ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени А. А. ЖДАНОВА

Н. П. ЕРУГИН

МЕТОД ЛАППО-ДАНИЛЕВСКОГО В ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1956

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Ленинградского университета

В работе показана роль метода Лаппо-Данилевского в теории линейных дифференциальных уравнений.

Развивается метод применения аппарата Лаппо-Данилевского и аналитической теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений к теории систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими вещественными коэффициентами.

Ответственный редактор
К. У. Шахно

Посвящается 25-летию со дня смерти
И. А. ЛАППО-ДАНИЛЕВСКОГО

ВВЕДЕНИЕ

Исследования многих ученых посвящены системам линейных однородных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Для таких уравнений возникает задача[1] о представлении матрицы фундаментальной системы решений в виде произведения двух матриц, одна из которых будет периодической (как функция независимой переменной t), а другая вида $exp\ At$, где A — матрица постоянная. Дело сводится к определению матрицы A, которая доставляет качественную характеристику (ее характеристические числа, каноническая форма) решений рассматриваемой системы дифференциальных уравнений. Иногда матрицу A удается построить в виде ряда по малым параметрам, входящим в коэффициенты рассматриваемой системы дифференциальных уравнений. Но в этом случае (при больших значениях параметров) остается нерешенной задача общего представления матрицы A. Иметь решение этой задачи особенно важно в тех случаях, когда параметр вводится в систему искусственно для построения в какой-нибудь форме метода последовательных приближений и когда необходимо в заключительной части рассуждений придать параметру определенное конечное значение (например равное единице).

Затем возникает задача аналитической характеристики матрицы A как функции тех параметров, которые входят в коэффициенты рассматриваемой системы дифференциальных уравнений.

[1] Э. Гурса. Курс математического анализа, т. II. Здесь же указана литература. См. также [2].

Важной является задача определения той функциональной зависимости между параметрами, входящими в коэффициенты дифференциальных уравнений, при которой система дифференциальных уравнений имеет периодические или ограниченные решения. Часто эти периодические решения требуется построить приближенно.

В аналитической теории линейных однородных систем дифференциальных уравнений с однозначными аналитическими коэффициентами давно рассматривалась задача представления матрицы фундаментальной системы решений в окрестности особой точки в виде произведения двух матриц, одна из которых является однозначной в окрестности рассматриваемой особой точки a, а вторая — многозначная матрица вида $exp\ A \ln (z - a)$, где A — постоянная матрица, а z — независимая переменная. Здесь матрица A и характеризует многозначную особенность матрицы фундаментальной системы решений дифференциальных уравнений.

Проблема Пуанкаре—Лаппо-Данилевского в аналитической теории дифференциальных уравнений состоит в том, чтобы найти матрицу A как функцию параметров, входящих в коэффициенты дифференциальных уравнений и дать полную аналитическую характеристику этой функции.

Задача общего представления матрицы A как функции параметров системы (при произвольных значениях этих параметров, а не только при малых) была решена на основании аппарата теории функции от матриц, развитого в работах Лаппо-Данилевского. Еще Ляпунов обратил внимание на общность задач определения матриц A в теории линейных систем с периодическими коэффициентами и в аналитической теории линейных систем дифференциальных уравнений.

Ляпунов в одном частном случае системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами свел задачу нахождения A к нахождению соответствующей матрицы A для такой системы линейных дифференциальных уравнений с однозначными аналитическими коэффициентами, для которой матрица A находится легко. В настоящее время ввиду того, что в аналитической теории дано общее представление матрицы A, возможно дать общее представление соответствующей матрицы A и для широкого класса линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Это позволяет решать и другие упомянутые выше задачи из теории линейных систем дифференциальных уравнений. Здесь особенно полезными оказались матрицы A, построенные Лаппо-Данилевским для одной специальной (с первого взгляда случайной, не имеющей особого значения) фундаментальной системы решений.

В этой работе[1] показано, как можно построить матрицу A для линейной системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами при помощи матрицы A, построенной в аналитической теории дифференциальных уравнений. Здесь, в частности, подробно анализируется один из методов последовательных приближений для определения матрицы A. Показывается, что некоторые результаты, полученные в теории линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, в свою очередь, позволяют получить дополнительную характеристику матрицы A как функции параметров системы дифференциальных уравнений в аналитической теории дифференциальных уравнений. Для решения указанных выше задач потребовалось развитие некоторых пунктов теории функций от матриц, что и осуществляется в первых параграфах работы.

Работа состоит из 13 параграфов.

В § 1 сначала вводится понятие об аналитических функциях от одной матрицы A и указываются некоторые свойства этих функций.

Показано, как аналитическая функция от матрицы A может быть представлена в виде полинома от A. Дается метод построения полинома наименьшей степени от A, который представляет аналитическую функцию от матрицы A, а также функцию от A, заданную степенным рядом от A, коэффициенты которого суть функции инвариантов матрицы A. Отмечается тот факт, что коэффициенты полинома от матрицы A, предста-

[1] Эта работа в первых числах июня 1955 г. была представлена в редакцию журнала „Успехи математических наук" с пожеланием автора напечатать ее или в УМН или в серии „Проблемы современной математики". В декабре 1955 г. рукопись была возвращена автору с сообщением о невозможности ее напечатания.

вляющего указанные выше функции от A, являются симметрическими функциями от характеристических чисел матрицы A, что позволяет во многих случаях этот полином построить, минуя нахождение характеристических чисел матрицы A. Далее подробно выясняется, что формула Лагранжа, представляющая аналитическую функцию от матрицы A в виде полинома от матрицы A, позволяет получить все конечные значения функции от матрицы[1] A, которые мы имеем при аналитическом продолжении этой функции на всю допустимую область изменения A. Показывается на каком пути изменения матрицы A, остающейся в ограниченной области, некоторые из элементов функции от A не будут ограниченными. Затем показывается, как можно построить полином от матрицы A, представляющий логарифмическую функцию от матрицы A, в таком виде, что коэффициенты этого полинома будут функциями от инвариантов матрицы A, а не от ее характеристических чисел. Это позволяет строить полином, не решая характеристического уравнения матрицы A. Показано, что $\ln A$ всегда можно получить вещественным, если среди характеристических чисел матрицы A нет отрицательных. Указывается все множество значений $\ln A$, в том числе и так называемые иррегулярные, на которые обратил внимание Лаппо-Данилевский. Все эти факты являются, как нам кажется, важными с общей теоретической точки зрения, а также необходимы в дальнейших параграфах этой работы.

К сожалению, здесь многое получено громоздкими рассуждениями, но это, повидимому, объясняется не простым существом вопроса. Во всяком случае автор не смог, не увеличивая заметно объема первого параграфа, упростить рассуждения.

В § 2 вводится, по Лаппо-Данилевскому, понятие о функциях от многих матриц, задаваемых в виде рядов, указываются некоторые их свойства и признаки сходимости. Затем рассматриваются и функции от счетного множества матриц.

В § 3 и 4 указаны некоторые классы систем линейных дифференциальных уравнений, общее решение которых находится в замкнутой форме.

[1] В том числе и многозначной функции от матрицы A.

В § 5 строится решение системы линейных однородных уравнений в виде ряда, равномерно сходящегося во всякой ограниченной области непрерывности коэффициентов, и в некоторых случаях в виде ряда от многих матриц (ряда композиций).

В § 6 формулируется проблема Пуанкаре—Лаппо-Данилевского и приводится ее решение. Именно строится генеральное представление так называемой показательной подстановки, характеризующей многозначность интегральной подстановки в окрестности особой точки линейной однородной системы дифференциальных уравнений. Это делается как в случае регулярной особой точки (когда показательная подстановка оказывается мероморфной и, следовательно, однозначной функцией от дифференциальных подстановок), так и в случае иррегулярной особой точки (когда показательная подстановка оказывается бесконечно значной функцией от дифференциальных подстановок). Решение этих проблем возникло на основе аппарата, развитого Лаппо-Данилевским.

В § 7 формулируются некоторые основные задачи из теории линейных систем дифференциальных уравнений с вещественными периодическими коэффициентами. Ставится задача о представлении интегральной матрицы системы линейных уравнений с вещественными периодическими коэффициентами в виде произведения двух матриц, одна из которых будет периодической, а другая — показательной *exp At*, где A — постоянная матрица.

В связи с этим возникают и другие задачи.

В § 8 даются методы решения задач, формулированных в § 7. Эти методы строятся на основе теории дифференциальных уравнений в области вещественной переменной и на основе теории приводимых систем. Здесь показано, как можно матрицу A, указанную в § 7, представить в виде сходящегося ряда по параметрам, входящим в коэффициенты линейной системы дифференциальных уравнений.

Отмечено, что эти ряды сходятся, вообще говоря, не при всех конечных значениях параметров. Указаны некоторые достаточные признаки сходимости. Показано, что ряды, построенные на основе этого разложения A в ряд для инвариантов матрицы A, всегда сходятся.

Отмечается, что на основании этого и инварианты специальной показательной матрицы (в случае иррегулярной системы), построенной Лаппо-Данилевским, будут целыми функциями параметров системы, что позволяет приближенно определять характеристические числа матрицы A.

Далее отмечаются некоторые случаи системы двух уравнений, когда можно просто увидеть какие знаки имеют характеристические числа матрицы A. Затем дается некоторый общий подход к задаче разложения матрицы A в ряд по параметру, вводимому искусственно в систему. Этот метод основан на выделении из матрицы коэффициентов такой матрицы, при которой система дифференциальных уравнений допускает нахождение A в замкнутой форме. Здесь приобретают значение те системы, указанные в § 3 и 4, общее решение которых находится в замкнутой форме. Этот метод позволит иногда выделить некоторую главную часть разложения A или частично просуммировать ряд, представляющий A или его инварианты. Отмечается и тот факт, что при использовании этого метода легко допустить ошибку.

В § 9 показывается, что проблемы, формулированные в § 7, по существу совпадают с теми проблемами аналитической теории дифференциальных уравнений, которые были решены на основе аппарата Лаппо-Данилевского. Здесь показано, как на основе решения проблемы Пуанкаре—Лаппо-Данилевского можно осуществить аналитическое продолжение матрицы A, полученной в § 8 в виде ряда по параметрам системы, на все значения этих параметров. Другими словами, здесь показано, как можно построить генеральное представление матрицы A, построенной в § 8 при малых значениях параметров системы дифференциальных уравнений. Указывается, что здесь осуществляется некоторый общий замысел, высказанный еще А. М. Ляпуновым. Полное осуществление этого общего плана А. М. Ляпунова выполнено, таким образом, на основе аппарата, созданного Лаппо-Данилевским в аналитической теории дифференциальных уравнений.

В § 10 выясняются некоторые общие факты, относящиеся к вопросу изучения ограниченных и периодических решений системы двух линейных однородных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

В § 11 эти же вопросы решаются для систем, указанных в § 3 и 4.

В § 12 вопросы ограниченности и периодичности решений системы двух линейных уравнений решаются на основе аппарата аналитической теории дифференциальных уравнений и именно на основе специальной простейшей показательной подстановки, построенной Лаппо-Данилевским.

В § 13 на примере уравнения Матье дается, на основе этой специальной показательной подстановки Лаппо-Данилевского, построение той функции, связывающей параметры уравнения, которая доставляет условие существования периодических решений этого уравнения. Это позволяет дать метод приближенного построения периодических решений.

§ 1. ФУНКЦИЯ ОТ ОДНОЙ МАТРИЦЫ

В этой работе мы будем пользоваться матричным исчислением, поэтому изложим сначала некоторые факты, относящиеся к теории функции от матрицы. Мы считаем, что алгебра матриц и приведение матриц к каноническому виду известны. Будем рассматривать только квадратные матрицы.

Функция $f(A)$ от матрицы A называется аналитической в том случае, когда ее можно представить в окрестности матрицы aI, где a — число и I — единичная матрица, в виде ряда Тейлора с численными (скалярными) коэффициентами, т. е.

$$f(A)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(A-aI)^k, \tag{1.1}$$

причем α_k — числа (может быть комплексные).

Функция $f(A)$ называется целой, если ряд (1.1) сходится при всех конечных значениях матрицы A. Если A есть матрица, то под матрицей e^A, по определению, понимают сумму матричного ряда

$$e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k. \tag{1.2}$$

Заметим, что ряд (1.2) сходится при всякой матрице A, элементы которой суть комплексные числа, т. е. ряд (1.2) целый.

Аналитическая функция $f(A)$ обладает свойством

$$f(SAS^{-1})=Sf(A)S^{-1}, \tag{1.3}$$

где S — произвольная матрица с определителем $D(S)$, отличным от нуля. Это следует из равенства

$$[SAS^{-1}]^k = SA^kS^{-1} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Запишем характеристическое уравнение матрицы A порядка n

$$(-1)^n D(A - \lambda I) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \qquad (1.4)$$

Здесь a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ суть с точностью до знака известные из алгебры основные симметрические функции от характеристических чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A и в то же время a_k — полиномы от элементов матрицы A.

Известно, что характеристическое уравнение матрицы SAS^{-1} совпадает с (1.4) при произвольной матрице S с $D(S) \neq 0$.

Основные симметрические функции от $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ будем называть инвариантами матрицы A. Если в ряде (1.1) α_k и a суть симметрические функции от $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ или от инвариантов матрицы A, то $f(A)$, очевидно, также обладает свойством[1] (1.3)

Известна формула Лагранжа, позволяющая аналитическую функцию от матрицы $f(A)$ представить в виде полинома от матрицы A. В случае, когда характеристические числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A различны, эта формула имеет вид

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(A-\lambda_1)\ldots(A-\lambda_{k-1})(A-\lambda_{k+1})\ldots(A-\lambda_n)}{(\lambda_k-\lambda_1)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\ldots(\lambda_k-\lambda_n)} f(\lambda_k). \qquad (1.5)$$

При всех остальных предположениях относительно характеристических чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ для $f(A)$ строится также полином степени не выше $n-1$, который получается, например, предельным переходом из (1.5).

---

[1] Если, например, α_k будет симметрической функцией от $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то $f(A)$ в формуле (1.1) вообще определено только тогда, когда введено условие о том, как нумеруются характеристические числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Это условие нумерации может быть и таким, что и для несимметрических функций $\alpha_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ свойство (1.3) сохраняется. Например, это будет, если числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ нумеруются по их каким-нибудь числовым свойствам. Если же они будут нумероваться в порядке их расположения в канонической форме матрицы $A = SJS^{-1}$, то их нумерация будет зависеть от выбора матрицы S, а тогда матрица $f(A)$ уже не будет иметь свойства (1.3).

Можно, однако, всегда этот полином построить таким, что степень его будет на единицу меньше суммы наивысших порядков элементарных делителей, принадлежащих различным характеристическим числам матрицы A. Таким образом, если матрица A имеет, например, лишь одно характеристическое число и высший порядок элементарного делителя равен двум, то для $f(A)$ можно построить полином первой степени от A. Такие полиномы минимальной степени $P(A)$ для $f(A)$ можно найти следующим образом. Пусть дана матрица n порядка

$$A = SJS^{-1}, \qquad (1.6)$$

где J квазидиагональная каноническая матрица

$$J = [J_{\rho_1}(\lambda_1), J_{\rho_2}(\lambda_2), \ldots, J_{\rho_m}(\lambda_m)]$$

и $J_\rho(\lambda)$ жорданова матрица ρ порядка

$$J_\rho(\lambda) = \begin{Vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & 1\ \lambda \end{Vmatrix} \quad (\rho_1 + \ldots + \rho_m = n).$$

Если

$$f(A) = \sum_{k=0}^{n-1} A^k \varphi_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = P(A), \qquad (1.7)$$

где φ_k — численные симметрические функции, то на основании (1.3) и

$$f(J) = \sum_{k=0}^{n-1} J^k \varphi_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = P(J). \qquad (1.8)$$

Но для аналитической функции $f(J)$ имеет место формула Лаппо-Данилевского [1]

$$f(J) = [(G_{\rho_1}(f(\lambda_1)), \ldots, (G_{\rho_m}(f(\lambda_m))], \qquad (1.9)$$

где матрица $G_\rho[f(\lambda)]$ порядка ρ определяется следующим образом

$$G_\rho(f(\lambda)) = \left\| \begin{matrix} f(\lambda) & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ \frac{f'(\lambda)}{1!} & f(\lambda) & 0 & & & & \\ \frac{f''(\lambda)}{2!} & \frac{f'(\lambda)}{1!} & f(\lambda) & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & \frac{f'(\lambda)}{1!} & f(\lambda) & 0 \\ \frac{f^{(\rho-1)}(\lambda)}{(\rho-1)!} & & & & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \frac{f'(\lambda)}{1!} & f(\lambda) \end{matrix} \right\|.$$

В частности,

$$P(J) = [G_{\rho_1}(P(\lambda_1)), \ldots, G_{\rho_m}(P(\lambda_m))]. \qquad (1.10)$$

Так как на основании (1.8) $f(J) = P(J)$, то мы имеем:

$$G_{\rho_k}(f(\lambda_k)) = G_{\rho_k}(P(\lambda_k)) \quad (k = 1, 2, \ldots, m) \quad (1.11)$$

Замечание. Если $\lambda_1 = \lambda_2$ и $\rho_1 > \rho_2$,

то из $\qquad G_{\rho_1}(f(\lambda_1)) = G_{\rho_1}(P(\lambda_1))$

следует $\qquad G_{\rho_2}(f(\lambda_2)) = G_{\rho_2}(P(\lambda_2))$.

Это видно из структуры этих матриц.

Пусть теперь имеем матрицу порядка n

$$J = [J_{\rho_1}(\lambda_1), \ldots, J_{\rho_m}(\lambda_m)], \quad \rho_1 + \ldots + \rho_n = n$$

с различными $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

Из равенств (1.11) получаем систему линейных уравнений для нахождения коэффициентов $\varphi_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ полинома Лагранжа, входящих в формулу (1.7)

$$f^{(k)}(\lambda_\nu) = P^{(k)}(\lambda_\nu) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, \rho_\nu - 1;$$
$$\nu = 1, 2, \ldots, m).$$

Определитель $\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ из коэффициентов при неизвестных $\varphi_{n-1}, \varphi_{n-2}, \ldots, \varphi_1, \varphi_0$ составлен следующим образом.

Первая строчка имеет вид: $1, \lambda_1, \lambda_1^2, \ldots, \lambda_1^{n-1}$. Затем следуют $\rho_1 - 1$ строчек, которые получаются последо-

вательным $(\rho_1 - 1)$ кратным дифференцированием первой строчки. Остальные характеристические числа $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$ образуют соответственно также $\rho_2, \ldots, \rho_m$ строчек.

Таким образом,

$$\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \left\| \begin{matrix} 1, \lambda_1, \lambda_1^2, \ldots, & \lambda_1^{n-1} \\ 0, 1, 2\lambda_1, \ldots, & (n-1)\lambda_1^{n-2} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ 0\, 0, \ldots, (n-1)\ldots(n-\rho_m+1) & \lambda_m^{n-\rho_m} \end{matrix} \right\|.$$

Можно показать, что

$$\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = a(\lambda_1 - \lambda_2)^{\rho_1\rho_2}(\lambda_1 - \lambda_3)^{\rho_1\rho_3} \ldots$$
$$\ldots (\lambda_{m-1} - \lambda_m)^{\rho_{m-1}\rho_m},$$

где a — постоянное число, независящее от $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Следовательно, $\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq 0$ и все коэффициенты $\varphi_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ полинома Лагранжа будут найдены через

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_m \text{ и } f^{(k)}(\lambda_\nu) \; (\nu = 1, \ldots, m; \; k = 0, 1, \ldots, \rho_\nu - 1).$$

В силу **замечания** построенный полином Лагранжа будет пригоден и для того случая, когда в $f(A)$ матрица A будет как угодно высокого порядка, большего n, но будет иметь лишь характеристические числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, которым соответствуют группы элементарных делителей, порядок которых не превосходит соответственно $\rho_1, \ldots, \rho_m$. Таким образом, мы построили полином Лагранжа наименьшей степени для функции от матрицы $f(A)$.

Такое построение формулы Лагранжа возможно и для функции от матрицы A, имеющей вид

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(A) A^k, \qquad (1.12)$$

где $\alpha_k(A)$ — функции от инвариантов матрицы A, т. е. $\alpha_k(A)$ суть симметрические функции от характеристических чисел матрицы[1] A. Это следует из того, что такая функция $f(A)$ обладает свойством (1.3).

Обращаем внимание читателя на следующее очень важное обстоятельство. Записывая для $f(A)$ полином Лагранжа в том случае, когда все характеристические числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A различные, в виде

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n-1} A^k \varphi_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \tag{1.13}$$

мы видим, что коэффициенты $\varphi_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ суть симметрические функции от $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Это позволяет во многих случаях выразить коэффициенты φ_k непосредственно через инварианты матрицы A, т. е. непосредственно через элементы матрицы A. При такой записи $f(A)$ мы избегаем необходимости вычислять корни полинома степени n, что важно во многих случаях. Этим обстоятельством мы далее воспользуемся, в частности, при нахождении решений системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Элементы матрицы A мы будем обозначать через a_{ke}, где k — номер строчки, а e — номер столбца, в которых стоит элемент a_{ke}. Матрицу A иногда обозначают через $\|a_{ke}\|$.

При таком обозначении матрица $\|r\|$ имеет все элементы, равные r. $|A|$ есть матрица, элементы которой равны модулям соответствующих элементов матрицы A. Неравенство $|A| \leqslant B$ означает, что модули элементов матрицы A не превосходят соответствующих элементов матрицы B с положительными элементами. Известно [1], что если численный ряд от комплексной переменной z

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$$

имеет радиус сходимости ρ, то ряд от матрицы A

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k$$

сходится в области $|A| < \left\| \frac{1}{n} \rho \right\|$, где n — порядок матрицы A.

[1] Здесь под инвариантами понимается произвольная симметрическая функция характеристических чисел.

Если функция от матрицы A задана рядом (1.1) в окрестности матрицы aI (или в окрестности нулевой матрицы, если $a = 0$), то значения $f(A)$ при других значениях матрицы A получаются аналитическим продолжением n^2 рядов от элементов матрицы A.

Формула Лагранжа и позволяет осуществить это аналитическое продолжение при помощи аналитического продолжения лишь n функций от одного переменного $f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)$.

Для матрицы A второго порядка формула Лагранжа имеет вид

$$f(A) = \frac{\lambda_2 f(\lambda_1) - \lambda_1 f(\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{f(\lambda_2) - f(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} A. \tag{1.14}$$

Если $f(A) = e^{At}$,

то
$$e^{At} = \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} A + \frac{\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Если λ_1 и λ_2, оставаясь на одной плоскости Римана функции $f(\lambda)$, стремятся к одному и тому же значению λ, не особенному для $f(\lambda)$, то эта формула переходит в формулу

$$f(A) = f(A) \cdot \mathrm{I} - \lambda f'(\lambda) \cdot \mathrm{I} + f'(\lambda) A. \tag{1.15}$$

Запишем еще формулу Лагранжа в виде (1.13) для матрицы A третьего порядка

$$f(A) = \varphi_2 A^2 + \varphi_1 A + \varphi_0, \tag{1.16}$$

где

$$\varphi_2 \Delta = (\lambda_1 - \lambda_2) f(\lambda_3) + (\lambda_2 - \lambda_3) f(\lambda_1) + (\lambda_3 - \lambda_1) f(\lambda_2)$$

$$\varphi_1 \Delta = -\left[(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) f(\lambda_3) + (\lambda_2^2 - \lambda_3^2) f(\lambda_1) + (\lambda_3^2 - \lambda_1^2) f(\lambda_2)\right]$$

$$\varphi_0 \Delta = \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2) e^{\lambda_3 t} + \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_2 - \lambda_3) e^{-\lambda_1 t} + \lambda_3 \lambda_1 (\lambda_3 - \lambda_1) e^{\lambda_2 t}$$

$$\Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3).$$

В соответствии со сказанным выше, как в формуле (1.14), так и в (1.16) коэффициенты при всех степенях матрицы A суть симметрические функции от характеристических чисел матрицы A.

Предположим, что функция $f(z)$ многозначная. Тогда при $A \to A_0$ предельное значение $f(A)$ определяется не только значением A_0, но и тем путем в пространстве элементов матрицы A, по которому $A \to A_0$.

Пусть $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0$ суть характеристические числа матрицы A_0. Если все $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0$ различны и $f(\lambda_k^0)$ при $k = 1, \ldots, n$ конечны, то предельное значение $f(A_0)$, как видно из формулы Лагранжа, будет конечное.

Если имеются среди $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0$ числа равные, но расположенные на одной плоскости Римана функции $f(z)$, то $f(A_0)$, при наличии конечных производных соответствующего порядка от $f(z)$, также конечное и выражается соответствующей формулой Лагранжа, указанной выше.

Предположим теперь, что среди характеристических чисел $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0$ имеются равные и расположенные на разных листах поверхности Римана[1] функции $f(z)$. Тогда предельная матрица $f(A_0) = \|f_{ke}(A_0)\|$ может иметь некоторые (или все) из элементов $f_{ke}(A)$ бесконечные; если же $f(A_0)$ — матрица конечная, то предельное значение, как показал Лаппо-Данилевский, будет зависеть не только от матрицы A_0 и $f(\lambda_1^0), \ldots, f(\lambda_n^0)$, но и от произвола той матрицы S, которая приводит матрицу A_0 к каноническому виду (1.6). Это предельное значение можно получить при помощи предельного перехода к формуле Лагранжа.

Пусть матрица A имеет вид

$$A = S[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]\, S^{-1}.$$

Тогда согласно формулам (1.3), (1.5) и (1.9) имеем:

$$f(A) = S[f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)]\, S^{-1} = P(A, f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)), \qquad (1.17)$$

где $P(A, f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n))$ полином Лагранжа. Предположим, что матрица A приближается к A_0 таким образом, что вблизи матрицы A_0 имеем:

$$f(A) = S[f(\lambda_1) + \alpha_1, \ldots, f(\lambda_n) + a_n]\, S^{-1} = S[f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)]\, S^{-1} + S[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]\, S^{-1}$$

[1] Т. е. имеются такие $\lambda_k^0 = \lambda_e^0$, что, например, $f(\lambda_k^0) \neq f(\lambda_e^0)$.

или

$$f(A) = P(A, f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)) + P(A, \alpha_1, \ldots, \alpha_n), \qquad (1.18)$$

где $f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)$ — значения $f(z)$ на исходном листе поверхности Римана вблизи точек $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0$. При $A \to A_0$, когда некоторые из характеристических чисел $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0$ совпадают, полином $P(A, f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n))$ стремится к предельной форме полинома Лагранжа, а $P(A, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ может стремиться к такой матрице, значение которой зависит от произвола матрицы S.

Пусть матрица A второго порядка. Тогда на основании (1.14) и (1.18) имеем:

$$f(A) = P(A, f(\lambda_1), f(\lambda_2)) + P(A, \alpha_1, \alpha_2), \qquad (1.19)$$

где

$$P(A, f(\lambda_1), f(\lambda_2)) = \frac{\lambda_2 f(\lambda_1) - \lambda_1 f(\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{f(\lambda_2) - f(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} A$$

$$P(A, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{\lambda_2 \alpha_1 - \lambda_1 \alpha_2}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\lambda_2 - \lambda_1} A.$$

Полагая

$$A = \begin{Vmatrix} a, & b \\ c, & d \end{Vmatrix}, \qquad (1.20)$$

мы будем иметь:

$$P(A, f(\lambda_1), f(\lambda_2)) =$$

$$= \begin{Vmatrix} \dfrac{(a - \lambda_1) f(\lambda_2) - (a - \lambda_2) f(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1}, & b\dfrac{f(\lambda_2) - f(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ c\dfrac{f(\lambda_2) - f(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1}, & \dfrac{(d - \lambda_1) f(\lambda_2) - (d - \lambda_2) f(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{Vmatrix} \qquad (1.21).$$

Заменяя здесь $f(\lambda_1) = \alpha_1$, $f(\lambda_2) = \alpha_2$, получим $P(A, \alpha_1, \alpha_2)$.

Возьмем частный случай матрицы (1.20)

$$A = S \begin{Vmatrix} a + b, & b \\ 2b, & a \end{Vmatrix} S^{-1}.$$

Тогда $\lambda_1 = a - b$, $\lambda_2 = a + 2b$ и матрица $P(A, \alpha_1, \alpha_2)$ имеет вид

$$P(A, \alpha_1, \alpha_2) = S \begin{Vmatrix} \dfrac{2\alpha_2 + \alpha_1}{3}, & \dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{3} \\ 2\,\dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{3}, & \dfrac{\alpha_2 + 2\alpha_1}{3} \end{Vmatrix} S^{-1}.$$

При $b \to 0$ имеем:

$$\lambda_1 \to a,\ \lambda_2 \to a \text{ и } A \to A_0 = a\mathrm{I}.$$

Пусть при этом $\alpha_1 \to m_1$, $\alpha_2 \to m_2 \neq m_1$, а матрица S фиксирована, тогда предельное значение $f(A_0)$ имеем согласно (1.15) в виде

$$f(A_0) = f(a)\,\mathrm{I} - af'(a)\,\mathrm{I} + f'(a)\,a\mathrm{I} + \\ + S \begin{Vmatrix} \dfrac{2m_2 + m}{3}, & \dfrac{m_2 - m_1}{3} \\ 2\,\dfrac{m_2 - m_1}{3}, & \dfrac{m_2 + 2m_1}{3} \end{Vmatrix} S^{-1}$$

или

$$f(A_0) = f(a)\,\mathrm{I} + S \begin{Vmatrix} \dfrac{2m_2 + m_1}{3}, & \dfrac{m_2 - 2m_1}{3} \\ 2\,\dfrac{m_2 - m_1}{3}, & \dfrac{m_2 + 2m_1}{3} \end{Vmatrix} S^{-1}. \qquad (1.22)$$

Второе слагаемое есть такая матрица R, которая зависит от выбора матрицы S, приводящей матрицу $A_0 = a\mathrm{I} = Sa\mathrm{I}S^{-1}$ к канонической форме.

Характеристические числа матрицы R суть m_1 и m_2, поэтому, изменяя значение матрицы S, матрицу R можно записать и так $R = S\,[m_1,\ m_2]\,S^{-1}$.

Следовательно, формулу (1.22) можно записать в виде

$$f(A_0) = f(a)\,\mathrm{I} + S\,[m_1,\ m_2]\,S^{-1}, \qquad (1.23)$$

где S — произвольная матрица с определителем, отличным от нуля.

В том случае, когда λ_1 и λ_2 стремятся к значению a, оставаясь на одном листе поверхности Римана функции $f(z)$, имеем $m_1 = m_2 = m$ и $R = m\mathrm{I}$, т. е. $f(A_0)$ уже не будет зависеть от матрицы S.

Формула (1.23) получается и из (1.17) при

$$f(\lambda_1) = f(a) + m_1, \quad f(\lambda_2) = f(a) + m_2.$$

Следует заметить, однако, что в пространстве элементов матрицы A имеется и такой путь $A \to A_0$, при котором матрица $f(A)$ имеет некоторые элементы, стремящиеся к бесконечности.

Если λ_1, λ_2 стремятся к одному значению λ таким образом, что λ_1, λ_2 остаются на разных листах поверхности Римана функции $f(z)$ (например, сохраняется неравенство $f(\lambda_1) \neq f(\lambda_2)$ и при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$) и предельная матрица A имеет вид

$$A_0 = \begin{Vmatrix} \lambda & 0 \\ p & \lambda \end{Vmatrix},$$

где $p \neq 0$, т. е. характеристическому числу λ соответствует непростой элементарный делитель, то некоторые из элементов матрицы $f(A)$ всегда стремятся к бесконечности,[1] когда λ_1 и λ_2 стремятся к λ, оставаясь на разных листах поверхности Римана функции $f(z)$. Отсюда следует, что предельная форма полинома Лагранжа (1.15) доставляет все конечные значения матрицы $f(A_0)$ или $f(SA_0S^{-1})$.

Эти два последние утверждения следуют из формулы (1.21).

На основании (1.19) и (1.21) легко видеть, что для многозначной функции $f(z)$ формула (1.23) доставляет все возможные конечные значения матрицы $f(\lambda\mathrm{I})$. Действительно, общее конечное значение матрицы $f(\lambda\mathrm{I})$ имеем согласно (1.19) в виде

$$f(\lambda\mathrm{I}) = f(\lambda)\,\mathrm{I} + P(\lambda\mathrm{I},\ m_1,\ m_2),$$

где $P(\lambda\mathrm{I},\ m_1,\ m_2)$ получаем предельным переходом из матрицы

$$P(A,\ \alpha_1,\ \alpha_2) = \begin{Vmatrix} \dfrac{(a - \lambda_1)\,\alpha_2 - (a - \lambda_2)\,\alpha_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, & b\,\dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ c\,\dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, & \dfrac{(d - \lambda_1)\,\alpha_2 - (d - \lambda_2)\,\alpha_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{Vmatrix},$$

имеющей характеристические числа α_1, α_2, которые и переходят при $A \to \lambda\mathrm{I}$ в m_1, m_2. Если матрица A порядка n, то, очевидно,

$$f(A) \to f(\lambda)\,\mathrm{I} + S\,[m_1, \ldots, m_n]\,S^{-1} \text{ при } A \to \lambda\mathrm{I}.$$

[1] Это будет всякий раз и в общем случае матрицы порядка n, когда характеристические числа λ_1, λ_2 совпадают по координатам, образуя непростой элементарный делитель, оставаясь, однако, на разных листах поверхности Римана функции $f(z)$.

Отметим еще относительно показательной функции, что

$$\left.\begin{aligned} e^A &= \begin{Vmatrix} e^{a_1} & 0 \\ 0 & e^{a_2} \end{Vmatrix}, \quad A = \begin{Vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{Vmatrix} \\ e^A &= \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{Vmatrix}, \quad A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{Vmatrix} \\ e^A &= \begin{Vmatrix} e^a & 0 \\ e^a & e^a \end{Vmatrix}, \quad A = \begin{Vmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{Vmatrix} \end{aligned}\right\}. \tag{1.24}$$

Если матрицы A и B коммутируют, т. е.

$$AB = BA, \tag{1.25}$$

то

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Если определитель матрицы A отличен от нуля, то

$$\ln A = B \tag{1.26}$$

определяется как решение уравнения

$$e^B = A. \tag{1.27}$$

Главное значение $\ln A$ обращается в нуль при $A = I$.

При условии (1.25) имеем:

$$\ln AB = \ln A + \ln B. \tag{1.28}$$

В окрестности $A = I$ имеет место разложение

$$\ln A = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{(A-I)^\nu}{\nu}, \tag{1.29}$$

доставляющее главное значение $\ln A$.

Если характеристические числа матрицы A различны $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то по формуле Лагранжа

$$\ln A = \sum_{k=1}^{n} \frac{(A-\lambda_1)\ldots(A-\lambda_{k-1})(A-\lambda_{k+1})\ldots(A-\lambda_n)}{(\lambda_k-\lambda_1)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\ldots(\lambda_k-\lambda_n)} \ln \lambda_k. \tag{1.30}$$

Все значения $\ln A$ мы получаем аналитическим продолжением и предельным переходом на основе этой формулы.

В работе [6] показано, что для $\ln A$ возможно построить такой полином Лагранжа, что коэффициенты

этого полинома выражаются непосредственно через инварианты матрицы A.

Таким образом, при нахождении $\ln A$ можно избежать отыскания корней характеристического полинома матрицы A.

Например, если A — матрица второго порядка и $D(A) = D = \lambda_1\lambda_2$ — ее определитель, а $\sigma(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ — сумма элементов главной диагонали, то

$$\ln A = \frac{(S_1+2)\ln D - 2M}{4S_2 - S_1^2} A + \frac{(S_1+2)M - S_1^2 - 2S_1 + 2S_2 - 2}{4S_2 - S_1^2}, \tag{1.31}$$

где

$$S_1 = \sigma - 2, \quad S_2 = D - \sigma + 1$$

и

$$M = \int_0^1 \frac{(S_1S_2 + 2S_2)t + S_1^2 - 2S_2 + S_1}{S_2t^2 + S_1t + 1} dt.$$

Заметим, что корни уравнения

$$S_2t^2 + S_1t + 1 = 0$$

суть

$$t_1 = (1-\lambda_1)^{-1}, \quad t_2 = (1-\lambda_2)^{-1}.$$

Следовательно, если нет отрицательных характеристических чисел матрицы A, то при $0 \leqslant t \leqslant 1$ знаменатель дроби под знаком интеграла не обращается в нуль и $\ln A$ будет вещественным.[1] Если же λ_1 и λ_2 отрицательные, то или t_1, или t_2 будет числом положительным, меньшим единицы. Тогда, чтобы M было конечным, путь интегрирования от 0 до 1 необходимо взять так, чтобы он не проходил через корень t_1 или t_2; а тогда M окажется комплексным и $\ln A$ перестанет быть вещественным.[2]

Пусть A матрица третьего порядка. Запишем характеристическое уравнение матрицы A, определяющее характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$,

$$\lambda^3 - \sigma_1\lambda^2 + \sigma_2\lambda - \sigma_3 = 0.$$

---

[1] В (1.31) $\ln D$ — берется вещественным.

[2] Мы не будем это доказывать.

Здесь σ_1 — сумма элементов главной диагонали матрицы A, σ_3 — определитель матрицы A и σ_2 есть известного вида полином второго порядка от элементов матрицы A. Кроме того,

$$\sigma_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad \sigma_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \quad \sigma_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Для $\ln A$ имеем следующий полином Лагранжа

$$\ln A = \alpha_2 A^2 + \alpha_1 A + \alpha_0, \tag{1.32}$$

где α_2, α_1 и α_0 определяются из уравнений

$$P_0 = \alpha_2 k_2 + \alpha_1 \sigma_1 + 3\alpha_0$$
$$P_1 = \alpha_2 k_3 + \alpha_1 k_2 + \alpha_0 \sigma_1$$
$$P_2 = \alpha_2 k_4 + \alpha_1 k_3 + \alpha_0 k_2.$$

Здесь $k_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$, $k_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$,

$$k_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2$$

и свободные члены P_0, P_1, P_2 определены равенствами:

$$P_0 = \ln \sigma_3,$$

$$P_1 = \int_0^1 \frac{b_3(b_1+3)t^2 + (b_1b_2 - 3b_3)t + b_1 + b_1^2 - 2b_2}{1 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3}\, dt,$$

$$P_2 = \int_0^1 \frac{M_2 t^2 + M_1 t + M_0}{1 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3}\, dt,$$

где

$$M_0 = b_1^3 - 3b_1b_2 + 2b_1^2 + 3b_3 - 4b_2 + b_1,$$
$$M_1 = b_1^2 b_2 + 2b_1b_2 - b_1b_3 - 2b_2^2 + 2b_2 - 6b_3,$$
$$M_2 = b_3(b_1^2 + 2b_1 - 2b_2 + 1)$$

и

$$b_1 = \sigma_1 - 3, \quad b_2 = \sigma_2 - 2\sigma_1, \quad b_3 = \sigma_3 + \sigma_1 - \sigma_2 + 1.$$

Пусть A есть вещественная матрица порядка n с характеристическими числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Тогда коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ полинома Лагранжа

$$\ln A = \alpha_{n-1} A^{n-1} + \alpha_{n-2} A^{n-2} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0$$

суть линейные функции от величин $\ln D(A)$, $P_1, \ldots, P_{n-1}$ с дробнорациональными относительно элементов матрицы A коэффициентами. Здесь $P_1, \ldots, P_{n-1}$ представ-

ляются в виде интегралов по переменной t в промежутке $0 \leqslant t \leqslant 1$ от рациональной правильной дроби с коэффициентами, представляющими собой полиномы от элементов матрицы A, причем знаменатель есть полином от t степени n, который обращается в нуль при

$$t_k = \frac{1}{1 - \lambda_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда следует, что если $\lambda_k > 0\,(k = 1, \ldots, n)$, то этот знаменатель не обращается в нуль при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Это показывает, что $\ln A$ имеет вещественное значение при $\lambda_k\,(k = 1, \ldots, n)$, неравных отрицательным числам.

Если имеются $\lambda_k < 0$, то для существования P_l необходимо взять путь интегрирования от $t = 0$ до $t = 1$ таким, чтобы он не проходил через $t_k = (1 - \lambda_k)^{-1}$, лежащие в промежутке $0 \leqslant t \leqslant 1$ при $\lambda_k < 0$.

Но в этом случае будем иметь комплексные значения P_k, так как путь интегрирования не остается на вещественной оси.[1]

Чтобы выяснить подробнее вид $\ln A$ в этом случае запишем A в виде

$$A = SBS^{-1},$$

где B — квазидиагональная вещественная матрица

$$B = [B_1, \ldots, B_k]$$

и $B_1, \ldots, B_k$ суть вещественные квадратные матрицы, порядок которых совпадает с порядком соответствующих Жордановых элементарных ящиков $J_1(\lambda_1), \ldots, J_k(\lambda_k)$ матрицы A.

Таким образом, характеристические числа матриц $B_\nu\,(\nu = 1, \ldots, k)$ совпадают с характеристическими числами матрицы A и каждая из матриц B_ν имеет только один элементарный делитель. Матрицы S при этом можно считать также вещественными. Но тогда на основании (1.3)

$$\ln A = S\,[\ln B_1, \ldots, \ln B_k]\,S^{-1}. \tag{1.33}$$

Значения $\ln B_\nu$ для тех B_ν, которые имеют характеристические числа λ_ν, неравные отрицательным числам,

[1] Мы не будем это доказывать.

берем вещественными. Для B_ν, характеристические числа которых отрицательные, имеем:

$$\ln B_\nu = S_\nu \ln J_\nu(\lambda_\nu) S_\nu^{-1} = S_\nu \ln[-J_\nu(\lambda_\nu)(-I)] S_\nu^{-1} = \\ = S_\nu [\ln(-J_\nu(\lambda_\nu)) + \pi i I] S_\nu^{-1}. \qquad (1.34)$$

Здесь S_ν — вещественная матрица с определителем, отличным от нуля и $\ln(-J_\nu(\lambda_\nu))$ — вещественная матрица, так как характеристическое число матрицы $-J_\nu(\lambda_\nu)$ будет равно $-\lambda_\nu > 0$. Подставляя значение (1.34) в (1.33), мы получим

$$\ln A = A_1 + \pi i S L(0,1) S^{-1}, \qquad (1.35)$$

где A_1 — вещественная матрица, имеющая характеристические числа, равные $\ln \lambda_\nu$, если λ_ν не равно отрицательному числу, и $\ln(-\lambda_\nu)$ — если $\lambda_\nu < 0$; $L(0,1)$ — вещественная диагональная матрица порядка n, у которой только на местах, соответствующих корням $\lambda_\nu < 0$, стоит 1, а все другие элементы равны нулю. Заметим еще, что, очевидно, матрица A_1 коммутирует с матрицей

$$\pi i S L(0,1) S^{-1} = i\pi A_2.$$

Запишем (1.35) в виде

$$\ln A = A_1 + \pi i A_2. \qquad (1.36)$$

Здесь матрица A_2 имеет характеристические числа, равные только нулю и единице. Это значение $\ln A$ назовем главным.

Замечание. Мы могли бы для некоторых отрицательных характеристических чисел (или даже для всех) полагать

$$\ln B_\nu = S_\nu [\ln(-J_\nu(\lambda_\nu)) - \pi i I] S_\nu^{-1}.$$

Тогда и в матрице $L(0,1)$ вместо 1 на соответствующих местах стояли бы -1.

Можно было бы, конечно, в случае $\lambda_\nu < 0$ полагать и так

$$\ln B_\nu = S_\nu [\ln(-J_\nu(\lambda_\nu)) + (2n+1)\pi i] S_\nu^{-1} \qquad (1.37)$$

или

$$\ln B_\nu = S_\nu [\ln(-J_\nu(\lambda_\nu)) + (2n-1)\pi i] S_\nu^{-1}, \qquad (1.38)$$

где n — целое число (положительное или отрицательное).

Матрицу A_2 можно считать и такой

$$A_2 = SL[0, 2m, (2n+1), (2n_1-1)] S^{-1}, \qquad (1.39)$$

где L — матрица диагональная, элементы которой равны 0 или $2m$, если они соответствуют неотрицательным характеристическим числам и $(2n+1)$ или $(2n_1-1)$, если они соответствуют отрицательным характеристическим числам; m, n и n_1 — числа целые.

Очевидно, формулы (1.37), (1.38) и (1.39) доставляют неглавное значение $\ln A$. Заметим еще, что $\ln A$ многозначная функция и все значения (пусть A — матрица второго порядка) $\ln aI$ согласно (1.23) получаем в виде

$$\ln aI = I \ln a + 2\pi i S[m_1, m_2] S^{-1}, \qquad (1.40)$$

где S — произвольная матрица с $D(S) \neq 0$, а m_1, m_2 — произвольные целые числа. Такие значения $\ln aI$ при $m_1 \neq m_2$ Лаппо-Данилевский назвал иррегулярными значениями.

При $a = 1$, $\ln a = 0$ и

$$\ln I = 2\pi i S[m_1, m_2] S^{-1}. \qquad (1.41)$$

В частности,

$$\ln I = 2\pi S \begin{Vmatrix} 0, & -n \\ n, & 0 \end{Vmatrix} S^{-1}. \qquad (1.42)$$

При произвольной вещественной матрице S эти значения $\ln I$ будут вещественными.

При $a = -1$, $\ln a = \pi i$ и

$$\ln[-I] = i\pi S[2m_1+1, 2m_2+1] S^{-1}. \qquad (1.43)$$

Если S — произвольная вещественная матрица, то

$$\ln[-I] = \pi S \begin{Vmatrix} 0, & -(2n+1) \\ 2n+1, & 0 \end{Vmatrix} S^{-1} = \\ = \pi i S_1 \begin{Vmatrix} 2n+1, & 0 \\ 0, & -2n-1 \end{Vmatrix} S_1^{-1} \qquad (1.44)$$

имеет вещественное значение.

§ 2. ФУНКЦИИ ОТ МНОГИХ МАТРИЦ И ОТ СЧЕТНОГО МНОЖЕСТВА МАТРИЦ

Лаппо-Данилевский впервые [1] стал рассматривать функции от m матриц $X_1, X_2, \ldots X_m$ порядка n и построил теорию таких функций. Именно он рассматривал функции от матриц $X_1, \ldots, X_m$

$$F(X_1, \ldots, X_m) = \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{1 \ldots m} X_{j_1} \ldots X_{j_\nu} \alpha_{j_1 \ldots j_\nu}, \quad (2.1)$$

где α — комплексные числа, а $j_1 \ldots j_\nu$ пробегают независимо друг от друга всевозможные значения от 1 до m. Ряд (2.1) Лаппо-Данилевский называл рядом композиций. Следуя Лаппо-Данилевскому, будем записывать ряд (2.1) и в виде

$$F(X_1, \ldots, X_m) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\alpha]_\nu, \quad (2.2)$$

где

$$[X\alpha]_\nu = \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{1,2 \ldots m} X_j \ldots X_{j_\nu} \alpha_{j_1 \ldots j_\nu}, \quad [X\alpha]_0 = \alpha_0. \quad (2.3)$$

Легко видеть, что ряд (2.1) представляет собой совокупность особого вида n^2 рядов от mn^2 независимых переменных элементов матриц $X_1, \ldots, X_m$.

Пусть $|X|$ обозначает матрицу, элементы которой равны абсолютному значению соответствующих элементов матриц X и запись

$$|X| < \|\rho\| \quad (2.4)$$

означает, что все элементы матрицы $|X|$ не превосходят $\rho > 0$. $\|\rho\|$ есть матрица, все элементы которой равны ρ.

Если ряд (2.1) сходится в области

$$|X_j| < \|\rho_j\|, \quad (2.5)$$

то функция $F(X_1, \ldots, X_m)$ называется голоморфной в окрестности нулевых матриц. Если в ряде (2.1) $|\alpha_{j_1} \ldots {}_{j_\nu}| < \alpha^{(\nu)}$ и ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^{(\nu)} \xi^\nu,$$

где ξ — комплексное число, сходится в области $|\xi| < n\rho$, то ряд (2.1) сходится в области

$$|X_1| + \ldots + |X_m| < \|\rho\| \quad (2.6)$$

и называется равномерно голоморфным в области (2.6).

Если ряд (2.1) сходится при любых конечных матрицах $X_1, \ldots, X_m$, то он называется целым. Как показал Лаппо-Данилевский, известная теорема о единственности разложения функции в степенной ряд не имеет места для функций от нескольких матриц. Но справедливо следующее утверждение.

Если функцию от матриц $F(X_1, \ldots, X_m)$ можно представить в виде (2.1) при произвольном порядке матриц $X_1, \ldots, X_m$, то коэффициенты $\alpha_{j_1 \ldots j_\nu}$ определяются единственным образом. Другими словами, если

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} [X\alpha]_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\beta]_\nu$$

при произвольном порядке матриц $X_1, \ldots, X_m$, то

$$\alpha_{j_1 \ldots j_\nu} = \beta_{j_1 \ldots j_\nu}.$$

Обозначим бесконечную последовательность матриц $X_1, X_2, \ldots$ через X. Если ряд $\sum_{p=1}^{\infty} |X_p|$ сходится, то последовательность матриц X называется регулярной.

Обозначим через α_0, $\alpha_{p \ldots p_\nu}$ $(\nu = 1, 2 \ldots)$ комплексные числа. При условии сходимости ряда

$$\sum_{p_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{p_\nu=1}^{\infty} |X_{p_1} \ldots X_{p_\nu}| \, |\alpha_{p_1 \ldots p_\nu}|$$

будем рассматривать ряд

$$\sum_{p_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{p_\nu=1}^{\infty} X_{p_1} \ldots X_{p_\nu} \alpha_{p_1 \ldots p_\nu} = [X\alpha]_\nu, \quad (2.7)$$

$$[X\alpha]_0 = \alpha_0$$

Если $|\alpha_{p_1 \ldots p_\nu}| < \alpha^{(\nu)}$, то ряд (2.7) сходится для любой регулярной последовательности матриц, так как, очевидно,

$$\sum_{p_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{p_\nu=1}^{\infty} X_{p_1} \ldots X_{p_\nu} = \left[\sum_{p=1}^{\infty} X_p \right]^\nu$$

и

$$\sum_{p_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{p_\nu=1}^{\infty} | X_{p_1} \ldots X_{p_\nu} || \alpha_{p_1 \ldots p_\nu} | \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{p_\nu=1}^{\infty} | X_{p_1} | \ldots | X_{p_\nu} | \alpha^{(\nu)} = \alpha^{(\nu)} \left[\sum_{p=1}^{\infty} | X_p | \right]^\nu .$$

Рассмотрим теперь ряд от регулярной последовательности матриц

$$F(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\alpha]_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{p_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{p_\nu=1}^{\infty} X_{p_1} \ldots X_{p_\nu} \alpha_{p_1 \ldots p_\nu} \right), \quad (2.8)$$

предполагая $|\alpha_{p_1 \ldots p_\nu}| < \alpha^{(\nu)}$.

Если этот ряд сходится при всякой совокупности матриц $X_1, X_2, \ldots$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{p=1}^{\infty} | X_p | < \| \rho \|, \quad (2.9)$$

то будем говорить, что ряд (2.8) сходится в окрестности нулевых матриц X. Если же ряд (2.8) сходится при всяком положительном ρ в условии (2.9), то ряд (2.8) называется целым. Заметим, что если ряд

$$f(\xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha^{(\nu)} \xi^\nu$$

имеет радиус сходимости $n\rho$, то ряд (2.8) сходится в области (2.9).

Если равенство

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} [X\alpha]_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\beta]_\nu$$

имеет место при регулярной последовательности матриц X любого порядка, то $\alpha_{p_1 \ldots p_\nu} = \beta_{p_1 \ldots p_\nu}$.

§ 3. КЛАССЫ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ИНТЕГРИРУЕМЫХ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ

Пусть элементы $x_{ke}(t)$ матрицы X суть функции от t. Запишем эту матрицу в виде

$$X = \| x_{ke}(t) \|.$$

Тогда, по определению, производной от матрицы X по t называют матрицу, элементы которой суть производные от соответствующих элементов матрицы X, т. е.

$$\frac{dX}{dt} = \left\| \frac{dx_{ke}(t)}{dt} \right\| .$$

Если имеем матрицы X, Y, которые являются функциями от t, то

$$\frac{d(XY)}{dt} = \frac{dX}{dt} Y + X \frac{dY}{dt} .$$

Если имеем m матриц $X_1(t), \ldots, X_m(t)$, то

$$\frac{d(X_1(t) \ldots X_m(t))}{dt} = \sum_{k=1}^{m} X_1 X_2 \ldots X_{k-1} \frac{dX_k}{dt} X_{k+1} \ldots X_m .$$

Пусть матрицы $\frac{dX_k}{dt}$ $(k = 1, \ldots, m)$ коммутируют с матрицами

$$X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}, X_{k+1}, \ldots X_m,$$

тогда

$$\frac{d(X_1 \ldots X_m)}{dt} = \sum_{k=1}^{m} X_1 X_2 \ldots X_{k-1} X_{k+1} \ldots X_m \frac{dX_k}{dt} .$$

Следовательно, если матрица $X(t)$ коммутирует со своей производной $\frac{dX}{dt}$,

то $$\frac{de^X}{dt} = e^X \frac{dX}{dt} = \frac{dX}{dt} e^X .$$

Это следует непосредственно из определения функции e^X на основании (1.2).

По определению, имеем также

$$\int X dt = \left\| \int x_{ke}(t) \, dt \right\| .$$

Пусть дана система линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 P_{11}(t) + \ldots + x_n P_{n1}(t)$$
$$\ldots \qquad (3.1)$$
$$\frac{dx_n}{dt} = x_1 P_{1n}(t) + \ldots + x_n P_{nn}(t).$$

Эта система имеет n линейно независимых решений

$$x_{k1}, \ldots, x_{kn} \qquad (k = 1, \ldots, n), \qquad (3.2)$$

которые можно записать в виде матрицы

$$X = \begin{Vmatrix} x_{11}, \ldots, & x_{1n} \\ x_{n1}, \ldots, & x_{nn} \end{Vmatrix}, \qquad (3.3)$$

так что каждый элемент этой матрицы x_{ke} является l-й функцией k-го решения системы (3.1).

Введем еще в рассмотрение матрицу коэффициентов системы (3.1)

$$P(t) = \begin{Vmatrix} P_{11}(t), \ldots, & P_{1n}(t) \\ \cdot \quad , \ldots, & \cdot \\ P_{n1}(t), \ldots, & P_{nn}(t) \end{Vmatrix}. \qquad (3.4)$$

Подставляя последовательно решения (3.2) в уравнение (3.1), получим n^2 уравнений, которые в матричном виде можно записать в виде

$$\frac{dX}{dt} = XP. \qquad (3.5)$$

Отметим еще раз, что k-ая строчка матрицы X составлена из k-го решения системы (3.1). Матрицу X называют интегральной матрицей. Так как матрица $X(t)$ составлена из линейно независимых решений системы (3.1), то $D(X(t)) \neq 0$ в области непрерывности матрицы $P(t)$. Интегральную матрицу $X(t)$, обращающуюся в единичную матрицу I при $t = 0$ ($X(0) = \mathrm{I}$), будем называть нормированной в точке $t = 0$. Если $X(t)$ нормированная интегральная матрица в точке $t = 0$, то всякая другая интегральная матрица $X_1(t)$ получается в виде $X_1(t) = AX(t)$, где A — постоянная матрица.

Отметим некоторые случаи, когда интегральная матрица X находится в конечном виде.

Предположим, что матрица $P(t)$ в матричном уравнении (3.5) обладает свойством

$$P(t) \int P(t)\,dt = \int P(t)\,dt \cdot P(t), \qquad (3.6)$$

т. е. матрица $P(t)$ коммутирует со своим интегралом. Тогда нормированную в точке $t = 0$ интегральную матрицу X получим в виде

$$X = e^{\int_0^t P dt}, \qquad (3.7)$$

так как в силу (3.6)

$$\frac{dX}{dt} = e^{\int_0^t P dt} P = XP.$$

В частности, если

$$P = A\varphi(t), \qquad (3.8)$$

где A — постоянная матрица и $\varphi(t)$ — численная функция от t, то согласно (3.7) получим

$$X = e^{A \int_0^t \varphi(t)\,dt}. \qquad (3.9)$$

Пользуясь формулой Лагранжа, мы можем матрицу (3.9) записать в форме полинома от матрицы A.

Пусть $\varphi(t) = 1$ $\left(\text{или} \int_0^t \varphi(t)\,dt = t\right)$ и характеристические числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A различны, тогда по формуле Лагранжа (3.9) имеем в виде

$$X = \sum_{k=1}^{n} \frac{(A - \lambda_1)\ldots(A - \lambda_{k-1})(A - \lambda_{k+1})\ldots(A - \lambda_n)}{(\lambda_k - \lambda_1)\ldots(\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1})\ldots(\lambda_k - \lambda_n)} e^{\lambda_k t}.$$

Если X мы запишем в виде

$$X = \varphi_{n-1}A^{n-1} + \varphi_{n-2}A^{n-2} + \ldots + \varphi_1 A + \varphi_0,$$

то φ_k ($k = 0, 1, \ldots, n-1$) будут симметрическими функциями от $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Это позволяет получить интегральную матрицу X, не находя характеристические числа матрицы A. Пусть, например, A — матрица второго порядка.

Тогда
$$X = \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} A + \frac{\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \tag{3.9$_1$}$$

$$\frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} \frac{t^k}{k!},$$

$$\alpha_0 = 1, \ \alpha_1 = \lambda_1 + \lambda_2 = \sigma(A),$$

$$\alpha_k = \lambda_1{}^k + \lambda_1^{k-1}\lambda_2 + \lambda_1^{k-2}\lambda_2{}^2 + \ldots + \lambda_1{}^2\lambda_2^{k-2} + \lambda_1\lambda_2{}^{k-1} + \lambda_2{}^k.$$

При k четном можно написать и так

$$\alpha_k = \lambda_1{}^k + \lambda_2{}^k + \lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{k-2} + \lambda_2^{k-2}) + \lambda_1{}^2\lambda_2{}^2(\lambda_1^{k-4} + \lambda_2^{k-4}) + \\ + \ldots + \lambda_1^{\frac{k}{2}}\lambda_2^{\frac{k}{2}}.$$

При k нечетном

$$\alpha_k = \lambda_1{}^k + \lambda_2{}^k + \lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{k-2} + \lambda_2^{k-2}) + \lambda_1{}^2\lambda_2{}^2(\lambda_1^{k-4} + \lambda_2^{k-4}) + \\ + \ldots + \lambda_1^{\frac{k-1}{2}}\lambda_2^{\frac{k-1}{2}}(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Таким образом, коэффициент при первой степени A может быть выражен в виде целого ряда от t, коэффициенты которого суть полиномы от $\sigma(A)$ и $D(A)$.

То же самое можно сказать относительно свободного члена. Впрочем, свободный член легко выражается через коэффициент при A. Действительно

$$\frac{\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} = 1 - \lambda_1\lambda_2 \int_0^t \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} dt =$$
$$= 1 - \lambda_1\lambda_2 \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{k-1} \frac{t^k}{k!} \alpha t.$$

Пусть теперь A матрица третьего порядка.

Тогда
$$X = a_2 A^2 + a_1 A + a_0,$$

$$a_2 = \frac{1}{\Delta}\left[(\lambda_1 - \lambda_2) e^{\lambda_3 t} - (\lambda_1 - \lambda_3) e^{\lambda_2 t} + (\lambda_2 - \lambda_3) e^{\lambda_1 t}\right],$$

$$a_1 = -\frac{1}{\Delta}\left[(\lambda_1{}^2 - \lambda_2{}^2) e^{\lambda_3 t} - (\lambda_1{}^2 - \lambda_3{}^2) e^{\lambda_2 t} + (\lambda_2{}^2 - \lambda_3{}^2) e^{\lambda_1 t}\right],$$

$$a_0 = \frac{1}{\Delta}\left[\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2) e^{\lambda_3 t} - \lambda_1\lambda_3(\lambda_1 - \lambda_3) e^{\lambda_2 t} + \lambda_2\lambda_3(\lambda_2 - \lambda_3) e^{\lambda_1 t}\right],$$

$$\Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3).$$

Легко видеть, что если a_2, a_1 и a_0 представить в виде рядов по степеням t, то эти ряды будут сходиться при всех t и коэффициенты этих рядов, являясь симметрическими полиномами от λ_1, λ_2, λ_3, будут тем самым полиномами от элементов матрицы A. Следует сказать, что при такой записи X в виде полинома Лагранжа мы не различаем канонической структуры матрицы A, так как X выражено через инварианты. Правда, таким образом, мы получаем всегда полином степени $n-1$, а не минимальной степени, когда эта степень меньше $n-1$ в случае кратных корней. При такой записи X вся особенность фундаментальной системы выражается непосредственно самой матрицей A, входящей в выражение для X. Так как мы здесь получили интегральную матрицу, нормированную в точке $t = 0$, то всякая другая интегральная матрица получается по формуле $X_c = CX$, где C постоянная матрица.

Если нас интересует решение системы с начальными условиями $x_k(0) = x_k{}^0$ $(k = 1, \ldots, n)$, то, подставляя эти значения $x_k{}^0$ в первую строчку матрицы C, мы и получим интересующее нас решение.

Заметим теперь, что общий вид матриц второго порядка $P(t)$, обладающих свойством (3.6), имеет вид

$$P = \begin{Vmatrix} \varphi_1(t) + b_1\varphi_2(t), & \varphi_2(t) \\ b_2\varphi_2(t), & \varphi_1(t) \end{Vmatrix}, \tag{3.10}$$

где $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ — численные функции от t и b_1, b_2 — постоянные.[1]

Таким образом, когда $P(t)$ в матричном уравнении (3.5) имеет вид (3.10), то X имеем в виде

$$X = e^{\begin{Vmatrix} \overline{\varphi_1} + b_1\overline{\varphi_2}, & \overline{\varphi_2} \\ b_2\overline{\varphi_2}, & \overline{\varphi_1} \end{Vmatrix}}, \tag{3.11}$$

[1] Здесь не включен случай $P_{12} = P_{21} = 0$ и $P_{11} \neq P_{22}$. Элементы матрицы (3.10) удовлетворяют соотношениям $P_{11} - P_{22} = b_1 P_{12}$, $P_{21} = b_2 P_{12}$.

где

$$\bar{\varphi}_k = \int_0^t \varphi_k(t)\,dt.$$

Если

$$P = \sum_{k=1}^{m} A_k \varphi_k(t), \tag{3.12}$$

где A_k $(k = 1, \ldots, m)$ — постоянные коммутирующие матрицы и $\varphi_k(t)$ — численные функции, то условие (3.6), очевидно, выполнено.

§ 4. ДРУГИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ИНТЕГРИРУЕМЫХ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ

Отметим еще один случай, когда решение системы (3.5) получается в замкнутой форме [3].

Пусть дана система линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = X\,[U_1\varphi_1(t) + U_2\varphi_2(t)], \tag{4.1}$$

где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — некоторые непрерывные функции от t и U_1, U_2 — постоянные матрицы, обладающие свойством

$$U_1(U_2U_1 - U_1U_2) - (U_2U_1 - U_1U_2)\,U_2 = 0. \tag{4.2}$$

Заметим, что если матрицы U_1, U_2 коммутируют, то условие (4.2) выполнено, но при этом выполнено и условие (3.6), т. е. мы будем иметь уже рассмотренный случай.

Теперь предположим, что кроме условия (4.2) матрица U_1 обладает свойством

$$U_2U_1 - U_1U_2 = P(U_1), \tag{4.3}$$

где $P(U_1)$ — полином от U_1 с численными коэффициентами.

Если каждому характеристическому числу матрицы U_1 соответствует только один элементарный делитель, то условие (4.3) выполнено. При условиях (4.2)

и (4.3) интегральная матрица $X(t)$, нормированная при $t = 0$, получается в виде[1]

$$X(t) = e^{\int_0^t e^{U_2L_2(t)}U_1e^{-U_2L_2(t)}\varphi_1(t)\,dt}\, e^{U_2L_2(t)}, \tag{4.4}$$

где

$$L_k(t) = \int_0^t \varphi_k(t)\,dt \quad (k = 1,\ 2). \tag{4.5}$$

Пусть матрицы U_1 и U_2 второго порядка имеют вид

$$U_1 = \begin{Vmatrix} a, & 0 \\ c, & a \end{Vmatrix}, \quad U_2 = \begin{Vmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{Vmatrix}. \tag{4.6}$$

Тогда условия (4.2), (4.3) выполнены, так как характеристическому числу матрицы U_1 соответствует один элементарный делитель.

В этом случае в силу (1.5) имеем:

$$e^{\pm U_2L_2(t)} = \begin{Vmatrix} e^{\pm b_1L_2(t)}, & 0 \\ 0, & e^{\pm b_2L_2(t)} \end{Vmatrix}$$

и

$$e^{U_2L_2(t)}U_1e^{-U_2L_2(t)} = e^{U_2L_2(t)}\left(\begin{Vmatrix} 0, & 0 \\ c & 0 \end{Vmatrix} + aI\right)e^{-U_2L_2(t)} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0, & 0 \\ ce^{(b_2-b_1)L_2(t)}, & 0 \end{Vmatrix} + aI.$$

Следовательно, равенство (4.4) можно записать в виде

$$X(t) = e^{\begin{Vmatrix} 0 & , 0 \\ c\int_0^t e^{(b_2-b_1)L_2(t)}\varphi_1(t)\,dt, & 0 \end{Vmatrix}} e^{aL_1(t)}e^{U_2L_2(t)}$$

или на основании формул (1.24) окончательно имеем:

$$X(t) = e^{aL_1(t)} \begin{Vmatrix} e^{b_1L_2(t)} & , 0 \\ e^{b_1L_2(t)}c\int_0^t e^{(b_2-b_1)L_2(t)}\varphi_1(t)\,dt, & e^{b_2L_2(t)} \end{Vmatrix}. \tag{4.7}$$

---

[1] Г. Ф. Федоров указал более общий случай, чем система (4.1), когда $X(t)$ получается в замкнутой форме [4].

Отсюда получаем сумму диагональных членов и определитель матрицы $X(t)$ в виде

$$\sigma(X(t)) = e^{aL_1(t)}\left[e^{b_1L_2(t)} + e^{b_2L_2(t)}\right], \tag{4.8}$$

$$D(X(t)) = e^{2aL_1(t)}e^{(b_1+b_2)L_2(t)}. \tag{4.9}$$

Эти формулы в дальнейшем нам потребуются. Мы рассмотрели тот случай системы (4.1), когда элементы матриц второго порядка U_1, U_2, стоящие в верхнем правом углу, равны нулю.

Частным случаем условия (4.2), как мы уже отметили, является тот, когда матрицы U_1, U_2 коммутируют и когда, следовательно, интегральную матрицу системы (4.1) можно записать в виде

$$X(t) = e^{U_1\int\limits_0^t \varphi_1(t)\,dt + U_2\int\limits_0^t \varphi_2(t)\,dt}.$$

Общий случай, когда условие (4.2) выполнено, но матрицы второго порядка U_1 и U_2 не коммутируют и не имеют одновременно нулевого элемента на побочной диагонали, можно записать в виде

$$U_1 = \begin{Vmatrix} a_1, & b_1 \\ c_1, & d_1 \end{Vmatrix}, \quad U_2 = \begin{Vmatrix} a_2, & b_2 \\ c_2, & a_2 \end{Vmatrix}, \tag{4.10}$$

где элементы a, b, c и d связаны уравнениями $c_1b_2 + b_1c_2 = 0$, $4c_1^2b_2 - c_2(a_1 - d_1)^2 = 0$.

Следовательно, общий вид таких матриц можно записать в виде

$$U_1 = \begin{Vmatrix} a + 2cm, & -cm^2 \\ c & , & a \end{Vmatrix}, \quad U_2 = \begin{Vmatrix} b, & m^2n \\ n, & b \end{Vmatrix}. \tag{4.11}$$

Характеристические числа матрицы U_2 имеем в виде:

$$\lambda_1 = b + mn, \quad \lambda_2 = b - mn \tag{4.12}$$

и матрицы U_1

$$\xi_1 = a + cm, \quad \xi_2 = a + cm. \tag{4.13}$$

Можно написать

$$U_2 = A^{-1}\begin{Vmatrix} b + mn, & 0 \\ 0 & , & b - mn \end{Vmatrix}A, \quad A = \begin{Vmatrix} 1 & m \\ 1, & -m \end{Vmatrix}. \tag{4.14}$$

По формуле § 1 имеем:

$$e^{\pm U_2L_2(t)} = A^{-1}e^{\pm\begin{Vmatrix} b+mn, & 0 \\ 0 & , b-mn \end{Vmatrix}L_2(t)}A.$$

На основании этого

$$e^{U_2L_2(t)}U_1e^{-U_2L_2(t)} =$$

$$= A^{-1}e^{\begin{Vmatrix} b+mn, & 0 \\ 0, & b-mn \end{Vmatrix}L_2(t)} \cdot AU_1 \cdot A^{-1}e^{-\begin{Vmatrix} b+mn, & 0 \\ 0 & , b-mn \end{Vmatrix}L_2(t)}A =$$

$$= A^{-1}\begin{Vmatrix} a + cm, & 2cme^{2mnL_2(t)} \\ 0 & , & a + cm \end{Vmatrix}A.$$

Эта формула позволяет записать решение (4.4) в виде

$$X(t) = e^{(a+cm)L_1(t)+bL_2(t)}A^{-1}e^{\begin{Vmatrix} 0, & 2cm\int\limits_0^t e^{2mnL_2(t)}\varphi_1(t)\,dt \\ 0, & 0 \end{Vmatrix}}$$

$$e^{\begin{Vmatrix} mn, & 0 \\ 0 & , -mn \end{Vmatrix}L_2(t)}A.$$

На основании формул (1.24) можно получить

$$X(t) = e^{(a+cm)L_1(t)+bL_2(t)} \times$$

$$\times A^{-1}\begin{Vmatrix} e^{mnL_2(t)}, & 2cme^{-mnL_2(t)}\int\limits_0^t e^{2mnL_2(t)}\varphi_1 t\,dt \\ 0 & , & e^{-mnL_2(t)} \end{Vmatrix} \times A. \tag{4.15}$$

Из этой формулы получим

$$\sigma(X(t)) = e^{(a+cm)L_1(t)+(b+mn)L_2(t)} + e^{(a+cm)L_1(t)+(b-mn)L_2(t)} \tag{4.16}$$

и

$$D(X(t)) = e^{2(a+cm)L_1(t)+2bL_2(t)}. \tag{4.17}$$

§ 5. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ВИДЕ РЯДА ОТ МНОГИХ МАТРИЦ (РЯДА КОМПОЗИЦИЙ)

Линейные системы дифференциальных уравнений обладают тем отличительным свойством, что их общее решение представляется в виде некоторых рядов, сходящихся равномерно во всякой замкнутой области, в которой коэффициенты системы непрерывны.

Пусть матрица $P(t)$ в уравнении (3.5) непрерывна в промежутке $0 \leqslant t \leqslant p$. Тогда мы получим матрицу $X(t)$, нормированную в точке $t=0$, в виде

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(t), \quad X_0(t) = \mathrm{I}, \tag{5.1}$$

где

$$X_k(t) = \int_0^t X_{k-1}(t) P(t)\, dt, \tag{5.2}$$

и ряд (5.1) сходится равномерно в промежутке $0 \leqslant t \leqslant p$, так как он мажорируется рядом

$$Y = e^{Mt}; \tag{5.3}$$

M — постоянная матрица, элементы которой являются положительными числами, равными максимальным значениям модулей соответствующих элементов матрицы $P(t)$, т. е. $|P(t)| \leqslant M$. Таким образом, мы имеем и оценку быстроты сходимости ряда (5.1).

Для доказательства этого утверждения надо формально удовлетворить уравнению

$$\frac{dX}{dt} = XP\lambda, \quad \lambda \text{ — параметр} \tag{5.4}$$

рядом

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(t) \lambda^k, \quad X_0(t) = \mathrm{I}. \tag{5.5}$$

Для определения коэффициентов $X_k(t)$ получим рекурентную формулу

$$X_k(t) = \int_0^t X_{k-1}(t) P(t)\, dt. \tag{5.6}$$

Откуда получим оценки

$$|X_k(t)| \leqslant \int_0^t |X_{k-1}(t)| M dt$$

$$|X_k(t)| \leqslant M^k t^k \frac{1}{k!} \quad (t > 0). \tag{5.7}$$

Следовательно, ряд (5.5) мажорируется рядом

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} M^k \lambda^k t^k \frac{1}{k!},$$

т. е.

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} X_k(t) \lambda^k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k \lambda^k t^k = e^{M\lambda t}.$$

Отсюда следует, что ряд (5.5) сходится равномерно в промежутке $0 \leqslant t \leqslant p$ при каждом значении λ, в том числе и при $\lambda = 1$. Утверждение доказано.

Предположим, что

$$P(t) = \sum_{k=1}^{m} A_k \varphi_k(t), \tag{5.8}$$

где A_k — постоянные матрицы и $\varphi_k(t)$ — численные функции, непрерывные в промежутке $0 \leqslant t \leqslant p$.

Тогда, очевидно, в ряде (5.1)

$$X_k(t) = \sum_{j_1 \ldots j_k}^{1 \ldots m} A_{j_1} \ldots A_{j_k} \varphi_{j_1 \ldots j_k}(t). \tag{5.9}$$

Здесь

$$\varphi_{j_1 \ldots j_k}(t) = \int_0^t \varphi_{j_1 \ldots j_{k-1}}(t) \varphi_{j_k}(t)\, dt. \tag{5.10}$$

Это мы получаем из формулы (5.2).

Таким образом, в случае (5.8) интегральную матрицу $X(t)$, нормированную в точке $t=0$, имеем в виде ряда композиций

$$X(t) = \mathrm{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_k}^{1 \ldots m} A_{j_1} \ldots A_{j_k} \varphi_{j_1 \ldots j_k}(t), \tag{5.11}$$

который сходится при любых конечных значениях матриц $A_1, \ldots, A_m$ и t из промежутка $0 \leqslant t \leqslant p$.

Заметим теперь, что ряды (5.1), (5.11) сходятся равномерно и в области D комплексного переменного t, если в этой области (замкнутой) матрица $P(t)$ является непрерывной функцией от t.

§ 6. РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ПУАНКАРЕ—ЛАППО-ДАНИЛЕВСКОГО

Теперь мы остановимся на решении проблемы Пуанкаре — Лаппо-Данилевского из аналитической теории линейных систем дифференциальных уравнений. Далее мы покажем, что решение этой проблемы тесно связано с теорией линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Предположим, что в уравнении (3.5) P есть аналитическая функция комплексного переменного z однозначная в окрестности точки $z=a$. Если в точке $z=a$ $P(z)$ регулярная функция (т. е. все элементы матрицы $P(z)$ в точке $z=a$ регулярные функции)

$$P(z)=\sum_{k=0}^{\infty} P_k(z-a)^k, \tag{6.1}$$

где P_k — постоянные относительно z матрицы, то, как известно, и интегральная матрица $X(z)$ с начальным значением B_0 в точке $z=a$ из окрестности $z=a$ будет голоморфной в окрестности точки $z=a$, т. е. будем иметь:

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} B_k(z-a)^k, \tag{6.2}$$

где B_k — постоянные матрицы и ряд (6.2) сходится при $|z-a|<r$, r — расстояние от точки a до ближайшей из особых точек матрицы $P(z)$; другими словами, r есть расстояние от a до ближайшей из особых точек элементов матрицы $P(z)$.

Это непосредственно следует и из выше приведенных рассуждений относительно равномерной сходимости ряда (5.1) в области непрерывности матрицы $P(z)$. Здесь, кроме того, функции $X_k(z)$ будут, очевидно, регулярными функциями в области регулярности функции $P(z)$.

Теперь предположим, что $P(z)$ в точке $z=a$ имеет однозначную изолированную особенность, т. е. в точке $z=a$ матрица $P(z)$ имеет или полюс или существенно особую точку, так что в окрестности точки $z=a$ матрица $P(z)$ разложима в ряд Лорана.

Пусть $X(z)$ есть интегральная матрица уравнения (3.5) с начальным значением X_0 в точке $z=z_0$ из окрестности точки $z=a$. Мы предполагаем $D(X_0)\neq 0$, поэтому[1] и $D(X(z)\neq 0$ по известному свойству фундаментальной системы решений линейной системы дифференциальных уравнений. Будем аналитически продолжать $X(z)$ вдоль кривой L, окружающей точку $z=a$ и проходящей через $z=z_0$. Кривая L не проходит через особую точку матрицы $P(z)$ и не содержит внутри себя, кроме $z=a$, других особых точек $P(z)$.

Вообще говоря, после обхода особой точки $z=a$ мы получим в точке z_0 значение $X(z_0)=\overline{X}$, отличное от X_0. Возвращаясь, таким образом, в окрестность точки $z=z_0$ после обхода $z=a$, мы приходим к интегральной матрице $\overline{X}(z)$, отличной от $X(z)$. Но так как $X(z)$ составлена из фундаментальной системы решений, то новая интегральная матрица $\overline{X}(z)$ может быть выражена через $X(z)$ при помощи равенства

$$\overline{X}(z)=V(a)X(z), \tag{6.3}$$

где $V(a)$ — постоянная матрица, определенная равенством

$$\overline{X}_0=V(a)X_0,\quad V(a)=\overline{X}_0X_0^{-1}. \tag{6.4}$$

Так как $D(X(z))\neq 0$, то и $D(\overline{X}(z))\neq 0$ в силу того, что фундаментальная система решений остается фундаментальной при любых аналитических продолжениях вдоль кривой, не проходящей через особую точку матрицы $P(z)$.

Матрицу $V(a)$ называют интегральной подстановкой вокруг точки $z=a$.

Если $X_0=\mathrm{I}$, т. е. интегральная матрица $X(z)$ нормирована в точке $z=z_0$, то интегральную подстановку будем обозначать через $V(a, z_0)=\overline{X}(z_0)$. Здесь $\overline{X}(z_0)$ есть значение интегральной матрицы $X(z)$ в точке $z=z_0$ после обхода $z=a$.

Далее мы будем предполагать, что матрица $X(z)$ нормирована в точке $z=z_0$.

Обозначим

$$2\pi i W(a, z_0)=\ln V(a, z_0), \tag{6.5}$$

---

[1] В области регулярности матрицы $P(z)$.

так что

$$e^{2\pi i W(a,\, z_0)} = V(a,\, z_0). \tag{6.6}$$

Введем функцию

$$N(z) = (z-a)^{-W} X(z) = e^{-W \ln (z-a)} X(z).$$

На основании (6.3) после обхода точки $z = a$ эта функция принимает значение

$$\overline{N}(z) = e^{-W \ln (z-a) - 2\pi i W} V(a,\, z_0)\, X(z) = N(z).$$

Таким образом, функция $N(z)$ есть однозначная в окрестности $z = a$.

Отсюда следует, что

$$X(z) = (z-a)^{W} N(z-a), \tag{6.7}$$

где $N(z-a)$ — однозначная функция (матрица) в окрестности $z = a$. Всю многозначную особенность матрицы $X(z)$ в окрестности точки $z = a$ характеризует множитель $(z-a)^{W}$, а $N(z-a)$ — матрица, представимая в окрестности точки $z = a$ в виде ряда Лорана. Следуя Лаппо-Данилевскому, W будем называть показательной подстановкой в окрестности точки $z = a$.

Если точка $z = a$ для матрицы $P(z)$ является полюсом первого порядка, то $z = a$ называется регулярной особой точкой системы (3.1) или (3.5). Из аналитической теории линейных дифференциальных уравнений известно, что в этом случае $N(z-a)$ можно считать в точке $z=a$ регулярной, т. е.

$$N(z-a) = \sum_{k=0}^{\infty} N_k (z-a)^k,$$

где N_k — постоянные матрицы.

Если характеристические числа матрицы $P_{-1} = (z-a) P(z)|_{z=a}$ не отличаются на целое число, то представление решения в виде (6.7) дано в работе Лаппо-Данилевского.

В том случае, когда некоторые характеристические числа матрицы P_{-1} отличаются на целое число, вопрос о конструкции интегральной матрицы вида (6.7) рассмотрен в работах Л. И. Донской [17].

Пусть дана система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dY}{dz} = Y \sum_{j=1}^{n} \frac{U_j}{z - a_j}, \tag{6.8}$$

где U_j — постоянные (относительно z) матрицы и a_j — простые полюсы матрицы коэффициентов.

Лаппо-Данилевский впервые дал общее представление для матриц W_j, характеризующих многозначность интегральной матрицы $Y(z)$ в окрестности соответствующих точек $z = a_j$. Именно, он показал, что для случая $Y(z_0) = \mathrm{I}$ матрицы W_j представимы в виде

$$\Delta(U_j)\, W_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\varkappa=1}^{\nu} \sum_{j_1 \ldots j_\varkappa}^{1 \ldots m} U_{j} \ldots$$

$$\ldots U_{j_\varkappa} \delta_{\nu-\varkappa}(U_j)\, Q_j(a_j \ldots a_{j_\varkappa} \mathrm{I} z_0),$$

где $\delta_k(U_j)$ — полиномы от элементов матрицы U_j, $\Delta(U_j)$ — целая функция от элементов матрицы U_j и ряд композиций от $U_1, \ldots, U_m$ сходится при всех конечных значениях матриц $U_1, \ldots, U_m$; величины $Q_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\varkappa} \mathrm{I} z_0)$ суть функции от $a_1, \ldots, a_m$ и z_0, вычисляемые по рекурентным формулам. Отсюда видно, что W_j являются мероморфными функциями от матриц $U_1, \ldots, U_m$. Этим Лаппо-Данилевский не только дал явное и генеральное представление для функций W_j (проблема Пуанкаре),[1] но и исчерпывающим образом, охарактеризовал W_j как функции от матриц $U_1, \ldots, U_m$. Нас будет далее интересовать построение показательных подстановок и в том случае, когда особая точка $z = a$ матрицы $P(z)$ будет полюсом любого порядка и когда, таким образом, однозначная вокруг $z = a$ функция $N(z-a)$ не будет регулярной в точке $z = a$. Заметим, что для системы (6.8) матрицы W_j подобны матрицам U_j, которые, по Лаппо-Данилевскому, называют дифференциальными подстановками, т. е. $W_j = S_j U_j S_j^{-1}$, где S_j — матрица с $D(S_j) \neq 0$.

[1] А. Пуанкаре поставил задачу выделения многозначного множителя матрицы $X(z)$, Лаппо-Данилевский решил задачу генерального представления матрицы W через параметры матрицы $P(t)$ и изучения природы W как функции этих параметров.

В том случае, когда имеем систему

$$\frac{dX}{dz}=X\sum_{k=-1}^{\infty}U_k(z-a)_k$$

(U_k — постоянные матрицы), в представлении $X(z)=(z-a)^W\,\overline{X}(z)$, где $\overline{X}(z)$ — однозначная матрица в окрестности $z=a$ и W — постоянная относительно z матрица, мы также имеем [5] $W=SU_{-1}S^{-1}$, если характеристические числа матрицы U_{-1} не отличаются на целые числа. В работе Л. И. Донской [17] выяснено, когда эта формула имеет место при нарушении указанного условия относительно характеристических чисел матрицы P_{-1}. Тот факт, что не всегда $W=SU_{-1}S^{-1}$ отмечено и в книге Ф. Р. Гантмахера [1], но без ссылки на автора этого утверждения.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dY}{dz}=Y\sum_{\nu=-s}^{e}T_\nu z^\nu, \tag{6.9}$$

где T_ν — постоянные относительно z матрицы и Y — интегральная матрица, которую будем считать нормированной в точке $z=b$, т. е.

$$Y(z/b)\,|_{z=b}=\mathrm{I}.$$

Согласно предыдущему

$$Y(z\,|\,b)=z^W\,\overline{Y}(z), \tag{6.10}$$

где W — матрица постоянная относительно z, но является функцией от матриц $T_{-s},\ldots,T_e$, а $\overline{Y}(z)$ — однозначная матрица. Обозначим через V интегральную подстановку матрицы (6.10) вокруг точки $z=0$, так что $V=e^{2\pi iW}$.

По теореме Лаппо-Данилевского имеем:

$$V=e^{2\pi iW}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\ \sum_{p_1\ldots p_\nu=-s}^{e}T_{p_1}\ldots$$

$$\ldots T_{p_\nu}b^{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha^{*(0)}_{p_1\ldots p_\mu}\sum_{\varkappa=0}^{\nu-\mu}\alpha^{(\varkappa)}_{p_{\mu+1}\ldots p_\nu}(2\pi i)^\varkappa. \tag{6.11}$$

Здесь под знаком второй суммы составляются всевозможные произведения из ν матриц $T_{-s},\ldots,T_e$ и α суть рациональные числа, определенные рекуррентно формулами

$$\alpha^{(0)}_{p_1}=\begin{cases}\dfrac{1}{p_1+1}, & p_1+1\neq 0\\ \text{произвольное}, & p_1+1=0\end{cases}.$$

Можно, например, положить

$$\alpha^{(1)}_{p_1}=\begin{cases}0 & p_1+1\neq 0\\ 1 & p_1+1=0\end{cases}$$

$$(p_1+\ldots+p_\nu+\nu)\,\alpha^{(\nu)}_{p_1\ldots p_\nu}=0$$

$$(p_1+\ldots+p_\nu+\nu)\,\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_\nu}+(\mu+1)\,\alpha^{(\mu+1)}_{p_1\ldots p_\nu}=\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}$$

$$(\mu=\nu-1,\ \ \nu-2,\ldots,1,\ 0).$$

В случае $p_1+\ldots+p_\nu+\nu\neq 0$ имеем:

$$\alpha^{(\nu)}_{p_1\ldots p_\nu}=0;\ \ \alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_\nu}=\frac{1}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\Big[\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}-$$

$$-(\mu+1)\,\alpha^{(\mu+1)}_{p_1\ldots p_\nu}\Big].$$

Полагая здесь последовательно $\mu=\nu-1,\ \nu-2,\ldots,1,0$, получим

$$\alpha^{(\nu-1)}_{p_1\ldots p_\nu}=\frac{1}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\,\alpha^{(\nu-1)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}$$

$$\alpha^{(\nu-2)}_{p_1\ldots p_\nu}=\frac{1}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\Big[\alpha^{(\nu-2)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}-$$

$$-\frac{\nu-1}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\,\alpha^{(\nu-1)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}\Big]$$

$$\alpha^{(\nu-3)}_{p_1\ldots p_\nu}=\frac{1}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\Big[\alpha^{(\nu-3)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}-$$

$$-\frac{\nu-2}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\,\alpha^{(\nu-2)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}+\frac{(\nu-2)(\nu-1)}{(p_1+\ldots+p_\nu+\nu)^2}\,\alpha^{(\nu-1)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}\Big]$$

и вообще

$$\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_\nu}=\frac{1}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\left[\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}-\right.$$

$$-\frac{\mu+1}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\alpha^{(\mu+1)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}+$$

$$+\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{(p_1+\ldots+p_\nu+\nu)^2}\alpha^{(\mu+2)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}+$$

$$\left.+\ldots+(-1)^{\nu-\mu-1}\frac{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\nu-1)}{(p_1+\ldots+p_\nu+\nu)^{\nu-\mu-1}}\alpha^{(\nu-1)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}\right]$$

В случае $p_1+\ldots+p_\nu+\nu=0$ имеем:

$$\alpha^{(\mu+1)}_{p_1\ldots p_\nu}=\frac{1}{\mu+1}\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}\quad(\mu=\nu-1,$$

$$\nu-2,\ldots,1,0)\text{ и }\alpha^{(0)}_{p_1\ldots p_\nu}$$

произвольное.

Ряд[1] для V (6.11) есть целый, т. е. сходится при всех конечных значениях матриц $T_{-s},\ldots,T_e$, а его коэффициенты не зависят от порядка матриц $T_{-s},\ldots,T_e$. Лаппо-Данилевский построил [1] так же и W в виде ряда композиций от матриц $T_{-s},\ldots,T_e$, сходящегося в окрестности нулевых значений $T_{-s},\ldots T_e$. Этим он разрешил проблему Пуанкаре о представлении W как функции $T_{-s},\ldots,T_e$ в случае иррегулярной особой точки $z=0$. Более простое выражение для W указано в работе [6], именно там получено W в виде

$$W=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p\ldots p_\nu=-s}^{\infty}T_{p_1}\ldots$$

$$\ldots T_{p_\nu}b^{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha^{*(0)}_{p_1\ldots p_\mu}\alpha^{(1)}_{p_{\mu+1}\ldots p_\nu}.\qquad(6.11_1)$$

Генеральное представление W (т. е. представление, годное при всех значениях матриц $T_{-s},\ldots,T_e$) и изучение аналитических свойств функций $W=W(T_{-s},$

[1] Соответствующее выражение для V Лаппо-Данилевский построил и в том случае, когда в уравнениях (6.9) будет $e=\infty$. Можно это распространить и на тот случай, когда $s=\infty$.

$T_{-s+1},\ldots,T_0,\ T_1,\ldots)$ для случая $e=\infty$ выполнено в работах автора [5, 6]. Эти исследования имеют силу вообще для системы вида

$$\frac{dY}{dz}=Y\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}T_\nu z^\nu.$$

В случае системы (6.8) W, как мы видели, есть мероморфная функция матриц $U_1,\ldots U_m$.

В случае иррегулярной особой точки $z=0$, W является бесконечно значной функцией параметров $(T_{-s},\ldots,T_0,\ T_1,\ldots)$ системы [6]. Для случая, когда $T_{-s},\ldots,T_e$ — матрицы второго порядка, генеральное представление W имеем в виде [5]

$$W=\frac{\ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)}{2\pi i\sqrt{t^2-1}}\left[Ve^{-\pi i\sigma(T_{-1})}-t\right]+\frac{\sigma(T_{-1})}{2},\qquad(6.12)$$

где

$$t=\frac{\sigma(V)}{2}e^{-\pi i\sigma(T_{-1})}.$$

Для V имеем генеральное представление (6.11) в виде целого ряда.

§ 7. ФОРМУЛИРОВКА НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ И ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В этом параграфе мы будем рассматривать систему линейных однородных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{dX}{dt}=XP(t).\qquad(7.1)$$

Здесь $P(t)$ — матрица непрерывная и периодическая с периодом 2π

$$P(t+2\pi)=P(t).\qquad(7.2)$$

Мы уже отметили, что интегральная матрица (пусть нормированная в точке $t=0$) представима рядом (5.1), который равномерно сходится в любом конечном промежутке $0\leqslant t\leqslant p$. В силу периодичности матрицы $P(t)$ матрица $X(t+2\pi)$ также будет интегральной матрицей.

Действительно, при $t=\tau+2\pi$ из (7.1) получим

$$\frac{dX(\tau+2\pi)}{d\tau}=X(\tau+2\pi)P(\tau+2\pi)=X(\tau+2\pi)P(\tau),$$

откуда и следует утверждение.

По известному свойству фундаментальной системы решений линейных дифференциальных уравнений $X(t+2\pi)$ выражается через $X(t)$ равенством

$$X(t+2\pi)=VX(t), \tag{7.3}$$

где V — постоянная матрица с определителем, отличным от нуля при $t=0$, отсюда получаем

$$X(2\pi)=V. \tag{7.4}$$

Таким образом, интегральная матрица $X(t)$ при увеличении t на период 2π умножается слева на постоянную матрицу V, равную значению $X(t)$ при $t=2\pi$. Согласно (5.1) имеем:

$$V=\sum_{k=0}^{\infty}X_k(2\pi),\quad X_0(t)=\mathrm{I}, \tag{7.5}$$

где $X_k(t)$ определяется равенством (5.2). Введем в рассмотрение матрицу W равенством

$$2\pi W=\ln V,\quad V=e^{2\pi W} \tag{7.6}$$

и функцию

$$N(t)=e^{-Wt}X(t). \tag{7.7}$$

Функция $N(t)$ будет периодической с периодом 2π. Действительно,

$$N(t+2\pi)=e^{-Wt-2\pi W}X(t+2\pi)=$$
$$=e^{-Wt}e^{-2\pi W}VX(t)=N(t).$$

Отсюда видим, что интегральная матрица системы (7.1), нормированная в точке $t=0$, представима в виде

$$X(t)=e^{Wt}N(t), \tag{7.8}$$

где матрица W определена равенством (7.6) и $N(t)$ — периодическая матрица с периодом 2π.

Поставим теперь следующий вопрос. Когда W и $N(t)$ в равенстве (7.8) будут вещественными матрицами, если $P(t)$ в системе (7.1) вещественная? Так как интегральная подстановка V будет вещественной то, как

было показано в § 1, и $\ln V$ будет вещественным (напоминаем, что здесь имеется в виду главное значение $\ln V$), если среди характеристических чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ матрицы V отрицательных нет. В том случае, когда имеются отрицательные характеристические числа (нулевых быть не может, так как $D(V)\neq 0$), то согласно (1.36) имеем

$$\ln V=V_1+\pi i V_2, \tag{7.8$_1$}$$

где V_1 и V_2 — матрицы вещественные и коммутирующие, причем V_2 имеет вид

$$V_2=SL(0,1)S^{-1};$$

здесь $L(0,1)$ — диагональная матрица, элементы которой равны нулю и единице. Отсюда видим, что если имеются отрицательные характеристические числа матрицы V, то согласно (7.6) и (7.8) имеем:

$$X(t)=e^{\frac{1}{2\pi}V_1t}e^{\frac{i}{2}SL(0,1)S^{-1}t}N(t)$$

или

$$X(t)=e^{W_1t}N_1(t). \tag{7.9}$$

Здесь $W_1=\frac{1}{2\pi}V_1$ — матрица вещественная, поэтому и

$$N_1(t)=e^{\frac{i}{2}SL(0,1)S^{-1}t}N(t)$$

есть матрица вещественная, так как матрица $X(t)$ вещественная. Покажем, что матрица $N_1(t)$ обладает свойством

$$N_1(t+2\pi)\neq N_1(t),$$

но

$$N_1(t+4\pi)=N_1(t).$$

Действительно,

$$N_1(t+2\pi)=e^{\frac{i}{2}SL(0,1)S^{-1}t}e^{\pi iSL(0,1)S^{-1}}N(t)\neq$$
$$\neq e^{\frac{i}{2}SL(0,1)S^{-1}t}N(t)=N_1(t),$$

так как иначе в силу

$$D(N(t))\neq 0$$

было бы

$$e^{\pi i SL(0,1)S^{-1}} = Se^{\pi i L(0,1)}S^{-1} = SL(e^{\pi i 0},\ e^{\pi i})S^{-1} = \\ = SL(1,\ -1)S^{-1} = \mathrm{I},$$

что неверно.

Далее имеем:

$$N_1(t+4\pi) = N_1(t)\,e^{2\pi i SL(0,1)S^{-1}} = \\ = N_1(t)\,SL(e^{2\pi i 0},\ e^{2\pi i})S^{-1} = N_1(t)\,SL(1,1)S^{-1} = N_1(t),$$

так как $SL(1,1)S^{-1} = \mathrm{I}$.

Таким образом, если среди характеристических чисел матрицы V имеются отрицательные, то интегральную матрицу $X(t)$, нормированную в точке $t=0$, можно представить в виде (7.9), где W_1 — постоянная вещественная матрица, а матрица $N_1(t)$ — вещественная периодическая с периодом 4π.

Это утверждение в сущности высказал уже Ляпунов в своей знаменитой диссертации. Мы здесь сформулировали это лишь в несколько иной форме и привели другое доказательство. Заметим еще, что здесь W_1 уже не равно $\frac{1}{2\pi}\ln V$, в то время как ранее в (7.8) W было равно $\frac{1}{2\pi}\ln V$. Если бы мы здесь пользовались формулой (1.39), то наши рассуждения нигде не изменились бы.

§ 8. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ, ПОСТАВЛЕННЫХ В § 7, НА ОСНОВЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Зададимся вопросом о том, как можно найти выражение для W в формуле (7.8) или W_1 в формуле (7.9). Прежде всего W получаем в виде (7.6) через V, которое представляется сходящимся рядом (7.5).

Можно представить W, пользуясь выведенной нами ранее формой полинома Лагранжа. Пусть $P(t)$ матрица второго порядка.

Тогда, как мы видели (1.31), можно написать

$$2\pi W = \ln V = \frac{\sigma \ln D - 2M}{4D - \sigma^2}\,V + \frac{\sigma M + 2D - \sigma^2}{4D - \sigma^2} \qquad (8.1)$$

$$M = \int_0^1 \frac{\sigma(D - \sigma + 1)\,t + \sigma^2 - 2D - \sigma}{(D - \sigma + 1)\,t^2 + (\sigma - 2)\,t + 1}\,dt.$$

Здесь $\sigma = \sigma(V)$ и $D = D(V)$.

Согласно (7.5) имеем:

$$\sigma(V) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma(X_k(2\pi)). \qquad (8.2)$$

По формуле Якоби мы имеем:

$$D(V) = e^{\int_0^{2\pi} \sigma(P(t))\,dt} \qquad (8.3)$$

Эта формула показывает, что характеристические числа матрицы V отрицательными будут лишь одновременно оба. [1]

Следовательно, для случая матрицы второго порядка $P(t)$ в формуле (7.9) будет

$$N_1(t) = e^{\frac{i}{2}t}\,N(t), \qquad (8.4)$$

если имеются отрицательные характеристические числа матрицы V.

Пример. Дана система

$$\frac{dX}{dt} = XP, \qquad (8.5)$$

где P — матрица второго порядка

$$P = \begin{Vmatrix} P_{11}(t), & P_{12}(t) \\ P_{21}(t), & P_{22}(t) \end{Vmatrix},$$

элементы которой суть

$$P_{11}(t) = a_{11}\cos^2\frac{t}{2} + a_{22}\sin^2\frac{t}{2} - \\ - (a_{12} + a_{21})\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2},$$

$$P_{12}(t) = \frac{1}{2} + a_{12}\cos^2\frac{t}{2} - a_{21}\sin^2\frac{t}{2} + \\ + (a_{11} - a_{22})\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2},$$

[1] Уже Ляпунов на основании формулы Якоби обратил внимание на то, что число отрицательных характеристических чисел матрицы V порядка n может быть только четным.

$$P_{21}(t) = -\frac{1}{2} + a_{21}\cos^2\frac{t}{2} - a_{12}\sin^2\frac{t}{2} +$$

$$+ (a_{11} - a_{22})\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2},$$

$$P_{22}(t) = a_{11}\sin^2\frac{t}{2} + a_{22}\cos^2\frac{t}{2} +$$

$$+ (a_{21} - a_{12})\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}.$$

Интегральная матрица X, нормированная в точке $t=0$ имеет вид

$$X(t) = e^{\left\|\begin{matrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22}\end{matrix}\right\| t} \left\|\begin{matrix} \cos\frac{t}{2}, & \sin\frac{t}{2} \\ -\sin\frac{t}{2}, & \cos\frac{t}{2}\end{matrix}\right\|.$$

Здесь

$$X(2\pi) = -e^{\left\|\begin{matrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22}\end{matrix}\right\|} = V.$$

Найдем характеристические числа матрицы V. Пусть

$$A = \left\|\begin{matrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22}\end{matrix}\right\| = S\left\|\begin{matrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{matrix}\right\| S^{-1},$$

где S — матрица, а λ_1, λ_2 — вещественные числа.

Тогда

$$V = S\left\|\begin{matrix} -e^{2\pi\lambda_1} & 0 \\ 0 & -e^{2\pi\lambda_2}\end{matrix}\right\| S^{-1}$$

и, следовательно, характеристические числа μ_1, μ_2 матрицы V равны

$$\mu_1 = -e^{2\pi\lambda_1}, \quad \mu_2 = -e^{2\pi\lambda_2}.$$

Если

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{matrix}\right\| = S\left\|\begin{matrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda\end{matrix}\right\| S^{-1},$$

то

$$V = S\left\|\begin{matrix} -e^{2\pi\lambda} & 0 \\ -e^{2\pi\lambda} & -e^{2\pi\lambda}\end{matrix}\right\| S^{-1}$$

и $\mu_1 = \mu_2 = -e^{2\pi\lambda}$.

Таким образом, здесь период матрицы $P(t)$ равен 2π, а в представлении матрицы X

$$X = e^{At}N(t)$$

матрица

$$N(t) = \left\|\begin{matrix} \cos\frac{t}{2}, & \sin\frac{t}{2} \\ -\sin\frac{t}{2}, & \cos\frac{t}{2}\end{matrix}\right\|$$

имеет период 4π и характеристические числа интегральной подстановки V отрицательные.

Пусть дана система

$$\frac{dX}{dt} = XP(t), \tag{8.6}$$

где $P(t)$ — периодическая с периодом 2π вещественная матрица порядка n. Найдем решение в виде

$$X = e^{At}z(t), \tag{8.7}$$

где A — постоянная вещественная матрица и $z(t)$ вещественная периодическая матрица.

Мы воспользуемся методом, изложенным в работе [2].

Рассмотрим вспомогательную систему

$$\frac{dX}{dt} = XP\lambda, \tag{8.8}$$

где λ — вещественный параметр.

Для этой системы ряд (5.1) имеет вид

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(t)\lambda^k, \quad X_0 = \mathrm{I} \tag{8.9}$$

и сходится при всех конечных λ. Для матрицы V согласно (7.5) имеем:

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(2\pi)\lambda^k, \quad X_0 = \mathrm{I} \tag{8.10}$$

и этот ряд сходится при всех конечных λ. Согласно формуле (7.6) имеем:

$$A = \frac{1}{2\pi}\ln V = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\lambda^k, \tag{8.11}$$

причем здесь при достаточно малых λ ряд сходится [1].

Из $$z(t)=e^{-\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k\lambda^k t}\sum_{k=0}^{\infty} X_k(t)\lambda^k, \quad X_0=\mathrm{I}$$

видим, что $z(t)$ представима в виде ряда

$$z(t)=\mathrm{I}+\sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\lambda^k. \tag{8.12}$$

Подставляя (8.7) в (8.6) и умножая слева на e^{-At}, получим

$$\frac{dz}{dt}=zP\lambda-Az. \tag{8.13}$$

Подставляя сюда (8.11), (8.12) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим

$$\frac{dz_k}{dt}=z_{k-1}P-A_k-\sum_{e=1}^{k-1} A_e z_{k-e} \tag{8.14}$$

$$\frac{dz_1}{dt}=P-A_1. \tag{8.15}$$

Так как $P(t)$ и $z_1(t)$ матрицы периодические, то

$$z_1=\int_0^t (P(t)-A_1)\,dt \tag{8.16}$$

$$A_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)\,dt \tag{8.17}$$

$$z_1=\int_0^t P(t)\,dt-\frac{1}{2\pi}t\int_0^{2\pi} P(t)\,dt. \tag{8.18}$$

Отсюда видим, что матрица z_1 имеет период 2π. z_2 находится из уравнения

$$\frac{dz_2}{dt}=z_1P-A_2-A_1z_1. \tag{8.19}$$

Так как матрица $z_1P-A_1z_1$ периодическая, то

$$A_2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(z_1P-A_1z_1)\,dt \tag{8.20}$$

и

$$z_2=\int_0^t (z_1P-A_1z_1)\,dt-A_2t. \tag{8.21}$$

Вообще имеем:

$$A_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[z_{k-1}P-\sum_{e=1}^{k-1} A_e z_{k-e}\right]dt, \tag{8.22}$$

$$z_k=\int_0^t\left[z_{k-1}P-\sum_{e=1}^{k-1} A_e z_{k-e}\right]dt-A_kt. \tag{8.23}$$

Таким образом, коэффициенты рядов (8.11) и (8.12) будут найдены и эти ряды сходятся при достаточно малых λ. Если они сходятся и при $\lambda=1$, то мы получим (8.7). Обращаем внимание на следующее обстоятельство. Мы видели ранее, что в формуле (8.7) вещественными A и $z(t)$ иногда будут лишь при условии, что $z(t)$ будет иметь период 4π, а не 2π. Здесь же в (8.11) и (8.12) A и $z_1(t)$ будут всегда вещественные, а $z(t)$ имеет период 2π. Кажущееся противоречие объясняется тем, что при достаточно малых λ матрица V, данная рядом (8.11), будет всегда близка к единичной матрице, а, следовательно, ее характеристические числа будут близкими к единице. Другими словами, при малых λ характеристические числа матрицы V не будут отрицательными и потому, согласно ранее сказанному, при малых λ матрицы A и $z(t)$ в формуле (8.7) будут вещественными, а $z(t)$ будет иметь период 2π.

Эти рассуждения показывают, что ряды (8.11) и (8.12) не могут быть сходящимися при таких λ, при которых V имеет отрицательные характеристические числа. В примере (8.5) матрица P такова, что для системы (8.8) ряды (8.11) и (8.12) наверное расходятся при $\lambda=1$, так как интегральная подстановка V для системы (8.5), как мы видели, имеет отрицательные характеристические числа, и A, $z(t)$ будут вещественными только тогда, когда период $z(t)$ будет равен 4π.

Это обстоятельство уже ограничивает применение указанного метода. Для некоторых систем ряды (8.11), (8.12) могут конечно сходиться при $\lambda=1$ и даже могут быть целыми. В указанной работе [2] показано,[1] что если матрица второго порядка $P(t)$ имеет период $\omega=1$

[1] В этой нашей работе выполнено общее исследование относительно области сходимости рядов (8.11) и (8.12).

и $|P_{21}(t)| \leqslant a_1$, $|P_{12}| \leqslant a_2$, то ряды (8.11), (8.12), наверное, сходятся при

$$|\lambda| < \frac{\ln 2}{\sqrt{a_1 a_2}}.$$

Следовательно, при $a_1 a_2 < \ln^2 2$ эти ряды сходятся и при $\lambda = 1$.

В вопросах устойчивости часто важно лишь иметь представление о величине характеристических чисел матрицы A. В работе [2] доказано, что если на основании ряда (8.11) мы составим инварианты матрицы A, т. е. $D(A)$ и $\sigma(A)$, то ряды, представляющие эти величины, будут сходиться уже при всех λ.

Отсюда следует,[1] что инварианты $\sigma(W)$ и $D(W)$ показательной подстановки $W(6.11_1)$, представляемой рядом композиций от матриц $T_{-s}, \ldots, T_e$, построенным Лаппо-Данилевским, также суть функции целые от элементов матриц $T_{-s}, \ldots, T_e$.

Следует обратить внимание на то, что инварианты матрицы W совпадают с инвариантами матрицы H, построенной Лаппо-Данилевским в виде

$$H = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \ldots p_\nu = -s}^{e} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} \delta^{(0)}_{p_1 + \ldots + p_\nu + \nu} \alpha^{(1)}_{p_1 \ldots p_\nu}, \qquad (8.23_1)$$

где $\delta^{(0)}_p$ — символ Кронекера и $\alpha^{(1)}_{p_1 \ldots p_\nu}$ определены формулами § 6.

Здесь H — показательная подстановка так называемой метаканонической интегральной матрицы [1].

Матрица H подобна матрице W. Это позволяет приближенно находить характеристические числа матрицы A на основании ряда (8.11), где A_k определены формулами (8.17), (8.20) и (8.22), всегда и при $\lambda = 1$.

Характеристическое уравнение матрицы A имеет вид

$$\lambda^2 - \sigma(A)\lambda + D(A) = 0. \qquad (8.24)$$

---

[1] Так как A и W определяются аналогично. В § 9 мы установим точное равенство, связывающее A и W.

На основании формулы Якоби

$$D(X(2\pi)) = D(e^{2\pi A}) D(z(2\pi)) = e^{\sigma(2\pi A)} D(z(2\pi)) = e^{\int_0^{2\pi} \sigma(P)\,dt}.$$

Здесь периодическая с периодом 2π матрица $z(t)_{t=0} = I$ (8.7) (ибо $X(0) = I$), поэтому $D(z(2\pi)) = 1$. Следовательно,

$$e^{\sigma(2\pi A)} = e^{\int_0^{2\pi} \sigma(P)\,dt},$$

$$\sigma(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(P)\,dt. \qquad (8.25)$$

Заметим теперь, что здесь могут быть случаи

$$\sigma(A) > 0, \quad D(A) > 0, \quad \sigma^2(A) - 4D(A) > 0, \qquad (8.26)$$

тогда характеристические числа матрицы A положительные.

$$\sigma(A) \geqslant 0, \quad D(A) < 0 \quad \text{или} \quad \sigma(A) < 0, \quad D(A) < 0,$$
$$\sigma^2(A) - 4D(A) > 0; \qquad (8.27)$$

в этом случае одно характеристическое число положительное, другое отрицательное.

$$\sigma(A) < 0, \quad D(A) > 0, \quad \sigma^2(A) - 4D(A) > 0, \qquad (8.28)$$

тогда характеристические числа отрицательные.

$$\sigma(A) = 0, \quad D(A) > 0 \qquad (8.29)$$

характеристические числа чисто мнимые.

$$\sigma^2(A) - 4D(A) = 0 \qquad (8.30)$$

характеристические числа совпадают, а при $\sigma(A) = 0$ равны нулю.

$$\sigma^2(A) - 4D(A) < 0 \qquad (8.31)$$

характеристические числа комплексные с вещественной частью, равной $\frac{\sigma(A)}{2}$.

Мы покажем теперь, что метод разложения матриц A и $z(t)$ по параметру λ можно применять весьма разнообразно.

Предположим, что наряду с системой (8.6), где $P(t)$ имеет период 2π, имеется система

$$\frac{dX}{dt}=X(P_0(t)+P_1(t)\lambda), \tag{8.32}$$

обладающая следующими свойствами. При $\lambda=0$ она переходит в систему

$$\frac{dX_0}{dt}=X_0P_0(t), \tag{8.33}$$

интегрируемую в замкнутой форме, так что интегральную матрицу X_0, нормированную в точке $t=0$, можно представить в виде

$$X_0=e^{A_0t}z_0(t), \tag{8.34}$$

где A_0, z_0 определяются в конечном виде.

При $\lambda=1$ система (8.32) переходит в систему (8.6).

Тогда имеем интегральную матрицу системы (8.32) в виде

$$X(t)=\sum_{k=0}^{\infty}X_k(t)\lambda^k, \tag{8.35}$$

где $X_0(t)$ есть матрица (8.34) и ряд (8.35) сходится при всех конечных λ.

Мы, как и прежде, будем искать $X(t)$ в виде

$$X(t)=e^{At}z(t),\quad (z(0)=I), \tag{8.36}$$

где A и $z(t)$ — матрицы вещественные, и $z(t)$ — периодическая. Мы снова имеем:

$$V=X(2\pi)=\sum_{k=0}^{\infty}X_k(2\pi)\lambda^k.$$

Пусть рассматриваются матрицы второго порядка.

Предположим, что характеристические числа интегральной подстановки $V=X_0(2\pi)$ матрицы X_0 — положительные и различные. Тогда характеристические числа μ_1, μ_2 матрицы V при малых λ, очевидно, не будут отрицательными. Согласно формуле Лагранжа

$$2\pi A=\ln V=\frac{V-\mu_1}{\mu_2-\mu_1}\ln\mu_2+\frac{V-\mu_2}{\mu_1-\mu_2}\ln\mu_1= \\ =V\frac{\ln\mu_2-\ln\mu_1}{\mu_2-\mu_1}+\frac{\mu_2\ln\mu_1-\mu_1\ln\mu_2}{\mu_2-\mu_1}. \tag{8.36$_1$}$$

Матрица A — вещественная и период матрицы $z(t)$ равен 2π. Числа μ_1, μ_2 суть корни уравнения

$$\mu^2-\sigma(V)\mu+D(V)=0.$$

Так как V, $\sigma(V)$ и $D(V)$ — функции целые от λ, то A также разлагается в сходящийся ряд по степеням λ

$$A=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\lambda^k, \tag{8.37}$$

а следовательно, и $z(t)$ можно представить сходящимся рядом

$$z(t)=\sum_{k=0}^{\infty}z_k(t)\lambda^k, \tag{8.38}$$

так что при $\lambda=0$ матрицы A и $z(t)$ переходят в соответствующие матрицы A_0 и $z_0(t)$ выражения (8.34).

Может случиться, что $\mu_2=\mu_1$ при $\lambda=0$, тогда написанная формула Лагранжа при $\lambda=0$ переходит в предельную, но $2\pi A(\lambda)$ снова разлагается в ряд по положительным степеням λ; здесь только матрица A_0 имеет кратные характеристические числа.

Впрочем, A_0 может при $\mu_1=\mu_2$ иметь и разные характеристические числа, если $2\pi A_0$ есть иррегулярное значение $\lg V_0$ (1.40).

Если характеристические числа матрицы V_0 отрицательные, то при малых λ и матрица V имеет отрицательные характеристические числа. В этом случае $2\pi A_0$ и $2\pi A$ не являются соответственно значениями $\ln V_0$ и $\ln V$ (7.8$_1$). Но так как согласно (7.8$_1$), (7.9) и (8.4) имеем:

$$2\pi A_0=\ln V_0-i\pi,\ 2\pi A=\ln V-i\pi,$$

то снова $2\pi A$ разлагается в сходящийся ряд по положительным степеням λ.

Может, однако, случиться, что здесь $2\pi A_0$ и $2\pi A$ не являются главными значениями $\ln V_0$ и $\ln V$, так как если, например, P_0 — постоянная матрица, то $X_0=e^{P_0t}$ и $2\pi P_0$ не обязательно главные значения $\ln e^{2\pi P_0}$.

Например, при (1.44)

$$P_0 = \begin{Vmatrix} 0 & , \frac{2n+1}{2} \\ -\frac{2n+1}{2}, & 0 \end{Vmatrix} = S \begin{Vmatrix} \frac{(2n+1)}{2} i, & 0 \\ 0, & -\frac{(2n+1)}{2} i \end{Vmatrix} S^{-1} \quad (8.38_1)$$

$$2\pi P_0 = \ln e^{2\pi P_0} = \ln(-I)$$

не есть главное значение — иррегулярное значение (§ 1). Но и иррегулярное значение $\ln e^{2\pi P_0} = 2\pi P_0$ может быть предельным значением $\ln X(2\pi)$ при $\lambda \to 0$ (§ 1). Но так как здесь элементы $X(2\pi)$ по определенному пути стремятся к предельным значениям при $\lambda \to 0$, то нет уверенности в том, что имеем:

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \lambda^k, \text{ где } A_0 = P_0.$$

Поэтому, если $P_0(t)$ постоянное и $X_0 = e^{P_0 t}$ периодическое, например с периодом 4π, и если P_0 имеет вид (8.38_1), то в (8.34) полагаем $A_0 = 0$ и $z_0 = e^{P_0 t}$, т. е. полагаем $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda^k$

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t) \lambda^k \text{ и } z_0 = e^{P_0 t}.$$

Такое A, наверно, имеется, так как при $\lambda \to 0$ матрица $X(4\pi) \to X_0(4\pi)$, характеристические числа $X_0(4\pi)$ равны 1, в силу периодичности $X_0(t)$, и мы получаем $A_0 = 0$ предельным переходом из (8.36_1) при $\lambda \to 0$. Если характеристические числа матрицы P_0 суть

$$\lambda_1 = a + \frac{2n+1}{2} i, \ \lambda_2 = a - \frac{2n+1}{2} i,$$

то можно положить $X_0 = e^{aIt} e^{(P_0 - aI)t}$, т. е. $A_0 = aI$ и $z_0(t) = e^{(P_0 - aI)t}$ (периодическое с периодом 4π).

Для нахождения рядов (8.37) и (8.38) подставим (8.36) в (8.32), тогда после сокращения на множитель $e^{A_0 t}$ получим

$$\frac{dz}{dt} = z[P_0 + P_1 \lambda] - Az. \quad (8.39)$$

Подставляя сюда (8.37), (8.38) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, найдем

$$\frac{dz_k}{dt} = z_k P_0(t) - A_0 z_k + z_{k-1} P_1(t) - \sum_{e=1}^{k} A_e z_{k-e}, \quad (8.40)$$

$$\frac{dz_1}{dt} = z_1 P_0 - A_0 z_1 + z_0 P_1 - A_1 z_0. \quad (8.41)$$

Рассмотрим систему

$$\frac{dY}{dt} = YP_0 - A_0 Y. \quad (8.42)$$

Общее решение такой системы будет [2]

$$Y = e^{-A_0 t} c X_0, \quad (8.43)$$

где X_0 — решение (8.33), а c — произвольная постоянная матрица.

Будем искать решение системы (8.40) в виде

$$z_k = e^{-A_0 t} c_k(t) X_0. \quad (8.44)$$

Подставляя (8.43) в (8.40), после сокращений найдем

$$e^{-A_0 t} \frac{dc_k}{dt} X_0 = z_{k-1} P_1 - \sum_{e=1}^{k} A_e z_{k-e}.$$

Отсюда имеем:[1]

$$\frac{dc_k}{dt} = e^{A_0 t} [z_{k-1} P_1 - A_1 z_{k-1} - \sum_{e=2}^{k} A_e z_{k-e}] X_0^{-1}$$

или, подставляя X_0 из (8.34) и интегрируя, $c_k(t)$ получим в виде

$$c_k = \int_0^t e^{A_0 t} \Big[z_{k-1} P_1 - A_1 z_{k-1} -$$

[1] Заметим, что систему (8.32) можно взять и в общем виде $\frac{dx}{dt} = x \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \lambda^k$, где $P_k(t)$ — матрицы; при этом дальнейшие рассуждения останутся в силе.

$$-\sum_{e=2}^{k-1} A_e z_{k-e} - A_k z_0 \Big] z_0^{-1} e^{-A_0 t}\, dt$$

или

$$c_k = \int_0^t e^{A_0 t} \Big[z_{k-1} P_1 z_0^{-1} - A_1 z_{k-1} z_0^{-1} -$$

$$-\sum_{e=2}^{k-1} A_e z_{k-e} z_0^{-1} - A_k \Big] e^{-A_0 t}\, dt.$$

Подставляя это в (8.44), найдем z_k

$$z_k = e^{-A_0 t} \int_0^t e^{A_0 t} \Big[z_{k-1} P_1 z_0^{-1} - A_1 z_{k-1} z_0^{-1} -$$

$$-\sum_{e=2}^{k-1} A_e z_{k-e} - A_k \Big] e^{-A_0 t}\, dt e^{A_0 t} z_0(t) \qquad (8.45)$$

$$z_1 = e^{-A_0 t} \int_0^t e^{A_0 t} [z_0 P_1 z_0^{-1} - A_1]\, e^{-A_0 t}\, dt \cdot e^{A_0 t} z_0(t). \qquad (8.46)$$

Подчиняя $z_k(t)$ условию периодичности, мы последовательно и единственным образом найдем матрицы A_k и $z_k(t)$. Это следует из предыдущего, но можно было бы это вывести и непосредственно вычислением из формул (8.44). Рассуждения, проведенные в гл. V, § 7 работы [2], показывают, что и в этом случае величины $\sigma(A)$ и $D(A)$, построенные на основе рядов (8.37) и (8.38), будут целые функции от λ, а следовательно, сходящиеся и при $\lambda = 1$, когда $\sigma(A)$ и $D(A)$ переходят в соответствующие величины для рассматриваемой системы (8.6).

Мы получили, таким образом, новые возможности проверять условия (8.26), (8.27), (8.28), (8.29) и (8.31). Систему (8.32) мы можем строить различными способами. Например, можно выделять P_0 вида, указанного в (3.6) или (3.10), когда система (8.33) интегрируется в конечном виде.

Можно, например, положить

$$\frac{dX}{dt} = X \left[\begin{Vmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & P_{12} \\ P_{21} & 0 \end{Vmatrix} \lambda \right]. \qquad (8.47)$$

Эту систему удобно, в частности, вводить в том случае, когда средние интегральные значения по периоду функции $P_{11}(t)$, $P_{22}(t)$ отличны от нуля, а для функций P_{12}, P_{21} равны нулю.

За P_0 можно взять матрицу коэффициентов, рассмотренную в § 4.

Вообще, если взять какую-нибудь матрицу $P_0(t)$ такую, что интегральная матрица X системы

$$\frac{dY}{dt} = YP_0(t)$$

будет известна, мы получим систему (8.32) в виде

$$\frac{dX}{dt} = X\, [P_0(t) + (P(t) - P_0(t))\, \lambda], \qquad (8.47_1)$$

т. е. здесь $P_1(t) = P(t) - P_0(t)$.

За $P_0(t)$ удобно брать такую матрицу, чтобы матрица Y уже была некоторым хорошим приближением матрицы X. Например, за Y можно взять матрицу

$$Y = e^{B_n t}\, Y_n(t), \qquad (8.47_2)$$

где

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} A_k, \quad Y_n(t) = \sum_{k=0}^{n} z_k(t),$$

т. е. B_n и Y_n суть суммы n членов рядов (8.37) и (8.38) при $\lambda = 1$.

Выбирая, таким образом, наперед Y, мы легко найдем соответствующее значение P_0.

Выбирая тем или иным образом P_0, мы производим некоторое частичное суммирование рядов (8.11) и (8.12) и тем самым имеем возможность частично просуммировать ряды, представляющие инварианты матрицы A и являющиеся целыми относительно параметра $\lambda = 1$ (и, следовательно, сходящимися при $\lambda = 1$).

§ 9. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ § 7 НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ПУАНКАРЕ — ЛАППО-ДАНИЛЕВСКОГО И ПРЕДЛОЖЕНИЯ, ВЫСКАЗАННОГО ЛЯПУНОВЫМ

Теперь мы покажем, что полное решение проблемы Пуанкаре — Лаппо-Данилевского тесно связано с проблемой построения интегральной матрицы X системы

$$\frac{dX}{dt} = XP(t), \quad P(t+2\pi) = P(t) \tag{9.1}$$

в виде

$$X = e^{At} N(t), \tag{9.2}$$

где A — матрица постоянная, а $N(t)$ — периодическая с периодом 2π. Интегральная матрица (9.2) при увеличении t на 2π умножается слева на матрицу

$$V = e^{2\pi A}. \tag{9.3}$$

Пусть матрица[1] $P(t)$ имеет вид

$$P(t) = b_0 + \sum_{k=1}^{m} b_k \cos kt + \sum_{k=1}^{m} a_k \sin kt, \tag{9.4}$$

где b_0, b_k и a_k — постоянные матрицы.

Заменяя

$$\sin kt = \frac{e^{kti} - e^{-kti}}{2i}, \quad \cos kt = \frac{e^{kti} + e^{-kti}}{2}$$

и $z = e^{ti}$, мы запишем матричное уравнение (9.1) в виде

$$zi\frac{dX}{dz} = X \sum_{k=-m}^{m} P_k z^k, \tag{9.5}$$

где

$$P_k = \frac{b_k - ia_k}{2}, \quad k \geqslant 1;$$

$$P_k = \frac{b_{-k} + ia_{-k}}{2}, \quad k \leqslant -1, \quad P_0 = b_0.$$

Можно систему (9.5) записать так

$$\frac{dX}{dz} = X \sum_{k=-m-1}^{m-1} T_k z^k, \tag{9.6}$$

[1] Дальнейшие рассуждения справедливы и при $m = \infty$ согласно предыдущему.

где

$$T_k = -iP_{k+1}, \quad T_{-1} = -ib_0. \tag{9.7}$$

Таким образом, на конечном расстоянии система (9.6) имеет одну особую иррегулярную точку $z = 0$. Пусть $X(t)$ интегральная матрица системы (9.6), нормированная в точке $z = 1$.

Согласно предыдущему (6.7) имеем:

$$X(z) = z^W N(z), \tag{9.8}$$

где W — матрица постоянная и $N(z)$ — однозначная матрица в окрестности точки $z = 0$.

После обхода переменной z начала координат матрицы $X(z)$ умножается слева на матрицу

$$V = e^{2\pi iW}, \quad 2\pi iW = \ln V, \tag{9.9}$$

которую, как мы видели (§ 6), можно представить рядами от матриц $T_{-m}, \ldots, T_{m-1}$, сходящимися (со скоростью показательной функции) при всех конечных значениях этих матриц. W также можно представить при всех значениях этих матриц $T_{-m}, \ldots, T_{m-1}$ по формуле (6.12)

Заменяя $z = e^{it}$, мы можем написать

$$X(e^{it}) = e^{iWt} N(e^{it}). \tag{9.10}$$

Здесь матрица $N(e^{it})$ периодическая (в виду однозначности $N(z)$ в окрестности точки $z=0$) с периодом 2π и матрица

$$iW = A \tag{9.11}$$

есть матрица, входящая в формулу (9.2). Отсюда видим, что интегральная матрица $X(t)$ умножается слева на матрицу

$$V = e^{2\pi iW} = e^{2\pi A} \tag{9.12}$$

при увеличении t на период 2π.

Следовательно, нахождение матрицы V, на которую умножается интегральная матрица системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами при увеличении независимого переменного t на период матрицы коэффициентов, приводится к нахождению матрицы, на которую умножается интегральная матрица системы дифференциальных уравнений с особой иррегулярной точкой $z=0$ при обходе точкой z начала координат. Нас интересует генеральное представление матрицы A через матрицы, входящие в систему двух дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Согласно (9.11) и (6.12) имеем:

$$A=iW=\frac{\ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)}{2\pi\sqrt{t^2-1}}\left[Ve^{-\pi i\sigma(T_{-1})}-t\right]+\frac{\sigma(T_{-1})}{2}i, \tag{9.13}$$

где

$$t=\frac{\sigma(V)}{2}e^{-\pi i\sigma(T_{-1})}. \tag{9.14}$$

На основании (9.7) можно написать и так

$$A=\frac{\ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)}{2\pi\sqrt{t^2-1}}\left[Ve^{-\pi\sigma(b_0)}-t\right]+\frac{\sigma(b_0)}{2} \tag{9.15}$$

$$t=\frac{\sigma(V)}{2}e^{-\pi\sigma(b_0)}. \tag{9.16}$$

Если

$$\sigma(b_0)=0, \tag{9.17}$$

то

$$A=\frac{\ln\left(\frac{\sigma(V)}{2}+\sqrt{\frac{\sigma^2(V)}{4}-1}\right)}{2\pi\sqrt{\frac{\sigma^2(V)}{4}-1}}\left[V-\frac{\sigma(V)}{2}\right]. \tag{9.18}$$

Чтобы найти A, нужно получить V и $\sigma(V)$, так как $\sigma(b_0)$ задано вместе с системой (9.1) на основе (9.4). Для нахождения V мы можем поступить следующим образом. Обозначая матрицы
$b_0=U_1; b_1=U_2, \ldots, b_m=U_{m+1}; a_1=U_{m+2}, \ldots, a_m=U_{2m+1}$,
запишем систему (9.1) в виде

$$\frac{dX}{dt}=X\sum_{k=1}^{2m+1}\varphi_k(t)U_k, \tag{9.19}$$

где

$$\begin{aligned}&\varphi_1(t)=1,\ \varphi_k(t)=\cos(k-1)t,\ (k=2,\ldots,m+1)\\&\varphi_k(t)=\sin(k-m-1)t,\ (k=m+2,\ldots,2m+1).\end{aligned} \tag{9.20}$$

Матрицу $X(t)$ можно теперь найти в виде ряда композиций от матриц $u_1, \ldots, u_{2m+1}$ (5.11), сходящегося при всех конечных $u_1, \ldots u_{2m+1}$ и любом конечном t. Можно также получить $X(t)$ в виде (5.1), что одно и то же.

После этого легко находим и

$$V=X(2\pi),\ \sigma(V)=\sigma(X(2\pi)) \tag{9.21}$$

в виде сходящихся рядов.

Можно, однако, воспользоваться и рядом (6.11), представляющим V в виде ряда композиций от $T_{-s}, \ldots, T_e$, сходящимся также при любых конечных значениях этих матриц; при этом нужно положить $b=1$.

Коэффициенты ряда (6.11) суть полиномы от π с рациональными коэффициентами, где рациональные числа α и $\overset{*}{\alpha}$ определены указанными выше рекуррентными формулами Лаппо-Данилевского.

Так как V — матрица вещественная, то в (6.11) в каждой сумме

$$\sum_{p_1\ldots p_\nu=-m-1}^{m-1}T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}\overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1\ldots p_\mu}\sum_{\varkappa=0}^{\nu-\mu}\alpha^{(\varkappa)}_{p_{\mu+1}\ldots p_\nu}(2\pi i)^\varkappa$$

коэффициенты при i будут равны нулю, когда подставим значения $T_{-m-1}, \ldots, T_{m-1}$ согласно (9.7).

Система линейных уравнений с периодическими коэффициентами есть частный случай приводимых по Ляпунову [2] систем. Матрица $z(t)$ есть матрица преобразования заданной системы с периодическими коэффициентами к системе с постоянными коэффициентами с матрицей коэффициентов A, общее выражение которой (а также $z(t)$) мы здесь и находим.

Рассмотрим тот случай, когда характеристические числа μ_1, μ_2 матрицы V отрицательные.

Тогда $\sigma(V)=\mu_1+\mu_2<0$ и согласно (9.16)

$$t=\frac{\sigma(V)}{2}e^{-\pi\sigma(b_0)}<0.$$

Отсюда следует, что

$$t+\sqrt{t^2-1}<0.$$

Поэтому согласно (9.15) матрица A будет комплексной, именно,

$$A=\frac{\ln\left(-t-\sqrt{t^2-1}\right)+\pi i}{2\pi\sqrt{t^2-1}}\left[Ve^{-\pi\sigma(b_0)}-\frac{\sigma(V)}{2}e^{-\pi\sigma(b_0)}\right]+$$
$$+\frac{\sigma(b_0)}{2}=A_1+\frac{ie^{-\pi\sigma(b_0)}}{2\sqrt{t^2-1}}\left[V-\frac{\sigma(V)}{2}\right],$$

где

$$A_1 = \frac{\ln(-t-\sqrt{t^2-1})}{2\pi\sqrt{t^2-1}}\left[V-\frac{\sigma(V)}{2}\right]e^{-\pi\sigma(b_0)}+\frac{\sigma(b_0)}{2}$$

матрица вещественная.

Характеристические числа μ_1, μ_2 суть корни уравнения

$$\mu^2-\sigma(V)\mu+D(V)=0.$$

По формуле Якоби из уравнения (9.1) имеем:

$$D(V)=e^{\int\limits_0^{2\pi}\sigma(P)\,dt}=e^{2\pi\sigma(b_0)},$$

поэтому находим

$$\mu_1=\frac{\sigma(V)+\sqrt{\sigma^2(V)-4e^{2\pi\sigma(b_0)}}}{2}$$

$$\mu_2=\frac{\sigma(V)-\sqrt{\sigma^2(V)-4e^{2\pi\sigma(b_0)}}}{2}$$

и

$$\mu_1-\mu_2=\sqrt{\sigma^2(V)-4e^{2\pi\sigma(b_0)}}=2e^{\pi\sigma(b_0)}\sqrt{t^2-1}.$$

Далее имеем:

$$V-\frac{\sigma(V)}{2}=S[\mu_1,\ \mu_2]S^{-1}-\frac{\mu_1+\mu_2}{2}=$$

$$=S\left[\frac{\mu_1-\mu_2}{2},\ \frac{\mu_2-\mu_1}{2}\right]S^{-1}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{ie^{-\pi\sigma(b_0)}}{2\sqrt{t^2-1}}\left(V-\frac{\sigma(V)}{2}\right)=\frac{i}{2}S[1,\ -1]S^{-1}$$

$$A=A_1+\frac{i}{2}S[1,\ -1]S^{-1}.$$

Это позволяет (9.2) записать в виде

$$X=e^{A_1t}e^{\frac{i}{2}tS[1,\ -1]S^{-1}}N(t) \qquad (9.22)$$

или

$$X=e^{A_1t}N_1(t),$$

где

$$N_1(t)=e^{\frac{it}{2}S[1,\ -1]S^{-1}}N(t).$$

Матрица $N_1(t)$ — вещественная (матрицы X и A_1 — вещественные) и имеет период 2π, так как $N(t)$ имеет период 2π, а функция $e^{\frac{i}{2}tS[1,\ -1]S^{-1}}$ имеет период 4π в силу равенства $e^{2\pi iS[1,\ -1]S^{-1}}=I$.

Ранее (8.4) мы вместо (9.22) имели:

$$X=e^{A_1t}e^{\frac{i}{2}t}N(t),$$

но согласно замечанию в конце § 1 и ранее мы могли бы получить (9.22).

Надо сказать, что еще А. М. Ляпунов в своей диссертации (гл. III, 53) отметил один случай линейной системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, для которой нахождение характеристических чисел матрицы A приводится к простой алгебраической задаче. Это случай, когда в системе $2n$ уравнений с неизвестными $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ после введения новых неизвестных

$$U_s=x_s+iy_s,\ v_s=x_s-iy_s \quad (s=1,\ldots,n)$$

система распадается на две системы для неизвестных $u_1, \ldots, u_n$ и $v_1, \ldots, v_n$.

Первая из этих систем такова, что замена $e^{it}=z$ приводит к линейным уравнениям с регулярной особой точкой $z=0$ и, следовательно, характеристические числа матрицы A будут найдены как характеристические числа матрицы,[1] стоящей в виде коэффициента при z^{-1}.

Вторая система уравнений с неизвестными $v_1, \ldots, v_n$ приводится также к системе с регулярной особой точкой $z=0$ заменой $e^{-it}=z$. В случае системы двух уравнений этот класс уравнений Ляпунова является весьма простым частным случаем такой системы, где матрица коэффициентов $P(t)$ обладает свойством (3.6), (3.10)

$$P(t)\int\limits_0^t P(t)\,dt=\int\limits_0^t P(t)\,dt\cdot P(t).$$

Таким образом, на связь между теорией линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими

[1] Это видно из формулы § 6 $W=SU_1S^{-1}$.

коэффициентами и аналитической теорией линейных систем дифференциальных уравнений обратил внимание еще А. М. Ляпунов.

§ 10. ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В этом параграфе мы коснемся вопроса существования ограниченных и периодических решений систем двух линейных однородных дифференциальных уравнений с периодической матрицей коэффициентов $P(t)$

$$\frac{dX}{dt} = XP(t), \quad P(t+2\pi) = P(t). \qquad (10.1)$$

Интегральную матрицу, нормированную при $t=0$, такой системы, как мы видели, можно представить в виде

$$X = e^{At} z(t), \qquad (10.2)$$

где A — матрица второго порядка постоянная и вещественная, а $z(t)$ — периодическая матрица с периодом 2π или 4π. Если $z(t)$ имеет период 4π, то $z(t+2\pi) = -z(t)$. При увеличении t на период 2π интегральная матрица $X(t)$, данная формулой (10.2), умножается слева на матрицу

$$V = X(2\pi) = e^{2\pi A}, \qquad (10.3)$$

если $z(t)$ имеет период 2π, или на матрицу

$$V = X(2\pi) = -c^{2\pi A}, \qquad (10.4)$$

если период $z(t)$ равен 4π.

Следовательно, мы имеем:

$$X(t+2\pi n) = V^n X(t), \qquad (10.5)$$

где n — целое число.

Предположим, что матрица V имеет канонический вид

$$V = S \begin{Vmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{Vmatrix} S^{-1}, \qquad (10.6)$$

где μ_1, μ_2 — корни уравнения

$$\mu^2 - \sigma(V)\mu + D(V) = 0 \qquad (10.7)$$

и согласно формуле Якоби

$$D(V) = e^{\int_0^{2\pi} \sigma(P)\,dt}. \qquad (10.7_1)$$

Матрица

$$X_1 = S^{-1} X \qquad (10.8)$$

есть также интегральная для системы (10.1) и умножается слева на матрицу

$$J = \begin{Vmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{Vmatrix} \qquad (10.9)$$

при увеличении t на 2π.

Это означает, что решение, стоящее в первой строчке интегральной матрицы X_1 умножается на μ_1, а решение, стоящее во второй строчке, умножается на μ_2 при увеличении t на 2π.

Действительно, из

$$X_1(t+2\pi) = \begin{Vmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{Vmatrix} X_1(t) \qquad (10.10)$$

следует, что

$$\begin{aligned} x_{k1}(t+2\pi) &= \mu_1 x_{k1}(t) \\ x_{k2}(t+2\pi) &= \mu_2 x_{k2}(t) \end{aligned} \quad (k=1,2), \qquad (10.11)$$

где $x_{k1}(t)$, $x_{k2}(t)$ — элементы k строчке матрицы $X_1(t)$.

По свойству корней уравнения (10.7) и на основании (10.7_1) имеем:

$$\mu_1 \mu_2 = e^{\int_0^{2\pi} \sigma(P)\,dt}. \qquad (10.12)$$

Если

$$\int_0^{2\pi} \sigma(P)\,dt = 0,$$

то

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = 1. \qquad (10.13)$$

Из (10.11) видим, что если

$$|\mu_1| < 1, \qquad (10.14)$$

то система линейных уравнений, соответствующая матричному уравнению (10.1), имеет однопараметрическое семейство[1] решений $x_1(t)$, $x_2(t)$, обладающих свойством

$$|x_1(t)|+|x_2(t)|\to 0 \text{ при } t\to\infty. \qquad (10.15)$$

Если и μ_1, и μ_2 по модулю меньше единицы, то все решения обладают свойством (10.15) и, очевидно, нулевое решение $x_1=x_2=0$ асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Предположим теперь, что μ_1, μ_2 комплексное и $|\mu_1|=|\mu_2|=1$, т. е.

$$\mu_1=e^{i\varphi}, \quad \mu_2=e^{-i\varphi}. \qquad (10.15_1)$$

Записывая (10.5) на основании (10.6) и (10.15_1) в форме

$$X(t+2\pi n)=S[e^{in\varphi}, e^{-in\varphi}]\,S^{-1}X(t), \qquad (10.16)$$

мы видим, что матрица $X(t)$ суть ограниченная колеблющаяся при $t\to\infty$. Так как всякая другая интегральная матрица рассматриваемого уравнения (10.1) имеет вид

$$X_1=CX, \qquad (10.17)$$

где C — постоянная матрица, то и все решения будут ограниченными колеблющимися (кроме нулевого).

Если имеем:

$$k\varphi=2\pi, \quad k \text{ — целое}, \qquad (10.18)$$

то все решения будут периодическими с периодом $\frac{2\pi}{k}$.

При $\varphi=2\pi$ имеем $\mu_1=\mu_2=1$ и потому все решения будут периодическими с периодом 2π.

Если же $\varphi=\pi$, то $\mu_1=\mu_2=-1$ и все решения будут иметь период 4π.

Предположим теперь, что каноническая форма матрицы V имеет вид

$$V=S\begin{Vmatrix}\mu & 0\\ 1 & \mu\end{Vmatrix}S^{-1}. \qquad (10.19)$$

Тогда имеем:

$$X(t+2\pi n)=V^nX(t)=S\begin{Vmatrix}\mu^n, & 0\\ n\mu^{n-1}, & \mu^n\end{Vmatrix}S^{-1}X(t). \qquad (10.20)$$

[1] Т. е. семейство $x_1(t)=cx_{11}(t)$, $x_2(t)=cx_{12}(t)$, где c — произвольное постоянное число.

Так как для $|\mu|<1$ будет $a\mu^a\to 0$ при $a\to\infty$, то $X(t)\to 0$ при $t\to\infty$, если $|\mu|<1$.

На основании (10.17) заключаем, что все решения системы (10.1) обладают свойством (10.15).

Если $\mu=1$, то интегральная матрица (10.8) умножается слева при увеличении t на 2π на матрицу

$$J_1=\begin{Vmatrix}1, & 0\\ 1, & 1\end{Vmatrix}. \qquad (10.21)$$

Отсюда следует, что решение $x_{11}(t)$, $x_{12}(t)$, стоящее в первой строчке матрицы X_1, есть периодическое с периодом 2π. Второе решение $x_{21}(t)$, $x_{22}(t)$, стоящее во второй строчке, обладает свойством

$$x_{21}(t+2\pi n)=x_{21}(t)+nx_{22}(t)$$
$$x_{22}(t+2n\pi)=x_{22}(t).$$

Таким образом, при $\mu=1$ имеем лишь однопараметрическое семейство периодических решений с периодом 2π, остальные же решения не будут ограниченными. При $\mu=-1$ имеем однопараметрическое семейство периодических решений с периодом 4π.

Если в (10.19) $|\mu|>1$ или в (10.10) $|\mu_1|>1$ и $|\mu_2|>1$, то все решения системы (10.1) неограниченные при $t\to\infty$.

Заметим, что при условии

$$\int_0^{2\pi}\sigma(P)\,dt>0 \qquad (10.21_1)$$

все решения не могут быть ограниченными, так как согласно (10.12) наверное имеется $|\mu_1|>1$.

Пусть теперь

$$\int_0^{2\pi}\sigma(P)\,dt<0, \qquad (10.22)$$

т. е.

$$0<D(V)=e^{\int_0^{2\pi}\sigma(P)\,dt}<1. \qquad (10.23)$$

Тогда на основании (10.7) легко выводим, что если

$$\sigma(V)>0, \ \sigma^2(V)-4D(V)>0, \qquad (10.24)$$

то случай

$$0<\mu_1<1,\ 0<\mu_2<1 \tag{10.25}$$

будет при

$$\sigma(V)<1+D(V)<2. \tag{10.26}$$

Если имеем:

$$\sigma(V)<0,\ \sigma^2(V)-4D(V)>0, \tag{10.27}$$

то при

$$0<1+\sigma+D \tag{10.28}$$

будет

$$-1<\mu_1<0,\ -1<\mu_2<0. \tag{10.29}$$

Следовательно, при условиях (10.24) и (10.26) или (10.27) и (10.28) все решения системы (10.1) обладают свойством (10.15).

Пусть теперь имеем (10.23) и

$$\sigma^2(V)-4D(V)=0, \tag{10.30}$$

тогда

$$\mu=\mu_1=\mu_2=\frac{\sigma(V)}{2}=\pm\sqrt{D(V)}. \tag{10.31}$$

Согласно предыдущему и в силу (10.23) независимо от канонического вида матрицы V, все решения системы (10.1) обладают свойством (10.15).

Предположим теперь, что имеем (10.23) и

$$\sigma^2(V)-4D(V)<0. \tag{10.32}$$

Тогда μ_1 и μ_2 комплексные и так как

$$\mu_1\mu_2=D(V)<1,\ \text{то}\ |\mu_1|=|\mu_2|<1.$$

Следовательно, при условиях (10.23) и (10.32) все решения системы (10.1) обладают свойством (10.15).

Рассмотрим теперь случай

$$\int_0^{2\pi} P(t)\,dt=0,\ D(V)=1. \tag{10.33}$$

Пусть еще

$$\sigma^2(V)-4>0. \tag{10.34}$$

Тогда при

$$\sigma(V)>0 \tag{10.35}$$

$$\mu_1=\frac{\sigma(V)+\sqrt{\sigma^2(V)-4}}{2}>1 \tag{10.36}$$

и

$$0<\mu_2=\frac{\sigma(V)-\sqrt{\sigma^2(V)-4}}{2}<1, \tag{10.37}$$

а при

$$\sigma(V)<0. \tag{10.38}$$

$$-1<\mu_1<0,\ \mu_2<-1. \tag{10.39}$$

Если имеем (10.33) и

$$\sigma^2(V)-4<0, \tag{10.40}$$

то μ_1 и μ_2 комплексные, по модулю равные единице, т. е. имеем случай (10.15_1).

Таким образом, при выполнении условий (10.33) и (10.40) все решения системы (10.1) будут ограниченными колеблющимися.

Пусть теперь имеем (10.33) и

$$\sigma^2(V)-4=0. \tag{10.41}$$

Тогда

$$\mu_1=\mu_2=1, \tag{10.42}$$

если выполнено условие (10.35), и, наоборот,

$$\mu_1=\mu_2=-1 \tag{10.43}$$

при условии (10.38).

Если имеем (10.42), то существует однопериодическое семейство периодических с периодом 2π решений системы (10.1).

Если же имеется (10.43), то существует однопараметрическое семейство периодических с периодом 4π решений системы (10.1).

Вопрос об ограниченности (а в данном случае и о периодичности) всех решений системы (10.1) решается, как мы видели, каноническим видом матрицы V, именно, если V имеет вид (10.19), где теперь будет $\mu=\pm 1$, то все решения системы (10.1) не будут ограниченными.

Выведем необходимое условие существования периодического с периодом 2π решения системы (10.1).

Так как для существования периодического решения необходимо и достаточно, чтобы было

$$\mu_1=1, \tag{10.44}$$

то по свойству корней квадратного уравнения на основании (10.7) имеем:

$$\mu_2 = D(V) = e^{\int_0^{2\pi} \sigma(P)\,dt} \tag{10.45}$$

и

$$1 + \mu_2 = \sigma(V). \tag{10.46}$$

Исключая из этих равенств μ_2, получаем необходимое и достаточное условие существования периодического с периодом 2π решения

$$1 + e^{\int_0^{2\pi} \sigma(P)\,dt} = \sigma(V), \tag{10.47}$$

Действительно, если

$$1 + D(V) = \sigma(V), \tag{10.47$_1$}$$

то, подставляя отсюда $D(V)$ в (10.7), получим

$$\mu^2 - \sigma(V)\mu + \sigma(V) - 1 = 0,$$

откуда видим, что $\mu = 1$ есть корень уравнения (10.7).

Следовательно, если

$$1 + e^{\int_0^{2\pi} \sigma(P)\,dt} \neq \sigma(V), \tag{10.48}$$

то система (10.1) периодического решения с периодом 2π не имеет.

Если, в частности, выполнено условие (10.33), то при

$$2 \neq \sigma(V) \tag{10.49}$$

такого периодического решения нет. Пусть в системе (10.1)

$$P(t) = \begin{Vmatrix} 0, & P(t) \\ q(t), & 0 \end{Vmatrix},$$

где $P(t)$ и $q(t)$ — функции периодические с периодом 2π и $P(t) \geqslant 0$, $q(t) \geqslant 0$.

В этом случае, как нетрудно видеть, в формуле (5.1)

$$\sigma(X_{2k+1}(t)) = 0 \quad \text{и} \quad \sigma(X_{2k}(t)) > 0.$$

Отсюда следует, что

$$\sigma(V) = \sigma(X(2\pi)) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma(X_k(2\pi)) > 2$$

и, следовательно, периодических решений с периодом 2π нет.

§ 11. О ПЕРИОДИЧЕСКИХ И ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ, РАССМОТРЕННЫХ В § 3 и 4

Пусть в системе (10.1) периодическая матрица обладает свойством (3.6). Тогда согласно (3.7)

$$X(t) = e^{\int_0^t P(t)\,dt} \tag{11.1}$$

или так как $P(t)$ имеет вид (3.10), то

$$\int_0^t P(t)\,dt = \begin{Vmatrix} \overline{\varphi}_1(t) + b_1\overline{\varphi}_2(t), & \overline{\varphi}_2(t) \\ b_2\overline{\varphi}_2(t), & \overline{\varphi}_1(t) \end{Vmatrix}, \tag{11.1$_1$}$$

где

$$\int_0^t \varphi_k(t)\,dt = \overline{\varphi}_k(t) = \overline{\varphi}_k. \tag{11.2}$$

Характеристические числа матрицы (11.1$_1$) суть

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 &= 2\overline{\varphi}_1 + b_1\overline{\varphi}_2 + \overline{\varphi}_2\sqrt{b_1^2 + 4b_2} \\ 2\lambda_2 &= 2\overline{\varphi}_1 + b_1\overline{\varphi}_2 - \overline{\varphi}_2\sqrt{b_1^2 + 4b_2}. \end{aligned} \tag{11.3}$$

Следовательно,

$$\sigma(V) = e^{\lambda_1(2\pi)} + e^{\lambda_2(2\pi)} \tag{11.4}$$

и

$$D(V) = e^{\lambda_1(2\pi) + \lambda_2(2\pi)}. \tag{11.5}$$

Подставляя (11.4) и (11.5) в (10.47), найдем

$$1 + e^{\lambda_1(2\pi) + \lambda_2(2\pi)} = e^{\lambda_1(2\pi)} + e^{\lambda_2(2\pi)}$$

или

$$\left[1 - e^{\lambda_1(2\pi)}\right]\left[1 - e^{\lambda_2(2\pi)}\right] = 0. \tag{11.6}$$

Таким образом, условие существования периодического с периодом 2π решения рассматриваемой системы двух уравнений состоит в том, что должно быть выполнено по крайней мере одно из двух равенств

$$2\int_0^{2\pi}\varphi_1(t)\,dt+\left(b_1+\sqrt{b_1^2+4b_2}\right)\int_0^{2\pi}\varphi_2(t)\,dt=0$$

$$2\int_0^{2\pi}\varphi_1(t)\,dt+\left(b_1-\sqrt{b_1^2+4b_2}\right)\int_0^{2\pi}\varphi_2(t)\,dt=0 \qquad (11.7)$$

или

$$2\int_0^{2\pi}\varphi_1(t)\,dt+b_1\int_0^{2\pi}\varphi_2(t)\,dt=0,$$

$$\left[\int_0^{2\pi}\varphi_1(t)\,dt\right]^2+b_1\int_0^{2\pi}\varphi_1(t)\,dt\int_0^{2\pi}\varphi_2(t)\,dt-b_2\left[\int_0^{2\pi}\varphi_2 dt\right]^2=n^2\pi^2,$$

так как при этом

$$\lambda_1=2\pi ni,\quad \lambda_2=-2\pi ni,\quad \text{где } n \text{ — целое.}$$

Если ни одно из равенств (11.7) не выполнено, то периодических с периодом 2π решений нет.

Теперь рассмотрим систему (4.1), где U_1, U_2 матрицы второго порядка, обладающие свойством (4.2) и (4.3), а $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ периодические с периодом 2π функции. Пусть матрицы U_1 и U_2 имеют вид (4.6). Тогда, как мы видели, $\sigma(V)$ и $D(V)$ получаем по формулам (4.8) и (4.9) при $t=2\pi$.

Подставляя эти значения $\sigma(V)$ и $D(V)$ в (10.47), легко найдем

$$\left[1-e^{a\int_0^{2\pi}\varphi_1(t)\,dt+b_1\int_0^{2\pi}\varphi_2(t)\,dt}\right]\times$$

$$\times\left[1-e^{a\int_0^{2\pi}\varphi_1(t)\,dt+b_2\int_0^{2\pi}\varphi_2(t)\,dt}\right]=0. \qquad (11.8)$$

Таким образом, здесь периодическое решение с периодом 2π имеется только в том случае, если выполнено одно из двух равенств

$$\int_0^{2\pi}[a\varphi_1(t)+b_1\varphi_2(t)]\,dt=0 \qquad (11.9)$$

или

$$\int_0^{2\pi}[a\varphi_1(t)+b_2\varphi_2(t)]\,dt=0. \qquad (11.10)$$

Предположим теперь, что в системе (4.1) матрицы U_1, U_2 имеют вид (4.11). Тогда в соответствии с (4.16) и (4.17)

$$\sigma(V)=e^{(a+cm)L_1(2\pi)+(b+mn)L_2(2\pi)}+$$
$$+e^{(a+cm)L_1(2\pi)+(b-mn)L_2(2\pi)}$$

и

$$D(V)=e^{2(a+cm)L_1(2\pi)+2bL_2(2\pi)}.$$

Подставляя это в условие периодичности решений (10.47), найдем

$$\left[1-e^{(a+cm)L_1(2\pi)+(b+mn)L_2(2\pi)}\right]\times$$
$$\times\left[1-e^{(a+cm)L_1(2\pi)+(b-mn)L_2(2\pi)}\right]=0.$$

Периодическое решение с периодом 2π рассматриваемая система имеет только при выполнении одного из равенств

$$\int_0^{2\pi}[(a+cm)\varphi_1(t)+(b+mn)\varphi_2(t)]\,dt=0$$

$$\int_0^{2\pi}[(a+cm)\varphi_1(t)+(b-mn)\varphi_2(t)]\,dt=0.$$

Этим мы исчерпали все возможные случаи системы двух уравнений (4.1), когда матрицы U_1, U_2 удовлетворяют условиям (4.2) и (4.3).

§ 12. РЕШЕНИЕ ВОПРОСОВ ОГРАНИЧЕННОСТИ И ПЕРИОДИЧНОСТИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ СПЕЦИАЛЬНОЙ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ПОДСТАНОВКИ, ПОЛУЧЕННОЙ ЛАППО-ДАНИЛЕВСКИМ

Теперь мы выразим условия ограниченности решений системы (10.1) через элементы матрицы A, входящей в формулу (10.2).

При изучении вопроса существования ограниченных и периодических с периодом 2π решений можно предполагать, что в формуле (10.2) матрица $z(t)$ имеет период 2π; тем самым мы допускаем матрицу A и комплексной. На основании формул (1.2), (1.5) и (1.6) заключаем следующее, если

$$A=S\begin{Vmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{Vmatrix}S^{-1}, \qquad (12.1)$$

то

$$V=e^{2\pi A}=S\begin{Vmatrix}e^{2\pi\lambda_1}, & 0\\ 0, & e^{2\pi\lambda_2}\end{Vmatrix}S^{-1}$$

и если

$$A=S\begin{Vmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{Vmatrix}S^{-1}, \qquad (12.2)$$

то

$$V=e^{2\pi A}=S\begin{Vmatrix}e^{2\pi\lambda}, & 0\\ 2\pi e^{2\pi\lambda}, & e^{2\pi\lambda}\end{Vmatrix}S^{-1}.$$

Отсюда видим, что если

$$R(\lambda_1)<0, \qquad (12.3)$$

где $R(\lambda)$ означает вещественную часть λ, то характеристическое число μ_1 матрицы V по модулю будет меньше единицы и, следовательно, имеется однопараметрическое семейство решений, обладающих свойством (10.15).

В том случае, когда и $R(\lambda_2)<0$, все решения системы (10.1) обладают свойством (10.15). Если в (12.2) $R(\lambda)<0$, то также все решения системы (10.1) обладают свойством (10.15). Если в (12.1) $\lambda_1=ki$, где k — число целое или нуль, то характеристическое число μ_1 матрицы V будет равно единице $\mu_1=e^{2k\pi i}=1$.

Однако следует сказать, что изложенные выше способы нахождения матрицы A через параметры, входящие в матрицу $P(t)$, таковы, что число k возможно всегда сделать равным нулю (или, наоборот, произвольным целым), т. е. возможно всегда привести к случаю $\lambda_1=0$.

В этом случае система (10.1) имеет однопараметрическое семейство периодических с периодом 2π решений. Все решения системы (10.1) могут быть периодическими с периодом 2π только в том случае, когда $\lambda_1=\lambda_2=0$ и этому характеристическому числу матрицы A

соответствует простой элементарный делитель, т. е. если

$$A=0 \qquad (12.4)$$

или если

$$\lambda_1=k_1 i,\ \lambda_2=k_2 i, \qquad (12.4_1)$$

где k_1, k_2 — числа целые.

Если матрица A получена вещественной, то, очевидно, возможно только $k_1=k_2=k$ и кратному характеристическому числу ki соответствуют простые элементарные делители (чтобы все решения были ограниченными).

Если же матрица A имеет кратное характеристическое число ki (k — целое), но имеет вид

$$A=S\begin{Vmatrix}ki & 0\\ 1 & ki\end{Vmatrix}S^{-1}, \qquad (12.5)$$

то имеется только однопараметрическое семейство периодических решений, остальные же не будут ограниченными, так как

$$V^n=e^{2n\pi A}=S\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 2n\pi & 1\end{Vmatrix}S^{-1},$$

где n — целое число.

Предположим теперь, что характеристическими числами матрицы A будут

$$\lambda_1=\lambda i,\ \lambda_2=-\lambda i, \qquad (12.6)$$

где λ — вещественное положительное число, неравное целому.

Очевидно, этот случай соответствует условиям (10.33) и (10.40).

Если λ — число рациональное, то все решения будут периодическими с периодом $T=2k\pi$, где k определяется равенством $k\lambda=1$.

Если же λ — не рациональное число, то все решения будут ограниченными колеблющимися.

Как видно из предыдущего, возможен случай, когда

$$\lambda_1=\lambda_2=\frac{i}{2}\quad \text{(матрица } A \text{ — комплексная)} \qquad (12.7)$$

или

$$\lambda_1=\frac{i}{2},\quad \lambda_2=-\frac{i}{2} \qquad (12.8)$$

или, наконец, вообще

$$\lambda_1 = \frac{2n+1}{2} i, \quad \lambda_2 = \frac{2n-1}{2} i. \qquad (12.8_1)$$

Тогда все решения системы (10.1) будут периодическими с периодом 4π. Заметим, что

$$\sigma(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{1\pi} \sigma(P(t))\, dt, \qquad (12.9)$$

если мы матрицу A желаем иметь вещественной.

Необходимое и достаточное условие наличия периодического с периодом 2π решения, при условии, что матрица A — вещественная, выражается равенством

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma(A) = 0, \text{ т. е. } \int_0^{2\pi} \sigma(P(t))\, dt = 0 \\ D(A) = n^2 \qquad (n \text{ — целое}) \end{array}\right\} \qquad (12.10)$$

или

$$D(A) = 0, \quad \sigma(A) \text{ — произвольное} \qquad (12.10_1)$$

Напоминаем, что общее выражение матрицы A для системы (9.1), где $P(t)$ задано формулой (9.4), дается формулой (9.15), которая при

$$\int_0^{2\pi} P(t)\, dt = 2\pi\sigma(b_0) = 0$$

переходит в (9.18).

Следовательно, в случае (9.18) характеристическое уравнение матрицы A имеет вид

$$\lambda^2 - \frac{m^2}{4} (\sigma^2(V) - 4) = 0,$$

где

$$m = \frac{\ln\left(\frac{\sigma(V)}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2(V)}{2} - 1}\right)}{2\pi \sqrt{\frac{\sigma^2(V)}{4} - 1}}.$$

Мы уже отметили ранее (§ 8), что инварианты матрицы A суть функции целые от параметров, входящих в $P(t)$, заданной формулы (9.4).

Поэтому в равенство

$$D(A) = n^2 \qquad (12.10_2)$$

можно подставить значение $D(A)$, полученное из рядов (8.24$_1$), пользуясь тем, что на основании (9.13)

$$D(A) = -D(W) = -D(H). \qquad (12.10_3)$$

Таким образом, вопросы существования ограниченных и периодических решений системы (10.1) можно решать на основе выражений, полученных ранее для A или W.

Рассмотрим снова систему (10.1) в предположении (3.6).

Интегральная матрица дана формулой (11.1). Так как функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — периодические с периодом 2π, то

$$\int_0^t \varphi_k(t)\, dt = a_k t + \psi_k(t),$$

где

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_k(t)\, dt,$$

а $\psi_k(t)$ — функции периодические с периодом 2π.

Это позволяет нам записать (11.1) в виде

$$X(t) = e^{At} e^{z(t)},$$

где A — постоянная матрица

$$A = \begin{Vmatrix} a_1 + b_1 a_2, & a_2 \\ & b_2 a_2, & a_1 \end{Vmatrix},$$

а $z(t)$ — периодическая с периодом 2π матрица

$$z(t) = \begin{Vmatrix} \psi_1(t) + b_1\psi_2(t); & \psi_2(t) \\ & b_2\psi_2(t); & \psi_1(t) \end{Vmatrix}.$$

Условие (12.10$_1$) здесь имеет вид

$$a_1^2 + b_1 a_1 a_2 - b_2 a_2^2 = 0. \qquad (12.11)$$

Это условие равносильно двум условиям (11.7), так как, перемножая равенство (11.7), мы и приходим к (12.11).

Условия (12.10) порождают равенства

$$2a_1 + b_1 a_2 = 0, \quad a_1^2 + b_1 a_1 a_2 - a_2^2 b_2 = n^2,$$

совпадающее с (11.7_1).

В частности, при $a_1 = a_2 = 0$ система имеет периодическое с периодом 2π решение.[1] Пользуясь[2] условием (12.10), мы также легко можем восстановить условия (11.9), (11.10) и (11.11).

Далее нас особенно будет интересовать вопрос о существовании периодического с периодом 2π решения системы (10.1).

Если для системы (10.1) установлена асимптотическая устойчивость нулевого решения, то тем самым будет доказано отсутствие периодического решения. Так, например, в работе Н. З. Штокало [8] указаны условия асимптотической устойчивости нулевого решения линейной системы вида

$$\frac{dX}{dt} = X(A + \varepsilon f(t)),$$

где A — постоянная матрица, $f(t)$ — периодическая[3] матрица, представляющая собой тригонометрический полином, а ε — малый параметр.

Можно [9] рассматривать и такую систему, где вообще

$$P(\varepsilon, t) \to A \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

С. М. Макаров [20] рассматривал систему двух уравнений с периодическими коэффициентами. Он, в частности, показал, что если коэффициенты системы обладают свойством $P_{ke}(t) \geqslant 0$, но нет $P_{ke}(t) \equiv 0$, то характеристические числа матрицы V будут вещественными и одно из них будет по модулю больше, а другое — меньше величины

$$e^{\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (P_{11}(t) + P_{22}(t)\, dt)}.$$

Следовательно, при $\int\limits_0^{2\pi} (P_{11}(t) + P_{22}(t))\, dt = 0$ оба характеристические числа не равны 1 и периодических решений нет. Здесь же показано, что если $P_{12} \geqslant 0$, $P_{21} \geqslant 0$ и

$$\int\limits_0^{2\pi} P_{12}\, e^{\int\limits_0^t (P_{22} - P_{11})\, dt} dt \cdot \int\limits_0^{2\pi} P_{21}\, e^{\int\limits_0^t (P_{11} - P_{22})\, dt} \leqslant 4,$$

то характеристические числа матрицы V комплексные, по модулю равные единице, поэтому периодических с периодом 2π решений нет.

Укажем еще работы [10] В. И. Бурдиной, посвященные вопросам существования ограниченных решений системы двух уравнений вида (10.1).

Полное исследование этих вопросов для системы вида

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = p(t)\, x \qquad (12.12)$$

в предположении, что $p(t)$ — функция периодическая $\geqslant 0$, дано А. М. Ляпуновым [11].

Эта же система рассматривалась в работах [12, 13].

Ляпунов, в частности, показал, что если в (12.12) $p(t)$ удовлетворяет условие

$$\int\limits_0^{2\pi} p(t)\, dt \leqslant 8\pi,$$

то характеристические числа матрицы V будут комплексные сопряженные, по модулю равные единице, поэтому периодического с периодом 2π решения быть не может.

А. М. Ляпунов и Н. Е. Жуковский рассматривали[1] систему (12.12) и в том случае, когда $p(t)$ — функция знакопеременная [16].

---

[1] Мы уже отметили (§ 9), что А. М. Ляпунов рассмотрел систему, которая в случае системы двух уравнений есть частный случай системы (10.1) при условии (3.6); А. П. Гремяченский [7], рассматривая эту систему $2n$ уравнений Ляпунова, указал случай, когда имеется нулевое характеристическое число матрицы A.

[2] Выше (§ 4) мы уже отмечали, что Г. Ф. Федоров [4] указал более общий случай, чем система (4.1), когда $X(t)$ получается в замкнутом виде, что позволяет легко решить вопрос о существовании ограниченных и периодических решений.

[3] В работе Н. З. Штокало $f(t)$ тригонометрический полином не обязательно периодический.

[1] См. там же [21, 22].

Некоторый список работ по вопросу существования ограниченных решений системы двух линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами можно найти в работе В. А. Якубовича [15], а также[1] в обзорной статье В. М. Старжинского [16].

Заметим, что, разлагая в (12.12) $P(t)$ в ряды Фурье по $\sin kt$ и $\cos kt$, мы можем найти указанным выше способом, на основе работ Лаппо-Данилевского, условия ограниченности решений.

§ 13. УРАВНЕНИЕ МАТЬЕ

В этом параграфе мы в качестве примера рассмотрим уравнение Матье

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a - 2q\cos 2t)\,y = 0, \tag{13.1}$$

где a и q — постоянные.

Это уравнение эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= X\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 2q\cos 2t - a, & 0\end{Vmatrix} = \\ &= X\left[\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0\end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 2q & 0\end{Vmatrix}\cos 2t\right].\end{aligned} \tag{13.2}$$

Здесь матрицы коэффициентов имеют период π. Введем новую независимую переменную $\tau = 2t$

$$\frac{dX}{d\tau} = X\left[\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0\end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ q & 0\end{Vmatrix}\cos\tau\right]. \tag{13.3}$$

Следовательно, эта система такова, что в соотношении с (9.4) здесь

$$b_0 = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0\end{Vmatrix}, \quad b_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ q & 0\end{Vmatrix}, \tag{13.4}$$

$$P_0 = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0\end{Vmatrix}, \quad P_1 = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ q & 0\end{Vmatrix}, \quad P_{-1} = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ q & 0\end{Vmatrix}$$

Записывая (13.3) в виде (9.6), получим

$$\frac{dX}{dz} = X\left[\mathrm{T}_{-2}z^{-2} + \mathrm{T}_{-1}z^{-1} + \mathrm{T}_0\right] \tag{13.5}$$

[1] См. [23].

$$\mathrm{T}_{-2} = \frac{-i}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ q & 0\end{Vmatrix}, \quad \mathrm{T}_{-1} = -\frac{i}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0\end{Vmatrix},$$

$$\mathrm{T}_0 = -\frac{i}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ q & 0\end{Vmatrix}. \tag{13.6}$$

Согласно (12.10_3) $D(A) = -D(H)$, где H дано формулой (8.23_1)

$$H = \sum_{\nu=1}^{\infty}\ \sum_{p_1 \dots p_\nu = -s}^{e} \mathrm{T}_{p_1}\dots\mathrm{T}_{p_\nu}\,\delta^{(0)}_{p_1+\dots+p_\nu+\nu}\,\alpha^{(1)}_{p_1\dots p_\nu}, \tag{8.24_1}$$

где $\delta^{(0)}_m$ — символ Кронекера, т. е.

$$\delta^{(0)}_m = \begin{cases} 0 & m \neq 0 \\ 1 & m = 0 \end{cases} \tag{13.7}$$

$\alpha^{(1)}_{p_1\dots p_\nu}$ определены формулами § 6, а $p_1, \dots, p_\nu$ принимают в формуле (8.23_1) значения: -2, -1, 0.

На основании формул (13.6)

$$\mathrm{T}_0^2 = \mathrm{T}_{-2}^2 = \mathrm{T}_0\mathrm{T}_{-2} = \mathrm{T}_{-2}\mathrm{T}_0 = \|0\|. \tag{13.8}$$

Отсюда следует, что все произведения матриц T_0, T_{-1}, T_{-2}, где стоят рядом T_0 и T_{-2} или одно из них возводится в квадрат, равны нулю. Отсюда найдем, что $\mathrm{T}_{p_1}\mathrm{T}_{p_2}\dots\mathrm{T}_{p_5}\mathrm{T}_{p_6} = 0$, для $p_1 + \dots + p_6 + 6 = 0$, так как в таком произведении T_0 и T_{-2} обязательно стоят рядом. Учитывая (13.8) в остальных произведениях и подставляя значения коэффициентов $\alpha^{(1)}_{p_1\dots p_\nu}$, мы, оставляя в сумме ($8.24_1$) произведения $\mathrm{T}_{p_1\dots p_\nu}$ лишь при $\nu = 1, 2, \dots, 7$, получим

$$\begin{aligned} H = {} & \mathrm{T}_{-1} + \mathrm{T}_{-2}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_0 + \mathrm{T}_0\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-2} + 2\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-2}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_0 - \\ & - 2\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_0\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-2} - \mathrm{T}_{-2}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_0 + \mathrm{T}_0\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-2} + \\ & + 3\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-2}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_0 + 3\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_0\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-2} - \\ & - 3\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-2}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_0 + \mathrm{T}_{-2}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_0 + \\ & + \mathrm{T}_0\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-2} - 3\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_0\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-2} + \\ & + 3\mathrm{T}_0\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-2}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_0\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-2} + \frac{1}{4}\mathrm{T}_0\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_0\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-2}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-2} + \\ & + 3\mathrm{T}_0\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-2}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-2}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_0 + 3\mathrm{T}_{-2}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_0\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_0\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-2} + \\ & + \frac{1}{4}\mathrm{T}_{-2}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-2}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_0\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_0 + 3\mathrm{T}_{-2}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_0\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-2}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_0 + \\ & + 5\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-2}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_0 + 10\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-2}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_{-1}\mathrm{T}_0 + \end{aligned}$$

$$+ T_{-2}T_{-1}T_{-1}T_{-1}T_{-1}T_{-1}T_0 + 5\, T_{-1}T_{-1}T_{-1}T_{-1}T_0T_{-1}T_{-2} + $$
$$+ 10\, T_{-1}T_{-1}T_0T_{-1}T_{-1}T_{-1}T_{-2} + T_0T_{-1}T_{-1}T_{-1}T_{-1}T_{-1}T_{-2}.$$

Вычисляя эту сумму на основании (13.6), получим

$$H = \begin{Vmatrix} 0, & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2}\left(a + \frac{q^2}{2} + \frac{aq^2}{2} + \frac{25q^4}{128} + \frac{a^2q^4}{2}\right), & 0 \end{Vmatrix}.$$

Отсюда

$$D(H) = \frac{1}{4}\left(a + \frac{q^2}{2} + \frac{aq^2}{2} + \frac{25}{128}q^4 + \frac{a^2q^4}{2}\right).$$

Из $D(H) = 0$ имеем:

$$q^4a^2 + (2 + q^2)\,a + q^2 + \frac{25}{64}q^4 = 0,$$

$$aq^4 = -\frac{2+q^2}{2} \pm \sqrt{1 + q^2 + \frac{q^4}{4} - q^6 - \frac{25}{64}q^8}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{q^2}{2} + \frac{7}{128}q^4 + 0(q^6), \\ a_2 &= -\frac{2+q^2}{q^4} + \frac{q^2}{2} - \frac{7q^4}{128} + 0(q^6). \end{aligned} \qquad (13.9)$$

Здесь $O(q^6)$ означают малую порядка q^6 при $q \to 0$. Таким образом,[1] здесь a_1 есть приближенное значение корня уравнения $D(H) = 0$.

Подставляя значение

$$a_1 = -\frac{q^2}{2} + \frac{7}{128}q^4$$

в общее представление величин $N(t)$ и A (9.18), получим приближенное решение системы (13.2) в виде (10.2).

Эти решения будут мало отличаться от соответствующих периодических решений в большом промежутке изменения t.

Для нахождения периодического решения с периодом 4π системы (13.3) применим метод, предложенный в § 8, рассматривая систему (13.3) как систему вида

[1] Нет оснований считать и a_2 приближенным значением a, так как при малых q a_2 велико и не ясно будет ли малой сумма остатка отброшенной части ряда $D(H) = 0$ по сравнению с a_2.

(8.32). Мы положим, кроме того, $a = 1 - 2\alpha$ и запишем систему (13.3) в виде

$$\frac{dX}{dt} = X\left[\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0, & 0 \\ \alpha + q\cos t, & 0 \end{Vmatrix}\lambda\right], \qquad (13,10)$$

т. е.

$$P_0 = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} \text{ и } P_1 = \begin{Vmatrix} 0, & 0 \\ \alpha + q\cos t, & 0 \end{Vmatrix}. \qquad (13.11)$$

Будем искать периодическое с периодом 4π решение

$$X = X(t_1 q) \to e^{P_0 t} \text{ при } q \to 0. \qquad (13.12)$$

Мы положим

$$A_0 = 0, \quad z_0 = e^{\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} t}$$

и

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\lambda^k, \qquad z = \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t)\lambda^k. \qquad (13.13)$$

Так как характеристические числа матрицы

$$P_0 = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

суть $\lambda_1 = \frac{i}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{i}{2}$, то по формуле (1.14) или (3.9) имеем:

$$z_0 = e^{P_0 t} = \begin{Vmatrix} \cos\frac{t}{2}, & \sin\frac{t}{2} \\ -\sin\frac{t}{2}, & \cos\frac{t}{2} \end{Vmatrix}, \qquad (13.13_1)$$

$$z_0^{-1} = e^{-P_0 t} = \begin{Vmatrix} \cos\frac{t}{2}, & -\sin\frac{t}{2} \\ \sin\frac{t}{2}, & \cos\frac{t}{2} \end{Vmatrix}. \qquad (13.14)$$

По формуле (8.46) имеем:

$$z_1 = \int_0^t [z_0 P_1 z_0^{-1} - A_1]\, dt \cdot z_0. \qquad (13.15)$$

На основании (13.11) и (13.14) найдем

$$z_0 P_1 z_0^{-1} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \frac{\alpha}{2}\sin t + \frac{q}{4}\sin 2t, & \frac{q-2\alpha}{4} + \frac{\alpha - q}{2}\cos t + \frac{q\cos 2t}{4} \\ \frac{2\alpha + q}{2} + \frac{\alpha + q}{2}\cos t + \frac{q\cos 2t}{4}, & \frac{-\alpha \sin t}{2} - \frac{q}{4}\sin 2t \end{matrix} \right\|.$$

Чтобы z_1 было периодическим с периодом 4π, необходимо положить, как видно из (13.15),

$$A_1 = \left\| \begin{matrix} 0 & , \frac{q-2\alpha}{4} \\ \frac{2\alpha+q}{4}, & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{13.15$_1$}$$

При таком выборе A_1 имеет:

$$z_1 = \left\| \begin{matrix} \frac{\alpha}{2} + \frac{q}{8} - \frac{\alpha}{2}\cos t - \frac{q}{8}\cos 2t, & \frac{\alpha - q}{2}\sin t + \frac{q}{8}\sin 2t \\ \frac{\alpha+q}{2}\sin t + \frac{q}{8}\sin 2t, & -\frac{\alpha}{2} - \frac{q}{8} + \frac{\alpha}{2}\cos t + \frac{q}{8}\cos 2t \end{matrix} \right\| \times$$

$$\times \left| \begin{matrix} \cos\frac{t}{2}, & \sin\frac{t}{2} \\ -\sin\frac{t}{2}, & \cos\frac{t}{2} \end{matrix} \right|. \tag{13.16}$$

Первое приближение уравнения

$$D(A_{\lambda=1}) = 0 \text{ есть } D(A_1) = \frac{q^2 - 4\alpha^2}{16} = 0.$$

Отсюда

$$2\alpha_1 = q, \quad 2\alpha_2 = -q. \tag{13.17}$$

Следовательно, приближенное значение a в системе (13.3), при котором система (13.3) имеет периодическое с периодом 4π решение, получаем в виде

$$a_1 = 1 + q, \quad a_2 = 1 - q. \tag{13.18}$$

При $a_1 = 1 + q$ приближенно получаем фундаментальную систему решений уравнений (13.2) в виде

$$X = e^{\left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ \frac{q}{2} & 0 \end{matrix} \right\| t} [z_0(t) + z_1(t)], \tag{13.19}$$

где z_0 и z_1 — даны формулами (13.13$_1$) и (13.16), в которых надо положить $2\alpha = q$.

Следует заметить, что представление (13.17) справедливо, вообще говоря, лишь при малых q. Чтобы при $a = 1 + q$ получить приближенное значение решений для больших q, надо воспользоваться общим представлением A, данным формулой (9.18), после чего из равенства

$$z(t) = X(t)e^{-At}$$

получим и $z(t)$.

Чтобы найти следующее приближенное a, можно найти A_2 и z_2 по формулам (8.45). Но можно поступить иначе. Именно, в согласии с формулой (8.47$_2$) можно написать вместо системы (13.10) систему

$$\frac{dX}{dt} = X[P_0(t) + P_1(t)\lambda], \tag{13.20}$$

где $P_0(t)$ — такое, что соответствующая интегральная матрица системы

$$\frac{dY}{dt} = YP_0(t) \tag{13.21}$$

будет иметь вид

$$Y = e^{A_1 t} z_1(t), \tag{13.22}$$

где A_1 и $z_1(t)$ найдем по формулам (13.15$_1$) и (13.16).

Соответствующее значение $P_1(t)$ легко найдем из равенства

$$A_1 z_1 + \frac{dz_1}{dt} = z_1 P_0, \tag{13.23}$$

которое получается подстановкой выражения (13.22) в (13.21). Матрицу $P_1(t)$ в формуле (13.20) в согласии с (8.47$_1$) возьмем в виде

$$P_1(t) = \left\| \begin{matrix} 0 & , \frac{1}{2} \\ -\frac{a}{2} + q\cos\tau, & 0 \end{matrix} \right\| - P_0(t). \tag{13.24}$$

Теперь мы можем искать A и $z(t)$ в виде

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \lambda^k, \quad z = \sum_{k=0}^{\infty} z_k \lambda^k, \tag{13.25}$$

где

$$A_0 = \begin{Vmatrix} 0 & , \frac{q-2\alpha}{4} \\ \frac{2\alpha+q}{4}, & 0 \end{Vmatrix}$$

и z_0 дано выражением (13.13_1).

В работе Б. П. Демидовича [18] рассматривалась система линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX_\omega}{dt} = X_\omega P_\omega(t), \tag{13.26}$$

где $P_\omega(t)$ — непрерывная периодическая матрица с периодом ω и существует

$$\lim_{\omega\to+0} \frac{1}{\omega} \int_0^\omega P_\omega(t)\,dt = M. \tag{13.27}$$

Здесь доказана следующая теорема.

Если существует M, то характеристические показатели системы (13.26) $\lambda = \lambda(\omega)$ при надлежащем выборе мнимой части $\lambda(\omega)$ стремятся к характеристическим показателям λ_0 матрицы M.

Отсюда автор делает вывод о том, что если вещественные части характеристических показателей λ_0 отрицательны, то при достаточно малых ω нулевое решение системы (13.26) асимптотически устойчиво, а если число λ_0 — чисто мнимое, то об устойчивости ничего сказать нельзя. По поводу этого можно сказать следующее. Предполагая ради простоты рассуждения, что $P_\omega(t)$, можно представить рядом Фурье

$$P_\omega(t) = C_0(\omega) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k(\omega) \cos\frac{2\pi t}{\omega}k + B_k(\omega) \sin\frac{2\pi t}{\omega}k,$$

мы из условия (13.27) выводим, что $C_0(\omega) \to M$ при $\omega \to 0$ (можно отбросить знак плюс перед нулем).

Заменяя в дифференциальном уравнении (13.26) $2\pi t = \tau\omega$, получим

$$\frac{dX}{d\tau} = XP\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)\cdot\frac{\omega}{2\pi}, \tag{13.28}$$

$$P\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right) = C_0(\omega) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k(\omega)\cos\tau k + B_k(\omega)\sin\tau k.$$

Здесь мы имеем матрицу X в виде (8.7)

$$X = e^{A\tau} z(t),$$

где A — получаем согласно формуле (8.11)

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^k \tag{13.29}$$

и $A_1 = C_0(\omega)$;

$$z_1(\tau) = \int_0^\tau \left[\sum_{k=1}^{\infty} A_k(\omega)\cos\tau k + B_k(\omega)\sin\tau k\right] d\tau.$$

Мы также последовательно найдем $A_2(\omega)$, $A_3(\omega), \ldots$

Возвращаясь к независимой переменной t, получим

$$X = e^{Bt}\bar{z}(t),$$

где

$$B = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{k-1} = C_0(\omega) + A_2(\omega)\frac{\omega}{2\pi} + \ldots$$

Отсюда очевидны утверждения Б. П. Демидовича, а, кроме того, и следующее. Если матрица M имеет характеристические числа с вещественной частью, равной нулю, но вещественные части характеристических чисел матрицы $C_0(\omega) + A_2(\omega)\frac{\omega}{2\pi}$ при всех достаточно малых ω отрицательны, то нулевое решение системы (13.26) при достаточно малых ω асимптотически устойчиво [8]. Можно также привлекать к рассмотрению и следующее приближение матрицы B.

Следует заметить еще, что указанная теорема Б. П. Демидовича есть частный случай теоремы Н. Н. Боголюбова, так как после записи системы (13.26) в виде (13.28) мы получаем линейную систему, являющуюся частным случаем общего вида нелинейной системы, рассмотренной Н. Н. Боголюбовым [19].

§ 14. ТАБЛИЦА КОЭФФИЦИЕНТОВ М. А. ЛАППО-ДАНИЛЕВСКОГО[1]

p_1	$\alpha^{(1)}_{p_1}$
−1	1
0	0
−2	0

p_1	p_2	$\alpha^{(1)}_{p_1p_2}$
0	−2	1
−1	−1	0
−2	0	−1

p_1	p_2	p_3	$\alpha^{(1)}_{p_1p_2p_3}$
0	−1	−2	1
0	−2	−1	0
−1	0	−2	−1
−1	−1	−1	0
−1	−2	0	−1
−2	0	−1	0
−2	−1	0	1

p_1	p_2	p_3	p_4	$\alpha^{(1)}_{p_1p_2p_3p_4}$
0	0	−2	−2	$\frac{1}{2}$
0	−1	−1	−2	1
0	−1	−2	−1	0
0	−2	0	−2	−1
0	−2	−1	−1	0
0	−2	−2	0	−1
−1	0	−1	−2	−2
−1	0	−2	−1	0
−1	−1	0	−2	1
−1	−1	−1	−1	0
−1	−1	−2	0	−1
−1	−2	0	−1	0
−1	−2	−1	0	2
−2	0	0	−2	1
−2	0	−1	−1	0
−2	0	−2	0	1
−2	−1	0	−1	0
−2	−1	−1	0	−1
−2	−2	0	0	$-\frac{1}{2}$

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	$\alpha^{(1)}_{p_1p_2\ldots p_5}$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	$\alpha^{(1)}_{p_1\ldots p_5}$
0	0	−1	−2	−2	$\frac{1}{4}$	0	−1	−2	−2	0	−1
0	0	−2	−1	−2	$\frac{1}{2}$	0	−2	0	−1	−2	−2
0	0	−2	−2	−1	0	0	−2	0	−2	−1	0
0	−1	0	−2	−2	$\frac{1}{2}$	0	−2	−1	0	−2	1
0	−1	−1	−1	−2	1	0	−2	−1	−1	−1	0
0	−1	−1	−2	−1	0	0	−2	−1	−2	0	−1
0	−1	−2	0	−2	−1	0	−2	−2	0	−1	0
0	−1	−2	−1	−1	0	0	−2	−2	−1	0	2

[1] Таблица вычислена сотрудниками Ленинградского отделения Математического института АН СССР О. А. Федоровой, И. М. Варенцовой под руководством канд. физ.-мат. наук К. Е. Чернина.

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	$\alpha^{(1)}_{p_1p_2\ldots p_5}$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	$\alpha^{(1)}_{p_1\ldots p_5}$
−1	0	0	−2	−2	$-\frac{5}{4}$	−1	−2	−2	0	0	$-\frac{5}{4}$
−1	0	−1	−1	−2	−3	−2	0	0	−1	−2	2
−1	0	−1	−2	−1	0	−2	0	0	−2	−1	0
−1	0	−2	0	−2	2	−2	0	−1	0	−2	−1
−1	0	−2	−1	−1	0	−2	0	−1	−1	−1	0
−1	0	−2	−2	0	0	−2	0	−1	−2	0	1
−1	−1	0	−1	−2	3	−2	0	−2	0	−1	0
−1	−1	0	−2	−1	0	−2	0	−2	−1	0	−2
−1	−1	−1	0	−2	−1	−2	−1	0	0	−2	−1
−1	−1	−1	−1	−1	0	−2	−1	0	−1	−1	0
−1	−1	−1	−2	0	−1	−2	−1	0	−2	0	−1
−1	−1	−2	0	−1	0	−2	−1	−1	0	−1	0
−1	−1	−2	−1	0	3	−2	−1	−1	−1	0	1
−1	−2	0	0	−2	0	−2	−1	−2	0	0	$\frac{1}{2}$
−1	−2	0	−1	−1	0	−2	−2	0	0	−1	0
−1	−2	0	−2	0	2	−2	−2	0	−1	0	$\frac{1}{2}$
−1	−2	−1	0	−1	0	−2	−2	−1	0	0	$\frac{1}{4}$
−1	−2	−1	−1	0	−3						

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	$\alpha^{(1)}_{p_1p_2\ldots p_6}$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	$\alpha^{(1)}_{p_1p_2\ldots p_6}$
0	0	0	−2	−2	−2	$\frac{1}{12}$	0	0	−2	−1	−2	−1	0
0	0	−1	−1	−2	−2	$\frac{1}{8}$	0	0	−2	−2	0	−2	$-\frac{1}{2}$
0	0	−1	−2	−1	−2	$\frac{1}{4}$	0	0	−2	−2	−1	−1	0
0	0	−1	−2	−2	−1	0	0	0	−2	−2	−2	0	$-\frac{1}{2}$
0	0	−2	0	−2	−2	$\frac{1}{4}$	0	−1	0	−1	−2	−2	$\frac{1}{4}$
0	0	−2	−1	−1	−2	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	−2	−1	−2	$\frac{1}{2}$

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	$\alpha^{(1)}_{p_1p_2\ldots p_6}$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	$\alpha^{(1)}_{p_1p_2\ldots p_6}$
0	−1	0	−2	−2	−1	0	−1	0	0	−2	−2	−1	0
0	−1	−1	0	−2	−2	$\frac{1}{2}$	−1	0	−1	0	−2	−2	$-\frac{7}{4}$
0	−1	−1	−1	−1	−2	1	−1	0	−1	−1	−1	−2	−4
0	−1	−1	−1	−2	−1	0	−1	0	−1	−1	−2	−1	0
0	−1	−1	−2	0	−2	−1	−1	0	−1	−2	0	−2	3
0	−1	−1	−2	−1	−1	0	−1	0	−1	−2	−1	−1	0
0	−1	−1	−2	−2	0	1	−1	0	−1	−2	−2	0	1
0	−1	−2	0	−1	−2	−2	−1	0	−2	0	−1	−2	5
0	−1	−2	0	−2	−1	0	−1	0	−2	0	−2	−1	0
0	−1	−2	−1	0	−2	1	−1	0	−2	−1	0	−2	−2
0	−1	−2	−1	−1	−1	0	−1	0	−2	−1	−1	−1	0
0	−1	−2	−1	−2	0	−1	−1	0	−2	−1	−2	0	0
0	−1	−2	−2	0	−1	0	−1	0	−2	−2	0	−1	0
0	−1	−2	−2	−1	0	2	−1	0	−2	−2	−1	0	1
0	−2	0	0	−2	−2	$-\frac{5}{4}$	−1	−1	0	0	−2	−2	$\frac{17}{8}$
0	−2	0	−1	−1	−2	−3	−1	−1	0	−1	−1	−2	6
0	−2	0	−1	−2	−1	0	−1	−1	0	−1	−2	−1	0
0	−2	0	−2	0	−2	2	−1	−1	0	−2	0	−2	−3
0	−2	0	−2	−1	−1	0	−1	−1	0	−2	−1	−1	0
0	−2	0	−2	−2	0	0	−1	−1	0	−2	−2	0	−1
0	−2	−1	0	−1	−2	3	−1	−1	−1	0	−1	−2	−4
0	−2	−1	0	−2	−1	0	−1	−1	−1	0	−2	−1	0
0	−2	−1	−1	−0	−2	−1	−1	−1	−1	−1	0	−2	1
0	−2	−1	−1	−1	−1	0	−1	−1	−1	−1	−1	−1	0
0	−2	−1	−1	−2	0	−1	−1	−1	−1	−1	−2	0	−1
0	−2	−1	−2	0	−1	0	−1	−1	−1	−2	0	−1	0
0	−2	−1	−2	−1	0	3	−1	−1	−1	−2	−1	0	4
0	−2	−2	0	0	−2	0	−1	−1	−2	0	0	−2	1
0	−2	−2	0	−1	−1	0	−1	−1	−2	0	−1	−1	0
0	−2	−2	0	−2	0	2	−1	−1	−2	0	−2	0	3
0	−2	−2	−1	0	−1	0	−1	−1	−2	−1	0	−1	0
0	−2	−2	−1	−1	0	−3	−1	−1	−2	−1	−1	0	−6
0	−2	−2	−2	0	0	$-\frac{5}{4}$	−1	−1	−2	−2	0	0	$-\frac{17}{8}$
−1	0	0	−1	−2	−2	$-\frac{3}{4}$	−1	−2	0	0	−1	−2	−1
−1	0	0	−2	−1	−2	$-\frac{7}{4}$	−1	−2	0	0	−2	−1	0

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	$\alpha^{(1)}_{p_1p_2\ldots p_6}$
−1	−2	0	−1	0	−2	0
−1	−2	0	−1	−1	−1	0
−1	−2	0	−1	−2	0	2
−1	−2	0	−2	0	−1	0
−1	−2	0	−2	−1	0	−5
−1	−2	−1	0	0	−2	−1
−1	−2	−1	0	−1	−1	0
−1	−2	−1	0	−2	0	−3
−1	−2	−1	−1	0	−1	0
−1	−2	−1	−1	−1	0	4
−1	−2	−1	−2	0	0	$\frac{7}{4}$
−1	−2	−2	0	0	−1	0
−1	−2	−2	0	−1	0	$\frac{7}{4}$
−1	−2	−2	−1	0	0	$\frac{3}{4}$
−2	0	0	0	−2	−1	$\frac{5}{4}$
−2	0	0	−1	−1	−2	3
−2	0	0	−1	−2	−1	0
−2	0	0	−2	0	−2	−2
−2	0	0	−2	−1	−1	0
−2	0	0	−2	−2	0	0
−2	0	−1	0	−1	−2	−3
−2	0	−1	0	−2	−1	0
−2	0	−1	−1	0	−2	1
−2	0	−1	−1	−1	−1	0
−2	0	−1	−1	−2	0	1
−2	0	−1	−2	0	−1	0
−2	0	−1	−2	−1	0	−3
−2	0	−2	0	0	−2	0
−2	0	−2	0	−1	−1	0
−2	0	−2	0	−2	0	−2
−2	0	−2	−1	0	−1	0
−2	0	−2	−1	−1	0	3
−2	0	−2	−2	0	0	$\frac{5}{4}$
−2	−1	0	0	−1	−2	−2
−2	−1	0	0	−2	−1	0

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	$\alpha^{(1)}_{p_1p_2\ldots p_6}$
−2	−1	0	−1	0	−2	1
−2	−1	0	−1	−1	−1	0
−2	−1	0	−1	−2	0	−1
−2	−1	0	−2	0	−1	0
−2	−1	0	−2	−1	0	2
−2	−1	−1	0	0	−2	1
−2	−1	−1	0	−1	−1	0
−2	−1	−1	0	−2	0	1
−2	−1	−1	−1	0	−1	0
−2	−1	−1	−1	−1	0	−1
−2	−1	−1	−2	0	0	$-\frac{1}{2}$
−2	−1	−2	0	0	−1	0
−2	−1	−2	0	−1	0	$-\frac{1}{2}$
−2	−1	−2	−1	0	0	$-\frac{1}{4}$
−2	−2	0	0	0	−2	$\frac{1}{2}$
−2	−2	0	0	−1	−1	0
−2	−2	0	0	−2	0	$\frac{1}{2}$
−2	−2	0	−1	0	−1	0
−2	−2	0	−1	−1	0	$-\frac{1}{2}$
−2	−2	0	−2	0	0	$-\frac{1}{4}$
−2	−2	−1	0	0	−1	0
−2	−2	−1	0	−1	0	$-\frac{1}{4}$
−2	−2	−1	−1	0	0	$-\frac{1}{8}$
−2	−2	−2	0	0	0	$-\frac{1}{12}$

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	$\alpha^{(1)}_{p_1p_2\dots p_7}$
0	0	0	-1	-2	-2	-2	$\frac{1}{36}$
0	0	0	-2	-1	-2	-2	$\frac{1}{24}$
0	0	0	-2	-2	-1	-2	$\frac{1}{12}$
0	0	0	-2	-2	-2	-1	0
0	0	-1	0	-2	-2	-2	$\frac{1}{24}$
0	0	-1	-1	-1	-2	-2	$\frac{1}{16}$
0	0	-1	-1	-2	-1	-2	$\frac{1}{8}$
0	0	-1	-1	-2	-2	-1	0
0	0	-1	-2	0	-2	-2	$\frac{1}{8}$
0	0	-1	-2	-1	-1	-2	$\frac{1}{4}$
0	0	-1	-2	-1	-2	-1	0
0	0	-1	-2	-2	0	-2	$-\frac{1}{4}$
0	0	-1	-2	-2	-1	-1	0
0	0	-1	-2	-2	-2	0	$-\frac{1}{4}$
0	0	-2	0	-1	-2	-2	$\frac{1}{8}$
0	0	-2	0	-2	-1	-2	$\frac{1}{4}$
0	0	-2	0	-2	-2	-1	0
0	0	-2	-1	0	-2	-2	$\frac{1}{4}$
0	0	-2	-1	-1	-1	-2	$\frac{1}{2}$
0	0	-2	-1	-1	-2	-1	0
0	0	-2	-1	-2	0	-2	$-\frac{1}{2}$
0	0	-2	-1	-2	-1	-1	0

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	$\alpha^{(1)}_{p_1p_2\dots p_7}$
0	0	-2	-1	-2	-2	0	$-\frac{1}{2}$
0	0	-2	-2	0	-1	-2	-1
0	0	-2	-2	0	-2	-1	0
0	0	-2	-2	-1	0	-2	$\frac{1}{2}$
0	0	-2	-2	-1	-1	-1	0
0	0	-2	-2	-1	-2	0	$-\frac{1}{2}$
0	0	-2	-2	-2	0	-1	0
0	0	-2	-2	-2	-1	0	1
0	-1	0	0	-2	-2	-2	$\frac{1}{12}$
0	-1	0	-1	-1	-2	-2	$\frac{1}{8}$
0	-1	0	-1	-2	-1	-2	$\frac{1}{4}$
0	-1	0	-1	-2	-2	-1	0
0	-1	0	-2	0	-2	-2	$\frac{1}{4}$
0	-1	0	-2	-1	-1	-2	$\frac{1}{2}$
0	-1	0	-2	-1	-2	-1	0
0	-1	0	-2	-2	0	-2	$-\frac{1}{2}$
0	-1	0	-2	-2	-1	-1	0
0	-1	0	-2	-2	-2	0	$-\frac{1}{2}$
0	-1	-1	0	-1	-2	-2	$\frac{1}{4}$
0	-1	-1	0	-2	-1	-2	$\frac{1}{2}$
0	-1	-1	0	-2	-2	-1	0
0	-1	-1	-1	0	-2	-2	$\frac{1}{2}$
0	-1	-1	-1	-1	-1	-2	1
0	-1	-1	-1	-1	-2	-1	0
0	-1	-1	-1	-2	0	-2	-1

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	$\alpha^{(1)}_{p_1p_2\dots p_7}$
0	-1	-1	-1	-2	-1	-1	0
0	-1	-1	-1	-2	-2	0	-1
0	-1	-1	-2	0	-1	-2	-2
0	-1	-1	-2	0	-2	-1	0
0	-1	-1	-2	-1	0	-2	1
0	-1	-1	-2	-1	-1	-1	0
0	-1	-1	-2	-1	-2	0	-1
0	-1	-1	-2	-2	0	-1	0
0	-1	-1	-2	-2	-1	0	2
0	-1	-2	0	0	-2	-2	$-\frac{5}{4}$
0	-1	-2	0	-1	-1	-2	-3
0	-1	-2	0	-1	-2	-1	0
0	-1	-2	0	-2	0	-2	2
0	-1	-2	0	-2	-1	-1	0
0	-1	-2	0	-2	-2	0	0
0	-1	-2	-1	0	-1	-2	3
0	-1	-2	-1	0	-2	-1	0
0	-1	-2	-1	-1	0	-2	-1
0	-1	-2	-1	-1	-1	-1	0
0	-1	-2	-1	-1	-2	0	-1
0	-1	-2	-1	-2	0	-1	0
0	-1	-2	-1	-2	-1	0	3
0	-1	-2	-2	0	0	-2	0
0	-1	-2	-2	0	-1	-1	0
0	-1	-2	-2	0	-2	0	2
0	-1	-2	-2	-1	0	-1	0
0	-1	-2	-2	-1	-1	0	-3
0	-1	-2	-2	-2	0	0	$-\frac{5}{4}$
0	-2	0	0	-1	-2	-2	$-\frac{3}{4}$
0	-2	0	0	-2	-1	-2	$-\frac{7}{4}$
0	-2	0	0	-2	-2	-1	0
0	-2	0	-1	0	-2	-2	$-\frac{7}{4}$
0	-2	0	-1	-1	-1	-2	-4
0	-2	0	-1	-1	-2	-1	0
0	-2	0	-1	-2	0	-2	3
0	-2	0	-1	-2	-1	-1	0
0	-2	0	-1	-2	-2	0	1
0	-2	0	-2	0	-1	-2	5

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	$\alpha^{(1)}_{p_1p_2\dots p_7}$
0	-2	0	-2	0	-2	-1	0
0	-2	0	-2	-1	0	-2	-2
0	-2	0	-2	-1	-1	-1	0
0	-2	0	-2	-1	-2	0	0
0	-2	0	-2	-2	0	-1	0
0	-2	0	-2	-2	-1	0	1
0	-2	-1	0	0	-2	-2	$\frac{17}{8}$
0	-2	-1	0	-1	-1	-2	6
0	-2	-1	0	-1	-2	-1	0
0	-2	-1	0	-2	0	-2	-3
0	-2	-1	0	-2	-1	-1	0
0	-2	-1	0	-2	-2	0	-1
0	-2	-1	-1	0	-1	-2	-4
0	-2	-1	-1	0	-2	-1	0
0	-2	-1	-1	-1	0	-2	1
0	-2	-1	-1	-1	-1	-1	0
0	-2	-1	-1	-1	-2	0	-1
0	-2	-1	-1	-2	0	-1	0
0	-2	-1	-1	-2	-1	0	4
0	-2	-1	-2	0	0	-2	1
0	-2	-1	-2	0	-1	-1	0
0	-2	-1	-2	0	-2	0	3
0	-2	-1	-2	-1	0	-1	0
0	-2	-1	-2	-1	-1	0	-6
0	-2	-1	-2	-2	0	0	$-\frac{17}{8}$
0	-2	-2	0	0	-1	-2	-1
0	-2	-2	0	0	-2	-1	0
0	-2	-2	0	-1	0	-2	0
0	-2	-2	0	-1	-1	-1	0
0	-2	-2	0	-1	-2	0	0
0	-2	-2	0	-2	0	-1	0
0	-2	-2	0	-2	-1	0	-5
0	-2	-2	-1	0	0	-2	-1
0	-2	-2	-1	0	-1	-1	0
0	-2	-2	-1	0	-2	0	-3
0	-2	-2	-1	-1	0	-1	0
0	-2	-2	-1	-1	-1	0	4
0	-2	-2	-1	-2	0	0	$\frac{7}{4}$
0	-2	-2	-2	0	0	-1	0
0	-2	-2	-2	0	-1	0	$\frac{7}{4}$

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	$\alpha^{(1)}_{p_1p_2\dots p_7}$
0	−2	−2	−2	−1	0	0	$\frac{3}{4}$
−1	0	0	0	−2	−2	−2	$-\frac{5}{18}$
−1	0	0	−1	−1	−2	−2	$-\frac{7}{16}$
−1	0	0	−1	−2	−1	−2	−1
−1	0	0	−1	−2	−2	−1	0
−1	0	0	−2	0	−2	−2	−1
−1	0	0	−2	−1	−1	−2	$-\frac{9}{4}$
−1	0	0	−2	−1	−2	−1	0
−1	0	0	−2	−2	0	−2	$\frac{7}{4}$
−1	0	0	−2	−2	−1	−1	0
−1	0	0	−2	−2	−2	0	$\frac{3}{4}$
−1	0	−1	0	−1	−2	−2	−1
−1	0	−1	0	−2	−1	−2	$-\frac{9}{4}$
−1	0	−1	0	−2	−2	−1	0
−1	0	−1	−1	0	−2	−2	$-\frac{9}{4}$
−1	0	−1	−1	−1	−1	−2	−5
−1	0	−1	−1	−1	−2	−1	0
−1	0	−1	−1	−2	0	−2	4
−1	0	−1	−1	−2	−1	−1	0
−1	0	−1	−1	−2	−2	0	2
−1	0	−1	−2	0	−1	−2	7
−1	0	−1	−2	0	−2	−1	0
−1	0	−1	−2	−1	0	−2	−3
−1	0	−1	−2	−1	−1	−1	0
−1	0	−1	−2	−1	−2	0	1
−1	0	−1	−2	−2	0	−1	0
−1	0	−1	−2	−2	−1	0	−1
−1	0	−2	0	0	−2	−2	$\frac{27}{8}$
−1	0	−2	0	−1	−1	−2	9
−1	0	−2	0	−1	−2	−1	0
−1	0	−2	0	−2	0	−2	−5

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	$\alpha^{(1)}_{p_1p_2\dots p_7}$
−1	0	−2	0	−2	−1	−1	0
−1	0	−2	0	−2	−2	0	−1
−1	0	−2	−1	0	−1	−2	−7
−1	0	−2	−1	0	−2	−1	0
−1	0	−2	−1	−1	0	−2	2
−1	0	−2	−1	−1	−1	−1	0
−1	0	−2	−1	−1	−2	0	0
−1	0	−2	−1	−2	0	−1	0
−1	0	−2	−1	−2	−1	0	1
−1	0	−2	−2	0	0	−2	1
−1	0	−2	−2	0	−1	−1	0
−1	0	−2	−2	0	−2	0	1
−1	0	−2	−2	−1	0	−1	0
−1	0	−2	−2	−1	−1	0	−3
−1	0	−2	−2	−2	0	0	$-\frac{7}{8}$
−1	−1	0	0	−1	−2	−2	$\frac{23}{16}$
−1	−1	0	0	−2	−1	−2	$\frac{31}{8}$
−1	−1	0	0	−2	−2	−1	0
−1	−1	0	−1	0	−2	−2	$\frac{31}{8}$
−1	−1	0	−1	−1	−1	−2	10
−1	−1	0	−1	−1	−2	−1	0
−1	−1	0	−1	−2	0	−2	−6
−1	−1	0	−1	−2	−1	−1	0
−1	−1	0	−1	−2	−2	0	−2
−1	−1	0	−2	0	−1	−2	−9
−1	−1	0	−2	0	−2	−1	0
−1	−1	0	−2	−1	0	−2	3
−1	−1	0	−2	−1	−1	−1	0
−1	−1	0	−2	−1	−2	0	−1
−1	−1	0	−2	−2	0	−1	0
−1	−1	0	−2	−2	−1	0	3
−1	−1	−1	0	0	−2	−2	$\frac{49}{16}$
−1	−1	−1	0	−1	−1	−2	−10
−1	−1	−1	0	−1	−2	−1	0
−1	−1	−1	0	−2	0	−2	4
−1	−1	−1	0	−2	−1	−1	0
−1	−1	−1	0	−2	−2	0	0

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	$\alpha^{(1)}_{p_1p_2\dots p_7}$
−1	−1	−1	−1	0	−1	−2	5
−1	−1	−1	−1	0	−2	−1	0
−1	−1	−1	−1	−1	0	−2	−1
−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	0
−1	−1	−1	−1	−1	−2	0	−1
−1	−1	−1	−1	−2	0	−1	0
−1	−1	−1	−1	−2	−1	0	5
−1	−1	−1	−2	0	0	−2	0
−1	−1	−1	−2	0	−1	−1	0
−1	−1	−1	−2	0	−2	0	4
−1	−1	−1	−2	−1	0	−1	0
−1	−1	−1	−2	−1	−1	0	−10
−1	−1	−1	−2	−2	0	0	$-\frac{49}{16}$
−1	−1	−2	0	0	−1	−2	3
−1	−1	−2	0	0	−2	−1	0
−1	−1	−2	0	−1	0	−2	−1
−1	−1	−2	0	−1	−1	−1	0
−1	−1	−2	0	−1	−2	0	3
−1	−1	−2	0	−2	0	−1	0
−1	−1	−2	0	−2	−1	0	−9
−1	−1	−2	−1	0	0	−2	−2
−1	−1	−2	−1	0	−1	−1	0
−1	−1	−2	−1	0	−2	0	−6
−1	−1	−2	−1	−1	0	−1	0
−1	−1	−2	−1	−1	−1	0	10
−1	−1	−2	−1	−2	0	0	$\frac{31}{8}$
−1	−1	−2	−2	0	0	−1	0
−1	−1	−2	−2	0	−1	0	$\frac{31}{8}$
−1	−1	−2	−2	−1	0	0	$\frac{23}{16}$
−1	−2	0	0	0	−2	−2	$-\frac{7}{8}$
−1	−2	0	0	−1	−1	−2	−3
−1	−2	0	0	−1	−2	−1	0
−1	−2	0	0	−2	0	−2	1
−1	−2	0	0	−2	−1	−1	0
−1	−2	0	0	−2	−2	0	1
−1	−2	0	−1	0	−1	−2	1
−1	−2	0	−1	0	−2	−1	0
−1	−2	0	−1	−1	0	−2	0

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	$\alpha^{(1)}_{p_1p_2\dots p_7}$
−1	−2	0	−1	−1	−1	−1	0
−1	−2	0	−1	−1	−2	0	2
−1	−2	0	−1	−2	0	−1	0
−1	−2	0	−1	−2	−1	0	−7
−1	−2	0	−2	0	0	−2	−1
−1	−2	0	−2	0	−1	−1	0
−1	−2	0	−2	0	−2	0	−5
−1	−2	0	−2	−1	0	−1	0
−1	−2	0	−2	−1	−1	0	9
−1	−2	0	−2	−2	0	0	$\frac{27}{8}$
−1	−2	−1	0	0	−1	−2	−1
−1	−2	−1	0	0	−2	−1	0
−1	−2	−1	0	−1	0	−2	1
−1	−2	−1	0	−1	−1	−1	0
−1	−2	−1	0	−1	−2	0	−3
−1	−2	−1	0	−2	0	−1	0
−1	−2	−1	0	−2	−1	0	7
−1	−2	−1	−1	0	0	−2	2
−1	−2	−1	−1	0	−1	−1	0
−1	−2	−1	−1	0	−2	0	4
−1	−2	−1	−1	−1	0	−1	0
−1	−2	−1	−1	−1	−1	0	−5
−1	−2	−1	−1	−2	0	0	$-\frac{9}{4}$
−1	−2	−1	−2	0	0	−1	0
−1	−2	−1	−2	0	−1	0	$-\frac{9}{4}$
−1	−2	−1	−2	−1	0	0	−1
−1	−2	−2	0	0	0	−2	$\frac{3}{4}$
−1	−2	−2	0	0	−1	−1	0
−1	−2	−2	0	0	−2	0	$\frac{7}{4}$
−1	−2	−2	0	−1	0	−1	0
−1	−2	−2	0	−1	−1	0	$-\frac{9}{4}$
−1	−2	−2	0	−2	0	0	−1
−1	−2	−2	−1	0	0	−1	0
−1	−2	−2	−1	0	−1	0	−1

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	$\alpha^{(1)}_{p_1p_2\ldots p_7}$
−1	−2	−2	−1	−1	0	0	$-\frac{7}{16}$
−1	−2	−2	−2	0	0	0	$-\frac{5}{18}$
−2	0	0	0	−1	−2	−2	$\frac{3}{4}$
−2	0	0	0	−2	−1	−2	$\frac{7}{4}$
−2	0	0	0	−2	−2	−1	0
−2	0	0	−1	0	−2	−2	$\frac{7}{4}$
−2	0	0	−1	−1	−1	−2	4
−2	0	0	−1	−1	−2	−1	0
−2	0	0	−1	−2	0	−2	−3
−2	0	0	−1	−2	−1	−1	0
−2	0	0	−1	−2	−2	0	−1
−2	0	0	−2	0	−1	−2	−5
−2	0	0	−2	0	−2	−1	0
−2	0	0	−2	−1	0	−2	0
−2	0	0	−2	−1	−1	−1	0
−2	0	0	−2	−1	−2	0	0
−2	0	0	−2	−2	0	−1	0
−2	0	0	−2	−2	−1	0	−1
−2	0	−1	0	0	−2	−2	$-\frac{17}{8}$
−2	0	−1	0	−1	−1	−2	−6
−2	0	−1	0	−1	−2	−1	0
−2	0	−1	0	−2	0	−2	3
−2	0	−1	0	−2	−1	−1	0
−2	0	−1	0	−2	−2	0	1
−2	0	−1	−1	0	−1	−2	4
−2	0	−1	−1	0	−2	−1	0
−2	0	−1	−1	−1	0	−2	−1
−2	0	−1	−1	−1	−1	−1	0
−2	0	−1	−1	−1	−2	0	1
−2	0	−1	−1	−2	0	−1	0
−2	0	−1	−1	−2	−1	0	−4
−2	0	−1	−2	0	0	−2	−1
−2	0	−1	−2	0	−1	−1	0
−2	0	−1	−2	0	−2	0	−3
−2	0	−1	−2	−1	0	−1	0
−2	0	−1	−2	−1	−1	0	6

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	$\alpha^{(1)}_{p_1p_2\ldots p_7}$
−2	0	−1	−2	−2	0	0	$\frac{17}{8}$
−2	0	−2	0	0	−1	−2	1
−2	0	−2	0	0	−2	−1	0
−2	0	−2	0	−1	0	−2	0
−2	0	−2	0	−1	−1	−1	0
−2	0	−2	0	−1	−2	0	−2
−2	0	−2	0	−2	0	−1	0
−2	0	−2	0	−2	−1	0	5
−2	0	−2	−1	0	0	−2	1
−2	0	−2	−1	0	−1	−1	0
−2	0	−2	−1	0	−2	0	3
−2	0	−2	−1	−1	0	−1	0
−2	0	−2	−1	−1	−1	0	−4
−2	0	−2	−1	−2	0	0	$-\frac{7}{4}$
−2	0	−2	−2	0	0	−1	0
−2	0	−2	−2	0	−1	0	$-\frac{7}{4}$
−2	0	−2	−2	−1	0	0	$-\frac{3}{4}$
−2	−1	0	0	0	−2	−2	$-\frac{5}{4}$
−2	−1	0	0	−1	−1	−2	−3
−2	−1	0	0	−1	−2	−1	0
−2	−1	0	0	−2	0	−2	2
−2	−1	0	0	−2	−1	−1	0
−2	−1	0	0	−2	−2	0	0
−2	−1	0	−1	0	−1	−2	3
−2	−1	0	−1	0	−2	−1	0
−2	−1	0	−1	−1	0	−2	−1
−2	−1	0	−1	−1	−1	−1	0
−2	−1	0	−1	−1	−2	0	−1
−2	−1	0	−1	−2	0	−1	0
−2	−1	0	−1	−2	−1	0	3
−2	−1	0	−2	0	0	−2	0
−2	−1	0	−2	0	−1	−1	0
−2	−1	0	−2	0	−2	0	2
−2	−1	0	−2	−1	0	−1	0
−2	−1	0	−2	−1	−1	0	−3
−2	−1	0	−2	−2	0	0	$-\frac{5}{4}$

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	$\alpha^{(1)}_{p_1p_2\ldots p_7}$
−2	−1	−1	0	0	−1	−2	2
−2	−1	−1	0	0	−2	−1	0
−2	−1	−1	0	−1	0	−2	−1
−2	−1	−1	0	−1	−1	−1	0
−2	−1	−1	0	−1	−2	0	1
−2	−1	−1	0	−2	0	−1	0
−2	−1	−1	0	−2	−1	0	−1
−2	−1	−1	−1	0	0	−1	−1
−2	−1	−1	−1	0	−1	−1	0
−2	−1	−1	−1	0	−2	0	−1
−2	−1	−1	−1	−1	0	−1	0
−2	−1	−1	−1	−1	−1	0	1
−2	−1	−1	−1	−2	0	0	$\frac{1}{2}$
−2	−1	−1	−2	0	0	−1	0
−2	−1	−1	−2	0	−1	0	$\frac{1}{2}$
−2	−1	−1	−2	−1	0	0	$\frac{1}{4}$
−2	−1	−2	0	0	0	−1	$-\frac{1}{2}$
−2	−1	−2	0	0	−1	−2	0
−2	−1	−2	0	0	−2	0	$-\frac{1}{2}$
−2	−1	−2	0	−1	0	−1	0
−2	−1	−2	0	−1	−1	0	$\frac{1}{2}$
−2	−1	−2	0	−2	0	0	$\frac{1}{4}$
−2	−1	−2	−1	0	0	−1	0
−2	−1	−2	−1	0	−1	0	$\frac{1}{4}$
−2	−1	−2	−1	−1	0	0	$\frac{1}{8}$
−2	−1	−2	−2	0	0	0	$\frac{1}{12}$
−2	−2	0	0	0	−1	−2	1
−2	−2	0	0	0	−2	−1	0

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	$\alpha^{(1)}_{p_1p_2\ldots p_7}$
−2	−2	0	0	−1	0	−2	$-\frac{1}{2}$
−2	−2	0	0	−1	−1	−1	0
−2	−2	0	0	−1	−2	0	$\frac{1}{2}$
−2	−2	0	0	−2	0	−1	0
−2	−2	0	0	−2	−1	0	−1
−2	−2	0	−1	0	0	−2	$-\frac{1}{2}$
−2	−2	0	−1	0	−1	−1	0
−2	−2	0	−1	0	−2	0	$-\frac{1}{2}$
−2	−2	0	−1	−1	0	−1	0
−2	−2	0	−1	−1	−1	0	$\frac{1}{2}$
−2	−2	0	−1	−2	0	0	$\frac{1}{4}$
−2	−2	0	−2	0	0	−1	0
−2	−2	0	−2	0	−1	0	$\frac{1}{4}$
−2	−2	0	−2	−1	0	0	$\frac{1}{8}$
−2	−2	−1	0	0	0	−2	$-\frac{1}{4}$
−2	−2	−1	0	0	−1	−1	0
−2	−2	−1	0	0	−2	0	$-\frac{1}{4}$
−2	−2	−1	0	−1	0	−1	0
−2	−2	−1	0	−1	−1	0	$\frac{1}{4}$
−2	−2	−1	0	−2	0	0	$\frac{1}{8}$
−2	−2	−1	−1	0	0	−1	0
−2	−2	−1	−1	0	−1	0	$\frac{1}{8}$

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	$\alpha^{(1)}_{p_1p_2\dots p_7}$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	$\alpha^{(1)}_{p_1p_2\dots p_7}$
-2	-2	-1	-1	-1	0	0	$\frac{1}{16}$	-2	-2	-2	0	0	-1	0	$\frac{1}{12}$
-2	-2	-1	-2	0	0	0	$\frac{1}{24}$	-2	-2	-2	0	-1	0	0	$\frac{1}{24}$
-2	-2	-2	0	0	0	-1	0	-2	-2	-2	-1	0	0	0	$\frac{1}{36}$

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Lappo-Danilevskiy. Mémoires sur la théorie des systémes des èquations differentielles linéaires. Vol I. Труды физико-математического инст. им. В. А. Стеклова. Отдел математический, VI, 1934.
   В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. III, 1955.
   Ф. Ф. Гантмахер. Теория матриц. ГИТТЛ, 1953.
2. Н. П. Еругин. Приводимые системы. Труды физико-математического инст. им. В. А. Стеклова, XIII, 1946.
3. Н. П. Еругин. Замечание к статье Шифнера. Изв. АН СССР, серия матем. 5 (1941).
4. Г. Ф. Федоров. Некоторые новые случаи решения системы двух линейных уравнений в конечном виде. Вестник ЛГУ, № 11, 1953.
5. N. Erouguine. Sur lu substitutions exposante pour quelques systéme irriguliere. Матем. сборн., т. 42:6, 1935.
6. Н. П. Еругин. О показательной подстановке системы линейных дифференциальных уравнений (проблема Пуанкаре). Матем. сборн., т. 3 (45) : 3, 1938.
7. А. П. Гремяченский. Обобщение одной теоремы Ляпунова. Прикладная математика и механика, т. XII, вып. 5, 1948.
8. И. З. Штокало. Критерий устойчивости и неустойчивости. Матем. сборн., т. 19, № 2, 1946.
9. И. Г. Малкин. Теория устойчивости движения. ГИТТЛ, 1952.
10. В. И. Бурдина. Об ограниченных решениях системы двух линейных дифференциальных уравнений. ДАН СССР, т. XCIII, № 4, 1953.
11. А. М. Ляпунов. Sur une série daus la théorie linèaires dus second ordre à coefficients périodiques. Записки АН СССР, т. XIII, № 2, 1902.
12. Р. С. Гусарова. Об ограниченности решений линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами. Прикладная математика и механика, т. XIV, вып. 3, 1950.
13. Л. А. Гусаров. Об ограниченности решений линейного уравнения второго порядка. ДАН СССР, т. XVIII, № 2, 1949.
14. А. М. Ляпунов. Избранные труды. Изд. АН СССР. Редакция академика В. И. Смирнова, 1948.
15. В. А. Якубович. Вопросы устойчивости системы двух линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Автореферат канд. дисс. ЛГУ, 1953.

В. А. Якубович. Распространение метода Ляпунова определения ограниченности решений уравнений $y''+p(t)y=0$, $p(t+\omega)=p(t)$ на случай знакопеременной функции $p(t)$. Прикладная математика и механика, т. 18, вып. 6, 1954.

16. В. М. Старжинский. Обзор работ об условиях устойчивости тривиального решения системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Прикладная математика и механика, т. XVIII, вып. 4, 1954.
17. Л. И. Донская. Построение решения линейной системы в окрестности регулярной особой точки в особых случаях. Вестник ЛГУ, № 6, 1952.

    Л. И. Донская. О структуре решений системы линейных дифференциальных уравнений в окрестности регулярной особой точки. Вестник ЛГУ, № 8, 1954.
18. Б. Н. Демидович. О некоторых свойствах характеристических показателей системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Ученые записки МГУ. Математика, т. VI, вып. 163, 1952.
19. Н. Н. Боголюбов. О некоторых статистических методах в математической физике. Изд. АН СССР, 1945.
20. С. М. Макаров. Исследование характеристического уравнения линейной системы двух уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами. Прикладная математика и механика, т. 15, вып. 3, 1951.
21. В. А. Якубович. Вопросы устойчивости решения двух линейных дифференциальных уравнений канонического вида с периодическими коэффициентами. Мат. сб., т. 37. (79): 1.
22. В. М. Старжинский. Замечание к исследованию устойчивости периодических движений. Прикладная математика и механика, 1955, 19, № 1.
23. М. Г. Крейн. Основные положения теории λ-зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Памяти А. А. Андронова, Изд. АН СССР, 1955.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Еругин Николай Павлович

Метод Лаппо-Данилевского в теории линейных дифференциальных уравнений

Редактор *Е. В. Щемелева*

Техн. редактор *С. Д. Водолагина*
Корректоры *Г. А. Полиевская* и *З. И. Динабург*

М-07827. Подписано к печати 9 VI 1956 г. Уч.-изд. л. 5. Печ. л. 5. Бум. л. $3^3/_8$. Формат бум. $84 \times 108^1/_{32}$. Тираж 8000 экз. Заказ 7[illegible]

Типография ЛОЛГУ. Ленинград, Университетская наб., 7/9

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
20	1—2 сверху	... стремящиеся к бесконечности.	... стремящиеся к бесконечности. Например, это будет в том случае, если положить $A = \begin{Vmatrix} a+b, & b \\ \sqrt{b}, & a \end{Vmatrix}$ и $b \to 0$.
26	9 сверху	$m_1 n$ и n_1	m, n и n_1
53	9 „	$X(2\pi) = -e^{\begin{Vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{Vmatrix}} = V$	$X(2\pi) = -e^{\begin{Vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{Vmatrix} 2\pi} = V$
72	11 снизу	... элементы к строчке	элементы k строчки
83	2 сверху	$\lambda_2 = \frac{2n-1}{2} i.$	$\lambda_2 = -\frac{2n+1}{2} i.$
83	5 „	$\int\limits_0^{1\pi}$	$\int\limits_0^{2\pi}$
86	13 снизу	$\frac{dy}{dt} = p(t)\, x$	$\frac{dy}{dt} = -p(t)\, x$
91	8 сверху	имеет	имеем
91	8 снизу	$z\alpha_1 = q,$	$2\alpha_1 = q.$
92	9 „	$P_1(t)$	$P_0(t)$

Зак. 756.