можно построить полином первой степени от A.

Мы такие полиномы минимальной степени $P(A)$ для $f(A)$ получим следующим образом. Пусть дана матрица порядка n

$$A = SJS^{-1}, \tag{1.6}$$

где J — квазидиагональная каноническая матрица:

$$J = [J_{\rho_1}(\lambda_1), J_{\rho_2}(\lambda_2), \ldots, J_{\rho_m}(\lambda_m)], \quad \rho_1 + \ldots + \rho_m = n$$

и $J_\rho(\lambda)$ — жорданова матрица ρ-порядка, элементы[1] $\{J_\rho(\lambda)\}_{kl}$ которой определяются равенствами

$$\{J_\rho(\lambda)\}_{kk} = \lambda, \quad \{J_\rho(\lambda)\}_{k+1, k} = 1$$

и

$$\{J_\rho(\lambda)\}_{kl} = 0, \text{ если } (k-l)(k-l-1) \neq 0.$$

Если имеем матрицу

$$f(A) = \sum_{k=0}^{n-1} A^k \varphi_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = P(A), \tag{1.7}$$

где φ_k — численные симметрические функции и $P(A)$ — полином минимальной степени для $f(A)$, то на основании (1.3) и

$$f(J) = \sum_{k=0}^{n-1} J^k \varphi_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = P(J). \tag{1.8}$$

Но для аналитической функции $f(J)$ имеет место формула Лаппо-Данилевского [1, стр. 43]

$$f(J) = [G_{\rho_1}(f(\lambda_1)), \ldots, G_{\rho_m}(f(\lambda_m))], \tag{1.9}$$

где матрица $G_\rho(f(\lambda))$ порядка ρ определяется следующим образом:

$$G_\rho(f(\lambda)) = \begin{Vmatrix} f(\lambda) & 0 & 0 \ldots & 0 \\ \frac{f'(\lambda)}{1!} & f(\lambda) & 0 \ldots & 0 \\ \frac{f''(\lambda)}{2!} & \frac{f'(\lambda)}{1!} & f(\lambda) \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{f^{(\rho-1)}(\lambda)}{(\rho-1)!} & & \ldots \frac{f'(\lambda)}{1!} & f(\lambda) \end{Vmatrix}.$$

[1] Через $\{B\}_{kl}$ мы обозначаем элемент матрицы B, стоящий в k-строчке и l-столбце.

В частности,

$$P(J) = [G_{\rho_1}(P(\lambda_1)), \ldots, G_{\rho_m}(P(\lambda_m))]. \qquad (1.10)$$

Так как на основании (1.8) $f(J) = P(J)$, то мы имеем

$$G_{\rho_k}(f(\lambda_k)) = G_{\rho_k}(P(\lambda_k)) \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \qquad (1.11)$$

Замечание 1.1. Если $\lambda_1 = \lambda_2$ и $\rho_1 \geqslant \rho_2$, то из

$$G_{\rho_1}(f(\lambda_1)) = G_{\rho_1}(P(\lambda_1))$$

следует

$$G_{\rho_2}(f(\lambda_2)) = G_{\rho_2}(P(\lambda_2)),$$

что видно из структуры этих матриц.

Пусть теперь имеем матрицу порядка n

$$J = [J_{\rho_1}(\lambda_1), \ldots, J_{\rho_m}(\lambda_m)], \; \rho_1 + \ldots + \rho_m = n$$

с различными $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Из равенств (1.11) получаем систему линейных уравнений для нахождения коэффициентов $\varphi_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ полинома Лагранжа, входящих в формулу (1.7),

$$f^{(k)}(\lambda_\nu) = P^{(k)}(\lambda_\nu) \qquad (1.11_1)$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, \rho_\nu - 1; \; \nu = 1, 2, \ldots, m).$$

Определитель $\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ из коэффициентов при неизвестных $\varphi_{n-1}, \varphi_{n-2}, \ldots, \varphi_1, \varphi_0$ составлен следующим образом. Первая строчка имеет вид $1, \lambda_1, \lambda_1^2, \ldots, \lambda_1^{n-1}$. Затем следуют $\rho_1 - 1$ строчек, которые получаются последовательным $(\rho_1 - 1)$-кратным дифференцированием первой строчки. Остальные характеристические числа $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$ образуют соответственно также $\rho_2, \ldots, \rho_m$ строчек. Таким образом,

$$\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \ldots & & \lambda_1^{n-1} \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 \ldots & & (n-1)\lambda_1^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & & (n-1)\ldots(n-\rho_m+1)\lambda_m^{n-\rho_m} \end{vmatrix}.$$

Можно показать, что

$$\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = a(\lambda_1 - \lambda_2)^{\rho_1\rho_2}(\lambda_1 - \lambda_3)^{\rho_1\rho_3} \ldots (\lambda_{m-1} - \lambda_m)^{\rho_{m-1}\rho_m}, \qquad (1.11_2)$$

где a — постоянное число, не зависящее от $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

Следовательно, $\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq 0$, и все коэффициенты[1] $\varphi_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ полинома Лагранжа будут найдены через

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_m \text{ и } f^{(k)}(\lambda_\nu) \quad (\nu = 1, \ldots, m;\ k = 0, 1, \ldots, \rho_\nu - 1).$$

В силу замечания 1.1 построенный полином Лагранжа будет пригоден и для того случая, когда в $f(A)$ матрица A будет как угодно высокого порядка, бо́льшего n, но будет иметь лишь характеристические числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, которым соответствуют группы элементарных делителей, порядок которых не превосходит соответственно $\rho_1, \ldots, \rho_m$.

Таким образом, мы построили полином Лагранжа наименьшей степени для функции от матрицы $f(A)$.

Такое построение формулы Лагранжа возможно и для функции от матрицы A, имеющей вид

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(A) A^k, \tag{1.12}$$

где $\alpha_k(A)$ — функции от инвариантов матрицы A, т. е. $\alpha_k(A$ суть симметрические функции от характеристических чисел матрицы[2] A. Это следует из того, что такая функция $f(A)$ обладает свойством (1.3).

Следствие из замечания 1.1. Из замечания 1.1 следует, что полином Лагранжа степени $n-1$ для произвольной матрицы A порядка n можно построить так. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — различные характеристические числа матрицы A, которым соответствуют группы элементарных делителей порядков соответственно $\rho_1^{(1)}, \ldots, \rho_{k_1}^{(1)}, \ldots, \rho_1^{(m)}, \ldots, \rho_{k_m}^{(m)}$. Мы возьмем каноническую матрицу J с различными характеристическими числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, каждому из которых соответствует один элементарный делитель порядка соответственно $\rho_1^{(1)} + \ldots + \rho_{k_1}^{(1)}; \ldots; \rho_1^{(m)} + \ldots + \rho_{k_m}^{(m)}$. В соответствии с замечанием 1.1 полином Лагранжа степени $n-1$, построенный для этой матрицы J, согласно формуле (1.7), где знаменатели коэффициентов $\varphi_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ даются формулой (1.11_2), и будет пригоден для матрицы A.

Обращаем внимание читателя на следующее обстоятельство. Записывая для $f(A)$ полином Лагранжа в том случае,

---

[1] Если $\rho_1 = \rho_2$, то $\varphi_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ относительно λ_1, λ_2 — симметрическая функция, что видно из уравнений (1.11_1). Поэтому если $\rho_1 = \ldots = \rho_\nu$, то $\varphi_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ и относительно $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$ — симметрическая функция (если $\rho_1 = \rho_2$ нечетные, то, переставляя λ_1, λ_2, мы как в $\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, так и в числителе $\varphi_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ изменим знак).

[2] Здесь под инвариантами понимается произвольная симметрическая функция.

когда все характеристические числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A различные, в виде

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n-1} A^k \varphi_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \tag{1.13}$$

мы видим, что коэффициенты $\varphi_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ суть симметрические[1] функции от $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Это позволяет во многих случаях выразить коэффициенты φ_k непосредственно через инварианты матрицы A, т. е. непосредственно через элементы матрицы A. При такой записи $f(A)$ мы избегаем необходимости вычислять корни полинома степени n, что важно во многих случаях. Этим обстоятельством мы далее воспользуемся, в частности при нахождении решения системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Элементы матрицы A мы будем обозначать через a_{kl}, где k — номер строчки, а l — номер столбца, в которых стоит элемент a_{kl}. Матрицу A иногда будем обозначать через $\|a_{kl}\|$. При таком обозначении матрица $\|r\|$ имеет все элементы, равные r. $|A|$ есть матрица, элементы которой равны модулям соответствующих элементов матрицы A. Неравенство $|A| \leqslant B$ означает, что модули элементов матрицы A не превосходят соответствующих элементов матрицы B с положительными элементами.

Известно [1], что если численный ряд от комплексной переменной z $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$ имеет радиус сходимости ρ, то ряд от матрицы A $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k$ сходится абсолютно при $|A| < \left\| \frac{1}{n} \rho \right\|$, где n — порядок матрицы A. Вообще же этот ряд сходится при таких матрицах A, характеристические числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ которых находятся в круге сходимости $f(z)$. Если функция от матрицы A задана рядом (1.1) в окрестности матрицы $a\mathrm{I}$ (или в окрестности нулевой матрицы, если $a = 0$), то значения $f(A)$ при других значениях матрицы A получаются аналитическим продолжением n^2 рядов от элементов матрицы A.

---

[1] Из подстрочного замечания на стр. 17 видим, когда и при кратных х. ч. $\varphi_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ будут симметрическими функциями от $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Формула Лагранжа и позволяет осуществить это аналитическое продолжение при помощи аналитического продолжения лишь n функций от одного переменного $f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)$.

Для матрицы A второго порядка формула Лагранжа имеет вид

$$f(A) = \frac{\lambda_2 f(\lambda_1) - \lambda_1 f(\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{f(\lambda_2) - f(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} A. \quad (1.14)$$

Если $f(A) = \exp At$, то

$$\exp At = \frac{\exp \lambda_1 t - \exp \lambda_2 t}{\lambda_1 - \lambda_2} A + \\ + \frac{\lambda_1 \exp \lambda_2 t - \lambda_2 \exp \lambda_1 t}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (1.14_1)$$

Если λ_1 и λ_2, оставаясь на одной плоскости Римана функции $f(\lambda)$, стремятся к одному и тому же значению λ, не особенному для $f(\lambda)$, то (1.14) переходит в выражение

$$f(A) = f(\lambda) \cdot \mathrm{I} - \lambda f'(\lambda) \cdot \mathrm{I} + f'(\lambda) A. \quad (1.15)$$

Запишем еще формулу Лагранжа в виде (1.13) для матрицы A третьего порядка

$$f(A) = \varphi_2 A^2 + \varphi_1 A + \varphi_0, \quad (1.16)$$

где

$$\varphi_2 \Delta = (\lambda_1 - \lambda_2) f(\lambda_3) + (\lambda_2 - \lambda_3) f(\lambda_1) + (\lambda_3 - \lambda_1) f(\lambda_2),$$

$$\varphi_1 \Delta = -[(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) f(\lambda_3) + (\lambda_2^2 - \lambda_3^2) f(\lambda_1) + (\lambda_3^2 - \lambda_1^2) f(\lambda_2)],$$

$$\varphi_0 \Delta = \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2) f(\lambda_3) + \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_2 - \lambda_3) f(\lambda_1) + \lambda_3 \lambda_1 (\lambda_3 - \lambda_1) f(\lambda_2),$$

$$\Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3).$$

В соответствии со сказанным выше как в формуле (1.14), так и в (1.16) коэффициенты при всех степенях матрицы A суть симметрические функции от характеристических чисел матрицы A. Предположим, что функция $f(z)$ многозначная. Тогда при $A \to A_0$ предельное значение $f(A)$ определяется, как мы сейчас увидим, не только значением A_0, но и тем путем в пространстве элементов матрицы A, по которому $A \to A_0$.

Пусть $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0$ суть характеристические числа матрицы A_0. Если все $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0$ различны и $f(\lambda_k^0)$ при $k = 1, \ldots, n$ конечны, то предельное значение $f(A_0)$, как видно из формулы Лагранжа, будет конечное. Если среди $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0$ имеются числа равные, но расположенные на одной плоскости Римана функции $f(z)$, то $f(A_0)$ при наличии конечных производных соответствующего порядка от $f(z)$ также конечное и выражается соответствующей формулой Лагранжа; например, в случае матриц второго порядка мы получим (1.15).

Предположим теперь, что среди характеристических чисел $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0$ имеются равные и расположенные на разных листах поверхности Римана[1] функции $f(z)$. Тогда предельная матрица

$$f(A_0) = \| f_{kl}(A_0) \|$$

может иметь некоторые (или все) из элементов $f_{kl}(A)$ бесконечные; если же $f(A_0)$ — матрица конечная, то предельное значение, как показал Лаппо-Данилевский, будет зависеть не только от матрицы A_0 и $f(\lambda_1^0), \ldots, f(\lambda_n^0)$, но и от произвола той матрицы S, которая приводит матрицу A_0 к каноническому виду (1.6). Это предельное значение можно получить при помощи предельного перехода в формуле Лагранжа.

Пусть матрица A имеет вид

$$A = S[\lambda_1, \ldots, \lambda_n] S^{-1}.$$

Тогда, согласно формулам (1.3), (1.5) и (1.9), имеем

$$f(A) = S[f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)] S^{-1} = P(A, f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)), \quad (1.17)$$

где $P(A, f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n))$ — полином Лагранжа.

Предположим, что матрица A приближается к A_0 таким образом, что вблизи матрицы A_0 имеем

$$f(A) = S[f(\lambda_1) + \alpha_1, \ldots, f(\lambda_n) + \alpha_n] S^{-1} =$$

$$= S[f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)] S^{-1} + S[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] S^{-1}$$

или

$$f(A) = P(A, f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)) + P(A, \alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad (1.18)$$

где $f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)$ — значения $f(z)$ на исходном листе поверхности Римана вблизи точек $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0$. При $A \to A_0$, когда некоторые из характеристических чисел $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0$ совпадают, полином $P(A, f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n))$ стремится к предельной форме полинома Лагранжа, а $P(A, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ может стремиться

[1] То есть имеются такие $\lambda_k^0 = \lambda_l^0$, что, например, $f(\lambda_k^0) \neq f(\lambda_l^0)$.

к такой матрице, значение которой зависит от произвола матрицы S. Такие значения $f(A)$, следуя Лаппо-Данилевскому, назовем иррегулярными.

Вообще, пусть

$$A = S\,[J_{\rho_1}(\lambda_1), \ldots, J_{\rho_m}(\lambda_m)]\,S^{-1}.$$

Тогда имеем

$$f(A) = S\,[f(J_{\rho_1}(\lambda_1)), \ldots, f(J_{\rho_m}(\lambda_m))]\,S^{-1} =$$
$$= S\,[G_{\rho_1}(f(\lambda_1)), \ldots, G_{\rho_m}(f(\lambda_m))]\,S^{-1}.$$

Если здесь $f(\lambda_k) = f(\lambda_l)$ при $\lambda_k = \lambda_l$, то $f(A)$ — регулярное значение. Если $f(\bar{z}) = f(z) + \alpha$ есть[1] значение $f(z)$ на произвольном листе Римана, то $f^{(k)}(\bar{z}) = f^{(k)}(z)$, где $\bar{z}$ есть координата z на рассматриваемом листе Римана. Тогда общее значение

$$f(A) = S\,[f(J_{\rho_1}(\lambda_1)), \ldots, f(J_{\rho_m}(\lambda_m))]\,S^{-1} +$$
$$+ S\,[\alpha_1 \mathrm{I}_{\rho_1}, \ldots, \alpha_m \mathrm{I}_{\rho_m}]\,S^{-1}, \qquad (1.18_1)$$

где I_ρ — единичная матрица ρ-порядка. Если $\alpha_k \neq \alpha_l$ при $\lambda_k = \lambda_l$, то $f(A)$, по определению, — иррегулярное значение и зависит от выбора S.

Пусть матрица A второго порядка. Тогда на основании (1.14) и (1.18) имеем

$$f(A) = P(A, f(\lambda_1), f(\lambda_2)) + P(A, \alpha_1, \alpha_2), \qquad (1.19)$$

где

$$P(A, f(\lambda_1), f(\lambda_2)) = \frac{\lambda_2 f(\lambda_1) - \lambda_1 f(\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{f(\lambda_2) - f(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} A$$

и

$$P(A, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{\lambda_2 \alpha_1 - \lambda_1 \alpha_2}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\lambda_2 - \lambda_1} A.$$

Полагая

$$A = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}, \qquad (1.20)$$

мы будем иметь

$$P(A, f(\lambda_1), f(\lambda_2)) =$$
$$= \begin{Vmatrix} \dfrac{(a-\lambda_1) f(\lambda_2) - (a-\lambda_2) f(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1}, & b\,\dfrac{f(\lambda_2) - f(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} \\[2ex] c\,\dfrac{f(\lambda_2) - f(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1}, & \dfrac{(d-\lambda_1) f(\lambda_2) - (d-\lambda_2) f(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{Vmatrix}. \qquad (1.21)$$

[1] α — постоянная.

Заменяя здесь $f(\lambda_1)=\alpha_1$, $f(\lambda_2)=\alpha_2$, получим $P(A, \alpha_1, \alpha_2)$.

Возьмем частный случай матрицы (1.20)

$$A=S\begin{Vmatrix} a+b & b \\ 2b & a \end{Vmatrix}S^{-1}.$$

Тогда $\lambda_1=a-b$, $\lambda_2=a+2b$ и матрица $P(A, \alpha_1, \alpha_2)$ имеет вид

$$P(A, \alpha_1, \alpha_2)=S\begin{Vmatrix} \dfrac{2\alpha_2+\alpha_1}{3} & \dfrac{\alpha_2-\alpha_1}{3} \\ 2\dfrac{\alpha_2-\alpha_1}{3} & \dfrac{\alpha_2+2\alpha_1}{3} \end{Vmatrix}S^{-1}.$$

При $b\to 0$ имеем:

$$\lambda_1\to a,\ \lambda_2\to a \text{ и } A\to A_0=a\mathrm{I}.$$

Пусть при этом $\alpha_1\to m_1$, $\alpha_2\to m_2\neq m_1$, а матрица S фиксирована, тогда предельное значение $f(A_0)$ имеем, согласно (1.15), в виде

$$f(A_0)=f(a)\mathrm{I}-af'(a)\mathrm{I}+f'(a)a\mathrm{I}+$$
$$+S\begin{Vmatrix} \dfrac{2m_2+m_1}{3} & \dfrac{m_2-m_1}{3} \\ 2\dfrac{m_2-m_1}{3} & \dfrac{m_2+2m_1}{3} \end{Vmatrix}S^{-1}$$

или

$$f(A_0)=f(a)\mathrm{I}+S\begin{Vmatrix} \dfrac{2m_2+m_1}{3} & \dfrac{m_2-m_1}{3} \\ 2\dfrac{m_2-m_1}{3} & \dfrac{m_2+2m_1}{3} \end{Vmatrix}S^{-1}. \qquad (1.22)$$

Второе слагаемое есть такая матрица R, которая зависит от выбора матрицы S, приводящей матрицу $A_0=a\mathrm{I}=Sa\mathrm{I}S^{-1}$ к канонической форме.

Характеристические числа матрицы R суть m_1 и m_2, поэтому, изменяя значение матрицы S, матрицу R можно записать и так: $R=S\,[m_1, m_2]\,S^{-1}$.

Следовательно, формулу (1.22) можно записать в виде

$$f(A_0)=f(a)\mathrm{I}+S\,[m_1, m_2]\,S^{-1}, \qquad (1.23)$$

где S — произвольная матрица с определителем, отличным от нуля.

В том случае, когда λ_1 и λ_2 стремятся к значению a, оставаясь на одном листе поверхности Римана функции $f(z)$, имеем $m_1 = m_2 = m$ и $R = mI$, т. е. $f(A_0)$ уже не будет зависеть от матрицы S.

Формула (1.23) получается и из (1.17) при

$$f(\lambda_1) = f(a) + m_1,\ f(\lambda_2) = f(a) + m_2.$$

При этом путь $A \to aI$ берется другой, так как в этом случае

$$A = S \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix} S^{-1}$$

и S фиксировано, в то время как при получении (1.22) мы имеем

$$A = S \begin{Vmatrix} a+b & b \\ 2b & a \end{Vmatrix} S^{-1} \to S \begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{Vmatrix} S^{-1}$$

при $b \to 0$ и, следовательно, матрица, преобразующая матрицу A к канонической форме, изменяется (вместе с b).

Следует заметить, однако, что в пространстве элементов матрицы A имеется и такой путь $A \to A_0$, при котором матрица $f(A)$ имеет некоторые элементы, стремящиеся к бесконечности.

Если λ_1, λ_2 стремятся к одному значению λ таким образом, что λ_1, λ_2 остаются на разных листах поверхности Римана функции $f(z)$ (например, сохраняется неравенство $f(\lambda_1) \neq f(\lambda_2)$ и при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$) и предельная матрица A имеет вид

$$A_0 = \begin{Vmatrix} \lambda & 0 \\ p & \lambda \end{Vmatrix},$$

где $p \neq 0$, т. е. характеристическому числу λ соответствует непростой элементарный делитель, то некоторые из элементов матрицы $f(A)$ всегда стремятся к бесконечности[1]. Отсюда следует, что предельная форма полинома Лагранжа (1.15) доставляет все конечные значения матрицы $f(A_0)$ или $f(SA_0S^{-1})$. Эти два последних утверждения следуют из формулы (1.21). На основании (1.19) и (1.21) легко видеть, что для многозначной функции $f(z)$ формула (1.23) доставляет все возможные конечные значения матрицы $f(\lambda I)$. Действительно, об-

[1] Это будет всякий раз и в общем случае матрицы порядка n, когда характеристические числа λ_1, λ_2 совпадают по координатам, образуя непростой элементарный делитель, оставаясь, однако, на разных листах поверхности Римана функции $f(z)$ [4]. Такие значения $f(A)$ мы также будем называть иррегулярными.

щее конечное значение матрицы $f(\lambda \mathrm{I})$ имеем, согласно (1.19), в виде

$$f(\lambda \mathrm{I}) = f(\lambda)\mathrm{I} + P(\lambda \mathrm{I},\ m_1,\ m_2),$$

где $P(\lambda \mathrm{I},\ m_1,\ m_2)$ получаем предельным переходом из матрицы

$$P(A,\ \alpha_1,\ \alpha_2) = \left\| \begin{matrix} \dfrac{(a-\lambda_1)\alpha_2-(a-\lambda_2)\alpha_1}{\lambda_2-\lambda_1} & b\,\dfrac{\alpha_2-\alpha_1}{\lambda_2-\lambda_1} \\ c\,\dfrac{\alpha_2-\alpha_1}{\lambda_2-\lambda_1} & \dfrac{(d-\lambda_1)\alpha_2-(d-\lambda_2)\alpha_1}{\lambda_2-\lambda_1} \end{matrix} \right\|,$$

имеющей характеристические числа α_1, α_2, которые и переходят при $A \to \lambda \mathrm{I}$ в m_1, m_2, когда $\alpha_1 \to m_1$, $\alpha_2 \to m_2$.

Если матрица A порядка n, то, очевидно,

$$f(A) \to f(\lambda)\mathrm{I} + S[m_1, \dots, m_n]S^{-1} \text{ при } A \to \lambda \mathrm{I}. \qquad (1.23_1)$$

Отметим еще относительно показательной функции, что

$$\left.\begin{aligned} e^A &= \left\| \begin{matrix} e^{a_1} & 0 \\ 0 & e^{a_2} \end{matrix} \right\|, \quad A = \left\| \begin{matrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{matrix} \right\| \\ e^A &= \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{matrix} \right\|, \quad A = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{matrix} \right\| \\ e^A &= \left\| \begin{matrix} e^a & 0 \\ e^a & e^a \end{matrix} \right\|, \quad A = \left\| \begin{matrix} a & 0 \\ 1 & a \end{matrix} \right\| \end{aligned}\right\}. \qquad (1.24)$$

Если матрицы A и B коммутируют, т. е.

$$AB = BA, \qquad (1.25)$$

то $e^{A+B} = e^A e^B$.

Если определитель матрицы A отличен от нуля, то

$$\ln A = B \qquad (1.26)$$

определяется как решение уравнения

$$e^B = A. \qquad (1.27)$$

Главное значение $\ln A$ *обращается в нуль при* $A = \mathrm{I}$.

При условии (1.25) имеем ($\ln A$ и $\ln B$ в силу (1.30) коммутируют)

$$\ln AB = \ln A + \ln B. \qquad (1.28)$$

Отсюда $\quad \ln Y^{-1} = -\ln Y + S[m_1, \dots, m_n]S^{-1}2\pi i$

и, в частности, $\ln Y^{-1} = -\ln Y$ при соответствующем значении $\ln$ справа и слева. Здесь m_k — целые числа.

В окрестности $A = \mathrm{I}$ имеет место разложение

$$\ln A = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{(A-\mathrm{I})^{\nu}}{\nu}, \tag{1.29}$$

доставляющее главное значение $\ln A$. Если характеристические числа матрицы A $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ различны, то по формуле Лагранжа

$$\ln A = \sum \frac{(A-\lambda_1)\ldots(A-\lambda_{k-1})(A-\lambda_{k+1})\ldots(A-\lambda_n)}{(\lambda_k-\lambda_1)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\ldots(\lambda_k-\lambda_n)} \ln \lambda_k. \tag{1.30}$$

Все значения $\ln A$ мы получаем аналитическим продолжением и предельным переходом на основе этой формулы.

В работе [5] показано, что для $\ln A$ возможно построить такой полином Лагранжа, что коэффициенты этого полинома выражаются непосредственно через инварианты матрицы A. Таким образом, при нахождении $\ln A$ можно избежать отыскания корней характеристического полинома матрицы A.

Найдем этот полином для $\ln A$, следуя рассуждению, использованному в § 1 работы [5].

Обозначим через $x_1, \ldots, x_n$ характеристические числа матрицы X. Тогда, согласно формуле Лагранжа, имеем

$$Y = \ln X = \alpha_{n-1} X^{n-1} + \alpha_{n-2} X^{n-2} + \ldots + \alpha_0, \tag{1.31}$$

где α_l суть рациональные дроби от x_l и $\ln x_l$. Выразим явно α_l через инварианты матрицы X. На основании формул (1.6) и (1.9) видим, что характеристическими числами Y будут $\ln x_l$.

Введем обозначения:

$$\sigma(Z) = \sum_{l=1}^{n} z_l = \sum_{k=1}^{n} z_{kk},$$

где z_l и z_{kk} — соответственно характеристические числа и диагональные элементы[1] матрицы Z;

$$\sigma(X^k) = \sigma_k = \sum_{l=1}^{n} x_l^k \ (k = 0, \ldots, n-1), \quad x_1 \ldots x_n = D(X),$$

где $D(X)$ — определитель матрицы X.

[1] Написанное здесь равенство следует из (1.4).

Из (1.31) мы видим, что матрицы X и Y приводятся к треугольному виду при помощи одной и той же матрицы S. Поэтому будем иметь равенства:

$$
\left.\begin{aligned}
&\sigma(Y) = \ln x_1 \dots x_n = \alpha_{n-1}\sigma_{n-1} + \alpha_{n-2}\sigma_{n-2} + \dots + \alpha_0 n \\
&\sigma(XY) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i = \alpha_{n-1}\sigma_n + \alpha_{n-2}\sigma_{n-1} + \dots + \alpha_0\sigma_1 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\sigma(X^{n-1}Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{n-1} \ln x_i = \alpha_{n-1}\sigma_{2n-2} + \\
&\qquad + \alpha_{n-2}\sigma_{2n-3} + \dots + \alpha_0\sigma_{n-1}
\end{aligned}\right\}. \quad (1.32)
$$

Мы найдем явное выражение левых частей непосредственно через инварианты матрицы X. С этой целью возьмем $\ln x_i$ в виде

$$
\ln x_i = \int_0^1 \frac{(x_i - 1)\,dt}{1 + t(x_i - 1)} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \quad (1.33)
$$

Подставляя это значение в левые части равенств (1.32), получим:

$$
\left.\begin{aligned}
&\sigma(Y) = \ln x_1 \dots x_n = \ln D(X) \\
&\sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i(x_i - 1)\,dt}{1 + t(x_i - 1)} = \\
&\qquad = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - 1)^2 + (x_i - 1)}{1 + t(x_i - 1)}\,dt \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\sum_{i=1}^{n} x_i^l \ln x_i = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^l (x_i - 1)}{1 + t(x_i - 1)}\,dt =
\end{aligned}\right\} \quad (1.34)
$$

$$= \int_0^1 \sum_{l=1}^{n} \Big[(x_l-1)^{l+1} + \frac{l}{1!}(x_l-1)^l + \frac{l(l-1)(x_l-1)^{l-1}}{2!} + \ldots + (x_l-1) \Big] \times$$
$$\times [1+t(x_l-1)]^{-1} dt$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{n-1} \ln x_i = \int_0^1 \sum_{l=1}^{n} \frac{x_l^{n-1}(x_l-1)}{1+t(x_l-1)} dt =$$
$$= \int_0^1 \sum_{l=1}^{n} \frac{(x_l-1)^n + \frac{n-1}{1!}(x_l-1)^{n-1} + \ldots + (x_l-1)}{1+t(x_l-1)} dt \qquad (1.34)$$

Рассмотрим

$$M_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_l-1)^k}{1+t(x_l-1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i-1)^k \prod_{j \neq i} (1+t(x_j-1))}{\sum_{p=0}^{n} t^p S_p}, \qquad (1.35)$$

где S_p — основные симметрические функции от $(x_1-1), \ldots, (x_n-1)$,

$$S_n = \prod_{i=1}^{n} (x_l-1),\ S_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq l} (x_j-1), \ldots, S_1 = \sum_{i=1}^{n} (x_i-1), S_0 = 1.$$

Далее имеем

$$N_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i-1)^k \prod_{j \neq i} (1+t(x_j-1)) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i-1)^k \sum_{\nu=0}^{n-1} t^\nu S_{\nu,i} = \sum_{p=0}^{n-1} t^p A_p^k,\ S_{0i} = 1.$$

Здесь $S_{l,i}$ получается из S_l вычеркиванием членов, содержащих (x_i-1), и

$$A_l^k = \sum_{i=1}^{n} (x_i-1)^k S_{l,i},\ A_0^k = \sum_{i=1}^{n} (x_i-1)^k.$$

Легко видеть, что

$$(x_i - 1) S_{n-1,\,i} = S_n,\ (x_i - 1) S_{l,\,i} = S_{l+1} - S_{l+1,\,i},$$

$$\sum_{i=1}^{n} S_{l,\,i} = S_l\,(n-l)\,.$$

Пользуясь этим, получим:

$$A_{n-1}^k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - 1)^k S_{n-1,\,i} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - 1)^{k-1} S_n =$$

$$= S_n \sum_{i=1}^{n} (x_i - 1)^{k-1} = S_n\,\delta_{k-1},$$

$$A_l^k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - 1)^k S_{l,\,i} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - 1)^{k-1} [S_{l+1} - S_{l+1,\,i}] =$$

$$= S_{l+1}\,\delta_{k-1} - \sum_{i=1}^{n} (x_i - 1)^{k-2} [S_{l+2} - S_{l+2,\,i}] = \tag{1.36}$$

$$= S_{l+1}\,\delta_{k-1} - S_{l+2}\,\delta_{k-2} + \sum_{i=1}^{n} (x_i - 1)^{k-2} S_{l+2,\,i} = \ldots =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{m=1}^{n-l} (-1)^{m+1} S_{l+m}\,\delta_{k-m} & \text{при } n - l < k, \\ \sum\limits_{m=1}^{k} (-1)^{m+1} S_{l+m}\,\delta_{k-m} & \text{при } n - l \geqslant k, \end{cases}$$

причем $\delta_k = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - 1)^k$, а под δ_0 надо понимать $\delta_0 = l + k$, так как

$$A_l^1 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - 1) S_{l,\,i} = \sum_{i=1}^{n} [S_{l+1} - S_{l+1,\,i}] = S_{l+1}(n + 1).$$

Величины δ_k суть целые рациональные функции от S_m ($m = 1, \ldots, n$). Величины же S_m из характеристического уравнения матрицы $(X-I)$ находим как целые рациональные функции от элементов матрицы $(X-I)$.

Таким образом, левые части равенств (1.32) находим в виде (на основании (1.34), (1.35) и (1.36))

$$\sigma(X^l Y) = \int\limits_0^1 \frac{\sum\limits_{k=1}^{l+1}\sum\limits_{p=0}^{n-1} \frac{l(l-1)\dots k}{(l-k+1)!} t^p A_p^k}{\sum\limits_{p=0}^{n} t^p S_p} dt \; (l=1,\dots,n-1), \quad (1.37)$$

где A_p^k суть целые рациональные функции от элементов матрицы $(X-I)$, а тем самым и просто матрицы X.

Определяя теперь величины α_i $(i=0,\dots,n-1)$ из линейной системы (1.32), мы найдем их непосредственно через инварианты матрицы X.

Обозначим определитель из коэффициентов системы (1.32) при неизвестных $\alpha_0, \alpha_1,\dots, \alpha_{n-1}$ через $\Delta(X)=\Delta$. Если $x_1,\dots,x_n$ все различные, то $\Delta(X)\neq 0$. Определитель, полученный из $\Delta(X)$ заменой i-го столбца левыми частями, обозначим $\overline{\Delta}_i$ и через Δ_i — определитель $\overline{\Delta}_i$, в котором величины $\sigma(X^l Y)$ заменены через (1.37). Тогда получим

$$\alpha_i = \frac{\overline{\Delta}_i}{\Delta} = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (i=0,\ 1,\dots,n-1). \qquad (1.38)$$

Окончательно имеем[1]:

$$Y = \ln X = \frac{1}{\Delta}\sum_{i=0}^{n-1} \Delta_i X^i. \qquad (1.39)$$

Заметим, что знаменатель дроби, стоящей под знаком интеграла (1.37), есть $\prod\limits_{i=1}^{n}(1+t(x_i-1))=\sum\limits_{p=0}^{n} t^p S^p$. Поэтому этот знаменатель имеет корни $t_k=(1-x_k)^{-1}$ $(k=1,\dots,n)$. Так как $0\leqslant t\leqslant 1$, то интеграл (1.37) будет вещественным и конечным, если х. ч. матрицы X x_k $(k=1,\dots,n)$ не будут отрицательными. Отсюда следует

Замечание 1.2. $\ln X$, данный формулой (1.39), будет вещественным, если среди характеристических чисел $x_1,\dots,x_n$ нет отрицательных. Если же среди $x_1,\dots,x_n$ имеются отри-

---

[1] Эта формула, согласно следствию из замечания 1.1 (стр. 17), переходит в конечную предельную формулу при кратных $x_1,\dots,x_n$.

цательные, то путь интегрирования (0,1) в (1.37) (или (1.33)) придется взять комплексным. А тогда и $\ln X$, как можно показать, обязательно будет комплексным. Мы этого доказывать здесь не будем, так как убедимся сейчас в этом на основании других соображений.

Для матрицы X второго порядка формула (1.39) имеет вид

$$\ln X = \frac{(S_1+2)\ln D - 2M}{4S_2 - S_1^2} X + \frac{(S_1+2)M - S_1^2 - 2S_1 + 2S_2 - 2}{4S_2 - S_1^2}, \tag{1.40}$$

где

$$S_1 = \sigma - 2,\ S_2 = D - \sigma + 1,\ \sigma = x_1 + x_2,\ D = x_1x_2$$

и

$$M = \int_0^1 \frac{(S_1S_2 + 2S_2)t + S_1^2 - 2S_2 + S_1}{S_2t^2 + S_1t + 1} dt.$$

Для матрицы X третьего порядка имеем:

$$\ln X = \alpha_2 X^2 + \alpha_1 X + \alpha_0, \tag{1.41}$$

где α_2, α_1 и α_0 определяются из уравнений:

$$P_0 = \alpha_2 k_2 + \alpha_1\sigma_1 + 3\alpha_0, \quad k_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2,$$

$$P_1 = \alpha_2 k_3 + \alpha_1 k_2 + \alpha_0\sigma_1, \quad k_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3,$$

$$P_2 = \alpha_2 k_4 + \alpha_1 k_3 + \alpha_0 k_2, \quad k_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2$$

и свободные члены P_0, P_1, P_2 определены равенствами:

$$P_0 = \ln\sigma_3,$$

$$P_1 = \int_0^1 \frac{b_3(b_1+3)t^2 + (b_1b_2 - 3b_3 + 2b_2)t + b_1 + b_1^2 - 2b_2}{1 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3} dt,$$

$$P_2 = \int_0^1 \frac{M_2t^2 + M_1t + M_0}{1 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3} dt,$$

$$M_0 = b_1^3 - 3b_1b_2 + 2b_1^2 + 3b_3 - 4b_2 + b_1,$$

$$M_1 = b_1^2b_2 + 2b_1b_2 - b_1b_3 - 2b_2^2 + 2b_2 - 6b_3,$$

$$M_2 = b_3(b_1^2 + 2b_1 - 2b_2 + 3),$$

$$b_1 = \sigma_1 - 3, \quad b_2 = \sigma_2 - 2\sigma_1 + 3, \quad b_3 = \sigma_3 + \sigma_1 - \sigma_2 - 1.$$

Здесь σ_1, σ_2 и σ_3 суть многочлены от элементов матрицы X, определяемые как коэффициенты характеристического уравнения матрицы X

$$-D(X-\lambda I)=\lambda^3-\sigma_1\lambda^2+\sigma_2\lambda-\sigma_3=0,$$

и в то же время $\sigma_1=x_1+x_2+x_3$, $\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$, $\sigma_3=x_1x_2x_3$, где x_1, x_2, x_3 — характеристические числа матрицы X, т. е. корни уравнения $-D(X-\lambda I)=0$.

Выясним подробнее вид $\ln A$, когда вещественная матрица A имеет отрицательные характеристические числа.

Пусть $A=SBS^{-1}$, где B—квазидиагональная вещественная матрица; $B=[B_1,\ldots,B_k]$ и B_ν ($\nu=1,\ldots,k$) — вещественные квадратные матрицы либо с одним элементарным делителем, соответствующим вещественному характеристическому числу λ_ν, либо с двумя элементарными делителями, соответствующими двум комплексным сопряженным характеристическим числам λ_k, λ_{k+1}. Матрицы S при этом можно считать также вещественными.

На основании (1.3) имеем

$$\ln A=S\,[\ln B_1,\ldots,\ln B_k]\,S^{-1}. \tag{1.42}$$

Значения $\ln B_\nu$ для тех B_ν, которые имеют характеристические числа λ_ν, неравные отрицательным числам, берем[1] вещественными. Пусть теперь B_ν соответствует отрицательному характеристическому числу λ_ν матрицы A. Тогда матрица B_ν имеет только один элементарный делитель и $B_\nu=S_\nu J(\lambda_\nu)S_\nu^{-1}$,

$$\ln B_\nu=S_\nu\ln J(\lambda_\nu)S_\nu^{-1}=S_\nu\ln[-J(\lambda_\nu)\cdot(-1)]S_\nu^{-1}=$$
$$=S_\nu[\ln(-J(\lambda_\nu))+\pi iI]S_\nu^{-1}. \tag{1.43}$$

Здесь S_ν — вещественная матрица с определителем, отличным от нуля, и $\ln(-J(\lambda_\nu))$ — вещественная матрица, так как характеристическое число матрицы $-J(\lambda_\nu)$ будет равно $-\lambda_\nu>0$. Подставляя значение (1.43) в (1.42), мы получим

$$\ln A=A_1+\pi iSL(0,1)S^{-1}, \tag{1.44}$$

где A_1 — вещественная матрица, имеющая характеристические числа, равные $\ln\lambda_\nu$, если λ_ν не равно отрицательному числу, и $\ln(-\lambda_\nu)$, если $\lambda_\nu<0$; $L(0,1)$ — вещественная диагональная матрица порядка n, у которой только на местах, соответствующих корням $\lambda_\nu<0$, стоит 1, а все другие элементы равны нулю. Заметим еще, что, очевидно, матрица A_1 коммутирует с матрицей $\pi iSL(0,1)S^{-1}=i\pi A_2$.

---

[1] По формуле (1.39).

Запишем (1.44) в виде

$$\ln A = A_1 + \pi i A_2. \tag{1.45}$$

Здесь матрица A_2 имеет характеристические числа, равные только нулю и единице. Это значение $\ln A$ назовем *главным*.

Замечание 1.3. Мы могли бы для некоторых отрицательных характеристических чисел λ_ν (или даже для всех) полагать

$$\ln B_\nu = S_\nu [\ln(-J(\lambda_\nu)) - \pi i \mathrm{I}] S_\nu^{-1}.$$

Тогда и в матрице $L(0, 1)$ вместо 1 на соответствующих местах стояли бы -1. Можно было бы, конечно, в случае $\lambda_\nu < 0$ полагать и так:

$$\ln B_\nu = S_\nu [\ln(-J(\lambda_\nu)) + (2n+1)\pi i] S_\nu^{-1} \tag{1.45$_1$}$$

или

$$\ln B_\nu = S_\nu [\ln(-J(\lambda_\nu)) + (2n-1)\pi i] S_\nu^{-1}, \tag{1.45$_2$}$$

где n — целое число (положительное или отрицательное).

Матрицу A_2 можно считать и такой:

$$A_2 = SL[0, 2m, (2n+1), (2n_1-1)] S^{-1}, \tag{1.46}$$

где L — матрица диагональная, элементы которой равны 0 или $2m$, если они соответствуют неотрицательным характеристическим числам, и $(2n+1)$ или $(2n_1-1)$, если соответствуют отрицательным; m, n и n_1 — числа целые. Очевидно, формулы (1.45$_1$), (1.45$_2$) и (1.46) доставляют неглавное значение $\ln A$. Заметим еще, что $\ln A$ — многозначная функция и все значения $\ln a\mathrm{I}$, согласно (1.18) или (1.23$_1$), получаем в виде

$$\ln a\mathrm{I} = \mathrm{I}\ln a + 2\pi i S[m_1, \ldots, m_n] S^{-1}, \tag{1.47}$$

где S^{-1} — произвольная матрица с $D(S) \neq 0$, а $m_1, \ldots, m_n$ — произвольные целые числа. Такие значения $\ln a\mathrm{I}$ при условии, что среди $m_1, \ldots, m_n$ есть неравные, Лаппо-Данилевский, как было отмечено выше, назвал иррегулярными. Если имеем матрицу A второго порядка: $A = a\mathrm{I}$ и $a = 1$, то, полагая $\ln a = \ln 1 = 0$, получим

$$\ln \mathrm{I} = 2\pi i S[m_1, m_2] S^{-1}. \tag{1.48}$$

В частности,

$$\ln \mathrm{I} = 2\pi S \begin{Vmatrix} 0 & -n \\ n & 0 \end{Vmatrix} S^{-1}. \tag{1.49}$$

При произвольной вещественной матрице S эти значения $\ln \mathrm{I}$ будут вещественными.

При $a = -I$, $\ln a = \pi i$ и

$$\ln[-I] = i\pi S[2m_1 + 1,\ 2m_2 + 1]S^{-1}. \tag{1.50}$$

Если S — произвольная вещественная матрица, то

$$\begin{aligned} \ln[-I] &= \pi S \begin{Vmatrix} 0 & -(2n+1) \\ 2n+1 & 0 \end{Vmatrix} S^{-1} = \\ &= \pi i S_1 \begin{Vmatrix} 2n+1 & 0 \\ 0 & -2n-1 \end{Vmatrix} S_1^{-1} \end{aligned} \tag{1.51}$$

имеет вещественное значение.

Замечание 1.4. Если матрица A имеет четное число отрицательных характеристических чисел, то на основании, например[1], (1.51) можно в (1.43), (1.44) и (1.45) мнимую часть $\ln A$ полагать равной нулю. Но при этом мы будем иметь неглавное (и иррегулярное) значение $\ln A$.

В заключение этого параграфа отметим, что функцию $f(A)$ от матрицы A можно определять, пользуясь, например, формулой Лагранжа

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n-1} A^k \varphi_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n). \tag{1.52}$$

Здесь скалярные функции $\varphi_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ определяются через $f(z)$ и ее производные в окрестности характеристических чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A. Именно так определяет $f(A)$ Ф. Р. Гантмахер [3]. Мы имеем здесь, таким образом, значения $f(A)$, когда $f(z)$ вместе с соответствующими производными (которые возникают при построении формулы Лагранжа) определена в окрестности характеристических чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ или, как говорит Ф. Р. Гантмахер, $f(A)$ определена на спектре матрицы A. Заметим, что здесь в окрестности каждого характеристического числа λ_k можно брать свою $f_k(z)$, т. е. $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ не обязательно являются элементами одной аналитической функции $f(z)$.

§ 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Пусть $f(z)$ — аналитическая, вообще говоря, многозначная функция, голоморфная в окрестности точек $a_k (k = 1, \ldots, n)$. Предположим, что ряд

---

[1] Так как $\ln J(\bar{\lambda}_\nu) = \ln(-J(\lambda_\nu)) + \ln(-1 \cdot I_{2m}) = \ln(-J(\lambda_\nu)) + [\ln(-1 \cdot I_2), \ldots, \ln(-1 \cdot I_2)]$. Здесь $\ln(-1 \cdot I_2)$ дается формулой (1.51) и матрица $[\ln(-1 \cdot I_2), \ldots, \ln(-1 \cdot I_2)]$ — квазидиагональная m-го порядка.

$$X=\sum_{k=0}^{\infty} X_k \varepsilon^k \qquad (2.1)$$

сходится при $|\varepsilon|<\varepsilon_1$, где X_k — матрицы n-го порядка, не зависящие от ε, и характеристические числа $x_l=x_l(\varepsilon)$ матрицы X таковы, что $x_l(0)=a_k$.

Определим функцию $Y=f(x)$ в окрестности $\varepsilon=0$ на спектре матрицы X так, что[1] $f(x_b(0))=f(x_l(0))$, если $x_k(0)=x_l(0)$.

Теорема 2.1. *Матрица Y представима в виде сходящегося ряда*

$$Y=\sum_{k=0}^{\infty} Y_k\varepsilon^k, \quad Y_0=f(X_0), \quad |\varepsilon|<\rho. \qquad (2.2)$$

Доказательство. Имеем

$$Y=\sum_{k=0}^{n-1}\varphi_k X^k, \qquad (2.3)$$

где скалярные величины φ_k определяются[2] равенствами

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^s f(x_k)=\sum_{k=0}^{n-1}\varphi_k\sigma(X^{k+s}) \quad (s=0, 1,\ldots, n-1). \qquad (2.4)$$

Определитель из коэффициентов при неизвестных φ_k отличен от нуля при различных характеристических числах $x_1,\ldots, x_n$.

В силу сделанных предположений как $\sigma(X^k)$, так и левые части этих равенств являются однозначными[3] функциями от ε в окрестности $\varepsilon=0$. Так как полином Лагранжа $f(X)$ при совпадении характеристических чисел матрицы X переходит в конечную предельную форму[4] [1, 2, 3], то φ_k, следовательно, и $f(X)$ — функции голоморфные в окрестности $\varepsilon=0$.

Заметим, что при наличии кратных характеристических чисел

$$x_{j+1}(\varepsilon)=x_{j+2}(\varepsilon)=\ldots=x_{j+p}(\varepsilon)$$

можно сначала определять $x_k=x_k(\varepsilon, \tau)$, полагая, например,

$$x_{j+1}=x_{j+1}(\varepsilon)+b_1\tau,\ldots, x_{j+p}=x_{j+p}(\varepsilon)+b_p\tau.$$

---

[1] Другими словами, $Y_0=f(X_0)$ есть регулярное значение (стр. 21).

[2] См. формулу (1.32).

[3] Здесь, как видим, каждая круговая система [6] характеристических чисел $x_k(\varepsilon)$ $(k=p, p+1,\ldots,p+m)$ входит симметрично.

[4] Эти предельные значения φ_k найдутся, например, согласно следствию из замечания 1.1.

При этом если данный кореиь принадлежит круговой системе из q элеметов, то каждый элемент $x_j^{(k)}$ ($k=1,\ldots,q$) этой круговой системы будет также p-кратным корнем, т. е. будем иметь[1]

$$x_{j+1}^{(k)}=x_{j+2}^{(k)}=\ldots=x_{j+p}^{(k)}\ (k=1,\ldots,q).$$

Тогда надо ввести в рассмотрение характеристические числа

$$x_{j+1}^{(k)}=x_{j+1}^{(k)}(\varepsilon)+b_1\tau,\ldots,\ x_{j+p}^{(k)}=x_{j+p}^{(k)}(\varepsilon)+b_p\tau\ (k=1,\ldots,q).$$

Мы будем иметь n различных характеристических чисел, левые части равенств (2.4) и $\sigma(X^k)$ будут однозначными функциями от ε при всех $|\tau|\leqslant\tau_0$, а при $\tau=0$ получим $\varphi_k=\varphi_k(\varepsilon,0)$ однозначными функциями от ε в окрестности $\varepsilon=0$.

Факт существования предельной конечной формы формулы Лагранжа можно, очевидно, использовать по-разному. Для $Y=\ln X$ теорема[2] очевидна и на основании (1.39), а для матриц X второго и третьего порядков — на основании формул (1.40) и (1.41).

Для главного значения $Y=\ln X$ эти формулы позволяют и вычислить разложение (2.2). Неглавное значение найдем на основании (1.18) или заменяя в (2.4) $f(x_k)=\ln x_k+2m\pi i$ с соответствующими постоянными m.

Замечание 2.1. Теорема 2.1 верна и в том случае, когда при определении $f(X)$ в окрестности предельных значений $x_k(0)=a_k$ берутся различные голоморфные функции $f_k(z)$, так что значения $f(z)$ в точках $x_{j+1}(\varepsilon),\ldots,x_{j+p}(\varepsilon)$, принадлежащих одиой круговой системе корней характеристического уравнения

$$x^n+a_{n-1}(\varepsilon)x^{n-1}+\ldots+a_1(\varepsilon)x+a_0(\varepsilon)=0 \qquad (2.5)$$

матрицы (2.1), вычисляются при помощи функции $f(z)=f_j(z)$, заданной ее элементом в окрестности точки a_j. Замечание следует из того, что и левые части уравнений (2.4) и $\sigma(X^n)$ являются симметричными функциями от $x_{j+1},\ldots,x_{j+p}$.

[1] Поэтому и $\varphi_k(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ в (1.8) будет симметрической фуикцией от $\lambda_1,\ldots,\lambda_q$, принадлежащих одной круговой системе, и $\varphi_k(x_1(\varepsilon),\ldots,x_m(\varepsilon))$ будет однозначиой фуикцией от ε в окрестности $\varepsilon=0$. Легко видеть, что $\varphi_k(\varepsilon)$ и конечна при $\varepsilon=0$, если некоторые из $x_1(0),\ldots,x_m(0)$ совпадают, откуда также следует теорема (2.1).

[2] Для случая $Y=\ln X$ эта теорема рассмотрена в [14] при $X_0=I$, а затем уже при произвольном X_0 доказана в сущиости в [7] и [4] разными способами. Но в сущности уже Н. А. Артемьев иачал такого рода исследоваиия в работах [8, 9] и И. З. Штокало в [10]. В работе [7] вопрос о разложении в ряд по параметру ε функции $\ln(\Sigma X_k\varepsilon^k)$ и даже ее характеристических чисел рассмотреи впервые во всей общности подробио. К сожалению, мие эта работа ие была известна до коица 1956 г., поэтому оиа не упомянута в [4], которая была закончена в 1954 г. (см. подстрочиое примечание на стр. 211 в [11] и иа стр. 5 в [4]). В [12] повторяются результаты других а: •: [13].

Замечание 2.2. Ряд (2.2) сходится по крайней мере в круге $|\varepsilon| \leqslant r < \varepsilon_1$, в котором нет более одной точки ветвления корней характеристического уравнения (2.5), если при этих значениях ε корни $x_1(\varepsilon), \ldots, x_n(\varepsilon)$ не принимают особых значений функции $f(z)$.

Следовательно, ряд (2.2) сходится по крайней мере в круге $|\varepsilon| \leqslant r < \varepsilon_1$, в котором при $\varepsilon \neq 0$ дискриминант $\Delta(\varepsilon)$ уравнения (2.5) не обращается в нуль.

Если же $x_1(0), \ldots, x_n(0)$ различны, то ряд (2.2) будет сходиться и в круге $|\varepsilon| \leqslant r < \varepsilon_1$, в котором нет более одного нуля дискриминанта $\Delta(\varepsilon)$. (Но в окрестности $\varepsilon = 0$ функции $f(x_k(\varepsilon))$ должны быть такими, чтобы в окрестности точки ветвления ε_1 значение $f(X(\varepsilon))$ было регулярным). Может, однако, радиус сходимости ряда (2.2) быть и больше, что будет показано в конце параграфа.

Теорема 2.2. *Предположим, что рассматриваемая в теореме 2.1 функция $Y = f(X)$ определена в окрестности $\varepsilon = 0$ на спектре $x_1(\varepsilon), \ldots, x_n(\varepsilon)$ так, что $f(x_k(0)) = f(x_l(0))$, если $x_k(0) = x_l(0)$. (В случае $Y = \ln X$ берутся, например, главные значения $\ln x_1(\varepsilon), \ldots, \ln x_k(\varepsilon)$). Тогда если характеристические числа матрицы (2.1) $x_k(\varepsilon)$ $(k = 1, \ldots, n)$ в области $|\varepsilon| < \varepsilon_1$ не принимают особых значений функции $f(z)$ (в случае $Y = \ln X$ должно быть $x_k(\varepsilon) \neq 0$ в области $|\varepsilon| < \varepsilon_1$), то инварианты матрицы $Y = f(X)$ представимы в виде рядов $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \beta_k \varepsilon^k$ в круге $|\varepsilon| \leqslant r < \varepsilon_1$, в котором нет более одной*[1] *точки ε_0 ветвления корней характеристического уравнения* (2.5).

Эта теорема следует из замечания 2.2, но мы докажем ее заново.

Доказательство. Характеристические числа матрицы (2.1) $x_k(\varepsilon)$ $(k = 1, \ldots, n)$ определяются из уравнения (2.5), где $a_k(\varepsilon)$ $(k = 1, \ldots, n)$ — голоморфные от ε функции в области $|\varepsilon| < \varepsilon_1$. Отсюда следует, что характеристические числа в области $|\varepsilon| < \varepsilon_1$ имеют только алгебраические особые точки и при всяком ε_0 из области $|\varepsilon| < \varepsilon_1$ представимы в виде рядов по целым степеням $(\varepsilon - \varepsilon_0)$ или $(\varepsilon - \varepsilon_0)^{1/k}$, где k — целое положительное число, меньшее n. Характеристические числа матрицы Y равны $f(x_1(\varepsilon)), \ldots, f(x_n(\varepsilon))$. Инварианты σ_k $(k = 1, \ldots, n)$ матрицы Y суть известные симметрические полиномы от $f_1(x_1(\varepsilon)), \ldots, f_n(x_n(\varepsilon))$ степени k:

$$\sigma_k(\varepsilon) = \sigma_k[f(x_1(\varepsilon)), \ldots, f(x_n(\varepsilon))].$$

---

[1] Если $\varepsilon = 0$ — точка ветвления, то $\varepsilon_0 = 0$. Если же в круге $|\varepsilon| \leqslant r$ точка $\varepsilon_0 \neq 0$ — точка ветвления, то $x_1(0), \ldots, x_n(0)$ различны, и надо взять $f(x_k(\varepsilon_0)) = f(x_l(\varepsilon_0))$, если $x_k(\varepsilon_0) = x_l(\varepsilon_0)$.

Алгебраическая особая точка ε_0 (ближайшая к $\varepsilon=0$) функций $x_1(\varepsilon),\ldots, x_n(\varepsilon)$ не будет особой точкой $\sigma_k(\varepsilon)$, так как в окрестности точки ε_0 функции $\sigma_k(\varepsilon)$ будут однозначными ввиду того, что они являются симметрическими функциями от $f(x_1),\ldots, f(x_n)$, а $x_k(\varepsilon)$ не принимают особых значений $f(z)$ в области $|\varepsilon|<\varepsilon_1$. Отсюда и следует утверждение.

Пусть имеются, например, две точки ε_1, ε_2 ветвления корней уравнения (2.5). Если мы возьмем в окрестности точки ε_1 значения $f(x_k(\varepsilon))$ так, что левые части равенств (2.4) будут однозначными (т. е. $f(X(\varepsilon))$ в окрестности точки ε_1 будет регулярным значением), то в окрестности ε_2 эти значения $f(x_k(\varepsilon))$ могут оказаться такими, что $f(X(\varepsilon))$ будет нерегулярным значением в окрестности точки ε_2. А тогда в окрестности этой точки коэффициенты $\varphi_k(\varepsilon)$ могут быть неоднозначными. Если же в области $|\varepsilon|<r$ не более одной точки ветвления, то при любом аналитическом продолжении $f(X(\varepsilon))$ будет регулярным значением.

Пример:

$$\ln V = \ln \begin{Vmatrix} \lambda & \lambda^2-1 \\ 1 & \lambda \end{Vmatrix},$$

$$v_1=\lambda+\sqrt{\lambda^2-1},\ v_2=\lambda-\sqrt{\lambda^2-1},\ \ln v_1=\ln(\lambda+\sqrt{\lambda^2-1}),$$

$$\ln v_2=\ln(\lambda-\sqrt{\lambda^2-1}),\ -1<\lambda<1,\ D(\lambda)=\ln v_1\cdot\ln v_2.$$

Пусть $\ln v_1(1)=\ln v_2(1)=0$. Тогда $D(\lambda)$ — функция однозначная в окрестности $\lambda=1$. Но, продолжая $D(\lambda)$ в окрестность $\lambda=-1$, мы придем к

$$D(\lambda)=\ln(\lambda+\sqrt{\lambda^2-1})\,[\ln(\lambda-\sqrt{\lambda^2-1})-2\pi i],\quad \ln(-1)=\pi i,$$

так как при $\lambda\to-1$ имеем:

$$\ln v_1=\ln e^{i\varphi}\to\pi i,\ \ln v_2=\ln e^{-i\varphi}\to-\pi i.$$

Если теперь λ вблизи $\lambda=-1$ обходит точку $\lambda=-1$, то $D(\lambda)$ переходит в

$$D(\lambda)=\ln(\lambda-\sqrt{\lambda^2-1})\,[\ln(\lambda+\sqrt{\lambda^2-1})-2\pi i],$$

т. е. $D(\lambda)$ — функция неоднозначная в окрестности $\lambda=-1$. Если же возьмем $D(\lambda)$ однозначной в окрестности $\lambda=-1$, то $D(\lambda)$ неоднозначная в окрестности $\lambda=1$. Если $D(\lambda)$ разложим в окрестности $\lambda=0$, то радиус сходимости будет $|\lambda|<1$. Но если мы возьмем $D(\lambda)$ в окрестности $\lambda=2$ так, что в окрестности $\lambda=1$ $\ln V$ будет регулярным, то разложение по степеням $(\lambda - 2)$ будет сходиться при $|\lambda - 2| < 3$. Если возьмем

$$V = \begin{Vmatrix} e^{\lambda} & e^{2\lambda} - 1 \\ 1 & e^{\lambda} \end{Vmatrix},$$

то

$$D(\lambda) = \ln(e^{\lambda} + \sqrt{e^{2\lambda} - 1}) \cdot \ln(e^{\lambda} - \sqrt{e^{2\lambda} - 1})$$

и $D(\lambda)$ можно разложить по степеням $\lambda : D(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \lambda^k$, и ряд этот будет сходиться при $|\lambda| < \pi$, так как в этой области имеется только одна точка ветвления $\lambda = 0$. Следует, однако, иметь в виду, что радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \varepsilon^k$ в теореме 2.2 может быть и больше. Это будет показано в конце параграфа.

Теперь мы рассмотрим вопрос о разложении в ряд по параметру иррегулярного значения функции от матрицы. Пусть дана матрица n-го порядка

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} X_k \varepsilon^k, \quad |\varepsilon| < r, \tag{2.6}$$

где матрицы X_k не зависят от ε. Обозначим через x_{kl} элементы матрицы X. Пусть элементарные делители матрицы (2.6) простые, а характеристические числа $x_1(\varepsilon), \ldots, x_n(\varepsilon)$ суть функции голоморфные в окрестности $\varepsilon = 0$. Предположим, что вообще многозначная функция $f(z)$ является голоморфной в окрестности характеристических чисел $z = a_k = x_k(0)$ $(k = 1, \ldots, n)$ матрицы X_0.

Теорема 2.3. *Функция*

$$Y = f(X) \tag{2.7}$$

представима сходящимся рядом

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k \varepsilon^k, \quad Y_0 = f(X_0), \tag{2.8}$$

где $f(X_0)$ — любое и в том числе иррегулярное значение (если имеются $a_k = a_l$).

Доказательство. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} X_0 &= S_0 [a_1, \ldots, a_n] S_0^{-1} \\ X &= S(\varepsilon) [x_1(\varepsilon), \ldots, x_n(\varepsilon)] S^{-1}(\varepsilon) \\ x_k(\varepsilon) &\to x_k(0) = a_k, \; S(\varepsilon) \to S_0 \text{ при } \varepsilon \to 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

и элементы матрицы $S(\varepsilon)$ — голоморфные функции в окрестности $\varepsilon = 0$. На основании (1.3) и (1.9)

$$Y = S(\varepsilon)\,[f(x_1(\varepsilon)),\dots, f(x_n(\varepsilon))]\,S^{-1}(\varepsilon). \qquad (2.10)$$

Заметим, что здесь можно полагать $S_0 = I$. Действительно, мы можем написать

$$X = S_0\overline{X}S_0^{-1} = S_0\sum_{k=0}^{\infty}\overline{X}_k\,\varepsilon^k\cdot S_0^{-1},\quad \overline{X}_0 = [a_1,\dots, a_n].$$

Так как

$$f(X) = S_0 f\left[\sum_{k=0}^{\infty}\overline{X}_k\,\varepsilon^k\right]\cdot S_0^{-1},$$

то дело сводится к рассмотрению функции $f\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}\overline{X}_k\varepsilon^k\right)$, а здесь $\overline{X}_0 = [a_1,\dots, a_n]$, т. е. здесь имеем $S_0 = I$. Это позволяет считать в матрице (2.6) элементы $x_{kl}\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, когда $k\neq l$.

Из (2.9), (2.10) и следует теорема. Если $f(X_0)$ в (2.8) берется иррегулярной, то она зависит от $S_0 = S(0)$.

Замечание 2.3. Можно не требовать, чтобы элементарные делители матрицы X были простыми, но требовать, чтобы характеристические числа $x_k(\varepsilon)$ были голоморфными в окрестности $\varepsilon = 0$ и чтобы каноническая структура матрицы[1]

$$X = S(\varepsilon)\,[J_1(x_1(\varepsilon)),\dots, J_m(x_m(\varepsilon))]\,S^{-1}(\varepsilon)$$

оставалась одной и той же при всех $|\varepsilon| < R$.

Пример. $Y = \ln X$, $X = \sum\limits_{k=0}^{\infty} X_k\varepsilon^k$, $X_0 = \exp A$. Пусть каноническая структура матрицы

$$X = S(\varepsilon)\,[J_{\rho_1}(x(\varepsilon)),\dots, J_{\rho_\nu}(x_\nu(\varepsilon))]\,S^{-1}(\varepsilon)$$

остается неизменной при всех $|\varepsilon| < R$, а среди характеристических чисел $a_k = x_k(0)$ $(k = 1,\dots, \nu)$ матрицы A есть и такие, что

$$a_k - a_l = 2m\pi i \quad (m \text{ — целое}).$$

$$A = S_0\,[J_{\rho_1}(a_1),\dots, J_{\rho_\nu}(a_\nu)]\,S_0^{-1},\quad S(\varepsilon)\to S_0$$

---

[1] Сущ...ние голоморфных $S(\varepsilon)$, $S^{-1}(\varepsilon)$ в этом случае в окрестности $\varepsilon = 0$ доказано впервые Ю. С. Богдановым в 1947 г., но доказательство не опубликовано (см. [95]).

при $\varepsilon \to 0$ и $a_k = b_k + 2m_k \pi i$ $(k = 1, \ldots, \nu)$, где m_k — целые, а $b_k - b_l \neq 2m\pi i$ при целом $m (\neq 0)$. Тогда

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k \varepsilon^k, \tag{2.11}$$

$$Y_0 = \ln \exp A + S_0 [2m_1 \pi i I_{\rho_1}, \ldots, 2m_\nu \pi i I_{\rho_\nu}] S_0^{-1},$$

где

$$\ln \exp A = S_0 [J_{\rho_1}(b_1), \ldots, J_{\rho_\nu}(b_\nu)] S_0^{-1}$$

— главное значение $\ln \exp A$.

Замечание 2.4. Заметим, что точка $\varepsilon = \varepsilon_1$, в которой $\Delta(\varepsilon_1) = 0$, для ряда (2.2) может быть особой такого рода, что в окрестности $\varepsilon = \varepsilon_1$ ряд (2.2), полученный аналитическим продолжением ряда (2.2), построенным в окрестности точки $\varepsilon = 0$, будет иррегулярным значением $Y = f(X(\varepsilon))$. При этом каноническая структура $f(X(\varepsilon))$ может быть такой же, как у $X(\varepsilon)$ (то есть с той же совокупностью элементарных делителей), а может быть и другой в соответствии со сказанным между формулами (1.23) и (1.24). Если имеем второй случай, т. е. если некоторым непростым элементарным делителям матрицы $X(\varepsilon)$ будет соответствовать несколько элементарных делителей матрицы $Y = f(X(\varepsilon))$, то предельные значения некоторых элементов матрицы $f(X(\varepsilon))$ при $\varepsilon \to \varepsilon_0$ будут равны бесконечности. В первом же случае норма матрицы $f(X(\varepsilon))$ при $\varepsilon \to \varepsilon_0$ может оказаться как ограниченной, так и неограниченной. Следует, однако, иметь в виду, что ряд (2.2) может сходиться в круге $|\varepsilon| \leq |\varepsilon_1|$ $(\Delta(\varepsilon_1) = 0)$ и в том случае, когда в точке $\varepsilon = \varepsilon_1$ значение $f(X(\varepsilon_1))$ будет иррегулярным. Этот случай отмечен теоремой 2.3 и замечанием 2.3.

Рассмотрим отдельно (следуя рассуждению на стр. 86—87 работы [14]) случай матриц второго порядка и $Y = f(X) = \ln X$. Здесь мы имеем

$$Y = \frac{X(\varepsilon) - x_2(\varepsilon)}{x_1(\varepsilon) - x_2(\varepsilon)} \ln x_1(\varepsilon) + \frac{X(\varepsilon) - x_1(\varepsilon)}{x_2(\varepsilon) - x_1(\varepsilon)} \ln x_2(\varepsilon), \tag{2.12}$$

где x_1, x_2 суть корни уравнения

$$x^2 - \sigma(X) x + D(X) = 0, \quad 2x = \sigma(X) \pm \sqrt{\Delta(\varepsilon)},$$

$$\Delta(\varepsilon) = \sigma^2(X) - 4D(X).$$

Пусть (как и все время) $X(\varepsilon)$ вещественная и

$$D(X) = x_1 x_2 \neq 0 \tag{2.13}$$

при всех рассматриваемых ε.

Согласно предыдущему, особыми точками $\varepsilon = \varepsilon_0$ ряда (2.2) здесь могут быть только такие, при которых $x_1 = x_2$, т. е. при которых

$$\Delta(\varepsilon_0) = \sigma^2(X(\varepsilon_0)) - 4D(X(\varepsilon_0)) = 0. \qquad (2.14)$$

Ввиду (2.12) особыми значениями $\varepsilon = \varepsilon_0$ будут такие, при которых $x_1 = x_2$, а аргументы x_1, x_2 отличаются лишь знаком. Если же равенство (2.14) в круге сходимости ряда (2.1) не выполняется, то ряд (2.2) будет сходиться в том же круге, что и ряд (2.1). Предположим

$$D(X) = x_1(\varepsilon)x_2(\varepsilon) = 1. \qquad (2.15)$$

Тогда

$$2x = \sigma(X(\varepsilon)) \pm \sqrt{\sigma^2(X(\varepsilon)) - 4}$$

и особыми значениями $\varepsilon = \varepsilon_0$ могут быть только такие, при которых

$$\Delta(\varepsilon) = \sigma^2(X(\varepsilon)) - 4 = 0. \qquad (2.16)$$

Из формулы (2.15) мы видим, что аргументы x_1, x_2 в этом случае всегда будут противоположных знаков. Поэтому здесь особыми значениями ε_0 будут такие, при которых $x_1 = x_2$ и аргументы x_1, x_2 отличны от нуля. В частности, особыми значениями ε могут быть те, при которых

$$\sigma(X(\varepsilon)) = -2, \qquad (2.17)$$

так как тогда $x_1 = x_2 = -1$ и аргументы их будут π и $-\pi$.

Но, однако, корни $\varepsilon = \varepsilon_1$ уравнения (2.17) могут и не быть особыми для ряда (2.2), так как в окрестности точки $\varepsilon = \varepsilon_1$ и любое иррегулярное значение $\ln X(\varepsilon)$ может разлагаться в ряд по положительным степеням $\varepsilon - \varepsilon_1$, если, например, при $\varepsilon = \varepsilon_1$ имеем ($\Delta^{(k)}(\varepsilon)$ — производная k-го порядка)

$$\Delta(\varepsilon_1) = 0 \text{ и } \Delta^{(k)}(\varepsilon_1) = 0 \ (k = 1,2, \ldots, 2m-1), \ \Delta^{(2m)}(\varepsilon_1) \neq 0;$$

где m — целое положительное число. В этом случае $x_1(\varepsilon_1) = x_2(\varepsilon_1)$, но $x_1(\varepsilon)$ и $x_2(\varepsilon)$ голоморфны в окрестности точки $\varepsilon = \varepsilon_1$, поэтому и любое иррегулярное значение $\ln X(\varepsilon)$ представимо в окрестности точки $\varepsilon = \varepsilon_1$ в виде ряда по положительным степеням $(\varepsilon - \varepsilon_1)$.

Пусть, например, имеем $Y = \ln X(\varepsilon)$, где

$$X(\varepsilon) = \begin{Vmatrix} \varepsilon + (\varepsilon^2 - 1) & (\varepsilon^2 - 1) \\ \varepsilon + 1 & \varepsilon \end{Vmatrix}, \quad D(X(\varepsilon)) = 1.$$

Характеристическими числами $x_1(\varepsilon)$ и $x_2(\varepsilon)$ здесь будут

$$x_1 = \varepsilon + \frac{(\varepsilon^2 - 1)}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon + 3)(\varepsilon - 1)(\varepsilon + 1)^2},$$

$$x_2 = \varepsilon + \frac{(\varepsilon^2 - 1)}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon + 3)(\varepsilon - 1)(\varepsilon + 1)^2}.$$

Равенство $x_1 = x_2$ имеем при $\varepsilon = -3$, $\varepsilon = -1$ и при $\varepsilon = 1$. В окрестности точки $\varepsilon = -1$ функции $x_1(\varepsilon)$ и $x_2(\varepsilon)$ будут голоморфными. Взяв здесь регулярное значение $\ln X(\varepsilon)$ в окрестности точки $\varepsilon = 1$, мы получили ряд

$$Y = \ln X(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k \varepsilon^k, \tag{2.18}$$

сходящийся в области $|\varepsilon| < 3$, хотя в окрестности точки $\varepsilon = -1$ это значение $\ln X(\varepsilon)$ будет иррегулярным, так как, переходя от точки $\varepsilon = 1$ по вещественной оси ε к точке $\varepsilon = -1$, мы придем к $x_1 = x_2 = -1$ с разными аргументами π и $-\pi$, ибо x_1 придет в точку $x_1 = -1$, оставаясь в верхней полуплоскости, а x_2 — в нижней. Убедимся в этом вычислением.

Рассмотрим

$$\ln x_1(\varepsilon) = \ln\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^2 - 1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon + 3)(\varepsilon - 1)(\varepsilon + 1)^2}\right),$$

$$\ln x_2(\varepsilon) = \ln\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^2 - 1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon + 3)(\varepsilon - 1)(\varepsilon + 1)^2}\right).$$

Если мы возьмем здесь главные значения ln, то получим

$$\ln x_1 - \ln x_2 = 2\ln x_1, \quad \ln x_1 = -\ln x_2.$$

Поэтому из (2.12) будем иметь

$$Y = X(\varepsilon)\frac{2\ln x_1}{x_1 - x_2} - \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}\ln x_1.$$

Обозначая элементы матрицы Y через Y_{kl}, получим:

$$x_1 - x_2 = \sqrt{(\varepsilon + 3)(\varepsilon - 1)(\varepsilon + 1)^2}, \quad x_1 + x_2 = \varepsilon^2 + 2\varepsilon - 1,$$

$$Y_{11} = \frac{2(\varepsilon^2 + \varepsilon - 1)}{x_1 - x_2}\ln x_1 - \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}\ln x_1 =$$

$$= \frac{\varepsilon^2 - 1}{x_1 - x_2}\ln x_1,$$

$$Y_{22}=\frac{2\varepsilon\ln x_1}{x_1-x_2}-\frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}\ln x_1=\frac{(1-\varepsilon^2)}{x_1-x_2}\ln x_1,$$

$$Y_{12}=\frac{2(\varepsilon^2-1)}{x_1-x_2}\ln x_1,\qquad Y_{21}=\frac{2(\varepsilon+1)}{x_1-x_2}\ln x_1,$$

или

$$Y_{11}=\frac{\sqrt{\varepsilon-1}}{\sqrt{\varepsilon+3}}\ln x_1,\quad Y_{22}=-\frac{\sqrt{\varepsilon-1}}{\sqrt{\varepsilon+3}}\ln x_1,$$

$$Y_{12}=2\frac{\sqrt{\varepsilon-1}}{\sqrt{\varepsilon+3}}\ln x_1,\quad Y_{21}=\frac{2}{\sqrt{(\varepsilon+3)(\varepsilon-1)}}\ln x_1,$$

откуда и видим, что все элементы матрицы Y будут голоморфными функциями в области $|\varepsilon|<3$.

Если же мы возьмем регулярное значение $Y=\ln X(\varepsilon)$ в окрестности точки $\varepsilon=-3$, то $Y=\ln X(\varepsilon)$ будет представима в виде ряда

$$Y=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k(\varepsilon+3)^k,$$

сходящегося в области $|\varepsilon+3|<4$, так как ближайшей особой точкой будет $\varepsilon=1$, ибо в окрестности точки $\varepsilon=-1$ снова, согласно теореме 2.3, матрица Y будет голоморфной.

Рассмотрим еще тот случай матриц второго порядка, когда в ряде (2.1) будет $X_0=\mathrm{I}$ и $D(X(\varepsilon))=1$. В этом случае характеристические числа x_1, x_2 матрицы X находим по формуле

$$2x=\sigma(X(\varepsilon))\pm\sqrt{\sigma^2(X(\varepsilon))-4},$$

где $\sigma(X(0))=2$, т. е. будем иметь $x_2(0)=x_1(0)=1$. Если мы возьмем главное значение $Y=\ln X(\varepsilon)$, то будем иметь сходящийся ряд (2.2).

Если функция $\sigma(X(\varepsilon))$ возрастает при увеличении ε от нуля, то на положительной полуоси ε нет особых точек ряда (2.2). Если при вещественных значениях ε функция $\sigma(X(\varepsilon))$ не обращается в нуль, то на вещественной оси ε снова нет особых точек ряда (2.2). Действительно, особыми точками $\varepsilon=\varepsilon_1$ могут быть лишь те, при которых $\sigma(X(\varepsilon_1))=2$ или $\sigma(X(\varepsilon_1))=-2$. Если при изменении ε по вещественной оси начиная с $\varepsilon=0$, когда $\Delta(0)=0$, $x_1(0)=x_2(0)=1$ и аргументы $x_1(0), x_2(0)$ равны, $\Delta(\varepsilon)$ остается $\geqslant 0$, то $x_1(\varepsilon)$, $x_2(\varepsilon)$ остаются на вещественной оси, поэтому их аргументы не могут отличаться. Чтобы $x_1(\varepsilon)=x_2(\varepsilon)$ и их аргументы стали отличными, необходимо, чтобы имело место $x_1(\varepsilon)=x_2(\varepsilon)=-1$, когда аргументы $x_1(\varepsilon)$, $x_2(\varepsilon)$ будут равны π и $-\pi$. Это возможно только при $\sigma(X(\varepsilon))=-2$.

Таким образом, ближайшей к $\varepsilon=0$ особой точкой $\varepsilon=\varepsilon_1$ ряда (2.2) будет лишь такая, при которой $\sigma(X(\varepsilon_1))=-2$. Отсюда следует, что если $\sigma(X(\varepsilon))$ не обращается в нуль на вещественной оси ε, то на ней особой точки ряда (2.2) нет. Например, это будет, если элементы x_{12}, x_{21} матрицы $X(\varepsilon)$ одного знака. Действительно, если $\sigma(X(\varepsilon))=x_{11}+x_{22}=0$, то так как, согласно $D(X(\varepsilon))=1$, имеем $x_{11}x_{22}=x_{12}x_{21}+1$, то $-x_{11}^2=x_{21}x_{12}+1$, откуда x_{11} найдется мнимой, чего быть не может при вещественных $X(\varepsilon)$.

Укажем некоторую область сходимости ряда (2.2) на основании оценок элементов матрицы $X(\varepsilon)$ в том случае, когда в ряде (2.1) будет $X_0=I$. Так как $Y=\ln X(\varepsilon)$ (главное значение) можно представить в виде

$$Y=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}(X(\varepsilon)-I)^k, \tag{2.19}$$

то ясно, что ряд (2.19) сходится в том случае, когда

$$\max \bmod \text{ х. ч. матрицы } (X(\varepsilon)-I)<1/n.$$

Если эта оценка выполнена, то сходится и ряд (2.2). Оценка наибольшего модуля характеристических чисел матрицы A с положительными элементами дается, например, в работах [1,3]. Иногда оценку наибольшего модуля $x(\varepsilon)$ характеристических чисел матрицы $X(\varepsilon)$ можно получить при помощи ряда $I+\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k\varepsilon^k$, мажорирующего ряд (2.1). Этим мы воспользуемся в дальнейшем (§ 10).

В § 34 мы укажем и такие случаи, когда $\Delta(\varepsilon)\neq 0$ во всей рассматриваемой области (за исключением, может быть, только $\varepsilon=0$) и, следовательно, ряд (2.2) будет сходиться в той же области[1], что и ряд (2.1).

§ 3. ФУНКЦИИ ОТ МНОГИХ МАТРИЦ И ОТ СЧЕТНОГО МНОЖЕСТВА МАТРИЦ

Лаппо-Данилевский впервые [1] стал рассматривать функции от m матриц $X_1, \ldots, X_m$ порядка n и построил теорию

[1] Все случаи, когда ρ_1, ρ_2 остаются комплексными для уравнения (33.1).

таких функций. Именно он исследовал функции от матриц $X_1, \dots, X_m$

$$F(X_1, \dots, X_m) = \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \dots j_\nu}^{1 \dots m} X_{j_1} \dots X_{j_\nu} \alpha_{j_1 \dots j_\nu}, \qquad (3.1)$$

где α — комплексные числа, а $j_1 \dots j_\nu$ пробегают независимо друг от друга все возможные значения от 1 до m. Ряд (3.1) Лаппо-Данилевский называл рядом композиций. Следуя Лаппо-Данилевскому, будем записывать ряд (3.1) и в виде

$$F(X_1, \dots, X_m) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\alpha]_\nu, \qquad (3.2)$$

где

$$[X\alpha]_\nu = \sum_{j_1 \dots j_\nu}^{1, 2 \dots m} X_{j_1} \dots X_{j_\nu} \alpha_{j_1 \dots j_\nu}, \quad [X\alpha]_0 = \alpha_0. \qquad (3.3)$$

Легко видеть, что ряд (3.1) представляет собой совокупность особого вида n^2 рядов от mn^2 независимых переменных элементов матриц $X_1, \dots, X_m$.

Пусть $|X|$ обозначает матрицу, элементы которой равны абсолютному значению соответствующих элементов матрицы X, и запись

$$|X| \leqslant \|\rho\| \qquad (3.4)$$

означает, что все элементы матрицы $|X|$ не превосходят $\rho > 0$, причем $\|\rho\|$ есть матрица, все элементы которой равны ρ.

Если ряд (3.1) сходится в области

$$|X_j| < \|\rho_i\|, \qquad (3.5)$$

то функция $F(X_1, \dots, X_m)$ называется голоморфной в окрестности нулевых матриц. Если в ряде (3.1) $|\alpha_{j_1 \dots j_\nu}| < \alpha^{(\nu)}$ и ряд $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \alpha^{(\nu)} \xi^\nu$, где ξ — комплексное число, сходится в области $|\xi| < n\rho$, то ряд (3.1) сходится в области

$$|X_1| + \dots + |X_m| < \|\rho\| \qquad (3.6)$$

и называется равномерно голоморфным в области (3.6).

Если ряд (3.1) сходится при любых конечных матрицах $X_1, \dots, X_m$, то он называется целым. Как показал Лаппо-Данилевский, известная теорема о единственности разложения функции в степенной ряд не имеет места для функций от нескольких матриц. Но справедливо следующее утверждение. Если функцию от матриц $F(X_1, \ldots, X_m)$ можно представить в виде (3.1) при произвольном порядке матриц $X_1, \ldots, X_m$, то коэффициенты $\alpha_{j_1 \ldots j_\nu}$ определяются единственным образом. Другими словами, если

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} [X\alpha]_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\beta]_\nu$$

при произвольном порядке матриц $X_1, \ldots, X_m$, то $\alpha_{j_1 \ldots j_\nu} = \beta_{j_1 \ldots j_\nu}$. Обозначим бесконечную последовательность матриц X_1, $X_2, \ldots$ через X. Если ряд $\sum_{p=1}^{\infty} |X_p|$ сходится, то последовательность матриц X называется регулярной.

Обозначим через α_0, $\alpha_{p_1 \ldots p_\nu} (\nu = 1, 2, \ldots)$ комплексные числа. При условии сходимости ряда

$$\sum_{p_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{p_\nu=1}^{\infty} |X_{p_1} \ldots X_{p_\nu}| \, |\alpha_{p_1 \ldots p_\nu}|$$

будем рассматривать ряд

$$\sum_{p_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{p_\nu=1}^{\infty} X_{p_1} \ldots X_{p_\nu} \alpha_{p_1 \ldots p_\nu} = [X\alpha]_\nu, \quad [X\alpha]_0 = \alpha_0. \tag{3.7}$$

Если $|\alpha_{p_1 \ldots p_\nu}| < \alpha^{(\nu)}$, то ряд (3.7) сходится для любой регулярной последовательности матриц, так как, очевидно,

$$\sum_{p_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{p_\nu=1}^{\infty} X_{p_1} \ldots X_{p_\nu} = \left[\sum_{p=1}^{\infty} X_p\right]^\nu$$

и

$$\sum_{p_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{p_\nu=1}^{\infty} |X_{p_1} \ldots X_{p_\nu}| \, |\alpha_{p_1 \ldots p_\nu}| \leqslant \sum_{p_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{p_\nu=1}^{\infty} |X_{p_1}| \ldots |X_{p_\nu}| \alpha^{(\nu)} =$$

$$= \alpha^{(\nu)} \left[\sum_{p=1}^{\infty} |X_p|\right]^\nu.$$

Рассмотрим теперь ряд от регулярной последовательности матриц

$$F(X)=\sum_{\nu=0}^{\infty}[X\alpha]_\nu=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{p_1=1}^{\infty}\dots\sum_{p_\nu=1}^{\infty}X_{p_1}\dots X_{p_\nu}\alpha_{p_1\dots p_\nu}\right),\tag{3.8}$$

предполагая $|\alpha_{p_1\dots p_\nu}|<\alpha^{(\nu)}$. Если этот ряд сходится при всякой совокупности матриц $X_1, X_2,\dots$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{p=1}^{\infty}|X_p|<\|\rho\|,\tag{3.9}$$

то будем говорить, что ряд (3.8) сходится в окрестности нулевых матриц X. Если же ряд (3.8) сходится при всяком положительном ρ в условии (3.9), то ряд (3.8) называется целым. Заметим, что если ряд

$$f(\xi)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha^{(\nu)}\xi^\nu$$

имеет радиус сходимости $n\rho$, то ряд (3.8) сходится в области (3.9). Если равенство

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}[X\alpha]_\nu=\sum_{\nu=0}^{\infty}[X\beta]_\nu.$$

имеет место при регулярной последовательности матриц X любого порядка, то $\alpha_{p_1\dots p_\nu}=\beta_{p_1\dots p_\nu}$.

§ 4. КЛАССЫ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ИНТЕГРИРУЕМЫХ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ

Пусть элементы $x_{kl}(t)$ матрицы X суть функции от t. Запишем эту матрицу в виде

$$X=\|x_{kl}(t)\|.$$

Тогда, по определению, производной от матрицы X по t называют матрицу, элементы которой суть производные от соответствующих элементов матрицы X, т. е.

$$\frac{dX}{dt}=\left\|\frac{dx_{kl}(t)}{dt}\right\|.$$

Если имеем матрицы X, Y, которые являются функциями от t, то

$$\frac{d(XY)}{dt} = \frac{dX}{dt} Y + X \frac{dY}{dt}.$$

Если имеем m матриц $X_1(t), \ldots, X_m(t)$, то

$$\frac{d(X_1(t) \ldots X_m(t))}{dt} = \sum_{k=1}^{m} X_1 X_2 \ldots X_{k-1} \frac{dX_k}{dt} X_{k+1} \ldots X_m.$$

Пусть матрицы

$$\frac{dX_k}{dt} \quad (k = 1, \ldots, m)$$

коммутируют с матрицами

$$X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}, X_{k+1}, \ldots, X_m,$$

тогда

$$\frac{d(X_1 \ldots X_m)}{dt} = \sum_{k=1}^{m} X_1 X_2 \ldots X_{k-1} X_{k+1} \ldots X_m \frac{dX_k}{dt}.$$

Следовательно, если матрица $X(t)$ коммутирует со своей производной $\frac{dX}{dt}$, то

$$\frac{de^X}{dt} = e^X \frac{dX}{dt} = \frac{dX}{dt} e^X.$$

Это следует непосредственно из определения функции e^X на основании (1.2).

По определению, имеем также

$$\int X dt = \| \int x_{kl}(t)\, dt \|.$$

Пусть дана система линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 P_{11}(t) + \ldots + x_n P_{n1}(t), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= x_1 P_{1n}(t) + \ldots + x_n P_{nn}(t). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Эта система имеет n линейно независимых решений

$$x_{k1}, \ldots, x_{kn} \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{4.2}$$

которые можно записать в виде матрицы

$$X = \begin{Vmatrix} x_{11}, \ldots, x_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{n1}, \ldots, x_{nn} \end{Vmatrix} \tag{4.3}$$

так, что каждый элемент этой матрицы x_{kl} является l-й функцией k-го решения системы (4.1).

Введем еще в рассмотрение матрицу коэффицнентов системы (4.1)

$$P(t) = \begin{Vmatrix} P_{11}(t), \ldots, P_{1n}(t) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ P_{n1}(t), \ldots, P_{nn}(t) \end{Vmatrix}. \tag{4.4}$$

Подставляя последовательно решения (4.2) в уравнение (4.1), получим n^2 уравнений, которые в матричном виде можно записать так:

$$\frac{dX}{dt} = XP. \tag{4.5}$$

Матрицу X называют интегральной. Так как матрица $X(t)$ составлена из линейно независимых решений системы (4.1)-то $D(X(t)) \neq 0$ в области непрерывности матрицы $P(t)$. Интегральную матрицу $X(t)$, обращающуюся в единичную матрицу I при $t=0$ $(X(0) = \mathrm{I})$, будем называть нормированной в точке $t=0$. Если $X(t)$ — нормированная интегральная матрица в точке $t=0$, то всякая другая интегральная матрица $X_1(t)$ получается в виде $X_1(t) = AX(t)$, где A — постоянная матрица.

Отметим некоторые случаи, когда интегральная матрица X находится в конечном виде.

Предположим, что матрица $P(t)$ в матричном уравнении (4.5) обладает свойством

$$P(t) \int P(t)\, dt = \int P(t)\, dt \cdot P(t), \tag{4.6}$$

т. е. матрица $P(t)$ коммутирует[1] со своим интегралом. Тогда нормированную в точке $t=0$ интегральную матрицу X получим в виде [1]

---

[1] Полное исследование структуры матриц $P(t)$, обладающих свойством (4.6), проведено в работе Богданова и Чеботарева [15]. Это исследование тесно связано с работой В. В. Морозова, в которой изучены матрицы, обладающие свойством $P(t_1)\,P(t_2) = P(t_2)\,P(t_1)$. В [15] дана и библиография работ, относящихся к изучению матриц, обладающих свойством (4.6). Частный случай (4.6) рассмотрен V. Amato [16]. Линейные системы, допускающие интегрирование в конечной форме, исследовались также в работах [17—19].

$$X = \exp \int_0^t P dt, \tag{4.7}$$

так как в силу (4.6)

$$\frac{dX}{dt} = \exp \int_0^t P dt \cdot P = XP.$$

В частности, если

$$P = A \varphi(t), \tag{4.8}$$

где A — постоянная матрица и $\varphi(t)$ — численная функция от t, то, согласно (4.7), получим

$$X = \exp A \int_0^t \varphi(t) dt. \tag{4.9}$$

Пусть здесь $\varphi(t) = 1$ и характеристические числа $\lambda_1, ..., \lambda_n$ матрицы A различны. Тогда по формуле Лагранжа из (4.9) получим

$$X = \sum_{k=1}^{n} \frac{(A - \lambda_1) \dots (A - \lambda_{k-1})(A - \lambda_{k+1}) \dots (A - \lambda_n)}{(\lambda_k - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \dots (\lambda_k - \lambda_n)} e^{\lambda_k t}. \tag{4.10}$$

Если X запишем в виде

$$X = \varphi_{n-1} A^{n-1} + \varphi_{n-2} A^{n-2} + \dots + \varphi_1 A + \varphi_0,$$

то φ_k ($k = 0, 1, ..., n-1$) будут симметрическими функциями[1] от $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Это позволяет получить интегральную матрицу X, не находя характеристические числа матрицы A.

Заметим, что матрицы второго порядка $P(t)$, обладающие свойством (4.6), имеют вид

$$P = \begin{Vmatrix} \varphi_1(t) + b_1 \varphi_2(t) & \varphi_2(t) \\ b_2 \varphi_2(t) & \varphi_1(t) \end{Vmatrix}, \tag{4.11}$$

где $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ — численные функции от t и b_1, b_2 — постоянные[2].

---

[1] Это видно из (2.4). Заметим, что И. З. Штокало решение (4.10) получил в виде $X = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} (pE - A)^{-1} e^{pt} dp$, где c — замкнутый контур, ограничивающий область, содержащую внутри себя все характеристические числа матрицы A.

[2] Здесь не включен случай $P_{12} = P_{21} = 0$ и $P_{11} \neq P_{22}$. Элементы матрицы (4.11) удовлетворяют соотношениям $P_{11} - P_{22} = b_1 P_{12}$, $P_{21} = b_2 P_{12}$.

Таким образом, когда $P(t)$ в матричиом уравнении (4.5) имеет вид (4.11), то X имеем в виде

$$X = \exp \left\| \begin{matrix} \bar{\varphi}_1 + b_1 \bar{\varphi}_2 & \bar{\varphi}_2 \\ b_1 \bar{\varphi}_2 & \bar{\varphi}_1 \end{matrix} \right\|, \tag{4.12}$$

где $\bar{\varphi}_k = \int\limits_0^t \varphi_k(t)\,dt$. Если

$$P = \sum_{k=1}^{m} A_k \varphi_k(t), \tag{4.13}$$

где A_k ($k=1, \ldots, m$) — постоянные коммутирующие матрицы и $\varphi_k(t)$ — численные функции, то условие (4.6) очевидно выполнено.

Ф. И. Федоров [20] получил следующее интересное обобщение системы Лаппо-Данилевского, для которой имеем решеиие, аналогичное (4.7). Пусть матрица $P(t)$ в уравнении (4.5) обладает свойством

$$L \cdot [P(t) B^n] = 0 \quad (n = 1,\ 2, \ldots), \tag{4.14}$$

где

$$\frac{dB}{dt} = P(t), \quad MN - NM = [MN]$$

и L — постоянный вектор, т. е. матрица, имеющая все элементы, равные нулю, за исключением одной строчки, в которой стоят элементы, не зависящие от t. Тогда

$$X = L \exp B \tag{4.15}$$

есть решение уравнения (4.5).

Действительно, на основании (4.14) имеем

$$LPB^n = LB^n P \tag{4.16}$$

и

$$L\underbrace{B \ldots B}_{m} P \underbrace{B \ldots B}_{n} = LPB^{m+n} = LB^{m+n} P.$$

Отсюда в силу

$$\frac{d(\exp B)}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} B^{n-k} P B^{k-1}$$

следует, что

$$\frac{d(L \cdot \exp B)}{dt} = L \cdot \exp B \cdot P \text{ или } \frac{dX}{dt} = XP,$$

где X дано равенством (4.15).

Из (4.16) имеем $LPB^n = LB^{n-1} PB$, поэтому

$$L[PB^n] = LB^{n-1}[PB]. \qquad (4.17)$$

Из

$$LB^k[PB] = 0 \quad (k = 1, \ldots, m), \qquad (4.18)$$

где m — показатель степени минимального полинома

$$B^m + \sigma_1 B^{m-1} + \sigma_2 B^{m-2} + \ldots + \sigma_{m-1} B + \sigma_m = 0, \qquad (4.19)$$

которому[1] удовлетворяет матрица B ([21], а также § 1 настоящей книги), следует равенство (4.18) при $k > m$. Мы получили следующую теорему:

Теорема Ф. И. Федорова. *Если матрица $P(t)$ в (4.5) такая, что существует постоянный вектор L, удовлетворяющий равенствам (4.18), то уравнение (4.5) имеет решение вида (4.15).*

Если вектор L имеет ν произвольных параметров, то мы из (4.5) получаем ν линейно независимых решеиий. Отсюда следует, что порядок системы (4.5) понижается на ν единиц.

Если матрица $P(t)$ вторoго порядка и существует постоянный вектор L, удовлетворяющий равенству $L[PB] = 0$, то система (4.5) интегрируется.

§ 5. ДРУГИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ИНТЕГРИРУЕМЫХ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ

Отметим еще один случай, когда решение системы (4.5) получается в замкнутой форме [22].

Пусть дана система линейных дифференциальных уравнеиий

$$\frac{dX}{dt} = X[U_1 \varphi_1(t) + U_2 \varphi_2(t)], \qquad (5.1)$$

где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — некоторые непрерывные функции от t и U_1, U_2 — постоянные матрицы, обладающие свойством

$$U_1(U_2U_1 - U_1U_2) - (U_2U_1 - U_1U_2)U_1 = 0. \qquad (5.2)$$

Заметим, что если матрицы U_1, U_2 коммутируют, то условие (5.2) выполнено, но при этом выполнено и условие (4.6), т. е. мы будем иметь уже рассмотренный случай.

Теперь предположим, что, кроме условия (5.2), матрица U_1 обладает свойством

$$U_2U_1 - U_1U_2 = P(U_1), \qquad (5.3)$$

[1] В (4.19) σ_k суть скалярные функции от характеристических чисел матрицы B.

где $P(U_1)$ — полином от U_1 с численными коэффициентами. Если каждому характеристическому числу матрицы U_1 соответствует только один элементарный делитель, то условие (5.3) выполнено. При условиях (5.2) и (5.3) интегральная матрица $X(t)$, нормированная при $t=0$, получается в виде[1]

$$X(t) = e^{\int_0^t e^{U_2 L_2(t)} U_1 e^{-U_2 L_2(t)} \varphi_1(t)\, dt} e^{U_2 L_2(t)}, \tag{5.4}$$

где

$$L_k(t) = \int_0^t \varphi_k(t)\, dt \quad (k=1,\ 2). \tag{5.5}$$

Пусть матрицы U_1 и U_2 второго порядка имеют вид

$$U_1 = \begin{Vmatrix} a & 0 \\ c & a \end{Vmatrix},\ U_2 = \begin{Vmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{Vmatrix}. \tag{5.6}$$

Тогда условия (5.2), (5.3) выполнены, так как характеристическому числу матрицы U_1 соответствует один элементарный делитель. В этом случае в силу (1.24) имеем:

$$e^{\pm U_2 L_2(t)} = \begin{Vmatrix} e^{\pm b_1 L_2(t)} & 0 \\ 0 & e^{\pm b_2 L_2(t)} \end{Vmatrix}$$

и

$$e^{U_2 L_2(t)} U_1 e^{-U_2 L_2(t)} = e^{U_2 L_2(t)} \left(\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{Vmatrix} + a\mathrm{I} \right) e^{-U_2 L_2(t)} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ ce^{(b_2 - b_1) L_2(t)} & 0 \end{Vmatrix} + a\mathrm{I}.$$

---

[1] Г. Ф. Федоров указал более общий случай, чем система (5.1), когда $X(t)$ получается в замкнутой форме [23]. В. В. Морозов [24] нашел необходимые и достаточные условия для U_1, U_2, при которых имеем (5.4). И. М. Салахова, Г. Н. Чеботарев [25] нашли необходимые и достаточные условия, при которых система

$$\frac{dY}{dt} = Y\{A(t) + B(t)\},\ A = \sum_{i=1}^{p} A_i \varphi_i(t),\ B(t) = \sum_{j=1}^{q} B_j \psi_j(t),$$

где A_i, B_j — постоянные матрицы, и

$$[A_i,\ A_k] = 0\ (i,\ k=1, \ldots,\ p),\ [B_j,\ B_k] = 0,\ (j,\ k=1, \ldots,\ q)$$

имеет решение в виде

$$Y = e^{M(t)} e^{D(t)},\ D(t) = \int_0^t B(t)\, dt \text{ и } \left[M(t),\ \frac{dM}{dt}\right] = 0.$$

Это условие приводится к выполнению равенства $[A(t),\ [B(t),\ A(t)]] = 0$ при произвольных $\varphi_j(t)$ и $\psi_i(t)$.

Следовательно, равенство (5.4) можно записать в виде

$$X(t)=e^{\begin{Vmatrix}0 & 0\\ c\int\limits_0^t e^{(b_2-b_1)L_2(t)}\varphi_1(t)\,dt & 0\end{Vmatrix}}e^{aL_1(t)}e^{U_2L_2(t)}$$

или на основании формул (1.24) окончательно имеем

$$X(t)=e^{aL_1(t)}\begin{Vmatrix}e^{b_1L_2(t)} & 0\\ e^{b_1L_2(t)}c\int\limits_0^t e^{(b_2-b_1)L_2(t)}\varphi_1(t)\,dt & e^{b_2L_2(t)}\end{Vmatrix}. \tag{5.7}$$

Отсюда получаем сумму диагональных членов и определитель матрицы $X(t)$ в виде

$$\sigma(X(t))=e^{aL_1(t)}\left[e^{b_1L_2(t)}+e^{b_2L_2(t)}\right], \tag{5.8}$$

$$D(X(t))=e^{2aL_1(t)}e^{(b_1+b_2)L_2(t)}. \tag{5.9}$$

Эти формулы в дальнейшем нам потребуются. Мы рассмотрели тот случай системы (5.1), когда элементы матриц второго порядка U_1, U_2, стоящие в верхнем правом углу, равны нулю.

Частным случаем условия (5.2), как мы уже отметили, является тот, когда матрицы U_1, U_2 коммутируют и когда, следовательно, интегральную матрицу системы (5.1) можно записать в виде

$$X(t)=e^{U_1\int\limits_0^t\varphi_1(t)\,dt+U_2\int\limits_0^t\varphi_2(t)\,dt}.$$

Общий случай, когда условие (5.2) выполнено, но матрицы второго порядка U_1 и U_2 не коммутируют и не имеют одновременно нулевого элемента на побочной диагонали, можно записать в виде

$$U_1=\begin{Vmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{Vmatrix},\quad U_2=\begin{Vmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & a_2\end{Vmatrix}, \tag{5.10}$$

где элементы a, b, c и d связаны уравнениями

$$c_1b_2+b_1c_2=0,\quad 4c_1^2b_2-c_2(a_1-d_1)^2=0.$$

Следовательно, общий вид таких матриц можно записать так:

$$U_1=\begin{Vmatrix}a+2cm & -cm^2\\ c & a\end{Vmatrix},\quad U_2=\begin{Vmatrix}b & m^2n\\ n & b\end{Vmatrix}. \tag{5.11}$$

Характеристические числа матрицы U_2 имеем в виде

$$\lambda_1 = b + mn, \quad \lambda_2 = b - mn \tag{5.12}$$

и матрицы U_1

$$\xi_1 = a + cm, \quad \xi_2 = a + cm. \tag{5.13}$$

Можно написать

$$U_2 = A^{-1} \begin{Vmatrix} b+mn & 0 \\ 0 & b-mn \end{Vmatrix} A, \quad A = \begin{Vmatrix} 1 & m \\ 1 & -m \end{Vmatrix}. \tag{5.14}$$

По формуле (1.3) имеем

$$e^{\pm U_2 L_2(t)} = A^{-1} e^{\pm \begin{Vmatrix} b+mn & 0 \\ 0 & b-mn \end{Vmatrix} L_2(t)} A.$$

На основании этого

$$e^{U_2 L_2(t)} U_1 e^{-U_2 L_2(t)} =$$

$$= A^{-1} e^{\begin{Vmatrix} b+mn & 0 \\ 0 & b-mn \end{Vmatrix} L_2(t)} A U_1 A^{-1} e^{-\begin{Vmatrix} b+mn & 0 \\ 0 & b-mn \end{Vmatrix} L_2(t)} A =$$

$$= A^{-1} \begin{Vmatrix} a+cm & 2cme^{2mnL_2(t)} \\ 0 & a+cm \end{Vmatrix} A.$$

Эта формула позволяет записать решение (5.4) в виде

$$X(t) = e^{(a+cm)L_1(t) + bL_2(t)} A^{-1} e^{\begin{Vmatrix} 0 & 2cm\int\limits_0^t e^{2mnL_2(t)} \varphi_1(t)dt \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}} \times$$

$$\times e^{\begin{Vmatrix} mn & 0 \\ 0 & -mn \end{Vmatrix} L_2(t)} A.$$

На основании формул (1.24) можно получить

$$X(t) = e^{(a+cm)L_1(t) + bL_2(t)} \times$$

$$\times A^{-1} \begin{Vmatrix} e^{mnL_2(t)} & 2\, cme^{-mnL_2(t)} \int\limits_0^t e^{2mnL_2(t)} \varphi_1(t)\, dt \\ 0 & e^{-mnL_2(t)} \end{Vmatrix} A. \tag{5.15}$$

Из этой формулы получим

$$з(X(t)) = e^{(a+cm)L_1(t) + (b+mn)L_2(t)} + e^{(a+cm)L_1(t) + (b-mn)L_2(t)} \tag{5.16}$$

и

$$D(X(t)) = e^{2(a+cm)L_1(t) + 2bL_2(t)}. \tag{5.17}$$

§ 6. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ВИДЕ РЯДА ОТ МНОГИХ МАТРИЦ (РЯДА КОМПОЗИЦИЙ)

Линейные системы дифференциальных уравнений обладают тем отличительным свойством, что их общее решение представляется в виде некоторых рядов, сходящихся равномерно во всякой замкнутой области, в которой коэффициенты системы непрерывны.

Пусть матрица $P(t)$ в уравнении (4.5) непрерывна в промежутке $0 \leqslant t \leqslant p$. Тогда мы получим матрицу $X(t)$, нормированную в точке $t=0$, в виде

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(t), \quad X_0(t) = \mathrm{I}, \tag{6.1}$$

где

$$X_k(t) = \int_0^t X_{k-1}(t) P(t)\, dt, \tag{6.2}$$

и ряд (6.1) сходится равномерно в промежутке $0 \leqslant t \leqslant p$, так как он мажорируется рядом

$$Y = e^{Mt}; \tag{6.3}$$

M — постоянная матрица, элементы которой являются положительными числами, равными максимальным значениям модулей соответствующих элементов матрицы $P(t)$, т. е. $P(t)| \leqslant M$. Таким образом, мы имеем и оценку быстроты сходимости ряда (6.1).

Для доказательства этого утверждения надо формально удовлетворить уравнению

$$\frac{dX}{dt} = XP\lambda \quad (\lambda \text{ — параметр}) \tag{6.4}$$

рядом

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(t) \lambda^k, \quad X_0(t) = \mathrm{I}. \tag{6.5}$$

Для определения коэффициентов $X_k(t)$ получим рекуррентную формулу

$$X_k(t) = \int_0^t X_{k-1}(t) P(t)\, dt, \tag{6.6}$$

откуда получим оценки

$$|X_k(t)| \leqslant \int_0^t |X_{k-1}(t)| M dt,$$
$$|X_k(t)| \leqslant M^k t^k \frac{1}{k!} \quad (t > 0). \tag{6.7}$$

Следовательно, ряд (6.5) мажорируется рядом

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} M^k \lambda^k t^k \frac{1}{k!},$$

т. е.

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} X_k(t) \lambda^k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k \lambda^k t^k = e^{M\lambda t}.$$

Отсюда следует, что ряд (6.5) сходится равномерно в промежутке $0 \leqslant t \leqslant p$ при каждом значении λ, в том числе и при $\lambda = 1$. Утверждение доказано[1].

Предположим, что

$$P(t) = \sum_{k=1}^{m} A_k \varphi_k(t), \tag{6.8}$$

где A_k — постоянные матрицы и $\varphi_k(t)$ — численные функции, непрерывные в промежутке $0 \leqslant t \leqslant p$. Тогда, очевидно, в ряде (6.1)

$$X_k(t) = \sum_{i_1 \ldots i_k}^{1 \ldots m} A_{i_1} \ldots A_{i_k} \varphi_{i_1 \ldots i_k}(t). \tag{6.9}$$

Здесь

$$\varphi_{i_1 \ldots i_k}(t) = \int_0^t \varphi_{i_1 \ldots i_{k-1}}(t) \varphi_{i_k}(t) dt. \tag{6.10}$$

Это мы получаем из формулы (6.2).

Таким образом, в случае (6.8) интегральную матрицу $X(t)$, нормированную в точке $t = 0$, имеем в виде ряда композиций

$$X(t) = I + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1 \ldots i_k}^{1 \ldots m} A_{i_1} \ldots A_{i_k} \varphi_{i_1 \ldots i_k}(t), \tag{6.11}$$

---

[1] Утверждение останется в силе, если предположить $\int_0^t |P(t)| dt < \infty$. При этом смысл постоянной M в (6.3) изменится.

который сходится при любых конечных значениях матриц $A_1, \ldots, A_m$ и t из промежутка $0 \leqslant t \leqslant p$.

Заметим теперь, что ряды (6.1), (6.11) сходятся равномерно и в области D комплексного переменного t, если в этой области (замкнутой) матрица $P(t)$ является непрерывной функций от t.

Рассмотрим теперь систему

$$\frac{dX}{dt} = X \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \varepsilon^k, \tag{6.12}$$

где X и $P_k(t)$ — матрицы n-го порядка, ряд

$$P(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \varepsilon^k \tag{6.13}$$

сходится при всех $0 \leqslant t \leqslant b$ в области $|\varepsilon| < r$, $P_k(t)$ — непрерывные в промежутке $0 \leqslant t \leqslant b$ и $|P(t, \varepsilon)| \leqslant M$, где M — постоянная матрица с положительными элементами, а $0 \leqslant \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_1 < r$.

Теорема[1] 6.1 (Ляпунова). *Интегральная матрица X, норми... в точке $t = 0$, представима в виде ряда*

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(t) \varepsilon^k, \quad X_0(0) = I, \quad X_k(0) = 0, \quad k \geqslant 1, \tag{6.14}$$

сходящегося при $|\varepsilon| < r$ для всех значений t из промежутка $0 \leqslant \leqslant t \leqslant b$, где $X_k(t)$ — непрерывные в промежутке $0 \leqslant t \leqslant b$ матрицы, определяемые рекуррентно,

$$\frac{dX_0(t)}{dt} = X_0(t) P_0(t), \quad \frac{dX_k}{dt} = X_k P_0 + X_{k-1} P_1 + \ldots + X_0 P_k, \tag{6.15}$$

или

$$X_k(t) = \int_0^t (X_{k-1} P_1 + \ldots + X P_k)_\tau X_0^{-1}(\tau) \, d\tau \, X_0(t). \tag{6.16}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную систему[2]

$$\frac{dY}{dt} = Y P(t, \varepsilon) \lambda, \tag{6.17}$$

[1] См. и [9], где иначе формулируется эта теорема.

[2] Здесь мы следуем Ляпунову [26].

где λ — численный параметр. Имеем:

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(t, \varepsilon)\lambda^k, \tag{6.18}$$

$$Y_k(t, \varepsilon) = \int_0^t Y_{k-1}(t, \varepsilon) P(t, \varepsilon)\,dt, \quad k \geqslant 1, \quad Y_0(t, \varepsilon) = I, \tag{6.19}$$

и ряд (6.18) сходится равномерно в области $0 \leqslant t \leqslant b$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_1 < r$, $|\lambda| \leqslant R$, где ε_1 — любое, меньшее r.

Действительно, так как $|P(t, \varepsilon)| \leqslant M$, то для ряда (6.18) мы имеем мажорантный ряд

$$Y = \exp(Mt\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k t^k \lambda^k}{k!},$$

являющийся решением уравнения

$$\frac{dY}{dt} = YM\lambda. \tag{6.20}$$

Полагая в (6.18) $\lambda = 1$, получим решение уравнения (6.12)

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(t, \varepsilon). \tag{6.21}$$

Этот ряд сходится равномерно в области $0 \leqslant t \leqslant b$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_1 < r$, и матрицы $Y_k(t, \varepsilon)$ суть голоморфные в области $|\varepsilon| < r$. Отсюда и следует, что мы имеем (6.14).

Замечание 6.1. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} |P_k(t)| \varepsilon_1^k = \overline{P}_1(t) \qquad 0 \leqslant t \leqslant b \tag{6.22}$$

сходится при $0 < \varepsilon_1 < r$.

Предположим[1], что $|\overline{P}_1(t)| \leqslant \|1\| \varphi(t)$, где $\|1\|$ — матрица, все элементы которой равны единице, а $\varphi(t)$ — такая[2] скалярная положительная функция, что $\int_0^b \varphi(t)\,dt < \infty$. *Тогда ряд (6.14) будет сходиться равномерно в промежутке $0 \leqslant t \leqslant b$ при* $|\varepsilon| < \varepsilon_1$. Действительно, для ряда (6.13) ряд

$$\frac{\|1\| \varphi(t)}{1 - \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_1}} = \|1\| \varphi(t) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\right)^k$$

---

[1] Здесь мы несколько видоизменяем рассуждения Ляпунова [26].

[2] Если $\int_0^b |P_1(t)|\,dt < \infty$, то имеем и $|P_1(t)| = \|1\| \varphi(t)$, где, например, $\varphi(t) = \Sigma |p_{kl}(t)|$.

будет мажорантным, т. е.

$$|P_k(t)| \leqslant \frac{\|1\|\varphi(t)}{\varepsilon_1^k}.$$

Для уравнения

$$\frac{dY}{dt} = Y\frac{\|1\|\varphi(t)}{1-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}} \tag{6.23}$$

матрица

$$Y = \exp\frac{\|1\|}{1-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}}\int_0^t \varphi(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(t)\,\varepsilon^k$$

будет решением, а также мажорантной для ряда (6.14). Это последнее утверждение следует из того, что

$$|X_0(t)| \leqslant \exp\|1\|\int_0^t \varphi(t)\,dt,$$

ибо $|P_0(t)| \leqslant \|1\|\varphi(t)$ и, согласно (6.16), $|X_k(t)| \leqslant Y_k(t)$, так как

$$|X_0^{-1}(\tau)X_0(t)| \leqslant \exp\|1\|\int_\tau^t \varphi(t)\,dt.$$

Здесь матрицы

$$X_0^{-1}(\tau)\cdot X_0(t) \text{ и } \exp\|1\|\int_\tau^1 \varphi(t)\,dt$$

суть решения соответственно первого из уравнений (6.15) и уравнения (6.23) при $\varepsilon = 0$, нормированные в точке $t = \tau$, поэтому к ним применимы рассуждения, проведенные относительно уравнений (6.17) и (6.20).

Несколько иной подход к этим задачам, а также иные случаи задания матрицы $P(t, \varepsilon)$ см. в работах [9] и [26, гл. III].

§ 7. РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ПУАНКАРЕ—ЛАППО-ДАНИЛЕВСКОГО

Теперь мы остановимся на решении проблемы Пуанкаре —Лаппо-Данилевского из аналитической теории линейных систем дифференциальных уравнений.

Далее мы покажем, что решение этой проблемы тесно связано с теорией линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Предположим, что в уравнении (4.5) P есть аналитическая функция комплексного переменного z, однозначная в окрестности точки $z=a$. Если в точке $z=a$ $P(z)$ — регулярная функция (т. е. все элементы матрицы $P(z)$ в точке $z=a$ — регулярные функции),

$$P(z)=\sum_{k=0}^{\infty} P_k (z-a)^k, \tag{7.1}$$

где P_k — постоянные относительно z матрицы, то, как известно, и интегральная матрица $X(z)$ с начальным значением B_0 в точке $z=a$ будет голоморфной в окрестности точки $z=a$, т. е. будем иметь

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} B_k (z-a)^k, \tag{7.2}$$

где B_k — постоянные матрицы, и ряд (7.2) сходится при $|z-a|<r$. Здесь r — расстояние от точки a до ближайшей из особых точек матрицы $P(z)$, другими словами, r есть расстояние от a до ближайшей из особых точек элементов матрицы $P(z)$. Это непосредственно следует и из приведенных выше рассуждений относительно равномерной сходимости ряда (6.1) в области непрерывности матрицы $P(z)$. Здесь, кроме того, функции $X_k(z)$ будут, очевидно, регулярными функциями в области регулярности функции $P(z)$.

Теперь предположим, что $P(z)$ в точке $z=a$ имеет однозначную изолированную особенность, т. е. в точке $z=a$ матрица $P(z)$ имеет или полюс или существенно особую точку, так что в окрестности точки $z=a$ матрица $P(z)$ разложима в ряд Лорана.

Пусть $X(z)$ есть интегральная матрица уравнения (4.5) с начальным значением X_0 в точке $z=z_0$ из окрестности точки $z=a$. Мы предполагаем $D(X_0)\neq 0$, поэтому в области регулярности матрицы $P(z)$ будет и $D(X(z))\neq 0$ по известному свойству фундаментальной системы решений линейной системы дифференциальных уравнений. Будем аналитически продолжать $X(z)$ вдоль кривой L, окружающей точку $z=a$ и проходящей через $z=z_0$. Кривая L не проходит через особую точку матрицы $P(z)$ и не содержит внутри себя, кроме $z=a$, других особых точек $P(z)$. Вообще говоря, после обхода особой точки $z=a$ мы получим в точке z_0 значение $X(z_0)=\overline{X}$, отличное от X_0. Возвращаясь, таким образом, в окрестность точки $z=z_0$ после обхода $z=a$, мы приходим к интегральной матрице $\overline{X}(z)$, отличной от $X(z)$. Но так как $X(z)$ составлена из фундаментальной системы решений, то новая интегральная матрица $\overline{X}(z)$ может быть выражена через $X(z)$ при помощи равенства

$$\overline{X}(z) = V(a) X(z), \tag{7.3}$$

где $V(a)$ — постоянная матрица, определенная равенством

$$\overline{X}_0 = V(a) X_0, \quad V(a) = \overline{X}_0 X_0^{-1}. \tag{7.4}$$

Так как $D(X(z)) \neq 0$, то и $D(\overline{X}(z)) \neq 0$ в силу того, что фундаментальная система решений остается фундаментальной при любых аналитических продолжениях вдоль кривой, не проходящей через особую точку матрицы $P(z)$.

Матрицу $V(a)$ называют интегральной подстановкой вокруг точки $z = a$.

Если $X_0 = \mathrm{I}$, т. е. интегральная матрица $X(z)$ нормирована в точке $z = z_0$, то интегральную подстановку будем обозначать через $V(a, z_0) = \overline{X}(z_0)$. Здесь $\overline{X}(z_0)$ есть значение интегральной матрицы $X(z)$ в точке $z = z_0$ после обхода $z = a$.

Далее мы будем предполагать, что матрица $X(z)$ нормирована в точке $z = z_0$.

Обозначим

$$2\pi i W(a, z_0) = \ln V(a, z_0), \tag{7.5}$$

так что

$$\exp 2\pi i W(a, z_0) = V(a, z_0). \tag{7.6}$$

Введем функцию

$$N(z) = (z - a)^{-W} X(z) = e^{-W \ln(z-a)} X(z).$$

На основании (7.3) после обхода точки $z = a$ эта функция принимает значение

$$\overline{N}(z) = e^{-W \ln(z-a) - 2\pi i W} V(a, z_0) X(z) = N(z).$$

Таким образом, функция $N(z)$ есть однозначная в окрестности $z = a$. Отсюда следует, что

$$X(z) = (z - a)^W N(z - a), \tag{7.7}$$

где $N(z - a)$ — однозначная функция (матрица) в окрестности $z = a$. Всю многозначную особенность матрицы $X(z)$ в окрестности точки $z = a$ характеризует множитель $(z - a)^W$, а $N(z - a)$ — матрица, представимая в окрестности точки $z = a$ в виде ряда Лорана. Следуя Лаппо-Данилевскому, W будем называть показательной подстановкой в окрестности точки $z = a$.

Если точка $z=a$ для матрицы $P(z)$ является полюсом первого порядка, то $z=a$ называется регулярной особой точкой систем (4.1) и (4.5).

Из аналитической теории линейных дифференциальных уравнений известно, что в этом случае $N(z-a)$ можно считать в точке $z=a$ регулярной, т. е.

$$N(z-a)=\sum_{k=0}^{\infty} N_k (z-a)^k,$$

где N_k — постоянные матрицы. Если характеристические числа матрицы $P_{-1}=(z-a)P(z)|_{z=a}$ не отличаются между собой на целые числа, то представление решения в виде (7.7) дано в работе Лаппо-Данилевского [1]. В том случае, когда некоторые характеристические числа матрицы P_{-1} отличаются на целое число, вопрос о конструкции интегральной матрицы вида (7.7) рассмотрен в работах Л. И. Донской [27, 28].

Пусть дана система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dY}{dz}=Y\sum_{j=1}^{n}\frac{U_j}{z-a_j}, \tag{7.8}$$

где U_j — постоянные (относительно z) матрицы и a_j — простые полюсы матрицы коэффициентов.

Лаппо-Данилевский впервые дал общее представление для матриц W_j, характеризующих многозначность интегральной матрицы $Y(z)$ в окрестности соответствующих точек $z=a_j$. Именно, он показал, что для случая $Y(z_0)=I$ матрицы W_j представимы в виде

$$\Delta(U_j)W_j=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\varkappa=1}^{\nu}\sum_{j_1\ldots j_\varkappa}^{1\ldots m} U_{j_1}\ldots U_{j_\varkappa}\,\delta_{\nu-\varkappa}(U_j)\,Q_j(a_j\ldots a_{j_\varkappa}\,|\,z_0),$$

где δ_k (U_j) — полиномы от элементов матрицы U_j, $\Delta(U_j)$ — целая функция от элементов матрицы U_j и ряд композиций от $U_1,\ldots,U_m$ сходится при всех конечных значениях матриц $U_1,\ldots,U_m$; величины $Q_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\varkappa}\,|\,z_0)$ суть функции от $a_1,\ldots,a_m$ и z_0, вычисляемые по рекуррентным формулам. Отсюда видно, что W_j являются мероморфными функциями от матриц $U_1,\ldots,U_m$. Этим Лаппо-Данилевский не только дал явное и генеральное представление для функций W_j (проблема Пуанкаре[1]), но и исчерпывающим образом охарактеризовал W_j как функции от матриц $U_1, \ldots, U_m$. Нас будет далее интересовать построение показательных подстановок и в том случае, когда особая точка $z=a$ матрицы $P(z)$ будет полюсом любого порядка и когда, таким образом, однозначная вокруг $z=a$ функция $N(z-a)$ не будет регулярной в точке $z=a$. Заметим, что для системы (7.8) матрицы W_j подобны матрицам U_j, которые, по Лаппо-Данилевскому, называют дифференциальными подстановками, т. е. $W_j = S_j U_j S_j^{-1}$, где S_j — матрица с $D(S_j) \neq 0$. В том случае, когда имеем систему

$$\frac{dX}{dt} = X \sum_{k=-1}^{\infty} U_k (z-a)^k \tag{7.9}$$

(U_k — постоянные матрицы), в представлении $X(z)=(z-a)^W \overline{X}(z)$, где $\overline{X}(z)$ — однозначная матрица в окрестности $z=a$ и W — постоянная относительно z матрица, мы также имеем [29] $W = SU_{-1}S^{-1}$, если характеристические числа матрицы U_{-1} не отличаются на целые числа. В работе Л. И. Донской [27, 28] выяснено, когда эта формула имеет место при нарушении указанного условия относительно характеристических чисел матрицы P_{-1}. Тот факт, что не всегда $W = SU_{-1}S^{-1}$, отмечен и в книге Ф. Р. Гантмахера [3], который иным способом подтвердил результат Л. И. Донской.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dY}{dz} = Y \sum_{\nu=-s}^{l} T_\nu z^\nu , \tag{7.10}$$

где T_ν — постоянные относительно z матрицы и Y — интегральная матрица, которую будем считать нормированной в точке $z=b$, т. е.

$$Y(z/b)|_{z=b} = I.$$

Согласно предыдущему,

$$Y(z/b) = z^W \overline{Y}(z), \tag{7.11}$$

где W — матрица постоянная относительно z, но является функцией от матриц $T_{-s}, \ldots, T_l$, а $\overline{Y}(z)$ — однозначная мат-

[1] А. Пуанкаре поставил задачу выделения многозначного множителя матрицы $X(z)$, Лаппо-Данилевский решил задачу генерального представления матрицы W через параметры матрицы $P(t)$ и изучения природы W как функции этих параметров.

рица. Обозначим через V интегральную подстановку матрицы (7.10) вокруг точки $z=0$, так что $V=e^{2\pi iW}$.

По теореме Лаппо-Данилевского имеем

$$V=e^{2\pi iW}=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1\ldots p_\nu=-s}^{l} T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}\,b^{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\times$$

$$\times\sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha^{*(0)}_{p_1\ldots p_\mu}\sum_{\varkappa=0}^{\nu-\mu}\alpha^{(\varkappa)}_{p_{\mu+1}\ldots p_\nu}(2\pi i)^{\varkappa}. \tag{7.12}$$

Здесь под знаком второй суммы составляются всевозможные произведения из ν матриц $T_{-s},\ldots,T_l$ и α суть рациональные числа, определенные рекуррентно формулами

$$\alpha^{(0)}_{p_1}=\begin{cases}\dfrac{1}{p_1+1} & p_1+1\neq 0\\ \text{произвольное} & p_1+1=0.\end{cases}$$

Можно, например, положить

$$\alpha^{(1)}_{p_1}=\begin{cases}0 & p_1+1\neq 0\\ 1 & p_1+1=0,\end{cases}$$

$$(p_1+\ldots+p_\nu+\nu)\,\alpha^{(\nu)}_{p_1\ldots p_\nu}=0,$$

$$(p_1+\ldots+p_\nu+\nu)\,\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_\nu}+(\mu+1)\,\alpha^{(\mu+1)}_{p_1\ldots p_\nu}=\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}$$

$$(\mu=\nu-1,\ \nu-2,\ \ldots,\ 1,\ 0).$$

В случае $p_1+\ldots+p_\nu+\nu\neq 0$ имеем

$$\alpha^{(\nu)}_{p_1\ldots p_\nu}=0,\quad \alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_\nu}=\frac{1}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\times$$

$$\times\left[\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}-(\mu+1)\,\alpha^{(\mu+1)}_{p_1\ldots p_\nu}\right].$$

Полагая здесь последовательно $\mu=\nu-1,\ \nu-2,\ \ldots,\ 1, 0$, получим

$$\alpha^{(\nu-1)}_{p_1\ldots p_\nu}=\frac{1}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\,\alpha^{(\nu-1)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}},$$

$$a^{(\nu-2)}_{p_1\ldots p_\nu} = \frac{1}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\times$$

$$\times\left[a^{(\nu-2)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}} - \frac{\nu-1}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu} a^{(\nu-1)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}} \right],$$

$$a^{(\nu-3)}_{p_1\ldots p_\nu} = \frac{1}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\left[a^{(\nu-3)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\nu-2}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu} a^{(\nu-2)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}} + \frac{(\nu-2)(\nu-1)}{(p_1+\ldots+p_\nu+\nu)^2} a^{(\nu-1)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}} \right]$$

и вообще

$$a^{(\mu)}_{p_1\ldots p_\nu} = \frac{1}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\left[a^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}} - \right.$$

$$- \frac{\mu+1}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu} a^{(\mu+1)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}} + \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{(p_1+\ldots+p_\nu+\nu)^2}\times$$

$$\times a^{(\mu+2)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}} + \ldots + (-1)^{\nu-\mu-1}\times$$

$$\left. \times\frac{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\nu-1)}{(p_1+\ldots+p_\nu+\nu)^{\nu-\mu-1}} a^{(\nu-1)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}} \right].$$

В случае $p_1+\ldots+p_\nu+\nu=0$ имеем

$$a^{(\mu+1)}_{p_1\ldots p_\nu} = \frac{1}{\mu+1} a^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}} \quad (\mu=\nu-1,\ \nu-2,\ldots,\ 1, 0)$$

и $a^{(0)}_{p_1\ldots p_\nu}$ произвольные. Полные формулы см. на стр. 188[1].

Ряд[1] для V (7.12) есть целый, т. е. сходится при всех конечных значениях матриц $T_{-s}, \ldots, T_l$, а его коэффициенты не зависят от порядка этих матриц. Лаппо-Данилевский [1] построил также и W в виде ряда композиций от матриц $T_{-s}, \ldots, T_l$, сходящегося в окрестности нулевых значений $T_{-s}, \ldots, T_l$. Этим он разрешил проблему Пуанкаре о представлении W как функции $T_{-s}, \ldots, T_l$ в случае иррегулярной особой точки $z=0$. Более простое выражение для W указано в работе [5]. Именно, там получено W в виде

[1] Соответствующее выражение для V Лаппо-Данилевский построил и в том случае, когда в уравнениях (7.10) будет $l=\infty$. Можно это распространить и на тот случай, когда $s=\infty$.

$$W = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \dots p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} \, b^{p_1 + \dots + p_\nu + \nu} \times$$

$$\times \sum_{\mu=0}^{\nu} a^{*(0)}_{p_1 \dots p_\mu} \, a^{(1)}_{p_{\mu+1} \dots p_\nu} . \tag{7.13}$$

Генеральное представление W (т. е. представление, годное при всех значениях матриц $T_{-s}, \dots, T_l$) и изучение аналитических свойств функций $W = W(T_{-s}, T_{-s+1}, \dots, T_0, T_1, \dots)$ для случая $l = \infty$ выполнено в работах автора [29] и [5]. Эти исследования имеют силу вообще для системы вида

$$\frac{dY}{dz} = Y \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} T_\nu z^\nu . \tag{7.14}$$

В случае системы (7.8) W, как мы видели, есть мероморфная функция матриц $U_1, \dots, U_m$.

В случае иррегулярной особой точки $z = 0$ W является бесконечно значной функцией параметров $(T_{-s}, \dots, T_0, T_1, \dots)$ системы (7.14) [5]. Для случая, когда $T_{-s}, \dots, T_l$ — матрицы второго порядка, генеральное представление W имеем в виде [29]

$$W = \frac{\ln(t + \sqrt{t^2 - 1})}{2\pi i \sqrt{t^2 - 1}} [V e^{-\pi i \sigma(T_{-1})} - t] + \frac{\sigma(T_{-1})}{2} , \tag{7.15}$$

где

$$t = \frac{\sigma(V)}{2} e^{-\pi i \sigma(T_{-1})} .$$

Для V имеем генеральное представление (7.12) в виде целого ряда. Однозначный множитель $\overline{Y}(z)$ в (7.11) Лаппо-Данилевский построил в виде

$$\overline{Y}(z) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \dots p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} \times$$

$$\times \sum_{\mu=0}^{\nu} b^{p_1 + \dots + p_\mu + \mu} z^{p_{\mu+1} + \dots + p_\nu + \nu - \mu} a^{*(0)}_{p_1 \dots p_\mu} \, a^{(0)}_{p_{\mu+1} \dots p_\nu} . \tag{7.15$_1$}$$

§ 8. ФОРМУЛИРОВКА НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В этом параграфе мы будем рассматривать систему линейных однородных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{dX}{dt} = XP(t). \tag{8.1}$$

Здесь $P(t)$ — матрица непрерывная и периодическая с периодом 2π:

$$P(t + 2\pi) = P(t). \tag{8.2}$$

Мы уже отметили, что интегральная матрица (пусть нормированная в точке $t = 0$) представима рядом (6.1), который равномерно сходится в любом конечном промежутке $0 \leqslant t \leqslant p$. В силу периодичности матрицы $P(t)$ матрица $X(t + 2\pi)$ также будет интегральной.

Действительно, при $t = \tau + 2\pi$ из (8.1) получим

$$\frac{dX(\tau + 2\pi)}{d\tau} = X(\tau + 2\pi) P(\tau + 2\pi) = X(\tau + 2\pi) P(\tau),$$

откуда и следует утверждение.

По известному свойству фундаментальной системы решений линейных дифференциальных уравнений $X(t + 2\pi)$ выражается через $X(t)$ равенством

$$X(t + 2\pi) = VX(t), \tag{8.3}$$

где V — постоянная матрица с определителем, отличным от нуля при $t = 0$, откуда получаем

$$X(2\pi) = V. \tag{8.4}$$

Таким образом, интегральная матрица $X(t)$ при увеличении t на период 2π умножается слева на постоянную матрицу V, равную значению $X(t)$ при $t = 2\pi$. Согласно (6.1), имеем

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(2\pi), \quad X_0(t) = \mathrm{I}, \tag{8.5}$$

где $X_k(t)$ определяется равенством (6.2).

Введем в рассмотрение матрицу W равенством

$$2\pi W = \ln V, \quad V = e^{2\pi W} \tag{8.6}$$

и функцию

$$N(t) = e^{-Wt} X(t). \tag{8.7}$$

Функция $N(t)$ будет периодической с периодом 2π. Действительно,

$$N(t+2\pi) = e^{-Wt-2\pi W} X(t+2\pi) = e^{-Wt} e^{-2\pi W} VX(t) = N(t).$$

Отсюда видим, что интегральная матрица системы (8.1), нормированная в точке $t=0$, представима в виде

$$X(t) = e^{Wt} N(t), \tag{8.8}$$

где матрица W определена равенством (8.6) и $N(t)$ — периодическая матрица с периодом 2π.

Поставим теперь следующий вопрос. Когда W и $N(t)$ в равенстве (8.8) будут вещественными матрицами, если $P(t)$ в системе (8.1) вещественная? Так как интегральная подстановка будет вещественной, то, как было показано в § 1, и $\ln V$ будет вещественным (напоминаем, что здесь имеется в виду главное значение $\ln V$), если среди характеристических чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы V отрицательных нет[1].

В том случае, когда имеются отрицательные характеристические числа (нулевых быть не может, так как $D(V) \neq 0$), согласно (1.45), имеем

$$\ln V = V_1 + \pi i V_2, \tag{8.9}$$

где V_1 и V_2 — матрицы вещественные и коммутирующие, причем V_2 имеет вид

$$V_2 = SL(0,1)S^{-1}.$$

Здесь $L(0,1)$ — диагональная матрица, элементы которой равны нулю и единице. Отсюда видим, что если имеются отрицательные характеристические числа матрицы V, то, согласно (8.6) и (8.8), имеем

$$X(t) = e^{\frac{1}{2\pi}V_1 t} e^{\frac{i}{2}SL(0,1)S^{-1}t} N(t)$$

или

$$X(t) = e^{W_1 t} N_1(t). \tag{8.10}$$

---

[1] Из $D(V) = \exp \int\limits_0^{2\pi} \sigma(P(t))\, dt$ видим, что число отрицательных характеристических чисел матрицы V всегда четное (Ляпунов). Поэтому мы всегда можем взять $\ln V$ вещественным. Но это вещественное значение $\ln V$ не будет главным (замечание 1.4), оно не будет и регулярным значением.

Здесь $W_1 = \frac{1}{2\pi} V_1$ — матрица вещественная, поэтому и

$$N_1(t) = e^{\frac{i}{2} SL(0,1) S^{-1} t} N(t)$$

есть матрица вещественная, так как матрица $X(t)$ вещественная. Покажем, что матрица $N_1(t)$ обладает свойством $N_1(t+2\pi) \neq N_1(t)$, но $N_1(t+4\pi) = N_1(t)$. Действительно,

$$N_1(t+2\pi) = e^{\frac{i}{2} SL(0,1) S^{-1} t} e^{\pi i SL(0,1) S^{-1}} N(t) \neq N_1(t),$$

$$e^{\frac{i}{2} SL(0,1) S^{-1} t} N(t) = N_1(t),$$

так как иначе в силу $D(N(t)) \neq 0$ было бы

$$e^{\pi i SL(0,1) S^{-1}} = S e^{\pi i L(0,1)} S^{-1} = SL(e^{2\pi i 0}, e^{\pi i}) S^{-1} =$$

$$= SL(1, -1) S^{-1} = \mathrm{I},$$

что неверно.

Далее имеем

$$N_1(t+4\pi) = N_1(t) e^{2\pi i SL(0,1) S^{-1}} = N_1(t) SL(e^{\pi i 0}, e^{2\pi i}) S^{-1} =$$

$$= N_1(t) SL(1, 1) S^{-1} = N_1(t),$$

так как $SL(1, 1) S^{-1} = \mathrm{I}$.

Таким образом, если среди характеристических чисел матрицы V имеются отрицательные, то интегральную матрицу $X(t)$, нормированную в точке $t = 0$, можно представить в виде (8.10), где W_1 — постоянная вещественная матрица, а матрица $N_1(t)$ вещественная периодическая с периодом 4π,

Это утверждение, в сущности, высказал уже Ляпунов в своей знаменитой диссертации. Мы здесь сформулировали это лишь в несколько иной форме и привели другое доказательство. Заметим еще, что здесь W_1 уже не равно $\frac{1}{2\pi} \ln V$, в то время как ранее, в (8.8), W было равно $\frac{1}{2\pi} \ln V$.

Заметим, однако, что имеем[1]

$$W_1 = \frac{1}{4\pi} \ln X(4\pi) = \frac{1}{4\pi} \ln V^2. \tag{8.11}$$

Если бы мы здесь пользовались формулой (1.46), то наши рассуждения нигде не изменились бы и $N_1(t)$ получнлось

[1] Из (8.10) на основании $N_1(0) = N_1(4\pi) = \mathrm{I}$.

бы тем же (но $N(t)$ было бы другое). Отметим еще, что общее значение (формула (1.46))

$$\ln X(4\pi) = V_1 + \pi i V_2, \tag{8.12}$$

где $V_2 = SL(2m)S^{-1}$ и $L(2m)$ — чисто диагональная матрица с элементами, равными четным числам (и нулям), а V_1 — главное и регулярное значение $\ln X(4\pi)$, если у матрицы $X(4\pi)$ нет отрицательных характеристических чисел (х. ч.). В формуле (8.11) W_1 — матрица вещественная. Но матрица $X(4\pi)$ может иметь отрицательные х. ч. (если матрица $X(2\pi)$ имела чисто мнимые х. ч.), так как $X(4\pi) = X^2(2\pi)$. Поэтому $\ln X(4\pi)$ может оказаться нерегулярным значением (замечание 1.4). Беря же в этом случае главное значение $\ln X(4\pi)$, мы снова имеем

$$\ln X(4\pi) = V_1(4\pi) + \pi i V_2(4\pi),$$

где $V_2(4\pi)$ — матрица, коммутирующая с $V_1(4\pi)$ и имеющая чисто диагональную каноническую форму с х. ч., равными нулю и единице. Тогда можно написать

$$X(t) = \exp W_2 t \cdot N_2(t),$$

где

$$W_2 = \frac{1}{4\pi} V_1(4\pi), \quad N_2(t) = \exp \frac{\pi i}{4\pi} V_2(4\pi) \cdot N_1(t).$$

Имеем также

$$W_2 = \frac{1}{8\pi} \ln X(8\pi), \quad N_2(t + 8\pi) = N_2(t).$$

Может случиться, что мы в конце концов придем к

$$W = \frac{1}{2k\pi} \ln X(2k\pi), \tag{8.13}$$

где $\ln X(2k\pi)$ — *вещественное и главное значение*[1], а $N_k(t)$ — вещественное периодическое с периодом $2k\pi$:

$$X(t) = \exp\left[\left(\frac{1}{2k\pi} \ln(2k\pi)\right) t\right] N_k(t). \tag{8.14}$$

§ 9. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ, ПОСТАВЛЕННЫХ В § 8, НА ОСНОВЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Зададимся вопросом о том, как можно найти выражение для W в формуле (8.8) или W_1 в формуле (8.10).

[1] И регулярное. Очевидно, такое k всегда найдется.

Прежде всего W получаем в виде (8.6) через V, которое представляется сходящимся рядом (8.5). Можно представить W, пользуясь выведенной нами ранее формой полинома Лагранжа. Пусть, например, $P(t)$ — матрица второго порядка. Тогда, как мы видели (1.40), можно написать

$$2\pi W = \ln V = \frac{\sigma \ln D - 2M}{4D - \sigma^2} V + \frac{\sigma M + 2D - \sigma^2}{4D - \sigma^2}, \tag{9.1}$$

$$M = \int_0^1 \frac{\sigma(D - \sigma + 1)t + \sigma^2 - 2D - \sigma}{(D - \sigma + 1)t^2 + (\sigma - 2)t + 1} dt,$$

$$\sigma = \sigma(V), \quad D = D(V).$$

Согласно (8.5), имеем

$$\sigma(V) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma(X_k(2\pi)). \tag{9.2}$$

Если матрица $P(t)$ второго порядка и характеристические числа матрицы V отрицательные[1], то в формуле (8.10) будет

$$N_1(t) = e^{\frac{i}{2}t} N(t). \tag{9.3}$$

Для системы n уравнений W получим по формуле (1.31) (или точнее по (1.39)).

Если же есть отрицательные характеристические числа матрицы V, то в соответствии с (8.11) имеем

$$4\pi W_1 = \ln X(4\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k(4\pi) \tag{9.4}$$

или (см. (8.13)), может быть,

$$2k\pi W = \ln X(2k\pi) \text{ (главное значение).}$$

Пример. Дана система

$$\frac{dX}{dt} = XP(t), \tag{9.5}$$

где $P(t)$ — матрица второго порядка:

$$P(t) = \begin{Vmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{Vmatrix},$$

---

[1] Если имеется одно отрицательное характеристическое число, то и второе будет отрицательным.

элементы которой суть

$$p_{11}(t)=a_{11}\cos^2\frac{t}{2}+a_{22}\sin^2\frac{t}{2}-(a_{12}+a_{21})\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2},$$

$$p_{12}(t)=\frac{1}{2}+a_{12}\cos^2\frac{t}{2}-a_{21}\sin^2\frac{t}{2}+(a_{11}-a_{22})\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2},$$

$$p_{21}(t)=-\frac{1}{2}+a_{21}\cos^2\frac{t}{2}-a_{12}\sin^2\frac{t}{2}+(a_{11}-a_{22})\times$$
$$\times\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2},$$

$$p_{22}(t)=a_{11}\sin^2\frac{t}{2}+a_{22}\cos^2\frac{t}{2}+(a_{21}+a_{12})\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}.$$

Интегральная матрица X, нормированная в точке $t=0$, имеет вид

$$X(t)=e^{\begin{Vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{Vmatrix}t}\begin{Vmatrix}\cos\frac{t}{2} & \sin\frac{t}{2}\\ -\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2}\end{Vmatrix}.$$

Здесь

$$X(2\pi)=-e^{\begin{Vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{Vmatrix}2\pi}=V.$$

Найдем характеристические числа матрицы V. Пусть

$$A=\begin{Vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{Vmatrix}=S\begin{Vmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{Vmatrix}S^{-1},$$

где S — матрица, а λ_1, λ_2 — вещественные числа. Тогда

$$V=S\begin{Vmatrix}-e^{2\pi\lambda_1} & 0\\ 0 & -e^{2\pi\lambda_2}\end{Vmatrix}S^{-1}$$

и, следовательно, характеристические числа μ_1, μ_2 матрицы V равны:

$$\mu_1=-\exp 2\pi\lambda_1,\quad \mu_2=-\exp 2\pi\lambda_2\,.$$

Если

$$\begin{Vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{Vmatrix}=S\begin{Vmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{Vmatrix}S^{-1},$$

то

$$V=S\begin{Vmatrix}-\exp 2\pi\lambda & 0\\ -\exp 2\pi\lambda & -\exp 2\pi\lambda\end{Vmatrix}S^{-1}$$

и $\mu_1=\mu_2=-\exp 2\pi\lambda$.

Таким образом, здесь период матрицы $P(t)$ равен 2π, а в представлении матрицы

$$X = \exp At \cdot N(t)$$

матрица

$$N(t) = \begin{Vmatrix} \cos\frac{t}{2} & \sin\frac{t}{2} \\ -\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{Vmatrix}$$

имеет период 4π и характеристические числа интегральной подстановки V отрицательные.

Пусть теперь дана система

$$\frac{dX}{dt} = XP(t), \tag{9.6}$$

где $P(t)$ — периодическая с периодом 2π вещественная матрица порядка n. Наряду с (9.6) будем рассматривать и систему

$$\frac{dX}{dt} = XP(t)\lambda, \tag{9.7}$$

где λ — вещественный параметр. Найдем решеиие системы (9.7) в виде

$$X = \exp At \cdot Z(t), \tag{9.8}$$

где A — постоянная вещественная матрица и $Z(t)$ — вещественная периодическая матрица. Мы воспользуемся методом, изложенным в работе [14].

Для системы (9.7), согласно (6.5),

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(t)\lambda^k, \quad X_0 = I \tag{9.9}$$

и ряд этот сходится при всех конечных значениях λ. Для матрицы V, согласно (8.5), имеем:

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(2\pi)\lambda^k, \quad X_0 = I \tag{9.10}$$

и этот ряд также сходится при всех конечных λ. Согласно формуле (8.6),

$$A = \frac{1}{2\pi}\ln V = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\lambda^k \tag{9.11}$$

и этот ряд сходится при достаточно малых λ согласно теореме Лаппо-Данилевского [1] или теореме 2.1 этой книги. Из

$$Z(t) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda^k t\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} X_k(t) \lambda^k, \quad X_0 = I$$

видим, что $Z(t)$ представима в виде ряда

$$Z(t) = I + \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(t) \lambda^k . \tag{9.12}$$

Подставляя (9.8) в (9.7) и умножая слева на $\exp(-At)$, получим

$$\frac{dZ}{dt} = ZP\lambda - AZ . \tag{9.13}$$

Подставляя сюда (9.11), (9.12) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим

$$\frac{dZ_k}{dt} = Z_{k-1} P - A_k - \sum_{l=1}^{k-1} A_l Z_{k-l} , \tag{9.14}$$

$$\frac{dZ_1}{dt} = P - A_1. \tag{9.15}$$

Так как $P(t)$ и $Z_1(t)$ — матрицы периодические, то

$$Z_1 = \int_0^t (P(t) - A_1)\, dt , \tag{9.16}$$

$$A_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(t)\, dt , \tag{9.17}$$

$$Z_1 = \int_0^t P(t)\, dt - \frac{t}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(t)\, dt . \tag{9.18}$$

Отсюда видим, что матрица Z_1 имеет период 2π. Z_2 находится из уравнения

$$\frac{dZ_2}{dt} = Z_1 P - A_2 - A_1 Z_1 . \tag{9.19}$$

Так как матрица $Z_1P - AZ_1$ периодическая, то

$$A_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (Z_1P - A_1Z_1)\,dt \tag{9.20}$$

и

$$Z_2 = \int_0^t (Z_1P - A_1Z_1)\,dt - A_2t. \tag{9.21}$$

Вообще имеем:

$$A_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[Z_{k-1}P - \sum_{l=1}^{k-1} A_lZ_{k-l}\right]dt, \tag{9.22}$$

$$Z_k = \int_0^t\left[Z_{k-1}P - \sum_{l=1}^{k-1} A_lZ_{k-l}\right]dt - A_kt. \tag{9.23}$$

Таким образом, коэффициенты рядов (9.11), (9.12) будут найдены и эти ряды будут сходиться при достаточно малых λ. Если они сходятся[1] и при $\lambda = 1$, то мы получим решение системы (9.6), полагая в (9.11) и (9.12) $\lambda = 1$.

Обращаем внимание на следующее обстоятельство. Мы видели ранее, что в формуле (9.8) вещественными A и $Z(t)$ иногда будут лишь при условии, что $Z(t)$ будет иметь период 4π, а не 2π. Здесь же, в (9.11) и (9.12), A и Z_1 будут всегда вещественными, а $Z(t)$ имеет период 2π. Кажущееся противоречие объясняется тем, что при достаточно малых λ матрица V, данная рядом (9.11), будет всегда близка к единичной матрице, а следовательно, ее характеристические числа будут близкими к единице. Другими словами, при малых λ характеристические числа матрицы V не будут отрицательными, и поэтому, согласно ранее сказанному, при малых λ матрицы A и $Z(t)$ в формуле (9.8) будут вещественными, а $Z(t)$ будет иметь период 2π. Эти рассуждения показывают, что ряды (9.11) и (9.12) не могут быть сходящимися при таких λ, при которых V имеет отрицательные характеристические числа. В примере (9.5) матрица P такова, что для системы (9.7) ряды (9.11) и (9.12) наверное расходятся при $\lambda = 1$, так как интегральная подстановка V для системы (9.5), как мы видели, имеет отрицательные характеристические числа, и A, $Z(t)$ будут вещественными только тогда, когда период $Z(t)$ будет равен 4π.

Это обстоятельство уже ограничивает применение указанного метода. Для некоторых систем ряды (9.11), (9.12)

---

[1] См. § 2.

могут, конечно, сходиться при $\lambda = 1$ и даже могут быть целыми (как показано в § 2).

В упоминавшейся работе [14] показано, что если матрица второго порядка $P(t)$ имеет период $\omega = 1$ и $|p_{21}(t)| \leqslant a_1$, $|p_{12}(t)| \leqslant a_2$, то ряды (9.11) и (9.12) наверное сходятся при $|\lambda| < \frac{\ln 2}{\sqrt{a_1 a_2}}$. Следовательно, при $a_1 a_2 < \ln^2 2$ эти ряды сходятся и при $\lambda = 1$ (см. § 11 этой книги).

В вопросах устойчивости часто важно иметь лишь представление о величине характеристических чисел матрицы A. Из замечания 2.2 и теоремы 2.2 вытекает, что если на основании ряда (9.11) мы составим инварианты матрицы A, т. е. $D(A)$ и $\sigma(A)$, то ряды, представляющие эти величины, будут сходиться в области $|\lambda| < \lambda_1$, в которой нет более одной точки[1] λ_0 ветвления корней характеристического уравнения матрицы (9.10). Отсюда следует[2], что ряд (7.13), а также ряды инвариантов $\sigma(W)$ и $D(W)$ показательной подстановки W (7.13), построенной Лаппо-Данилевским, будут сходиться, по крайней мере, в области матриц $T_{-s}, \ldots, T_l$, где, кроме $T_{-s} = \ldots = T_l = 0$, нет равенства нулю дискриминанта характеристического уравнения матрицы (7.12).

Следует обратить внимание на то, что инварианты матрицы W совпадают с инвариантами матрицы H, построенной Лаппо-Данилевским в виде

$$H = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \ldots p_\nu = -s}^{l} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} \delta^{(0)}_{p_1 + \ldots + p_\nu + \nu} \alpha^{(1)}_{p_1 \ldots p_\nu}, \tag{9.24}$$

где $\delta^{(0)}_p$ — символ Кронекера и $\alpha^{(1)}_{p_1 \ldots p_\nu}$ определены формулами § 7. Здесь H — показательная подстановка так называемой метаканонической интегральной матрицы [1] системы (7.14)

$$Z(z) = z^H \overline{Z}(z),$$

где

$$\overline{Z}(z) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \ldots p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} z^{p_1 + \cdots + p_\nu + \nu} \alpha^{(0)}_{p_1 \ldots p_\nu}. \tag{9.24$_1$}$$

Матрица H подобна матрице W. Это позволяет приближенно находить характеристические числа матрицы A на основании

[1] При этом мы должны взять ту ветвь $D(A)$, которая однозначна в окрестности точки ветвления λ_0 (см. замечание 2.2).

[2] Так как A и W определяются аналогично. В этом па... мы установим точное равенство, связывающее A и W.

ряда (9.11), где A_k определены формулами (9.17), (9.20), (9.22) и при $\lambda = 1$, если $\sigma^2(V) - 4D(V) \neq 0$ при $|\lambda| \leqslant 1$, $\lambda \neq 0$, т. е. если

$$\sigma^2(V) - 4\exp\lambda\int_0^{2\pi}\sigma(P)\,dt \neq 0$$

при $|\lambda| \leqslant 1$, $\lambda \neq 0$.

Характеристическое уравнение для матрицы A второго порядка имеет вид

$$\lambda^2 - \sigma(A)\lambda + D(A) = 0. \tag{9.25}$$

На основании формулы Якоби

$$D(X(2\pi)) = D(\exp 2\pi A)\,D(Z(2\pi)) =$$

$$= \exp\sigma(2\pi A)\cdot D(Z(2\pi)) = \exp\int_0^{2\pi}\sigma(P)\,dt.$$

Здесь периодическая с периодом 2π матрица $Z(t)_{t=0} = \mathrm{I}$ (см. (9.9)) (ибо $X(0) = \mathrm{I}$), поэтому $D(Z(2\pi)) = 1$. Следовательно,

$$\exp\sigma(2\pi A) = \exp\int_0^{2\pi}\sigma(P)\,dt,$$

$$\sigma(A) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sigma(P)\,dt. \tag{9.26}$$

Заметим теперь, что здесь могут быть случаи:

$$\sigma(A) > 0, \quad D(A) > 0, \quad \sigma^2(A) - 4D(A) > 0, \tag{9.27}$$

тогда характеристические числа матрицы A положительные;

$$\sigma(A) \geqslant 0, \quad D(A) < 0 \quad \text{или } \sigma(A) < 0,\ D(A) < 0,$$

$$\sigma^2(A) - 4D(A) > 0, \tag{9.28}$$

в этом случае одно характеристическое число положительное, другое отрицательное;

$$\sigma(A) < 0, \quad D(A) > 0, \quad \sigma^2(A) - 4D(A) > 0 \tag{9.29}$$

— характеристические числа отрицательные;

$$\sigma(A) = 0, \quad D(A) > 0 \tag{9.30}$$

— характеристические числа чисто мнимые;

$$\sigma^2(A) - 4D(A) = 0 \tag{9.31}$$

— характеристические числа совпадают, а при $\sigma(A)=0$ равны нулю;

$$\sigma^2(A)-4D(A)<0 \tag{9.32}$$

— характеристические числа комплексные с вещественной частью, равной $\frac{\sigma(A)}{2}$.

Далее мы отметим некоторые случаи, когда вещественная матрица A n-го порядка и все ее характеристические числа суть чисто мнимые (§ 16, 44).

§ 10. РАЗЛОЖЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ МАТРИЦЫ В РЯД ПО ПАРАМЕТРУ

Рассмотрим теперь систему вида

$$\frac{dX}{dt}=X\sum_{k=0}^{\infty}P_k(t)\varepsilon^k. \tag{10.1}$$

Здесь $P_k(t)$ — матрицы n-го порядка, непрерывные и периодические с периодом 2π. Ряд (10.1) сходится при $|\varepsilon|<r$. Согласно теореме 6.1, интегральную, нормированную в точке $t=0$ матрицу уравнения (10.1) имеем в виде ряда

$$X(t)=\sum_{k=0}^{\infty}X_k(t)\varepsilon^k,\ X_0(0)=\mathrm{I},\ X_k(0)=0,\ k\geqslant 1, \tag{6.14}$$

сходящегося при $|\varepsilon|<r$. Следовательно, интегральную подстановку имеем в виде

$$V(\varepsilon)=X(2\pi)=\sum_{k=0}^{\infty}X_k(2\pi)\varepsilon^k,\quad |\varepsilon|<r. \tag{10.2}$$

В § 8 было показано, что интегральная матрица (6.14) представима в виде (8.8)

$$X(t,\varepsilon)=\exp(W(\varepsilon)t)\cdot Z(t,\varepsilon), \tag{10.3}$$

где W — вещественная постоянная матрица, определяемая равенством (8.6),

$2\pi W(\varepsilon)=\ln V(\varepsilon)$ (главное и регулярное значение), (10.4) и $Z(t,\varepsilon)$ — периодическая вещественная матрица с периодом 2π, если среди х. ч. матрицы $V(\varepsilon)$ нет отрицательных. Если же среди х. ч. матрицы $V(\varepsilon)$ есть отрицательные, то $W(\varepsilon)$, определяемая равенством (10.4), не будет[1] вещественной (см. (8.9)).

---

[1] Если берём главное или регулярное значение $\ln V(\varepsilon)$.

Если желаем W в (10.3) иметь вещественной, то надо взять (см. (8.11))

$$4\pi W(\varepsilon) = \ln X(4\pi), \tag{10.5}$$

при этом $N(t, \varepsilon)$ будет иметь период 4π. Но здесь $\ln X(4\pi)$ может оказаться неглавным значением (и нерегулярным), если желаем эту величину иметь вещественной. Но всегда можно взять (см. (8.13))

$$W = \frac{1}{2k\pi} \ln X(2k\pi) \quad (k \text{ — целое } > 0), \tag{10.6}$$

так что $\ln X(2k\pi)$ будет вещественным, регулярным и главным значением. При этом $Z_k(t, \varepsilon)$ в формуле

$$X(t, \varepsilon) = \exp W(\varepsilon)\, t \cdot Z_k(t, \varepsilon) \tag{10.7}$$

будет периодической с периодом $2k\pi$.

На основании теорем § 2 $W(\varepsilon)$ и $Z(t, \varepsilon)$ можно представить в виде рядов по положительным степеням ε (если $\ln X(2k\pi)$ в (10.6) главное (или регулярное) значение)[1].

Предположим, что интегральная матрица $X_0(t)$ предельной системы

$$\frac{dX_0}{dt} = X_0(t) P_0(t), \quad X_0(0) = I \tag{10.8}$$

получена в виде

$$X_0(t) = \exp(A_0 t) \cdot Z_0(t), \quad Z_0(0) = I, \quad Z_0(t + 2\pi) = Z_0(t). \tag{10.9}$$

Если среди х. ч. матрицы $V_0 = X_0(2\pi)$ нет отрицательных, то это возможно. В этом случае х. ч. матрицы $V(\varepsilon)$ при малых ε, очевидно, не будут отрицательными и $W(\varepsilon)$ в формуле (10.3) будет вещественным, а $Z(t, \varepsilon)$ — с периодом 2π. Матрица A_0 в (10.9) определяется равенством (см. (8.6))

$$2\pi A_0 = \ln X_0(2\pi), \tag{10.10}$$

и мы можем считать здесь $\ln X_0(2\pi)$ главным значением. Тогда, очевидно, х. ч. a_k ($k = 1, \ldots, n$) матрицы A_0 удовлетворяют условию $a_k - a_l \neq im$ (m — целое число) или $\ln X_0(2\pi)$ будет регулярным значением.

По теореме 2.1 имеем $W(\varepsilon)$ в виде ряда

$$W(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k \varepsilon^k, \quad 2\pi W_0 = \ln X_0(2\pi) = 2\pi A_0, \tag{10.11}$$

---

[1] Но иногда $\ln X(2k\pi)$ можем взять и иррегулярным значением (замечание 2.3).

сходящегося, по крайней мере (замечание 2.1), в круге $|\varepsilon| \leqslant R < r$, в котором при $\varepsilon \neq 0$ нет нуля дискриминанта $\Delta(\varepsilon)$ характеристического уравнения матрицы (10.2)

$$\lambda^n + V_1(\varepsilon)\lambda^{n-1} + \ldots + V_{n-1}(\varepsilon)\lambda + V_n(\varepsilon) = 0. \qquad (10.12)$$

Здесь $V_k(\varepsilon)$ — ряды, сходящиеся в той же области, что и ряд (10.2). Если х. ч. матрицы $X_0(2\pi)$ не только не отрицательные, но и различные, то ряд (10.11) сходится и в круге $|\varepsilon| \leqslant R < r$, где нет более одного нуля дискриминанта $\Delta(\varepsilon)$. При этом $\ln V(\varepsilon)$ нужно взять таким, чтобы он был однозначным в окрестности точки $\varepsilon = \varepsilon_*$, где дискриминант $\Delta(\varepsilon)$ обращается в нуль. В области сходимости ряда (10.11) матрицы $W(\varepsilon)$, $Z(t, \varepsilon)$ остаются вещественными и $Z(t, \varepsilon)$ имеет период 2π.

Предположим теперь, что имеются и отрицательные х. ч. матрицы $X_0(2\pi)$. Тогда снова найдем ряд (10.11), но он не будет давать вещественной функции, если будем требовать, чтобы было $Z(t + 2\pi, \varepsilon) = Z(t, \varepsilon)$. Если же матрица $X_0(4\pi) = X_0^2(2\pi)$ не имеет отрицательных х. ч. и мы будем считать функцию $Z(t, \varepsilon)$ с периодом 4π, то $W(\varepsilon)$ опять можем найти в виде (10.11) и оно будет вещественным. Но в последнем случае и $Z_0(t)$ в (10.9) будет иметь период 4π, а $W(\varepsilon)$ находим в соответствии с (10.5), где $X(4\pi)$ не имеет отрицательных х. ч. Всякий раз, когда ряд (10.11) сходится, будет сходиться и ряд

$$Z(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(t)\,\varepsilon^k, \qquad (10.13)$$

что видно из (6.14) и (10.3).

Частным случаем системы (10.1) будет тот, когда матрица $P_0(t) = P_0$ будет *постоянной*. Тогда $X_0(t) = \exp P_0(t)$. Если х. ч. P_k^0 $(k = 1, \ldots, n)$ матрицы P_0 таковы, что $P_k^0 - P_l^0 \neq im$ (m — целое число), то можно в соответствии с (10.9) считать $A_0 = P_0$, $Z_0(t) = \mathrm{I}$.

Предположим теперь, что имеется[1] $P_k^0 - P_l^0 = im$, но матрица $\exp 2\pi P_0$ не имеет отрицательных х. ч. Тогда $2\pi P_0 = \ln \exp 2\pi P_0$ не является регулярным значением. Но мы можем написать

$$X_0(t) = \exp A_0 t Z_0(t), \qquad (10.14)$$

где $2\pi A_0 = \ln \exp 2\pi P_0$ — главное (и регулярное) значение и

$$Z_0(t) = \exp(-A_0 t)\exp P_0 t.$$

[1] Например, $P_0 = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$, $P_1^0 - P_2^0 = 2i$, $\exp 2\pi P_0 = \mathrm{I}$.

Здесь A_0 — матрица вещественная (так как матрица $\exp 2\pi P_0$ не имеет отрицательных х. ч.), а $Z_0(t)$ — вещественная периодическая с периодом 2π. В самом деле,

$$Z_0(t+2\pi) = \exp[-2\pi A_0]\cdot\exp 2\pi P_0\cdot\exp[-A_0 t]\cdot\exp P_0 t = \\ = \exp[-A_0 t]\cdot\exp P_0 t,$$

так как

$$\exp[-2\pi A_0]\cdot\exp[2\pi P_0] = \\ = \exp[-2\pi A_0]\cdot\exp[\ln\exp 2\pi P_0] = I,$$

ибо $2\pi A_0 = \ln\exp 2\pi P_0$ и матрицы $\exp[-A_0 t_1]$, $\exp P_0 t_2$ коммутируют[1].

Таким образом, $2\pi A_0$ в (10.14) будет главным значением $\ln\exp 2\pi P_0$.

Мы могли бы в этом случае поступить иначе. Именно, так как $2\pi P_0 = \ln\exp 2\pi P_0$ не является регулярным значением, то можно написать (см. (1.46))

$$P_0 = A_1 + iA_2 = \frac{1}{2\pi}\ln\exp 2\pi P_0\,, \tag{10.15}$$

где матрицы A_1, A_2 коммутируют, $2\pi A_1 = \ln\exp 2\pi A_1$ есть главное (и регулярное) значение, A_1 — вещественная матрица, а матрица A_2 имеет х. ч., равные нулю и целым числам. Тогда

$$X_0(t) = \exp P_0 t = \exp A_1 t\cdot\exp iA_2 t = \exp A_1 t\cdot Z_0(t)\,,$$

где матрица

$$Z_0(t) = \exp iA_2 t \tag{10.15$_1$}$$

периодическая с периодом 2π и вещественная, так как матрицы P_0 и A_1 вещественные. Мы получили (10.14). Если матрица $\exp 2\pi P_0$ имеет отрицательные[2] х. ч., то главное (и регулярное) значение $\ln\exp 2\pi P_0$ будет комплексным согласно (1.45), причем A_2 в (10.15) имеет х. ч., равные 1/2, если они соответствуют отрицательным х. ч., поэтому функция (10.15$_1$) имеет период 4π. Следовательно, нет $\exp 2\pi P_0 = \exp 2\pi A_1$, а есть $\exp 4\pi P_0 = \exp 4\pi A_1$.

Но если матрица $\exp 4\pi P_0$ не имеет отрицательных х. ч., то мы можем написать

$$\exp P_0 t = \exp B_0 t\cdot Z_0(t), \tag{10.16}$$

---

[1] $2\pi A_0 = \ln\exp 2\pi P_0$ — главное (и регулярное) значение, поэтому является полиномом (Лагранжа) от P_0.

[2] Например, $P_0 = \begin{Vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{Vmatrix} = S\begin{Vmatrix} i/2 & 0 \\ 0 & -i/2 \end{Vmatrix}S^{-1}$, $\exp 2\pi P_0 = -I$.

где в качестве $4\pi B_0$ нужно взять главное значение $\ln \exp 4\pi P_0$ (оно будет регулярным и вещественным) или поступить по второму способу, т. е. воспользоваться (10.15). Именно, нужно написать

$$X_0(t) = \exp P_0 t = \exp A_1 t \cdot \exp i A_2 t,$$

где второй множитель — функция периодическая с периодом 4π, а $4\pi A_1 = \ln \exp 4\pi A_1$ — главное значение — будет регулярным и вещественным (если матрица $\exp 4\pi P_0$ не имеет отрицательных характеристических чисел). Если мы не обязательно хотим иметь в (10.11) W_0 (а тем самым и W) вещественным, то во всех случаях (т. е. и тогда, когда матрица $\exp 4\pi P_0$ имеет отрицательные х. ч.) можем взять в (10.14) за $4\pi A_0$ главное и регулярное значение $\ln \exp 4\pi P_0$. Но во многих случаях необходимо получить A_0 вещественной. A_0 можно получить всегда вещественной на основании (8.13), при этом $Z_0(t)$ будет иметь период $2k\pi$.

Таким образом, во всех случаях мы имеем (10.3), где $W(\varepsilon)$ и $Z(t, \varepsilon)$ вещественные, представимые в виде рядов (10.11) и (10.13). При этом: 1) если матрица $X_0(2\pi)$ не имеет отрицательных х. ч., то A_0 определяется равенством (10.10) главным значением $\ln X_0(2\pi)$, а матрица $Z_0(t)$ будет вещественной периодической с периодом 2π; 2) если же матрица $X_0(2\pi)$ имеет отрицательные х. ч., но матрица $X_0(4\pi)$ не имеет их, то вещественная матрица A_0 определяется главным значением:

$$4\pi A_0 = \ln X_0(4\pi), \tag{10.17}$$

а матрица $Z_0(t)$ будет вещественной периодической с периодом 4π.

Пусть P_0 — постоянная, матрица $\exp 2\pi P_0$ не имеет отрицательных х. ч., но есть $P_k^0 - P_l^0 = mi$. Тогда можно поступить и так. Вводя[1] (10.15) новую неизвестную матрицу[2] Y: $X = Y \exp iA_2 t$ и подставляя это в (10.1), найдем

$$YiA_2 \exp iA_2 t + \frac{dY}{dt} \exp iA_2 t = Y \exp iA_2 t \cdot (P_0 + P_1(t)\varepsilon + \ldots).$$

Так как $P_0 = A_1 + iA_2$ и A_2 коммутируют с A_1, то, умножая полученное равенство на $\exp(-A_2 it)$ справа, получим

---

[1] Напоминаем, что так как у матрицы $\exp 2\pi P_0$ нет отрицательных х. ч., то х. ч. матрицы A_2 в (10.15) — целые числа.

[2] Впервые такое преобразование использовано в [7], где . . . . вопрос и о разложении в ряд характеристических чисел матрицы (10. 1). См. также [30].

$$\frac{dY}{dt} = Y\,[A_1 + \exp iA_2t\,(P_1(t)\,\varepsilon + \ldots)\cdot\exp(-iA_2t)]\,.$$

Так как матрица $\exp iA_2t$ периодическая с периодом 2π, то мы имеем

$$\frac{dY}{dt} = Y\,[A_1 + \overline{P}_1(t)\,\varepsilon + \overline{P}_2(t)\,\varepsilon^2 + \ldots]\,,$$

где $\overline{P}_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ периодические с периодом 2π, а $\ln\exp 2\pi A_1 = 2\pi A_1$ есть главное значение. Вместо преобразования $X = Y\exp iA_2t$ можно было бы сделать преобразование

$$X = Y\exp(-A_0t)\cdot\exp P_0t,$$

где $2\pi A_0 = \ln\exp 2\pi P_0$ есть главное значение, что, согласно предыдущему, то же самое.

Аналогичное преобразование можно сделать и в том случае, когда матрица $\exp 2\pi P_0$ имеет отрицательные х. ч., но матрица $\exp 4\pi P_0$ не имеет их. Именно, можно ввести Y равенством

$$X = Y\exp(-A_0t)\cdot\exp P_0t,$$

где вещественная матрица $4\pi A_0 = \ln\exp 4\pi P_0$ есть главное и регулярное значение. Или можно в этом случае написать

$$X_0(t) = \exp A_0t\cdot\exp(-A_0t)\cdot\exp P_0t = \exp A_0t\cdot Z_0(t),$$

где

$$4\pi A_0 = \ln\exp 4\pi P_0$$

есть главное значение, а матрица

$$Z_0(t) = \exp(-A_0t)\cdot\exp P_0t$$

является периодической с периодом 4π.

В самом деле,

$$Z_0(t + 4\pi) = \exp(-4A_0\pi)\cdot\exp 4\pi P_0\cdot\exp(-A_0t)\cdot\exp P_0t =$$

$$= \exp(-A_0t)\cdot\exp P_0t,$$

так как

$$\exp(-4\pi A_0)\cdot\exp 4\pi P_0 =$$

$$= \exp(-4\pi A_0)\cdot\exp[\ln\exp 4\pi P_0] = I.$$

Теперь в разложениях (10.11) и (10.13) надо полагать соответственно

$$4\pi W_0 = 4\pi A_0 = \ln\exp X_0(4\pi) = \ln\exp 4\pi P_0$$

и

$$Z_0(t) = \exp(-A_0t)\cdot\exp P_0t.$$

Впрочем, в этом случае будем иметь (см. (1.44), (1.45), (1.46)) $P_0 = A_1 + iA_2$, где вещественная матрица A_1 коммутирует с матрицей A_2, имеющей чисто диагональную каноническую форму, х. ч. которой будут равны нулям, целым числам и $k + 1/2$, где k — целое число. Следовательно,

$$\exp P_0 t = \exp A_1 t \cdot \exp \pi i A_2 t.$$

Можно поэтому или положить в (10.11), (10.13)

$$W_0 = A_1, \quad Z_0(t) = \exp \pi i A_2 t$$

или ввести Y равенством

$$X = Y \exp \pi i A_2 t.$$

Заметим еще, что если имеем $P_k^0 - P_l^0 = im$, то, согласно теореме 2.3, замечанию 2.3 и примеру к ним, в некоторых случаях можно полагать в (10.11)

$$2\pi W_0 = \ln X_0(2\pi) = \ln \exp 2\pi P_0 + S_0 [2m_1 \pi i \, I_{\rho_1}, \ldots; \\ 2m_\nu \pi i \, I_{\rho_\nu}] S_0^{-1},$$

где (см. (2.11)) $\ln \exp 2\pi P_0$ — главное значение. Но здесь W_0 может оказаться и комплексной.

§ 11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ МАТРИЦЫ В РЯД

Найдем коэффициенты разложений (10.11), (10.13).

Подставляя (10.3) в (10.1), мы после умножения слева на $\exp(-W(\varepsilon)t)$ получим

$$\frac{dZ(t, \varepsilon)}{dt} = Z(t, \varepsilon) \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \varepsilon^k - W(\varepsilon) Z(t, \varepsilon). \qquad (11.1)$$

Подставляя сюда разложения (10.11) и (10.13) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим

$$\frac{dZ_k(t)}{dt} = Z_k(t) P_0(t) - W_0 Z_k(t) + \\ + \sum_{\nu=1}^{k} Z_{k-\nu}(t) P_\nu(t) - \sum_{\nu=0}^{k-1} W_{k-\nu} Z_\nu(t). \qquad (11.2)$$

Предположим, что в (10.10) $X_0(2\pi)$ не имеет отрицательных х. ч. Тогда

$$Z_0(0) = I, \quad Z_k(t + 2\pi) = Z_k(t) \tag{11.3}$$

и в соответствии с (10.11)

$$2\pi W_0 = 2\pi A_0 = \ln X_0(2\pi).$$

Запишем короче систему (11.2) в виде

$$\frac{dZ_k(t)}{dt} = Z_k(t) P_0(t) - A_0 Z_k(t) + F_k(t) - W_k Z_0(t), \tag{11.4}$$

где периодическая матрица $F_k(t)$ с периодом 2π имеет вид

$$F_k(t) = \sum_{\nu=1}^{k} Z_{k-\nu}(t) P_\nu(t) - \sum_{\nu=1}^{k-1} W_{k-\nu} Z_\nu(t). \tag{11.5}$$

Общим решением системы

$$\frac{dY}{dt} = YP_0(t) - A_0 Y \tag{11.6}$$

будет

$$Y = \exp(-A_0 t) \cdot CX_0(t), \tag{11.7}$$

где C — произвольния постоянная матрица, а $X_0(t)$ — решение уравнения (10.8), данное формулой (10.14).

Решение системы (11.4) можно искать в виде

$$Z_k(t) = \exp(-A_0 t) \cdot C(t) X_0(t). \tag{11.8}$$

Подставляя это в (11.4), на основании (10.8) и (10.14) получим

$$\frac{dC}{dt} = \exp(A_0 t) \cdot [F_k(t) - W_k Z_0(t)] Z_0^{-1}(t) \cdot \exp(-A_0 t).$$

Отсюда

$$C(t) = \int_0^t \exp A_0 t [F_k(t) Z_0^{-1}(t) - W_k] \cdot \exp(-A_0 t)\, dt.$$

Подставим это в (11.8):

$$Z_k(t) = \exp(-A_0 t) \int_0^t \exp(A_0 t) [F_k(t) Z_0^{-1}(t) - W_k] \times$$

$$\times \exp(-A_0 t)\, dt \cdot \exp A_0 t \cdot Z_0(t). \tag{11.9}$$

Подчиняя[1] $Z_k(t)$ условию периодичности

[1] Впервые в сущности так стал определять $Z_k(t)$ и W_k Н. А. Артемьев [9], а затем независимо от него этот же метод возник в работах [14] (октябрь 1942 г.) и [10] (здесь для систем даже более общего вида).

$$Z_k(t+2\pi) = Z_k(t),\ t=0,$$

получим уравнение

$$\int_0^{2\pi} \exp A_0 t\, [F_k(t)\, Z_0^{-1}(t) - W_k] \cdot \exp(-A_0 t)\, dt = 0, \quad (11.10)$$

из которого найдем W_k.

Формула (11.9) дает решение уравнения (11.4), удовлетворяющее условию $Z_k(0) = 0$. Решение, подчиненное условию $Z_k(0) \neq 0$, очевидно имеем в виде

$$Z_k(t) = \exp(-A_0 t) \int_0^t \exp A_0 t \cdot [F_k(t)\, Z_0^{-1}(t) - W_k] \times$$

$$\times \exp(-A_0 t)\, dt \cdot \exp A_0 t \cdot Z_0(t) + \exp(-A_0 t) \cdot Z_k(0)\, X_0(t). \quad (11.11)$$

Из условия

$$Z_k(0) = Z_k(2\pi) \quad (11.11_1)$$

мы найдем такое W_k, при котором $Z_k(t)$ будет периодическим для любого $Z_k(0)$. Наоборот, можно взять произвольным W_k и, например,

$$W_{k_{\text{ср}}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_k(t)\, dt,$$

а найти $Z_k(0)$ из (11.11_1), и тогда снова $Z_k(t)$ будет периодическим с периодом 2π.

При $Z_0(t) = \mathrm{I}$ и $Z_k(0) = 0$ матрицу W_k находим из уравнения

$$\int_0^{2\pi} \exp A_0 t \cdot [F_k(t) - W_k] \exp(-A_0 t)\, dt = 0. \quad (11.11_2)$$

Рассмотрим подробнее тот частный случай, когда в системе (10.1) матрица $P_0(t) = P_0$ постоянная.

Пусть матрица $\exp 2\pi P_0$ не имеет отрицательных х. ч., а $2\pi P_0 = \ln \exp 2\pi P_0$ есть главное значение. Таким образом, мы можем положить $W_0 = P_0$ и $Z_0(t) = \mathrm{I}$.

Мы изучим подробнее уравнение (11.4), где теперь надо положить $Z_0(t) = \mathrm{I}$, $P_0(t) = P_0 = A_0$. Обозначим через λ_m х. ч. матрицы P_0. Пусть J — каноническая матрица: $J = S^{-1} P_0 S$ и $W = S^{-1} W_k S$, $Z = S^{-1} Z_k S$, $F = S^{-1} F_k S$. Умножая уравнение (11.4) слева на S^{-1} и справа на S, мы получим уравнение вида (11.4), где надо лишь заменить P_0 на J, W_k на W, Z_k на Z и F_k на F:

$$\frac{dZ}{dt} = ZJ - JZ + F(t) - W. \tag{11.12}$$

Обозначая через b_{kl} вообще элементы матрицы B, мы в развернутой форме (11.12) напишем так:

$$\frac{dz_{k,l}}{dt} = -\delta_k z_{k-l,l} - \lambda_k z_{k,l} + \lambda_l z_{k,l} + z_{k,l+1}\delta_l + F_{k,l} - \\ - w_{k,l}. \tag{11.13}$$

Здесь числа δ_m равны нулю и единице. Они равны нулю, если элементарный делитель корня λ_m простой или если определяется $z_{k,l}$, стоящий в вершине жорданова ящика на главной диагонали, соответствующего корню λ_m.

Если

$$\lambda_k \neq \lambda_l + mi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots),$$

то из (11.13) $z_{k,l}$ находятся периодические при любом[1] $w_{k,l}$:

$$z_{k,l} = \exp[(\lambda_l - \lambda_k)t] \cdot [c + \int_0^t f(t)\exp(-(\lambda_l - \lambda_k)t)\,dt], \tag{11.14}$$

где

$$f(t) = -\delta_k z_{k-l,l} + \delta_l z_{k,l+1} + F_{k,l} - w_{k,l}$$

— функция периодическая, а постоянная c определяется равенством

$$(\exp[(\lambda_l - \lambda_k)2\pi] - 1)c - \int_0^{2\pi} f(t)\exp(-(\lambda_l - \lambda_k)t)\,dt = 0. \tag{11.15}$$

Если положим $c = 0$, а $w_{k,l}$ найдем из равенства (11.15), то получим $z_{k,l}(t)$ периодической и $z_{k,l}(0) = 0$.

Можно в (11.14) взять c произвольным, а $w_{k,l}$ выбрать так, что $z_{k,l}(t)$ будет периодической. Можно, наконец, взять

$$w_{k,l_{\text{ср}}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_{k,l}\,dt,$$

а c выбрать так, чтобы $z_{k,l}$ было периодическим.

---

[1] И в том числе при $w_{k,l} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_{k,l}\,dt$.

При $\lambda_k = \lambda_l = \lambda$ элемент $z_{k,l}$, соответствующий вершине жорданова ящика неглавной диагонали, соответствующего корню λ, находится из уравнения (11.13) при $\delta_k = \delta_l = 0$, т. е.

$$z_{k,l} = \int_0^t (F_{k,l} - w_{k,l_{\text{ср}}})\, dt + c_{k,l}, \tag{11.16}$$

где $c_{k,l}$—произвольная постоянная.

При $c_{k,l} = 0$ функция $z_{k,l}$ будет периодической и $z_{k,l_{\text{ср}}} = 0$. Остальные элементы $z_{k,l}$ этого квадрата будут находиться из уравнения (11.13) в виде ($\lambda_k = \lambda_l$):

$$z_{k,l} = \int_0^t [-\delta_k z_{k-i,l} + z_{k,l+1}\delta_l + F_{k,l} - w_{k,l_{\text{ср}}}]\, dt + c_{k,l}, \tag{11.17}$$

где $c_{k,l}$ — произвольная постоянная. При $c_{k,l} = 0$ элемент $z_{k,l}$ будет периодическим со средним значением, равным нулю.

Таким образом, в (11.12) можно всегда брать[1] $W_{\text{ср}}$, а C находить так, что $Z(t)$ будет периодическим с периодом 2π или полагать[2] $C = 0$, а W находить так, чтобы $Z(t)$ было периодическим. Или, наконец, можно брать $Z(0)$ произвольным (выбирая соответственно C) и W находить так, чтобы $Z(t)$ было периодическим. Такое W найдется и единственное. Следует, однако, заметить, что, полагая в (11.4) $Z_k(0) = 0$ (т. е. $C_k = 0$) и определяя W_k так, чтобы $Z_k(t)$ были периодическими с периодом 2π, мы получим сходящиеся (в области, указанной в теореме 2.1 и замечании 2.2) ряды (10.11) и (10.13).

Замечание 11.1. Если $X(t, \varepsilon)$ — нормированная интегральная матрица, т. е. $X(0, \varepsilon) = \text{I}$ или $Z_0(0) = 1$, $Z_k(0) = 0$ $(k \geqslant 1)$, то (Н. А. Артемьев [9])

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \varepsilon^k \cdot X(t, \varepsilon).$$

есть интегральная матрица[3] [9, 7, 12, 13] с $Z_k(0) = A_k$ $(k \geqslant 1)$, где $A_0 = \text{I}$; ряд $A = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k \varepsilon^k$ предполагаем сходящимся. По-

---

[1] $$W_{\text{ср}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)\, dt.$$

[2] То есть $Z(0) = 0$.

[3] Ниже следующий анализ проведен в [13].

касательная матрица $\overline{W}$ интегральной матрицы

$$Y = \exp(\overline{W}(\varepsilon)\, t)\cdot \overline{Z}(t, \varepsilon)$$

определяется равенством

$$\overline{W}(\varepsilon) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k \varepsilon^k\right) \sum_{k=0}^{\infty} W_k \varepsilon^k \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k \varepsilon^k\right)^{-1}. \qquad (*)$$

Если $Z_k(0) = 0\,(k \geqslant 1)$, то ряды для W и Z в случае периодической матрицы $P(t)$ и при выполнении указанных выше условий относительно P_0 сходятся. Если же мы выбираем иначе $Z_k(0)$ (фиксируя тем самым как-то и W_k), то нет гарантии сходимости рядов (10.11) и (10.13). Если мы возьмем $A = \sum_{k=0}^{m} A_k \varepsilon^k$, т. е. полином от ε, то ряд, соответствующий $\overline{W}(\varepsilon)$, будет сходиться и $\overline{Z}_k(0) = 0$ при $k \geqslant m+1$. Другими словами, если мы возьмем для W_k $(k = 1, \ldots, m)$ средние[1] значения соответствующих функций, а затем возьмем W_k $(k = m+1, \ldots)$, соответствующие значениям $Z_k(0) = 0$ $(k = m+1, \ldots)$, то ряды (10.11) и (10.13) будут все-таки сходиться. Но предположим, что $Z_k(0)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ берутся какие-нибудь отличные от нуля (а W_k найдутся соответственно единственные) или, например, берем для всех W_k $(k = 1, 2, \ldots)$ соответствующие средние значения (тогда $Z_k(0)$ найдутся единственные и, вообще говоря, отличные от нуля), тогда ряд

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \varepsilon^k \qquad (**)$$

может оказаться расходящимся. Может быть, будет расходиться и ряд $\overline{W}(\varepsilon)$. Но инварианты характеристического уравнения матрицы $\overline{W}(\varepsilon)$ ввиду формулы (*) будут совпадать с инвариантами характеристического уравнения матрицы $W(\varepsilon)$ и потому будут сходящимися рядами от ε. Однако здесь уже

$$Y_n(t, \varepsilon) = \exp\left(\sum_{k=0}^{m} \overline{W}_k \varepsilon^k t\right)\cdot \sum_{k=0}^{m} \overline{Z}_k(t)\cdot \varepsilon^k$$

[1] В [10] впервые W_k определялась как среднее значение, но там не требовалось сходимости ряда (10.11). См. § 20 данной нашей работы.

будет, по-видимому, плохим приближенным значением[1] интегральной матрицы Y. Да и самой-то интегральной матрицы Y с такими значениями $Z_k(0)$, может быть, нет (если ряд (**) расходится).

Таким образом, мы получили следующее правило. Пусть $2\pi P_0 = \ln \exp 2\pi P_0$ — главное значение и матрица $\exp 2\pi P_0$ не имеет отрицательных х. ч. Тогда интегральную нормированную в точке $t=0$ матрицу X уравнения (10.1) мы имеем в виде

$$X(t, \varepsilon) = \exp(W(\varepsilon)\, t)\cdot Z(t, \varepsilon), \tag{10.3}$$

где $W(\varepsilon)$ — вещественная постоянная матрица, представимая сходящимся рядом

$$W(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k \varepsilon^k, \tag{10.11}$$

и вещественная периодическая матрица $Z(t, \varepsilon)$ представима сходящимся рядом

$$Z(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(t)\, \varepsilon^k. \tag{10.13}$$

Причем здесь $W_0 = P_0$, $Z_0 = I$, а W_k, $Z_k(t)$ $(k \geqslant 1)$ находятся из уравнений (11.4) (или при помощи (11.12)) при условии, что $Z_k(t)$ должны быть периодическими с периодом 2π и $Z_k(0) = 0$. Пусть $2\pi P_0 = \ln \exp 2\pi P_0$ есть главное значение, но матрица $\exp 2\pi P_0$ имеет отрицательные х. ч. Тогда если матрица $\exp 4\pi P_0$ не имеет отрицательных х. ч. и

$$4\pi P_0 = \ln \exp 4\pi P_0$$

— главное значение, то в (10.11) следует взять

$$4\pi W_0 = \ln \exp 4\pi P_0 = 4\pi P_0, \quad W_0 = P_0,$$

а W_k $(k \geqslant 1)$ находить из (10.5) (или при помощи (11.12)) при условии, что $Z_k(t)$ периодические с периодом 4π. Если же $2\pi P_0$ не равно главному значению $\ln \exp 2\pi P_0$, то надо поступить так, как указано выше (§ 10).

Заметим теперь, что разложения (10.11) и (10.13) представляют матрицы $W(\varepsilon)$ и $Z(t, \varepsilon)$ в указанной выше окрестности $\varepsilon = 0$.

Формулы же (1.40), (1.41) и (1.39) позволяют представить $W(\varepsilon)$ во всей области существования ε (а тем самым мы

[1] Как отмечено, это все-таки отрезки сходящихся рядов, если далее берем $Z_k(0) = 0$ $(k = m+1,\ m+2,\ \ldots)$.

имеем и представление $Z(t, \varepsilon)$ при всех возможных значениях ε), где х. ч. матрицы $X(2\pi, \varepsilon)$ не будут отрицательными. Если же матрица $X(2\pi, \varepsilon)$ имеет отрицательные х. ч., то мы снова получим (10.3) и (10.11), (10.13) с помощью формулы (1.39) при всех значениях ε, при которых задана матрица коэффициентов в (10.9), но $Z(t, \varepsilon)$ будет иметь период 4π, а $W(\varepsilon)$ будет строиться по (1.31) на основании формулы

$$4\pi W(\varepsilon) = \ln X(4\pi, \varepsilon), \tag{11.18}$$

причем здесь предполагается, что матрица $X(4\pi, \varepsilon)$ не имеет отрицательных х. ч. Для тех значений ε, для которых характеристические числа матрицы $X(2\pi, \varepsilon)$ или соответственно $X(4\pi, \varepsilon)$ совпадают, надо брать предельное значение формулы Лагранжа. Эту предельную формулу Лагранжа мы можем получить как из (1.31), так и при помощи минимального полинома (1.7), где ниже формулы (1.7) показано, как найти $\varphi_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$. Впрочем, способ нахождения $\varphi_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ дан и в § 2 на основании (2.4). Иногда можно указать оценку радиуса сходимости ряда (10.11) на основании оценки матрицы коэффициентов уравнения (10.1). Так, например (стр. 88 [14]), если имеем систему

$$\frac{dX}{dt} = XP(t),$$

где х. ч. $p_k(t)$ матрицы $P(t)$ имеют оценку $|p_k(t)| \leqslant a$, то ряд (10.11) будет наверное сходиться[1] при $|\varepsilon| < \frac{\ln 2}{2\pi a} = \varepsilon_1$. При $2\pi a < \ln 2$ имеем область сходимости ряда (10.11) $|\varepsilon| < \varepsilon_1 > 1$. Если же

$$P(t) = \begin{Vmatrix} 0 & p_{12} \\ p_{21} & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad |p_{12}| \leqslant a_2, \quad |p_{21}| \leqslant a_1,$$

то ряд (10.11) будет сходиться при

$$|\varepsilon| < \frac{\ln 2}{2\pi\sqrt{a_1 a_2}}.$$

При $2\pi\sqrt{a_1 a_2} < \ln 2$ имеем $|\varepsilon| < \varepsilon_1 > 1$.

---

[1] Это следует из того, что ряд $\ln X(2\pi, \varepsilon)$ наверное сходится, если наибольшее по модулю х. ч. матрицы $|X(2\pi, \varepsilon) - I|$ меньше единицы. Наибольшее по модулю х. ч. этой матрицы не превосходит наибольшего по модулю х. ч. $|\exp 2\pi P - I|$, где $|P(t, \varepsilon)| \leqslant P$ и матрица P — постоянная. Если же наибольшее по модулю х. ч. матрицы P есть a, то наибольшее по модулю х. ч. матрицы $|\exp 2\pi\varepsilon P - I|$ не превосходит $(\exp 2\pi\varepsilon a - 1)$, откуда и имеем область сходимости $|\varepsilon| < \frac{\ln 2}{2\pi a}$, так как при этом $(\exp 2\pi a \varepsilon - 1) < 1$.

§ 12. ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ (10.1)

Для уравнения (10.1) мы получили[1] решение в виде

$$X(t, \varepsilon) = \exp(W(\varepsilon)t) \cdot Z(t, \varepsilon), \tag{10.3}$$

где $W(\varepsilon)$ и $Z(t, \varepsilon)$ даны в виде рядов

$$W(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k \varepsilon^k, \tag{12.1}$$

$$Z(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(t) \varepsilon^k, \tag{12.2}$$

сходящихся при $|\varepsilon| < R$.

Обозначим

$$W_m(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} W_k \varepsilon^k, \tag{12.3}$$

$$Z_m(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} Z_k(t) \varepsilon^k, \tag{12.4}$$

тогда [4]

$$X_m(t, \varepsilon) = \exp(W_m(\varepsilon)t) \cdot Z_m(t, \varepsilon) \tag{12.5}$$

будет приближенным значением решения (10.3). Здесь $W(\varepsilon)$ и $Z(t, \varepsilon)$ строим вещественными.

Может случиться, что заданную систему

$$\frac{dX}{dt} = XP(t) \tag{12.6}$$

можно записать в виде

$$\frac{dX}{dt} = X(P_0(t) + P_1(t)\varepsilon), \tag{12.7}$$

так что при $\varepsilon = 0$ получаем

$$\frac{dX_0}{dt} = X_0 P_0(t), \tag{12.8}$$

интегральная матрица которой известна:

$$X_0(t) = \exp W_0 t \cdot Z_0(t), \quad Z_0(t) = \mathrm{I}, \tag{12.9}$$

[1] В работе [8] доказана непрерывность х. ч. матрицы W в точке $\varepsilon_1 = 0, \ldots, \varepsilon_m = 0$, если матрица коэффициентов линейной системы $P(t, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$, непрерывна в точке $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_m = 0$ и периодична относительно t.

а при $\varepsilon = 1$ получаем (12.6). Тогда имеем интегральную матрицу системы (12.7) в виде ряда

$$X(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(t)\varepsilon^k, \tag{12.10}$$

сходящегося при всех конечных ε. Мы можем теперь найти $X(t, \varepsilon)$ в виде (10.3). Если ряды (12.1) и (12.2) сходятся при $\varepsilon = 1$, то мы получим приближенное решение в виде (12.5). Сходимость рядов (12.1) и (12.2) иногда можно, как мы видели, установить на основании оценок элементов матрицы $P(t)$. Эти ряды, в частности, будут сходиться при $\varepsilon = 1$, если (§ 9) $P(t)$ — матрица (стр. 86 [14]) второго порядка и если

$$\sigma^2(X(2\pi, \varepsilon)) - 4\exp\int_0^{2\pi} [\sigma(P_0(t)) + \sigma(P_1(t))\varepsilon]\, dt \neq 0$$

при $0 < |\varepsilon| \leqslant 1$, так как при этом условии в круге $|\varepsilon| \leqslant 1$ матрица $X(2\pi, \varepsilon)$ не имеет кратных х. ч. Мы здесь предполагаем, что матрица $X_0(2\pi)$ не имеет отрицательных х. ч. За $P_0(t)$ можно взять одну из матриц, для которой находится интегральная матрица в предыдущих параграфах. Или в случае матрицы $P(t)$ второго порядка можно систему (12.6) записать в виде

$$\frac{dX}{dt} = X\left[\begin{Vmatrix} p_{11} & 0 \\ 0 & p_{22} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & p_{12} \\ p_{21} & 0 \end{Vmatrix}\varepsilon\right]. \tag{12.11}$$

Эту систему удобно, в частности, вводить в том случае, когда средние интегральные значения по периоду функций $p_{11}(t)$, $p_{22}(t)$ отличны от нуля, а для функций p_{12}, p_{21} равны нулю.

Вообще, если взять какую-нибудь матрицу $P_0(t)$ такую, что интегральная матрица Y системы

$$\frac{dY}{dt} = YP_0(t) \tag{12.12}$$

будет известна, мы получим систему (12.7) в виде (см. (31.30))

$$\frac{dX}{dt} = X[P_0(t) + (P(t) - P_0(t))\varepsilon], \tag{12.13}$$

т. е. здесь $P_1(t) = P(t) - P_0(t)$.

За $P_0(t)$ удобно брать такую матрицу, чтобы матрица Y уже была некоторым хорошим приближением матрицы X. Например, за Y можно взять матрицу

$$Y = X_m(t, 1) = \exp \sum_{k=0}^{m} A_k t \cdot Z_m(t, 1), \qquad (12.14)$$

где $X_m(t, 1)$ — приближенное значение интегральной матрицы системы вида (12.7) или системы

$$\frac{dX}{dt} = XP(t).\varepsilon \text{ при } \varepsilon = 1. \qquad (12.15)$$

Выбирая так наперед Y, мы легко найдем соответствующее периодическое

$$P_0(t) = Z_m^{-1} B_m Z_m + Z_m^{-1} \frac{dZ_m}{dt}, \quad B_m = \sum_{k=0}^{m} A_k.$$

Или надо $P_0(t)$ выбирать так, чтобы $P(t) - P_0(t)$ было малым на большом участке изменения t.

Выбирая тем или иным способом $P_0(t)$ и находя после этого несколько членов рядов для $W(\varepsilon)$, $Z(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon = 1$, мы производим некоторое частичное суммирование рядов, представляющих $W(\varepsilon)$ и $Z(t, \varepsilon)$ для системы (12.15) при $\varepsilon = 1$, если эти ряды сходятся и если, конечно, сходятся ряды, представляющие $W(\varepsilon)$, $Z(t, \varepsilon)$ для системы (12.13). Если же они расходятся, но сходятся ряды, представляющие $W(\varepsilon)$, $Z(t, \varepsilon)$ для системы (12.13), то приближенные значения $W_m(\varepsilon)$ и $Z_m(t, \varepsilon)$ для (12.13) при $\varepsilon = 1$ доставляют приближенные значения $W(\varepsilon)$ и $Z(t, \varepsilon)$ для их аналитического продолжения, соответствующего системе (12.15) при $\varepsilon = 1$.

§ 13. СЛУЧАЙ, КОГДА В УРАВНЕНИИ (10.1) $P_0(t)$, $P_1(t)$, ..., $P_m(t)$ — ПОСТОЯННЫЕ

Рассмотрим теперь тот частный случай системы (10.1)

$$\frac{dX}{dt} = X \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t)\, \varepsilon^k, \qquad (13.1)$$

где [31] матрицы $P_0(t)$, $P_1(t)$, ..., $P_m(t)$ постоянные. Предположим еще, что матрица P_0 не имеет таких характеристических чисел ρ_k, ρ_l, что $\rho_k - \rho_l = \nu i$ (ν — целое), или, другими словами,

$$2\pi P_0 = \ln \exp 2\pi P_0$$

есть главное и регулярное значение. Следовательно, в разложениях (10.9) и (10.11) мы можем положить $W_0 = P_0$ и $Z_0 = \mathrm{I}$.

Для определения W_k, Z_k $(k \geqslant 1)$ имеем уравнения (11.2)

$$\frac{dZ_k}{dt} = \sum_{\nu=0}^{k} Z_{k-\nu} P_\nu - \sum_{\nu=0}^{k} W_{k-\nu} Z_\nu . \tag{13.2}$$

Мы должны искать Z_k периодические с периодом 2π и $Z_k(0) = 0$. Из (13.2) видим, что $Z_k = 0$, $W_k = P_k$ $(k = 1, \ldots, m)$.

Таким образом, имеем

$$W(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} P_k \varepsilon^k + \sum_{k=m+1}^{\infty} W_k \varepsilon^k , \tag{13.3}$$

$$Z(t, \varepsilon) = I + \sum_{k=m+1}^{\infty} Z_k(t) \varepsilon^k . \tag{13.4}$$

Можно поступить и так. Записывая систему (13.1) в виде

$$\frac{dX}{dt} = X\,[P(\varepsilon) + P_1(t, \varepsilon)], \tag{13.5}$$

$$P(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} P_k \varepsilon^k , \quad P_1(t, \varepsilon) = \sum_{k=m+1}^{\infty} P_k(t) \varepsilon^k ,$$

рассмотрим вспомогательную систему

$$\frac{dX}{dt} = X\,[P(\varepsilon) + P_1(t, \varepsilon)]\,\lambda \quad (\lambda - \text{параметр}). \tag{13.6}$$

Будем искать решение этой системы в виде

$$X = \exp A(\lambda)\,t \cdot Z(t, \lambda), \tag{13.7}$$

$$A(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda^k , \quad Z(t, \lambda) = I + \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(t) \lambda^k . \tag{13.8}$$

Для определения Z_k и A_k имеем уравнения:

$$\frac{dZ_k}{dt} = Z_{k-1}\,[P(\varepsilon) + P_1(t, \varepsilon)] - A_k - \sum_{l=1}^{k-1} A_l Z_{k-l}, \tag{13.9}$$

$$\frac{dZ_1}{dt} = P(\varepsilon) + P_1(t, \varepsilon) - A_1.$$

Отсюда

$$A_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_1(t, \varepsilon)\,dt + P(\varepsilon),$$

$$Z_1 = \int_0^t P_1(t, \varepsilon)\,dt - \frac{t}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_1(t, \varepsilon)\,dt.$$

Мы видим, что $Z_1(t)$, $Z_2(t), \ldots$, а также $A_2, A_3, \ldots$ будут малыми порядка $m+1$ относительно ε. Если окажется, что матрица $P(\varepsilon)$ при малых $\varepsilon \neq 0$ имеет различные характеристические числа, имеющие малость порядка $\leqslant m$, то не будет кратных характеристических чисел иметь при малых ε матрица $A(\varepsilon) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \lambda^k$, если $|\lambda| \leqslant 1$ (или вообще $|\lambda| \leqslant M$), так как характеристические числа μ этой матрицы при малых ε с точностью до ε^m будут определяться из уравнения

$$|\lambda P(\varepsilon) - \mu| = 0, \quad |P(\varepsilon) - \bar{\mu}| = 0, \quad \bar{\mu} = \mu\lambda^{-1}.$$

А при этих условиях (13.8), согласно теореме 2.1 и замечанию к ней 2.2, будут сходиться и при $\lambda = 1$. Следовательно, мы имеем для системы (13.5) при малых ε

$$A(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k, \quad Z(t, \varepsilon) = I + \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(t, \varepsilon). \tag{13.10}$$

Здесь $Z_k(t, \varepsilon) = Z_k(t)$ согласно (13.8).

В этих рассуждениях $P_1(t, \varepsilon)$ — малая порядка ε^{m+1} и не обязательно ряд относительно ε.

Можно, конечно, поступить и так. Записывая уравнение (13.5) в виде

$$\frac{dX}{dt} = X\,[P(\varepsilon) + \lambda P_1(t, \varepsilon)], \quad P(\varepsilon) = P_0, \tag{13.11}$$

найдем

$$X = \exp(W(\lambda)t)\cdot Z(t, \lambda), \tag{13.12}$$

$$W(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k \lambda^k, \quad Z(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(t)\lambda^k. \tag{13.13}$$

Предполагая теперь, что матрица $P(\varepsilon)$ не имеет х. ч. $p_k(\varepsilon)$, $p_l(\varepsilon)$, обладающих свойством

$$p_k(\varepsilon) - p_l(\varepsilon) = i\nu \quad (\nu \text{ — целое}), \tag{13.14}$$

мы можем положить

$$W_0 = P(\varepsilon), \quad Z_0(t) = I. \tag{13.15}$$

$Z_k(t)$ и W_k находим из уравнений

$$\frac{dZ_k}{dt} = Z_k P + Z_{k-1} P_1 - \sum_{\nu=0}^{k} W_{k-\nu} Z_\nu, \tag{13.16}$$

$$\frac{dZ_1}{dt} = Z_1 P(\varepsilon) - P(\varepsilon) Z_1 + P_1(t, \varepsilon) - W_1. \tag{13.17}$$

Определяя W_1 из (13.17), на основании (11.11_2) находим

$$\int_0^{2\pi} \exp P(\varepsilon) t \cdot W_1 \exp(-P(\varepsilon) t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \exp P(\varepsilon) t \cdot P_1(t, \varepsilon) \exp(-P(\varepsilon) t)\, dt.$$

Для определения элементов матрицы W_1 мы получим отсюда систему линейных уравнений с определителем, отличным от нуля, так как элементы матрицы W_1 определяются, как мы видели, единственным образом. Элементы матрицы $P_1(t, \varepsilon)$ суть малые относительно ε порядка $\geqslant m+1$, поэтому такими же выйдут и элементы матрицы W_1. Такими будут и элементы матрицы $Z_1(t)$. Из уравнения (13.16) видим, что вообще элементы матриц W_k и $Z_k(t)$ будут малыми относительно ε порядка $\geqslant k(m+1)$.

Следовательно, имеем

$$W(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} W_{k(m+1)}(\varepsilon) \lambda^k + P(\varepsilon), \tag{13.18}$$

где индекс $k(m+1)$ указывает порядок малости относительно ε. Этот ряд также будет сходиться при $|\lambda| \leqslant 1$ и достаточно малых ε, если матрица $P(\varepsilon)$ имеет различные х. ч. при $\varepsilon \neq 0$, имеющие порядок малости $\leqslant m$. При этом $W(\varepsilon)$ для системы (13.5) будем иметь в виде сходящегося ряда

$$W(\varepsilon) = P(\varepsilon) + \sum_{k=1}^{\infty} W_{k(m+1)}(\varepsilon), \tag{13.19}$$

а $Z(t)$ — в виде

$$Z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_{k(m+1)}(\varepsilon, t), \quad Z_0 = I. \tag{13.20}$$

В этих рассуждениях снова $P_1(t, \varepsilon)$ — лишь малая порядка $m+1$ относительно ε, не обязательно голоморфная в области $|\varepsilon| \leqslant r$.

Отметим еще раз, что ряды (13.19) и (13.20) сходятся для таких ε, для которых х. ч. матрицы $W(\lambda)$ (см. (13.18))

$$p_k(\varepsilon) = p_k^{(m)}(\varepsilon) + p_k^{(m+1)}(\varepsilon) + p_k^{(m+1)}(\varepsilon, \lambda)$$

различны при всех $|\lambda| \leqslant 1$. Здесь $p_k^{(m+1)}(\varepsilon)$ — малая порядка $m+1$, возникшая от $P(\varepsilon)$, а $p_k^{(m+1)}(\varepsilon, \lambda)$ — величина, порождаемая выражением

$$\sum_{k=1}^{\infty} W_{k\,(m+1)}(\varepsilon)\,\lambda^k.$$

Величина $p_k^{(m)}(\varepsilon)$ если и малая, то порядка $\leqslant m$. Если $p_k^{(m)}(\varepsilon)$ $(k = 1, \ldots, n)$ различны и

$$|p_k^{(m)}(\varepsilon)| > |p_k^{(m+1)}(\varepsilon)| + |p_k^{(m+1)}(\varepsilon, \lambda)|, \quad |\lambda| \leqslant 1,$$

то ряды (13.19) и (13.20) сходятся (для малых ε).

§ 14. СЛУЧАЙ, КОГДА В УРАВНЕНИИ (10.1) P_0 — ПОСТОЯННАЯ, А $\exp P_0 t$ — ПЕРИОДИЧЕСКАЯ МАТРИЦА

Пусть дана система

$$\frac{dX}{dt} = XP(t), \quad P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t)\,\varepsilon^k = P_0 + R(t, \varepsilon), \tag{14.1}$$

где матрицы P_k — периодические с периодом 2π, а P_0 — постоянная. Предположим, что матрица $\exp P_0 t$ является периодической с периодом 2π. Тогда прежде чем находить ряды (10.9) и (10.11), можно поступить следующим образом.

Введем[1] [31, § 5] новую неизвестную матрицу

$$X = Y \exp P_0 t = YX_0. \tag{14.2}$$

Подставляя это в (14.1), получим

$$\frac{dY}{dt} = Y\,[X_0 R(t, \varepsilon)\,X_0^{-1}] = YQ(t, \varepsilon). \tag{14.3}$$

---

[1] В [31] рассмотрен и тот, более общий, случай, когда $P_0(t)$ — такая матрица, что интегральная матрица системы $\frac{dX}{dt} = XP_0(t)$ имеет вид (8.8), где матрица W имеет чисто мнимые характеристические числа с простыми элементарными делителями.

Здесь матрица

$$Q(t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t)\,\varepsilon^k \tag{14.4}$$

периодическая с периодом 2π. Теперь можно искать Y в виде

$$Y = \exp\left[\sum_{k=1}^{\infty} W_k\,\varepsilon^k t\right] \cdot \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(t)\,\varepsilon^k, \quad Z_0 = \mathrm{I}, \tag{14.5}$$

что упрощает выкладки при нахождении W_k и Z_k, так как в уравнении (11.2) имеем $P_0 = W_0 = 0$.

§ 15. ПРИМЕР К § 14

Пример. Дана система двух уравнений

$$\frac{dY}{dt} = Y\,[P_0 + \varepsilon P_1(t)] = YQ, \tag{15.1}$$

$$P_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad P_1(t) = A \sin t + B \sin 2t,$$

где A и B — постоянные матрицы второго порядка. Найдем представление матрицы

$$Y = \exp\,[W(\varepsilon)\,t] \cdot Z(t, \varepsilon), \quad Y_0(0) = \mathrm{I}, \tag{15.2}$$

где

$$W(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k\,\varepsilon^k, \tag{15.3}$$

$$Z(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(t)\,\varepsilon^k. \tag{15.4}$$

Здесь матрица P_0 имеет х. ч. $\rho_1 = i$, $\rho_2 = -i$, $\rho_1 - \rho_2 = 2i$ и $2\pi P_0 = \ln \exp 2\pi P_0$ не есть регулярное значение, т. е. мы не можем положить $W_0 = P_0$.

Найдем сначала

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k\,\varepsilon^k. \tag{15.5}$$

Для определения Y_0 и Y_1 имеем уравнения

$$\frac{dY_0}{dt} = Y_0 P_0, \quad \frac{dY_1}{dt} = Y_1 P + Y_0 P_1, \tag{15.6}$$

$$Y_0 = \exp P_0 t. \tag{15.7}$$

Y_1 ищем в виде

$$Y_1 = C(t)\,Y_0. \tag{15.8}$$

Подставляя это в (15.6), найдем

$$\frac{dC}{dt} = Y_0 P_1 Y_0^{-1}, \quad C = \int_0^t Y_0 P_1 Y_0^{-1}\, dt. \tag{15.9}$$

На основании (1.14_1)

$$Y_0 = \sin t \cdot P_0 + \cos t, \; Y_0^{-1} = -\sin t \cdot P_0 + \cos t. \tag{15.10}$$

На основании (15.7) и (15.8) имеем:

$$V = Y(2\pi) = I + \varepsilon C(2\pi) + \ldots \tag{15.11}$$

$$C(2\pi) = \int_0^{2\pi} [-P_0 P_1 P_0 \sin^2 t - P_1 P_0 \sin t \cdot \cos t +$$

$$+ P_0 P_1 \sin t \cdot \cos t + P_1 \cos^2 t]\, dt = \int_0^{2\pi} [-BP_0 + P_0 B]\, \frac{\sin^2 2t}{2}\, dt =$$

$$= \begin{Vmatrix} b_{21} + b_{12} & b_{22} - b_{11} \\ b_{22} - b_{11} & -(b_{12} + b_{21}) \end{Vmatrix} \frac{\pi}{2}, \tag{15.12}$$

где b_{kl} — элементы матрицы B.

Следовательно,

$$Y(2\pi) =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 + \varepsilon \frac{\pi}{2}(b_{12} + b_{21}) & \varepsilon \frac{\pi}{2}(b_{22} - b_{11}) \\ \varepsilon \frac{\pi}{2}(b_{22} - b_{11}) & 1 - \frac{\pi\varepsilon}{2}(b_{12} + b_{21}) \end{Vmatrix} + \varepsilon^2 Y_2 + \ldots \tag{15.13}$$

Представляя Y_0 (15.7) в виде (10.7), получим

$$A_0 = 0, \; Z_0(t) = Y_0. \tag{15.14}$$

Здесь $A_0 = 0 = \ln \exp 2\pi P_0$ — главное значение, а тем самым и регулярное. На основании формулы (10.11) полагаем

$$W_0 = 0 \tag{15.15}$$

и на основании (10.9), (15.14) и (15.7) —

$$Z_0(t) = \exp P_0 t. \tag{15.16}$$

Для определения матриц W_k и $Z_k(t)$ ($k \geqslant 1$) имеем уравнения (см. (11.2), где $W_0 = 0$)

$$\frac{dZ_k}{dt} = Z_k(t) P_0 + \sum_{\nu=1}^{k} Z_{k-\nu}(t) P_\nu(t) - \sum_{\nu=0}^{k-1} W_{k-\nu} Z_\nu(t). \tag{15.17}$$

Отсюда

$$\frac{dZ_1}{dt} = Z_1P_0 + Z_0P_1 - W_1Z_0. \tag{15.18}$$

Будем искать Z_1 в виде

$$Z_1 = C\exp P_0t = CZ_0. \tag{15.19}$$

Имеем:

$$\frac{dC}{dt} = (Z_0P_1 - W_1Z_0)\,Z_0^{-1} = Z_0P_1Z_0^{-1} - W_1, \tag{15.20}$$

$$C = \int\limits_0^t [Z_0P_1Z_0^{-1} - W_1]\,dt. \tag{15.21}$$

Так как $Y_0 = Z_0$, то в силу (15.10)

$$C = \int\limits_0^t [-P_0P_1P_0\sin^2 t + (P_0P_1 - P_1P_0)\sin t\cos t +$$

$$+ P_1\cos^2 t - W_1]\,dt.$$

Тем самым мы нашли Z_1 в виде (15.19). Чтобы найти W_1, надо подчинить Z_1 условию

$$Z_1(t + 2\pi) = Z_1(t). \tag{15.22}$$

Отсюда

$$W_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} [(P_0P_1 - P_1P_0)\sin t\cos t +$$

$$+ P_1\cos^2 t - P_0P_1P_0\sin^2 t]\,dt.$$

Учитывая значение P_1 из (15.1), найдем

$$W_1 = \frac{1}{4}[P_0B - BP_0]. \tag{15.23}$$

Также просто из уравнений (15.17) найдем W_k, Z_k $(k \geqslant 2)$. Именно для определения Z_k и W_k будем иметь

$$\frac{dZ_k}{dt} = Z_kP_0 + F_k(t) - W_kZ_0,$$

$$F_k = \sum_{\nu=1}^{k} Z_{k-\nu}P_\nu - \sum_{\nu=1}^{k-1} W_{k-\nu}Z_\nu, \tag{15.24}$$

$$Z_k = C_k \exp P_0 t = C_k Z_0, \tag{15.25}$$

$$\frac{dC_k}{dt} = \int_0^t (F_k(t) Z_0^{-1} - W_k)\, dt, \tag{15.26}$$

$$W_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_k(t) Z_0^{-1}\, dt. \tag{15.27}$$

На основании теоремы 6.1 ряд (15.5) сходится при всех конечных значениях ε. Ряды (15.3) и (15.4) сходятся, по крайней мере, в области $|\varepsilon| < R$, в которой не более одного нуля дискриминанта характеристического уравнения матрицы (15.11):

$$\Delta(\varepsilon) = \sigma^2(Y(2\pi)) - 4.$$

Здесь принято во внимание, что

$$D(Y(2\pi)) = \exp \int_0^{2\pi} \sigma(Q(t))\, dt = 1.$$

Можно поступить иначе, следуя тому, что указано в § 14. Именно, введем матрицу Y:

$$X = Y \exp P_0 t = Y Y_0. \tag{15.28}$$

Подставляя это в (15.1), получим

$$\frac{dY}{dt} = Y Y_0 P_1(t) Y_0^{-1} \varepsilon = Y R(t) \varepsilon, \tag{15.29}$$

$$R(t) = Y_0 P_1(t) Y_0^{-1}. \tag{15.30}$$

Пользуясь (15.10), мы будем иметь

$$R(t) = -P_0 P_1 P_0 \sin^2 t + $$
$$+ (P_0 P_1 - P_1 P_0) \sin t \cdot \cos t + P_1 \cos^2 t. \tag{15.31}$$

Теперь можно искать Y в виде

$$Y = \exp \sum_{k=1}^{\infty} W_k \varepsilon^k t \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(t) \varepsilon^k, \quad Z_0 = I. \tag{15.32}$$

В уравнении (15.24) будем иметь $P_0 = 0$ и $Z_0 = I$, что и упростит вычисления.

Получим еще интегральную матрицу (15.5) в виде

$$Y = \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} W_k \varepsilon^k t\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(t)\, \varepsilon^k \tag{15.33}$$

на основании теоремы 2.3.

Представим сначала матрицу (15.13) в виде

$$Y(2\pi) = S \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix} S^{-1}. \tag{15.34}$$

Легко найдем

$$\lambda_1 = 1 + \varepsilon \frac{\pi}{2} M + \ldots, \quad \lambda_2 = 1 - \varepsilon \frac{\pi}{2} M + \ldots, \tag{15.35}$$

$$M = \sqrt{(b_{21} + b_{12})^2 + (b_{22} - b_{11})^2}\,.$$

Пусть $M \neq 0$. Тогда

$$S = S_0 + S_1 \varepsilon + \ldots, \qquad S^{-1} = S_0^{-1} + \ldots, \tag{15.36}$$

$$S_0 = \begin{Vmatrix} s_{11} & -\dfrac{A}{b} s_{22} \\ \dfrac{A}{b} s_{11} & s_{22} \end{Vmatrix},$$

$$S_0^{-1} = \begin{Vmatrix} s_{22} & \dfrac{A}{b} s_{22} \\ -\dfrac{A}{b} s_{11} & s_{11} \end{Vmatrix} \frac{1}{s_{11} s_{22}\left(1 + \dfrac{A^2}{b^2}\right)}, \tag{15.37}$$

$A = M - (b_{12} + b_{21})$, $b = b_{22} - b_{11}$, s_{11}, s_{22} — произвольные, неравные нулю, числа.

В соответствии с примером к теореме 2.3 имеем

$$\ln Y(2\pi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} N_k \varepsilon^k, \tag{15.38}$$

где можно положить

$$N_0 = S_0 [2k\pi i, \; -2k\pi i]\, S_0^{-1}, \tag{15.39}$$

k — целое число. Учитывая значение S_0, найдем

$$N_0 = \frac{b^2 2k\pi i}{b^2 + A^2} \begin{Vmatrix} 1 - \dfrac{A^2}{b^2} & \dfrac{2A}{b} \\ \dfrac{2A}{b} & \dfrac{A^2}{b^2} - 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{2k\pi i}{b^2+A^2}\begin{Vmatrix} b^2-A^2 & 2bA \\ 2bA & A^2-b^2 \end{Vmatrix}. \tag{15.40}$$

Легко видеть, что

$$b^2-A^2=2(b_{12}+b_{21})A,\ b^2+A^2=2MA.$$

Поэтому имеем:

$$N_0=2k\pi i\begin{Vmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{Vmatrix}, \tag{15.41}$$

$$\sin\varphi=\frac{b_{12}+b_{21}}{M},\ \cos\varphi=\frac{b_{22}-b_{11}}{M},$$

$$M=\sqrt{(b_{12}+b_{21})^2+(b_{22}-b_{11})^2}. \tag{15.42}$$

Напоминаем, что здесь предположено $M\neq 0$.

Следовательно, для матрицы (15.5) на основании примера к теореме 2.3 имеем (15.33), где

$$W_0=\frac{1}{2\pi}\ln Y(2\pi,0)=\frac{N_0}{2\pi}=ki\begin{Vmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{Vmatrix}. \tag{15.43}$$

Для нахождения $Z_0(t)$ полагаем в (15.17) $k=0$. Получаем

$$\frac{dZ_0}{dt}=Z_0P_0-W_0Z_0,\ Z_0(0)=I, \tag{15.44}$$

$$Z_0=\exp(-W_0t)\cdot\exp P_0t. \tag{15.45}$$

Для определения Z_1 и W_1 полагаем в (15.17) $k=1$. Будем иметь

$$\frac{dZ_1}{dt}=Z_1P_0-W_0Z_1+Z_0P_1-W_1Z_0,\ Z_1(0)=0, \tag{15.46}$$

$$Z_1(t+2\pi)=Z_1(t). \tag{15.46$_1$}$$

Это уравнение не является уравнением изученного нами выше типа (11.13), так как здесь х. ч. матрицы P_0 суть $\lambda_1 = i$, $\lambda_2=-i$, поэтому не обладают свойством $\lambda_1-\lambda_2\neq mi$ (m — целое), ибо $\lambda_1-\lambda_2=2i$. Однако теорема 2.3 гарантирует нам в этом случае существование решения, подчиненного условию (15.46) при некотором выборе W_1. Решение уравнения (15.46) будем искать в виде (11.7)

$$Z_1=\exp(-W_0t)\cdot C\exp(P_0t). \tag{15.47}$$

Подставляя это в (15.46), получим

$$\frac{dC}{dt}=\exp W_0t\cdot[Z_0P_1-W_1Z_0]\exp(-P_0t), \tag{15.48}$$

$$C = \int_0^t \exp W_0 t \cdot [Z_0 P_1 - W_1 Z_0] \exp(-P_0 t)\, dt.$$

Так как должно быть

$$Z_1(0) = Z_1(2\pi) = 0 \quad \text{и} \quad \exp(-W_0 2\pi) = \exp 2\pi P_0 = I,$$

то мы имеем

$$C(2\pi) = \int_0^{2\pi} \exp W_0 t \cdot [Z_0 P_1 - W_1 Z_0] \exp(-P_0 t)\, dt = 0. \quad (15.49)$$

Но

$$Z_0 = \exp(-W_0 t) \cdot \exp P_0 t,$$

поэтому

$$C(2\pi) = \int_0^{2\pi} [\exp P_0 t \cdot P_1 \cdot \exp(-P_0 t) -$$

$$- \exp W_0 t \cdot W_1 \exp(-W_0 t)]\, dt = 0. \quad (15.50)$$

Согласно (15.31), имеем

$$\exp P_0 t \cdot P_1 \exp(-P_0 t) =$$

$$= -P_0 P_1 P_0 \sin^2 t + (P_0 P_1 - P_1 P_0) \sin t \cdot \cos t + P_1 \cos^2 t,$$

или, подставляя значение P_1 из (15.1), получим

$$\exp P_0 t \cdot P_1 \cdot \exp(-P_0 t) = -P_0 A P_0 \sin^3 t - P_0 B P_0 \sin 2t \cdot \sin^2 t +$$

$$+ (P_0 A - A P_0) \sin^2 t \cdot \cos t + (P_0 B - B P_0) \sin t \cdot \cos t \cdot \sin 2t +$$

$$+ A \sin t \cdot \cos^2 t + B \sin 2t \cdot \cos^2 t.$$

Мы также имеем на основании (1.14_1)

$$\exp W_0 t \cdot W_1 \cdot \exp(-W_0 t) = -W_0 W_1 W_0 \frac{\sin^2 kt}{k^2} +$$

$$+ (W_0 W_1 - W_1 W_0) \frac{\sin kt \cdot \cos kt}{k} + W_1 \cos^2 kt.$$

Подставляя это в (15.50), мы получим

$$\frac{P_0 B - B P_0}{2} + \frac{W_0 W_1 W_0}{k^2} - W_1 = 0.$$

Здесь W_0 дано формулой (15.43), а P_0 — (15.1).

Перепишем последнее равенство в виде

$$\frac{P_0 B - B P_0}{2} = W_1 - \frac{W_0 W_1 W_0}{k^2} \quad (15.51)$$

и подставим сюда значения P_0, W_0 и

$$B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix}, \quad W_1 = \begin{Vmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{Vmatrix}.$$

Получим

$$\frac{M}{2}\begin{Vmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{Vmatrix}, \qquad (15.52)$$

где M определено формулой (15.42) и

$$\tau_{11} = w_{11}(1+\sin^2\varphi) + w_{12}\sin\varphi\cdot\cos\varphi + w_{21}\sin\varphi\cdot\cos\varphi + \\ + w_{22}\cos^2\varphi,$$

$$\tau_{12} = w_{11}\sin\varphi\cdot\cos\varphi + w_{12}\cos^2\varphi + w_{21}\cos^2\varphi - w_{22}\sin\varphi\cdot\cos\varphi, \qquad (15.53)$$

$$\tau_{21} = w_{11}\sin\varphi\cdot\cos\varphi + w_{12}\cos^2\varphi + w_{21}\cos^2\varphi - w_{22}\sin\varphi\cdot\cos\varphi,$$

$$\tau_{22} = w_{11}\cos^2\varphi - w_{12}\sin\varphi\cdot\cos\varphi - w_{21}\sin\varphi\cdot\cos\varphi + \\ + w_{22}(1+\sin^2\varphi).$$

Следовательно, имеем:

$$\frac{M}{2}\sin\varphi = \tau_{11}, \quad \frac{M}{2}\cos\varphi = \tau_{12}, \quad \frac{M}{2}\cos\varphi = \tau_{21}, \qquad (15.54)$$

$$-\frac{M}{2}\sin\varphi = \tau_{22}$$

и

$$\tau_{12} = \tau_{21}. \qquad (15.55)$$

Складывая первое и четвертое уравнения из (15.54), получим

$$w_{11} + w_{22} = 0. \qquad (15.56)$$

Подставляя $w_{22} = -w_{11}$ в первое и второе уравнения (15.54), будем иметь

$$\frac{M}{2}\sin\varphi = 2w_{11}\sin^2\varphi + w_{12}\sin\varphi\cdot\cos\varphi + w_{21}\sin\varphi\cdot\cos\varphi, \qquad (15.57)$$

$$\frac{M}{2}\cos\varphi = 2w_{11}\sin\varphi\cdot\cos\varphi + w_{12}\cos^2\varphi + w_{21}\cos^2\varphi. \qquad (15.58)$$

Здесь возможны случаи: 1) $\cos\varphi = 0$, 2) $\sin\varphi = 0$, 3) $\sin\varphi \times \cos\varphi \neq 0$.

В случае 1 имеем $4w_{11} = \pm M = \pm|b_{12} + b_{21}|$, а w_{12} и w_{21} — произвольные.

В случае 2: $2(w_{12} + w_{21}) = \pm M = \pm|b_{22} - b_{11}|$, w_{11} и w_{12} — произвольные.

В случае 3 выражения (15.57), (15.58) переходят в уравнения

$$\frac{M}{2} = 2w_{11}\sin\varphi + (w_{12} + w_{21})\cos\varphi,$$

$$\frac{M}{2} = 2w_{11}\sin\varphi + (w_{12} + w_{21})\cos\varphi. \qquad (15.58_1)$$

Следовательно, w_{12} и w_{21} можно считать произвольными, а w_{11} определяется однозначно. Z_1 находится по формуле (15.47):

$$Z_1 = \exp(-W_0t)\cdot C(t)\exp(P_0t),$$

$$C = \int_0^t [\exp P_0t\cdot P_1\exp(-P_0t) - \\ - \exp W_0t\cdot W_1\exp(-W_0t)]\,dt.$$

Теперь можно определять Z_2 и W_2 из (15.17) при $\kappa = 2$:

$$\frac{dZ_2}{dt} = Z_2P_0 - W_0Z_2 + Z_1P_1 - W_1Z_1 - W_2Z_0. \qquad (15.59)$$

Z_2 можио искать в виде

$$Z_2 = \exp(-W_0t)\cdot C(t)\exp(P_0t).$$

Для определения C получим уравнение

$$\frac{dC}{dt} = \exp W_0t\cdot[Z_1P_1 - W_1Z_1 - W_2Z_0]\exp(-P_0t),$$

$$C = \int_0^t \exp W_0t\cdot[Z_1P_1 - W_1Z_1 - W_2Z_0]\exp(-P_0t)\,dt.$$

Подчиняя Z_2 условию $Z_2(2\pi) = Z_2(0) = 0$, получим $C(2\pi) = 0$. Отсюда мы получим для определения элементов w_{kl} матрицы W_2 уравнения, правые части которых будут совпадать с правыми частями равенств (15.53), а левые части будут другие, содержащие и два произвольных элемента матрицы W_1:

$$A_1 = w_{11}(1 + \sin^2\varphi) + w_{12}\sin\varphi\cdot\cos\varphi + w_{21}\sin\varphi\cdot\cos\varphi + \\ + w_{22}\cos^2\varphi,$$

$$A_2 = w_{11}\sin\varphi\cdot\cos\varphi + w_{12}\cos^2\varphi + w_{21}\cos^2\varphi - \\ - w_{22}\sin\varphi\cdot\cos\varphi, \qquad (15.60)$$

$$A_3 = w_{11}\sin\varphi\cdot\cos\varphi + w_{12}\cos^2\varphi + w_{21}\cos^2\varphi - w_{22}\sin\varphi\cdot\cos\varphi,$$

$$A_4 = w_{11}\cos^2\varphi - w_{12}\sin\varphi\cdot\cos\varphi - w_{21}\sin\varphi\cdot\cos\varphi +$$
$$+ w_{22}(1+\sin^2\varphi).$$

Если имеем случай 1 ($\cos\varphi = 0$), то $A_2 = A_3 = 0$, откуда и найдем произвольные элементы матрицы W_1. В случае 2 ($\sin\varphi = 0$) мы имеем $A_2 = A_3$ и $A_1 = w_{11} + w_{22}$, $A_4 = w_{11} + w_{22}$, откуда $A_1 = A_4$. Из этих двух уравнений мы снова найдем произвольные элементы матрицы W_1. Если же $\sin\varphi\cdot\cos\varphi \neq 0$, то имеем:

$$\frac{A_1 + A_4}{2} = w_{11} + w_{22}.$$

Это позволяет, заменяя

$$w_{22} = -w_{11} + \frac{A_1 + A_4}{2}$$

в первом и втором уравнениях (15.60), получить

$$M_1 = 2w_{11}\sin\varphi + (w_{12} + w_{21})\cos\varphi, \quad M_2 = 2w_{11}\sin\varphi +$$
$$+ (w_{12} + w_{21})\cos\varphi,$$

откуда имеем $M_1 = M_2$. А, кроме того, очевидно, $A_2 = A_3$. Из этих двух уравнений опять найдем произвольные элементы матрицы W_1. Это следует из теоремы 2.3, которая гарантирует единственность определения матриц W_k и Z_k.

Таким образом, во всех случаях мы окончательно найдем W_1 и Z_1. Легко видеть, что также найдутся W_k, Z_k ($k > 2$).

Мы не будем заканчивать вычисление W_1, Z_1. Заметим теперь, что систему (15.1) можно было заменить сначала системой

$$\frac{dX}{dt} = X\left[\begin{Vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{Vmatrix} + \varepsilon P(t)\right], \tag{15.61}$$

где

$$Y = XN, \tag{15.62}$$

$$N = \begin{Vmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{Vmatrix}, \quad N^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{Vmatrix}\frac{1}{2}, \quad P(t) = NP_1(t)N^{-1},$$

$$\begin{Vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{Vmatrix} = N\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}N^{-1}.$$

Для решения X системы (15.61) легко найдем представление

$$X = \exp W(\varepsilon)t\cdot Z(t, \varepsilon), \quad X(0) = I,$$

$$W(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k\varepsilon^k, \quad Z(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k\varepsilon^k,$$

после чего получим и для Y, $Y(0)=I$ такое представление, так как

$$Y = N^{-1}XN = \exp[N^{-1}W(\varepsilon)Nt]\cdot N^{-1}ZN. \qquad (15.63)$$

Замечание 15.1. В соответствии с теоремой 2.3 и примером к ней вместо (15.39) можно взять

$$N_0 = S_0[2m\pi i,\ 2n\pi i]\,S_0^{-1}, \qquad (15.64)$$

где m и n — произвольные целые числа. Соответственно вместо (15.43) надо положить

$$W_0 = \frac{N_0}{2\pi} = S_0[mi, ni]\,S_0^{-1} =$$

$$= \begin{Vmatrix} m\sin^2\varphi + n\cos^2\varphi & (m-n)\sin\varphi\cos\varphi \\ (m-n)\sin\varphi\cdot\cos\varphi & m\cos^2\varphi + n\sin^2\varphi \end{Vmatrix} i, \qquad (15.65)$$

где

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{b^2+A^2}},\quad \cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{b^2+A^2}},$$

а значения A, b даны в формуле (15.37). После этого мы также нашли бы W_k $(k \geqslant 1)$, Z_k $(k \geqslant 0)$, входящие в (15.33).

§ 16. КАНОНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ [8, 9, 12, 13, 31, 33, 34, 67, 68]

Замечание 16.1. Предположим, что характеристическое уравнение вещественной матрицы $K(\varepsilon)$ $2n$ порядка имеет вид

$$D(\lambda, \varepsilon) = \lambda^{2n} + a_1\lambda^{2(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\lambda^2 + a_n + \Phi(\lambda, \varepsilon) = 0, \qquad (16.1)$$

где коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ не зависят от λ и ε, $\Phi(\lambda, \varepsilon)$ — полином от λ^2 степени $\leqslant n-1$ с коэффициентами, голоморфными от ε в окрестности $\varepsilon = 0$ и такими, что $\Phi(\lambda, \varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда, если корни уравнения [13]

$$D(\mu) = \mu^n + a_1\mu^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\mu + a_n = 0 \qquad (16.2)$$

отрицательные различные, то корни уравнения (16.1) при вещественных достаточно малых[1] ε будут чисто мнимые, т. е. $\lambda = \mu_k i + i\varphi_k(\varepsilon)$ $(k = 1, \ldots, n)$, где μ_k — корни уравнения (16.2) и вещественная функция $\varphi_k(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Заметим еще, что если при малых ε коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ будут малыми низшего порядка по сравнению с коэффициентами $\Phi(\lambda, \varepsilon)$, то в случае различных $\mu_k < 0$ при малых ε корни

[1] И наверное при $|\varepsilon| < r$, где r — расстояние до ближайшего корня уравнения $\Delta(K(\varepsilon)) = 0$. Здесь $\Delta(K(\varepsilon))$ — дискриминант уравнения (16.1). Это следует из того, что комплексные корни (16.1) возникают сразу, попарно сопряженные вблизи кратного корня, если ε — вещественное.

уравнения (16.1) также будут чисто мнимые. Запишем выражение (16.1) в виде

$$D(\mu(\varepsilon)) = \mu^n + A_1(\varepsilon)\mu^{n-1} + \ldots + A_n(\varepsilon) = 0,$$
$$A_k(0) = a_k \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{16.1$_1$}$$

Замечание 16.2. Предположим, что корни $\mu_1, \ldots, \mu_n$ уравнения (16.2) отрицательные, но есть и кратные. Теперь, чтобы все корни (16.1) были при малых ε чисто мнимые, необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения (16.1$_1$) были при малых ε отрицательные[1]. А это будет тогда и только тогда, когда все корни (16.1$_1$) представляются при малых ε в виде

$$\mu_k(\varepsilon) = \mu_k + \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l^{(k)} \varepsilon^{\frac{l}{p}} \quad (k = 1, \ldots, n),\ p = 1 \text{ или } p = 2 \tag{16.2$_1$}$$

с вещественными[2] коэффициентами $\alpha_l^{(k)}$. Если дискриминант уравнения (16.1$_1$) $\Delta(K(\varepsilon))$ не равен тождественно[3] нулю, то $\mu_k(\varepsilon)$ будут и различные. Если же есть такие $\mu_k(\varepsilon)$, где p — целое, бо́льшее 2, то имеются и корни $\lambda(\varepsilon)$ с $R(\lambda(\varepsilon)) > 0$ и с $R(\lambda(\varepsilon)) < 0$, так как в этом случае имеются комплексные $\mu_k(\varepsilon)$.

Пусть теперь дана каноническая система $2n$ дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = X\left(P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t)\varepsilon^k\right), \quad |\varepsilon| < r, \tag{16.3}$$

где $P_k(t)$ — вещественные непрерывные периодические матрицы с периодом 2π, ε — численный параметр, P_0 — постоянная вещественная матрица. Таким образом, система (16.3) соответствует системе вида

$$\frac{dx_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_s}, \quad \frac{dy_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_s} \quad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

---

[1] Общее решение этого вопроса см. в [32] и здесь в § 47.

[2] Если имеем $\mu_k(\varepsilon) = \mu_k + \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l^{(k)} \varepsilon^l$ или $\mu_k(\varepsilon) = \mu_k + \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l^{(k)} \varepsilon^{l/2}$ и есть комплексные $\alpha_l^{(k)}$, то, очевидно, и $\mu_k(\varepsilon)$ будет комплексное.

[3] То есть если хоть один коэффициент разложения дискриминанта $\Delta(K(\varepsilon)) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k \varepsilon^k$ отличен от нуля.

где H — квадратичная[1] форма переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, коэффициенты которой являются периодическими функциями от t. Предположим, что $2\pi P_0 = \ln \exp 2\pi P_0$ — регулярное значение. Тогда имеем[2]:

$$X = \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} W_k \varepsilon^k t\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(t)\varepsilon^k, \quad W_0 = P_0, \quad Z_0 = 1,$$

$$Z_k(0) = 0 \quad (k \geqslant 1). \tag{16.4}$$

По теореме Ляпунова [26, стр. 209] характеристическое уравнение матрицы $\sum\limits_{k=0}^{\infty} W_k \varepsilon^k$ имеет вид

$$\mu^n + a_1(\varepsilon)\mu^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(\varepsilon)\mu + a_n(\varepsilon) = 0, \tag{16.5}$$

где $\mu = \lambda^2$, $a_1(0), \ldots, a_n(0)$ — коэффициенты характеристического уравнения матрицы P_0, а ряды $a_m(\varepsilon)$ $(m = 1, \ldots, n)$ сходятся, по крайней мере, в области $|\varepsilon| < R < r$, в которой не более одного нуля дискриминанта характеристического уравнения матрицы

$$X(2\pi, \varepsilon) = \sum_{k=(}^{\infty} X_k(2\pi)\varepsilon^k, \quad X_0 = \ . \tag{16.6}$$

Теорема 16.1 (см. [8] и [13]). *Если корни уравнения*

$$\mu^n + a_1(0)\mu^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(0)\mu + a_n(0) = 0 \tag{16.7}$$

отрицательные различные, то все решения уравнения (16.1) ограничены и не стремятся к нулю, т. е. они ограниченные колеблющиеся.

Теорема следует из замечания 16.1.

Н. А. Артемьев в работе [8], рассматривая канонические

---

[1] $H = \sum\limits_{s=1}^{k}\sum\limits_{\sigma=1}^{k}(p_{s\sigma}x_s x_\sigma + q_{s\sigma}y_s y_\sigma + r_{s\sigma}x_s y_\sigma)$.

[2] В работе [33] доказано, что система

$$\frac{dZ}{dt} = Z\sum_{k=0}^{\infty} W_k \varepsilon^k$$

будет канонической.

системы вида (16.3), для конкретной системы четырех уравнений провел подробные исследования[1].

Замечание 16.3. Если среди корней уравнения (16.7) есть нулевые (но нет положительных), то иногда достаточно привлечь к рассмотрению матрицу W_1. Именно, если характеристическое уравнение матрицы $P_0 + W_1 \varepsilon$

$$\mu^n + b_1(\varepsilon)\mu^{n-1} + \ldots + b_{n-1}(\varepsilon)\mu + b_n(\varepsilon) = 0, \quad \mu = \lambda^2$$

такое, что при малых $\varepsilon \neq 0$ все $\mu < 0$ (например, разложения всех корней имеют различные коэффициенты при первых степенях ε), то тогда и корни уравнения (16.5) при малых ε будут отрицательными, а х. ч. матрицы $W = \sum\limits_{k=0}^{\infty} W_k \varepsilon^k$ будут при малых ε чисто мнимыми (различными).

Замечание 16.4. Если корни $\mu_1, \ldots, \mu_n$ уравнения (16.7) все отрицательные, но есть совпадающие, то решения системы (16.1) будут ограниченными колеблющимися, если μ_k имеют вид (16.2_1) и $\Delta(K(\varepsilon)) \neq 0$ $\left(\text{т. е. } \Delta = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \Delta_k \varepsilon^k \text{ и хоть один из } \Delta_k \neq 0\right)$, так как в этом случае $\mu_1(\varepsilon), \ldots, \mu_n(\varepsilon)$ будут отрицательные и различные (при малых ε).

Замечание 16.5. На основании предыдущих параграфов легко рассмотреть и тот случай, когда $2\pi P_0$ не является регулярным значением $\ln \exp 2\pi P_0$. Можно, например, предварительно преобразовать систему (16.1) к такой, у которой $2\pi P_0$ будет регулярным значением $\ln \exp 2\pi P_0$. Но можно этого и не делать, а взять просто

$$W_0 = \frac{1}{2\pi} \ln \exp 2\pi P_0$$

— главное значение. Однако следует иметь в виду, что если мы берем иррегулярное значение

$$W_0 = \frac{1}{2\pi} \ln \exp 2\pi P_0$$

[1] Исследования Н. А. А. ... [8, 9] мне не были известны при выполнении работы [14], которая является частью работ, начатых и законченных в период октября — декабря 1942 г. в условиях полного отрыва от математической литературы (при наличии лишь одной книги А. М. Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения»). Работа [14] включает в себя почти всю докторскую диссертацию, защищенную в июле 1943 г. в Казанском университете (некоторые параграфы диссертации не включены в эту работу и печатались отдельно).

в соответствии с теоремой 2.3, то характеристическое уравнение матрицы $\sum_{k=0}^{\infty} W_k \varepsilon^k$ может и не быть вида (16.5).

Например, если (15.1) — каноническая система и мы берем W_0 в виде (15.65), где $m \neq -n$, то не получим уравнения вида (16.5), так как корни характеристического уравнения матрицы $\sum_{k=0}^{\infty} W_k \varepsilon^k$ очевидно не будут попарно противоположных знаков. Однако если мы возьмем

$$W_0 = \frac{1}{2\pi} \ln \exp 2\pi P_0$$

— главное значение или даже иррегулярное вида (15.43) (на основании (15.39)), то получим (16.5).

§ 17. СИСТЕМА (16.3), ГДЕ $P_0 = P_1 = \ldots = P_{m-1} = 0$

Предположим, что в системе (16.3) $P_0 = P_1 = \ldots = P_{m-1} = 0$ и $P_m(t) \neq 0$. Тогда в соответствии с (13.3) и (13.4) будем иметь:

$$W(\varepsilon) = \sum_{k=m}^{\infty} W_k \varepsilon^k, \quad Z(t, \varepsilon) = I + \sum_{k=m}^{\infty} Z_k \varepsilon^k \quad (\varepsilon \text{ — вещественное}),$$

$$\frac{dZ_m}{dt} = P_m(t) - W_m, \quad W_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_m(t)\, dt,$$

$$Z_m = \int_0^t [P_m(t) - W_m]\, dt.$$

Характеристическое уравнение для матрицы $M = W\varepsilon^{-m}$ имеем в виде

$$\mu^{2n} + a_1 \mu^{2(n-1)} + \ldots + \mu^2 a_{n-1} + a_n + P_{n-1}(\mu^2, \varepsilon) = 0, \quad (17.1)$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — коэффициенты характеристического уравнения матрицы W_m, а коэффициенты полинома степени $n-1$ $P_{n-1}(\mu^2, \varepsilon)$ стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 17.1. *Если корни p_k уравнения*

$$p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + p a_{n-1} + a_n = 0, \quad p = \mu^2 \quad (17.2)$$

различные отрицательные: $p_k = -b_k^2$, $b_k > 0$ $(k = 1, \ldots, n)$, *то х. ч. матрицы* W *при малых* ε *чисто мнимые различные.*

Доказательство. Для корней $p(\varepsilon)$ уравнения (17.1) имеем $p_k(\varepsilon) = -b_k^2 + \varphi_k(\varepsilon)$ $(k = 1, \ldots, n)$, где вещественная функция $\varphi_k(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, для х. ч. λ_ν, $\lambda_{-\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ матрицы W будем иметь

$$\lambda_\nu = i(b_\nu + \psi_\nu(\varepsilon))\varepsilon^m, \quad \lambda_{-\nu} = -i(b_\nu + \psi_\nu(\varepsilon))\varepsilon^m \quad (\nu = 1, \ldots, n),$$

где вещественная функция $\psi_\nu(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

В работе [34] этот результат получен иным путем для системы

$$\frac{dX}{dt} = XP(t)\varepsilon \quad (\text{т. е. } P_0 = P_2 = P_3 = \ldots = 0). \qquad (17.3)$$

Замечание 17.1. Пусть корни уравнения (17.2) нули и отрицательные числа. Тогда, привлекая к рассмотрению W_{m+1}, найдем х. ч. матрицы $W_m + W_{m+1}\varepsilon$. Если окажется, что p_k $(k = 1, \ldots, n)$ — различные отрицательные, то мы снова получим х. ч. матрицы W чисто мнимыми при малых ε. Чисто мнимыми они будут оставаться и при $|\varepsilon| < r$, где r — наименьший из модулей чисел ε_1, являющихся корнями дискриминанта $\Delta(\varepsilon_1) = 0$ уравнения $(-1)^n D(X(2\pi, \varepsilon) - \lambda I) = 0$.

В работе [34] рассматриваются вообще те интервалы значений ε системы (17.3), для которых х. ч. матрицы W различные чисто мнимые. При этом предполагается, что х. ч. матрицы W_1 чисто мнимые различные.

§ 18. ЗАДАЧА Н. А. АРТЕМЬЕВА

Н. А. Артемьев в работе [8] рассматривает следующую задачу. Пусть задана каноническая система

$$\frac{dX}{dt} = XP(t, \mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon), \qquad (18.1)$$

где матрица порядка $2n$

$$P(t + 2\pi, \mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon) = P(t, \mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon)$$

и $\mu_1, \ldots, \mu_\nu$, ε — параметры. Найти те соотношения между $\mu_1, \ldots, \mu_\nu$, ε, при которых характеристические числа матрицы W системы (18.1) будут чисто мнимые. Заметим, что, согласно теореме Ляпунова, только в этом случае общее решение системы (18.1) может быть ограниченным.

Н. А. Артемьев предлагает эту задачу решать так.

По теореме Ляпунова каждому х. ч. σ матрицы W найдется соответственно и х. ч. $-\sigma$. Поэтому имеем следующую совокупность х. ч. $\sigma_k(\varepsilon)$, $s_k(\varepsilon)$ показательной матрицы W:

$$\sigma_1(\varepsilon) = \lambda_1(\mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon) + i\,\omega_1(\mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sigma_n(\varepsilon) = \lambda_n(\mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon) + i\,\omega_n(\mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$s_n(\varepsilon) = -\lambda_n(\mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon) - i\,\omega_n(\mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon).$$

Отсюда и получаем соотношения между $\mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon$ из уравнений

$$\lambda_1(\mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon) = 0, \ldots, \lambda_n(\mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon) = 0, \qquad (18.2)$$

при выполнении которых нулевое решение заданной линейной системы (18.1) может оказаться устойчивым (требуется еще, чтобы элементарные делители показательной матрицы W были простыми).

Во многих конкретных задачах, говорит Н. А. Артемьев, бывает возможным получить первые члены разложения величин $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ по параметру ε, тогда удается приближенно вычислить корни уравнений (18.2).

По этому поводу можно сказать следующее. На самом деле, мы в этой задаче не имеем равенств[1], определяющих соотношения между параметрами $\mu_1, \ldots, \mu_\nu$, ε. Покажем это.

Характеристическое уравнение матрицы W системы (18.1) имеет вид

$$\mu^n + a_1(\mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon)\,\mu^{n-1} + \ldots + a_n(\mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon) = 0, \quad (18.3)$$

где $\mu = \zeta^2$ и ζ — х. ч. матрицы W. Отсюда видим, что х. ч. ζ матрицы W будут чисто мнимыми в том и только в том случае, когда все корни уравнения (18.3) будут отрицательными. А это будет тогда и только тогда, когда будут выполнены неравенства Гурвица [3, 35—37]. Запишем условно эти неравенства Гурвица в виде

$$b_1(\mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon) > 0, \quad \ldots, \quad b_n(\mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon) > 0. \quad (b) \qquad (18.4)$$

Таким образом, область значений параметров $\mu_1, \ldots, \mu_\nu$, ε, в которой х. ч. матрицы W будут чисто мнимыми, дается неравенствами (18.4). Если выполнены эти неравенства, то все

[1] Это объясняется тем, что система (18.1) не произвольная, а каноническая, поэтому некоторые равенства для интегральной подстановки $X(2\pi, \mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon)$ этой системы уже выполнены (характеристическое уравнение для матрицы $X(2\pi, \mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon)$ по теореме Ляпуиова является возвратным).

х. ч. матрицы W будут чисто мнимыми. Если они будут и различными (т. е. если будут различными все отрицательные корни уравнения (18.3)), то общее решение системы (18.1) наверное будет ограниченным колеблющимся (не стремящимся асимптотически к нулю при $t \to \infty$). Но если есть и кратные, то надо убедиться в том, что все элементарные делители матрицы W простые, так как только при этом дополнительном условии снова будем иметь общее решение ограниченным колеблющимся.

Отсюда следует, что область (D) значений параметров $\mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon$, которой соответствуют ограниченные решения системы (18.1), получается вычитанием из области (18.4) той ее части, в которой характеристические числа матрицы W будут кратными с непростыми элементарными делителями. Область значений параметров $\mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon$, которой соответствуют кратные характеристические числа матрицы W, определяется равенством

$$\Delta(\mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon) = 0, \quad (\Delta) \qquad (18.5)$$

где Δ — дискриминант уравнения (18.3).

Таким образом, область (A) значений параметров $\mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon$, которая порождает ограниченные решения системы (18.1), может быть записана в виде

$$(A) = (b) - (\Delta). \qquad (18.6)$$

Границей[1] $(\bar{A}) - (A)$ этой области будет такое множество точек $(\mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon)$, которому соответствуют нулевые и кратные характеристические числа матрицы W. Но и среди этого множества $(\bar{A}) - (A)$ есть множество точек (C), которым соответствуют ограниченные решения, — это те точки, которые порождают матрицу W с простыми элементарными делителями.

Таким образом, вся область (D), которой соответствует ограниченное общее решение, может быть записана так:

$$(D) = (A) + (C). \qquad (18.7)$$

Границей $(\bar{D}) - (D)$ этой области будет такое множество точек $(\mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon)$, которым соответствуют матрицы W с непростыми элементарными делителями.

Здесь возникают следующие задачи:

I. Пусть выполнены условия Гурвица для уравнения (18.3), т. е. все корни этого уравнения будут отрицательными.

[1] $(\bar{A})$ — замыкание (A).

Известными способами из алгебры можно установить промежуток $(-\omega, 0)$, в котором находятся отрицательные корни уравнения (18.3). Спрашивается, каковы те условия, которым удовлетворяет матрица $P(t, \mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon)$ системы (18.1), при выполнении которых корни уравнения (18.3) не выйдут из заданного промежутка $(-\omega, 0)$.

Обозначая эти корни через $-\omega_1^2, \ldots, -\omega_n^2$, мы получим частоты ω_m колеблющихся решений системы (18.1), так как если есть частота ω_m, то существует и решение вида

$$x = z_1(t)\cos\omega_m t + z_2(t)\sin\omega_m t,$$

где $z_1(t)$, $z_2(t)$ — периодические с периодом 2π векторы.

II. Пусть точка $(\mu_1^0, \ldots, \mu_\nu^0, \varepsilon^0)$ есть такая, что матрица W имеет кратные корни, все равно с простыми или непростыми элементарными делителями. Тогда возникает вопрос о том, будет ли в окрестности этой точки общее решение системы (18.1) ограниченным. Чтобы решить этот вопрос, надо задать все параметры $(\mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon)$ как функции некоторого одного параметра τ так, чтобы было

$$\mu_1 = \mu_1(\tau), \ldots, \mu_\nu = \mu_\nu(\tau), \quad \varepsilon = \varepsilon(\tau) \tag{18.8}$$

и

$$\mu_1^0 = \mu_1(0), \ldots, \quad \mu_\nu^0 = \mu_\nu(0), \quad \varepsilon^0 = \varepsilon(0).$$

В частности, за параметр τ можно взять, например, ε или просто закрепить все значения параметров и оставить переменными какой-нибудь один. Функции (18.8), например, могут оказаться такими, что они удовлетворяют уравнениям (граница области (18.4))

$$b_1(\mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon) = 0, \ldots, b_n(\mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon) = 0. \tag{18.9}$$

Пусть для простоты функции (18.8) голоморфные в окрестности $\tau = 0$. Тогда коэффициенты уравнения (18.3) будут голоморфными в окрестности $\tau = 0$, и при $\tau = 0$ уравнение (18.3) имеет кратные корни.

Если теперь окажется, что в окрестности точки $\tau = 0$ уравнение (18.3) имеет все корни отрицательными и простыми, то в окрестности точки $\tau = 0$ мы и получим такую систему (18.1), общее решение которой будет ограниченным. Будет ли при заданных функциях (18.8) уравнение (18.3) иметь только простые отрицательные корни, можно установить при помощи неравенств Гурвица и на основании работы [32], в которой изложены методы, позволяющие установить, будут ли корни простые вещественные. Этим мы исследуем поведение общего решения системы (18.1) в окрестности точки $(\mu_1^0, \ldots, \mu_\nu^0, \varepsilon^0)$, именно вдоль кривой (18.8).

§ 19. К ТЕОРИИ ПРИВОДИМЫХ СИСТЕМ

Пусть дана приводимая [14] система n линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = XP(t) \qquad (19.1)$$

и соответствующая приведенная система

$$\frac{dY}{dt} = YB, \qquad (19.2)$$

где $P(t)$ — матрица вещественная непрерывная и ограниченная в области $t \geqslant 0$, а B — постоянная вещественная матрица n-го порядка, которую, согласно замечанию 3 работы [14], можно считать и канонической. Согласно теореме 1 [14], система (19.1) имеет решение

$$X = \exp Bt \cdot Z(t), \qquad (19.3)$$

где $Z(t)$ и $Z^{-1}(t)$ — ограниченные матрицы. Матрица $Z(t)$ и преобразует систему (19.1) в систему (19.2) по формуле

$$X = YZ(t). \qquad (19.4)$$

Теорема 19.1. *Существуют вещественные матрицы $Z(t)$, ограниченные вместе с $Z^{-1}(t)$, переводящие систему (19.1) в систему (19.2) по формуле (19.4).*

Мы и найдем все эти матрицы $Z(t)$.

Доказательство. Пусть в (19.3) $Z(t)$ — комплексная, $Z(t) = Z_1(t) + iZ_2(t)$, где $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$ — ограниченные вещественные матрицы. Тогда имеем вещественную интегральную матрицу системы (19.1)

$$X(t, \alpha) = \exp Bt \cdot (Z_1(t) + \alpha Z_2(t)) = \exp Bt \cdot Z(t, \alpha),$$

где α — произвольный численный параметр.

Существует вещественное значение α, при котором будет $D(X(t, \alpha)) \neq 0$. Здесь D — знак определителя. Действительно, так как $D(Z^{-1}(t, i))$ ограничен, то

$$D(Z(t, \alpha)) = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta_k(t) \neq 0 \text{ при } \alpha = i,$$

где $\beta_k(t)$ — вещественные ограниченные функции. Возьмем какое-нибудь α, при котором $D(Z(t_0, \alpha)) \neq 0$. Тогда, согласно известному свойству фундаментальной системы решений линейной системы (19.1), будет и

$$D(Z(t, \alpha)) \neq 0. \qquad (19.5)$$

Отсюда следует, что существует не более n значений параметра α, при которых

$$D(Z(t, \alpha)) = 0. \tag{19.6}$$

В частности, при всех[1] достаточно больших и малых по модулю значениях α выполняется (19.5).

Таким образом, имеем вещественную интегральную матрицу системы (19.1) в виде

$$X = \exp Bt \cdot Z(t, \alpha), \; D(Z(t, \alpha)) \neq 0, \tag{19.7}$$

где α — любое вещественное число, неравное корню уравнения (19.6) при каком-нибудь произвольном $t = t_0$.

Докажем, что матрица $[Z(t, \alpha)]^{-1}$ будет ограничена в области $t \geqslant 0$.

По теореме Остроградского — Якоби для решения (19.7) имеем:

$$D(X) = \exp(\sigma(B)t) \cdot D(Z(t, \alpha)) = $$
$$= c(\alpha) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \sigma(P(t))\, dt\right),$$

где $\sigma(Y)$ — след матрицы Y и $c(\alpha) = D(X(t_0)) \neq 0$. Отсюда

$$D(Z(t, \alpha)) = c(\alpha) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \sigma(P - B)\, dt - \sigma(B) \cdot t_0\right).$$

Так как функция $D(Z^{-1}(t, \alpha))$ ограничена при $\alpha = i$, то она будет ограничена и при всех других α, для которых $D(Z(t, \alpha)) \neq 0$, ибо функция

$$\exp\left(\int_{t_0}^{t} \sigma(P - B)\right) dt$$

не зависит от α. Впрочем, ограниченность функции $D(Z^{-1}(t, \alpha))$ следует и непосредственно из теоремы 3 работы [14]. Мы в сущности и повторили доказательство этой теоремы 3.

Таким образом, мы доказали, что вещественная матрица $Z(t, \alpha)$ будет ограничена вместе с $Z^{-1}(t, \alpha)$ и преобразует систему (19.1) в (19.2) при произвольном вещественном α, не равном корню уравнения (19.6) при каком-нибудь произвольном $t = t_0$. Согласно выражению (24) работы [14], общий

---

[1] За исключением, может быть, $\alpha = 0$, если $D(Z_1) = 0$.

вид вещественной матрицы, преобразующей систему (19.1) в (19.2), можно записать так:

$$Z = Z(t, \alpha)\exp(-Bt)\cdot C\exp(Bt),$$

где C — произвольная вещественная матрица, для которой матрица $\exp(-Bt)\cdot C\exp(Bt)$ ограничена и $D(C) \neq 0$. Если матрица P в системе (19.1) постоянная, то в качестве решения (19.3) можно взять

$$X = \exp Bt\cdot\exp\ ([\beta_1, \ldots, \beta_n]\, it)\, S,$$

т. е. будем иметь

$$Z = \exp([\beta_1, \ldots, \beta_n]\, it)\, S = Z_1(t) + iZ_2(t), \tag{19.8}$$

где $P = S^{-1}JS$, B — вещественная часть канонической жордановой формы матрицы P, т. е. вещественная часть матрицы J, и $J = B + [\beta_1, \ldots, \beta_n]\, i$. Матрицы $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$, следовательно, легко находятся. Здесь $[\beta_1, \ldots, \beta_n]$ — вещественная диагональная матрица.

Замечание 19.1. Из (19.8) видим, что вещественные матрицы $Z(t, \alpha)$, преобразующие систему (19.1) с постоянной матрицей P в систему (19.2), имеют вид

$$Z(t, \alpha) = \|\delta\exp i\beta_k t\|,$$

где δ — постоянные, а β_k — мнимые части характеристических чисел матрицы P.

§ 20. МЕТОД И. З. ШТОКАЛО [10,38]

Рассмотрим систему

$$\frac{dX}{dt} = X\left[P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t)\,\varepsilon^k\right] = XP(t), \tag{20.1}$$

где P_0 — вещественная постоянная матрица n-го порядка и вещественные матрицы $P_k(t)$ имеют вид

$$P_k(t) = \sum C^{(k)}_{\mu_k} e^{i\mu_k t}. \tag{20.2}$$

Здесь $C^{(k)}_{\mu_k}$ — постоянные матрицы n-го порядка и μ_k — вещественные числа, пробегающие конечное число значений. Ряд, представляющий ограниченную матрицу $P(t)$, сходится при $|\varepsilon| < r$ равномерно в области $-\infty < t < \infty$. Здесь $P(t)$ не будет периодической, если среди чисел μ_k есть несоизмеримые.

Такие системы изучил И. З. Штокало [10]. Мы и будем сейчас следовать его методу. Но сначала преобразуем систему (20.1) к другой с помощью равенства

$$Y = XZ, \tag{20.3}$$

где элементы вещественной матрицы Z, ограниченной вместе с Z^{-1}, имеют вид $\delta \exp(i\beta t)$. Здесь δ — постоянное число, β — мнимые части характеристических чисел матрицы P_0,

$$Z^{-1} = Z_1(t, \alpha) = Z_1(t) + \alpha Z_2(t), \tag{20.4}$$

Z_1, Z_2 определены равенством (19.8) прн $P = P_0$ и α — условием (19.5).

Обозначнм через J вещественную часть канонической формы матрицы P_0, т. е. $P_0 = S^{-1}\bar{J}S$, где $\bar{J}$ — каноническая матрица, $\bar{J} = J + \beta i$ и β — диагональная вещественная матрица; $\beta = [\beta_1, \ldots, \beta_n]$.

Для матрицы Y получим уравнение

$$\frac{dY}{dt} = Y\left[Z^{-1}\frac{dZ}{dt} + Z^{-1}P_0Z + Z^{-1}\sum_{k=1}^{\infty} P_k\varepsilon^k Z\right].$$

Но, очевидно, согласно (20.3),

$$Z^{-1}\frac{dZ}{dt} + Z^{-1}P_0Z = J, \quad \frac{dZ}{dt} = ZJ - P_0Z,$$

ибо $Z(t, \alpha)$ выбрано на основанин замечания 19.1. Так как элементы матрицы Z имеют вид $\delta\exp(i\beta t)$, то матрицы $\bar{P}_k(t) = Z^{-1}P_k(t)Z$ имеют снова вид (20.2) с измененными μ_k. Мы можем, таким образом, написать

$$\frac{dY}{dt} = Y\left[J + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t)\varepsilon^k\right]. \tag{20.5}$$

Мы здесь матрицы $\bar{P}_k(t)$ снова обозначили через $P_k(t)$. Эти матрицы имеют внд (20.2) и остаются вещественными.

Для системы (20.5) найдем формальное решение:

$$Y = \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} W_k\varepsilon^k t\right)\cdot\sum_{k=0}^{\infty} Z_k(t)\varepsilon^k, \tag{20.6}$$

$$Z_k(0) = 0, \quad k \geqslant 1,$$

где W_k — постоянные матрнцы, не зависящие и от ε, $Z_k(t)$ — ограниченные матрнцы.

Подставляя (20.6) в (20.5), после умножения слева на

$$\exp\left(-\sum_{k=0}^{\infty} W_k \varepsilon^k t\right)$$

получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} W_k \varepsilon^k \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(t)\varepsilon^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{dZ_k}{dt}\varepsilon^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} Z_k \varepsilon^k \sum_{k=0}^{\infty} P_k \varepsilon^k.$$

Сравнивая здесь коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим

$$\frac{dZ_0}{dt} = Z_0 J - W_0 Z_0, \tag{20.7}$$

$$\frac{dZ_k}{dt} = \sum_{\nu=0}^{k} Z_\nu P_{k-\nu} - \sum_{\nu=0}^{k} W_\nu Z_{k-\nu}. \tag{20.8}$$

Полагаем

$$W_0 = J, \quad Z_0 = I. \tag{20.9}$$

И. З. Штокало не преобразует систему (20.1) в систему (20.5), а сразу ищет формальное решение (20.6) для заданной системы (20.1).

Если мы будем искать формальное решение (20.6) для системы (20.1), то вместо (20.7) получим

$$\frac{dZ_0}{dt} = Z_0 P_0 - W_0 Z_0. \tag{20.10}$$

Рассмотрим это уравнение. Пусть

$$P_0 = S^{-1}\bar{J}S = S^{-1}JS + S^{-1}\beta S i.$$

Полагая в (20.10) $Z_0 = \exp(i\beta t)\cdot S$, получим

$$i\beta\exp(i\beta t)\cdot S = \exp(i\beta t)\cdot S\cdot S^{-1}\bar{J}S - W_0\exp(i\beta t)\cdot S.$$

Отсюда имеем

$$W_0 = [\exp(i\beta t)\cdot\bar{J}S - i\beta\exp(i\beta t)\cdot S]\cdot S^{-1}\exp(-i\beta t) =$$

$$= \exp(i\beta t)\cdot\bar{J}\exp(-i\beta t) - i\beta.$$

Очевидно матрицы β и $\bar{J}$ коммутируют, поэтому $W_0 = J$.

Мы получили, таким образом, для системы (20.1) снова $W_0 = J$, но $Z_0 = \exp(i\beta t)\cdot S$ вместо $Z_0 = I$, что имели для системы (20.5) согласно (20.9). Это значение Z_0 может оказаться комплексным.

Дальнейшие рассуждения мы будем проводить относительно системы (20.5).

Итак, имеем (20.9). Найдем W_1 и Z_1 из уравнения (20.8) при $k = 1$:

$$\frac{dZ_1}{dt} = Z_1 J - J Z_1 + P_1 - W_1. \tag{20.11}$$

Пусть характеристические числа (вещественные части характеристических чисел матрицы P_0) матрицы J суть λ_k ($k = 1, \ldots, m$). Тогда в случае $\lambda_k \neq \lambda_l$ элемент $z_{k,l}^{(1)}$ матрицы Z_1 находится по формуле (11.14):

$$z_{k,l}^{(1)} = \exp(\lambda_l - \lambda_k)\, t \cdot \int_0^t f(t) \exp(-(\lambda_l - \lambda_k)\, t)\, dt, \tag{20.12}$$

$$f(t) = \delta_l z_{k,l+1}^{(1)} - \delta_k z_{k-l,l}^{(1)} + p_{k,l}^{(1)} - w_{k,l}^{(1)}; \tag{20.13}$$

где $p_{k,l}^{(1)}$ и $w_{k,l}^{(1)}$ — элементы матриц P_1 и W_1. Мы выберем $w_{k,l}^{(1)}$ так, чтобы $z_{k,l}^{(1)}$ имело вид $\delta \exp(i\beta t)$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{1}{t} \int_0^t \left[\int_0^t f(t) \exp(-(\lambda_l - \lambda_k)\, t)\, dt \right] dt \to 0 \tag{20.14}$$

при $t \to 0$. Другими словами, второй множитель выражения (20.12), имеющий вид

$$\sum_\beta \delta \cdot \exp\left[i\beta t - (\lambda_l - \lambda_k)\, t\right] + M,$$

не должен содержать свободного члена M. Если же $\lambda_k = \lambda_l$, то $z_{k,l}$ находим соответственно либо по формуле (11.6):

$$z_{k,l} = \int_0^t (p_{k,l}^{(1)} - w_{k,l}^{(1)})\, dt, \quad w_{k,l} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t p_{k,l}^{(1)}\, dt \tag{20.15}$$

либо по формуле (11.17):

$$z_{k,l} = \int_0^t \left[z_{k,l+1} \delta_l - \delta_k z_{k-l,l} + p_{k,l}^{(1)} - w_{k,l}\right] dt, \tag{20.16}$$

$$w_{k,l} = \lim_{t = \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left[z_{k,l+1} \delta_l - \delta_k z_{k-l,l} + p_{k,l}^{(1)}\right] dt. \tag{20.17}$$

Впрочем, решение уравнения (20.11) можно получить и по общей формуле (11.9):

$$Z_1 = \exp(-Jt)\int_0^t \exp(Jt)(P_1 - W_1)\exp(-Jt)\,dt\cdot\exp(Jt), \qquad (20.18)$$

где W_1 определяется равенством

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \exp(Jt)\cdot(P_1 - W_1)\exp(-Jt)\,dt = 0. \qquad (20.19)$$

Мы также, очевидно, найдем и W_k, $Z_k(k\geqslant 2)$.

Таким образом, мы имеем формальное решение (20.6), где $W_0 = J$, $Z_0 = \mathrm{I}$. Заметим теперь, что мы также нашли бы Z_k, $W_k(k\geqslant 1)$, если бы $P_k(t)(k\geqslant 1)$ имело в сумме (20.2) бесконечное число слагаемых, т. е. если бы оно было квазипериодическим.

Можно предполагать $P_k(t)$ и равномерно-периодическими функциями [39] с показателями[1] $\Delta_l^{(k)}\longrightarrow\infty$ при $l\longrightarrow\infty$, а также некоторыми другими.

Замечание 20.1. Особенно просто коэффициенты W_1 и Z_1 найдем по общим формулам (20.18), (20.19) в том случае, когда матрица $J = 0$. Именно,

$$Z_1 = \int_0^t (P_1 - W_1)\,dt \qquad (20.20)$$

и

$$W_1 = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t P_1 dt. \qquad (20.21)$$

Также в этом случае будут находиться W_k, $Z_k(k\geqslant 2)$. И если матрица P_0 в системе (20.1) имеет чисто мнимые простые х. ч., то именно случай $J = 0$ имеет место. Если, например, система (20.1) каноническая, то P_0 имеет чисто мнимые х. ч. Если они простые, то и будет $J = 0$.

Теперь мы найдем коэффициенты рядов

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} W_k\varepsilon^k,\ W_0 = J, \qquad (20.22)$$

$$Z = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(t)\varepsilon^k,\ Z_0 = \mathrm{I} \qquad (20.23)$$

другим методом, предложенным И. З. Штокало.

---

[1] Совокупность показателей $\left\{\Delta_l^{(k)}\right\}_{l=1}^{\infty}$ матриц $P_k(t)$ предполагаем, простоты ради, не зависящей от k.

§ 21. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДОВ (20.22), (20.23) ПО МЕТОДУ И. З. ШТОКАЛО [10,38]

Мы рассмотрим уравнение вида (20.11)

$$\frac{dZ}{dt} = ZJ - JZ + P(t) - W, \tag{21.1}$$

где J имеет прежнее значение (каноническая вещественная матрица), $P(t)$ — выражение вида (20.2) и W — постоянная матрица, которую надо определить так, чтобы Z имело вид (20.2).

Итак, пусть

$$P(t) = \sum P_\mu \exp(i\mu t), \tag{21.2}$$

где P_μ — постоянные матрицы. Будем искать, следуя Штокало, Z в виде

$$Z = \sum b_\mu \exp(i\mu t), \quad b_\mu \text{ — постоянная матрица.} \tag{21.3}$$

Полагаем, как и Штокало,

$$W = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t P(t)\,dt = P_0. \tag{21.4}$$

Здесь P_0 — свободный член в (21.2). Тогда (21.1) перепишется так:

$$\frac{dZ}{dt} = ZJ - JZ + \sum_{\mu\neq 0} P_\mu \exp(i\mu t). \tag{21.5}$$

Подставляя (21.3) в (21.5) и сравнивая коэффициенты при $\exp(i\mu t)$, получим

$$i\mu b_\mu = b_\mu J - J b_\mu + P_\mu. \tag{21.6}$$

Отсюда матрицу b_μ можно найти. Это доказал в общем случае И. З. Штокало. Данное выражение исследовано также в работе И. А. Лаппо-Данилевского [1], который не только показал разрешимость (21.6), но и дал несколько форм решения в случае, когда матрица J имеет простые различные характеристические числа. Подробно уравнение (21.6) исследовано и в книге Ф. Р. Гантмахера [3].

Мы докажем разрешимость уравнения (21.6), следуя в основном И. З. Штокало.

Умножая (21.6) на $\exp(i\mu t)$ и обозначая

$$U = b_\mu \exp(i\mu t), \tag{21.7}$$

получим

$$\frac{dU}{dt} = UJ - JU + P_\mu \exp(i\mu t). \tag{21.8}$$

Общее решение уравнения (21.8) прн $P_\mu = 0$ имеем в виде

$$U = \exp(-Jt) C \exp(Jt), \tag{21.9}$$

где C — произвольная постоянная матрица.

Если уравнение (21.6) не имеет решения или имеет, но не единственное, то это выражение при $P_\mu = 0$ имеет решение $b_\mu \neq 0$. Но тогда уравнеиие (21.8) при $P_\mu = 0$ имеет решение $U = b_\mu \exp(i\mu t)$ с $b_\mu \neq 0$, и, следовательно, мы получаем

$$\exp(-Jt) C \exp(Jt) = b_\mu \exp(i\mu t),$$

что невозможно, так как матрица J вещественная.

Мы доказали единственность решения уравнения (21.6). Найдем это решение.

Считая C функцией от t и подставляя (21.9) в (21.8), получим

$$\exp(-Jt) \frac{dC}{dt} \exp(Jt) = P_\mu \exp(i\mu t). \tag{21.10}$$

Отсюда

$$C = \int_0^t \exp(Jt) P_\mu \exp(-Jt) \cdot \exp(i\mu t)\, dt + K. \tag{21.11}$$

Здесь K — произвольная постоянная матрица. Мы положим

$$K = -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left[\int_0^t \exp(Jt) \cdot P_\mu \exp(-Jt) \times \right.$$
$$\left. \times \exp(i\mu t)\, dt \right] dt. \tag{21.12}$$

Другимн словами, K должна погасить в (21.11) ту постоянную матрицу, которая получается при подстановке нижнего предела интегрнрования. После этого имеем:

$$U = \exp(-Jt) \cdot \left[\int_0^t \exp(Jt) \cdot P_\mu \exp(-Jt) \times \right.$$
$$\left. \times \exp(i\mu t) \cdot dt + K \right] \exp(Jt) \tag{21.13}$$

и

$$b_\mu = U \exp(-i\mu t). \tag{21.14}$$

Если бы мы иначе выбрали K, то в квадратных скобках был бы свободный член, который в U породил бы член, отличный от $Ae^{i\mu t}$, и мы не получили бы для U выражения

$$U = b_\mu \exp(i\mu t),$$

существование и единственность которого нами доказана.

Таким образом, мы всегда найдем решение уравнения (21.1) в виде (21.3), определяя матрицы из (21.6) в виде (21.14). Это позволяет нам находить W_k, $Z_k (k > 1)$ из (20.8) по методу И. З. Штокало, т. е. определяя W из уравнений вида (21.1) по формуле (21.4) и Z по (21.3), (21.14).

Нетрудно записать матрицу (21.14) и в развернутом виде. Если, например, $J = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$, т. е. матрица J диагональная, то

$$\{\exp(Jt)\cdot P_\mu \exp(-Jt)\}_{kl} = p_{kl}^{(\mu)} \exp(\lambda_k - \lambda_l)\cdot t, \qquad (21.15)$$

где $p_{kl}^{(\mu)}$ — элементы матрицы P_μ. Отсюда и из (21.11) имеем:

$$\{C\}_{kl} = \frac{p_{kl}^{(\mu)} \exp(\lambda_k - \lambda_l + i\mu)t}{\lambda_k - \lambda_l + i\mu}$$

и, следовательно, опять в силу (21.15)

$$\{b_\mu\}_{kl} = \frac{p_{kl}^{(\mu)}}{\lambda_k - \lambda_l + i\mu}. \qquad (21.16)$$

Мы получили формулу Лаппо-Данилевского. Метод определения коэффициентов рядов (20.22), (20.23) применим, конечно, и в том случае, когда матрицы $P_k(t)$ в (20.5) периодические, представленные в форме (20.2), где может быть и бесконечное число слагаемых.

Впрочем, если матрицы $P_k(t)$ в системе (20.1) периодические, то после преобразования (20.3) можем получить систему (20.5), в которой $P_k(t)$ уже не будут периодическими. Это будет в том случае, когда матрица P_0 имеет характеристические числа, мнимые части которых β несоизмеримы с частотой периодических матриц системы (20.1). Но тогда мы можем преобразовать (20.1) к такой системе, где вместо матрицы P_0 будет стоять постоянная матрица, не имеющая таких характеристических чисел λ_k, λ_l, что $\lambda_k - \lambda_l = 2\pi\omega k$, где k — целое и $2\omega\pi$ — период матриц $P_k(t)$ в системе (20.1). После этого мы можем искать коэффициенты рядов (20.22) и (20.23) по методу И. З. Штокало, так как решение уравнений (20.8) можно получить по данному методу и в этом случае в виде периодических функций (в (21.2) и (21.3) числа μ будут соизмеримы).

Надо, однако, заметить следующее. Определяя W_k и Z_k по методу И. З. Штокало, мы найдем Z_k в виде (21.3) и, следовательно, вообще говоря, не будем иметь $Z_k(0)=0\,(k\geqslant 1)$. Это видно, в частности, из (21.11), (21.12). Но тогда мы получим такие ряды (20.22), (20.23), сходимость которых не можем гарантировать даже в случае, когда $P_k(t)$ в системе (20.1) суть матрицы периодические с одним периодом. Но если нас интересует только факт асимптотической устойчивости нулевого решения системы (20.1), то сходимости рядов (20.22), (20.23) и не требуется, если мы и далее будем следовать методу И. З. Штокало.

Итак, перейдем к дальнейшим рассуждениям И. З. Штокало после того, как ряды (20.22) и (20.23) получены.

§ 22. ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ПО МЕТОДУ И. З. ШТОКАЛО

Рассматривая систему (20.5), введем новую неизвестную матрицу при помощи равенства

$$Y = X\sum_{k=0}^{m} Z_k(t)\,\varepsilon^k, \tag{22.1}$$

где второй множитель есть отрезок формального ряда (20.23), а X удовлетворяет уравнению

$$\frac{dX}{dt} = X\left[\sum_{k=0}^{m} W_k\varepsilon^k + \varepsilon^{m+1}R_m(t, \varepsilon)\right], \tag{22.2}$$

в котором сумма есть отрезок ряда (20.22) и $R_m(t, \varepsilon)$ — голоморфная функция в области $|\varepsilon| < R$. Найдем $R_m(t, \varepsilon)$. Подставляя (22.1) в (20.5) и умножая после этого полученное равенство слева на X^{-1}, получим

$$\left[\sum_{k=0}^{m} W_k\varepsilon^k + \varepsilon^{m+1}R_m(t, \varepsilon)\right]\left[\sum_{k=0}^{m} Z_k(t)\varepsilon^k\right] +$$

$$+\sum_{k=0}^{m}\frac{dZ_k(t)}{dt}\varepsilon^k = \sum_{k=0}^{m} Z_k(t)\,\varepsilon^k\left[J + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t)\,\varepsilon^k\right]. \tag{22.3}$$

Отсюда имеем:

$$\varepsilon^{m+1} R_m(t, \varepsilon) = \left[\sum_{k=0}^{m} Z_k \varepsilon^k \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \varepsilon^k -\right.$$

$$\left.- \sum_{k=0}^{m} W_k \varepsilon^k \sum_{=0}^{m} Z_k(t) \varepsilon^k - \sum_{k=0}^{m} \frac{dZ_k(t)}{dt} \varepsilon^k \right] \left[\sum_{k=0}^{m} Z_k \varepsilon^k \right]^{-1} =$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k\leqslant m} Z_l P_{k-l} - \sum_{l=0}^{k\leqslant m} W_l Z_{k-l} -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{dZ_k(t)}{dt}\right) \varepsilon^k \right] \left[\sum_{k=0}^{m} Z_k \varepsilon^k \right]^{-1}, \tag{22.4}$$

при этом полагаем $Z_k = 0$ для $k \geqslant m+1$. При $k \leqslant m$

$$\sum_{l=0}^{k} Z_l P_{k-l} - \sum_{l=0}^{k} W_l Z_{k-l} - \frac{dZ_k}{dt} = 0$$

в силу (20.8), поэтому (22.4) после сокращения на ε^{m+1} перепишется в виде

$$R_m(t, \varepsilon) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{m} Z_l P_{k-l} - \sum_{l=0}^{m} W_l Z_{k-l}\right) \varepsilon^{k-m-1} \times$$

$$\times \left[\sum_{k=0}^{m} Z_k \varepsilon^k \right]^{-1}. \tag{22.5}$$

Мы имеем

$$\left[I + \sum_{k=1}^{m} Z_k \varepsilon^k \right]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} M_k \varepsilon^k, \tag{22.6}$$

и ряд этот сходится (§ 1) при

$$\left|\sum_{k=1}^{m} Z_k \varepsilon^k\right| < \left\|\frac{1}{n}\right\|,$$

где n — порядок матриц Z_k.

Чтобы найти M_k, умножаем равенство (22.6) слева на

$$I + \sum_{k=1}^{m} Z_k \varepsilon^k.$$

Получаем

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k \leqslant m} Z_l M_{k-l} \right) \varepsilon^k, \quad M_0 = I, \; Z_0 = I.$$

Отсюда

$$\sum_{l=0}^{k \leqslant m} Z_l M_{k-l} = 0 \text{ при } k \geqslant 1$$

и, следовательно,

$$M_k = - \sum_{l=1}^{k \leqslant m} Z_l M_{k-l}.$$

Теперь можно переписать $R_m(t, \varepsilon)$ в виде

$$R_m(t, \varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu \varepsilon^\nu \sum_{k=0}^{\infty} M_k \varepsilon^k = \sum_{\mu=0}^{\infty} R_\mu^{(m)} \varepsilon^\mu. \qquad (22.7)$$

Здесь

$$D_\nu = \sum_{l=0}^{m} (Z_l P_{\nu+m+1-l} - W_l Z_{\nu+m+1-l}),$$

$$R_\mu^{(m)} = \sum_{\nu=0}^{\mu} D_\nu M_{\mu-\nu}.$$

Ряд (22.7) сходится при $\left| \sum_{k=1}^{m} Z_k \varepsilon^k \right| < \frac{1}{n}$ и $|\varepsilon| < r$ (область сходимости ряда, входящего в (20.1)).

Мы доказали формулу (22.2).

Из (22.1) видим, что если матрица X ограничена, то и матрица Y также будет ограничена. Таким образом, изучение вопроса устойчивости нулевого решения системы (20.5) приводится к изучению этого же вопроса для системы (22.2). Оставляя справа в (22.2) малые порядка ε^m, получим

$$X \approx \exp \left\{ t \sum_{k=0}^{m} W_k \varepsilon^k \right\}.$$

Это дает приближенное значение Y.

§ 23. НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ, ВЫТЕКАЮЩИЕ ИЗ МЕТОДА И. З. ШТОКАЛО

Рассмотрим сначала систему

$$\frac{dY}{dt} = YQ, \tag{23.1}$$

где постоянная матрица Q n-го порядка с элементами

$$\{Q\}_{kl} = q_{kl}.$$

Предположим, что вещественные части характеристических чисел матрицы Q отрицательные. Тогда существует положительная квадратичная форма [26, гл. II]

$$U = \sum_{k,l=1}^{n} \gamma_{kl}\, y_k y_l \tag{23.2}$$

такая, что

$$\sum_{k=1}^{n} (q_{1k}y_1 + q_{2k}y_2 + \ldots + q_{nk}y_n) \frac{\partial U}{\partial y_k} = -\sum_{l=1}^{n} y_l^2, \tag{23.3}$$

или

$$\frac{dU}{dt} = -\sum_{l=1}^{n} y_l^2 \tag{23.4}$$

в силу системы (23.1).

Пусть теперь дана система

$$\frac{dY}{dt} = Y\,[Q + \varepsilon R(t, \varepsilon)], \tag{23.5}$$

где матрица Q прежняя, а матрица $R(t, \varepsilon)$ с элементами

$$\{R(t, \varepsilon)\}_{kl} = R_{kl}$$

ограничена: $|R_{kl}| < r$. Тогда для всякого решения системы (23.5) имеем:

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial y_k} [q_{1k}y_1 + q_{2k}y_2 + \ldots +$$

$$+ q_{nk}y_k + \varepsilon (R_{1k}y_1 + \ldots + R_{nk}\, y_n)]$$

или

$$\frac{dU}{dt}=-\sum_{l=1}^{n} y_l^2+\varepsilon\sum_{l,k=1}^{n}\gamma_{kl}\, y_l\,(R_{1k}y_1+\ldots+R_{nk}y_n). \qquad (23.6)$$

Это равенство можно представить в виде

$$\frac{dU}{dt}=-\sum_{l=1}^{n} y_l^2+\varepsilon\sum_{k,l=1}^{n}\delta_{kl}\, y_k y_l, \qquad (23.7)$$

где δ_{kl} составлены в виде суммы произведений величин γ_{pq}, $R_{\mu\nu}$ и ограничены. Так как

$$\left|\sum\delta_{kl}\, y_k y_l\right|\leqslant\delta\sum_{l=1}^{n} y_l^2, \qquad (23.8)$$

где $\delta=n\max|\delta_{kl}|$, то из (23.7) при достаточно малом ε имеем

$$\frac{dU}{dt}\leqslant(\varepsilon\delta-1)\sum_{l=1}^{n} y_l^2. \qquad (23.9)$$

Отсюда следует асимптотическая устойчивость решений системы (23.5).

Теперь мы получим очевидную оценку. Пусть

$$\sum y_l^2\leqslant A\sum_{k,l}\gamma_{kl}\, y_k y_l,$$

где, например,

$$A^{-1}=\max\left(\sum\gamma_{kl}\, y_k y_l\right)\ \text{при}\ \sum_{l=1}^{n} y_l^2=1. \qquad (23.9_1)$$

Тогда из (23.9) имеем:

$$\frac{dU}{dt}\leqslant(\varepsilon\delta-1)AU,$$

$$U\leqslant U_0\exp(\varepsilon\delta-1)A(t-t_0) \qquad (23.10)$$

и

$$\sum_{l=1}^{n} y_l^2<U_0Ae^{(\varepsilon\delta-1)A(t-t_0)},\quad U_0=(U)_{t=t_0}. \qquad (23.11)$$

Многие и более точные оценки решений даны в работах И. З. Штокало [10,38].

§ 24. ТЕОРЕМА ШТОКАЛО. ОЦЕНКА ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ПО ШТОКАЛО (ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ). НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Теперь мы изучим систему (22.2). Коэффициенты γ_{kl} квадратичной формы (23.2) находятся из линейной неоднородной системы алгебраических уравнений, которые получаются сравнением коэффициентов квадратичных форм, стоящих справа и слева в равенстве (23.3). Определитель этой системы, как показал А. М. Ляпунов [26, гл. II],

$$\Delta = \Pi(m_1\lambda_1 + \ldots + m_n\lambda_n) \quad (m_1 + \ldots + m_2 = 2,\ m_k \geqslant 0),$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — характеристические числа матрицы Q. Определитель Δ, который и будет стоять в знаменателе, является симметрической функцией от $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, а следовательно, будет рационально выражаться через коэффициенты характеристического уравнения матрицы Q. Введем обозначение

$$Q = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k W_k \tag{24.1}$$

и предположим, что вещественные части всех характеристических чисел матрицы Q для некоторых достаточно больших m и $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, где ε^* выбрано достаточно малой величиной для данной совокупности $m \geqslant N$, отрицательные. Это будет в том случае, как показано в статье И. З. Штокало [10, теорема 3], когда детерминанты Гурвица, составленные для характеристического уравнения формальной матрицы

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} W_k \varepsilon^k, \tag{20.22}$$

имеют положительные коэффициенты при низших степенях ε.

Характеристические числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы Q являются алгебраическими функциями параметра ε. Следовательно, λ_k для малых ε представимы в виде рядов по дробным степеням ε или по целым степеням $\varepsilon_1 = \varepsilon^{1/p}$, где p — целое число. Легко видеть, что первые отличные от нуля коэффициенты в этих разложениях не изменяются при увеличении m в формуле (24.1), начиная, по крайней мере, с некоторого m. Отсюда следует, что если

$$\Delta = 2^n\lambda_1 \ldots \lambda_n (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_3) \ldots (\lambda_1 + \lambda_n) \times$$
$$\times (\lambda_2 + \lambda_3) \ldots (\lambda_2 + \lambda_n) \ldots (\lambda_{n-1} + \lambda_n) \tag{24.2}$$

и стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, то порядок малости Δ в окрестности $\varepsilon = 0$ не увеличнвается при увеличении m в формуле (24.1).

Отсюда следует, что если в квадратичной форме (23.2) коэффициенты $\gamma_{kl} \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, то порядок бесконечности не увеличивается при увеличении m.

Для системы (22.2) вместо (23.6) мы получаем равенство

$$\frac{dU}{dt} = -\sum_{l=1}^{n} y_l^2 + \varepsilon^{m+1} \sum_{k,\, l=1}^{n} \gamma_{k,\, l}\, y_l (R_{1k} y_1 + \ldots + R_{nk} y_n), \tag{24.3}$$

вместо (23.7) —

$$\frac{dU}{dt} = -\sum_{l=1}^{n} y_l^2 + \varepsilon^{m+1} \sum_{k,\, l=1}^{n} \delta_{kl}\, y_k y_l \tag{24.4}$$

и вместо (23.9) —

$$\frac{dU}{dt} = (\varepsilon^{m+1} \delta - 1) \sum_{l=1}^{n} y_l^2 . \tag{24.5}$$

Так как порядок возрастания γ_{kl} при $\varepsilon \to 0$ не увеличивается, то не увеличивается и порядок возрастания δ (величина γ_{kl}, а следовательно, и δ могут оказаться и просто ограниченнымн). Поэтому при достаточно большом m будет $\varepsilon^{m+1}\delta - 1 < 0$, откуда будет следовать асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (22.2). Мы также, конечно, получим оценку вида (23.11):

$$\sum_{l=1}^{n} y_l^2 < U_0 A \exp\left[(\varepsilon^{m+1} \delta - 1) A (t - t_0)\right]. \tag{24.6}$$

Но здесь, может быть, $U_0 \to \infty$, а $A \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Возможно, как указано выше, и $\delta \to \infty$, но так как при увеличении m порядок возрастания δ не увеличивается, то при достаточно большом m будет $\varepsilon^{m+1}\delta - 1 < 0$.

Формулируем доказанную теорему.

Теорема 24.1 (Штокало). *Если при всех $m \geqslant N$ и $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ вещественные части характеристических чисел матрицы (24.1) отрицательны, то нулевое решение системы (22.2), а тем самым и системы (20.5) асимптотически устойчиво.*

Учитывая оценку (24.6), мы видим, что равенство (22.1) доставляет нам приближенное решение системы (20.5):

$$Y = X \sum_{k=0}^{m} Z_k \varepsilon^k. \tag{24.7}$$

Здесь именно для X дана оценка (24.6), т. е. в (24.6) в соответствии с обозначениями (22.2) и (23.5) сумму $\sum_{i=1}^{n} y_i^2$ надо заменить суммой $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Здесь $x_1, \ldots, x_i$ — элементы любой строки матрицы X.

Пусть $y_1, \ldots, y_n$ — элементы строки (решения) матрицы Y, а $x_1, \ldots, x_n$ — элементы такой же строки матрицы X. Тогда из (24.7) имеем:

$$(y_1, \ldots, y_n) = (x_1, \ldots, x_n) \sum_{k=1}^{n} Z_k \varepsilon^k \tag{24.8}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant U_0 A \exp\left[(\varepsilon^{m+1}\delta - 1) A (t - t_0)\right], \tag{24.9}$$

$$U_0 = (U)_{t=t_0}.$$

Здесь

$$U = \sum_{k,\, l=1}^{n} \gamma_{kl} x_k x_l, \tag{24.10}$$

$\gamma_{k,l}$ определяются из системы, полученной на основании (23.3), через элементы матрицы (24.1), а δ — через γ_{kl} и $R_{\mu\nu}$; A определяется формулой (23.9$_1$).

Если матрица (24.1) имеет характеристические числа с положительной вещественной частью, то нулевое решение системы (20.5) неустойчиво [10, 30].

В работе [30] рассмотрена нелинейная система вида

$$\frac{dy_k}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu p_{\nu k} + R_k(y_1, \ldots, y_n, t) \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{24.11}$$

где матрица $P(t)$ коэффициентов $p_{\nu k}$ имеет вид матрицы системы (20.5), а R_k имеют оценку

$$|R_k(y_1, \ldots, y_n, t)| < K(y_1^2 + \ldots + y_n^2).$$

Тогда при условии теоремы Штокало нулевое решение системы (24.6) асимптотически устойчиво, и равенство типа (24.8) доставляет нам приближенное решение с оценками вида (24.9). Доказана и неустойчивость нулевого решения (22.11), когда матрица (24.1) имеет характеристические числа с положительной вещественной частью.

Для системы (20.1) возникают следующие проблемы:

I. Когда ряды (20.22) и (20.23) сходятся при малых ε?

II. Каково представление функций W и Z при любых ε (когда эти ряды сходятся при малых ε)?

III. Когда ряды (20.22) и (20.23) сходятся и Z — матрица, ограниченная при $|t| \geqslant 0$? В этом случае (если ограничена и матрица Z^{-1}) система (20.1) будет приводимой согласно теореме 3 работы [14].

IV. Что можно сказать об устойчивости нулевого решения системы (20.1) или его ограниченности в том случае, когда матрица (24.1) при всех m и как угодно малых ε не имеет характеристических чисел с положительной вещественной частью, но не все вещественные части х. ч. и отрицательны? Например, пусть характеристические числа матрицы (24.1) при всех m и достаточно малых ε будут различными чисто мнимыми. Если даже ряды (20.22) н (20.23) сходятся, то вопрос разрешается только в том случае, когда функция (20.23) будет ограниченной.

V. Доказать, что система (20.1) будет всегда правильной. Это, по-видимому, имеет место.

Вопрос о приводимости системы уравнений вида (20.1) рассматривался в частных случаях в работе [14] и для системы двух уравнений общего вида (20.1) в работе [40]. Именно, А. Е. Гельман для системы

$$\frac{dX}{dt} = XP(t), \tag{24.12}$$

где

$$P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \tag{24.13}$$

сходнтся равномерно, $-\infty < t < \infty$,

$$P_k(t) = \sum_{|m_1| + \ldots + |m_n| \leqslant k} B_{m_1 \ldots m_n} e^{it(m_1\omega_1 + \ldots + m_n\omega_n)} \tag{24.14}$$

и B — постоянные матрицы второго порядка, нашел два достаточных довольно общих условия приводимости. Он показал также, что приводимость может нарушиться при сколь угодно малом изменении одной из частот ω_i. Рассматривая, в частности, систему

$$\frac{dX}{dt} = XP(t), \tag{24.15}$$

$$P(t) = \begin{Vmatrix} -a + \sin\alpha t & \sin\alpha t \\ \cos\beta t & \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\alpha}{2} \end{Vmatrix}, \tag{24.16}$$

где α и β несоизмеримы и $a>0$, он показал на основании своих общих признаков, что система (24.16) приводима, если

$$\overline{\lim_{|m_1|+|m_2|\to\infty}} |m_1\alpha+m_2\beta|^{-1/(|m_1|+|m_2|)}<R,$$

где R — наименьший положительный корень уравнения

$$y+2y^{3/2}+\frac{1}{2}y^2=a+\frac{1}{2}.$$

Эта система будет приводима и в том случае, когда α и β — числа алгебраические несоизмеримые и $a>3$.

Можно указать примеры, когда ряд (20.22) обрывается, переходит в полином относительно ε. Тем самым будет сходиться при всех ε и ряд (20.23). Однако вопрос о приводимости, ограниченности решений и даже о правильности системы остается открытым. В работе В. Г. Штелика [41] решаются задачи I—IV для некоторых систем уравнений. См. также [42—45].

§ 25. ДРУГИЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМЫ РЕШЕНИЙ, ВЫТЕКАЮЩИЕ ИЗ МЕТОДОВ И. З. ШТОКАЛО И Н. Н. БОГОЛЮБОВА

Относительно приближенного решения (24.7) или (24.8) в случае, когда ни при каком m матрица (24.1) не будет иметь характеристические числа только с отрицательной вещественной частью, можно сказать следующее.

Рассмотрим уравнение (22.2)

$$\frac{dX}{dt}=X\left[\sum_{k=0}^{m}W_k\varepsilon^k+\varepsilon^{m+1}R_m(t,\varepsilon)\right]. \qquad (25.1)$$

Здесь простейшим случаем будет тот, когда $W_0=0$ (см. замечание 20.1). При этом уравнение (25.1) перепишется в виде

$$\frac{dX}{dt}=XR(t,\varepsilon)\varepsilon,\quad R(t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{m}W_k\varepsilon^{k-1}+\varepsilon^m R_m(t,\varepsilon). \qquad (25.2)$$

Рассмотрим наряду с (25.1) уравнение

$$\frac{dY}{dt}=YR_0(\varepsilon)\varepsilon,\quad R_0=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t R(t,\varepsilon)\,dt. \qquad (25.3)$$

Тогда по теореме Н. Н. Боголюбова [46, стр. 370] сколь угодно малым ρ, η и сколь угодно большому L можно сопоставить такое положительное ε_0, что если $y = y(t)$ (вектор) есть решение уравнения (25.3), то для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ в интервале $0 < t < L/\varepsilon$ справедливо неравенство

$$|x(t) - y(t)| < \eta, \tag{25.4}$$

где $x(t)$ (вектор[1]) есть решение уравнения (25.2), совпадающее с $y(t)$ при $t = 0$. Это позволяет нам получать приближенное решение системы (20.1) в виде (24.8), беря вместо X решение уравнения (25.3).

Можно поступить иначе.

Пусть теперь в (25.1) W_0 любое, не обязательно равное нулю. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dX_0}{dt} = X_0 \sum_{k=0}^{m} W_k \varepsilon^k, \quad X_0 = \exp\left[\left(\sum_{k=0}^{m} W_k \varepsilon^k\right) t\right], \tag{25.5}$$

полученное из (25.1) при $R_m = 0$. Введем еще в рассмотрение матрицу Y:

$$X = YX_0, \tag{25.6}$$

где матрица X — решение уравнения (25.1). Тогда для Y получим уравнение (см. (14.3))

$$\frac{dY}{dt} = Y\,[X_0 R_m(t, \varepsilon) X_0^{-1}]\,\varepsilon^{m+1} = YR(t, \varepsilon)\,\varepsilon^{m+1}, \tag{25.7}$$

$$R(t, \varepsilon) = X_0 R_m(t, \varepsilon) X_0^{-1}. \tag{25.8}$$

Предположим, что матрица $\sum\limits_{k=0}^{m} W_k \varepsilon^k$ имеет при $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ только чисто мнимые характеристические числа с простыми элементарными делителями. Тогда существует

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t R(t, \varepsilon)\, dt = R_0(\varepsilon). \tag{25.9}$$

Вместо решения уравнения (25.7) мы возьмем его приближенное значение (согласно теореме Н. Н. Боголюбова) — решение системы

$$\frac{dY_0}{dt} = Y_0 R_0(\varepsilon)\,\varepsilon^{m+1}. \tag{25.10}$$

---

[1] А можно под $x(t)$, $y(t)$, η понимать и матрицы соответственно $x(t)$ из (25.2), $y(t)$ из (25.3) и $\eta = \|\tau\|$, где все элементы матрицы $\eta = \tau$.

Получим приближенно вместо (25.6)

$$X = Y_0 X_0. \qquad (25.11)$$

Это и можно подставить в (24.8).

Предположим теперь, что каноническая форма матрицы $\sum_{k=0}^{m} W_k \varepsilon^k$ имеет общий вид. Заметим прежде всего, что для каждых m и T найдется такое положительное постоянное M_m, что

$$|R_m(t, \varepsilon)| \leqslant M_m \qquad (25.12)$$

при $|t| \leqslant T$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon^*$, где ε^* — любое из области сходимости ряда $P(t)$ (20.1). Это видно из формул (22.4), (22.5). Отсюда следует, что на промежутке T (выбранном нами произвольно) решение (25.7) или уравнения

$$Y = Y_0 + \int_0^t YR(t, \varepsilon)\, \varepsilon^{m+1}\, dt \qquad (25.13)$$

с начальными условиями $Y(0) = Y_0$ будет с точностью до

$$Y_0 (e^{M_m \varepsilon^{m+1} t} - \mathrm{I})$$

равно $Y = Y_0$ или

$$Y = Y_0 + \Delta(\varepsilon), \quad |\Delta(\varepsilon)| = |Y_0 (e^{M_m \varepsilon^{m+1} t} - \mathrm{I})|.$$

Можно, следовательно, указать такое ε^*, что $|\Delta(\varepsilon)|$ будет наперед заданной малой при всех $|t| \leqslant T$. Поэтому и матрицу X имеем приближенно при малых ε в виде (25.11), где Y_0 — постоянная матрица из (25.13).

Наконец, матрицу (24.7) имеем в виде

$$Y = Y_0 X_0 \sum_{k=0}^{m} Z_k \varepsilon^k + \Delta(\varepsilon) X_0 \sum_{k=0}^{m} Z_k \varepsilon^k =$$

$$= Y_0 \exp\left(\sum_{k=0}^{m} W_k \varepsilon^k t\right) \cdot \sum_{k=0}^{m} Z_k \varepsilon^k +$$

$$+ \Delta(\varepsilon) \exp\left(\sum_{k=0}^{m} W_k \varepsilon^k t\right) \cdot \sum_{k=0}^{m} Z_k \cdot \varepsilon^k, \qquad (25.14)$$

т. е. приближенно можно взять

$$Y = Y_0 \exp\left(\sum_{k=0}^{m} W_k \varepsilon^k t\right) \cdot \sum_{k=0}^{m} Z_k \varepsilon^k \tag{25.15}$$

при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon^*$, $|t| \leqslant T$.

Мы имеем, таким образом, следующую теорему:

Теорема 25.1. *Решение системы (20.5) с начальными условиями $Y(0) = Y_0$ имеем приближенно в наперед заданном промежутке $|t| \leqslant T$ и при достаточно малом ε^* в виде (25.15). При этом ошибка Δ не превосходит*

$$\Delta_1 = \Delta(\varepsilon) \exp\left(\sum_{k=0}^{m} W_k \varepsilon^k t\right) \cdot \sum_{k=0}^{m} Z_k \varepsilon^k,$$

$$\Delta(\varepsilon) = |Y_0 (\exp M_m \varepsilon^{m+1} - I)|, \tag{25.16}$$

где M_m определяется неравенством (25.12).

В некоторых случаях при нахождении матрицы M_m в (25.12) можно воспользоваться оценками академика И. М. Виноградова (например, [47, 48]). При этом надо положить $\lambda_k t = F(k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, где

$$F(x) = \sum_{m=1}^{n} a_m x^m, \qquad a_m = t \sum_{k=1}^{n} b_k \lambda_k$$

и b_k суть рациональные числа. Если $\lambda_k = k$ — целые числа, то $a_1 = 1$ и $a_l = 0$ при $l > 1$.

§ 26. ЗАДАЧА Б. П. ДЕМИДОВИЧА

Задана система n линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = XP(t), \tag{26.1}$$

где $P(t)$ — матрица n-го порядка непрерывная и периодическая с периодом ω. Предположим, что существует

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} P(t)\, dt = M. \tag{26.2}$$

Требуется решить вопрос об устойчивости нулевого решения системы (26.1) при малых ω. Демидович получил здесь следующий результат:

Теорема Б. П. Демидовича. *Характеристические показатели системы (26.1) $\lambda = \lambda(\omega)$ при надлежащем выборе мнимой части $\lambda(\omega)$ стремятся к характеристическим показателям λ_0 матрицы M.*

Отсюда автор делает вывод о том, что если вещественные части характеристических показателей λ_0 отрицательны, то при достаточно малых ω нулевое решение системы (26.1) асимптотически устойчиво, а если имеется число λ_0 чисто мнимое, то об устойчивости ничего сказать нельзя.

Заметим сначала, что это утверждение об устойчивости нулевого решения можно получить, пользуясь теоремой Н. Н. Боголюбова [46, стр. 419]. Мы будем решать задачу Б. П. Демидовича методом, отличным от его метода и основанным на теории, изложенной в настоящей книге.

Введем в уравнение (26.1) новую независимую переменную τ равенством $t = \omega\tau$. Тогда (26.1) перепишется так:

$$\frac{dX}{d\tau} = XP(\omega\tau)\,\omega. \tag{26.3}$$

Матрица X представима при малых ω в виде[1]

$$X = \exp\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} W_k\,\omega^k\right) t\right]\cdot \sum_{k=0}^{\infty} Z_k\,\omega^k. \tag{26.4}$$

Здесь $Z_0 = I$, Z_1 и W_1 определяем из уравнения (см. (9.15))

$$\frac{dZ_1}{dt} = P(\omega\tau) - W_1.$$

Матрица $P(\omega\tau)$ имеет относительно τ период, равный 1. Поэтому в соответствии с (9.17) имеем

$$W_1 = \int_0^1 P(\tau\omega)\,d\tau = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} P(t)\,dt. \tag{26.5}$$

Отсюда и вытекают указанные выше результаты Демидовича.

Если матрица W_1 при как угодно малых ω имеет характеристические числа с вещественной частью, равной нулю

---

[1] Можно, рассматривая систему $\dfrac{dX}{d\tau} = XP(\omega\tau)\,\varepsilon$, получить

$$X = \exp\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} W_k(\omega)\,\varepsilon^k\right) t\right]\cdot \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(\tau, \omega)\,\varepsilon^k,$$

а затем положить $\varepsilon = \omega$.

(но не имеет их с положительной вещественной частью), то, беря в разложении матрицы

$$W = \sum_{k=1}^{\infty} W_k \omega^k \qquad (26.6)$$

следующие члены, можно еще получить решение задачи Демидовича, как это было доказано в предыдущем параграфе. Здесь вопрос решается предельными значениями матриц $W_1, W_2, W_3, \ldots$ при $\omega \to 0$. Мы не будем повторять уже проведенные выше рассуждения.

§ 27. ИНАЯ ФОРМУЛИРОВКА НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ И ВЫТЕКАЮЩИЕ ОТСЮДА СЛЕДСТВИЯ

Рассмотрим систему вида

$$\frac{dX}{dt} = X \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t, \delta)\, \varepsilon^k, \qquad (27.1)$$

где $P_k(t+2\pi, \delta) = P_k(t, \delta)$, матрицы $P_k(t, \delta)$ равномерно непрерывные по δ в точке $\delta = 0$ и абсолютно интегрируемы по t в промежутке $(0, 2\pi)$, ряд

$$P(t, \delta, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t, \delta)\, \varepsilon^k$$

сходится в области $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \delta < \delta_0$, $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$ и $|P(t, \delta, \varepsilon)| \leqslant M$, где M — постоянная матрица с положительными элементами.

Интегральную матрицу системы (27.1) мы получим в виде

$$X(t, \delta, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(t, \delta)\, \varepsilon^k, \qquad (27.2)$$

$X_0(0, \delta) = \mathrm{I}$, $X_k(0, \delta) = 0$, $k \geqslant 1$, где $X_0(t, \delta)$ и $X_k(t, \delta)$ определены равенствами

$$\frac{dX_0}{dt} = X_0(t, \delta)\, P_0(t, \delta),$$

$$\frac{dX_k}{dt} = X_k P_0(t, \delta) + X_{k-1} P_1(t, \delta) + \ldots + X_0 P_k(t, \delta),$$

$$X_k(t, \delta) = \int_0^t (X_{k-1} P_1 + \ldots + X_0 P_k)_{t=\tau}\, X_0^{-1}(\tau, \delta)\, d\tau\, X_0(t, \delta).$$

Ряд (27.2) сходится[1] при $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, $|\delta| < \delta_0$ и будет непрерывной функцией от δ в точке $\delta = 0$. Если матрица $P(t, \delta, \varepsilon)$ голоморфная относительно δ и ε в области $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, $|\delta| < \delta_0$, то и матрица $X(t, \delta, \varepsilon)$ голоморфная относительно δ, ε в области $|\delta| < \delta_0$, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$. Голоморфными будут и матрицы $X_k(t, \delta)$ относительно δ.

Интегральную подстановку матрицы (27.2) имеем в виде

$$X(2\pi, \delta, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(2\pi, \delta)\, \varepsilon^k. \tag{27.3}$$

Запишем характеристическое уравнение этой матрицы $X(2\pi, \delta, \varepsilon)$

$$D(xI - X(2\pi, \delta, \varepsilon)) = x^n + a_1(\delta, \varepsilon)\, x^{n-1} + \ldots + a_n(\delta, \varepsilon) = 0, \tag{27.4}$$

где

$$a_k(\delta, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_\nu^{(k)}(\delta)\, \varepsilon \quad (k = 1, \ldots, n)$$

и ряды эти сходятся в области $|\varepsilon| < \varepsilon_0$. Если матрица $P(t, \delta, \varepsilon)$ голоморфная в области $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, $|\delta| < \delta_0$, то и $a_k(\delta, \varepsilon)$ голоморфные в области $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, $|\delta| \leqslant \delta_0$. Чтобы решить вопрос об устойчивости нулевого решения системы (27.1) или ограниченности матрицы (27.2), можно представить, согласно § 10, 11, матрицу (27.2) в виде

$$X(t, \delta, \varepsilon) = \exp\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} W_k(\delta)\, \varepsilon^k\right) t\right] \cdot \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(t, \delta)\, \varepsilon^k, \tag{27.4$_1$}$$

где матрицы $Z_k(t, \delta)$ периодические относительно t. Если при всех достаточно малых δ и ε вещественные части характеристических чисел матрицы

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(\delta)\, \varepsilon^k \tag{27.5}$$

будут отрицательными, то матрица (27.2) будет обладать свойством

$$X(t, \delta, \varepsilon) \to \|0\| \text{ при } t \to \infty. \tag{27.6}$$

Если вещественные части всех х. ч. матрицы $W_0(0)$ отрицательны, то (27.6) имеет место при всех достаточно малых

[1] Теорема 6.1.

δ и ε, если же отрицательные и нули, то (27.6) также имеет место при всех достаточно малых δ и ε, если вещественные части всех х. ч. матрицы

$$W_m(\delta, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} W_k(\delta)\varepsilon^k \tag{27.7}$$

будут отрицательны при всех достаточно малых δ и ε. Это мы получим на основании метода Штокало и даже в том случае, когда матрицы $P_k(t, \delta)$ будут лишь квазипериодическими или некоторые почти периодическими [13].

На основании теоремы 24.1 (Штокало) мы имеем и такой результат. Если при каком-нибудь δ и достаточно большом m вещественные части характеристических чисел матрицы (27.7) отрицательные, то отрицательными будут вещественные части характеристических чисел и матрицы (27.5) при таком δ и при всех достаточно малых ε. Напоминаем, что вещественные части всех х. ч. матрицы (27.5) будут отрицательными при всех достаточно малых ε, если детерминанты Гурвица этой матрицы имеют положительные коэффициенты при низших степенях ε (т. е. если эти коэффициенты будут положительными лишь при достаточно большом m у матрицы (27.7) ([10], теорема 3).

Мы видим, как решается вопрос об ограниченности матриц (27.2), когда система (27.1) каноническая. Мы рассмотрели и задачу Артемьева в этом случае для системы (18.1), частным случаем которой будет и система (27.1), если она каноническая. К этим задачам мы еще вернемся в § 46, решая их на основе матрицы (27.3) и уравнения (27.4).

Коснемся теперь одной задачи, рассмотренной в работе [49] и в других указанных в ней работах.

Дано некоторое множество периодических интегрируемых матриц $P(t) = P(t + 2\pi)$. Возьмем какую-нибудь из них $P(t)$ и рассмотрим систему линейных однородных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = XP(\omega t), \tag{27.8}$$

где параметр $\omega > 0$. Наряду с матрицей $P(t)$ рассмотрим подмножество матриц $P_1(t)$ этого множества, обладающих свойством

$$\int_0^{2\pi} |P_1(t) - P(t)|\, dt \leqslant \varepsilon \| 1 \|, \tag{27.9}$$

где $\| 1 \|$ — матрица, все элементы которой равны 1, а $|P_1(t) - P(t)|$ — матрица, элементы которой суть модули разностей элементов матриц $P_1(t)$ и $P(t)$. Из (27.9) видим, что подмножество матриц $P_1(t)$ можно записать так:

$$P_1(t) = P(t) + \varepsilon Q(t), \tag{27.10}$$

где множество матриц $Q(t)$ такое, что

$$\int_0^{2\pi} |Q(t)|\, dt \leqslant \| 1 \|. \tag{27.11}$$

Будем рассматривать наряду с системой (27.8) систему

$$\frac{dX}{dt} = X\,[P\,((\omega + \delta)\,t) + \varepsilon Q\,((\omega + \delta)\,t)], \tag{27.12}$$

где δ — параметр. Предположим, что нулевое решение системы (27.8) устойчиво. Ставится вопрос[1], при каких условиях и нулевое решение системы (27.12) будет устойчиво при достаточно малых δ и ε.

Введем в уравнение (27.12) новую независимую переменную τ равенством $\tau = (\omega + \delta)\,t$. Получим [13]

$$\frac{dX}{d\tau} = X\,[P(\tau) + \varepsilon Q(\tau)]\,\frac{1}{\omega + \delta}\,. \tag{27.13}$$

Теперь для системы (27.13) задача стоит так: при $\varepsilon = \delta = 0$ она имеет ограниченную фундаментальную[2] интегральную матрицу $X(\tau)$. При каких условиях эта фундаментальная интегральная матрица будет ограниченной и при всех достаточно малых ε и δ?

Система (27.13) есть частный случай системы (27.1). Мы имеем очевидный результат: если интегральная матрица (27.13) $X(\tau, \delta, \varepsilon) \to \| 0 \|$ при $\tau \to \infty$, когда $\delta = \varepsilon = 0$, то $X(\tau, \delta, \varepsilon) \to \| 0 \|$ при $\tau \to \infty$ и при всех достаточно малых δ и ε. Это следует из того, что если $X(\tau, 0, 0) \to \| 0 \|$ при $\tau \to \infty$, то вещественные части всех х. ч. матрицы (27.5) при $\delta = \varepsilon = 0$ будут отрицательными. А тогда такими же будут вещественные части х. ч. матрицы (27.5) и при всех достаточно малых[3] δ и ε. Если же вещественные части х. ч. показательной подстановки (27.5) при $\delta = \varepsilon = 0$—числа отрицательные и нули, то необходимо рассмотреть х. ч. матрицы (27.7). Если при всех

[1] Мы здесь ставим задачу, эквивалентную той, которая рассмотрена в [49], хотя и формулированную иначе.

[2] То есть с $D(X(\tau)) \neq 0$, D — знак определителя.

[3] Это уже было высказано в работе [9] на стр. 73, где матрица коэффициентов системы (27.1) предполагалась лишь непрерывной функцией от δ и ε, так как была доказана непрерывность х. ч. матрицы (27.5) как функций δ и ε.

достаточно малых δ и ε вещественные части всех х. ч. матрицы (27.7) отрицательные, то снова $X(\tau, \delta, \varepsilon) \to \|0\|$ при $\tau \to \infty$ и при всех достаточно малых δ и ε. При этом матрицы $P(\tau)$ и $Q(\tau)$ можно считать и квазипериодическими или некоторыми почти периодическими. Если при $\delta = \varepsilon = 0$ х. ч. показательной подстановки (27.7) отрицательные и нули, то мы можем рассмотреть частные случаи $\delta = \delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ в соответствии со сказанным в § 18. Это особенно удобно рассматривать, когда вещественные части всех х. ч. матрицы $W_0(0)$ равны нулю, матрицы $P(\tau)$ и $Q(\tau)$ периодические и система (27.13) каноническая. Например, можно рассмотреть случай $\delta = \varepsilon$. Тогда систему (27.13) можно записать в виде

$$\frac{dX}{d\tau} = X \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\tau) \varepsilon^k, \tag{27.14}$$

где

$$P_0(\tau) = \frac{P(\tau)}{\omega}. \tag{27.15}$$

Теперь для уравнения (27.14) задача стоит так: при $\varepsilon = 0$ интегральная матрица системы (27.14) ограничена, при каких условиях эта интегральная матрица будет ограничеиа и при всех достаточно малых ε?

Очевидно, что если вещественные части характеристических чисел системы (27.8) (т. е. вещественные части х. ч. показательной матрицы W) отрицательны, то при малых ε интегральная матрица $X(\tau)$ системы (27.14) обладает свойством

$$X(\tau) \to \|0\| \text{ при } \tau \to \infty. \tag{27.15$_1$}$$

Если же система (27.8) имеет х. ч., вещественные части которых равны нулю (и нет х. ч. с положительной вещественной частью), то вопрос решается коэффициентами разложения показательной матрицы

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} W_k \varepsilon^k. \tag{27.16}$$

Пусть в системе (27.12) $\delta = 0$ и $P(\omega t) = C$ — постоянная матрица. Тогда мы будем иметь систему

$$\frac{dX}{dt} = X\,[C + \varepsilon Q(\omega t)]. \tag{27.17}$$

В сущности такая система рассматривалась в [49] на стр. 37—39. Система (27.13) в этом случае имеет вид

$$\frac{dX}{d\tau} = X\,[C + \varepsilon Q(\tau)]\,\frac{1}{\omega}, \quad Q(\tau + 2\pi) = Q(\tau). \tag{27.18}$$

Предположим, что эта система каноническая и $\frac{2\pi C}{\omega} = \ln \exp \frac{2\pi C}{\omega}$ — регулярное значение[1]. Тогда если матрица C имеет х. ч. чисто мнимые различные, то нулевое решение системы (27.18) устойчиво при достаточно малых ε [или интегральная матрица этой системы будет ограниченной, колеблющейся (не стремящейся к нулевой при $\tau \to \infty$)]. Это следует из теоремы 16.1 (Артемьева).

Пусть имеется

$$2\pi(\omega_k - \omega_l) = \omega m. \tag{27.19}$$

Тогда для решения вопроса нужно поступить так, как указано в параграфах 10, 11, 20—24.

Построим интегральную матрицу системы (27.18):

$$X(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k \varepsilon^k, \quad X(0) = I, \qquad X_0(\tau) = \exp\frac{C\tau}{\omega}, \tag{27.20}$$

$$X_1(\tau) = \int_0^{\tau} \frac{X_0(t)\,Q(t)\,X_0^{-1}(t)}{\omega}\,dt X_0(\tau)$$

и интегральную подстановку

$$V = X(2\pi) = \exp\left(\frac{2\pi C}{\omega}\right) +$$

$$+ \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{X_0(t)\,Q(t)\,X_0^{-1}(t)}{\omega}\,dt X_0(2\pi) + \ldots \tag{27.21}$$

Следуя методам, указанным в § 10, 11, матрицу $X(\tau)$ можем представить в виде

$$X(\tau) = \exp\left[\sum_{k=0}^{\infty} W_k \varepsilon^k \tau\right] \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(\tau)\,\varepsilon^k. \tag{27.22}$$

---

[1] То есть $\frac{2\pi(\omega_k - \omega_l)}{\omega} \neq m$ (целое), где $\omega_k i$, $\omega_l i$ — характеристические числа матрицы C. Значения $\omega = \frac{2\pi(\omega_k - \omega_l)}{m}$ названы в [34, 49] критическими.

Здесь, например (см. (10.14)), $2\pi W_0 = \ln \exp\left(\frac{2\pi C}{\omega}\right)$ — главное значение, если матрица $\exp\frac{2\pi C}{\omega}$ не имеет отрицательных характеристических чисел. При этом

$$Z_0(\tau) = \exp(-W_0\tau)\cdot\exp\left(\frac{C\tau}{\omega}\right). \tag{27.23}$$

Мы указали в § 10, 11, как вычислять W_k, Z_k при всех предположениях относительно матрицы C. В частности, мы получили выше, что иногда (теорема 2.3 и пример к ней) при условии (27.19) можно взять и

$$W_0 = S\frac{C}{\omega}S^{-1}, \tag{27.24}$$

где S — некоторая постоянная матрица, не зависящая от ε. Это возможно, в частности, в том случае, когда характеристические числа матрицы (27.21) — голоморфные функции от ε, а элементарные делители простые в окрестности $\varepsilon = 0$. Предположим, что система (27.18) каноническая (такое C и множество $Q(\tau)$). Тогда для показательной матрицы $W(\varepsilon)$ имеем характеристическое уравнение

$$\mu^n + a_1(\varepsilon)\mu^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(\varepsilon)\mu + a_n(\varepsilon) = 0, \tag{27.25}$$

$\mu = \lambda^2$, λ — х. ч. матрицы $W(\varepsilon)$.

Может случиться, что имеется (27.19), но все х. ч. матрицы $\frac{C}{\omega}$ (или матрицы W_0) чисто мнимые различные. Тогда если применима теорема[1] 2.3, то корни уравнения (27.25) при $\varepsilon = 0$ будут все отрицательные различные. Но тогда такими же будут корни уравнения (27.25) и при всех достаточно малых ε. Отсюда будет следовать, что интегральная матрица системы (27.18) является ограниченной колеблющейся при малых ε (и при наличии равенств (27.19)). Например, это будет, если система (27.18) будет канонической и типа (15.1) (в системе (15.1) матрица P_0 имеет х. ч. i, $-i$).

Может случиться, что при $\varepsilon = 0$ уравнение (27.25) имеет и нулевые корни, но при малых $\varepsilon \neq 0$ — различные отрицательные. Тогда интегральная матрица системы (27.13) будет снова ограниченной колеблющейся. Здесь полезно принять во внимание замечание 16.3 и теорему 24.1 (Штокало).

---

[1] Но, применяя теорему 2.3, следует принять во внимание замечание 16.5.

§ 28. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ § 8 НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ПУАНКАРЕ—ЛАППО-ДАНИЛЕВСКОГО И ПРЕДЛОЖЕНИЯ ЛЯПУНОВА

Теперь мы покажем, что полное решение проблемы Пуанкаре — Лаппо-Данилевского тесно связано с проблемой построения интегральной матрицы X системы

$$\frac{dX}{dt}=XP(t),\ P(t+2\pi)=P(t) \tag{28.1}$$

в виде

$$X=e^{At}N(t), \tag{28.2}$$

где A — матрица постоянная, а $N(t)$ — периодическая с периодом 2π. Интегральная матрица (28.2) при увеличении t на 2π умножается слева на матрицу

$$V=e^{2\pi A}. \tag{28.3}$$

Пусть матрица[1] $P(t)$ имеет вид

$$P(t)=b_0+\sum_{k=1}^{m}b_k\cos kt+\sum_{k=1}^{m}a_k\sin kt, \tag{28.4}$$

где b_0, b_k и a_k — постоянные матрицы. Заменяя

$$\sin kt=\frac{e^{kti}-e^{-kti}}{2i},\ \cos kt=\frac{e^{kti}+e^{-kti}}{2}$$

и $z=e^{ti}$, мы запишем уравнение (28.1) в виде

$$zi\frac{dX}{dz}=X\sum_{k=-m}^{m}P_kZ^k, \tag{28.5}$$

где

$$P_k=\frac{b_k-ia_k}{2},\quad k\geqslant 1;$$

$$P_k=\frac{b_{-k}+ia_{-k}}{2},\quad k\leqslant -1,\quad P_0=b_0,$$

[1] Дальнейшие рассуждения справедливы и при $m=\infty$ согласно предыдущему, если ряд $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}P_kz^k$ сходится при $|z|\leqslant 1$.

Можно систему (28.5) записать так:

$$\frac{dX}{dz} = X \sum_{k=-m-1}^{m-1} T_k z^k, \tag{28.6}$$

где

$$T_k = -iP_{k+1},\ T_{-1} = -ib_0. \tag{28.7}$$

Таким образом, на конечном расстоянии система (28.6) имеет одну особую иррегулярную точку $z = 0$. Пусть $X(t)$ — интегральная матрица системы (28.6), нормированная в точке $z = 1$. Согласно предыдущему (7.7), имеем

$$X(z) = z^W N(z), \tag{28.8}$$

где W — матрица постоянная и $N(z)$ — однозначная матрица в окрестности точки $z = 0$.

После обхода переменной z начала координат матрица $X(z)$ умножается слева на матрицу

$$V = e^{2\pi iW},\ 2\pi iW = \ln V, \tag{28.9}$$

которую, как мы видели, можно представить рядами от матриц $T_{-m-1}, \ldots, T_{m-1}$, сходящимися (со скоростью показательной функции) при всех конечных значениях этих матриц. W также можно представить при всех значениях этих матриц $T_{-m-1}, \ldots, T_{m-1}$ по формуле (7.15), если матрица W второго порядка, и на основании (1.39) в случае n-го порядка.

Заменяя $z = e^{it}$, мы можем написать

$$X(e^{it}) = e^{iWt} N(e^{it}). \tag{28.10}$$

Здесь матрица $N(e^{it})$ периодическая (ввиду однозначности $N(z)$ в окрестности точки $z=0$) с периодом 2π и

$$iW = A \tag{28.11}$$

есть матрица, входящая в формулу (28.2). Отсюда видим, что интегральная матрица $X(t)$ умножается слева на матрицу

$$V = e^{2\pi iW} = e^{2\pi A} \tag{28.12}$$

при увеличении t на период 2π.

Следовательно, нахождение матрицы V, на которую умножается интегральная матрица системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами при увеличении независимого переменного t на период матрицы коэффициентов, приводится к нахождению матрицы, на которую умножается интегральная матрица системы дифференциальных уравнений с особой иррегулярной точкой $z=0$ при обходе точкой z начала координат. Рассмотрим подробнее генеральное представление матрицы второго порядка A через матрицы, входящие в систему двух дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Согласно (28.11) и (7.15), имеем

$$A = iW = \frac{\ln(t + \sqrt{t^2 - 1})}{2\pi\sqrt{t^2 - 1}} \times$$

$$\times [Ve^{-\pi i \sigma(T_{-1})} - t] + \frac{\sigma(T_{-1})}{2} i, \tag{28.13}$$

где

$$t = \frac{\sigma(V)}{2} e^{-\pi i \sigma(T_{-1})}. \tag{28.14}$$

На основании (28.7) можно написать и так:

$$A = \frac{\ln(t + \sqrt{t^2 - 1})}{2\pi\sqrt{t^2 - 1}} [Ve^{-\pi\sigma(b_0)} - t] + \frac{\sigma(b_0)}{2}, \tag{28.15}$$

$$t = \frac{\sigma(V)}{2} e^{-\pi\sigma(b_0)}. \tag{28.16}$$

Если

$$\sigma(b_0) = 0, \tag{28.17}$$

то

$$A = \frac{\ln\left(\frac{\sigma(V)}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2(V)}{4} - 1}\right)}{2\pi\sqrt{\frac{\sigma^2(V)}{4} - 1}} \left[V - \frac{\sigma(V)}{2}\right]. \tag{28.18}$$

Чтобы найти A, нужно получить V и $\sigma(V)$, так как $\sigma(b_0)$ задано вместе с системой (28.1) на основе (28.4). Для нахождения V мы можем поступить следующим образом. Обозначая матрицы $b_0 = U_1$, $b_1 = U_2, \ldots,$ $b_m = U_{m+1}$, $a_1 = U_{m+2}, \ldots,$ $a_m = U_{2m+1}$, запишем систему (28.1) в виде

$$\frac{dX}{dt} = X \sum_{k=1}^{2m+1} \varphi_k(t) U_k, \tag{28.19}$$

где

$$\begin{aligned} &\varphi_1(t) = 1, \quad \varphi_k(t) = \cos(k-1)t \qquad (k = 2, \ldots, m+1), \\ &\varphi_k(t) = \sin(k-m-1)t \qquad (k = m+2, \ldots, 2m+1). \end{aligned} \tag{28.20}$$

Матрицу $X(t)$ можно теперь найти в виде ряда композиций от матриц $U_1, \ldots, U_{2m+1}$ по формуле (6.11), сходящегося при всех конечных $U_1, \ldots, U_{2m+1}$ и любом конечном t. Можно также получить $X(t)$ в виде (6.1), что одно и то же.

После этого легко находим и

$$V = X(2\pi), \quad \sigma(V) = \sigma(X(2\pi)) \tag{28.21}$$

в виде сходящихся рядов.

Можно, однако, воспользоваться и рядом (7.12), представляющим V в виде ряда композиций от $T_{-s}, \ldots, T_l$, сходящимся также при любых конечных значениях этих матриц; при этом нужно положить $b = 1$.

Коэффициенты ряда (7.12) суть полиномы от π с рациональными коэффициентами, где рациональные числа α и $\overset{*}{\alpha}$ определены указанными выше рекуррентными формулами Лаппо-Данилевского.

Так как V — матрица вещественная, то в (7.12) в каждой сумме

$$\sum_{p_1 \ldots p_\nu = -m-1}^{m-1} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \alpha^{*(0)}_{p_1 \ldots p_\mu} \sum_{\varkappa=0}^{\nu-\mu} \alpha^{(\varkappa)}_{p_{\mu+1} \ldots p_\nu} (2\pi i)^{\varkappa}$$

коэффициенты при i будут равны нулю, когда подставим значения $T_{-m-1}, \ldots, T_{m-1}$ согласно (28.7).

Система линейных уравнений с периодическими коэффициентами есть частный случай приводимых по Ляпунову [14] систем. $Z(t)$ есть матрица преобразования заданной системы с периодическими коэффициентами к системе с постоянными коэффициентами с матрицей коэффициентов A, общее выражение которой (а также $Z(t)$) мы здесь и находим.

Рассмотрим тот случай, когда характеристические числа μ_1, μ_2 матрицы V отрицательные. Тогда $\sigma(V) = \mu_1 + \mu_2 < 0$ и, согласно (28.16),

$$t = \frac{\sigma(V)}{2} e^{-\pi\sigma(b_0)} < 0.$$

Отсюда следует, что[1] $t + \sqrt{t^2 - 1} < 0$, так как $|t| > 1$.

Поэтому, согласно (28.15), матрица A будет комплексной, именно

$$A = \frac{\ln(-t - \sqrt{t^2 - 1}) + \pi i}{2\pi\sqrt{t^2 - 1}} \times$$

$$\times \left[V e^{-\pi\sigma(b_0)} - \frac{\sigma(V)}{2} e^{-\pi\sigma(b_0)} \right] + \frac{\sigma(b_0)}{2} =$$

[1] Из (28.22) следует, что $|t| > 1$, так как $t = \dfrac{\mu_1 + \mu_2}{2\sqrt{\mu_1\mu_2}}$.

$$= A_1 + \frac{ie^{-\pi\sigma(b_0)}}{2\sqrt{t^2-1}}\left[V - \frac{\sigma(V)}{2}\right],$$

где

$$A_1 = \frac{\ln(-t-\sqrt{t^2-1})}{2\pi\sqrt{t^2-1}}\left[V - \frac{\sigma(V)}{2}\right]e^{-\pi\sigma(b_0)} + \frac{\sigma(b_0)}{2}$$

— матрица вещественная.

Характеристические числа μ_1, μ_2 суть корни уравнения

$$\mu^2 - \sigma(V)\mu + D(V) = 0.$$

По формуле Якоби из уравнения (28.1) имеем

$$\mu_1\mu_2 = D(V) = e^{\int\limits_0^{2\pi}\sigma(P)dt} = e^{2\pi\sigma(b_0)}, \tag{28.22}$$

поэтому находим

$$\mu_1 = \frac{\sigma(V) + \sqrt{\sigma^2(V) - 4e^{2\pi\sigma(b_0)}}}{2},$$

$$\mu_2 = \frac{\sigma(V) - \sqrt{\sigma^2(V) - 4e^{2\pi\sigma(b_0)}}}{2}$$

и

$$\mu_1 - \mu_2 = \sqrt{\sigma^2(V) - 4e^{2\pi\sigma(b_0)}} = 2e^{\pi\sigma(b_0)}\sqrt{t^2-1}.$$

Далее имеем

$$V - \frac{\sigma(V)}{2} = S[\mu_1, \mu_2]S^{-1} - \frac{\mu_1+\mu_2}{2} =$$

$$= S\left[\frac{\mu_1-\mu_2}{2}, \frac{\mu_2-\mu_1}{2}\right]S^{-1}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{ie^{-\pi\sigma(b_0)}}{2\sqrt{t^2-1}}\left(V - \frac{\sigma(V)}{2}\right) = \frac{i}{2}S[1, -1]S^{-1}, \tag{28.23}$$

$$A = A_1 + \frac{i}{2}S[1, -1]S^{-1}.$$

Это позволяет (28.2) записать в виде

$$X = e^{A_1t}e^{\frac{i}{2}tS[1, -1]S^{-1}}N(t) \tag{28.24}$$

или

$$X = e^{A_1t}N_1(t),$$

где

$$N_1(t) = e^{\frac{it}{2}S[1, -1]S^{-1}}N(t).$$

Матрица $N_1(t)$ — вещественная (матрицы X и A_1 — вещественные) и имеет период 4π, так как $N(t)$ имеет период 2π, а функция $e^{\frac{i}{2}tS[1,\ -1]S^{-1}}$ имеет период 4π в силу равенства $e^{2\pi iS[1,\ -1]S^{-1}} = \mathrm{I}$.

Ранее (см. (9.3)) мы вместо (28.24) имели

$$X = e^{A_1 t} e^{\frac{i}{2} t} N(t),$$

но, согласно замечаниям 1.3 и 1.4, и там мы могли бы получить (28.24).

Общее представление матрицы A для системы n уравнений мы найдем при помощи формулы (1.39).

Надо сказать, что еще А. М. Ляпунов в своей диссертации [26, гл. III, 53] отметил один случай линейной системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, для которой нахождение характеристических чисел матрицы A приводится к простой алгебраической задаче. Это случай, когда в системе $2n$ уравнений с неизвестными $x_1, \ldots, x_n,\ y_1, \ldots, y_n$ после введения новых неизвестных $u_s = x_s + iy_s,\ v_s = x_s - iy_s\ (s = 1, \ldots, n)$ система распадается на две системы для неизвестных $u_1, \ldots, u_n,\ v_1, \ldots, v_n$.

Первая из этих систем такова, что замена $e^{it} = z$ приводит к линейным уравнениям с регулярной особой точкой $z = 0$ и, следовательно, характеристические числа матрицы A находятся как характеристические числа матрицы[1], стоящей в виде коэффициента при z^{-1}.

Вторая система уравнений, с неизвестными $v_1, \ldots, v_n$, также приводится к системе с регулярной особой точкой $z = 0$ заменой $e^{-it} = z$. В случае системы двух уравнений этот класс уравнений Ляпунова является весьма простым частным случаем такой системы, где матрица коэффициентов $P(t)$ обладает свойством

$$P(t)\int_0^t P(t)\,dt = \int_0^t P(t)\,dt\,P(t).$$

Таким образом, на связь между теорией линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и аналитической теорией линейных систем дифференциальных уравнений обратил внимание еще А. М. Ляпунов.

Заметим, что инварианты матрицы W совпадают с инвариантами матрицы H, построенной Лаппо-Данилевским в виде

---

[1] Это видно из формулы § 7 $W = SU_{-1}S^{-1}$, относящейся к уравнению (7.9).

$$H = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \ldots p_\nu = -s}^{l} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} \delta^{(0)}_{p_1 + \ldots + p_\nu + \nu} \alpha^{(1)}_{p_1 \ldots p_\nu}, \tag{28.25}$$

где $\delta^{(0)}_p$ — символ Кронекера и $\alpha^{(1)}_{p_1 \ldots p_\nu}$ определены формулами § 7. Здесь H — показательная подстановка так называемой метаканонической интегральной матрицы [1]. Матрица H подобна матрице W.

§ 29. ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В этом параграфе мы коснемся вопроса существования ограниченных и периодических решений системы двух линейных однородных дифференциальных уравнений с периодической матрицей коэффициентов $P(t)$

$$\frac{dX}{dt} XP(t), \; P(t+2\pi) = P(t). \tag{29.1}$$

Интегральную матрицу, нормированную при $t = 0$, такой системы, как мы видели, можно представить в виде

$$X = e^{At}Z(t), \tag{29.2}$$

где A — матрица второго порядка постоянная и вещественная, а $Z(t)$ — периодическая матрица с периодом 2π или 4π. Если $Z(t)$ имеет период 4π, то $Z(t+2\pi) = -Z(t)$. При увеличении t на период 2π интегральная матрица $X(t)$, данная формулой (29.2), умножается слева на матрицу

$$V = X(2\pi) = e^{2\pi A}, \tag{29.3}$$

если $Z(t)$ имеет период 2π, или иа матрицу

$$V = X(2\pi) = -e^{2\pi A}, \tag{29.4}$$

если период $Z(t)$ равен 4π. Следовательно, мы имеем

$$X(t + 2\pi n) = V^n X(t), \tag{29.5}$$

где n — целое число.

Предположим, что матрица V имеет канонический вид:

$$V = S \begin{Vmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{Vmatrix} S^{-1}, \tag{29.6}$$

где μ_1, μ_2 — корни уравнения

$$\mu^2 - \sigma(V)\mu + D(V) = 0. \tag{29.7}$$

и, согласно формуле Якоби,

$$D(V) = e^{\int\limits_0^{2\pi} \sigma(P)\,dt}. \tag{29.7$_1$}$$

Матрица

$$X_1 = S^{-1}X \tag{29.8}$$

есть также интегральная для системы (29.1) и умножается слева на матрицу

$$J = \begin{Vmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{Vmatrix} \tag{29.9}$$

при увеличении t на 2π. Это означает, что решение, стоящее в первой строчке интегральной матрицы X_1, умножается на μ_1, а решение, стоящее во второй строчке, — на μ_2 при увеличении t на 2π.

Действительно, из

$$X_1(t + 2\pi) = \begin{Vmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{Vmatrix} X_1(t) \tag{29.10}$$

следует, что

$$\begin{aligned} x_{k1}(t + 2\pi) &= \mu_1 x_{k1}(t), \\ x_{k2}(t + 2\pi) &= \mu_2 x_{k2}(t) \quad (k = 1,2), \end{aligned} \tag{29.11}$$

где $x_{k1}(t)$, $x_{k2}(t)$ — элементы k-строчки матрицы $X_1(t)$.

По свойству корней уравнения (29.7) и на основании (29.7$_1$) имеем

$$\mu_1\mu_2 = e^{\int\limits_0^{2\pi} \sigma(P)\,dt}. \tag{29.12}$$

Если

$$\int\limits_0^{2\pi} \sigma(P)\,dt = 0,$$

то

$$\mu_1\mu_2 = 1. \tag{29.13}$$

Из (29.11) видим, что если

$$|\mu_1| < 1, \tag{29.14}$$

то система линейных уравнений, соответствующая матричному уравнению (29.1), имеет однопараметрическое семейство[1] решений $x_1(t)$, $x_2(t)$, обладающих свойством

$$|x_1(t)| + |x_2(t)| \to 0 \text{ при } t \to \infty. \tag{29.15}$$

Если и μ_1 и μ_2 по модулю меньше единицы, то все решения обладают свойством (29.15), и, очевидно, нулевое решение $x_1 = x_2 = 0$ асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Предположим теперь, что μ_1, μ_2 — комплексные и $|\mu_1| = |\mu_2| = 1$, т. е.

$$\mu_1 = e^{i\varphi}, \quad \mu_2 = e^{-i\varphi}. \tag{29.15$_1$}$$

Записывая (29.5) на основании (29.6) и (29.15$_1$) в форме

$$X(t + 2\pi n) = S[e^{in\varphi}, \; e^{-in\varphi}]S^{-1}X(t), \tag{29.16}$$

мы видим, что матрица $X(t)$ суть ограниченная колеблющаяся при $t \to \infty$. Так как всякая другая интегральная матрица рассматриваемого уравнения (29.1) имеет вид

$$X_1 = CX, \tag{29.17}$$

где C — постоянная матрица, то и все решения будут ограниченными колеблющимися (кроме нулевого).

Если имеем

$$k\varphi = 2\pi, \; k \text{ — целое}, \tag{29.18}$$

то все решения будут периодическими с периодом $2\pi k$.

При $\varphi = 2\pi$ имеем $\mu_1 = \mu_2 = 1$, и поэтому все решения будут периодическими с периодом 2π. Если же $\varphi = \pi$, то $\mu_1 = \mu_2 = -1$, и все решения будут иметь период 4π.

Предположим теперь, что каноническая форма матрицы V имеет вид

$$V = S\begin{Vmatrix} \mu & 0 \\ 1 & \mu \end{Vmatrix}S^{-1}. \tag{29.19}$$

Тогда имеем

$$X(t + 2\pi n) = V^n X(t) = S\begin{Vmatrix} \mu^n & 0 \\ n\mu^{n-1} & \mu^n \end{Vmatrix}S^{-1}X(t). \tag{29.20}$$

Так как для $|\mu| < 1$ будет $a\mu^a \to 0$ при $a \to \infty$, то $X(t) \to 0$ при $t \to \infty$, если $|\mu| < 1$.

На основании (29.17) заключаем, что все решения системы (29.1) обладают свойством (29.15).

---

[1] То есть семейство $x_1(t) = cx_{11}(t)$, $x_2(t) = cx_{12}(t)$, где c — произвольное постоянное число.

Если $\mu = 1$, то интегральная матрица (10.8) умножается слева при увеличении t на 2π на матрицу

$$J_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{29.21}$$

Отсюда следует, что решение $x_{11}(t)$, $x_{12}(t)$, стоящее в первой строчке матрицы X_1, есть периодическое с периодом 2π. Второе решение $x_{21}(t)$, $x_{22}(t)$, стоящее во второй строчке, обладает свойством

$$x_{21}(t + 2\pi n) = x_{21}(t) + nx_{22}(t),$$

$$x_{22}(t + 2\pi n) = x_{22}(t).$$

Таким образом, при $\mu = 1$ имеем лишь однопараметрическое семейство периодических решений с периодом 2π, остальные же решения не будут ограниченными. При $\mu = -1$ имеем однопараметрическое семейство периодических решений с периодом 4π.

Если в (29.19) $|\mu| > 1$ или (29.10) $|\mu_1| > 1$ и $|\mu_2| > 1$, то все решения системы (29.1) неограниченные при $t \to \infty$.

Заметим, что при условии

$$\int_0^{2\pi} \sigma(P)\, dt > 0 \tag{29.21$_1$}$$

все решения не могут быть ограниченными, так как, согласно (29.12), наверное имеется $|\mu_1| > 1$.

Пусть теперь

$$\int_0^{2\pi} \sigma(P)\, dt < 0, \tag{29.22}$$

т. е.

$$0 < D(V) = e^{\int_0^{2\pi} \sigma(P) dt} < 1. \tag{29.23}$$

Тогда на основании (29.7) легко выводим, что если

$$\sigma(V) > 0,\ \sigma^2(V) - 4D(V) > 0, \tag{29.24}$$

то случай

$$0 < \mu_1 < 1,\ 0 < \mu_2 < 1 \tag{29.25}$$

будет при

$$\sigma(V) < 1 + D(V) < 2. \tag{29.26}$$

Если имеем

$$\sigma(V) < 0,\ \sigma^2(V) - 4D(V) > 0, \tag{29.27}$$

то при
$$0 < 1 + \sigma + D \tag{29.28}$$
будет
$$-1 < \mu_1 < 0, \ -1 < \mu_2 < 0. \tag{29.29}$$

Следовательно, при условиях (29.24) и (29.26) или (29.27) и (29.28) все решения системы (29.1) обладают свойством (29.15).

Пусть теперь имеем (29.23) и
$$\sigma^2(V) - 4D(V) = 0, \tag{29.30}$$
тогда
$$\mu = \mu_1 = \mu_2 = \frac{\sigma(V)}{2} = \pm\sqrt{D(V)}. \tag{29.31}$$

Согласно предыдущему и в силу (29.23) независимо от канонического вида матрицы V, все решения системы (29.1) обладают свойством (29.15).

Предположим теперь, что имеем (29.23) и
$$\sigma^2(V) - 4D(V) < 0. \tag{29.32}$$

Тогда μ_1 и μ_2 — комплексные и так как $\mu_1\mu_2 = D(V) < 1$, то $|\mu_1| = |\mu_2| < 1$. Следовательно, при условиях (29.23) и (29.32) все решения системы (29.1) обладают свойством (29.15).

Рассмотрим теперь случай
$$\int_0^{2\pi} P(t)\,dt = 0, \ D(V) = 1. \qquad (29.33$$
Пусть еще
$$\sigma^2(V) - 4 > 0. \tag{29.34}$$
Тогда при
$$\sigma(V) > 0 \qquad (29.35$$
$$\mu_1 = \frac{\sigma(V) + \sqrt{\sigma^2(V) - 4}}{2} > 1 \tag{29.36}$$
и
$$0 < \mu_2 = \frac{\sigma(V) - \sqrt{\sigma^2(V) - 4}}{2} < 1, \tag{29.37}$$
а при
$$\sigma(V) < 0 \qquad (29.38$$
$$-1 < \mu_1 < 0, \ \mu_2 < -1. \tag{29.39}$$

Если имеем (29.33) и
$$\sigma^2(V) - 4 < 0, \tag{29.40}$$

то μ_1 и μ_2 — комплексные, по модулю равные единице, т. е. имеем случай (29.15_1).

Таким образом, при выполнении условий (29.33) и (29.40) все решения системы (29.1) будут ограниченными колеблющимися.

Пусть теперь имеем (29.33) и

$$\sigma^2(V) - 4 = 0. \tag{29.41}$$

Тогда

$$\mu_1 = \mu_2 = 1, \tag{29.42}$$

если выполнено условие (29.35), и, наоборот,

$$\mu_1 = \mu_2 = -1 \tag{29.43}$$

при условии (29.38).

Если имеем (29.42), то существует однопараметрическое семейство периодических с периодом 2π решений системы (29.1), если же имеется (29.43), то существует однопараметрическое семейство периодических с периодом 4π решений системы (29.1).

Вопрос об ограниченности (а в данном случае и о периодичности) всех решений системы (29.1) решается, как мы видели, каноническим видом матрицы V, именно если V имеет вид (29.19), где теперь будет $\mu = \pm 1$, то все решения системы (29.1) не будут ограниченными.

Выведем необходимое условие существования периодического с периодом 2π решения системы (29.1).

Так как для существования периодического решения необходимо и достаточно, чтобы было

$$\mu_1 = 1, \tag{29.44}$$

то по свойству корней квадратного уравнения на основании (29.7) имеем

$$\mu_2 = D(V) = e^{\int\limits_0^{2\pi} \sigma(P)\,dt} \tag{29.45}$$

и

$$1 + \mu_2 = \sigma(V). \tag{29.46}$$

Исключая из этих равенств μ_2, получаем необходимое и достаточное условие существования периодического с периодом 2π решения

$$1 + e^{\int\limits_0^{2\pi} \sigma(P)\,dt} = \sigma(V). \tag{29.47}$$

Действительно, если

$$1 + D(V) = \sigma(V), \tag{29.47$_1$}$$

то, подставляя отсюда $D(V)$ в (29.7), получим

$$\mu^2 - \sigma(V)\mu + \sigma(V) - 1 = 0,$$

откуда видим, что $\mu = 1$ есть корень уравнения (29.7). Следовательно, если

$$1 + e^{\int_0^{2\pi} \sigma(P)\,dt} \neq \sigma(V), \tag{29.47$_2$}$$

то система (29.1) периодического решения с периодом 2π не имеет.

Если, в частности, выполнено условие (29.33), то при $2 \neq \sigma(V)$ такого периодического решения нет, а при

$$\sigma(V) = 2 \tag{29.48}$$

оно есть.

Пусть в системе (29.1)

$$P(t) = \begin{Vmatrix} 0 & p(t) \\ q(t) & 0 \end{Vmatrix},$$

где $p(t)$ и $q(t)$ — функции периодические с периодом 2π и $p(t) \geqslant 0$, $q(t) \geqslant 0$. В этом случае, как нетрудно видеть, в формуле (6.1)

$$\sigma(X_{2k+1}(t)) = 0 \text{ и } \sigma(X_{2k}(t)) > 0. \tag{29.49}$$

Отсюда следует, что

$$\sigma(V) = \sigma(X(2\pi)) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma(X_k(2\pi)) > 2$$

и, следовательно, периодических решений с периодом 2π нет.

Замечание 29.1. Заменяя в (29.1) $t = k\tau$, получим

$$\frac{dX}{d\tau} = Xp(\tau),\ p(\tau) = P(k\tau)\,k, \tag{29.50}$$

где $p(\tau) = p(\tau + 2\pi)$. Записывая теперь условие (29.47) для уравнения (29.50), получим необходимое и достаточное условие существования периодических с периодом $2\pi k$ решений уравнения (29.1).

Периодических решений с периодом, не соизмеримым с 2π, система (29.1) не имеет (см. § 36).

§ 30. О ПЕРИОДИЧЕСКИХ И ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ, РАССМОТРЕННЫХ В § 3 И 4

Пусть в системе (29.1) периодическая матрица $P(t)$ обладает свойством (4.6). Тогда, согласно (4.7),

$$X(t) = e^{\int_0^t P(t)\,dt} \tag{30.1}$$

или так как $P(t)$ имеет вид (4.11), то

$$\int_0^t P(t)\,dt = \begin{Vmatrix} \bar{\varphi}_1(t) + b_1\bar{\varphi}_2(t) & \bar{\varphi}_2(t) \\ b_2\bar{\varphi}_2(t) & \bar{\varphi}_1(t) \end{Vmatrix}, \tag{30.1$_1$}$$

где

$$\int_0^t \varphi_k(t)\,dt = \bar{\varphi}_k(t) = \bar{\varphi}_k. \tag{30.2}$$

Характеристические числа матрицы (30.1$_1$) суть

$$2\lambda_1(t) = 2\bar{\varphi}_1 + b_1\bar{\varphi}_2 + \bar{\varphi}_2\sqrt{b_1^2 + 4b_2},$$

$$2\lambda_2(t) = 2\bar{\varphi}_1 + b_1\bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_2\sqrt{b_1^2 + 4b_2}. \tag{30.3}$$

Следовательно,

$$\sigma(V) = e^{\lambda_1(2\pi)} + e^{\lambda_2(2\pi)} \tag{30.4}$$

и

$$D(V) = e^{\lambda_1(2\pi) + \lambda_2(2\pi)}. \tag{30.5}$$

Подставляя (30.4) и (30.5) в (29.47), найдем

$$1 + e^{\lambda_1(2\pi)+\lambda_2(2\pi)} = e^{\lambda_1(2\pi)} + e^{\lambda_2(2\pi)}$$

или

$$[1 - e^{\lambda_1(2\pi)}]\,[1 - e^{\lambda_2(2\pi)}] = 0. \tag{30.6}$$

Таким образом, условие существования периодического с периодом 2π решения рассматриваемой системы двух уравнений состоит в том, что должно быть выполнено, по крайней мере, одно из двух равенств

$$\left.\begin{aligned} 2\int_0^{2\pi}\varphi_1(t)\,dt + (b_1 + \sqrt{b_1^2 + 4b_2})\int_0^{2\pi}\varphi_2(t)\,dt = 0 \\ 2\int_0^{2\pi}\varphi_1(t)\,dt + (b_1 - \sqrt{b_1^2 + 4b_2})\int_0^{2\pi}\varphi_2(t)\,dt = 0 \end{aligned}\right\} \tag{30.7}$$

или одновременно

$$\left.\begin{aligned} 2\int_0^{2\pi}\varphi_1(t)\,dt + b_1\int_0^{2\pi}\varphi_2(t)\,dt = 0 \\ \left[\int_0^{2\pi}\varphi_1(t)\,dt\right]^2 + b_1\int_0^{2\pi}\varphi_1(t)\,dt\int_0^{2\pi}\varphi_2(t)\,dt - b_2\left[\int_0^{2\pi}\varphi_2\,dt\right]^2 = \\ = 4n^2\pi^2 \end{aligned}\right\}, \quad (30.7_1)$$

так как при этом $\lambda_1(2\pi) = 2\pi ni$, $\lambda_2(2\pi) = -2\pi ni$, где n — целое. Если ни одно из равенств (30.7) не выполнено, то периодических с периодом 2π решений нет.

Теперь рассмотрим систему (5.1), где U_1, U_2 — матрицы второго порядка, обладающие свойствами (5.2) и (5.3), а $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ — периодические с периодом 2π функции. Пусть матрицы U_1 и U_2 имеют вид (5.6), тогда, как мы видели, $\sigma(V)$ и $D(V)$ получаем по формулам (5.8) и (5.9) при $t = 2\pi$. Подставляя эти значения $\sigma(V)$ и $D(V)$ в (29.47), легко найдем

$$\left[1 - e^{a\int_0^{2\pi}\varphi_1(t)dt + b_1\int_0^{2\pi}\varphi_2(t)dt}\right]\left[1 - e^{a\int_0^{2\pi}\varphi_1(t)dt + b_2\int_0^{2\pi}\varphi_2(t)dt}\right] = 0. \quad (30.8)$$

Таким образом, здесь периодическое решение с периодом 2π имеется только в том случае, если выполнено одно из двух равенств

$$\int_0^{2\pi}[a\varphi_1(t) + b_1\varphi_2(t)]\,dt = 0 \quad (30.9)$$

или

$$\int_0^{2\pi}[a\varphi_1(t) + b_2\varphi_2(t)]\,dt = 0. \quad (30.10)$$

Предположим теперь, что в системе (5.1) матрицы U_1, U_2 имеют вид (5.11). Тогда в соответствии с (5.16) и (5.17)

$$\sigma(V) = e^{(a+cm)L_1(2\pi)+(b+mn)L_2(2\pi)} + e^{(a+cm)L_1(2\pi)+(b-mn)L_2(2\pi)}$$

и

$$D(V) = e^{2(a+cm)L_1(2\pi)+2bL_2(2\pi)}.$$

Подставляя это в условие периодичности решений (29.47), найдем[1]

$$\left[1 - e^{(a+cm)L_1(2\pi)+(b+mn)L_2(2\pi)}\right]\left[1 - e^{(a+cm)L_1(2\pi)+(b-mn)L_2(2\pi)}\right] = 0.$$

[1] Намного подробнее системы, указанные в § 3, 4 и 32 (а также другие системы), рассмотрены в работах П. Б. Голоквосчуса [50—55].

Периодическое решение с периодом 2π рассматриваемая система имеет только при выполнении одного из равенств

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} [(a+cm)\varphi_1(t)+(b+mn)\varphi_2(t)]\,dt=0 \\ &\int_0^{2\pi} [(a+cm)\varphi_1(t)+(b-mn)\varphi_2(t)]\,dt=0 \end{aligned}\right\}. \qquad (30.11)$$

Этим мы исчерпали все возможные случаи системы двух уравнений, когда матрицы U_1, U_2 удовлетворяют условиям (5.2) и (5.3).

§ 31. ВОПРОСЫ ОГРАНИЧЕННОСТИ И ПЕРИОДИЧНОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ СПЕЦИАЛЬНОЙ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ПОДСТАНОВКИ, ПОЛУЧЕННОЙ ЛАППО-ДАНИЛЕВСКИМ

Теперь мы выразим условия ограниченности решений системы двух уравнений (29.1) через элементы матрицы A, входящей в формулу (29.2).

При изучении вопроса существования ограниченных и периодических с периодом 2π решений можно предполагать, что в формуле (29.2) матрица $Z(t)$ имеет период 2π; тем самым мы допускаем матрицу A и комплексной. На основании формул (1.2), (1.3) заключаем следующее.

Если

$$A=S\begin{Vmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{Vmatrix}S^{-1}, \qquad (31.1)$$

то

$$V=e^{2\pi A}=S\begin{Vmatrix}e^{2\pi\lambda_1} & 0\\ 0 & e^{2\pi\lambda_2}\end{Vmatrix}S^{-1},$$

и если

$$A=S\begin{Vmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{Vmatrix}S^{-1}, \qquad (31.2)$$

то

$$V=e^{2\pi A}=S\begin{Vmatrix}e^{2\pi\lambda} & 0\\ 2\pi e^{2\pi\lambda} & e^{2\pi\lambda}\end{Vmatrix}S^{-1}.$$

Отсюда видим, что при

$$R(\lambda_1) < 0, \tag{31.3}$$

где $R(\lambda)$ означает вещественную часть λ, характеристическое число μ_1 матрицы V по модулю будет меньше единицы и, следовательно, имеется однопараметрическое семейство решений, обладающих свойством (29.15).

В том случае, когда и $R(\lambda_2) < 0$, все решения системы (29.1) обладают свойством (29.15). Если в (31.2) $R(\lambda) < 0$, то также все решения системы (29.1) обладают свойством (29.15). Если в (31.1) $\lambda_1 = ki$, где k — число целое или нуль, то характеристическое число μ_1 матрицы V будет равно единице: $\mu_1 = e^{2k\pi i} = 1$.

Однако следует сказать, что изложенные выше способы нахождения матрицы A через параметры, входящие в матрицу $P(t)$, таковы, что число k возможно всегда сделать равным нулю (или, наоборот, произвольным целым), т. е. возможно всегда привести к случаю $\lambda_1 = 0$.

В этом случае система (29.1) имеет однопараметрическое семейство периодических с периодом 2π решений. Все решения (29.1) могут быть периодическими с периодом 2π только в том случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и этому характеристическому числу матрицы A соответствуют простые элементарные делители, т. е. если

$$A = 0 \tag{31.4}$$

или

$$\lambda_1 = k_1 i, \quad \lambda_2 = k_2 i, \tag{31.4$_1$}$$

где k_1, k_2 — числа целые.

Если матрица A получена вещественной, то, очевидно, возможно только — $k_1 = k_2 = k$. Если матрица A имеет кратное характеристическое число $\lambda = 0$, но имеет вид

$$A = S \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} S^{-1}, \tag{31.5}$$

то имеется только однопараметрическое семейство периодических решений, остальные же не будут ограниченными, так как

$$V^n = e^{2n\pi A} = S \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 2\pi n & 1 \end{Vmatrix} S^{-1},$$

где n — целое число.

Предположим теперь, что характеристическими числами матрицы A будут

$$\lambda_1 = \lambda i, \quad \lambda_2 = -\lambda i, \tag{31.6}$$

где λ — вещественное положительное число, не равное целому. Очевидно, этот случай соответствует условиям (29.33) и (29.40). Если λ — число рациональное, то все решения будут периодическими с периодом $T = 2k\pi$, где k — знаменатель числа λ. Если же λ — не рациональное число, то все решения будут ограниченными колеблющимися.

Как видно из предыдущего (§ 8), возможен случай, когда

$$\lambda_1 = \lambda_2 = i/2 \text{ (матрица } A \text{ — комплексная)} \tag{31.7}$$

или

$$\lambda_1 = i/2, \ \lambda_2 = -(i/2), \tag{31.8}$$

или, наконец, вообще

$$\lambda_1 = \frac{2n+1}{2} i, \ \lambda_2 = \frac{2n_1 - 1}{2} i \quad (n, \ n_1 \text{ — целые}). \tag{31.8$_1$}$$

Тогда все решения системы (29.1) будут периодическими с периодом 4π. Заметим, что в этом случае

$$\sigma(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(P(t))\, dt, \tag{31.9}$$

если мы матрицу A желаем иметь вещественной ($n = -n_1$).

Необходимое и достаточное условие наличия периодического с периодом 2π решения при условии, что матрица A вещественная, выражается равенствами

$$\left.\begin{aligned} &\sigma(A) = 0, \text{ т. е. } \int_0^{2\pi} \sigma(P(t))\, dt = 0 \\ &D(A) = n^2 \qquad (n \text{ — целое} \geqslant 1) \end{aligned}\right\}, \tag{31.10}$$

когда имеем два линейно независимых периодических решения, или

$$D(A) = 0, \ \sigma(A) \text{ — произвольное}, \tag{31.10$_1$}$$

когда имеем одно периодическое решение[1].

Напоминаем, что общее выражение матрицы A для системы (28.1), где $P(t)$ задано (28.4), дается формулой (28.15), которая при

$$\int_0^{2\pi} P(t)\, dt = 2\pi\sigma(b_0) = 0$$

[1] Если имеем (31.4), то, как было отмечено, имеем два линейно независимых периодических решения с периодом 2π.

переходит в (28.18). Следовательно, в случае (28.18) характеристическое уравнение матрицы A имеет вид

$$\lambda^2 - \frac{m^2}{4}\left(\sigma^2(V) - 4\right) = 0\,, \qquad (31.10_2)$$

где

$$m = \frac{\ln\left(\frac{\sigma(V)}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2(V)}{4} - 1}\right)}{2\pi\sqrt{\frac{\sigma^2(V)}{4} - 1}}\,.$$

Таким образом, имеем:

$$\lambda_1 = \frac{\ln\left(\frac{\sigma(V)}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2(V)}{4} - 1}\right)}{2\pi}\,,$$

$$\lambda_2 = -\frac{\ln\left(\frac{\sigma(V)}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2(V)}{2} - 1}\right)}{2\pi}\,.$$

На основании (31.10) условие периодичности решения можно записать и так:

$$1\,\text{п}^2\left(\frac{\sigma(V)}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2(V)}{4} - 1}\right) = -4\pi^2 n^2\,,$$

$$\ln\left(\frac{\sigma(V)}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2(V)}{4} - 1}\right) = \pm i\,2\pi n.$$

Отсюда получаем и прежнее условие периодичности (29.48) решения (29.47).

На основании (28.13) и рассуждения к формуле (28.25) имеем

$$D(A) = -D(W) = -D(H). \qquad (31.10_3)$$

Поэтому условие (31.10_1) существования периодического решения можно записать в виде

$$D(H) = 0, \qquad (31.10_4)$$

где H задано рядом (9.24).

Следует, однако, иметь в виду, что ряд (9.24) сходится при малых T_p, поэтому на основании (31.10_4) удобно находить связь между параметрами уравнения, обеспечивающую существование периодического решения только при малых значениях параметров, например при малых значениях матриц T_p. Заметим, однако, что в (31.10_4) мы можем получить ряд по малым возрастающих порядков иногда и в том случае, когда некоторые из элементов матриц T_p (или даже целиком некоторые из матриц T_p) не являются малыми; это мы увидим на примерах. Сходимость таких рядов по малым возрастающих порядков (т. е. когда не все матрицы T_p достаточно малы) не вытекает из теорем Лаппо-Данилевского, но вытекает из доказанных в этой книге теорем (§ 29). Впрочем, связь между параметрами, обеспечивающую существование периодического решения, можно находить и из уравнения (29.48), в котором ряд, представляющий V, сходится при всех конечных значениях матриц T_p:

$$V=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1\ldots p_\nu=-m-1}^{m-1} T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}\overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1\ldots p_\mu}\sum_{\varkappa=0}^{\nu-\mu}\overset{*}{\alpha}_{p_{\mu+1}\ldots p_\nu}(2\pi i)^{\varkappa}.$$

Как было отмечено ранее (после формулы (28.21)), члены с i здесь сокращаются ввиду того, что V — вещественное. Мы могли бы, конечно, вместо этого V взять и его представление в виде (6.1), рассматривая его как

$$V=X(2\pi)=\sum_{=}^{\infty}X_k(2\pi)$$

для системы (28.19).

Рассмотрим уравнение Матье

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(a-2q\cos 2t)\,y=0, \tag{31.11}$$

где a и q — постоянные. Это уравнение эквивалентно системе

$$\frac{dX}{dt}=X\begin{Vmatrix}0 & 1\\ 2q\cos 2t-a & 0\end{Vmatrix}=X\left[\begin{Vmatrix}0 & 1\\ -a & 0\end{Vmatrix}+\right.$$

$$\left.+\begin{Vmatrix}0 & 0\\ 2q & 0\end{Vmatrix}\cos 2t\right]. \tag{31.12}$$

Здесь матрица коэффициентов имеет период π. Введем новую независимую переменную $\tau=2t$:

$$\frac{dX}{d\tau}=X\left[\frac{1}{2}\begin{Vmatrix}0 & 1\\ -a & 0\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}0 & 0\\ q & 0\end{Vmatrix}\cos\tau\right]. \tag{31.13}$$

Следовательно, эта система такова, что в соответствии с (28.4) здесь

$$\left.\begin{array}{c} b_0 = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{Vmatrix}, \quad b_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{Vmatrix} \\ P_0 = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{Vmatrix}, \quad P_1 = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{Vmatrix}, \quad P_{-1} = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{Vmatrix} \end{array}\right\}. \tag{31.14}$$

Записывая (31.13) в виде (28.6), получим

$$\frac{dX}{dz} = X\left[T_{-2}z^{-2} + T_{-1}z^{-1} + T_0\right], \tag{31.15}$$

$$T_{-2} = \frac{-i}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{Vmatrix}, \quad T_{-1} = -\frac{i}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{Vmatrix},$$

$$T_0 = -\frac{i}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{Vmatrix}. \tag{31.16}$$

Согласно (31.10_3), $D(A) = -D(H)$, H дано формулой (9.24)

$$H = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \ldots p_\nu = -s}^{t} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu}\, \delta^{(0)}_{p_1 + \ldots + p_\nu + \nu}\, \alpha^{(1)}_{p_1 \ldots p_\nu}, \tag{9.24}$$

где $\delta^{(0)}_m$ — символ Кронекера, т. е.

$$\delta^{(0)}_m = \begin{cases} 0 & m \neq 0 \\ 1 & m = 0, \end{cases} \tag{31.17}$$

$\alpha^{(1)}_{p_1 \ldots p_\nu}$ определены формулами § 7, а $p_1, \ldots, p_\nu$ принимают в формуле (9.24) значения $-2, -1, 0$.

На основании формул (31.16)

$$T_0^2 = T_{-2}^2 = T_0 T_{-2} = T_{-2} T_0 = \|0\|. \tag{31.18}$$

Отсюда следует, что все произведения матриц T_0, T_{-1}, T_{-2}, где стоят рядом T_0 и T_{-2} или одно из них возводится в квадрат, равны нулю. Мы найдем, что сумма слагаемых, содержащих произведение $T_{p_1} T_{p_2} \ldots T_{p_5} T_{p_6}$ для $p_1 + \ldots + p_6 + 6 = 0$ будет равна нулю. Учитывая (31.18) в остальных произведениях и подставляя значения коэффициентов $\alpha^{(1)}_{p_1 \ldots p_\nu}$, мы, оставляя в сумме (9.24) произведения $T_{p_1} \ldots T_{p_\nu}$ лишь при $\nu = 1, 2, \ldots, 7$, получим

$$H = T_{-1} + T_{-2}T_{-1}T_0 + T_0T_{-1}T_{-2} + 2T_{-1}T_{-2}T_{-1}T_0 -$$
$$- 2T_{-1}T_0T_{-1}T_{-2} - T_{-2}T_{-1}T_{-1}T_0 + T_0T_{-1}T_{-1}T_{-2} +$$

$$+3T_{-1}T_{-1}T_{-2}T_{-1}T_0+3T_{-1}T_{-1}T_0T_{-1}T_{-2}-3T_{-1}T_{-2}T_{-1}T_{-1}T_0+$$
$$+T_{-2}T_{-1}T_{-1}T_{-1}T_0+T_0T_{-1}T_{-1}T_{-1}T_{-2}-3T_{-1}T_0T_{-1}T_{-1}T_{-2}+$$
$$+3T_0T_{-1}T_{-2}T_{-1}T_0T_{-1}T_{-2}+\frac{1}{4}T_0T_{-1}T_0T_{-1}T_{-2}T_{-1}T_{-2}+$$
$$+3T_0T_{-1}T_{-2}T_{-1}T_{-2}T_{-1}T_0+3T_{-2}T_{-1}T_0T_{-1}T_0T_{-1}T_{-2}+$$
$$+\frac{1}{4}T_{-2}T_{-1}T_{-2}T_{-1}T_0T_{-1}T_0+3T_{-2}T_{-1}T_0T_{-1}T_{-2}T_{-1}T_0+$$
$$+5T_{-1}T_{-1}T_{-1}T_{-1}T_{-2}T_{-1}T_0+10T_{-1}T_{-1}T_{-2}T_{-1}T_{-1}T_{-1}T_0+$$
$$+T_{-2}T_{-1}T_{-1}T_{-1}T_{-1}T_{-1}T_0+5T_{-1}T_{-1}T_{-1}T_{-1}T_0T_{-1}T_{-2}+$$
$$+10T_{-1}T_{-1}T_0T_{-1}T_{-1}T_{-1}T_{-2}+T_0T_{-1}T_{-1}T_{-1}T_{-1}T_{-1}T_{-2}.$$

Вычисляя эту сумму на основании (31.16), получим

$$H=\left\|\begin{matrix}0 & -\frac{i}{2}\\ \frac{i}{2}\left(a+\frac{q^2}{2}+\frac{aq^2}{2}+\frac{25q^4}{128}+\frac{a^2q^2}{2}\right) & 0\end{matrix}\right\|.$$

Отсюда

$$D(H)=\frac{1}{4}\left(a+\frac{q^2}{2}+\frac{aq^2}{2}+\frac{25}{128}q^4+\frac{a^2q^2}{2}\right).$$

Из $D(H)=0$ имеем:

$$q^2a^2+(2+q^2)\,a+q^2+\frac{25}{64}q^4=0,$$

$$aq^4=-\frac{2+q^2}{2}\pm\sqrt{1+q^2+\frac{q^4}{4}-q^6-\frac{25}{64}q^8}.$$

Отсюда

$$a_1=-\frac{q^2}{2}+\frac{7}{128}q^4+O(q^8),\quad a_2=-\frac{2+q^2}{q^2}+$$
$$+\frac{q^2}{2}-\frac{7q^4}{128}+O(q^6). \tag{31.19}$$

Здесь $O(q^6)$ означают малую порядка q^6 при $q\to 0$. Таким образом[1], здесь a_1 есть приближенное значение корня уравне-

[1] Нет оснований считать и a_2 приближенным значением a, так как при малых q a_2 велико и неясно, будет ли малой сумма остатка отброшенной части ряда $D(H)=0$ по сравнению с a_2.

ния $D(H)=0$. Подставляя значение $a=a_1(q)=-\frac{q^2}{2}+$ $+\frac{7}{128}q^4$ в общее представление величины A (28.18), получим[1] приближенное решение системы (31.12) в виде (28.2).

Эти решения будут мало отличаться от соответствующих периодических решений в большом промежутке изменения t.

Для нахождения периодического решения с периодом 4π системы (31.13) применим метод, предложенный в § 10, рассматривая систему (31.13) как систему вида (10.1). Мы положим, кроме того, $a=1-2\alpha$ и запишем систему (31.13) в виде

$$\frac{dX}{dt}=X\left[\frac{1}{2}\begin{Vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}0 & 0\\ \alpha+q\cos t & 0\end{Vmatrix}\varepsilon\right], \tag{31.20}$$

т. е.

$$P_0=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{Vmatrix} \text{ и } P_1=\begin{Vmatrix}0 & 0\\ \alpha+q\cos t & 0\end{Vmatrix}, \tag{31.21}$$

$$P_k(t)=\|0\|,\ k\geqslant 2.$$

Будем искать периодическое с периодом 4π решение

$$X=X(t,\ q)\longrightarrow e^{P_0t} \text{ при } q\longrightarrow 0. \tag{31.22}$$

Мы положим (см. (10.16))

$$\left.\begin{aligned}&A_0=0,\ Z_0=e^{\frac{1}{2}\begin{Vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{Vmatrix}t}\\ &\text{и}\\ &A=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\lambda^k,\ Z=\sum_{k=0}^{\infty}Z_k(t)\lambda^k.\end{aligned}\right\} \tag{31.23}$$

Так как характеристические числа матрицы

$$P_0=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{Vmatrix}$$

суть $\lambda_1=\frac{i}{2}$, $\lambda_2=-\frac{i}{2}$, то по формуле (1.14) имеем:

[1] Подставляя $a=a_1(q)$ в (31.13), мы можем получить A и N в (28.2) как по формулам § 11, так и по формулам Лаппо-Данилевского, определяя решение системы (31.15) в виде (7.11) (формулы (7.13), (7.15_1) или (9.24), (9.24_1)). Надо только в соответствии с (28.5) положить здесь $z=\exp it$. Решение, стоящее в строчке, соответствующей нулевому характеристическому числу матрицы A, и будет приближенным значением периодического решения.

$$Z_0 = e^{P_0 t} = \begin{Vmatrix} \cos\frac{t}{2} & \sin\frac{t}{2} \\ -\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{Vmatrix}, \tag{31.23$_1$}$$

$$Z_0^{-1} = e^{-P_0 t} = \begin{Vmatrix} \cos\frac{t}{2} & -\sin\frac{t}{2} \\ \sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{Vmatrix}. \tag{31.24}$$

По формуле (11.9)

$$Z_1 = \int_0^t [Z_0 P_1 Z_0^{-1} - A_1]\, dt\, Z_0. \tag{31.25}$$

На основании (31.21) и (31.24) найдем

$$Z_0 P_1 Z_0^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{\alpha}{2}\sin t + \frac{q}{4}\sin 2t, & \frac{q-2\alpha}{4} + \frac{\alpha - q}{2}\cos t + \frac{q\cos 2t}{4} \\ \frac{2\alpha + q}{4} + \frac{\alpha + q}{2}\cos t + \frac{q\cos 2t}{4}, & \frac{-\alpha\sin t}{2} - \frac{q}{4}\sin 2t \end{Vmatrix}.$$

Чтобы Z_1 было периодическим с периодом 4π, необходимо положить, как видно из (31.25),

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{q-2\alpha}{4} \\ \frac{2\alpha+q}{4} & 0 \end{Vmatrix}. \tag{31.25$_1$}$$

При таком выборе A_1 имеем:

$$Z_1 = \begin{Vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \cos\frac{t}{2} & \sin\frac{t}{2} \\ -\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{Vmatrix}, \tag{31.26}$$

где

$$z_{11}=\frac{\alpha}{2}+\frac{q}{2}-\frac{\alpha}{2}\cos t-\frac{q}{8}\cos 2t,\ z_{12}=\frac{\alpha-q}{2}\sin t+$$

$$+\frac{q}{8}\sin 2t,\ z_{21}=\frac{\alpha+q}{2}\sin t+\frac{q}{8}\sin 2t,$$

$$z_{22}=-\frac{\alpha}{2}-\frac{q}{8}+\frac{\alpha}{2}\cos t+\frac{q}{8}\cos 2t.$$

Первое приближение[1] уравнения

$$D(A_{\varepsilon=1})=0 \quad \text{есть} \quad D(A_1)=\frac{q^2-4\alpha^2}{16}=0.$$

Отсюда

$$2\alpha_1=q,\ 2\alpha_2=-q. \tag{31.27}$$

Следовательно, приближенное значение a в системе (31.13), при котором она имеет периодическое с периодом 4π решение, получаем в виде

$$a_1=1+q,\ a_2=1-q. \tag{31.28}$$

При $a_1=1+q$ приближенно получаем фундаментальную систему решений уравнений (31.12) в виде[2]

$$X=e^{\left\|\begin{matrix}0 & 0\\ \frac{q}{2} & 0\end{matrix}\right\|t}[Z_0(t)+Z_1(t)], \tag{31.29}$$

где Z_0 и Z_1 даны формулами (31.23_1) и (32.26), в которых надо положить $2\alpha=q$.

Следует заметить, что представление (31.29) справедливо, вообще говоря, лишь при малых q. Чтобы при $a=1+q$ получить приближенное значение решений для больших q, надо воспользоваться общим представлением A, данным формулой (9.1), после чего из равенства $Z(t)=X(t)e^{-At}$ получим и $Z(t)$.

Чтобы найти следующее приближенное a, можно найти A_2 и Z_2 по формулам (11.9). Но можно поступить иначе.

---

[1] Полагая $\varepsilon=1$, мы q и α считаем малыми.

[2] Первая строчка X и дает приближенное значение периодического с периодом 4π решения.

Именно, в согласии с формулой (12.13) можно написать вместо системы (31.20) систему

$$\frac{dX}{dt} = X\,[P_0(t) + P_1(t)\,\varepsilon], \tag{31.30}$$

где $P_0(t)$ такое, что соответствующая интегральная матрица системы

$$\frac{dY}{dt} = YP_0(t) \tag{31.31}$$

будет иметь вид

$$Y = e^{A_1 t} Z_1(t), \tag{31.32}$$

где A_1 и $Z_1(t)$ найдем по формулам (31.25_1) и (31.26).

Соответствующее значение $P_0(t)$ легко найдем из равенства

$$A_1 Z_1 + \frac{dZ_1}{dt} = Z_1 P_0, \tag{31.33}$$

которое получается подстановкой выражения (31.32) в (31.31). Матрицу $P_1(t)$ в формуле (31.30) в согласии с (12.13) возьмем в виде

$$P_1(t) = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{a}{2} + q\cos\tau & 0 \end{Vmatrix} - P_0(t). \tag{31.34}$$

Теперь[1] мы можем искать A и $Z(t)$ в виде

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \lambda^k, \quad Z = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k \lambda^k, \tag{31.35}$$

где

$$A_0 = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{q-2a}{4} \\ \frac{2a+q}{4} & 0 \end{Vmatrix}$$

и Z_0 дано выражением (31.23_1).

[1] Заметим, что здесь P_0, определенное равенством (31.33), будет конечным при $a = q = 0$, а $P_1(t)$, данное равенством (31.34), обращается в нуль при $a = q = 0$.

§ 32. О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ПРИ УСЛОВИИ (4.6)

Рассмотрим снова систему второго порядка

$$\frac{dX}{dt} = XP(t) \tag{32.1}$$

в предположении (4.6), тогда мы имеем (4.11) и

$$X = \exp \int_0^t P(t)\,dt. \tag{32.2}$$

Так как функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ периодические с периодом 2π, то

$$\int_0^t \varphi_k(t)\,dt = a_k t + \psi_k(t),$$

где $a_k = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi_k(t)\,dt$ и $\psi_k(t)$ — функции периодические с периодом 2π. Это позволяет нам записать (32.2) в виде

$$X(t) = \exp At \cdot \exp Z(t),$$

где A — постоянная матрица:

$$A = \begin{Vmatrix} a_1 + b_1 a_2 & a_2 \\ b_2 a_2 & a_1 \end{Vmatrix},$$

а $Z(t)$ — периодическая с периодом 2π матрица:

$$Z(t) = \begin{Vmatrix} \psi_1(t) + b_1\psi_2(t) & \psi_2(t) \\ b_2\psi_2(t) & \psi_1(t) \end{Vmatrix}.$$

Условие существования периодического решения (31.10_1) здесь имеет вид

$$a_1^2 + b_1 a_1 a_2 - b_2 a_2^2 = 0. \tag{32.3}$$

Это условие равносильно двум условиям (30.7), так как, перемножая равенства (30.7), мы и приходим к (32.3). Условия (31.10) порождают равенства

$$2a_1 + b_1 a_2 = 0, \quad a_1^2 + b_1 a_1 a_2 - a_2^2 b_2 = n^2,$$

совпадающие с (30.7_1).

В частности, при $a_1 = a_2 = 0$ система имеет периодическое с периодом 2π решение[1].

[1] Мы уже отметили (§ 28), что А. М. Ляпунов рассмотрел систему, которая в случае системы двух уравнений есть частный случай системы (29. 1) при условии (3.6); А. П. Гремяченский [56], рассматривая эту систему $2n$ уравнений Ляпунова, указал случай, когда имеется нулевое характеристическое число матрицы A.

Пользуясь[1] условиями (31.10), мы также легко можем восстановить условия (30.9)—(30.11).

§ 33. УРАВНЕНИЕ ЛЯПУНОВА $\ddot{x}+p(t)x=0$

Остановимся отдельно на уравнении

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)x=0, \tag{33.1}$$

где $p(t)=p(t+1)$ — функция непрерывная. Нас будет интересовать существование ограниченных решений этого уравнения. Уравнение (33.1) эквивалентно системе

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2, \quad \frac{dx_2}{dt}=-px_1. \tag{33.2}$$

Наряду с (33.2) будем рассматривать и систему

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2, \quad \frac{dx_2}{dt}=\varepsilon px_1, \tag{33.3}$$

соответствующую уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\varepsilon p(t)x=0. \tag{33.4}$$

Пусть $x=f(t)$ и $x=\varphi(t)$ — два линейно независимых решения уравнения (33.4) с начальными условиями $f(0)=1$, $f'(0)=0$, $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=1$. Определяя эти решения по Ляпунову, получим

$$\begin{aligned} f(t)&=1+\varepsilon f_1(t)+\varepsilon^2 f_2(t)+\ldots,\\ \varphi(t)&=t+\varepsilon\varphi_1(t)+\varepsilon^2\varphi_2(t)+\ldots, \end{aligned} \tag{33.5}$$

где

$$f_n(t)=\int_0^t dt\int_0^t pf_{n-1}(t)\,dt, \quad \varphi_n(t)=\int_0^t dt\int_0^t p\varphi_{n-1}(t)\,dt,$$

$$f_0(t)=1, \quad \varphi_0(t)=t. \tag{33.6}$$

При $\varepsilon=-1$ система функций (33.5) дает два линейно независимых решения уравнения (33.1). Интегральной матрицей системы (33.3) будет

[1] Выше (§ 4) мы уже отмечали, что Г. Ф. Федоров [23] указал более общий случай, чем система (4.1), когда $X(t)$ получается в замкнутой форме, что позволяет легко решить вопрос о существовании ограниченных и периодических решений.

$$X \doteq \begin{Vmatrix} f(t) & f'(t) \\ \varphi(t) & \varphi'(t) \end{Vmatrix} \tag{33.7}$$

и интегральной подстановкой

$$V = \begin{Vmatrix} f(1) & f'(1) \\ \varphi(1) & \varphi'(1) \end{Vmatrix}. \tag{33.8}$$

На основании формулы (29.7) характеристические числа ρ_1, ρ_2 матрицы (33.8) найдутся из уравнения

$$\rho^2 - (f(1) + \varphi'(1))\rho + 1 = 0, \quad \rho_1\rho_2 = 1. \tag{33.9}$$

Здесь $\sigma(V) = f(1) + \varphi'(1)$.

Возможны два случая:

I. Корни ρ_1, ρ_2 вещественные различные; тогда один из них по модулю больше единнцы и другой меньше единицы.

II. Корни ρ_1 и ρ_2 комплексные или равные единице; тогда $|\rho_1| = |\rho_2| = 1$.

Рассмотрим I случай. Мы имеем однопараметрическое семейство решений, стремящихся к нулю при $t \to \infty$. В соответствии с формулами (29.33) — (29.39) это будет при условии

$$[f(1) + \varphi'(1)]^2 - 4 > 0. \tag{33.10}$$

Из (33.9) найдем ρ_1, ρ_2:

$$\begin{aligned} 2\rho_1 &= f(1) + \varphi'(1) - \sqrt{[f(1) + \varphi'(1)]^2 - 4}, \\ 2\rho_2 &= f(1) + \varphi'(1) + \sqrt{[f(1) + \varphi'(1)]^2 - 4}. \end{aligned} \tag{33.11}$$

На основании (33.5) это запишем в виде

$$\begin{aligned} 2\rho_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \psi_k(1) - \left[\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \psi_k(1) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \psi_k(1) + 4\right)\right]^{1/2}, \\ 2\rho_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \psi_k(1) + \left[\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \psi_k(1) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \psi_k(1) + 4\right)\right]^{1/2}, \end{aligned} \tag{33.12}$$

$$\psi_k(t) = f_k(t) + \varphi_k'(t), \quad \psi_0(t) = 2. \tag{33.13}$$

Из (33.6) при $n = 1$ имеем

$$\psi_1(t) = \int_0^t dt \int_0^t p\,dt + \int_0^t tp\,dt = t \int_0^t p\,dt \tag{33.14}$$

и, следовательно,

$$\psi_1(1) = \int_0^1 p dt. \tag{33.15}$$

Если $\psi_1(1) \neq 0$, то ρ_1 и ρ_2 при малых ε представимы в виде рядов по положительным степеням величины $\eta = \varepsilon^{1/2}$; если же $\psi_1(1) = 0$, а $\psi_2(1) \neq 0$, то — по положительным степеням[1] ε.

В силу формул (33.6) при $p(t) \leqslant 0$ имеем $(-1)^k \psi_k(1) > 0$. Но тогда выполнено неравенство (33.10) и для уравнения (33.1) ρ_1, ρ_2 будут вещественными различными, а $\rho_1 \rho_2 = 1$.

Мы получили известный результат Ляпунова.

При условии (33.10) уравнение (33.4) имеет два линейно независимых решения

$$x_1 = \exp(-\alpha t) \cdot \varphi_1(t), \quad x_2 = \exp(\alpha t) \cdot \varphi_2(t), \tag{33.16}$$

где $\alpha = \ln \rho_2 > 0$ и $\varphi_k(t+1) = \varphi_k(t)$, $k = 1, 2$.

Множество решений $x(t)$ уравнения (33.4), обладающих свойством $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$, дается, очевидно, формулой

$$x = c \exp(-\alpha t) \cdot \varphi_1(t), \tag{33.17}$$

где c — произвольная постоянная. Найдем множество начальных значений $x(0)$, $x'(0)$ этих решений. Эти начальные значения, очевидно, связаны соотношением

$$x'(0) = \left[-\alpha + \frac{\varphi_1'(0)}{\varphi_1(0)} \right] x(0). \tag{33.18}$$

Не уменьшая общности, можно считать $\varphi_1(0) = 1$, поэтому формула (33.18) иначе перепишется так:

$$x'(0) = [-\alpha + \varphi_1'(0)]\, x(0), \quad \varphi_1(0) = 1. \tag{33.19}$$

Учитывая (33.16), мы можем интегральную матрицу X системы (33.3) записать так:

$$X = \exp([-\alpha, \alpha]\, t) \cdot Z(t), \tag{33.20}$$

где матрица $Z(t) = Z(t+1)$,

$$Z(0) = \begin{Vmatrix} 1 & z_{12}^0 \\ z_{21}^0 & 1 \end{Vmatrix}, \tag{33.21}$$

---

[1] И ряд будет иметь вид $\rho = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \tau^k$, где, таким образом, $\tau = \varepsilon$ или $\tau = \varepsilon^{1/2}$.

а постоянные числа z_{12}^0, z_{21}^0 подлежат определению; $[-\alpha, \alpha]$ — диагональная матрица. В матричном виде система (33.3) запишется так:

$$\frac{dX}{dt} = X \begin{Vmatrix} 0 & \varepsilon p \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{33.22}$$

Чтобы знать начальные значения $x(0)$, $x'(0)$ ограниченных решений, надо, как видно из (33.19), найти $\varphi_1'(0)$.

Матрицу (33.21) или матрицу (33.20) можно найти так: Находим интегральную матрицу X уравнения (33.22) при условии $X(0) = \mathrm{I}$ в виде (8.8) или (10.3):

$$X = \exp At \cdot Z_1(t), \quad Z_1(0) = \mathrm{I}. \tag{33.23}$$

Здесь A и Z_1 представлены рядами (10.11) и (10.13) или формулами (8.6) и (8.7) (надо только 2π заменить единицей).

Найдем теперь каноническое представление матрицы A:

$$A = S[-\alpha, \alpha] S^{-1}.$$

Тогда (33.23) перепишется в виде

$$X = S \exp([-\alpha, \alpha] t) \cdot S^{-1} Z_1(t). \tag{33.24}$$

Матрица

$$X = \exp([-\alpha, \alpha] t) \cdot Z(t), \quad Z(t) = S^{-1} Z_1(t) \tag{33.25}$$

и будет интегральной матрицей (33.20), а матрица (33.21) найдется в виде

$$Z(0) = \begin{Vmatrix} 1 & z_{12}^0 \\ z_{21}^0 & 1 \end{Vmatrix} = S^{-1}. \tag{33.26}$$

Если мы пользуемся формулами (8.6), (8.7), то в (33.23)

$$A = \ln X(1), \tag{33.27}$$

$$Z_1(t) = \exp\{[-\ln X(1)]\, t\} \cdot X(t), \tag{33.28}$$

а $X(1)$ дается рядом (6.14) при $t = 1$:

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(t)\, \varepsilon^k, \tag{33.29}$$

$$X_k(t) = \int_0^t X_{k-1}(t) P_1(t) X_0^{-1}(t)\, dt\, X_0(t), \tag{33.30}$$

$$P_1(t) = \begin{Vmatrix} 0 & p \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad X_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{Vmatrix}, \quad X_0^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{Vmatrix}, \tag{33.31}$$

$$X_k(t) = \int_0^t X_{k-1}(t) \begin{Vmatrix} -tp & p \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} dt \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{Vmatrix}. \tag{33.32}$$

Ряд (33.29) сходится при всех конечных значениях ε, а общее представление матрицы (33.27) можно получить по формуле (28.18), где надо положить

$$\sigma(V) = \sigma(X(1)) = f(1) + \varphi'(1) = \psi(1)$$

и 2π заменить единицей, т. е.

$$A = \frac{\ln\left(\frac{\psi(1)}{2} + \sqrt{\frac{\psi^2(1)}{4} - 1}\right)}{\sqrt{\frac{\psi^2(1)}{4} - 1}} \left[X(1) - \frac{\psi(1)}{2}\right]. \tag{33.33}$$

Очевидно, $\varphi_1(t)$ в (33.16) равно элементу z_{11} матрицы Z в (33.20) или (33.25).

Заметим еще, что $\varphi_1(t)$ мы могли бы искать и так. Подставляя $x(t) = \exp(-\alpha t)\cdot\varphi_1(t)$, данное (33.16), где

$$\alpha = \ln\rho_2 = \frac{\ln\left[\psi(1) + \sqrt{\psi^2(1) - 4}\right]}{2}, \tag{33.34}$$

в (33.4), получим после сокращения на $\exp(-\alpha t)$ для определения $\varphi_1(t)$ (пусть $\varphi_1(t) = \varphi(t)$) уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - 2\alpha\frac{d\varphi}{dt} + (\alpha^2 - \varepsilon p)\varphi = 0. \tag{33.35}$$

Мы отметили выше (после формулы (33.15)) те условия, при которых ρ_2 (а тем самым и α) представимо в виде ряда по положительным степеням ε или $\varepsilon^{1/2}$.

Предположим, имеется тот случай, когда

$$\rho_2 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^{(2)} \tau_k, \quad \tau = \varepsilon^{1/2}.$$

Тогда, подставляя в (33.35) ряды

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \tau^k, \quad \varphi = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \tau^k, \quad \tau^2 = \varepsilon \tag{33.36}$$

и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях τ, получим уравнения, из которых найдем все φ_k и α_k, подчиняя φ_k условию периодичности: $\varphi_k(t) = \varphi_k(t+1)$. Тем самым мы восстановим значения α_k, которые легко находятся и непосредственно из (33.34).

Формула (33.34) осуществляет аналитическое продолжение ряда (33.36) для α на все значения ε, так что при $\varepsilon = -1$ мы получим α для уравнения (33.1).

Аналитическое продолжение ряда (33.36) для φ осуществляется значением z_{11} в (33.25), где матрица $Z_1(t)$ дается формулой (33.28), в которой $X(1)$ дается рядом (33.29), сходящимся при всех конечных значениях ε. Добавим к этому, что в (33.28)

$$\exp[-\ln X(1)\cdot t] = \frac{\rho_2 \exp(-\ln\rho_1\cdot t) - \rho_1 \exp(-\ln\rho_2\cdot t)}{\rho_2-\rho_1} + \\ + \frac{\exp(-\ln\rho_2\cdot t) - \exp(-\ln\rho_1\cdot t)}{\rho_2-\rho_1} X(1),$$

где ρ_1 и ρ_2 даны формулами (33.11) и $\rho_1\rho_2 = 1$. Мы получили теорему.

Теорема 33.1. *В случае (33.10) множество начальных значений $x(0)$, $x'(0)$ решений $x(t)$ уравнения (33.4) (или уравнения (33.1)), обладающих свойством $x(t)\to 0$ при $t\to\infty$, определяется равенством (33.19), где α дается формулой (33.34), а $\varphi_1(t)$ есть элемент z_{11} матрицы Z в формуле (33.25).*

Мы отметили, как α и φ можно определить из уравнения (33.35) при малых значениях ε. Именно при каких малых ε видно из формулы (33.34), так как если ряд для α сходится, то, как видно из (33.25), будет сходиться и ряд для $Z(t)$.

§ 34. УРАВНЕНИЕ (33.1). СЛУЧАЙ, КОГДА УРАВНЕНИЕ (33.9) ИМЕЕТ КОРНИ $|\rho_1| = |\rho_2| = 1$. НАХОЖДЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Мы рассмотрели тот случай, когда корни уравнения (33.9) ρ_1, ρ_2 различные вещественные. Теперь мы, предполагая $p \geqslant 0$, найдем условия, при которых ρ_1, ρ_2 будут комплексными или равными единице; в этом случае $|\rho_1| = |\rho_2| = 1$ и все решения уравнения (33.4) или системы (33.3) будут ограниченными колеблющимися (если мы не имеем того случая, когда $\rho_1 = \rho_2 = 1$ и этому корню отвечает непростой элементарный делитель матрицы (33.8)).

Мы будем предполагать $\varepsilon = -1$, т. е. будем изучать уравнение (33.1).

А. М. Ляпунов нашел бесконечное число неравенств [57], выполнение одного из которых гарантирует ограниченность всех решений уравнения (33.1). Эти условия исчерпывают все случаи ограниченности решений уравнения (33.1), за исключением некоторых периодических решений (см. следствие из теоремы 34.2). Сначала Ляпунов указал [26], что при

$$\int_0^1 p\,dt \leqslant 4 \left(\text{или } \omega\int_0^\omega p(t)\,dt \leqslant 4, \text{ если } p(t+\omega) = p(t) \right) \quad (34.1)$$

будет

$$|\rho_1| = |\rho_2| = 1, \quad (34.2)$$

а затем [57] нашел все остальные условия, когда имеем (34.2)

Мы изложим этот вопрос, используя работу[1] [58] (которая опирается на результаты и идеи исследования Ляпунова [26]), а также еще и работу Ляпунова [57].

Так как $p \geqslant 0$, то, как видно из (33.6), имеем $f_k(t)$, $\varphi_k'(t) > 0$, а потому и (см. (33.13)) $\psi_k(t) > 0$ при $t > 0$.

Полагая в (33.12) $\varepsilon = -1$, получим

$$\begin{aligned} 2\rho_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \psi_k(1) - \left[\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \psi_k(1) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \psi_k(1) + 4 \right) \right]^{1/2}, \\ 2\rho_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \psi_k(1) + \left[\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \psi_k(1) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \psi_k(1) + 4 \right) \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (34.3)$$

Мы видим, что если

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \psi_k(1) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \psi_k(1) + 4 \right) > 0, \quad (34.4)$$

---

[1] Эта работа выполнена в октябре 1942 г. в условиях полного отрыва от математической литературы (имелась в наличии только книга [26]) по рекомендации академика В. И. Смирнова в осуществление обобщения условия (34.1). О [57] и других работах в этом направлении автор не знал. В эти же дни (октябрь — ноябрь 1942 г.) была выполнена работа [14]. Последняя, в которую входила и работа [58], защищалась автором как докторская диссертация в июле 1943 г. в Казанском университете.

то ρ_1, ρ_2 — вещественные различные (и $\rho_1\rho_2 = 1$), а если

$$J < 0, \tag{34.5}$$

то ρ_1, ρ_2 — комплексные (и $|\rho_1| = |\rho_2| = 1$).

Предположим, что

$$\psi_k(1) - \psi_{k+1}(1) \geqslant 0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{34.6}$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \psi_k(1) < 0, \tag{34.7}$$

так как этот ряд знакопеременный и первое слагаемое меньше нуля. Если еще

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \psi_k(1) + 4 > 0, \tag{34.8}$$

то имеем (34.5), т. е. $|\rho_1| = |\rho_2| = 1$, и все решения уравнения (33.1) будут ограниченными колеблющимися. При

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \psi_k(1) + 4 < 0 \tag{34.9}$$

будет (34.4) и не все решения уравнения (33.1) будут ограниченными.

Неравенство (34.8) будет выполнено, если

$$-\psi_1(1) + 4 > 0 \text{ или } \int_0^1 dt \int_0^t p\,dt + \int_0^1 tp\,dt \leqslant 4, \tag{34.10}$$

так как сумма отброшенных слагаемых в (34.8) в силу (34.6) только усиливает неравенство (34.10).

Отметим теперь, что неравенство (34.10) равносильно неравенству Ляпунова (34.1). Интегрируя по частям, получим

$$\int_0^1 tp\,dt = \int_0^1 p\,dt - \int_0^1 dt \int_0^t p\,dt,$$

после чего ясно, что неравенство (34.10) и есть неравенство (34.1). Ляпунов доказал, что для всех t и $p \geqslant 0$ имеет место неравенство [26, гл. III, № 48, ф. (15)]

$$t\,\psi_{n-1}(t) \int_0^t p\,dt - 2n\,\psi_n(t) > 0, \tag{34.11}$$

которое при $t=1$ дает

$$\psi_{n-1}(1)\int\limits_0^1 p dt - 2n\,\psi_n(1) > 0. \qquad (34.12)$$

Отсюда при $n \geqslant 2$ имеем (34.6)

$$\psi_{n-1}(1) - \psi_n(1) > 0, \qquad (34.6_1)$$

если выполнено (34.1).

Таким образом, (34.1) порождает (34.6), (34.7) и (34.8), поэтому все решения уравнения (33.1) будем иметь ограниченными.

Но неравенства (34.6) могут выполняться, когда нет (34.1). Если при этом еще

$$-\psi_1(1) + \psi_2(1) + 4 \leqslant 0, \qquad (34.13)$$

то имеем и (34.9). Следовательно, при условиях (34.6) и (34.13) не все решения уравнения (33.1) ограничены.

Если (34.13) не выполнено, но имеется

$$-\psi_1(1) + \psi_2(1) - \psi_3(1) + 4 \geqslant 0, \qquad (34.14)$$

то имеем (34.8) и все решения уравнения (33.1) будут ограничены.

Вообще, как видно из (33.12), имеем лемму.

Лемма 34.1. *Предположим*

$$\psi_k(1) - \psi_{k+1}(1) \geqslant 0, \ k \geqslant 2m+1. \qquad (34.15)$$

Тогда при

$$\sum_{k=1}^{2m}(-1)^k\psi_k(1) \leqslant 0, \quad \sum_{k=1}^{2m+1}(-1)^k\psi_k(1) + 4 \geqslant 0 \qquad (34.16)$$

имеем $|\rho_1| = |\rho_2| = 1$, *т. е. все решения уравнения (33.1) ограничены, и при*

$$4 + \sum_{k=1}^{2m}(-1)^k\psi_k(1) \leqslant 0, \qquad (34.17)$$

а также при

$$\sum_{k=1}^{2m+1}(-1)^k\psi_k(1) \geqslant 0 \qquad (34.18)$$

не все решения уравнения (33.1) ограничены.

Мы пока исключаем тот случай, когда или

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\psi_k(1) = 0 \quad (\text{т. е. } \rho_1 = \rho_2 = 1)$$

или

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\psi_k(1)+4=0 \text{ (т. е. } \rho_1=\rho_2=-1).$$

Действительно, если имеем (34.16), то в силу (34.15)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\psi_k(1)<0,\quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\psi_k(1)+4>0, \tag{34.19}$$

откуда (на основании (34.3)) и следует, что $|\rho_1|=|\rho_2|=1$.

Если имеем (34.17), то в силу (34.15)

$$4+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\psi_k(1)<0 \tag{34.20}$$

и тем более

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\psi_k(1)<0.$$

Тогда очевидно ρ_1, ρ_2 будут вещественными.

Если имеем (34.18), то тем более будет

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\psi_k(1)>0,\quad 4+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\psi_k(1)>0$$

и, следовательно, ρ_1, ρ_2 будут вещественными.

Замечание 34.1. При помощи сложных рассуждений Ляпунов доказал [57], что

$$\frac{\psi_{n+1}(1)}{\psi_n(1)}<\frac{\psi_n(1)}{\psi_{n-1}(1)} \quad\text{или}\quad \frac{\psi_{n-1}(1)}{\psi_n(1)}<\frac{\psi_n(1)}{\psi_{n+1}(1)}, \tag{34.21}$$

откуда следует, что если

$$\psi_{2m+1}(1)-\psi_{2m+2}(1)>0, \tag{34.22}$$

то

$$\psi_k(1)-\psi_{k+1}(1)>0,\quad k\geqslant 2m+1. \tag{34.23}$$

Таким образом, *неравенства (34.15) выполнены, если имеем (34.22).*

Лемма 34.2 (Ляпунова). *Предположим, что одно из неравенств (34.16) или (34.17), (34.18) выполнено. Тогда*

$$\psi_{2m+1}(1)-\psi_{2m+2}(1)\geqslant 0. \tag{34.24}$$

Действительно, если нет (34.24), то

$$\psi_{2m+1}(1) < \psi_{2m+2}(1) \, . \tag{34.25}$$

Но тогда в силу (34.21) имеем

$$\psi_1(1) < \psi_2(1) < \ldots < \psi_{2m+1}(1) < \psi_{2m+2}(1). \tag{34.26}$$

Это противоречит неравенствам (34.17), (34.18) и первому из неравенств (34.16).

Покажем, что (34.26) противоречит и второму из неравенств (34.16).

Из второго неравенства (34.16) на основании (34.26) получаем

$$-\psi_1(1) + 4 > 0, \tag{34.26$_1$}$$

так как

$$\sum_{k=2}^{2m+1} (-1)^k \psi_k(1) < 0.$$

Но мы показали, что (34.26) влечет за собой (34.24) [из (34.10) следует (34.6) после (34.12)], а это и означает, что нет (34.25).

Лемма 34.2 доказана.

Мы доказали теорему Ляпунова.

Теорема 34.1. *Если имеем (34.16), то все решения уравнения (33.1) ограничены. Если же имеем или (34.17), или (34.18), то не все решения уравнения (33.1) ограничены.*

Действительно, любое из неравенств (34.16), (34.17), (34.18) порождает (34.24), а следовательно, на основании замечания 34.1 и (34.15), откуда следует теорема 34.1.

Мы доказали, что выполнение одного из неравенств (34.16) или (34.17), (34.18) влечет за собой выполнение неравенств (34.15). Но неравенства (34.15) могут выполняться, когда ни одно из условий (34.16), (34.17), (34.18) не выполнено.

Укажем некоторые достаточные условия, при которых имеем (34.15).

Замечание 34.2. При

$$\int_0^1 p\,dt \leqslant 2(2m+2) \tag{34.27}$$

неравенства (34.15) выполнены. Это следует из (34.12) при $n \geqslant 2m+2$.

Замечание 34.3. Пользуясь сложными рассуждениями, Ляпунов вместо (34.15) доказал и такое неравенство [57, ф. (26)]:

$$\psi_n(1) < \int_0^1 p\,dt\,\frac{\psi_{n-1}(1)}{2n^2}, \tag{34.28}$$

из которого следует, что при

$$\int_0^1 p\,dt \leqslant 2\,(2m+2)^2 \tag{34.29}$$

неравенства (34.15) также выполнены.

Замечание 34.4. При [58]

$$f_{n-1}(t) - f_n(t) \geqslant 0, \quad \varphi'_{n-1}(t) - \varphi'_n(t) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{34.30}$$

имеем

$$\psi_k(1) - \psi_{k+1}(1) \geqslant 0 \quad \text{при } k \geqslant n-1. \tag{34.31}$$

Действительно, из (34.30) на основании (33.6) получаем, что

$$f_k(t) - f_{k-1}(t) \geqslant 0, \quad \varphi'_k(t) - \varphi'_{k+1}(t) \geqslant 0, \quad k \geqslant n-1,$$

откуда

$$\psi_k(t) - \psi_{k+1}(t) = \int_0^t \int_0^t p\,(f_{k-1} - f_k)\,dt\,dt + \int_0^t p\,(\varphi_{k-1} - \varphi_k)\,dt \geqslant 0$$

для $k \geqslant n+1$.

Замечание 34.4 содержится в замечании 34.1, но доказывается намного проще.

Теорема 34.2. *Пусть выполнены неравенства*

$$\psi_{m-1}(1) - \psi_m(1) \geqslant 0, \ m \geqslant n \tag{34.32}$$

и при всяком m имеем или

$$\sum_{k=1}^{2m} (-1)^k \psi_k(1) > 0, \quad \sum_{k=1}^{2m+1} (-1)^k \psi_k(1) < 0 \tag{34.33}$$

или

$$4 + \sum_{k=1}^{2m} (-1)^k \psi_k(1) > 0, \quad \sum_{k=1}^{2m+1} (-1)^k \psi_k(1) + 4 < 0, \tag{34.34}$$

тогда в случае (34.33)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \psi_k(1) = 0, \quad \rho_1 = \rho_2 = 1 \tag{34.35}$$

и в случае (34.34)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \psi_k(1)+4=0, \quad \rho_1=\rho_2=-1. \tag{34.36}$$

Заметим, что здесь величины, стоящие в первых неравенствах (34.33), (34.34), при увеличении m убывают (в силу (34.32)), а во вторых — возрастают.

Следствие из теоремы 34.2. Если имеем (34.35) и

$$\varphi(1)=f'(1)=0, \tag{34.37}$$

то в силу (33.8) общее решение уравнения (33.1) будет периодическим с периодом $\omega=1$. Если имеем (34.35), но нет (34.37), то имеем однопараметрическое периодическое решение, а общее решение не будет периодическим (и ограниченным). Если имеем (34.36) и (34.37), то общее решение уравнения (33.1) будет периодическим с периодом $\omega=2$. Если же

$$\varphi^2(1)+f'^2(1)\neq 0, \tag{34.38}$$

то имеем однопараметрическое решение с периодом $\omega=2$, а общее решение периодическим не будет.

Пусть имеем (34.35) и

$$\varphi(1)\neq 0. \tag{34.39}$$

Тогда мы имеем однопараметрическое периодическое с периодом $\omega=1$ решение уравнения (33.1)

$$x=cx_1(t), \tag{34.40}$$

где c — произвольная постоянная, а $x_1(t)$ — периодическое решение с периодом $\omega=1$ уравнения (33.1).

Найдем начальные значения $x_1(t)$ и все множество начальных значений периодических решений (34.40).

Общее решение уравнения (33.1) имеем в виде

$$x(t)=c_1 f(t)+c_2\varphi(t). \tag{34.41}$$

Пусть

$$x(t+1)=x(t). \tag{34.42}$$

Тогда

$$x(0)=c_1=c_1 f(1)+c_2\varphi(1),$$

$$x'(0)=c_2=c_1 f'(1)+c_2\varphi'(1).$$

Отсюда имеем

$$\left.\begin{aligned} c_1[f(1)-1]+c_2\varphi(1)=0\\ c_1 f'(1)+c_2[\varphi'(1)-1]=0\end{aligned}\right\}. \tag{34.43}$$

Определитель этой системы

$$\Delta = f(1)\varphi'(1) - \varphi'(1) - f(1) - \varphi(1)f'(1) + 1 = 0,$$

так как, согласно (33.8), (33.9) и (34.35),

$$f(1)\varphi'(1) - \varphi(1)f'(1) = 1 \quad \text{и} \quad f(1) + \varphi'(1) = 2.$$

Следовательно, c_1 и c_2 из (34.43) можно найти. На основании (34.39)

$$c_2 = c_1 \frac{1 - f(1)}{\varphi(1)}.$$

Поэтому (34.41) запишем в виде

$$x(t) = c_1 \left[f(t) + \frac{1 - f(1)}{\varphi(1)} \varphi(t) \right]. \tag{34.44}$$

Очевидно, решение

$$x_1(t) = f(t) + \frac{1 - f(1)}{\varphi(1)} \varphi(t) \tag{34.45}$$

имеет начальные условия

$$x_1(0) = 1, \quad x_1'(0) = \frac{1 - f(1)}{\varphi(1)}. \tag{34.46}$$

Следовательно, периодические решения $x(t)$ уравнения (33.1) в случае (34.35) имеют начальные значения

$$x(0) = c, \quad x'(0) = c \frac{1 - f(1)}{\varphi(1)}, \tag{34.47}$$

где c — произвольная постоянная. Другими словами, эти начальные значения определяются равенством

$$x'(0) = x(0) \frac{1 - f(1)}{\varphi(1)}. \tag{34.48}$$

Если имеем (34.35) и

$$f'(1) \neq 0, \tag{34.49}$$

то вместо (34.47) и (34.48) будем иметь

$$x'(0) = c, \quad x(0) = c \frac{1 - \varphi'(1)}{f'(1)}, \tag{34.50}$$

$$x(0) = x'(0) \frac{1 - \varphi'(1)}{f'(1)} \tag{34.51}$$

и вместо (34.44)

$$x(t)=c\left[\frac{1-\varphi'(t)}{f'(1)}f(t)+\varphi(t)\right]. \qquad (34.51_1)$$

Если окажется, что $f(1)=1$ или $\varphi'(1)=1$, то будем иметь соответственно $x_1(t)=f(t)$ или $x_1(t)=\varphi(t)$, а вместо (34.48) или (34.51) получим $x(0)=c$, $x'(0)=0$ или $x(0)=0$, $x'(0)=c$.

Замечание 34.5. Очевидно, условия существования периодического решения (34.35), (34.36), а также периодичности общего решения (34.37) не связаны с условием $p(t)\geqslant 0$. Если выполнены условия (34.35) и (34.37), то в силу (33.9) имеем и $\varphi'(1)=f(1)=1$, а при условиях (34.36) и (34.37) и $f(1)=\varphi'(1)=-1$.

§ 35. ОБЛАСТИ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ, ВХОДЯЩИХ В УРАВНЕНИЕ (33.1), В КОТОРЫХ ИМЕЮТСЯ ОГРАНИЧЕННЫЕ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Если в уравнении (33.1)

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)x=0 \qquad (35.1)$$

периодическая с периодом $\omega=1$ функция $p(t)\geqslant 0$ содержит параметр ε, то теорема 34.1 позволяет находить те области значений ε, в которых общее решение уравнения (35.1) будет ограниченным или, наоборот, неограниченным. Теорема же 34.2 позволяет находить те значения ε (из уравнений (34.35) и (34.36)), при которых имеется периодическое решение с периодом $\omega=1$ (из (34.35)) или $\omega=2$ (из (34.36)). В следствии из теоремы 34.2 указаны условия, при которых и общее решение будет периодическим.

Если ε удовлетворяет уравнениям (34.35) и

$$\varphi(1)=f'(1)=0,$$

то общее решение будет периодическим с периодом $\omega=1$. А если ε удовлетворяет уравнениям (34.36) и

$$\varphi(1)=f'(1)=0,$$

то общее решение будет периодическим с периодом $\omega=2$. Может случиться, что $p(t)$ содержит параметры ε и μ. Тогда из (34.35) и (34.36) найдем такие функции $\mu=\mu(\varepsilon)$, при которых уравнение (33.1) имеет периодическое решение. Если

$p(t)$ является целой функцией от ε и μ, то такой же будет и функция

$$\Phi(\varepsilon, \mu) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \psi_k(1).$$

А отсюда будет следовать [32, теор. 12, стр. 47], что функция $\mu = \mu(\varepsilon)$ может иметь только алгебраические особенности. В [32] показано, как можно находить и область сходимости ряда

$$\mu = \mu(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon^k.$$

Пусть теперь $p(t)$ содержит параметры ε, μ, λ и является, например, целой функцией от них. Тогда целыми функциями от этих параметров будут и функции (§ 6)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \psi_k(1), \quad \varphi(1) \quad \text{и} \quad f'(1).$$

Как можно найти такие значения параметров ε, μ и λ, при которых имеется периодическое решение уравнения (33.1)?

Совокупность таких значений мы найдем из (34.35) (тогда будет существовать периодическое решение с периодом $\omega = 1$) или (34.36) (будет существовать периодическое решение с периодом $\omega = 2$). Чтобы найти те значения ε, μ и λ, при которых общее решение уравнения (33.1) будет периодическим, мы сначала найдем из уравнений

$$\varphi(1) = 0, \quad f'(1) = 0 \qquad (34.37$$

функции $\mu = \mu(\varepsilon)$, $\lambda = \lambda(\varepsilon)$. Подставляя эти функции соответственно в уравнения (34.35) или (34.36), мы найдем уравнение, из которого, вообще говоря, найдем значения ε_1, ε_2, ... (а тем самым и μ_1, μ_2, ..., λ_1, λ_2, ...), при которых общее решение (33.1) будет периодическим.

Заметим еще, что, удовлетворяя уравнениям (34.37) и (34.35) или (34.36), мы (в силу (33.9)) фактически удовлетворяем уравнениям

$$\varphi(1) = f'(1) = 0, \quad f(1) = \varphi'(1) = 1$$

или

$$\varphi(1) = f'(1) = 0, \quad f(1) = \varphi'(1) = -1.$$

Пусть, например,

$$p(t) = \varepsilon p_1(t) + \mu p_2(t).$$

Тогда (34.35) будет иметь вид

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \psi_k(1) = -\psi_1(1) + \psi_2(1) - \ldots = 0,$$

где (см. (33.14))

$$\psi_1(1) = f_1(1) + \varphi_1'(1) = \int_0^1 dt \int_0^t p(t)\,dt + \int_0^1 tp\,dt =$$

$$= \int_0^1 p\,dt = \varepsilon \int_0^1 p_1(t)\,dt + \mu \int_0^1 p_2(t)\,dt,$$

а $\psi_k(1)$ $(k \geqslant 1)$ будут при малых ε и μ малыми порядка k (что видно из формул (33.6) и (33.13)).

На основании (34.35) видим, что если

$$\int_0^1 p_2(t)\,dt \neq 0,$$

то существует голоморфная в окрестности $\varepsilon = 0$ функция

$$\mu = \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2 + \ldots,$$

$$\alpha_1 = -\int_0^1 p_1(t)\,dt \Big/ \int_0^1 p_2(t)\,dt,$$

при которой уравнение (35.1) имеет периодическое с периодом $\omega = 1$ решение.

На основании результатов, полученных в § 6 работы [32], вообще легко выяснить и при всех других предположениях относительно $\int_0^1 p_1 dt$, $\int_0^1 p_2 dt$ существует ли функция $\mu = \mu(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, для которой уравнение (35.1) имеет периодическое решение.

Для существования периодического решения необходимо и достаточно существования вещественной функции $\eta = \eta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, определяемой уравнением

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \psi_k(1) = 0.$$

Так как здесь функция

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \psi^k(1)$$

целая относительно ε и η, то функция $\eta=\eta(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, если она есть, при аналитическом продолжении может иметь только алгебраические особенности. В работе [32, теорема 12] указано, как найти и радиус сходимости ряда

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \varepsilon^k.$$

Мы видим, однако, что уравнение (35.1) не имеет периодического решения с периодом $\omega=2$ при малых ε и η, так как при малых ε и η равенство (34.36) не выполнено.

Если предположить, что в (35.1)

$$p(t) = \varepsilon p_1(t) + \eta p_2(t) \geqslant 0$$

$$\int_0^1 p_1(t)\,dt > 0, \quad \int_0^1 p_2(t)\,dt > 0,$$

то вообще при малых ε и η периодического решения (35.1) не имеет, так как условие $p(t)\geqslant 0$ противоречит уравнению

$$\varepsilon \int_0^1 p_1(t)\,dt + \mu \int_0^1 p_2(t)\,dt + O_2(\varepsilon, \eta) = 0.$$

Впрочем, это следует и из более общего предположения. Именно, пусть (см. (34.22))

$$-\psi_1(1) + \psi_2(1) < 0, \tag{35.2}$$

тогда (замечание 34.1)

$$-\psi_{2n-1}(1) + \psi_{2n}(1) < 0, \quad n \geqslant 1 \tag{35.2$_1$}$$

и потому равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \psi_k(1) = 0 \tag{34.35}$$

невозможно. Но если $\psi_k(1)$ при малых ε, μ есть малые порядка k, то при достаточно малых ε и μ будет (35.2), откуда и следует, что периодическое решение с периодом $\omega = 1$ не существует. А равенство (34.36) также невозможно при малых ε, η.

Замечание 35.1. Мы видели, что если не выполнено условие

$$[f(1) + \varphi'(1)]^2 - 4 = 0,$$

то уравнение (33.1) не имеет периодического с периодом $\omega = 1$ или $\omega = 2$ решения. Но среди ограниченных не стремящихся к нулю решений, обнаруженных, например, при помощи теоремы (34.1), могут еще быть периодические с периодом $\omega = n$ или $\omega = 2n$, где n — целое положительное число. Эти периодические решения существуют в том и только в том случае, когда

$$[f(n) + \varphi'(n)]^2 - 4 = 0. \tag{35.3}$$

Если

$$f(n) + \varphi'(n) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \psi_k(n) = 2, \tag{35.4}$$

то имеется периодическое решение с периодом $\omega = n$. Если же

$$f(n) + \varphi'(n) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \psi_k(n) = -2, \tag{35.5}$$

то будет существовать периодическое решение с периодом $\omega = 2n$. Для того чтобы и общее решение было периодическим с периодом n или $2n$, необходимо и достаточно, чтобы, кроме (35.3), было выполнено еще и условие

$$f'(n) = \varphi(n) = 0. \tag{35.6}$$

Так же, как и в случае $n = 1$ или $n = 2$, легко найдется связь между параметрами, входящими в $p(t)$, при которой будет существовать периодическое решение с периодом $\omega = n$ (на основании (35.4)) или $\omega = 2n$ ((35.5)). Легко найдется и само это периодическое решение согласно (34.45):

$$x(t) = f(t) + \frac{1 - f(n)}{\varphi(n)} \varphi(t), \tag{35.7}$$

если $\varphi(n) \neq 0$. Или, согласно (34.50_1), по формуле

$$x(t) = \frac{1 - \varphi'(n)}{f'(n)} f(t) + \varphi(t), \tag{35.8}$$

если $\varphi(n) = 0$, но $f'(n) \neq 0$. Здесь в (35.7) и (35.8) надо положить $\mu = \mu(\varepsilon)$, найденное из (35.4). Или, другими словами, решение (35.7) будет периодическим в силу равенства (35.4). Начальными значениями периодического решения (35.7) будут

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = \frac{1 - f(n)}{\varphi(n)}. \tag{35.9}$$

Мы показали, что уравнение (35.1) может иметь периодические решения с периодами $\omega = 1, 2, \dots$ Можно задаться вопросом: а не может ли оно иметь периодические решения с периодом ω, отличным от целых чисел? Мы сейчас докажем

Замечание 35.2. Не уменьшая общности вопроса, можно считать, что уравнение (35.1) не имеет периодического решения с рациональным периодом $\omega = \frac{m}{n} < 1$, где m и n — целые числа, не имеющие общего множителя.

Лемма 35.1. *Уравнение (35.1), где $p(t)$ имеет только периоды n (целые числа), не может иметь периодическое решение с периодом $\omega \neq n$.*

Действительно, если $x(t)$ — периодическое решение с периодом ω, то $\ddot{x}(t+\omega) = \ddot{x}(t)$, а тогда из (35.1) имеем

$$[p(t+\omega) - p(t)]\, x(t) = 0,$$

откуда и следует лемма (35.1).

Если $p(t)$ имеет период $\omega_1 = 1$ и рациональный период $\omega_2 = \frac{m}{n} < 1$, где m и n — целые положительные числа, не имеющие общего множителя, то $p(t)$ имеет период $\omega_3 = \frac{1}{n}$. Это следует из того, что существуют целые числа k и l такие, что [61]: $kn + lm = 1$. Если $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n+1}$ — периоды, то и $\frac{1}{n(n+1)}$ — период. Если $p(t)$ имеет периоды $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots$, то $p(t)$ постоянное.

Отсюда и из предыдущего следует

Лемма 35.2. *Если $p(t)$ — периодическая функция с рациональными периодами, не равная постоянной, то существует наименьший период $\omega = \frac{1}{n}$, где n — целое > 0, такой, что все периоды будут получаться из формулы $\omega = \frac{k}{n}$, где k — целое.*

Можно считать наименьшим период $\omega = 1$. Тогда все периоды будут получаться из формулы $\omega = n$, где n — целые числа. Этим замечание 35.2 доказано.

В § 36 мы покажем, что уравнение (35.1) не имеет и периодических решений с иррациональным периодом.

Теперь мы исследуем вопрос о радиусе сходимости рядов, представляющих периодическое решение уравнения (35.1).

Пусть из (35.4) на основании теоремы 7 (или результатов, полученных относительно уравнения (6.40)) работы [32] (см. в этой книге § 47) имеем связь между μ и ε:

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \varepsilon^k, \quad \mu_k \text{ — веществ.}, \ |\varepsilon| \leqslant r, \tag{35.10}$$

при которой (35.1) имеет периодическое решение (но не все решения этого уравнения будут периодическими).

Радиус сходимости ряда (35.10) в [32] определяется.

Заметим еще, что всегда можно предполагать μ представленным в виде ряда (35.10) (по положительным степеням ε), так как иначе можно представить ε в виде

$$\varepsilon = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \eta^k.$$

Если после замены μ в $p(\varepsilon, \mu, t)$ на основании (35.10) имеем

$$p(\varepsilon, \mu, t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) \varepsilon^k, \tag{35.11}$$

то и решения уравнения (35.1) представимы в виде рядов по положительным степеням ε. Ряд (35.11) будет сходиться, вообще говоря, в той же области, где сходится и ряд (35.10), поэтому и ряды, представляющие решения уравнения (35.1), будут сходиться в области сходимости ряда (35.10), если начальные значения этих решений не зависят (теорема 6.1) от ε. Например, в этой области будут представлены такими рядами решения $f(t)$ и $\varphi(t)$, данные формулами (33.5). Но область сходимости ряда, представляющего периодическое решение (35.7), может определяться еще и рядом, представляющим $\dot{x}(0)$ согласно (35.9). Эта область сходимости ряда (представляющего решение (35.7)) определяется неравенством

$$|\varepsilon| < R, \tag{35.12}$$

где R — наименьший модуль корней $\varepsilon^* \neq 0$ уравнения

$$\varphi(n, \varepsilon) = 0. \tag{35.13}$$

Но если имеем (35.13), а $f'(n, \varepsilon^*) \neq 0$, то периодическое решение получим по формуле (35.8), и область сходимости ряда, представляющего периодическое решение, будет

$$|\varepsilon| < R_1, \tag{35.14}$$

где R_1 — наименьший модуль корней ε_* уравнения

$$f'(n, \varepsilon) = 0. \tag{35.15}$$

Если, однако, ε_* не является корнем уравнения (35.13), то радиус сходимости снова будет расширен. Если будет и

$$f'(n, \varepsilon_*) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi(n, \varepsilon_*) = 0, \tag{35.15$_1$}$$

то при $\varepsilon=\varepsilon_*$ мы будем иметь все решения уравнения (35.1) периодическими с периодом $\omega=n$, в том числе будут периодическими и решения $f(t)$, $\varphi(t)$, данные формулами (33.5), для которых ряды по положительным степеням ε сходятся в области сходимости ряда (35.10).

Мы получили следующий результат. Если уравнение (35.1) имеет однопараметрическое периодическое решение с периодом $\omega=n$, то основное периодическое решение (35.7) или (35.8) имеет представление в виде ряда по положительным степеням ε, сходящегося в той же области, в какой сходится и ряд (35.11). Если же все решения уравнения (35.1) периодические, то и решения $f(t)$, $\varphi(t)$ будут периодическими и представимы в виде рядов, сходящихся в области сходимости ряда (35.11). Доказана

Теорема 35.1. *Периодические решения уравнения (35.1) представимы в виде рядов по положительным степеням* ε, *сходящихся в той же области, в какой сходится ряд (35.11).*

Совокупность равенств (35.7) и (35.4) доставляет общее представление (при всех допустимых при задании $p(t, \varepsilon, \mu)$ значениях ε, μ) однопараметрического решения относительно ε и μ. Из (35.7) можно получить и разложение этого решения в ряд по положительным степеням ε.

Покажем, однако, как можно получить периодическое решение (35.7) в виде ряда по положительным степеням ε непосредственно, минуя представление (35.7).

Итак, предположим, что мы убедились в существовании решения (35.10) уравнения (35.4). Тем самым мы убедились, что периодическое с периодом $\omega = n$ решение уравнения (35.1) есть. Предположим теперь, что в силу (35.10)

$$p(\varepsilon, \mu, t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t, \mu_1, \ldots, \mu_k)\varepsilon^k. \tag{35.11$_1$}$$

Будем искать периодическое решение уравнения (35.1) с периодом $\omega = n$ в виде

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t)\,\varepsilon^k. \tag{35.16}$$

Начальные условия решения (35.7) (а тем самым и (35.16)) будут

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = \frac{1 - f(n)}{\varphi(n)}. \tag{35.17}$$

Подставляя (35.16) в (35.1), имеем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \ddot{x}_k(t)\,\varepsilon^k + \sum_{k=1}^{\infty} p_k(\mu_1, \ldots, \mu_m, t)\,\varepsilon^k \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t)\,\varepsilon^k = 0,$$

откуда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим:

$$\ddot{x}_0 = 0, \quad \ddot{x}_1 + p_1(t, \mu_1) = 0, \tag{35.18}$$

$$\ddot{x}_k + \sum_{\nu=0}^{k-1} p_{k-\nu}\,x_\nu = 0. \tag{35.19}$$

На основании (35.17) берем $x_0 = 1$. Из (35.18) находим

$$\dot{x}_1(t) = c_1 - \int_0^t p_1(t, \mu_1)\,dt, \tag{35.20}$$

где c_1 — произвольная постоянная. Так как эта функция периодическая с периодом $\omega = n$, то μ_1 следует выбрать из уравнения

$$\int_0^n p_1(t, \mu_1)\,dt = 0. \tag{35.21}$$

Постоянная c_1 есть, очевидно, коэффициент при первой степени ε в разложении $\dot{x}(0)$, заданной равенством (35.17):

$$\dot{x}(0) = \frac{1 - f(n)}{\varphi(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\,\varepsilon^k. \tag{35.22}$$

Из (35.20) находим

$$x_1(t) = \int_0^t \left(c_1 - \int_0^t p_1(t, \mu_1)\,dt \right) dt, \tag{35.23}$$

поэтому c_1 найдем в виде

$$c_1 = \frac{1}{n}\int_0^n\int_0^t p_1(t,\ \mu_1)\,dt\,dt. \tag{35.24}$$

Мы так же найдем и все остальные μ_k, c_k $(k = 2, 3, \ldots)$ из равенств

$$\int_0^n \sum_{\nu=0}^{k-1} p_{k-\nu}(t,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_{k-\nu})\,dt = 0 \ \ (k = 2,\ 3, \ldots) \tag{35.25}$$

и

$$c_k = \frac{1}{n}\int_0^n\int_0^t \sum_{\nu=0}^{k-1} p_{k-\nu}(t,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_{k-\nu})\,dt\,dt. \tag{35.26}$$

Мы доказали существование периодического решения (35.16) при условии существования решения (35.10) уравнения (35.4), поэтому μ_1, $\mu_2, \ldots$ из равенств (35.21), (35.25) найдем. Согласно теореме 35.1, ряд (35.16) сходится в той же области, по крайней мере, что и ряд (35.11).

Мы рассмотрим теперь систему n линейных дифференциальных уравнений [87]

$$\frac{dX}{dt} = XP(t,\ \mu,\ \varepsilon)\,, \tag{35.27}$$

где X — интегральная матрица n-го порядка, $P(t, \mu, \varepsilon,)$ — непрерывная и периодическая с периодом 2π относительно t матрица n-го порядка, представимая в виде ряда

$$P(t,\ \mu,\ \varepsilon) = \sum_{k=0,\ l=0}^{\infty} P_{kl}(t)\,\mu^k\varepsilon^l,\ \ P_{kl}(t+2\pi) = P_{kl}(t)\,, \tag{35.28}$$

сходящегося в области

$$|\mu| < R,\ |\varepsilon| < R,\ -\infty < t < \infty. \tag{35.29}$$

Мы возьмем интегральную матрицу

$$X(t,\ \mu,\ \varepsilon)|_{t=0} = \mathrm{I}, \tag{35.30}$$

которая представится в виде рядов

$$X(t,\mu,\varepsilon) = \mathrm{I} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k(t,\ \mu,\ \varepsilon),\ X_k(0,\ \mu,\ \varepsilon) = 0 \tag{35.31}$$

или

$$X(t,\ \mu,\ \varepsilon)=X_0(t)+\sum_{k,l=1}^{\infty}X_{kl}(t)\,\mu^k\varepsilon_\nu^l,\quad X_0(0)=\mathrm{I},\quad X_{kl}(0)=0,\tag{35.32}$$

сходящихся равномерно в области $|\mu|<R$, $|\varepsilon|<R$, $-a<$ $<t<a$, a — любое число.

Найдем такую функцию

$$\mu=\mu(\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k\varepsilon^k,\tag{35.33}$$

при которой система (35.27) имеет периодическое решение с периодом $\omega=2\pi n$. Эту функцию мы должны искать из уравнения

$$\Delta(\mu,\ \varepsilon)=(-1)^n D\,(X(2\pi n,\ \mu,\ \varepsilon)\,\mathrm{I}\,\lambda)=0,\ \lambda=1,\tag{35.34}$$

так как при выполнении этого равенства одно из характеристических чисел матрицы $X(2\pi n,\ \mu,\ \varepsilon)$ будет равно единице, что и обеспечивает существование периодического решения системы (35.27). Мы предположим, что уравнение (35.34) определяет функцию (35.33), где ряд (35.33) сходится в области[1]

$$|\varepsilon|<\delta.\tag{35.35}$$

Пусть при такой $\mu=\mu(\varepsilon)$ система (35.27) имеет ν-параметрическое семейство периодических решений. Подставляя (35.33) в (35.27), получим

$$\frac{dX}{dt}=XP(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(t)\,\varepsilon^k\tag{35.36}$$

и ряд этот, вообще говоря, сходится, по крайней мере, в области (35.35). Пусть

$$x_l(t)=x_l(t,\ \alpha_1,\ldots,\alpha_\nu,\ \varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{(l)}(t,\ \alpha_1,\ldots,\alpha_\nu)\,\varepsilon^k\tag{35.37}$$

$$(l=1,\ \ldots,\ n)$$

---

[1] Эта область найдется согласно § 8, 9 [32]. См. также § 47 этой книги. Если уравнение (35.34) определяет функцию

$$\mu=\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k\tau^k,\quad \tau=\varepsilon^{\frac{1}{p}},$$

где p — целое положительное число, то и вместо (35.36) получим ряд по степеням τ, а дальше рассуждения не изменятся.

есть ν-параметрическое семейство периодических решений, существование которых мы предположили. Мы считаем параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ не зависящими от ε. Тогда

$$x_l(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k x_{kl}(t, \varepsilon) \quad (l = 1, \ldots, n). \tag{35.38}$$

Здесь $c_1, \ldots c_n$ — постоянные и $x_{kl}(t, \varepsilon)$ — элементы интегральной матрицы $X(t, \varepsilon)$ $(X(0, \varepsilon) = \mathrm{I})$ системы (35.36), представимые в виде рядов

$$x_{kl}(t, \varepsilon) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p^{(kl)}(t)\, \varepsilon^p, \tag{35.39}$$

сходящихся в области (35.35).

Решения (35.37) мы найдем[1], подставляя (35.38) в уравнения

$$x_l(2\pi n) - x_l(0) = 0 \quad (l = 1, \ldots, n). \tag{35.40}$$

Так как мы, по предположению, имеем ν-параметрическое семейство периодических решений (35.37), то ранг m матрицы

$$\Delta(\varepsilon) = X(2\pi n, \varepsilon) - \mathrm{I}, \tag{35.41}$$

соответствующей матрице коэффициентов системы (35.40), будет равен ν, т. е. $m = \nu$.

Рассмотрим все миноры $\Delta_k(\varepsilon)$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$ ν-порядка матрицы (35.41). Пусть $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$ — наименьшие по модулю корни каждого из уравнений $\Delta_k(\varepsilon) = 0$ $(k = 1, \ldots, q)$. Радиус сходимости рядов, представляющих $x_l(t)$ $(l = 1, \ldots, n)$, не меньше $r = \max\{|\varepsilon_1|, \ldots, |\varepsilon_q|\}$, так как мы можем выбрать за основной (при решении системы (35.40)) любой из миноров $\Delta_k(\varepsilon)$. Пусть $r = |\varepsilon_q|$. Если, однако, ε_ν не является корнем одного из миноров $\Delta_1(\varepsilon), \ldots, \Delta_q(\varepsilon)$, то и $\varepsilon = \varepsilon_q$ не является особой точкой рядов, представляющих периодическое решение (35.38). Если же ε_q — нуль всех миноров $\Delta_k(\varepsilon)$ $(k = 1, \ldots, q)$, то ранг m определителя (35.34) будет меньше ν, что противоречит предположению. Следовательно, радиус сходимости ρ рядов, представляющих периодические решения (35.38), больше r. Доказана

Теорема 35.2. *Ряды (35.37), представляющие периоди-*

---

[1] То есть найдем такие $c_1, \ldots, c_n$ из уравнений (35.40), при которых (35.38) и будет периодическим решением. При этом $x_l(t)$ получим в виде отношения рядов по положительным степеням ε, сходящихся в области (35.35), и в знаменателе будет стоять минор ν-порядка матрицы (35.41).

ческое решение с периодом $\omega = 2\pi n$ системы (35.27), сходятся (по крайней мере) в области (35.35) сходимости ряда (35.36).

Можно рассматривать вопрос о существовании и методах нахождения периодических решений системы (35.27) с периодами, не равными $2\pi n$. По этому поводу можно сказать следующее.

Из леммы 35.2 следует, что преобразованием независимой переменной можно добиться того, что периоды матрицы P в системе (35.27) будут равны только $\omega = 2\pi n$, где n — целые числа. И далее, из результатов, которые будут получены в § 36, непосредственно следует, что: 1) если система (35.27) второго порядка, то она не может иметь периодических решений с периодом, отличным от периодов матрицы P (см. рассуждение после формулы (36.2), где теперь A может быть и периодической с периодом $2\pi n$ и $a = 2\pi b$); 2) если система (35.27) m-го порядка, то она может иметь периодические решения с периодом, отличным от периодов матрицы P, и даже с периодом, несоизмеримым с 2π. Критерии существования и методы нахождения таких решений даны в § 36 этой книги.

§ 36. О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ [94]

Мы нашли необходимые и достаточные условия существования периодических решений с периодом $\omega = n$ уравнения (35.1), а также методы их построения. Можно, однако, задаться вопросом: все ли периодические решения мы нашли? Известно [60], что нелинейная система может иметь периодическое решение с периодом, несоизмеримым с периодом правых частей (как функций t). Мы покажем сейчас, что это невозможно для линейной системы двух дифференциальных уравнений.

Теорема 36.1. *Пусть дана система двух дифференциальных уравнений*

$$\frac{dx}{dt} = xP(t), \quad P(t + \omega) = P(t) \neq \mathrm{const}, \tag{36.1}$$

где x—вектор второго порядка и $P(t)$—матрица второго порядка, элементы $p_{kl}(t)$ которой обладают свойством $p_{kl}(t_\nu) \longrightarrow p_{kl}(T)$ при $t_\nu \longrightarrow T$ некоторым образом. Здесь T—произвольное и в точках t_ν $p_{kl}(t)$ — непрерывная. Тогда система (36.1) не имеет периодического решения с периодом a, несоизмеримым с ω.

Замечание 36.1. Пусть функция $\varphi(t)$ такая, что для каждого T найдется последовательность $t_\nu \to T$, для которой $\varphi(t_\nu) \to \varphi(T)$ при $t_\nu \to T$ и в точках t_ν $\varphi(t)$—непрерывная. Тогда если $\varphi(t)$ имеет два несоизмеримых периода a и b, то $\varphi(t)$ постоянная[1].

Доказательство. Имеем $\varphi(t + an + bm) = \varphi(t)$, где m и n — целые числа. Пусть τ — произвольное число. Тогда [16] $na + bm \to \tau$, если $|m| \to \infty$ и $|n| \to \infty$ некоторым образом. Отсюда следует, что $\varphi(t + \tau) = \varphi(t)$, т. е. $\varphi(t)$ — постоянная. Пусть (36.1) есть одно уравнение с одной неизвестной функцией. Тогда

$$x = \exp \int_0^t P(t)\,dt$$

и x не может иметь периода a, отличного от ω. Предположим теперь, что (36.1) есть система двух уравнений. Тогда если решение $x = (x_1, x_2)$ имеет период a, несоизмеримый с ω, то, так как $x(t+a) = x(t)$ и $\dot{x}(t+a) = \dot{x}(t)$, из (36.1) получим

$$x(t)\,[P(t+a) - P(t)] = x(t)\,L(t, a) = 0. \tag{36.2}$$

Отсюда

$$\sum_{\nu=1}^{2} x_\nu(t)\, q_\nu^{(k)}(t) = 0 \qquad (k = 1, 2), \tag{36.3}$$

где

$$q_\nu^{(k)}(t) = p_{\nu k}(t + a) - p_{\nu k}(t),$$

т. е. $q_\nu^{(k)}(t)$ — периодические функции с периодом ω. Так как матрица $P(t)$ непостоянная, то, согласно замечанию 36.1, одна из величин $q_\nu^{(k)}(t) \not\equiv 0$. А тогда из (36.3) имеем, например, $x_2(t) = Ax_1(t)$, где A — постоянная, так как имеет два несоизмеримых периода (ω и a). Поэтому имеем

$$\dot{x}_1 = [p_{11}(t) + Ap_{21}(t)]\, x_1$$

и, следовательно, x_1 не может иметь период, отличный от ω. Теорема 36.1 доказана. Эта теорема не верна для системы n уравнений при $n > 2$.

Пример. Система

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -p_1(t)\,x_1 - [1 + p_1(t)]\,x_2 + p_1(t)\,x_3 \\ \dot{x}_2 &= [1 - p_2(t)]\,x_1 - p_2(t)\,x_2 + p_2(t)\,x_3 \\ \dot{x}_3 &= [1 - p_3(t)]\,x_1 - [1 + p_3(t)]\,x_2 + p_3(t)\,x_3 \end{aligned}\right\} \tag{36.4}$$

[1] Отсюда на основании замечания (35.2) уже следует, что уравнение (35.1) не имеет периодических решений с периодом, несоизмеримым с периодом функции $p(t)$.

имеет двухпараметрическое семейство периодических решений

$$x_1 = A\sin t + B\cos t,\ x_2 = -A\cos t + B\sin t,$$

$$x_3 = (B - A)\cos t + (B + A)\sin t,$$

где $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ — произвольные функции и A, B — произвольные постоянные. Отсюда видим, что, как и в общем случае нелинейных систем [60], линейная система может иметь периодические решения и в том случае, когда матрица коэффициентов $P(t)$ не будет периодической. Это справедливо и для системы двух линейных однородных уравнений. Периодические решения с периодом, несоизмеримым с периодом матрицы $P(t)$, или в том случае, когда матрица $P(t)$ непериодическая, мы найдем из уравнений (36.2) и системы (36.1). Отсюда же мы получим условия, при которых нет периодических решений с периодом, несоизмеримым с периодом матрицы $P(t)$. Именно, период a мы найдем из уравнения

$$D(L(t,\ a)) = 0, \tag{36.5}$$

где D — знак определителя. Если нет числа a, несоизмеримого с ω и удовлетворяющего этому уравнению, то нет и периодического решения $x(t)$ с периодом, несоизмеримым с ω. Пусть имеется корень уравнения (36.5), несоизмеримый с ω. Подставим это значение a в уравнение (36.2). Пусть система (36.1) есть система n уравнений. Тогда и (36.2) будет системой n линейных однородных алгебраических уравнений с неизвестными $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$.

Предположим, что ранг матрицы $L(t,\ a)$ равен $n - 1$. Тогда $x_k = a_k x_1$ $(k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n)$, где a_k — постоянные. Отсюда видим, что система (36.1) не может иметь периодического решения с периодом a, несоизмеримым с ω.

Пусть теперь ранг матрицы $L(t,\ a)$ равен $n - 2$. Тогда из уравнений (36.2) получим

$$x_k = a_k(t)\,x_1 + b_k(t)\,x_2 \quad (k = 3,\ 4,\ \ldots,\ n), \tag{36.6}$$

где $a_k(t)$ и $b_k(t)$ — функции периодические с периодом ω. Предположим, что среди коэффициентов a_k, b_k есть один непостоянный, например, $b_3(t)$. Тогда имеем

$$x_3(t + a) - x_3(t) = [a_3(t + a) - a_3(t)]\,x_1 + [b_3(t + a) -$$

$$- b_3(t)]\,x_2 = 0.$$

Согласно замечанию 36.1, $b_3(t + a) - b_3(t) \not\equiv 0$. Поэтому имеем $x_2 = Ax_1$, где A — постоянная. Следовательно, из (36.6) получим $x_k(t) = A_k x_1$ $(k = 2, \ldots, n)$. Мы снова получим $x = a(t) x_1$, где $a(t)$ — периодическая функция с периодом ω, поэтому x_1 (а следовательно, и $x(t)$) не может иметь период, несоизмеримый с ω.

Пусть теперь в равенствах (36.6) все коэффициенты a_k и b_k постоянные. Пользуясь этими равенствами, мы получим систему уравнений

$$\dot{x}_1 = a(t) x_1 + b(t) x_2, \quad \dot{x}_2 = c(t) x_1 + d(t) x_2, \tag{36.7}$$

где матрица коэффициентов $P(t)$ периодическая с периодом ω. Если эта матрица $P(t)$ непостоянная, то, согласно теореме 36.1, система (36.7) не имеет периодического решения (x_1, x_2) с периодом a, несоизмеримым с ω. Но эта матрица $P(t)$ может оказаться и постоянной.

Если $P(t)$ — матрица постоянная, то система (36.7) может иметь периодическое решение с периодом a, несоизмеримым с ω. Пусть из системы (36.7) найдено такое решение (x_1, x_2). На основании (36.6) мы получим $x_1, \ldots, x_n$ периодическими с периодом ω. Если полученные $(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяют системе (36.1), то мы и получим периодическое решение $x(t)$ системы (36.1) с периодом a, несоизмеримым с ω.

Так же рассматриваются и те случаи, когда ранг матрицы $L(t, a)$ равен $k \leqslant n-3$. Здесь мы прежде всего сначала получим систему $n-k$ линейных дифференциальных уравнений, матрица коэффициентов которой будет иметь период ω.

Пусть система (36.1) имеет вид

$$\dot{x}_k = \sum_{\nu=1}^{n} p_{\nu k}(t) x_\nu, \quad p_{\nu k}(t) = a_{\nu k} p_k(t) + b_{\nu k} \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{36.1$_1$}$$

где $a_{\nu k}$ и $b_{\nu k}$ — вещественные постоянные. Тогда уравнения (36.2) будут иметь вид

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu k} (p_k(t+a) - p_k(t)) x_\nu = 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Если a не есть период функций $p_k(t)$ (например, если $p_k(t)$ — функции периодические с периодом ω, несоизмеримым с a), то, согласно замечанию 36.1, будет

$$p_k(t+a) - p_k(t) \not\equiv 0$$

и эти уравнения примут вид

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{k\nu} x_\nu = 0. \tag{36.2$_1$}$$

Если определитель $D(\|a_{\nu k}\|) \neq 0$, то у системы (36.1$_1$) нет периодического решения с периодом a (и тогда, когда матрица коэффициентов системы (36.1$_1$) периодическая с периодом ω, несоизмеримым с a, и в том случае, когда эта матрица непериодическая и $p_k(t+a) - p_k(t) \not\equiv 0$).

Предположим теперь, что

$$D(\|a_{\nu k}\|) = 0 \tag{36.8}$$

и ранг матрицы $\|a_{\nu k}\|$ равен $n-m$. Тогда из (36.2$_1$) имеем:

$$x_\nu = \sum_{l=1}^{m} c_{\nu l} x_l, \qquad \begin{matrix} c_{\nu l} \text{ — постоянные,} \\ \nu = m+1, \ldots, n. \end{matrix} \tag{36.9}$$

Подставляя значения (36.9) в первые m уравнений (36.1$_1$), получим

$$\dot{x}_k = \sum_{\nu=1}^{m} [p_{\nu k}(t) + p_{m+1,k}(t) c_{m+1,\nu} + \ldots + p_{n,k}(t) c_{n,\nu}] x_\nu$$

или, учитывая значения $p_{\nu k}(t)$ в уравнениях (36.1$_1$),

$$\dot{x}_k = \sum_{\nu=1}^{m} [(a_{\nu k} + a_{m+1,k} c_{m+1,\nu} + \ldots + a_{n,k} c_{n,\nu}) p_k(t) +$$
$$+ b_{\nu k} + b_{m+1,k} c_{m+1,\nu} + \ldots + b_{n,k} c_{n,\nu}] x_\nu. \tag{36.10}$$

Может случиться, что здесь

$$a_{\nu k} + a_{m+1,k} c_{m+1,\nu} + \ldots + a_{n,k} c_{n,\nu} = 0, \tag{36.11}$$

где $k = 1, \ldots, m$, $\nu = 1, \ldots, m$. Тогда уравнения (36.10) принимают вид

$$\dot{x}_k = \sum_{\nu=1}^{m} (b_{\nu k} + b_{m+1,k} c_{m+1,\nu} + \ldots + b_{n,k} c_{n,\nu}) x_\nu. \tag{36.12}$$

Эта система с вещественными постоянными коэффициентами может иметь различные двухпараметрические[1] решения (сразу несколько) с периодом a, несоизмеримым с ω. Если мы нашли периодическое решение $(x_1, \ldots, x_m)$ этой системы, то из (36.9) получим и $x_{m+1}, \ldots, x_n$ периодическими. Если найденные $x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяют уравнениям (36.1$_1$), то (36.1$_1$) имеет периодическое решение с периодом a, несоизмеримым с ω. Предположим, что равенства (36.11) не выполнены. Тогда уравнения (36.10) имеют переменные коэффициенты.

Мы пришли, таким образом, к системе вида (36.1$_1$) с неизвестными $x_1, \ldots, x_m$, которую следует рассмотреть за-

[1] В § 42 будет показано, как просто найти необходимые и достаточные условия существования чисто мнимых корней характеристического полинома, которые обеспечивают существование периодических решений.

ново. В конце концов мы либо получим систему с постоянными коэффициентами, либо придем к одному уравнению с одной неизвестной функцией, либо к двум уравнениям с двумя неизвестными функциями, и вопрос будет решен.

Мы можем, таким образом, подчинить параметры системы (36.1_1) таким условиям, чтобы она имела периодическое решение с наперед заданным периодом a, независимым от периода функций $p_k(t)$.

§ 37. УРАВНЕНИЕ ВИДА (33.1) СО ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ $p(t)$

Таким образом, благодаря глубоким исследованиям А. М. Ляпунова вопросы существования ограниченных решений уравнения (33.1) полностью теоретически решаются.

Начиная с Н. Е. Жуковского [62], многие авторы находили достаточные признаки ограниченности общего решения уравнения (33.1) (как для знакопостоянных, так и для знакопеременных $p(t)$), пользуясь иными приемами. Примерами таких исследований являются работы [63 — 65]. Некоторые обзоры таких исследований имеются в статьях [66—68]. Мы не будем на этом останавливаться.

А. М. Ляпунов рассматривает и тот случай, когда $p(t)$—знакопеременная функция. Он указывает различные преобразования, которые переводят уравнение (33.1) со знакопеременной $p(t)$ в такое же уравнение со знакопостоянной $p(t)$ ([26], стр. 332). Покажем, как он это делает.

Итак, пусть дано уравнение (33.1)

$$\ddot{x} + p(t)x = 0, \quad p(t+\omega) = p(t). \tag{37.1}$$

Введем новую неизвестную функцию y:

$$x = wy \tag{37.2}$$

и новую независимую переменную τ:

$$\tau = \int_0^t \frac{dt}{w^2}. \tag{37.3}$$

Здесь w — вещественная периодическая с периодом ω функция, не обращающаяся в нуль и имеющая непрерывные производные

$$\dot{w} = \frac{dw}{dt}, \quad \ddot{w} = \frac{d^2w}{dt^2}.$$

Получим

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + q(\tau)\,y = 0, \tag{37.4}$$

где

$$q_1(\tau) = q(t) = w^3[\ddot{w} + p(t)\,w] \tag{37.5}$$

будет периодической с периодом

$$a = \int_0^{\omega} \frac{dt}{w^2} \tag{37.5$_1$}$$

функцией и может оказаться знакопостоянной.

Пусть $w > 0$. Если окажется, что

$$\ddot{w} + pw \leqslant 0, \tag{37.6}$$

то $q \leqslant 0$ и, следовательно[1], общее решение уравнения (37.4), а тем самым и (37.1) не будет ограниченным.

А. М. Ляпунов осуществляет случай (37.6) следующим образом.

Пусть k — такое вещественное число, что $\frac{k\omega}{2\pi}$ отлично от целого числа. Тогда периодическая с периодом ω функция

$$w(t) = 1 - \frac{1}{2k\sin\frac{k\omega}{2}} \int_0^{\omega} \cos k\left(s - \frac{\omega}{2}\right) p(s+t)\,ds \tag{37.7}$$

есть решение уравнения

$$\ddot{w} + k^2 w = k^2 - p(t). \tag{37.8}$$

Предположим, что k удовлетворяет условию

$$k^2 - p \geqslant 0, \quad w - 1 \geqslant 0. \tag{37.9}$$

Тогда в силу (37.8)

$$\ddot{w} + pw = -(w-1)(k^2 - p) \tag{37.10}$$

и потому условие (37.6) будет выполнено.

Может, конечно, случиться, что в силу (37.7)

$$q(t) \geqslant 0. \tag{37.11}$$

---

[1] См. рассуждения после формулы (33.15).

Тогда для решения вопроса нужно воспользоваться теоремой 34.1.

При помощи такого приема Ляпунов изучает дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda^2(1 - \varepsilon \sin^n t) x = 0, \qquad (37.12)$$

$\omega = 2\pi$, $\varepsilon > 0$, n — целое положительное, для которого формула (37.7) дает

$$w = 1 + \frac{\lambda^2}{k^2} - \frac{\lambda^2 \varepsilon}{2k \sin k\pi} \int_0^{2\pi} \cos k(\tau - \pi) \sin^n (\tau + t)\, d\tau. \qquad (37.13)$$

Условие (37.9) будет выполнено, если

$$k^2 + \lambda^2 - \lambda^2 \varepsilon > 0 \qquad (37.14)$$

и

$$J(t) = \frac{k\varepsilon}{2 \sin k\pi} \int_0^{2\pi} \cos k(\tau - \pi) \sin^n (\tau + t)\, dt \leqslant 1. \qquad (37.15)$$

Ляпунов замечает, что при четном n и $\varepsilon < 0$

$$p = -\lambda^2(1 - \varepsilon \sin^n t) < 0,$$

т. е. общее решение не ограничено, а при нечетном n знак ε не влияет на решение вопроса (так как левая часть неравенства (33.10) содержит только четные степени ε), поэтому можно предполагать $\varepsilon > 0$.

Ляпунов при помощи различных приемов рассматривает многие частные случаи уравнения (37.12).

Заметим, что интеграл в (37.15) вычисляется. Если мы найдем максимум $J(t) = M$ из условия $J'(t) = 0$, то при

$$M \leqslant 1 \qquad (37.16)$$

и будем иметь (37.15).

Обозначим

$$J_1(t) = \int_0^{2\pi} \cos k(\tau - \pi) \cdot \sin^n (\tau + t)\, d\tau. \qquad (37.17)$$

Легко видеть, что равенство

$$J_1'(t) = 0 \qquad (37.18)$$

приводит к равенству

$$\int_0^{2\pi} \sin k(\tau-\pi)\sin^n(\tau+t)\,d\tau = 0. \tag{37.19}$$

Таким образом, чтобы убедиться в выполнении условия (37.15), надо убедиться, что

$$J(t) = \frac{k\varepsilon}{2\sin k\pi} J_1(t) \leqslant 1 \tag{37.20}$$

в силу (37.19).

Рассмотрим подробнее случай $n = 2$. Из (37.17) имеем:

$$J_1(t) = \int_0^{2\pi} \cos k(\tau-\pi)\cdot\sin^2(\tau+t)\,d\tau =$$

$$= \sin k\pi\cdot\left\{\frac{1}{k} - \frac{k}{k^2-4}\cos 2t\right\},\ k^2 \neq 4. \tag{37.21}$$

Согласно (37.20), получаем

$$J(t) = \frac{k\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{k}{k^2-4}\cos 2t\right), \tag{37.22}$$

откуда

$$J'(t) = \frac{\varepsilon k^2}{k^2-4}\sin 2t = 0.$$

Поэтому два экстремальных значения $J(t)$ будут

$$J^{(1)} = \frac{2\varepsilon}{4-k^2},\quad J^{(2)} = \varepsilon\frac{2-k^2}{4-k^2}.$$

Таким образом, если имеем (37.14) и $J^{(1)} \leqslant 1$, $J^{(2)} \leqslant 1$, то выполнены и условия (37.9), т. е.

$$q(t) \leqslant 0. \tag{37.23}$$

Но при $k^2 < 4$ имеем $J^{(2)} < J^{(1)}$, а при $k^2 > 4$ будет $J^{(1)} < J^{(2)}$. Поэтому для выполнения условия (37.23) должно быть

$$\frac{2\varepsilon}{4-k^2} < 1,\ \lambda^2(\varepsilon-1) < k^2,\ \text{если } k^2 < 4 \tag{37.24}$$

и

$$\varepsilon\frac{2-k^2}{4-k^2} < 1,\ \lambda^2(\varepsilon-1) < k^2,\ \text{если } k^2 > 4. \tag{37.25}$$

Следовательно, если имеем (из (37.24))

$$\lambda^2(\varepsilon-1)<4,\ (2+\lambda^2)(\varepsilon-1)<2,$$

то общее решение уравнения (37.12) при $n=2$ не будет ограничено. Первое и третье из неравенств (37.25) невозможны.

Если

$$1<\varepsilon\frac{2-k^2}{4-k^2}\ \text{и}\ k^2<4,\ \text{то}\ 1<J^{(2)}<J^{(1)}.$$

Тогда $w-1<0$.

Легко указать[1] еще к этому и такие выполнимые неравенства для k, λ и ε, что будет $w>0$. Тогда мы будем иметь (37.11).

Ляпунов замечает, что, определяя по формуле (37.7) решение уравнения (37.8) и требуя $w-1\geqslant 0$, мы тем самым рассматриваем случай

$$\int_0^\omega p\,dt<0, \tag{37.26}$$

так как из (37.8) следует, что

$$\int_0^\omega p\,dt=-k^2\int_0^\omega (w-1)\,dt.$$

Поэтому для случая

$$\int_0^\omega p\,dt>0 \tag{37.27}$$

Ляпунов указывает другое w, получаемое из прежнего заменой k^2 на $-k^2$ и удовлетворяющее иногда неравенству

$$\ddot{w}+pw\geqslant 0, \tag{37.28}$$

что дает $q(t)\geqslant 0$.

Пусть k вещественное, отличное от нуля. Тогда уравнение

$$\ddot{w}-k^2w=-k^2-p, \tag{37.29}$$

---

[1] Подставляя значения t из уравнения $w'=0$ в w, получим:

$$w^{(1)}=1\mp\frac{\lambda^2}{k^2}\left[1\mp\frac{2\varepsilon}{k^2-4}\right],$$

$$w^{(2)}=1\pm\frac{\lambda^2}{k^2}\left[1-\frac{\varepsilon(k^2-2)}{k^2-4}\right].$$

Теперь должно быть $w^{(1)}>0$ и $w^{(2)}>0$, чтобы было $w>0$.

получающееся из (37.8) заменой k^2 на $-k^2$, имеет периодическое решение

$$w = 1 + \frac{1}{2k}\int_0^\omega \frac{e^{-k\tau} + e^{-k(\omega-\tau)}}{1 - e^{-k\omega}}\, p(\tau + t)\, d\tau. \qquad (37.30)$$

При этом из (37.29) имеем

$$\ddot{w} + pw = (k^2 + p)(w - 1), \qquad (37.31)$$

откуда при $k^2 + p \geqslant 0$, $w - 1 > 0$ получим (37.28) и, следовательно, будет $q(t) \geqslant 0$. Ляпунов замечает еще, что такое преобразование в случае $p(t) > 0$ при всяком k, отличном от нуля, приводит к случаю $q(t) \geqslant 0$.

Но может случиться, что для уравнения (37.4) при некотором k выполняется один из признаков ограниченности общего решения согласно теореме 34.1, в то время как для уравнения (37.1) ни один из них не выполняется[1].

Если же один из этих признаков выполнен для уравнения (37.1), то найдется такое k, при котором он будет выполнен и для (37.4), так как (37.1) получается из уравнения (37.4) предельным переходом при $k^2 \to \infty$.

Ляпунов рассматривает в качестве примера уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda^2(1 - \varepsilon \sin t)\, x = 0 \qquad (37.32)$$

и находит достаточные условия ограниченности общего решения при помощи такого преобразования. Он рассматривает и случай

$$\int_0^\omega p\,dt = 0, \qquad (37.33)$$

предполагая выполненным равенство

$$p(2\alpha - t) + p(t) = 0 \qquad (37.34)$$

и то, что $p(t)$ меняет знак только в точках вида $\alpha + n\dfrac{\omega}{2}$, где n — целое число, а α — некоторое постоянное. То, что

[1] Это согласуется с замечанием 35.1, в котором отмечено, что среди ограниченных решений уравнения (37.1) могут быть периодические с периодом $\geqslant 2\omega$. Если (37.1) имеет периодическое с периодом ω или 2ω решение, то, как мы видели, не выполнен ни один из признаков ограниченности общего решения. Но уравнение (37.4), полученное после преобразования (37.2), где w дано формулой (37.30), может и не иметь периодического решения с периодом ω или 2ω.

$p(t)$ в точках $\alpha + n\frac{\omega}{2}$ обязательно меняет знак, видно из (37.34). Действительно, подставляя в (37.34) $t = \alpha + n\frac{\omega}{2} + \beta$, получим

$$p\left(\alpha - n\frac{\omega}{2} - \beta\right) = -p\left(\alpha + n\frac{\omega}{2} + \beta\right) =$$

$$= -p\left(\alpha + n\omega - n\frac{\omega}{2} + \beta\right) = -p\left(\alpha - n\frac{\omega}{2} + \beta\right),$$

где β — как угодно малое число.

Из (37.34) вытекает и равенство (37.33). В силу (37.33) уравнение (получаемое из (37.29) при $k = 0$)

$$\ddot{w} = -p \tag{37.35}$$

допускает периодические решения, отличающиеся между собой на постоянные слагаемые.

Ляпунов за w берет такое периодическое решение, которое обращается в единицу при $t = \alpha$. Предполагая еще, что в промежутке $t = \alpha$, $t = \alpha + \frac{\omega}{2}$ будет[1] $p \geqslant 0$, он доказывает, что maximum w достигает в точке β, которая найдется из уравнения

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+\omega} tpdt + \omega\int\limits_{\alpha}^{\beta} pdt = 0. \tag{37.36}$$

Предполагая выполненным неравенство

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}(t-\alpha)pdt < 1, \tag{37.36$_1$}$$

Ляпунов показывает, что выбранная функция w не обращается в нуль и в уравнении (37.4) получится $q(t) \geqslant 0$. В качестве примера он изучает уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\sin t\cdot x = 0,\ \mu^2 < 1, \tag{37.37}$$

для которого легко находит

$$w = 1 + \mu\sin t,\ \omega = 2\pi,\ \alpha = 0$$

---

[1] Что очевидно не уменьшает общности.

и q (в уравнении (37.4)) в виде

$$q=\mu^2(1+\mu\sin t)^3\sin^2 t.$$

Период q в уравнении (37.4) найдется по формуле (37.5$_1$):

$$a=\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(1+\mu\sin t)^2}=\frac{2\pi}{(1-\mu^2)^{3/2}},$$

и достаточным условием ограниченности общего решения будет[1] $|\mu|\leqslant 0{,}39\ldots$ Далее Ляпунов замечает, что в случае $\int_0^\omega pdt\geqslant 0$ можно полагать

$$w=e^{-\int vdt},\quad x=ye^{-\int vdt},\quad t=\int_0^\tau e^{2\int vdt}\,dt,$$

где

$$v'=p-B,\ B=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega pdt,$$

после чего уравнение (37.1) перейдет в (37.4), в котором

$$q(\tau)=(B+v^2)\,e^{-4\int vdt}\geqslant 0 \text{ с периодом } \tau=T=\int_0^{2\pi}e^{2\int v\,dt}dt.$$

При помощи такого преобразования он находит достаточные признаки ограниченности общего решения уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}+(\lambda^2+\mu\sin t)\,x=0, \tag{37.38}$$

для которого можно взять $v'=\mu\sin t$, $v=-\mu\cos t$, после чего получим в (37.4)

$$q(\tau)=(\lambda^2+\mu^2\cos^2 t)\,e^{4\mu\sin t}>0 \text{ с периодом } T=\int_0^{2\pi}e^{-2\mu\sin t}\,dt.$$

Здесь признак (34.1) $\omega\int_0^T q(\tau)d\tau\leqslant 4$ дает

$$T\int_0^{2\pi}qe^{-2\mu\sin t}\,dt\leqslant 4, \tag{37.39}$$

---

[1] Получается на основе признака $\omega\int_0^\omega pdt\leqslant 4$ для уравнения (37.4). Но, как отмечает Ляпунов, по способу Жуковского получается $\mu<0{,}3$, если предполагать $\mu>0$.

где

$$T = \int\limits_0^{2\pi} e^{-2\mu \sin t}\, dt = 2\int\limits_0^{\pi/2} (e^{2\mu \sin t} + e^{-2\mu \sin t})\, dt.$$

Полагая

$$2\int\limits_0^{\pi/2} (e^{2\mu \sin t} + e^{-2\mu \sin t}) \cos^2 t dt = \tau_1,$$

будем иметь

$$\int\limits_0^{2\pi} q e^{-2\mu \sin t}\, dt = T\lambda^2 + \tau_1 \mu^2$$

и (37.39) перейдет в

$$T^2\lambda^2 + T\tau_1\mu^2 \leqslant 4.$$

Мы не будем подробнее излагать исследование этого уравнения Ляпуновым. В некоторых случаях он усиливает эти свои методы, выбирая другим способом w, но мы не будем на этом останавливаться, отсылая читателя к работе Ляпунова [26, стр. 333].

§ 38. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В. М. СТАРЖИНСКОГО [69]

Покажем еще, как предлагает изучать случай знакопеременной $p(t)$ В. М. Старжинский. Он произвольную систему двух линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = XP(t), \quad P(t+\omega) = P(t), \tag{38.1}$$

где $P(t)$ — матрица второго порядка, преобразует к уравнению (33.1) с $p(t) \geqslant 0$. Сначала он вводит новую неизвестную матрицу

$$Y = X \exp \frac{2k\pi}{\omega} Jt, \qquad J = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{38.2}$$

$$\frac{dY}{dt} = YQ, \tag{38.3}$$

$$Q = \frac{2k\pi}{\omega} J + \exp\left(-\frac{2k\pi}{\omega} Jt\right) P \exp\left(\frac{2k\pi}{\omega} Jt\right). \tag{38.4}$$

В развернутом виде система (38.3) запишется так $\left(Q = \begin{Vmatrix} q_{11} & q_{21} \\ q_{12} & q_{22} \end{Vmatrix}\right)$:

$$\frac{dy_1}{dt} = q_{11}y_1 + q_{12}y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = q_{21}y_1 + q_{22}y_2, \tag{38.5}$$

где

$$\left.\begin{aligned} q_{11} &= \cos^2\tau\cdot p_{11} - \sin\tau\cdot\cos\tau\cdot p_{21} - \sin\tau\cdot\cos\tau\cdot p_{12} + \\ &\quad + \sin^2\tau\, p_{22} \\ q_{12} &= -\frac{2k\pi}{\omega} + \cos^2\tau\cdot p_{21} + \sin\tau\cdot\cos\tau\cdot p_{11} - \\ &\quad - \cos\tau\cdot\sin\tau\cdot p_{22} - \sin^2\tau\cdot p_{12} \\ q_{21} &= \frac{2k\pi}{\omega} + \sin\tau\cdot\cos\tau\cdot p_{11} - \sin^2\tau\cdot p_{21} + \cos^2\tau\cdot p_{12} - \\ &\quad - \sin\tau\cdot\cos\tau\cdot p_{22} \\ q_{22} &= \sin\tau\cdot\cos\tau\cdot p_{21} + \sin^2\tau\cdot p_{11} + \cos^2\tau\cdot p_{22} + \\ &\quad + \sin\tau\cdot\cos\tau\cdot p_{12} \end{aligned}\right\}. \tag{38.6}$$

и

$$\tau = \frac{2k\pi}{\omega} t.$$

Элементы q_{12} и q_{21} при достаточно большом целом k периодические с периодом ω, по модулю как угодно велики при всех t и

$$q_{12} < 0, \quad q_{21} > 0. \tag{38.7}$$

Функции q_{11}, q_{22} периодические с периодом ω и равномерно ограничены относительно k. Неизвестное y_1 удовлетворяет уравнению

$$\ddot{y}_1 - (q_{11} + q_{22} + \dot{q}_{12}/q_{12})\,\dot{y}_1 + (q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21} - \dot{q}_{11} + \\ + q_{11}\cdot\dot{q}_{12}/q_{12})\,y_1 = 0. \tag{38.8}$$

Здесь обозначено $\frac{dz}{dt} = \dot{z}$.

Далее Старжинский заменой

$$y_1 = z\exp\left[\frac{1}{2}\int (q_{11} + q_{22} + \dot{q}_{12}/q_{12})\,dt\right] \tag{38.9}$$

переходит от (38.8) к уравнению

$$\ddot{z} + \left[-q_{12}q_{21} + q_{11}q_{22} - \dot{q}_{11} + q_{11}\dot{q}_{12}/q_{12} - \frac{1}{4}(q_{11} + q_{12} + \dot{q}_{12}/q_{12})^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(\dot{q}_{11} + \dot{q}_{22} + \ddot{q}_{12}/q_{12} - \dot{q}_{12}^2/q_{12}^2)\right] z = 0$$

или

$$\ddot{z}+q(t)z=0, \tag{38.10}$$

$$\begin{aligned}q(t) = {} & -q_{12}q_{21}+q_{11}q_{22}-\dot{q}_{11}+q_{11}\dot{q}_{12}/q_{12}- \\ & -\frac{1}{4}(q_{11}+q_{22}+\dot{q}_{12}/q_{12})^2+ \\ & +\frac{1}{2}(\dot{q}_{11}+\dot{q}_{22}+\ddot{q}_{12}/q_{12}-\dot{q}_{12}^2/q_{12}^2).\end{aligned} \tag{38.10$_1$}$$

Если первые и вторые производные элементов матрицы $P(t)$ ограничены, то коэффициент $q(t)$ периодический с периодом ω и положительный при всех t, т. е. уравнение (38.10) есть уравнение вида (33.1) с $p(t) \geqslant 0$. При достаточно большом k $q(t)$ будет по модулю как угодно велико. Именно, эта функция имеет вид

$$q(t)=\frac{4\pi^2k^2}{\omega^2}+kq_1(t,k)+q_0(t,k). \tag{38.11}$$

Здесь $q_1(t,k)$ и $q_0(t,k)$ — периодические функции с периодом ω,

$$|q_\nu(t,k)|<M, \quad \nu=0,1$$

и постоянная M не зависит от k.

Мы относительно этого сделаем несколько замечаний.

Замечание 38.1. Предположим, что по одному из признаков Ляпунова мы установили, что общее решение уравнения (38.10) ограничено. Тогда, как видно из (38.2), (38.9), система (38.1) имеет только одно характеристическое число, совпадающее с характеристическим числом функции

$$Q=\exp\left[-\frac{1}{2}\int(q_{11}+q_{22}+\dot{q}_{12}/q_{12})\,dt\right]. \tag{38.12}$$

Но так как подынтегральная функция здесь является периодической с периодом ω, то характеристическим числом системы (38.1) будет

$$v=-\frac{1}{2\omega}\int_0^\omega(q_{11}+q_{22}+\dot{q}_{12}/q_{12})\,dt. \tag{38.13}$$

Для ограниченности общего решения системы (38.1) необходимо и достаточно, чтобы $v=0$. Если общее решение уравнения (38.10) не ограничено, то вопрос об ограниченности системы (38.1) также решается характеристическим числом (38.12). Мы найдем х. ч. уравнения (38.10) v_1, v_2, затем получим х. ч. (38.8) v_1+v, v_2+v. Принимая во внимание, что х. ч. системы (38.1) не зависят от k, мы и получим их из чисел v_1+v, v_2+v.

Замечание 38.2. Преобразование Старжинского системы (38.1) переводит произвольную систему (38.1) с периодическими коэффициентами в каноническую систему с периодическими коэффициентами, так как уравнению (38.10) соответствует каноническая система[1]

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=-qx. \tag{38.14}$$

Замечание 38.3. Если в уравнении (38.10) возьмем большое k, то неравенства (34.16) или (34.17), (34.18), обеспечивающие решение вопроса на основе теоремы 34.1, будут содержать большое число слагаемых и тем самым будут трудно проверяемы. Поэтому число k в (38.6) следует брать наименьшим из тех, которые обеспечивают (в 38.6) неравенство $q(t)\geqslant 0$.

§ 39. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ В КАНОНИЧЕСКУЮ СИСТЕМУ

Пусть дана система двух линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dt}=YP \tag{39.1}$$

с периодической матрицей второго порядка $P(t+\omega)=P(t)$. Введем новую неизвестную матрицу

$$X=YZ, \tag{39.2}$$

где матрица преобразования Z, а также Z^{-1} непрерывны при $|t|<\infty$. Для определения матрицы X получим уравнение

$$\dot{X}=XQ,\quad Q=Z^{-1}(PZ+\dot{Z}), \tag{39.3}$$

$$\dot{Z}=ZQ-PZ. \tag{39.4}$$

Выберем матрицу Z так, чтобы система (39.3) была канонической, т. е. чтобы

---

[1] Общий вид канонической системы двух уравнений следующий:

$$\dot{x}=-bx-cy,\quad \dot{y}=ax+by$$

или в матричном виде

$$\dot{X}=X\begin{Vmatrix}-b & a\\ -c & b\end{Vmatrix}.$$

$$Q = \begin{Vmatrix} -b & a \\ -c & b \end{Vmatrix}, \tag{39.5}$$

где a, b и c — произвольные функции. Мы будем, кроме того, стремиться к тому, чтобы a, b и c были ограниченными периодическими с периодом ω. Обозначая элементы матрицы Z через z_{kl} и матрицы P через p_{kl}, мы запишем в развернутом виде уравнение (39.4) так:

$$\left.\begin{aligned} \dot z_{11} &= -z_{11}(b+p_{11}) - z_{12}c - z_{21}p_{12} \\ \dot z_{12} &= z_{12}(b-p_{11}) + z_{11}a - z_{22}p_{12} \\ \dot z_{21} &= -z_{21}(b+p_{22}) - z_{11}p_{21} - z_{22}c \\ \dot z_{22} &= z_{22}(b-p_{22}) - z_{12}p_{21} + z_{21}a \end{aligned}\right\}. \tag{39.6}$$

Этим уравнениям надо удовлетворить любым образом, лишь бы матрицы Z и Z^{-1} были непрерывными в области $|t| < \infty$, а функции a, b и c — ограниченными периодическими с периодом ω.

Покажем, что решение системы (39.6) определяется алгебраически заданием одного соотношения между z_{11}, z_{22}, z_{12} и z_{21}.

Пусть задано соотношение

$$z_{22} = \varphi(z_{11}, z_{12}, z_{21}, t). \tag{39.7}$$

Тогда из системы (39.6) имеем:

$$\dot z_{22} = (b - p_{22})\varphi(z_{11}, z_{12}, z_{21}, t) - p_{21}z_{12} + az_{21}, \tag{39.8}$$

$$\dot z_{11} = -z_{11}(b + p_{11}) - z_{12}c - z_{21}p_{12}, \tag{39.9}$$

$$\dot z_{12} = z_{12}(b - p_{11}) + z_{11}a - p_{12}\varphi(z_{11}, z_{12}, z_{21}, t), \tag{39.10}$$

$$\dot z_{21} = -z_{21}(b + p_{22}) - z_{11}p_{21} - \varphi(z_{11}, z_{12}, z_{21}, t)c. \tag{39.11}$$

С другой стороны, из (39.7) получаем

$$\begin{aligned} \dot z_{22} = &-\varphi'_{z_{11}}(z_{11}, z_{12}, z_{21}, t)\,[z_{11}(b+p_{11}) + z_{12}c + z_{21}p_{12}] + \\ &+ \varphi'_{z_{12}}(z_{11}, z_{12}, z_{21}, t)\,[z_{12}(b-p_{11}) + z_{11}a - p_{12}\varphi(z_{11}, z_{12}, z_{21}, t)] - \\ &- \varphi'_{z_{21}}(z_{11}, z_{12}, z_{21}, t)\,[z_{21}(b+p_{22}) + z_{11}p_{21} + \varphi(z_{11}, z_{12}, z_{21}, t)c] + \\ &+ \varphi'_t(z_{11}, z_{12}, z_{21}, t). \end{aligned} \tag{39.12}$$

Приравнивая правые части равенств (39.8) и (39.12), мы получим уравнение

$$\psi_1(z_{11}, z_{12}, z_{21}, t) = 0. \tag{39.13}$$

Предположим, что отсюда

$$z_{11} = \psi_1(z_{12}, z_{21}, t). \tag{39.14}$$

Тогда из (39.7) получим

$$z_{22} = \psi_2(z_{12}, z_{21}, t). \tag{39.15}$$

Подставляя значения z_{11} из (39.14) в правые части (39.9), (39.10), (39.11), мы будем иметь

$$\dot{z}_{11} = -\psi_1(z_{12}, z_{21}, t)(b + p_{11}) - z_{12}c - z_{21}p_{12}, \tag{39.16}$$

$$\dot{z}_{12} = z_{12}(b - p_{11}) + \psi_1(z_{12}, z_{21}, t)a -$$
$$- p_{12}\varphi[\psi_1(z_{12}, z_{21}, t), z_{12}, z_{21}, t], \tag{39.17}$$

$$\dot{z}_{21} = -z_{21}(b + p_{22}) - \psi_1(z_{12}, z_{21}, t)p_{21} -$$
$$- \varphi[\psi_1(z_{12}, z_{21}, t), z_{12}, z_{21}, t]c. \tag{39.18}$$

Из (39.14) получаем также

$$\dot{z}_{11} = \psi'_{1_{z_{12}}}[z_{12}(b - p_{11}) + \psi_1(z_{12}, z_{21}, t)a -$$
$$- \varphi(\psi_1(z_{12}, z_{21}, t), z_{12}, z_{21}\ t)p_{12}] -$$
$$- \psi'_{1_{z_{21}}}[z_{21}(b + p_{22}) + \psi_1(z_{12}, z_{21}, t)p_{21} +$$
$$+ \varphi(\psi_1(z_{12}, z_{21}, t), z_{12}, z_{21}, t)c] +$$
$$+ \psi'_{1_t}(z_{12}, z_{21}, t). \tag{39.19}$$

Сравнивая правые части уравнений (39.16) и (39.19), получим соотношение

$$\psi_2(z_{12}, z_{21}, t) = 0. \tag{39.20}$$

Предположим, что отсюда имеем

$$z_{21} = \psi_2(z_{12}, t). \tag{39.21}$$

Подставляя это значение z_{21} в правую часть (39.17), получим

$$\dot{z}_{12} = \psi_3(z_{12}, t). \tag{39.22}$$

На основании этого же равенства из (39.18) будем иметь

$$\dot{z}_{21} = \psi_4(z_{12}, t). \tag{39.23}$$

Из (39.21) найдем

$$\dot{z}_{21} = \psi'_{2_{z_{12}}}(z_{12}, t)\dot{z}_{12} + \psi'_{2_t}(z_{12}, t) =$$
$$= \psi'_{2_{z_{12}}}(z_{12}, t)\psi_3(z_{12}, t) + \psi'_{2_t}(z_{12}, t). \tag{39.24}$$

Приравнивая правые части (39.23) и (39.24), мы получим

$$\psi_4(z_{12},\ t)=0. \tag{39.25}$$

Предположим, что отсюда найдём

$$z_{12}=\varphi_1(t). \tag{39.26}$$

Тогда из (39.21) будем иметь

$$z_{21}=\varphi_2(t). \tag{39.27}$$

Равенство (39.20) будет также удовлетворено на основании (39.21). При значениях (39.26) и (39.27) правые части уравнений (39.16) и (39.19) совпадают, поэтому и z_{11}, определяемые равенствами (39.16), (39.19), совпадают. Значение z_{11} получим на основании (39.26), (39.27) и (39.14). Тем самым удовлетворяется и равенство (39.13). Но тогда правые части равенств (39.8) и (39.12) совпадают. Отсюда следует, что значения z_{22}, определяемые равенствами (39.8) и (39.12), совпадают. Значение же z_{22} получаем из (39.7) (откуда вытекает (39.12)).

Мы получили значения z_{11}, z_{22}, z_{12}, z_{21}, выраженные явно при помощи алгебраических операций[1] через неопределенные функции a, b, c и их производные. Предположим, что найденные значения z_{11}, z_{22}, z_{12} и z_{21} удовлетворяют первым трем уравнениям системы (39.6). Тогда четвертое уравнение этой системы удовлетворяется, так как z_{22}, найденное из (39.7), удовлетворяет (39.12), а также (39.8), из которого при найденных значениях z_{11}, z_{22}, z_{12}, z_{21} следует четвертое уравнение системы (39.6).

Удовлетворяя найденными значениями z_{11}, z_{22}, z_{12} и z_{21} первым трем уравнениям системы (39.6), мы получим три уравнения, из которых и найдутся функции a, b и c. Тогда будут удовлетворяться и уравнения (39.10), (39.11), а также (39.17) и (39.18).

Мы не будем останавливаться на разных случаях, которые здесь могут встречаться. Например, может случиться, что соотношение (39.13) не содержит z_{11}. Тогда мы сразу имеем соотношение типа (39.20). Дальнейшие рассуждения в этом случае мало изменятся. Так как z_{kl} находятся алгебраически, то в случае периодических a, b, c и p_{kl} функции z_{kl} будут также периодическими. Мы можем a, b и c задать произвольно, тогда z_{kl} будут определяться как решения системы (39.6), т. е. не алгебраически.

Сейчас мы рассмотрим некоторые определенные задания функции φ в (39.7), при которых z_{kl}, a, b и c легко явно находятся.

---

[1] То есть из алгебраических уравнений.

§ 40. СЛУЧАЙ, КОГДА (39.7) ИМЕЕТ ВИД $z_{22}=0$

Возьмем (39.7) в виде

$$z_{22}=0. \tag{40.1}$$

Тогда уравнения (39.6) принимают вид

$$\dot z_{11}=-z_{11}(b+p_{11})-z_{12}c-z_{21}p_{12},\quad \dot z_{12}=z_{12}(b-p_{11})+z_{11}a,$$

$$\dot z_{21}=-z_{21}(b+p_{22})-z_{11}p_{21},\quad 0=az_{21}-z_{12}p_{21}. \tag{40.2}$$

Следовательно,

$$z_{21}=\frac{p_{21}z_{12}}{a} \tag{40.3}$$

и

$$\dot z_{11}=-z_{11}(b+p_{11})-z_{12}c-\frac{p_{12}p_{21}}{a}z_{12}, \tag{40.4}$$

$$\dot z_{12}=z_{12}(b-p_{11})+z_{11}a. \tag{40.5}$$

$$\dot z_{21}=-z_{12}\frac{b+p_{22}}{a}p_{21}-p_{21}z_{11}. \tag{40.6}$$

Из (40.3) на основании (40.5) получим

$$\dot z_{21}=\left[\frac{\dot p_{21}}{a}-\frac{p_{21}\dot a}{a^2}+p_{21}\frac{b-p_{11}}{a}\right]z_{12}+p_{21}z_{11}. \tag{40.7}$$

Сравнивая правые части равенств (40.6) и (40.7), будем иметь

$$z_{11}=\frac{1}{2}\left[\frac{\dot a}{a^2}-\frac{2b}{a}-\frac{p_{22}}{a}+\frac{p_{11}}{a}-\frac{\dot p_{21}}{ap_{21}}\right]z_{12} \tag{40.8}$$

или, обозначая

$$M=\frac{1}{2}\left[\frac{\dot a}{a^2}-\frac{2b}{a}-\frac{p_{22}}{a}+\frac{p_{11}}{a}-\frac{\dot p_{21}}{ap_{21}}\right], \tag{40.9}$$

$$z_{11}=Mz_{12}. \tag{40.10}$$

Отсюда на основании (40.5) найдем

$$\dot z_{11}=\dot M z_{12}+M\left[z_{12}(b-p_{11})+aMz_{12}\right].$$

Сравнивая это с правой частью (40.4), мы после сокращения на z_{12} получим равенство

$$\dot M+M2b+M^2a=-\frac{ac+p_{12}p_{21}}{a}. \tag{40.11}$$

Равенства (40.5) и (40.6) в силу (40.10) принимают вид

$$\dot{z}_{12} = (b - p_{11} + aM) z_{12}, \tag{40.12}$$

$$\dot{z}_{21} = -\left(p_{21}M + \frac{b + p_{22}}{a} p_{21} \right) z_{12}. \tag{40.13}$$

Мы должны теперь удовлетворить равенствам (40.11), (40.12) и (40.13). Это возможно сделать несколькими способами. Положим в (40.11)

$$\text{I.} \qquad M = 0, \quad ac + p_{12}p_{21} = 0. \tag{40.14}$$

Из $M=0$ легко находим

$$a = Ap_{21} \exp \int_0^t (2b + p_{22} - p_{11})\, dt, \tag{40.15}$$

где A — произвольная постоянная. Тогда из (40.12) найдем

$$z_{12} = B \exp \int_0^t (b - p_{11})\, dt \tag{40.16}$$

и из (40.13) на основании (40.3)

$$z_{21} = K \exp \left[-\int_0^t (b + p_{22})\, dt \right], \tag{40.17}$$

где B и K — постоянные. Из (40.10) имеем

$$z_{11} = 0. \tag{40.18}$$

Из (40.15) и второго уравнения (40.14) получаем

$$c = -\frac{p_{12}}{A} \exp \left[-\int_0^t (2b + p_{22} - p_{11})\, dt \right]. \tag{40.19}$$

Мы определили матрицу преобразования (39.2) Z и элементы a и c матрицы (39.5) канонической системы (39.3), но осталась неопределенной функция b. Чтобы матрица (39.5) Q канонической системы (39.3) была периодической, достаточно положить

$$b = \frac{1}{2\omega} \int_0^\omega (p_{11} - p_{22})\, dt. \tag{40.20}$$

На основании (40.3) имеем еще $K = B/A$. Теперь матрица Z и ее обратное значение Z^{-1}, определенные равенствами (40.16), (40.17), (40.1) и (40.18), будут непрерывными в промежутке $|t| < \infty$.

Пример. Дана неканоническая система

$$\frac{dY}{dt} = Y \begin{Vmatrix} p & 0 \\ 1 & p \end{Vmatrix}, \quad p \text{ — постоянное.}$$

На основании (40.16), (40.17), (40.18) и (40.1), полагая $B = K = 1$, получим

$$Z = \begin{Vmatrix} 0 & e^{-pt} \\ e^{-pt} & 0 \end{Vmatrix}, \quad Z^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & e^{pt} \\ e^{pt} & 0 \end{Vmatrix}$$

и на основании (40.15), (40.19) и (40.20)

$$Q = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, систему (39.3) имеем в виде

$$\frac{dX}{dt} = X \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Отсюда на основании (39.2)

$$X = Ce^{\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} t} = YZ,$$

где C — произвольная постоянная матрица. Но очевидно

$$Y = e^{\begin{Vmatrix} p & 0 \\ 1 & p \end{Vmatrix} t},$$

поэтому

$$C = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Это дает

$$Y = XZ^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} e^{\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} t} \begin{Vmatrix} 0 & e^{pt} \\ e^{pt} & 0 \end{Vmatrix}.$$

Пусть теперь в (40.9)

II. $$a = 1, \ b = 0. \tag{40.21}$$

Тогда

$$M = \frac{1}{2}\left[p_{11} - p_{22} - \frac{\dot{p}_{21}}{p_{21}}\right],$$

$$\dot{M} = \frac{1}{2}\left(\dot{p}_{11} - \dot{p}_{22} - \frac{\ddot{p}_{21}}{p_{21}} + \frac{\dot{p}_{21}^2}{p_{21}^2}\right) \tag{40.22}$$

и из (40.11)

$$c = -p_{21}p_{12} - \dot{M} - M^2. \tag{40.23}$$

Равенства (40.12) и (40.13) переходят в

$$\dot{z}_{12} = -\frac{1}{2}(p_{11} + p_{22} + \dot{p}_{21}/p_{21})z_{12}, \tag{40.24}$$

$$\dot{z}_{21} = -\frac{1}{2}(p_{11} + p_{22} - \dot{p}_{21}/p_{21})z_{21}. \tag{40.25}$$

Отсюда

$$z_{12} = \frac{1}{\sqrt{p_{21}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^t (p_{11} + p_{22})\,dt\right], \tag{40.26}$$

$$z_{21}^{-1} = \sqrt{p_{21}}\exp\left[\frac{-1}{2}\int_0^t (p_{11} + p_{22})\,dt\right]. \tag{40.27}$$

Величина z_{11} определяется формулой (40.10) и $z_{22} = 0$. Матрицы Z и Z^{-1} будут непрерывными, если $p_{21} \neq 0$. Каноническая система (39.3) будет иметь вид

$$\frac{dX}{dt} = X\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{Vmatrix}, \tag{40.28}$$

где c определяется формулой (40.23). Коэффициенты системы (40.28) периодические с периодом ω, если такими были коэффициенты системы (39.1).

Система (40.28) равносильна уравнению

$$\ddot{x} + cx = 0. \tag{40.29}$$

Мы видели выше, что это уравнение можно привести и к случаю $c \geqslant 0$ по Ляпунову или Старжинскому. Впрочем, можно это делать и методом, указанным в § 39.

§ 41. О ПРЕОБРАЗОВАНИИ n ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ К КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Пусть система (39.1) есть система n-го порядка. Если система (39.3) каноническая, то [34]

$$Q = H\begin{Vmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{Vmatrix}, \quad h_{ik} = h_{ki}, \tag{41.1}$$

где h_{ik} — элементы матрицы H.

Мы оставляем открытым вопрос, можно ли Z' найти в замкнутой форме так, чтобы система (39.3) была канонической с периодической ограниченной матрицей Q.

Отметим еще, что в работе И. С. Аржаных [70] дается метод преобразования заданной системы (и нелинейной) к канонической системе.

§ 42. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ КОРНЕЙ ПОЛИНОМА, РАСПОЛОЖЕННЫХ НА ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ

Дан полином с вещественными коэффициентами [90]

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n. \tag{42.1}$$

Мы укажем признак, позволяющий установить число корней полинома $P(x)$, расположенных на единичной окружности. С этой целью введем величину y:

$$2y = x + x^{-1}, \tag{42.2}$$

$$x = y + \sqrt{y^2 - 1}, \qquad x = y - \sqrt{y^2 - 1}. \tag{42.3}$$

Подставим первое из этих значений x в (42.1), получим

$$P(x) = Q(y) = P_1^{(n)}(y) + \sqrt{y^2 - 1}\, P_2^{(n-1)}(y). \tag{42.4}$$

Здесь $P_1^{(n)}(y)$ и $P_2^{(n-1)}(y)$ — полиномы соответственно степени n и $n-1$. Так как коэффициенты полинома (42.1) вещественные, то каждому корню $x_1 = \exp i\varphi$ соответственно найдется и корень $x_2 = \exp(-i\varphi)$. Этим двум корням соответствует одно вещественное значение y, определенное равенством (42.2). По модулю это значение $y = \cos\varphi$ будет меньше единицы, если $y \neq \pm 1$. Предположим $y \neq \pm 1$ такое, что оба значения x, данные равенствами (42.3), являются корнями полинома (42.1). Тогда имеем

$$P_1^{(n)}(y) + \sqrt{y^2 - 1}\, P_2^{(n-1)}(y) = 0, \quad P_1^{(n)}(y) - \sqrt{y^2 - 1}\, P_2^{(n-1)}(y) = 0$$

и, следовательно,

$$P_1^{(n)}(y) = 0, \quad P_2^{(n-1)}(y) = 0. \tag{42.5}$$

Если $x = \pm 1$, то $y = \pm 1$ и $P^{(n)}(\pm 1) = 0$.

Обозначим через $N(y)$ полином, являющийся общим наибольшим делителем полиномов (42.5).

Доказана

Теорема 42.1. *Если $x = \exp i\varphi$ — корень уравнения*

$$P(x) = 0 \qquad (42.6)$$

с вещественным $\varphi \neq k\pi$ (k — целое), то соответствующее y будет вещественным корнем уравнений (42.5) или равенства

$$N(y) = 0, \qquad (42.7)$$

или

$$[P^{(n)}(y)]^2 + [P^{(n-1)}(y)]^2 = 0 \qquad (42.8)$$

с $|y| < 1$. Наоборот, всякий вещественный корень y с $|y| < 1$ уравнения (42.7) (или (42.8)) доставляет два сопряженных корня уравнения (42.6), расположенных на единичной окружности.

Замечание 42.1. Если есть вещественный корень y уравнения (42.7) с $|y| > 1$, то полином (42.1) имеет два корня (42.3): один с $|x| < 1$ и другой с $|x| > 1$. Если нет полинома $N(y)$ (или нет вещественного корня уравнения (42.8)), то нет таких y, которые доставляли бы сразу два корня (42.3) полинома (42.1). Число вещественных корней y уравнения (42.7) (или (42.8)) с $|y| < 1$, как известно, легко находится [35].

Пусть степень полинома (42.1) четная: $n = 2m$, корней $x = \pm 1$ нет (их легко сразу исключить), а остальные корни расположены на единичной окружности, т. е. попарно сопряженные: $x_1 = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $x_2 = \cos\varphi - i\sin\varphi$. Следовательно, полином (42.1) есть произведение пар множителей:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 2x\left[(x + x^{-1})\frac{1}{2} - \cos\varphi\right].$$

Отсюда следует, что уравнение (42.1) имеет вид

$$x^m Q_m(y) = 0, \quad 2y = x + x^{-1}, \quad x = y + \sqrt{y^2 - 1}, \qquad (42.9)$$

где $Q_m(y)$ — полином степени m с вещественными корнями y, по модулю меньшими единицы, а уравнение (42.1) есть возвратное. Полином $Q_m(y)$ легко найти. Этим доказана

Теорема 42.2. *Для того чтобы все корни уравнения (42.1) четной степени $n = 2m$ были по модулю равные единице ($\neq \pm 1$), необходимо и достаточно, чтобы (42.1) было возвратным, а корни уравнения $Q_m(y) = 0$ были вещественными с $|y| < 1$.*

Получим вместо (42.9) такое уравнение, все корни которого лежат в левой полуплоскости и внутри единичного круга. С этой целью перепишем (42.9) так:

$$Q_m(y) = Q_1(y^2) + yQ_2(y^2) = 0. \qquad (42.10)$$

Если $m = 2k$, то $Q_1(z)$, $Q_2(z)$ — полиномы соответственно степеней k и $k-1$. Если $m = 2k+1$, то оба они степени k. Из (42.10) получим

$$L(z) = Q_1^2(-z) + zQ_2^2(-z) = 0,\ z = -y^2. \tag{42.11}$$

Корни этого полинома $L(z)$ m-ой степени вещественные, отрицательные и с $|z| < 1$. Всякий корень уравнения (42.11) с $|z| < 1$ доставляет на основании равенств $y = i\sqrt{z}$ и (42.3) два корня уравнения (42.6), расположенные на единичной окружности. При помощи известных методов алгебры [35] мы легко установим, таким образом, число корней полинома (42.1), расположенных на единичной окружности.

Другие методы решения этого вопроса см. в работе [71]. Если мы установим, что полином (42.1) не имеет корней на единичной окружности, то число[1] корней N, расположенных внутри единичной окружности[2], найдем, как известно, по формуле

$$N = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{P'(e^{i\varphi})e^{i\varphi}\,d\varphi}{P(e^{i\varphi})}. \tag{42.12}$$

Это число целое положительное или нуль и какое именно легко установить приближенным вычислением.

§ 43. ИССЛЕДОВАНИЕ КОРНЕЙ ПОЛИНОМА (42.1) КАК ФУНКЦИЙ ПАРАМЕТРА, ВХОДЯЩЕГО В КОЭФФИЦИЕНТЫ a_k [90]

Пусть коэффициенты полинома (42.1) $P(x, \varepsilon)$ суть функции параметра ε, аналитические в окрестности точки $\varepsilon = 0$, и при $\varepsilon = 0$ имеем m некратных пар сопряженных корней, расположенных на единичной окружности:

$$x_1^{(k)} = \exp i\varphi_k,\quad x_2^{(k)} = \exp(-i\varphi_k) \quad (k = 1, \ldots, m), \tag{43.1}$$

где $\varphi_k \neq \nu\pi$ с целым или равным нулю числом ν. Этим парам корней соответствуют m общих различных вещественных корней $y = y_k$ с $|y_k| < 1$ $(k = 1, \ldots, m)$ уравнений

$$P^{(n)}(y, \varepsilon) = 0,\quad P^{(n-1)}(y, \varepsilon) = 0 \text{ при } \varepsilon = 0^* \tag{43.2}$$

---

[1] Если полином (42.1) возвратный, то, как известно, число корней внутри окружности такое же, как и вне.

[2] Другие методы см. в работе И. С. Аржаных [70].

* Это те же уравнения, что и (42.5), но содержащие в коэффициентах $a_k(\varepsilon)$ параметр ε.

или $$L(y) = [P^{(n)}(y, 0)]^2 + [P^{(n-1)}(y, 0)]^2 = 0. \qquad (43.3)$$

Возникает вопрос о расположении корней уравнения

$$P(x, \varepsilon) = 0 \qquad (43.4)$$

при малых ε. Так как коэффициенты уравнений

$$P^{(n)}(y, \varepsilon) = 0, \quad P^{(n-1)}(y, \varepsilon) = 0 \qquad (43.5)$$

или

$$L(y, \varepsilon) = [P^{(n)}(y, \varepsilon)]^2 + [P^{(n-1)}(y, \varepsilon)]^2 = 0 \qquad (43.6)$$

в этом случае очевидно также будут аналитическими в окрестности точки $\varepsilon = 0$ (и по крайней мере с таким же радиусом сходимости, как и у коэффициентов полинома (43.4)), то мы из уравнений (43.5) или (43.6) будем иметь m различных голоморфных в окрестности точки $\varepsilon = 0$ корней

$$y = y_\nu(\varepsilon) = y_\nu + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_\nu^{(k)} \varepsilon^k \quad (\nu = 1, \ldots, m). \qquad (43.7)$$

Эти корни при малых ε будут вещественными и различными с $|y_\nu(\varepsilon)| < 1$. Отсюда следует, что соответствующие пары корней уравнения (43.4) будут при малых вещественных ε оставаться на единичной окружности. Этим доказана

Теорема 43.1. *Если полином $P(x, 0)$ имеет m различных пар решений (43.1), то и при всех достаточно малых вещественных ε уравнение (43.4) имеет m различных сопряженных пар решений, расположенных на единичной окружности.*

Предположим теперь, что при $\varepsilon = 0$ имеем p-кратный вещественный корень y_0 уравнения (43.6) с $|y_0| < 1$. Тогда могут быть различные случаи.

I. Существует p различных вещественных (при вещественном ε) функций

$$y = \left(y_0 + \sum_{l=n}^{\infty} \alpha_l^{(\nu)} \varepsilon^l\right)\varepsilon \quad (\nu = 1, \ldots, p), \qquad (43.8)$$

удовлетворяющих уравнению (43.6). Этим функциям будут соответствовать p пар сопряженных корней выражения (43.4).

II. Существуют $y = y_\nu(\varepsilon)$ $(\nu = 1, \ldots, p)$, удовлетворяющие уравнению (43.6), обладающие свойством $y_\nu(\varepsilon) \to y_0$ при $\varepsilon \to 0$

и вещественные, только при $\varepsilon > 0$ или только при $\varepsilon < 0$. Тогда имеем p сопряженных пар корней уравнения (43.4), расположенных на единичной окружности при малых $\varepsilon > 0$ или $\varepsilon < 0$ соответственно. Эти корни $y_\nu(\varepsilon)$ будут представлены сходящимися при малых ε рядами по положительным степеням величин $\varepsilon^{1/q}$, где q — целое положительное число.

III. Существуют $y = y_\nu(\varepsilon)$ ($\nu = 1, \ldots, m < p$) вещественные при вещественных ε во всей окрестности $\varepsilon = 0$ и представленные в виде сходящихся рядов по положительным степеням величины $\varepsilon^{1/q}$, где q — положительное целое число. Области сходимости этих рядов определяются. Все эти выводы мы получаем на основе работы [32].

Рассмотрим теперь тот случай, когда уравнение (43.4) при $\varepsilon = 0$ имеет корень $x = 1$. В этом случае, как видно из (42.4), будем иметь при $\varepsilon = 0$ и

$$P^{(n)}(1, 0) = 0. \tag{43.9}$$

Согласно работе [32, § 6], мы будем иметь решение первого из уравнений (43.5) в виде или

$$y = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varepsilon^{k/q}, \quad q \text{ — целое} > 0, \tag{43.10}$$

или

$$y = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (-\varepsilon)^{k/q}, \tag{43.11}$$

или

$$y = 1 + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varepsilon^{k/q}, \tag{43.12}$$

или

$$y = 1 + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (-\varepsilon)^{k/q}. \tag{43.13}$$

Здесь α_k вещественные и ряды сходятся при малых ε.

Мы можем получить один из рядов вида (43.10), (43.11), (43.12) или (43.14) или несколько таких рядов. Эти ряды будут вещественными или при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, или только при малых $\varepsilon > 0$, или только при $\varepsilon < 0$.

Но чтобы решить вопрос о том, будут ли соответствующие корни уравнения (43.4), обращающиеся при $\varepsilon = 0$ в $x = 1$, оставаться и при малых ε на единичной окружности, надо принять во внимание следующее. Если найденное решение первого из уравнений (43.5) не является решением второго из уравнений (43.5), то оно не порождает решений уравнения (43.4).

Предположим теперь, что найденное решение удовлетворяет обоим уравнениям (43.5), т. е. что оно является решением уравнения (43.6). Чтобы оно порождало корни уравнения (43.4), расположенные на единичной окружности, необходимо и достаточно, чтобы оно было вещественным и по модулю меньшим единицы. Пусть, например, имеем (43.10). Тогда, если q — нечетное число, то y остается вещественным при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$. А если q — четное число, то y будет вещественным лишь при $\varepsilon > 0$. Если при этом имеем $\alpha_1 < 0$, то очевидно при малых $\varepsilon > 0$ функция y будет вещественной с $|y| < 1$. Тем самым мы имеем два сопряженных корня уравнения (43.4), расположенных на единичной окружности при малых ε. Таких пар корней уравнение (43.4) имеет столько, сколько имеет вещественных корней с $|y| < 1$ (43.6).

Если имеем (43.11), то надо повторить такие же рассуждения для $\varepsilon < 0$. Такие же рассуждения надо провести, если имеем (43.12). Здесь решающим для существования вещественного y с $|y| < 1$ будет знак α_1 и область $\varepsilon > 0$ или $\varepsilon < 0$. Если, например, q четное и $\alpha_1 > 0$, то y, данный рядом (43.12), не будет вещественным и с $|y| < 1$. Действительно, если $\varepsilon > 0$, то $y = y(\varepsilon)$ вещественный, но $|y| > 1$, так как $\varepsilon\alpha_k > 0$, а если $\varepsilon < 0$, то $y = y(\varepsilon)$ не является вещественным. Если же $y = y(\varepsilon)$ вещественный с $|y| > 1$, удовлетворяет уравнению[1] (не обязательно обоим уравнениям 43.5))

$$P(x, \varepsilon) = Q(y, \varepsilon) = P^{(n)}(y, \varepsilon) + \sqrt{y^2 - 1}\, P^{(n-1)}(y, \varepsilon) = 0,$$

то соответствующий x в силу $x = y + \sqrt{y^2 - 1}$ будет с $|x| > 1$. Если уравнение (43.4) при малых $\varepsilon > 0$ или $\varepsilon < 0$ имеет корни $x = x(\varepsilon)$, расположенные на единичной окружности и равные $x = 1$ при $\varepsilon = 0$, то, согласно теореме (42.1), существует вещественный корень уравнения (43.6) с $|y| < 1$. Мы получим этот корень в виде рядов, указанных выше.

Заметим еще, что, рассматривая уравнение (42.9), соответствующее полиному четной степени $n = 2m$, можно изучать и тот случай, когда $P(x, \varepsilon)$ непрерывное относительно ε. Надо только воспользоваться методами, изложенными в § 2, 3, 4 и 5 работы [32].

---

[1] Полученному из (43.4) заменой $x = y + \sqrt{y^2 - 1}$.

§ 44. ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ И ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА ОСНОВАНИИ МЕТОДОВ § 43 [93]

Рассмотрим каноническую линейную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = XP(t, \varepsilon), \;\; P(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t)\,\varepsilon^k, \tag{44.1}$$

где ряд сходится в области $|\varepsilon| < r$, $P_k(t)$ — непрерывные периодические с периодом 2π матрицы n-го порядка и X — интегральная матрица. Мы видели (§ 6), что интегральная матрица X представима в виде

$$X(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(t)\,\varepsilon^k, \;\; X(0, \varepsilon) = \mathrm{I}, \tag{44.2}$$

где $X_k(t)$ — непрерывные матрицы функции от t и ряд сходится в области $|\varepsilon| < r$. Эта интегральная матрица обладает свойством

$$X(t + 2\pi, \varepsilon) = X(2\pi, \varepsilon)\,X(t, \varepsilon), \tag{44.3}$$

где

$$X(2\pi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(2\pi)\,\varepsilon^k. \tag{44.4}$$

Вопрос о том, когда матрица (44.2) будет обладать свойством $X(t, \varepsilon) \longrightarrow \|0\|$ при $t \longrightarrow \infty$ или будет ограниченной, решается так. Если все характеристические числа матрицы (44.4) по модулю меньше единицы, то имеем $X(t, \varepsilon) \to \|0\|$ при $t \to \infty$. Если же все характеристические числа матрицы (44.4) по модулю будут равны единице, а элементарные делители будут простыми, то матрица (44.2) не обладает свойством $X(t, \varepsilon) \to \|0\|$ при $t \to \infty$, но будет ограниченной, колеблющейся. Так как мы предположили систему (44.1) канонической, то, согласно теореме Ляпунова [26], характеристическое уравнение

$$P(x, \varepsilon) = 0 \tag{44.5}$$

матрицы (44.4) будет возвратным, поэтому всякий раз, когда матрица (44.4) имеет характеристическое число, равное ρ, найдется и характеристическое число, равное ρ^{-1}. Отсюда следует, что матрица (44.2) не может обладать свойством $X(t, \varepsilon) \to \|0\|$ при $t \to \infty$.

Выясним, когда матрица (44.2) будет ограниченной (но не стремящейся к нулевой при $t \to \infty$) при достаточно малых значениях параметра ε. Если матрица $X(2\pi, 0)$, определенная рядом (44.4), имеет характеристическое число ρ с $|\rho| < 1$, то найдется[1] характеристическое число ρ с $|\rho| > 1$. А тогда очевидно и при малых ε найдутся характеристические числа ρ с $|\rho| > 1$, поэтому матрица (44.2) не будет ограниченной.

Пусть теперь все характеристические числа матрицы $X(2\pi, 0)$ имеют модуль, равный единице, т. е. расположены на единичной окружности. Характеристические числа x матрицы (44.4) суть корни полинома n-ой степени (44.5), где коэффициенты при всех степенях x будут голоморфными в окрестности $\varepsilon = 0$ функциями от ε. Эти ряды будут сходиться при $|\varepsilon| < r$. При $\varepsilon = 0$ (44.5) переходит в характеристическое уравнение матрицы $X(2\pi, 0)$ и, следовательно, все корни уравнения (44.5) при $\varepsilon = 0$ расположены на единичной окружности.

В § 43 показано, как убедиться в том, что и при малых ε все корни уравнения (44.5) будут различными (тем самым все элементарные делители матрицы (44.4) будут простыми) и расположены на единичной окружности. Например, это будет, когда все характеристические числа матрицы $X(2\pi, 0)$ простые и расположены на единичной окружности. Или это будет всякий раз, когда все корни уравнения (43.6) при малых ε (может быть только при $\varepsilon > 0$ или $\varepsilon < 0$) будут вещественными, простыми и по модулю меньше единицы (при этом матрица $X(2\pi, 0)$ может и не иметь все элементарные делители простыми). Предположим, что система (44.1) четного порядка $n = 2m$ не является канонической. Тогда для того чтобы интегральная матрица (44.2) при малых ε была ограниченной и не стремящейся к нулевой матрице при $t \to \infty$, необходимо, чтобы характеристические числа матрицы $X(2\pi, 0)$ были расположены на единичной окружности. Если они будут вида (43.1) и различными, то по теореме 43.1 они будут различными и расположенными на единичной окружности и при малых ε. Чтобы характеристические числа матрицы $X(2\pi, 0)$ лежали на единичной окружности, необходимо, чтобы характеристическое уравнение матрицы $X(2\pi, 0)$ было возвратным (теорема 42.2). Если оно возвратное и уравнение (42.10) для (44.5) имеет $m (n = 2m)$ различных вещественных корней y с $|y| < 1$, то

[1] Так как и при $\varepsilon = 0$ система (44.1) будет канонической.

все характеристические числа матрицы $X(2\pi, \varepsilon)$ лежат на единичной окружности и при всех достаточно малых ε.

Мы можем даже сказать, что характеристические числа матрицы $X(2\pi, \varepsilon)$ будут наверное оставаться на единичной окружности при всех таких малых вещественных $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, при которых еще $D(\varepsilon) \neq 0$ и $Q_m(\pm 1, \varepsilon) \neq 0$ (см. уравнение (42.11)), где $D(\varepsilon)$ — дискриминант уравнения (42.10). При таких ε корни уравнения (42.10) будут оставаться все еще различными и с $|y| < 1$. Эти ближайшие особые значения ε_0 должны удовлетворять и уравнению $\Delta(\varepsilon_0) = 0$, где $\Delta(\varepsilon)$ — дискриминант характеристического уравнения (44.5). Этим доказана

Теорема 44.1. *Для того чтобы интегральная матрица (44.2) системы (44.1) (неканонической) была ограниченной и не стремящейся к нулю при малых ε, необходимо, чтобы характеристическое уравнение матрицы $X(2\pi, 0)$ было возвратным. И если это имеет место и уравнение (42.9), составленное для (44.5) (характеристическое уравнение матрицы $X(2\pi, \varepsilon)$), имеет m различных вещественных решений y с $|y| < 1$, то матрица (44.2) будет ограниченной, не стремящейся к нулю при $t \to \infty$.*

Замечание 44.1. Все другие возможные случаи, когда мы имеем такую матрицу (44.2), отмечены в § 43.

§ 45. УСЛОВИЕ, ПРИ КОТОРОМ ИНТЕГРАЛЬНАЯ МАТРИЦА НЕКАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ (44.1) ОБЛАДАЕТ СВОЙСТВОМ $X(t, \varepsilon) \to \|0\|$ при $t \to \infty$

Для того чтобы имело место

$$X(t, \varepsilon) \to \|0\| \quad \text{при} \quad t \to \infty, \tag{45.1}$$

необходимо и достаточно, как уже указывалось (после формулы (44.4)), чтобы все характеристические числа x матрицы $X(2\pi, \varepsilon)$ были с $|x| < 1$. Заметим прежде всего, что если характеристические числа x матрицы $X(2\pi, 0)$ будут с $|x| < 1$, то такими они будут и при всех достаточно малых ε. Это очевидно. Следовательно, нужно найти те условия, при которых характеристические числа x матрицы $X(2\pi, 0)$ будут с $|x| < 1$. Это можно выяснить так.

Записываем характеристическое уравнение для матрицы $X(2\pi, 0)$ в виде

$$(-1)^n (X(2\pi, 0) - x\mathrm{I}) = P(x) = 0, \tag{45.2}$$

где $P(x)$ — полином вида (42.1). Теперь мы можем воспользоваться методами, изложенными в работе [71], чтобы выяснить, будут ли все корни x с $|x| < 1$. Но удобнее, как нам кажется, воспользоваться здесь тем методом, который предложил И. С. Аржаных [70]. Именно, он получает неравенства, характеризующие условия $|x|<1$ для всех корней уравнения (45.2). Это равносильно неравенствам Гурвица для матрицы $\ln X(2\pi, 0)$, гарантирующим отрицательность вещественных частей характеристических чисел этой матрицы, но удобнее, так как не надо находить матрицу $\ln X(2\pi, 0)$. Эти условия И. С. Аржаных получает как необходимые и достаточные для того, чтобы было $|x|<1$ для всех корней уравнения (45.2). Всего условий И. С. Аржаных для матрицы $X(2\pi, 0)$ n-го порядка будет n. Запишем их условно в виде

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \ldots, \quad \Delta_n > 0. \tag{45.3}$$

Эти неравенства будут выполнены и при малых вещественных ε, если они выполнены при $\varepsilon = 0$. Именно, мы будем иметь

$$\Delta_1(\varepsilon) > 0, \ldots, \quad \Delta_n(\varepsilon) > 0, \tag{45.4}$$

если было

$$\Delta_1(0) > 0, \ldots, \quad \Delta_n(0) > 0.$$

Мы можем даже сказать, что неравенства И. С. Аржаных во всяком случае выполнены для таких ε, что $|\varepsilon| < \varepsilon_*$, где ε_* — наименьшее из тех вещественных чисел ε_1, для которых имеем[1] (согласно § 43)

$$[P^{(n)}(y, \varepsilon_0)]^2 + [P^{(n-1)}(y, \varepsilon_0)]^2 = 0 \tag{45.5}$$

при вещественных y с $|y| < 1$
или

$$P^{(n)}(\pm 1, \varepsilon_0) = 0. \tag{45.6}$$

Таким образом, мы имеем для определения ε_0 уравнения в виде рядов, сходящихся при тех же ε, при которых сходится и ряд в уравнении (44.1).

Замечание 45.1. Если на основании теоремы 42.1 выяснено, что уравнение (45.2) не имеет корня x, расположенного на единичной окружности, то число N корней x с $|x| < 1$ легко найдется и по формуле (42.12), так как известно, что это число целое положительное или нуль.

§ 46. ДРУГОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ Н. А. АРТЕМЬЕВА

Рассмотрим снова систему вида (18.1)

$$\frac{dX}{dt} = XP(t, \mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon), \tag{46.1}$$

[1] Так как при таких ε_0 уравнение $(-1)^n (X(2\pi, \varepsilon_0) - xI) = 0$ уже имеет корни x, расположенные на единичной окружности.

где матрица n-го $(=2m)$ порядка $P(t, \mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon)$ периодическая относительно t с периодом 2π, а $\mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon$ — параметры. Мы не предполагаем теперь систему (46.1) канонической. Будем искать условия, которым должны удовлетворять параметры $\mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon$, при которых интегральиая матрица системы (46.1) будет ограниченной колеблющейся (не стремящейся к нулевой матрице при $t \to \infty$). Согласно теореме 42.2, мы должны потребовать, чтобы характеристическое уравнение матрицы $X(2\pi, \mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon)$ было возвратным. Это доставляет нам m равенств, так как эти условия для уравнения (42.1) суть

$$a_n = 1, \quad a_{n-k} = a_k \quad (k = 0, 1, \ldots, m-1). \tag{46.2}$$

Затем мы требуем, чтобы все корни уравнения (см. (42.9))

$$Q_m(y) = 0 \tag{46.3}$$

были вещественными с $|y| < 1$. Если же система (46.1) будет канонической, то условия (46.2) выполнеиы автоматически и остаются только условия (46.3).

Таким образом, если дана система (46.1), то задачу Н. А. Артемьева можно решать сразу на основании условий (46.2) и (46.3), не пользуясь матрицей W, что намного проще, и, кроме того, мы будем иметь дело с рядами, сходящимися при тех же значениях ε, что и ряды для матрицы $P(t, \mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon)$ в уравнеиии (46.1). Ряды же, представляющие матрицу W, сходятся, как известно, в меньшей области.

Задача II, сформулированная в § 18, решается также на основании методов, изложениых в § 44, непосредственно при помощи матрицы $X(2\pi; \mu_1, \ldots, \mu_\nu, \varepsilon)$. Таким образом решаются и задачи § 27. Заметим еще, что многие из рассматриваемых здесь задач изучены с бо́льшей подробностью в работах П. Б. Голоквосчуса [50] на основе показательной матрицы.

§ 47. ДОПОЛНЕНИЕ ПО ТЕОРИИ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ ИЗ [32, 73, 97]

Приведем из [32] некоторые результаты. Известно [72], что если неявная функция $y \to 0$ при $x \to 0$ определяется равеиством

$$F(x, y) = ax + by + \ldots = 0, \tag{47.1}$$

где ряд $F(x, y)$ с вещественными коэффициентами $a, b, \ldots$ сходится в окрестности точки $x = y = 0$, то при $b \neq 0$

$$y=\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x^k, \quad \alpha_1=-\frac{a}{b} \tag{47.2}$$

и ряд этот сходится в окрестности точки $x=0$. Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ — вещественные постоянные.

Если $b=0$, но $a \neq 0$, то имеем

$$x=\sum_{k=m}^{\infty} \beta_k y^k, \ \beta_m=-\frac{b_m}{a}, \tag{47.3}$$

где b_m — коэффициент при наинизшей степени y в ряде (47.1). Отсюда имеем единственную вещественную функцию

$$y=\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \tau^k, \quad \tau=x^{1/m}, \quad \alpha_1=\sqrt[m]{\beta_m}, \tag{47.4}$$

определенную во всей окрестности точки $x=0$, если m нечетное. Если же m четное, то при $\beta_m>0$ ряд (47.4) доставляет две вещественные функции (так как $\tau=x^{1/m}$ имеет два вещественных значения, отличающихся знаком), но только при малых $x>0$.

Если же $\beta_m<0$, то (47.4) доставляет две вещественные функции при малых $x<0$, где $\alpha_1=\sqrt[m]{-\beta_m}$ и $\tau=(-x)^{1/m}$.

Теперь мы рассмотрим уравнение вида

$$\alpha_1 x^2+\alpha_2 xy+\alpha_3 y^2+\alpha_4 x^3+\alpha_5 x^2 y+\alpha_6 xy^2+$$
$$+\alpha_7 y^3+\alpha_8 x^4+\alpha_9 x^3 y+\alpha_{10} x^2 y^2+\alpha_{11} xy^3+\alpha_{12} y^4+\ldots=0, \tag{47.5}$$

где коэффициенты α суть вещественные постоянные, ряд сходится в окрестности начала координат и не выписаны члены измерения $\geqslant 5$. Будем искать условия, при которых имеется непрерывное вещественное решение уравнения (47.5) $y=y(x)$, обладающее свойством

$$y(x) \to 0 \text{ при } x \to 0. \tag{47.6}$$

Будем искать y в виде

$$y=ux. \tag{47.7}$$

Подставляя это значение y в (47.5) и сокращая на x^2, получим

$$\alpha_1+\alpha_2 u+\alpha_3 u^2+\alpha_4 x+\alpha_5 xu+\alpha_6 xu^2+$$
$$+\alpha_7 xu^3+\alpha_8 x^2+\alpha_9 x^2 u+\alpha_{10} x^2 u^2+\alpha_{11} x^2 u^3+$$
$$+\alpha_{12} x^2 u^4+\alpha_{13} x^3+\ldots=0. \tag{47.8}$$

Обозначим через a_1 и a_2 корни уравнения

$$\alpha_1 + \alpha_2 a + \alpha_3 a^2 = 0. \tag{47.9}$$

Введем еще неизвестную v равенством

$$u = v + a_k \quad (k = 1 \text{ или } k = 2). \tag{47.10}$$

Для определения v получим уравнение

$$\begin{gathered}(\alpha_2 + 2a_k \alpha_3) v + (\alpha_4 + \alpha_5 a_k + \alpha_6 a_k^2 + \alpha_7 a_k^3) x + \\ + \alpha_3 v^2 + (\alpha_5 + 2\alpha_6 a_k + 3\alpha_7 a_k^2) xv + \\ + (\alpha_8 + \alpha_9 a_k + \alpha_{10} a_k^2 + \alpha_{11} a_k^3 + \alpha_{12} a_k^4) x^2 + \ldots = 0.\end{gathered} \tag{47.11}$$

Здесь все невыписанные члены имеют x в степени $\geqslant 3$.

Если $a_1 \neq a_2$, то

$$\alpha_2 + 2a_k \alpha_3 \neq 0. \tag{47.12}$$

В этом случае из (47.11) имеем

$$v = m_l^{(k)} x^l + m_{l+1}^{(k)} x^{l+1} + \ldots \quad (k = 1,2), \tag{47.13}$$

где l — целое положительное число,

$$m_l^{(k)} = -\frac{A_l}{\alpha_2 + 2a_k \alpha_3} \quad (k = 1,2) \tag{47.14}$$

и A_l — коэффициент при наинизшей степени x в (47.11).

Следовательно, имеем

$$y = x (a_k + m_l^{(k)} x^l + m_{l+1}^{(k)} x^{l+1} + \ldots). \tag{47.15}$$

Если a_1, a_2 вещественные, то имеем два вещественных $y(x) \to 0$ при $x \to 0$. Других таких $y(x)$ нет.

Если a_1 и a_2 комплексные, то нет вещественных $y(x) \to 0$ при $x \to 0$.

Пусть теперь $a_1 = a_2 = a$. Тогда коэффициент при первой степени v в равенстве (47.11) будет равен нулю, т. е.

$$\alpha_2 + 2a\alpha_3 = 0, \ \alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3 = 0. \tag{47.16}$$

При этих условиях коэффициент A при первой степени x в (47.11) имеем в виде

$$A = (8\alpha_3^3)^{-1} (8\alpha_4\alpha_3^3 - 4\alpha_2\alpha_5\alpha_3^2 + 2\alpha_2^2\alpha_6\alpha_3 - \alpha_7\alpha_2^3). \tag{47.17}$$

Если $\alpha_3 \neq 0$ и $A \neq 0$, то из (47.11) имеем

$$x = k_2 v^2 + k_3 v^3 + \ldots, \tag{47.18}$$

где

$$k_2 = -\frac{8\alpha_3^4}{8\alpha_4\alpha_3^3 - 4\alpha_2\alpha_5\alpha_3^2 + 2\alpha_2^2\alpha_6\alpha_3 - \alpha_7\alpha_2^3}. \qquad (47.19)$$

Из (47.18) получаем два вещественных $y \to 0$ при $x \to 0$, если $k_2 > 0$:

$$y = x\left(a + \sum_{k=1}^{\infty} A_k x^{k/2}\right), \quad A_1 = k_2^{-1/2}. \qquad (47.20)$$

Оба эти y ($x^{1/2}$ имеет два значения, отличающиеся знаком) определены в окрестности точки $x = 0$ при $x \geqslant 0$.

Если $k_2 < 0$, то при $x \leqslant 0$

$$y = x\left(a + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(-x)^{k/2}\right), \quad A_1 = (-k_2)^{-\frac{1}{2}} \qquad (47.20_1)$$

имеет вещественные значения. Других $y \to 0$ при $x \to 0$ нет.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Если

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 \neq 0, \qquad (47.21)$$

то $a = 0$ и тогда при

$$\alpha_4 \neq 0 \qquad (47.22)$$

имеем (47.18).

Если

$$\alpha_1 = \alpha_3 = 0, \quad \alpha_2 \neq 0, \qquad (47.23)$$

то в равенстве (47.11) коэффициент при первой степени v будет $\alpha_2 \neq 0$, поэтому получим (47.15) ($a_k = 0$). Но здесь мы можем получить другие $y \to 0$ при $x \to 0$ следующим образом.

Заменяя в (47.5) $x = uy$ и сокращая на y^2, получим

$$\alpha_2 u + \alpha_7 y + \alpha_6 uy + \alpha_{12} y^2 + \alpha_5 u^2 y + \alpha_{11} y^2 u +$$
$$+ \alpha_4 u^3 y + \alpha_{10} u^2 y^2 + \alpha_9 y^2 u^3 + \alpha_8 u^4 y^2 + \ldots = 0. \qquad (47.24)$$

Так как $\alpha_2 \neq 0$, то отсюда получим

$$u = \sum_{\nu=m}^{\infty} k_\nu y^\nu, \quad k_m = -\frac{A}{\alpha_2}, \qquad (47.25)$$

где A — коэффициент при наинизшей степени y в (47.24). Если, в частности, $\alpha_7 \neq 0$, то $A = \alpha_7$ и $m = 1$.

На основании (47.25) имеем

$$x = uy = \sum_{\nu=m}^{\infty} k_\nu y^{\nu+1}. \qquad (47.25_1)$$

Отсюда получим

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \tau^k. \tag{47.26}$$

Здесь

$$\tau = x^{1/(m+1)}, \quad A_1 = k^{-1/(m+1)}, \text{ если } k_m > 0. \tag{47.27}$$

При этом если $m+1$ — число нечетное, то y будет вещественным во всей окрестности $x = 0$. Если же $m+1$ — число четное, то y будет вещественным только при $x \geqslant 0$. τ имеет два вещественных значения, отличающихся знаком, поэтому имеем два вещественных y, определенных при малых $x \geqslant 0$.

Если $k_m < 0$, то снова τ и A_1 определены равенствами (47.27), если $m+1$ — число нечетное. Имеем одно вещественное y, определенное во всей окрестности точки $x = 0$.

Если же $k_m < 0$ и число $m+1$ четное, то

$$\tau = (-x)^{1/(m+1)}, \quad A_1 = (-k_m)^{-1(m+1)}. \tag{47.28}$$

Имеем два вещественных y, определенных при малых $x \leqslant 0$.

Мы нашли все вещественные $y \to 0$ при $x \to 0$ при условиях (47.23).

Предположим теперь, что

$$\alpha_2 = \alpha_3 = 0, \text{ но } \alpha_1 \neq 0. \tag{47.29}$$

В этом случае нет корней уравнения (47.9).

Введем новую неизвестную u равенством

$$x = uy. \tag{47.30}$$

Подставляя это в (47.5), сокращая на y^2 и учитывая условия (47.29), получим

$$\alpha_1 u^2 + \alpha_4 yu^3 + \alpha_5 u^2 y + \alpha_6 uy + \alpha_7 y + \alpha_8 y^2 u^4 + \\ + \alpha_9 y^2 u^3 + \alpha_{10} y^2 u^2 + \alpha_{11} uy^2 + \alpha_{12} y^2 + \ldots = 0. \tag{47.31}$$

Если здесь

$$\alpha_7 \neq 0, \tag{47.32}$$

то из (47.31) получим

$$y = k_2 u^2 + k_3 u^3 + \ldots, \quad k_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_7}. \tag{47.33}$$

Предположим, что $k_2 > 0$, тогда из (47.33) имеем

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} A_k y^{k/2}, \quad A_1 = k_2^{-1/2}. \tag{47.34}$$

Из (47.34) и (47.30) получим

$$y = \left[\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{k/3}\right]^2, \quad c_1 = k_2^{1/6}. \tag{47.35}$$

Таким образом, если имеем (47.29), (47.32) и $k_2 > 0$, то имеем единственное вещественное решение уравнения (47.5) $y \to 0$ при $x \to 0$, определенное во всей окрестности точки $x = 0$.

Пусть теперь

$$k_2 < 0. \tag{47.36}$$

Тогда будем иметь y в виде

$$y = -\left[\sum_{k=1}^{\infty} c_k (-x)^{k/3}\right]^2, \quad c_1 = (-k_2)^{1/6}, \tag{47.37}$$

определенный при малых $x \leqslant 0$.

Предположим теперь, что

$$a_1 = a_2, \tag{47.38}$$

но величина (47.17) равна нулю:

$$A = 0, \quad a_3 \neq 0. \tag{47.39}$$

Тогда уравнение (47.11) имеет вид (47.5), для которого можно повторить предыдущие рассуждения.

Повторяя эти рассуждения, мы либо покажем, что нет вещественных $y \to 0$ при $x \to 0$, либо, если они есть, найдем их в виде, указанном выше. Но может случиться, что мы снова придем к уравнению вида (47.5).

Легко видеть, однако, что мы не можем так прийти к уравнению вида

$$P_m(x, y) + P_{m+1}(x, y) + \ldots = 0, \quad m \geqslant 3, \tag{47.40}$$

где $P_k(x, y)$ — однородные полиномы k-ой степени, если нет $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Может еще случиться, что сколько бы мы ни повторяли эти рассуждения, всякий раз будем получать уравнение вида (47.5). Тогда, как показано в [32], имеем одно $y \to 0$ при $x \to 0$, представимое в виде сходящегося ряда

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k, \tag{47.41}$$

где все c_k единственные (или кратные) корни уравнений вида (47.9).

Если мы докажем, что есть вещественные $y \to 0$ при $x \to 0$ (имеется в виду случай, когда кратный корень уравнения (47.9) $a \neq 0$), то все они имеют одну и ту же главную часть (малую наинизшего порядка)

$$y \approx ax. \tag{47.42}$$

Рассмотрим теперь уравнение (47.40), где $m \geqslant 3$.

Подставляя y из (47.7) в (47.40) и сокращая на x^m, получим

$$P_m(1, u) + P_{m+1}(1, u)x + P_{m+2}(1, u)x^2 + \ldots = 0. \tag{47.43}$$

Обозначим через a корни уравнения

$$P_m(1, a) = 0. \tag{47.44}$$

Полагая

$$u = v + a, \tag{47.45}$$

получим

$$P_m(1, v + a) + P_{m+1}(1, v + a)x + \ldots = 0. \tag{47.46}$$

Разлагая это в ряд по степеням v, найдем[1]

$$\begin{gathered} P_{m+1}(1, a)x + P_{m+2}(1, a)x^2 + P_{m+3}(1, a)x^3 + \ldots + \\ + [P'_m(1, a) + P'_{m+1}(1, a)x + P'_{m+2}(1, a)x^2 + \ldots]v + \\ + \frac{1}{2!}[P''_m(1, a) + P''_{m+1}(1, a)x + \\ + P''_{m+2}(1, a)x^2 + \ldots]v^2 + \ldots = 0. \end{gathered} \tag{47.47}$$

Предположим, что a является простым корнем уравнения (47.44). Тогда $P'_m(1, a) \neq 0$ и из (47.47) имеем

$$v = k_n x^n + k_{n+1}x^{n+1} + \ldots, k_n = -\frac{P_n(1, a)}{P'_m(1, a)}, \tag{47.48}$$

где $P_n(1, a)$ — первая отличная от нуля из величин $P_{m+1}(1, a)$, $P_{m+2}(1, a), \ldots$ На основании (47.7), (47.45) и (47.48) найдем

$$y = x(a + k_n x^n + k_{n+1}x^{n+1} + \ldots). \tag{47.49}$$

Если a вещественное, то и функция (47.49) вещественная. Наоборот, если a комплексное, то и функция (47.49) комплексная.

---

[1] $P_l^{(k)}(1, a)$ — производная k-го порядка по a.

Если все корни уравнения (47.44) $a_1, a_2, \ldots, a_m$ вещественные простые, то в виде (47.49) получим m вещественных решений $y \to 0$ при $x \to 0$ уравнения (47.40) и других таких решений нет.

Если все корни уравнения (47.44) комплексные простые $a_1, \ldots, a_m$, то вещественных $y \to 0$ при $x \to 0$ нет.

Пусть теперь a есть ν-кратный корень уравнения (47.44). Тогда имеем

$$P_m(1, a) = P'_m(1, a) = \ldots = P_m^{(\nu-1)}(1, a) = 0, \quad (47.50)$$

$$P_m^{(\nu)}(1, a) \neq 0.$$

Пусть при этом

$$P_{m+1}(1, a) \neq 0. \quad (47.51)$$

Тогда из (47.47) имеем

$$x = k_\nu v^\nu + k_{\nu+1} v^{\nu+1} + \ldots, \quad (47.52)$$

где

$$k_\nu = -\frac{1}{\nu!} \frac{P_m^{(\nu)}(1, a)}{P_{m+1}(1, a)}.$$

Учитывая знак k_ν, а также четность или нечетность числа ν, мы найдем вещественные $y \to 0$ при $x \to 0$, повторяя рассуждения, аналогичные предыдущим, если a — вещественное число. Наоборот, мы не будем иметь из этих формул вещественного $y \to 0$ при $x \to 0$, соответствующего этому корню a, если a комплексное.

Предположим теперь, что вместо (47.51) имеем

$$P_{m+1}(1, a) = 0. \quad (47.53)$$

Тогда уравнение (47.47) будет иметь вид

$$P_{m+2}(1, a)x^2 + P'_{m+1}(1, a)xv + \frac{1}{2}P''_m(1, a)v^2 + $$
$$+ P(x, v) = 0, \quad (47.54)$$

где $P(x, v)$ содержит члены измерения, бо́льшие 2 относительно x, v. Заметим теперь, что в уравнении (47.47) полином $L(v)$, который составляет совокупность членов, не содержащих x, имеет степень не выше m и не ниже ν, так как

$$P_m^{(k)}(1, v + a) \equiv 0 \text{ при } k > m, \text{ а } P_m^{(\nu)}(1, a) \neq 0.$$

Если (47.54) имеет члены второго измерения (т. е. нет $P_{m+2}(1,a) = P'_{m+1}(1, a) = P''_m(1, a) = 0$), то мы имеем уравнение вида (47.5), которое нами рассмотрено. Но может, конечно, случиться, что совокупность членов низшего измерения в равенстве (47.54) составляет форму третьей или еще высшей степени. Но так как, согласно сделанному выше замечанию, полином $L(v)$ имеет степень не выше m, то либо мы получим уравнение, содержащее линейные члены (при помощи не более чем m последовательных преобразований), либо встретим такой случай, когда эти преобразования, сколько бы раз их ни делать, приводят к уравнению с наинизшей формой одной и той же степени p. В последнем случае уравнение, соответствующее (47.44), всякий раз будет иметь только один p-кратный корень. В этом случае, как показано в [32], уравнение (47.40) имеет вид

$$[a_1x + b_1y + P(x; y)]^p \Phi(x, y) = 0,$$

где $b_1 \neq 0$, $P(x, y)$ — сходящийся ряд по положительным степеням x, y, не содержащий свободного и линейных членов, а $\Phi(x, y)$ — сходящийся ряд, имеющий свободный член.

Таким образом, если здесь a — ν-кратный корень уравнения (47.44) вещественный, то имеем p-кратное вещественное голоморфное в окрестности точки $x = 0$ решение уравнения (47.40) $y \to 0$ при $x \to 0$. Чтобы охватить все вещественные решения уравнения (47.44) $y \to 0$ при $x \to 0$, надо провести аналогичные рассуждения, заменяя $x = uy$. Но это следует делать только в том случае, если полином $P_m(x, y)$ не содержит члена βy^m, так как если здесь $\beta \neq 0$, то преобразование $x = uy$ не приведет к новому решению.

Мы здесь привели результаты из [32], которые подробно там доказаны. В [32] рассмотрены и системы уравнений и в предположении, когда уравнения даны неголоморфными функциями. Там доказано также, что при аналитическом продолжении этих неявных функций не могут встретиться такие особые точки $x = \overset{*}{x}$, что при $x \to \overset{*}{x}$ функция $y = y(x)$ не имеет предела и бесконечное множество значений $y(x)$ попадает в конечную замкнутую область D, погруженную в область определения функции $F(x, y)$. Иначе говоря, нет последовательности точек $(x_k, y_k) \to (\overset{*}{x}, \overset{*}{y}) \in D$, где D — область определения функции $F(x, y)$. Указано также, как определяется вся область существования неявной функции и радиус сходимости рядов, представляющих неявную функцию в окрестности точки $x = 0$.

Пример. Пусть в (47.1) $b \neq 0$ и мы имеем функцию

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k, \tag{47.55}$$

определенную уравнением (47.1). Особой точкой этой аналитической функции $\overset{*}{x}$ может быть только тогда, когда

$$F(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}) = 0, F'_y(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}) = 0. \tag{47.56}$$

Это условие лишь необходимое. Для того чтобы точка $\overset{*}{x}$, определенная равенствами (47.56), была особенной, достаточно, например, чтобы еще было выполнено равенство

$$F'_x(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}) \neq 0. \tag{47.57}$$

Если же наряду с (47.56) имеем

$$F'_x(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}) = 0, \tag{47.58}$$

точка $\overset{*}{x}$ может не быть особенной. Например, если имеем (47.56), (47.58) и корни уравнения

$$\frac{\partial^2 F(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})}{\partial x \partial y} a + \frac{\partial^2 F(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})}{\partial y^2} a^2 = 0$$

суть вещественные простые, то точка $\overset{*}{x}$ не будет особенной для функции (47.55).

Допустим, однако, что имеем (47.56) и (47. 58). Тогда точка $\overset{*}{x}$ будет особенной. Но при этом может оказаться, что вещественная функция (47.55) существует и при $|x| > \overset{*}{x}$. Но эта функция, например, при $x > \overset{*}{x}$ (если $\overset{*}{x}$ вещественная), согласно предыдущему, может представляться рядом по степеням $(x - \overset{*}{x})^{1/p}$, где p — четное положительное число.

Если в области определения функции (47.1) нет вещественных $\overset{*}{x}$, удовлетворяющих равенствам (47.56), то в области определения функции $F(x, y)$ нет вещественных особых точек $\overset{*}{x}$. Тогда вещественная функция (47.1) будет определена при всех вещественных значениях x в области определения функции $F(x, y)$, хотя при этом радиус сходимости ряда (47.55) может быть и будет ограничен комплексным особым значением $\overset{*}{x}$.

Пример. Пусть y задано уравнением

$$\Phi(x, y) = e^{ny} + e^{(n-1)y} - 2 - x = 0.$$

Здесь уравнения (47.56) имеют решения

$$e^{y_1} = 0,\ x_1 = -2 \text{ и } ne^{y_2} + n - 1 = 0,$$

$$x_2 = \left(\frac{1}{n} - 1\right)^n + \left(\frac{1}{n} - 1\right)^{n-1} - 2.$$

Для ряда

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \varphi(x),$$

являющегося решением уравнения $\Phi(x, y) = 0$, особыми точками будут x_1 и x_2, так как условие (47.57) здесь выполнено, ибо $\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} = -2$. Если n — положительное четное, то $x_2 < 0$ и $|x_1| < |x_2|$; поэтому функция $y = \varphi(x)$ будет вещественной в области $-2 < x < \infty$, а написанный выше ряд будет сходиться в области $|x| < 2$. Если же n — положительное нечетное, то $|x_2| < |x_1|$ и ряд $\varphi(x)$ будет сходиться при $|x| < |x_2|$.

§ 48. О ДВУХ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЯХ[1]

Теорема Вейерштрасса [32, 72]. *Пусть дана функция $F(x_1, \ldots, x_m, y)$, голоморфная в окрестности начала координат:*

$$F(x_1, \ldots, x_m, y) = \sum_{p_1+\ldots+p_m+q=1}^{\infty} a_{p_1\ldots p_m q} x_1^{p_1} \ldots x_m^{p_m} y^q, \tag{48.1}$$

где $a_{p_1\ldots p_m q}$ — постоянные и ряд этот сходится при $|x_k| < r$, $|y| < r$ $(k = 1, \ldots, m)$. Здесь r — положительное число.

Предположим, что разложение функции $F(0, \ldots, 0, y)$ в ряд начинается с n-ой степени y, т. е.

$$F(0, \ldots, 0, y) = A_n y^n + A_{n+1} y^{n+1} + \ldots \tag{48.2}$$

и $A_n \neq 0$. Тогда имеем тождество

$$F(x_1, \ldots, x_m, y) \equiv (y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_{n-1} y + a_n) \Phi(x_1, \ldots x_m, y), \tag{48.3}$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — функции от $x_1, \ldots, x_m$, голоморфные в точке $x_1 = \ldots x_m = 0$ и обращающиеся в этой точке в нуль, а $\Phi(x_1, \ldots, x_m, y)$ — голоморфная в точке $x_1 = \ldots = x_m = y = 0$ и $\Phi(0, \ldots, 0, 0) \neq 0$.

Пусть теперь дано два уравнения

$$P(x, y, z) = \sum_{k=m}^{\infty} P_k(x, y, z) = 0, \tag{48.4}$$

[1] [32, 72].

$$Q(x, y, z) = \sum_{k=n}^{\infty} Q_k(x, y, z) = 0, \tag{48.5}$$

где $P(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$ — голоморфные в окрестности точки $x = y = z = 0$ функции, а $P_k(x, y, z)$ и $Q_k(x, y, z)$ — однородные полиномы степени k.

Теорема 48.1 [73]. *Если уравнения (48.4), (48.5) определяют функции*

$$y = y(z) \to 0, \quad x = x(z) \to 0 \quad \text{при} \quad z \to 0, \tag{*}$$

то эти функции представимы в виде[1]

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^{\frac{k}{\nu}}, \tag{48.6}$$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k z^{\frac{k}{\mu}}, \tag{48.7}$$

за исключением того случая, когда уравнения (48.4), (48.5) имеют общий корень $x = x(y, z)$ при произвольных y и z.

Доказательство. Предположим, что

$$P(x, 0, 0) = A_p x^p + A_{p+1} x^{p+1} + \ldots, \tag{48.8}$$

$$Q(x, 0, 0) = B_q x^q + B_{q+1} x^{q+1} + \ldots, \tag{48.9}$$

где

$$A_p \neq 0 \quad \text{и} \quad B_q \neq 0. \tag{48.10}$$

Тогда на основании теоремы Вейерштрасса уравнения (48.4) и (48.5) можно записать и так:

$$P(x, y, z) = [x^p + \varphi_1(y, z) x^{p-1} + \ldots + \varphi_p(y, z)]\, \Phi(x, y, z) = 0, \tag{48.11}$$

$$Q(x, y, z) = [x^q + \psi_1(y, z) x^{q-1} + \ldots + \psi_q(y, z)]\, \Psi(x, y, z) = 0, \tag{48.12}$$

где $\varphi_k(y, z)$ и $\psi_k(y, z)$ — функции, голоморфные в точке $y = z = 0$ и обращающиеся в нуль в этой точке, $\Phi(0, 0, 0) \neq 0$, $\Psi(0, 0, 0) \neq 0$. Отсюда следует, что для определения функций

$$x = x(z), \quad y = y(z), \tag{48.13}$$

[1] В [74] см. обзор Н. Чеботарева методов получения формальных разложений (48.6), (48.7) по методу Ньютона. К сожалению, эта работа нам не была известна при написании [32], поэтому она не была упомянута в этой работе. Но [74] не изменяет [32].

удовлетворяющих уравнениям (48.4), (48.5) в окрестности точки $x=y=z=0$, мы можем написать

$$L_1(x)=x^p+\varphi_1(y,\ z)x^{p-1}+\ldots+\varphi_p(y,\ z)=0, \qquad (48.14)$$

$$L_2(x)=x^q+\psi_1(y,\ z)x^{q-1}+\ldots+\psi_q(y,\ z)=0. \qquad (48.15)$$

Исключая отсюда x, найдем необходимое и достаточное условие совместности уравнений (48.14) и (48.15):

$$\Phi(\varphi_1,\ldots,\ \varphi_p,\ \psi_1,\ldots,\psi_q)=Z(y,\ z)=\sum_{k=1}^{\infty} Z_k(y,z)=0, \qquad (48.16)$$

где Φ — известный полином [35] от $\varphi_1,\ldots,\ \varphi_p,\ \psi_1,\ldots,\psi_q$; $Z(y,\ z)$ — функция, голоморфная в окрестности точки $y=z=0$, а $Z_k(y,\ z)$ — однородные полиномы степени k.

Рассматривая уравнение (48.16), мы можем встретить следующие случаи:

1. $\Phi(\varphi_1,\ldots,\ \varphi_p,\ \psi_1,\ldots,\ \psi_q)\equiv 0$. Тогда уравнения (48.14) и (48.15), а тем самым и (48.4), (48.5) будут иметь общие корни

$$x=x_\nu(y,\ z) \quad (\nu=1,\ 2,\ \ldots) \qquad (48.17)$$

при произвольных y и z. Мы можем, следовательно, взять произвольную функцию

$$y=y(z)\longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad z\longrightarrow 0, \qquad (48.18)$$

а $x(z)$ найдем в виде

$$x=x_\nu\,[y(z),\ z] \quad (\nu=1,\ 2,\ \ldots). \qquad (48.19)$$

Но может случиться, что $x_\nu(y,\ z)\nrightarrow 0$ при $y\longrightarrow 0$ и $z\longrightarrow 0$. Тогда (48.18) и (48.19) не будут решением требуемого вида (*).

Замечание. Если имеем 1, то уравнения (48.14), (48.15) можно записать в виде

$$L_1(x)L(x)=0, \quad L_2(x)L(x)=0,$$

где $L_1,\ L_2,\ L$ — полиномы от x с коэффициентами, зависящими от y и z. В этом случае мы будем искать решение (48.14), (48.15) и из уравнений

$$L_1(x)=0, \quad L(x)=0$$

или

$$L(x)=0, \quad L_2(x)=0$$

или

$$L_1(x)=0, \quad L_2(x)=0,$$

что возвращает нас к уравнениям вида (48.14), (48.15).

II. Уравнение (48.16), неразрешимое в виде $y=\varphi(z)\to 0$ при $z\to 0$. Тогда уравнения (48.4), (48.5) не имеют решения требуемого вида (*).

III. Уравнение (48.16) доставляет нам решение

$$y=y(z)\to 0 \quad \text{при} \quad z\to 0. \tag{48.20}$$

Это решение может быть не единственным, но представимо всегда в виде (§ 47)

$$y=\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^{\frac{k}{\nu}}. \tag{48.21}$$

Из уравнений (48.14), (48.15) мы видим, что и $x=x(z)$ получим в виде

$$x=\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k z^{\frac{k}{\mu}}. \tag{48.22}$$

Здесь α_k и β_k — постоянные, а ν и μ — целые положительные числа.

Может быть и так, что (случай II) уравнение (48.16) не содержит y, но имеет решение $z=0$. Тогда (48.4) и (48.5) могут иметь решение

$$z=0, \quad x=x(y)\to 0 \quad \text{при} \quad y\to 0 \tag{48.23}$$

и $x(y)$ представимо в виде

$$x=\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k y^{\frac{k}{\delta}}, \tag{48.24}$$

где γ_k — постоянные, а δ — целое положительное число.

Пусть теперь мы не имеем (48.8), (48.9), т. е. имеем или

$$P(x,\ 0,\ 0)\equiv 0 \quad \text{или} \quad Q(x,\ 0,\ 0)\equiv 0.$$

Тогда мы не будем иметь одновременно (48.11), (48.12). Но в этом случае уравнения (48.4), (48.5) можно привести к такому виду, когда будут (48.8), (48.9). С этой целью введем новые переменные при помощи равенств

$$\left.\begin{aligned} x&=a_1u+b_1v+c_1w\\ y&=a_2u+b_2v+c_2w\\ z&=a_3u+b_3v+c_3w \end{aligned}\right\}. \tag{48.25}$$

Подставим эти значения x, y и z в уравнения (48.4), (48.5). Тогда получим

$$P(x, y, z) = \sum_{k+l+\nu=m}^{\infty} \alpha_{kl\nu} u^k v^l w^\nu = 0, \tag{48.26}$$

$$Q(x, y, z) = \sum_{k+l+\nu=n}^{\infty} \beta_{kl\nu} u^k v^l w^\nu = 0, \tag{48.27}$$

причем здесь ряды сходятся в окрестности точки $u=v=$ $=w=0$. Легко видеть, что коэффициенты при u^m и u^n в уравнениях (48.26), (48.27) соответственно равны:

$$P = P_m(a_1, a_2, a_3), \tag{48.28}$$

$$Q = Q_n(a_1, a_2, a_3). \tag{48.29}$$

Выберем постоянные a_1, a_2, a_3 такими, чтобы

$$P \neq 0 \quad \text{и} \quad Q \neq 0. \tag{48.30}$$

Остальные коэффициенты преобразования (48.25) выберем так, чтобы составленный из них определитель был отличен от нуля. При условиях (48.30) на основании теоремы Вейерштрасса из (48.26), (48.27) имеем:

$$P(x, y, z) = [u^m + \varphi_1(v, w)u^{m-1} + \ldots + \varphi_m(v, w)] \times \\ \times \Phi(u, v, w) = 0, \tag{48.31}$$

$$Q(x, y, z) = [u^n + \psi_1(v, w)u^{n-1} + \ldots + \psi_n(v, w)] \times \\ \times \Psi(u, v, w) = 0, \tag{48.32}$$

где $\varphi_k(v, w)$ и $\psi_k(v, w)$ — голоморфные функции в точке $v=$ $=w=0$ и равные нулю в этой точке, а $\Phi(u, v, w)$ и $\Psi(u, v, w)$ — голоморфные функции в точке $u=v=w=0$ и $\Phi(0, 0, 0) \neq 0$, $\Psi(0, 0, 0) \neq 0$.

Если мы не имеем случаев I и II, то решение уравнений (48.31), (48.32) получим в виде

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k w^{\frac{k}{\nu}}, \tag{48.33}$$

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k w^{\frac{k}{\mu}}, \tag{48.34}$$

где α_k, β_k — постоянные, а ν, μ — целые положительные числа. Подставляя эти значения u и v в последнее из уравнений (48.25), получим

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k w^{\frac{k}{l}}, \tag{48.35}$$

где γ_k — постоянные, а l — положительное целое число.

На основании (48.25) мы снова получим x и y в виде (48.6), (48.7). Теорема 48.1 доказана[1].

В [75] изучается неявная функция k переменных.

§ 49. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ (*), ОПРЕДЕЛЕННЫХ УРАВНЕНИЯМИ (48.4), (48.5)

Пусть задана система двух уравнений вида

$$Az + By + Mx + P(x, y, z) = 0, \tag{49.1}$$

$$Cz + Dy + Nx + Q(x, y, z) = 0, \tag{49.2}$$

где A, B, M, C, D и N — постоянные, а $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ — степенные ряды с постоянными коэффициентами, не имеющие свободных и линейных членов относительно x, y, z. Эти ряды сходятся в окрестности начала координат. Будем искать решения уравнений (49.1), (49.2) $y = y(z)$, $x = x(z)$, обладающие свойствами

$$x(z) \to 0, \quad y(z) \to 0 \quad \text{при} \quad z \to 0, \tag{49.3}$$

или вообще такие, что

$$x(z_1), \quad x(z_2), \ldots \to 0 \quad \text{и} \quad y(z_1), \; y(z_2), \ldots \to 0 \tag{49.4}$$

при $z_1, z_2, \ldots \to 0$.

Прежде всего заметим, что если ранг матрицы коэффициентов при линейных членах равен двум, то мы сразу решаем вопрос о существовании указанного решения. При $BN - MD \neq 0$ такое решение существует единственное и легко находится.

---

[1] Аналогично исследуется вопрос о существовании решения $y_1(z) \to 0, \ldots, y_m(z) \to 0$ при $z \to 0$ уравнений

$$F_k(y_1, y_2, \ldots, y_m, z) = \sum_{p_1+\ldots+p_m+q=1}^{\infty} a^{(k)}_{p_1 \ldots p_m q}\, y_1^{p_1} \ldots y_m^{p_m} z^q = 0 \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Пусть теперь $AD - BC \neq 0$. Тогда имеем решение вида

$$z = \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_k x^k, \qquad y = \sum_{k=n}^{\infty} \beta_k x^k, \tag{49.5}$$

где α_k, β_k — постоянные коэффициенты. Отсюда видим, что искомые решения существуют и мы все их находим. При известных обстоятельствах (зависящих от знаков α_m, β_n и четности и нечетности чисел m и n) эти вещественные решения определены при $z > 0$ и $z < 0$ или только в одной из этих областей.

Предположим теперь, что ранг матрицы коэффициентов при линейных членах равен единице, т. е. что хотя бы один из коэффициентов A, B, M, C, D и N не равен нулю. Например, пусть $A \neq 0$. Тогда из уравнения (49.1) находим

$$z = \varphi(x, y), \tag{49.6}$$

где $\varphi(x, y)$ — ряд, сходящийся в окрестности начала координат. Подставляя это значение z в уравнение (49.2), мы получим уравнение вида

$$F(x, y) = 0$$

и, следовательно, поставленный вопрос будет решен, если не столкнемся с тем случаем, когда

$$F(x, y) = (ax + by + cx^2 + dxy + \varepsilon y^2 + \dots)^2.$$

В этом случае процесс определения функции $y = y(x)$ является трансцендентным и трудно обнаруживаемым (§ 6 [32]).

Пусть теперь $A = B = M = C = D = N = 0$. Тогда уравнения (49.1) и (49.2) можно записать так:

$$F = P_m(x, y, z) + P_{m+1}(x, y, z) + \dots = 0, \tag{49.7}$$

$$\Phi = Q_n(x, y, z) + Q_{n+1}(x, y, z) + \dots = 0, \tag{49.8}$$

где $P_k(x, y, z)$ и $Q_k(x, y, z)$ суть однородные многочлёны степени k. Чтобы решить поставленный вопрос, введем новые функции u и v равенствами[1]

$$x = uz, \quad y = vz \tag{49.9}$$

[1] Этой подстановкой впервые мы и пользовались в [32].

и предположим, что последовательности

$$\left.\begin{array}{l} u(z_1),\ u(z_2),\ldots, \\ v(z_1),\ v(z_2),\ldots \end{array}\right\} \tag{49.10}$$

при $z_1,\ z_2,\ldots \to 0$ ограничены.

Подставляя значения x и y из (49.9) в (49.7), (49.8) и сокращая на z^m, получим

$$\left.\begin{array}{l} P_m(u, v, 1) + P_{m+1}(u, v, 1)z + P_{m+2}(u, v, 1)z^2 + \ldots = 0 \\ Q_n(u, v, 1) + Q_{n+1}(u, v, 1)z + Q_{n+2}(u, v, 1)z^2 + \ldots = 0 \end{array}\right\}. \tag{49.11}$$

Так как $z_1,\ z_2,\ldots \to 0$ и последовательности (49.10) ограничены, то должно быть

$$u_1,\ u_2,\ldots \to a \text{ и } v_1,\ v_2,\ldots \to b, \tag{49.12}$$

где $a,\ b$ — решения уравнений

$$P_m(a, b, 1) = 0,\ Q_n(a, b, 1) = 0. \tag{49.13}$$

Сделаем в равенствах (49.9) замену

$$u = \tau + a,\ v = \theta + b, \tag{49.14}$$

где τ и θ — новые неизвестные, обладающие свойствами

$$\tau(z_1),\ \tau(z_2),\ldots \to 0,\ \theta(z_1),\ \theta(z_2),\ldots \to 0 \tag{49.15}$$

при $z_1,\ z_2,\ldots \to 0$.

Подставляя u и v из (49.14) в (49.11), найдем

$$P_m(\tau + a, \theta + b, 1) + P_{m+1}(\tau + a, \theta + b, 1)z +$$

$$+ P_{m+2}(\tau + a, \theta + b, 1)z^2 + \ldots = 0, \tag{49.16}$$

$$Q_n(\tau + a, \theta + b, 1) + Q_{n+1}(\tau + a, \theta + b, 1)z +$$

$$+ Q_{n+2}(\tau + a, \theta + b, 1)z^2 + \ldots = 0. \tag{49.17}$$

Разлагая (49.16) и (49.17) в ряды по степеням τ и θ, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_{m+k}(a, b, 1)z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial P_{m+k}(a, b, 1)}{\partial a} z^k \tau +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial P_{m+k}(a, b, 1)}{\partial b}z^k\theta+$$

$$+\sum_{\nu+l=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial^{\nu+l}P_{m+k}(a, b, 1)}{\partial a^\nu\,\partial b^l}z^k\tau^\nu\,\theta^l=0, \tag{49.18}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}Q_{n+k}(a, b, 1)z^k+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial Q_{n+k}(a, b, 1)}{\partial a}z^k\tau+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial Q_{n+k}(a, b, 1)}{\partial b}z^k\theta+$$

$$+\sum_{\nu+l=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial^{\nu+l}Q_{n+k}(a, b, 1)}{\partial a^\nu\,\partial b^l}z^k\tau^\nu\,\theta^l=0. \tag{49.19}$$

Мы снова имеем уравнения вида (49.7), (49.8), и числа m, n здесь будут меньше или равны прежним. Вообще же говоря, они будут меньше прежних.

Если в (49.18), (49.19) имеем

$$\frac{\partial P_m(a, b, 1)}{\partial a}\,\frac{\partial Q_n(a, b, 1)}{\partial b}-\frac{\partial P_m(a, b, 1)}{\partial b}\,\frac{\partial Q_n(a, b, 1)}{\partial a}\neq 0,$$

то из уравнений (49.18), (49.19) находим

$$\left.\begin{aligned}\tau&=a_pz^p+a_{p+1}z^{p+1}+\ldots\\ \theta&=b_qz^q+b_{q+1}z^{q+1}+\ldots\end{aligned}\right\}. \tag{49.20}$$

На основании (49.14) мы получим

$$\left.\begin{aligned}x&=z(a+a_pz^p+a_{p+1}z^{p+1}+\ldots)\\ y&=z(b+b_qz^q+b_{q+1}z^{q+1}+\ldots)\end{aligned}\right\}. \tag{49.21}$$

Здесь p и q — положительные целые числа. Если a и b — вещественные числа, то и решение (49.21) вещественное.

В начале этого параграфа мы видели, как решается вопрос о существовании требуемого решения, если хоть одна из величин

$$\left.\begin{matrix}P_{m+1}(a, b, 1), & \dfrac{\partial P_m(a, b, 1)}{\partial a}, & \dfrac{\partial P_m(a, b, 1)}{\partial b}\\[2ex] Q_{n+1}(a, b, 1), & \dfrac{\partial Q_n(a, b, 1)}{\partial a}, & \dfrac{\partial Q_n(a, b, 1)}{\partial b}\end{matrix}\right\} \tag{49.22}$$

отлична от нуля. Именно, в этом случае дело сводится к случаю одного уравнения с двумя переменными.

Предположим, что все последовательные преобразования вида (49.9) и (49.14) приводят нас всякий раз к уравнениям (49.7) и (49.8) с $m > 1$. Тогда мы не сможем найти требуемого решения[1]. Могут, конечно, и уравнения (49.13) оказаться несовместными[2], что будет доказывать отсутствие такого решения, которое обладает одновременно свойствами (49.4) и (49.10).

Мы можем искать решение u в виде

$$x = uz, \quad z = vy, \tag{49.23}$$

где

$$u(z_1),\ u(z_2),\ldots \text{ и } v(z_1),\ v(z_2),\ldots \tag{49.24}$$

ограничены. При этом мы имеем

$$x = p(z)\,y,\ p(z) = u(z)\,v(z),$$

где последовательность $p(z_1)$, $p(z_2),\ldots$ ограничена. Тем самым мы имеем случай

$$x = p(z)\,y,\ z = q(z)\,y, \tag{49.25}$$

где последовательности

$$p(z_1),\ p(z_2),\ldots \text{ и } q(z_1),\ q(z_2),\ldots \tag{49.26}$$

ограничены. Далее здесь можно поступать так же, как и в случае (49.9).

Теорема 49.1. *Если система (49.7), (49.8) имеет решение*

$$x = x(z),\ y = y(z), \tag{49.27}$$

обладающее свойством $x \to 0$, $y \to 0$ при $z \to 0$, то для такого решения мы имеем один из трех случаев:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & x = u(z)\,z,\ y = v(z)\,z \\ \text{II.} & x = u(y)\,y,\ z = v(y)\,y \\ \text{III.} & z = u(x)\,x,\ y = v(x)\,x \end{array}\right\}, \tag{49.28}$$

где последовательности $u_1, u_2,\ldots, v_1, v_2,\ldots$, соответствующие $z_1, z_2,\ldots$, ограничены[3].

---

[1] См. стр. 40 [32].

[2] Или иметь решение $b = \varphi(a)$.

[3] Может, конечно, случиться и так, что одновременно имеем случаи I, II и III.

Доказательство. Если в (49.9) $v \to \infty$ при $z \to 0$, то в (49.23) $v(z) \to 0$. Если в (49.23) имеем последовательность $u(z_1), u(z_2), \ldots$ ограниченной, то получаем (49.25). Если же в (49.23) $u(z) \longrightarrow \infty$ при $z \to 0$, то рассмотрим

$$x = p(z)\, y. \tag{49.29}$$

Если имеем последовательность $p(y_1), p(y_2), \ldots$ ограниченной, то тем самым имеем (49.25) и (49.26). Если же в (49.29) $p(z) \longrightarrow \infty$ при $y \to 0$, то полагаем

$$y = p_1(x)\, x, \tag{49.30}$$

где $p_1(x) \longrightarrow 0$ при $x \to 0$.

На основании $z = v(y)\, y$, где $v \to 0$ при $y \to 0$ в силу (49.23), получаем

$$z = q(x)\, x, \tag{49.31}$$

где $q = vp_1 \to 0$ при $x \to 0$, т. е. мы снова имеем

$$z = q(x)\, x, \quad y = p_1(x)\, x; \tag{49.32}$$

где $q(x) \to 0$ и $p_1(x) \to 0$ при $x \to 0$. Теорема 49.1 доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ТАБЛИЦА КОЭФФИЦИЕНТОВ М. А. ЛАППО-ДАНИЛЕВСКОГО[1]

p_1	$a^{(1)}_{p_1}$
−1	1
0	0
−2	0

p_1	p_2	$a^{(1)}_{p_1 p_2}$
0	−2	1
−1	−1	0
−2	0	−1

p_1	p_2	p_3	$a^{(1)}_{p_1 p_2 p_3}$
0	−1	−2	1
0	−2	−1	0
−1	0	−2	−1
−1	−1	−1	0
−1	−2	0	−1
−2	0	−1	0
−2	−1	0	1

p_1	p_2	p_3	p_4	$a^{(1)}_{p_1 p_2 p_3 p_4}$
0	0	−2	−2	$\frac{1}{2}$
0	−1	−1	−2	1
0	−1	−2	−1	0
0	−2	0	−2	−1
0	−2	−1	−1	0
0	−2	−2	0	−1
−1	0	−1	−2	−2
−1	0	−2	−1	0
−1	−1	0	−2	1
−1	−1	−1	−1	0
−1	−1	−2	0	−1
−1	−2	0	−1	0
−1	−2	−1	0	2
−2	0	0	−2	1
−2	0	−1	−1	0
−2	0	−2	0	1
−2	−1	0	−1	0
−2	−1	−1	0	−1
−2	−2	0	0	$-\frac{1}{2}$

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	$a^{(1)}_{p_1 p_2 \ldots p_5}$
0	0	−1	−2	−2	$\frac{1}{4}$
0	0	−2	−1	−2	$\frac{1}{2}$
0	0	−2	−2	−1	0
0	−1	0	−2	−2	$\frac{1}{2}$

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	$a^{(1)}_{p_1 p_2 \ldots p_5}$
0	−1	−1	−1	−2	1
0	−1	−1	−2	−1	0
0	−1	−2	0	−2	−1
0	−1	−2	−1	−1	0
0	−1	−2	−2	0	−1
0	−2	0	−1	−2	−2
0	−2	0	−2	−1	0
0	−2	−1	0	−2	1

[1] Таблица вычислена сотрудниками Ленинградского отделения Математического института АН СССР О. А. Федоровой, И. М. Варенцовой под руководством канд. физ.-мат. наук К. Е. Чернина.

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	$a^{(1)}_{p_1p_2\ldots p_5}$
0	−2	−1	−1	−1	0
0	−2	−1	−2	0	−1
0	−2	−2	0	−1	0
0	−2	−2	−1	0	2
−1	0	0	−2	−2	$-\frac{5}{4}$
−1	0	−1	−1	−2	−3
−1	0	−1	−2	−1	0
−1	0	−2	0	−2	2
−1	0	−2	−1	−1	0
−1	0	−2	−2	0	0
−1	−1	0	−1	−2	3
−1	−1	0	−2	−1	0
−1	−1	−1	0	−2	−1
−1	−1	−1	−1	−1	0
−1	−1	−1	−2	0	−1
−1	−1	−2	0	−1	0
−1	−1	−2	−1	0	3
−1	−2	0	0	−2	0
−1	−2	0	−1	−1	0
−1	−2	0	−2	0	2
−1	−2	−1	0	−1	0

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	$a^{(1)}_{p_1p_2\ldots p_5}$
−1	−2	−1	−1	0	−3
−1	−2	−2	0	0	$-\frac{5}{4}$
−2	0	0	−1	−2	2
−2	0	0	−2	−1	0
−2	0	−1	0	−2	−1
−2	0	−1	−1	−1	0
−2	0	−1	−2	0	1
−2	0	−2	0	−1	0
−2	0	−2	−1	0	−2
−2	−1	0	0	−2	−1
−2	−1	0	−1	−1	0
−2	−1	0	−2	0	−1
−2	−1	−1	0	−1	0
−2	−1	−1	−1	0	1
−2	−1	−2	0	0	$\frac{1}{2}$
−2	−2	0	0	−1	0
−2	−2	0	−1	0	$\frac{1}{2}$
−2	−2	−1	0	0	$\frac{1}{4}$

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	$a^{(1)}_{p_1p_2\ldots p_6}$
0	0	0	−2	−2	−2	$\frac{1}{12}$
0	0	−1	−1	−2	−2	$\frac{1}{8}$
0	0	−1	−2	−1	−2	$\frac{1}{4}$
0	0	−1	−2	−2	−1	0
0	0	−2	0	−2	−2	$\frac{1}{4}$
0	0	−2	−1	−1	−2	$\frac{1}{2}$
0	0	−2	−1	−2	−1	0
0	0	−2	−2	0	−2	$-\frac{1}{2}$
0	0	−2	−2	−1	−1	0
0	0	−2	−2	−2	0	$-\frac{1}{2}$
0	−1	0	−1	−2	−2	$\frac{1}{4}$
0	−1	0	−2	−1	−2	$\frac{1}{2}$
0	−1	0	−2	−2	−1	0

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	$a^{(1)}_{p_1p_2\ldots p_6}$
0	−1	−1	0	−2	−2	$\frac{1}{2}$
0	−1	−1	−1	−1	−2	1
0	−1	−1	−1	−2	−1	0
0	−1	−1	−2	0	−2	−1
0	−1	−1	−2	−1	−1	0
0	−1	−1	−2	−2	0	1
0	−1	−2	0	−1	−2	−2
0	−1	−2	0	−2	−1	0
0	−1	−2	−1	0	−2	1
0	−1	−2	−1	−1	−1	0
0	−1	−2	−1	−2	0	−1
0	−1	−2	−2	0	−1	0
0	−1	−2	−2	−1	0	2
0	−2	0	0	−2	−2	$-\frac{5}{4}$
0	−2	0	−1	−1	−2	−3
0	−2	0	−1	−2	−1	0
0	−2	0	−2	0	−2	2
0	−2	0	−2	−1	−1	0
0	−2	0	−2	−2	0	0
0	−2	−1	0	−1	−2	3
0	−2	−1	0	−2	−1	0
0	−2	−1	−1	−0	−2	−1
0	−2	−1	−1	−1	−1	0

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	$a^{(1)}_{p_1p_2\ldots p_6}$
0	−2	−1	−1	−2	0	−1
0	−2	−1	−2	0	−1	0
0	−2	−1	−2	−1	0	3
0	−2	−2	0	0	−2	0
0	−2	−2	0	−1	−1	0
0	−2	−2	0	−2	0	2
0	−2	−2	−1	0	−1	0
0	−2	−2	−1	−1	0	−3
0	−2	−2	−2	0	0	$-\frac{5}{4}$
−1	0	0	−1	−2	−2	$-\frac{3}{4}$
−1	0	0	−2	−1	−2	$-\frac{7}{4}$
−1	0	0	−2	−2	−1	0
−1	0	−1	0	−2	−2	$-\frac{7}{4}$
−1	0	−1	−1	−1	−2	−4
−1	0	−1	−1	−2	−1	0
−1	0	−1	−2	0	−2	3
−1	0	−1	−2	−1	−1	0
−1	0	−1	−2	−2	0	1
−1	0	−2	0	−1	−2	5
−1	0	−2	0	−2	−1	0
−1	0	−2	−1	0	−2	−2
−1	0	−2	−1	−1	−1	0
−1	0	−2	−1	−2	0	0
−1	0	−2	−2	0	−1	0
−1	0	−2	−2	−1	0	1
−1	−1	0	0	−2	−2	$\frac{17}{8}$
−1	−1	0	−1	−1	−2	6
−1	−1	0	−1	−2	−1	0
−1	−1	0	−2	0	−2	−3
−1	−1	0	−2	−1	−1	0
−1	−1	0	−2	−2	0	−1
−1	−1	−1	0	−1	−2	−4
−1	−1	−1	0	−2	−1	0
−1	−1	−1	−1	0	−2	1
−1	−1	−1	−1	−1	−1	0
−1	−1	−1	−1	−2	0	−1
−1	−1	−1	−2	0	−1	0
−1	−1	−1	−2	−1	0	4
−1	−1	−2	0	0	−2	1
−1	−1	−2	0	−1	−1	0
−1	−1	−2	0	−2	0	3
−1	−1	−2	−1	0	−1	0
−1	−1	−2	−1	−1	0	−6
−1	−1	−2	−2	0	0	$-\frac{17}{8}$
−1	−2	0	0	−1	−2	−1

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	$a^{(1)}_{p_1p_2\ldots p_6}$
−1	−2	0	0	−2	−1	0
−1	−2	0	−1	0	−2	0
−1	−2	0	−1	−1	−1	0
−1	−2	0	−1	−2	0	2
−1	−2	0	−2	0	−1	0
−1	−2	0	−2	−1	0	−5
−1	−2	−1	0	0	−2	−1
−1	−2	−1	0	−1	−1	0
−1	−2	−1	0	−2	0	−3
−1	−2	−1	−1	0	−1	0
−1	−2	−1	−1	−1	0	4
−1	−2	−1	−2	0	0	$\frac{7}{4}$
−1	−2	−2	0	0	−1	0
−1	−2	−2	0	−1	0	$\frac{7}{4}$
−1	−2	−2	−1	0	0	$\frac{3}{4}$
−2	0	0	0	−2	−1	$\frac{5}{4}$
−2	0	0	−1	−1	−2	3
−2	0	0	−1	−2	−1	0
−2	0	0	−2	0	−2	−2
−2	0	0	−2	−1	−1	0
−2	0	0	−2	−2	0	0
−2	0	−1	0	−1	−2	−3
−2	0	−1	0	−2	−1	0
−2	0	−1	−1	0	−2	1
−2	0	−1	−1	−1	−1	0
−2	0	−1	−1	−2	0	1
−2	0	−1	−2	0	−1	0
−2	0	−1	−2	−1	0	−3
−2	0	−2	0	0	−2	0
−2	0	−2	0	−1	−1	0
−2	0	−2	0	−2	0	−2
−2	0	−2	−1	0	−1	0
−2	0	−2	−1	−1	0	3
−2	0	−2	−2	0	0	$\frac{5}{4}$
−2	−1	0	0	−1	−2	−2
−2	−1	0	0	−2	−1	0
−2	−1	0	−1	0	−2	1
−2	−1	0	−1	−1	−1	0
−2	−1	0	−1	−2	0	−1
−2	−1	0	−2	0	−1	0
−2	−1	0	−2	−1	0	2
−2	−1	−1	0	0	−2	1
−2	−1	−1	0	−1	−1	0
−2	−1	−1	0	−2	0	1
−2	−1	−1	−1	0	−1	0
−2	−1	−1	−1	−1	0	−1

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	$\alpha^{(1)}_{p_1p_2\ldots p_6}$
−2	−1	−1	−2	0	0	$-\frac{1}{2}$
−2	−1	−2	0	0	−1	0
−2	−1	−2	0	−1	0	$-\frac{1}{2}$
−2	−1	−2	−1	0	0	$-\frac{1}{4}$
−2	−2	0	0	0	−2	$\frac{1}{2}$
−2	−2	0	0	−1	−1	0
−2	−2	0	0	−2	0	$\frac{1}{2}$

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	$\alpha^{(1)}_{p_1p_2\ldots p_6}$
−2	−2	0	−1	0	−1	0
−2	−2	0	−1	−1	0	$-\frac{1}{2}$
−2	−2	0	−2	0	0	$-\frac{1}{4}$
−2	−2	−1	0	0	−1	0
−2	−2	−1	0	−1	0	$-\frac{1}{4}$
−2	−2	−1	−1	0	0	$-\frac{1}{8}$
−2	−2	−2	0	0	0	$-\frac{1}{12}$

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	$\alpha^{(1)}_{p_1p_2\ldots p_7}$
0	0	0	−1	−2	−2	−2	$\frac{1}{36}$
0	0	0	−2	−1	−2	−2	$\frac{1}{24}$
0	0	0	−2	−2	−1	−2	$\frac{1}{12}$
0	0	0	−2	−2	−2	−1	0
0	0	−1	0	−2	−2	−2	$\frac{1}{24}$
0	0	−1	−1	−1	−2	−2	$\frac{1}{16}$
0	0	−1	−1	−2	−1	−2	$\frac{1}{8}$
0	0	−1	−1	−2	−2	−1	0
0	0	−1	−2	0	−2	−2	$\frac{1}{8}$
0	0	−1	−2	−1	−1	−2	$\frac{1}{4}$
0	0	−1	−2	−1	−2	−1	0
0	0	−1	−2	−2	0	−2	$-\frac{1}{4}$
0	0	−1	−2	−2	−1	−1	0
0	0	−1	−2	−2	−2	0	$-\frac{1}{4}$
0	0	−2	0	−1	−2	−2	$\frac{1}{8}$
0	0	−2	0	−2	−1	−2	$\frac{1}{4}$
0	0	−2	0	−2	−2	−1	0
0	0	−2	−1	0	−2	−2	$\frac{1}{4}$

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	$\alpha^{(1)}_{p_1p_2\ldots p_7}$
0	0	−2	−1	−1	−1	−2	$\frac{1}{2}$
0	0	−2	−1	−1	−2	−1	0
0	0	−2	−1	−2	0	−2	$-\frac{1}{2}$
0	0	−2	−1	−2	−1	−1	0
0	0	−2	−1	−2	−2	0	$-\frac{1}{2}$
0	0	−2	−2	0	−1	−2	−1
0	0	−2	−2	0	−2	−1	0
0	0	−2	−2	−1	0	−2	$\frac{1}{2}$
0	0	−2	−2	−1	−1	−1	0
0	0	−2	−2	−1	−2	0	$-\frac{1}{2}$
0	0	−2	−2	−2	0	−1	0
0	0	−2	−2	−2	−1	0	1
0	−1	0	0	−2	−2	−2	$\frac{1}{12}$
0	−1	0	−1	−1	−2	−2	$\frac{1}{8}$
0	−1	0	−1	−2	−1	−2	$\frac{1}{4}$
0	−1	0	−1	−2	−2	−1	0
0	−1	0	−2	0	−2	−2	$\frac{1}{4}$
0	−1	0	−2	−1	−1	−2	$\frac{1}{2}$
0	−1	0	−2	−1	−2	−1	0
0	−1	0	−2	−2	0	−2	$-\frac{1}{2}$
0	−1	0	−2	−2	−1	−1	0

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	$a^{(1)}_{p_1p_2\ldots p_7}$
0	−1	0	−2	−2	−2	0	$-\frac{1}{2}$
0	−1	−1	0	−1	−2	−2	$\frac{1}{4}$
0	−1	−1	0	−2	−1	−2	$\frac{1}{2}$
0	−1	−1	0	−2	−2	−1	0
0	−1	−1	−1	0	−2	−2	$\frac{1}{2}$
0	−1	−1	−1	−1	−1	−2	1
0	−1	−1	−1	−1	−2	−1	0
0	−1	−1	−1	−2	0	−2	−1
0	−1	−1	−1	−2	−1	−1	0
0	−1	−1	−1	−2	−2	0	−1
0	−1	−1	−2	0	−1	−2	−2
0	−1	−1	−2	0	−2	−1	0
0	−1	−1	−2	−1	0	−2	1
0	−1	−1	−2	−1	−1	−1	0
0	−1	−1	−2	−1	−2	0	−1
0	−1	−1	−2	−2	0	−1	0
0	−1	−1	−2	−2	−1	0	2
0	−1	−2	0	0	−2	−2	$-\frac{5}{4}$
0	−1	−2	0	−1	−1	−2	−3
0	−1	−2	0	−1	−2	−1	0
0	−1	−2	0	−2	0	−2	2
0	−1	−2	0	−2	−1	−1	0
0	−1	−2	0	−2	−2	0	0
0	−1	−2	−1	0	−1	−2	3
0	−1	−2	−1	0	−2	−1	0
0	−1	−2	−1	−1	0	−2	−1
0	−1	−2	−1	−1	−1	−1	0
0	−1	−2	−1	−1	−2	0	−1
0	−1	−2	−1	−2	0	−1	0
0	−1	−2	−1	−2	−1	0	3
0	−1	−2	−2	0	0	−2	0
0	−1	−2	−2	0	−1	−1	0
0	−1	−2	−2	0	−2	0	2
0	−1	−2	−2	−1	0	−1	0
0	−1	−2	−2	−1	−1	0	−3
0	−1	−2	−2	−2	0	0	$-\frac{5}{4}$
0	−2	0	0	−1	−2	−2	$-\frac{3}{4}$
0	−2	0	0	−2	−1	−2	$-\frac{7}{4}$
0	−2	0	0	−2	−2	−1	0
0	−2	0	−1	0	−2	−2	$-\frac{7}{4}$
0	−2	0	−1	−1	−1	−2	−4

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	$a^{(1)}_{p_1p_2\ldots p_7}$
0	−2	0	−1	−1	−2	−1	0
0	−2	0	−1	−2	0	−2	3
0	−2	0	−1	−2	−1	−1	0
0	−2	0	−1	−2	−2	0	1
0	−2	0	−2	0	−1	−2	5
0	−2	0	−2	0	−2	−1	0
0	−2	0	−2	−1	0	−2	−2
0	−2	0	−2	−1	−1	−1	0
0	−2	0	−2	−1	−2	0	0
0	−2	0	−2	−2	0	−1	0
0	−2	0	−2	−2	−1	0	1
0	−2	−1	0	0	−2	−2	$\frac{17}{8}$
0	−2	−1	0	−1	−1	−2	6
0	−2	−1	0	−1	−2	−1	0
0	−2	−1	0	−2	0	−2	−3
0	−2	−1	0	−2	−1	−1	0
0	−2	−1	0	−2	−2	0	−1
0	−2	−1	−1	0	−1	−2	−4
0	−2	−1	−1	0	−2	−1	0
0	−2	−1	−1	−1	0	−2	1
0	−2	−1	−1	−1	−1	−1	0
0	−2	−1	−1	−1	−2	0	−1
0	−2	−1	−1	−2	0	−1	0
0	−2	−1	−1	−2	−1	0	4
0	−2	−1	−2	0	0	−2	1
0	−2	−1	−2	0	−1	−1	0
0	−2	−1	−2	0	−2	0	3
0	−2	−1	−2	−1	0	−1	0
0	−2	−1	−2	−1	−1	0	−6
0	−2	−1	−2	−2	0	0	$-\frac{17}{8}$
0	−2	−2	0	0	−1	−2	−1
0	−2	−2	0	0	−2	−1	0
0	−2	−2	0	−1	0	−2	0
0	−2	−2	0	−1	−1	−1	0
0	−2	−2	0	−1	−2	0	0
0	−2	−2	0	−2	0	−1	0
0	−2	−2	0	−2	−1	0	−5
0	−2	−2	−1	0	0	−2	−1
0	−2	−2	−1	0	−1	−1	0
0	−2	−2	−1	0	−2	0	−3
0	−2	−2	−1	−1	0	−1	0
0	−2	−2	−1	−1	−1	0	4
0	−2	−2	−1	−2	0	0	$\frac{7}{4}$
0	−2	−2	−2	0	0	−1	0
0	−2	−2	−2	0	−1	0	$\frac{7}{4}$
0	−2	−2	−2	−1	0	0	$\frac{3}{4}$

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	$a^{(1)}_{p_1p_2\ldots p_7}$
−1	0	0	0	−2	−2	−2	$-\frac{5}{18}$
−1	0	0	−1	−1	−2	−2	$-\frac{7}{16}$
−1	0	0	−1	−2	−1	−2	−1
−1	0	0	−1	−2	−2	−1	0
−1	0	0	−2	0	−2	−2	−1
−1	0	0	−2	−1	−1	−2	$-\frac{9}{4}$
−1	0	0	−2	−1	−2	−1	0
−1	0	0	−2	−2	0	−2	$\frac{7}{4}$
−1	0	0	−2	−2	−1	−1	0
−1	0	0	−2	−2	−2	0	$\frac{3}{4}$
−1	0	−1	0	−1	−2	−2	−1
−1	0	−1	0	−2	−1	−2	$-\frac{9}{4}$
−1	0	−1	0	−2	−2	−1	0
−1	0	−1	−1	0	−2	−2	$-\frac{9}{4}$
−1	0	−1	−1	−1	−1	−2	−5
−1	0	−1	−1	−1	−2	−1	0
−1	0	−1	−1	−2	0	−2	4
−1	0	−1	−1	−2	−1	−1	0
−1	0	−1	−1	−2	−2	0	2
−1	0	−1	−2	0	−1	−2	7
−1	0	−1	−2	0	−2	−1	0
−1	0	−1	−2	−1	0	−2	−3
−1	0	−1	−2	−1	−1	−1	0
−1	0	−1	−2	−1	−2	0	1
−1	0	−1	−2	−2	0	−1	0
−1	0	−1	−2	−2	−1	0	−1
−1	0	−2	0	0	−2	−2	$\frac{27}{8}$
−1	0	−2	0	−1	−1	−2	9
−1	0	−2	0	−1	−2	−1	0
−1	0	−2	0	−2	0	−2	−5
−1	0	−2	0	−2	−1	−1	0
−1	0	−2	0	−2	−2	0	−1
−1	0	−2	−1	0	−1	−2	−7
−1	0	−2	−1	0	−2	−1	0
−1	0	−2	−1	−1	0	−2	2
−1	0	−2	−1	−1	−1	−1	0
−1	0	−2	−1	−1	−2	0	0
−1	0	−2	−1	−2	0	−1	0
−1	0	−2	−1	−2	−1	0	1
−1	0	−2	−2	0	0	−2	1
−1	0	−2	−2	0	−1	−1	0
−1	0	−2	−2	0	−2	0	1
−1	0	−2	−2	−1	0	−1	0
−1	0	−2	−2	−1	−1	0	−3
−1	0	−2	−2	−2	0	0	$-\frac{7}{8}$
−1	−1	0	0	−1	−2	−2	$\frac{23}{16}$
−1	−1	0	0	−2	−1	−2	$\frac{31}{8}$
−1	−1	0	0	−2	−2	−1	0
−1	−1	0	−1	0	−2	−2	$\frac{31}{8}$
−1	−1	0	−1	−1	−1	−2	10
−1	−1	0	−1	−1	−2	−1	0
−1	−1	0	−1	−2	0	−2	−6
−1	−1	0	−1	−2	−1	−1	0
−1	−1	0	−1	−2	−2	0	−2
−1	−1	0	−2	0	−1	−2	−9
−1	−1	0	−2	0	−2	−1	0
−1	−1	0	−2	−1	0	−2	3
−1	−1	0	−2	−1	−1	−1	0
−1	−1	0	−2	−1	−2	0	−1
−1	−1	0	−2	−2	0	−1	0
−1	−1	0	−2	−2	−1	0	3
−1	−1	−1	0	0	−2	−2	$\frac{49}{16}$
−1	−1	−1	0	−1	−1	−2	−10
−1	−1	−1	0	−1	−2	−1	0
−1	−1	−1	0	−2	0	−2	4
−1	−1	−1	0	−2	−1	−1	0
−1	−1	−1	0	−2	−2	0	0
−1	−1	−1	−1	0	−1	−2	5
−1	−1	−1	−1	0	−2	−1	0
−1	−1	−1	−1	−1	0	−2	−1
−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	0
−1	−1	−1	−1	−1	−2	0	−1
−1	−1	−1	−1	−2	0	−1	0
−1	−1	−1	−1	−2	−1	0	5
−1	−1	−1	−2	0	0	−2	0
−1	−1	−1	−2	0	−1	−1	0
−1	−1	−1	−2	0	−2	0	4
−1	−1	−1	−2	−1	0	−1	0
−1	−1	−1	−2	−1	−1	0	−10
−1	−1	−1	−2	−2	0	0	$-\frac{49}{16}$
−1	−1	−2	0	0	−1	−2	3
−1	−1	−2	0	0	−2	−1	0
−1	−1	−2	0	−1	0	−2	−1
−1	−1	−2	0	−1	−1	−1	0
−1	−1	−2	0	−1	−2	0	3
−1	−1	−2	0	−2	0	−1	0
−1	−1	−2	0	−2	−1	0	−9
−1	−1	−2	−1	0	0	−2	−2
−1	−1	−2	−1	0	−1	−1	0

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	$\alpha^{(1)}_{p_1p_2\ldots p_7}$
−1	−1	−2	−1	0	−2	0	−6
−1	−1	−2	−1	−1	0	−1	0
−1	−1	−2	−1	−1	−1	0	10
−1	−1	−2	−1	−2	0	0	$\frac{31}{8}$
−1	−1	−2	−2	0	0	−1	0
−1	−1	−2	−2	0	−1	0	$\frac{31}{8}$
−1	−1	−2	−2	−1	0	0	$\frac{23}{16}$
−1	−2	0	0	0	−2	−2	$-\frac{7}{8}$
−1	−2	0	0	−1	−1	−2	−3
−1	−2	0	0	−1	−2	−1	0
−1	−2	0	0	−2	0	−2	1
−1	−2	0	0	−2	−1	−1	0
−1	−2	0	0	−2	−2	0	1
−1	−2	0	−1	0	−1	−2	1
−1	−2	0	−1	0	−2	−1	0
−1	−2	0	−1	−1	0	−2	0
−1	−2	0	−1	−1	−1	−1	0
−1	−2	0	−1	−1	−2	0	2
−1	−2	0	−1	−2	0	−1	0
−1	−2	0	−1	−2	−1	0	−7
−1	−2	0	−2	0	0	−2	−1
−1	−2	0	−2	0	−1	−1	0
−1	−2	0	−2	0	−2	0	−5
−1	−2	0	−2	−1	0	−1	0
−1	−2	0	−2	−1	−1	0	9
−1	−2	0	−2	−2	0	0	$\frac{27}{8}$
−1	−2	−1	0	0	−1	−2	−1
−1	−2	−1	0	0	−2	−1	0
−1	−2	−1	0	−1	0	−2	1
−1	−2	−1	0	−1	−1	−1	0
−1	−2	−1	0	−1	−2	0	−3
−1	−2	−1	0	−2	0	−1	0
−1	−2	−1	0	−2	−1	0	7
−1	−2	−1	−1	0	0	−2	2
−1	−2	−1	−1	0	−1	−1	0
−1	−2	−1	−1	0	−2	0	4
−1	−2	−1	−1	−1	0	−1	0
−1	−2	−1	−1	−1	−1	0	−5
−1	−2	−1	−1	−2	0	0	$-\frac{9}{4}$
−1	−2	−1	−2	0	0	−1	0
−1	−2	−1	−2	0	−1	0	$-\frac{9}{4}$
−1	−2	−1	−2	−1	0	0	−1
−1	−2	−2	0	0	0	−2	$\frac{3}{4}$
−1	−2	−2	0	0	−1	−1	0
−1	−2	−2	0	0	−2	0	$\frac{7}{4}$
−1	−2	−2	0	−1	0	−1	0
−1	−2	−2	0	−1	−1	0	$-\frac{9}{4}$
−1	−2	−2	0	−2	0	0	−1
−1	−2	−2	−1	0	0	−1	0
−1	−2	−2	−1	0	−1	0	−1
−1	−2	−2	−1	−1	0	0	$-\frac{7}{16}$
−1	−2	−2	−2	0	0	0	$-\frac{5}{18}$
−2	0	0	0	−1	−2	−2	$\frac{3}{4}$
−2	0	0	0	−2	−1	−2	$\frac{7}{4}$
−2	0	0	0	−2	−2	−1	0
−2	0	0	−1	0	−2	−2	$\frac{7}{4}$
−2	0	0	−1	−1	−1	−2	4
−2	0	0	−1	−1	−2	−1	0
−2	0	0	−1	−2	0	−2	−3
−2	0	0	−1	−2	−1	−1	0
−2	0	0	−1	−2	−2	0	−1
−2	0	0	−2	0	−1	−2	−5
−2	0	0	−2	0	−2	−1	0
−2	0	0	−2	−1	0	−2	0
−2	0	0	−2	−1	−1	−1	0
−2	0	0	−2	−1	−2	0	0
−2	0	0	−2	−2	0	−1	0
−2	0	0	−2	−2	−1	0	−1
−2	0	−1	0	0	−2	−2	$-\frac{17}{8}$
−2	0	−1	0	−1	−1	−2	−6
−2	0	−1	0	−1	−2	−1	0
−2	0	−1	0	−2	0	−2	3
−2	0	−1	0	−2	−1	−1	0
−2	0	−1	0	−2	−2	0	1
−2	0	−1	−1	0	−1	−2	4
−2	0	−1	−1	0	−2	−1	0
−2	0	−1	−1	−1	0	−2	−1
−2	0	−1	−1	−1	−1	−1	0
−2	0	−1	−1	−1	−2	0	1
−2	0	−1	−1	−2	0	−1	0
−2	0	−1	−1	−2	−1	0	−4
−2	0	−1	−2	0	0	−2	−1
−2	0	−1	−2	0	−1	−1	0
−2	0	−1	−2	0	−2	0	−3
−2	0	−1	−2	−1	0	−1	0
−2	0	−1	−2	−1	−1	0	6

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	$a^{(1)}_{p_1p_2\ldots p_7}$
−2	0	−1	−2	−2	0	0	$\frac{17}{8}$
−2	0	−2	0	0	−1	−2	1
−2	0	−2	0	0	−2	−1	0
−2	0	−2	0	−1	0	−2	0
−2	0	−2	0	−1	−1	−1	0
−2	0	−2	0	−1	−2	0	−2
−2	0	−2	0	−2	0	−1	0
−2	0	−2	0	−2	−1	0	5
−2	0	−2	−1	0	0	−2	1
−2	0	−2	−1	0	−1	−1	0
−2	0	−2	−1	0	−2	0	3
−2	0	−2	−1	−1	0	−1	0
−2	0	−2	−1	−1	−1	0	−4
−2	0	−2	−1	−2	0	0	$-\frac{7}{4}$
−2	0	−2	−2	0	0	−1	0
−2	0	−2	−2	0	−1	0	$-\frac{7}{4}$
−2	0	−2	−2	−1	0	0	$-\frac{3}{4}$
−2	−1	0	0	0	−2	−2	$-\frac{5}{4}$
−2	−1	0	0	−1	−1	−2	−3
−2	−1	0	0	−1	−2	−1	0
−2	−1	0	0	−2	0	−2	2
−2	−1	0	0	−2	−1	−1	0
−2	−1	0	0	−2	−2	0	0
−2	−1	0	−1	0	−1	−2	3
−2	−1	0	−1	0	−2	−1	0
−2	−1	0	−1	−1	0	−2	−1
−2	−1	0	−1	−1	−1	−1	0
−2	−1	0	−1	−1	−2	0	−1
−2	−1	0	−1	−2	0	−1	0
−2	−1	0	−1	−2	−1	0	3
−2	−1	0	−2	0	0	−2	0
−2	−1	0	−2	0	−1	−1	0
−2	−1	0	−2	0	−2	0	2
−2	−1	0	−2	−1	0	−1	0
−2	−1	0	−2	−1	−1	0	−3
−2	−1	0	−2	−2	0	0	$-\frac{5}{4}$
−2	−1	−1	0	0	−1	−2	2
−2	−1	−1	0	0	−2	−1	0
−2	−1	−1	0	−1	0	−2	−1
−2	−1	−1	0	−1	−1	−1	0
−2	−1	−1	0	−1	−2	0	1
−2	−1	−1	0	−2	0	−1	0
−2	−1	−1	0	−2	−1	0	−1
−2	−1	−1	−1	0	0	−1	−1
−2	−1	−1	−1	0	−1	−1	0

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	$a^{(1)}_{p_1p_2\ldots p_7}$
−2	−1	−1	−1	0	−2	0	−1
−2	−1	−1	−1	−1	0	−1	0
−2	−1	−1	−1	−1	−1	0	1
−2	−1	−1	−1	−2	0	0	$\frac{1}{2}$
−2	−1	−1	−2	0	0	−1	0
−2	−1	−1	−2	0	−1	0	$\frac{1}{2}$
−2	−1	−1	−2	−1	0	0	$\frac{1}{4}$
−2	−1	−2	0	0	0	−1	$-\frac{1}{2}$
−2	−1	−2	0	0	−1	−2	0
−2	−1	−2	0	0	−2	0	$-\frac{1}{2}$
−2	−1	−2	0	−1	0	−1	0
−2	−1	−2	0	−1	−1	0	$\frac{1}{2}$
−2	−1	−2	0	−2	0	0	$\frac{1}{4}$
−2	−1	−2	−1	0	0	−1	0
−2	−1	−2	−1	0	−1	0	$\frac{1}{4}$
−2	−1	−2	−1	−1	0	0	$\frac{1}{8}$
−2	−1	−2	−2	0	0	0	$\frac{1}{12}$
−2	−2	0	0	0	−1	−2	1
−2	−2	0	0	0	−2	−1	0
−2	−2	0	0	−1	0	−2	$-\frac{1}{2}$
−2	−2	0	0	−1	−1	−1	0
−2	−2	0	0	−1	−2	0	$\frac{1}{2}$
−2	−2	0	0	−2	0	−1	0
−2	−2	0	0	−2	−1	0	−1
−2	−2	0	−1	0	0	−2	$-\frac{1}{2}$
−2	−2	0	−1	0	−1	−1	0
−2	−2	0	−1	0	−2	0	$-\frac{1}{2}$
−2	−2	0	−1	−1	0	−1	0
−2	−2	0	−1	−1	−1	0	$\frac{1}{2}$
−2	−2	0	−1	−2	0	0	$\frac{1}{4}$
−2	−2	0	−2	0	0	−1	0
−2	−2	0	−2	0	−1	0	$\frac{1}{4}$

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	$\alpha^{(1)}_{p_1 p_2 \ldots p_7}$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	$\alpha^{(1)}_{p_1 p_2 \ldots p_7}$
-2	-2	0	-2	-1	0	0	$\frac{1}{8}$	-2	-2	-1	-1	0	-1	0	$\frac{1}{8}$
-2	-2	-1	0	0	0	-2	$-\frac{1}{4}$	-2	-2	-1	-1	-1	0	0	$\frac{1}{16}$
-2	-2	-1	0	0	-1	-1	0	-2	-2	-1	-2	0	0	0	$\frac{1}{24}$
-2	-2	-1	0	0	-2	0	$-\frac{1}{4}$	-2	-2	-2	0	0	0	-1	0
-2	-2	-1	0	-1	0	-1	0	-2	-2	-2	0	0	-1	0	$\frac{1}{12}$
-2	-2	-1	0	-1	-1	0	$\frac{1}{4}$	-2	-2	-2	0	-1	0	0	$\frac{1}{24}$
-2	-2	-1	0	-2	0	0	$\frac{1}{8}$	-2	-2	-2	-1	0	0	0	$\frac{1}{36}$
-2	-2	-1	-1	0	0	-1	0								

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаппо-Данилевский И. А. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. ГИТТЛ, 1957.

2. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. III, 1955.

3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. ГИТТЛ, 1953.

4. Еругин Н. П. Метод Лаппо-Данилевского в теории линейных дифференциальных уравнений. Изд. Ленинградского университета, 1956.

5. Еругин Н. П. О показательной подстановке системы линейных дифференциальных уравнений (проблема Пуанкаре). Матем. сб., т. 3 (45), № 3, 1938.

6. Гурса Э. Курс математического анализа, т. II, ч. 1. ГИТТЛ, 1933.

7. Hukuhara M. Tokë Daйraky pyга Кубу Куё. S. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. 1, 7, № 1, 1954.

8. Артемьев Н. А. Исследование осуществимости периодических движений. Изв. АН СССР, серия матем., т. 5, № 2, 1941.

9. Артемьеи Н. А. Метод определения характеристических показателей и приложение его к двум задачам небесной механики. Изв. АН СССР, серия матем., т. 8, № 2, 1944.

10. Штокало И. З. Критерий устойчивости и неустойчивости. Матем. сб., т. 19 (61), 263—286, 1946.

11. Еругин Н. П. Некоторые общие проблемы качественной и аналитической теории дифференциальных уравнений. ПММ, т. 19, в. 2, 1955.

12. Якубович В. А. Метод малого параметра для канонических систем с периодическими коэффициентами. ПММ, т. XXIII, в. 1, 1959.

13. Еругин Н. П. Методы исследования вопроса устойчивости решений линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, содержащими малый параметр (замечания к работе Якубовича). ИФЖ, т. III, № 2, 1960.

14. Еругин Н. П. Приводимые системы. Труды Физико-математического института им. В. А. Стеклова, XIII, 1946.

15. Богданов Ю. С., Чеботарев Г. Н. О матрицах, коммутирующих со своей производной. Изв. высших учебных заведений. Матем., № 4 (11), 1959.

16. Amato V. Sull'iutegra Zione immediata di un sistema di equazioni differenziali lineari amogenee a matrice ciredante, Giorn. mat. Ba Haglini, 82, № 1, 1954.

17. РЖМ. Shenitrer Abe (до 57) Bernsttein, B. Truesdell, c. (9968), Magnus Wilhelm (2181).

18. Cherubino S. Zentralblatt für Mathematik, 17, 209, 1937—1938.

19. Cherubino S. Atti Accad. nar. Zincei Rend. VI, 25, 1937, 541—547, 686—690.

20. Федоров Ф. И. Об одном обобщении критерия Лаппо-Данилевского. ДАН БССР, 4, № 11, 1960.

21. Мальцев А. М. Основы линейной алгебры. ОГИЗ, 1948.

22. Еругин Н. П. Замечание к статье Шифнера. Изв. АН СССР, серия матем., № 5, 1941.

23. Федоров Г. Ф. Некоторые новые случаи решения системы двух линейных уравнений в конечном виде. Вестник ЛГУ, № 11, 1953.

24. Морозов В. В. Об одной задаче Н. П. Еругина. Изв. высших учебных заведений, Матем., № 5, 1959.

25. Салахова И. М., Чеботарев Г. Н. О разрешимости в конечном виде некоторых систем линейных дифференциальных уравнений. Изв. высших учебных заведений, Матем., № 3, 230—234, 1960.

26. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., т. II, Изд. АН СССР, 1956.

27. Донская Л. И. Построение решения линейной системы в окрестности регулярной особой точки в особых случаях. Вестник ЛГУ, № 6, 1952.

28. Донская Л. И. О структуре решений системы линейных дифференциальных уравнений в окрестности регулярной особой точки. Вестник ЛГУ, № 8, 1954.

29. Erouguine N. Sur la substitutions exposante pour quelques siste'me irrigulìere. Матем. сб., m. 42:6, 745—753, 1935.

30. Еругин Н. П. Об асимптотической устойчивости решения некоторой системы дифференциальных уравнений. ПММ, т. XII, № 2, 1948.

31. Еругин Н. П. ПММ, т. XXIII, в. 5, 1959.

32. Еругин Н. П. Неявные функции. Изд. Ленинградского университета, 1956.

33. Бреус К. А. О приводимости канонической системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ДАН СССР, т. 123, № 1, 1958.

34. Крейн М. Г. Основные положения теории λ-зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Сб. «Памяти А. А. Андронова», Изд АН СССР, 1955.

35. Курош А. Г. Курс высшей алгебры, 1946.

36. Четаев Н. Г. ПММ, IX, № 2, 1945.

37. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. ОГИЗ, 1946.

38. Штокало И. З. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Изд. АН УССР, Киев, 1960.

39. Левитан Б. М. Почти-периодические функции. ГИТТЛ, 1953.

40. Гельман А. Е. ДАН СССР, т. 116, № 4, 1957.

41. Штелик В. Г. К вопросу о решениях линейной системы дифференциальных уравнений с почти-периодическими коэффициентами. Укр. матем. журнал, т. 10, № 3, 1958.

42. Иванов В. Н. ДАН СССР, т. 109, № 5, 902—905, 1956.

43. Халанай А. ДАН СССР, т. 88, № 3, 419—422, 1953.

44. Sandor St. Bul. Şt. Akad. R. P. R., sec. de Şt, mat. Şi fiz., t. XII, № 2, 339, 1955.

45. Лященко Н. Я. ДАН СССР, т. 111, № 2, 295—298, 1956.

46. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 1955.

47. Виноградов И. М. Общие теоремы о верхней границе модуля тригонометрической суммы. Изв. АН СССР, серия матем., т. 15, № 2, 1951.

48. Виноградов И. М. Особые случаи оценок тригонометрических сумм. Изв. АН СССР, серия матем., т. 20, № 3, 1956.

49. Якубович В. А. Вестник Ленинградского университета, серия матем., механ. и астр., **13**, в. 3, 1958.

50. Голоквосчус П. Б. Необходимые и достаточные условия периодичности фундаментальной системы решений некоторых линейных систем дифференциальных уравнений. ДАН БССР, т. 3, № 7, 1959.

51. Голоквосчус П. Б. Отыскание характеристических показателей систем двух линейных однородных дифференциальных уравнений с периодиче-

скими коэффициентами, содержащими малый параметр. ДАН БССР, т. 3, № 9, 1959.

52. Голокиосчус П. Б. Отыскание характеристических показателей системы двух дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, аналитическими относительно малого параметра. ДАН БССР, т. 4, № 6, 1960.

53. Голоквосчус П. Б. Замечания об ограниченных и периодических решениях системы двух линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, интегрируемой в замкнутой форме. Изв. высших учебных заведений, Матем., № 3, 1960.

54. Голоквосчус П. Б. Об ограниченных и периодических решениях некоторой системы двух линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Ученые записки Вильнюсского гос. университета им. В. Капсукаса, т. 9, серия матем. и физ. наук, 1960.

55 Голоквосчус П. Б. Достаточные условия ограниченности всех решений системы двух уравнений, содержащих малый параметр. Там же.

56. Гремяченский А. П. Обобщение одной теоремы Ляпунова, ПММ, т. XII, в. 5, 1948.

57. Ляпунов А. М. Sur une sèrie dans la thèorie, linèaires dus second ordre á coefficients pèriodiques. Записки Академии наук по физ.-матем. отд., серия 8, т. 13, № 2, 1902.

58. Еругин Н. П. Обобщение одной теоремы Ляпунова. ПММ, т. XII, № 5, 1948.

59. Морозов В. В. О коммутативных матрицах. Ученые записки КГУ, т. 112, книга 9, 1952.

60. Еругин Н. П. О периодических решениях дифференциальных уравнений. ПММ, т. 20,. в. 1, 1956.

61. Виноградов И. М. Основы теории чисел. ОНТИ, 1938, стр. 10.

62. Жуковский Н. Е. Матем. сб., XVI, 3, 1892.

63 Бурдина В. И. Об ограниченных решениях системы двух линейных дифференциальных уравнений ДАН СССР, т. XCIII, № 4, 1953.

64. Гусарова Р. С. Об ограниченности решений линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами. ПММ, т. 14, в. 3, 1950.

65. Гусаров Л. А. Об ограниченности решений линейного уравнения второго порядка. ДАН СССР, т. 17, № 2, 1949.

66. Старжинский В. М. Обзор работ об условиях устойчивости тривиального решения системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ПММ, т. 18, в. 4, 1954.

67. Якубович В. А. Вопросы устойчивости решения двух линейных дифференциальных уравнеиий канонического вида с периодическими коэффициентами. Матем. сб., т. 37 (79), № 1, 1955.

68. Старжинский В. М. Об устойчивости периодических движений. (I). Изв. Ясского политехн. ин-та. Новая серия, т. IV (VIII), в. 3—4, 1958; (II), т. V (IX), в. 1—2, 1959.

69. Старжинский В. М. Замечание к исследованию устойчивости периодических движений. ПММ, 19, № 1, 1955.

70. Аржаных И. С. Всесоюзная межвузовская конференция по теории и методам расчета нелинейных электрических цепей. Сб. докладов, № 7. Ташкент, 1960.

71. Крейн М. и Неймарк М. Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений. Харьков, 1936.

72. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. ГИТТЛ, М., 1950.

73. Еругин Н. К теории неявных функций. ДАН БССР, № 1, 1963.

74. Ньютон Исаак. Сб. статей к трехсотлетию со дня рождения. Изд. АН СССР, 1943.

75. Zanbek O. Math. Annalen, Bd. 137, 167—208, 1959; Bd. 137, 477, 1959.

76. Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И. Асимптотическое решение системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных. Укр. матем. журнал, т. XII, № 4, 1960.
77. Фещенко С. Ф., Ніколенко Л. Д. Доповіді АН УРСР, № 8, 1961; Укр. матем. журнал, т. XIII, № 3, 1961.
78. Фещенко С. Ф. Математика за 40 лет. М., 1957.
79. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, 1958.
80. Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике. Изд. АН СССР, 1945.
81. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. ГИТТЛ, 1952.
82. Ляпунов А. М. Избранные труды. Изд. АН СССР, 1948.
83. Якубович В. А. Распространение метода Ляпунова определения ограниченности решений уравнений $\ddot{y}+p(t)y=0$ на случай знакопеременной функции $p(t+\omega)=p(t)$. ПММ, т. 18, в. 6, 1954.
84. Демидович Б. Н. О некоторых свойствах характеристических показателей системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Ученые записки МГУ, Матем., т. VI, в. 163, 1952.
85. Макаров С. М. Исследование характеристического уравнения линейиой системы двух уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами. ПММ, т. 15, в. 3, 1951.
86. Гурса Э. Курс матем. анализа, т. II, ч. 1, 1956.
87. Еругин Н. П. ДАН БССР, т. 7, № 2, 1963.
88. Massera T. Boletin de la Facultad de Ingenierid, vol. IV, № 1, Mago, 1950.
89. Курцвейль Я., Воевода О. Чехословацкий матем. журиал, 3, 5 (80), 1955.
90. Еругии Н. П. Весці АН БССР, сер. фіз.-тэхи. навук, № 1, 1962.
91. Бреус К. А. Про асимптотичний развязок линейних диференциальних рівнянь з періодичними коэфіціентами. ДАН УССР, № 5, 1955.
92. Тихонов А. Н. Успехи матем. наук, 7, 1 (47), 1952.
93. Еругин Н. П. Весці АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, № 1, 1962.
94. Еругин Н. П. ДАН БССР, т. 6, № 7, 1962.
95. Богданов Ю. С. ДАН БССР, т. 7, № 3, 1963.
96. Еругин Н. П. Весці АН БССР, сер. фіз.-тэхи. иавук, № 1, 1963.
97. Лефшец С. Геометрическая теория дифференцнальных уравнеиий. ИЛ, 1961.

СОДЕРЖАНИЕ

ОПЕЧАТКИ
(в части тиража)

траница	Строка	Напечатано	Следует читать
28	3 сн.	$S_{l+1}(n-1)$	$S_{l+1}(l+1)$
29	5 св.	$\sum^{p-1}$	$\sum^{n-1}$
81	12 сн.	$\exp P_0(t)$	$\exp P_0 t$
112	15 св.	$X_0 =$	$X_0 = \mathrm{I}$
131	4 »	$= \sum_{k=0}^{\infty}$	$\mathrm{I} = \sum_{k=0}^{\infty}$
131	2 сн.	W_k	$W_k \varepsilon^k \}.$
135	12 св.	$\frac{dU}{dt} =$	$\frac{dU}{dt} \leqslant$
137	1 сн.	$\frac{\cos 2\alpha}{2}$	$\frac{\cos 2\alpha t}{2}$
156	14 св.	$\frac{dX}{dt}$	$\frac{dX}{dt} =$
169	12 »	$V = \sum_{\nu=1}^{\infty}$	$V = \mathrm{I} \sum_{\nu=1}^{\infty}$
169	17 »	$\sum_{=}^{\infty}$	$\sum_{k=}^{\infty}$
188	13 »	f_{k-1}	f_{k+1}
201	10 »	$\mathrm{I}\lambda$	$-\mathrm{I}\lambda$
201	10 сн.	$(t, \varepsilon) =$	$(t, \varepsilon) = X$
204	8 св.	[16]	[61]
206	18 »	ω	a
235	5 сн.	$(-1)^n$	$(-1)^n D'$
236	2 »	$(-1)^n$	$(-1)^n D$
241	4 св.	$k^{-1/(m+1)}$	$k_m^{-1/(m+1)}$