TATA INSTITUTE OF FUNDAMENTAL RESEARCH
STUDIES IN MATHEMATICS

General editor : K. CHANDRASEKHARAN

SEVERAL COMPLEX VARIABLES

Local theory

M. HERVÉ
Professeur à la Faculté des Sciences, Nancy

OXFORD UNIVERSITY PRESS,
BOMBAY 1963

М. ЭРВЕ

ФУНКЦИИ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Локальная теория

Перевод с английского
Б. А. ФУКСА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1965

ОГЛАВЛЕНИЕ

УДК 517.55

Основная тема книги — систематическое изложение теории аналитических множеств в пространстве многих комплексных переменных. Результаты этой теории широко используются в современных работах по теории комплексных пространств, по голоморфным отображениям, аналитическому продолжению функций и ряду других разделов теории функций.

Этой теме предпослано изложение необходимых сведений из общей теории аналитических функций многих комплексных переменных. Никаких предварительных сведений по теории функций многих комплексных переменных у читателей не предполагается.

Книга доступна студентам старших курсов университетов. Она будет полезна математикам и физикам, работающим в области теории функций или использующим методы этой теории.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга может служить введением в современные работы по теории функций многих комплексных переменных, особенно по теории комплексных пространств. Многие результаты локального характера, относящиеся к кольцу ростков голоморфных функций в данной точке, голоморфным отображениям, аналитическому продолжению, аналитическим множествам и т. д. в этих работах предполагаются известными, хотя они отсутствуют в книгах Бенке — Туллена и Бохнера — Мартина и их можно найти только в оригинальных работах А. Картана, Р. Реммерта, К. Штейна и др. или в трудах семинаров [3], [5] [1]).

Я надеюсь, что объединение этого материала может оказаться полезным и что новая его трактовка может вызвать свежие идеи.

Предлагаемый текст является независимым настолько, насколько это возможно. От читателя ожидается лишь знакомство с классической теорией голоморфных функций одного комплексного переменного и с несколькими результатами из алгебры, собранными ниже в § 2, гл. II [2]).

---

[1]) Цифры в квадратных скобках здесь и далее означают ссылки на приведенный в конце книги список литературы.

[2]) Для понимания изложенного в п. 1, гл. IV сверх того необходимы некоторые сведения из теории когерентных аналитических пучков. — *Прим. перев.*

В основе книги лежат лекции, читанные автором в 1962 году в Тата-институте фундаментальных исследований (Бомбей). Я благодарен профессору Чандрасекхарану за приглашение прочитать эти лекции и за решение их опубликовать.

В основе большей части текста лежат записи, сделанные Р. Р. Симхой. Я горячо благодарю его за полезные замечания и сотрудничество. Я благодарю также д-ра Рагхана Нарасимхана за его важные советы.

Мишель Эрве

Нанси

Глава I

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В настоящей главе изложены основные свойства голоморфных функций многих переменных, преимущественно без подробных доказательств.

1. Голоморфные функции. Мы ведем наши рассмотрения в m-мерном векторном пространстве $\mathbb{C}^m$ над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, $m \geqslant 1$. Обычно мы полагаем, что в пространстве $\mathbb{C}^m$ выбран базис, и отождествляем $\mathbb{C}^m$ с пространством упорядоченных групп $x = (x_1, \ldots, x_m)$ из m комплексных чисел.

Пусть дана точка $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{C}^m$ и действительные числа $r_1, \ldots, r_m > 0$. Множество

$$P = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{C}^m \mid |x_j - a_j| < r_j,\ j = 1, \ldots, m\}$$

называется *открытым полицилиндром*, или *поликругом, с центром в точке a и радиусами r_j*. Аналогично *замкнутым полицилиндром с центром в точке a и радиусами r_j* является множество

$$\bar{P} = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{C}^m \mid |x_j - a_j| \leqslant r_j,\ j = 1, \ldots, m\}.$$

Множество

$$\Gamma = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{C}^m \mid |x_j - a_j| = r_j,\ j = 1, \ldots, m\}$$

называется *остовом*, или *исключительной граничной поверхностью, полицилиндра P* (и $\bar{P}$). Множество всех открытых полицилиндров образует базис «обычной» топологии пространства $\mathbb{C}^m$ (определенная таким образом топология не зависит от выбора базиса векторов в пространстве $\mathbb{C}^m$).

Нормальная сходимость. Ряд $\sum f_n$ комплекснозначных функций, определенных на множестве $E \subset \mathbb{C}^m$, назы-

В основе книги лежат лекции, читанные автором в 1962 году в Тата-институте фундаментальных исследований (Бомбей). Я благодарен профессору Чандрасекхарану за приглашение прочитать эти лекции и за решение их опубликовать.

В основе большей части текста лежат записи, сделанные Р. Р. Симхой. Я горячо благодарю его за полезные замечания и сотрудничество. Я благодарю также д-ра Рагхана Нарасимхана за его важные советы.

Нанси

Мишель Эрве

Глава I

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В настоящей главе изложены основные свойства голоморфных функций многих переменных, преимущественно без подробных доказательств.

1. Голоморфные функции. Мы ведем наши рассмотрения в m-мерном векторном пространстве C^m над полем C комплексных чисел, $m \geqslant 1$. Обычно мы полагаем, что в пространстве C^m выбран базис, и отождествляем C^m с пространством упорядоченных групп $x = (x_1, \ldots, x_m)$ из m комплексных чисел.

Пусть дана точка $a = (a_1, \ldots, a_m) \in C^m$ и действительные числа $r_1, \ldots, r_m > 0$. Множество

$$P = \{(x_1, \ldots, x_m) \in C^m \mid |x_j - a_j| < r_j, \ j = 1, \ldots, m\}$$

называется *открытым полицилиндром*, или *поликругом, с центром в точке a и радиусами r_j*. Аналогично *замкнутым полицилиндром с центром в точке a и радиусами r_j* является множество

$$\bar{P} = \{(x_1, \ldots, x_m) \in C^m \mid |x_j - a_j| \leqslant r_j, \ j = 1, \ldots, m\}.$$

Множество

$$\Gamma = \{(x_1, \ldots, x_m) \in C^m \mid |x_j - a_j| = r_j, \ j = 1, \ldots, m\}$$

называется *остовом*, или *исключительной граничной поверхностью, полицилиндра P* (и $\bar{P}$). Множество всех открытых полицилиндров образует базис «обычной» топологии пространства C^m (определенная таким образом топология не зависит от выбора базиса векторов в пространстве C^m).

Нормальная сходимость. Ряд $\sum f_n$ комплекснозначных функций, определенных на множестве $E \subset C^m$, назы-

вается *нормально сходящимся* на E, если

$$\sum_n \|f_n\| < +\infty \quad (\text{здесь } \|f_n\| = \sup_{x \in E} |f_n(x)|).$$

Лемма Абеля. *Предположим, что степенной ряд*

$$S = \sum_{k_1, \ldots, k_m \geqslant 0} a_{k_1 \ldots k_m} x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m},$$

где $(x_1, \ldots, x_m) \in C^m$, *сходится*[1]) *в точке* $(b_1, \ldots, b_m) \in C^m$, *причем* $b_j \neq 0$ *для каждого* j *от* 1 *до* m. *Тогда ряд* S *сходится в каждой точке открытого полицилиндра* P *с центром в точке* $(0, \ldots, 0) \in C^m$ *и радиусами* $|b_j|$; *ряд* S *сходится нормально на каждом компактном подмножестве полицилиндра* P.

Определение 1. *Комплекснозначная функция* f, *определенная на открытом множестве* $U \subset C^m$, *голоморфна на* U, *если для каждой точки* $b \in U$ *существуют открытый полицилиндр* $P \subset U$ *с центром в точке* b *и степенной ряд*

$$S = \sum_{j_1, \ldots, j_m \geqslant 0} a_{j_1 \ldots j_m} (x_1 - b_1)^{j_1} \ldots (x_m - b_m)^{j_m},$$

сходящийся к функции $f(x)$ *в каждой точке* $x \in P$.

Замечание. Пусть функция f голоморфна на U. Тогда, в силу леммы Абеля, степенной ряд S сходится нормально на компактных подмножествах полицилиндра P. Следовательно, голоморфная функция непрерывна.

Предложение 1. *Пусть* $f_1, \ldots, f_p$ — *голоморфные функции на открытом множестве* $U \subset C^m$. *Предполагается, что для каждой точки* $x \in U$ *точка* $(f_1(x), \ldots, f_p(x)) \in V$, *где* V — *некоторое открытое множество в пространстве* C^p. *Тогда, если функция* g *голоморфна на* V, *то функция* $g(f_1(x), \ldots, f_p(x))$ *голоморфна во всех точках* $x \in U$.

Это вытекает из свойства ассоциативности нормально сходящихся степенных рядов.

---

[1]) В настоящей книге рассматриваются только абсолютно сходящиеся ряды.

Следствие 1. *Голоморфность функции на открытом множестве в $\mathbb{C}^m$ не зависит от выбора базиса векторов в пространстве $\mathbb{C}^m$.*

Следствие 2. *Если f и g — голоморфные функции на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}^m$, то функции $f+g$, fg голоморфны на U. Если $g \neq 0$ на U, то функция f/g голоморфна на U.*

Следствие 3. *Пусть f — голоморфная функция на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}^m$. Тогда для каждой точки $a=(a_1, \ldots, a_m) \in U$ и каждого номера j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ функция $f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_m)$ одного комплексного переменного x_j, определенная на открытом множестве*

$$\{x_j \in \mathbb{C} \mid (a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_m) \in U\} \subset \mathbb{C},$$

голоморфна на нем.

Замечание. Обратно, если f — комплекснозначная функция на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}^m$ и все функции одного комплексного переменного, получаемые из f описанным выше образом, голоморфны на указанных открытых множествах пространства $\mathbb{C}$, то функция f *голоморфна на* U (теорема Гартогса — Осгуда). Это глубокий результат, который мы не доказываем в этой книге (доказательство см., например, [1], стр. 195 и след.).

Предложение 2. *Пусть f — голоморфная функция на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}^m$. Тогда для любых целых чисел $k_1, \ldots, k_m \geqslant 0$ частные производные $\dfrac{\partial^{k_1+\cdots+k_m} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_m^{k_m}}$ существуют и голоморфны на U. Более точно: пусть $P \subset U$ — открытый полицилиндр с центром в точке $b \in U$ и S — степенной ряд от разностей $x_j - b_j$, $j=1, \ldots, m$, сходящийся к функции f в P; тогда степенной ряд, полученный из S почленным дифференцированием k_1 раз по $x_1, \ldots, k_m$ раз по x_m, сходится к $\dfrac{\partial^{k_1+\cdots+k_m} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_m^{k_m}}$ в P.*

Следствие 1. *В ряде S коэффициент при $(x_1-b_1)^{k_1}\ldots(x_m-b_m)^{k_m}$ равен* $\frac{1}{k_1!\ldots k_m!}\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_m}f(b)}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_m^{k_m}}$.

В частности, степенной ряд S единственным образом определяется значениями функции f в любой окрестности точки b. Мы называем его разложением Тейлора функции f в точке b.

Следствие 2. *Пусть f и g — голоморфные функции на связном открытом множестве $U\subset C^m$ и $f=g$ на некотором открытом непустом подмножестве множества U. Тогда $f=g$ всюду на U* (принцип аналитического продолжения).

Доказательство. Пусть $V=\{x\in U\mid f=g$ в некоторой окрестности точки $x\}$. По предположению, множество V не пусто и открыто. Очевидно, что точка $x\in U$ принадлежит множеству V тогда и только тогда, когда тейлоровы разложения функций f и g в этой точке совпадают. Последнее, в силу следствия 1, означает, что

$$V=\bigcap_{k_1,\ldots,k_m\geqslant 0}\left\{x\in U\left|\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_m}f(x)}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_m^{k_m}}=\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_m}g(x)}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_m^{k_m}}\right.\right\}.$$

Следовательно, множество V замкнуто в U, и так как множество U связно, то $V=U$, что и требовалось доказать.

Замечание. Мы увидим далее (см. п. 1, гл. III), что если $f=g$ на множестве $F\subset U$, для которого множество $U-F$ является открытым и несвязным или локально несвязным (т. е. существует такое открытое связное множество $W\subset U$, что множество $W\cap(U-F)$ несвязно), то $f=g$ на всем множестве U.

2. Ростки голоморфных функций. Рассматривается произвольное множество $X\subset C^m$; пусть $E(X)=E$ — множество пар (U, f), где $U\subset C^m$ — некоторое открытое множество, содержащее X, f — функция, голоморфная на U. Далее, на E определяется следующее отношение R: $(U, f)\,R\,(V, g)$ в том и только в том случае, если $f=g$ на некотором открытом множестве, содержащемся в $(U\cap V)$ и содержа-

щем X. Очевидно, что R является отношением эквивалентности.

Определение 2. *Ростком голоморфной функции на X называется класс эквивалентности множества $E(X)$ по отношению R.*

Мы обозначим через $\mathscr{H}(X)$ множество ростков голоморфных функций на X. По отношению к обычному сложению и умножению $\mathscr{H}(X)$ является коммутативным кольцом с единицей. Очевидно, что каждый элемент кольца $\mathscr{H}(X)$ имеет вполне определенное значение в каждой точке множества X; однако различные элементы кольца $\mathscr{H}(X)$ могут иметь одинаковые значения во всех точках $x \in X$.

Замечание 1. Если множество X совпадает с замыканием своих внутренних точек или если каждая связная компонента X содержит внутреннюю точку, то всякий элемент кольца $\mathscr{H}(X)$ единственным образом определяется своими значениями на X. Действительно, если $(U, f), (V, g) \in E(X)$ и $f = g$ при $x \in X$, то в обоих указанных случаях, в силу следствия 2 из предложения 2, $f = g$ на всех связных компонентах множества $U \cap V$, пересекающихся с X. Следовательно, $(U, f) R (V, g)$.

Замечание 2. Пусть множество X состоит из одной точки a. В этом случае мы пишем $\mathscr{H}(X) = \mathscr{H}_a^m$. Две функции, голоморфные в некоторой открытой окрестности точки a, совпадают в подобной окрестности тогда и только тогда, когда они имеют одно и то же тейлорово разложение в точке a. Поэтому кольцо $\mathscr{H}_a^m$ изоморфно кольцу сходящихся степенных рядов с m комплексными переменными (степенной ряд $\sum_{k_1, \ldots, k_m \geqslant 0} a_{k_1 \ldots k_m} x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m}$ называется сходящимся, если он сходится в некотором открытом полицилиндре с центром в начале координат пространства $\mathbb{C}^m$). Значением некоторого элемента $\mathscr{H}_a^m$ в точке a является свободный член его ряда Тейлора.

3. Интегральная формула Коши. Пусть f — голоморфная функция (ее росток) в замкнутом полицилиндре $\bar{P} \subset \mathbb{C}^m$ с центром в точке a и радиусами r_j. Тогда для каждой

точки $x \in P$ имеем

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi i)^m} \int\limits_{|y_m - a_m| = r_m} dy_m \ldots$$
$$\ldots \int\limits_{|y_1 - a_1| = r_1} \frac{f(y_1, \ldots, y_m)}{(y_1 - x_1) \ldots (y_m - x_m)} dy_1,$$

где интегрирование производится по окружностям $|y_j - a_j| = r_j$ с положительной ориентацией. Эта формула непосредственно вытекает из интегральной формулы Коши для голоморфных функций одного комплексного переменного.

Следствие 1. *В указанных выше условиях ряд Тейлора*

$$S = \sum_{k_1, \ldots, k_m \geqslant 0} a_{k_1 \ldots k_m} (x_1 - a_1)^{k_1} \ldots (x_m - a_m)^{k_m}$$

для функции f сходится в P.

Действительно, подинтегральное выражение в формуле Коши может быть разложено в степенной ряд по разностям $(x_j - a_j)$, сходящийся при $x \in P$. Его коэффициентами являются функции от y, определенные на остове Γ полицилиндра P. Поскольку функция f непрерывна, а следовательно, и ограничена на Γ, этот ряд нормально сходится на Γ для каждой точки $x \in P$. Поэтому ряд можно почленно интегрировать; получающийся в результате степенной ряд по разностям $x_j - a_j$ сходится к функции f во всем полицилиндре P.

Замечание. Пусть f — голоморфная функция на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}^m$. Тогда из предыдущего вытекает, что ряд Тейлора для функции f в любой точке $a \in U$ сходится в любом полицилиндре с центром в точке a, содержащемся в U.

Следствие 2. *В условиях и обозначениях следствия 1, для любых целых чисел $k_1, \ldots, k_m \geqslant 0$ имеем*

$$|a_{k_1 \ldots k_m}| \leqslant \frac{1}{r_1^{k_1} \ldots r_m^{k_m}} \sup_{y \in \Gamma} |f(y)|,$$

где Γ — остов полицилиндра P. (Неравенства Коши.)

Действительно, из интегральной формулы следует, что

$$a_{k_1 \ldots k_m} = \frac{1}{(2\pi i)^m} \int\limits_{|y_m - a_m| = r_m} dy_m \ldots$$

$$\ldots \int\limits_{|y_1 - a_1| = r_1} \frac{f(y_1, \ldots, y_m)}{(y_1 - a_1)^{k_1+1} \ldots (y_m - a_m)^{k_m+1}} dy_1.$$

Отсюда вытекают указанные выше неравенства.

Замечание. Пусть $\mathcal{F}$ — некоторое семейство функций, голоморфных на открытом множестве $U \subset C^m$, равномерно ограниченное на компактных подмножествах U. Ряды Тейлора для частных производных голоморфной функции могут быть получены почленным дифференцированием ее ряда Тейлора. В силу неравенств Коши, для каждой системы целых чисел $k_1, \ldots, k_m \geqslant 0$ семейство функций $\left\{ \frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_m} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_m^{k_m}} \middle| f \in \mathcal{F} \right\}$ также равномерно ограничено на компактных подмножествах множества U. В частности, указанным свойством обладает совокупность всех первых частных производных функций семейства $\mathcal{F}$. Поэтому семейство $\mathcal{F}$ равностепенно непрерывно. Отсюда, согласно теореме Асколи (см. [2]. гл. X, § 2, п. 5), вытекает, что из каждой бесконечной последовательности функций семейства $\mathcal{F}$ можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на каждом компактном подмножестве множества U.

Следствие 3. (Принцип максимума.) *Пусть f — голоморфная функция на открытом множестве $U \subset C^m$, ∂U — граница U (она включает бесконечно удаленные точки, присоединяемые к пространству C^m, если множество U не является относительно компактным в C^m). Если $\overline{\lim\limits_{x \to y,\ x \in U}} |f(x)| \leqslant M$ для каждой точки $y \in \partial U$, то (1) $|f| \leqslant M$ всюду в U; (2) если $|f(x_0)| = M$ в некоторой точке $x_0 \in U$, то $f(x) \equiv f(x_0)$ на связной компоненте множества U, содержащей точку x_0.*

Это утверждение доказывается при помощи интегральной формулы, так же как в случае одного комплексного переменного.

4. Теорема Вейерштрасса. *Если последовательность $\{f_n\}$ функций, голоморфных на открытом множестве $U \subset C^m$, равномерно сходится на каждом компактном подмножестве множества U, то* (I) *предельная функция f голоморфна на U;* (II) *для любой системы целых чисел $k_1, \ldots, k_m \geqslant 0$ последовательность*

$$\left\{ \frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_m} f_m}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_m^{k_m}} \right\}$$

сходится к $\dfrac{\partial^{k_1 + \cdots + k_m} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_m^{k_m}}$ *на U; эта сходимость равномерна на каждом компактном подмножестве множества U.*

Утверждение (I) доказывается при помощи интегральной формулы Коши; тогда утверждение (II) следует из неравенств Коши.

Следствие 1. *Если степенной ряд по $x_1, \ldots, x_m$ сходится в открытом полицилиндре P с центром в начале координат пространства C^m, то его сумма голоморфна в P.*

Следствие 2. *Пусть $U \subset C^m$ — открытое множество, K — компактное пространство, μ — мера Радона на K, $(x, y) \to f(x, y)$ — непрерывная функция на $U \times K$ и $x \to f(x, y)$ — голоморфная функция x на U для каждого фиксированного $y \in K$. Тогда* (I) *функция $F(x) = \int\limits_K f(x, y)\, d\mu(y)$ голоморфна на U;* (II) *для каждой системы целых чисел $k_1, \ldots, k_m \geqslant 0$*

$$\frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_m} F(x)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_m^{k_m}} = \int\limits_K \frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_m} f(x, y)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_m^{k_m}}\, d\mu(y).$$

Отсюда можно, в частности, получить интегральную формулу Коши для частных производных функции, голоморфной в замкнутом полицилиндре.

5. Голоморфные отображения.

Определение 3. *Отображение $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$ открытого множества $U \subset C^m$ в пространство C^p назы-*

вается голоморфным, если координаты $f_1(x), \ldots, f_p(x)$ *являются голоморфными функциями на* U. *Если* $p = m$, *то якобианом* $J_f(x)$ *отображения* f *в точке* $x \in U$ *называется определитель матрицы* $\left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right)$.

Мы дадим полное доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть* f — *голоморфное отображение открытого множества* $U \subset C^m$ *в пространство* C^m *и* $J_f(a) \neq 0$ *в некоторой точке* $a \in U$. *Тогда существуют такие открытые окрестности* $V (\subset U)$ *точки* a *и* V' *точки* $f(a)$, *что* (I) *ограничение* $f|V$ *взаимно однозначно в* V *и отображает* V *на* V'; (II) *отображение, обратное отображению* $f|V$, *является голоморфным в* V'.

Доказательство. Без нарушения общности можно предположить, что (1) $a = f(a) = \mathfrak{o}$, где $\mathfrak{o}$ — начало координат в пространстве C^m; (2) базис векторов в пространстве C^m выбран так, что $\left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right)\Big|_{\mathfrak{o}}$ — единичная матрица.

Положим $f(x) = x - g(x)$ во всех точках $x \in U$. Тогда $g(x)$ определяет голоморфное отображение множества U в пространство C^m, причем все координаты $g_j(x)$ и их частные производные первого порядка обращаются в нуль в точке $\mathfrak{o}$. Используя теорему о среднем дифференциального исчисления, мы найдем такой открытый полицилиндр $P \subset U$ с центром в точке $\mathfrak{o}$ и радиусами, равными r, что для любых точек $x, x' \in P$

$$\sup_{1 \leqslant j \leqslant m} |g_j(x) - g_j(x')| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{1 \leqslant j \leqslant m} |x_j - x'_j|. \qquad (*)$$

Пусть P' — открытый полицилиндр с центром в точке $\mathfrak{o}$ и радиусами, равными $r/2$. В силу (*) $g(P) \subset P'$. Покажем, что утверждения теоремы 1 выполняются при $V = P \cap f^{-1}(P')$ и $V' = P'$.

По определению V, V' мы имеем $f(V) \subset V'$. Покажем прежде всего, что отображение $f|V$ является взаимно однозначным.

Допустим, что вопреки утверждению $x, x' \in V$, $x \neq x'$, но $f(x) = f(x')$. Тогда $x - x' = g(x) - g(x')$ и

$$\sup_{1 \leqslant j \leqslant m} |g_j(x) - g_j(x')| =$$
$$= \sup_{1 \leqslant j \leqslant m} |x_j - x'_j| (> 0, \text{ так как } x \neq x').$$

Это равенство противоречит (*), поскольку $V \subset P$. Таким образом, первое утверждение доказано.

Теперь положим $x^{(0)}(y) = y$ для произвольного $y \in V'$ и определим $x^{(n)}(y)$ при $n \geqslant 1$ индуктивно с помощью равенств: $x^{(n)}(y) = y + g(x^{(n-1)}(y))$. Поскольку $g(P) \subset P'$, легко проверить путем индукции, что $x^{(n)}(y) \in P$ для всех n. Далее, имеем при $n \geqslant 2$

$$x^{(n)}(y) - x^{(n-1)}(y) = g(x^{(n-1)}(y)) - g(x^{(n-2)}(y)),$$

откуда, в силу (*), находим

$$\sup_{1 \leqslant j \leqslant m} |x_j^{(n)}(y) - x_j^{(n-1)}(y)| \leqslant \frac{r}{2^n}, \qquad n \geqslant 1.$$

Отсюда вытекает, что последовательность $\{x_j^{(n)}(y)\}$ равномерно сходится на множестве V'. Очевидно, что функции $x_j^{(n)}(y)$ голоморфны на V'. Следовательно, функции $x_j(y) = \lim\limits_{n \to \infty} x_j^{(n)}(y)$, $j = 1, \ldots, m$, голоморфны на V' и отображение $x(y) = (x_1(y), \ldots, x_m(y))$ множества V' в C^m также является голоморфным. Для любого n и $P' = V'$

$$x^{(n)}(y) - y \in P', \quad x(y) - y \in \overline{P'}$$

и, следовательно, $x(y) \in P$. С другой стороны, $x^{(n)}(y) - g(x^{(n-1)}(y)) = y$ для любого n. Поэтому $x(y) - g(x(y)) = y$, т. е. $f(x(y)) = y$. Поскольку отображение $f|V$ взаимно однозначно, отсюда вытекает, что $f(V) = V'$ и отображение $x(y)$ является обратным отображению $f|V$, что и требовалось доказать.

Замечание. Обратно, если f — взаимно однозначное голоморфное отображение открытого множества $U \subset C^m$ в пространство C^p, то $p = m$ и якобиан отображения f всюду в U отличен от нуля. Это будет доказано ниже (гл. IV, § 5).

Глава II

КОЛЬЦО РОСТКОВ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В ТОЧКЕ

В настоящей главе мы сосредоточим внимание в основном на „подготовительной теореме Вейерштрасса“ и некоторых ее следствиях. Эта теорема является важным средством изучения локальных свойств множеств нулей голоморфных функций.

1. Подготовительные теоремы. Пусть $\mathscr{H}_a^m$, как и прежде, кольцо ростков голоморфных функций в точке $a \in \mathbf{C}^m$. В дальнейшем, если f — функция, голоморфная в некоторой открытой окрестности точки $a \in \mathbf{C}^m$, то $\mathbf{f}$ обозначает элемент $\mathscr{H}_a^m$, порожденный этой функцией f (в этом смысле иногда употребляется запись $f = \mathbf{f}$). В частности, $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ — соответственно нулевой и единичный элементы кольца $\mathscr{H}_a^m$.

Предложение 1. *Кольцо $\mathscr{H}_a^m$ является областью целостности.*

Доказательство. Как мы заметили выше, кольцо $\mathscr{H}_a^m$ изоморфно кольцу сходящихся степенных рядов с m переменными над $\mathbf{C}$. Последнее в свою очередь является подкольцом кольца $\mathscr{F}^m$ формальных степенных рядов с m переменными над $\mathbf{C}$. Кольцо $\mathscr{F}^m$ (для $m \geqslant 2$) изоморфно кольцу формальных степенных рядов с одним переменным над кольцом $\mathscr{F}^{m-1}$. Поэтому тот факт, что кольцо $\mathscr{F}^m$ является областью целостности, можно вывести по индукции из следующего утверждения: кольцо $A[[X]]$ формальных степенных рядов с одним переменным X над областью целостности A само является областью целостности. Последнее доказывается так: если $f = \sum_{k \geqslant p} a_k X^k$, $g = \sum_{k \geqslant q} b_k X^k$, где p, $q \geqslant 0$, $a_p \neq 0$, $b_q \neq 0$, — два отличных от (тождественного)

нуля элемента кольца $A[[X]]$, то $fg = \sum_{k \geqslant p+q} c_k X^k$, где $c_{p+q} = a_p b_q \neq 0$, что и требовалось доказать.

Замечание. Предложение 1 может быть выведено из принципа аналитического продолжения: если функция f голоморфна на открытом связном множестве $U \subset \mathbf{C}^m$ и обращается в нуль на непустом открытом подмножестве множества U, она равна нулю во всех точках U.

Некоторый элемент $\mathbf{f} \in \mathscr{H}_a^m$ является обратимым в том и только в том случае, если $f(a) \neq 0$. Отсюда вытекает, что совокупность необратимых элементов кольца $\mathscr{H}_a^m$ является идеалом. Это единственный (собственный) максимальный идеал кольца $\mathscr{H}_a^m$. Мы обозначим его через $\mathscr{H}_a'^m$.

Определение 1. *Элементы* $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathscr{H}_a^m$ *называются эквивалентными*: $\mathbf{f} \sim \mathbf{g}$, *если существует такой обратимый элемент* $\mathbf{h} \in \mathscr{H}_a^m$, *что* $\mathbf{f} = \mathbf{hg}$.

Очевидно, что $\sim$ является отношением эквивалентности в кольце $\mathscr{H}_a^m$. Если $\mathbf{f} \sim \mathbf{g}$, то функции f и g имеют одни и те же нули в некоторой окрестности точки a. Простейшими классами эквивалентности в $\mathscr{H}_a^m$ по отношению $\sim$ являются $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$, состоящие соответственно из одного нуля и из всех обратимых элементов кольца $\mathscr{H}_a^m$.

Сопоставим далее каждой точке $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{C}^m$ $(m \geqslant 2)$ точку $x' = (x_1, \ldots, x_{m-1}) \in \mathbf{C}^{m-1}$. Соответственно через $\mathfrak{o}$ и $\mathfrak{o}'$ обозначаются начала координат в пространствах $\mathbf{C}^m$ и $\mathbf{C}^{m-1}$. Для данных точек $x' = (x_1, \ldots, x_{m-1}) \in \mathbf{C}^{m-1}$, $x_m \in \mathbf{C}$ мы обозначим точку $(x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m) \in \mathbf{C}^m$ через (x', x_m). Далее, мы кратко пишем $\mathscr{H}_{\mathfrak{o}}^m = \mathscr{H}^m$, $\mathscr{H}_{\mathfrak{o}}'^m = \mathscr{H}'^m$.

Определение 2. *Отмеченным псевдополиномом* [1]) *по переменному* x_m *степени* p $(p \geqslant 1)$ *называется выражение вида* $x_m^p + \sum_{k=1}^{p} c_k(x') x_m^{p-k}$, *где* $c_k(x')$ — *голоморф-*

---

[1]) Псевдополиномом, вообще говоря, называется выражение вида $\sum_{k=0}^{p} c_k(x') x_m^{p-k}$, где $c_k(x')$ — голоморфные функции $x' = (x_1, \ldots, x_{m-1})$. — *Прим. перев.*

ные функции в открытых окрестностях точки $\mathfrak{o}' \in \mathbb{C}^{m-1}$, *обращающиеся в нуль в этой точке.*

Отмеченный псевдополином порождает отличный от (тождественного) нуля необратимый элемент кольца $\mathscr{H}^m$.

Теорема 1 (подготовительная теорема Вейерштрасса). *Пусть* $\mathbf{f} \in \mathscr{H}'^m$, $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$. *Тогда:* (I) *базис векторов в пространстве* $\mathbb{C}^m$ *можно выбрать так, что* $f(\mathfrak{o}', x_m) \not\equiv 0$ *в некоторой окрестности точки* $x_m = 0$; (II) *если базис векторов в пространстве* $\mathbb{C}^m$ *выбран так, что* $f(\mathfrak{o}', x_m) \not\equiv 0$ *в некоторой окрестности точки* $x_m = 0$, *то существует такой отмеченный псевдополином* $\varphi = x_m^p + \sum_{k=1}^{p} c_k(x') x_m^{p-1}$, *что* $\mathbf{f} \sim \varphi$; (III) *если при том же базисе векторов в пространстве* $\mathbb{C}^m$ *существует другой отмеченный псевдополином* $\psi = x_m^q + \sum_{k=1}^{q} d_k(x') x_m^{q-k}$, *такой, что* $\psi \sim \mathbf{f}$, *то* $q = p$ *и для каждого* k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ *функции* c_k *и* d_k *порождают один и тот же элемент идеала* $\mathscr{H}_{\mathfrak{o}'}'^{m-1} = \mathscr{H}'^{m-1}$.

Доказательство. (I) *Выбор базиса в пространстве* $\mathbb{C}^m$. Пусть U — открытая выпуклая окрестность точки $\mathfrak{o}$, в которой функция f определена и является голоморфной. Так как $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$, то существует такая точка $a \in U$, $a \neq \mathfrak{o}$, что $f(a) \neq 0$. Если мы изменим базис векторов в пространстве $\mathbb{C}^m$ так, что a станет его m-ым элементом, то функция $f(\mathfrak{o}', x_m)$ будет определена и окажется голоморфной на связном (выпуклом) открытом множестве $\{x_m \in \mathbb{C} \mid (\mathfrak{o}', x_m) \in U\}$ и отличной от нуля в его точке $x_m = 1$.

(II) Мы предположим теперь, что $f(\mathfrak{o}', x_m) \not\equiv 0$ в некоторой окрестности точки $x_m = 0$. Пусть $P \subset \mathbb{C}^m$ — открытый полицилиндр с центром в точке $\mathfrak{o}$ радиусами, равными r, в котором функция f определена и голоморфна. Тогда существует такое число ρ, $0 < \rho < r$, что $f(\mathfrak{o}', x_m) \neq 0$ при $0 < |x_m| \leqslant \rho$. Так как функция f непрерывна в полицилиндре P и не обращается в нуль на компактном множестве

$$\{(\mathfrak{o}', x_m) \mid |x_m| = \rho\},$$

то существует такой открытый полицилиндр $P' \subset C^{m-1}$ с центром в точке $\mathfrak{o}'$ и радиусами $< r$, что $f(x', x_m) \neq 0$ при $x' \in P'$, $|x_m| = \rho$. Полезно заметить, что ρ и радиусы P можно выбрать произвольно малыми.

Пусть γ — положительно ориентированная окружность $|t| = \rho$ в C. Для каждого $x' \in P'$ определим функцию

$$\sigma_0(x') = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\partial f(x', t)}{\partial t} \frac{dt}{f(x', t)}.$$

Функция $f(x', t)$ для каждого фиксированного $x' \in P'$ голоморфна по t в круге $|t| < \rho$ и отлична от нуля при $|t| = \rho$. Поэтому функция $\sigma_0(x')$ равна числу нулей (каждый нуль считается столько раз, какова его кратность) функции $f(x', t)$ в круге $|t| < \rho$ при фиксированном $x' \in P'$. Итак, функция $\sigma_0(x')$ может принимать только целые значения. С другой стороны, очевидно, что функция $\sigma_0(x')$ непрерывна в полицилиндре P'. Следовательно, она там постоянна и $\sigma_0(x') \equiv \sigma_0(\mathfrak{o}') = p$. Так как $f(\mathfrak{o}) = 0$, а $f(\mathfrak{o}', x_m) \neq 0$ при $0 < |x_m| \leqslant \rho$, то число $p \geqslant 1$ равно кратности нуля, который имеет функция $f(\mathfrak{o}', x_m)$ в точке $x_m = 0$. Пусть $t_1(x'), \ldots, t_p(x')$ — нули функции $f(x', t)$, лежащие в круге $|t| < \rho$. Здесь x' — произвольная точка полицилиндра P'. Положим $\sigma_k(x') = \{t_1(x')\}^k + \ldots + \{t_p(x')\}^k$ при $k \geqslant 1$. Тогда, в силу формулы

$$\sigma_k(x') = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma t^k \frac{\partial f(x', t)}{\partial t} \frac{dt}{f(x, t)}, \qquad k \geqslant 1,$$

функции $\sigma_k(x')$ голоморфны в полицилиндре P'. Рассмотрим теперь элементарные симметрические функции

$$c_k(x') = (-1)^k \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant p} t_{j_1}(x') \ldots t_{j_k}(x'), \qquad 1 \leqslant k \leqslant p.$$

Каждую из них можно представить в виде полинома от σ_j (с рациональными коэффициентами). Поэтому функции $c_k(x')$ голоморфны в P'. Очевидно, что $c_k(\mathfrak{o}') = 0$ при любом k, $1 \leqslant k \leqslant p$. Отсюда вытекает, что $\varphi(x', x_m) = x_m^p + \sum_{k=1}^{p} c_k(x') x_m^{p-k}$ — отмеченный псевдополином. Мы покажем,

что функции f и φ порождают один и тот же росток в каждой точке полицилиндра $P_1 = \{(x', x_m) \mid x' \in P', |x_m| < \rho\}$.

Действительно, для каждого $x' \in P'$ функции $f(x', t)$, $\varphi(x', t)$ голоморфны в круге $|t| \leqslant \rho$ и не обращаются в нуль на окружности $|t| = \rho$. По способу своего построения псевдополином $\varphi(x', t)$ имеет в круге $|t| < \rho$ те же нули (и той же кратности), что и функция $f(x', t)$. Поэтому функции $f(x', t)/\varphi(x', t)$ и $\varphi(x', t)/f(x', t)$ голоморфны по t в круге $|t| \leqslant \rho$ для каждого $x' \in P'$. Следовательно, в силу интегральной формулы Коши, для любой точки $(x', x_m) \in P_1$

$$\frac{f(x', x_m)}{\varphi(x', x_m)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(x', t)}{\varphi(x', t)} \frac{dt}{t - x_m};$$

$$\frac{\varphi(x', x_m)}{f(x', x_m)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(x', t)}{f(x', t)} \frac{dt}{t - x_m}.$$

Выражения, стоящие под знаками этих интегралов, непрерывны по x, t в $P_1 \times \gamma$ и голоморфны в P_1 для каждого $t \in \gamma$. Следовательно, функции $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ и $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ голоморфны в полицилиндре P_1. Отсюда вытекает, что функции f и φ порождают один и тот же росток в каждой точке полицилиндра P_1. Утверждение (II) доказано.

(III) Пусть

$$\psi(x', x_m) = x_m^q + \sum_{k=1}^{q} d_k(x') x_m^{q-k}$$

— некоторый отмеченный псевдополином и $\psi \sim \mathfrak{f}$. Тогда $\psi \sim \varphi$, где φ — псевдополином, указанный в части (II). Радиусы полицилиндра P_1 мы выберем настолько малыми, чтобы: (а) в P' все функции $d_k(x')$ были определены и являлись голоморфными, (б) в P_1 существовала такая голоморфная и отличная от нуля функция h, что

$$\psi(x', x_m) = \varphi(x', x_m) h(x', x_m).$$

Тогда

$$\psi(\mathfrak{o}', x_m) = \varphi(\mathfrak{o}', x_m) h(\mathfrak{o}', x_m)$$

при $|x_m| < \rho$, т. е. $x_m^q = x_m^p h(\mathfrak{o}', x_m)$. Так как $h(\mathfrak{o}', x_m) \neq 0$ при $|x_m| < \rho$, то $q = p$. Из равенства $\psi = \varphi h$ вытекает,

что для каждой точки $x' \in P'$ псевдополином $\psi(x', t)$ имеет p нулей в круге $|t| < \rho$. Эти корни совпадают с корнями псевдополинома $\varphi(x', t)$.

Учитывая, что коэффициенты при x_m^p в псевдополиномах φ и ψ равны единице, мы заключаем, что и остальные их коэффициенты, которые являются элементарными симметрическими функциями этих p корней, совпадают, т. е. $d_k(x') = c_k(x')$ при $x' \in P'$, $k = 1, \ldots, p$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Пусть дано конечное семейство функций f_j, удовлетворяющих предположениям теоремы 1 (т. е. $\mathfrak{f}_j \in \mathscr{H}'^m$, $\mathfrak{f}_j \neq \mathbf{0}$). Тогда всегда можно так выбрать базис векторов в пространстве C^m, что для каждого индекса j функция $f_j(\mathfrak{o}', x_m)$ не обращается тождественно в нуль в некоторой окрестности точки $x_m = 0$ в пространстве C. Поэтому там существуют такие отмеченные псевдополиномы φ_j, расположенные по степеням x_m, что $\mathfrak{f}_j \sim \varphi_j$.

Замечание 2. Пусть функция f голоморфна в некоторой окрестности точки $\mathfrak{o}$, причем $f(\mathfrak{o}) = 0$, $f(\mathfrak{o}', x_m) \not\equiv 0$ в некоторой окрестности точки $x_m = 0$ пространства C. Тогда можно указать (как в доказательстве утверждения (II)) такой малый полицилиндр P с центром в точке $\mathfrak{o}$, в котором функция f будет голоморфной и для каждой точки $x' \in P'$ найдется точка $x = (x', x_m) \in P$, где $f(x) = 0$.

Теорема 2 (подготовительная теорема Шпэта — Картана). *Пусть* $\mathfrak{f} \in \mathscr{H}'^m$, $\mathfrak{f} \neq \mathbf{0}$ *и базис векторов в пространстве* C^m *выбран так, что* $f(\mathfrak{o}', x_m) \not\equiv 0$ *в некоторой окрестности точки* $x_m = 0$ *в пространстве* C. *Тогда существуют последовательность открытых полицилиндров* $\{P_n\}$ *с центром в точке* $\mathfrak{o}$ *и радиусами, монотонно стремящимися к нулю, и последовательность чисел* $\alpha_n > 0$, *обладающие следующими свойствами: для каждой функции* g, *голоморфной в* P_n, *можно указать такую голоморфную в* P_n *функцию* h, *что*

(I) $g - fh$ *есть псевдополином по* x_m *степени* $< p$, *где* p — *степень единственного отмеченного псевдополинома* φ, *удовлетворяющего условию* $\varphi \sim \mathfrak{f}$;

(II) $\sup\limits_{x \in P_n} |h(x)| \leqslant \alpha_n \sup\limits_{x \in P_n} |g(x)|$.

Для каждой функции g существует только одна функция h, удовлетворяющая требованию (I).

Замечание. То обстоятельство, что для каждой функции g существует одна и только одна функция h, удовлетворяющая требованию (I), было установлено Шпэтом (*J. für reine und angewandte Math.*, **161** (1929)). В приведенном выше виде (включающем и утверждение (II), которое нам необходимо) теорема была впервые высказана А. Картаном (*Ann. d. l'Ecole Normale Supérieure*, **61** (1944)).

Доказательство. Очевидно мы можем положить $\mathfrak{f} = \varphi$, где $\varphi = x_m^p + \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(x') x_m^{p-k}$ — отмеченный псевдополином. Из второй части доказательства теоремы 1 вытекает, что существуют числа $\rho_n > 0$, монотонно стремящиеся к нулю, и последовательность полицилиндров P'_n с центром в точке $0'$ и радиусами, монотонно стремящимися к нулю, для которых (a) функции $c_k(x')$ определены и голоморфны в $\overline{P}'_1$; (b) $\varphi(x', x_m) \neq 0$ при $x' \in \overline{P}'_n$ и $\frac{\rho_n}{2} \leqslant |x_m| \leqslant \rho_n$. Положим $\delta_n = \inf |\varphi(x', x_m)|$ для $x' \subset \overline{P}'_n$ и $\frac{\rho_n}{2} \leqslant |x_m| \leqslant \rho_n$. Пусть $P_n = \{(x', x_m) | x' \in P'_n, |x_m| < \rho_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Предположим, что g — голоморфная функция в полицилиндре P_n. Выберем число r так, что $\frac{\rho_n}{2} < r < \rho_n$. В полицилиндре $\{(x', x_m) | x' \in P'_n, |x_m| < r\}$ рассмотрим функцию

$$h(x', x_m) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r} \frac{g(x', t)}{\varphi(x', t)} \frac{dt}{t - x_m}.$$

Здесь окружность $|t| = r$ предполагается положительно ориентированной. Поскольку $\varphi(x', t) \neq 0$ на множестве $\left\{(x', t) | x' \in P'_n, \frac{\rho_n}{2} < |t| < \rho_n |\right\}$, функция $h(x', x_m)$ голоморфна в полицилиндре $\{(x', x_m) | x' \in P'_n, |x_m| < r\}$; ее значения в точках $(x', x_m) \in P_n$ не зависят от выбора числа $r > |x_m|$, использованного в определении этой функции с помощью интеграла. Таким образом, функция $h(x', x_m)$ оказывается определенной и голоморфной во всем полицилиндре P_n. Покажем, что она обладает свойствами (I) и (II).

Рассмотрим функцию $g(x', x_m) - h(x', x_m)\varphi(x', x_m)$ для $(x', x_m) \in P_n$. При $r > |x_m|$, $\frac{\rho_n}{2} < r < \rho_n$ имеем

$$g(x', x_m) - h(x', x_m)\varphi(x', x_m) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r} \frac{g(x', t)\,dt}{t - x_m} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r} \frac{\varphi(x', x_m)\, g(x', t)}{\varphi(x', t)} \frac{dt}{t - x_m} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r} \frac{g(x', t)}{\varphi(x', t)} \frac{\varphi(x', t) - \varphi(x', x_m)}{t - x_m}\, dt.$$

Но

$$\frac{\varphi(x', t) - \varphi(x', x_m)}{t - x_m} =$$
$$= \frac{t^p - x_m^p}{t - x_m} + \sum_{k=1}^{p} c_k(x') \frac{t^{p-k} - x_m^{p-k}}{t - x_m} = \sum_{k=0}^{p-1} d_k(x', t)\, x_m^k,$$

где $d_k(x', t)$ — полиномы степени $< p$ относительно t; их коэффициенты являются целыми линейными функциями коэффициентов $c_k(x')$. Итак,

$$g(x', x_m) - h(x', x_m)\varphi(x', x_m) =$$
$$= \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r} \frac{g(x' t)}{\varphi(x' t)} d_k(x', t)\, dt \right) x_m^k.$$

Этим наше утверждение (I) доказано.

Далее мы выберем числа $\beta_n \geqslant 0$ так, что $|d_k(x', t)| \leqslant \beta_n$ при $x' \in P'_n$, $|t| \leqslant \rho_n$ для всех $k = 0, 1, \ldots, p-1$, и предположим, что $\rho_1 < 1$. Тогда из предыдущей формулы мы получим, что

$$|g(x', x_m) - h(x', x_m)\varphi(x', x_m)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{p}{\delta_n} \beta_n \sup_{x \in P_n} |g(x)| = \gamma_n \sup_{x \in P_n} |g(x)|$$

в любой точке $(x', x_m) = x \in P_n$. Следовательно, всюду в P_n

$$|h(x)\varphi(x)| \leqslant (1 + \gamma_n) \sup_{x \in P_n} |g(x)|,$$

а если $(x', x_m) \in P_n$, $|x_m| \geqslant \frac{\rho_n}{2}$, то

$$|h(x)| \leqslant \frac{1+\gamma_n}{\delta_n} \sup_{x \in P_n} |g(x)|.$$

Отсюда, в силу принципа максимума, вытекает, что

$$\sup_{x \in P_n} |h(x)| \leqslant \frac{1+\gamma_n}{\delta_n} \sup_{x \in P_n} |g(x)|.$$

Величины $\alpha_n = \frac{1+\gamma_n}{\delta_n}$ не зависят от выбора функции g. Утверждение (II) доказано.

Нам осталось показать, что для каждой функции g существует только одна функция h, удовлетворяющая требованию (I). Для этого достаточно установить, что разложение Тейлора функции h в точке $\mathfrak{o}$ определяется указанными условиями единственным образом.

Мы запишем разложение Тейлора ростка $\mathbf{g}$ функции g в точке $\mathfrak{o}$ в виде $\mathbf{g} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{g}_k x_m^k$, где $\mathbf{g}_k \in \mathscr{H}^{m-1}$. Пусть $\mathbf{c}_k$ — росток функции c_k в точке $\mathfrak{o}'$, $k = 1, \ldots, p$. Мы покажем, что (формальный) степенной ряд по переменным $x_1, \ldots, x_m$, отвечающий функции h, единственным образом определяется условием: росток $\mathbf{g} - h\varphi$ не содержит членов с переменным x_m в степени $> p-1$. Действительно, пусть $h = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x_m^k$, где h_k — формальные степенные ряды от переменных $x_1, \ldots, x_{m-1}$ над C. Коэффициент при x_m^{p+k} (для $k \geqslant 0$) в разложении $\mathbf{g} - h\varphi$ равен

$$\mathbf{g}_{p+k} - h_k - \sum_{j=1}^{p} \mathbf{c}_j h_{k+j}.$$

Следовательно, для любого $k \geqslant 0$

$$h_k = \mathbf{g}_{p+k} - \sum_{j=1}^{p} \mathbf{c}_j h_{k+j}. \qquad (*)$$

При $m = 1$ все $\mathbf{c}_j$ равны нулю, а все h_k и $\mathbf{g}_k = g_k$ сводятся к комплексным числам. Уравнения (*) определяют величины h_k единственным образом: $h_k = g_{p+k}$ для всех $k \geqslant 0$.

Пусть далее $m \geqslant 2$. Тогда (*) является уравнением в кольце формальных степенных рядов от переменных $x_1, \ldots, x_{m-1}$ над C. Положим

$$h_k = \sum_{s=0}^{\infty} h_k^{(s)}, \quad g_k = \sum_{s=0}^{\infty} g_k^{(s)}, \quad c_k = \sum_{s=0}^{\infty} c_k^{(s)},$$

где $h_k^{(s)}$, $g_k^{(s)}$, $c_k^{(s)}$ — однородные полиномы степени s от переменных $x_1, \ldots, x_{m-1}$ над C. Заметим, что $c_k^{(0)} = 0$, так как $c_k(\mathfrak{o}') = 0$. Здесь $k = 1, \ldots, p$.

Теперь уравнения (*) равносильны уравнениям

$$h_k^{(0)} = g_{p+k}^{(0)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

и

$$h_k^{(s)} = g_{p+k}^{(s)} - \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=0}^{s-1} h_{k+j}^{(i)} c_j^{(s-i)};$$
$$s = 1, 2, \ldots; \qquad k = 0, 1, 2 \ldots .$$

Первая группа уравнений определяет величины $h_k^{(0)}$ для всех $k \geqslant 0$; вторая — показывает, что $h_k^{(i)}$, $0 \leqslant i \leqslant s-1$, $k \geqslant 0$, определяют все $h_k^{(s)}$, $k \geqslant 0$. Тем самым доказательство теоремы 2 завершено.

Замечание (A). Можно показать, что формальный степенной ряд $h = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x_m^k$ в действительности сходится в некоторой окрестности точки $\mathfrak{o}$, что доказывало бы результат Шпэта (подробности см., например, в работе [1], стр. 252—259).

Замечание (B). Утверждение теоремы 2 справедливо для *любой* последовательности открытых полицилиндров $\{P_n\}$ с центром $\mathfrak{o}$ и радиусами, монотонно стремящимися к нулю, удовлетворяющих условиям (a) и (b), сформулированным в начале доказательства.

Таким образом, если задано конечное семейство функций f_j, каждая из которых удовлетворяет предположениям теоремы 2 (т. е. $f_j \in \mathscr{H}'^m$, $f_j(\mathfrak{o}', x_m) \not\equiv 0$ в некоторой окрестности точки $x_m = 0$ в пространстве C), то можно найти последовательность $\{P_n\}$ открытых полицилиндров с центром $\mathfrak{o}$ и радиусами $r_1^{(n)}, \ldots, r_m^{(n)}$, монотонно стремя-

щимися к нулю, обладающих следующим свойством: требования теоремы 2 выполняются для *каждой* функции f_j данного семейства не только для последовательности $\{P_n\}$, но и для любой последовательности $\{P_n^*\}$ полицилиндров с центром 0 и радиусами $r_1^{*(n)} \leqslant r_1^{(n)}, \ldots, r_{m-1}^{*(n)} \leqslant r_{m-1}^{(n)}$, $r_m^{*(n)} = r_m^{(n)}$, где $r_1^{*(n)}, \ldots, r_{m-1}^{*(n)}$ монотонно стремятся к нулю.

2. Сведения из алгебры. Прежде чем применить теоремы 1 и 2 к выводу некоторых алгебраических свойств кольца $\mathscr{H}^m$, мы сформулируем ряд определений и теорем из алгебры.

В настоящем пункте буква A обычно обозначает коммутативное кольцо с единицей 1 ($\neq 0$), $A[x]$ — кольцо многочленов от одного переменного x над A. Если A — область целостности, то K обычно обозначает поле отношений кольца A.

(а) Результант и дискриминант. Пусть $P = \sum_{k=0}^{p} a_k x^{p-k}$, $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k x^{q-k}$, p, $q \geqslant 1$, — элементы кольца $A[x]$. Определитель порядка $p+q$

$$\rho(P, Q) = \begin{vmatrix} \overbrace{\begin{matrix} a_0 & & & \\ a_1 & a_0 & & \\ a_2 & a_1 & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_p & \cdot & \cdot & \cdot \\ & a_p & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \\ & & & a_p \end{matrix}}^{q \text{ столбцов}} & \overbrace{\begin{matrix} b_0 & & & & \\ b_1 & b_0 & & & \\ b_2 & b_1 & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_0 \\ b_q & \cdot & \cdot & \cdot & b_1 \\ & b_q & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & & b_q \end{matrix}}^{p \text{ столбцов}} \end{vmatrix}$$

называется *результантом Сильвестра* полиномов P и Q. Обозначим через $u_0, \ldots, u_{q-1}, v_0, \ldots, v_{p-1}$ алгебраические дополнения элементов последней строки определителя $\rho(P, Q)$. Пусть

$$U = u_0 x^{q-1} + \ldots + u_{q-1}, \quad V = v_0 x^{p-1} + \ldots + v_{p-1}.$$

Тогда справедливо тождество

$$PU + QV = \rho(P, Q),$$

из которого вытекает, что полином $\rho(P, Q)$ принадлежит идеалу, порождаемому в кольце $A[x]$ полиномами P и Q.

Предположим теперь, что A — поле. Тогда

(1) $\rho(P, Q) = 0$ в том и только в том случае, если существуют такие одновременно не равные нулю полиномы U, $V \in A[x]$ степеней $< q$, p соответственно, что $PU + QV = 0$.

(2) Пусть $a_0 \neq 0$. Тогда $\rho(P, Q) = 0$ в том и только в том случае, если 1) $Q = 0$ или 2) $Q \neq 0$, но полиномы P, Q имеют общий делитель степени > 0, принадлежащий $A[x]$. В частности, если $a_0 \neq 0$ или $b_0 \neq 0$ и поле A алгебраически замкнуто, то $\rho(P, Q) = 0$ тогда и только тогда, когда полиномы P и Q имеют общие корни, принадлежащие A.

Замечание. Если A — только область целостности (и $a_0 \neq 0$), то $\rho(P, Q) = 0$ в том и только в том случае, если 1) $Q = 0$ или 2) $Q \neq 0$, но многочлены P, Q имеют общий делитель степени > 0 в поле $K[x]$.

(Доказательство утверждений (1) и (2) см. в книге [6], стр. 115—118.)

Пусть $p \geqslant 2$ и

$$P' = \sum_{k=0}^{p-1} (p - k)\, a_k x^{p-k-1}.$$

Мы обозначим через $\delta(P)$ определитель, который получится из $\rho(P, P')$, если в его первой строке заменить a_0 на 1. Число $\delta(P)$ называется *дискриминантом* полинома P.

(b) Идеалы в $A[x]$. Если A — поле, то каждый идеал кольца $A[x]$ является главным. Если A — только область целостности, I — идеал в $A[x]$, то можно найти элемент $P_0 \in I$, обладающий следующим свойством: для любого элемента $P \in I$ можно указать такой элемент $\alpha \in A$, $\alpha \neq 0$, что P_0 является делителем элемента αP.

(c) Простые и примарные идеалы.

Определение. *Идеал I кольца A называется простым, если для любых α, $\beta \in A$ из условий $\alpha\beta \in I$, $\alpha \notin I$, всегда следует, что $\beta \in I$.*

Предложение. *Идеал $I (\neq A)$ кольца A является простым тогда и только тогда, когда факторкольцо A/I*

классов вычетов кольца A по модулю I является областью целостности.

Определение. *Радикалом идеала I кольца A называется множество* $\operatorname{rad} I = \{\alpha \in A \mid \alpha^n \in I$ *для некоторого целого* $n \geqslant 0\}$.

Радикал некоторого идеала I снова является идеалом. Этот идеал содержит идеал I.

Предложение. *Если I — простой идеал, то* $I = \operatorname{rad} I$.

Определение. *Идеал I кольца A называется примарным, если для любых* $\alpha, \beta \in A$ *из условий* $\alpha\beta \in I$, $\alpha \notin I$ *всегда следует, что* $\beta \in \operatorname{rad} I$.

Предложение. *Если I — примарный идеал, то* $\operatorname{rad} I$ *является простым идеалом.*

Определение. *Конечное семейство $\mathcal{F}$ примарных идеалов кольца A называется каноническим, если:* (I) *ни один из элементов $\mathcal{F}$ не содержит пересечения остальных элементов*; (II) *различные элементы $\mathcal{F}$ имеют различные радикалы.*

Предложение. *Пересечение конечного семейства примарных идеалов, имеющих один и тот же радикал, является снова примарным идеалом и имеет тот же радикал.* (Доказательство см. в [6a], стр. 42—43.)

Следствие. *Пересечение любого конечного семейства примарных идеалов всегда является пересечением некоторого канонического семейства примарных идеалов.*

Теорема. *Если два канонических семейства примарных идеалов имеют одно и то же пересечение, то существует взаимно однозначное соответствие между этими семействами, причем соответствующие элементы имеют один и тот же радикал.* (Доказательство см. в [6a].)

(d) Нётеровы кольца.

Теорема. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(I) *Каждый идеал I в кольце A порождается над A конечным множеством элементов идеала I.*

(II) *Каждая строго возрастающая последовательность идеалов кольца A конечна.* (Доказательство см. в [6a], стр. 27—31.)

Определение. *A — нётерово кольцо, если справедливо утверждение* (I) *или* (II) *предыдущей теоремы.*

Теорема (теорема Гильберта о базисе). *Если A — нётерово кольцо, то и $A[x]$ — нётерово кольцо.*

Предложение. *Если A — нётерово кольцо, а $I(\neq A)$ — идеал в кольце A, то и A/I — нётерово кольцо.*

Теорема (теорема о примарном представлении). *Каждый идеал в нётеровом кольце является пересечением канонического семейства примарных идеалов.* (Доказательство см. в [6a], стр. 41—42.)

Замечание (ср. (b)). Пусть A — нётерова область целостности. Тогда для каждого идеала I кольца $A[x]$ можно указать такие элементы $P_0 \in I$ и $\alpha_0 \in A$, $\alpha_0 \neq 0$, что $\alpha_0 P$ при $P \in I$ имеет делителем P_0.

(e) Единственность разложения. Теперь предполагается, что A — область целостности.

Определение. *Элемент кольца A называется приводимым, если он является произведением двух необратимых элементов кольца A. Элемент называется неприводимым, если он не является приводимым.*

Определение. *A называется областью с однозначным разложением на множители (или факториальным кольцом), если каждый необратимый элемент $\alpha \in A$, $\alpha \neq 0$, является конечным произведением неприводимых элементов кольца A, и указанное разложение однозначно с точностью до порядка и до обратимых сомножителей.*

Пусть A — факториальное кольцо. Тогда каждое конечное множество элементов A имеет общий наибольший делитель. Он определяется однозначно с точностью до обратимого множителя.

Определение. *Пусть A — факториальное кольцо. Элемент кольца $A[x]$ называется примитивным, если общий наибольший делитель его коэффициентов равен* 1.

Лемма Гаусса. *Если A — факториальное кольцо, то произведение примитивных элементов кольца $A[x]$ примитивно.*

Из этой леммы вытекают такие следствия.

(I) *Если A — факториальное кольцо и элемент $P \in A[x]$ примитивен, то P является делителем эле-*

мента $Q \in A[x]$ *в* $A[x]$ *тогда (и только тогда), когда* P *является делителем* Q *в* $K[x]$.

В частности, в обозначениях п. (а) пусть $a_0 \neq 0$. Тогда $\rho(P, Q) = 0$ тогда и только тогда, когда 1) $Q = 0$ или 2) $Q \neq 0$, но P и Q имеют общий делитель в $A[x]$ степени > 0. Если, кроме того, характеристика кольца A равна 0, то $\delta(P) = 0$ в том и только в том случае, когда P делится на квадрат некоторого элемента $A[x]$ степени > 0.

(II) Теорема Гаусса. *Если* A — *факториальное кольцо, то и* $A[x]$ — *факториальное кольцо* (доказательство см. в [6], стр. 100—103).

3. $\mathscr{H}^m$ **— факториальное кольцо.**

Лемма 1. $\mathscr{H}^1$ — *факториальное кольцо.*

Доказательство. Пусть тейлорово разложение в точке $\mathfrak{o}$ элемента $\mathbf{f} \in \mathscr{H}^1$, $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$, имеет вид $\sum\limits_{k \geqslant p} a_k x^k$, $a_p \neq 0$. Элемент $\mathbf{f}$ является обратимым тогда и только тогда, когда $p = 0$; он приводим тогда и только тогда, когда $p \geqslant 2$. Отсюда вытекает наше утверждение.

Пусть $m \geqslant 2$. Тогда кольцо полиномов $\mathscr{H}^{m-1}[x_m]$ является подкольцом кольца $\mathscr{H}^m$. Мы будем называть элемент $P = \sum\limits_{k=0}^{p} \alpha_k x_m^{p-k} \in \mathscr{H}^{m-1}[x_m]$ *отмеченным*, если (I) $p \geqslant 1$, (II) $\alpha_0 = 1$ и (III) α_k $(k > 0)$ необратимы.

В силу подготовительной теоремы Вейерштрасса, любой элемент $\mathbf{f} \in \mathscr{H}'^m$, такой, что $f(\mathfrak{o}', x_m) \not\equiv 0$ в некоторой окрестности точки $x_m = 0$, эквивалентен в точности одному отмеченному элементу кольца $\mathscr{H}^{m-1}[x_m]$. Конечное произведение отмеченных элементов из $\mathscr{H}^{m-1}[x_m]$ есть снова отмеченный элемент.

Лемма 2. *Пусть* $P_1, \ldots, P_n \in \mathscr{H}^{m-1}[x_m]$ *и* $P = P_1 P_2 \ldots P_n$ — *отмеченный элемент. Тогда для каждого* $j = 1, \ldots, n$ *коэффициент* $\alpha^{(j)}$ *при старшем члене* P_j *является обратимым, элемент* $Q_j = (\alpha^{(j)})^{-1} P_j$ *является отмеченным или принадлежит классу* 1 *и* $P = Q_1 \ldots Q_n$.

Доказательство. Поскольку величины $\alpha^{(j)}$ являются обратимыми, старший коэффициент $\alpha^{(1)}\alpha^{(2)} \ldots \alpha^{(n)}$ элемента P принадлежит классу 1 и $Q_1 Q_2 \ldots Q_n = P$. Пусть p_j — степень x_m в младшем члене Q_j с обратимым коэффициентом.

Тогда коэффициент при $x_m^{\sum p_j}$ в P также является обратимым. По условию, P — отмеченный элемент и, следовательно, $\sum p_j$ равна степени P. Отсюда вытекает, что p_j есть степень Q_j для всех j и, следовательно, коэффициенты при старших членах полиномов Q_j равны 1. Это означает, что Q_j принадлежит классу 1 или Q_j — отмеченный элемент, что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Отмеченный элемент P кольца $\mathscr{H}^{m-1}[x_m]$ является приводимым в $\mathscr{H}^m$ тогда и только тогда, когда он является приводимым в кольце $\mathscr{H}^{m-1}[x_m]$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $P = P_1P_2$, где P_1, P_2 — необратимые элементы кольца $\mathscr{H}^{m-1}[x_m]$. Тогда, по лемме 2, $P = Q_1Q_2$, где Q_1, Q_2 — отмеченные полиномы (поскольку P_i необратимы, полиномы Q_1, Q_2, построенные по P_i так, как это указано в лемме 2, не могут принадлежать классу 1). Так как отмеченные элементы кольца $\mathscr{H}^{m-1}[x_m]$ необратимы в кольце $\mathscr{H}^m$, элемент P является приводимым в кольце $\mathscr{H}^m$.

Обратно, предположим, что элемент P приводим в кольце $\mathscr{H}^m$: $P = \mathfrak{f}_1 \cdot \mathfrak{f}_2$, где $\mathfrak{f}_1$ и $\mathfrak{f}_2$ — необратимые элементы этого кольца. Тогда $x_m^p = f_1(\mathfrak{o}', x_m) f_2(\mathfrak{o}', x_m)$, где p (степень P) $\geqslant 1$. Следовательно, $f_1(\mathfrak{o}', x_m)$, $f_2(\mathfrak{o}', x_m) \not\equiv 0$ в некоторой окрестности точки $x_m = 0$. Согласно подготовительной теореме Вейерштрасса, $\mathfrak{f}_1 \sim P_1$, $\mathfrak{f}_2 \sim P_2$, где P_1, P_2 — отмеченные элементы кольца $\mathscr{H}^{m-1}[x_m]$. Следовательно, $P \sim P_1P_2$, а в силу утверждения подготовительной теоремы о единственности $P = P_1P_2$, т. е. элемент P приводим в кольце $\mathscr{H}^{m-1}[x_m]$, что и требовалось доказать.

Теперь может быть доказана

Теорема 3. *$\mathscr{H}^m$ — факториальное кольцо.*

Доказательство. В силу леммы 1, $\mathscr{H}^1$ — факториальное кольцо. Мы будем рассуждать по индукции: для $m \geqslant 2$ предположим, что $\mathscr{H}^{m-1}$ — факториальное кольцо, и покажем, что тогда и $\mathscr{H}^m$ — факториальное кольцо.

Пусть $\mathfrak{f} \in \mathscr{H}'^m$, $\mathfrak{f} \neq 0$. Мы можем так выбрать базис векторов в пространстве C^m, что $\mathfrak{f} \sim P$, где P — отмеченный элемент кольца $\mathscr{H}^{m-1}[x_m]$. В силу предположения индукции

и теоремы Гаусса (п. 2 (е)), $\mathscr{H}^{m-1}[x_m]$ — факториальное кольцо. Пусть $P = P_1 \ldots P_n$, где P_j — необратимые и неприводимые элементы кольца $\mathscr{H}^{m-1}[x_m]$. Согласно лемме 2 (поскольку P_j необратимы), можно принять, что элементы P_j являются отмеченными (а следовательно, необратимыми в $\mathscr{H}^m$); тогда, согласно лемме 3, они неприводимы в $\mathscr{H}^m$. Таким образом, $\mathbf{f}$ оказывается эквивалентным произведению необратимых и неприводимых элементов кольца $\mathscr{H}^m$.

Теперь предположим, что $\mathbf{f} \sim \mathbf{f}_1\mathbf{f}_2 \ldots \mathbf{f}_q$, где $\mathbf{f}_k$ — необратимые и неприводимые элементы кольца $\mathscr{H}^m$. Так как $\mathbf{f} \sim P$, мы можем принять (умножив, в случае надобности, $\mathbf{f}_1$ на некоторый обратимый элемент кольца $\mathscr{H}^m$), что $P = \mathbf{f}_1\mathbf{f}_2 \ldots \mathbf{f}_k$. Тогда $f_1(\mathfrak{o}', x_m) \ldots f_q(\mathfrak{o}', x_m) = x_m^p$, где p (степень P) $\geqslant 1$. Поэтому $f_k(\mathfrak{o}', x_m) \not\equiv 0$ $(k = 1, \ldots, q)$ в некоторой окрестности точки $x_m = 0$. В силу подготовительной теоремы Вейерштрасса, каждый росток $\mathbf{f}_k$ эквивалентен в $\mathscr{H}^m$ некоторому отмеченному элементу $P'_k \in \mathscr{H}^{m-1}[x_m]$, неприводимому (как и $\mathbf{f}_k$) в кольце $\mathscr{H}^m$, а согласно лемме 3, и в кольце $\mathscr{H}^{m-1}[x_m]$. Следовательно, $P \sim P'_1 \ldots P'_q$ (в действительности имеет место равенство — в силу заключения подготовительной теоремы Вейерштрасса о единственности). Так как $\mathscr{H}^{m-1}[x_m]$ — факториальное кольцо, то $q = n$ и (при надлежащей нумерации) $P'_j \sim P_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, т. е. $\mathbf{f}_j \sim P_j$. Таким образом, $\mathbf{f} \sim P_1 \ldots P_n$ является единственным, с точностью до обратимых сомножителей, разложением ростка $\mathbf{f}$ на неприводимые и необратимые элементы кольца $\mathscr{H}^m$.

4. Взаимно простые ростки голоморфных функций. Для того чтобы изложить следующий результат, принадлежащий снова Вейерштрассу, мы введем новое обозначение. Пусть f — голоморфная функция на открытом множестве $U \subset \mathbf{C}^m$. Тогда для точки $a \subset U$ мы обозначим через $\mathbf{f}_a$ элемент кольца $\mathscr{H}_a^m$, порождаемый функцией f.

Теорема 4. *Пусть f и g — голоморфные функции на открытом множестве $U \subset \mathbf{C}^m$, причем в точке $a \in U$ ростки $\mathbf{f}_a$ и $\mathbf{g}_a$ являются взаимно простыми в $\mathscr{H}_a^m$. Тогда существует такая окрестность $V \subset U$ точки a,*

что в любой точке $x \in V$ ростки $\mathfrak{f}_x$ и $\mathfrak{g}_x$ являются взаимно простыми в $\mathscr{H}_x^m$.

Доказательство. Если элемент $\mathfrak{f}_a$ либо $\mathfrak{g}_a$ сводится к $\mathbf{0}_a$ или является обратимым в $\mathscr{H}_a^m$, или если $m = 1$, наше утверждение очевидно. Предположим поэтому, что $\mathfrak{f}_a$ и $\mathfrak{g}_a$ необратимы, отличны от $\mathbf{0}_a$ и $m \geqslant 2$. В силу замечания 1 по поводу подготовительной теоремы, мы можем предположить, что $\mathfrak{f}_a$ и $\mathfrak{g}_a$ эквивалентны соответственно отмеченным полиномам P и Q по $y_m = x_m - a_m$ над $\mathscr{H}_{a'}^{m-1}$. Из леммы 2, п. 3 вытекает, что P и Q не имеют общих делителей степени > 0 в $\mathscr{H}_{a'}^{m-1}[y_m]$. Так как $\mathscr{H}_{a'}^{m-1}$ — факториальное кольцо и коэффициенты при старших членах полиномов P и Q равны 1, отсюда (согласно п. 2 (е)) следует, что $\rho(P, Q) \neq \mathbf{0}_{a'}$.

Очевидно можно так выбрать открытое связное множество $V' \ni a'$ и полиномы $\varphi(x', y_m)$, $\psi(x', y_m)$ относительно y_m с коэффициентами, голоморфными при $x' \in V'$ (при старших членах равными 1), что $\varphi_a = P$, $\psi_a = Q$. Тогда $\rho(\varphi, \psi) = R$ есть полином от коэффициентов φ и ψ и является голоморфной функцией в V'. Так как $\mathbf{R}_{a'} = \rho(P, Q) \neq \mathbf{0}_{a'}$ и множество V' связно, то $\mathbf{R}_{x'} \neq \mathbf{0}_{x'}$ во всех точках $x' \in V'$.

Теперь мы докажем (от противного), что во всех точках $b \in \mathbf{C}^m$, для которых $b' \in V'$, ростки φ_b и ψ_b являются взаимно простыми. Действительно, пусть $\mathfrak{h}_b (\neq \mathbf{0}_b)$ — необратимый общий множитель ростков φ_b и ψ_b в $\mathscr{H}_b^m$. Тогда $h(b', b_m + z) \not\equiv 0$ в некоторой окрестности точки $z = 0$ (поскольку коэффициент при старшем члене полинома $\varphi(b', b_m - a_m - z)$, расположенного по степеням переменного z, равен 1). Так как $h(b) = 0$, в силу замечания 2 по поводу подготовительной теоремы Вейерштрасса, существует открытый полицилиндр W с центром в точке b, обладающий следующими свойствами: (1) в W либо φ, либо ψ является произведением h на некоторую голоморфную функцию; (2) каждой точке $x' \in W'$ соответствует по крайней мере одна такая точка $x_m \in \mathbf{C}$, что $(x', x_m) \in W$ и $h(x', x_m) = 0$. Поскольку нули функции h в W являются общими нулями для φ и ψ, $\rho(\varphi, \psi) = R \equiv 0$ в некоторой окрестности точки b'. Мы пришли к противоречию, которое и доказывает наше утверждение.

Наконец, $\mathfrak{f}_a \sim P = \varphi_a$ и $\mathfrak{g}_a \sim Q = \psi_a$; поэтому $\mathfrak{f}_x \sim \varphi_x$, $\mathfrak{g}_x \sim \psi_x$ во всех точках x, принадлежащих достаточно малой окрестности V точки a. Если окрестность V выбрана так,

что из включения $x \in V$ следует включение $x' \in V'$, ростки $\mathbf{f}_x$ и $\mathbf{g}_x$ являются взаимно простыми при всех $x \in V$, что и требовалось доказать.

Замечание. Из теоремы 4 вытекает, что если функции f и g голоморфны на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}^m$, то множество $\{x \in U \mid \mathbf{f}_x$ и $\mathbf{g}_x$ являются взаимно простыми в $\mathscr{H}_x^m\}$ также является открытым. Более сильный результат будет получен в п. 3, гл. IV.

5. Мероморфные функции. Пусть $U (\neq \varnothing)$ — открытое множество в $\mathbb{C}^m$, $m \geqslant 2$. Мы рассмотрим множество $\mathcal{J}$, определенное следующими условиями:

(I) множество $\mathcal{J}$ состоит из троек (V, f, g), где $V \subset U$ — связное открытое множество, f, g — голоморфные функции на V и $g \not\equiv 0$;

(II) если $(V_1, f_1, g_1), (V_2, f_2, g_2) \in \mathcal{J}$, $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$, то $f_1 g_2 = f_2 g_1$ на $V_1 \cap V_2$;

(III) $\bigcup\limits_{(V, f, g) \in \mathcal{J}} V = U$.

Пусть $\mathbf{T}(U)$ — множество всех таких множеств $\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}', \mathcal{J}'' \subset \mathbf{T}(U)$. Условимся, что $\mathcal{J}' \sim \mathcal{J}''$, если $\mathcal{J}' \cup \mathcal{J}'' \in \mathbf{T}(U)$, т. е. если условие (II) выполняется для $\mathcal{J}' \cup \mathcal{J}''$ (выполнение условий (I) и (III) тривиально). Очевидно, что $\mathcal{J}' \sim \mathcal{J}''$ при $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}''$. Далее, очевидно, что отношение $\sim$ симметрично и рефлексивно. Покажем, что оно транзитивно и, таким образом, является отношением эквивалентности на множестве $\mathbf{T}(U)$. Пусть $\mathcal{J}, \mathcal{J}', \mathcal{J}'' \in \mathbf{T}(U)$, $\mathcal{J} \sim \mathcal{J}'$, $\mathcal{J} \sim \mathcal{J}''$. Мы должны показать, что если $(V', f', g') \in \mathcal{J}'$, $(V'', f'', g'') \in \mathcal{J}''$ и $V' \cap V'' \neq \varnothing$, то $f'g'' = f''g'$ на $V' \cap V''$. Благодаря условию (III) достаточно проверить выполнение этого равенства на всех множествах $V' \cap V'' \cap V \neq \varnothing$, $(V, f, g) \in \mathcal{J}$. Так как $\mathcal{J} \sim \mathcal{J}'$, $\mathcal{J} \sim \mathcal{J}''$, на подобном множестве $V' \cap V'' \cap V$ имеем $fg' = f'g$ и $fg'' = f''g$, а следовательно, и $f'gg'' = fg'g'' = f''gg'$. Так как $g \not\equiv 0$ на любой связной компоненте множества $V' \cap V'' \cap V$, то отсюда вытекает, что $f'g'' = f''g'$ на $V' \cap V'' \cap V$. Итак, транзитивность отношения $\sim$ доказана. Мы определим *мероморфную функцию* на U как класс эквивалентности в множестве $\mathbf{T}(U)$ по отношению $\sim$.

Определение 3. *Мероморфная функция F на U определена в точке $x \in U$, если существует множе-*

ство $\mathcal{T} \in \mathbf{T}(U)$, определяющее функцию F, и такая тройка $(V, f, g) \in \mathcal{T}$, что $x \in V$ и обе функции f и g не обращаются в точке x одновременно в нуль. Значение $F(x)$ функции F в точке x равно ∞, если $g(x) = 0$, и $\frac{f(x)}{g(x)}$, если $g(x) \neq 0$ (легко видеть, что $F(x)$ зависит только от F и от x). Функция F является неопределенной в точке x, если она там не определена.

Множество точек U, в которых функция F определена, есть открытое подмножество в U, и $x \to F(x)$ — непрерывное отображение этого открытого подмножества в компактифицированную комплексную плоскость.

Замечания. (1) Каждая функция f, голоморфная на U, определяет на этом множестве естественным (и взаимно однозначным) образом мероморфную функцию (которая обозначается той же буквой f). Значением этой функции в точке $x \in U$ является $f(x)$; она определяется с помощью элементов $\{(U_\alpha, f_\alpha, 1)_{\alpha \in I}\} \in \mathbf{T}(U)$, где U_α, $\alpha \in I$, — связные компоненты U, f_α — ограничения f на U_α.

(2) Пусть $U_0 \subset U$ — открытое множество, F — мероморфная функция на U. Ограничение $F_0 = F \mid U_0$ — это мероморфная функция на U_0, которая определяется следующим образом. Пусть $\mathcal{T} \in \mathbf{T}(U)$ определяет функцию F на U. Элемент $\mathcal{T}$ определяет элемент $\mathcal{T}_0 \in \mathbf{T}(U_0)$ так: $(V_0, f_0, g_0) \in \mathcal{T}_0$ в том и только том случае, если существует тройка $(V, f, g) \in \mathcal{T}$, такая, что $V \supset V_0$, $f_0 = f \mid V_0$, $g_0 = g \mid V_0$; F_0 — это мероморфная функция, задаваемая тройкой $\mathcal{T}_0$ на U_0. Она полностью определяется функцией F, т. е. F_0 определена в точке $x \in U_0$ тогда и только тогда, когда в точке x определена функция F, и в этом случае $F_0(x) = F(x)$. Действительно, если какой-либо другой элемент $\mathcal{T}'_0 \in \mathbf{T}(U)$ также определяет функцию F_0, то $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}'_0 \in \mathbf{T}(U)$ и определяет функцию F. Например, если U_0 — множество тех точек U, где функция F определена и конечна, ограничение $F \mid U_0$ голоморфно на множестве U_0.

(3) Пусть U связно и $\mathcal{T} \in \mathbf{T}(U)$ содержит тройку (V_0, f_0, g_0), причем $f_0 \equiv 0$. Тогда для каждой тройки $(V, f, g) \in \mathcal{T}$ имеем $f \equiv 0$. Действительно, предположим сначала, что $V \cap V_0 \neq \varnothing$. Тогда на $V \cap V_0$ имеем $fg_0 = f_0 g \equiv 0$. Поскольку $g_0 \not\equiv 0$, эта функция не может быть тождественно равной

нулю ни на одной связной компоненте пересечения $V \cap V_0$. Следовательно, $f \equiv 0$. Теперь рассмотрим общий случай: так как множество U связно, то для любой тройки $(V, f, g) \in \mathcal{T}$ можно найти такую конечную совокупность $(V_k, f_k, g_k) \in \mathcal{T}$, $k = 1, \ldots, n$, что все множества $V_0 \cap V_1, \ldots, V_{n-1} \cap V_n$, $V_n \cap V$ непусты. Применяя последовательно предыдущее рассуждение, мы заключаем, что $f \equiv 0$. Таким образом, если мероморфная функция F на связном открытом множестве $U \subset \mathbf{C}^m$ равна нулю в любой точке его открытого непустого подмножества, она тождественно равна нулю всюду на U.

(4) Сумма и произведение двух функций, мероморфных на U, определяются так. Пусть $\mathcal{T}_1 = \{(V_1, f_1, g_1)\}$, $\mathcal{T}_2 = \{(V_2, f_2, g_2)\}$ определяют соответственно функции F_1, F_2. Мы определим множество $\mathcal{T} \in \mathbf{T}(U)$ следующим образом: $(V, f, g) \in \mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда существуют такие $(V_1, f_1, g_1) \in \mathcal{T}_1$, $(V_2, f_2, g_2) \in \mathcal{T}_2$, что $V \subset V_1 \cap V_2$ и $f = (f_1 g_2 + f_2 g_1) | V$ для сложения (соответственно $(f_1 f_2) | V$ для умножения), $g = (g_1 g_2) | V$. Тогда $F_1 + F_2$ (соответственно $F_1 F_2$) — это мероморфная функция, определяемая $\mathcal{T}$ на U. Она полностью определяется функциями F_1 и F_2. Если все функции F_1, F_2, $F_1 + F_2$ (соответственно $F_1 F_2$) определены в точке $x \in U$, то $F_1(x) + F_2(x) = (F_1 + F_2)(x)$ (соответственно $F_1(x) F_2(x) = (F_1 F_2)(x)$).

(5) Пусть F — мероморфная функция, заданная на U и отличная от тождественного нуля на любой связной компоненте U; пусть $\mathcal{T}$ — некоторый элемент множества $\mathbf{T}(U)$, определяющий F. Тогда, в силу замечания (3), если $(V, f, g) \in \mathcal{T}$, то $f \not\equiv 0$ на V. Значит, $\mathcal{T}' = \{(V, g, f) \mid (V, f, g) \in \mathcal{T}\} \in \mathbf{T}(U)$.

Легко видеть, что мероморфная функция F', определяемая $\mathcal{T}'$ на U, зависит только от F. Очевидно, что $FF' \equiv 1$. Мы будем писать: $F' = 1/F$. Непосредственно видно, что функции F и F' определены в одних и тех же точках множества U.

Теорема 5. *Любая мероморфная функция F на U может быть определена множеством $\mathcal{T}_0 \subset \mathbf{T}(U)$ со следующим свойством: для каждой тройки $(V_0, \varphi, \psi) \in \mathcal{T}_0$ функции φ и ψ принадлежат взаимно простым росткам в каждой точке $x \in V_0$. Если множество $\mathcal{T}_0$ указанного вида определяет мероморфную функцию F, то для любой тройки $(V_0, \varphi, \psi) \in \mathcal{T}_0$ из равенства*

$\varphi(x)=\psi(x)=0$ *в точке* $x\in V_0$ *следует, что* x — *точка неопределенности для функции* F.

Доказательство. Мы можем, не теряя общности, предположить, что множество U связно. Тогда, если $F\equiv 0$, можно взять множество $\mathcal{T}_0$ состоящим из одной тройки $(U, 0, 1)$. Пусть $F\not\equiv 0$ и $\mathcal{T}\in\mathbf{T}(U)$ определяет F. Тогда для любой точки $x\in U$ можно указать такую тройку $(V, f, g)\in\mathcal{T}$, что $x\in V$. Так как $F\not\equiv 0$, то и $f\not\equiv 0$ на V (согласно замечанию (3)); нам известно, что $g\not\equiv 0$ на V. Следовательно, $\mathbf{f}_x, \mathbf{g}_x\neq\mathbf{0}_x$ в $\mathcal{H}_x^m$. Обозначим через $\mathbf{d}_x$ общий наибольший делитель $\mathbf{f}_x$, $\mathbf{g}_x$ в $\mathcal{H}_x^m$; пусть $\varphi_x=\mathbf{f}_x/\mathbf{d}_x$, $\psi_x=\mathbf{g}_x/\mathbf{d}_x$. Тогда φ_x и ψ_x — взаимно простые элементы кольца $\mathcal{H}_x^m$; согласно теореме 4, существуют связная открытая окрестность $V_x\subset V$ точки x и голоморфные в V_x функции φ_x, $\psi_x\not\equiv 0$, порождающие в точке x ростки φ_x, ψ_x и имеющие взаимно простые ростки во всех точках V_x. Далее мы заключаем, что $f\psi_x=g\varphi_x$ (поскольку V_x связно, это следует из равенства $\mathbf{f}_x\psi_x=\mathbf{g}_x\varphi_x$). Это означает, что одна тройка (V_x, φ_x, ψ_x) определяет на V_x мероморфную функцию $F|V_x$. Отсюда вытекает, что множество $\mathcal{T}_0=\{(V_x, \varphi_x, \psi_x)\mid x\in U\}\in\mathbf{T}(U)$ определяет функцию F. Итак, множество $\mathcal{T}_0$ обладает требуемыми свойствами по построению.

Теперь предположим, что $\mathcal{T}_0\in\mathbf{T}(U)$ определяет функцию F и обладает свойством, указанным в нашей теореме. Пусть $(V_0, \varphi, \psi)\in\mathcal{T}_0$, $x\in V_0$, $\varphi(x)=\psi(x)=0$. Мы должны показать, что x — точка неопределенности F, т. е. что для любого $\mathcal{T}$, определяющего F, и любой тройки $(V, f, g)\in\mathcal{T}$, такой, что $x\in V$, имеем $f(x)=g(x)=0$. Действительно, в нашем случае $f\psi=\varphi g$ на $V\cap V_0$, в частности, $\mathbf{f}_x\psi_x=\varphi_x\mathbf{g}_x$. Так как ростки φ_x и ψ_x являются взаимно простыми в $\mathcal{H}_x^m$, то $\mathbf{f}_x$ делится на φ_x, а $\mathbf{g}_x$ — на ψ_x. Но $\varphi(x)=\psi(x)=0$; следовательно, $f(x)=g(x)=0$, что и требовалось доказать.

6. Аналитические множества и ростки аналитических множеств.

Определение 4. *Аналитическим множеством (соответственно глазным аналитическим множеством) в открытом множестве* $U\subset\mathbb{C}^m$ *называется подмножество* S *множества* U, *обладающее следующим свойством: для каждой точки* $a\in U$ *можно указать такую открытую (соответственно открытую связную) окрест-*

ность $V \subset U$ точки a и конечную совокупность голоморфных в V функций $f_1, \ldots, f_r$ (соответственно голоморфную в V функцию $f \not\equiv 0$), что $S \cap V = \{x \in V \mid f_1(x) = \ldots = f_r(x) = 0\}$ (соответственно $S \cap V = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$).

Очевидно, что аналитическое множество в U замкнуто в U.

Рассмотрим в U аналитические множества S и T. Пусть V, W $(\subset U)$ — открытые окрестности точки $a \in U$, $f_1, \ldots, f_r$ и $g_1, \ldots, g_s$ — функции, голоморфные соответственно в этих окрестностях, такие, что $S \cap V = \{x \in V \mid f_1(x) = \ldots = f_r(x) = 0\}$, $T \cap W = \{x \in W \mid g_1(x) = \ldots = g_s(x) = 0\}$. Тогда $(S \cap T) \cap (V \cap W) = \{x \in V \cap W \mid f_1(x) = \ldots = f_r(x) = g_1(x) = \ldots = g_s(x) = 0\}$ и $(S \cup T) \cap (V \cap W) = \{x \in V \cap W \mid f_i(x) g_j(x) = 0,\ i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, s\}$. Отсюда следует, что конечное пересечение аналитических множеств есть снова аналитическое множество, конечная сумма (главных) аналитических множеств есть снова (главное) аналитическое множество. Заметим, что произвольное пересечение аналитических множеств также является аналитическим множеством (доказательство см. в п. 1, гл. IV).

Определение 5. *Аналитическое множество S в U называется приводимым в U, если оно представляет собой объединение двух отличных от S аналитических множеств в U. Аналитическое множество называется неприводимым, если оно не является приводимым.*

В частности, неприводимое аналитическое множество в U всегда содержится в одной связной компоненте U.

Пусть F — некоторая функция, мероморфная на U. Тогда, согласно теореме 5, подмножество S_0 точек неопределенности F является аналитическим множеством в U; объединение S_0 с множеством точек, на котором F определена и принимает некоторое заданное значение, также является аналитическим множеством.

Пусть S и S' — аналитические множества в открытых окрестностях V и V' точки $a \in C^m$. Мы будем писать $(V, S) \sim (V', S')$, если $S \cap W = S' \cap W$, где $W \subset V \cap V'$ — открытая окрестность точки a. Очевидно, что $\sim$ есть отношение эквивалентности в множестве пар (V, S), где V — открытая окрестность точки a, S — аналитическое

множество в V. *Росток аналитического множества в точке* a — это класс эквивалентности по отношению $\sim$.

Мы обозначим через $\mathbf{S}_a$ (или через $\mathbf{S}$, если это не ведет к недоразумению) росток аналитического множества, определенного в точке $a \in \mathbf{C}^m$ парой (V, S), где V — открытая окрестность точки a, S — аналитическое множество в V. Если $\mathbf{T}_a$ — другой росток аналитического множества, определенный парой (W, T), мы назовем *объединением* (соответственно *пересечением*) ростков $\mathbf{S}_a$ и $\mathbf{T}_a$ и обозначим $\mathbf{S}_a \cup \mathbf{T}_a$ (соответственно $\mathbf{S}_a \cap \mathbf{T}_a$) росток, определенный в точке a парой $(S \cup T, V \cap W)$ (соответственно парой $(S \cap T, V \cap W)$). Мы будем писать $\mathbf{S}_a \subset \mathbf{T}_a$, если в некоторой открытой окрестности V точки a имеются аналитические множества S и T, $S \subset T$, порождающие ростки $\mathbf{S}_a$ и $\mathbf{T}_a$. Очевидно, что из включений $\mathbf{S}_a \subset \mathbf{T}_a$, $\mathbf{T}_a \subset \mathbf{S}_a$ следует равенство $\mathbf{S}_a = \mathbf{T}_a$.

Примеры. $\mathbf{C}^m$ и $\mathbf{a}$ — ростки, порождаемые в точке a аналитическими множествами $\mathbf{C}^m$ и $\{a\}$; $\varnothing$ — пустой росток, порождаемый пустым аналитическим множеством.

Определение 6. *Росток аналитического множества* $\mathbf{S}$ *в точке* $a \in \mathbf{C}^m$ *называется приводимым, если он представляет собой объединение двух ростков аналитических множеств в точке* a, *отличных от* $\mathbf{S}$. *Росток аналитического множества называется неприводимым, если он не является приводимым.*

Пример. Росток, порождаемый аналитическим множеством $\mathbf{C}^m$, неприводим во всех точках $a \in \mathbf{C}^m$. Отсюда вытекает, что всякое аффинное подпространство L пространства $\mathbf{C}^m$ (L, очевидно, является аналитическим множеством в $\mathbf{C}^m$) порождает неприводимый росток во всех точках $a \in \mathbf{C}^m$.

7. Ростки главных аналитических множеств. Каждый элемент множества $\mathscr{H}_a^m - \{\mathbf{0}\}$ определяет росток главного аналитического множества в точке a. Пусть f — голоморфная функция в открытой окрестности V точки a, $\mathbf{f}_a \neq \mathbf{0}$ и $S = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$. Очевидно, что росток аналитического множества $\mathbf{S}_a$, порождаемый множеством S в a, полностью определяется ростком $\mathbf{f}_a$. Мы называем $\mathbf{S}_a$ *ростком главного аналитического множества* в точке a, определяемым ростком $\mathbf{f}_a \in \mathscr{H}_a^m$ (или главным идеалом, порождаемым ростком $\mathbf{f}_a$ в $\mathscr{H}_a^m$).

Теорема 6. *Пусть* $\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$ — *ростки главных аналитических множеств, определяемые в точке* $a \in \mathbf{C}^m$ *соответственно ростками* $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathscr{H}_a^m$, *причем* $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{S} \subset \mathbf{T}$. *Тогда* $\mathbf{g}$ *делится на каждый неприводимый множитель ростка* $\mathbf{f}$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $a = \mathfrak{o}$, $m \geqslant 2$ и росток $\mathbf{f}$ является необратимым. Так как $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$, мы можем предположить (выбрав надлежащим образом базис векторов в $\mathbf{C}^m$), что $\mathbf{f} \sim \varphi$, где φ — отмеченный элемент кольца $\mathscr{H}^{m-1}[x_m]$. Неприводимые сомножители разложения $\mathbf{f}$ в $\mathscr{H}^m$ являются (с точностью до обратимых множителей из $\mathscr{H}^m$) неприводимыми сомножителями разложения φ в $\mathscr{H}^{m-1}[x_m]$. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — все различные неприводимые отмеченные полиномы, являющиеся делителями φ в кольце $\mathscr{H}^{m-1}[x_m]$. Нам достаточно показать, что $\mathbf{g}$ делится на $\psi = \varphi_1 \ldots \varphi_n$. Здесь ψ — произведение попарно неэквивалентных необратимых отмеченных полиномов; следовательно, это произведение само является отмеченным полиномом и не делится на квадрат никакого необратимого элемента кольца $\mathscr{H}^{m-1}[x_m]$. Так как $\mathscr{H}^{m-1}[x_m]$ — факториальное кольцо, отсюда вытекает (п. 2 (е)), что $\delta(\psi) \neq \mathbf{0}_{\mathfrak{o}}'$, где $\delta(\psi)$ — дискриминант ψ.

В силу подготовительной теоремы можно найти открытый полицилиндр $P = \{(x', x_m) \in \mathbf{C}^m \mid x' \in P', |x_m| < \rho\}$ с центром в точке $\mathfrak{o}$ и отмеченный псевдополином $\psi(x', x_m) = x_m^p + \sum_{k=1}^{p} a_k(x') x_m^{p-k}$, такие, что (I) все a_k голоморфны в P' и $\psi_{\mathfrak{o}} = \psi$; (II) для каждой точки $x' \in P'$ из равенства $\psi(x', t) = 0$ вытекает, что $|t| < \rho$, т. е. $(x', t) \in P$. При этом ρ и радиусы полицилиндра P' можно считать выбранными как угодно малыми, поэтому можно предположить, что (III) $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ определяются голоморфными функциями f, g, заданными в полицилиндре P; (IV) для каждой точки $x \in P$ из равенства $f(x) = 0$ вытекает, что $g(x) = 0$; (V) $\mathbf{f}_x$ делится на ψ_x для каждой точки $x \in P$ (в частности, если $x \in P$, $\psi(x) = 0$, то и $f(x) = 0$).

Если полицилиндр P взят достаточно малым, то, в силу теоремы 2, в P существует такая голоморфная функция h,

что $r = g - h\psi = \sum_{k=0}^{p-1} r_k(x') x_m^{p-k}$, где r_k — голоморфные функции в P'. Мы покажем, что $r \equiv 0$, чем будет завершено доказательство нашей теоремы.

Функция $\psi(x', t)$ представляет собой полином от t с коэффициентом при старшем члене, равным 1, над кольцом $\mathscr{H}(P')$ функций, голоморфных в P'. Рассмотрим дискриминант $D = \delta(\psi)$; $D \not\equiv 0$ (в P'), так как $\mathbf{D}_{P'} = \delta(\psi) \neq \mathbf{0}$. Следовательно, $W' = \{x' \in P' | D(x') \neq 0\} \neq \varnothing$. В каждой точке $x' \in W'$ полином $\psi(x', t)$ имеет p различных корней; все они лежат в круге $|t| < \rho$. Все корни полинома $\psi(x', t)$ являются корнями $g(x', t)$, а следовательно, и корнями $f(x', t)$. Таким образом, для каждой точки $x' \in W$ полином $r(x', t)$ от t степени $p - 1$ имеет p различных корней. Отсюда вытекает, что все коэффициенты r_k этого полинома равны нулю на W'. Все r_k голоморфны на открытом связном множестве P' и равны нулю на открытом непустом множестве $W' \subset P'$. Следовательно, все $r_k \equiv 0$ на P', что доказывает наше утверждение.

Следствие 1. *Пусть функция F, мероморфная на открытом множестве $U \subset \mathbf{C}^m$ $(m \geqslant 2)$, имеет точку неопределенности $a \in U$. Тогда для любого $\lambda \in \mathbf{C}$ (а также и для $\lambda = \infty$) можно указать точку U, как угодно близкую к a, в которой функция F определена и равна λ.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда множество U связно. Так как функция F имеет точку неопределенности $a \in U$, то $F \not\equiv 0$ в U и можно рассмотреть функцию $F' = 1/F$. Она тоже не определена в точке a; функция $F(x)$ определена и равна ∞ в тех и только в тех точках $x \in U$, где $F'(x) = 0$. Такие точки x, очевидно, имеются в любой окрестности точки a, поэтому достаточно доказать наше утверждение для чисел $\lambda \in \mathbf{C}$.

Пусть элемент $\mathcal{T} \subset \mathrm{T}(U)$ определяет функцию F и обладает свойством, указанным в теореме 5, а тройка $(V, f, g) \in \mathcal{T}$ выбрана так, что $a \in V$. Рассмотрим функцию $h = f - \lambda g$, голоморфную на V; $h \not\equiv 0$ на V, так как из $h \equiv 0$ следовало бы, что $F = \lambda$ на V, в то время как функция F имеет точку неопределенности $a \in V$. Так как $g(a) = f(a) = 0$, то $h(a) = 0$. Следовательно, в силу подготовительной теоремы Вейерштрасса, функция h имеет нули, как угодно

близкие к точке a. С другой стороны, если $h(x)=0$, $g(x)\neq 0$ в точке $x\in V$, то $F(x)$ определена и равна λ. Наше следствие будет доказано, если мы установим, что росток аналитического множества в точке a, определенный ростком $\mathbf{h}_a$, не содержится в ростке, определяемом $\mathbf{g}_a$. Действительно, если бы это было не так, то, в силу теоремы 6, каждый неприводимый делитель ростка $\mathbf{h}_a$ являлся бы делителем ростка $\mathbf{g}_a$ в кольце $\mathscr{H}_a^m$, а следовательно, и ростка $\mathbf{h}_a+\lambda\mathbf{g}_a=\mathbf{f}_a$. Это невозможно, поскольку $\mathbf{h}_a$ — необратимый росток в $\mathscr{H}_a^m$ (так как $h(a)=0$), а ростки $\mathbf{g}_a$ и $\mathbf{f}_a$ — взаимно простые по предположению. Тем самым доказательство следствия завершено.

Следствие 2. *Росток главного аналитического множества* $\mathbf{S}$ *в точке* a, *определенный с помощью ростка* $\mathbf{f}\in\mathscr{H}_a^m$, $\mathbf{f}\neq 0$, *является приводимым в том и только в том случае, когда разложение* $\mathbf{f}$ *в кольце* $\mathscr{H}_a^m$ *содержит по крайней мере два неэквивалентных необратимых и неприводимых множителя.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{f}\sim\mathbf{f}_1^{k_1}\ldots\mathbf{f}_n^{k_n}$, где ростки $\mathbf{f}_k$ необратимы, неприводимы и не эквивалентны, а k_j — целые числа $\geqslant 1$. Предположим сначала, что $n\geqslant 2$, и покажем, что в этом случае росток $\mathbf{S}$ приводим. Пусть $\mathbf{S}'$ и $\mathbf{S}''$ — ростки аналитических множеств в точке a, определенные соответственно ростками $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2\ldots\mathbf{f}_n$. Очевидно, что $\mathbf{S}=\mathbf{S}'\cup\mathbf{S}''$. Этим наше утверждение доказано, так как $\mathbf{S}'$, $\mathbf{S}''\neq\mathbf{S}$ (если, например, $\mathbf{S}=\mathbf{S}'$, то, согласно теореме 6, росток $\mathbf{f}_1\ldots\mathbf{f}_n$ был бы делителем ростка $\mathbf{f}_1$, что невозможно).

Предположим теперь, что $\mathbf{f}\sim\mathbf{f}_1^{k_1}$, т. е. $n=1$. Мы должны показать, что в этом случае росток $\mathbf{S}$ неприводим. Допустим, что, напротив, $\mathbf{S}=\mathbf{S}'\cup\mathbf{S}''$; $\mathbf{S}'$, $\mathbf{S}''\neq\mathbf{S}$. Пусть S', S'' — аналитические множества в открытой окрестности V точки a и $\mathbf{S}_a'=\mathbf{S}'$, $\mathbf{S}_a''=\mathbf{S}''$. Мы предположим, что S' (соответственно S'') — множество общих нулей конечного семейства голоморфных функций $g_1,\ldots,g_r$ (соответственно $h_1,\ldots,h_s$) в V. Поскольку $\mathbf{S}'$, $\mathbf{S}''\neq\mathbf{S}$, существуют такие функции g_{i_0}, h_{j_0}, что ни росток функции g_{i_0}, ни росток функции h_{j_0} в точке a ($1\leqslant i_0\leqslant r$, $1\leqslant j_0\leqslant s$) не имеют своим делителем росток $\mathbf{f}_1$. С другой стороны, $\mathbf{S}'\cup\mathbf{S}''$ — росток аналитического множества, определяемый общими нулями функций g_ih_j в мно-

жестве $V(1 \leqslant i \leqslant r,\ 1 \leqslant j \leqslant s)$. Следовательно, если $\mathbf{S}' \cup \mathbf{S}'' = \mathbf{S}$, то, согласно теореме 6, ростки всех произведений $g_i h_j$, в частности произведения $g_{i_0} h_{j_0}$, имеют делителем росток $\mathbf{f}_1$. Последнее невозможно, так как $\mathbf{f}_1$ неприводим и не является делителем ростков функций g_{i_0} и h_{j_0}. Мы пришли к противоречию; наше утверждение доказано.

Следствие 3. *Росток главного аналитического множества всегда является конечным объединением неприводимых ростков главных аналитических множеств, причем ни один из них не содержится в объединении остальных ростков.*

Доказательство. Пусть росток главного аналитического множества $\mathbf{S}$ в точке $a \in \mathbf{C}^m$ определяется ростком $\mathbf{f} \in \mathscr{H}_a^m$, $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$. Если росток $\mathbf{f}$ обратим, то росток $\mathbf{S}$ неприводим. Пусть $\mathbf{f} \sim \mathbf{f}_1^{k_1} \ldots \mathbf{f}_n^{k_n}$, где ростки $\mathbf{f}_j$ необратимы, неприводимы и взаимно неэквивалентны, $k_j \geqslant 1$ — целые числа. Пусть $\mathbf{S}_j$ — росток аналитического множества, определяемый ростком $\mathbf{f}_j$, $j = 1, \ldots, n$. Согласно следствию 2, каждый росток $\mathbf{S}_j$ неприводим; очевидно, что $\bigcup_j \mathbf{S}_j = \mathbf{S}$. Наконец, если $n \geqslant 1$, ни один росток $\mathbf{S}_j$ не может содержаться в объединении остальных ростков, так как в этом случае, согласно теореме 6, произведение $\mathbf{f}_1 \ldots \mathbf{f}_{j-1}\, \mathbf{f}_{j+1} \ldots \mathbf{f}_n$ должно было бы иметь делителем $\mathbf{f}_j$, что невозможно, так как ростки $\mathbf{f}_k$ неприводимы и взаимно неэквивалентны.

8. $\mathscr{H}_a^m$ — нётерово кольцо. Некоторые выводы. Мы покажем теперь, что $\mathscr{H}^m (= \mathscr{H}_0^m)$ — нётерово кольцо. В действительности будет получен следующий более сильный результат.

Теорема 7. *Для любого идеала I кольца $\mathscr{H}^m$ можно указать* (I) *в некоторой открытой окрестности U точки $\mathfrak{o}$ конечное множество голоморфных функций f_0, $f_1, \ldots, f_q$ с ростками в $\mathfrak{o}$, принадлежащими I;* (II) *(базис векторов в пространстве $\mathbf{C}^m$ и) последовательность открытых полицилиндров $\{P_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ с центром в точке $\mathfrak{o}$ и радиусами, монотонно стремящимися к нулю ($\bar{P}_1 \subset U$);* (III) *числа $\delta_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, со слг-*

дующим свойством: для каждой функции g, голоморфной в P_n, с ростком $\mathbf{g}_0 \in I$ существуют такие функции $h_0, \ldots, h_q$, голоморфные в P_n, что $g = \sum_{j=0}^{q} h_j f_j$ в P_n и

$$\|h_j\|_{P_n} \left(= \sup_{x \in P_n} |h_j(x)|\right) \leqslant \delta_n \|g\|_{P_n}, \qquad j = 0, \ldots, q.$$

Чтобы провести индукцию по m, мы должны доказать

Добавление к теореме 7. *Если дано конечное множество идеалов кольца $\mathscr{H}^m$, то последовательность полицилиндров $\{P_n\}$, указанная в теореме 7, может быть выбрана одной и той же для всех идеалов этого множества.*

Доказательство. Мы рассмотрим сначала случай $m = 1$. Условимся говорить, что росток $\mathbf{f} \in \mathscr{H}^1$, $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$ имеет порядок p, если его тейлорово разложение в точке 0 имеет вид $\sum_{k \geqslant p} a_k x^k$, $a_p \neq 0$. Пусть дано конечное множество идеалов $I^{(1)}, \ldots, I^{(s)}$ кольца $\mathscr{H}^1$, отличных от $\{\mathbf{0}\}$ и $\mathscr{H}^1$ (для последних наше утверждение очевидно). Пусть $\mathbf{f}_\sigma \neq \mathbf{0}$ — элемент минимального порядка в идеале $I^{(\sigma)}$, $\sigma = 1, \ldots, s$. Возьмем число $\rho > 0$ настолько малым, чтобы в круге $U = \{|x| < \rho\}$ существовали голоморфные функции $f_1, \ldots, f_s$, порождающие ростки $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_s$ в начале координат и отличные от нуля при $0 < |x| < \rho$. Пусть далее $\{\rho_n\}$ — последовательность чисел $< \rho$, монотонно стремящихся к нулю, P_n — открытый круг $\{|x| < \rho_n\}$ и $\delta_n = \sup_{1 \leqslant \sigma \leqslant s} \left\{1 / \inf_{|x| = \rho_n} |f_\sigma(x)|\right\}$.

Предположим теперь, что g — функция, голоморфная в P_n, порождающая росток $\mathbf{g}_0 = \mathbf{g} \in I^{(\sigma)}$, $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$. Тогда порядок ростка $\mathbf{g}$ не меньше порядка $\mathbf{f}_\sigma$. Из того, что $f_\sigma(x) \neq 0$ при $0 < |x| < \rho$, следует, что функция $h = g/f_\sigma$ голоморфна в P_n (и там $g = hf_\sigma$). Далее, в силу принципа максимума,

$$\|h\|_{P_n} = \overline{\lim_{x \in P_n,\, |x| \to \rho_n}} |h(x)| \leqslant \delta_n \|g\|_{P_n}.$$

Итак, теорема 7 вместе с добавлением доказана в случае $m = 1$.

Пусть $m \geqslant 2$. Допустим, что теорема 7 вместе с добавлением верна для кольца $\mathscr{H}^{m-1}$. Рассмотрим некоторое

конечное множество идеалов $I^{(1)}, \ldots, I^{(s)}$ кольца $\mathscr{H}^m$, отличных от $\{0\}$ и $\mathscr{H}^m$. Обозначим через $\mathbf{f}_0^{(\sigma)}$ некоторый отличный от нуля элемент идеала $I^{(\sigma)}$, $\sigma = 1, \ldots, s$. Согласно замечанию (B) после теоремы 2, можно так выбрать базис векторов в пространстве $\mathbf{C}^m$, открытые полицилиндры P_n и числа $\alpha_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, что они будут удовлетворять требованиям этой теоремы по отношению ко всем $\mathbf{f}_0^{(\sigma)}$. В оставшейся части доказательства наши рассмотрения будут относиться к любому из идеалов $I^{(\sigma)}$, поэтому мы будем далее опускать верхний индекс σ.

Пусть p — степень (единственного) отмеченного элемента кольца $\mathscr{H}^{m-1}[x_m]$, эквивалентного $\mathbf{f}_0$. По теореме 2 каждому ростку $\mathbf{g} \in \mathscr{H}^m$ отвечает такой (единственный) росток $\mathbf{h} \in \mathscr{H}^m$, что $\mathbf{g} - \mathbf{h}\mathbf{f}_0 \in \mathscr{H}^{m-1}[x_m]$ и имеет степень $< p$. Обозначим через I'_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ множество коэффициентов при x_m^{p-k} во всех элементах $\mathbf{g} - \mathbf{h}\mathbf{f}_0 \in \mathscr{H}^{m-1}[x_m]$ степени $\leqslant p - k$ для всех $\mathbf{g} \in I$. Используя заключение теоремы 2 о единственности (и тот факт, что I — идеал в кольце $\mathscr{H}^m$), легко установить, что I'_k — идеал в кольце $\mathscr{H}^{m-1}$.

По предположению индукции можно найти (базис векторов в пространстве $\mathbf{C}^{m-1}$ и) последовательность открытых полицилиндров $P'_n \subset \mathbf{C}^{m-1}$ с центрами в $\mathfrak{o}'$ и радиусами, монотонно стремящимися к нулю, и последовательность чисел $\delta_n > 0$, удовлетворяющих для всех идеалов I'_k, $1 \leqslant k \leqslant p$ (на самом деле, в очевидных обозначениях, для всех идеалов $I_k^{(\sigma)'}$, $1 \leqslant k \leqslant p_\sigma$, $1 \leqslant \sigma \leqslant s$) требованиям теоремы 7. Пусть $\{f'_{q_{k-1}+1}, \ldots, f'_{q_k}\}$ — конечное множество функций, голоморфных в некоторой окрестности полицилиндра $\overline{P}'_1$ (каждая функция f'_j порождает в точке $\mathfrak{o}'$ росток $\mathbf{f}'_j \neq 0$), обладающее свойством, указанным в теореме 7, по отношению к идеалу I'_k, $1 \leqslant k \leqslant p$, $q_0 = 0$. По определению I'_k, каждый росток $\mathbf{f}'_j$, $q_{k-1} < j \leqslant q_k$, есть коэффициент при старшем члене в некотором элементе $\mathbf{f}_j = \mathbf{g}^{(j)} - \mathbf{h}^{(j)}\mathbf{f}_0 \in \mathscr{H}^{m-1}[x_m]$ степени $p-k$. Так как $\mathbf{g}^{(j)}, \mathbf{f}_0 \in I$, то и $\mathbf{f}_j \in I$. Отбрасывая, если нужно, конечное множество полицилиндров P'_n, мы можем предположить,

что все ростки f_j, $j=1, \ldots, q\ (=q_p)$ порождаются в точке $\mathfrak{o}$ псевдополиномами f_j по степеням x_m с коэффициентами, являющимися голоморфными функциями x' в $\bar{P}'_1$. Ссылаясь снова на замечание (В) к теореме 2, мы можем считать (переходя, если нужно, к подпоследовательности последовательности $\{P'_n\}$), что для каждого n проекцией полицилиндра P_n на C^{m-1} служит полицилиндр P'_n. Мы покажем теперь, что при надлежащем выборе δ_n функции f_j, $j=0,1, \ldots, q$, и полицилиндры P_n удовлетворяют требованиям теоремы 7 для идеала I.

Пусть g — голоморфная функция в P_n и $g \in I$. По теореме 2 существует такая функция h_0, голоморфная в P_n, что $\|h_0\|_{P_n} \leqslant \alpha_n \|g\|_{P_n}$ и функция $g_1 = g - h_0 f_0$ имеет вид $g_1(x', x_m) = \sum_{k=1}^{p} g'_{1k}(x') x_m^{p-k}$, где g'_{1k} — голоморфные функции в P'_n. По определению идеала I'_1 росток g'_{11} (порожденный функцией g'_{11} в точке $\mathfrak{o}'$) принадлежит I'_1. Следовательно, по предположению индукции, существуют такие голоморфные функции $h_1, \ldots, h_{q_1}$ в P'_n, что $g'_{11} = \sum_{j=1}^{q_1} h_j f'_j$ в P'_n и $\|h_j\|_{P'_n} \leqslant \leqslant \delta'_n \|g_{11}\|_{P'_n}$, $j=1, \ldots, q_1$. Рассмотрим далее функцию $g_2 = g_1 - \sum_{j=1}^{q_1} h_j f_j$. Она представляется в виде $g_2(x', x_m) = \sum_{k=2}^{p} g'_{2k}(x') x_m^{p-k}$, где g'_{2k} — голоморфные функции в P'_n и $g_2 \in I$ (так как $g_1 \in I$ и $f_j \in I$, $j=1, \ldots, q_1$). Отсюда следует, что $g_{22} \in I'_2$. Повторяя предыдущее рассуждение, мы после p шагов 1) придем к соотношению $g_1 = \sum_{j=1}^{q} h_j f_j$, где h_j — голоморфные функции в P'_n; отсюда, используя равенство $g_1 = g - h_0 f_0$, найдем, что $g = \sum_{j=0}^{q} h_j f_j$, т. е. докажем основное утверждение теоремы; 2) получим неравенства

$\|h_j\|_{P_n'} \leqslant \delta_n' \|g_{kk}'\|_{P_n'}$ при $q_{k-1} < j \leqslant q_k$; здесь при $k \geqslant 1$

$$g_k(x', x_m) = \sum_{l=k}^{p} g_{kl}'(x') x_m^{p-l} \qquad (*)$$

и

$$g_{k+1} = g_k - \sum_{j=q_{k-1}+1}^{q_k} h_j f_j.$$

Используя интегральную формулу Коши, мы покажем, исходя из (*), что

$$\|g_{kk}'\|_{P_n'} \leqslant \frac{1}{\rho_n^{p-k}} \|g_k\|_{P_n} \leqslant \max\left\{1, \frac{1}{\rho_n^{p-1}}\right\} \|g_k\|_{P_n} = \beta_n \|g_k\|_{P_n},$$

где ρ_n — m-й радиус полицилиндра P_n. Таким образом, нам осталось еще получить оценки вида: $\|g_k\|_{P_n} \leqslant \gamma_n \|g\|_{P_n}$, $k \geqslant 1$. Выберем число $M > 0$ так, что $|f_j|_{P_1} \leqslant M$, $j = 0, \ldots, q$. Тогда

$$\|g_1\|_{P_n} = \|g - h_0 f_0\|_{P_n} \leqslant (1 + \alpha_n M) \|g\|_{P_n}$$

и для $k \geqslant 1$

$$\|g_{k+1}\|_{P_n} = \left\| g_k - \sum_{j=q_{k-1}+1}^{q_k} h_j f_j \right\|_{P_n} \leqslant (1 + \beta_n q \delta_n' M) \|g_k\|_{P_n}.$$

Итак, мы по индукции получаем оценку требуемого вида $\|g_k\|_{P_n} \leqslant \gamma_n \|g\|_{P_n}$, где величины γ_n зависят только от n (но не от $g \in I$). Так как $g = \sum_{j=0}^{q} h_j f_j$, мы придем к нужному результату, если возьмем $\delta_n = \max\{\delta_n' \beta_n \gamma_n, \alpha_n\}$.

Следствие 1. *Каждый идеал I кольца $\mathscr{H}^m$ замкнут в следующем смысле: если $\{g_n\}$ — последовательность голоморфных функций в открытой окрестности U точки 0, равномерно сходящаяся в U к пределу g, и $g_n \in I$ при всех n, то и $g \in I$.*

Доказательство. Мы сохраним обозначения теоремы 7. Пусть $P = P_{n_0}$ — полицилиндр из последовательности, полученной в теореме 7, взятый так, что $P \subset U$. Так

как последовательность $\{g_n\}$ равномерно сходится в U, мы можем принять (переходя в случае надобности к подпоследовательности), что $\|g_{n+1}-g_n\|_P \leqslant 1/2^n$, $n=1, 2, \ldots$. Тогда, поскольку $\mathbf{g}_{n+1}-\mathbf{g}_n \in I$ при любом n, согласно теореме 7, можно указать такие функции $h_n^{(j)}$ $(j=0, \ldots, q)$, голоморфные в P, что $g_{n+1}-g_n=\sum_{j=0}^{q} h_n^{(j)} f_j$ и $\|h_n^{(j)}\|_P \leqslant \leqslant \delta_{n_0}\|g_{n+1}-g_n\|_P \leqslant \delta_{n_0}/2^n$. Отсюда вытекает, что все ряды $\sum_{n=1}^{\infty} h_n^{(j)}$ нормально сходятся в P. Следовательно, сумма $h^{(j)}$ такого ряда голоморфна в P. Так как $g-g_1=\sum_{n=1}^{\infty}(g_{n+1}-g_n)= =\sum_{j=0}^{q} h^{(j)} f_j$, то $\mathbf{g}-\mathbf{g}_1 \in I$, а значит, и $\mathbf{g} \in I$, что и требовалось доказать.

Следствие 2. *Каждый идеал кольца $\mathscr{H}^m$ определяет росток аналитического множества в точке* $\mathfrak{o}$.

Доказательство. Пусть I — идеал кольца $\mathscr{H}^m$. Согласно теореме 7, $\mathscr{H}^m$ — нётерово кольцо и, следовательно, идеал I порождается конечным множеством его элементов $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_r \neq \mathbf{0}$. Обозначим через $\mathbf{S}_f$ росток главного аналитического множества, порожденного в точке $\mathfrak{o}$ элементом $\mathbf{f} \in \mathscr{H}^m$. Ясно, что росток $\mathbf{S}_I=\mathbf{S}_{f_1} \cap \ldots \cap \mathbf{S}_{f_r}$ в точке $\mathfrak{o}$ не зависит от выбора элементов, порождающих идеал I. В самом деле, если ростки $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_s \in \mathscr{H}^m$ порождают идеал $J \subset I$, то имеют место равенства $\mathbf{g}_j=\sum_{i=1}^{r} \mathbf{h}_{ji}\mathbf{f}_i$ $(j=1, \ldots, s)$, показывающие, что $\mathbf{S}_I \subset \mathbf{S}_J=\mathbf{S}_{g_1} \cap \ldots \cap \mathbf{S}_{g_s}$. Отсюда вытекает

Предложение 1 (a). *Если I, J — идеалы кольца $\mathscr{H}^m$ и $J \subset I$, то $\mathbf{S}_I \subset \mathbf{S}_J$.*

В частности, идеал I определяет росток аналитического множества $\mathbf{S}_I$ однозначно.

Предложение 1 (b). *Если I, J — идеалы кольца $\mathscr{H}^m$, то $\mathbf{S}_{I \cap J}=\mathbf{S}_I \cup \mathbf{S}_J$.*

Доказательство. В силу предложения 1 (a), $\mathbf{S}_{I \cap J} \supset \mathbf{S}_I \cup \mathbf{S}_J$. Пусть ростки $\mathbf{f}_i$ порождают идеал I, ростки

$\mathbf{g}_j$ — идеал J. Тогда $\mathbf{S}_I = \bigcap_i \mathbf{S}_{f_i}$, $\mathbf{S}_J = \bigcap_j \mathbf{S}_{g_j}$, $\mathbf{S}_I \cup \mathbf{S}_J = \bigcap_{i,j} \mathbf{S}_{f_i g_j}$. Но так как все $\mathbf{f}_i \mathbf{g}_j \in I \cap J$, то $\mathbf{S}_{I \cap J} \subset \mathbf{S}_{f_i g_j}$; отсюда следует наше утверждение.

Замечание. Утверждение, обратное предложению 1, неверно. Например, пусть $\mathbf{f}$ — необратимый элемент кольца $\mathscr{H}^m$, отличный от нуля. Тогда различные степени элемента $\mathbf{f}$ порождают различные главные идеалы в кольце $\mathscr{H}^m$. Однако все эти идеалы определяют один и тот же росток аналитического множества в точке $\mathfrak{o}$. Как будет показано в гл. IV (п. 1), $\mathbf{S}_I \subset \mathbf{S}_J$ в том и только в том случае, когда $\operatorname{rad} J \subset \operatorname{rad} I$.

Следствие 3. *Пусть в открытой окрестности U точки $\mathfrak{o} \in \mathbf{C}^m$ задано семейство голоморфных функций $\mathscr{G}$. Тогда можно указать открытую окрестность $V \subset U$ точки $\mathfrak{o}$ и конечное множество функций $g_1, \ldots, g_r \in \mathscr{G}$, обладающие следующим свойством: для каждой функции $g \in \mathscr{G}$ существуют такие голоморфные в V функции $h_1, \ldots, h_r$, что в этой окрестности $g = \sum_{i=1}^{r} h_i g_i$.*

Доказательство. Пусть I — идеал в кольце $\mathscr{H}^m$, порожденный ростком $\mathbf{g}$, $g \in \mathscr{G}$. Сохраним обозначения теоремы 7. Так как все $\mathbf{f}_j \in I$, то существует конечное множество функций $g_1, \ldots, g_r \in \mathscr{G}$, таких, что $\mathbf{f}_j = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{h}_{ji} \mathbf{g}_i$, где $\mathbf{h}_{ji} \in \mathscr{H}^m$ $(j=0, \ldots, q)$. Следовательно, взяв число n достаточно большим, мы найдем такой полицилиндр $P_n (\subset U)$, что в нем $f_j = \sum_{i=1}^{r} h_{ji} g_i$ $(j = 0, \ldots, q)$. Утверждение следствия 3, очевидно, верно для окрестности $V = P_n$.

Таким образом, в V множество общих нулей всех функций, составляющих семейство $\mathscr{G}$, совпадает с множеством общих нулей некоторого конечного множества функций, принадлежащих $\mathscr{G}$. Следовательно, прежде данное определение аналитического множества (определение 4 из п. 6) эквивалентно следующему определению.

Определение 7. *Аналитическим множеством в открытом множестве $U \subset \mathbf{C}^m$ называется множе-*

ство $S \subset U$, обладающее следующим свойством: для каждой точки $a \in U$ можно указать такую ее окрестность $V \subset U$ и семейство функций $\{f_i\}$, голоморфных в V, что $V \cap S = \{x \in V \mid f_i(x) = 0$ для всех $i\}$.

Определение 8. *Некоторый элемент $\mathfrak{f} \in \mathscr{H}^m$ обращается в нуль на ростке аналитического множества $\mathbf{S}$ в точке $\mathfrak{o} \in \mathbf{C}^m$, если $\mathbf{S} \subset \mathbf{S}_f$, где $\mathbf{S}_f$ — росток главного аналитического множества в точке $\mathfrak{o}$, определенного элементом $\mathfrak{f}$ ($\mathbf{S}_f = \mathbf{C}^m$, если $\mathfrak{f} = \mathbf{0}$).*

Очевидно, что множество всех $\mathfrak{f} \in \mathscr{H}^m$, обращающихся в нуль на некотором ростке аналитического множества $\mathbf{S}$ в точке $\mathfrak{o}$, составляет идеал в кольце $\mathscr{H}^m$.

Определение 9. *Идеалом, присоединенным к ростку аналитического множества $\mathbf{S}$ в точке $\mathfrak{o} \in \mathbf{C}^m$, называется идеал, состоящий из всех элементов кольца $\mathscr{H}^m$, обращающихся в нуль на $\mathbf{S}$. Он обозначается через $I(\mathbf{S})$.*

Например, $I(\mathbf{C}^m) = \{\mathbf{0}\}$, $I(\{\mathbf{0}\}) = \mathscr{H}^m$, $I(\varnothing) = \mathscr{H}^m$.

Из определения присоединенного идеала непосредственно вытекает

Предложение 2. *Пусть $\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$ — ростки аналитических множеств в точке $\mathfrak{o} \in \mathbf{C}^m$. Тогда* (a) *$\mathbf{S} \subset \mathbf{T}$ тогда и только тогда, когда $I(\mathbf{T}) \subset I(\mathbf{S})$ (следовательно, $\mathbf{S} = \mathbf{T}$ тогда и только тогда, когда $I(\mathbf{S}) = I(\mathbf{T})$);* (b) *$I(\mathbf{S} \cup \mathbf{T}) = I(\mathbf{S}) \cap I(\mathbf{T})$.*

Предложение 3. *Пусть $\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$ — ростки аналитических множеств в точке $\mathfrak{o} \in \mathbf{C}^m$. Тогда* (a) *росток $\mathbf{S}$ неприводим тогда и только тогда, когда идеал $I(\mathbf{S})$ является простым;* (b) *ростком аналитического множества в точке $\mathfrak{o}$, определяемым идеалом $I(\mathbf{S})$ (как в следствии 2 из теоремы 7), является росток $\mathbf{S}$, и любой идеал кольца $\mathscr{H}^m$, определяющий росток $\mathbf{S}$, содержится в идеале $I(\mathbf{S})$.*

Доказательство. (a) Предположим, что идеал $I(\mathbf{S})$ не является простым. Тогда существуют такие $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in \mathscr{H}^m$, $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \notin I(\mathbf{S})$, что $\mathfrak{f}\mathfrak{g} \in I(\mathbf{S})$. Пусть $\mathbf{S}' = \mathbf{S} \cap \mathbf{S}_f$, $\mathbf{S}'' = \mathbf{S} \cap \mathbf{S}_g$. Поскольку $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \notin I(\mathbf{S})$, $\mathbf{S}'$ и $\mathbf{S}''$ оба отличны от $\mathbf{S}$. Далее $\mathbf{S}' \cup \mathbf{S}'' = \mathbf{S} \cap (\mathbf{S}_f \cup \mathbf{S}_g) = \mathbf{S} \cap \mathbf{S}_{fg} = \mathbf{S}$, так как $\mathfrak{f}\mathfrak{g} \in I(\mathbf{S})$. Таким

образом, если идеал $I(\mathbf{S})$ не является простым, то росток $\mathbf{S}$ приводим.

Обратно, предположим, что росток $\mathbf{S}$ приводим: $\mathbf{S}=\mathbf{S}'\cup\mathbf{S}''$, где $\mathbf{S}'$ и $\mathbf{S}''$ — ростки аналитических множеств в точке $\mathfrak{o}$, оба отличные от $\mathbf{S}$. Тогда существуют такие ростки $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_r$ (соответственно $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_s) \in \mathscr{H}^m$, что $\mathbf{S}'=\bigcap_{i=1}^{r}\mathbf{S}_{f_i}$ $\left(\text{соответственно } \mathbf{S}''=\bigcap_{j=1}^{s}\mathbf{S}_{g_j}\right)$. Так как $\mathbf{S}'\subset\mathbf{S}$, $\mathbf{S}''\subset\mathbf{S}$, то существуют такой индекс i_0, $1\leqslant i_0\leqslant r$, что $\mathbf{f}_{i_0}\notin I(\mathbf{S})$, и такой индекс j_0, $1\leqslant j_0\leqslant s$, что $\mathbf{g}_{j_0}\notin I(\mathbf{S})$. Далее, так как $\mathbf{S}=\mathbf{S}'\cup\mathbf{S}''=\bigcap_{i,j}\mathbf{S}_{f_i g_j}$, то, в частности, $\mathbf{f}_{i_0}\mathbf{g}_{j_0}\in I(\mathbf{S})$. Таким образом, если росток $\mathbf{S}$ приводим, то идеал $I(\mathbf{S})$ не является простым. Утверждение (a) доказано.

(b) Предположим, что ростки $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_p \in I(\mathbf{S})$ порождают идеал $I(\mathbf{S})$ и $\mathbf{T}=\mathbf{S}_{g_1}\cap\ldots\cap\mathbf{S}_{g_p}$ — росток аналитического множества в точке $\mathfrak{o}$, определяемый идеалом $I(\mathbf{S})$. Очевидно, что $\mathbf{S}\subset\mathbf{T}$. Однако $I(\mathbf{S})\subset I(\mathbf{T})$, так как ростки $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_p$ обращаются в нуль на $\mathbf{T}$ (по определению ростка $\mathbf{T}$) и порождают идеал $I(\mathbf{S})$. Следовательно (согласно предложению 2 (a)), $\mathbf{T}\subset\mathbf{S}$, т. е. $\mathbf{S}=\mathbf{T}$. Таким образом, идеал $I(\mathbf{S})$ определяет росток $\mathbf{S}$. Наконец из определений ясно, что каждый идеал, определяющий росток $\mathbf{S}$, содержится в $I(\mathbf{S})$.

Можно получить еще другое следствие из теоремы 7 (мы пользуемся только тем, что $\mathscr{H}^m$ — нётерово кольцо).

Следствие 4. *Каждый росток аналитического множества (в некоторой точке пространства C^m) есть конечное объединение неприводимых ростков; эти неприводимые ростки однозначно определяются данным ростком, если потребовать, чтобы ни один из них не содержался в объединении остальных.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{S}$ — росток аналитического множества в точке $\mathfrak{o}\in C^m$. Покажем прежде всего, что $\mathbf{S}$ — конечное объединение неприводимых ростков аналитических множеств в точке $\mathfrak{o}$. Допустим, что это не так. Тогда, в частности, сам росток $\mathbf{S}$ приводим; пусть $\mathbf{S}=\mathbf{S}_1\cup\mathbf{S}_2$, где $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ — ростки аналитических множеств в точке $\mathfrak{o}$,

отличные от $\mathbf{S}$. Далее, в силу нашего допущения, по крайней мере один из ростков $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, скажем $\mathbf{S}_1$, не является конечным объединением неприводимых ростков. Повторяя это рассуждение, мы получим бесконечную нисходящую последовательность ростков аналитических множеств в точке $\mathfrak{o}$: $\mathbf{S} \supsetneqq \mathbf{S}_1 \supsetneqq \mathbf{S}_3 \supsetneqq \ldots \supsetneqq \mathbf{S}_{2n+1} \supset \ldots$. Согласно предложению 2 (a), соответствующая последовательность присоединенных идеалов имеет вид $I(\mathbf{S}) \subsetneqq I(\mathbf{S}_1) \subsetneqq I(\mathbf{S}_3) \subsetneqq \ldots \subsetneqq I(\mathbf{S}_{2n+1}) \subsetneqq \ldots$. Но этот результат противоречит тому, что $\mathscr{H}^m$ — нётерово кольцо (п. 2 (d)). Следовательно, $\mathbf{S}$ — конечное объединение неприводимых ростков $\mathbf{S}_i$, $1 \leqslant i \leqslant p$. После исключения отсюда (в случае надобности) некоторых из них в этом объединении не будет ростков, содержащихся в объединении остальных ростков $\mathbf{S}_i$.

Теперь предположим, что $\mathbf{S} = \bigcup\limits_j \mathbf{S}'_j$, $j = 1, \ldots, q$, где $\mathbf{S}'_j$ — неприводимые ростки, причем ни один из них не содержится в объединении остальных. Мы покажем, что каждый росток $\mathbf{S}'_j$ совпадает с одним из $\mathbf{S}_i$. Действительно,

$$\mathbf{S}'_j = \mathbf{S}'_j \cap \mathbf{S} = \mathbf{S}'_j \cap \left(\bigcup_{i=1}^{p} \mathbf{S}_i\right) = \bigcup_{i=1}^{p} (\mathbf{S}'_j \cap \mathbf{S}_i).$$

Так как росток $\mathbf{S}'_j$ неприводим, то существует по крайней мере один такой индекс i, $1 \leqslant i \leqslant p$, что $\mathbf{S}'_j = \mathbf{S}'_j \cap \mathbf{S}_i$, т. е. $\mathbf{S}'_j \subset \mathbf{S}_i$. Рассуждая таким же образом для ростка $\mathbf{S}_i$, мы найдем, что $\mathbf{S}_i \subset \mathbf{S}'_{j'}$, где j' — некоторый индекс, $1 \leqslant j' \leqslant q$. Итак, $\mathbf{S}'_j \subset \mathbf{S}_i \subset \mathbf{S}'_{j'}$. Но $\mathbf{S}'_j \not\subset \mathbf{S}'_{j'}$ при $j' \neq j$, поэтому $\mathbf{S}'_j = \mathbf{S}_i$. Таким образом, каждый из ростков $\mathbf{S}'_j$ есть один из ростков $\mathbf{S}_i$ и наоборот, что и требовалось доказать.

Однозначно определяемые неприводимые ростки, объединением которых является росток $\mathbf{S}$, называются его *неприводимыми компонентами*.

Замечание. Если $\mathbf{S} \subset \mathbf{T}$ и росток $\mathbf{S}$ неприводим, то $\mathbf{S}$ содержится по крайней мере в одной неприводимой компоненте ростка $\mathbf{T}$.

Глава III

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МНОЖЕСТВА: ЛОКАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ

1. Теорема Гартогса о непрерывности и теорема Леви о выпуклости. Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве $U \subset \mathbb{C}^m$. Легко видеть, что внутренние точки S в U образуют одновременно открытое и замкнутое подмножество U. В частности, если множество U связно, то множество S нигде не плотно в U тогда (и только тогда), когда $S \neq U$.

Теорема 1. *Пусть $U \subset \mathbb{C}^m$ — связное открытое множество, S — аналитическое множество в U, $S \neq U$. Тогда множество $U - S$ связно.*

Доказательство. Мы можем принять $m \geqslant 2$, $S \neq \varnothing$. Допустим, что множество $U - S$, вопреки нашему утверждению, несвязно. Пусть $U - S = U_0 \cup U_1$, где U_0, U_1 — непересекающиеся непустые открытые подмножества $U - S$. Тогда $\bar{U}_0 \cup \bar{U}_1 = \overline{U - S} = U$ (все замыкания берутся по отношению к множеству U), поскольку, как замечено выше, множество $U - S$ плотно в U. По условию, множество U связно, поэтому $\bar{U}_0 \cap \bar{U}_1 \neq \varnothing$. Пусть $a \in \bar{U}_0 \cap \bar{U}_1$. Тогда $a \in S$, так как $U_0 \cap \bar{U}_1 = \bar{U}_0 \cap U_1 = \varnothing$ (множества U_0, U_1 открыты в U). Теперь предположим, что справедливо следующее утверждение: *каждая точка $a \in S$ имеет такую открытую связную окрестность $V \subset U$, что множество $V \cap {}^cS$ связно* [1]). Тогда мы приходим к противоречию: пусть точка a принадлежит $\bar{U}_0 \cap \bar{U}_1$; тогда, с одной стороны, $V \cap U_0$, $V \cap U_1$ — непустые непересекающиеся открытые множества, а с другой стороны, $V \cap {}^cS = (V \cap U_0) \cup (V \cap U_1)$. Таким образом, теорема будет доказана, если мы установим справедливость утверждения.

---

[1]) Символом ${}^cS$ обозначается дополнение к S в U. — *Прим. ред.*

Обратимся к его доказательству. Пусть $a \in S$ и $P \subset U$ — такой открытый полицилиндр с центром в точке a, что $P \cap S = \{x \in P \mid f_0(x) = \ldots = f_q(x) = 0\}$, где $f_1, \ldots, f_q$ — голоморфные функции в P. Поскольку S нигде не плотно в P, можно считать, что ни одна из функций f_j не равна нулю тождественно в P.

Пусть $x_0 \in (P \cap {}^cS)$ и $f_0(x_0) \neq 0$ (по крайней мере одна из функций f_i должна быть отличной от нуля в точке x_0; пусть ею является $f_0(x)$). Возьмем еще точку $x \in (P \cap {}^cS)$, $x \neq x_0$. Обозначим через L комплексную прямую в $\mathbb{C}^m$, соединяющую точки x_0 и x, и положим $L_0 = P \cap L$. Тогда множество L_0 связно и $f_0 \mid L_0 \not\equiv 0$, так как $f_0(x_0) \neq 0$. Следовательно, точки x_0 и x могут быть соединены на L_0 дугой, на которой $f_0 \neq 0$, за возможным исключением самой точки x. Тем самым доказана связность множества $P \cap {}^cS$ и одновременно наша теорема.

Следствие. *Пусть U — связное открытое множество в $\mathbb{C}^m$ и f, g — функции, голоморфные в U, причем $f = g$ на множестве $S \subset U$. Тогда, если существует такое открытое связное множество $V \subset U$, что $V \cap {}^cS$ несвязно, то $f \equiv g$ на U.*

Доказательство. Пусть A — множество нулей функции $f - g$ в U; допустим, что, вопреки нашему утверждению, $A \neq U$. Тогда, согласно теореме 1, множество $V \cap {}^cA$ связно; далее, $V \cap {}^cA$ плотно в V. Следовательно, множество $V \cap {}^cS$, которое содержит множество $V \cap {}^cA$, должно быть связным. Поэтому, если $V \cap {}^cS$ несвязно, то $A = U$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Пусть $U \subset \mathbb{C}^m$ — связное открытое множество, S — аналитическое множество в U, $S \neq U$. Тогда* (a) *если функция h голоморфна на $U - S$ и ограничена в окрестности каждой точки S (точнее предполагается, что каждая точка $a \in S$ имеет такую окрестность $V \subset U$, что функция $h \mid V \cap {}^cS$ ограничена), то она может быть единственным образом голоморфно продолжена на все множество U.* (b) *Если для каждой точки $a \in S$ росток $\mathbf{S}_a$ не содержит никакого ростка главного аналитического множества (отличного от пустого) в точке a, то каждая голоморфная функция h на $U - S$ может быть и единственным образом голо-*

морфно продолжена на все множество U (в случае (b) *необходимо должно быть $m \geqslant 2$, если $S \neq \varnothing$).*

Доказательство. В обоих случаях единственность голоморфного продолжения h на U очевидна, поскольку множество U связно. Поэтому достаточно доказать, что каждая точка $a \in S$ имеет такую окрестность $P (\subset U)$, что функция $h \mid P \cap {}^cS$ может быть продолжена голоморфно на P.

Рассмотрим произвольную точку $a \in S$ и условимся считать ее началом координат в пространстве $\mathbf{C}^m$, т. е. положим $a = \mathfrak{o}$. Пусть $V \subset U$ — такая окрестность точки $\mathfrak{o}$, что $V \cap S = \{x \in V \mid f_j(x) = 0,\ j = 0, 1, \ldots, q\}$. Здесь $\{f_j\}$ — некоторое конечное множество функций, голоморфных в V. Так как множество S нигде не плотно в U, мы можем предположить, что ни одна из этих функций не равна в V тождественно нулю. Поскольку $\mathfrak{o} \in S$, все $f_j(\mathfrak{o}) = 0$. Следовательно, в силу подготовительной теоремы Вейерштрасса, можно найти: (I) базис векторов в пространстве $\mathbf{C}^m$ и открытый полицилиндр $P = \{(x', x_m) \in \mathbf{C}^m \mid x' \in P', |x_m| < \rho\}$ с центром в точке $\mathfrak{o}$, причем $\bar{P} \subset V$; (II) отмеченные псевдополиномы $\varphi_0, \ldots, \varphi_q$ по x_m с коэффициентами, являющимися голоморфными функциями x' в P', такие, что $\varphi_j(x', x_m) \neq 0$ при $x' \in P'$, $|x_m| = \rho$ $(0 \leqslant j \leqslant q)$ и $\bar{P} \cap S = \{x \in \bar{P} \mid \varphi_j(x) = 0,\ 0 \leqslant j \leqslant q\}$. В частности, если $|x_m| = \rho$, $x' \in P'$, то $(x', x_m) \in V \cap {}^cS$. Поэтому, если γ — положительно ориентированная окружность $\{|t| = \rho\} \subset \mathbf{C}$ и $x = (x', x_m) \in P$, то интеграл

$$h^*(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h(x', t)}{t - x_m}\, dt$$

определяет функцию, голоморфную в P. Мы покажем, что при выполнении условий (a) или (b) $h^* = h$ на $P \cap {}^cS$; тем самым теорема 2 будет доказана.

(a) Возьмем произвольную точку $x' \in P'$. Тогда существует только конечное множество таких точек круга $|t| < \rho$, что $(x', t) \in S$, и не существует ни одной точки $(x', t) \in S$ при $|t| = \rho$ (так как все соответствующие значения t являются корнями псевдополинома $\varphi_0(x', t)$). Следовательно, соответствие $t \to h(x', t)$ определяет голоморфную функцию t при $|t| \leqslant \rho$, за исключением некоторого конечного множества точек круга $|t| < \rho$, причем эта функция ограничена в окрестностях исключительных точек. В силу

классической теоремы Римана об устранимых особенностях, соответствие $t \to h^*(x', t)$ является единственным голоморфным продолжением функции $t \to h(x', t)$ на весь круг $|t| < \rho$. Итак, для каждой точки $x' \in P'$ имеет место равенство $h^*(x', t) = h(x', t)$ при $|t| < \rho$ и $(x', t) \notin S$, что и требовалось доказать.

(b) В этом случае доказательство ведется совершенно другим способом. Пусть $\varphi_0 = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_n$ — однозначно определяемое разложение φ_0 на сомножители, являющиеся отмеченными неприводимыми полиномами из кольца $\mathscr{H}^{m-1}[x_m]$. Если полицилиндр P' достаточно мал, то существуют отмеченные псевдополиномы $P_1, \ldots, P_n$ по x_m с коэффициентами, являющимися голоморфными функциями x' в P', порождающие ростки $\mathbf{P}_i$ в $\mathfrak{o}$, $0 \leqslant i \leqslant h$. По условию, $\mathbf{S}_0$ не содержит непустых ростков главных аналитических множеств в $\mathfrak{o}$. Поэтому ни один из ростков $\mathbf{P}_i$ не может быть делителем всех ростков φ_j, $j = 1, \ldots, q$ (в кольце $\mathscr{H}^m$, а следовательно, и) в кольце $\mathscr{H}^{m-1}[x_m]$. Для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, мы можем найти такой индекс j_i, $1 \leqslant j_i \leqslant q$, что росток $\mathbf{P}_i$ не будет делителем ростка φ_{j_i}. Поскольку $\mathbf{P}_i$ неприводим, это означает, что ростки $\mathbf{P}_i$ и φ_{j_i} — взаимно простые в кольце $\mathscr{H}^{m-1}[x_m]$. Так как $\mathscr{H}^{m-1}$ — факториальное кольцо, то $\rho(\mathbf{P}_i, \varphi_{j_i}) \neq 0$, где $\rho(\mathbf{P}_i, \varphi_{j_i})$ — результант Сильвестра $\mathbf{P}_i$ и φ_{j_i}, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Обозначим через R_i результант Сильвестра функций φ_{j_i} и P_j (рассматриваемых как полиномы над кольцом голоморфных функций в P'); тогда R_i — голоморфная функция в P'; $R_i \not\equiv 0$ в P', так как росток, порожденный R_i в точке $\mathfrak{o}'$, а именно $\rho(\mathbf{P}_i, \varphi_{j_i})$, не равен $\mathbf{0}$. Следовательно, $W' = \{x' \in P' \mid R_i(x') \neq 0, \quad i = 1, \ldots, n\}$ — непустое открытое подмножество полицилиндра P'. Пусть $W = \{(x', x_m) \in P \mid x' \in W'\}$. Мы утверждаем, что $W \cap S = \varnothing$. Допустим, напротив, что существует точка $x = (x', x_m) \in W \cap S$. Тогда $\varphi_j(x) = 0$, $0 \leqslant j \leqslant q$, и, в частности, $P_i(x) = 0$ для по крайней мере одного i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Но если $P_i(x) = 0$ и $\varphi_{j_i}(x) = 0$, то $R_i(x') = 0$, в противоречии с тем, что $x' \in W'$.

Теперь очевидно, что $h^* \equiv h$ на W: для каждой точки $x' \in W'$ соответствие $t \to h(x', t)$ определяет голоморф-

ную функцию в круге $|t| \leqslant \rho$, и применима интегральная формула Коши. Но, согласно теореме 1, множество $P \cap {}^cS$ связно и голоморфные функции h и h^* тождественно равны на непустом открытом подмножестве W этого множества. Следовательно, $h \equiv h^*$ на $P \cap {}^cS$, что и требовалось доказать.

Замечание. Легко усмотреть, используя теорему 6 из гл. II, что предположение относительно множества S, сделанное выше в пункте (b), эквивалентно следующему условию: в каждой точке $a \in S$ ростки $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_q \in \mathscr{H}_a^m - \{\mathbf{0}\}$, выбранные так, что $\mathbf{S}_a = \mathbf{S}_{f_1} \cap \ldots \cap \mathbf{S}_{f_q}$, должны иметь $\mathbf{1}$ своим общим наибольшим делителем. Отсюда вытекает

Следствие. *Пусть $U \subset \mathbb{C}^m$ — открытое множество, $S \subset U$ — совокупность точек неопределенности некоторой мероморфной функции на U. Тогда каждая функция, заданная на $U - S$ и голоморфная на этом множестве, может быть голоморфно продолжена и притом единственным способом на все множество U.*

Теорема 2 (b) является иллюстрацией (принадлежащей Гартогсу) следующего важного предложения (его доказательство не отличается от последней части доказательства теоремы 2, с заменой в нем $U - S$ на U).

Теорема Гартогса о непрерывности. *Пусть $P = \{(x', x_m) \in \mathbb{C}^m \mid x' \in P', |x_m| < \rho\}$ — открытый полицилиндр ($m \geqslant 2$) с центром в точке $\mathfrak{o}$ и U — открытое множество, обладающее следующими свойствами:*

(I) $\{x \in P \mid x' \in P', |x_m| = \rho\} \subset U$;

(II) *существует такое непустое открытое множество $W' \subset P'$, что $\{x \in P \mid x' \in W', |x_m| < \rho\} \subset U$;*

(III) *множество $P \cap U$ связно.*

Тогда каждая функция, голоморфная на U, может быть голоморфно продолжена и притом единственным образом на множество $P \cup U$.

Другой классической иллюстрацией предыдущей теоремы является

Теорема Леви о выпуклости. *Пусть φ — заданная в некоторой открытой окрестности ω начала координат $\mathfrak{o} \in \mathbb{C}^m$ ($m \geqslant 2$) дважды непрерывно дифференцируемая вещественнозначная функция; используя пере-*

менные x_j, $\bar{x}_j$ *вместо* $\operatorname{Re} x_j$, $\operatorname{Im} x_j$ $(j=1, \ldots, m)$, *положим*

$$f(x)=\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\mathfrak{o})\, x_j;$$

$$g(x)=\frac{1}{2} \sum_{j,\, k=1}^{m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}(\mathfrak{o})\, x_j x_k;$$

$$h(x)=\frac{1}{2} \sum_{j,\, k=1}^{m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial \bar{x}_k}(\mathfrak{o})\, x_j \bar{x}_k$$

и предположим, что $f(x) \not\equiv 0$, $\varphi(\mathfrak{o})=0$. *Тогда*

(a) *Если* $f(x)=0$ *и* $h(x)>0$ *хотя бы в одной точке* x, *то для каждой открытой окрестности* $U \subset \omega$ *начала* $\mathfrak{o}$ *можно указать такую окрестность* $V \subset U$ *этой точки* $\mathfrak{o}$, *что всякая функция, голоморфная в* $U_0=\{x \in U \mid \varphi(x)>0\}$, *имеет голоморфное продолжение (и притом единственное) на* $U_0 \cup V$.

(b) *Обратно, если подобная окрестность* V *существует для каждой окрестности* U, *то существует по крайней мере одна такая точка* $x \neq \mathfrak{o}$, *что* $f(x)=0$, $h(x) \geqslant 0$.

Доказательство. Положим, как всегда, $x=(x', x_m)$ и $\|x\|^2=\sum_{j=1}^{m}|x_j|^2$. Пусть $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\mathfrak{o}) \neq 0$. Если мы перейдем от переменных x_j, $\bar{x}_j$ к переменным $x_1'=f(x)+g(x)$, $x_j'=x_j$ для $j=2, \ldots, m$, то функция $f(x)$ заменится на x_1', а функция $g(x)$ — на 0. Поэтому мы можем положить $f(x) \equiv x_1$, $g(x) \equiv 0$. Тогда

$$\varphi(x)=2 \operatorname{Re} x_1+h(x)+o(\|x\|^2) \text{ при } x \to \mathfrak{o}. \tag{1}$$

Отсюда вытекает, что вблизи точки $\mathfrak{o}$ функция $\varphi(x)$ положительна там и только там, где $\operatorname{Re} x_1>\psi(x)$; здесь $\psi(x)$ — функция, обращающаяся в точке $\mathfrak{o}$ в нуль вместе со своими первыми производными. Следовательно, для достаточно малого полицилиндра P с центром в точке $\mathfrak{o}$ множество $\{x \in P \mid \varphi(x)>0\}$ связно.

(a) Положим $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_m \partial \bar{x}_m}(\mathfrak{o})=\alpha>0$ или $h(\mathfrak{o}', x_m)=\alpha|x_m|^2$.

Мы предположим, что U — настолько малая окрестность точки $\mathfrak{o}$, что в каждой точке $x \in U$ из соотношения (1) вытекает неравенство

$$\varphi(x) \geqslant \varphi_1(x) = 2\operatorname{Re} x_1 + h(x) - \frac{\alpha}{3}\|x\|^2. \tag{2}$$

Пусть $U_1 = \{x \in U \mid \varphi_1(x) > 0\}$, $S = \left\{x \in U \mid 2\operatorname{Re} x_1 + h(x) - \frac{\alpha}{3}\|x\|^2 \leqslant 0\right\}$, P — такой открытый полицилиндр с центром в точке $\mathfrak{o}$ и радиусами r_j, что (I) $\overline{P} \subset U$, пересечения $P \cap U_0$, $P \cap U_1$ связны; (II) $\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial \overline{x}_m}(\mathfrak{o})\right| r_m \leqslant 1$; (III) если $x' \in P'$, $|x_m| = r_m$, то $h(x) > \frac{2\alpha}{3}\|x\|^2$; (IV) $r_1 < \frac{\alpha}{6} r_m^2$.

Тогда при $x' \in P'$, $|x_m| = r_m$ имеем

$$2\operatorname{Re} x_1 + h(x) - \frac{\alpha}{3}\|x\|^2 > -2r_1 + \frac{\alpha}{3}\|x\|^2 \geqslant$$
$$\geqslant -2r_1 + \frac{\alpha}{3} r_m^2 \geqslant 0,$$

т. е. $x \notin S$, что составляет условие (I) теоремы Гартогса. С другой стороны, если $x_1 = t > 0$, $x_2 = \ldots = x_{m-1} = 0$, $|x_m| \leqslant r_m$, то

$$2\operatorname{Re} x_1 + h(x) - \frac{\alpha}{3}\|x\|^2 = \frac{2\alpha}{3}|\overline{x}_m|^2 + \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial \overline{x}_1}(\mathfrak{o}) - \frac{\alpha}{3}\right]t^2 +$$
$$+ 2t\operatorname{Re}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial \overline{x}_m}(\mathfrak{o})\overline{x}_m\right] \geqslant t + \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial \overline{x}_1}(\mathfrak{o}) - \frac{\alpha}{3}\right]t^2$$

(в силу условия (II), наложенного на полицилиндр P). Следовательно, t, $0 < t < r_1$, можно выбрать так, что при $x_1 = t$, $x_2 = \ldots = x_{m-1} = 0$, $|x_m| \leqslant r_m$ точка x не принадлежит S. Поэтому существует такое открытое непустое множество $W' \subset P'$, что $\{x \in P \mid x' \in W', |x_m| \leqslant r_m\} \subset U_1$. Таким образом, множество U_1 удовлетворяет требованиям теоремы Гартогса. Итак, если функция f голоморфна на U_0, то ограничение $f|U_1$ может быть продолжено на $P \cup U_1$, а следовательно, и на $P \cup U_0$, поскольку пересечение $P \cap U_0$ связно.

(b) Пусть дано число $\alpha > 0$. Нам достаточно показать, что существует хотя бы одна точка $x \neq \mathfrak{o}$, для которой $h(x) \geqslant -\alpha\|x\|^2$, $x_1 = 0$. Допустим противное, т. е. пред-

положим, что $h(x) < -\alpha \|x\|^2$ при $x_1 = 0$. Тогда, в силу (1), существует такая окрестность $U \subset \omega$ точки 0, что $\varphi(x) \leqslant 0$, если $x_1 = 0$ и $x \in U$. В этом случае функция $\frac{1}{x_1}$ была бы голоморфна в $\{x \in U | \varphi(x) > 0\}$ и могла бы быть продолжена в некоторую окрестность точки 0, что, очевидно, невозможно.

2. Регулярные точки аналитического множества.

Определение 1 (а). *Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве $U \subset \mathbb{C}^m$. Точка $a \in S$ называется регулярной точкой S (или S регулярно в a), если существует такая окрестность $V \subset U$ точки a и такое взаимно однозначное биголоморфное отображение $f: V \to V' \subset \mathbb{C}^m$, что $f(V \cap S) = V' \cap L$, где L — аффинное подмногообразие в $\mathbb{C}^m$ размерности k, $0 \leqslant k \leqslant m$.*

Замечание 1. Пусть $a \in S$ — регулярная точка S. Тогда размерность k подмногообразия L определяется множеством S однозначно. Действительно, пусть f_1 — биголоморфное отображение открытой окрестности $V_1 (\subset U)$ точки a на открытое множество $V_1' \subset \mathbb{C}^m$, причем $f_1: (V_1 \cap S) \to (V_1' \cap L_1)$, где L_1 есть k_1-мерное аффинное подмногообразие в $\mathbb{C}^m$. Пусть $W = V \cap V_1$. Тогда отображение $g = f_1 \circ f^{-1}: f(W) \to f_1(W)$ является взаимно однозначным, сюръективным и биголоморфным. Следовательно, якобиан этого отображения отличен от нуля в точке $f(a)$. Из включения $g(f(W) \cap L) \subset L_1$ легко вывести, что $k \leqslant k_1$. Применяя аналогичное рассуждение к отображению g^{-1}, мы покажем, что $k_1 \leqslant k$. Итак, $k_1 = k$, и мы можем прибавить к определению 1 (а)

Определение 1 (а′). *Размерностью S в точке a называется размерность аффинного многообразия L.*

Замечание 2. Пусть a — регулярная точка S, k — размерность S в точке a, f' — аффинное отображение, касательное к отображению f в точке a. Тогда аффинное многообразие $f'^{-1}(L)$ однозначно определяется множеством S. Это многообразие содержит точку a и имеет размерность k. Мы будем называть $f'^{-1}(L)$ *аффинным многообразием, касательным к S в точке a.*

Замечание 3. Пусть S, S' — аналитические множества соответственно в открытых множествах U, $U' \subset \mathbb{C}^m$ и $a \in S \cap S'$. Предположим, что $S_a = S_a'$. Очевидно, что точка a является

регулярной точкой S и S имеет размерность k в точке a тогда и только тогда, когда a — регулярная точка S' и S' имеет размерность k в точке a.

Определение 1 (b). *Росток аналитического множества в точке $a \in C^m$ называется регулярным ростком размерности k, если a — регулярная точка некоторого аналитического множества, порождающего данный росток в точке a, и k — размерность этого множества в точке a.*

В силу замечания 3, если $\mathbf{S}$ — регулярный росток размерности k в точке a, то a — регулярная точка каждого аналитического множества, порождающего росток $\mathbf{S}$ в точке a (все эти множества имеют размерность k в точке a). Поскольку аффинное подмногообразие в C^m порождает неприводимый росток в каждой точке C^m, легко видеть, что регулярный росток всегда неприводим.

Пример. Пусть аналитическое множество S определено $m-k$ уравнениями $x_j = g_j(x_1, \ldots, x_k)$, $k+1 \leqslant j \leqslant m$, где g_j — голоморфные функции в проекции U на подпространство пространства C^m, образованное первыми k элементами его базиса. Тогда каждая точка S является его регулярной точкой и S имеет в ней размерность k. Действительно, формулы

$$x'_j = x_j \ (1 \leqslant j \leqslant k), \quad x'_j = x_j - g_j(x_1, \ldots, x_k) \ (k+1 \leqslant j \leqslant m)$$

определяют такое взаимно однозначное биголоморфное отображение f открытого множества U на открытое множество U', что $f(S) = U' \cap \{(x'_{k+1}, \ldots, x'_m) \subset C^{m-k} \mid x'_{k+1} = \ldots = x'_m = 0\}$.

Из определений 1 (a) и 1 (a') непосредственно вытекает

Предложение 1. *Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве $U \subset C^m$, F — взаимно однозначное биголоморфное отображение U на открытое множество $F(U) \subset C^m$. Тогда точка $a \in S$ является регулярной точкой S и множество S имеет в точке a размерность k в том и только в том случае, если $F(a)$ — регулярная точка $F(S)$ (очевидно, что $F(S)$ — аналитическое множество в $F(U)$) и $F(S)$ имеет в точке $F(a)$ размерность k.*

Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве $U \subset C^m$ и S^* — множество регулярных точек S.

Предложение 2. *Множество S^* является открытым локально связным подмножеством в S. Размерность S постоянна на каждой связной компоненте S^* (топологии на S и S^* индуцируются топологией U).*

Доказательство. Пусть $a \in S^*$. Из определения 1 (а) вытекает, что открытая окрестность $V \cap S$ точки a на S состоит целиком из регулярных точек; во всех этих точках множество S имеет одну и ту же размерность. Поскольку множество $V \cap S$ гомеоморфно $V' \cap L$, оно является локально связным, что и требовалось доказать.

Замечание. Ниже (в п. 2, гл. IV) будет показано, что множество S^* плотно в S.

Предложение 3. *Пусть $b \in S^*$. Тогда*

(а) *если h — голоморфная функция на U и $\mathbf{h}_b$ обращается в нуль на $\mathbf{S}_b$, то функция h обращается в нуль во всех точках связной компоненты множества S^*, содержащей точку b;*

(b) *если S' — аналитическое множество в U и $\mathbf{S}'_b \supset \mathbf{S}_b$, то связная компонента множества S^*, содержащая точку b, принадлежит множеству S'.*

Доказательство. Пусть h — голоморфная функция на U и ее росток $\mathbf{h}_b$ равен нулю на $\mathbf{S}_b$ (соответственно пусть S' — аналитическое множество в U и $\mathbf{S}'_b \supset \mathbf{S}_b$).

Пусть $X = \{x \in S^* \mid \mathbf{h}_x$ обращается в нуль на $\mathbf{S}_x$ (соответственно $\mathbf{S}'_x \supset \mathbf{S}_x)\}$. Очевидно, что X — открытое подмножество множества S^*. Предложение 3 будет доказано, если мы покажем, что X замкнуто в S^*. Итак, пусть точка $a \in S^*$ принадлежит замыканию множества X. Мы должны показать, что $a \in X$. Мы можем предположить, что размерность k множества S в точке a больше нуля.

(а) Мы пользуемся обозначениями определения 1 (а). Пусть $P' \subset V'$ — открытый полицилиндр, содержащий точку $f(a)$, и $L_0 = P' \cap L$. Тогда $f^{-1}(L_0)$ — открытая окрестность точки a в S^*; она должна содержать некоторую точку $x \in X$. Далее заметим, что L_0 является связным открытым множеством в $\mathbf{C}^k$ и $g = h_0 \circ f^{-1}$ — такая голоморфная функция на L_0, что $\mathbf{g}_{f(x)} = \mathbf{0}$. Следовательно, $g \equiv 0$ на L_0, т. е. $h \mid f^{-1}(L_0) \equiv 0$. Итак, $\mathbf{h}_a$ обращается в нуль на $\mathbf{S}_a$, что и требовалось доказать.

(b) Пусть V — такая открытая окрестность точки a в U, что пересечение $V \cap S'$ совпадает с множеством общих нулей в V функций $h^{(1)}, \ldots, h^{(q)}$, голоморфных в V. Множество S^* является локально связным открытым подмножеством множества S. Поэтому мы можем без ущерба для общности рассуждения принять, что $V \cap S \subset S^*$ и что множество $V \cap S$ связно. Это множество должно содержать некоторую точку $x \in X$. Отсюда вытекает, что все ростки $\mathfrak{h}_x^{(j)}$ $(1 \leqslant j \leqslant q)$ обращаются в нуль на $\mathfrak{S}_x$. Тогда, согласно (a), функции $h^{(j)}$ должны тождественно равняться нулю на $V \cap S$, т. е. $V \cap S \subset V \cap S'$, что и требовалось доказать.

Предложение 4. *Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве $U \subset \mathbf{C}^m$, s — открытое связное подмножество в S^*, S' — другое аналитическое множество в U, такое, что $s \cap S' \neq s$. Тогда множество $s \cap {}^cS'$ связно.*

Доказательство. Это предложение является следствием теоремы 1 из п. 1; начало нашего доказательства, по существу, совпадает с началом доказательства этой теоремы. Допустим, что, вопреки нашему утверждению, множество $s \cap {}^cS'$ несвязно; тогда $s \cap {}^cS' = s_0 \cup s_1$, где s_0, s_1 — непересекающиеся непустые открытые подмножества множества s. Далее, $\bar{s}_0 \cup \bar{s}_1 = \overline{s \cap {}^cS'} = \bar{s}$ (все замыкания берутся в s), ибо, согласно предложению 3 (b), из предположения $s \cap S' \neq s$ вытекает, что множество $s \cap {}^cS'$ плотно в s. Поскольку s связно, $\bar{s}_0 \cap \bar{s}_1 \neq \varnothing$. Пусть $a \in \bar{s}_0 \cap \bar{s}_1$ и размерность множества S в a равна $k > 0$. Так как $a \in s \subset S^*$, то существуют такое открытое множество $V \subset U$, $V \ni a$, и такое взаимно однозначное биголоморфное отображение f множества V на множество $V' \subset \mathbf{C}^m$, что $V \cap S$ связно, $V \cap S \subset s$ и $f(V \cap S) = V' \cap L$, где L — аффинное многообразие размерности k. Из того, что $V \cap S \cap S'$ — аналитическое множество в V, не совпадающее с $V \cap S$, вытекает, что $f(V \cap S \cap S')$ — аналитическое множество в V', содержащееся (но не совпадающее) в $V' \cap L$. Поскольку $f(V \cap S \cap S')$ можно рассматривать как аналитическое множество в открытом связном множестве $V' \cap L \subset \mathbf{C}^k$, множество $(V' \cap L) - f(V \cap S \cap S')$ связно (п. 1, теорема 1), а следовательно, и множество $(V \cap S) - (V \cap S \cap S') = V \cap (S \cap {}^cS')$ связно. Итак, мы пришли к выводу, что

связное подмножество множества $s \cap {}^c S'$ пересекается с множествами s_0 и s_1, что невозможно.

Замечание. Предположение о регулярности точек, рассматриваемых в предложениях 3 и 4, можно ослабить и заменить требованием неприводимости ростка $\mathbf{S}$ в этих точках. Утверждение предложения 3 (соответственно 4) остается верным для открытого связного подмножества s множества S, не являющегося связной компонентой S^* (соответственно открытым связным подмножеством S^*) при условии, что росток $\mathbf{S}_x$ неприводим для каждой точки $x \in S$. Это будет доказано в п. 3, гл. IV.

3. Локальное описание аналитического множества: выбор базиса в $\mathbf{C}^m$. Пусть $\mathbf{S}$ — росток аналитического множества в точке $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}$ — начало координат пространства $\mathbf{C}^m$. Для детального изучения $\mathbf{S}$ мы опишем свойства аналитического множества S в открытой окрестности точки $\mathfrak{o}$, порождающего росток $\mathbf{S}$ в точке $\mathfrak{o}$. Наше изложение этих вопросов отличается от принятого в литературе и принадлежащего А. Картану [3] и Реммерту — Штейну [4].

Росток аналитического множества всегда является объединением конечного множества неприводимых ростков. Поэтому мы далее рассматриваем неприводимые ростки; их присоединенными идеалами являются простые идеалы кольца $\mathscr{H}_{\mathfrak{o}}^m = \mathscr{H}^m$ (п. 8, гл. II). В дальнейшем I — всегда идеал кольца $\mathscr{H}^m$ $(m \geqslant 2)$; мы исключаем из рассмотрения тривиальные идеалы $I = \{\mathbf{0}\}$, $\mathscr{H}'^m$, $\mathscr{H}^m$, присоединенные к росткам $\mathbf{C}^m$, $\{\mathfrak{o}\}$, $\varnothing$. Для упорядоченного базиса в пространстве $\mathbf{C}^m$ мы используем обозначения: при $1 \leqslant r \leqslant m$

$\mathbf{C}^r$ — подпространство пространства $\mathbf{C}^m$, порождаемое первыми r элементами его базиса;

$\mathfrak{o}_r$ — начало координат в $\mathbf{C}^r$;

$\mathscr{H}^r$ — кольцо ростков голоморфных функций первых r координат в точке $\mathfrak{o}_r \in \mathbf{C}^r$ (рассматриваемое как подкольцо $\mathscr{H}^m$);

$I_r = I \cap \mathscr{H}^r$ (таким образом, если I — простой идеал кольца $\mathscr{H}^m$, то I_r — простой идеал кольца $\mathscr{H}^r$ для каждого номера r).

Предложение 1. *Пусть $x_1, \ldots, x_k$ — независимые линейные формы над $\mathbf{C}^m$, $1 \leqslant k \leqslant m-1$. Тогда для*

любого идеала I кольца $\mathscr{H}^m$, $I \neq \mathscr{H}^m$, следующие утверждения эквивалентны.

А. *Идеал, порожденный ростками* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ *и идеалом I в $\mathscr{H}^m$, определяет росток $\{\mathfrak{o}\}$ в точке $\mathfrak{o}$, т. е.* $\mathbf{S}_I \cap \mathbf{S}_{x_1} \cap \ldots \cap \mathbf{S}_{x_k} = \{\mathfrak{o}\}$.

А′. *Для любого (или некоторого) базиса в C^m, в котором $x_1, \ldots, x_k$ играют роль первых k координат, и любого числа r, $k < r \leqslant m$,*

A'_r: *идеал в кольце $\mathscr{H}^r$, порожденный I_r и* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$, *определяет росток $\{\mathfrak{o}_r\}$ в точке $\mathfrak{o}_r$.*

А″. *Для любого (или некоторого) базиса в C^m, в котором $x_1, \ldots, x_k$ играют роль первых k координат, и любого числа r, $k < r \leqslant m$,*

A''_r: *$\mathscr{H}^{r-1}[x_r] \cap I_r$ содержит отмеченный полином.*

Доказательство. Очевидно, что утверждения А и A'_m (для произвольного базиса в C^m) равносильны. Мы покажем, что из А″ (для некоторого базиса в C^m) вытекает А; что из A'_r (для определенного базиса в C^m, в котором $x_1, \ldots, x_k$ играют роль первых координат, и некоторого r, $k < r \leqslant m$) вытекает A''_r (для того же базиса в C^m) и вытекает A'_{r-1}, если $r > k+1$. Этим наше предложение будет доказано.

(1) *Из A'_r вытекает A''_r.* Если в нашем случае существует такая функция f, голоморфная в некоторой открытой окрестности точки $\mathfrak{o}_r$ в пространстве C^r, что $\mathbf{f} \in I_r$ и $f(\mathfrak{o}_{r-1}, x_r) \not\equiv 0$ в окрестности значения $x_r = 0$, то справедливость утверждения A''_r вытекает из подготовительной теоремы Вейерштрасса. Допустим, что подобной функции f не существует. Тогда любой росток $\mathbf{f} \in I_r$ обращается в нуль на ростке аналитического множества $\mathbf{L}_r$ в точке $\mathfrak{o}_r$, порожденном подпространством $\{x_1 = \ldots = x_{r-1} = 0\} \subset C^r$. Очевидно, что ростки $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ обращаются в нуль на $\mathbf{L}_r$. Итак, росток аналитического множества, определенный в точке $\mathfrak{o}_r$ ростками $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ и идеалом I_r, должен содержать росток $\mathbf{L}_r \supsetneqq \{\mathfrak{o}_r\}$, что противоречит A'_r.

(2) *Из A'_r вытекает A'_{r-1} $(r > k+1)$.* Предположим, что утверждение A'_r верно (для некоторого базиса), а следовательно, верно и A''_r. Пусть $r > k+1$, $\mathbf{Q}_r \in \mathscr{H}^{r-1}[x_r] \cap I_r$ —

отмеченный псевдополином степени q относительно x_r, $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n \in I_r$ — ростки, порождающие идеал I_r в кольце $\mathscr{H}^r$. Тогда мы можем найти открытый полицилиндр $\pi_r = \pi \subset \mathbf{C}^r$ с центром в точке $\mathfrak{o}_r$, обладающий следующими свойствами: (I) каждый росток $\mathbf{f}_j$ порождается в точке $\mathfrak{o}_r$ голоморфной в π функцией f_j, $1 \leqslant j \leqslant n$; (II) $\mathbf{Q}_r$ порождается в точке $\mathfrak{o}_r$ отмеченным псевдополиномом Q_r по x_r с коэффициентами, являющимися голоморфными функциями $x' = (x_1, \ldots, x_{r-1})$ в проекции $\pi' = \pi_{r-1}$ полицилиндра π на $\mathbf{C}^{r-1}$; (III) из условий $x' \in \pi'$, $Q_r(x', x_r) = 0$ вытекает, что $(x', x_r) \in \pi$; (IV) $\pi \cap \{f_1 = \ldots = f_n = 0, x_1 = \ldots = x_k = 0\} = \{\mathfrak{o}_r\}$; (V) согласно подготовительной теореме Шпэта — Картана в полицилиндре π существуют такие голоморфные функции h_j, что $f_j - h_j Q_r = u_j$ — псевдополиномы (степени $< q$) по x_r с коэффициентами, являющимися голоморфными функциями x' в π'.

Пусть $x' \neq \mathfrak{o}_{r-1}$ — точка π', у которой первые k координат равны нулю (напомним, что $r - 1 > k$), $t_1, \ldots, t_q$ — корни полинома $Q_r(x', t)$. Согласно (IV), для каждого номера s, $1 \leqslant s \leqslant q$, можно указать такой индекс $j_s (1 \leqslant j_s \leqslant n)$, что $f_{j_s}(x', t) \neq 0$, а следовательно, и $u_{j_s}(x', t) \neq 0$. Отсюда вытекает, что существует такая точка $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{C}^n$, что полиномы (относительно t) $Q_r(x', t)$ и $u_\lambda(x', t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j(x', t)$ не имеют общих корней. Действительно, подобные λ составляют открытое всюду плотное подмножество в $\mathbf{C}^n$. Поэтому $\rho_\lambda(x') = \rho(Q_r, u_\lambda)$ — результант Сильвестра Q_r и u_λ (которые рассматриваются как полиномы над кольцом голоморфных функций на π'), являющийся голоморфной функцией x' на π' для любого $\lambda \in \mathbf{C}^n$, отличен от нуля для надлежащим образом выбранных значений λ.

Так как $\mathbf{Q}_r$, $\mathbf{u}_j \in I_r$, то $\rho_\lambda \in \mathscr{H}^{r-1} \cap I_r = I_{r-1}$ для любого $\lambda \in \mathbf{C}^n$. Согласно теореме 7 (гл. II), существуют такие функции $g_1, \ldots, g_{n'}$, голоморфные в некоторой окрестности $U' \subset \pi'$ точки $\mathfrak{o}_{r-1} \in \mathbf{C}^{r-1}$, что ростки $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_{n'} \in I_{r-1}$ порождают идеал I_{r-1} и каждая функция ρ_λ оказывается в U' линейной формой от $g_1, \ldots, g_{n'}$ с коэффициентами, голоморфными в U'. Поэтому любой общий нуль функций g_i, $1 \leqslant i \leqslant n'$, является общим нулем всех функций ρ_λ, $\lambda \in \mathbf{C}^n$.

Но мы знаем, что не существует такой точки $x' \in \pi$, $x' \neq \mathfrak{o}_{r-1}$ с первыми k координатами, равными нулю, что $\rho_\lambda(x') = 0$ для всех $\lambda \in C^n$. Следовательно, ростки $\mathbf{g}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n'$, и $\mathbf{x}_j$, $1 \leqslant j \leqslant k$, вместе определяют росток аналитического множества $\{\mathfrak{o}_{r-1}\}$ в точке $\mathfrak{o}_{r-1}$. Итак, g_i порождают идеал I_{r-1}; утверждение A'_{r-1} доказано.

(3) *Из* A″ *вытекает* A. Пусть для базиса в C^m, для которого $x_1, \ldots, x_k$ служат первыми k координатами, росток $\mathbf{Q}_r \in \mathscr{H}^{r-1}[x_r] \cap I_r$ является отмеченным, π — такой открытый полицилиндр в C^m с центром в точке $\mathfrak{o}$, что $\mathbf{Q}_r$ есть росток, порожденный в точке $\mathfrak{o}_r$ отмеченным псевдополиномом Q_r по x_r с коэффициентами, голоморфными в проекции π_{r-1} полицилиндра π на C^{r-1}, $r = k+1, \ldots, m$. Пусть первые k координат точки $\xi \in \pi$ равны нулю. Тогда из равенства $Q_{k+1}(\xi) = 0$ вытекает, что $\xi_{k+1} = 0$. Применяя последовательно это рассуждение, мы установим, что из равенств $Q_{k+1}(\xi) = \ldots = Q_m(\xi) = 0$ следуют равенства $\xi_{k+1} = \ldots = \xi_m = 0$, т. е. $\xi = 0$. Итак, ростки $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$, $\mathbf{Q}_{k+1}, \ldots, \mathbf{Q}_m$ определяют росток $\{\mathfrak{o}\}$ в точке $\mathfrak{o}$. Из сказанного вытекает, что идеал, порождаемый идеалом I и ростками $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$, определяет росток $\{\mathfrak{o}\}$ в точке $\mathfrak{o}$, что и требовалось доказать.

Предложение 2. *Пусть I — идеал в кольце $\mathscr{H}^m$, причем $I \neq \{\mathbf{0}\}$ и $\operatorname{rad} I \subsetneqq \mathscr{H}'^m$. Тогда существуют k таких независимых форм $x_1, \ldots, x_k$ над C^m, $0 < k < m$, что для идеала I и этих форм справедливо утверждение* A *предложения* 1 *и утверждение*

B. *Для любого базиса в C^m, в котором $x_1, \ldots, x_k$ играют роль первых k координат, $I_k = \{\mathbf{0}\}$.*

Обратно, если для идеала I и k независимых форм над C^m, $0 < k < m$, справедливо утверждение A (соответственно B), то $I \neq \{\mathbf{0}\}$ (соответственно $\operatorname{rad} I \subsetneqq \mathscr{H}'^m$).

Доказательство. Мы покажем, что для некоторого определенного базиса в C^m утверждения A″ и B имеют место, если роль k первых координат играют $x_1, \ldots, x_k$, $0 < k < m$. Этим наше предложение будет доказано.

Так как $\{\mathbf{0}\} \neq I \subset \mathscr{H}'^m$, то существует необратимый росток $\mathbf{f} \in I$, $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$. В силу подготовительной теоремы Вейер-

штрасса, в пространстве C^m можно найти такой базис, что $\mathbf{f} \sim \mathbf{Q}_m$, где $\mathbf{Q}_m$ — отмеченный полином по последней координате базиса. Очевидно, что $\mathbf{Q}_m \in I$. По отношению к этому базису мы образуем идеал I_{m-1}. Очевидно, что $I_{m-1} \subset \mathscr{H}'^{m-1}$. Мы утверждаем, что $\operatorname{rad} I_{m-1} \subsetneqq \mathscr{H}'^{m-1}$. Допустим, что, вопреки нашему утверждению, $\operatorname{rad} I_{m-1} = \mathscr{H}'^{m-1}$. Тогда, если $q_m = d^0 Q_m$, то, как легко видеть, $x_m^{q_m} \in \operatorname{rad} I$; отсюда вытекает, что $x_m \in \operatorname{rad} I$. Но если $\operatorname{rad} I_{m-1} = \mathscr{H}'^{m-1}$ и $x_m \in \operatorname{rad} I$, то $\operatorname{rad} I = \mathscr{H}'^m$, что противоречит нашим предположениям.

Итак, или $I_{m-1} = \{\mathbf{0}\}$ (в этом случае предложение доказано с $k = m - 1$; роль первых $m - 1$ координат базиса играют $x_1, \ldots, x_{m-1}$), или $\{\mathbf{0}\} \neq I_{m-1}$, $\operatorname{rad} I_{m-1} \subsetneqq \mathscr{H}'_{m-1}$. В последнем случае $m - 1 \geqslant 2$, ибо легко видеть, что радикал любого идеала в $\mathscr{H}^1$ есть $\{\mathbf{0}\}$, $\mathscr{H}'^1$ или $\mathscr{H}^1$. Повторяя предыдущее рассуждение, мы найдем в пространстве C^{m-1} такой базис, что идеал I_{m-1} будет содержать отмеченный полином по последней координате x_{m-1} этого базиса. Этот базис в C^{m-1} и последний элемент ранее найденного базиса в C^m образуют новый базис в C^m, в котором x_m продолжает играть роль последней координаты, а $\mathbf{Q}_m$ остается отмеченным полиномом относительно x_m.

Мы рассмотрим теперь идеал I_{m-2} для нового базиса в C^m. Используя то, что $\operatorname{rad} I_{m-1} \subsetneqq \mathscr{H}'^{m-1}$, мы так же, как и выше, заключим, что $\operatorname{rad} I_{m-2} \subsetneqq \mathscr{H}'^{m-2}$. Повторяя предыдущее рассуждение $m - k$ раз $(0 < k < m)$, мы придем к заключению, указанному в нашем предложении, ибо за k форм $x_1, \ldots, x_k$ можно выбрать любые k форм, которые вместе с построенными выше формами $x_m, \ldots, x_{k+1}$ составляют в C^m систему координат.

Определение 2. *Упорядоченный базис в* C^m *называется* k*-правильным для идеала* I $(0 < k < m)$, *если его первые* k *координат удовлетворяют условию* А *предложения* 1 *и условию* В *предложения* 2.

Такой базис может существовать только, если $\{\mathbf{0}\} \neq I$, $\operatorname{rad} I \subsetneqq \mathscr{H}'^m$.

Замечания. (1) Ниже (п. 2, гл. IV) мы увидим, что если некоторый базис в C^m является k-правильным для идеала I, то k равно размерности ростка $\mathbf{S}_I$, определяемого идеалом I; итак, k зависит только от I. Мы покажем также, что если k независимых линейных форм на C^m удовлетворяют только условию A, то k больше или равно размерности $\mathbf{S}_I$; но если эти формы удовлетворяют только условию B, то никакого аналогичного заключения сделать нельзя, даже если идеал I — простой.

(2) Пусть I — *главный идеал*, $\{\mathbf{0}\} \neq I \subset \mathscr{H}'^m$: идеал I порожден единственным элементом $\mathbf{f} \in \mathscr{H}'^m$, $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$, который определяется с точностью до обратимого множителя, принадлежащего $\mathscr{H}^m$. Если $\mathscr{H}^{m-1}[x_m] \cap I$ содержит отмеченный полином относительно x_m, то для $\mathbf{f}$ выполняются все предположения подготовительной теоремы Шпэта — Картана. В силу заключения этой теоремы о единственности, $\mathbf{f}$ не может быть делителем в $\mathscr{H}^m$ элемента кольца $\mathscr{H}^{m-1}$, отличного от нуля. Поэтому (a) если некоторый базис в C^m является k-правильным для идеала I, то $k = m - 1$ (по поводу обратного утверждения см. замечание 2 к лемме 1); (b) некоторый базис в C^m является $(m-1)$-правильным для I тогда и только тогда, когда $f(\mathfrak{o}_{m-1}, x_m) \not\equiv 0$ в некоторой окрестности точки $x_m = 0$.

(3) Пусть даны такие идеалы I, I' кольца $\mathscr{H}^m$, что $\{\mathbf{0}\} \neq I \subsetneqq I' \subset \operatorname{rad} I' \subsetneqq \mathscr{H}'^m$, и упорядоченный базис в C^m, k-правильный для идеала I, $0 < k < m$. Тогда k первых координат удовлетворяют условию A для идеала I'; если они удовлетворяют и условию B для I', то рассматриваемый базис является k-правильным для идеала I'; если нет, мы применим к идеалам I'_k, I'_{k-1}, ... рассуждение, использованное для доказательства предложения 2. Изменяя только базис в подпространстве C^k, мы сможем образовать новый базис в C^m, k-правильный для идеала I и k'-правильный для идеала I', $0 < k' < k$.

Следовательно, если I, I' — идеалы в $\mathscr{H}^m$ с указанными выше свойствами, то существуют целые числа k, k', $0 < k' \leqslant k < m$, и базис в C^m, k-правильный для идеала I и k'-правильный для идеала I'.

В дальнейшем мы предполагаем, что выбранный в $\mathbf{C}^m$ базис является k-правильным для *простого* идеала I в кольце $\mathscr{H}^m$. Напоминаем, что $\{\mathbf{0}\} \neq I \subsetneqq \mathscr{H}'^m$, $m \geqslant 2$ и $0 < k < m$.

Лемма 1. *Пусть* $k+1 \leqslant r \leqslant m$. *Тогда существуют* (1) $\mathbf{P}_r \in \mathscr{H}^{r-1}[x_r] \cap I_r$, $p_r = d^0\mathbf{P}_r \geqslant 1$ (*коэффициент при* $x_r^{p_r}$ *в* $\mathbf{P}_r$ *не принадлежит* I_{r-1}); (2) $\varphi_{r-1} \in \mathscr{H}^{r-1} - I_{r-1}$, $\varphi_k = 1$ *со следующими свойствами*:

(a) *для любого* $\mathbf{U} \in \mathscr{H}^{r-1}[x_r] \cap I_r$ *из неравенства* $d^0\mathbf{U} < p_r$ *вытекает, что* $\mathbf{U} \in I_{r-1}[x_r]$;

(b) *для любого ростка* $\mathbf{f} \in I_r$ (*соответственно* $\mathbf{U} \in \mathscr{H}^{r-1}[x_r] \cap I_r$), $\varphi_{r-1}\mathbf{f}$ (*соответственно* $\varphi_{r-1}\mathbf{U}$) *принадлежит идеалу, порождаемому в* $\mathscr{H}^r$ (*соответственно* $\mathscr{H}^{r-1}[x_r]$) *идеалом* I_{r-1} *и* $\mathbf{P}_r$ (*в частности, идеал* I_{k+1} *порождается ростком* $\mathbf{P}_{k+1}$);

(c) *для произвольного* $\mathbf{U} \in \mathscr{H}^{r-1}[x_r]$ *включение* $\mathbf{U} \in I_r$ *имеет место в том и только в том случае, если* $\rho(\mathbf{P}_r, U) \in I_{r-1}$ (*для того чтобы образовать результант Сильвестра* $\rho(\mathbf{P}_r, \mathbf{U})$, *мы должны предположить, что* $\mathbf{U}$ *имеет «формальную» степень* > 0).

Доказательство. Фиксируем число r, $k < r \leqslant m$, и обозначим через A факторкольцо $\mathscr{H}^{r-1}/I_{r-1}$. Так как I_{r-1} — собственный простой идеал кольца $\mathscr{H}^{r-1}$, то A — нётерова область целостности (п. 2 (c) и (d), гл. II). Обозначим через μ естественный эпиморфизм $\mathscr{H}^{r-1} \to A$ и индуцированный эпиморфизм $\mathscr{H}^{r-1}[x_r] \to A[x_r]$. Пусть $I^* = \{U^* = \mu(\mathbf{U}) \in A[x_r] \mid \mathbf{U} \in \mathscr{H}^{r-1}[x_r] \cap I_r\}$. Очевидно, что I^* — идеал в кольце $A[x_r]$; далее воспользуемся тем, что заведомо существуют такие $P_r^* \in I^*$ и $\varphi_{r-1}^* \in A$, $\varphi_{r-1}^* \neq 0^*$, что P_r^* является делителем $\varphi_{r-1}^* U^*$ для каждого $U^* \in I^*$ (п. 2 (d), гл. II). Выберем элементы $\mathbf{P}_r \in \mathscr{H}^{r-1}[x_r] \cap I_r$ и $\varphi_{r-1} \in \mathscr{H}^{r-1}$ так, что $\mu(\varphi_{r-1}) = \varphi_{r-1}^*$, $\mu(\mathbf{P}_r) = P_r^*$, причем $d^0\mathbf{P}_r = d^0P_r^*$. Мы утверждаем, что $p_r = d^0\mathbf{P}_r > 0$. Действительно, если $p_r = 0$, то $\mathbf{P}_r \in \mathscr{H}^{r-1} \cap I_r = I_{r-1}$, т. е. $P_r^* = 0^*$, откуда вытекает, что $I^* = \{0^*\}$. Но $I_r \cap \mathscr{H}^{r-1}[x_r]$ содержит отмеченный полином $\mathbf{Q}_r$ и $Q_r^* = \mu(\mathbf{Q}_r) \in I^*$ отличается от нуля. Таким образом, мы

приходим к противоречию; итак, $p_r > 0$. Далее отметим, что поскольку $\varphi^*_{r-1} \neq 0^*$, росток φ_{r-1} не принадлежит I_{r-1}. Мы докажем, что $\mathbf{P}_r$ и φ_{r-1} удовлетворяют условиям (a), (b) и (c), причем покажем, что можно выбрать $\varphi_k = 1$.

(a) Для произвольного $\mathbf{U} \in \mathscr{H}^{r-1}[x_r] \cap I_r$ элемент P^*_r является делителем $\varphi^*_{r-1}U^*$, где $U^* = \mu(\mathbf{U})$ и $\varphi^*_{r-1} \neq 0^*$. Следовательно, или $U^* = 0^*$, откуда вытекает, что $\mathbf{U} \in I_{r-1}[x_r]$, или $d^0\mathbf{U} \geqslant d^0U^* \geqslant d^0P^*_r = d^0\mathbf{P}_r$, и утверждение (a) доказано.

(b) Пусть снова $\mathbf{U} \in \mathscr{H}^{r-1}[x_r] \cap I_r$. Тогда (мы сохраняем прежние обозначения) существует такой элемент $V^* \in A[x_r]$, что $\varphi^*_{r-1}U^* = P^*_rV^*$. Если $\mathbf{V} \in \mathscr{H}^{r-1}[x_r]$ — росток, для которого $\mu(V) = V^*$, то $\mu(\varphi_{r-1}\mathbf{U} - \mathbf{P}_r\mathbf{V}) = 0^*$, т. е. $\varphi_{r-1}\mathbf{U} - \mathbf{P}_r\mathbf{V} \in I_{r-1}[x_r]$.

В частности, рассмотрим случай $r = k+1$. Тогда для каждого $\mathbf{U} \in \mathscr{H}^k[x_{k+1}] \cap I_{k+1}$ росток $\mathbf{P}_{k+1}$ является делителем $\varphi_k\mathbf{U}$ в кольце $\mathscr{H}^k[x_{k+1}]$. Но мы всегда можем предположить, что $\mathbf{P}_{k+1}$ — неприводимый полином (деля его на общий наибольший делитель коэффициентов). Тогда $\mathbf{P}_{k+1}$ должен быть делителем самого элемента $\mathbf{U}$. Итак, в той части утверждения (b), которую мы доказали, можно взять $\varphi_k = 1$.

Теперь возьмем произвольный элемент $\mathbf{f} \in I_r$. Обозначим через $\mathbf{Q}_r$ отмеченный полином относительно x_r, содержащийся по условию в $\mathscr{H}^{r-1}[x_r] \cap I_r$. Согласно подготовительной теореме Шпэта — Картана, существует такой росток $\mathbf{h} \in \mathscr{H}^r$, что $\mathbf{u} = \mathbf{f} - \mathbf{h}\mathbf{Q}_r \in \mathscr{H}^{r-1}[x_r]$. Очевидно, что $\mathbf{u} \in I_r$. Применяя уже доказанную часть утверждения (b) к $\mathbf{u}$ и $\mathbf{Q}_r$, мы установим, что $\varphi_{r-1}\mathbf{f}$ принадлежит идеалу, порожденному в кольце $\mathscr{H}^r$ ростком $\mathbf{P}_r$ и идеалом I_{r-1}.

(c) Если $\mathbf{U} \in \mathscr{H}^{r-1}[x_r] \cap I_r$, то $\rho(\mathbf{P}_r, \mathbf{U}) \in I_r \cap \mathscr{H}^{r-1} = I_{r-1}$. Обратно, пусть $\rho(\mathbf{P}_r, \mathbf{U}) \in I_{r-1}$. Тогда (мы сохраняем прежние обозначения) $\rho(P^*_r, U^*) = 0^*$. Далее заметим, что степень P^*_r равна $p_r = d^0\mathbf{P}_r$. Следовательно (п. 2 (a), гл. II), существуют такие полиномы $X^*, Y^* \in A[x_r]$, отличные от тождественного нуля, степени $< \min(d^0U^*, p_r)$, что $X^*P^*_r + Y^*U^* = 0^*$. Так как $P^*_r \neq 0^*$, то и $Y^* \neq 0^*$. Возьмем $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathscr{H}^{r-1}[x_r]$ так, что $\mu(\mathbf{X}) = X^*$, $d^0\mathbf{X} = d^0X^*$, $\mu(\mathbf{Y}) = Y^*$, $d^0\mathbf{Y} = d^0Y^*$. Тогда $\mu(\mathbf{X}\mathbf{P}_r + \mathbf{Y}\mathbf{U}) = 0^*$; т. е. $\mathbf{X}\mathbf{P}_r + \mathbf{Y}\mathbf{U} \in I_{r-1}[x_r]$. Так как $\mathbf{P}_r \in I_r$, то отсюда вытекает, что $\mathbf{Y}\mathbf{U} \in I_r$. Далее

$\mathbf{Y} \notin I_r$, ибо при $d^0\mathbf{Y} = d^0Y^* < p_r$ из включения $\mathbf{Y} \in I_r$ следовало бы (согласно (а)), что $\mathbf{Y} \in I_{r-1}[x_r]$, т. е. $Y^* = 0^*$, что невозможно. Наконец, поскольку I_r — простой идеал, из условий $\mathbf{YU} \in I_r$, $\mathbf{Y} \notin I_r$ вытекает, что $\mathbf{U} \in I_r$, что и требовалось доказать.

Замечания. 1. Полезно отметить (мы сохраняем обозначения леммы 1), что $\frac{\partial \mathbf{P}_r}{\partial x_r} \notin I_r$, $r = k+1, \ldots, m$. Действительно, если $\frac{\partial \mathbf{P}_r}{\partial x_r} \in I_r$, то, в силу (*а*), $\frac{\partial \mathbf{P}_r}{\partial x_r} \in I_{r-1}[x_r]$, т. е. $d^0P_r^* = 0$, что невозможно.

2. Если $k = m-1$, то I обязательно является главным идеалом, порождаемым $\mathbf{P}_m$.

3. Каждый полином $\mathbf{P}_r$ может быть умножен на любой обратимый множитель, принадлежащий $\mathscr{H}^{r-1}$; в частности, поскольку $\mathbf{P}_{k+1}$ является делителем отмеченного полинома φ_{k+1} в кольце $\mathscr{H}^k[x_{k+1}]$, можно за $\mathbf{P}_{k+1}$ выбрать отмеченный полином (лемма 2, п. 3, гл. II).

Лемма 2. *Для каждого числа r, $k+1 \leqslant r \leqslant m$, и произвольного ростка $\mathbf{f} \in \mathscr{H}^r - I_r$, можно указать росток $\mathbf{f}' \in \mathscr{H}^{r-1} - I_{r-1}$, принадлежащий идеалу, порожденному $\mathbf{f}$ и I_r в кольце $\mathscr{H}^r$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{Q}_r \in \mathscr{H}^{r-1}[x_r] \cap I_r$ — отмеченный полином относительно x_r. В силу подготовительной теоремы Шпэта — Картана, существует такой росток $\mathbf{h} \in \mathscr{H}^r$, что $\mathbf{U} = \mathbf{f} - \mathbf{hQ}_r \in \mathscr{H}^{r-1}[x_r]$. Из того, что $\mathbf{f} \notin I_r$, вытекает, что $\mathbf{U} \notin I_r$. Следовательно, если $\mathbf{P}_r$ выбран так, как это указано в лемме 1, то $\mathbf{f}' = \rho(\mathbf{P}_r, \mathbf{U}) \notin I_{r-1}$ (согласно лемме 1 (с)). Поэтому очевидно, что $\mathbf{f}'$ принадлежит идеалу, порожденному в кольце $\mathscr{H}^r$ идеалом I_r и ростком $\mathbf{f}$.

Предложение 3. *Пусть I, I' — идеалы в кольце $\mathscr{H}^m$, причем I — простой идеал, $\{\mathbf{0}\} \neq I \subset I' \subsetneqq \mathscr{H}'^m$, базис в пространстве $\mathbf{C}^m$ является k-правильным для идеала I и k'-правильным для идеала I'. Тогда $I = I'$ тогда и только тогда, когда $k = k'$.*

Доказательство. Очевидно, $k' \leqslant k$ и $I \neq I'$ при $k' < k$. Пусть $I \subsetneqq I'$, $\mathbf{f} = \mathbf{f}_m \in I' - I$. Тогда, согласно лемме 2,

существует росток $\mathbf{f}_{m-1} \in \mathscr{H}^{m-1} - I_{m-1}$, принадлежащий идеалу, порожденному идеалом I_m и ростком $\mathbf{f}_m$ в кольце $\mathscr{H}^m$. В этом случае $\mathbf{f}_{m-1} \in \mathscr{H}^{m-1} \cap I' = I'_{m-1}$. Рассуждая таким образом далее, мы получим росток $\mathbf{f}_k \in I'_k - I_k = I'_k - \{\mathbf{0}\}$. Итак, $I'_k \neq \{\mathbf{0}\}$, т. е. $k' < k$, что и требовалось доказать.

4. Локальное описание аналитического множества: всюду плотные подмножества специальных видов. Пусть I — простой идеал в кольце $\mathscr{H}^m$, $\{\mathbf{0}\} \neq I \subsetneqq \mathscr{H}'^m$ и в пространстве C^m выбран базис, k-правильный для I. Сопоставим (как в лемме 1, п. 3) числам r, $k+1 \leqslant r \leqslant m$, ростки $\mathbf{P}_r \in \mathscr{H}^{r-1}[x_r] \cap I_r$ и $\varphi_{r-1} \in \mathscr{H}^{r-1} - I_{r-1}$ $(\varphi_k = 1)$, и пусть $\mathbf{Q}_r \in \mathscr{H}^{r-1}[x_r] \cap I_r$ — отмеченный полином относительно x_r. Как отмечено выше, $\frac{\partial \mathbf{P}_r}{\partial x_r} \notin I_r$. Следовательно, по лемме 1 (c), п. 3, результант Сильвестра $\delta_{r-1} = \rho\left(\mathbf{P}_r, \frac{\partial \mathbf{P}_r}{\partial x_r}\right)$ не принадлежит I_{r-1}. Так как I_{r-1} — простой идеал, то $\varphi_{r-1}\delta_{r-1} \notin I_{r-1}$. Следовательно, если $k \leqslant m-2$, то по лемме 2, п. 3 можно найти росток $\gamma_{m-2} \in \mathscr{H}^{m-2} - I_{m-2}$, принадлежащий идеалу, порожденному в кольце $\mathscr{H}^{m-1}$ идеалом I_{m-1} и ростком $\varphi_{m-1}\delta_{m-1}$. Если $k \leqslant m-3$, мы таким же образом найдем ростки $\gamma_{r-1} \in \mathscr{H}^{r-1} - I_{r-1}$, каждый из которых принадлежит идеалу, порожденному в кольце $\mathscr{H}^r$ идеалом I_r и ростком $\gamma_r\delta_r\varphi_r$, где $k+1 \leqslant r \leqslant m-2$.

Пусть $\mathbf{f}_r^{(1)}, \ldots, \mathbf{f}_r^{(i_r)} \in I_r$ — ростки, порождающие идеал I_r, где $k \leqslant r \leqslant m$. Идеал I_{k+1} порождается единственным элементом $\mathbf{P}_{k+1}$; для единообразия мы обозначим его через $\mathbf{f}_{k+1}^{(1)}$. Идеал I_k порождается единственным элементом $\mathbf{0}$; мы обозначим его через $\mathbf{f}_k^{(1)}$. Имеют место следующие соотношения:

(1) $\mathbf{P}_r$ является линейной комбинацией над кольцом $\mathscr{H}^r$ элементов $\mathbf{f}_r^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant i_r$ $(k+1 \leqslant r \leqslant m)$.

(2) Каждый элемент $\varphi_{r-1}\mathbf{f}_r^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant i_r$ (соответственно $\varphi_{r-1}\mathbf{Q}_r$) является линейной комбинацией над кольцом $\mathscr{H}^r$ (соответственно над кольцом $\mathscr{H}^{r-1}[x_r]$) элементов $\mathbf{P}_r$ и $\mathbf{f}_{r-1}^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant i_{r-1}$ $(k+1 \leqslant r \leqslant m)$.

(3) γ_{r-1} является линейной комбинацией над кольцом $\mathscr{H}^r$ элементов $\gamma_r\delta_r\varphi_r$ и $\mathbf{f}_r^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant i_r$ $(k+1 \leqslant r \leqslant m-1$, $\gamma_{m-1}=1)$.

Пусть $\pi \in C^m$ — открытый полицилиндр с центром в точке $\mathfrak{o}$ (π_r — его проекция на пространство C^r), обладающий следующими свойствами:

(0′) Для каждого r, $k+1 \leqslant r \leqslant m$, элементы $\mathbf{f}_r^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant i_r$, $\mathbf{P}_r$, $\mathbf{Q}_r$ кольца $\mathscr{H}^r$ порождаются в точке $\mathfrak{o}_r$ соответственно функциями $f_r^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant i_r$, P_r, Q_r, голоморфными в π_r. Аналогично для каждого r, $k \leqslant r \leqslant m-1$, φ_r, δ_r и γ_r порождаются в точке $\mathfrak{o}_r$ соответственно функциями φ_r, δ_r и γ_r, голоморфными в π_r.

(1′), (2′), (3′). Соотношения (1), (2), (3) между $\mathbf{f}_r^{(i)}$, $\mathbf{P}_r$, $\mathbf{Q}_r$ и т. д. над $\mathscr{H}^r$ (или над $\mathscr{H}^{r-1}[x_r]$) «порождаются» соответствующими соотношениями между $f_r^{(i)}$, P_r, Q_r и т. д. над кольцом $\mathscr{H}_{\pi_r}$ функций, голоморфных на π_r (или над кольцом $\mathscr{H}_{\pi_{r-1}}[x_r]$). Например, свойство (2′) гласит: $\varphi_{r-1}Q_r$ является линейной комбинацией над кольцом $\mathscr{H}_{\pi_{r-1}}[x_r]$ элементов P_r и $f_{r-1}^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant i_{r-1}$.

(4′) Для любого r, $k+1 \leqslant r \leqslant m$, и $\xi \in \pi_{r-1}$ из равенства $Q_r(\xi, t)=0$ (где $t \in C$) вытекает, что $(\xi, t) \in \pi_r$ (выполнение этого условия обеспечено, так как $\mathbf{Q}_r$ — отмеченный полином).

Положим далее $\pi_k=\pi'$. Поскольку $\delta_k\gamma_k \neq 0$, $U'=\{x' \in \pi' \mid \gamma_k(x')\delta_k(x')=0\}$ — связное открытое всюду плотное подмножество π' (см. п. 1). Пусть $U=\{(x_1, \ldots, x_m) \in \pi \mid (x_1, \ldots, x_k) \in U'\}$.

Наконец, пусть S — множество общих нулей в π всех функций $f_r^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant i_r$, $k+1 \leqslant r \leqslant m$. Таким образом, $\mathbf{S}_I$ — росток аналитического множества, порожденный множеством S в точке $\mathfrak{o}$.

Лемма 1. (a) $S \cap U=\{x \in U \mid P_{k+1}(x)=\ldots=P_m(x)=0\}$. (b) *Каждой точке* $x' \in U'$ *соответствует точно* $p=\sum_{r=k+1}^{m}(d^0\mathbf{P}_r)$ *точек* $x^j(x') \in S \cap U$, *проектирующихся в точку* x'; $x^{(j)}(x') \to \mathfrak{o}$, $1 \leqslant j \leqslant p$, *когда* $x' \to \mathfrak{o}_k=\mathfrak{o}'$ $(x' \in U')$. (c) *В некоторой достаточно малой*

окрестности любой точки U' все отображения $x' \to \to x^{(j)}(x')$ являются голоморфными.

Доказательство. Пусть $s = \{x \in U \mid P_{k+1}(x) = \ldots \ldots = P_m(x) = 0\}$. Из условия (1′) вытекает, что $S \cap U \subset s$. Рассмотрим точку $x' \in U'$. Так как $\delta_k(x') \neq 0$, полином $P_{k+1}(x', t)$ (относительно t) имеет $p_{k+1} = (d^0 \mathbf{P}_{k+1})$ различных корней $x_{k+1}^{(j)}(x') = x_{k+1}^{(j)}$, $1 \leqslant j \leqslant p_{k+1}$. Из условия (2′) вытекает, что полином $Q_{k+1}(x', t)$ обращается в нуль во всех точках $x_{k+1}^{(j)}$. Поэтому по (4′) $\left(x', x_{k+1}^{(j)}(x')\right) \in \pi_{k+1}$, $1 \leqslant j \leqslant \leqslant p_{k+1}$. Далее, так как Q_{k+1} — отмеченный полином, легко видеть, что $x_{k+1}^{(j)} \to 0$, $1 \leqslant j \leqslant p_{k+1}$, когда $x' \to \mathfrak{o}'$.

Если $k+1 = m$, утверждения (a) и (b), очевидно, верны. Пусть $k+1 < m$ и $\xi = \left(x', x_{k+1}^{(j)}(x')\right)$ — какой-либо из p_{k+1} корней полинома $P_{k+1}(x', t)$, $x' \in U'$. Тогда произведение $\delta_{k+1}\varphi_{k+1}\gamma_{k+1}$ не должно обращаться в нуль в ξ; с другой стороны, благодаря (3′), $\gamma_k(x') \neq 0$ при $x' \in U'$. Отсюда вытекает, что $\delta_{k+1}(\xi) \neq 0$. Следовательно, полином $P_{k+2}(\xi, t)$ (относительно t) имеет $p_{k+2} = (d^0 \mathbf{P}_{k+2})$ различных корней $x_{k+2}^{j}(\xi)$, $1 \leqslant j \leqslant p_{k+2}$. Из условия (2′) и соотношения $\varphi_{k+1}(\xi) \neq 0$ находим, что полином $Q_{k+2}(\xi, t)$ обращается в нуль во всех точках $x_{k+2}^{(j)}(\xi)$. Отсюда следует, что $\left(\xi, x_{k+2}^{(j)}(\xi)\right) \in \pi_{k+2}$ и $x_{k+1}^{(j)} \to 0$, когда $\xi \to \mathfrak{o}_{k+1}$ $\left(1 \leqslant j \leqslant p_{k+2}\right)$. Если мы опять используем условия (2′) (и соотношение $\varphi_{k+2}(\xi) \neq 0$), то увидим, что все $f_{k+2}^{(j)}$, $1 \leqslant i \leqslant i_{k+2}$, обращаются в нуль во всех точках $\left(\xi, x_{k+2}^{(j)}(\xi)\right)$. Итак, утверждения (a) и (b) верны, если $k+2 = m$. Если $k+2 < m$, мы воспользуемся тем, что $\gamma_{k+1}(\xi) \neq 0$ и повторим наши рассуждения. Таким образом, мы установим справедливость утверждений (a) и (b). Справедливость утверждения (c) может быть установлена при расположении функций $x^{(j)}(x')$ в надлежащем порядке следующим образом: если $(x_1, \ldots \ldots, x_m) \in S$, то x_r, $k+1 \leqslant r \leqslant m$, — простой корень полинома $P_r(x_1, \ldots, x_{r-1}, t)$ (относительно t). Лемма 1 доказана.

Замечание. Если I (где $\{\mathbf{0}\} \neq I \subsetneqq \mathscr{H}'^m$) — главный идеал в кольце $\mathscr{H}^m$, то, в силу замечания 2 к определению 2 (п. 3) и подготовительной теоремы Вейерштрасса, в пространстве $\mathbf{C}^m$ существуют $(m-1)$-правильные базисы для идеала I. Для любого подобного базиса существует такой

отмеченный полином $\mathbf{Q} \in \mathscr{H}^{m-1}[x_m]$, что $\mathbf{S}_I = \mathbf{S}_Q$. В общем случае положение вещей может быть другим: если I — простой идеал в кольце $\mathscr{H}^m$ $(m \geqslant 3,\ \{0\} \neq I \subsetneqq \mathscr{H}'^m)$ и базис в пространстве $\mathbf{C}^m$ является k-правильным для I, $0 < k < m-1$, то, вообще говоря, не существует таких отмеченных полиномов $\mathbf{Q}_r \in I_r \cap \mathscr{H}^{r-1}[x_r]$, $k+1 \leqslant r \leqslant m$, что $\mathbf{S}_I = \mathbf{S}_{Q_{k+1}} \cap \ldots \cap \mathbf{S}_{Q_m}$. Ниже приводится пример.

Пусть $\mathbf{S}$ — росток, порождаемый в точке $\mathfrak{o} \in \mathbf{C}^3$ аналитическим множеством $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{C}^3 \mid x_2^2 + x_3^2 - x_1 = x_2^2 - x_1 x_3 = 0\}$, $I = I(\mathbf{S})$. Тогда, прежде всего, I — простой идеал. Действительно, координаты каждой точки $x \in S$ могут быть представлены в виде $x = \left(\frac{t^4}{1+t^2}, \frac{t^3}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\right)$, где $t \in \mathbf{C}$, $t \neq \pm i$, каждой точке $x \in S$ соответствует только одно значение параметра t. Поэтому в принятых обозначениях можно утверждать, что $\mathbf{f} \in \mathscr{H}^3$ принадлежит I в том и только в том случае, если $f\left(\frac{t^4}{1+t^2}, \frac{t^3}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\right) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки $t = 0$. Отсюда вытекает, что I — простой идеал. Далее, базис в пространстве $\mathbf{C}^3$ является 1-правильным для I: из того, что $(0, x_2, x_3) \in S$, вытекает, что $x_2 = x_3 = 0$; в этом состоит условие (A) определения 2 для I; выполнение условия (B) очевидно.

Допустим, что, вопреки нашему утверждению, существуют такие отмеченные полиномы $\mathbf{Q}_2 \in \mathscr{H}^1[x_2]$, $\mathbf{Q}_3 \in \mathscr{H}^2[x_3]$, что $\mathbf{S}_I = \mathbf{S} = \mathbf{S}_{Q_2} \cap \mathbf{S}_{Q_3}$. Тогда для каждой точки $(x_1, x_2) \in \mathbf{C}^2$ можно указать по крайней мере одну такую точку $x_3 \in \mathbf{C}$, что $(x_1, x_2, x_3) \in S$. Тогда для точки $(x_1, x_2, x_3) \in S$ и точки (x_1, x_2), достаточно близкой к точке $\mathfrak{o}^2$, x_3 является единственным корнем многочлена $Q_3(x_1, x_2, t)$ относительно t, т. е. корнем порядка $q_3 = d^0\mathbf{Q}_3$: в частности,

$$\frac{\partial^{q_3-1}\mathbf{Q}_3}{\partial x_3^{q_3-1}} = q_3!\left(x_3 - \sum_{r+s \geqslant 1} a_{r,s} x_1^r x_2^s\right) \in I.$$

Это означает, что в некоторой окрестности значения $t = 0$

$$\frac{t^2}{1+t^2} \equiv \sum_{r+s \geqslant 1} a_{r,s}\left(\frac{t^4}{1+t^2}\right)^r \left(\frac{t^3}{1+t^2}\right)^s,$$

что, очевидно, невозможно.

Мы теперь приведем некоторые следствия из леммы 1.

Предложение 1. *Если I — простой идеал в кольце $\mathscr{H}^m$, $I \subsetneqq \mathscr{H}'^m$, то $\mathbf{S}_I \supsetneqq \{\mathfrak{o}\}$.*

Доказательство. Мы можем принять, что $I \neq \{\mathbf{0}\}$. Тогда (мы сохраняем обозначения леммы 1) U' является всюду плотным подмножеством в π'. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность точек U', сходящихся к точке $\mathfrak{o}'$ и отличных от точки $\mathfrak{o}'$. Тогда по лемме 1 точки $x^{(j)}(x'_n) \in S$ составляют последовательность, сходящуюся к точке $\mathfrak{o}$ (для любого j, $1 \leqslant j \leqslant p$). Таким образом, $\mathfrak{o}$ не является изолированной точкой множества S.

Лемма 2. *Пусть h — голоморфная функция в такой открытой окрестности точки $\mathfrak{o}$, что для каждой точки $x' \in U'$, достаточно близкой к $\mathfrak{o}'$, имеет место равенство $h(x^{(j)}(x')) = 0$ хотя бы для одного номера $j = j(x')$, $1 \leqslant j \leqslant p$. Тогда $\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 \in I$ (здесь сохранены обозначения леммы 1).*

Доказательство. Допустим, что, вопреки нашему утверждению, существует росток $\mathbf{h} \in \mathscr{H}^m - I$, удовлетворяющий указанным в лемме 2 условиям. Тогда, согласно лемме 2, п. 3, должен существовать росток $\mathbf{h}_{m-1} \in \mathscr{H}^{m-1} - I_{m-1}$, являющийся линейной комбинацией $\mathbf{h}$ и ростков $\mathbf{f}_m^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant i_m$. Очевидно, что росток $\mathbf{h}_{m-1}$ также должен удовлетворять условиям, указанным в лемме 2. Поэтому, если $k < m - 1$, мы, повторяя подобное рассуждение, в конце концов придем к ростку $\mathbf{h}_k \in \mathscr{H}^k - I_k = \mathscr{H}^k - \{\mathbf{0}\}$, равному нулю во всех точках $x' \in U'$, достаточно близких к точке $\mathfrak{o}'$. Это невозможно, поскольку U' всюду плотно в π'. Итак, $\mathbf{h} \in I$ и, таким образом, лемма 2 доказана.

Предложение 2. *Пусть I — простой идеал в кольце $\mathscr{H}^m$, $\{\mathbf{0}\} \neq I \subsetneqq \mathscr{H}^m$, причем базис в пространстве C^m является k-правильным ($1 \leqslant k \leqslant m - 1$) для идеала I. Пусть W — открытая окрестность точки $\mathfrak{o}$, $\mathscr{F}$ — множество функций, голоморфных на W и равных нулю в точке $\mathfrak{o}$. Тогда существуют: (1) аналитическое множество S в некотором открытом полицилиндре π с центром в точке $\mathfrak{o}$, порождающее в этой точке росток $\mathbf{S}_I$ (π и S зависят только от I и базиса,*

выбранного в пространстве $\mathbf{C}^m$); (2) *некоторый открытый полицилиндр* $\pi_0 (\subset \pi \cap W)$ *с центром в точке* $\mathfrak{o} \in \mathbf{C}^m$ (*его радиусы могут быть взяты как угодно малыми*); (3) *для каждой функции* $h \in \mathcal{F}$ *такой отмеченный псевдополином* $R_h(x', u)$ *относительно* u *степени* p *с коэффициентами, являющимися голоморфными функциями* x' *в* π_0' (*проекции* π_0 *на* $\mathbf{C}^k$), *что*

(a) *росток* $\mathbf{R}_h(\mathbf{h})$ *в точке* $\mathfrak{o}$, *порожденный голоморфной функцией* $x \to R_h(x', h(x))$ *в* π_0, *принадлежит идеалу* I;

(b) *для каждой точки* $x_0' \in \pi_0'$ *и функции* $h \in \mathcal{F}$

$$\{u \in \mathbf{C} \mid R_h(x_0', u) = 0\} = \{h(x) \mid x \in \pi_0 \cap S, \text{ (проекция } x \text{ на } \mathbf{C}^k) = x_0'\};$$

(c) *для любой функции* $h \in \mathcal{F}$ *или псевдополином* $R_h(x', u)$ *имеет сомножитель* u, *и тогда* $\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 \in I$, *или* $R_h(x', u)$ *не имеет сомножителя* u, *и тогда* $h(\pi_0 \cap S)$ *является окрестностью нуля в* $\mathbf{C}$;

(d) *для каждой функции* h_0, *голоморфной на* π_0, *можно указать такой псевдополином* $X_0(x', u)$ *степени, не большей* $p-1$ *относительно* u, *и с коэффициентами, голоморфными на* π_0' (*равными нулю в точке* $\mathfrak{o}'$, *если функция* h_0 *обращается в нуль в точке* $\mathfrak{o}$), *что росток* $\frac{\partial}{\partial u} \mathbf{R}_h(\mathbf{h})\, \mathbf{h}_0 - \mathbf{X}_0(\mathbf{h})$ *в точке* $\mathfrak{o}$, *порожденный функцией* $x \to \frac{\partial}{\partial u} R_h(x', h(x))\, h_0(x) - X_0(x', h(x))$, *голоморфной на* π_0, *принадлежит идеалу* I.

Доказательство. Пусть π и S взяты так же, как в лемме 1 (мы сохраняем далее принятые там обозначения). Возьмем такой открытый полицилиндр $\tilde{\pi}$ с центром в точке $\mathfrak{o}$, $\tilde{\pi} \subset \pi$, $\bar{\tilde{\pi}} \subset W$, что для произвольной точки $x' \in \tilde{\pi}' \cap U'$ все $x^{(j)}(x') \in \tilde{\pi}$, $1 \leqslant j \leqslant p$. Пусть для любых $x' \in \tilde{\pi}' \cap U'$, $h \in \mathcal{F}$ и любого j, $1 \leqslant j \leqslant p$,

$$c_j(x') = c_{j,h}(x') = \\ = (-1)^j \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_j \leqslant p} h\left(x^{(i_1)}(x')\right) \ldots h\left(x^{(i_j)}(x')\right),$$

Легко видеть, что c_j — ограниченные голоморфные функции в $\tilde{\pi}' \cap U'$. Так как $\sigma' = \pi' - U'$ — нигде не плотное аналитическое множество в π', то каждая из функций c_j имеет, согласно теореме 2 (п. 1), однозначно определяемое (ограниченное) голоморфное продолжение на $\tilde{\pi}'$; мы обозначим это продолжение снова через c_j. Каждая из этих функций c_j обращается в нуль в точке $\mathfrak{o}'$. Это вытекает из того, что $h(\mathfrak{o}) = 0$ и $x^{(j)}(x') \to 0$, $1 \leqslant j \leqslant p$, когда $x' (\in U') \to \mathfrak{o}'$. Следовательно, $R_h(x', u) = u^p + \sum_{j=1}^{p} c_j(x') u^{p-j}$ — отмеченный псевдополином. По определению $R_h(x', h(x)) = 0$ при $x \in \pi \cap (S \cap U)$; поэтому, согласно лемме 2, $\mathbf{R}_h(\mathbf{h}) \in I$. Итак, утверждение (a) доказано.

Используя теорему 7 главы II, мы найдем такой открытый полицилиндр $\pi_0 \subset \tilde{\pi}$ с центром в точке $\mathfrak{o}$ и радиусами ρ_j, что $R_h(x', h(x)) = 0$ в каждой точке $x \in \pi_0 \cap S$ для каждой функции $h \in \mathcal{F}$, если только

$$\sup_{\substack{x' \in \pi_0' \cap U' \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} |x_r^{(j)}(x')| = \rho_r' < \rho_r, \qquad r = k+1, \ldots, m. \qquad (*)$$

Мы покажем, что утверждения (b), (c), (d) справедливы для полицилиндра π_0, если псевдополином $R_h(x', u)$ выбран указанным выше образом.

(b) В силу (a) и нашего выбора π_0, мы в каждой точке $x_0' \in \pi_0'$ и для каждой функции $h \in \mathcal{F}$ имеем

$$\{h(x) \mid x \in \pi_0 \cap S, \text{ (проекция } x \text{ на } \mathbf{C}^k) = x_0'\} \subset$$
$$\subset \{u \in \mathbf{C} \mid R_h(x_0', u) = 0\}.$$

Обратное включение также имеет место для каждой точки $x_0' \in \pi_0' \cap U'$ в силу определения R_h. Возьмем $x_0' \in \pi_0' \cap {}^cU'$; пусть u_0 — корень полинома $R_h(x_0', u)$. Поскольку U' плотно в π', мы можем найти последовательность $\{x_n'\}$ точек $\pi_0' \cap U'$, сходящуюся к x_0'. Тогда для каждого номера n можно указать такой корень u_n полинома $R_h(x_n', u)$, что $u_n \to u_0$. Как было указано выше, каждому номеру n соответствует такой номер j_n, $1 \leqslant j_n \leqslant p$, что $u_n = h(x^{(j_n)}(x_n'))$. Учитывая условие (*), мы можем принять (переходя в случае надобности от последовательности $\{x_n'\}$ к некоторой ее подпосле-

довательности), что $\{x^{(j_n)}(x'_n)\}$ сходится к точке $x_0 \in \pi_0$. Так как подмножество $\pi_0 \cap S$ замкнуто в π_0, то $x_0 \in S \cap \pi_0$ и $h(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} h(x^{(j_n)}(x'_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = u_0$. Так как проекцией x_0 на C^k, очевидно, является x'_0, утверждение (b) доказано.

(c) Для любой функции $h \in \mathcal{F}$ коэффициенты $c_j = c_{j,h}$ ограничены и голоморфны на π'_0. Предположим сначала, что $c_p \equiv 0$. Согласно определению c_p, это означает, что для любой точки $x' \in \pi'_0 \cap U'$ функция h обращается в нуль по крайней мере для одной из величин $x^{(j)}(x')$, $1 \leqslant j \leqslant p$. Тогда, в силу леммы 2, $h \in I$.

Предположим затем, что $c_p \not\equiv 0$. Если бы утверждение (c) было не верным, то существовала бы такая сходящаяся к нулю последовательность комплексных чисел $\{\lambda_n\}$, что функция $h(x)$ не принимала бы значений λ_n при $x \in \pi_0 \cap S$. Отсюда, в силу уже доказанного утверждения (b), вытекает, что голоморфные функции $g_n(x') = R_n(x', \lambda_n)$ от x' на π'_0 не обращаются в нуль на π'_0. Последовательность $\{g_n(x')\}$ сходится *равномерно* на π'_0 к $R_h(x', 0) = c_p(x')$ (так как c_j ограничены на π'_0). Этот вывод противоречит тому, что $c_p \not\equiv 0$, $c_p(\mathfrak{o}') = 0$. Действительно, пусть $a' \in \pi'_0$, $c_p(a') \neq 0$. Тогда $g_n(ta')$ суть голоморфные функции, равномерно сходящиеся в области $D = \{t \in C \mid ta' \in \pi'_0\} \subset C$ к функции $c_p(ta') \not\equiv 0$ ($c_p(1) \neq 0$). Отсюда, рассуждая обычным для подобной ситуации образом, легко заключить, что точка $\mathfrak{o}'$ должна быть предельной для нулей $x'_n = t_n a'$ функции $g_n(x')$. Таким образом, мы пришли к противоречию с тем, что функция $g_n(x') \neq 0$ при $x' \in \pi'_0$. Утверждение (c) доказано.

(d) При $x' \in \pi'_0 \cap U'$

$$X_0(x', u) = \\ = \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} \left\{ h_0(x^{(j)}(x')) \prod_{1 \leqslant j' \leqslant p,\ j' \neq j} [u - h(x^{(j')}(x'))] \right\} \quad (**)$$

— псевдополином степени $\leqslant p-1$ относительно u с коэффициентами, являющимися голоморфными функциями x' в $\pi'_0 \cap U'$, ограниченными в окрестности каждой точки множества $\pi'_0 \cap \sigma'$. В силу теоремы 2 (п. 1), каждый из этих

коэффициентов может быть голоморфно продолжен (и притом единственным образом) на π_0'. Получающиеся таким образом функции равны нулю в точке $\mathfrak{o}'$, если $h_0(\mathfrak{o})=0$.

Полагая $u=h(x^{(j)}(x'))$, $x'\in\pi_0'\cap U'$, $1\leqslant j\leqslant p$, в соотношении (**), мы получим:

$$X_0(x',\ h(x^j(x')))=$$
$$=h_0(x^{(j)}(x'))\prod_{1\leqslant j'\leqslant p,\ j'\neq j}[h(x^{(j)}(x'))-h(x^{(j')}(x'))]=$$
$$=h_0(x^{(j)}(x'))\frac{\partial}{\partial u}R_h(x',\ h(x^{(j)}(x'))).$$

Таким образом, функция $\frac{\partial}{\partial u}R_h(x',h(x))h_0(x)-X_0(x',h(x))$ равна нулю во всякой точке $x\in\pi_0\cap(S\cap U)$. Следовательно, эта функция по лемме 2 определяет в точке $\mathfrak{o}$ росток, принадлежащий идеалу I.

Замечание 1. В силу (b) $R_h(x',\ h(x))=0$ в любой точке $x\in\pi_0\cap S$; в (d) мы показали, что $\frac{\partial}{\partial u}R_h(x',h(x))h_0(x)-$ $-X_0(x',\ h(x))=0$ только в любой точке $x\in\pi_0\cap(S\cap U)$; ниже, в теореме 3 (B) будет показано, что множество $\pi_0\cap(S\cap U)$ плотно в $\pi_0\cap S$ и поэтому

$$\frac{\partial}{\partial u}R_h(x',\ h(x))\,h_0(x)-X_0(x',\ h(x))=0$$
для любой точки $x\in\pi_0\cap S$.

Замечание 2. Из предложения 2 (c) вытекает такое следствие. Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве U, точка $a\in S$, функция h голоморфна на U. Тогда ограничение $h\,|\,S$ или постоянно в некоторой окрестности точки a или множество значений $h\,|\,S$ в некоторой окрестности точки a составляет какую-то окрестность точки $h(a)$ в $\mathbf{C}$. Этот вывод, в котором ограничение $h\,|\,S$ можно заменить произвольной функцией, голоморфной на S (п. 6, гл. IV), является обобщением известного классического результата: непостоянное голоморфное отображение связного открытого множества пространства $\mathbf{C}^m$ в $\mathbf{C}$ есть открытое отображение.

Лемма 3. *Пусть хотя бы в одной точке $x'\in\pi_0'\cap U'$ все p значений $h\left(x^{(j)}(x')\right)$, $1\leqslant j\leqslant p$, различны (здесь*

и далее сохраняются обозначения леммы 1 *и предложения* 2). *Тогда*

(a) *росток* $\mathbf{R}_h(u) \in \mathscr{H}^k[u]$, *порождаемый* $R_h(x', u)$ *в начале координат пространства* $\mathbf{C}^{k+1}$, *неприводим в кольце* $\mathscr{H}^k[u]$; *дискриминант полинома* $R_h(x', u)$ (*который является голоморфной функцией* x' *на* π_0') $\not\equiv 0$.

(b) *Пусть* $\varphi(x', u)$ — *такая функция, голоморфная в некоторой открытой окрестности начала координат пространства* $\mathbf{C}^{k+1}$, *что функция* $\varphi(x', h(x))$ *порождает в точке* $\mathfrak{o}$ *росток* $\varphi(\mathbf{h}) \in I$. *Тогда росток* $\mathbf{R}_h(u)$ *является делителем в кольце* $\mathscr{H}^{k+1}$ *ростка* $\varphi(u) \in \mathscr{H}^{k+1}$, *порожденного функцией* φ *в начале координат пространства* $\mathbf{C}^{k+1}$.

Доказательство. (a) Предположим, что, вопреки утверждению, росток $\mathbf{R}_h(u)$ приводим в кольце $\mathscr{H}^k[u]$. Тогда (см. лемму 2, гл. II, п. 3) существуют два таких отмеченных псевдополинома $R_1(x', u)$, $R_2(x', u)$ относительно u соответственно степеней p_1, $p_2 \geqslant 1$ с коэффициентами, голоморфными в некоторой открытой окрестности $V' \subset \pi_0'$ точки $\mathfrak{o}'$, что $R_h(x', u) \equiv R_1(x', u) R_2(x', u)$ при $x' \in V'$.

Из определения R_h вытекает: для каждой точки $x' \in V' \cap U'$ псевдополином $R_1(x', h(x))$ обращается в нуль точно в p_1 точках $x^{(j)}(x')$, а $R_2(x', h(x))$ в остальных p_2 точках $x^{(j)}(x')$, $1 \leqslant j \leqslant p$. Поэтому, согласно лемме 2, каждая из этих двух функций порождает в точке $\mathfrak{o}$ росток, принадлежащий идеалу I, и, следовательно, обращается в нуль во всех точках $x^{(j)}(x')$, $1 \leqslant j \leqslant p$, для каждой точки $x' \in V' \cap U'$, достаточно близкой к $\mathfrak{o}'$. В силу сказанного по крайней мере два значения $h(x^{(j)}(x'))$ оказываются одинаковыми, т. е. дискриминант полинома R_h равен нулю во всякой точке $x' \in \pi_0' \cap U'$, достаточно близкой к $\mathfrak{o}'$. Так как этот дискриминант является голоморфной функцией x' на π_0', он тождественно равен нулю на π_0'; по крайней мере два значения $h(x^{(j)}(x'))$ равны между собой для любой точки $x' \in \pi_0' \cap U'$, что противоречит предположению леммы.

(b) В силу предложения 2 (b), где $h = x_{k+1}, \ldots, x_m$, из того, что $x \in \pi_0 \cap S$ и $x' \to \mathfrak{o}'$, следует, что $x \to \mathfrak{o}$. Предположим, что $\varphi(\mathbf{h}) \in I$. Тогда $\varphi(x', h(x)) = 0$ для любой

точки $x \in \pi_0 \cap S$, достаточно близкой к $\mathfrak{o}$, т. е. для любой точки $x \in \pi_0 \cap S$ при x', достаточно близком к $\mathfrak{o}'$. Итак, $\varphi(x', u) = 0$ всякий раз, когда $R_h(x', u) = 0$ и точка x' достаточно близка к $\mathfrak{o}'$. Иначе говоря, $\varphi(u)$ обращается в нуль на ростке главного аналитического множества в начале координат пространства $\mathbf{C}^{k+1}$, определяемого ростком $\mathbf{R}_h(u)$. Так как росток $\mathbf{R}_h(u)$ неприводим в кольце $\mathscr{H}^{k+1}$ (см. лемму 3, гл. II, п. 3), то в силу теоремы 6, гл. II росток $\varphi(u)$ делится на $\mathbf{R}_h(u)$ в кольце $\mathscr{H}^{k+1}$.

Замечание. Полезно отметить, что при выполнении предположений леммы 3 $\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{R}_h(\mathbf{h}) \notin I$. Действительно, росток $\mathbf{R}_h(h)$ не может быть делителем ростка $\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{R}_h(h)$ в кольце $\mathscr{H}^{k+1}$ в силу утверждения о единственности подготовительной теоремы Шпэта — Картана.

Теорема 3 (теорема о локальном описании). *Пусть дан простой идеал в кольце $\mathscr{H}^m$ $(m \geqslant 2)$, $\{0\} \neq I \subsetneqq \mathscr{H}'^m$; предполагается, что базис в пространстве $\mathbf{C}^m$ является k-правильным для идеала I. Тогда существуют открытый полицилиндр π_0 с центром в точке $\mathfrak{o}$ (его радиусы предполагаются произвольно малыми) и аналитическое множество S_0 в π_0, порождающее росток $\mathbf{S}_I$ в точке $\mathfrak{o}$, со следующими свойствами:*

(A) *Множество $S_0(x') = \{x \in S_0 \mid (\text{проекция } x \text{ на } \mathbf{C}^k) = x'\}$, где $x' \in \pi_0'$ (проекции π_0 на $\mathbf{C}^k$), удовлетворяет следующим условиям:*

(a) *для любой точки $x' \in \pi_0'$ множество $S_0(x')$ непусто и конечно; максимальное число точек $\in S_0(x')$ есть конечное целое число p (которое зависит только от идеала I); $S_0(\mathfrak{o}') = \{\mathfrak{o}\}$;*

(b) *$S_0(x')$ зависит от x' непрерывно, т. е. если последовательность точек $x_n' \in \pi_0'$ сходится к точке $x_0' \in \pi_0'$, то $x_0 \in S_0(x_0')$ в том и только в том случае, если для каждого n можно так выбрать $x_n \in S_0(x_n')$, что $x_n \to x_0$;*

(c) *для любого всюду плотного подмножества E' множества π_0' множество $E = \bigcup_{x' \in E'} S_0(x')$ всюду плотно в S_0.*

(B) Локальное описание регулярных точек множества S_0. *Каждой линейной форме l над $\mathbf{C}^m$ соответствует такой отмеченный псевдополином $R_l(x', u)$ степени p относительно u с коэффициентами, голоморфными на π_0', что $l(S_0(x')) = \{u \in \mathbf{C} \mid R_l(x', u) = 0\}$ для любой точки $x' \in \pi_0'$.*

(a) *Пусть точка $x_0 \in S_0$. Тогда эквивалентны следующие утверждения: (a_1) по крайней мере для одной линейной формы l над $\mathbf{C}^m$ $l(x_0)$ является простым корнем полинома $R_l(x_0', u)$ (где x_0' — проекция x_0 на $\mathbf{C}^k$); (a_2) x_0 — регулярная точка S_0, это множество имеет в точке x_0 размерность k, проекцией на $\mathbf{C}^k$ аффинного многообразия, касательного в точке x_0 к S_0, служит само пространство $\mathbf{C}^k$.*

(b) *Существует такое главное аналитическое множество σ_0' в π_0', что для каждой точки $x' \in U' = \pi_0' - \sigma_0'$, множество $S_0(x')$ содержит точно p точек $x^{(j)}(x')$, $1 \leqslant j \leqslant p$; они являются регулярными точками S_0 и в них S_0 имеет размерность k; множество $s_0 = \left[\bigcup_{x' \in U_0'} S_0(x')\right] \subset S_0$ всюду плотно в S_0.*

(c) *Для каждой открытой связной окрестности $\omega_1' \subset \pi_0'$ точки $\mathfrak{o}'$ множества $s_1 = \{x \in s_0 \mid x' \in \omega_1'\}$ и $S_1 = \{x \in S_0 \mid x' \in \omega_1'\}$ связны.*

(C) Классическое локальное описание. *Предположим, что по крайней мере для одной точки $x' \in U_0'$ $(k+1)$-координаты p точек $x^{(j)}(x')$ все различны. Тогда существуют отмеченный псевдополином $R(x', u)$ степени p по u и псевдополиномы $X_r(x', u)$, где $r = k+2, \ldots, m$, степени $\leqslant p-1$ по u, такие, что*

(a) *коэффициенты псевдополиномов R и X_r голоморфны в π_0' и все, кроме старшего коэффициента R, обращаются в нуль в точке $\mathfrak{o}'$;*

(b) *ростки $\mathbf{R}(x_{k+1}) \in \mathscr{H}^k[x_{k+1}]$ и $\frac{\partial}{\partial x_{k+1}} \mathbf{R}(x_{k+1})\, x_r - \mathbf{X}_r(x_{k+1})$, $k+2 \leqslant r \leqslant m$, соответственно порождаемые в точках $\mathfrak{o}_{k+1}$ и $\mathfrak{o}$ функциями $R(x', x_{k+1})$ и*

$\frac{\partial}{\partial x_{k+1}} R(x', x_{k+1}) x_r - X_r(x', x_{k+1})$, *принадлежат идеалу* I;

(c) *росток* $\mathbf{R}(x_{k+1})$ *неприводим в кольце* $\mathscr{H}^k[x_{k+1}]$ *и порождает в кольце* $\mathscr{H}^{k+1}$ *идеал* $I_{k+1} = \mathscr{H}^{k+1} \cap I$; *для псевдополинома* $R(x', x_{k+1})$ *дискриминант* $\delta(x') \not\equiv 0$;

(d) *всюду плотное подмножество* $\bigcup_{x' \in \pi'_0,\ \delta(x') \neq 0} S_0(x')$ *множества* S_0 *есть совокупность точек* x, *удовлетворяющих условиям*:

$$\left.\begin{array}{l} x' \in \pi'_0, \qquad \delta(x') \neq 0, \qquad R(x', x_{k+1}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_{k+1}} R(x', x_{k+1}) x_r - X_r(x', x_{k+1}) = 0, \\ \qquad r = k+2, \ldots, m. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Доказательство. Пусть π, S, U' (и $\sigma' = \pi' - U'$) взяты так, как в лемме 1. Пусть $\pi_0 \subset \pi$ — открытый полицилиндр с центром в точке $\mathfrak{o}$, выбранный так, как это указано в предложении 2, для семейства $\mathscr{F}$ всех линейных форм $\{l\}$ над $\mathbf{C}^m$, $S_0 = S \cap \pi_0$, $\sigma'_0 = \sigma' \cap \pi'_0$, $U'_0 = U' \cap \pi'_0$, $R_l(x', u)$ — отмеченный псевдополином, построенный так же, как это указано в предложении 2, степени p относительно u с коэффициентами, голоморфными в π'_0, причем

$$l(S_0(x')) = \{u \in \mathbf{C} \mid R_l(x', u) = 0\}$$

для каждой точки $x' \in \pi'_0$ и каждой формы $l \in \mathscr{F}$. (**)

(A) В силу условия (**), каждое множество $S_0(x')$ содержит не менее одной и не более p различных точек. Согласно лемме 1, если $x' \in U'_0$, то $S_0(x')$ как раз состоит из p различных точек $x^{(j)}(x')$, $1 \leqslant j \leqslant p$; с другой стороны, $S_0(\mathfrak{o}') = \{\mathfrak{o}\}$. Далее, благодаря условию (*) (см. доказательство предложения 2), все корни псевдополиномов $R_{x_r}(x', u)$, где $r = k+1, \ldots, m$, по модулю $\leqslant \rho'_r$ для любой точки $x' \in U'_0$; это остается верным для любой точки $x' \in \pi'_0$. Благодаря условию (**) отсюда вытекает, что r-я координата каждой точки из $S_0(x')$ по модулю $\leqslant \rho'_r$.

Теперь рассмотрим последовательность точек $x'_n \in \pi'_0$, сходящуюся к точке $x'_0 \in \pi'_0$. Если для каждого индекса n_ν

в какой-то произвольно выбранной последовательности можно так найти $x_{n_\nu} \in S(x'_{n_\nu})$, что $x_{n_\nu} \to x_0$, то $x_0 \in \pi_0$ и $x_0 \in S_0(x'_0)$, поскольку множество S_0 замкнуто в π_0. Обозначим через X_0 множество предельных точек сходящихся подпоследовательностей x_{n_ν}, для которых $x_{n_\nu} \in S_0(x'_{n_\nu})$; мы показали, что $X_0 \subset S_0(x'_0)$. Теперь допустим, что $X_0 \subsetneqq S_0(x'_0)$: тогда, так как множество $S_0(x'_0)$ конечно, должны существовать форма $l \in \mathscr{F}$ и значение $l_0 \in l(S_0(x'_0)) - l(X_0)$. В силу условия (**), l_0 — корень полинома $R_l(x'_0, u)$ и каждый корень полинома $R_l(x'_n, u)$ является значением формы l в некоторой точке из $S_0(x'_n)$. Для каждого номера n мы можем так выбрать корень $l(x_n)$ полинома $R_l(x'_n, u)$, $x_n \in S_0(x'_n)$, что $l(x_n) \to l_0$; надлежащим образом выбранная подпоследовательность x_{n_ν} сходится к точке $x_0 \in X_0$, так что $l(x_0) = l_0$.

Мы пришли к противоречию. Тем самым мы доказали, что если даны точка $x_0 \in S_0(x'_0)$ и последовательность $\{x'_n\}$, где $x'_n \to x'_0$, то существуют такие подпоследовательность $\{x'_{n_\nu}\}$ и точки $x_{n_\nu} \in S_0(x'_n)$ для всех номеров ν, что $x_{n_\nu} \to x_0$; это справедливо для любой подпоследовательности последовательности $\{x'_n\}$, если для каждого n существует такое $x_n \in S_0(x'_n)$, что $x_n \to x_0$.

Итак, утверждение (b) части (A) доказано; из него вытекает утверждение (c).

(B) Для доказательства утверждения (a) сначала предположим, что $\frac{\partial}{\partial u} R_l(x'_0, l(x_0)) \neq 0$; тогда существует такой открытый полицилиндр $\omega_0 \subset \pi_0$ с центром в точке x_0, что (I) $\frac{\partial}{\partial u} R_l(x', l(x)) \neq 0$ при $x \in \omega_0$; если даны $x' \in \omega'_0$ (проекции ω_0 на C^k), $x \in \omega_0$, то условие $R_l(x', l(x)) = 0$ определяет $l(x)$ однозначно; (II) любая точка, принадлежащая ω'_0, является проекцией по крайней мере одной точки, принадлежащей $\omega'_0 \cap S$ (последнее мы устанавливаем, используя утверждение (b) части (A)). В силу предложения 2 (d), существуют такие псевдополиномы $X_r(x', u)$, $r = k+1, \ldots, m$, относительно u с коэффициентами, голоморфными в π'_0, что

$\frac{\partial}{\partial u} R_l(x', l(x))\, x_r = X_r(x', l(x))$ для любой точки $x \in \bigcup_{x' \in U_0'} S_0(x')$, а следовательно, согласно (c) части (A), для любой точки $x \in S_0$.

Тогда, в силу условий (I) и (II), любая точка $x' \in \omega_0'$ является проекцией одной и только одной точки $x(x') \in \omega_0 \cap S_0$; положение этой точки непрерывно зависит от положения точки x' (согласно утверждению (b) части (A)). Следовательно, $l(x(x'))$ — голоморфная функция x' на ω_0'; последнее, в частности, верно для каждой координаты точки $x(x')$: $x_r = g_r(x')$, $r = k+1, \ldots, m$. Так как пересечение $\omega_0 \cap S_0$ определяется $m-k$ уравнениями $x_r = g_r(x')$, то x_0 — регулярная точка $\omega_0 \cap S_0$, а значит и S_0, и множество S_0 имеет в этой точке размерность k; проекция на C^k аффинного многообразия, касающегося S_0 в точке x_0, совпадает с C^k (см. пример в п. 2).

Обратно, пусть нам дано, что последнее условие выполнено. Тогда можно найти такой открытый полицилиндр $\omega_0 \subset \pi_0$ с центром в точке x_0, что множество $\omega_0 \cap S_0$ будет определяться $m-k$ уравнениями $x_r = g_r(x')$, $r = k+1, \ldots, m$, где функции g_r голоморфны в ω_0'; при этом, если $x' \in \omega_0' \cap U_0'$, то для одного и только одного номера j имеем $x^{(j)}(x') \in \omega_0 \cap S_0$, а остальные $p-1$ точек $x^{(j)}(x')$ принадлежат ${}^c\omega_0$. Следовательно, согласно утверждению (b) части (A), при $x' \in \omega_0' \cap U_0'$ и достаточно близком к x_0' эти точки будут лежать в наперед заданной окрестности $S_0(x_0') - \{x_0\}$.

Возьмем $l \in \mathcal{F}$ так, что $l(x_0) \notin l(S_0(x_0') - \{x_0\})$: для $x' \in \omega_0' \cap U_0'$ корнями $R_l(x', u)$ (по определению этого псевдополинома) будут служить величины $l(x^{(j)}(x'))$. Поэтому, когда $x' \to x_0'$, одна из этих точек стремится к $l(x_0)$, другие $p-1$ значений принадлежат $l_0(S_0(x_0') - \{x_0\})$; итак, $l(x_0)$ — простой корень псевдополинома $R_l(x_0', u)$.

Таким образом, утверждение (a) доказано; утверждение (b) также доказано, так как (a_1) выполнено для $x_0 = x^{(j)}(x')$. Наконец, отметим, что так как s_0 всюду плотно в S_0, то утверждение (c) будет доказано, если мы покажем, что $s_1 = s_0 \cap S_1$ связно.

Пусть $\tilde{s}_1$ — связная компонента s_1, $x'_0 \in \omega'_1 \cap U'_0$. Допустим, что q точек $x^{(j)}(x'_0) \in s_1$, $j = 1, \ldots, q$, где $0 \leqslant q \leqslant p$. Тогда, если $W' \subset \omega'_1 \cap U'_0$ — такая открытая *связная* окрестность x'_0, что все p отображений $x' \to x^{(j)}(x')$ оказываются в ней голоморфными, то легко видеть, что $x^{(j)}(W') \subset \tilde{s}_1$, $1 \leqslant j \leqslant q$, тогда как $x^{(j)}(W') \cap \tilde{s}_1 = \varnothing$ при $q+1 \leqslant j \leqslant p$. Таким образом, число $q(x')$ точек некоторой связной компоненты s, лежащих над точками $x' \in \omega' \cap U'_0 = \omega' \cap {}^c\sigma'_0$, есть локально постоянная функция x' на $\omega' \cap U'_0$. Так как, в силу теоремы 1, множество $\omega'_1 \cap U'_0$ связно, то число точек некоторой связной компоненты s_1, лежащих над точками $x' \in \omega'_1 \cap U'_0$, является одним и тем же для всех этих точек.

Пусть $\tilde{s}_1$ — некоторая связная компонента s_1; предположим, что над любой произвольно взятой точкой множества $\omega'_1 \cap U'_0$ лежит $q\,(>0)$ точек s. Повторяя рассуждение, с помощью которого в предложении 2 был построен псевдополином $R_h(x', u)$, мы построим для каждой линейной формы l над C^m псевдополином $\tilde{R}_l(x', u)$ степени q относительно u с коэффициентами, являющимися голоморфными функциями x' в ω'_1. Для каждой точки $x' \in \omega'_1 \cap U'_0$ голоморфная функция $x \to R_l(x', l(x))$, по построению, обращается в нуль в $q\,(>0)$ точках $x^{(j)}(x')$. Следовательно, согласно лемме 2, если точка $x' \in \omega'_1 \cap U'_0$ достаточно близка к точке $\mathfrak{o}'$, то псевдополином $\tilde{R}_l(x', u)$ обращается в нуль при $u = l(x^{(j)}(x'))$, $j = 1, \ldots, p$. Но для любой точки $x' \in \omega'_1 \cap U'_0$ можно так выбрать форму l, что все величины $l(x^{(j)}(x'))$, $j = 1, \ldots, p$, окажутся различными. Следовательно, число q, равное степени $\tilde{R}_l$, не может быть меньше p. Итак, $\tilde{s}_1 = s_1$ и s_1 — связно, что и требовалось доказать.

(C) R — это псевдополином R_l, соответствующий форме $l(x) = x_{k+1}$; X_r — это псевдополиномы X_0 из предложения 2 (d), соответствующие функциям $h_0(x) = x_{k+2}, \ldots, x_m$; таким образом, утверждения (a) и (b) содержатся в предложении 2, утверждение (c) в лемме 3; нам остается доказать только утверждение (d).

В силу условия (**), $R(x', x_{k+1})=0$ для любой точки $x \in S_0$; в силу замечания 1 предложения 2, $\frac{\partial}{\partial x_{k+1}} R(x', x_{k+1}) x_r - X_r(x', x_{k+1}) = 0$, $r = k+2, \ldots, m$, для точки $x \in S_0$. Таким образом, любая точка $x \in \bigcup\limits_{\substack{x' \in \pi_0' \\ \delta(x') \neq 0}} S_0(x')$ удовлетворяет условию (1).

Обратно, если известно, что точка x удовлетворяет условию (1), то, в силу условия (**), существует такая точка $\tilde{x} \in S_0(x')$, что x и $\tilde{x}$ имеют одни и те же первые $k+1$ координат. Так как каждая функция $\frac{\partial}{\partial x_{k+1}} R(x', x_{k+1}) x_r - X_r(x', x_{k+1})$ обращается в нуль в точках x и $\tilde{x}$, $\frac{\partial}{\partial x_{k+1}} R(x', x_{k+1}) \neq 0$, то $x = \tilde{x}$.

Замечание 1. Согласно утверждению (а) части (В) множество точек $x_0 \in S_0$, не удовлетворяющих условию (a_2), совпадает с множеством тех точек $x \in S_0$, для которых $\frac{\partial}{\partial u} R_l(x', l(x)) = 0$ для любой формы $l \in \mathcal{F}$. Это будет использовано (см. п. 2, гл. IV) при доказательстве того, что множество нерегулярных точек аналитического множества есть снова аналитическое множество.

Из того же круга соображений: для каждого номера $r = k+1, \ldots, m$ точка $(x', x_{k+1}, \ldots, x_r) \in C^r$ является проекцией на C^r по крайней мере одной точки из S_0 в том и только том случае, если $x' \in \pi_0'$ и для каждой линейной формы l на C^r $R_l(x', l(x', x_{k+1}, \ldots, x_r)) = 0$. Это также будет использовано в гл. IV, п. 1.

Замечание 2. В последней части доказательства теоремы 3 по существу дела устанавливается, что из условий

$$\left.\begin{aligned} & x' \in \pi_0', \quad R(x', x_{k+1}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_{k+1}} R(x', x_{k+1}) \neq 0, \\ & \frac{\partial}{\partial x_{k+1}} R(x', x_{k+1}) x_r - X_r(x', x_{k+1}) = 0, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad r = k+2, \ldots, m \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

вытекает, что $x \in S_0$. Так как из условий (1) вытекают условия (2), то классическое локальное описание можно сформулировать следующим образом (это оказывается полезным): S_0 является замыканием в π_0 множества точек, удовлетворяющих условию (2).

В классическом локальном описании используются предположения части (C). Эти предположения можно сформулировать следующими, эквивалентными предыдущему, способами.

(I) Хотя бы для одной точки $x' \in U_0'$ $(k+1)$-е координаты p точек $x^{(j)}(x')$ все различны.

(II) Существует такое всюду плотное открытое подмножество V' множества π_0', что для любой точки $x' \in V'$ две различные точки из $S_0(x')$ имеют различные $(k+1)$-е координаты.

Действительно, если (I) имеет место, то $\delta(x') \not\equiv 0$, согласно утверждению (c) части (C), и условие (II) имеет место для $V' = \{x' \in U_0' \mid \delta(x') \neq 0\}$. Таким образом, мы видим, что выполнение предположений части (C) не должно зависеть от выбора множества π_0. Наконец, если эти предположения не выполняются для данного базиса в пространстве C^m, то так как сами p точек $x^{(j)}(x')$ все различны для каждой точки $x' \in U_0'$, мы можем найти такой новый базис в пространстве C^m, в котором $x_1, \ldots, x_k$ остаются первыми k координатами (благодаря чему этот базис остается k-правильным для идеала I), для которого предположения части (C) будут выполнены.

Замечание 3. Если $p = 1$, то в силу утверждения (a) части (B) каждая точка S_0 является регулярной точкой S_0 и это множество имеет в этой точке размерность k.

Если $k = m - 1$, т. е. если I — главный идеал (см. замечание в п. 3), то в силу условия (**) S_0 является множеством нулей псевдополинома $R(x', x_m)$ в π_0, и в силу утверждения (c) части (C) росток, порождаемый $R(x', x_m)$ в точке 0, порождает главный идеал I.

Если $k = 1$, $p \geqslant 2$ и полицилиндр π_0 выбран достаточно малым, то $\delta(x_1) = 0$ в том и только том случае, если $x_1 = 0$, т. е. если подмножество S_0, определенное условием (1) или (2), есть $S_0 - \{0\}$. В этом случае множество S_0 может быть параметризовано с помощью параметра $t = x_1^{1/p}$ и представлено

с помощью уравнений:

$$x_1 = t^p, \quad x_j = g_j(t), \quad j = 2, \ldots, m, \quad |t| < \rho_1^{1/p};$$

здесь ρ_1 — первый радиус π_0, функции g_j голоморфны при $|t| < \rho_1^{1/p}$ и $g_j(0) = 0$.

Следствие 1. *Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве U. Тогда любое компактное подмножество из U может содержать только конечное множество изолированных точек в S.*

Доказательство. Если справедливо противоположное утверждение, то можно найти 1) точку из S (мы принимаем эту точку за $\mathfrak{o}$ — начало координат); 2) аналитическое множество S' в некоторой открытой окрестности точки $\mathfrak{o}$, причем S' порождает неприводимый росток $\mathbf{S}'$ в точке $\mathfrak{o}$; 3) последовательность изолированных точек S', сходящуюся к точке $\mathfrak{o}$. Идеал $I(\mathbf{S}')$ является простым, $\{\mathbf{0}\} \neq I \subsetneqq \mathscr{H}'^m$; тогда, в силу теоремы 3, существует множество S_0, совпадающее с S' в некоторой окрестности точки $\mathfrak{o}$ и не имеющее, согласно утверждению (b) части (A), изолированных точек.

Следствие 2. *Если базис в пространстве $\mathbf{C}^m$ является k-правильным для простого идеала I в кольце $\mathscr{H}^m$, $\{\mathbf{0}\} \neq I \subsetneqq \mathscr{H}'^m$, и аналитическое множество S в некоторой открытой окрестности точки $\mathfrak{o}$ порождает в точке $\mathfrak{o}$ росток $\mathbf{S}_I$, то для любой точки $a \in S$, достаточно близкой к точке $\mathfrak{o}$, базис в пространстве $\mathbf{C}^m$ является k-правильным для идеала $I(\mathbf{S}_a)$ в кольце $\mathscr{H}_a^m$, т. е. величины $x_1 - a_1, \ldots, x_k - a_k$ обладают свойствами, указанными в определении 2.*

Доказательство. Мы покажем, что для любой точки a множества S_0 теоремы 3 базис в пространстве $\mathbf{C}^m$ является k-правильным для идеала I_a в кольце $\mathscr{H}_a^m$, присоединенного к ростку, порожденному в точке a множеством S_0. Пусть a' — проекция точки a на $\mathbf{C}^k$: идеал в кольце $\mathscr{H}_a^m$, порожденный I_a и функциями $(x_1 - a_1), \ldots, (x_k - a_k)$, определяет в точке a росток, порождаемый множеством $S_0(a')$. Этот росток совпадает с $\{\mathbf{a}\}$, так как множество $S_0(a')$ конечно. Итак, $(I_a)_k = \{\mathbf{0}\}$, так как, согласно утверждению (b) части (A), проекцией любой (малой) окрестности точки a в S_0

на пространство C^k является окрестность точки a' в пространстве C^k.

Замечание. В частности, базис в пространстве C^m является k-правильным для идеала $I' = I(S_I)$. Но $I' \supset I$ и поэтому, в силу предложения 3, п. 3, $I' = I$, т. е. $I = I(S_I)$. Более прямое доказательство этого важного факта будет дано в гл. IV (теорема 2 (а)).

Глава IV

ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ

1. Непосредственные выводы из локального описания

Теорема 1 (А. Картан). *Дано аналитическое множество S в открытом множестве U. Тогда для любой точки $a_0 \in U$ можно указать такое конечное семейство $\mathcal{F}_0$ функций, голоморфных в открытой окрестности $V \subset U$ точки a_0, что для любой точки $a \in V$ ростки, порождаемые функциями из $\mathcal{F}_0$ в $\mathcal{H}_a^m$, порождают в этом кольце идеал I_a, присоединенный к ростку $\mathbf{S}_a$. Иными словами: пучок некоторого аналитического множества когерентен* (см. H. Cartan, *Bull. Soc. Math. France*, **78** (1950), 29—64)[1].

Доказательство. Оставляя в стороне несколько тривиальных случаев и используя тот факт, что пересечение конечного множества когерентных пучков есть снова когерентный пучок (см. указанную выше работу А. Картана, стр. 41), достаточно показать, что существует такое конечное семейство $\mathcal{F}_0$ функций, голоморфных на π_0, что в любой точке $a \in \pi_0$, достаточно близкой к 0, ростки, порожденные в этой точке a функциями из $\mathcal{F}$, порождают в кольце $\mathcal{H}_a^m$ идеал I_a, присоединенный к ростку, определяемому S_0 в точке a (мы сохраняем обозначения теоремы 3, гл. III).

Мы можем найти $1+(p-1)(m-k-1)$ линейных форм l_i над $\mathbf{C}^m$, $i=1, \ldots, 1+(p-1)(m-k-1)$, со следующими двумя свойствами:

(α) $x_1, \ldots, x_k$ и любые $m-k$ форм из числа l_i — независимы;

---

[1]) По поводу понятия когерентного пучка см. также книгу: Фукс Б. А., Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных (Москва, Физматгиз, 1963), § 8 гл. II. — *Прим. перев.*

(β) существует такая точка $x' \in U_0'$, что для любого номера i все p значений $l_i(x^{(j)}(x'))$, $1 \leqslant j \leqslant p$, различны.

Для любых $i = 1, \ldots, 1 + (p-1)(m-k+1)$ и $r = k+1, \ldots, m$, мы обозначим через $X_{i,r}$ псевдополином, построенный в предложении 2 (d), гл. III, причем $h = l_i$ и $h_0(x) = x_r$. Функции $R_{x_r}(x', x_r)$, $R_{l_i}(x', l_i(x))$ и $\frac{\partial}{\partial u} R_{l_i}(x', l_i(x))\, x_r - X_{i,r}(x', l_i(x))$, $i = 1, \ldots, 1+(p-1)\times$ $\times (m-k-1)$, $r = k+1, \ldots, m$, составляют конечное семейство $\mathscr{F}_1$ функций, голоморфных в π_0. Каждая из этих функций обращается в нуль в любой точке $x \in S_0$ (см. замечание 1 к предложению 2, гл. III) и, следовательно, порождают в точке a росток, принадлежащий I_a. Опуская индекс a, мы обозначим эти ростки соответственно через

$$\mathbf{R}_{x_r}(x_r),\ \mathbf{R}_{l_i}(\mathbf{l}_i),\ \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{R}_{l_i}(\mathbf{l}_i)\, x_r - \mathbf{X}_{i,r}(\mathbf{l}_i).$$

Для точки $a \in S_0$ множество $S_0(a') - \{a\}$ (где a' — проекция a на C^k) состоит не более чем из $p-1$ точек. Произвольно взятая точка этого множества (обозначим ее через $\tilde{a}$) отлична от a, но имеет ту же самую проекцию a' на C^k. Учитывая еще условие (α), находим, что $l_i(\tilde{a}) = l_i(a)$ для не более чем $m-k-1$ значений индекса i. Всегда можно найти такое значение индекса i, зависящее только от a, что $l_i(\tilde{a}) \neq l_i(a)$ для любой точки $\tilde{a} \in S_0(a') - \{a\}$. В дальнейшем индекс i предполагается выбранным указанным образом.

Для любого ростка $\mathbf{f} \in I_a$, в силу теоремы 2, гл. II, существует такой полином $\mathbf{X}(x_{k+1}, \ldots, x_m) \in$ $\in \mathscr{H}_a^k[x_{k+1}, \ldots, x_m]$ степени $< p$ по каждому из переменных $x_{k+1}, \ldots, x_m$, что $\mathbf{f} - \mathbf{X}(x_{k+1}, \ldots, x_m)$ является линейной комбинацией ростков $\mathbf{R}_{x_r}(x_r)$, $r = k+1, \ldots, m$, над кольцом $\mathscr{H}_a^m$. Поскольку все эти ростки принадлежат идеалу I_a, то и полином $\mathbf{X}(x_{k+1}, \ldots, x_m)$ также принадлежит этому идеалу. Мы можем положить

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{R}_{l_i}(\mathbf{l}_i)\right]^{(p-1)(m-k)} \mathbf{X}(x_{k+1}, \ldots, x_m) =$$
$$= \mathbf{Y}\left(\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{R}_{l_i}(\mathbf{l}_i)\, x_{k+1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{R}_{l_i}(\mathbf{l}_i)\, x_m, \mathbf{l}_i\right),$$

где

$$\mathbf{Y}(y_{k+1}, \ldots, y_m, u) \in \mathscr{H}^k_{a'}[y_{k+1}, \ldots, y_m, u] .$$

и

$$\mathbf{Y}\left(\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{R}_{l_i}(\mathbf{l}_i)\, x_{k+1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{R}_{l_i}(\mathbf{l}_i)\, x_m, \mathbf{l}_i\right) - \\ - \mathbf{Y}(\mathbf{X}_{i,\,k+1}(\mathbf{l}_i), \ldots, \mathbf{X}_{i,\,m}(\mathbf{l}_i), \mathbf{l}_i)$$

является линейной комбинацией ростков $\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{R}_{l_i}(\mathbf{l}_i)\, x_r - \mathbf{X}_{i,\,r}(\mathbf{l}_i)$, $r = k+1, \ldots, m$, над кольцом $\mathscr{H}^m_a$. Положим $\mathbf{Y}(\mathbf{X}_{i,\,k+1}(\mathbf{l}_i), \ldots, \mathbf{X}_{i,\,m}(\mathbf{l}_i), \mathbf{l}_i) = \varphi(\mathbf{l}_i)$, где $\varphi(u) \in \mathscr{H}^k_{a'}[u]$. Тогда $\varphi(\mathbf{l}_i) \in I_a$ и $\left[\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{R}_{l_i}(\mathbf{l}_i)\right]^{(p-1)(m-k)} \mathbf{f} - \varphi(\mathbf{l}_i)$ есть линейная комбинация над кольцом $\mathscr{H}^m_a$ ростков, порождаемых в точке a функциями из $\mathscr{F}_1$.

Ростки $\varphi(\mathbf{l}_i)$ порождаются в точке a функциями $\varphi(x', l_i(x))$, где $\varphi(x', u)$ — псевдополином относительно u с коэффициентами, голоморфными в некоторой открытой окрестности точки a'; включение $\varphi(\mathbf{l}_i) \in I_a$ указывает на то, что $\varphi(x', l_i(x)) = 0$ в любой точке $x \in S_0$, достаточно близкой к a. В силу утверждения (b) части (A) теоремы 3, гл. III, это обстоятельство эквивалентно тому, что $\varphi(x', u) = 0$, когда $R_{l_i}(x', u) = 0$ и точка (x', u) достаточно близка к точке $(a', l_i(a))$. Поэтому, в силу теоремы 6, гл. II, каждый неприводимый (в кольце $\mathscr{H}^{k+1}_{a', l_i(a)}$) множитель ростка $\mathbf{R}_{l_i}(u)$ (порожденного $R_{l_i}(x', u)$ в точке $(a', l_i(a)) \in \mathrm{C}^{k+1}$) является делителем в кольце $\mathscr{H}^{k+1}_{a', l_i(a)}$ ростка $\varphi(u)$ (порожденного $\varphi(x', u)$ в той же точке).

Но росток $\mathbf{R}_{l_i}(u)$ эквивалентен в кольце $\mathscr{H}^{k+1}_{a', l_i(a)}$ отмеченному псевдополиному $\mathbf{A}$ относительно разности $u - l_i(a)$, который, в силу утверждения о единственности в подготовительной теореме Шпэта — Картана, является делителем $\mathbf{R}_{l_i}(u)$ в кольце $\mathscr{H}^k_{a'}[u]$. Благодаря условию (β) дискриминант $R_{l_i}(u)$ отличен от нуля; поэтому необратимые и неприводимые сомножители $\mathbf{A}$ в кольце $\mathscr{H}^{k+1}_{a', l_i(a)}$ или в кольце $\mathscr{H}^k_{a'}[u - l_i(a)]$ (см. п. 3, гл. II) взаимно неэквивалентны.

Так как $\mathbf{R}_{l_i}(u)$ является делителем $\varphi(u)$ в кольце $\mathscr{H}^{k+1}_{a',\, l_i(a)}$, то $\mathbf{R}_{l_i}(\mathbf{l}_i)$ является делителем $\varphi(\mathbf{l}_i)$ в кольце $\mathscr{H}^m_a$ и $\left[\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{R}_{l_i}(\mathbf{l}_i)\right]^{(p-1)(m-k)}\mathbf{f}$ является линейной комбинацией над кольцом $\mathscr{H}^m_a$ ростков, порожденных функциями из $\mathscr{F}_1$.

(Далее все ростки берутся в точке a; однако индекс a в их обозначении опускается.) Имея в виду, что индекс l зависит от выбора точки a, положим

$$\rho(x)=\left[\prod_{i=1}^{1+(p-1)(m-k-1)}\frac{\partial}{\partial u}R_{l_i}(x',\ l_i(x))\right]^{(p-1)(m-k)}.$$

Мы показали, что для любой точки $a\in S_0$ и любого ростка $\mathbf{f}\in I_a$ произведение $\mathbf{f}\rho$ является линейной комбинацией (над кольцом $\mathscr{H}^m_a$) ростков, порожденных функциями из $\mathscr{F}_1$. Теперь, в силу условия (β) и замечания к лемме 3, п. 4, гл. III, ростки, порожденные в точке $\mathfrak{o}$ функциями $\frac{\partial}{\partial u}R_{l_i}(x',\ l_i(x))$, не могут принадлежать идеалу I. Так как I — простой идеал, росток, порождаемый в точке $\mathfrak{o}$ функцией ρ, не может принадлежать I.

Полицилиндр π_0, рассмотренный в теореме 3, гл. III, содержится в полицилиндре π, определенном в начале п. 4, гл. III; идеал I порождается ростками, порожденными в точке $\mathfrak{o}$ конечным семейством функций, голоморфных в полицилиндре π_0 и имеющих S_0 множеством общих нулей. Примем за $\mathscr{F}_0=\{\rho_\nu \mid 1\leqslant\nu\leqslant n\}$ совокупность этих функций и функций из $\mathscr{F}_1$. Так как пучок соотношений между ρ_ν и ρ когерентен (см. указанную выше работу А. Картана[1]), то существует конечное число (обозначим его через s) таких систем голоморфных функций $\varphi_1^{(\sigma)},\ \ldots,\ \varphi_n^{(\sigma)},\ \varphi^{(\sigma)}$, $1\leqslant\sigma\leqslant s$, в открытой окрестности $V\subset\pi_0$ точки $\mathfrak{o}$, что

(I) $\varphi_1^{(\sigma)}\rho_1+\ldots+\varphi_n^{(\sigma)}\rho_n+\varphi^{(\sigma)}\rho\equiv 0$ в V для любого σ;

(II) для любой точки $a\in V$ любая система ростков $\mathbf{f}_1,\ \ldots,\ \mathbf{f}_n,\ \mathbf{f}\in\mathscr{H}^m_a$, такая, что $\mathbf{f}_1\rho_1+\ldots+\mathbf{f}_n\rho_n+\mathbf{f}\rho=0$,

[1]) См. также книгу, цитированную в предыдущей сноске, п. 1, § 8, гл. II. — *Прим. перев.*

является линейной комбинацией (над кольцом $\mathscr{H}_a^m$) s систем ростков $\varphi_1^{(\sigma)}, \ldots, \varphi_n^{(\sigma)}$, $\varphi^{(\sigma)}$, $1 \leqslant \sigma \leqslant s$.

Тогда, согласно (II), для любой точки $a \in V \cap S_0$ любой росток $\mathbf{f} \in I_a$ является линейной комбинацией над кольцом $\mathscr{H}_a^m$ ростков $\varphi^{(\sigma)}$, $1 \leqslant \sigma \leqslant s$. Согласно (I), росток, порожденный в точке $\mathfrak{o}$ каждой функцией $\varphi^{(\sigma)}\rho$, принадлежит идеалу I. Это же имеет место и для ростков, порожденных самими функциями $\varphi^{(\sigma)}$. Следовательно, в надлежащим образом выбранной открытой окрестности $W \subset V$ точки $\mathfrak{o}$ каждая функция $\varphi^{(\sigma)}$ является линейной комбинацией ρ_ν, $1 \leqslant \nu \leqslant n$. В итоге для любой точки $a \in W \cap S_0$ любой росток $\mathbf{f} \in I_a$ оказывается линейной комбинацией (над кольцом $\mathscr{H}_a^m$) ростков, порожденных в точке a функциями $\in \mathscr{F}_0$; это остается справедливым для точек $a \in W \cap {}^cS_0$, так как по крайней мере одна из функций $\in \mathscr{F}_0$ в этом случае не должна равняться нулю в точке a. Теорема доказана.

Теорема 2 (a). *Если I — простой идеал в кольце $\mathscr{H}^m$, то идеалом, присоединенным к ростку $\mathbf{S}_I$, является сам идеал I, следовательно, росток $\mathbf{S}_I$ — неприводим.*

(b) *Если I — произвольный идеал в кольце $\mathscr{H}^m$, то идеалом, присоединенным к ростку $\mathbf{S}_I$, является* $\operatorname{rad} I$.

Доказательство. (a) Очевидно достаточно рассмотреть случай, когда $\{0\} \neq I \subsetneqq \mathscr{H}'^m$. Предположим, что росток $\mathbf{h} \in \mathscr{H}^m$ обращается в нуль на ростке аналитического множества $\mathbf{S}_0 = \mathbf{S}_I$ (мы сохраняем обозначения леммы 1, п. 4, гл. III). Тогда росток $\mathbf{h}$, в частности, удовлетворяет требованиям леммы 2 и, следовательно, $I(\mathbf{S}_I) \subset I$. Так как включение $I \subset I(\mathbf{S}_I)$ имеет место для любого идеала I кольца $\mathscr{H}^m$, утверждение (a) доказано.

(b) Пусть I — произвольный идеал в кольце $\mathscr{H}^m$. Мы можем снова предположить, что $\{0\} \neq I \subsetneqq \mathscr{H}'^m$. Прежде всего мы покажем, что $\mathbf{S}_I = \mathbf{S}_{\operatorname{rad} I}$. Действительно, $\mathbf{S}_{\operatorname{rad} I} \subset \mathbf{S}_I$, так как $I \subset \operatorname{rad} I$. Для любого ростка $\mathbf{f} \in \operatorname{rad} I$ существует такое целое число $n \geqslant 1$, что $\mathbf{F} = \mathbf{f}^n \in I$. Следовательно, $\mathbf{S}_I \subset \mathbf{S}_F = \mathbf{S}_f$. Итак, $\mathbf{S}_I \subset \mathbf{S}_f$ для каждого ростка $\mathbf{f} \in \operatorname{rad} I$. Следовательно, $\mathbf{S}_I \subset \mathbf{S}_{\operatorname{rad} I}$ и поэтому $\mathbf{S}_{\operatorname{rad} I} = \mathbf{S}_I$.

Предположим сначала, что I — примарный идеал. Тогда $\operatorname{rad} I$ является простым идеалом; следовательно, в силу (a)

присоединенным идеалом к ростку $\mathbf{S}_I = \mathbf{S}_{\operatorname{rad} I}$ является $\operatorname{rad} I$. Итак, утверждение (b) доказано, если I — примарный идеал.

Теперь предположим, что I — произвольный идеал в кольце $\mathscr{H}^m$. Тогда идеал $I = \bigcap_{i=1}^{n} J_i$, где J_i — примарные идеалы (см. п. 2 (d), гл. II), $\mathbf{S}_I = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{S}_{J_i}$ (см. предложение 1, п. 8, гл. II). Следовательно (см. предложение 2, п. 8, гл. II)

$$I(\mathbf{S}_I) = I(\mathbf{S}_{J_1}) \cap \ldots \cap I(\mathbf{S}_{J_n}) = \operatorname{rad} J_1 \cap \ldots \cap \operatorname{rad} J_n = \operatorname{rad} I,$$

так как J_i — примарные идеалы, а радикал пересечения конечного множества идеалов (в любом кольце) есть пересечение их радикалов. Теорема доказана.

Следствие 1. *Следующие утверждения эквивалентны для произвольного идеала кольца* $\mathscr{H}^m$: (1) $I = \operatorname{rad} I$; (2) $I = I(\mathbf{S}_I)$; (3) $I = I(\mathbf{S})$ *для некоторого ростка аналитического множества* $\mathbf{S}$ *в точке* $\mathfrak{o}$.

Следствие 2. *Следующие включения эквивалентны для двух произвольных идеалов* I, J *кольца* $\mathscr{H}^m$: (1) $\mathbf{S}_I \subset \mathbf{S}_J$; (2) $\operatorname{rad} J \subset \operatorname{rad} I$.

Этот результат содержит предложение 1, п. 4, гл. III.

Если $\mathscr{H}^m$ — нётерово кольцо, то из теоремы 2 (b) для него легко получается

Следствие 3 (теорема Гильберта о нулях[1]). *Для любого идеала* I *кольца* $\mathscr{H}^m$ *можно указать такое целое число* $n(I) = n > 0$, *что если росток* $\mathbf{f} \in \mathscr{H}^m$ *обращается в нуль на* $\mathbf{S}_I$, *то* $\mathbf{f}^n \in I$.

Теорема 3. *Пусть* S — *аналитическое множество в открытом множестве* $U \subset \mathbf{C}^m$ *и* $a \in S$. *Тогда существует открытая окрестность* $V \subset U$ *точки* a *со следующим свойством: для любого аналитического множества* S' *в* U *из включения* $\mathbf{S}'_a \supset \mathbf{S}_a$ *вытекает, что* $S' \supset V \cap S$.

Доказательство. Очевидно, мы можем принять, что $\{\mathbf{a}\} \subsetneqq \mathbf{S}_a = \mathbf{S} \neq \mathbf{C}^m_a$. Тогда, если $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_n$ — неприводимые компоненты $\mathbf{S}$, то $\{\mathbf{a}\} \subsetneqq \mathbf{T}_j \neq \mathbf{C}^m_a$. Следовательно, согласно теореме 3 (B), гл. III, для каждого индекса

[1]) По-немецки „Nullstellensatz".

$j\,(1 \leqslant j \leqslant n)$ можно найти такую открытую окрестность $V_j \subset U$ точки a и такое аналитическое множество T_j в V_j, что: (I) аналитическое множество T_j порождает росток $\mathbf{T}_j$ в точке a; (II) T_j содержит всюду плотное связное подмножество t_j, все точки которого являются регулярными точками T_j.

Теперь предположим, что S' — аналитическое множество в U и $\mathbf{S}'_a \supset \mathbf{S}_a$. Тогда $\mathbf{S}'_a \supset \mathbf{T}_j$ для любого j, $1 \leqslant j \leqslant p$, и, следовательно, $\mathbf{S}'_b \supset (T_j)_b$ для всех точек $b \in t_j$, достаточно близких к [illegible] В силу предложения 3, п. 2, гл. III заключаем, что [illegible] $\cap V_j$ [illegible] t_j. Так как множество $S' \cap V_j$ замкнуто в V_j, а множество t_j всюду плотно в T_j, то $S' \supset T_j$. Наконец, так как $\mathbf{S} = \bigcup_{j=1}^{n} \mathbf{T}_j$, то существует такая открытая окрестность $V \subset \bigcap_{j=1}^{n} V_j$ точки a, что $S \cap V = V \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} T_j\right)$. Тогда очевидно, что $S' \supset S \cap V$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пересечение любого семейства $\mathscr{F}$ аналитических множеств в открытом множестве $U \subset C^m$ снова является аналитическим множеством в U.*

Доказательство. Так как семейство конечных пересечений элементов множества $\mathscr{F}$ имеет то же пересечение, что и само $\mathscr{F}$, и является убывающим фильтром (иначе, фильтром слева) по отношению к включению, то мы можем принять, что и само семейство $\mathscr{F}$ является убывающим фильтром. Тогда для любой точки $a \in U$ семейство идеалов $\{I(\mathbf{S}_a)\}_{S \in \mathscr{F}}$ в кольце $\mathscr{H}_a^m$ в свою очередь является возрастающим фильтром (иначе, фильтром справа) по отношению к включению. Так как $\mathscr{H}_a^m$ — нётерово кольцо, то $I = \bigcup_{S \in \mathscr{F}} I(\mathbf{S}_a)$ — снова идеал в кольце $\mathscr{H}_a^m$, принадлежащий семейству идеалов $\{I(\mathbf{S}_a)\}_{S \in \mathscr{F}}$. Пусть $I = I(\mathbf{T}_a)$, где $T \in \mathscr{F}$. Тогда для каждого аналитического множества $S \in \mathscr{F}$ будет $I \supset I(\mathbf{S}_a)$ и, следовательно, $\mathbf{T}_a \subset \mathbf{S}_a$. Поэтому, по теореме 3, найдется такая окрестность $V \subset U$ точки a, что $S \supset T \cap V$ для каждого множества $S \in \mathscr{F}$. Следовательно, если

$S_0 = \bigcap_{S \in \mathcal{F}} S$, то $(S_0 \cap V) \supset T \cap V$. Так как $T \in \mathcal{F}$, то $S_0 \cap V = T \cap V$. Так как $T \cap V$ является аналитическим множеством в V, то, в силу локального характера определения аналитического множества в U, множество S_0 является аналитическим в U.

Замечание. В действительности мы получили более сильный результат: если семейство $\mathcal{F}$ аналитических множеств в U составляет убывающий фильтр, то для каждого компактного подмножества $K \subset U$ существует такое аналитическое множество $T \in \mathcal{F}$, что

$$\left(\bigcap_{S \in \mathcal{F}} S\right) \cap K = T \cap K.$$

Отметим, что для произвольного *объединения* аналитических множеств в открытом множестве $U \subset \mathbb{C}^m$ можно лишь утверждать, что объединение локально конечного семейства аналитических множеств в U снова является аналитическим множеством в U.

Следствие 2 (Реммерт). *Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве U, причем базис в пространстве $\mathbb{C}^m$ выбран так, что начало 0 является изолированной точкой аналитического множества $S \cap \{(x_1, \ldots, x_m) \mid x_1 = \ldots = x_r = 0\}$, где r — некоторое целое число, $1 \leqslant r \leqslant m-1$. Тогда существует такая последовательность полицилиндров P_n с центром в точке 0 с радиусами, монотонно стремящимися к нулю, что проекция $S \cap P_n$ на $\mathbb{C}^r$ является (для любого номера n) аналитическим множеством в проекции P_n на $\mathbb{C}^r$.*

Доказательство (мы пользуемся далее обозначениями теоремы 3, гл. III). Проекцией S_0 на $\mathbb{C}^k$ является полицилиндр π_0'. Для каждого $r = k+1, \ldots, m$ множество $(S_0)_r$ (проекция S_0 на $\mathbb{C}^r$), согласно замечанию 1 к теореме 3, есть множество общих нулей в $(\pi_0)_r$ (проекции π_0 на $\mathbb{C}^r$) некоторого семейства функций, голоморфных в $(\pi_0)_r$. В силу следствия 1 из нашей теоремы, $(S_0)_r$ оказывается аналитическим множеством в $(\pi_0)_r$.

Пусть $k \leqslant r \leqslant m-1$. Тогда для любых данных чисел $\rho_i > 0$, $i = r+1, \ldots, m$, можно указать такую окрестность

$W \subset (\pi_0)_r$ точки $\mathfrak{o}_r$, что из включений: (проекция x на $C^r) \in W$ и $x \in S_0$ вытекает, что $|x_i| < \rho_i$, $i = r+1, \ldots, m$. В этом случае для любого открытого множества $\omega \subset W$ в C^r проекция на C^r множества

$$\{x \in S_0 \mid (\text{проекция } x \text{ на } C^r) \in \omega, \\ |x_{r+1}| < \rho_{r+1}, \ldots, |x_m| < \rho_m\}$$

есть аналитическое множество в ω; эта проекция совпадает с самим множеством ω, если $r = k$, или с множеством $\omega \cap (S_0)_r$, если $r = k+1, \ldots, m-1$.

Теперь предположим, что множество S и базис в пространстве C^m удовлетворяют условиям, указанным в следствии 2, и что все ростки берутся в точке $\mathfrak{o}$. У нас $\mathbf{S} \neq C^m$ и мы можем принять, что $\{\mathfrak{o}\} \subsetneqq \mathbf{S}$; $x_1, \ldots, x_r$ удовлетворяют условию А предложения 1, п. 3, гл. III для идеала $I(\mathbf{S})$ и тем более для каждого идеала $I(\mathbf{T}_j)$, $j = 1, \ldots, n$, где $\mathbf{T}_j$ — неприводимые компоненты $\mathbf{S}$. Так как $I(\mathbf{T}_j)$ — простой идеал и $\{\mathbf{0}\} \neq I(\mathbf{T}_j) \subsetneqq \mathscr{H}'^m$, то можно (повторяя рассуждение, использованное в предложении 2, п. 3, гл. III), изменяя только порядок векторов, составляющих базис в пространстве C^r, найти в пространстве C^m базис, k_j-правильный для каждого идеала $I(\mathbf{T}_j)$ (здесь $j = 1, \ldots, n$, $1 \leqslant k_j \leqslant r$). Тогда для данных чисел $\rho_{r+1} > 0, \ldots, \rho_m > 0$ и каждого $j = 1, \ldots, n$ мы сможем найти: (I) открытую окрестность $V_j \subset U$ точки $\mathfrak{o}$ и аналитическое множество T в V, порождающее росток $\mathbf{T}_j$ в точке $\mathfrak{o}$; (II) окрестность W_j точки $\mathfrak{o}_r$ в C^r, такую, что для каждого открытого множества $\omega \subset W_j$ в C^r проекция на пространство C^r множества $\{x \in T_j \mid (\text{проекция } x \text{ на } C^r) \in \omega, |x_{r+1}| < \rho_{r+1}, \ldots, |x_m| < \rho_m\}$ является аналитическим множеством в ω. Наконец, в этом случае существует такая открытая окрестность $V \subset \bigcap_{j=1}^{n} V_j$ точки $\mathfrak{o}$, что

$$S \cap V = \left(\bigcup_{j=1}^{n} T_j\right) \cap V.$$

Возьмем теперь в качестве ω открытый полицилиндр с центром в точке $\mathfrak{o}_r$ в пространстве C^r (в базисе, используемом

в пространстве C^m), содержащийся в пересечении $\bigcap_{j=1}^{n} W_j$. Тогда, если $\rho_{r+1}, \ldots, \rho_m, \omega$ выбраны достаточно малыми, то полицилиндр

$$P = \{x \mid (\text{проекция } x \text{ на } C^r) \in \omega, \\ |x_{r+1}| < \rho_{r+1}, \ldots, |x_m| < \rho_m\}$$

содержится в V и обладает требуемым свойством.

Замечание. Если базис в пространстве C^m является r-правильным для идеала $I(\mathbf{S})$, то для каждого n проекция пересечения $S \cap P_n$ на пространство C^r совпадает с проекцией P_n. Обратно, если это так для любых n, то базис в пространстве C^m является r-правильным для идеала $I(\mathbf{S})$.

Теорема 4 (Реммерт — Штейн). *Пусть U — открытое множество, $L^{(d)}$ — аффинное d-мерное подмногообразие ($-1 \leqslant d \leqslant m-1$) в C^m, причем $L^{(-1)} = \varnothing$ (по определению). Тогда всякое аналитическое множество S в $U \cap {}^c L^{(d)}$ или дискретно, или содержит точки, как угодно близкие к границе ∂U множества U в C^m (если множество U неограниченно, то его граница ∂U содержит бесконечно удаленные точки, присоединяемые к пространству C^m).*

Доказательство ведется индукцией по m. Теорема очевидна, если $m = 1$. Предположим, что $m > 1$.

(I) Достаточно доказать теорему для $d = m - 1$. Действительно, предположим, что теорема в этом случае верна и возьмем $d < m - 1$. Допустим, что в этом случае существует неизолированная точка $a \in S$. Пусть $L^{(m-1)}$ такое аффинное подмногообразие в C^m, что $L^{(d)} \subset L^{(m-1)}$ и $a \notin L^{(m-1)}$. Тогда $S' = S \cap {}^c L^{(m-1)}$ — аналитическое множество в $U \cap {}^c L^{(d)} \cap \cap {}^c L^{(m-1)} = U \cap {}^c L^{(m-1)}$. Оно содержит неизолированную точку a. Следовательно, S' содержит точки, как угодно близкие к границе ∂U.

(II) Очевидно мы можем предположить, что S — ограниченное множество и что $\underline{S}$ (совокупность внутренних точек S) пусто. Действительно, если $\underline{S} \neq \varnothing$, то S обязательно содержит целиком какую-нибудь связную компоненту пересечения $U \cap {}^c L^{(d)}$, а следовательно, и точки, как угодно близкие к ∂U.

Наконец, мы можем предположить, что S целиком состоит из неизолированных точек. В силу следствия 1 из теоремы 3, гл. III, множество изолированных точек S локально конечно и, следовательно, множество неизолированных точек S снова является аналитическим множеством в $U \cap {}^c L^{(d)}$; оно целиком состоит из неизолированных точек.

Таким образом, нам достаточно рассмотреть случай, когда S — ограниченное, нигде не плотное непустое аналитическое множество в $U \cap {}^c L^{(m-1)}$, целиком состоящее из неизолированных точек. Пусть $L^{(m-1)} = L = \{x \in \mathbf{C}^m \mid A(x) = 0\}$, $\alpha = \sup\limits_{x \in S} |A(x)|$. Тогда $0 < \alpha < \infty$. Наконец, пусть $\{x_n\}$ — такая последовательность точек S, что $|A(x_n)| \to \alpha$. Так как множество S замкнуто, мы можем предположить, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторой точке $x_0 \in \bar{U}$.

Если $x_0 \in \partial U$, теорема доказана. Рассмотрим случай, когда $x_0 \in U$. Так как $x_0 \in {}^c L$, то $x_0 \in S$. Пусть $L' = \{x \in \mathbf{C}^m \mid A(x) = A(x_0)\}$. Тогда в множестве $U' = L' \cap U$ (рассматриваемом как открытое множество в пространстве $\mathbf{C}^{m-1}$) $S' = S \cap L'$ есть аналитическое множество; у нас $L \cap L' = \varnothing$ и, следовательно, $U' = (U \cap {}^c L) \cap L'$. Мы покажем, что x_0 — неизолированная точка S'. Тем самым будет доказано и утверждение нашей теоремы. По допущению индукции S' содержит точки, как угодно близкие к границе $\partial U'$ множества U' в L' и $\partial U' \subset \partial U$.

Докажем, наконец, что x_0 — неизолированная точка S'. Действительно, покажем, что росток, порожденный в точке x_0 функцией $A' = A - A(x_0)$, обращается в нуль на $\mathbf{S}_{x_0}$. Если $T \subset S$ — аналитическое множество в некоторой окрестности точки x_0 и порождаемый им в x_0 росток является неприводимой компонентой $\mathbf{S}_{x_0}$, то в силу предложения 2 (c), п. 4, гл. II, или $\mathbf{A}'_{x_0}$ обращается в нуль на $\mathbf{T}_{x_0}$, или значения $A'(T)$ заполняют всю окрестность точки 0 в $\mathbf{C}$ (так как x_0 — неизолированная точка S, то $\{\mathbf{x}_0\} \subsetneqq \mathbf{T}_{x_0}$). В этом случае значения $A(S)$ образуют окрестность $A(x_0)$. Но это невозможно, так как $|A(x_0)| = \sup\limits_{x \in S} |A(x)|$. Следовательно, $\mathbf{A}'_{x_0}$ обращается в нуль на $\mathbf{S}_{x_0}$, т. е. $\mathbf{S}_{x_0} = \mathbf{S}'_{x_0}$. Итак, мы показали, что x_0 — неизолированная точка S; тем самым доказана наша теорема.

Отметим, что из доказанной теоремы вытекает

Следствие 1. *Компактное аналитическое множество в открытом множестве пространства* C^m *конечно.*

Используя это, можно получить следующий результат, найденный в случае $m=1$ Риттом.

Следствие 2. *Пусть* U — *связное открытое множество в* C^m *и* F — *голоморфное отображение* $U \to K$, *где* K — *компактное подмножество* U. *Тогда отображение* F *имеет одну и только одну неподвижную точку.*

Доказательство. Так как $F(U) \subset U$, то мы можем построить итерации F_n отображения F: $F_1 = F$, $F_n = F \circ F_{n-1}$ для $n > 1$. Очевидно, что все F_n являются голоморфными отображениями U в K. Так как K — компакт, координаты всех $F_n(x)$, $x \in U$, равномерно ограничены. Следовательно, можно найти такую строго возрастающую последовательность индексов n_k, что последовательности $\{F_{n_k}\}$ и $\{F_{n_{2k+1}-n_{2k}}\}$ голоморфных отображений будут сходиться (сходимость определяется по отношению к координатам) в U и будут равномерно сходиться на каждом компактном подмножестве U (см. п. 3, гл. I). Пусть F': $U \to U$ и F'': $U \to U$ — соответствующие предельные отображения. Тогда F' и F'' — голоморфные отображения и $F'(U)$, $F''(U) \subset K$. Из соотношений

$$F_{n_{2k+1}} = F_{n_{2k+1}-n_{2k}} \circ F_{n_{2k}}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

вытекает, что $F' = F'' \circ F'$. Следовательно,

$$F'(U) \subset \{x \in U \mid x = F''(x)\} = S_{F''}.$$

Очевидно, что $S_{F''}$ — аналитическое множество в U и $S_{F''} \subset F''(U) \subset K$. Следовательно, множество $S_{F''}$ компактно. Тогда, в силу следствия 1, $S_{F''}$ — конечное множество, а вместе с ним является конечным и множество $F'(U)$. Но $F'(U)$ — связное множество и, таким образом, оно состоит из одной точки; обозначим ее x_0. Итак, F': $x \to x_0$ — постоянное отображение. Покажем, что x_0 — единственная неподвижная точка F. Во-первых,

$$F(x_0) = F(F'(x_0)) = \lim_{k\to\infty} F\left(F_{n_k}(x_0)\right) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} F_{n_k}(F(x_0)) = F'(F(x_0)) = x_0,$$

итак, x_0 — неподвижная точка F. Во-вторых, для любой точки $x \in U$ из равенства $x = F(x)$ вытекает: $x = F'(x) = x_0$, что и требовалось доказать.

Следствие 3. *Пусть $S \ni \mathfrak{o}$ — аналитическое множество в открытом множестве U, $A_1, \ldots, A_k$ $(1 \leqslant k \leqslant m-1)$ — такие независимые линейные формы над $\mathbb{C}^m$, что начало $\mathfrak{o}$ является изолированной точкой аналитического множества*

$$\{x \in S \mid A_1(x) = \ldots = A_k(x) = 0\}.$$

Тогда существуют такие 1) окрестность $V \subset U$ точки $\mathfrak{o}$, 2) окрестности W_j точек A_j (в дуальном пространстве $\mathbb{C}^m$), $j = 1, \ldots, k$, что для любой системы $a \in S \cap V$, $A_1' \in W_1, \ldots, A_k' \in W_k$ a является изолированной точкой аналитического множества

$$\{x \in S \mid A_1'(x) - A_1'(a) = \ldots = A_k'(x) - A_k'(a) = 0\}.$$

Доказательство. Пусть векторы $e_{k+1}, \ldots, e_m \in \mathbb{C}^m$ составляют базис в $(m-k)$-мерном многообразии $L = \{x \in \mathbb{C}^m \mid A_1(x) = \ldots = A_k(x) = 0\}$. Наше утверждение будет доказано, если мы найдем такое число $\alpha > 0$, что при $y_{k+1}, \ldots, y_m \in \mathbb{C}$ и $0 < |y_{k+1}|^2 + \ldots + |y_m|^2 \leqslant \alpha^2$ будет $y_{k+1}e_{k+1} + \ldots + y_m e_m \in U - S$. Так как множество

$$\{y_{k+1}e_{k+1} + \ldots + y_m e_m \mid |y_{k+1}|^2 + \ldots + |y_m|^2 = \alpha^2 \text{ (соответственно } \leqslant \alpha^2)\}$$

компактно, то существуют такие 1) окрестность $V \subset U$ точки $\mathfrak{o}$; 2) окрестности V_j векторов e_j, где $j = k+1, \ldots, m$, что из включений $a \in V$, $e_{k+1}' \in V_{k+1}, \ldots, e_m' \in V_m$ вытекает включение $a + y_{k+1}e_{k+1}' + \ldots + y_m e_m' \in U - S$ (соответственно $\in U$). Наконец, каждая форма A_j, $j = 1, \ldots, k$, обладает в дуальном пространстве такой окрестностью W_j, что для любых $A_j' \in W_j$, $j = 1, \ldots, k$, можно найти векторы $e_{k+1}' \in V_{k+1}, \ldots, e_m' \in V_m$, составляющие базис в многообразии $L' = \{x \in \mathbb{C}^m \mid A_1'(x) = \ldots = A_k'(x) = 0\}$.

Пусть векторы $e_{k+1}' \in V_{k+1}, \ldots, e_m' \in V_m$ образуют базис в многообразии L', соответствующий некоторым данным $a \in S \cap V$, $A_1' \in W_1, \ldots, A_k' \in W_k$. Тогда точки $y = y_{k+1}e_{k+1}' + \ldots + y_m e_m'$ (для которых $|y_{k+1}|^2 + \ldots$

$\ldots + |y_m|^2 < \alpha^2$) образуют открытое множество Y в пространстве C^{m-k} и $\{y \in Y \mid a + y \in S\}$ — аналитическое множество в Y, содержащее начало координат; оно не может содержать последовательности, сходящейся в какой-либо точке границы ∂Y. Тогда, согласно теореме 4, начало пространства C^{m-k} является изолированной точкой этого аналитического множества, т. е. a — изолированная точка множества $\{x \in S \mid x - a \in L'\}$.

2. Регулярные точки и размерность.

Теорема 5. *Множество S^* регулярных точек аналитического множества S (в открытом множестве $U \subset C^m$) всюду плотно в S.*

Доказательство. Пусть a — нерегулярная точка S. Тогда $\{\mathbf{a}\} \neq \mathbf{S}_a = \mathbf{S} \neq \mathbf{C}_a^m$. Пусть $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_n$ — неприводимые компоненты $\mathbf{S}$. Тогда $\{\mathbf{a}\} \subsetneqq \mathbf{T}_j \neq \mathbf{C}_a^m$ ($j = 1, \ldots, n$). В силу теоремы 3 (В) главы III можно указать такую окрестность $V \subset U$ точки a и аналитические множества T_j в V, что (I) T_j порождают ростки $\mathbf{T}_j$ в точке a ($j = 1, \ldots, n$); (II) каждое множество T_j содержит всюду плотное подмножество t_j, целиком состоящее из регулярных точек T_j, той же самой размерности, что и T_j; эту размерность мы обозначим через k_j ($1 \leqslant k_j \leqslant m - 1$, $1 \leqslant j \leqslant n$); (III) $\bigcup_{j=1}^{n} T_j = S \cap V$. Если $n = 1$, наше утверждение доказано. Пусть $n > 1$, $T_j' = \bigcup_{j' \neq j} T_{j'}$. По определению неприводимой компоненты для каждого индекса j и любой открытой окрестности $W \subset V$ точки a имеем $T_j \cap W \not\subset T_j' \cap W$. Отсюда, так как $t_j \cap W$ всюду плотно в $T_j \cap W$ и $T_j' \cap W$ замкнуто в W, вытекает, что $t_j \cap W \not\subset T_j' \cap W$. Для каждой точки $x \in (t_j \cap W) \cap {}^c T_j'$ имеем $\mathbf{S}_x = (\mathbf{T}_j)_x$; следовательно, x — регулярная точка S и множество S имеет в точке x размерность k_j. Таким образом, в любой окрестности точки a содержатся регулярные точки S; теорема 5 доказана.

Замечание. В процессе доказательства теоремы 5 мы установили, что для каждого числа k_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, можно

в любой окрестности точки a указать такие регулярные точки S, в которых множество S имеет размерность k_j.

Определение 1 (a). *Пусть S — аналитическое множество (в открытом множестве $U \subset \mathbb{C}^m$), S^* — множество регулярных точек S. Тогда*

$$\dim_a S = \overline{\lim_{x \in S^*,\, x \to a}} \dim_x S$$

(в силу теоремы 5 $\dim_a S$ определена в каждой точке $a \in S$, и мы имеем $0 \leqslant \dim_a S \leqslant m$).

Замечания. (1) В точках S^* новое определение размерности дает ту же величину, что и прежнее определение.

(2) Если аналитические множества S и T порождают один и тот же росток в точке $a \in S \cap T$, то $\dim_a S = \dim_a T$. Поэтому эквивалентно предыдущему

Определение 1(b). *Если $\mathbf{S}$ — непустой росток аналитического множества в точке $a \in \mathbb{C}^m$, то размерность $\mathbf{S}$ — это размерность в точке a любого аналитического множества, порождающего росток $\mathbf{S}$ в точке a.*

(3) $\dim \mathbf{S} = m$ *в том и только том случае, если* $\mathbf{S} = \mathbf{C}^m$.

(4) $\dim \mathbf{S}_a = 0$ *в том и только том случае, если* $\mathbf{S}_a = \{\mathbf{a}\}$. Это вытекает из следствия 1 теоремы 3, гл. III.

Так как размерность аналитического множества в любой точке определяется его размерностями в регулярных точках, то из предложения 1, п. 2, гл. III вытекает

Предложение 1. *Пусть F — взаимно однозначное биголоморфное отображение открытого множества $U \subset \mathbb{C}^m$ на открытое множество $V \subset \mathbb{C}^m$. Тогда для любого аналитического множества S в U и любой точки $a \in S$*

$$\dim_a S = \dim_{F(a)} F(S).$$

Мы теперь рассмотрим неприводимые ростки аналитических множеств.

Предложение 2 (a). *Если I — простой идеал в $\mathscr{H}^m$, $\{\mathbf{0}\} \neq I \subsetneqq \mathscr{H}'^m$ и базис в пространстве $\mathbb{C}^m$ является k-правильным для I, то $k = \dim \mathbf{S}_I$ (в частности, число k единственным образом определяется идеалом I).*

Доказательство. В силу теоремы 3(B), гл. III, в некоторой окрестности π_0 точки $\mathfrak{o}$ существует аналитическое множество S_0, порождающее росток $\mathbf{S}_I$ в точке $\mathfrak{o}$, и всюду плотное подмножество s_0 множества S_0, состоящее из всех регулярных точек S_0. Размерность s_0 равна k; следовательно, $\dim_x S_0 = k$ для каждой точки $x \in S_0$, в частности $\dim_{\mathfrak{o}} S_0 = k$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Неприводимый (непустой) росток аналитического множества в том и только в том случае имеет размерность $m-1$, если он является ростком главного аналитического множества* (см. замечание в п. 3, гл. III).

Предложение 2 (b). *Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве $U \subset \mathbf{C}^m$, порождающее неприводимый росток в точке $\mathfrak{o} \in S$. Тогда существуют такие окрестность $V (\subset U)$ точки $\mathfrak{o}$ и базис $\{V_n\}$ для совокупности открытых окрестностей точки $\mathfrak{o}$, что S имеет одну и ту же размерность во всех точках $V \cap S$ и все пересечения $V_n \cap S^*$ являются связными* ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

Доказательство. Если $\mathbf{S} = \{\mathfrak{o}\}$ или $\mathbf{C}^m$, наше утверждение очевидно. В других случаях $\{\mathbf{0}\} \neq I(\mathbf{S}) \subsetneqq \mathscr{H}'^m$ и теорема 3 (B), гл. III оказывается применимой так же, как в процессе доказательства предложения 2 (a).

Следствие. *В условиях, указанных в предложении 2 (b), все достаточно малые окрестности точки $\mathfrak{o}$ пересекаются точно с одной связной компонентой S^*.*

Предложение 2 (c). *Пусть $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}'$ — неприводимые непустые ростки аналитических множеств в точке $\mathfrak{o}$. Если $\mathbf{S}' \subset \mathbf{S}$, то $\dim \mathbf{S}' \leqslant \dim \mathbf{S}$; если $\mathbf{S}' \subsetneqq \mathbf{S}$, то $\dim \mathbf{S}' < \dim \mathbf{S}$.*

Доказательство. Если $\mathbf{S} = \mathbf{C}^m$ или $\mathbf{S}' = \{\mathfrak{o}\}$ — утверждение очевидно. Если $\{\mathfrak{o}\} \subsetneqq \mathbf{S}' \subset \mathbf{S} \neq \mathbf{C}^m$, то $\{\mathbf{0}\} \neq I(\mathbf{S}) \subset I(\mathbf{S}') \subsetneqq \mathscr{H}'^m$. Следовательно (см. замечание 3 к определению 2, гл. III) в пространстве $\mathbf{C}^m$ существует базис, являющийся k-правильным для идеала $I = I(S)$ и k'-правильным для идеала $I' = I(S')$, $k' \leqslant k$. Если $\mathbf{S}' \subsetneqq \mathbf{S}$, то $I(\mathbf{S}) \subsetneqq I(\mathbf{S}')$, следовательно, $k' < k$ (см. предложение 3, п. 3, гл. III). В силу предложения 2 (a), $\dim \mathbf{S} = k$, $\dim \mathbf{S}' = k'$, что и требовалось доказать.

Теперь мы рассмотрим приводимые ростки.

Предложение 3. *Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве $U \subset \mathbf{C}^m$ и росток $\mathbf{S} = \mathbf{S}_a$ — приводим; пусть $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_n$ $(n \geqslant 2)$ — неприводимые компоненты $\mathbf{S}$. Тогда существуют* (1) *открытая окрестность $V (\subset U)$ точки a;* (2) *аналитические множества $T_1, \ldots, T_n$ в V, порождающие ростки $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_n$ в точке a, такие, что:*

(a) $V \cap S = \bigcup_{j=1}^{n} T_j$; *в любой точке $x \in T_j$, $j = 1, \ldots, n$,*

$$\dim_x T_j = \dim T_j$$

(мы обозначаем эту величину через k_j).

(b) *Пусть T_j^* — множество регулярных точек T_j и $T_j' = \bigcup_{j' \neq j} T_{j'}$. Тогда существует такая открытая окрестность $W \subset V$ точки a, что точка $x \in W$ в том и только в том случае принадлежит S^*, если для одного (и точно для одного) из номеров j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ имеем $x \in T_j^* \cap {}^c T_j'$; в этих условиях* $\dim_x S = k_j$ (каждое множество $T_j^* \cap {}^c T_j'$ пересекается с любой окрестностью точки a, согласно определению неприводимой компоненты ростка аналитического множества).

(c) *Для каждого индекса j, $1 \leqslant j \leqslant n$, можно указать такую достаточно малую окрестность $W_j \subset V$ точки a, что множество $W_j \cap T_j^* \cap {}^c T_j'$ является связным и всюду плотным в $W_j \cap T_j$.*

Доказательство. Согласно предложению 2 (b), можно найти такую окрестность V и такие множества T_j, что утверждение (a) будет выполнено для всех индексов j, $1 \leqslant j \leqslant n$. В силу того же предложения, существуют такие (как угодно малые) окрестности $W_j \subset V$ точки a, что множества $W_j \cap T_j^*$ являются связными.

(b) Пусть $W \subset \bigcap_{j=1}^{n} W_j$ — открытая окрестность точки a и точка $x \in W \cap S^*$. Тогда росток $\mathbf{S}_x$ неприводим. Так как $V \cap S = \bigcup_{j=1}^{n} T_j$, то для какого-то j, $1 \leqslant j \leqslant n$, $\mathbf{S}_x = (\mathbf{T}_j)_x$

(ростку, порождаемому множеством T_j в точке x). Следовательно, $x \in T_j^*$. Теперь допустим, что $x \in T_j'$. Пусть $x \in T_{j'}$, $j' \neq j$. Так как $(\mathbf{T}_{j'})_x \subset \mathbf{S}_x = (\mathbf{T}_j)_x$ и $T_{j'}^*$ всюду плотно в T_j, то существует такая точка $y \in T_{j'}^* \cap W$, что $(\mathbf{T}_{j'})_y \subset (\mathbf{T}_j)_y$. Так как множество $T_{j'}^* \cap W_{j'}$ связно, то, в силу предложения 3, п. 2, гл. III, $T_{j'}^* \cap W_{j'} \subset T_j \cap W_{j'}$. Наконец, отметим, что множество $T_{j'}^* \cap W_{j'}$ плотно в $T_j \cap W_{j'}$, а $T_j \cap W_{j'}$ замкнуто в $W_{j'}$ и, следовательно, $T_{j'} \cap W_{j'} \subset T_j \cap W_{j'}$. Но последнее невозможно, так как $\mathbf{T}_j$ и $\mathbf{T}_{j'}$ — различные неприводимые компоненты $\mathbf{S}$. Итак, мы доказали, что если $x \in W \cap S^*$, то $x \in T_j^* \cap {}^c T_j'$ для одного из значений j. Обратная импликация (при $x \in W$) является очевидной. Таким образом, утверждение (b) доказано.

(c) Будет доказано, что множество $W_j \cap T_j^* \cap {}^c T_j'$ плотно в $W_j \cap T_j$, если мы покажем, что оно плотно в $W_j \cap T_j^*$. Допустим, что множество $W_j \cap T_j^* \cap {}^c T_j'$ не плотно в $W_j \cap T_j^*$. Тогда существует такая точка $x \in W_j \cap T_j^*$, что $(\mathbf{T}_j)_x \subset (\mathbf{T}_j')_x$. Рассуждая так же, как при доказательстве (b), используя предложение 3, п. 2, гл. III и связность множества $W_j \cap T_j^*$, мы придем к заведомо ложному выводу: $T_j \cap W_j \subset T_j' \cap W_j$.

Наконец, отметим, что, в силу предложения 4, п. 2, гл. III, множество $W_j \cap T_j^* \cap {}^c T_j'$ является связным множеством: $W_j \cap T_j^* = (W_j \cap T_j)^*$ связно и $T_j' \cap W_j \not\supset W_j \cap T_j^*$, как мы показали. Итак, предложение 3 доказано.

Теперь мы укажем на некоторые выводы, которые непосредственно вытекают из предложения 3. Мы сохраняем все обозначения и предположения этого предложения.

Выводы из предложения 3 (b). 1) Точка $x \in W$ в том и только в том случае является нерегулярной точкой S, если она является нерегулярной точкой одного из множеств T_j или точкой пересечения по крайней мере двух T_j.

2) Для любой точки $x \in W$ размерность $\dim_x S$ равна одному из целых чисел k_j, а $\dim_a S = \sup\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} k_j$; размерность ростка аналитического множества равна размерности его неприводимой компоненты, имеющей наибольшую размерность. В частности

3) Размерность непустого ростка главного аналитического множества всегда равна $m-1$; росток аналитического множества имеет размерность $m-1$ в том и только том случае, если одна из его неприводимых компонент является ростком главного аналитического множества.

Выводы из предложений 3 (b) и 3 (c).

4) Если $x \in W \cap S^*$, то $x \in W_j \cap T_j^* \cap {}^cT_j'$ в точности для одного номера j, $1 \leqslant j \leqslant n$. Так как $W_j \cap T_j^* \cap {}^cT_j'$ — связное подмножество множества S^*, то через окрестность W точки x проходят самое большее n связных компонент S^*. Отсюда вытекает, что семейство всех связных компонент S^* локально конечно в S (а следовательно, и в U). Этот результат содержит в себе следствие 1 из теоремы 3, гл. III.

Следствие 1 (a). *Если S' и S — аналитические множества в открытом множестве $U \subset \mathbf{C}^m$, $S' \subset S$, то $\dim_a S' \leqslant \dim_a S$ в каждой точке $a \in S'$.* (b) *Если* $\mathbf{S}$ *и* $\mathbf{S}'$ *— непустые ростки аналитических множеств в точке $a \in \mathbf{C}^m$, то при $\mathbf{S}' \subset \mathbf{S}$ всегда* $\dim \mathbf{S}' \leqslant \dim \mathbf{S}$. (c) *Если в* (b) *росток* $\mathbf{S}$ *неприводим, то при $\mathbf{S}' \subsetneqq \mathbf{S}$ всегда* $\dim \mathbf{S}' < \dim \mathbf{S}$. (d) *Если в* (b) $\dim \mathbf{S}' = \dim \mathbf{S}$, *то* $\mathbf{S}$ *и* $\mathbf{S}'$ *имеют по крайней мере одну общую непустую неприводимую компоненту.* (e) *Если* $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_n$ *— непустые ростки аналитических множеств в точке $a \in \mathbf{C}^m$ и*

$$\mathbf{S} = \bigcup_{j=1}^{n} \mathbf{S}_j, \text{ то } \dim \mathbf{S} = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \dim \mathbf{S}_j.$$

Доказательство. Утверждение (a) вытекает из утверждения (b).

(b) Пусть $\mathbf{T}'$ — одна из неприводимых компонент ростка $\mathbf{S}'$. Тогда при $\mathbf{S}' \subset \mathbf{S}$ всегда $\mathbf{T}' \subset \mathbf{T}$, где $\mathbf{T}$ — одна из неприводимых компонент ростка $\mathbf{S}$. Согласно предложению 2 (c), $\dim \mathbf{T}' \leqslant \dim \mathbf{T}$. Так как $\dim \mathbf{S}'$ и $\dim \mathbf{S}$ — наибольшие из размерностей неприводимых компонент этих ростков, утверждение (b) доказано. (c) доказывается аналогично. У нас $\mathbf{S}' \subsetneqq \mathbf{S}$, $\mathbf{T}' \subsetneqq \mathbf{S}$ для каждой неприводимой компоненты $\mathbf{T}'$ ростка $\mathbf{S}'$. Следовательно, согласно предложению 2 (c), $\dim \mathbf{T}' < \dim \mathbf{S}$. Отсюда вытекает утверждение (c).

(d) вытекает из (b); мы должны лишь опять воспользоваться тем, что размерность ростка аналитического множе-

ства равна наибольшей размерности его неприводимых компонент.

(e) Пусть

$$\mathbf{S}^{(i)},\ q_{j-1}+1 \leqslant i \leqslant q_j \qquad (q_0=0),$$

— неприводимые компоненты $\mathbf{S}_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Тогда легко видеть, что неприводимыми компонентами $\mathbf{S}=\bigcup_{j=1}^{n}\mathbf{S}_j$ являются те и только те $\mathbf{S}^{(i)}$, для которых включение $\mathbf{S}^{(i)} \subsetneqq \mathbf{S}^{(i')}$ не имеет места ни для каких i'. Следовательно, $\dim \mathbf{S} = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant q_n} \dim \mathbf{S}^{(i)} = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \dim \mathbf{S}_j$, что и требовалось доказать.

Следствие 2. *Пусть S и S' — аналитические множества в открытом множестве $U \subset \mathbf{C}^m$, $S' \subset S$. Предполагается, что в некоторой точке $a \in S'$ росток $\mathbf{S}_a$ неприводим и $\mathbf{S}'_a \neq \mathbf{S}_a$. Тогда существует такая открытая окрестность $W \subset U$ точки a, что $\mathbf{S}'_x \neq \mathbf{S}_x$, если $x \in W \cap S'$ (следовательно, множество $W \cap (S - S')$ всюду плотно в $W \cap S$).*

Доказательство. В силу предложений 2 (b) и 3 (b), существует такая открытая окрестность $W \subset U$ точки a, что при $x \in W \cap S$ $\dim \mathbf{S}_x = \dim \mathbf{S}_a$, причем при $x \in W \cap S'$ $\dim \mathbf{S}'_x \leqslant \dim \mathbf{S}'_a$. Так как, согласно следствию 1 (c), $\dim \mathbf{S}'_a < \dim \mathbf{S}_a$, то $\dim \mathbf{S}'_x < \dim \mathbf{S}_x$ в каждой точке $x \in W \cap S'$. Итак, $\mathbf{S}'_x \neq \mathbf{S}_x$, что и требовалось доказать.

Следствие 3 (a). *Пусть $\mathbf{S}$ — непустой росток аналитического множества в некоторой точке $a \in \mathbf{C}^m$. Тогда $\dim \mathbf{S} \leqslant m-2$ в том и только в том случае, если $\mathbf{S}$ не содержит непустого ростка главного аналитического множества в точке a.*

Доказательство. Любой непустой росток главного аналитического множества имеет размерность $m-1$. Поэтому, согласно следствию 1 (b), если $\dim \mathbf{S} \leqslant m-2$, то $\mathbf{S}$ не может содержать непустого ростка главного аналитического множества.

Покажем, что когда $\dim \mathbf{S} \geqslant m-1$, $\mathbf{S}$ содержит непустой росток главного аналитического множества. В этом случае мы можем, не нарушая общности, положить $\dim \mathbf{S} = m-1$. Так как тогда по крайней мере одна из неприводимых

компонент $\mathbf{S}$ имеет размерность $m-1$, мы получим наше утверждение, применив следствие из предложения 2 (a).

Из наших результатов вытекает, что теорему 2 (b), п. 1, гл. III можно иначе сформулировать следующим образом:

Теорема. *Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве $U \subset \mathbf{C}^m$, $m \geqslant 2$, $\dim_x S \leqslant m-2$ во всех точках $x \in S$. Тогда каждая функция, голоморфная на $U - S$, может быть и притом единственным образом голоморфно продолжена на все множество U.*

Следствие 3 (b). *Аналитическое множество S в открытом множестве $U \subset \mathbf{C}^m$ является главным аналитическим множеством в том и только том случае, если $\dim_x S = m-1$ во всех точках $x \in S$.*

Доказательство. Мы уже видели, что если S — непустое главное аналитическое множество, то $\dim_x S = m-1$ во всех точках $x \in S$. Чтобы убедиться в обратном, достаточно, благодаря следствию из предложения 2 (a), доказать, что во всех точках $x \in S$ для любой неприводимой компоненты $\mathbf{T}$ ростка $\mathbf{S}_x$ $\dim \mathbf{T} = m-1$ (если каждая неприводимая компонента $\mathbf{S}_x$ является главной, то и $\mathbf{S}_x$ — росток главного аналитического множества). Но это очевидно: в силу предложения 3 (b), если $k = \dim \mathbf{T}$, то в любой как угодно малой окрестности x имеются (регулярные) точки S, в которых это множество имеет размерность k.

Предложение 4. *Если для некоторого идеала I в кольце $\mathscr{H}^m$ идеал, порожденный в этом кольце идеалом I и ростками $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ $(1 \leqslant k \leqslant m-1)$, определяет росток $\{\mathfrak{o}\}$ в точке $\mathfrak{o}$* (условие A в гл. III), *то* (a) $\dim \mathbf{S}_I \leqslant k$; (b) $\dim \mathbf{S}_I = k$ *в том и только том случае, если базис в пространстве $\mathbf{C}^m$ является k-правильным для идеала I.*

Доказательство. Из наших предположений вытекает, что $\{\mathfrak{o}\} \subset \mathbf{S}_I \neq \mathbf{C}^m$; если $\mathbf{S}_I = \{\mathfrak{o}\}$, утверждение (a) тривиально: тогда, в силу теоремы 2 (b), $\operatorname{rad} I = \mathscr{H}'^m$ и, следовательно (в обозначениях п. 3 главы III), любой росток $\in \mathscr{H}'^k$ имеет степень $\in I_k$; в этом случае базис в пространстве $\mathbf{C}^m$ не является k-правильным для I.

Теперь мы предположим, что $\{\mathfrak{o}\} \subsetneqq \mathbf{S}_I \neq \mathbf{C}^m$; тогда и $\{\mathfrak{o}\} \subsetneqq \mathbf{T}_j \neq \mathbf{C}^m$, $j = 1, \ldots, n$. Здесь $\mathbf{T}_j$ — неприводимые ком-

поненты $\mathbf{S}_I$. Далее имеем: $I^{(j)} = I(\mathbf{T}_j) \subset I$; следовательно, $x_1, \ldots, x_k$ удовлетворяют условию A, гл. III для каждого идеала $I^{(j)}$. Так как $I^{(j)}$ — простой идеал и $\{\mathbf{0}\} \neq I^{(j)} \subsetneq \mathscr{H}'^m$, то построение, использованное в предложении 2, п. 3, гл. III, применимо и в нашем случае. С его помощью мы получим базис в пространстве $\mathbf{C}^m$, k_j-правильный для идеала $I^{(j)}$ с $k_j \leqslant k$, причем $k_j = k$ только в том случае, если $I_k^{(j)} = \{\mathbf{0}\}$. Согласно предложению 2 (a), $\dim \mathbf{T}_j = k_j$; в силу второго вывода из предложения 3, $\dim \mathbf{S}_I = \sup\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} k_j$. Таким образом, утверждение (a) доказано. Мы докажем утверждение (b), если покажем, что $I_k = \{\mathbf{0}\}$ в том и только том случае, если $I_k^{(j)} = \{\mathbf{0}\}$ по крайней мере для одного j.

Но $I_k^{(j)} \supset I_k$. Следовательно, если $I_k^{(j)} = \{\mathbf{0}\}$ для одного значения j, то $I_k = \{\mathbf{0}\}$. Затем предположим, что, напротив, $I_k^{(j)} \neq \{\mathbf{0}\}$ для всех j. Пусть $\mathbf{f}^{(j)} \in I_k^{(j)} - \{\mathbf{0}\}$, $j = 1, \ldots, n$, $\mathbf{f} = \prod\limits_{j=1}^{n} \mathbf{f}^{(j)}$. Тогда $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{f} \in \bigcap\limits_{j=1}^{n} I^{(j)} = I(\mathbf{S}_I) = \operatorname{rad} I$ (по теореме 2 (b)). Итак, для надлежащим образом выбранного целого числа $\alpha > 0$, $\mathbf{f}^\alpha \subset I$, а следовательно, $\subset I_k$. Отсюда вытекает, что $I_k \neq \{\mathbf{0}\}$.

Замечание. Можно думать, что имеет место следующее утверждение, аналогичное предложению 4: если k независимых форм над $\mathbf{C}^m$ удовлетворяют условию B гл. III (предложение 2, п. 3) для идеала I в кольце $\mathscr{H}^m$, $1 \leqslant k \leqslant m-1$, то $\dim \mathbf{S}_I \geqslant k$. Однако это утверждение оказывается ошибочным, как показывает следующий пример.

Пусть $S = \{(x_1, \ldots, x_5) \in \mathbf{C}^5 \mid x_1 - x_4 = x_2 - x_4 x_5 = x_3 - x_4 x_5 e^{x_5} = 0\}$ — аналитическое множество. Все точки S являются его регулярными точками; во всех этих точках множество S имеет размерность 2 (см. пример в п. 2, гл. III). Покажем, что x_1, x_2, x_3 удовлетворяют условию B гл. III для идеала $I = I(\mathbf{S}_0)$. Для этого надо установить, что $\mathscr{H}^3 \cap I = \{\mathbf{0}\}$. Пусть $\mathbf{f} \in \mathscr{H}^3 \cap I$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n$ — тейлорово разложение f в точке $\mathbf{0}$; здесь P_n — однородный полином степени n относительно переменных x_1, x_2, x_3. Из

включения $\mathbf{f} \in I$ вытекает, что $f(x_4, x_4 x_5, x_4, x_5 e^{x_5}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_4^n P_n(1, x_5, x_5 e^{x_5}) \equiv 0$ в некоторой окрестности значений $x_4 = x_5 = 0$. Так как $P_n(1, x_5, x_5 e^{x_5})$ — целая функция x_5, то $P_n(1, x_5, x_5 e^{x_5}) \equiv 0$ для всех $n \geqslant 1$. Отсюда легко видеть, что $P_n \equiv 0$ для всех значений n и, следовательно, $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, $\mathscr{H}^3 \cap I = \{\mathbf{0}\}$.

Следствие 1. *Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве $U \subset \mathbf{C}^m$. Тогда для каждой точки $a \in S$, $m - \dim_a S$ не превышает размерности любого аффинного подмногообразия $L \subset \mathbf{C}^m$, обладающего следующим свойством: a — изолированная точка $L \cap S$.*

Доказательство. Мы можем принять, что $a = \mathfrak{o}$. Наше утверждение очевидно, если $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{\mathfrak{o}} = \{\mathfrak{o}\}$ или $\mathbf{C}^m$. Поэтому мы рассмотрим случай $\{\mathfrak{o}\} \subsetneqq \mathbf{S} \neq \mathbf{C}^m$, т. е. $\{\mathbf{0}\} \neq I = I(\mathbf{S}) \subsetneqq \mathscr{H}'^m$. Согласно следствию 1 из теоремы 2, $I = \operatorname{rad} I$, поэтому, в силу предложения 2, п. 3, гл. III, в пространстве $\mathbf{C}^m$ существует базис, k-правильный для идеала I, $1 \leqslant k \leqslant m - 1$. Тогда $k = \dim \mathbf{S}$ (по предложению 4 (b)); условие А гл. III указывает, что для $(m - k)$-мерного подпространства $L_1 = \{(x_1, \ldots, x_m) \mid x_1 = \ldots = x_k = 0\} \subset \mathbf{C}^m$ точка $\mathfrak{o}$ является изолированной точкой $L_1 \cap S$.

Теперь пусть L — такое аффинное подпространство в $\mathbf{C}^m$, что $\mathfrak{o}$ оказывается изолированной точкой $L \cap S$. Покажем, что тогда $\dim L \leqslant m - k$. Мы можем принять, что $1 \leqslant \dim L \leqslant m - 1$, и найти $(m - \dim L)$ независимых линейных форм над $\mathbf{C}^m$, имеющих L множеством своих совместных нулей. Эти формы удовлетворяют условию А, гл. III для идеала I, следовательно (по предложению 4 (a)), $k = \dim \mathbf{S} \leqslant m - \dim L$.

Замечание. Это следствие устанавливает эквивалентность нашего определения размерности аналитического множества и определения Реммерта — Штейна [4].

Следствие 2. *Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве $U \subset \mathbf{C}^m$, базис в пространстве $\mathbf{C}^m$ выбран так, что $\mathfrak{o}$ — изолированная точка $S \cap \{(x_1, \ldots, x_m) \mid x_1 = \ldots = x_r = 0\}$, для некоторого целого числа r, $1 \leqslant r \leqslant m - 1$. Предполагается, что существует такая последовательность открытых полицилиндров $\{P_n\}$ с центром в точке $\mathfrak{o}$ и радиусами,*

убывающими к нулю, что для каждого n проекция $S \cap P_n$ на C^r является аналитическим множеством S'_n в проекции P'_n полицилиндра P_n. Тогда для достаточно больших n: $\dim_{\mathfrak{o}'} S'_n = \dim_{\mathfrak{o}} S$ ($\mathfrak{o}'$ — начало координат в пространстве C^r).

Доказательство. Рассмотрим возрастающую последовательность идеалов $I(\mathbf{S}'_n)$ в кольце $\mathscr{H}^r_{\mathfrak{o}'}$. Так как $\mathscr{H}^r_{\mathfrak{o}'}$ — нётерово кольцо, все эти идеалы с номером $n \geqslant n_0$ (число n_0 выбрано надлежащим образом) совпадают с некоторым идеалом I', причем $I' = \operatorname{rad} I'$ (см. следствие 1 из теоремы 2) и $I' \subset \mathscr{H}'^r_{\mathfrak{o}'}$. Если $I' = \mathscr{H}'^r_{\mathfrak{o}'}$, то $\mathbf{S}'_n = \{\mathfrak{o}'\}$ при $n \geqslant n_0$, $\mathbf{S} = \{\mathfrak{o}\}$ и следствие доказано; если $I' = \{0\}$, то $S'_n = P'_n$ для любого n, базис в пространстве C^m является r-правильным для идеала $I(S)$ (см. замечание к следствию 2 из теоремы 3), и мы получаем наше утверждение, применяя еще предложение 4 (b).

Наконец, рассмотрим случай, когда $\{0\} \neq I' \subsetneqq \mathscr{H}'^r_{\mathfrak{o}'}$. В силу предложения 2, п. 3, гл. III в пространстве C^r можно выбрать базис, k-правильный для идеала I', $0 < k < r$. Тогда, согласно предложению 4 (b), достаточно показать, что этот базис в C^r вместе с последними $m - r$ элементами рассматриваемого базиса в C^m составляют новый базис в пространстве C^m, k-правильный для идеала $I(\mathbf{S})$. Отсюда следует наше утверждение.

Замечание. Доказанное следствие содержит замечание к следствию 2 из теоремы 3, использованное в нашем доказательстве.

Теорема 6 (А. Картан). *Множество $S - S^*$ нерегулярных точек аналитического множества S (в открытом множестве $U \subset C^m$) есть снова аналитическое множество в U и $\dim_a (S - S^*) < \dim_a S$ в любой точке $a \in S - S^*$.*

Первое доказательство. (a) Сначала мы проведем доказательство при следующих дополнительных предположениях: (I) S имеет одну и ту же размерность k, $1 \leqslant k \leqslant m - 1$, во всех своих точках; (II) в дуальном пространстве C^m существует k таких непустых открытых множеств $W_1, \ldots, W_k$, что если $A_1 \in W_1, \ldots, A_k \in W_k$, то линейные формы $A_1, \ldots, A_k$ независимы и любая точка $a \in S$ оказывается изолированной

точкой аналитического множества $\{x \in S \mid A_1(x) - A_1(a) = \ldots \ldots = A_k(x) - A_k(a) = 0\}$.

Обозначим через L_x, $x \in S^*$, k-мерное аффинное многообразие, касательное к S в точке x. Если нам дана точка $x \in S^*$ и $m - k$ независимых линейных форм $A_{k+1}, \ldots, A_m$, принимающих постоянные значения на L_x, то можно так выбрать $A_1 \in W_1, \ldots, A_k \in W_k$, что m форм $A_1, \ldots, A_m$ окажутся независимыми. Тогда для любой наперед заданной системы k чисел можно указать такую точку из L_x, в которой эти числа являются значениями форм $A_1, \ldots, A_k$. Иначе говоря, можно так выбрать базис в пространстве $\mathbf{C}^m$, что проекцией L_x на подпространство, порождаемое первыми k элементами этого базиса, будет являться само это подпространство. Таким образом, мы показали следующее. Пусть $S^*(A_1, \ldots, A_k) = \{x \in S^* \mid$ на L_x есть точка, где формы $A_1, \ldots, A_k$ принимают любые наперед заданные значения$\}$; тогда $S^* = \bigcup\limits_{A_i \in W_i} S^*(A_1, \ldots, A_k)$. Согласно следствию 1 из теоремы 3, $S - S^*$ является аналитическим множеством в U, если для любых $A_1 \in W_1, \ldots, A_k \in W_k$ множество $S - S^*(A_1, \ldots, A_k)$ аналитическое в U. Последнее будет установлено, если мы покажем, что каждая точка $a \in S$ имеет такую окрестность $V \subset U$, что $V \cap [S - S^*(A_1, \ldots, A_k)]$ — аналитическое множество в V. Мы примем точку a за начало и выберем базис в пространстве $\mathbf{C}^m$ так, что $A_1, \ldots, A_k$ будут являться первыми k координатами.

Пусть $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_n$ — неприводимые компоненты ростка $\mathbf{S} = \mathbf{S}_a$; в силу дополнительного предположения (II), формы $A_1, \ldots, A_k$ удовлетворяют условию A гл. III (предложение 1, п. 3) для идеала $I(\mathbf{S})$ и, следовательно, для каждого идеала $I(\mathbf{T}_j)$, $j = 1, \ldots, n$. Благодаря дополнительному предложению (I) и предложению 3, $\dim \mathbf{T}_j = k$; поэтому, согласно предложению 4 (b), построенный нами базис в пространстве $\mathbf{C}^m$ является k-правильным для каждого идеала $I(\mathbf{T}_j)$. Следовательно, существуют открытые полицилиндры π_j с центром в точке $\mathfrak{o}$, $j = 1, \ldots, n$, и в каждом из них аналитическое множество T_j, порождающее росток $\mathbf{T}_j$ в точке $\mathfrak{o}$, обладающее свойствами, указанными в теореме 3, гл. III. В частности, в силу части B этой теоремы существует всюду

плотное подмножество множества T_j, целиком состоящее из регулярных точек T_j, в которых T_j имеет размерность k. Отсюда вытекает, что $\dim_x T_j = k$ во всех точках $x \in T_j$. Согласно замечанию 1 к теореме 3, гл. III, $T_j - T_j^*(A_1, \ldots, A_k)$ — это множество точек T_j, являющихся общими нулями для некоторого семейства голоморфных функций на π_j. Согласно следствию 1 из теоремы 3, гл. III, оно является аналитическим в π_j. Тогда, согласно предложению 3 (b), существует такая открытая окрестность $V \subset \bigcap_{j=1}^{n} \pi_j$ точки 0, что (1) $V \cap S = \bigcup_{j=1}^{n} (V \cap T_j)$ (2) $V \cap (S - S^*)$ есть объединение множеств $V \cap T_j \cap T_{j'}$, $1 \leqslant j \leqslant j' \leqslant n$, и $V \cap (T_j - T_j^*)$, $1 \leqslant j \leqslant n$; поэтому $V \cap [S - S^*(A_1, \ldots, A_k)]$ — объединение множеств $V \cap T_j \cap T_{j'}$, $1 \leqslant j < j' \leqslant n$, и $V \cap [T_j - T_j^*(A_1, \ldots, A_k)]$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Каждое из них является аналитическим в V. Итак, $S - S^*$ — аналитическое множество в U при дополнительных предположениях (I) и (II).

(b) Из нашего рассуждения в общем случае вытекает, что поскольку множество $S - S^*$ замкнуто в U, то каждая точка $x_0 \in S - S^*$ имеет такую открытую окрестность $V \subset U$, что множество $V \cap (S - S^*)$ аналитично в V. Так как точка $x_0 \in S - S^*$, то непустой росток $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{x_0}$ не сводится ни к $\{\mathbf{x}_0\}$, ни к $\mathbf{C}^m$. Это имеет место и для всех неприводимых компонент ростка $\mathbf{S}$.

Предположим, что росток $\mathbf{S}$ неприводим. Тогда $I(\mathbf{S})$ — простой идеал, $\{\mathbf{0}\} \neq I(\mathbf{S}) \subsetneqq \mathscr{H}'^m_{x_0}$; мы можем выбрать точку x_0 за начало 0 и взять в пространстве $\mathbf{C}^m$ базис, k-правильный для идеала $I(\mathbf{S})$, $1 \leqslant k \leqslant m - 1$ (предложение 2, п. 3, гл. III). В силу предложения 2 (a), $k = \dim \mathbf{S} = \dim_0 S$; в силу предложения 2 (b), начало имеет такую окрестность $V_1 \subset U$, что S имеет размерность k во всех точках $S \cap V_1$; в силу следствия 3 из теоремы 4, существует другая открытая окрестность $V_2 \subset U$ точки 0 и открытые окрестности W_j линейных форм $x \to x_j$ в дуальном пространстве (для всех $j = 1, \ldots, k$), такие, что для любых $a \in S \cap V_2$, $A_1 \in W_1, \ldots, A_k \in W_k$, a — изолированная точка аналитического множества $\{x \in S \mid A_1(x) - A_1(a) = \ldots = A_k(x) - A_k(a) = 0\}$.

Если окрестности W_j достаточно малы, то при $A_j \in W_j$, $j = 1, \ldots, k$, формы A_j независимы. Тогда дополнительные предположения (I) и (II) части (a) нашего доказательства оказываются выполненными для аналитического множества $S \cap V_1 \cap V_2$ в $V_1 \cap V_2$. Следовательно, $(S \cap V_1 \cap V_2) - (S \cap V_1 \cap V_2)^* = (S - S^*) \cap (V_1 \cap V_2)$ — аналитическое множество в $V_1 \cap V_2$.

Теперь предположим, что росток $\mathbf{S}$ — приводим и $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_n$ — его неприводимые компоненты. Тогда, согласно предложению 3 (b), существуют открытая окрестность $W \subset U$ точки x_0 и аналитические множества $T_1, \ldots, T_n$ (порождающие ростки $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_n$ в точке x_0), такие, что множества $W \cap S = \bigcup_{j=1}^{n} T_j$ и $W \cap (S - S^*)$ оказываются объединением множеств $W \cap T_j \cap T_{j'}$, $1 \leqslant j < j' \leqslant n$, и $W \cap (T_j - T_j^*)$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Итак, мы доказали, что существуют такие окрестности $V_j \subset W$ точки x_0 $(j = 1, \ldots, n)$, что каждое множество $V_j \cap (T_j - T_j^*)$ аналитично в V_j, но тогда $V \cap (S - S^*)$, где $V = \bigcap_{j=1}^{n} V_j$ — аналитическое множество в V.

Наконец, согласно следствию 1 из предложения 3, из включения $S - S^* \subset S$ вытекает, что $\dim_a (S - S^*) \leqslant \dim S$ в каждой точке $a \in S - S^*$. Допустим, что в какой-то точке $a \in S - S^*$ оказалось $\dim_a (S - S^*) = \dim_a S$. Тогда, если росток $\mathbf{S}_a$ неприводим, то должна существовать окрестность точки a, не содержащая точек S^*, что противоречит теореме 5; если росток $\mathbf{S}_a$ приводим, множество $S - S^*$ (мы пользуемся далее обозначениями предложения 3 (b)) должно содержать одно из множеств T_j. Здесь множества $S - S^*$ и T_j рассматриваются в пределах некоторой окрестности точки a. Однако это невозможно, так как любая окрестность точки a содержит точки множества $T_j^* \cap {}^c T_j'$.

Итак, теорема 6 доказана.

Второе доказательство. Основываясь на предложении 3, мы можем принять, что $\dim_x S$ во всех точках $x \in S$ имеет одно и то же значение k, $1 \leqslant k \leqslant m - 1$. Легко показать (с помощью теоремы 1), что каждая точка $a \in S$ имеет такую открытую окрестность $V \subset U$, что множество

$V \cap (S - S^*)$ окажется аналитическим в V. Действительно, в силу теоремы 1 для каждой точки $a \in S$ можно указать такую открытую окрестность $V \subset U$ этой точки и конечное семейство функций $f_1, \ldots, f_n$, голоморфных в V, что ростки, определяемые этими функциями в любой точке $x \in V$, порождают идеал $I(\mathbf{S}_x)$. Тогда $V \cap S = \{x \in V \mid f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0\}$; теорема 6 будет доказана, если мы установим, что $V \cap (S - S^*) = \{x \in V \cap S \mid$ ранг матрицы $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) < m - k$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m\}$. Последнее вытекает из следующих двух замечаний.

(A) Если $x \in V \cap S^*$, то так как $\dim_x S = k$, можно указать такую окрестность $W \subset V$ точки x и $m - k$ функций $g_1, \ldots, g_{m-k}$, голоморфных в W и равных нулю на $W \cap S$, что ранг матрицы $\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)$ будет равен $m - k$. Здесь $1 \leqslant i \leqslant m - k$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Так как ростки, определяемые функциями $g_1, \ldots, g_{m-k}$ в точке x, являются линейными комбинациями над кольцом $\mathscr{H}_x^m$ ростков, определяемых функциями $f_1, \ldots, f_n$, то матрица $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$, должна иметь ранг $\geqslant m - k$.

(B) Если $x \in V \cap S$ и ранг матрицы $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$, $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant m$, равен r, то аналитическое в V множество $T = \{x \in V \mid f_1(x) = \ldots = f_r(x) = 0\}$ порождает в точке x регулярный росток $\mathbf{T}_x$ размерности $m - r$ (см. теорему 1, гл. I и определение 1, гл. III). Так как $T \supset V \cap S$ и $\dim \mathbf{S}_x = k$, то $m - r \geqslant k$ или $r \leqslant m - k$; в случае равенства (согласно следствию 1 (c) из предложения 3) $\mathbf{T}_x = \mathbf{S}_x$ и тогда $x \in S^*$.

3. Неприводимые аналитические множества. Неприводимые компоненты аналитического множества. Мы намерены сейчас показать, что некоторые свойства, установленные выше для множества регулярных точек аналитического множества S, имеют место во всех тех точках $x \in S$, где росток $\mathbf{S}_x$ неприводим. Так, предложения 3 и 4, п. 2, гл. III содержит следующая

Теорема 7. *Пусть S и S' — аналитические множества в открытом множестве $U \subset \mathbf{C}^m$, s — такое*

открытое подмножество S, что для каждой точки $x \in s$ росток $\mathbf{S}_x$ неприводим. Тогда (a) *если $\mathbf{S}'_{x_0} \supset \mathbf{S}_{x_0}$ в некоторой точке $x_0 \in s$, то $S' \supset s$;* (b) *если $S' \not\supset s$, то множество $s \cap {}^cS'$ — связно.*

Доказательство. (a) Множество $\tilde{s} = \{x \in s \mid \mathbf{S}'_x \supset \mathbf{S}_x\} = \{x \in s \mid (\mathbf{S}' \cap \mathbf{S})_x = \mathbf{S}_x\}$ открыто в s по определению и замкнуто в s, согласно следствию 2 из предложения 3, п. 2. Следовательно, или $\tilde{s} = \varnothing$, или $\tilde{s} = s$, и утверждение (a) доказано.

(b) Допустим, что $s \cap {}^cS' = s_0 \cup s_1$, где s_0 и s_1 — непустые, открытые, непересекающиеся подмножества s. В силу (a), множество $s \cap {}^cS'$ всюду плотно в s. Поэтому существует точка $a \in \bar{s}_0 \cap \bar{s}_1 \cap s$: множество s — связно и, следовательно, множества $\bar{s}_0 \cap s$ и $\bar{s}_1 \cap s$ должны пересекаться. Тогда, по предложению 2 (b), п. 2, существует такая открытая окрестность $W \subset U$ точки a, что $W \cap S \subset s$ и множество $W \cap S^*$ связно. По предложению 4, п. 2, гл. III тогда должно быть связным и множество $W \cap S^* \cap {}^cS'$. Следовательно, и множество $W \cap s \cap {}^cS'$, в котором это множество оказывается плотным, также должно быть связным. Но так как $W \cap s \cap {}^cS' = (W \cap s_0) \cup (W \cap s_1)$, а $W \cap s_0$ и $W \cap s_1$ — непустые открытые непересекающиеся подмножества множества $W \cap s \cap {}^cS'$ (непустого, так как существует точка $a \in \bar{s}_0 \cap \bar{s}_1$), мы пришли к противоречию и, следовательно, утверждение (b) доказано.

Предложение 1. *Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве $U \subset \mathbf{C}^m$, S^* — множество регулярных точек S, s_1 — связная компонента S^*. Тогда замыкание S_1 (в U или, что эквивалентно, в S) множества s_1 является неприводимым аналитическим множеством в U.*

Доказательство. Множество S_1 замкнуто в U и $S_1 \subset S$. Мы докажем, что S_1 — аналитическое множество в U, если установим, что каждая точка $a \in S_1$ обладает такой окрестностью $W \subset U$, что множество $S_1 \cap W$ аналитично в W.

Пусть точка $a \in S_1$. Исключая тривиальные случаи, можно принять, что $\{\mathbf{a}\} \neq \mathbf{S} = \mathbf{S}_a \neq \mathbf{C}^m$. Тогда (см. предложение 3, п. 2) существуют открытая окрестность $V \subset U$ точки a, аналитические множества $T_1, \ldots, T_n$ в V и открытые окрест-

ности $W_j \subset V$ точки a, $j = 1, \ldots, n$, такие, что: (I) неприводимые компоненты $\mathbf{S}$ суть в точности $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_n$ и $\bigcup_{j=1}^{n} T_j = S \cap V$; (II) каждое множество $T_j^* \cap {}^cT_j' \cap W_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ связно, принадлежит S^* и всюду плотно в $T_j \cap W_j$; (III) $S^* \cap W \subset \subset \bigcap_{j=1}^{n} (T_j^* \cap {}^cT_j' \cap W_j)$, где $W = \bigcap_{j=1}^{n} W_j$ (мы пользуемся здесь обозначениями предложения 3, п. 2, причем полагаем $T_1' = \varnothing$, если $n = 1$). Следовательно, если множества T_j перенумерованы надлежащим образом, то существует такое целое число p $(1 \leqslant p \leqslant n)$, что $T_j^* \cap {}^cT_j' \cap W_j$ содержатся в s_1 при $1 \leqslant j \leqslant p$ и не пересекаются с s_1 при $p + 1 \leqslant j \leqslant n$. Тогда $s_1 \cap W = = W \cap \bigcup_{j=1}^{p} (T_j^* \cap {}^cT_j' \cap W_j)$. Беря замыкания в W от обоих частей этого равенства, мы получим $S_1 \cap W = W \cap \bigcup_{j=1}^{p} T_j$ и наше утверждение доказано.

Теперь докажем, что множество S_1 неприводимо. Допустим, что $S_1 = S_{11} \cup S_{12}$, где S_{11} и S_{12} — аналитические множества в U и $S_{11} \neq S_1$. Тогда, поскольку s_1 всюду плотно в S_1, существует точка $a \in s_1 \cap {}^cS_{11}$. В этой точке $\mathbf{S}_{12} = \mathbf{S}_1$. Поскольку множество $s_1 \subset S_1^*$ связно, в силу предложения 3, п. 2, гл. III, $S_{12} \supset s_1$. Наконец, так как s_1 всюду плотно в S_1, то $S_{12} \supset S_1$, т. е. $S_{12} = S_1$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве $U \subset \mathbb{C}^m$. Тогда S неприводимо в том и только в том случае, когда множество S^* регулярных точек S связно.*

Доказательство. В силу предложения 1, S неприводимо, если S^* связно. Предположим, что S^* несвязно, $\{s_n\}$ — счетное семейство связных компонент S^* (т. е. конечное или бесконечное, но счетное — см. выводы из предложения 3, п. 2) и S_n — замыкание s_n в U, $n = 1, 2, \ldots$. Как и $\{s_n\}$, $\{S_n\}$ — локально конечная совокупность в U. В силу предложения 1, каждое S_n — (неприводимое) аналитическое множество в U. Следовательно, $S_1' = \bigcup_{n \geqslant 2} S_n$, как

локально конечное семейство аналитических множеств в U, само является аналитическим множеством в U. Очевидно, что $S = S_1 \cup S_1'$ и $S_1 \neq S$. Мы докажем, что множество S приводимо, если покажем, что $S_1' \neq S$.

Допустим, что $S_1' = S$. Тогда $S_1 \subset S_1'$ и, в частности, в любой точке $\in s_1$ будет $\mathbf{S} \subset \mathbf{S}_1'$. Так как семейство $\{S_n\}$ локально конечно, $\mathbf{S}_1'$ является объединением некоторой конечной совокупности ростков $\mathbf{S}_n$, $n \geqslant 2$. Так как росток $\mathbf{S}_1$ неприводим (на самом деле регулярен), то для какого-то $n \geqslant 2$ должно быть $\mathbf{S}_1 \subset \mathbf{S}_n$. Из того, что s_1 — связное подмножество S_1^*, вытекает (по предложению 3, п. 2, гл. III), что $s_1 \subset S_n$. Но это невозможно, так как $s_1 \cap s_n = \varnothing$. Мы пришли к противоречию. Итак, $S_1' \neq S$ и следствие 1 доказано.

Замечание. Мы доказали, что (в принятых обозначениях) $S_n \not\subset \bigcup\limits_{n' \neq n} S_{n'}$ для каждого n.

Следствие 2. *Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве $U \subset \mathbf{C}^m$ и точка a принадлежит S. Тогда росток $\mathbf{S}_a$ неприводим тогда и только тогда, когда существует такая (как угодно малая) окрестность $V \subset U$ точки a, что аналитическое в V множество $S \cap V$ — неприводимо.*

Доказательство. Если росток $\mathbf{S}_a$ приводим, то и множество $S \cap V$ приводимо (для достаточно малой окрестности V, согласно определению приводимого ростка). Если росток $\mathbf{S}_a$ неприводим, то по предложению 2 (b), п. 2 существуют такие (как угодно малые) окрестности $V \subset U$ точки a, что множества $V \cap S^* = (V \cap S)^*$ оказываются связными. Согласно следствию 1, отсюда вытекает, что множества $V \cap S$ неприводимы.

Следствие 3. *Пусть S — неприводимое аналитическое множество в открытом множестве $U \subset \mathbf{C}^m$.* Тогда

(a) *S — связно.*

(b) *Размерность $\dim_x S$ одна и та же во всех точках $x \in S$.*

(c) (Лемма Ритта). *Если S' — аналитическое множество в U и в некоторой точке $a \in S$ для какой-то*

неприводимой компоненты $\mathbf{T}_a$ *ростка* $\mathbf{S}_a$ *имеет место включение* $\mathbf{S}'_a \supset \mathbf{T}_a$, *то* $S' \supset S$. *В частности, если* h — *голоморфная функция на* U *и для точки* $a \in S$ *росток* $\mathbf{h}_a$ *обращается в нуль на некоторой неприводимой компоненте* $\mathbf{S}_a$, *то* $h \equiv 0$ *на* S.

(c′) *Для любой голоморфной функции* h *на* U *ограничение* $h \mid S$ *или постоянно, или определяет открытое отображение* S *в* $\mathbf{C}$ *в следующем смысле: для каждой точки* $a \in S$ *и любого аналитического множества* T *в некоторой открытой окрестности* $V \subset U$ *точки* a, *такого, что* $\mathbf{T}_a$ *является неприводимой компонентой* $\mathbf{S}_a$, *множество* $h(T)$ *составляет окрестность точки* $h(a)$ *в* $\mathbf{C}$.

(d) *Если* S' — *аналитическое множество в* U, $S \supsetneqq S'$, *то* $\dim_x S' < \dim_x S$ *во всех точках* $x \in S'$.

(e) *Для любого аналитического множества* S_0 *в* U, $S \cap (U - S_0)$ — *неприводимое аналитическое множество в* $U - S_0$. *Оно или пусто, или всюду плотно в* S.

(f) *Если* $\{S_n\}$ — *счетное семейство аналитических множеств в* U *и* $S = \bigcup_n S_n$, *то* $S = S_n$ *для некоторого* n.

Доказательство. (a) В силу следствия 1, множество S^* связно. Так как S^* всюду плотно в S, то и S связно.

(b) Так как S^* связно, то $\dim_x S$ имеет одно и то же значение во всех точках $x \in S^*$ (предложение 2, гл. III). Отсюда вытекает утверждение (b).

(c) В данных условиях существует такая точка $b \in S^*$, что $\mathbf{S}'_b \supset \mathbf{S}_b$ (предложение 3, п. 2). Так как S^* связно, то (согласно предложению 3, п. 2, гл. III) $S' \supset S^*$ и, следовательно, $S' \supset S$.

(c′) вытекает из (c) и замечания 2 к предложению 2, п. 4, гл. III.

(d) Если $S' \subset S$ и $\dim_x S' = \dim_x S$ в некоторой точке $x \in S'$, то, согласно следствию 1 (d) из предложения 3, п. 2, ростки $\mathbf{S}'_x$ и $\mathbf{S}_x$ имеют общую неприводимую компоненту. Следовательно, согласно (c), $S' = S$.

(e) Предположим, что $S \cap (U - S_0) = S - (S \cap S_0) \neq \varnothing$. Согласно (d) (где мы берем $S' = S \cap S_0$), множество $S - (S \cap S_0)$ всюду плотно в S. Далее из того, что $S^* \not\subset S_0$ и множество S^* связно, вытекает (предложение 4, п. 2, гл. III),

что множество $S^* \cap (U - S_0) = [S \cap (U - S_0)]^*$ связно, т. е. множество $S \cap (U - S_0)$ неприводимо.

(f) Если $S_n \neq S$ для любого n, то, согласно (e), все $S - S_n$ являются открытыми всюду плотными подмножествами S. Следовательно, по теореме Бэра, множество $S - \bigcup_n S_n$ также должно быть всюду плотным в S.

Теорема 8. *Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве $U \subset C^m$, S^* — множество регулярных точек S, $\{s_n\}$ — (счетное) семейство связных компонент S^*, $\{S_n\}$ — семейство их замыканий в U. Тогда* (a) *$\{S_n\}$ — локально конечное семейство неприводимых аналитических множеств в U, причем $S = \bigcup_n S_n$ и $S_n \not\subset \bigcup_{n' \neq n} S_{n'}$ для любого номера n.* (b) *Если $\{T_i\}$ — счетное семейство неприводимых аналитических множеств в U и $\bigcup_i T_i = S$, $T_i \not\subset \bigcup_{i' \neq i} T_{i'}$ для любого номера i, то $\{T_i\} = \{S_n\}$.*

Доказательство. Достаточно доказать утверждение (b). Очевидно, что $T_i = \bigcup_n (T_i \cap S_n)$ для любого номера i. Так как множества T_i неприводимы, то, согласно следствию 3 (f) из предложения 1, $T_i = T_i \cap S_n$ для какого-то номера n, который мы обозначим через $n(i)$. Аналогичным путем мы покажем, что $S_n \subset T_{i(n)}$ для каждого n. Поскольку для каждых n и i имеем $S_n \not\subset \bigcup_{n' \neq n} S_{n'}$ и $T_i \not\subset \bigcup_{i' \neq i} T_{i'}$, отсюда вытекает утверждение (b).

Определение 2. *Неприводимыми компонентами аналитического множества S в открытом множестве $U \subset C^m$ называются замыкания в U связных компонент S^* (множества регулярных точек S).*

Отметим некоторые непосредственные выводы из этого определения.

(I) Для любой точки $x \in S$ размерность $\dim_x S$ равна наибольшей из размерностей неприводимых компонент S

(их имеется конечное множество), содержащих точку x, см. следствие 1 (е) из предложения 3, п. 2.

(II) Пусть для некоторого k, $0 \leqslant k \leqslant m$, $S^{(k)}$ — объединение k-мерных неприводимых компонент S ($S^{(k)} = \varnothing$, если S не содержит неприводимых компонент размерности k). Тогда $S^{(k)}$ — аналитическое множество в U (так как семейство неприводимых компонент S локально конечно), имеющее размерность k в каждой своей точке (или пустое) и $S = \bigcup_{k=0}^{m} S^{(k)}$.

(III) Для каждого k, $0 \leqslant k \leqslant m$, множество

$$\{x \in S \mid \dim_x S \geqslant k\} = \bigcup_{q=k}^{m} S^{(q)}$$

и, следовательно, является аналитическим множеством в U. В частности, если f, g — функции, голоморфные в U, то множество $\{x \in U \mid \mathbf{f}_x$ и $\mathbf{g}_x$ не взаимно простые ростки в $\mathscr{H}_x^m\}$ есть аналитическое множество в U. Действительно, в силу теоремы 6, гл. II и следствия 2 (а) из предложения 3, п. 2, это множество совпадает с множеством $\{x \in S \mid \dim_x S \geqslant m-1\}$, где $S = \{x \in U \mid f(x) = g(x) = 0\}$. Этот результат содержит теорему 4, гл. II.

(IV) Пусть T — еще одно аналитическое множество в U. Если $S \subset T$ и множество S неприводимо, то S содержится по крайней мере в одной неприводимой компоненте T.

Предложение 2. *Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве $U \subset \mathbf{C}^m$, $\{S_i\}$ — семейство его неприводимых компонент, точка $a \in S$, причем $S_j \ni a$ при $1 \leqslant j \leqslant n$, $S_j \not\ni a$ при $j > n$. Тогда (все ростки берутся в точке a) множества неприводимых компонент ростков $\mathbf{S}_i$, $i = 1, \ldots, n$, не имеют общих элементов и их объединение в точности равно совокупности неприводимых компонент ростка $\mathbf{S}$.*

Доказательство. Легко видеть, что неприводимая компонента ростка $\mathbf{S}_{i'}$ не может содержать неприводимую компоненту $\mathbf{S}_i$, где $1 \leqslant i \leqslant i' \leqslant n$. Действительно, в противном случае, в силу следствия 3 (с) из предложения 1, $S_{i'} \supset S_i$, что противоречит теореме 8 (а).

Выводы из предложения 2. 1) Если росток $\mathbf{S}_a$ неприводим, то только одна из неприводимых компонент множества S содержит точку a.

2) (Теорема единственности). Пусть S, S' — аналитические множества в U, точка $a \in S \cap S'$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}'$ — неприводимые компоненты соответственно ростков $\mathbf{S}$ и $\mathbf{S}'$ (все ростки берутся в точке a), S_1, S_1' — единственным образом определяемые неприводимые компоненты множеств S, S', обладающие следующим свойством: $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}'$ — являются неприводимыми компонентами соответственно ростков $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_1'$. Тогда, если $\mathbf{T} \subset \mathbf{T}'$, то $S_1 \subset S_1'$ и, следовательно, если $\mathbf{T} = \mathbf{T}'$, то $S_1 = S_1'$.

3) Если множество S связно и росток $\mathbf{S}_a$ неприводим для каждой точки $a \in S$, то множество S неприводимо.

Доказательство. Допустим, что множество S связно и приводимо. Тогда S имеет по крайней мере две неприводимые компоненты S_n; так как S_1 и $S_1' = \bigcup_{n \geqslant 2} S_n$ — замкнутые и непустые подмножества S и их объединение равно S, то существует точка $a \in S_1 \cap S_1'$ и (вывод 1) росток $\mathbf{S}_a$ оказывается приводимым.

Предложение 3. *Пусть $S_0 \neq U$ — аналитическое множество в открытом множестве $U \subset \mathbf{C}^m$, S_0 — аналитическое множество в $U - S_0$, причем размерность $\dim_a S$ одна и та же для всех точек $a \in S$; пусть $\dim S = k$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(I) *замыкание $\overline{S}$ множества S в U есть аналитическое множество в U;*

(II) *существует такое аналитическое множество S' в U, что $S' \supset S$ и $\dim_a S' \leqslant k$ для любой точки $a \in S'$. Если указанное имеет место, то $\dim_a \overline{S} = k$ в любой точке $a \in \overline{S}$.*

Доказательство. Если (I) имеет место, то множество S всюду плотно в $\overline{S}$; так как $\dim_a \overline{S} = k$ для любой точки $a \in S$, то $\dim_a \overline{S} = k$ для любой точки $a \in \overline{S}$; итак, утверждение (II) в этом случае справедливо, причем $S' = \overline{S}$.

Если, наоборот, известно, что (II) имеет место, то рассмотрим для произвольно взятой точки $a \in S$ ростки $\mathbf{S}$ и $\mathbf{S}'$.

Тогда $\mathbf{S} \subset \mathbf{S}'$, $\dim \mathbf{S} = \dim \mathbf{S}'$. Следовательно, эти ростки имеют по крайней мере одну общую неприводимую компоненту (следствие 1 (d) из предложения 3, п. 2); обозначим ее через $\mathbf{T}$. Пусть S_1' — та неприводимая компонента S', для которой $\mathbf{T}$ является неприводимой компонентой ростка $\mathbf{S}_1'$. Тогда $S_1' \cap (U - S_0)$ — неприводимое аналитическое множество (следствие 1 (e) из предложения 1), содержащее точку a, S — аналитическое множество в $U - S_0$. При этом росток, порождаемый множеством S в точке a, содержит в качестве своей неприводимой компоненты росток, порождаемый в этой точке множеством $S_1' \cap (U - S_0)$. Поэтому (в силу следствия 3 (e) из предложения 1) $S \supset S_1' \cap (U - S_0)$ и, следовательно, $\bar{S} \supset S_1'$, множество $S_1' \cap (U - S_0)$ всюду плотно в S_1'.

Повторяя это рассуждение для каждой точки $a \in S$, мы получим семейство неприводимых компонент множества S', объединение которых содержит S и содержится в $\bar{S}$. Это объединение является аналитическим множеством в U. Следовательно, оно замкнуто в U и поэтому совпадает с $\bar{S}$, что и требовалось доказать.

Замечание. Это предложение используется для продолжения аналитических множеств [4].

4. Соотношения между размерностями аналитических множеств и их подмножеств.

Теорема 9. *Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве $U \subset \mathbf{C}^m$, h — голоморфная функция в U, $S' = \{x \in S \mid h(x) = 0\}$ — аналитическое множество в U. Тогда для каждой точки $a \in S'$:*

$$\dim_a S' = \dim_a S \quad \text{или} \quad \dim_a S' = \dim_a S - 1.$$

Если росток $\mathbf{S}_a$ неприводим, то $\dim_a S' = \dim_a S$ в том и только том случае, если $\mathbf{h}_a$ обращается в нуль на $\mathbf{S}_a$.

Доказательство. Случай $\mathbf{S}_a = \{\mathbf{a}\}$ тривиален. Если $\mathbf{S}_a = \mathbf{C}^m$ и $\mathbf{h}_a \neq \mathbf{0}$, то $\dim \mathbf{S}_a' = m - 1 = \dim \mathbf{S}_a - 1$ (в силу вывода 3 из предложения 3 (b), п. 2). Поэтому положим $\{\mathbf{a}\} \neq \mathbf{S} = \mathbf{S}_a \neq \mathbf{C}^m$. Мы можем принять (без потери общности), что росток $\mathbf{S}$ неприводим. Действительно, если $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_n$ — неприводимые компоненты $\mathbf{S}$ и известно, что $\dim (\mathbf{T}_j \cap \mathbf{S}_h) \geqslant$

$\geqslant \dim \mathbf{T}_j - 1$ для всех $j\,(1 \leqslant j \leqslant n)$, то (в силу следствия 1 (e) из предложения 3, п. 2)

$$\dim \mathbf{S}'_a = \sup_{1 \leqslant j \leqslant n} \dim (\mathbf{T}_j \cap \mathbf{S}_h) \geqslant$$
$$\geqslant \sup_{1 \leqslant j \leqslant n} (\dim \mathbf{T}_j - 1) = \dim \mathbf{S} - 1$$

и очевидно $\dim \mathbf{S}'_a \leqslant \dim \mathbf{S}$.

Итак, пусть $\mathbf{S}$ — неприводимый росток в точке $\mathfrak{o} \in \mathbf{C}^m$, $\{\mathfrak{o}\} \neq \mathbf{S} \neq \mathbf{C}^m$ и $\mathbf{h} \in \mathscr{H}'^m$. Если $\mathbf{h} \in I(\mathbf{S}) = I$, то $\mathbf{S}' = \mathbf{S}$ (где $\mathbf{S}' = \mathbf{S} \cap \mathbf{S}_h$) и утверждение теоремы очевидно. Следовательно, для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что $\dim \mathbf{S}' = \dim \mathbf{S} - 1$ при $\mathbf{h} \notin I$ (согласно следствию 1 (c) из предложения 3, п. 2, в этом случае $\dim \mathbf{S}' < \dim \mathbf{S}$). $I = I(\mathbf{S})$ — простой идеал в кольце $\mathscr{H}^m$, $\{\mathbf{0}\} \neq I \subsetneqq \mathscr{H}'^m$. Пусть базис в пространстве $\mathbf{C}^m$ является k-правильным для идеала $I\,(1 \leqslant k \leqslant m-1)$, $I' = I(\mathbf{S}')$. Мы утверждаем, что тогда (в обычных обозначениях) $I'_k \neq \{\mathbf{0}\}$. Действительно (в силу предложения 2, п. 4, гл. III), в этом случае существует такой отмеченный полином $R_h(u) \in \mathscr{H}^k[u]$, что

$$\mathbf{R}_h(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^p + \mathbf{c}_1\mathbf{h}^{p-1} + \ldots + \mathbf{c}_p \in I.$$

Из того, что $\mathbf{h} \notin I$, вытекает (в силу того же предложения), что $\mathbf{c}_p \neq \mathbf{0}$. Так как $\mathbf{R}_h(\mathbf{h}) \in I \subset I'$ и $\mathbf{h} \in I'$, имеем $\mathbf{c}_p \in I'_k$. Следовательно, $I'_k \neq \{\mathbf{0}\}$.

Если $k = 1$, то, согласно предложению 4, п. 2, $\dim \mathbf{S} = 1$, откуда $\dim \mathbf{S}' = 0 = \dim \mathbf{S} - 1$. Рассмотрим случай $k > 1$. Расположим векторы, составляющие базис в пространстве $\mathbf{C}^k$, в таком порядке, что будет иметь место соответствие $\mathbf{c}_p \sim \mathbf{Q}_k$, где $\mathbf{Q}_k \in \mathscr{H}^{k-1}[x_k]$ является отмеченным псевдополиномом (напомним, что $\mathbf{c}_p \in \mathscr{H}'^k$, так как $R_h(u)$ — отмеченный полином). Тогда $\mathbf{Q}_k \in I'_k$. Следовательно, $x_1, \ldots, x_{k-1}$ удовлетворяют условию A″ (п. 3, гл. III) для I'. Мы утверждаем, что $I'_{k-1} = \{\mathbf{0}\}$. Это утверждение будет доказано, если мы покажем, что любой окрестности точки $\mathfrak{o}$ в множестве S' соответствует окрестность точки $\mathfrak{o}_{k-1}$, являющаяся ее проекцией на пространство $\mathbf{C}^{k-1}$. Действительно, согласно предложению

2 (b), п. 4, гл. III, существует такой как угодно малый открытый полицилиндр $\pi_0 \subset U$ с центром в точке $\mathfrak{o}$, что множество нулей c_p в π_0' является проекцией $\pi_0 \cap S'$ на пространство C^k. Итак, c_p и отмеченный псевдополином Q_k имеют одно и то же множество нулей в некоторой окрестности точки $\mathfrak{o}_k$. Следовательно, проекцией множества нулей c_p в π_0' на пространство C^{k-1} является некоторая окрестность точки $\mathfrak{o}_{k-1}$.

Итак, наше утверждение доказано. Мы нашли в пространстве C^m базис, k-правильный для идеала I и $(k-1)$-правильный для идеала I'; согласно предложению 4, п. 2, $\dim \mathbf{S} = k$, $\dim \mathbf{S}' = k - 1$.

Следствие 1. *Пусть S — аналитическое множество в U, S' — главное аналитическое множество в U. Тогда или $\dim_a (S \cap S') = \dim_a S - 1$ в каждой точке $a \in S \cap S'$, или S' содержит одну из неприводимых компонент S* (мы не утверждаем, что $S \cap S' \neq \varnothing$).

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $a \in S \cap S'$. Пусть $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_n$ — неприводимые компоненты ростка $\mathbf{S}$ (все ростки берутся в точке a). Допустим, что $\dim (\mathbf{S} \cap \mathbf{S}') = \dim \mathbf{S}$. Тогда, согласно следствию 1 (e) из предложения 3, п. 2, $\dim (\mathbf{T}_j \cap \mathbf{S}') = \dim \mathbf{T}_j$ по крайней мере для одного номера j; в этом случае (по теореме 9) $\mathbf{S}' \supset \mathbf{T}_j$. Следовательно, в этом случае, в силу следствия 3 (c) из предложения 1, п. 3, S' содержит неприводимую компоненту S_j множества S.

Следствие 2. *Пусть S — аналитическое множество, $h_1, \ldots, h_p$ — голоморфные функции в U, $S' = \{x \in S \mid h_1(x) = \ldots = h_p(x) = 0\}$. Тогда $\dim_a S' \geqslant \dim_a S - p$ в любой точке $a \in S'$.*

Замечание. Если F — мероморфная функция на открытом множестве $U \subset C^m$, то множество ее точек неопределенности в каждой своей точке имеет размерность $m - 2$ (см. следствие 3 (a) из предложения 3, п. 2).

Следствие 3. *Если S_1 и S_2 — аналитические множества в U, то $\dim_a (S_1 \cap S_2) \geqslant \dim_a S_1 + \dim_a S_2 - m$ для любой точки $a \in S_1 \cap S_2$.*

Доказательство. Наше утверждение вытекает из следствия 2, если S_1 или S_2 есть пересечение U с некоторым аффинным подмногообразием в C^m. В общем случае

рассмотрим аналитическое множество $S_1 \times S_2$ в $U \times U$ и его всюду плотное подмножество $S_1^* \times S_2^*$, точку $(x, y) \in \in S_1^* \times S_2^*$. Последняя является регулярной точкой $S_1 \times S_2$ и в ней это множество имеет размерность $\dim_x S_1 + \dim_y S_2$. Следовательно, в любой точке $(a, b) \in S_1 \times S_2$

$$\dim_{(a, b)} (S_1 \times S_2) = \dim_a S_1 + \dim_b S_2.$$

Рассмотрим теперь точку $a \in S_1 \cap S_2$; положим $k = = \dim_a (S_1 \cap S_2)$. Тогда, согласно следствию 1 из предложения 4, п. 2, существует такое $(m - k)$-мерное аффинное подмногообразие L в $\mathbf{C}^m$, что a является изолированной точкой множества $L \cap (S_1 \cap S_2)$.

Если $D = \{(x, y) \mid y = x\} \subset \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m$, то точка (a, a) является изолированной точкой множества $D \cap (L \times \mathbf{C}^m) \cap \cap (S_1 \times S_2)$. Так как $D \cap (L \times \mathbf{C}^m)$ — $(m - k)$-мерное аффинное подмногообразие пространства $\mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m$, то в силу того же следствия

$$m - k \leqslant 2m - \dim_{(a, a)} (S_1 \times S_2) = 2m - \dim_a S_1 - \dim_a S_2,$$

что и требовалось доказать.

5. Голоморфные отображения.

Предложение 1. *Пусть f отображает открытое множество $U \subset \mathbf{C}^m$ в $\mathbf{C}^n$ и $S = \{(x, y) \mid y = f(x),\ x \in U\}$ — график f в $U \times \mathbf{C}^n$.*

(a) *Если отображение f — голоморфно, то S — аналитическое множество в $U \times \mathbf{C}^n$; все точки S — его регулярные точки и размерность S в любой его точке равна m.*

(b) *В случае связного U: если f голоморфно, то S — неприводимое аналитическое множество в $U \times \mathbf{C}^n$ и, наоборот, если S — связное аналитическое множество, то отображение f голоморфно* (напомним, что если S неприводимо, то оно связно; см. следствие 3 (a) из предложения 1, п. 3).

Доказательство. Утверждение (a) непосредственно вытекает из примера, рассмотренного в п. 2, гл. III. Первая часть утверждения (b) следует из предложения 2, п. 3 (вывод 3). Итак, нам остается доказать только вторую часть утверждения (b). Упорядоченный базис в пространстве $\mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^n$ мы составим из векторов, образующих базис в про-

странстве C^m (соответствующие координаты: $x_1, \ldots, x_m$), за которыми последуют векторы, образующие базис в пространстве C^n (соответствующие координаты: $x'_1, \ldots, x'_n$).

Так как S — график отображения f, то для каждой точки $a \in U$ множество $S \cap \{(x, x') \mid x_1 - a_1 = \ldots = x_m - a_m = 0\}$ сводится к точке $(a, f(a))$. Следовательно, согласно предложению 4, п. 2, $\dim_{(a, f(a))} S \leqslant m$; равенство имеет место в том и только том случае, если базис в $C^m \times C^n$ является m-правильным для идеала $I(\mathbf{S}_{(a, f(a))})$. В силу следствия 2 из теоремы 3 и замечания к этому следствию, если $\dim_{(a, f(a))} S < m$, то существует такой открытый полицилиндр $P \subset U \times C^n$ с центром в точке $(a, f(a))$, что (1) проекция $S \cap P$ на пространство C^m является аналитическим множеством в проекции полицилиндра P; (2) проекция $S \cap P$ не совпадает с проекцией P; (3) замыкание в U проекции $S \cap P$ на C^m имеет пустую внутренность. В силу теоремы Бэра, это не может иметь места для всех точек $a \in U$, так как проекция S на C^m есть U. Итак, $\dim_{(a, f(a))} S = m$ для некоторых $a \in U$, т. е. множество S имеет по крайней мере одну неприводимую m-мерную компоненту, скажем S_1.

Возьмем точку $a \in U$ так, что $(a, f(a)) \in S_1$. Пусть T_1 — такое аналитическое множество в открытой окрестности $V \subset U \times C^n$ точки $(a, f(a))$, что $T_1 \subset S_1$ и $\mathbf{T}_1$ — m-мерная неприводимая компонента $\mathbf{S}_1$ (все ростки берутся в точке $(a, f(a))$). Согласно предложению 4, п. 2, в подобном случае базис в пространстве $C^m \times C^n$ является m-правильным для идеала $I(\mathbf{T}_1)$, а согласно следствию 2 из теоремы 3 и замечанию к этому следствию существует такой открытый полицилиндр $P \subset V$ с центром в точке $(a, f(a))$, что $T_1 \cap P$ и P будут иметь одни и те же проекции на C^m. Тогда $T_1 \cap P = S \cap P = S_1 \cap P$. Отсюда вытекает, что (I) $\mathbf{T}_1 = \mathbf{S}_1$, или росток $\mathbf{S}_1$ неприводим; (II) S_1 и объединение остальных неприводимых компонент не пересекаются (согласно следствию 3 (c) из предложения 1, п. 3). Так как множество S связно, то $S = S_1$. Следовательно, для любой точки $a \in U$ росток, порождаемый множеством S в точке $(a, f(a))$, неприводим и имеет размерность m, поэтому базис в пространстве $C^m \times C^n$ m-правилен для идеала $I(\mathbf{S})$. Тогда, используя теорему о локальном описании (теорема 3, гл. III), в которой взята точка (x, x') вместо x и точка x вместо x',

мы получим, что так как S — график f, то целое число p в указанной теореме равно 1 и, следовательно, отображение f (см. замечание 3 к этой теореме) голоморфно в некоторой окрестности точки a; a — произвольная точка U и, таким образом, доказательство предложения 1 завершено.

Замечание. В предложении 1 (b) мы заключаем, что отображение f голоморфно, на основании того, что его график S является связным аналитическим множеством. Заметим, что здесь требование связности необходимо. Например, отображение $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, определенное условиями $f(x) = x^{-1}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$, не голоморфно в $\mathbf{C}$. Однако его график в $\mathbf{C}^2$, а именно $\{\mathfrak{o}\} \cup \{(x_1, x_2) \mid x_1 x_2 = 1\}$, является аналитическим множеством в $\mathbf{C}^2$.

Теорема 10. *Пусть $f: x \to x' = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ — голоморфное отображение открытого множества $U \subset \mathbf{C}^m$ в пространство $\mathbf{C}^n$, $a \in U$ — изолированная точка множества $f^{-1}(a')$, $a' = f(a)$. Тогда* (a) $n \geqslant m$; (b) $n > m$ *в том и только в том случае, если существует такая функция g, голоморфная в некоторой открытой окрестности точки a', что $\mathbf{g}_{a'} \neq \mathbf{0}$ и $g(f_1, \ldots, f_n) \equiv 0$ в некоторой открытой окрестности точки a.*

Доказательство. Сохраним обозначения, принятые в доказательстве предложения 1: S — график f, $a = \mathfrak{o}$, $a' = \mathfrak{o}'$, $\mathbf{S}$ — росток, порождаемый множеством S в точке $(\mathfrak{o}, \mathfrak{o}')$. Нам известно, что $\dim \mathbf{S} = m$. В силу наших предположений, n координат в пространстве $\mathbf{C}^n$ удовлетворяют условию A гл. III для идеала $I(\mathbf{S})$ в кольце $\mathscr{H}^{m+n}$. Но тогда, согласно предложению 4, п. 2, $m = \dim S \leqslant n$ (что доказывает (a)) и $m < n$ в том и только в том случае, если n координат в $\mathbf{C}^n$ не удовлетворяют условию B для идеала $I(\mathbf{S})$ (что доказывает (b)).

Замечание. Утверждение теоремы 10 становится неверным, если не предположить, что a — изолированная точка множества $f^{-1}(f(a))$. Рассмотрим пример. Пусть голоморфное отображение $f: (x_1, x_2) \to (x_1', x_2', x_3')$ пространства $\mathbf{C}^2$ в пространство $\mathbf{C}^3$ определяется равенствами: $x_1' = x_1$, $x_2' = x_1 x_2$, $x_3' = x_1 x_2 e^{x_2}$. Тогда, так же как в замечании к предложению 4, п. 2, можно усмотреть, что не суще-

ствует нетривиальных голоморфных соотношений между x_1', x_2', x_3' вблизи точки $0 \in \mathbb{C}^2$. В этом случае

$$f^{-1}(f(0)) = \{(0, x_2) \mid x_2 \in \mathbb{C}\}.$$

Следствие. *Пусть f — голоморфное отображение открытого множества $U \subset \mathbb{C}^m$ в $\mathbb{C}^n$: если каждая точка $a \in U$ является изолированной точкой множества $f^{-1}(f(a))$ и $f(U)$ — открытое множество в $\mathbb{C}^n$, то $n = m$.*

Доказательство. По теореме 10 (a) $n \geqslant m$. Допустим, что $n > m$. Тогда по теореме 10 (b) каждая точка $a \in U$ имеет такую компактную окрестность $A \subset U$, что совокупность внутренних точек множества $f(A)$ пуста, т. е. $f(U) - f(A)$ — открытое всюду плотное подмножество $f(U)$. Множество U является объединением счетного семейства надлежащим образом выбранных множеств A_n. Следовательно, $f(U)$ является объединением соответствующих множеств $f(A_n)$, тогда как по теореме Бэра множество $f(U) - \bigcup_n f(A_n)$ должно быть всюду плотным в $f(U)$.

Теорема 11. *Пусть $f: x \to x' = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ — голоморфное отображение открытого множества $U \subset \mathbb{C}^m$ в $\mathbb{C}^m$, a — изолированная точка множества $f^{-1}(a')$, $a' = f(a)$. Тогда*

(a) *$f(U)$ есть окрестность точки a' в $\mathbb{C}^m$;*

(b) *существуют такие открытые полицилиндры $\pi \subset U$ и π' с центрами соответственно в точках a и a', что для каждой точки $x' \in \pi'$ множество $\pi \cap f^{-1}(x')$ является конечным и непустым; наибольшее число точек, принадлежащих $\pi \cap f^{-1}(x')$, равно целому числу p, которое не зависит от выбора полицилиндров π и π' (их радиусы могут быть взяты как угодно малыми); $\pi \cap f^{-1}(a') = \{a\}$.*

(c) $J_f(a) \neq 0$ (здесь J_f — якобиан отображения f) — *есть необходимое и достаточное условие существования такой окрестности $V \subset U$ точки a, для которой ограничение $f|V$ является взаимно однозначным* (т. е. инъективным) *отображением.*

Доказательство. Сохраним обозначения, принятые в доказательствах предложения 1 и теоремы 10: S у нас, как

и прежде, график отображения f, $a = a' = \mathfrak{o}$, $\mathbf{S}$ — росток, порождаемый множеством S в точке $(\mathfrak{o}, \mathfrak{o})$). Пусть (x, x') — произвольная точка пространства $\mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m$. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 10, мы установим, что m координат $x'_1, \ldots, x'_m$ точки x' удовлетворяют условиям A и B главы III для идеала $I(\mathbf{S})$ в кольце $\mathscr{H}^{2m}$, причем этот идеал является простым, так как росток $\mathbf{S}$ регулярен (предложение 1).

Тогда, согласно теореме о локальном описании (теорема 3 главы III), существуют открытый полицилиндр $\pi_0 \times \pi'_0$ с центром в точке $(\mathfrak{o}, \mathfrak{o})$ и аналитическое множество S_0 в этом полицилиндре со свойствами, перечисленными в указанной теореме. При переходе от принятых там обозначений к настоящим x' и $S_0(x')$ сохраняют прежний смысл, x заменяется на (x, x').

Выберем так полицилиндры π и π' с центром в точке $\mathfrak{o}$, причем $\pi \subset \pi_0 \cap U$, $\pi' \subset \pi'_0$, что $(\pi \times \pi') \cap S = (\pi \times \pi') \cap S_0$ и $S_0(x') \subset \pi \times \pi'$ при $x' \in \pi'$. Так как $S_0(x') = [\pi \cap f^{-1}(x')] \times \times \{x'\}$ для любой точки $x' \in \pi'$, то из части A теоремы о локальном описании вытекает утверждение (b) и следует, что $\pi' \subset f(U)$; поэтому справедливо и утверждение (a).

(c) Наше условие достаточно в силу теоремы 1 главы I. Для доказательства его необходимости предположим, что отображение $f|V$ инъективно: при $\pi \subset V$, $p = 1$. Тогда для любой точки $x' \in \pi'$ множество $\pi \cap f^{-1}(x')$ состоит из одной точки $g(x')$ и в силу классической части теоремы о локальном описании (часть C) отображение g голоморфно на π'; $f \circ g$ — тождественное отображение π на π', $g(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o}$ и, следовательно, $J_f(\mathfrak{o})\, J_g(\mathfrak{o}) = 1$. Отсюда вытекает наше утверждение.

Замечание. Утверждение теоремы 11 неверно, если точка a не является изолированной точкой множества $f^{-1}(f(a))$. Например, рассмотрим голоморфное отображение $f: (x_1, x_2) \to (x'_1, x'_2)$ пространства $\mathbf{C}^2$ на $\mathbf{C}^2$, определяемое равенствами $x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_1 x_2$. Если $U = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| < 1, |x_2| < 1\}$, то $f(U)$ не является окрестностью начала.

Следствие 1. *Пусть f — голоморфное отображение открытого множества $U \subset \mathbf{C}^m$ в $\mathbf{C}^m$. Если каждая*

точка $a \in U$ является изолированной точкой множества $f^{-1}(f(a))$, то $f(U)$ — открытое множество в C^m.

Следствие 2. *Если f — взаимно однозначное голоморфное отображение открытого множества $U \subset C^m$ в C^m, то* (1) *$f(U) = V$ — открытое множество в C^m;* (2) *якобиан J_f не равен нулю в U;* (3) *f^{-1} — голоморфное отображение V на U.*

Доказательство. Первые два утверждения содержатся в теореме 11. Голоморфность отображения f^{-1} в некоторой окрестности произвольно взятой точки из V следует теперь из теоремы 1 гл. I. Этот же результат можно получить другим путем из теоремы 11.

Замечание 1. Следствие из теоремы 10 и следствие 2 из теоремы 11 доказывают утверждение, содержащееся в замечании, сделанном в конце гл. I.

Замечание 2. А. Картан (*Bull. Soc. Math. de France*, **57**, 1933) доказал, что справедливо следующее замечательное предложение: если f — голоморфное отображение открытого множества $U \subset C^m$ в C^m, то множество $\{a \in U | a$ не является изолированной точкой множества $f^{-1}(f(a))\}$ является аналитическим в U. В связи с этим см. также работу: Remmert R., Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume, *Math. Annalen*, **133** (1957), 328—370.

6. Голоморфные функции на аналитическом множестве в смысле А. Картана [3]. В [3] для аналитического множества S в открытом множестве U определяется топологическое пространство $\tilde{S}$ и вводятся функции, голоморфные на $\tilde{S}$. Ниже приводится определение подобных функций. Мы будем далее называть их просто «функциями, голоморфными на S».

Определение 3. *Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве $U \subset C^m$, h — комплекснозначная функция, определенная на S^*. Функция h называется голоморфной на S, если она* (1) *голоморфна на S^*;* (2) *ограничена в окрестности каждой точки $a \in S$ (более точно: для каждой точки $a \in S$ можно указать такую окрестность V, что функция $h|V \cap S^*$ является ограниченной).*

Замечание. Функция h называется голоморфной на S^*, если она голоморфна во всех точках S^*. Она называется голоморфной в точке $a \in S^*$, если она удовлетворяет одному из следующих двух условий (очевидно, эквивалентных друг другу):

(I) Существуют такая открытая окрестность V точки a в пространстве C^m и такая функция g, голоморфная в V, что $h = g|V \cap S^*$.

(II) Пусть f — такое биголоморфное отображение открытой окрестности V точки a в пространстве C^m на открытое множество $V' \subset C^m$, что $f(S \cap V) = V' \cap L$, где L — аффинное подмногообразие C^m какой-то размерности k. Тогда существует такая открытая окрестность $W \subset V$ точки a, что $h \circ f^{-1}$ — голоморфная функция в $f(W \cap S)$ (в этом случае $f(W \cap S)$ — открытое множество в C^k).

Некоторые непосредственные выводы из определения 3.

1. Если h и h' голоморфны на S, то $h + h'$ и $h \cdot h'$ голоморфны на S.

2. Если функция h голоморфна на аналитическом множестве S в U и открытое множество $U' \subset U$, то функция $h|S \cap U'$ голоморфна на аналитическом множестве $S \cap U'$ в U'.

3. Если функция h голоморфна на аналитическом множестве S в U, f — (взаимно однозначное) биголоморфное отображение U на другое открытое множество U', то функция $h \circ f^{-1}$ голоморфна на аналитическом множестве $f(S)$ в U'.

4. (a) Ростки голоморфных функций на аналитических множествах определяются следующим (вполне естественным) образом. Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве U, точка $a \in S$. Рассмотрим пары (V, h), где $V \subset U$ — открытые окрестности точки a, h — функция, голоморфная на $V \cap S$, и положим $(V, h) \sim (V', h')$, если существует такая окрестность $W \subset V \cap V'$ точки a, что $h \equiv h'$ на $W \cap S^*$. Тогда под ростком голоморфной функции на S в точке a понимается класс эквивалентности по отношению к «$\sim$» в множестве всех пар (V, h).

(b) Если $\mathbf{h}_a$ — росток голоморфной функции на S в точке a, то слова «h_a обращается в нуль на $\mathbf{T}_a$» имеют обычный

смысл, если $\mathbf{T}_a$ является объединением неприводимых компонент ростка $\mathbf{S}_a$.

5. (Принцип аналитического продолжения). Если функция h голоморфна на неприводимом аналитическом множестве S в открытом множестве $U \subset \mathbf{C}^m$ и для некоторой точки $a \in S$ росток $\mathbf{h}_a$, порожденный функцией h в точке a, обращается в нуль на одной из неприводимых компонент $\mathbf{S}_a$, то $h \equiv 0$ на S^*.

Этот вывод вытекает из связности множества S^* (следствие 1 из предложения 1, п. 3) и обобщает лемму Ритта (следствие 3 (c) из того же самого предложения).

6. (a) Пусть S и S' — аналитические множества в открытом множестве U, причем $S' \subset S$ и $\dim_a S' < \dim_a S$ в каждой точке $a \in S'$. Если функция h голоморфна на множестве $S^* \cap {}^cS'$ и ограничена в окрестности каждой точки $\in S$, то h есть ограничение на множество $S^* \cap {}^cS'$ голоморфной функции, единственным образом определяемой на множестве S.

(b) Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве U, росток $\mathbf{S} = \mathbf{S}_a$ приводим, а $T_1, \ldots, T_n (n \geqslant 2)$ — аналитические множества в открытом множестве $V \subset U$, порождающие неприводимые компоненты ростка $\mathbf{S}$ и обладающие следующими свойствами (предложение 3, п. 2): (1) $V \cap S = \bigcup_{j=1}^{n} T_j$; (2) если $T'_j = \bigcup_{j' \neq j} T_{j'}$ $(j = 1, \ldots, n)$, то $\dim_x (T_j \cap T'_j) < \dim_x T_j$ для любой точки $x \in T_j \cap T'_j$, $j = 1, \ldots, n$; (3) $V \cap S^* = \bigcup_{j=1}^{n} (T_j^* \cap {}^cT'_j)$. Тогда для любой функции h, голоморфной на S, ее ограничение $h | S^* \cap T_j^*$ вместе с тем является ограничением на множество $S^* \cap T_j^* = T_j^* \cap {}^cT'_j$ единственным образом определяемой голоморфной функции на T_j, $j = 1, \ldots, n$.

(c) Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве U, S_1 — неприводимая компонента S, h — голоморфная функция на S. Тогда ограничение $h | S^* \cap S_1^*$ вместе с тем является ограничением единственным образом определяемой голоморфной функции на S_1.

Предложение 1. *Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве $U \subset \mathbf{C}^m$, точка $0 \in S$, множество S порождает неприводимый росток в точке 0,*

базис в пространстве C^m *является* k*-правильным для идеала* $I(S)$, $1 \leqslant k \leqslant m-1$. *Тогда*: (a) *существуют такие открытый полицилиндр* π_0 *с центром в точке* 0 (*его радиусы можно взять как угодно малыми*) *и главное аналитическое множество* σ_0' *в* π_0' (*проекции* π_0 *на* C^k), *где* $S_0 = \pi_0 \cap S$ *является неприводимым аналитическим множеством в* π_0 *и* $x \in S_0^*$, *если* $x \in S_0$ *и* $x' = (x_1, \ldots, x_k) \in \pi_0' - \sigma_0'$; (b) *для каждой функции* h, *голоморфной на* S_0, *существует такой псевдополином* $R_h(x', u)$ *относительно* u *с коэффициентами, голоморфными при* $x' \in \pi_0'$ (*его старший коэффициент равен* 1), *что* $\{u \in C \mid R_h(x_0', u) = 0\} = \{u = h(x) \mid x \in S_0,\ x' = x_0'\}$ *для любой точки* $x_0' \in \pi_0' - \sigma_0'$ *и* $R_h(x', h(x)) = 0$ *для любой точки* $x \in S_0^*$; (c) *если псевдополином* $R_h'(x', u)$ *содержит множитель* u, *то* $h \equiv 0$ *на* S_0.

Доказательство. Согласно теореме о локальном описании (теорема 3, гл. III), можно так выбрать как угодно малый полицилиндр π_0 с центром в точке 0, что множество $S_0 = \pi_0 \cap S$ обладает свойствами, перечисленными в (a). Мы должны только заметить, что множество S_0 неприводимо, так как содержит всюду плотное связное множество регулярных точек, именно $\{x \in S_0 \mid x' \in \pi_0' - \sigma_0'\}$. Затем рассмотрим функции

$$c_j(x') = (-1)^j \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_j \leqslant p} h\left(x^{(i_1)}(x')\right) \ldots h\left(x^{(i_j)}(x')\right),$$
$$j = 1, \ldots, p.$$

Они голоморфны при $x' \in U_0' = \pi_0' - \sigma_0'$, ограничены в окрестности каждой точки σ_0' и, следовательно, согласно теореме 2, гл. III, имеют единственное голоморфное продолжение на π_0'. Получаемые таким образом функции (мы будем их обозначать через c_j) обращаются в нуль в начале $0'$ пространства C^k. Положим

$$R_h(x', u) = u^p + \sum_{j=1}^{p} c_j(x')\, u^{p-j}.$$

Тогда R_h удовлетворяет всем требованиям, указанным в (b).

(c) Предположим, что $c_p \equiv 0$. Возьмем точку $x_0' \in U_0'$. Тогда при надлежащем выборе индексов $j = 1, \ldots, p$ функции $h(x^{(j)}(x'))$, $j = 1, \ldots, p$, будут голоморфны в некоторой открытой связной окрестности $V_0' \subset U_0'$ точки x_0' и их произведение будет $\equiv 0$ на V_0', т. е. функция h окажется тождественно равной нулю на S_0 в некоторой окрестности одной из точек $x^{(j)}(x_0')$. В силу вывода 5 из определения 3 отсюда следует, что $h \equiv 0$ на S_0.

Лемма 1. *Пусть h — непрерывная комплекснозначная функция на открытом множестве $U \subset C^m$, $b_1, \ldots, b_p$ — такие функции, голоморфные на U, что $P(x, h) = h^p + b_1 h^{p-1} + \ldots + b_p \equiv 0$ на U. Тогда функция h голоморфна на U.*

Доказательство. Возьмем точку $a \in U$. В силу теоремы Гаусса (п. 2, гл. II) $\mathscr{H}_a^m[u]$ — факториальное кольцо. Пусть $\mathbf{P}(u) = u^p + \mathbf{b}_1 u^{p-1} + \ldots + \mathbf{b}_p$ и $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1^{\alpha_1} \ldots \mathbf{P}_n^{\alpha_n}$, где α_j — положительные целые числа, $\mathbf{P}_j \in \mathscr{H}_a^m[u]$ — неприводимы и взаимно неэквивалентны в кольце $\mathscr{H}_a^m[u]$, имеют степень, не меньшую 1, и старший коэффициент, равный 1. Все рассматриваемые здесь ростки берутся в точке a.

В этих условиях должны существовать: (1) открытая связная окрестность $V \subset U$ точки a и (2) псевдополиномы $P_j(x, u)$, $j = 1, \ldots, n$, относительно u со старшими коэффициентами, равными 1, порождающие в точке a ростки $\mathbf{P}_j$; поскольку $P(x, h) = P_1^{\alpha_1}(x, u) \ldots P_n^{\alpha_n}(x, u)$ при $x \in V$, то $P_1(x, h) \ldots P_n(x, h) \equiv 0$ при $x \in V$. Но дискриминант произведения $\mathbf{P}_1 \ldots \mathbf{P}_n$ отличен от $\mathbf{0}$. Следовательно, дискриминант произведения $P_1(x, u) \ldots P_n(x, u)$, который является голоморфной функцией на V, не равен тождественно нулю. Тогда множество S нулей этого дискриминанта в V является главным аналитическим множеством в V; любой непрерывный корень произведения $P_1(x, h) \ldots P_n(x, h)$, в частности $h(x)$, голоморфен на $V - S$. Так как ограничение $h|V$ непрерывно на V, то $h|V$ — голоморфная функция на V, в силу теоремы 2, гл. III.

Теорема 12 (А. Картан). *Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве U, h — комплекс-*

нозначная функция, определенная на S^*. Тогда утверждения (I), (II), (III) *эквивалентны*:

(I) *функция h голоморфна на S^* и ограничена в окрестности каждой точки* $\in S^*$ (т. е. по определению 3 функция h голоморфна на S).

(II) *Функция h голоморфна на S^* и обладает следующим свойством: если точка $a \in S$ и аналитические множества $T_1, \ldots, T_n (n \geqslant 1)$ порождают в точке a неприводимые компоненты ростка $\mathbf{S}_a$, то $h(x)$ имеет конечный предел, когда $x \to a$ при $x \in S^* \cap T_j$ (для каждого $j = 1, \ldots, n$).*

(III) *Функция h непрерывна на S^* и для каждой точки $a \in S$ можно указать ее открытую окрестность $V \subset U$ и такие функции $b_1, \ldots, b_p$, голоморфные в V, что $h^p + b_1 h^{p-1} + \ldots + b_p \equiv 0$ на множестве $V \cap S^*$.*

Доказательство. Очевидно, что из (II) вытекает (I). Мы должны доказать, что из (I) вытекает (III), а из (III) вытекает (II).

1) Предположим, что утверждение (I) справедливо. Тогда легко видеть, на основании вывода 6 (b) из определения 3, что существует точка $a \in S$, для которой росток $\mathbf{S} = \mathbf{S}_a$ неприводим. Возьмем точку a за начало 0; пусть базис в пространстве $\mathbf{C}^m$ является k-правильным $(1 \leqslant k \leqslant m-1)$ для идеала $I(\mathbf{S})$. Тогда существуют такой открытый полицилиндр $\pi_0 \subset U$ с центром в точке 0 и функции $c_1, \ldots, c_p$, голоморфные в π_0' (проекции π_0 на пространство $\mathbf{C}^k$), что $[h(x)]^p + \sum_{j=1}^{p} c_j(x')[h(x)]^{p-j} = 0$ в любой точке $x \in \pi_0 \cap S^*$.

2) Теперь предположим, что справедливо утверждение (III). Тогда, в силу предыдущей леммы, функция h голоморфна на S^*. Рассмотрим точку $a \in S$; множество предельных значений $h(x)$ при $x \to a$, $x \in S^*$ должно содержаться в множестве $\{u \in \mathbf{C} \mid u^p + b_1(a) u^{p-1} + \ldots + b_p(a) = 0\}$ и, следовательно, должно быть конечным. Если росток $\mathbf{S}_a$ неприводим, то, согласно предложению 2 (b), п. 2, существуют такие, как угодно малые, окрестности W точки a, что каждое пересечение $W \cap S^*$ является связным. Отсюда вытекает, что и множество предельных значений $h(x)$ при $x \to a$, $x \in S^*$ связно; в итоге мы приходим к выводу, что это

множество сводится к одной единственной точке, т. е. существует конечный предел $h(x)$.

Если росток $\mathbf{S}_a$ приводим, мы рассмотрим множества $T_1, \ldots, T_n$ $(n \geqslant 2)$, обладающие свойствами, указанными в предложении 3 (c), п. 2. Тогда для каждого номера j $(j = 1, \ldots, n)$ можно указать такие как угодно малые окрестности W_j, что все множества $W_j \cap (T_j^* \cap {}^cT_j')$ оказываются связными; в этом случае множество предельных значений $h(x)$ при $x \to a$, $x \in S^* \cap T_j$ также должно быть связным и поэтому сводится к одной единственной точке. Отсюда опять следует наше утверждение.

Следствие. *Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве U, $S_1 \subset S$ — аналитическое множество в открытом множестве $U_1 \subset U$.*

(a) *Предположим, что для любой точки $a \in S_1$ каждая неприводимая компонента ростка $\mathbf{S}_1$ содержится только в одной неприводимой компоненте ростка $\mathbf{S}$ (ростки $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}$ берутся в точке a). Тогда произвольная голоморфная функция h на S следующим образом определяет голоморфную функцию h_1 на S_1: если точка $a \in S_1^* \cap S^*$, то $h_1(a) = h(a)$; если точка $a \in S_1^* \cap (S - S^*)$ и T_1 — аналитическое множество в некоторой открытой окрестности точки a, порождающее в точке a неприводимую компоненту ростка $\mathbf{S}$, содержащую $\mathbf{S}_1$, то*

$$h_1(a) = \lim_{x \to a,\ x \in S^* \cap T_1} h(x).$$

(b) *Предположим, что* $\dim_a S_1 \cap (S - S^*) < \dim_a S_1$ *для любой точки $a \in S_1 \cap (S - S^*)$. Тогда предположения пункта* (a), *а следовательно, и утверждение п* (a) *оказываются верными.*

Доказательство. (a) Легко видеть, что функция h обладает свойством, указанным в п. (III) теоремы 12, по отношению к множеству S. Поэтому для любой точки $a \in S_1$ можно указать такую открытую окрестность $V \subset U$ этой точки a и функции $b_1, \ldots, b_p$, голоморфные в V, что $h^p + b_1 h^{p-1} + \ldots + b_p \equiv 0$ на $V \cap S^*$. Тогда $h_1^p + b_1 h_1^{p-1} + \ldots + b_p \equiv 0$ на $V \cap S_1^*$. Наше утверждение будет следовать из теоремы 12, если мы покажем, что функция h_1 непре-

рывна на S_1^*. Эта непрерывность очевидна в точках $a \in S_1^* \cap S^*$, а следовательно, и в тех точках $a \in S_1^* \cap (S - S^*)$, где S порождает неприводимый росток, так как в последнем случае $h_1(a) = \lim\limits_{x \to a,\ x \in S^*} h(x)$.

Рассмотрим случай, когда точка a принадлежит $S_1^* \cap (S - S^*)$, а росток $\mathbf{S} = \mathbf{S}_a$ приводим. Тогда, согласно предложению 3, п. 2, существует открытая окрестность $W \subset U_1$ точки a и аналитические множества $T_1, \ldots, T_n$ $(n \geqslant 2)$ в W, порождающие в точке a неприводимые компоненты ростка $\mathbf{S}_a$ со следующими свойствами: (1) $W \cap S = \bigcup\limits_{j=0}^{n} T_j$; (2) $W \cap S_1 \subset T_1$; (3) $|h(x) - h_1(a)| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ — данное число) для любой точки $x \in S^* \cap T_1$; (4) если $T_1' = \bigcup\limits_{j=2}^{n} T_j$, то множество $T_1^* \cap {}^cT_1'$ связно и всюду плотно в T_1^*.

Из свойства (4) вытекает, что множество T_1^* связно, т. е. что T_1 — неприводимое аналитическое множество в W (следствие 1 из предложения 1, п. 3). Из свойств (2) и (3) вытекает, что $|h_1(x) - h_1(a)| < \varepsilon$ для любой точки $x \in W \cap S_1^* \cap S^*$. Возьмем точку $x \in W \cap S_1^* \cap (S - S^*)$. В силу свойства (1), всякая неприводимая компонента ростка $\mathbf{S}_x$ является неприводимой компонентой или ростка $(\mathbf{T}_1)_x$, или ростка $(\mathbf{T}_1')_x$. Согласно свойству (2), росток $(\mathbf{S}_1)_x$ содержится в некоторой неприводимой компоненте ростка $(\mathbf{T}_1)_x$, которая в свою очередь содержится в какой-то неприводимой компоненте ростка $\mathbf{S}_x$. Если последняя является неприводимой компонентой ростка $(\mathbf{T}_1')_x$, то (так как T_1 — неприводимое аналитическое множество в W) $T_1 \subset T_1'$, согласно следствию 3 (c) из предложения 1, п. 3. Итак, неприводимая компонента ростка $\mathbf{S}_x$, содержащая $(\mathbf{S}_1)_x$, всегда является неприводимой компонентой $(\mathbf{T}_1)_x$ и из свойства (3) вытекает, что $|h_1(x) - h_1(a)| < \varepsilon$.

(b) Пусть точка $a \in S_1$ и росток $\mathbf{S}_1 = (\mathbf{S}_1)_a$ приводим, $(T_1)_1, \ldots, (T_1)_{n_1}$, $n_1 \geqslant 1$, — аналитические множества в открытом множестве W, порождающие в точке a неприводи-

мые компоненты ростка $\mathbf{S}_1$ и $W \cap S_1 = \bigcup_{j=1}^{n_1} (T_1)_j$. Если утверждение (a) не имеет места для точки a, то существует такая открытая окрестность $W_1 \subset W$ точки a, что (например)

$$W_1 \cap (T_1)_1 \subset W_1 \cap (T_1 \cap T_2) \subset S - S^*$$

(см. вывод 1 из предложения 3, п. 2); тогда S_1 и $S_1 \cap (S - S^*)$ порождают один и тот же непустой росток в точке a при $n_1 = 1$, а при $n_1 \geqslant 2$, если некоторая точка $b \notin \bigcup_{j=2}^{n_1} (T_1)_j$, то $o \in W_1 \cap (T_1)_1$. Отсюда следует утверждение (b).

Предложение 2. *Пусть S и S' — аналитические множества в открытом множестве $U \subset C^m$, $S' \subset S$, точка $a \in S'$, V — некоторая окрестность точки a, $\mathbf{S}$ и $\mathbf{S}'$ — ростки, порождаемые множествами S и S' в точке a, причем росток $\mathbf{S}$ неприводим и* $\dim \mathbf{S}' < \dim \mathbf{S}$ *(т. е., согласно следствию* 1 (c) *из предложения* 3, п. 2, $\mathbf{S}' \subsetneqq \mathbf{S}$), *функция h голоморфна на S и $h(x) \to 0$, когда $x \to a$, $x \in S^*$. Тогда или росток $\mathbf{h}$ тождественно равен нулю на $\mathbf{S}$ или $h(V \cap S^* \cap {}^cS') \cup \{0\}$ является окрестностью точки* 0 *на* C.

Доказательство. Примем точку a за начало o. Сначала предположим, что $\dim \mathbf{S} = 1$: в пространстве C^m существует базис, 1-правильный для идеала $I(\mathbf{S})$, если полицилиндр π_0 из предложения 1 взять достаточно малым, $\sigma_0' = \{0\}$ и $\pi_0 \cap S' = \{o\}$. Псевдополином $R_h(x_1, u) = u^p + \sum_{j=1}^{p} c_j(x_1) u^{p-j}$ из предложения 1 является отмеченным, так как $h(x) \to 0$, когда $x \to o$, $x \in S^*$, и по предложению 1 $h \equiv 0$ на $\pi_0 \cap S^*$, если $c_p \equiv 0$.

Если $c_p \not\equiv 0$, можно предположить, что $c_p(x_1) \neq 0$ при $0 < |x_1| < r$. Тогда для любого комплексного числа $\lambda \neq 0$ с достаточно малым $|\lambda|$, $R_h(x_1, \lambda) = 0$ для некоторого x_1, $0 < |x_1| < r$, т. е. $h = \lambda$ для какой-то точки $\in \pi_0 \cap S^* \cap {}^cS'$. Таким образом, предложение 2 верно, если $\dim \mathbf{S} = 1$.

Теперь предположим, что предложение 2 верно, если $\dim \mathbf{S} < k$, $2 \leqslant k \leqslant m - 1$. Пусть $\dim \mathbf{S} = k$. Возьмем базис в пространстве C^m k-правильным для идеала $I(\mathbf{S})$; тогда

мы сможем опять найти такой открытый полицилиндр $\pi_0 \subset U$ с центром в точке $\mathfrak{o}$ и произвольно малыми радиусами, что множество $S_0 = \pi_0 \cap S$ будет обладать свойствами, указанными в предложении 1; будет существовать такая функция c_p, голоморфная на π_0' (проекции π_0 на C^k), равная нулю в начале $\mathfrak{o}'$, что если $h(x) = 0$, $x \in \pi_0 \cap S^*$, то $c_p(x') = 0$, а если $c_p \equiv 0$, то $h \equiv 0$ на $\pi_0 \cap S^*$.

Если $c_p \not\equiv 0$, мы можем принять, что $S' \supset S - S^*$. Так как $\dim \mathbf{S}' < k$, то, согласно предложению 4, п. 2, базис в пространстве C^m не может быть k-правильным для идеала $I(\mathbf{S}')$. Тогда, если полицилиндр π_0 взят достаточно малым, то существуют (1) такая функция c', голоморфная на π_0', $c'(\mathfrak{o}') = 0$, $c' \not\equiv 0$, что $c'(x') = 0$ при $x \in \pi_0 \cap S'$; (2) такая функция φ, голоморфная на π_0', причем $\varphi(\mathfrak{o}') = 0$, $\varphi \not\equiv 0$, что ростки, порожденные функциями $c_p c'$ и φ в точке $\mathfrak{o}'$, будут взаимно простыми в кольце $\mathscr{H}^k$. Действительно, мы можем так выбрать базис в пространстве C^k, что $(c_p c')(0, \ldots, 0, x_k) \not\equiv 0$ в некоторой окрестности точки $x_k = 0$ в плоскости C и затем взять за φ любую функцию, удовлетворяющую условию $\varphi \in \mathscr{H}^{k-1} - \{\mathbf{0}\}$. Так как S_0 — неприводимое аналитическое множество в π_0, то, согласно следствию 1 из теоремы 9, аналитическое множество $\Sigma = \{x \in S_0 \mid \varphi(x') = 0\}$ в полицилиндре π_0 имеет размерность $k - 1$ в любой точке из Σ. Поэтому существует аналитическое множество $S_1 \subset \Sigma$ в некоторой окрестности $U_1 \subset \pi_0$ точки $\mathfrak{o}$, содержащее точку $\mathfrak{o}$, порождающее в точке $\mathfrak{o}$ неприводимый росток $\mathbf{S}_1$ и имеющее размерность $k - 1$ в каждой точке $\in S_1$ (см. предложение 3, п. 2).

Благодаря нашему выбору функции φ, множество общих нулей функций $c_p c'$ и φ в π_0' имеет размерность $k - 2$ в точке $\mathfrak{o}'$ (см. замечание к следствию 2 из теоремы 9). Тогда, согласно следствию 1 из предложения 4, п. 2, существует такое двумерное линейное подмногообразие L' в C^k, что точка $\mathfrak{o}'$ является изолированной точкой пересечения L' и указанного выше множества общих нулей функций $c_p c'$ и φ в π_0'. Подмногообразие L' является проекцией на C^k некоторого такого $(m - k + 2)$-мерного подмногообразия L

пространства C^m, что точка $\mathfrak{o}$ оказывается изолированной точкой множества $L \cap S_1 \cap S'$. Используя снова следствие 1 из предложения 4, п. 2, мы заключаем, что $\dim_{\mathfrak{o}} S_1 \cap S' \leqslant k-2$. Отсюда вытекает, что если точка $\mathfrak{o} \in S - S^*$, то $\dim_{\mathfrak{o}} [S_1 \cap (S - S^*)] \leqslant k-2$. Поэтому, если окрестность U_1 взята достаточно малой, то $\dim_x [S_1 \cap (S - S^*)] < \dim_x S_1$ для любой точки $x \in [S_1 \cap (S - S^*)]$. Тогда, согласно следствию из теоремы 12, функция h порождает на S_1 такую голоморфную функцию h_1, что $h_1(x) \to 0$, когда $x \to \mathfrak{o}$, $x \in S_1^*$.

Допустим, что росток $\mathbf{h}_1$ обращается в нуль на ростке аналитического множества $\mathbf{S}_1$. Тогда существует такая открытая окрестность $V_1 \subset U_1$ точки $\mathfrak{o}$, что $h \equiv 0$ на $V_1 \cap S_1^* \cap S^*$, или $V_1 \cap S_1 \cap S^*$; иными словами: если $x \in V_1 \cap S_1$, то или $x \in S - S^* \subset S'$, или $h(x) = 0$. В обоих случаях $(c_p c')(x') = \varphi(x') = 0$ и точка $\mathfrak{o}$ является изолированной точкой пересечения $L \cap S_1$, что противоречит равенству: $\dim S_1 = k-1$. Итак, росток $\mathbf{h}_1$ не может обращаться в нуль на ростке $\mathbf{S}_1$, и так как $\dim_{\mathfrak{o}} S_1 \cap S' < \dim_{\mathfrak{o}} S_1 < k$, то для некоторой окрестности V точки $\mathfrak{o}$, $h_1(V \cap S_1^* \cap {}^cS') \cup \{0\}$ или $h(V \cap S_1^* \cap {}^cS') \cup \{0\}$, а *тем более* $h(V \cap S^* \cap {}^cS') \cup \{0\}$ является окрестностью точки 0 на плоскости C.

В случае, когда $\dim \mathbf{S} = m$, множество S рассматривается как подмножество пространства C^{m+1}.

Следствие 1. *Пусть S — неприводимое аналитическое множество в открытом множестве U. Тогда любая функция h, голоморфная на S, или постоянна, или определяет открытое отображение множества S^* в C в следующем смысле:*

Пусть $a \in S$, T — аналитическое множество в некоторой открытой окрестности точки a, порождающее в точке a неприводимую компоненту T_a ростка $\mathbf{S}_a$. Тогда множество $h(S^* \cap T) \cup \{\lambda\}$ является окрестностью точки λ в C; здесь $\lambda = \lim\limits_{x \to a,\, x \in S^* \cap T} h(x)$.

Доказательство. Если для точки a росток $\mathbf{S}_a$ приводим, мы воспользуемся выводами 5 и 6 (b) из определения 3 и предложением 2, где взято T_j вместо S и $T_j \cap T'_j$ вместо S'.

Следствие 2 (принцип максимума). *Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве U, h — функция, голоморфная на S. Если существуют точка $a \in S$ и такое аналитическое множество T в какой-то открытой окрестности точки a (порождающее в точке a неприводимую компоненту $\mathbf{T}_a$ ростка $\mathbf{S}_a$), что $\left|\lim\limits_{x \to a,\, x \in S^* \cap T} h(x)\right| = \sup\limits_{S^*} |h|$, то $h = \mathrm{const}$ на $S^* \cap S_1$. Здесь S_1 — такая неприводимая компонента S, что $\mathbf{T}_a$ является неприводимой компонентой $(\mathbf{S}_1)_a$ (см. предложение 2, п. 3).*

Доказательство. Согласно выводу 6 (c) из определения 3, функция $h \mid S^* \cap S_1^*$ является ограничением на $S^* \cap S_1^*$ голоморфной функции h_1 на S_1. Так как множество $S^* \cap S_1^* \cap T$ пересекает любую окрестность точки a, то $\lim\limits_{x \to a,\, x \in S_1^* \cap T} h_1(x) = \lim\limits_{x \to a,\, x \in S^* \cap T} h(x)$. Следовательно, $\left|\lim\limits_{x \to a,\, x \in S_1^* \cap T} h_1(x)\right| = \sup\limits_{S_1^*} |h_1|$ и по следствию 1 функция h_1 является постоянной.

Теорема 13. *Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве $U \subset \mathbf{C}^m$, h — функция, голоморфная на S, S' — замыкание в U (или в S) множества $\{x \in S^* \mid h(x) = 0\}$. Тогда*

(a) *S' — снова аналитическое множество в U;*

(b) *для любой точки $a \in S'$, $\dim_a S' \geqslant -1 + \varkappa$; здесь $\varkappa$ — наибольшая из размерностей тех неприводимых компонент S_n множества S, которые служат замыканиями соответствующих множеств $\{x \in S^* \cap S_n^* \mid h(x) = 0\}$;*

(c) *если росток S неприводим, то или $h \equiv 0$, или $\dim_a S' = \dim_a S - 1$ в любой точке $a \in S'$.*

Доказательство. Пусть $\{s_n\}$ — счетное семейство связных компонент множества S^* и $\{S_n\}$ — семейство неприводимых компонент множества S; для каждого номера n множество S_n является замыканием множества s_n в U и $s_n = S^* \cap S_n^*$. Так как рассматриваемое семейство множеств является локально конечным в U, нам достаточно показать, что для любого номера n замыкание S_n' множества $\{x \in s_n \mid h(x) = 0\}$ в U является аналитическим множеством

в U и что для произвольной точки $a \in S'_n$, $\dim_a S'_n = k_n$ или $k_n - 1$. Здесь k_n — постоянная размерность S_n.

Сказанное очевидно, если $k_n = 0$ или m, или $h|s_n \equiv 0$. Пусть $1 \leqslant k \leqslant m-1$ и $h|s_n \not\equiv 0$. По условию, s_n — неприводимое k_n-мерное аналитическое множество в $U-(S-S^*)$, состоящее только из регулярных точек. Поэтому $\{x \in s_n | h(x) = 0\}$ — $(k_n - 1)$-мерное аналитическое множество в $U-(S-S^*)$. Следовательно, в силу предложения 3 п. 3, теорема 13 будет доказана, если мы установим, что для каждой точки $a \in S_n \cap (S-S^*)$ можно указать $(k_n - 1)$-мерное аналитическое множество в открытой окрестности $\pi_0 \subset U$ точки a, содержащее множество $\{x \in \pi_0 \cap s_n | h(x) = 0\}$.

Если росток, порождаемый множеством S_n в точке a, неприводим, мы возьмем $T = S_n$, $V = U$. В противном случае мы примем за T одно из аналитических множеств T_j в открытой окрестности $V \subset U$ точки a, обладающее свойствами, указанными в выводе 6 (b) из определения 3 (с заменой в нем S на S_n): легко найти $(k_n - 1)$-мерное аналитическое множество в открытой окрестности $\pi_0 \subset V$, содержащее множество $\{x \in \pi_0 \cap s_n \cap T^* | h(x) = 0\}$. Если базис в пространстве C^m является k_n-правильным для идеала $I(\mathbf{T}_a)$, то, согласно предложению 1 и выводам 6 (b) и 6 (c) из определения 3, существуют открытый полицилиндр $\pi_0 \subset V$ с центром в точке a и функция c_p, голоморфная на π'_0 (проекция π_0 на C^{k_n}), такие, что: (I) $T_0 = \pi_0 \cap T^*$ — неприводимое аналитическое множество в π_0; (II) в любой точке $x \in \pi_0 \cap s_n \cap T^*$, если $h(x) = 0$, то $c_p(x') = 0$, где $x' = (x_1, \ldots, x_{k_n})$; (III) если $c_p \equiv 0$, то $h|\pi_0 \cap s_n \cap T^* \equiv 0$ и поэтому, в силу принципа аналитического продолжения, $h|s_n \equiv 0$. Итак, $c_p \not\equiv 0$ и поскольку T_0 — неприводимое аналитическое множество в π_0, согласно следствию 1 из теоремы 9, $\{x \in T_0 | c_p(x') = 0\}$ есть $(k_n - 1)$-мерное аналитическое множество в π_0, содержащее множество $\{x \in \pi_0 \cap s_n \cap T^* | h(x) = 0\}$, что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве $U \subset C^m$, точка $\mathfrak{o} \in S$, S порождает в точке $\mathfrak{o}$ неприводимый росток $\mathbf{S}$, $k = \dim \mathbf{S}$, $1 \leqslant k \leqslant m-1$. Тогда точка $\mathfrak{o}$ имеет такую окрестность*

$V \subset U$, что $V \cap (S - S^*) = \{x \in V \cap S \mid \rho_j(x) = 0$ для всех $j\}$, где $\{\rho_j\}$ — некоторое конечное семейство функций, голоморфных в V, устроенное следующим образом: для каждого номера j можно указать такой базис $\mathscr{B}_j$ в пространстве $\mathbf{C}^m$, являющийся k-правильным для идеала $I(\mathbf{S})$, и такой открытый полицилиндр π_j (относительно этого базиса) с центром в точке $\mathfrak{o}$, $V \subset \pi_j \subset U$, что пересечение $S_j = \pi_j \cap S$ будет обладать свойствами, указанными в теореме о локальном описании (теорема 3, гл. III) *по отношению к базису $\mathscr{B}_j$ и, наконец, такую линейную форму l_j над $\mathbf{C}^m$, что* (далее совокупность первых координат по отношению к базису $\mathscr{B}_j$ обозначается одной буквой x'_j; $\pi'_j = \{x'_j \mid x \in \pi_j\}$; p_j — максимальное число точек из S_j, отвечающих какой-либо точке $x'_j \in \pi'_j$), $\rho_j(x) = \frac{\partial}{\partial u} R_j(x'_j, l_j(x))$, *где $R_j(x'_j, u)$ — такой отмеченный псевдополином степени p_j относительно u с коэффициентами, голоморфными на π'_j, что $\{u \in \mathbf{C} \mid R_j(x'_0, u) = 0\} = \{u = l_j(x) \mid x \in S_j,\ x'_j = x'_0\}$ для любой точки $x'_0 \in \pi'_j$.*

Доказательство. Лемма вытекает из соображений, приведенных в первом доказательстве теоремы 6, замечания к следствию 1 из теоремы 3 и части (B, a) теоремы о локальном описании.

Определение 4. *Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве $U \subset \mathbf{C}^m$, точка $a \in S$. Функция v, голоморфная в некоторой открытой окрестности $V \subset U$ точки a, называется универсальным знаменателем для S в точке a, если* (I) *росток* $\mathbf{v}$ (*все ростки берутся в точке a*) *не обращается в нуль ни на одной неприводимой компоненте ростка* $\mathbf{S}$; (II) *для любой открытой окрестности $V' \subset V$ точки a и произвольной голоморфной функции h на $V' \cap S$ можно указать голоморфную функцию в некоторой окрестности $W \subset V'$ точки a, имеющую то же самое ограничение на множество $W \cap S^*$, что и функция vh.*

Теорема 14 (К. Ока). *Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве $U \subset \mathbf{C}^m$, начало $\mathfrak{o} \in S$.*

(a) *Если множество S порождает в точке $\mathfrak{o}$ неприводимый росток, то существует такое целое число $n > 0$, что любая функция v, голоморфная в некоторой открытой окрестности точки $\mathfrak{o}$ и равная нулю на $S - S^*$ в некоторой окрестности точки $\mathfrak{o}$ или равна нулю на S в какой-то окрестности точки $\mathfrak{o}$, или v^n является универсальным знаменателем для S в любой точке $a \in S$, достаточно близкой к $\mathfrak{o}$.*

(b) *В любом из рассматриваемых случаев существует функция v, голоморфная в некоторой окрестности точки $\mathfrak{o}$, являющаяся универсальным знаменателем для S во всякой точке $a \in S$, достаточно близкой к $\mathfrak{o}$.*

Доказательство. (a) Пусть $\mathbf{S}$ — росток, порождаемый множеством S в точке $\mathfrak{o}$, $k = \dim \mathbf{S}$ (мы можем принять, что $1 \leqslant k \leqslant m - 1$). Предположим, что базис в пространстве C^m является k-правильным для идеала $I(\mathbf{S})$, $\pi_0 \subset U$ — такой открытый полицилиндр с центром в точке $\mathfrak{o}$, что множество $S_0 = \pi_0 \cap S$ обладает свойствами, перечисленными в теореме о локальном описании (теорема 3, гл. III), $R_l(x', u)$ (мы сохраняем обозначения этой теоремы) — отмеченный псевдополиномом, соответствующий линейной форме l, заданной над пространством C^m, с коэффициентами, голоморфными на π_0'. Корни этого псевдополинома при $x' \in U_0' = \pi_0' - \sigma_0'$ суть $l(x^{(j)}(x'))$, $j = 1, \ldots, p$.

Для произвольной голоморфной функции h на S_0 и точки $x' \in U_0'$ образуем выражение

$$X(x', u) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} \left\{ h(x^{(j)}(x')) \prod_{1 \leqslant j' \leqslant p,\ j' \neq j} [u - l(x^{(j')}(x'))] \right\}. \quad (*)$$

Оно представляет собой псевдополином степени $\leqslant p - 1$ относительно u. Так как его коэффициенты голоморфны на U_0' и ограничены в окрестности каждой точки σ_0', то этот псевдополином может быть голоморфно продолжен на π_0'. Тогда $X(x', l(x))$ станет голоморфной функцией на π_0 и будет иметь место равенство

$$\frac{\partial}{\partial u} R_l(x', l(x)) h(x) = X(x', l(x)) \text{ для любой точки } x \in S_0^*. \quad (**)$$

Таким образом, $\frac{\partial}{\partial u} R_l(x', l(x))$ или порождает в точке $\mathfrak{o}$ росток, равный нулю на $\mathbf{S}$, или является универсальным знаменателем для S в точке $\mathfrak{o}$. Мы пользуемся здесь тем, что полицилиндр π_0 можно взять как угодно малым.

Пусть точка $a \in C^m$ и a' — проекция a на C^k. Тогда представляется возможным построить последовательность открытых полицилиндров $\pi, \pi_1, \ldots$ (произвольно малых радиусов) со следующими свойствами: (I) центром π служит точка a, центрами $\pi_1, \pi_2, \ldots$ — другие точки из $S_0(a')$ (мы сохраняем обозначения, принятые в теореме о локальном описании); (II) $\pi, \pi_1, \pi_2, \ldots$ содержатся в π_0, взаимно не пересекаются и имеют одну и ту же проекцию π' на пространство C^k; (III) объединение $\pi, \pi_1, \pi_2, \ldots$ содержит $S_0(x')$ для любой точки $x' \in \pi'$.

Пусть нам дана на $\pi \cap S$ голоморфная функция h. Мы положим $h \equiv 0$ на $\pi_1 \cap S^*$, $\pi_2 \cap S^*, \ldots$ и составим выражение (*) для функции h и точек $x' \in \pi' \cap U_0'$. Тогда $X(x', l(x))$ будет голоморфной функцией на π и соотношение (**) будет для нее справедливо при $x \in \pi \cap S^*$. Таким образом, в любой точке $a \in S_0$ одна и та же функция $\frac{\partial}{\partial u} R_l(x', l(x))$ является универсальным знаменателем для S, исключая случай, когда эта функция порождает в точке a росток, равный нулю на некоторой неприводимой компоненте ростка $\mathbf{S}_a$. Наконец, заметим, что так как S_0 — неприводимое аналитическое множество в π_0, то по следствию 3 (с) из предложения 1, п. 3, если функция $\frac{\partial}{\partial u} R_l(x', l(x))$ в какой-то точке $a \in S_0$ порождает росток, равный нулю на одной из неприводимых компонент ростка $\mathbf{S}_a$, то эта функция тождественно равна нулю на S_0. Иными словами: функция $\frac{\partial}{\partial u} R_l(x', l(x))$ или тождественно равна нулю на S_0, или является универсальным знаменателем для S_0 в любой точке $a \in S_0$.

Из следствия 2 из теоремы 7, леммы 2 и только что полученного результата вытекает, что существует открытая окрестность $V \subset U$ точки $\mathfrak{o}$ и конечное семейство функций ρ_j, $j = 1, \ldots, q$, голоморфных в V, обладающих следующими свойствами:

(I) $V \cap S$ — неприводимое аналитическое множество в V;
(II) $V \cap (S - S^*) = \{x \in V \cap S \mid \rho_j(x) = 0, \quad j = 1, \ldots, q\}$;
(III) ρ_j (для каждого j) является универсальным знаменателем для S в любой точке $a \in V \cap S$.

Рассмотрим функцию v, удовлетворяющую условиям, указанным в (a). Тогда благодаря свойству (II) идеал, порождаемый в кольце $\mathscr{H}^{in}$ идеалом $I(\mathbf{S})$ и ростками $\boldsymbol{\rho}_j$, определяет в точке $\mathfrak{o}$ росток аналитического множества, порождаемый там множеством $S - S^*$. Согласно теореме о нулях (следствие 3 из теоремы 2), этот идеал обязательно содержит функцию v^n для надлежащего целого $n > 0$, которое зависит только от S. Если окрестность V достаточно мала, то функция v голоморфна в V и для каждого номера $j = 1, \ldots, q$ существует такая функция φ_j, голоморфная на V, что

$$\text{(IV)} \qquad v^n - \sum_{j=1}^{q} \rho_j \varphi_j \equiv 0 \qquad \text{на } V \cap S.$$

Пусть точка $a \in V \cap S$, $V' \subset V$ — открытая окрестность точки a, h — голоморфная функция на $V' \cap S$. Тогда, благодаря свойству (III), существует окрестность $W \subset V'$ точки a и функция u_j, голоморфная на W (для каждого номера $j = 1, \ldots, q$), такие, что u_j и $\rho_j h$ будут иметь одно и то же ограничение на $W \cap S^*$. В этом случае, в силу свойства (IV), функции $\sum_{j=1}^{q} u_j \varphi_j$ и $v^n h$ тоже будут иметь совпадающие ограничения на $W \cap S^*$, т. е. v^n есть универсальный знаменатель для S в точке a, исключая случай, когда функция v порождает в точке a росток, равный нулю на одной из неприводимых компонент ростка $\mathbf{S}_a$. Наконец, благодаря свойству (I) и следствию 3 (c) из предложения 1, п. 3, или $v \equiv 0$ на $V \cap S$, или v^n является универсальным знаменателем для S в любой точке $a \in V \cap S$.

(b) Если множество S неприводимо, то утверждение (b) является непосредственным следствием утверждения (a). Итак, рассмотрим случай, когда $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_n$ $(n \geqslant 2)$ — неприводимые компоненты ростка $\mathbf{S}$. Если $V \subset U$ — достаточно малая окрестность точки $\mathfrak{o}$, то в V существуют аналитические множества T_j и голоморфные функции f_j, v_j, $j = 1, \ldots, n$,

обладающие, помимо свойств, указанных в выводе 6 (b) из предложения 3, еще следующими свойствами: (I) функции f_j тождественно равны нулю на множестве $T'_j = \bigcup_{j' \neq j} T_{j'}$, но $\mathbf{f}_j \neq \mathbf{0}$ на $\mathbf{T}_j$, $j = 1, \ldots, n$; (II) v_j — универсальный знаменатель для T_j в любой точке $\in T_j$, $j = 1, \ldots, n$; (III) существуют такие открытые окрестности $W_j \subset V$ точки o, что $W_j \cap T_j$ — неприводимое аналитическое множество в W_j (см. предложение 3 (c), п. 2), $j = 1, \ldots, n$. Благодаря свойствам (I), (III) и следствию 3 (c) из предложения 1, п 3, росток, порождаемый функцией f_j в какой-либо точке $a \in W_j \cap T_j$, не может равняться нулю на какой-либо неприводимой компоненте, порожденной T_j в точке a.

Мы утверждаем, что функция $v = \sum_{j=1}^{n} f_j v_j$ является универсальным знаменателем для S в любой точке $a \in \left(\bigcap_{j=1}^{n} W_j\right) \cap S$. Действительно, пусть дана открытая окрестность $V' \subset \bigcap_{j=1}^{n} W_j$ точки a и функция h, голоморфная на $V' \cap S$. Тогда, благодаря свойству (II), существует открытая окрестность $W \subset V'$ точки a и такие функции u_j, $j = 1, \ldots, n$, голоморфные на W, что: или $a \notin T_j$ и тогда $W \cap T_j = \varnothing$, или $a \in T_j$ и тогда функции u_j и $v_j h$ имеют одно и то же ограничение на $W \cap T_j^* \cap {}^cT'_j$ (см. вывод 6 (a) из определения 3 с заменой в нем S на $V' \cap T_j$ и S' на $V' \cap T_j \cap T'_j$). Следовательно, функции $\sum_{j=1}^{n} f_j u_j$ и vh имеют одно и то же ограничение на $W \cap S^*$; с другой стороны, если точка $a \in T_j$, то росток, порождаемый в точке a функцией $f_j v_j$, не может быть равным нулю ни на одной неприводимой компоненте ростка, порождаемого множеством T_j, и то же самое должно быть верным для ростка $\mathbf{v}_a$, порожденного функцией v в точке a. Каждая неприводимая компонента ростка $\mathbf{S}_a$, порожденного множеством S, является неприводимой компонентой одного из ростков, порожденных множествами $T_j \ni a$, следовательно,

росток $\mathbf{v}_a$ не может равняться нулю ни на одной неприводимой компоненте ростка $\mathbf{S}_a$ и доказательство теоремы 14 завершено.

Предложение 3. *Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве $U \subset C^m$, точка $a \in S$. Тогда следующие два утверждения эквивалентны:*

(I) *число 1 является универсальным знаменателем для S в точке a.*

(II) *Росток $\mathbf{S}_a$, порождаемый множеством S в точке a, неприводим и область целостности $\mathscr{H}_a^m/I(\mathbf{S}_a)$ целозамкнута в своем поле отношений.*

Доказательство. Далее точка a принята за начало $\mathfrak{o}$, $\mathbf{S}_a = \mathbf{S}$.

1. Пусть (I) имеет место: для любой открытой окрестности $V \subset U$ точки $\mathfrak{o}$ и произвольной функции h_0, голоморфной на $V \cap S$, можно указать функцию, голоморфную в некоторой окрестности $W \subset V$ точки $\mathfrak{o}$, имеющую на $W \cap S^*$ то же ограничение, что и функция h_0. Последнее невозможно, если функция h_0 определена на $V \cap S^*$ равенствами $h_0 \mid T_j^* \cap {}^cT_j' \equiv j$ для $j = 1, \ldots, n$ (сохраняются обозначения, принятые в выводе 6 (b) из определения 3). Следовательно, росток $\mathbf{S}$ неприводим.

Пусть f^*/g^* — элемент поля отношений кольца $\mathscr{H}^m/I(\mathbf{S})$, принадлежащий целому замыканию этого кольца: f^* и g^* суть образы ростков $\mathbf{f} \in \mathscr{H}^m$ и $\mathbf{g} \in \mathscr{H}^m - I(\mathbf{S})$ при каноническом отображении $\mathscr{H}^m \to \mathscr{H}^m/I(\mathbf{S})$, причем $\mathbf{f}^p + \sum_{j=1}^{p} \mathbf{b}_j \mathbf{f}^{p-j} \mathbf{g}^j \in I(\mathbf{S})$, а каждый коэффициент $\mathbf{b}_j \in \mathscr{H}^m$. Пусть $V \subset U$ такая окрестность точки $\mathfrak{o}$, что (1) $V \cap S$ — неприводимое аналитическое множество (см. следствие 2 из предложения 1, п. 3); (2) в ней существуют голоморфные функции f, g, b_j, $j = 1, \ldots, p$, порождающие в точке $\mathfrak{o}$ ростки $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{b}_j$. Так как $\mathbf{g} \notin I(\mathbf{S})$, то, согласно следствию 1 из теоремы 9, для любой точки $x \in S' = \{x \in V \cap S \mid g(x) = 0\}$ будет $\dim_x S' < \dim_x (V \cap S)$. Заметим далее, что функция $f/g \mid V \cap S^* \cap {}^cS'$ голоморфна на $V \cap S^* \cap {}^cS'$ и ограничена в окрестности каждой точки $\in V \cap S$, поскольку $(f/g)^p + \sum_{j=1}^{p} b_j (f/g)^{p-j} \equiv 0$ на $V \cap S^* \cap {}^cS'$ (см. следствие 3 (c) из предложения 1,

п. 3). Следовательно, согласно выводу 6 (а) из определения 3, $f/g|V \cap S^* \cap {}^cS'$ есть ограничение на $V \cap S^* \cap {}^cS'$ функции h_0, голоморфной на $V \cap S$. Итак, функции f и gh_0 имеют одно и то же ограничение на множество $V \cap S^*$ и существует функция h, голоморфная в некоторой открытой окрестности $W \subset V$ точки $\mathfrak{o}$, имеющая на $W \cap S^*$ то же ограничение, что и функция h_0. Тогда $f - gh \equiv 0$ на $W \cap S^*$, а следовательно, и на $W \cap S$, т. е. $f^* = g^*h^*$.

2. Пусть (II) имеет место; рассмотрим открытую окрестность $V \subset U$ точки $\mathfrak{o}$ и функцию h_0, голоморфную на $V \cap S$. В силу теорем 12 и 14, существуют такие функции f, g, b_j, $j = 1, \ldots, p$, в открытой окрестности $V' \subset V$ точки $\mathfrak{o}$, причем $\mathbf{g} \notin I(\mathbf{S})$, что $h_0^p + \sum_{j=1}^{p} b_j h_0^{p-j} \equiv 0$ на $V' \cap S^*$ и функции f, gh_0 имеют одинаковые ограничения на $V' \cap S^*$. Тогда $\mathbf{f}^p + \sum_{j=1}^{p} \mathbf{b}_j \mathbf{f}^{p-j} \mathbf{g}^j \in I(\mathbf{S})$, т. е. (мы сохраняем прежние обозначения) f^*/g^* принадлежит целому замыканию кольца $\mathscr{H}^m/I(\mathbf{S})$. Следовательно, существует такая открытая окрестность $W \subset V'$ точки $\mathfrak{o}$, что множество $W \cap S$ оказывается неприводимым, и такая функция h, голоморфная на W, что $\mathbf{f} - \mathbf{gh} \in I(\mathbf{S})$ и поэтому $f - gh \equiv 0$ на $W \cap S$ (согласно следствию 3 (с) из предложения 1, п. 3). Множество $W \cap S^* \cap {}^cS'$, где $S' = \{x \in W \cap S \mid g(x) = 0\}$, оказывается (в силу того же следствия) всюду плотным в $W \cap S^*$; функции h и h_0 имеют одинаковые ограничения на $W \cap S^* \cap {}^cS'$, а значит, и на $W \cap S^*$. Предложение доказано.

Определение 5. *Пусть S — аналитическое множество в $U \subset \mathbf{C}^m$, точка $a \in S$. Росток $\mathbf{S}_a$, порождаемый множеством S в точке a, называется нормальным, если выполнено условие* (I) *или* (II) *предложения* 3.

Замечание. Из глубокой теоремы Ока вытекает, что множество точек $a \in S$, для которых росток $\mathbf{S}_a$ не является нормальным, снова является аналитическим множеством в U (см. [3]). При этом оказывается: если росток $\mathbf{S}_a$ является нормальным, то ростки $\mathbf{S}_x$ для всех $x \in S$ и достаточно близких к a тоже являются нормальными и, следовательно, неприводимыми.

7. Голоморфные функции на аналитическом множестве в смысле Р. Реммерта. Мы рассмотрим сейчас класс функций на аналитическом множестве S, более узкий сравнительно с тем, о котором шла речь в п. 6. Этот класс функций был изучен Р. Реммертом [4a]. Его рассмотрение на S в качестве класса голоморфных функций представляется более естественным, поскольку он состоит из функций, определенных всюду на множестве S.

Определение 6. *Пусть — S аналитическое множество в открытом множестве $U \subset \mathbf{C}^m$. Комплексно-значная функция h, определенная на S, называется C-голоморфной на S, если она непрерывна на S, а функция $h|S^*$ голоморфна на S^*.*

Замечание. Если функция h C-голоморфна на S, то функция $h|S^*$ голоморфна на S. Обратное утверждение неверно, что показывает следующий пример. Пусть $S=\{(x_1, x_2)|\ x_1^3+x_1^2-x_2^2=0\} \subset \mathbf{C}^2$. Тогда $S^*=S-\{0\}$. Функция $(x_1, x_2) \to x_2/x_1$ голоморфна, но не C-голоморфна на S. Однако, в силу теоремы 12, указанное обратное утверждение правильно для множества S, порождающего неприводимый росток во всех своих точках.

Очевидно, что теоремы п. 6 верны для C-голоморфных функций. В частности, остаются правильными принцип аналитического продолжения, теорема о размерности (теорема 13), если в них заменить функции «голоморфные на S» функциями «C-голоморфными на S». Из предложения 2 п. 6 вытекает:

(a) Пусть S — неприводимое аналитическое множество в открытом множестве U. Тогда функция h, C-голоморфная на S, или постоянна, или определяет открытое отображение S в $\mathbf{C}$ в следующем смысле: если точка $a \in S$ и T — такое аналитическое множество в какой-то открытой окрестности точки a, что $\mathbf{T}_a$ — неприводимая компонента $\mathbf{S}_a$, то $h(T)$ есть окрестность точки $h(a)$ в $\mathbf{C}$.

(b) (Принцип максимума). Если функция h C-голоморфна на S и $|h|$ достигает максимума в некоторой точке $a \in S$, то функция h постоянна на связной компоненте S, содержащей точку a.

Из теоремы 12 вытекает

Теорема 15. *Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве $U \subset C^m$. Комплекснозначная функция h, непрерывная на S, в том и только в том случае C-голоморфна на S, если для каждой точки $a \in S$ существует такая окрестность $V \subset U$ точки a и такие функции $b_1, \ldots, b_p$, голоморфные на V, что*

$$h^p + b_1 h^{p-1} + \ldots + b_p \equiv 0 \text{ на } V \cap S.$$

Следствие (Реммерт). *Если функция h C-голоморфна на аналитическом множестве S в U, $S_1 \subset S$ — аналитическое множество в открытом множестве $U_1 \subset U$, то функция $h \mid S_1$ C-голоморфна на S_1.*

В заключение мы докажем

Предложение 1. *Пусть S — аналитическое множество в открытом множестве $U \subset C^m$, g — такое гомеоморфное отображение S на открытое множество $X \subset C^k$ $(k \geqslant 1)$, что g^{-1} — голоморфное отображение X в C^m. Тогда*

(a) $\dim_a S = k$ *и росток* S_a *неприводим в любой точке* $a \in S$;

(b) *функция h, определенная на S, C-голоморфна на S тогда и только тогда, когда функция $h \circ g^{-1}$ голоморфна на X.*

Доказательство. (a) Пусть точка $a \in S^*$, $V \subset U$ — открытая окрестность точки a, f — такое взаимно однозначное биголоморфное отображение V на открытое множество $V' \subset C^m$, что $f(V \cap S) = V' \cap L$, где L — аффинное подмногообразие в C^m. В этих условиях $f \circ g^{-1} | g(V \cap S)$ есть взаимно однозначное голоморфное отображение $g(V \cap S)$ на $V' \cap L$. Здесь $g(V \cap S)$ — открытое множество в C^k, $V' \cap L$ — открытое множество в $C^{\dim_a S}$. Тогда, по следствию из теоремы 10, $\dim_a S = k$; отсюда вытекает, что $\dim_a S = k$ для любой точки $a \in S$.

С другой стороны, для произвольного аналитического множества $T \subset S$ в открытом множестве $V \subset U$, $g(T)$ есть аналитическое множество в открытом множестве $g(V \cap S) \subset X$. Рассмотрим точку $a \in S$; пусть $V \subset U$ — открытая окрестность точки a, T_1, T_2 — два таких аналитических множества в V, что $V \cap S = T_1 \cup T_2$; тогда $g(V \cap S) = g(T_1) \cup g(T_2)$; отсюда,

далее, вытекает, что или $g(T_1)$, или $g(T_2)$ совпадает с $g(V \cap S)$ в некоторой окрестности точки $g(a)$. Следовательно, или T_1, или T_2 совпадает с S в некоторой окрестности точки a, т. е. росток $\mathbf{S}_a$ неприводим.

(b) Мы сохраним обозначения, введенные при доказательстве (a). Предположим, что функция $h \circ g^{-1}$ голоморфна на X; тогда функция h непрерывна на S. Возьмем точку $a \in S^*$. Так как $f \circ g^{-1} | g(V \cap S)$ есть взаимно однозначное голоморфное отображение $g(V \cap S)$ на $V' \cap L$, то, в силу следствия 2 из теоремы 11, $g \circ f^{-1} | V' \cap L$ есть голоморфное отображение $V' \cap L$ на $g(V \cap S)$ и функция $h \circ f^{-1} | V' \cap L = (h \circ g^{-1}) \circ (g \circ \circ f^{-1}) | V' \cap L$ оказывается голоморфной на $V' \cap L$. Таким образом, функция h C-голоморфна на S.

Теперь предположим, что функция h C-голоморфна на S. Тогда функция $h \circ g^{-1}$ непрерывна на X. Пусть точка $a \in S^*$. Тогда, согласно определению 3 (1), существует такая открытая окрестность $W \subset V$ точки a, что функция $h \circ f^{-1} | f(W \cap S)$ будет голоморфна на $f(W \cap S)$. В этих условиях функция $h \circ g^{-1} | g(W \cap S) = \{(h \circ f^{-1}) \circ (f \circ g^{-1})\} | g(W \cap S)$ будет голоморфной на $g(W \cap S)$ (открытом подмножестве X, содержащем точку $g(a)$). Этот результат показывает, что функция $h \circ g^{-1} | g(S^*)$ голоморфна на $g(S^*)$ (всюду плотное подмножество в X). Так как $S - S^*$ — аналитическое множество в V (теорема 6), то $g(S - S^*) = X - g(S^*)$ — аналитическое множество в X. Отсюда вытекает, согласно теореме 2, гл. III, что функция $h \circ g^{-1}$ голоморфна на X, что и требовалось доказать.

Замечание. Следствие из теоремы 15 и предыдущее предложение показывают, что класс C-голоморфных функций в точности совпадает с классом голоморфных функций, рассмотренных Реммертом [4a].

ЛИТЕРАТУРА

Следующая литература была существенно использована при подготовке этой книги; ссылки на эти источники во многих местах книги опущены.

[1] Бохнер С. и Мартин У. Т., Функции многих комплексных переменных, ИЛ, 1951 (особенно гл. VII, IX, X).

[2] Bourbaki N., Topologie générale, Paris (особенно гл. X).

[3] Cartan H., Séminaire, Ecole Normale Supérieure, Paris, 1951 — 1952 (особенно сообщения XII, XIV), 1953 — 1954 (особенно сообщения VI, VII, VIII, VIII bis, IX, X).

[4] Remmert R., Stein K., Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen, *Math. Ann.*, **126** (1953), 263 (особенно §§ 1, 2, 3).

[4a] Remmert R., Projektionen analytischer Mengen, *Math. Ann.*, **130** (1956), 410 (особенно §§ 1, 2).

[5] Samuel P., Algèbre locale et ensembles analytiques, Séminaire d'Analyse Fac. Sc. Paris, 1957—1958 (особенно n⁰ 1, 2, 3).

[6] Ван-дер Варден, Современная алгебра, I, М., 1947.

[6a] Ван-дер Варден, Современная алгебра, II, М., 1947.

Настоящая книга является только введением в более специальные работы, например, по следующим вопросам. (Ниже мы указываем статьи, в которых можно найти дальнейшие сведения и ссылки на литературу по этим вопросам.)

(a) Когерентные аналитические пучки.
Cartan H., Idéaux et modules des fonctions analytiques, *Bull. Soc. Math. France*, **78** (1950), 29; Cartan H., Variétés analitiques et cohomologie, Colloque de Bruxelles, 1953 (Перевод в сб. Расслоенные пространства и их приложения, ИЛ, М., 1958); Grauert H., Remmert R., Bilder und Urbider analytischer Garben, *Ann. Math.*, **68**, 1958, 393; Grauert H., Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Moduiräume Komplexer Strukturen, Publ. math. № 5, Inst. des Hautes Etudes scientifiques, Paris, 1960. (Перевод в сб. Комплексные пространства, М., 1965.)

(b) Комплексные пространства. Gartan H., Séminaire, Ecole Normale Supérieure (1953 — 1954); особенно сообщение VI; Dolbeault P., Espaces analytiques, Séminiare d'Analyse Fac. Sc. Paris (1957 — 1958); Grauert H., Remmert R., Komplexe Räume,

Math. Ann., 136 (1958), 245; Serre J. P., Géométrie algébrique et géométrie analytique, *Ann. Inst. Fourier*, 6 (1955 — 1956), 1.

(c) Продолжение аналитических множеств и голоморфных функций. Gartan H., Séminaire, Ecole Normale Supérieure (1953 — 1954), сообщения XIII, XIV; Lelong P., Singularités impropres des fonctions holomorphes, Séminaire d'Analyse Fac. Sc. Paris (1957 — 1958), Remmert R., Stein K. [4].

(d) Интегрирование на аналитических множествах. Lelong P., Intégration sur un ensemble analytique complexe, *Bull. Soc. Math. France*, 85 (1957), 239.

(e) Проектирование аналитических множеств. Remmert R. [4a].

УКАЗАТЕЛЬ
ГЛАВНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ И РЕЗУЛЬТАТОВ

Глава I

1. Определение 1. Голоморфные функции.
   Следствие 2 из предложения 2. Принцип аналитического продолжения.
2. Определение 2. Ростки голоморфных функций.
3. Интегральная формула Коши.
4. Теорема Вейерштрасса о равномерно сходящихся последовательностях.
5. Определение 3. Голоморфные отображения.
   Теорема 1. Локальное обращение голоморфных отображений с якобианом $\neq 0$.

Глава II

1. Определение 1. Эквивалентные ростки в кольце $\mathscr{H}_a^m$.
   Определение 2. Отмеченные псевдополинномы.
   Теорема 1. Подготовительная теорема Вейерштрасса.
   Теорема 2. Подготовительная теорема Шпэта — Картана
2. **Алгебра.**
   (a) Результант и дискриминант.
   (c) Простые и примарные идеалы.
   (d) Нётерово кольцо, теорема Гильберта о базисе.
   (e) Области с единственным разложением на простые множители, или факториальные кольца. Теорема Гаусса.
3. Теорема 3. $\mathscr{H}_a^m$ — факториальное кольцо.
4. Теорема 4. Для произвольно заданных голоморфных функций f и g множество точек a, для которых ростки $\mathbf{f}_a$ и $\mathbf{g}_a$ взаимно просты в кольце $\mathscr{H}_a^m$, является открытым.
5. Определение 3. Мероморфные функции, точки определенности.
   Теорема 5. Каноническое определение мероморфной функции.
6. Определение 4. Аналитические множества.
   Определение 5. Приводимость аналитического множества.
   Определение 6. Приводимость ростка аналитического множества.
7. Теорема 6. Критерий включения одного ростка главного аналитического множества в другой.
8. Теорема 7. $\mathscr{H}_a^m$ — нётерово кольцо.
   Следствие 1. Всякий идеал в кольце $\mathscr{H}_a^m$ замкнут.

Следствие 2. Каждый идеал в кольце $\mathscr{H}_a^m$ определяет в точке a росток аналитического множества.

Определение 7. Распространение определения 4 на случай произвольного семейства голоморфных функций.

Определение 9. Идеал, присоединенный к ростку аналитического множества.

Следствие 4 из предложения 3. Любой росток аналитического множества является конечным объединением неприводимых ростков, неприводимых компонент этого ростка.

Глава III

1. Теорема 1. Связность дополнения к аналитическому множеству.
   Теорема 2. Продолжение голоморфной функции на дополнение к аналитическому множеству.
   Теорема Гартогса о непрерывном расположении особых точек функции.
   Теорема Леви о выпуклости.
2. Определение 1. Регулярные точки аналитического множества, размерность в регулярной точке.
3. Определение 2. k-правильный базис в пространстве C^m для некоторого идеала.
4. Теорема 3. Локальное описание аналитического множества.

Глава IV

1. Теорема 1. Пучок аналитического множества когерентен.
   Теорема 2. Идеал, присоединенный к аналитическому множеству, определенному с помощью некоторого идеала.
   Следствие 3. Теорема Гильберта о нулях («Nullstellensatz»).
   Следствие 1 из теоремы 3. Пересечение произвольного семейства аналитических множеств есть снова аналитическое множество.
   Следствие 2 из теоремы 3. Случай, когда проекция аналитического множества снова является аналитическим множеством.
   Теорема 4. Накопление точек аналитического множества в открытом множестве U у границы ∂U.
2. Теорема 5. Множество S^* регулярных точек аналитического множества S всюду плотно в S.
   Определение 1. Размерность аналитического множества в его произвольной точке.
   Предложение 2. Регулярные точки и размерность аналитического множества S вблизи точки, где S порождает неприводимый росток.
   Предложение 3. Регулярные точки и размерность аналитического множества S вблизи точки, где S порождает приводимый росток.

ОГЛАВЛЕНИЕ