И. И. ЕЖОВ, А. В. СКОРОХОД, М. И. ЯДРЕНКО

# ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

И. И. ЕЖОВ, А. В. СКОРОХОД,
М. И. ЯДРЕНКО

# ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Перевод с украинского
З. Л. Кулик

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1977

517.8
Е 41
УДК 519

**Элементы комбинаторики.** Ежов И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И., перев. с укр. М, Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1977, 80 стр.

Комбинаторика — один из разделов математики, играющий важную роль при решении некоторых современных проблем теории вероятностей, кибернетики, математической логики, теории чисел. Знание комбинаторики необходимо представителям самых разных специальностей. С комбинаторными задачами приходится иметь дело физикам, химикам, биологам, лингвистам, специалистам по теории кодов. В книге изложены основные понятия и методы комбинаторики. Изложение материала построено на систематическом использовании теоретико-множественных понятий. Книга рассчитана на учащихся средних школ и студентов младших курсов университетов. Она может быть полезна и для лиц, занимающихся комбинаторными расчетами.

Илл. 12, библ. 12.

*Игорь Иванович Ежов*
*Анатолий Владимирович Скороход*
*Михаил Иосифович Ядренко*

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

М., 1977 г., 80 стр. с илл.

Редактор *А. Ф. Лапко*

Техн. редактор *Е. В. Морозова.* Корректор *Л. С. Сомова*

Сдано в набор 01.11.76. Подписано к печати 18.04.77. Бумага 84×108¹/₃₂ тип. № 3. Физ. печ. л. 2,5. Усл. печ. л. 4,2. Уч.-изд. л. 4,07. Тираж 150 000 экз. Т-08423. Цена книги 12 коп. Заказ № 375.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

Е $\frac{20202-074}{053(02)-77}$ 73-77

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Комбинаторика — один из разделов дискретной математики, который приобрел важное значение в связи с использованием его в теории вероятностей, математической логике, теории чисел, вычислительной технике, кибернетике. Между тем программа средней школы не уделяет должного внимания этой полезной и интересной математической дисциплине. Цель этой книжки — ознакомить учащихся с основными понятиями комбинаторики и методами решения комбинаторных задач.

При изучении комбинаторики мы считали целесообразным систематически использовать понятия множества и операции над множествами, поскольку большинство задач комбинаторики можно сформулировать как задачи теории конечных множеств.

При решении комбинаторных задач следует особо отметить метод производящих функций и метод траекторий. Эти методы важны сами по себе, так как находят широкое применение не только в комбинаторике, но и во многих разделах современной математики.

В основу книги положены лекции, прочитанные авторами учащимся республиканской заочной физико-математической школы.

Книга предназначена учащимся средних школ и студентам младших курсов университетов. Она может быть полезна и лицам, занимающимся комбинаторными расчетами. В настоящее издание внесены некоторые исправления и добавлены новые задачи.

Авторы искренне благодарят М. Х. Клина и А. Ф. Лапко, внимательно прочитавших украинское издание книги и сделавших большое число полезных замечаний.

*Авторы*

## § 1. ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНОЙ ПРИНЦИП КОМБИНАТОРИКИ

Человеку часто приходится иметь дело с задачами, в которых нужно подсчитать число всех возможных способов расположения некоторых предметов или число всех возможных способов осуществления некоторого действия. Сколькими способами можно расположить 50 человек в очереди в кассу кино? Сколькими способами могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медали на чемпионате мира по футболу? Задачи такого типа называются *комбинаторными.*

С комбинаторными вычислениями приходится иметь дело представителям многих специальностей: ученому-химику при рассмотрении различных возможных типов связи атомов в молекулах, биологу при изучении различных возможных последовательностей чередования аминокислот в белковых соединениях, конструктору вычислительных машин, агроному, рассматривающему различные возможные способы посевов на нескольких участках, диспетчеру при составлении графика движения. Комбинаторные соображения лежат в основе решения многих задач теории вероятностей — важного раздела современной математики, посвященного изучению случайных явлений. Усиленный интерес к комбинаторике в последнее время обусловлен бурным развитием кибернетики, вычислительной техники.

Установим сначала очень важное правило, которое часто применяется при комбинаторных расчетах. Начнем с такой задачи.

Задача 1. Из Киева до Чернигова можно добраться пароходом, поездом, автобусом, самолетом; из Чернигова до Новгорода-Северского — пароходом и автобусом. Сколькими способами можно осуществить

путешествие по маршруту Киев — Чернигов — Новгород-Северский?

Решение. Очевидно, число разных путей из Киева до Новгорода-Северского равно $4 \times 2 = 8$, так как, выбрав один из четырех возможных способов путешествия от Киева до Чернигова, имеем два возможных способа путешествия от Чернигова до Новгорода-Северского (рис. 1).

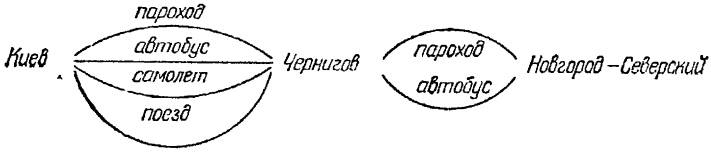


Рис. 1.

Соображения, которые были приведены при решении задачи 1, доказывают справедливость следующего простого утверждения, которое будем называть *основным правилом комбинаторики.*

Если некоторый выбор $A$ можно осуществить $m$ различными способами, а для каждого из этих способов некоторый другой выбор $B$ можно осуществить $n$ способами, то выбор $A$ и $B$ (в указанном порядке) можно осуществить $m \times n$ способами.

Иначе говоря, если некоторое действие (например, выбор пути от Киева до Чернигова) можно осуществить $m$ различными способами, после чего другое действие (выбор пути от Чернигова до Новгорода-Северского) можно осуществить $n$ способами, то два действия вместе (выбор пути от Киева до Чернигова, выбор пути от Чернигова до Новгорода-Северского) можно осуществить $m \times n$ способами.

Задача 2. В розыгрыше первенства страны по футболу принимает участие 16 команд. Сколькими способами могут быть распределены золотая и серебряная медали?

Решение. Золотую медаль может получить одна из 16 команд. После того как определен владелец золотой медали, серебряную медаль может иметь одна из 15 команд. Следовательно, общее число способов, которыми могут быть распределены золотая и серебряная медали, равно $16 \times 15 = 240$.

Сформулируем теперь основное правило комбинаторики (правило умножения) в общем виде.

*Пусть требуется выполнить одно за другим $k$ действий. Если первое действие можно выполнить $n_1$ способами, второе действие — $n_2$ способами, третье действие — $n_3$ способами и так до $k$-го действия, которое можно выполнить $n_k$ способами, то все $k$ действий вместе могут быть выполнены*

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$$

*способами.*

Задача 3. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если:

а) ни одна из цифр не повторяется более одного раза;

б) цифры могут повторяться;

в) числа должны быть нечетными (цифры могут повторяться)?

Решение. а) Первой цифрой числа может быть одна из 5 цифр 1, 2, 3, 4, 5 (0 не может быть первой цифрой, потому что в таком случае число не четырехзначное); если первая цифра выбрана, то вторая может быть выбрана 5 способами, третья — 4 способами, четвертая — 3 способами. Согласно правилу умножения общее число способов равно $5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300$.

б) Первой цифрой может быть одна из цифр 1, 2, 3, 4, 5 (5 возможностей), для каждой из следующих цифр имеем 6 возможностей (0, 1, 2, 3, 4, 5). Следовательно, число искомых чисел равно $5 \times 6 \times 6 \times 6 = 5 \times 6^3 = 1080$.

в) Первой цифрой может быть одна из цифр 1, 2, 3, 4, 5, а последней — одна из цифр 1, 3, 5 (числа должны быть нечетными). Следовательно, общее количество чисел равно $5 \times 6 \times 6 \times 3 = 540$.

Для того чтобы хорошо усвоить основное правило комбинаторики, советуем обязательно решить предложенные ниже упражнения.

## УПРАЖНЕНИЯ

1. На вершину горы ведет 7 дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее? Дайте ответ на тот же самый вопрос, если подъем и спуск осуществляются различными путями.

2. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

3. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждую из этих цифр можно использовать не более одного раза?

4. Сколькими способами 7 человек могут разместиться в очереди в кассу?

5. В классе изучают 10 предметов. В понедельник 6 уроков, причем все уроки разные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

6. Сколько имеется пятизначных чисел, которые делятся на 5?

7. На одной из боковых сторон треугольника взято $n$ точек, на другой — $m$ точек. Каждая из вершин при основании треугольника соединена прямыми с точками, взятыми на противоположной стороне. а) Сколько точек пересечения этих прямых образуется внутри треугольника? б) На сколько частей делят треугольник эти прямые?

8. Сколько есть двузначных чисел, у которых обе цифры четные?

9. Сколько есть пятизначных чисел, у которых все цифры нечетные?

10. Сколько четырехзначных чисел можно написать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5? Найти сумму всех этих чисел.

11. Сколько есть трехзначных чисел, которые записываются с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 и делятся на 3?

12. Сколько есть пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево (например, таких, как 67876, 17071)?

13. 5 мальчиков и 5 девочек садятся в ряд на 10 расположенных подряд стульев, причем мальчики садятся на места с нечетными номерами, а девочки — на места с четными номерами. Сколькими способами это можно сделать?

14. Сколько разных слов можно составить перестановкой букв в слове «математика»?

15. Автомобильные номера составляются из одной, двух или трех букв и четырех цифр. Найти число таких номеров, используя 32 буквы русского алфавита.

16. В селении живут 1500 жителей. Доказать, что по крайней мере двое из них имеют одинаковые инициалы.

17. а) Сколько разных делителей имеет число $3^3 \times 5^4$? б) Пусть $p_1, \ldots, p_n$ — различные простые числа. Сколько делителей имеет число

$$m = p_1^{\alpha_1} \times \ldots \times p_n^{\alpha_n},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — некоторые натуральные числа?

18. От $A$ до $B$ 999 *км*. Вдоль дороги стоят столбы, на которых указаны расстояния до $A$ и до $B$

$$\boxed{0\,999}; \quad \boxed{1{,}998}; \quad \boxed{2{,}997}; \ldots; \boxed{999{,}0}.$$

Сколько среди них таких, на которых есть только 2 различные цифры?

19. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришел получать вещи, выяснилось, что он забыл номер. Он только помнит, что в номере были числа 23 и 37. Чтобы открыть камеру, нужно правильно набрать пятизначный номер. Какое наибольшее количество номеров нужно перебрать, чтобы открыть камеру?

20. В прямоугольной таблице из $m$ строк и $n$ столбцов записаны числа $+1$ и $-1$ так, что произведение чисел в каждой строке и каждом столбце равно 1. Сколькими способами это можно сделать?

## § 2. КОНЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

*Всякая совокупность элементов произвольного рода образует множество.* Можно рассматривать множество всех действительных чисел, множество натуральных чисел, множество всех учащихся данной школы, множество парт в данном классе, множество всех жителей данного города и т. д. Множество считается определенным, если указаны все его элементы. Эти элементы могут быть указаны с помощью некоторого общего признака или просто с помощью некоторого списка, где обозначены все элементы. Последний способ возможен лишь в том случае, если множество имеет конечное число элементов; такие множества будем называть *конечными.* Комбинаторика есть теория конечных множеств. Поэтому далее мы будем иметь дело лишь с конечными множествами.

Основной характеристикой конечного множества является число его элементов.

Теория конечных множеств изучает правила: как, зная количество элементов некоторых множеств, вычислить количество элементов других множеств, которые составлены из первых с помощью некоторых операций. Операции над множествами мы введем немного позднее.

Введем основные обозначения, которыми будем пользоваться в дальнейшем. Множества будем обозначать *большими* латинскими буквами, их элементы — *малыми*: $a \in A$: $a$ есть элемент $A$, или $a$ принадлежит $A$; $a \notin A$: $a$ не есть элемент $A$, или $a$ не принадлежит $A$. Количество элементов множества будем обозначать $N(A)$.

**2.1. Операции над множествами.** Два множества *равны* между собой, если элементы первого являются

элементами второго и, наоборот, элементы второго являются элементами первого.

Если $A$ и $B$ — два множества, то множество $C$, которому принадлежат все те и только те элементы, которые входят либо в $A$, либо в $B$, называется *суммой* или *объединением множеств* $A$ и $B$ и обозначается $C = A \cup B$.

Эта операция «сложения» множеств удовлетворяет *коммутативному* и *ассоциативному* закону:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C. \qquad (1)$$

Первое из этих равенств вытекает из определения суммы. Второе есть следствие того, что и $A \cup (B \cup C)$ и $(A \cup B) \cup C$ есть совокупность элементов, входящих хотя бы в одно из множеств $A$, либо $B$, либо $C$. Поэтому можно рассматривать сумму любого числа множеств $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, это будет множество, в которое входят элементы каждого из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и только они (общие элементы считаются только по одному разу).

Однако это «сложение» отличается от обычного сложения. Чтобы пояснить это, рассмотрим числовые множества. Если $x_1, \ldots, x_n$ — некоторые числа, то через $\{x_1, \ldots, x_n\}$ обозначим множество, которое состоит из элементов $x_1, \ldots, x_n$. Предположим, что даны два множества $\{1, 2, 3\}$ и $\{2, 3, 4\}$. Тогда $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Если множества $A$ и $B$ имеют общие элементы, то каждый из этих элементов входит в $A \cup B$ только один раз. Итак, число элементов в сумме множеств не обязательно равно сумме чисел элементов первого и второго множеств, а может быть меньше ее. В частности, сложение множеств приводит к такой необычной для чисел формуле:

$$A \cup A = A, \quad A \cup A \cup \ldots \cup A = A.$$

Множество $C$, которому принадлежат те и только те элементы, которые являются общими для множеств $A$ и $B$ (элементы, которые входят в оба эти множества), называется *пересечением* множеств $A$ и $B$ и обозначается $C = A \cap B$.

Например,

$$\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}.$$

Если $A_1, \ldots, A_n$ — некоторые множества, то $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ является множеством, состоящим из элементов, которые входят в каждое из множеств $A_1, \ldots, A_n$ (являются общими для этих множеств). Опять-таки пересечение множеств удовлетворяет *коммутативному* и *ассоциативному* законам:

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C. \qquad (2)$$

Отметим, что $A \cap A = A$, и потому $A \cap A \cap \ldots \cap A = A$.

Покажем, что операции объединения и пересечения множеств удовлетворяют также *дистрибутивному* закону:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \qquad (3)$$

Действительно, множество $A \cap (B \cup C)$ содержит элементы, которые входят в множество $A$ и в множество $B \cup C$, т. е. принадлежат $A$ и либо множеству $B$, либо множеству $C$. Тогда они принадлежат либо $A$ и $B$, либо $A$ и $C$, т. е. либо $A \cap B$, либо $A \cap C$. Каждый элемент $A \cap (B \cup C)$ принадлежит множеству $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. Наоборот, элементы $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ принадлежат либо $A \cap B$, либо $A \cap C$, т. е. принадлежат $A$ и либо $B$, либо $C$, т. е. $A \cap (B \cup C)$. Равенство (3) доказано.

Примем во внимание то, что множество $A \cap B$ может быть неопределенным, если $A$ и $B$ не имеют общих элементов. Чтобы избежать этого, будем рассматривать еще *пустое* множество $\varnothing$, не содержащее ни одного элемента. Тогда будем считать, что $A \cap B = \varnothing$, если $A$ и $B$ не имеют общих элементов. Пустое множество играет роль *нуля* в операциях над множествами:

$$A \cup \varnothing = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing.$$

Наглядно операции над множествами можно иллюстрировать, изображая множества в виде кругов (иногда их называют кругами Эйлера) либо других фигур на плоскости (рис. 2).

**2.2. Нахождение числа элементов суммы множеств.** Будем обозначать через $N(A)$ количество элементов множества $A$.

Основная формула, которой пользуются при нахождении числа элементов суммы двух множеств, такова:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B). \qquad (4)$$

Действительно, $N(A) + N(B)$ есть число, которое мы получим, перечислив все элементы множества $A$, а затем — все элементы множества $B$. Но в этом случае

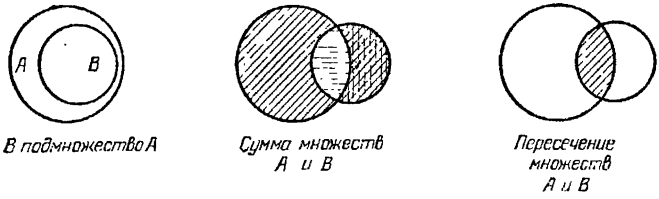


Рис. 2.

общие элементы (их число $N(A \cap B)$) будут перечислены дважды, т. е.

$$N(A) + N(B) = N(A \cup B) + N(A \cap B).$$

Отсюда и следует равенство (4). С помощью формулы (4) можем получить формулу для числа элементов суммы любого числа множеств. Например, для трех множеств имеем

$$\begin{aligned} N(A \cup B \cup C) &= N\{A \cup (B \cup C)\} = \\ &= N(A) + N(B \cup C) - N\{(A \cap B) \cup (A \cap C)\} = \\ &= N(A) + N(B) + N(C) - N(B \cap C) - \\ &- \{N(A \cap B) + N(A \cap C) - N((A \cap B) \cap (A \cap C))\} = \\ &= N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - \\ &\qquad - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Задача 1. Каждый ученик класса — либо девочка, либо блондин, либо любит математику. В классе 20 девочек, из них 12 блондинок, и одна блондинка любит математику. Всего в классе 24 ученика-блондина, математику из них любят 12, а всего учеников (мальчиков и девочек), которые любят математику,

17, из них 6 девочек. Сколько учеников в данном классе?

Решение. Если $A$ — множество девочек, $B$ — блондинов, $C$ — учеников, которые любят математику, то $N(A \cup B \cup C)$ — искомое число. $A \cap B$ — множество блондинок, $A \cap C$ — множество девочек, которые любят математику, $B \cap C$ — множество всех блондинов (мальчиков и девочек), которые любят математику, $A \cap B \cap C$ — множество блондинок, которые любят математику. Тогда

$$N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - \\ - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C) = \\ = 20 + 24 + 17 - (12 + 6 + 12) + 1 = 32.$$

Установим теперь общую формулу для нахождения числа элементов суммы нескольких множеств.

Теорема. *Если $A_1, \ldots, A_n$ — некоторые множества, то*

$$N(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = N(A_1) + \ldots + N(A_n) - \\ - \{N(A_1 \cap A_2) + N(A_1 \cap A_3) + \ldots + N(A_{n-1} \cap A_n)\} + \\ + \{N(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + N(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \ldots \\ \ldots + N(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n)\} - \ldots \\ \ldots + (-1)^{n-1} N(A_1 \cap \ldots \cap A_n). \quad (5)$$

Правая часть равенства (5) является суммой $n$ слагаемых, $k$-е по порядку слагаемое имеет вид

$$(-1)^{k-1} S_k(A_1, \ldots, A_n),$$

где $S_k(A_1, \ldots, A_n)$ есть сумма чисел $N(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$ по всем возможным пересечениям ровно $k$ разных множеств из множеств $A_1, \ldots, A_n$.

Доказательство. Из формулы (4) следует, что формула (5) справедлива для двух множеств. Предположим, что она справедлива для $n - 1$ множества, и покажем, что она выполняется и для $n$ множеств (т. е. проведем доказательство по индукции).

По предположению

$$N(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = N(A_1) + N(A_2 \cup \ldots \cup A_n) - \\ - N\{(A_1 \cap A_2) \cup \ldots \cup (A_1 \cap A_n)\} = \\ = N(A_1) + \{S_1(A_2, \ldots, A_n) - S_2(A_2, \ldots, A_n) + \ldots \\ \ldots + (-1)^{n-2} S_{n-1}(A_2, \ldots, A_n)\} - \\ -\{S_1(A_1 \cap A_2, \ldots, A_1 \cap A_n) - S_2(A_1 \cap A_2, \ldots, A_1 \cap A_n) + \ldots \\ \ldots + (-1)^{n-2} S_{n-1}(A_1 \cap A_2, \ldots, A_1 \cap A_n)\}$$

Для того чтобы отсюда получить формулу (5), остается принять во внимание, что

$$N(A_1) + S_1(A_2, \ldots, A_n) = S_1(A_1, \ldots, A_n),$$

$$S_2(A_2, \ldots, A_n) + S_1(A_1 \cap A_2, \ldots, A_1 \cap A_n) = \\ = S_2(A_1, \ldots, A_n),$$

$$S_k(A_2, \ldots, A_n) + S_{k-1}(A_1 \cap A_2, \ldots, A_1 \cap A_n) = \\ = S_k(A_1, \ldots, A_n),$$

$$S_{n-1}(A_1 \cap A_2, \ldots, A_1 \cap A_n) = S_n(A_1, A_2, \ldots, A_n).$$

Теорема доказана.

## УПРАЖНЕНИЯ

1. *Разностью* множеств $A$ и $B$ (обозначается $A - B$) называется множество тех элементов $A$, которые не принадлежат $B$. Доказать соотношения

$$(A \cup B) - B = A - B,$$
$$A \cap (B \cup C) = A - (A - B) \cap (A - C),$$
$$(A - B) \cap C = (A \cap C) - (B \cap C),$$
$$A \cap B \cap C = A - (A - (B \cap C)),$$
$$(A \cap C) - B = (A \cap C) - (B \cap C),$$
$$(A - B) \cup (A - C) = A - (B \cap C).$$

2. Доказать, что $A - B = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $A \cap B = A$.

3. Пусть $A$ — множество корней уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$, а $B = \{0, 2\}$. Найти $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $B - A$.

4. Пусть $A$ — множество значений функции

$$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0, \\ -1 & \text{при} \quad x < 0, \end{cases}$$

а $B$ — множество корней уравнения $x(x-1)(x+2)=0$. Найти $A \cap B$, $A \cup B$, $A-B$, $B-A$.

5. На экскурсии были семиклассники и восьмиклассники. Все они были либо с комсомольскими значками, либо в пионерских галстуках. Мальчиков было 16, а комсомольцев 24. Пионерок было ровно столько, сколько мальчиков-комсомольцев. Сколько учащихся было на экскурсии?

6. В классе 35 учащихся. Из них 20 посещают математический кружок, 11 — физический, 10 учащихся не посещают ни одного из этих кружков. Сколько учеников посещают и математический, и физический кружок? Сколько учащихся посещают только математический кружок?

7. Из 100 студентов английский язык знают 28 студентов, немецкий — 30, французский — 42, английский и немецкий — 8, английский и французский — 10, немецкий и французский — 5, все три языка знают 3 студента. Сколько студентов не знают ни одного из трех языков?

## § 3. ПОДМНОЖЕСТВА ДАННОГО МНОЖЕСТВА

**3.1. Количество $k$-элементных подмножеств данного множества.** Если каждый элемент множества $B$ принадлежит множеству $A$, то $B$ называется *подмножеством* множества $A$. Это обозначается так: $A \supset B$, либо $B \subset A$ (читается: $A$ содержит $B$, $B$ входит в $A$). Будем считать, что пустое множество является подмножеством любого множества: $\varnothing \subset A$. Для всякого множества $A$ имеет место соотношение $A \subset A$. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$. Подмножество $B$ множества $A$ называется *собственным*, если $B \neq A$ и $B \neq \varnothing$.

Если задано некоторое множество $A$, то можно рассматривать новое множество $M(A)$ — множество всех его подмножеств. Через $M_k(A)$ будем обозначать множество всех подмножеств $A$, которые имеют $k$ элементов: $B \subset M_k(A)$, если $B \subset M(A)$ и $N(B) = k$.

Пример. Пусть $A = \{a, b, c\}$. Тогда

$$M(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \varnothing\};$$
$$M_2(A) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}.$$

Убеждаемся, что

$$N(M(A)) = 8 = 2^3, \quad N(M_2(A)) = 3.$$

Естественно задать вопрос: сколько разных $k$-элементных подмножеств имеет множество из $n$ элементов?

Будем обозначать символом $n!$ (читается *$n$-факториал*) произведение всех натуральных чисел от 1 до

$n$ включительно: $n! = 1 \cdot 2 \ldots n$. Удобно считать (далее мы убедимся, по каким именно причинам), что $0! = 1$.

Теорема. *Число всех $k$-элементных подмножеств множества из $n$ элементов равно*

$$N(M_k(A)) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (1)$$

Доказательство. Обозначим $N(M_k(A)) = C_n^k$. Чтобы построить $k$-элементное подмножество множества $A$, нужно к $(k-1)$-элементному подмножеству присоединить один из $n-k+1$ элементов, которые не входят в это подмножество. Поскольку $(k-1)$-элементных подмножеств имеется $C_n^{k-1}$ и каждое из них можно сделать $k$-элементным $n-k+1$ способами, то таким образом мы получим $(n-k+1)C_n^{k-1}$ подмножеств. Но не все они будут разными, так как каждое $k$-элементное множество можно так построить $k$ способами: присоединением каждого из $k$ его элементов. Поэтому вычисленное нами число в $k$ раз больше, чем число $C_n^k$ $k$-элементных подмножеств. Следовательно,

$$kC_n^k = (n-k+1)C_n^{k-1}.$$

Отсюда найдем

$$C_n^k = \frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{k(k-1)} C_n^{k-2} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{(n-k+1)\ldots(n-1)}{k(k-1)\ldots 2} C_n^1.$$

Но число одноэлементных подмножеств множества $A$ равно количеству элементов, т. е. $n$. Подставив вместо $C_n^1$ число $n$, получим (1).

Произвольное $k$-элементное подмножество $n$-элементного множества называется *сочетанием* из $n$ элементов по $k$. Порядок элементов в подмножестве не имеет значения. Иногда вместо слова «сочетание» употребляется термин — *комбинация* из $n$ элементов по $k$.

Мы установили, что число сочетаний из $n$ элементов по $k$ равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Задача 1. Сколькими способами читатель может выбрать 3 книжки из 5?

Решение. Искомое число способов равно числу трехэлементных подмножеств множества из 5 элементов:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10.$$

Задача 2. Сколькими способами из 7 человек можно выбрать комиссию, состоящую из 3 человек?

Решение. Чтобы рассмотреть все возможные комиссии, нужно рассмотреть все возможные 3-элементные подмножества множества, состоящего из 7 человек. Искомое число способов равно

$$C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

Задача 3. В турнире принимали участие $n$ шахматистов, и каждые 2 шахматиста встретились 1 раз. Сколько партий было сыграно в турнире?

Решение. Партий было сыграно столько, сколько можно выделить 2-элементных подмножеств в множестве из $n$ элементов, т. е.

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}.$$

Задача 4. В скольких точках пересекаются диагонали выпуклого $n$-угольника, если никакие 3 из них не пересекаются в одной точке?

Решение. Каждой точке пересечения двух диагоналей соответствует 4 вершины $n$-угольника, а каждым 4 вершинам $n$-угольника соответствует 1 точка пересечения (точка пересечения диагоналей четырехугольника с вершинами в данных 4 точках). Поэтому число всех точек пересечения равно числу способов, которыми среди $n$ вершин можно выбрать 4 вершины:

$$C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

Следующая задача дает интересную геометрическую интерпретацию для чисел $C_n^k$.

Задача 5. Рассмотрим прямоугольную сетку квадратов размерами $m \times n$ («шахматный город»,

состоящий из $m \times n$ прямоугольных кварталов, разделенных $n-1$ «горизонтальными» и $m-1$ «вертикальными» улицами (рис. 3). Каково число различных кратчайших путей на этой сетке, ведущих из левого нижнего угла (точки $(0; 0)$) в правый верхний угол (точку $(m; n)$)?

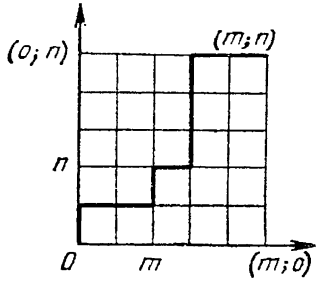

Рис. 3.

Решение. Каждый кратчайший путь из точки $(0; 0)$ в точку $(m; n)$ состоит из $m+n$ отрезков, причем среди них есть $m$ горизонтальных и $n$ вертикальных отрезков. Разные пути отличаются лишь порядком чередования горизонтальных и вертикальных отрезков. Поэтому общее число путей равно числу способов, которыми из $m+n$ отрезков можно выбрать $n$ вертикальных отрезков, т. е. $C_{m+n}^{n}$.

Можно было бы рассматривать число способов выбора не $n$ вертикальных, а $m$ горизонтальных отрезков, и мы получили бы тогда ответ $C_{m+n}^{m}$. Итак, мы установили геометрически равенство $C_{m+n}^{m} = C_{m+n}^{n}$, в справедливости которого нетрудно убедиться и непосредственно, выражая число комбинаций через факториалы.

Итак, число кратчайших путей из точки $(0; 0)$ в точку $(m; n)$ равно $C_{m+n}^{m} = C_{m+n}^{n}$.

Теорема. *Имеет место равенство*

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}. \qquad (2)$$

Легко убедиться в справедливости равенства (2), используя формулу

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Советуем читателю сделать это самостоятельно. Приведем еще два других доказательства.

Доказательство 1. Рассмотрим некоторый элемент $a$ множества $A$, состоящего из $n$ элементов, и все $k$-элементные подмножества множества $A$ (чис-

ло таких подмножеств равно $C_n^k$). Все $k$-элементные подмножества множества $A$ разделим на 2 группы: подмножества, в состав которых входит $a$, и подмножества, в состав которых $a$ не входит. Число подмножеств в первой группе равно $C_{n-1}^{k-1}$, так как каждое такое подмножество получается присоединением к $a$ некоторого $(k-1)$-элементного подмножества множества $A$. Число подмножеств во второй группе равно $C_{n-1}^k$, так как каждое такое подмножество есть $k$-элементное подмножество множества $A-\{a\}$. Следовательно,

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

Доказательство 2. Число кратчайших путей из точки $O(0;\ 0)$ в точку $A(k;\ n-k)$ равно $C_{k+(n-k)}^k = C_n^k$ (рис. 4). Все такие пути можно разделить на 2

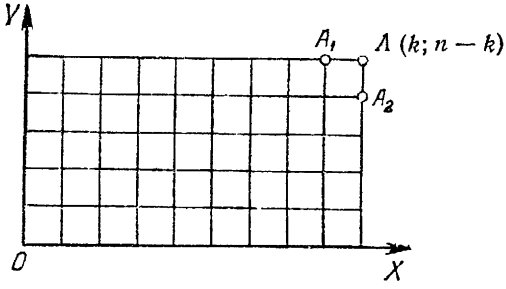


Рис. 4.

группы: пути, проходящие через точку $A_1(k-1;\ n-k)$ (число их равно $C_{(k-1)+(n-k)}^{k-1} = C_{n-1}^{k-1}$), и пути, проходящие через точку $A_2(k;\ n-k-1)$ (число их равно $C_{k+(n-k-1)}^k = C_{n-1}^k$). Следовательно,

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

Задача 6. Доказать тождество

$$C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2. \qquad (3)$$

Решение. Число кратчайших путей из точки $O(0;\ 0)$ в точку $A(n;\ n)$ равно $C_{2n}^n$. Каждый такой путь проходит через одну и только одну из точек

$A_k(k;\ n-k)$, лежащих на диагонали $BD$ (рис. 5). Число путей из точки $O$ в точку $A_k$ равно $C^k_{k+(n-k)} = C^k_n$, а из точки $A_k$ в точку $A$ равно $C^k_{n-k+k} = C^k_n$; поэтому число путей из $O$ в $A$, проходящих через $A_k$, равно $C^k_n \cdot C^k_n = (C^k_n)^2$ (правило умножения!). Прибавив количество путей, проходящих через каждую из точек $A_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, получим общее количество путей из $O$ в $A$, т. е. $C^n_{2n}$. Это соображение и доказывает равенство (3).

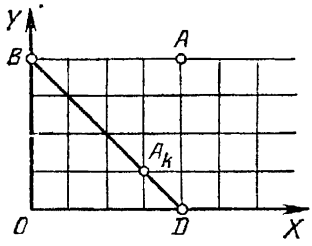

Рис. 5.

**3.2. Количество подмножеств данного множества.** Выясним теперь, сколько всего подмножеств имеет множество $A$, состоящее из $n$ элементов (пустое множество также является подмножеством $A$).

Теорема. *Число всех подмножеств множества из $n$ элементов равно $2^n$.*

Приведем два различных доказательства.

Доказательство 1. Пусть $M_a$ — множество всех подмножеств множества $A$, которые содержат элемент $a$. Очевидно, что каждое такое подмножество полностью определено, если указаны все его остальные (кроме $a$) элементы. Поэтому таких подмножеств будет столько, сколько будет подмножеств в множестве $A' = A - \{a\}$, которое содержит все элементы $A$, кроме $a$. Это множество имеет $n-1$ элементов. Поэтому, если $q_n$ — число подмножеств множества из $n$ элементов, то $N(M_a) = q_{n-1}$.

Если $\bar{M}_a$ — множество всех подмножеств множества $A$, не содержащих $a$, то $N(\bar{M}_a)$ также будет равно $q_{n-1}$. Поскольку $M(A) = M_a + \bar{M}_a$, то $N(M(A)) = 2q_{n-1}$. Отсюда находим $q_n = 2q_{n-1}$. Таким образом, $q_n = 2q_{n-1} = 2^2 q_{n-2} = \ldots = 2^{n-1} q_1$. Множество, состоящее из 1 элемента, имеет 2 подмножества (все множество и пустое множество). Поэтому $q_1 = 2$. Следовательно, $q_n = 2^n$.

Доказательство 2. Перенумеруем элементы множества $A$ и для каждого подмножества множества $A$ построим последовательность длины $n$ из ну-

лей и единиц по следующему правилу: на $k$-м месте пишем 1, если элемент с номером $k$ входит в подмножество, и 0, если элемент с номером $k$ не входит в подмножество. Итак, каждому подмножеству соответствует своя последовательность нулей и единиц. Например, пустому множеству соответствует последовательность из одних нулей. Число всех возможных последовательностей длины $n$, составленных из нулей и единиц, равно, согласно правилу умножения, $\underbrace{2 \cdot 2 \ldots 2}_{n \text{ раз}} = 2^n$. Следовательно, и число всех подмножеств множества $A$ равно $2^n$.

Как было указано выше, удобно считать $0! = 1$. При этом предположении формула

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

остается в силе и при $k = n$ и при $k = 0$.

Следствие. *Имеет место равенство*

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$$

В самом деле, поскольку $C_n^k$ — число $k$-элементных подмножеств множества из $n$ элементов, то сумма в левой части есть число всех подмножеств.

## УПРАЖНЕНИЯ

1. Сколькими способами из 30 учащихся можно выбрать делегацию, состоящую из 3 учащихся?

2. В комнате $n$ лампочек. Сколько всего разных способов освещения комнаты, при которых горит ровно $k$ лампочек? Сколько всего может быть различных способов освещения комнаты?

3. Дано $n$ точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести, соединяя точки попарно?

4. На плоскости проведено $n$ прямых так, что никакие 2 из них не параллельны и никакие 3 не пересекаются в одной точке. а) Найти количество точек пересечения этих прямых; б) Сколько треугольников образуют эти прямые? в) На сколько частей делят плоскость эти прямые? г) Сколько среди них ограниченных частей и сколько неограниченных?

5. Сколько имеется четырехзначных чисел, у которых каждая следующая цифра больше предыдущей?

6. Сколько имеется четырехзначных чисел, у которых каждая следующая цифра меньше предыдущей?

7. Международная комиссия состоит из 9 человек. Материалы комиссии хранятся в сейфе. Сколько замков должен иметь сейф, сколько ключей для них нужно изготовить и как их разделить между членами комиссии, чтобы доступ к сейфу был возможен тогда и только тогда, когда соберутся не менее 6 членов комиссии?

Рассмотреть задачу также в том случае, когда комиссия состоит из $n$ человек, а сейф можно открыть при наличии $m$ членов комиссии.

8. Имеется $p$ белых и $q$ черных шаров. Сколькими способами можно выложить в ряд все шары так, чтобы никакие 2 черных шара не лежали рядом?

9. В выпуклом $n$-угольнике проведены все диагонали. Известно, что никакие 3 из них не пересекаются в одной точке. На сколько частей разделится при этом многоугольник?

## § 4. УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА. ПЕРЕСТАНОВКИ И РАЗМЕЩЕНИЯ

**4.1. Перестановки данного множества.** Множество называется *упорядоченным*, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие некоторое число (номер элемента) от 1 до $n$, где $n$ — число элементов множества, так что различным элементам соответствуют различные числа. Всякое конечное множество можно сделать упорядоченным, если, например, переписать все элементы множества в некоторый список $(a, b, c, \ldots)$, а затем поставить в соответствие каждому элементу номер места, на котором он стоит в списке. Будем обозначать упорядоченное множество, которое получено из множества $A$, через $\vec{A}$. Очевидно, что каждое множество, содержащее более одного элемента, можно упорядочить не единственным способом. Упорядоченные множества считаются различными, если они отличаются либо своими элементами, либо их порядком. Различные упорядоченные множества, которые отличаются лишь порядком элементов (т. е. могут быть получены из того же самого множества), называются *перестановками* этого множества.

Пример. Перестановки множества $A = \{a, b, c\}$ из 3 элементов имеют вид

$$(a, b, c), \quad (a, c, b), \quad (b, a, c),$$
$$(b, c, a), \quad (c, a, b), \quad (c, b, a).$$

Найдем число различных способов, которыми может быть упорядочено данное множество, т. е. число перестановок множества $A$. Пусть множество $A$ имеет $n$ элементов. Обозначим число его перестановок через $P_n$.

Теорема.

$$P_n = n!.$$

Доказательство 1. Выберем некоторый элемент $a$ из множества $A$. Рассмотрим все перестановки, в которых $a$ имеет номер 1. Число таких перестановок будет равно числу перестановок из $n-1$ элементов множества $A$, которые остаются после исключения из множества элемента $a$. Поэтому число перестановок, для которых $a$ имеет номер 1, равно $P_{n-1}$. Обозначим через $M$ множество всех перестановок множества $A$, а через $M_a$ — множество перестановок, в которых $a$ имеет номер 1. Тогда

$$M = M_a \cup M_b \cup \ldots \cup M_f,$$

где $a, b, \ldots, f$ — все элементы множества $A$. Поскольку никакие 2 множества из множеств $M_a, M_b, \ldots, M_f$ не имеют общих элементов (напомним, что элементы этих множеств — перестановки, в различных множествах на первом месте стоят различные элементы, следовательно, и соответствующие перестановки будут различными), то

$$N(M) = N(M_a) + N(M_b) + \ldots + N(M_f).$$

Следовательно,

$$P_n = n \cdot P_{n-1} = n!.$$

Доказательство 2. Будем последовательно выбирать элементы множества $A$ и размещать их в определенном порядке на $n$ местах. На первое место можно поставить любой из $n$ элементов. После того как заполнено первое место, на второе место можно поставить любой из оставшихся $n-1$ элементов и т. д. По правилу умножения все $n$ мест можно заполнить

$$n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1 = n!$$

способами. Следовательно, множество $A$ из $n$ элементов можно упорядочить $n!$ способами.

Задача 1. Сколькими способами можно разместить на полке 4 книги (обозначим их $A$, $B$, $C$, $D$)?

Решение. Искомое число способов равно числу способов упорядочения множества, состоящего из 4 элементов, т. е.

$$P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Задача 2. Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ так, чтобы каждое четное число имело четный номер?

Решение. Четные числа можно расставить на местах с четными номерами (таких мест $n$) $n!$ способами; каждому способу размещения четных чисел на местах с четными номерами соответствует $n!$ способов размещения нечетных чисел на местах с нечетными номерами. Поэтому общее число перестановок указанного типа по правилу умножения равно $n! \cdot n! = (n!)^2$.

Задача 3. Сколько можно составить перестановок из $n$ элементов, в которых данные 2 элемента не стоят рядом?

Решение. Определим число перестановок, в которых данные 2 элемента $a$ и $b$ стоят рядом. Могут быть следующие случаи: $a$ стоит на первом месте, $a$ стоит на втором месте, ..., $a$ стоит на $(n-1)$-м месте, а $b$ стоит правее $a$; число таких случаев равно $n-1$. Кроме того, $a$ и $b$ можно поменять местами, и, следовательно, существует $2(n-1)$ способов размещения $a$ и $b$ рядом. Каждому из этих способов соответствует $(n-2)!$ перестановок других элементов. Следовательно, число перестановок, в которых $a$ и $b$ стоят рядом, равно $2 \cdot (n-1) \cdot (n-2)! = 2 \cdot (n-1)!$. Поэтому искомое число перестановок равно

$$n! - 2 \cdot (n-1)! = (n-1)! \cdot (n-2).$$

Задача 4. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли бить друг друга?

Решение. При указанном расположении ладей на каждой вертикали и каждой горизонтали стоит лишь одна ладья. Рассмотрим одно из таких расположений ладей. Пусть $a_1$ — номер вертикали, в которой стоит ладья из первой горизонтали, $a_2$ — номер верти-

кали, в которой стоит ладья из второй горизонтали, ..., $a_8$ — номер вертикали, в которой стоит ладья из последней, восьмой, горизонтали. Тогда $(a_1, \ldots, a_8)$ есть некоторая перестановка чисел 1, ..., 8. Среди чисел $a_1, \ldots, a_8$ нет ни одной пары равных, иначе 2 ладьи попали бы в одну вертикаль. Следовательно, каждому расположению ладей соответствует определенная перестановка чисел 1, ..., 8. Наоборот, каждой перестановке чисел 1, ..., 8 соответствует такое расположение ладей, при котором они не бьют друг друга. Следовательно, число искомых расположений ладей равно $P_8 = 8! = 40\,320$.

**4.2. Упорядоченные подмножества данного множества (размещения).** Рассмотрим теперь упорядоченные подмножества данного множества $A$. Само множество $A$ считаем неупорядоченным, поэтому каждое его подмножество может быть упорядочено каким-либо возможным способом. Число всех $k$-элементных подмножеств множества $A$ равно $C_n^k$. Каждое такое подмножество можно упорядочить $k!$ способами. Таким образом получим все упорядоченные $k$-элементные подмножества множества $A$. Следовательно, их число будет $k! \cdot C_n^k$.

Теорема. *Число упорядоченных $k$-элементных подмножеств множества, состоящего из $n$ элементов, равно*

$$A_n^k = k! \cdot C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1) \ldots (n-k+1).$$

Упорядоченные $k$-элементные подмножества множества из $n$ элементов называются *размещениями* из $n$ элементов по $k$. Различные размещения из $n$ по $k$ отличаются количеством элементов либо их порядком.

Следовательно, число различных размещений из $n$ по $k$ равно

$$A_n^k = n(n-1) \ldots (n-k+1).$$

Задача 5. Сколькими способами можно рассадить 4 учащихся на 25 местах?

Решение. Искомое число способов равно числу размещений из 25 по 4:

$$A_{25}^4 = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303\,600.$$

Задача 6. Учащемуся необходимо сдать 4 экзамена на протяжении 8 дней. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Искомое число способов равно числу 4-элементных упорядоченных подмножеств (дни сдачи экзаменов) множества из 8 элементов, т. е. $A_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ способов. Если известно, что последний экзамен будет сдаваться на восьмой день, то число способов равно

$$4 \cdot A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840.$$

## УПРАЖНЕНИЯ

1. Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ так, чтобы числа 1, 2, 3 стояли рядом и в порядке возрастания?

2. Сколькими способами могут разместиться 5 покупателей в очереди в кассу?

3. Сколько существует перестановок из $n$ элементов, в которых между двумя данными элементами стоит $r$ элементов?

4. На собрании должны выступить 4 человека $A$, $B$, $C$, $D$. Сколькими способами их можно разместить в списке ораторов, если $B$ не может выступать до того момента, пока не выступит $A$?

5. Сколькими способами можно рассадить $n$ гостей за круглым столом?

6. Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ так, чтобы каждое число, кратное 2, и каждое число, кратное 3, имело номер, кратный 2 и 3?

7. Если повернуть лист белой бумаги на 180°, то цифры 0, 1, 8 не изменяются, цифры 6 и 9 переходят друг в друга, а остальные цифры теряют смысл. Сколько существует семизначных чисел, величина которых не изменяется при повороте листа бумаги на 180°?

8. В розыгрыше первенства страны по футболу в высшей лиге класса «А» участвует 10 команд. Команды, которые займут первое, второе и третье места, награждаются соответственно золотой, серебряной и бронзовой медалями, а команды, которые займут последние 2 места, покинут высшую лигу. Сколько разных результатов первенства может быть?

## § 5. ПЕРЕСТАНОВКИ С ПОВТОРЕНИЯМИ

Поставим такой вопрос. Сколькими способами можно разложить множество $A$, состоящее из $n$ элементов, на сумму $m$ подмножеств

$$A = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m$$

так, чтобы $N(B_1) = k_1$, $N(B_2) = k_2$, $\ldots$, $N(B_m) = k_m$, где $k_1, k_2, \ldots, k_m$ — данные числа ($k_i \geqslant 0$, $k_1 + \ldots$

$\ldots + k_m = n$)? Множества $B_1, B_2, \ldots, B_m$ не должны иметь общих элементов.

Все описанные выше разбиения множества $A$ на $m$ групп $B_1, B_2, \ldots, B_m$ можно получить так: возьмем произвольное $k_1$-элементное подмножество $B_1$ множества $A$ (это можно сделать $C_n^{k_1}$ способами); среди $n - k_1$ оставшихся элементов возьмем $k_2$-элементное подмножество $B_2$ (это можно сделать $C_{n-k_1}^{k_2}$ способами) и т. д. Общее число способов выбора различных множеств $B_1, \ldots, B_m$ по правилу умножения равно

$$C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot C_{n-k_1-k_2}^{k_3} \ldots C_{n-k_1-\ldots-k_{m-1}}^{k_m} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!\,(n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2!\,(n-k_1-k_2)!} \cdot \frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!\,(n-k_1-k_2-k_3)!} \ldots$$

$$\ldots \frac{(n-k_1-\ldots-k_{m-1})!}{k_m!\,(n-k_1-\ldots-k_m)!} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_m!}$$

(напомним, что $0! = 1$).

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема. *Пусть $k_1, k_2, \ldots, k_m$ — целые неотрицательные числа, причем $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. Число способов, которыми можно представить множество $A$ из $n$ элементов в виде суммы $m$ множеств $B_1, B_2, \ldots, B_m$, число элементов которых составляет соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_m$, равно*

$$C_n(k_1, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!\ldots k_m!}.$$

Числа $C_n(k_1, \ldots, k_m)$ называются *полиномиальными коэффициентами*. Они имеют еще одну очень важную комбинаторную интерпретацию.

Пусть имеется $n$ букв: $k_1$ — букв $a_1$, $k_2$ — букв $a_2, \ldots, k_m$ — букв $a_m$ ($k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$). Определим, сколько различных слов можно составить из этих букв. Перенумеруем места, на которых стоят буквы, числами $1, 2, \ldots, n$. Каждое слово определяется множествами $B_1$ (номера мест, где стоит буква $a_1$), $B_2$ (номера мест, где стоит буква $a_2$), $\ldots, B_m$ (номера мест, где стоит буква $a_m$). Следовательно, число различных слов равно числу способов, которыми можно представить множество $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ в виде

суммы множеств $B_1, B_2, \ldots, B_m$, т. е.

$$C_n(k_1, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \ldots k_m!}.$$

Пример 1. Число различных слов, которое получим, переставляя буквы слова «математика», равно

$$\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 151\,200.$$

Пример 2. Число слов, которые можно составить из 12 букв (4 буквы *а*, 4 буквы *б*, 2 буквы *в*, 2 буквы *г*), равно

$$\frac{12!}{4! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 2!} = 207\,900.$$

Утверждение, установленное выше, можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. *Число различных перестановок, которые можно составить из $n$ элементов, среди которых имеется $k_1$ элементов первого типа, $k_2$ элементов второго типа, ..., $k_m$ элементов $m$-го типа, равно*

$$C_n(k_1, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \ldots k_m!}.$$

В связи с важностью теоремы приведем еще одно доказательство. Рассмотрим одну перестановку и заменим в ней все одинаковые элементы разными. Тогда число различных перестановок, которые можно составить из рассматриваемой нами перестановки, равно $k_1! \cdot k_2! \ldots k_m!$. Проделав это для каждой перестановки, получим $n!$ перестановок. Следовательно,

$$C_n(k_1, \ldots, k_m) \cdot k_1! \ldots k_m! = n!,$$

что и доказывает утверждение теоремы.

## УПРАЖНЕНИЯ

1. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы слова «мама»? Напишите все эти слова.

2. Сколькими способами можно разделить $m + n + s$ предметов на 3 группы так, чтобы в одной группе было $m$ предметов, в другой — $n$ предметов, в третьей — $s$ предметов?

3. Сколькими способами можно разделить $3n$ различных предметов между тремя людьми так, чтобы каждый человек получил $n$ предметов?

4. Сколько пятибуквенных слов можно составить из букв *a*, *b*, *c*, если известно, что буква *a* встречается в слове не более

двух раз, буква $b$ — не более одного раза, буква $c$ — не более трех раз?

5. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы слова «комбинаторика»?

## § 6. ВЗАИМНО ОДНОЗНАЧНОЕ СООТВЕТСТВИЕ. СОЧЕТАНИЯ С ПОВТОРЕНИЯМИ

**6.1. Взаимно однозначное соответствие.** Предположим, что заданы 2 множества $A$ и $B$. Будем считать, что между этими множествами установлено соответствие, если каждому элементу $a$ из $A$ соответствует некоторый элемент $b$ из $B$ и, наоборот, для каждого элемента $b$ из $B$ существует такой элемент $a$ из $A$, что $b$ соответствует $a$. Это соответствие будет взаимно однозначным, если каждому элементу из $A$ соответствует только один элемент из $B$ и различным элементам множества $A$ соответствуют различные элементы множества $B$.

Пример 1. $A$ — множество учащихся класса, $B$ — множество парт. Каждому учащемуся соответствует парта, за которой он сидит (это не взаимно однозначное соответствие).

Пример 2. $A$ — множество всех городских жителей СССР, $B$ — множество всех городов СССР. Каждому элементу $A$ соответствует город, в котором он живет (это также не взаимно однозначное соответствие).

Примером взаимно однозначного соответствия может быть соответствие между элементами упорядоченного множества $\vec{A}$ из $n$ элементов и числами $1, 2, \ldots, n$; каждому элементу соответствует его номер.

Определение. Множества, для которых существует взаимно однозначное соответствие, называются *эквивалентными.*

Теорема. *Для того чтобы два множества были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковое число элементов.*

Доказательство. Если множества $A$ и $B$ имеют одинаковое число элементов $n$, то, упорядочивая каждое из них некоторым образом и ставя в соответствие $k$-му элементу множества $\vec{A}$ $k$-й элемент

множества $\vec{B}$, получим взаимно однозначное соответствие между множествами $A$ и $B$, т. е. множества $A$ и $B$ эквивалентны.

Допустим теперь, что $A$ имеет $n$ элементов и существует взаимно однозначное соответствие между $A$ и $B$. Упорядочим множество $A$: пусть элементами $A$ будут $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Обозначим через $b_k$ тот элемент $B$, который соответствует $a_k$. Поскольку каждому элементу из $A$ соответствует элемент из $B$, различным элементам из $A$ соответствуют различные элементы из $B$, и каждый элемент из $B$ соответствует некоторому элементу из $A$, то $B$ состоит из элементов $b_1, b_2, \ldots, b_n$, следовательно, $B$ имеет $n$ элементов.

Следствие. *Если два множества эквивалентны, то они имеют одинаковое число элементов.*

Это свойство эквивалентных множеств очень часто используют для вычисления количества элементов различных множеств.

Пример 3. Рассмотрим множество $A$ последовательностей $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из $n$ чисел, где числа $x_i$ принимают только значения 0 и 1 и среди них ровно $k$ единиц. Чтобы вычислить число элементов нашего множества, обратим внимание, что оно эквивалентно множеству $B$ всех $k$-элементных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$: подмножество чисел $\{i_1, \ldots, i_k\}$ соответствует той последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n$, у которой $x_{i_1} = 1, x_{i_2} = 1, \ldots, x_{i_k} = 1$. Следовательно, $N(A) = C_n^k$.

Пример 4. Найти число размещений $n$ одинаковых предметов в $m$ урнах.

Перенумеруем урны. Поставим в соответствие каждому размещению предметов в урнах последовательность из нулей и единиц следующим образом: сначала последовательность имеет группу нулей, количество которых равно числу предметов в первой урне, затем записываем единицу и далее пишем столько нулей, сколько предметов во второй урне, снова единицу, затем столько нулей, сколько предметов в третьей урне, и т. д. Заканчивается последовательность группой нулей, которая является числом предметов в последней урне. Следовательно, последовательность имеет $n$ нулей и $m-1$ единиц, всего

$n+m-1$ чисел. Например, при $n=10$, $m=4$ последовательность 1011000000000 соответствует размещению: первая урна пустая, вторая урна имеет 1 предмет, третья урна пустая, четвертая урна имеет 9 предметов; а последовательность 0010010000001 соответствует размещению: первая урна имеет 2 предмета, вторая — 2 предмета, третья — 6 предметов, четвертая — пустая.

Используя предыдущий пример, получаем, что искомое число размещений будет $C_{n+m-1}^{m-1}$.

**6.2. Сочетания с повторениями.** *Сочетаниями из $m$ элементов по $n$ элементов с повторениями* называются группы, содержащие $n$ элементов, причем каждый элемент принадлежит к одному из $m$ типов.

Например, из трех элементов $a$, $b$, $c$ можно составить такие сочетания по два с повторениями:

$$aa,\ ac,\ bc,\ ab,\ bb,\ cc.$$

Теорема. *Число различных сочетаний из $m$ элементов по $n$ с повторениями равно*

$$\tilde{C}_m^n = C_{m+n-1}^{m-1} = C_{m+n-1}^{n}.$$

Доказательство. Каждое сочетание полностью определяется, если указать, сколько элементов каждого из $m$ типов в него входит. Поставим в соответствие каждому сочетанию последовательность нулей и единиц, составленную по такому правилу: напишем подряд столько единиц, сколько элементов первого типа входит в сочетание, далее поставим нуль и после него напишем столько единиц, сколько элементов второго типа содержит это сочетание и т. д. Например, написанным выше сочетаниям из трех букв по две будут соответствовать такие последовательности:

1100, 1001, 0101, 1010, 0110, 0011.

Таким образом, каждому сочетанию из $m$ по $n$ соответствует последовательность из $n$ единиц и $m-1$ нулей, и наоборот, по каждой такой последовательности однозначно восстанавливается такое сочетание. Поэтому число сочетаний из $m$ по $n$ с повторениями

равно числу последовательностей из $n$ единиц и $m-1$ нулей, т. е. равно $C_{m+n-1}^{m-1}$.

Пример 1. Кости домино можно рассматривать как сочетания с повторениями по два из семи цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Число всех таких сочетаний равно

$$f_7^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28.$$

Пример 2. Сколько целых неотрицательных решений имеет уравнение

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n?$$

Существует тесная связь между решениями указанного уравнения и сочетаниями из $m$ элементов по $n$. Если имеем целые неотрицательные числа $x_1, \ldots, x_m$ такие, что $x_1 + \ldots + x_m = n$, то можем составить сочетание из $m$ элементов по $n$, взяв $x_1$ элементов первого типа, $x_2$ — второго типа, ..., $x_m$ — $m$-го типа. Наоборот, имея сочетание из $m$ элементов по $n$, получим решение уравнения $x_1 + \ldots + x_m = n$ ($x_1$ — число элементов первого типа, $x_2$ — число элементов второго типа, ..., $x_m$ — число элементов $m$-го типа) в целых неотрицательных числах. Следовательно, между множеством всех сочетаний из $m$ элементов по $n$ с повторениями и множеством всех целых неотрицательных решений уравнения $x_1 + \ldots + x_m = n$ устанавливается взаимно однозначное соответствие. Поэтому число решений равно

$$f_m^n = C_{m+n-1}^n.$$

## УПРАЖНЕНИЯ

1. Напишите все сочетания с повторениями из трех элементов $a$, $b$, $c$ по 3.

2. Сколькими способами можно выбрать 6 одинаковых или разных пирожных в кондитерской, где есть 11 разных сортов пирожных?

3. Сколько можно сделать костей домино, используя числа $0, 1, \ldots, r$?

4. Сколько целых положительных решений имеет уравнение

$$x_1 + \ldots + x_m = n?$$

5. Сколько целых неотрицательных решений имеет неравенство

$$x_1 + \ldots + x_m \leqslant n?$$

## § 7. ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Допустим, что заданы множества $A_1, \ldots, A_k$. Множество всех элементов вида $(a_1, \ldots, a_k)$, где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, \ldots, a_k \in A_k$, называется *прямым произведением множеств* $A_1, \ldots, A_k$ и обозначается

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k.$$

Пример 1. Если $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$, то

$$A \times B = \{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\}.$$

Пример 2. Пусть имеется множество $A$ из $n$ элементов. Возьмем из $A$ какой-нибудь элемент, обозначим его через $a_1$ и вернем снова в множество $A$. Далее возьмем из $A$ некоторый элемент, обозначим его через $a_2$ (в частности, может случиться, что попадется снова элемент $a_1$). Проделав эту операцию $k$ раз, получим набор $(a_1, \ldots, a_k)$, который называют *$k$-словом*, составленным из элементов множества $A$. Множество всех $k$-слов, составленных из элементов $A$, является прямым произведением $A \times A \times \ldots \times A$ и кратко обозначается $A^k$. Например, если $A$ — множество из двух букв $\{a, b\}$, то множество $A^2$ всех слов имеет вид $\{aa, ab, ba, bb\}$. С $k$-словами мы часто сталкиваемся в различных ситуациях. Все десятичные записи чисел являются словами, составленными из цифр 0, ..., 9; обычные слова — это слова, состоящие, например, из букв русского алфавита; фразы — это «слова», состоящие из русских слов, и т. д.

Естественно задать вопрос: сколько различных $k$-слов можно составить из элементов множества $A$, имеющего $n$ элементов?

Следующая теорема дает ответ на этот и на более общий вопрос: сколько элементов содержит прямое произведение $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$?

Теорема. $N(A_1 \times \ldots \times A_k) = N(A_1) \ldots N(A_k)$.

Доказательство. Покажем сначала, что

$$N(A_1 \times A_2) = N(A_1) \cdot N(A_2).$$

Обозначим через $B_{c_1}$ подмножество множества $A_1 \times A_2$, которое состоит из элементов вида $(c_1, a_2)$, где $c_1$ — фиксированный элемент из $A_1$, а $a_2$ — произвольный элемент из $A_2$. Тогда $N(B_{c_1}) = N(A_2)$, так как

$B_{c_1}$ эквивалентно $A_2$ (элементу $(c_1, a_2)$ соответствует $a_2$). Если $a_1, b_1, \ldots, f_1$ — все элементы множества $A_1$, то

$$A_1 \times A_2 = B_{a_1} \cup B_{b_1} \cup \ldots \cup B_{f_1}.$$

Множества $B_{a_1}, B_{b_1}, \ldots, B_{f_1}$ попарно не имеют общих элементов. Поэтому

$$N(A_1 \times A_2) = N(B_{a_1}) + N(B_{b_1}) + \ldots + N(B_{f_1}) = \\ = N(A_1) \cdot N(A_2).$$

Примем теперь во внимание, что множества $A_1 \times \times (A_2 \times \ldots \times A_k)$ и $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ эквивалентны: элементу $[a_1, (a_2, \ldots, a_k)]$ соответствует элемент $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Поэтому

$$N(A_1 \times \ldots \times A_k) = N(A_1) \cdot N(A_2 \times \ldots \times A_k) = \\ = N(A_1) \cdot N(A_2) \cdot N(A_3 \times \ldots \times A_k) = \\ = N(A_1) \cdot N(A_2) \ldots N(A_k),$$

что и требовалось доказать.

Пример 3. Число $k$-слов, составленных из элементов множества $A$, равно

$$N(A^k) = [N(A)]^k.$$

Пример 4. Дадим ответ на вопрос, сколькими способами можно распределить $k$ разных предметов среди $n$ лиц?

Пусть $A$ — множество лиц, среди которых распределяют предметы. Перенумеруем предметы и поставим в соответствие каждому способу распределения символ $(a_1, \ldots, a_k)$, где $a_1$ — лицо, которое получило первый предмет, ..., $a_k$ — лицо, которое получило $k$-й предмет. Очевидно, $(a_1, \ldots, a_k)$ — $k$-слово, составленное из элементов множества $A$. Установленное соответствие является взаимно однозначным, и поэтому число способов распределения $k$ предметов среди $n$ лиц равно числу $k$-слов, которые можно составить из элементов множества $A$, т. е. равно $n^k$.

Пример 5. Пусть имеем множество $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$, состоящее из $k$ элементов, и множество $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$, состоящее из $n$ элементов. Допустим, что каждому элементу множества $X$ поставлен в соответствие некоторый элемент множества $Y$,

Тогда говорят, что на *множестве X задана функция с областью значений Y*. Множество $X$ называется *областью определения функции*. Естественно возникает вопрос: сколько всего имеется различных функций с областью определения $X$ и областью значений $Y$? Каждую функцию можно задать таблицей значений:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ | . . . | $x_s$ | . . . | $x_k$ |
| $y_{i_1}$ | $y_{i_2}$ | . . . | $y_{i_s}$ | . . . | $y_{i_k}$ |

где $y_{i_s}$ — это тот элемент множества $Y$, который поставлен в соответствие $x_s$. Поскольку каждый из элементов $y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}$ может быть одним из элементов множества $Y$, то всего имеется $n^k$ различных таблиц. (Можно рассуждать еще и так: нижняя строка таблицы $(y_{i_1}, \ldots, y_{i_k})$ есть $k$-слово, составленное из элементов множества $Y$, а, как известно, различных $k$-слов, составленных из элементов множества $Y$ такого, что $N(Y) = n$, имеется $n^k$.) Следовательно, имеется $n^k$ различных функций с областью определения $X$ и областью значений $Y$.

### УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$. Указать все элементы множества $A \times B$.

2. Пусть $A = [0, 1)$, $B = (0, 1) \cup [2, 3]$. Изобразить в декартовой системе координат $XOY$ множество $A \times B$.

## § 8. БИНОМ НЬЮТОНА И ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ФОРМУЛА

**8.1. Бином Ньютона.** Известно, что

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Как раскрыть скобки при вычислении выражения $(a+b)^n$? Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема. *Имеет место равенство*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots$$
$$\ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n a^0 b^n, \quad (1)$$

где

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Эту теорему иногда называют *биномиальной теоремой*, а числа $C_n^k$ — *биномиальными коэффициентами*. Равенство (1) часто называют *биномом Ньютона*, хотя это название исторически не является справедливым, так как формулу для $(a+b)^n$ знали еще среднеазиатские математики Омар Хайям (1048—1131), Гийас ад-Дин Джемшид ал-Каши (ум. ок. 1430). В западной Европе до Ньютона ее знал Паскаль (1623—1662). Заслуга Ньютона в том, что он обобщил формулу (1) для нецелого показателя $n$. Вид формулы бинома в этом случае рассмотрен в § 9. Напомним, что $C_n^k$ есть число $k$-элементных подмножеств множества из $n$ элементов. Формулу (1) можно записать в виде

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Доказательство. Перемножим последовательно $(a+b)$ $n$ раз. Тогда получим сумму $2^n$ слагаемых вида $d_1 d_2 \ldots d_n$, где $d_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ равно либо $a$, либо $b$. Разобьем все слагаемые на $n+1$ группу $B_0, B_1, \ldots, B_n$, отнеся к $B_k$ все те произведения, в которых $b$ встречается множителем $k$ раз, а $a$ — $(n-k)$ раз. Число произведений в $B_k$ равно, очевидно, $C_n^k$ (таким числом способов среди $n$ множителей $d_1, \ldots, d_n$ можно выбрать $k$ множителей, которые будут равны $b$), а каждое слагаемое в $B_k$ равно $a^{n-k}b^k$. Поэтому

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Теорема доказана.

Напомним следующее важное свойство биномиальных коэффициентов:

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \qquad (2)$$

Оно было установлено в § 3.

Равенство (2) показывает, что биномиальные коэффициенты можно последовательно выписывать в виде треугольной таблицы, которая называется *треугольником Паскаля*:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & 1 & & 1 & & & & & n=1 \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & n=2 \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & n=3 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & n=4 \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & n=5 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{array}$$

В $n$-й строке треугольника Паскаля стоят коэффициенты разложения $(a+b)^n$, причем каждый коэффициент, кроме крайних двух, которые равны 1, равен сумме соответствующих коэффициентов из предыдущей строки.

**8.2. Полиномиальная теорема.** Рассмотрим вопрос о том, как раскрывать скобки при вычислении выражения вида

$$(a_1+a_2+\ldots+a_k)^n.$$

Полиномиальная теорема. *Выражение*

$$(a_1+a_2+\ldots+a_k)^n$$

*равно сумме всех возможных слагаемых вида*

$$\frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!}a_1^{r_1}\cdot a_2^{r_2}\ldots a_k^{r_k},$$

*где*

$$r_1+r_2+\ldots+r_k=n,$$

*т. е.*

$$(a_1+a_2+\ldots+a_k)^n=$$
$$=\sum_{\substack{r_1\geqslant 0,\ldots,r_k\geqslant 0\\ r_1+\ldots+r_k=n}}\frac{n!}{r_1!\ldots r_k!}a_1^{r_1}\ldots a_k^{r_k}, \qquad (3)$$

Доказательство. Перемножим последовательно $a_1+\ldots+a_k$ $n$ раз. Тогда получим $k^n$ слагаемых вида $d_1d_2\ldots d_n$, где каждый множитель $d_i$ равен или $a_1$, или $a_2$, ..., или $a_k$. Обозначим через $B(r_1,\ldots,r_k)$ совокупность всех тех слагаемых, где $a_1$ встречается множителем $r_1$ раз, $a_2$ — $r_2$ раз, ..., $a_k$ — $r_k$ раз.

Число таких слагаемых равно $C_n(r_1, \ldots, r_k)$ — числу способов представления множества из $n$ элементов $\{1, 2, \ldots, n\}$ в виде суммы $k$ множеств $B_1, B_2, \ldots, B_k$ так, чтобы множество $B_s$ имело $r_s$ элементов ($r_s \geqslant 0$, $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$; множество $B_s$ — это множество тех $i$, для которых $d_i = a_s$). В § 5 было показано, что

$$C_n(r_1, \ldots, r_k) = \frac{n!}{r_1! \ldots r_k!}.$$

Следовательно,

$$(a_1 + \ldots + a_k)^n = \sum_{\substack{r_1 \geqslant 0, \ldots, r_k \geqslant 0 \\ r_1 + \ldots + r_k = n}} \frac{n!}{r_1! \ldots r_k!} a_1^{r_1} \ldots a_k^{r_k}.$$

При $k = 2$ равенство (3) имеет вид

$$(a_1 + a_2)^n = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!} a_1^{n-r} a_2^r.$$

Следовательно, мы получили формулу бинома Ньютона.

**8.3. Биномиальные тождества.** Числа $C_n^k$ имеют ряд важных свойств. Укажем некоторые из них и установим ряд интересных тождеств, которым удовлетворяют биномиальные коэффициенты.

Напомним в первую очередь следующие равенства:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \tag{4}$$

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}, \tag{5}$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n, \tag{6}$$

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0. \tag{7}$$

Равенство (4) легко проверяется вычислением. Оно следует также из того, что число $k$-элементных подмножеств множества из $n$ элементов равно числу $(n-k)$-элементных подмножеств. Равенство (5) мы доказали в п. 3.1. Равенство (6) получим, взяв в формуле бинома $a = b = 1$. Оно следует также из комбинаторных соображений, которые были проведены в п. 3.1. Если в формуле бинома Ньютона положить $a = 1$, $b = -1$, получим равенство (7).

Иногда при доказательстве некоторых тождеств полезно иметь в виду геометрическую интерпретацию чисел $C_n^k$, которая была приведена в п. 3.1.

Докажем еще несколько важных биномиальных тождеств.

Задача 1. Доказать, что

$$C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-2}^{r-1} + \ldots + C_{r-1}^{r-1}. \qquad (8)$$

Доказательство 1. Рассмотрим все $r$-элементные подмножества множества $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Число их равно $C_n^r$. Разобьем все эти подмножества на классы $T_1, \ldots, T_{n-r+1}$, отнеся к классу $T_k$ все те $r$-элементные подмножества множества $A$, в которых элемент с наименьшим индексом равен $a_k$.

Поскольку каждое подмножество из класса $T_k$ может быть получено присоединением к $a_k$ некоторого $(r-1)$-элементного подмножества множества $\{a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n\}$, то класс $T_k$ состоит из $C_{n-k}^{r-1}$ подмножеств. Следовательно, получаем равенство (8).

Доказательство 2. Рассмотрим все кратчайшие ломаные, соединяющие точку $(0; 0)$ с точкой $(r; n-r)$. Число всех таких ломаных равно $C_n^r$. Отнесем к классу $B_k$ те ломаные, которые пересекают прямую $x = 1/2$ в точке $(1/2; k)$ $(k = 0, \ldots, n-1)$. Очевидно, класс $B_k$ состоит из $C_{n-k-1}^{r-1}$ ломаных (рис. 6). Поэтому

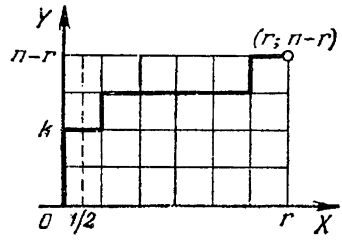

Рис. 6.

$$C_n^r = \sum_{k=0}^{n-r} C_{n-k-1}^{r-1}.$$

Задача 2. Доказать, что

$$C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k C_m^0 = C_{n+m}^k. \qquad (9)$$

Доказательство 1. Все $k$-элементные подмножества множества

$$A = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+m}\}$$

(число их равно $C_{n+m}^k$) разобьем на $k+1$ класс $V_0, V_1, \ldots, V_k$, отнеся к классу $V_i$ все те подмножества, в состав которых входит ровно $i$ элементов с индексами, не большими чем $n$. Каждое подмножество из класса $V_i$ можно получить, присоединяя к некоторому $i$-элементному подмножеству множества $\{a_1, \ldots, a_n\}$ $(k-i)$-элементное подмножество множества $\{a_{n+1}, \ldots, a_{n+m}\}$. Поэтому в состав $V_i$ входит $C_n^i C_m^{k-i}$ подмножеств. Следовательно,

$$C_{n+m}^k = \sum_{i=0}^{k} C_n^i C_m^{k-i}.$$

Считая в (9) $k = n = m$, имеем тождество

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n, \qquad (10)$$

которое уже было доказано с помощью геометрических соображений в п. 3.1 (задача 6).

Доказательство 2. Воспользуемся следующим замечанием: если два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ равны при всех $x$, то коэффициенты этих многочленов при одинаковых степенях $x$ равны. Действительно, если $P(x) \equiv Q(x)$ и при некоторой степени $x$ коэффициенты не равны, то многочлен $P(x) - Q(x)$ будет многочленом с ненулевыми коэффициентами, имеющим бесчисленное множество действительных корней, что противоречит основной теореме алгебры.

Запишем равенство

$$(1+x)^n (1+x)^m = (1+x)^{m+n}. \qquad (11)$$

Используя формулу бинома Ньютона, убеждаемся, что коэффициент при $x^k$ в правой части равенства (11) равен $C_{m+n}^k$, а коэффициент при $x^k$ в левой части этого равенства имеет вид

$$C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k C_m^0.$$

Равенство (9) доказано.

Задача 3. Доказать, что

$$C_n^0 + C_n^m + C_n^{2m} + \ldots = \frac{2^n}{m} \sum_{k=1}^{m} \cos^n \frac{k\pi}{m} \cos \frac{nk\pi}{m} \qquad (12)$$

(сумма в левой части вычисляется до тех пор, пока верхний индекс не станет больше нижнего).

Доказательство. Пусть $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ — корни уравнения $x^m - 1 = 0$, т. е.

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m). \quad (13)$$

Заметим, что для каждого натурального $r$

$$\varepsilon_1^r + \ldots + \varepsilon_m^r = \begin{cases} m, \text{ если } r \text{ делится на } m, \\ 0, \text{ если } r \text{ не делится на } m. \end{cases} \quad (14)$$

Действительно, согласно (13), $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$, и поэтому

$$\varepsilon_1^r + \ldots + \varepsilon_m^r = \varepsilon_1^r + \varepsilon_1^{2r} + \ldots \varepsilon_1^{(m-1)r} + 1. \quad (15)$$

Если $r$ делится на $m$, то все слагаемые в правой части равенства (15) равны 1. Если же $r$ не делится на $m$ ($r = qm + p$, $1 \leqslant p \leqslant m - 1$), то

$$\varepsilon_1^r = \varepsilon_1^{qm+p} = \varepsilon_1^p = \varepsilon_p \neq 1$$

и

$$1 + \varepsilon_1^r + \varepsilon_1^{2r} + \ldots + \varepsilon_1^{(m-1)r} = \frac{1 - (\varepsilon_1^r)^m}{1 - \varepsilon_1^r} = \frac{1 - \varepsilon_1^{rm}}{1 - \varepsilon_1^r} = 0,$$

поскольку $\varepsilon_1^m = 1$. Равенство (14) доказано.

Из равенства (14) следует, что

$$(1 + \varepsilon_1)^n + \ldots + (1 + \varepsilon_m)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r (\varepsilon_1^r + \ldots + \varepsilon_m^r) =$$

$$= m\left(C_n^0 + C_n^m + C_n^{2m} + \ldots + C_n^{m\left[\frac{n}{m}\right]}\right). \quad (16)$$

Поскольку

$$1 + \varepsilon_k = 1 + \cos\frac{2\pi k}{m} + i\sin\frac{2\pi k}{m} =$$

$$= 2\cos\frac{k\pi}{m}\left(\cos\frac{k\pi}{m} + i\sin\frac{k\pi}{m}\right),$$

то

$$(1 + \varepsilon_1)^n + \ldots + (1 + \varepsilon_m)^n =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} 2^n \cos^n\frac{k\pi}{m}\left(\cos\frac{nk\pi}{m} + i\sin\frac{nk\pi}{m}\right). \quad (17)$$

Из равенства (16) следует, что правая часть в (17) — действительное число. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{m} 2^n \cos^n \frac{k\pi}{m} \sin \frac{nk\pi}{m} = 0. \qquad (18)$$

Сравнивая (16) и (17), получим (12).

Задача 4. Доказать, что

$$C_n^m C_k^0 + C_{n-1}^{m-1} C_{k+1}^1 + \ldots + C_{n-m}^0 C_{k+m}^m = C_{n+k+1}^m. \qquad (19)$$

Доказательство. Рассмотрим все кратчайшие пути, которые ведут из точки $(0; 0)$ в точку $(n-m+k+1;\ m)$. Разобьем все такие пути на классы $L_0, L_1, \ldots, L_m$, отнеся к классу $L_r$ все те пути, которые пересекают прямую $x = k + 0{,}5$ в точке $(k + 0{,}5;\ r)$ (рис. 7). Поскольку каждую ломаную из

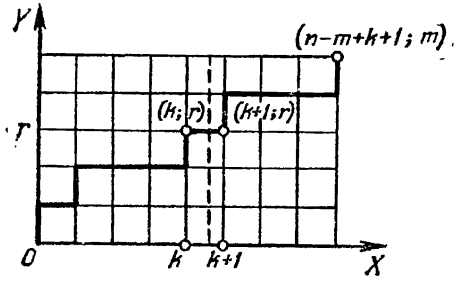


Рис. 7.

$L_r$ можно разбить на 3 части (ломаную, соединяющую $(0; 0)$ с $(k; r)$, горизонтальный отрезок, соединяющий точки $(k; r)$ и $(k+1;\ r)$, и ломаную, соединяющую $(k+1;\ r)$ с $(n-m+k+1;\ m)$, то общее число ломаных, из которых состоит класс $L_r$, равно

$$C_{k+r}^r C_{n-r}^{m-r}.$$

Общее же число всех путей из точки $(0; 0)$ в точку $(n-m+k+1;\ m)$ равно $C_{n+k+1}^m$. Поэтому имеет место (19).

## УПРАЖНЕНИЯ

**1.** Доказать формулу бинома Ньютона, применяя метод математической индукции.

**2.** а) Доказать, что $C_n^{k+1} > C_n^k$ при $k < \frac{n-1}{2}$ и $C_n^{k+1} < C_n^k$ при $k > \frac{n-1}{2}$.

б) Указать наибольшее среди чисел $C_n^k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

**3.** Найти $n$, если известно, что в разложении $(1+x)^n$ коэффициенты при $x^5$ и $x^{12}$ равны.

**4.** Сколько рациональных членов содержит разложение

$$\left(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3}\right)^{100}?$$

**5.** Пользуясь полиномиальной теоремой, вычислить $(x+y+z)^3$.

**6.** Чему равен коэффициент при $x^2y^3z^2$ в выражении $(x+y+z)^7$?

**7.** Найти коэффициент при $x^ky^r$ в разложении $(1+x+y)^n$.

**8.** Найти коэффициенты при $x^{17}$ и $x^{18}$ в разложении $(1+x^5+x^7)^n$.

**9.** Доказать, что

$$C_{n+1}(i, l, k) = C_n(i-1, l, k) + C_n(i, l-1, k) + C_n(i, l, k-1).$$

**10.** Сколько членов содержит полиномиальное разложение (формула (3) в п. 8.2)?

**11.** Доказать, что сумма всех коэффициентов полиномиального разложения равна $k^n$.

**12.** Доказать, что числа $C_p^1, C_p^2, \ldots, C_p^{p-1}$ делятся на $p$, если $p$ — простое число.

**13.** Доказать, что разность $a^p - a$ при любом целом $a$ делится на $p$, если $p$ — простое число (*малая теорема Ферма*).

**14.** Доказать, что разность $[(2+\sqrt{5})^p] - 2^{p+1}$ делится на $p$, если $p$ — простое число ($p > 2$). (Символ $[x]$ обозначает целую часть $x$.)

**15.** Обозначим

$$a(a-h)(a-2h)(a-3h)\ldots(a-(n-1)h) = a^{n/h}$$

(в частности, $a^{n/0} = a^n$). Доказать, что

$$(a+b)^{n/h} = a^{n/h} + C_n^1 a^{(n-1)/h} b + \ldots + b^{n/h}.$$

Доказать тождества:

**16.** $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

**17.** $C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n = n2^{n-1}$.

**18.** $C_n^1 - 2C_n^2 + \ldots + (-1)^{n-1}nC_n^n = 0$.

19. $C_n^0 + C_n^2 + \ldots + C_n^{2[n/2]} =$

$$= C_n^1 + C_n^3 + \ldots + C_n^{2[(n+1)/2]-1} = 2^{n-1}.$$

20. $C_{n-2}^{k-2} + 2C_{n-3}^{k-2} + \ldots + (n-k+1)\,C_{k-2}^{k-2} = C_n^k.$

21. $C_{k-3}^{k-3}C_{n-k+2}^2 + C_{k-2}^{k-3}C_{n-k+1}^2 + \ldots + C_{n-3}^{k-3}C_2^2 = C_n^k.$

22. $C_n^k + C_{n+1}^k + \ldots + C_{n+m}^k =$

$$= \begin{cases} C_{n+m+1}^{k+1} - C_n^{k+1} & \text{при } k \leqslant n-1, \\ C_{n+m+1}^{n+1} & \text{при } k = n. \end{cases}$$

23. $C_n^r + C_n^{r+m} + C_n^{r+2m} + \ldots =$

$$= \frac{2^n}{m} \sum_{k=1}^{n} \cos^n \frac{k\pi}{m} \cos \frac{(n-2r)\,k\pi}{m} \quad \text{при } m > 1.$$

Вычислить суммы:

24. $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^m C_n^m.$

25. $C_{2n}^0 - C_{2n-1}^1 + C_{2n-2}^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n.$

26. $(C_n^0)^2 - (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 - \ldots + (-1)^n (C_n^n)^2.$

27. $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots$

28. $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots$

29. $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots$

30. $C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + \ldots$

31. $C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \ldots$

32. $1 + C_n^1 \cos\varphi + C_n^2 \cos 2\varphi + \ldots + C_n^n \cos n\varphi.$

33. $C_n^1 \sin\varphi + C_n^2 \sin 2\varphi + \ldots + C_n^n \sin n\varphi.$

34. Найти все корни уравнения

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!} = 0.$$

35. Пусть $\alpha$, $\beta$, $a$ — натуральные числа, $\alpha + \beta < m$, $\alpha + \beta < n$. Доказать, что

$$\sum_{k=0}^{\alpha-1} C_{a+m-k}^{m-k} C_{n-a-1+k}^k + \sum_{k=1}^{\beta} C_{m+a-\alpha+1}^{a+k} C_{n+\alpha-a-1}^{n-a-k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-\alpha-\beta} C_{n+m-\alpha-\beta-1-k}^{m-k} C_{\alpha+\beta+k}^k = C_{m+n}^m.$$

**36.** В классе изучают $2n$ предметов. Все ученики учатся на 4 и 5. Никакие 2 из них не учатся одинаково, ни о каких двух из них нельзя сказать, что один из них учится лучше другого. Доказать, что число учеников в классе не превышает $C_{2n}^{n}$.

**37.** Пусть $\Omega$ — некоторое множество, содержащее $n$ элементов, а $A_1, \ldots, A_k$ — подмножества этого множества. Набор подмножеств $A_1, \ldots, A_k$ будем называть *коллекцией Шпернера*, если ни одно из множеств $A_1, \ldots, A_k$ не является частью другого.

а) Пусть $\Omega = \{a, b, c\}$. Какие из указанных ниже наборов являются коллекциями Шпернера:

$$K_1 = [\{a\}, \{b\}, \{c\}],$$
$$K_2 = [\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}],$$
$$K_3 = [\{a\}, \{a, c\}, \{b, c\}]?$$

б) Пусть $\Omega = \{a, b\}$. Указать все возможные коллекции Шпернера этого множества.

**38.** (*Теорема Шпернера.*) Пусть $\Omega$ — множество, состоящее из $n$ элементов, $A_1, \ldots, A_k$ — коллекция Шпернера этого множества. Тогда $k \leqslant C_n^{[n/2]}$. Доказать это.

**39.** Пусть $\Omega$ — множество, состоящее из $n$ элементов, $A_1, \ldots, A_k$ — коллекция Шпернера этого множества, $i_1, \ldots, i_k$ — соответственно числа элементов множеств $A_1, \ldots, A_k$. Доказать, что

$$\frac{1}{C_n^{i_1}} + \frac{1}{C_n^{i_2}} + \ldots + \frac{1}{C_n^{i_k}} \leqslant 1.$$

**40.** Получить из утверждения задачи 39 утверждение задачи 38.

**41.** Пусть $A_n$ — число различных коллекций Шпернера для множества из $n$ элементов. Доказать, что

$$2^{T_n} < A_n < C_{2^{T_n}}^{T_n}.$$

где $T_n = C_n^{[n/2]}$.

**42.** Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — действительные числа, $|x_i| \geqslant 1$. Доказать, что в любом интервале длины 2 имеется не более чем $C_n^{[n/2]}$ сумм вида $\sum \varepsilon_k x_k$, где $\varepsilon_k = \pm 1$.

**43.** Доказать тождества:

а) $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{C_{2k}^k}{4^k} = \frac{C_{2n}^n}{4^n},$$

б) $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{C_n^k}{2k+1} = \frac{4^n}{(n+1)\, C_{2n+1}^n}.$$

## § 9. МЕТОД РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Метод рекуррентных соотношений состоит в том, что решение комбинаторной задачи с $n$ предметами выражается через решение аналогичной задачи с меньшим числом предметов с помощью некоторого соотношения, которое называется *рекуррентным* (возвратным). Пользуясь этим соотношением, искомую величину можно вычислить, исходя из того, что для небольшого количества предметов (одного, двух) решение задачи легко находится.

Проиллюстрируем метод рекуррентных соотношений на примерах.

Пример 1. (*Сочетания с повторениями.*) Сочетание из $n$ предметов по $r$ с повторениями — это группы по $r$ предметов, взятых из данных $n$ предметов, причем каждый предмет может повторяться какое угодно число раз (порядок предметов в группе безразличен). Например, все сочетания из четырех чисел 1, 2, 3, 4 по два с повторениями имеют вид 11, 12, 13, 14, 22, 23, 24, 33, 34, 44. Таким образом, число сочетаний из 4 по 2 с повторениями равно 10.

Обозначим число сочетаний из $n$ предметов $\{a_1, \ldots, a_n\}$ по $r$ с повторениями через $f_n^r$. Каждое сочетание из $n$ по $r$ либо содержит, либо не содержит $a_1$. Число сочетаний, которые не содержат $a_1$, равно $f_{n-1}^r$ (это сочетания из предметов $a_2, \ldots, a_n$ по $r$). Каждое сочетание, содержащее $a_1$, может быть получено присоединением к $a_1$ некоторого сочетания из $n$ предметов по $r-1$ (число таких сочетаний равно $f_n^{r-1}$). Следовательно,

$$f_n^r = f_{n-1}^r + f_n^{r-1}. \qquad (1)$$

Мы получили рекуррентное соотношение, из которого можно найти $f_n^r$. Последовательно применяя (1), получим

$$f_n^r = f_n^{r-1} + f_{n-1}^r = f_n^{r-1} + (f_{n-1}^{r-1} + f_{n-2}^r) =$$
$$= f_n^{r-1} + f_{n-1}^{r-1} + \ldots f_2^{r-1} + f_1^r. \qquad (2)$$

Очевидно,

$$f_n^1 = n, \qquad f_1^r = 1. \qquad (3)$$

Считая в (2) $r=2$, получим

$$f_n^2 = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2} = C_{n+1}^2. \quad (4)$$

При $r=3$ из равенства (2) получим

$$f_n^3 = C_{n+1}^2 + C_n^2 + \ldots + C_3^2 + C_2^2 = C_{n+2}^3$$

(мы использовали равенство (8) из п. 8.3). Повторяя эти же соображения далее, на $(r-1)$-м шаге будем иметь

$$f_n^r = C_{n+r-1}^r. \quad (5)$$

Пример 2. Найдем число частей, на которые $n$ окружностей делят плоскость, если каждые две окружности имеют общую хорду и никакие три окружности не пересекаются в одной точке. Пусть $A_n$ — искомое число частей. На сколько увеличится число частей, если провести $(n+1)$-ю окружность так, чтобы она пересекала все окружности и не проходила через точку пересечения каких-либо двух других окружностей? Поскольку $(n+1)$-я окружность пересекается с каждой окружностью в двух точках, то она разделится точками пересечения на $2n$ дуг, каждая из которых делит пополам одну из частей, которая имеется в $A_n$. Следовательно, число частей увеличится на $2n$:

$$A_{n+1} = A_n + 2n. \quad (6)$$

Из этого рекуррентного соотношения получим

$$A_n = 2(n-1) + A_{n-1} = 2(n-1) + 2(n-2) + A_{n-2} = 2(n-1) + 2(n-2) + \ldots + 2\cdot 1 + A_1.$$

Но $A_1 = 2$, и поэтому $A_n = n^2 - n + 2$.

## § 10. МЕТОД ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ

Метод производящих функций не является элементарным, так как при его использовании приходится иметь дело с некоторыми понятиями математического анализа. Остановимся кратко и на этом методе, поскольку он является одним из наиболее эффективных методов решения комбинаторных задач.

Далее придется рассматривать суммы бесконечного числа слагаемых. В математическом анализе такие суммы называются *рядами*.

Пусть имеем бесконечную сумму

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots \tag{1}$$

Часто такие суммы записывают в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Как же понимать сумму бесконечного числа слагаемых? Примем следующее определение.

Пусть

$$s_n = a_1 + \ldots + a_n. \tag{2}$$

Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, то ряд (1) называется *сходящимся* и число $s$ называется *суммой* этого ряда:

$$a_1 + \ldots + a_k + \ldots = s.$$

Если же $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ не существует, то ряд называется *расходящимся*.

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Имеем

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \\ + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Видим, что $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$. Таким образом,

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} + \ldots = 1.$$

Пример 2. Рассмотрим ряд

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}. \tag{3}$$

Имеем неравенство

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

которое показывает, что $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$. Таким образом, ряд (3) расходится.

Пример 3. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots \tag{4}$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$s_n = \begin{cases} 0, \text{ если } n \text{ — четное число,} \\ 1, \text{ если } n \text{ — нечетное число.} \end{cases}$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ не существует, и ряд (4) расходится.

Следующие примеры имеют очень большое значение.

Пример 4. (*Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.*) В школьном курсе алгебры при изучении геометрической прогрессии рассматривается ряд

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}. \tag{5}$$

Выясним, при каких $x$ этот ряд сходится, и вычислим его сумму. По формуле суммы членов геометрической прогрессии

$$s_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

(при $x \neq 1$). Если $|x| < 1$, то $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-x}$. Если же $|x| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ не существует, и ряд (5) расходится. Ряд (5) расходится также при $x = -1$ (пример 3) и при $x = 1$ (в последнем случае $s_n = n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$).

Следовательно, ряд (5) сходится при $|x| < 1$, и в этом случае

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^k + \ldots = \frac{1}{1-x}. \tag{6}$$

Пример 5. (*Биномиальный ряд Ньютона.*) В курсах математического анализа с помощью методов дифференциального исчисления выводится следующая формула, которая была открыта впервые Ньютоном:

$$(1 + x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \\ + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \ldots \tag{7}$$

Формула имеет место при $|x| < 1$. Если $\alpha = n$ — натуральное число, то все слагаемые в правой части равенства (7), начиная с $(n+2)$-го, равны 0, так как все они содержат множитель $(n - n)$. Формула (7) в этом случае обращается в биномиальную формулу, которую мы установили выше. При $\alpha = -1$ формула (7) принимает вид

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^k x^k + \ldots \tag{8}$$

Эта формула вытекает из (6) (достаточно заменить в (6) $x$ на $-x$). Доказывать формулу (7) в общем случае не будем, а установим ее ниже лишь для целых отрицательных $\alpha$.

Пример 6. (*Степенные ряды.*) Ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \ldots \tag{9}$$

называется *степенным.* Ряды (6), (7), (8) являются примерами степенных рядов. В курсах математического анализа доказываются следующие важные свойства степенных рядов:

1) Областью сходимости (т. е. множеством тех $x$, при которых ряд сходится) является множество вида $\{x\colon |x| < c\}$, к которому могут иногда принадлежать точки $x = -c$ и $x = c$ или одна из этих точек.

2) Степенные ряды можно перемножать, собирая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ так, как это делается при умножении многочленов.

3) Если два степенных ряда имеют одинаковую сумму при всех $x$ из области сходимости этих рядов, то коэффициенты при соответствующих степенях $x$ этих рядов равны.

Пример 7. Выведем формулу

$$\frac{1}{(1-x)^n} = 1 + C_n^1 x + C_{n+1}^2 x^2 + \ldots + C_{n+k-1}^k x^k + \ldots \tag{10}$$

(при $|x| < 1$), которая является частным случаем биномиальной формулы (7).

Воспользуемся методом полной математической индукции. При $n = 1$ формула (10) имеет место (формула (6)). Допустим, что (10) имеет место. Тогда

$$\frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \frac{1}{(1-x)^n}\,\frac{1}{1-x} =$$
$$= \left(1 + C_n^1 x + C_{n+1}^2 x^2 + \ldots + C_{n+k-1}^k x^k + \ldots\right) \cdot$$
$$\cdot (1 + x + x^2 + \ldots + x^k + \ldots).$$

Перемножим эти ряды и соберем коэффициенты при одинаковых степенях $x$. Коэффициент при $x^k$ равен

$$C_{n-1}^0 + C_n^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+k-1}^k.$$

Используя равенство

$$C_{n-1}^0 + C_n^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+k-1}^k = C_{n+k}^k,$$

которое вытекает из равенства (8) в п. 8.3, имеем

$$\frac{1}{(1-x)^{n+1}} = 1 + C_{n+1}^1 x + C_{n+2}^2 x^2 + \ldots + C_{n+k}^k x^k + \ldots,$$

что и доказывает формулу (10).

Определение. *Производящей функцией* последовательности $\{a_n\}$ называется сумма степенного ряда

$$A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n.$$

Пример 8. Производящей функцией последовательности $a_n = a^n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ является $A(s) = \frac{1}{1 - as}$. Действительно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n s^n = \frac{1}{1 - as}$$

(сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии; ряд в левой части сходится при $|as| < 1$).

Пример 9. Производящая функция последовательности $a_k = C_n^k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ равна

$$A(s) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k s^k = (1 + s)^n.$$

Пример 10. Производящая функция последовательности $a_k = C_{n+k}^k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ равна

$$A(s) = \frac{1}{(1 - s)^{n+1}}.$$

Это следует из равенства (10).

Пример 11. Производящая функция последовательности

$$a_n = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 \leqslant n < k, \\ C_n^k \text{ при } n \geqslant k \end{cases}$$

равна

$$A(s) = \frac{s^k}{(1 - s)^{k+1}}.$$

Действительно,

$$A(s) = \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k s^n.$$

Считая в этой сумме $n = k + i$, где $i = 0, 1, \ldots$, будем иметь, принимая во внимание пример 10,

$$A(s) = s^k \sum_{i=0}^{\infty} C_{k+i}^k s^i = s^k \sum_{i=0}^{\infty} C_{k+i}^i s^i = \frac{s^k}{(1 - s)^{k+1}}. \quad (11)$$

Идея применения метода производящих функций такова: необходимо вычислить все члены некоторой последовательности $\{a_n\}$. С помощью рекуррентного соотношения для $a_n$ или исходя непосредственно из комбинаторных соображений вычисляют производящую функцию

$$A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n.$$

Раскладывая затем $A(s)$ в ряд и находя коэффициент при $s^n$, тем самым находят $a_n$.

Пример 12. (*Сочетания с повторениями.*) Пусть $f_n^r$ — число сочетаний из $n$ предметов по $r$ с повторениями. Мы установили (см. пример 1 в § 9), что

$$f_n^r = f_n^{r-1} + f_{n-1}^r. \tag{12}$$

При этом $f_n^1 = n$; для того чтобы (12) имело место и при $r = 1$, достаточно считать, что $f_n^0 = 1$. Пусть

$$A_n(s) = \sum_{r=0}^{\infty} f_n^r s^r. \tag{13}$$

Умножим обе части равенств (12) на $s^r$ $(r = 1, 2, \ldots)$ и сложим почленно все равенства; тогда получим

$$\sum_{r=1}^{\infty} f_n^r s^r = s \sum_{r=1}^{\infty} f_n^{r-1} s^{r-1} + \sum_{r=1}^{\infty} f_{n-1}^r s^r. \tag{14}$$

Но

$$\sum_{r=1}^{\infty} f_n^r s^r = A_n(s) - 1,$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} f_n^{r-1} s^{r-1} = \sum_{t=0}^{\infty} f_n^t s^t = A_n(s) \qquad (\text{где } t = r - 1),$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} f_{n-1}^r s^r = A_{n-1}(s) - 1,$$

и, подставляя эти суммы в (14), будем иметь

$$A_n(s) = \frac{1}{1-s} A_{n-1}(s). \tag{15}$$

Отсюда

$$A_n(s) = \frac{1}{(1-s)^2} A_{n-2}(s) = \frac{1}{(1-s)^3} A_{n-3}(s) = \frac{A_1(s)}{(1-s)^{n-1}}.$$

Отметим теперь, что $f_1^r = 1$ при всех $r$, и поэтому

$$A_1(s) = \sum_{r=0}^{\infty} f_1^r s^r = \sum_{r=0}^{\infty} s^r = \frac{1}{1-s}.$$

Следовательно,

$$A_n(s) = \frac{1}{(1-s)^n}. \tag{16}$$

Из равенства (10) следует, что

$$f_n^r = C_{n-1+r}^r.$$

Пример 13. Найдем все члены последовательности Фибоначчи, которая задается по закону

$$B_0 = 1, \quad B_1 = 2, \tag{17}$$

$$B_n = B_{n-1} + B_{n-2} \qquad (\text{при} \quad n \geqslant 2). \tag{18}$$

Рассмотрим функцию

$$B(s) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n s^n.$$

Умножив обе части равенства (18) на $s^n$ и сложив затем все полученные равенства, будем иметь

$$\sum_{n=2}^{\infty} B_n s^n = s \sum_{n=2}^{\infty} B_{n-1} s^{n-1} + s^2 \sum_{n=2}^{\infty} B_{n-2} s^{n-2}. \tag{19}$$

Принимая во внимание то, что

$$\sum_{n=2}^{\infty} B_n s^n = B(s) - 1 - 2s,$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} B_{n-1} s^{n-1} = \sum_{m=1}^{\infty} B_m s^m = B(s) - 1 \qquad (\text{где} \quad m = n-1),$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} B_{n-2} s^{n-2} = \sum_{p=0}^{\infty} B_p s^p = B(s) \qquad (\text{где} \quad p = n-2),$$

получим из равенства (19)

$$B(s) - 1 - 2s = s[B(s) - 1] + s^2 B(s),$$

откуда

$$B(s) = \frac{s+1}{1-s-s^2}. \tag{20}$$

Вычислив коэффициент при $s^n$ в разложении функции $B(s)$ в ряд, найдем $B_n$.

Разложим в ряд функцию

$$\frac{1}{1-s-s^2}=-\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)},$$

где

$$s_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\quad s_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Имеем

$$-\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)}=\left(\frac{1}{s-s_1}-\frac{1}{s-s_2}\right)\frac{1}{s_2-s_1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{s_1}\cdot\frac{1}{1-\frac{s}{s_1}}+\frac{1}{s_2}\cdot\frac{1}{1-\frac{s}{s_2}}\right).$$

Используя равенство

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,$$

будем иметь

$$\frac{1}{1-s-s^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{s_2^{n+1}}-\frac{1}{s_1^{n+1}}\right)s^n,$$

Поэтому коэффициент при $s^n$ в разложении функции (20) равен

$$B_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{s_2^{n+1}}-\frac{1}{s_1^{n+1}}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{s_2^n}-\frac{1}{s_1^n}\right).$$

После упрощений получим формулу

$$B_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right).$$

Замечание. Во многих задачах производящая функция является рациональной функцией, т. е. функцией вида

$$A(s)=\frac{P(s)}{Q(s)},$$

где $P(s)$ и $Q(s)$ — многочлены относительно $s$. В том случае, если многочлен $Q(s)$ имеет лишь простые корни, можно указать простой метод разложения такой функции в ряд по степеням $s$.

Допустим, что $Q(s)$ — многочлен степени $m$, а степень многочлена $P(s)$ меньше, чем степень $Q(s)$ (этого всегда можно достигнуть, разделив $P(s)$ на $Q(s)$). Тогда

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=\sum_{k=1}\frac{A_k}{s-s_k}. \tag{21}$$

Приведя к общему знаменателю дроби в правой части, получим в знаменателе многочлен $Q(s)$ (допустим, что коэффициент при старшем члене $Q(s)$ равен 1; это допущение не является ограничением), а в числителе — некоторый многочлен. Приравнивая коэффициенты этого многочлена соответствующим коэффициентам многочлена $P(s)$, можно подобрать $A_k$ так, чтобы равенство (21) выполнялось при всех тех $s$, при которых оно имеет смысл.

Иногда производящую функцию можно найти, не пользуясь рекуррентными соотношениями, а исходя из некоторых комбинаторных соображений.

Пример 14. (*Производящая функция для числа сочетаний.*) Пусть $a_1$, $a_2$, $a_3$ — некоторые числа. Рассмотрим произведение

$$(1 + a_1 s)(1 + a_2 s)(1 + a_3 s).$$

Перемножив и собрав коэффициенты при одинаковых степенях $s$, будем иметь

$$\begin{aligned}(1 + a_1 s)(1 + a_2 s)(1 + a_3 s) &= \\ = 1 + s(a_1 + a_2 + a_3) + s^2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) + s^3 a_1 a_2 a_3 &= \\ = 1 + A_1 s + A_2 s^2 + A_3 s^3. \qquad (22)\end{aligned}$$

Отметим, что число слагаемых в каждом коэффициенте $A_r$ равно числу сочетаний из 3 по $r$. Например, выписав соответствующие индексы при $a_i$ в каждом слагаемом $A_2$ ((1, 2), (1, 3), (2, 3)), получим все сочетания из трех чисел 1, 2, 3 по два.

Будем считать, что в выражении (22) $a_1 = a_2 = a_3 = 1$; тогда коэффициент при $s^r$ будет равен числу сочетаний из 3 по $r$. Следовательно, $(1 + s)^3$ является производящей функцией для числа сочетаний из трех предметов.

Пример 15. Рассмотрим сочетания из трех предметов 1, 2, 3, причем 1, 2 могут встречаться не более двух раз, а 3 — не более одного раза.

Рассмотрим произведение

$$\begin{aligned}\left(1 + a_1 s + a_1^2 s^2\right)\left(1 + a_2 s + a_2^2 s^2\right)(1 + a_3 s) &= \\ = 1 + s(a_1 + a_2 + a_3) + s^2\left(a_1^2 + a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + a_2^2\right) &+ \\ + s^3\left(a_1^2 a_2 + a_1^2 a_3 + a_1 a_2^2 + a_1 a_2 a_3 + a_2^2 a_3\right) &+ \\ + s^4\left(a_1^2 a_2^2 + a_1^2 a_2 a_3 + a_1 a_2^2 a_3\right) + s^5 a_1^2 a_2^2 a_3 &= \\ = 1 + A_1 s + A_2 s^2 + A_3 s^3 + A_4 s^4 + A_5 s^5.\end{aligned}$$

Опять же число слагаемых в каждом $A_r$ равно числу всех возможных комбинаций из 3 предметов по $r$ при сделанных выше ограничениях. Например, выписав соответствующие индексы в каждом слагаемом $A_3$, получим все возможные сочетания из трех чисел 1, 2, 3 по три: 112, 113, 122, 123, 223. Поэтому при $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ каждый коэффициент $A_r$ будет равен числу соответствующих сочетаний. Следовательно, производящая функция числа всех сочетаний с указанными ограничениями равна

$$(1 + s + s^2)(1 + s + s^2)(1 + s) = (1 + s + s^2)^2(1 + s).$$

Рассмотренные примеры дают представление о том, как написать производящую функцию для числа сочетаний при наличии других ограничений.

Так, производящая функция для числа сочетаний из $n$ предметов с повторениями при условии, что каждый предмет встречается любое число раз, равна

$$(1+s+s^2+\ldots+s^k+\ldots)^n=\frac{1}{(1-s)^n}. \qquad (23)$$

Коэффициент при $s^r$ в разложении функции (23) равен

$$f_n^r=C_{n+r-1}^r$$

(это следует из равенства (10)). Снова получили формулу для числа сочетаний с повторениями.

Производящая функция для числа сочетаний из $n$ предметов по $r$ при условии, что каждый предмет встречается по крайней мере 1 раз, равна

$$(s+s^2+s^3+\ldots)^n=\frac{s^n}{(1-s)^n}.$$

Используя равенство (10), получим

$$\frac{s^n}{(1-s)^n}=s^n\sum_{i=0}^{\infty}C_{n+i-1}^i s^i=\sum_{i=0}^{\infty}C_{n+i-1}^i s^{n+i}.$$

Положив $n+i=r$, будем иметь

$$\frac{s^n}{(1-s)^n}=\sum_{r=n}^{\infty}C_{r-1}^{r-n}s^r=\sum_{r=n}^{\infty}C_{r-1}^{n-1}s^r.$$

Коэффициент при $s^r$ и есть искомое число сочетаний. Следовательно, число сочетаний из $n$ предметов по $r$ при условии, что каждый предмет встречается по крайней мере 1 раз, равно 0, если $r<n$, и равно $C_{r-1}^{n-1}$, если $r\geqslant n$.

Пример 16. Пусть $A_n$ — число целых неотрицательных решений уравнения

$$k_1x_1+k_2x_2+\ldots+k_rx_r=n, \qquad (24)$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_r$ — данные натуральные числа. Обозначим

$$A(s)=\sum_{n=0}^{\infty}A_ns^n.$$

Легко видеть, что

$$A(s)=\frac{1}{(1-s^{k_1})(1-s^{k_2})\ldots(1-s^{k_r})}.$$

Запишем равенства

$$\frac{1}{1-s^{k_1}}=1+s^{k_1}+s^{2k_1}+\ldots,$$

$$\frac{1}{1-s^{k_2}}=1+s^{k_2}+s^{2k_2}+\ldots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{1-s^{k_r}}=1+s^{k_r}+s^{2k_r}+\ldots$$

Если перемножить их почленно, то показатели при степенях $s$ будут иметь вид

$$s^{k_1x_1+k_2x_2+\ldots+k_rx_r},$$

где все $x_i$ получают натуральные значения (такой показатель получится, если в правой части каждого из написанных равенств выбрать соответственно $s^{k_1x_1}, s^{k_2x_2}, \ldots, s^{k_rx_r}$ и перемножить их). Число всех возможных представлений $n$ в выражении (24) как раз и будет коэффициентом при $s^n$ в том разложении, которое получим после перемножения всех равенств.

Рассмотрим следующую теорему о производящих функциях, которая является полезной при решении некоторых задач.

Определение. *Сверткой* двух последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ называется последовательность $\{c_n\}$, общий член которой имеет вид

$$c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_kb_{n-k}+\ldots+a_nb_0. \qquad (25)$$

Теорема. *Производящая функция свертки двух последовательностей равна произведению производящих функций этих последовательностей.*

Доказательство. Пусть $\{c_n\}$ — свертка последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, а

$$A(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ns^n, \quad B(s)=\sum_{n=0}^{\infty}b_ns^n, \quad C(s)=\sum_{n=0}^{\infty}c_ns^n$$

— производящие функции последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ соответственно. Требуется доказать, что

$$C(s)=A(s)\,B(s).$$

Перемножим два ряда

$$A(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ns^n \quad \text{и} \quad B(s)=\sum_{n=0}^{\infty}b_ns^n.$$

Коэффициент при $s^n$ в полученном произведении равен

$$a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_kb_{n-k}+\ldots+a_nb_0.$$

Следовательно,

$$A(s)\,B(s)=C(s).$$

Для иллюстрации теоремы рассмотрим следующий пример.

Пример 17. На окружности взято $2n$ точек. Сколькими способами можно соединить попарно эти точки $n$ хордами, не пересекающимися внутри круга?

Обозначим через $a_n$ число способов, которыми можно разбить на пары $2n$ точек, взятых на окружности, так, чтобы хорды, соединяющие эти пары точек, не пересекались. Обозначим точки буквами в таком порядке, в каком они размещены на окружности: $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$. Точку $A_1$ можно соединить лишь с одной из точек $A_2, A_4, \ldots, A_{2n}$, в противном случае по каждую сторону от хорды, выходящей из $A_1$, будет размещено нечетное число точек и, значит, при попарном соединении точек между собой по крайней мере одна хорда пересечет хорду, выходящую из $A_1$.

Определим, сколько существует различных способов соединения точек, при которых $A_1$ соединена с $A_{2k}$. По одну сторону от $A_1A_{2k}$ размещено $2k-2$ точек; их можно соединить попарно $a_{k-1}$ способами. По другую сторону от $A_1A_{2k}$ размещено $2(n-k)$ точек; их можно соединить попарно $a_{n-k}$ способами. Комбинируя каждый из $a_{k-1}$ способов соединения точек $A_2, \ldots, A_{2k-1}$ с каждым из $a_{n-k}$ способов соединения точек $A_{2k+1}, \ldots, A_{2n}$, получим, что число таких способов попарного соединения, при которых $A_1$ соединено с $A_{2k}$, равно $a_{k-1}a_{n-k}$. Но $k$ может принимать значения $1, 2, \ldots, n$, и поэтому

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}a_1 + \ldots + a_{n-k}a_{k-1} + \ldots + a_1a_{n-2} + a_{n-1}.$$

Возьмем $a_0 = 1$, и пусть

$$A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$$

— производящая функция последовательности $\{a_n\}$. Тогда

$$a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \ldots + a_ka_{n-k} + \ldots + a_{n-1}a_0,$$

где $n \leqslant 1$. Умножим обе части предыдущего равенства на $s^n$ и просуммируем по $n$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n = s \sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1} (a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \ldots + a_{n-1}a_0).$$

Поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n = A(s) - 1,$$

то, применяя теорему о свертке, имеем

$$A(s) - 1 = sA^2(s). \tag{26}$$

Решая квадратное уравнение относительно $A(s)$, получим

$$A(s) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4s}}{2s}. \tag{27}$$

Поскольку $A(0)=1$, так как $a_0=1$, то в формуле (27) нужно выбрать знак минус. Примем во внимание, что

$$\lim_{s\to 0}\frac{1-\sqrt{1-4s}}{2s}=1 \quad \text{и} \quad \lim_{s\to 0}\frac{1+\sqrt{1-4s}}{2s}=\infty.$$

Следовательно, производящая функция последовательности $\{a_n\}$ равна

$$A(s)=\frac{1-\sqrt{1-4s}}{2s}. \tag{28}$$

Теперь остается найти коэффициент при $s^n$ в разложении функции (28). Для этого воспользуемся формулой (7). Согласно (7) будем иметь

$$(1-4s)^{1/2}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}(-1)^k 4^k s^k=$$

$$=1-\sum_{k=1}^{\infty}C_{2k}^{k}\frac{1}{2k-1}s^k. \tag{29}$$

Отсюда, согласно (28),

$$A(s)=\frac{1-\sqrt{1-4s}}{2s}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}C_{2k}^{k}\frac{1}{2k-1}s^{k-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}C_{2n+2}^{n+1}\frac{1}{2n+1}s^n \qquad (\text{где } n=k-1).$$

Следовательно,

$$a_n=\frac{1}{2}C_{2n+2}^{n+1}\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}.$$

## § 11. МЕТОД ВКЛЮЧЕНИЯ И ИСКЛЮЧЕНИЯ

Пусть $N(A)$ — число элементов множества $A$. В § 2 была установлена формула

$$N(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=N(A_1)+\ldots+N(A_n)-$$
$$-\{N(A_1\cap A_2)+N(A_1\cap A_3)+\ldots$$
$$\ldots+N(A_1\cap A_n)+\ldots+N(A_{n-1}\cap A_n)\}+$$
$$+\{N(A_1\cap A_2\cap A_3)+N(A_1\cap A_2\cap A_4)+\ldots$$
$$\ldots+N(A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n)\}-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{n-1}N(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}\cap A_n). \tag{1}$$

Метод подсчета по формуле (1), состоящий в поочередном сложении и вычитании, называется *методом включения и исключения.*

Равенство (1) можно записать в виде

$$N(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \\ = \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant n} N(A_{i_1}) - \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} N(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \\ + \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \ldots \\ \ldots + (-1)^{n-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leqslant n} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_n}),$$

где

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

— сумма всех тех $N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})$, у которых индексы $i_1, \ldots, i_k$ удовлетворяют неравенству

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n.$$

Например,

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 4} N(A_{i_1} \cap A_{i_2}) = N(A_1 \cap A_2) + N(A_1 \cap A_3) + \\ + N(A_1 \cap A_4) + N(A_2 \cap A_3) + N(A_2 \cap A_4) + N(A_3 \cap A_4).$$

Равенство (1) доказано в § 2 с помощью метода математической индукции. Рассмотрим еще одно доказательство этого важного равенства.

Чтобы доказать (1), достаточно доказать, что каждый элемент из $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ учитывается в правой части равенства (1) ровно один раз. Рассмотрим произвольный элемент $a$ из $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ и допустим, что $a$ входит ровно в $m$ множеств $A_i$. Тогда элемент $a$ подсчитывается в правой части (1)

$$C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - \ldots + (-1)^{m-1} C_m^m$$

раз. Но

$$C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - \ldots + (-1)^{m-1} C_m^m = \\ = 1 - [1 - C_m^1 + C_m^2 - \ldots + (-1)^m C_m^m] = \\ = 1 - (1-1)^m = 1.$$

Следовательно, каждый элемент $a$ из $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ учитывается в правой части равенства (1) один раз. Это и доказывает равенство (1).

Пример 1. Рассматриваются все перестановки $n$ чисел $1, 2, \ldots, n$. Пусть $D_n$ — число тех перестановок, в которых по крайней мере одно число стоит на своем месте. Найти $D_n$.

Обозначим через $A_k$ совокупность тех перестановок, в которых на $k$-м месте стоит $k$. Тогда

$$D_n = N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n).$$

Множество $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ содержит те перестановки, в которых на местах $i_1, \ldots, i_k$ стоят числа $i_1, \ldots, i_k$, а на других местах — остальные $n-k$ чисел, упорядоченные произвольно. Поэтому

$$N(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = (n-k)!,$$

а

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} N(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = C_n^k (n-k)! = \frac{n!}{k!}.$$

Из равенства (1) следует, что

$$N(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \\ = n!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\right).$$

Пример 2. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — взаимно простые натуральные числа, а $N$ — некоторое натуральное число. Найти число натуральных чисел, не превышающих $N$ и не делящихся ни на одно из чисел $a_1, \ldots, a_n$.

Пусть $A_i$ — множество натуральных чисел, не превышающих $N$ и делящихся на $a_i$. Тогда количество чисел, делящихся по крайней мере на одно из чисел $a_1, \ldots, a_n$, равно

$$N(A_1 \cup \ldots \cup A_n).$$

Очевидно,

$$N(A_i) = \left[\frac{N}{a_i}\right],$$

где $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее $x$.

Множество $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ — это множество тех чисел, которые делятся на $a_{i_1} \ldots a_{i_k}$.

Поскольку числа $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ взаимно простые, то

$$N(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \left[\frac{N}{a_{i_1} \ldots a_{i_k}}\right].$$

В силу равенства (1) количество чисел, не превышающих $N$ и делящихся по крайней мере на одно из чисел $a_1, \ldots, a_n$, равно

$$N(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \left[\frac{N}{a_i}\right] - \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} \left[\frac{N}{a_{i_1} a_{i_2}}\right] + \\ + \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n} \left[\frac{N}{a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3}}\right] - \ldots + (-1)^{n-1} \left[\frac{N}{a_1 \ldots a_n}\right].$$

Количество чисел, не превышающих $N$ и которые не делятся ни на одно из чисел $a_1, \ldots, a_n$, равно

$$N - N(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \\ = N - \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \left[\frac{N}{a_i}\right] + \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} \left[\frac{N}{a_{i_1} a_{i_2}}\right] - \\ - \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n} \left[\frac{N}{a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3}}\right] + \ldots + (-1)^n \left[\frac{N}{a_1 \ldots a_n}\right]. \quad (2)$$

Пример 3. Пусть $n$ — натуральное число, разложение которого на простые множители имеет вид

$$n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$$

($p_1, \ldots, p_k$ — простые числа), а $\varphi(n)$ — число составных натуральных чисел, не превышающих $n$ и взаимно простых с $n$. Доказать, что

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right),$$

(Функция $\varphi(n)$ называется *функцией Эйлера*.)

Числа, взаимно простые с $n$, не делятся ни на одно из чисел $p_1, \ldots, p_k$. Поэтому в силу (2)

$$\varphi(n) = n - \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant k} \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2}} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^k \frac{n}{p_1 \ldots p_k} =$$
$$= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Рассмотрим теперь еще один способ применения метода включения и исключения.

Теорема. *Пусть $N_{[m]}(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ — число элементов, входящих ровно в $m$ множеств из $A_1, \ldots, A_n$. Тогда*

$$N_{[m]}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) =$$
$$= C_m^m \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n} N(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_m}) -$$
$$- C_{m+1}^m \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{m+1} \leqslant n} N(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_{m+1}}) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-m} C_n^m \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leqslant n} N(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}). \quad (3)$$

Доказательство. Пусть $a$ — произвольный элемент, входящий в $k$ множеств из множеств $A_1, \ldots, A_n$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что элемент $a$ учитывается в правой части равенства (3) один раз, если $k = m$, и не учитывается ни разу, если $k \neq m$. Если $k < m$, то $a$ не учитывается в сумме (3) ни разу; если $k = m$, то $a$ учитывается в (3) один раз, так как $a$ входит лишь в одно из множеств вида $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$. Пусть теперь $k \geqslant m$. Элемент $a$ учитывается $C_k^m$ раз в сумме

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant k} N(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_m}),$$

$C_k^{m+1}$ раз в сумме $\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{m+1} \leqslant k} N(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_{m+1}})$,

и т. д. $C_k^k$ раз в сумме

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant k} N(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

В остальных суммах в правой части (3) элемент $a$ не учитывается, так как он входит лишь в $k$ множеств. Таким образом, $a$ учитывается в (3)

$$C_m^m C_k^m - C_{m+1}^m C_k^{m+1} + C_{m+2}^m C_k^{m+2} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{k-m} C_k^m C_k^k \qquad (4)$$

раз. Остается доказать, что эта сумма равна нулю. Действительно, поскольку

$$C_r^m C_k^r = \frac{r!}{m!\,(r-m)!}\,\frac{k!}{r!\,(k-r)!} = C_k^m C_{k-m}^{k-r},$$

то сумма (4) при $k > m$ равна

$$C_k^m \left(C_{k-m}^{k-m} - C_{k-m}^{k-m-1} + \ldots + (-1)^{k-m} C_{k-m}^0\right) =$$
$$= C_k^m (1-1)^{k-m} = 0.$$

Пример 4. Найти число всех перестановок чисел 1, 2, ..., $n$, в которых $m$ чисел стоят на своих местах.

Пусть $A_i$ — множество тех перестановок, в которых на $i$-м месте стоит $i$. Тогда имеем

$$N_{[m]}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = C_m^m C_n^m (n-m)! -$$
$$- C_{m+1}^m C_n^{m+1} (n-m-1)! + \ldots + (-1)^{n-m} C_n^m C_n^n =$$
$$= \frac{n!}{m!}\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n-m}\frac{1}{(n-m)!}\right] =$$
$$= \frac{n!}{m!}\left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n-m}\frac{1}{(n-m)!}\right].$$

## § 12. МЕТОД ТРАЕКТОРИЙ

Для многих комбинаторных задач можно указать такую геометрическую интерпретацию, которая сводит задачу к подсчету числа путей (траекторий), обладающих определенным свойством. В этом и состоит *метод траекторий*[1]). В § 3 мы пользовались методом

[1]) Термин «метод траекторий» ввел Б. В. Гнеденко. В 1951—1954 гг. Б. В. Гнеденко и его ученики (В. С. Королюк, В. С. Михалевич, Е. Л. Рвачёва (Ющенко)) успешно применяли метод траекторий при решении некоторых важных задач математической статистики.

траекторий при доказательстве некоторых биномиальных тождеств. Преимуществом этого метода является чрезвычайная наглядность.

Задача 1. Возле кассы собралось $m+n$ человек, причем $n$ из них имеют монеты стоимостью 50 коп., а другие $m$ имеют лишь по рублю. Сначала в кассе нет денег, билет стоит 50 коп. Сколько всего имеется способов размещения $m+n$ покупателей в очереди так, чтобы ни один покупатель не ждал сдачи ($m \leqslant n$)?

Допустим, что покупатели расположены в очереди некоторым образом. Пусть

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й покупатель имеет 50 коп.,} \\ -1, & \text{если } i\text{-й покупатель имеет рубль.} \end{cases}$$

Рассмотрим

$$s_k = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_k. \tag{1}$$

Вдумчивый читатель уже заметил, что $s_k$ является разностью между количеством 50-копеечных монет и количеством рублей, которые поданы в кассу первыми $k$ покупателями.

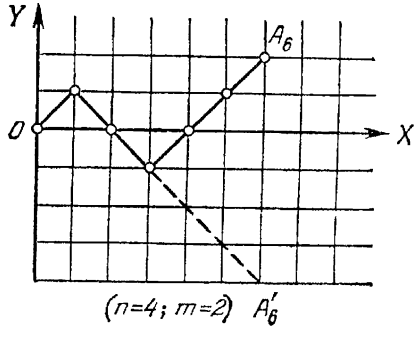


Рис. 8.

Рассмотрим теперь систему координат $XOY$. Построим в ней точки $A_k = (k; s_k)$ $(k = 1, \ldots, m+n)$ и рассмотрим ломаную, соединяющую точку $O = (0; 0)$ с точкой $A_{n+m} = (m+n;\ n-m)$ и проходящую через точки $A_1, \ldots, A_{m+n-1}$ (рис. 8). Будем называть такую ломаную *траекторией*, соответствующей

данному способу размещения покупателей в очереди. Каждая траектория состоит из $m+n$ отрезков, $n$ из которых направлены вверх, а $m$ направлены вниз. Если указать номера тех отрезков, которые направлены вверх, то тем самым траектория будет полностью определена. Следовательно, общее число траекторий равно $C_{n+m}^{n}$.

Траектории, соответствующие тем способам размещения покупателей, при которых ни один покупатель не ждет сдачи, не пересекают прямую $y=-1$. Действительно, если для некоторого $k$ $s_{k-1}=0$, $s_k=-1$, то это означает, что первые $k-1$ покупателей подали в кассу одинаковое количество полтинников и рублей, а $k$-й покупатель подал рубль и вынужден ожидать сдачу.

Определим число траекторий, пересекающих прямую $y=-1$. Поставим в соответствие каждой траектории $T$, пересекающей прямую $y=-1$ или имеющей с ней общую точку, новую траекторию $T'$ по следующему правилу: до первой точки пересечения с прямой $y=-1$ траектория $T'$ совпадает с $T$, а далее $T'$ является симметричным отображением траектории $T$ относительно прямой $y=-1$ (на рис. 8 траектория $T'$ обозначена пунктирной линией). Все траектории $T'$ заканчиваются в точке $A'_{m+n}=(m+n;\ m-n-2)$, являющейся симметричным отображением точки $A_{m+n}$ относительно прямой $y=-1$. Установленное соответствие является взаимно одозначным, поэтому число траекторий, пересекающих прямую $y=-1$, равно числу ломаных, соединяющих точки $O$ и $A'_{m+n}$. Это число легко подсчитать: если ломаная состоит из $y$ отрезков, направленных вниз, и $x$ отрезков, направленных вверх, то

$$x+y=m+n, \quad y-x=n+2-m,$$

откуда $y=n+1$. Таким образом, число траекторий, пересекающих прямую $y=-1$, равно $C_{m+n}^{n+1}$. Искомое число траекторий равно

$$C_{m+n}^{n}-C_{m+n}^{n+1}=C_{m+n}^{m}\frac{n+1-m}{n+1}. \qquad (2)$$

Рассмотренная задача имеет важное значение в математической статистике, в частности в теории ста-

тистического контроля качества продукции. С ней также тесно связана так называемая задача о баллотировании, которую еще в 1887 г. рассматривал известный французский математик Бертран. Недавно стало известно, что эта задача имеет интересные применения при изучении некоторых случайных процессов.

Задача 2. (*Задача о баллотировании.*) Кандидат $A$ собрал на выборах $a$ голосов, кандидат $B$ собрал $b$ голосов ($a > b$). Избиратели голосовали последовательно. Сколько существует таких способов подачи голосов, при которых $A$ всегда будет впереди $B$ по количеству поданных за него голосов?

Пусть $\varepsilon_i = +1$, если $i$-й голос подан за $A$, и $\varepsilon_i = -1$, если $i$-й голос подан за $B$. Возьмем $s_k = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_k$ и рассмотрим в системе координат $XOY$ ломаную, соединяющую точки $O$, $(1; s_1)$, ..., $(k; s_k)$, ..., $(a+b;\ s_{a+b})$ (рис. 9). Очевидно,

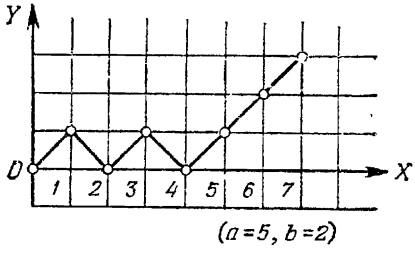


Рис. 9.

$s_{a+b} = a - b$. Каждому способу подачи голосов соответствует определенная ломаная линия (траектория), соединяющая точки $O$ и $(a+b;\ a-b)$. Траектория состоит из $a+b$ отрезков, причем $a$ из них направлены вверх. Поэтому общее число траекторий равно $C_{a+b}^{a}$. Кандидат $A$ всегда будет впереди $B$, если соответствующая траектория проходит через точку $(1; 1)$ (первый голос должен быть подан за $A$) и не пересекает ось $OX$. Число таких траекторий может быть подсчитано по формуле (2), где следует взять $n = a - 1$, $m = b$. Следовательно, искомое число

способов подачи голосов равно

$$C_{a+b-1}^{a-1}\frac{a-1+1-b}{a-1+1}=\frac{a-b}{a+b}C_{a+b}^{a}. \qquad (3)$$

Рассмотренные задачи показывают, насколько полезной может быть интерпретация задачи в терминах траекторий. Рассмотрим теперь некоторые общие утверждения, касающиеся подсчета числа траекторий.

Пусть $x>0$ и $y$ — целые числа. *Траекторией* из начала координат в точку $(x; y)$ будем называть ломаную, соединяющую точки $O$, $(1; s_1)$, ..., $(k; s_k)$, ... ..., $(x; s_x)$, где

$$s_i-s_{i-1}=\varepsilon_i=\begin{cases}+1,\\-1,\end{cases}\quad s_x=y. \qquad (4)$$

Пусть $N_{x,y}$ — число всех траекторий, соединяющих точку $(0; 0)$ с точкой $(x; y)$. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1.

$$N_{x,y}=\frac{x!}{\left(\frac{x+y}{2}\right)!\left(\frac{x-y}{2}\right)!},$$

*если числа $x$ и $y$ — одинаковой четности, и*

$$N_{x,y}=0,$$

*если $x$ и $y$ — разной четности.*

Доказательство. Допустим, что траектория состоит из $p$ отрезков, направленных вверх, и $q$ отрезков, направленных вниз (это означает, что среди чисел $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_x$ $p$ чисел равны $+1$, а $q$ чисел равны $-1$). Тогда

$$p+q=x,\quad p-q=y,$$

откуда

$$p=\frac{x+y}{2},\quad q=\frac{x-y}{2}$$

(поскольку $p$ и $q$ — целые числа, $x$ и $y$ должны быть числами одинаковой четности). Так как траектория

полностью определяется, если указать, какие отрезки направлены вверх, общее число траекторий из точки $O$ в точку $(x; y)$ равно

$$N_{x,\,y} = C_x^{(x+y)/2} = \frac{x!}{\left(\frac{x+y}{2}\right)!\left(\frac{x-y}{2}\right)!}.$$

Теорема 2. (*Принцип зеркального отображения.*) *Пусть* $A = (a; \alpha)$, $B = (b; \beta)$ — *точки с целочисленными координатами, причем* $b > a \geqslant 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, *а* $A' = (a; -\alpha)$ — *точка, симметричная* $A$ *относительно оси* $OX$. *Тогда число тех траекторий из* $A$ *в* $B$, *которые пересекают ось* $OX$ *или имеют с ней общую точку, равно числу траекторий из* $A'$ *в* $B$.

Доказательство. Каждой траектории $T$ из $A$ в $B$, пересекающей ось $OX$ или имеющей с ней общую точку, поставим в соответствие траекторию из $A'$ в $B$ по следующему правилу (рис. 10): берем участок

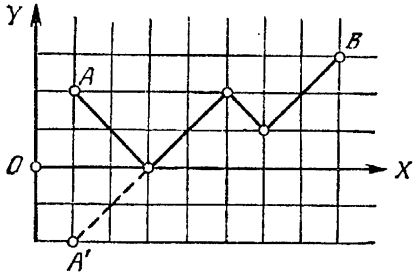


Рис. 10.

траектории $T$ до первой точки встречи с осью $OX$ и симметрично отображаем его относительно оси $OX$, а далее траектории $T$ и $T'$ совпадают. Таким образом, каждой траектории $T$ из $A$ в $B$, пересекающей ось $OX$, соответствует определенная траектория $T'$ из $A'$ в $B$. Наоборот, каждой траектории из $A'$ в $B$ соответствует одна и только одна траектория из $A$ в $B$, пересекающая ось $OX$ (берем участок траектории из $A'$ в $B$ до первой встречи с осью $OX$ и симметрично отображаем его относительно оси $OX$). Следовательно, между множеством траекторий из $A$ в $B$, пересекающих ось $OX$ или имеющих с ней общую точку, и

множеством всех траекторий из $A'$ в $B$ установлено взаимно однозначное соответствие. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $x > 0$, $y > 0$. Тогда число траекторий из $O$ в $(x; y)$, не имеющих вершин на оси $OX$ (кроме точки $O$), равно*

$$\frac{y}{x} N_{x,\,y}.$$

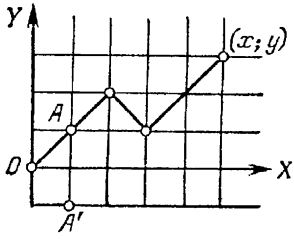

Рис. 11.

Доказательство. Все траектории, соединяющие точку $O$ с точкой $(x; y)$ и не пересекающие ось $OX$, проходят через точку $A = (1; 1)$ (рис. 11). Общее число траекторий, ведущих из $A$ в $B$, равно $N_{x-1,\,y-1}$. Общее число траекторий, ведущих из $A$ в $B$ и пересекающих ось $OX$, равно, согласно теореме 2, числу траекторий, ведущих из $A'$ в $B$, т. е. $N_{x-1,\,y+1}$. Следовательно, искомое число траекторий равно

$$N_{x-1,\,y-1} - N_{x-1,\,y+1} =$$

$$= \frac{(x-1)!}{\left(\frac{x+y}{2}-1\right)!\left(\frac{x-y}{2}\right)!} - \frac{(x-1)!}{\left(\frac{x+y}{2}\right)!\left(\frac{x-y}{2}-1\right)!} =$$

$$= \frac{y}{x}\,\frac{x!}{\left(\frac{x+y}{2}\right)!\left(\frac{x-y}{2}\right)!} = \frac{y}{x} N_{x,\,y}.$$

Теорема доказана.

Установим теперь несколько свойств траекторий, соединяющих точку $O$ с точкой $(2n; 0)$ на оси $OX$. Пусть

$$L_{2n} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}.$$

Теорема 4. *Среди $C_{2n}^{n}$ траекторий, соединяющих точку $O$ с точкой $(2n; 0)$, существует*

а) *ровно $L_{2n-2}$ траекторий, лежащих выше оси $OX$ и не имеющих общих точек с $OX$, кроме точек $O$ и $(2n; 0)$;*

б) *ровно $L_{2n}$ траекторий, не имеющих вершин ниже оси $OX$.*

Доказательство. а) Все траектории, соединяющие $O$ с $(2n; 0)$, лежащие выше оси $OX$ и не имеющие других общих точек с осью $OX$, обязательно проходят через точку $(2n-1, 1)$. Согласно теореме 3 число траекторий, соединяющих $O$ с $(2n-1; 1)$ и не пересекающих ось $OX$, равно

$$\frac{1}{2n-1} N_{2n-1,\,1} = \frac{1}{2n-1} C_{2n-1}^{n} = \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1} = L_{2n-2}.$$

б) Рассмотрим траекторию, соединяющую $O$ с $M(2n; 0)$ и не имеющую вершин ниже оси $OX$ (рис. 12). Добавим еще один отрезок, соединяющий $O$ с $O_1(-1; -1)$. Примем $O_1$ за новое начало системы координат $X_1O_1Y_1$. В новой системе точка $M$ имеет координаты $(2n+1; 1)$, а точка $O$ — координаты $(1; 1)$. Число траекторий, соединяющих точку $O$ с точкой $M$ и не имеющих вершин ниже оси $OX$, равно числу траекторий, соединяющих $O_1$ с $M$ и лежащих выше оси $O_1X_1$. Последнее число в силу теоремы 3 равно

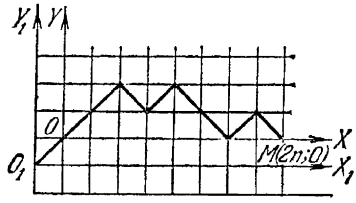

Рис. 12.

$$\frac{1}{2n+1} \cdot N_{2n+1,\,1} = \frac{1}{2n+1} C_{2n+1}^{n} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n} = L_{2n}.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим пример применения доказанных выше теорем.

Задача 3. Решим задачу, рассмотренную выше (задача 1), допуская, что перед началом работы в кассе имеется $p$ монет стоимостью 50 коп.

Очевидно, задача сводится к подсчету числа траекторий из точки $O$ в точку $(m+n; n-m)$, не пересекающих прямую $y = -(p+1)$. Согласно теореме 2 число тех траекторий, которые пересекают эту прямую, равно числу траекторий из точки $(0; -2(p+1))$

в точку $(n+m;\ n-m)$, т. е. $C_{m+n}^{p+n+1}=C_{m+n}^{m-p-1}$. Искомое число траекторий равно

$$C_{m+n}^{m}-C_{m+n}^{m-p-1}.$$

## УПРАЖНЕНИЯ К § 9—12

**1.** На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость $n$ прямых?

**2.** На какое наибольшее число частей могут разделить пространство $n$ плоскостей?

**3.** На какое наибольшее число частей могут разделить пространство $n$ сфер?

**4.** Сколькими способами $r$ различных предметов можно разместить в $n$ ящиках?

**5.** Сколькими способами $r$ пассажиров могут разместиться в $n$ вагонах поезда?

**6.** Пусть $A(r, n)$ число таких способов размещения $r$ различных предметов в $n$ ящиках ($A(r, n)=0$, если $r<n$), при которых нет пустых ящиков. Доказать, что

$$A(r,\ n+1)=\sum_{k=1}^{r} C_r^k A(r-k,\ n).$$

Как следствие установить, что

$$A(r,\ n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i (n-i)^r.$$

**7.** Доказать, что число способов размещения $r$ различных предметов в $n$ ящиках, при которых ровно $m$ ящиков пустые, равно

$$C_n^m A(r,\ n-m)=C_n^m \sum_{i=0}^{n-m}(-1)^i C_{n-m}^i (n-m-i)^r.$$

**8.** Сколько существует способов размещения $r$ пассажиров в $n$ вагонах поезда, при которых ровно $m$ вагонов будут свободны?

**9.** Используя результат задачи 6, вычислить сумму

$$1^k C_n^1-2^k C_n^2+3^k C_n^3-\ \ldots\ +(-1)^{n-1} n^k C_n^n.$$

Вычислить производящие функции последовательностей:

**10.**
$$a_n=\begin{cases}1 & \text{при} \quad 0\leqslant n\leqslant N,\\ 0 & \text{при} \quad n>N.\end{cases}$$

**11.**
$$a_n=\begin{cases}q^n & \text{при} \quad 0\leqslant n\leqslant N,\\ 0 & \text{при} \quad n>N.\end{cases}$$

Производящая функция последовательности $\{a_n\}$ равна $A(s)$. Вычислить производящие функции последовательностей:

12. $b_n = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n < r, \\ a_{n-r} & \text{при} \quad n \geqslant r. \end{cases}$

13. $b_n = ca_n$.

14. $b_n = a_n + b$.

15. $b_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0$.

16. $b_n = a_n + a_{n-1}a + a_{n-2}a^2 + \ldots + a_0a^n$.

17. $b_n = a_{2n}$.

18. Сколькими способами выпуклый $n$-угольник можно разбить на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри $n$-угольника?

19. Вычислить а) $\varphi(100)$; б) $\varphi(1000)$; б) $\varphi(p)$, где $p$ — простое число.

20. Каждый читатель библиотеки прочитал по крайней мере одну книгу из этой библиотеки. О любых $k$ книгах из библиотеки ($1 \leqslant k \leqslant n$, $n$ — число книг в библиотеке) можно сказать, сколько читателей прочитали все эти книги. Как по этим данным установить, сколько читателей в библиотеке?

21. Используя метод включения и исключения, найти число способов размещения $r$ различных предметов в $n$ ящиках, при которых нет пустых ящиков.

22. Используя метод включения и исключения, найти число способов размещения $r$ различных предметов в $n$ ящиках, при которых ровно $m$ ящиков являются пустыми.

23. Пусть $N_m(A_1, \ldots, A_n)$ — число тех элементов, которые входят по крайней мере в $m$ из множеств $A_1, \ldots, A_n$. Доказать, что

$$N_m(A_1 \ldots A_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n} N(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_m}) -$$

$$- C_m^{m-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{m+1} \leqslant n} N(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_{m+1}}) +$$

$$+ C_{m+1}^{m-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{m+2} \leqslant n} N(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_{m+2}}) - \ldots$$

$$\ldots (-1)^{n-m} C_{n-1}^{m-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leqslant n} N(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}).$$

24. Найти число способов размещения 8 ладей на шахматной доске так, чтобы они не могли бить друг друга и чтобы ни одна из них не стояла на белой главной диагонали.

25. Будем называть траекторией из точки (0; 0) в точку $(x; y)$ ломаную, соединяющую точки $(0; 0)$, $(1; s_1)$, ..., $(k; s_k)$, где

$$s_i - s_{i-1} = \begin{cases} 0, \\ 1 \\ -1 \end{cases} \qquad s_x = y.$$

Пусть $T_{x,y}$ — число траекторий из $(0;\ 0)$ в $(x;\ y)$. Доказать, что

а)

$$T_{x,y} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{x-|y|}{2}\right]} \frac{x!}{\left(\frac{y+|y|}{2}+k\right)!\left(\frac{|y|-y}{2}+k\right)!\,(x-|y|-2k)!}.$$

б) Пусть $A=(a;\ \alpha)$, $B=(b;\ \beta)$ — точки с целочисленными координатами, причем $b>a\geqslant 0$, $\alpha>0$, $\beta>0$, а $A'=(a;\ -\alpha)$ — точка, симметричная $A$ относительно оси $OX$. Доказать, что число траекторий из $A$ в $B$ равно числу траекторий из $A'$ в $B$.

в) Пусть $x>0$, $y>0$. Доказать, что число всех траекторий из $(0;\ 0)$ в $(x;\ y)$, не имеющих вершин на оси $OX$, равно

$$T_{x-1,\,y-1}-T_{x-1,\,y+1}.$$

г) Доказать, что среди $T_{n,0}$ траекторий, соединяющих $(0;\ 0)$ с $(n;\ 0)$, существует:

1) ровно $L_{n-1}=T_{n-2,0}-T_{n-2,2}$ траекторий, не имеющих вершин на оси $OX$, кроме крайних точек $(0;\ 0)$ и $(n;\ 0)$;

2) ровно $L_{n+1}=T_{n,0}-T_{n,2}$ траекторий, не пересекающих ось $OX$.

26. а) Доказать, что среди любых шести лиц найдется или трое знакомых или трое незнакомых.

б) Если 17 ученых переписываются друг с другом по трем различным научным темам, причем каждая пара ученых ведет переписку лишь по одной теме, то всегда найдутся трое ученых, переписывающихся по одной и той же теме. Доказать это.

в) Пусть $a_n$ — последовательность натуральных чисел, образованная по следующему закону:

$$a_1=2 \qquad a_{n+1}=(n+1)\,a_n+1.$$

Предположим, что имеется $a_n+1$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Каждые две точки соединены отрезком одного из $n$ цветов. Доказать, что существует треугольник с вершинами в данных точках, стороны которого имеют один и тот же цвет.

г) Доказать, что

$$a_n\leqslant[e\cdot n!],$$

где $e$ — основание натуральных логарифмов.

27. Рассмотрим на плоскости множество точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой; соединим каждые две точки отрезком одного из цветов — красного или черного. Пусть $l(k,m)$ — наименьшее натуральное число такое, что среди любых $l(k,m)$ точек найдется или $k$ точек, соединенных красными отрезками, или $m$ точек, соединенных черными отрезками. Доказать, что:

а) $l(k,\ m)\leqslant l(k-1,\ m)+l(k,\ m-1)$;

б) $l(k,\ m)\leqslant C_{k+m-2}^{k-1}$.

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## § 1

**1.** 49; 42. **5.** $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151\,200$. **6.** 18 000. **7.** а) $mn$; б) $(m+1)(n+1)$. **8.** 20. **9.** $5^5$. **10.** 1080. **11.** 60. **12.** 900. **17.** б) $(\alpha_1+1) \ldots (\alpha_n+1)$. **18.** 40. **19.** 60.

**20.** Все таблицы, имеющие указанное в условии задачи свойство, можно составить так. Всюду, кроме последней строки и последнего столбца, произвольно выписываем $+1$ и $-1$. Это можно сделать $2^{(m-1)(n-1)}$ способами. Пусть $p$ — произведение всех выписанных чисел. Теперь в каждой из первых $m-1$ строк на пересечении с $n$-м столбцом выписываем $+1$ или $-1$ так, чтобы произведение чисел во всей строке было равно 1. Обозначим произведение чисел, которые будут выписаны в $n$-м столбце, через $x$. Теперь в каждом из первых $n-1$ столбцов на пересечении с $m$-й строкой выпишем также $+1$ или $-1$ так, чтобы произведение в столбце было равно 1. Произведение чисел, которые будут выписаны в $m$-й строке, обозначим через $y$. Заметим, что $x$ и $y$ имеют одинаковые знаки. Действительно, $px = 1$, $py = 1$, и поэтому $p^2xy = 1$, и, значит, $xy > 0$. Выпишем на пересечении $m$-й строки и $n$-го столбца число 1 с тем же знаком, который имеют $x$ и $y$. Составили таблицу, имеющую указанное свойство. Число всех таких таблиц равно $2^{(n-1)(m-1)}$.

## § 2

**5.** 40. **6.** 6; 14. **7.** 20.

## § 3

**3.** $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

**4.** а) $C_n^2$. б) $C_n^3$. в) Будем проводить прямые последовательно одну за другой. Заметим, что если проводить $k$-ю прямую, то общее количество частей плоскости увеличится на $(k-1)+1$, где $k-1$ — количество точек пересечения этой прямой с ранее проведенными прямыми. Отсюда следует, что если провести все $n$ прямых, то общее количество частей плоскости увеличится на количество всех точек пересечения $\left(\text{их будет } C_n^2\right)$ плюс количество самих прямых. Вначале была одна часть (вся плоскость). Поэтому после проведения $n$ прямых получим

$1 + C_n^2 + n = (n^2 + n + 2)/2$ частей. г) Представим себе, что мы построили окружность, охватывающую все ограниченные части плоскости. Из этой окружности будет выходить $2n$ лучей, которые разделят внешность окружности на $2n$ частей. Таким образом, количество неограниченных частей равно $2n$. Следовательно, ограниченных частей будет $1 + C_n^2 - n = (n^2 - 3n + 2)/2$.

5. $C_9^4 = 126$. 6. $C_{10}^4 = 210$.

7. Какие бы $m - 1$ членов комиссии ни собрались, должен найтись замок, который они не могут открыть, но ключ от этого замка имеется у каждого из остальных $n - m + 1$ членов комиссии (появление кого-нибудь из которых дает возможность открыть сейф). Поэтому число замков равно $C_n^{m-1}$, а число ключей равно $(n - m + 1) C_n^{m-1}$.

9. Если не проведено ни одной диагонали, имеем одну часть. Будем последовательно проводить диагонали. Заметим, что после проведения каждой диагонали число частей увеличивается на единицу плюс количество точек пересечения с теми диагоналями, которые уже проведены. Поэтому число частей, которые получаются после проведения всех диагоналей, равно 1 плюс число точек пересечения плюс число всех диагоналей. Если никакие 3 диагонали не пересекаются в одной точке, число точек пересечения равно $C_n^4$ (см. задачу 4 в § 3). Число диагоналей равно $n(n-3)/2$, следовательно,

$$1 + C_n^4 + \frac{n(n-3)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)(n^2 - 3n + 12)}{24}.$$

## § 8

1. Воспользоваться формулой $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

2. Имеем $\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} = \frac{n-k}{k+1}$; поэтому при $\frac{n-k}{k+1} > 1$ имеем $C_n^{k+1} > C_n^k$, а при $\frac{n-k}{k+1} < 1$ имеем $C_n^{k+1} < C_n^k$. Из первого условия имеем $k < \frac{n-1}{2}$, а из второго $k > \frac{n-1}{2}$. Таким образом, биномиальные коэффициенты сначала возрастают, а затем убывают. Если $n$ — нечетное число ($n = 2m + 1$), то наибольших биномиальных коэффициентов два: $C_{2m+1}^m = C_{2m+1}^{m+1}$. Если же $n$ — четное ($n = 2m$), то наибольшим будет коэффициент $C_{2m}^m$.

3. $n = 17$. 4. 26. 6. 210. 7. $\frac{n!}{k!\,r!\,(n-k-r)!}$.

8. Коэффициент при $x^{17}$ равен $\frac{n!}{1!\,2!\,(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$, так как $17 = 5 + 5 + 7$. Коэффициент при $x^{18}$ равен нулю.

9. Надо воспользоваться соображениями, аналогичными тем, которые использованы при доказательстве равенства (2) в п. 3.1.

11. Положить в равенстве (3) (п. 8.2) $a_1 = \ldots = a_k = 1$.

**12.** Пусть $1 \leqslant k \leqslant p-1$. Имеем

$$C_p^k = \frac{p(p-1)\ \ldots\ (p-k+1)}{k!}.$$

Поскольку $p$ — простое число, $p$ не делится на $k!$. Поэтому $(p-1)\ \ldots\ (p-k+1)$ делится на $k!$, а значит, $C_p^k$ делится на $p$.

**13.** При $a=1$ теорема справедлива. Допустим, что $a^p-a$ делится на $p$, и докажем, что тогда $(a+1)^p-(a+1)$ делится на $p$. Действительно,

$$(a+1)^p-(a+1) = \\ = (a^p-a)+C_p^1a^{p-1}+C_p^2a^{p-2}+\ \ldots\ +C_p^{p-2}a^2+C_p^{p-1}a$$

делится на $p$, поскольку $a^p-a$ делится на $p$ по предположению, а $C_p^k\,(1 \leqslant k \leqslant p-1)$ делится на $p$ (см. задачу 12).

**14.** Применив формулу бинома Ньютона, найдем, что $(2+\sqrt{5})^p+(2-\sqrt{5})^p$ — целое число. Поскольку $-1 < (2-\sqrt{5})^p < 0$ (так как $p$ — нечетное), то

$$[(2+\sqrt{5})^p] = (2+\sqrt{5})^p+(2-\sqrt{5})^p = \\ = 2\left(2^p+C_p^2 2^{p-2}5+C_p^4 2^{p-4}5^2+\ \ldots\ +C_p^{p-1}2\cdot 5^{\frac{p-1}{2}}\right).$$

Из этого равенства, используя задачу 12, найдем, что $[(2+\sqrt{5})^p]-2^{p+1}$ делится на $p$.

**15.** Использовать равенство $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ и метод математической индукции.

**16.** Поскольку

$$\frac{n+1}{k+1}C_n^k = C_{n+1}^{k+1},$$

то

$$C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\ \ldots\ +\frac{1}{n+1}C_n^n = \\ = \frac{1}{n+1}\left(C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+\ \ldots\ +C_{n+1}^{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right).$$

**17.** Использовать равенство $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

**18.** Использовать равенство $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

**19.** Рассмотреть $(1-1)^n$.

**20.** Рассмотрим все $k$-элементные подмножества множества $\{1, \ldots, n\}$. Разобьем их на классы $T_{k-1}, T_k, \ldots, T_{n-1}$, отнеся к классу $T_m$ те подмножества, для которых максимальная разность двух элементов равна $m$. Будем считать, что элементы всех рассматриваемых подмножеств упорядочены согласно их величине. Каждое подмножество, входящее в $T_m$, начинается с некото-

рого $i$ ($i = 1, \ldots, n-m$), а заканчивается $i+m$, остальные $k-2$ элемента выбираются произвольно из чисел $i+1, \ldots$ $\ldots, i+m-1$ (это можно сделать $C_{m-1}^{k-2}$ способами). Следовательно, $T_m$ состоит из $(n-m)\,C_{m-1}^{k-2}$ подмножеств. Поэтому

$$C_n^k = \sum_{m=k-1}^{n-1} (n-m)\,C_{m-1}^{k-2}.$$

**21.** Все упорядоченные $k$-элементные подмножества множества $\{1, \ldots, n\}$ разбить на классы $T_{k-2}, \ldots, T_{n-2}$, отнеся к классу $T_m$ те подмножества, у которых разность между предпоследним и первым элементами равна $m$. Подсчитать число элементов $T_m$ (см. решение задачи 20).

**22.** Рассмотреть коэффициент при $x^k$ в сумме

$$(1+x)^n + \ldots + (1+x)^{n+m}.$$

**23.** Пусть $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m$ — корни уравнения $x^m - 1 = 0$. Рассмотрим сумму

$$\varepsilon_1^{-r}(1+\varepsilon_1)^n + \ldots + \varepsilon_m^{-r}(1+\varepsilon_m)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_n^k \left(\varepsilon_1^{k-r} + \ldots + \varepsilon_m^{k-r}\right).$$

Поскольку

$$\varepsilon_1^{k-r} + \ldots + \varepsilon_m^{k-r} = \begin{cases} m & \text{если } k-r \text{ делится на } m, \\ 0 & \text{если } k-r \text{ не делится на } m \end{cases}$$

то

$$m\left(C_n^r + C_n^{r+m} + C_n^{r+2m} + \ldots\right) = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k^{-r}(1+\varepsilon_k)^n.$$

Подставив вместо $\varepsilon_k$ его значение

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{m} + i\sin\frac{2\pi k}{m}$$

и проделав вычисления получим

$$C_n^r + C_n^{r+m} + C_n^{r+2m} + \ldots = \frac{2^n}{m}\sum_{k=1}^{m} \cos^n\frac{k\pi}{m}\cos\frac{(n-2r)\,k\pi}{m}.$$

**24.** $(-1)^m C_{n-1}^m$ при $m \leqslant n-1$; 0 при $m = n$

**25.** 1 при $n = 3k$; 0 при $n = 3k+1$; $-1$ при $n = 3k-1$

**26.** Вычислить коэффициент при $x^n$ в обеих частях равенства

$$(1-x)^n(1+x)^n = (1-x^2)^n$$

**27.** $2^{n-1}$. Указание. Рассмотреть $(1+1)^n$ и $(1-1)^n$.

**28.** $2^{n-1}$. Указание. Рассмотреть $(1+1)^n$ и $(1-1)^n$. Можно воспользоваться задачей 27.

29. $2^{n-2}+2^{(n-2)/2}\cos\frac{n\pi}{4}$.

30. $2^{n-2}-2^{(n-2)/2}\cos\frac{n\pi}{4}$.

31. $\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right)$.

36. Табель успеваемости каждого ученика состоит из $2n$ граф, причем в каждой графе стоит 4 или 5. По условию задачи каждый ученик имеет одно и то же число $k$ пятерок. Поскольку двух учеников с одинаковым табелем не существует, то число учеников не превышает $C_{2n}^k \leqslant C_{2n}^n$.

39. К каждой из $i_1!$ перестановок элементов множества $A_1$ присоединим любую из $(n-i_1)!$ перестановок элементов, не входящих в $A_1$. Проделаем то же самое для каждого из множеств $A_2, \ldots, A_k$. Тогда получим

$$i_1!\,(n-i_1)!+i_2!\,(n-i_2)!+\ldots+i_k!\,(n-i_k)!$$

перестановок элементов множества $\Omega$. Все эти перестановки различны, так как $A_1, \ldots, A_k$ — коллекция Шпернера. Поэтому

$$i_1!\,(n-i_1)!+i_2!\,(n-i_2)!+\ldots+i_k!\,(n-i_k)!\leqslant n!$$

Разделив обе части этого неравенства на $n!$, получим утверждение задачи.

40. Так как $C_n^{i_k}\leqslant C_n^{[n/2]}$, то

$$\frac{k}{C_n^{[n/2]}}\leqslant\frac{1}{C_n^{i_1}}+\ldots+\frac{1}{C_n^{i_k}}\leqslant 1,$$

откуда

$$k\leqslant C_n^{[n/2]}.$$

## § 9—12

18. Пусть $a_n$ — искомое число способов. $A(s)$ — производящая функция $\{a_n\}$. Написать рекуррентные соотношения для $a_n$ и доказать, что $A^2(s)-sA(s)+s^3=0$, откуда $A(s)=\frac{s-\sqrt{s^2-4s^3}}{2}$. Используя разложение (7) из § 10, получим

$$a_n=\frac{1}{2n-3}C_{2n-3}^{n-2}.$$

26. в) Проведем доказательство методом математической индукции. Для $n=2$ теорема верна ($a_{2+1}=6$). Предположим, что теорема верна для $n=k$, т. е. среди любых $a_k+1$ точек каждые две из которых соединены отрезком одного из $k$ цветов, найдутся 3 точки, являющиеся вершинами одноцветного треугольника.

Пусть теперь есть $a_{k+1}+1$ точек и каждые две точки соединены отрезком одного из $k+1$ цветов. Рассмотрим одну из этих точек и обозначим ее через $A$. Из точки $A$ выходит $a_{k+1}=(k+1)a_k+1$ отрезков, каждый из которых окрашен одним из $k+1$ цветов. Среди этих отрезков обязательно найдется $a_k+1$ отрезков одного цвета (будем называть этот цвет для определенности красным). Выделим $a_k+1$ точек, соединенных с $A$ отрезками красного цвета. Если среди этих точек найдутся две, соединенные красным отрезком, то вместе с точкой $A$ они образуют искомый треугольник. Если же среди выделенных $a_k+1$ точек никакие две не соединены красным отрезком, то мы имеем $a_k+1$ точек, каждые две из которых соединены отрезком одного из $k$ цветов. В силу предположения индукции среди них найдутся 3 точки, являющиеся вершинами одноцветного треугольника, что и требовалось.

## ЛИТЕРАТУРА

Более подробное изложение некоторых вопросов комбинаторики учащийся сможет найти в следующих книгах:


1. Н. Я. Виленкин, Комбинаторика, М., «Наука», 1969.
2. Дж. Карлбертсон, Математика и логика цифровых устройств, М., «Просвещение», 1965.
3. Н. Я. Виленкин, Популярная комбинаторика, М., «Наука», 1975.
4. Дж. Кемени, Дж. Снелл, Дж. Томпсон, Введение в конечную математику, М., ИЛ, 1963.
5. Ф. Мостеллер, Р. Рурке, Дж. Томас, Вероятность, М., «Мир», 1969.
6. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей, т. I, М., «Мир», 1964.
7. Л. Я. Савельев, Комбинаторика и вероятность, Новосибирск, «Наука», 1975.


Много интересных комбинаторных задач вы найдете в книге:


8. А. М. Яглом, И. М. Яглом, Неэлементарные задачи в элементарном изложении, М., Гостехиздат, 1954.


Любознательный и настойчивый учащийся может ознакомиться с современным состоянием комбинаторики, изучая следующие монографии:


9. Г. Райзер, Комбинаторная математика, М., «Мир», 1966.
10. М. Холл, Комбинаторика, М., «Мир», 1970.
11. Дж. Риордан, Введение в комбинаторный анализ, М., ИЛ, 1963.

Цена 12 коп