БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА
МАТЕМАТИКА

Ф. ФАМ

Введение в топологическое исследование особенностей Ландау

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Directeur H. Villat

Fascicule CLXIV

INTRODUCTION A L'ÉTUDE TOPOLOGIQUE DES SINGULARITÉS DE LANDAU

F. PHAM

Centre d'Études Nucléaires de Saclay,
Service de Physique théorique

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ÉDITEUR
1967

БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА «МАТЕМАТИКА»

Ф. ФАМ

ВВЕДЕНИЕ В ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ЛАНДАУ

Перевод с французского
М. В. ЯКОБСОНА

Под редакцией
В. И. АРНОЛЬДА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА 1970

УДК 513.83 : 530.1

Книга представляет собой обзор исследований по ветвлению функций, определенных кратными ннтегралами. В последние годы эта задача привлекла внимание физиков и математиков в связи с нзучением особенностей интегралов Фейнмана в теорин возмущений.

Изложение четкое и систематическое. Все теоремы, определения и аксиомы точно формулируются.

Благодаря такому характеру изложения книга доступна и студентам младших курсов. Поскольку она рассчитана не только на математиков, но и на физиков, у читателя не предполагается почти никаких предварительных знаний, выходящнх за рамки курса анализа. Первую часть кннгн можно использовать как учебное пособие.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. 2-2-3
29-69

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга Фама — это обзор исследований по ветвлению функций, определенных кратными интегралами. Она содержит также ясное изложение необходимого топологического аппарата, доступное как математикам, так и физикам.

Интерес физиков к ветвлению интегралов связан с изучением особенностей интегралов Фейнмана в теории возмущений. Математическая задача состоит в следующем. Рассматривается интеграл алгебраической дифференциальной формы, алгебраически зависящей от параметров, по циклу алгебраического многообразия. Значение интеграла аналитически зависит от параметров вне некоторого подмногообразия комплексного пространства параметров, называемого многообразием Ландау. Исследование характера особенности вблизи многообразия Ландау сводится к изучению действия фундаментальной группы дополнения к многообразию Ландау в комплексном пространстве параметров на гомологии многообразия, по циклам которого проводится интегрирование.

В простейшей ситуации вопрос решается формулой Пикара — Лефшеца и теорией вычетов Лере; для определения фундаментальной группы следовало бы воспользоваться результатами Зарисского[1]).

---

[1]) Формулы Зарисского [1*] были применены к фейнмановским интегралам Понцано и Редже [1*].

Вычисления, проведенные французскими физиками, оказались полезными и в чисто математических исследованиях. Так, Брискорн [1*] вывел из результатов Фама, что 28 многообразий

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^3+z_5^{6k-1}=0, \qquad |z_1|^2+\ldots+|z_5|^2=1,$$
$$k=1, \ldots, 28,$$

представляют 28 дифференцируемых структур Милнора на семимерной сфере.

Книга Фама рассчитана на математиков, не знакомых с фейнмановскими интегралами, и на физиков, не знакомых с топологией. Автор не предполагает у читателя предварительных знаний, выходящих за рамки курса анализа. Значительную часть книги можно использовать как учебник по топологии, ориентированный на аналитические приложения.

В. Арнольд

ВВЕДЕНИЕ

В этой книге изложены результаты, полученные Д. Фотиади, М. Фруассаром, Ж. Ласку и автором и опубликованные в двух статьях[1]). Результаты этих статей здесь воспроизведены и дополнены, причем часть доказательств опущена. Я старался написать связную книгу, понятную для читателя-нематематика, поэтому большое место отведено напоминанию известных математических понятий (этому, например, почти целиком посвящены первые две главы). Однако предполагается, что читатель знаком с элементарными понятиями общей топологии[2]).

Эта работа возникла в связи с важной главой в физике элементарных взаимодействий — проблемой особенностей Ландау. Статья Л. Д. Ландау [1] вызвала большой поток работ. Обнаружилось два примечательных обстоятельства: некоторые из полученных результатов весьма элегантны (такие, как правила Куткоски [1]), носят весьма общий характер и фактически выходят за рамки теории возмущений (что, впрочем, Ландау и предсказывал), другие же выявляют необычайную сложность вопроса, причем создается впечатление, что более глубокое его изучение может привести лишь к новым «патологиям».

Мы увидим, что систематическое изучение задачи можно вести в весьма широких математических рамках, так что «хорошие» результаты перестают быть

---

[1]) Фам [1] и Фотиади, Фруассар, Ласку, Фам [1].

[2]) Их можно найти, например, в начале маленькой книги Уоллеса [1]. (См. также Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, Физматгиз, М., 1958. — *Прим. ред.*)

таинственными, а «плохие» — патологическими. Общая проблема сводится к исследованию аналитических свойств функций, заданных кратными интегралами; можно рассматривать интегрирование по всему евклидову пространству (как в случае интегралов Фейнмана в теории возмущений) или по подмногообразию евклидова пространства (как в случае интегралов унитарности). При этом интегрируется аналитическая функция, аналитически зависящая от внешних комплексных параметров. Комплексифицируя многообразие, по которому ведется интегрирование, мы предположим, что особенности подинтегральной функции образуют *аналитическое подмножество* комплексного многообразия всех параметров (как внутренних, так и внешних). Это аналитическое подмножество естественным образом проектируется на многообразие внешних параметров, и можно рассмотреть его *видимый контур*. В главе IV мы покажем, используя теорему изотопии Тома, что интеграл является аналитической функцией всюду, кроме точек этого контура, называемого *особенностью Ландау* данного интеграла.

Уже на этом этапе можно объяснить патологии, наблюдаемые физиками: известно, например, что на плоскости кривые видимого контура имеют в случае общего положения точки возврата; в трехмерном пространстве у поверхностей видимого контура, кроме ребер возврата, могут, вообще говоря, встречаться изолированные особенности, называемые «ласточкиными хвостами», и т. д.

В основном благодаря работе Р. Тома [2], которая будет здесь упомянута весьма поверхностно, мы довольно много знаем об особенностях, появляющихся в случае общего положения на видимых контурах.

Заметим, что речь пойдет не только о видимых контурах многообразий, но и о *видимых контурах аналитических множеств*: для того чтобы их определить, мы используем *стратификацию* аналитического множества (понятие, введенное Уитни [3] и Томом [3]), т. е. разбиение этого множества на многообразия, называемые стратами. Отношения примыкания между различными стратами играют основную роль в классификации особенностей Ландау и связаны с тем, что физики называют иерархией особенностей.

После этих чисто геометрических рассмотрений мы уточним характер особенностей аналитической функции, заданной интегралом, в случае, когда особенности подинтегральной функции заполняют несколько подмногообразий, находящихся в общем положении. Мы покажем (в гл. V и VII), как меняется цикл, по которому ведется интегрирование, когда внешние параметры описывают малую петлю вокруг особенности Ландау: это проблема ветвления интеграла. Отсюда будут получены (в гл. VI) точные выражения для особой части аналитической функции на особенности Ландау, по крайней мере в предположении, что все особенности подинтегральной функции — полюсы. Мы увидим, что в этом случае особенностями интеграла могут быть лишь полюсы, алгебраические особенности второго порядка или логарифмические особенности. Впрочем, это исследование не потребовало от нас никакого воображения, так как основная часть работы была уже проделана Ж. Лере [1].

Заодно мы убедимся в том, что правила Куткоски — это тривиальное следствие формул ветвления и *теории вычетов Лере*. Некоторые физики (в частности, группа Полкингорна, см. Фаулер [1]) подозревали о существовании этой связи между правилами Куткоски и вычислением вычетов, но не могли выразить ее точным образом из-за отсутствия адекватного математического аппарата. Напомним, что гомологические понятия, существенные для теории Лере, были придуманы Пуанкаре [1] (1895) как раз для того, чтобы обобщить теорию вычетов на случай нескольких переменных, возмещая этим отсутствие геометрической интуиции в многомерном пространстве.

Изложение будет чисто математическим, и в то время как его теоретический интерес для физика очевиден, при практическом применении возникают некоторые проблемы, которые я сейчас коротко опишу.

Во-первых, если речь идет о геометрии особенностей Ландау, то, «к несчастью», легко видеть, что некоторые ситуации, реализующиеся в физике, не являются ситуациями общего положения в смысле Тома. Этот вопрос я рассмотрю в моей диссертации [1]). Здесь скажу лишь, что эти случаи, в которых к тому же нет ничего таинственного, не вызывают серьезных трудностей.

Другая практическая проблема — эффективное построение стратификации изучаемого аналитического множества. Для физика это подмножество является просто объединением подмногообразий аффинного пространства, находящихся в общем положении, так что его стратификация тривиальна. К сожалению, теорему изотопии Тома можно применять лишь к *компактифицированному* множеству [2]), откуда возникает (по-видимому, довольно сложная) задача стратификации «на бесконечности». Важно научиться решать эту задачу, чтобы представлять себе, как выглядят все особенности Ландау второго типа [так физики (см. Фэрли и др. [1]) называют видимые контуры «стратов на бесконечности»].

Наконец, важная математическая проблема, для решения которой в основном и служат гомологические понятия: продолжить полученные здесь локальные результаты до *глобальных*. Можно, например, поставить следующий вопрос: действительно ли все особенности Ландау являются особенностями «где-нибудь» (т. е. по крайней мере на одном из «листов» многозначной аналитической функции, определенной интегралом)? Это приводит к следующей гомологической задаче: в гл. V (п. 1.1) определяется представление фундаментальной группы базы (многообразие внешних параметров) в пространстве гомологий слоя (многообразие, по которому интегрируют); как узнать, является ли это представление *неприводимым*? Разумеется, рецепт, предложенный в начале п. 3 (гл. V) для решения таких задач, остается лишь благим пожеланием: этот рецепт легко применить лишь в слу-

---

[1]) См. Фам [2*]. — *Прим. ред.*

[2]) Не говоря уже о том, что для того, чтобы интеграл имел смысл, многообразие, по которому интегрируют, должно быть компактным.

чае наиболее простых интегралов Фейнмана (ср. неопубликованиую статью Д. Фотиади и автора); для несколько менее тривиального интеграла Фейнмана трудно вычислить сами группы гомологий (ср. Федербуш [1]). Следует признать, что общие ограничения, при которых ставится задача, слишком упрощены: в основном используется дифференцируемая структура изучаемых многообразий, несколько меньше — аналитическая структура и вовсе не используется их *алгебраическая* структура[1]).

Я благодарю Д. Фотиади, М. Фруассара, Ж. Ласку за многочисленные обсуждения, в результате которых появилась эта работа; профессора Ж. Лере, чья теория вычетов послужила нам исходной идеей; профессора Р. Тома за любезность и терпение, с которыми он нас направлял.

---

[1]) Отметим две недавние статьи, где используются алгебраические понятия: Редже и Баруччи [1] изучают некоторые кривые Ландау методами алгебраической геометрии; Нильсон [1] определяет (при помощи некоторых условий роста) класс многозначных аналитических функций, особенности которых образуют алгебраическое подмножество, и показывает, что этот класс устойчив относительно интегрирования. [См. также Редже [1*], Понцано, Редже [1*], Понцано, Редже, Спир, Вестуотер [1*]. — *Прим. ред.*]

Глава I

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

1. Определение топологического многообразия. *n-мерным многообразием* называется такое отделимое топологическое пространство [1] [1]) X, что

($X0$) для каждой точки $x \in X$ существует окрестность U_x, гомеоморфная некоторому открытому множеству E_x евклидова пространства $\mathbf{R}^n$;

($X1$) существует покрытие пространства X *счетным* семейством таких окрестностей.

Гомеоморфизм $h\colon U \xrightarrow{\approx} E$ называется *картой* окрестности U или *локальной картой* многообразия X, а U называется *областью определения* локальной карты h.

В дальнейшем мы будем предполагать, что эти «области» U открыты и связны (предположение, которое, очевидно, не уменьшает общности и делается только для удобства).

Семейство локальных карт $\{h_i\colon U_i \xrightarrow{\approx} E_i\}$, такое, что $\bigcup\limits_i U_i = X$, называется *атласом* многообразия X.

Свойство ($X1$) можно теперь сформулировать иначе: X обладает счетным атласом.

2. Структуры на многообразии.

2.1. Задать на многообразии X *дифференцируемую структуру* — это значит ограничиться локальными картами X, согласованными дифференцируемым образом; мы скажем, что две карты $h\colon U \to E$,

---

[1]) Ссылки вида [1] относятся к разделу «Некоторые уточнения и дополнения» в конце книги.

h': $U' \to E'$ согласованы дифференцируемым образом, если отображение $h' \circ h^{-1}$, определенное в открытом множестве $h(U \cap U')$, дифференцируемо (рис. I. 1).

Аналогичным образом определяется дифференцируемая структура класса C^r (т. е. r раз непрерывно дифференцируемая), аналитическая структура и т. д. Для многообразия X четной размерности $2n$ можно

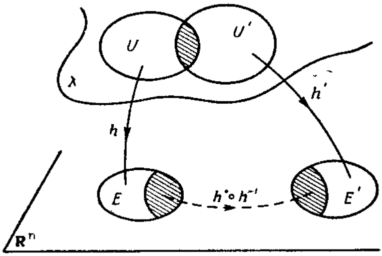


Рис. I. 1.

ввести понятие *комплексной аналитической структуры*, отождествляя действительное евклидово пространство $\mathbf{R}^{2n}$ с комплексным евклидовым пространством $\mathbf{C}^n$:

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n-1}, \xi_{2n}) \rightsquigarrow (\xi_1 + i\xi_2, \ldots, \xi_{2n-1} + i\xi_{2n}),$$

и требуя, чтобы $h' \circ h^{-1}$ были комплексными аналитическими отображениями; в этом случае n называется *комплексной размерностью* многообразия X.

Уточним теперь введенное нами понятие структуры (для определенности дифференцируемой).

Назовем атлас *дифференцируемым*, если все его карты согласованы дифференцируемым образом; договоримся считать два дифференцируемых атласа *эквивалентными*, если их объединение также является дифференцируемым атласом; ввести на многообразии *X дифференцируемую структуру* — значит задать *с точностью до эквивалентности дифференцируемый атлас* многообразия.

2.2. Морфизмы многообразий. Пусть X и Y — два многообразия размерностей n и p соответственно, снабженные (например) дифференцируемой структурой. Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ называется *дифференцируемым отображением* (или «морфизмом дифференцируемых структур X и Y»), если для любой локальной карты $h\colon U \to E$ многообразия X и любой локальной карты $k\colon V \to F$ многообразия Y (карты предполагаются согласованными с заданными структурами), таких, что $f(U) \subset V$, отображение $k \circ f \circ h^{-1}\colon E \to F$ дифференцируемо (рис. I. 2).

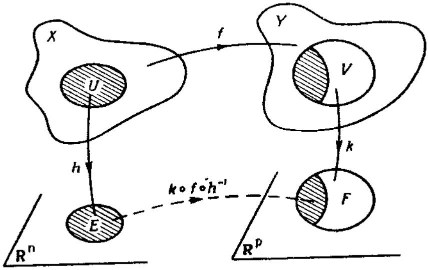


Рис. I. 2.

Если, кроме того, существует обратное отображение f^{-1}, которое также является дифференцируемым, мы говорим, что f есть *изоморфизм дифференцируемых многообразий* [1]) (в этом случае обязательно $n=p$).

Частный случай: $Y=\mathbf{R}$ (числовая прямая с естественной дифференцируемой структурой). Морфизм $f\colon X \to \mathbf{R}$ называют в этом случае *дифференцируемой функцией на* X.

2.3. Замечание. Дифференцируемым многообразием называют многообразие X, снабженное дифференцируемой структурой $\mathscr{S}$; морфизм дифференцируемых многообразий следовало бы при этом записывать в виде $f\colon (X, \mathscr{S}) \to (Y, \mathscr{S}')$, указывая точно структуры $\mathscr{S}$ и $\mathscr{S}'$, которыми снабжены X и Y, *так как одно*

[1]) В частности, карта $h\colon U \to E$ является *изоморфизмом* дифференцируемых многообразий U и E.

и то же пространство может иметь несколько дифференцируемых структур [1]). Это уточнение почти всегда опускают (если это не приводит к путанице).

2.4. Примеры дифференцируемых многообразий. (i) Евклидово пространство $\mathbf{R}^n$ или область $E \subset \mathbf{R}^n$ снабжены естественной дифференцируемой структурой: атлас состоит из единственной карты — тождественного отображения 1_E: $E \to E$.

(ii) Несколько менее тривиальным примером является *проективное пространство* $\mathbf{P}^n$ — пространство направлений прямых евклидова пространства $\mathbf{R}^{n+1}$; две точки x, $x' \in \mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$ определяют одну и ту же точку $\bar{x} \in \mathbf{P}^n$, если существует ненулевой скаляр λ, такой, что $x' = \lambda x$. Координаты $x_0, x_1, \ldots, x_n$ точки $x \in \mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$ называются однородными координатами точки $\bar{x} \in \mathbf{P}^n$. Обозначим через U_i открытое множество [2] в $\mathbf{P}^n$, состоящее из точек, i-я однородная координата которых не равна нулю:

$$U_i = \{\bar{x}: x_i \neq 0\} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Это открытое множество, очевидно, связно, и на нем можно задать карту h_i: $U_i \to \mathbf{R}^n$, поставив в соответствие точке $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ точку $\xi \in \mathbf{R}^n$ с координатами

$$\xi_1 = \frac{x_0}{x_i}, \quad \xi_2 = \frac{x_1}{x_i}, \ \ldots, \ \xi_i = \frac{x_{i-1}}{x_i},$$

$$\xi_{i+1} = \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ \ldots, \ \xi_n = \frac{x_n}{x_i}.$$

Гомеоморфизмы h_i составляют атлас пространства $\mathbf{P}^n$. Проверим, что этот атлас задает на $\mathbf{P}^n$ *ана-*

---

[1]) Пусть X — многообразие, $\mathcal{S}$ — дифференцируемая структура на X, f: $X \to X$ — *недифференцируемый* гомеоморфизм (в смысле структуры $\mathcal{S}$); этот гомеоморфизм переводит атласы, задающие структуру $\mathcal{S}$, в неэквивалентные атласы, которые определяют *другую структуру* $f\mathcal{S}$. Такое различие, очевидно, не очень интересно, так как новая структура изоморфна старой [f: $(X, \mathcal{S}) \to (X, f\mathcal{S})$ есть изоморфизм по построению]. Однако Милнор [1] привел пример многообразия (семимерной сферы), снабженного *двумя неизоморфными дифференцируемыми структурами.*

литическую структуру. Пусть $\bar{x} \in U_i \cap U_j (i > j)$ и $\xi = h_j(\bar{x})$. Однородными координатами точки $\bar{x}$ будут $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{j-1}, 1, \xi_j, \ldots, \xi_n)$, а точки $h_i(\bar{x}) = h_i \circ h_j^{-1}(\xi)$ —

$$\left(\frac{\xi_1}{\xi_i}, \frac{\xi_2}{\xi_i}, \ldots, \frac{\xi_{j-1}}{\xi_i}, \frac{1}{\xi_i}, \frac{\xi_j}{\xi_i}, \ldots, \frac{\xi_{i-1}}{\xi_i}, \frac{\xi_{i+1}}{\xi_i}, \ldots, \frac{\xi_n}{\xi_i}\right);$$

следовательно, преобразование $h_i \circ h_j^{-1}$ аналитично в U_i.

(iii) *Комплексное проективное пространство* $\mathbf{CP}^n$ определяется аналогичным образом: две точки $x, x' \in \mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$ определяют одну и ту же точку $\bar{x} \in \mathbf{CP}^n$, если существует скаляр $\lambda \in \mathbf{C} - \{0\}$, такой, что $x' = \lambda x$.

Точно такое же рассуждение, как и предыдущее, показывает, что $\mathbf{CP}^n$ является комплексным аналитическим многообразием.

Это многообразие (так же как и $\mathbf{P}^n$) *компактно*: действительно, пусть $K = \{\xi \in \mathbf{C}^n : |\xi_1| \leqslant 1, \ldots, |\xi_n| \leqslant 1\}$ — единичный (компактный) полидиск евклидова пространства; легко видеть, что $\mathbf{CP}^n$ *покрывается конечным семейством компактов* $K_i = h_i^{-1}(K) \subset U_i$ — прообразов K при определенных выше отображениях h_i.

3. Подмногообразия.

3.1. Пусть X есть n-мерное многообразие, снабженное некоторой структурой (для определенности структурой дифференцируемого многообразия).

Пусть в X задано подпространство S и выполнено следующее условие: существует семейство $\{h_i: U_i \to E_i\}$ локальных карт X (согласованных с заданной дифференцируемой структурой), отображающих S в p-мерную плоскость $\mathbf{R}^p \subset \mathbf{R}^n$:

$$h_i(S \cap U_i) = \mathbf{R}^n \cap E_i = \{\xi \in E_i : \xi_{p+1} = \ldots = \xi_n = 0\},$$

причем их области определения U_i покрывают S: $\bigcup_i U_i \supset S$ (рис. I.3). Ясно что ограничение на S этих локальных карт определяет *дифференцируемый атлас* подпространства S и что на S вводится таким образом структура *p-мерного дифференцируемого многообразия*, которая зависит только от структуры X (а не от семейства $\{h_i\}$). Тогда S называется *дифференцируемым подмногообразием размерности p* (коразмерности $n-p$) многообразия X.

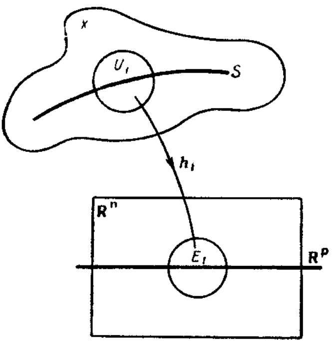


Рис. I.3.

Частный случай. Подмногообразие коразмерности 0 — это просто открытое множество в X.

3.2. Вложение. Если S — подмногообразие Y, то включение $i\colon S \xrightarrow{\subset} Y$ (которое каждой точке $y \in S$ ставит в соответствие ту же самую точку $y \in Y$), очевидно, является *морфизмом*. Такой морфизм называют *вложением*. Более общим образом, *вложением* многообразия X в многообразие Y называют морфизм $f\colon X \to Y$, который разлагается в композицию

$$f\colon X \xrightarrow[\approx]{h} S \xrightarrow[\subset]{i} Y,$$

где h — *изоморфизм* X на подмногообразие $S \subset Y$.

3.3. Погружение (иммерсия). *Погружением* называют локальное вложение, т. е. такой морфизм $f\colon X \to Y$, что каждая точка $x \in X$ имеет окрестность U_x, для которой отображение

$$f \mid U_x\colon U_x \to Y$$

является вложением.

3.4. Примеры. Следующие примеры приводятся без обоснования. Они будут обоснованы в п. 4.4—4.6.

(i) Множество S точек евклидова пространства $\mathbf{R}^n$, удовлетворяющих уравнению $s(x)=0$, где s — дифференцируемая функция, которая нигде не обращается в нуль одновременно со своим градиентом, является *замкнутым дифференцируемым подмногообразием* $\mathbf{R}^n$.

Пересечение этого подмногообразия с любым открытым подмножеством $\mathbf{R}^n$ также является (незамкнутым) дифференцируемым подмногообразием $\mathbf{R}^n$.

(ii) Отображение f: $\mathbf{P}^{n-1} \to \mathbf{P}^n$, которое точке из $\mathbf{P}^{n-1}$ с однородными координатами $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ ставит в соответствие точку из $\mathbf{P}^n$ с однородными

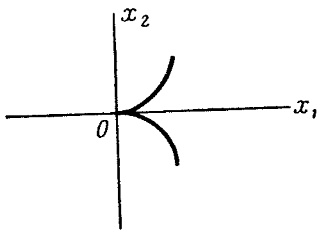


Рис. I. 4.

координатами $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$, является *вложением.*

(iii) Плоская уникурсальная кривая, заданная параметрически в виде $x_1 = f_1(t)$, $x_2 = f_2(t)$, где f_1, f_2 — две дифференцируемые функции, производные которых не обращаются в нуль одновременно, определяет *погружение*

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2.$$

Такое погружение не является, вообще говоря, вложением (например, полученная кривая может иметь двойные точки).

(iv) Пусть f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ — отображение, заданное равенствами $x_1 = t^2$, $x_2 = t^3$. Хотя это аналитическое отображение инъективно, оно не является ни вложением, ни даже погружением (рис. I. 4).

4. Касательное пространство к дифференцируемому многообразию.

4.1. Линейное касательное пространство $T_x(X)$. Пусть X есть n-мерное дифференцируемое многообразие; каждой точке $x \in X$ мы сопоставим *n-мерное линейное пространство* $T_x(X)$.

Элемент $V \in T_x(X)$ называется *касательным вектором* и задается точкой x и парой (h, v), где h — карта некоторой окрестности точки x, v — некоторый вектор пространства $\mathbf{R}^n$; условимся, что две пары (h, v), (h', v') задают один и тот же касательный вектор V, если

$$v' = T_\xi (h' \circ h^{-1})\, v,$$

где $T_\xi (h' \circ h^{-1})$ — матрица Якоби преобразования $h' \circ h^{-1}$, вычисленная в точке $\xi = h(x)$. Координаты $v_1, v_2, \ldots, v_n$ вектора v называются *составляющими вектора V в карте h*, а правило преобразования касательных векторов при изменении карты задается выписанным выше соотношением.

Если φ — дифференцируемая функция:

$$\varphi\colon X \to \mathbf{R},$$

а V — вектор, касательный к X в точке x, то легко убедиться в том, что число

$$V.\varphi = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial (\varphi \circ h^{-1})(\xi)}{\partial \xi_i} \qquad [\xi = h(x)]$$

не зависит от пары (h, v), определяющей вектор V. Это число называют *производной φ по направлению V*.

Замечание. Часто используется следующее обозначение, подсказанное интерпретацией касательных векторов как *дифференцирований*: для заданной карты h через $\dfrac{\partial}{\partial \xi_i}$ обозначают касательный вектор, все координаты которого в карте h равны нулю, кроме i-й, которая равна 1.

4.2. Линейное касательное отображение. Пусть $f\colon X \to Y$ — дифференцируемое отображение n-мерного многообразия X в p-мерное многообразие Y. *Линейное касательное отображение*

$$T_x f\colon T_x(X) \to T_y(Y) \quad [y = f(x)]$$

определяется соотношениями

$$V=(h, v) \rightsquigarrow W=(k, w),$$
$$w=T_\xi(k \circ f \circ h^{-1}) v \quad [\xi=h(x)],$$

очевидно согласованными с правилом преобразования касательных векторов при изменении карты.

Эти соотношения согласованы также с интерпретацией касательных векторов как *дифференцирований*: всякая дифференцируемая функция φ: $Y \to \mathbf{R}$ определяет (путем композиции с f) дифференцируемую функцию $\varphi \circ f$: $X \to \mathbf{R}$, и мы имеем

$$(T_x f V).\varphi = V.(\varphi \circ f).$$

Два следующих свойства хотя и очевидны, но заслуживают того, чтобы их сформулировать, так как в дальнейшем они нам будут часто встречаться:

1°. Тождественному отображению $\mathbf{1}$: $X \to X$ соответствует тождественное отображение

$$T_x(\mathbf{1}_X)=\mathbf{1}_{T_x(X)}: T_x(X) \to T_x(X).$$

2°. Композиции отображений

$$g \circ f: \begin{matrix} X \\ x \end{matrix} \xrightarrow{f} \begin{matrix} Y \\ y \end{matrix} \xrightarrow{g} \begin{matrix} Z \\ z \end{matrix}$$

соответствует композиция отображений

$$T_x(g \circ f)=(T_y g) \circ (T_x f): T_x(X) \xrightarrow{T_x f} T_y(Y) \xrightarrow{T_y g} T_z(Z).$$

Объединяя эти свойства, говорят, что соответствие $f \rightsquigarrow T_x f$ — это *ковариантный функтор.*

4.3. Определение. *Рангом отображения* f *в точке* x ($\operatorname{rang}_x f$) называют ранг линейного касательного отображения $T_x f$.

4.4. Характеристическое свойство погружения. *Для того чтобы дифференцируемое отображение* f: $X^n \to Y^p$ *было погружением, необходимо и достаточно, чтобы оно всюду имело ранг* n $(n \leqslant p)$.

Понятие погружения, как и понятие ранга отображения, является локальным. Таким образом (благодаря наличию локальных карт X и Y), можно ограничиться случаем, когда X и Y являются открытыми подмножествами евклидова пространства:

$$X = E^n \subset \mathbf{R}^n, \qquad Y = E^p \subset \mathbf{R}^p.$$

В этом случае отображение $f\colon E^n \to E^p$ задается p функциями от n переменных $f_1(x), \ldots, f_p(x)$. Предположим, что E^n и E^p содержат начало координат, причем $f(0) = 0$.

Если f — отображение E^n ранга n, то можно предположить, например, что верхний минор n-го порядка в матрице

$$\begin{array}{c|c} j \diagdown i & 1\ \ldots\ n \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ n \\ \vdots \\ p \end{matrix} & \left[\begin{array}{c} \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i} \\ \hline \\ \\ \end{array}\right] \end{array}$$

не равен нулю в окрестности 0. Тогда функции

$$g_j(y_1, \ldots, y_p) = \begin{cases} f_j(y_1, \ldots, y_n) & (j \leqslant n), \\ f_j(y_1, \ldots, y_n) + y_j & (j > n) \end{cases}$$

определяют локальное дифференцируемое отображение g из $\mathbf{R}^p$ в $\mathbf{R}^p$, касательное отображение к которому задается матрицей

$$\begin{array}{c|c} j \diagdown i & 1\ \ldots\ n\ \ldots\ p \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ n \\ \vdots \\ p \end{matrix} & \left[\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial f_j}{\partial y_i} & 0 \\ \hline & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

с ненулевым детерминантом. Следовательно, по теореме о неявной функции в некоторой окрестности 0 существует обратное (дифференцируемое) отображение g^{-1}, и мы получаем *изоморфизм*

$$g\colon U^p \xrightarrow{\approx} U'^p \qquad (U^p,\ U'^p \subset E^p).$$

Но g совпадает с f на плоскости $\mathbf{R}^n \subset \mathbf{R}^p$, определенной уравнениями $y_j = 0$, $j > n$. Поэтому *изоморфизм* g отображает часть $U^n = \mathbf{R}^n \cap U^p$ этой плоскости на множество $S = f(U^n)$. Следовательно, это множество по определению п. 3.1 является *подмногообразием* в E^p, а это и означает, что f — *погружение.*

Обратное (если f — погружение, то его ранг всюду равен n) очевидно.

4.5. Субмерсия. Дифференцируемое отображение $f\colon X^n \to Y^p$, ранг которого всюду равен $p\,(n \geqslant p)$, называется *субмерсией.*

Предложение. *Если f — субмерсия, то множество $f^{-1}(y)$ при всех $y \in Y$ является подмногообразием X коразмерности p.*

Как и выше, доказательство можно проводить для евклидовых пространств. Если левый минор порядка p матрицы

$$\begin{array}{c|c:c} {}_j \diagdown {}^i & 1 \; . \; . \; . \; p & . \; . \; . \; n \\ \hline 1 & & \\ \cdot & \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i} & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ p & & \end{array}$$

не равен нулю, то функции

$$g_j(x) = \begin{cases} f_j(x) & (j \leqslant p), \\ x_j & (j > p) \end{cases}$$

определяют отображение g из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$, касательное отображение к которому задается матрицей

$$\begin{array}{c|c:c}
{}_{j}\diagdown{}^{i} & 1\,.\,.\,.\,p & .\,.\,.\,n \\ \hline
\begin{matrix}1\\ \vdots \\ p\end{matrix} & \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i} & \\ \hline
\begin{matrix}\vdots \\ n\end{matrix} & 0 & 1
\end{array}$$

с ненулевым детерминантом.

В силу теоремы о неявной функции g определяет *изоморфизм* $g\colon U^n \to U'^n$. При этом изоморфизме множество $S_0 = U^n \cap f^{-1}(0)$ отображается на $(n-p)$-мерную плоскость $U^{n-p} = \mathbf{R}^{n-p} \cap U'^n$, определяемую уравнениями $x_1 = \ldots = x_p = 0$. Следовательно, S_0 является подмногообразием коразмерности p.

4.6. Задание подмногообразия при помощи локальных уравнений. *Для того чтобы $S \subset X$ было подмногообразием коразмерности q, необходимо и достаточно, чтобы для всякой точки $y \in S$ существовала такая ее окрестность U_y в X, что*

$$S \cap U_y = \{x \in U_y\colon\ s_{1y}(x) = \ldots = s_{qy}(x) = 0\},$$

где $\{s_{1y}, \ldots, s_{qy}\}$ — система q функций ранга q, определенных на U_y (т. е. функций, определяющих отображение $s_y\colon U_y \to \mathbf{R}^q$ ранга q).

Необходимость очевидна, так как если S — подмногообразие, то функции $\xi_{p+1}, \ldots, \xi_n$, задающие карту h_i из п. 3.1, образуют систему ранга $q = n - p$ в U_i.

Что касается обратного утверждения, то это лишь другая формулировка предложения из п. 4.5.

Определения. $s_{1y}, \ldots, s_{qy}$ называются *локальными уравнениями* подмногообразия S в окрестности точки y.

Если существуют окрестность V *всего* подмногообразия S и такие функции $s_1, \ldots, s_q$, определенные в V, что

$$S = \{x \in V: \ s_1(x) = \ldots = s_q(x) = 0\},$$

то мы будем говорить, что эти функции являются *глобальными уравнениями* S.

Примеры. (i) Функция $\frac{x_n}{x_i}$ является локальным уравнением подмногообразия $\mathbf{P}^{n-1} \subset \mathbf{P}^n$ из примера 3.4(ii) [она определена в открытом множестве U_i из п. 2.4 (ii)]; хотелось бы считать, что x_n — глобальное уравнеиие $\mathbf{P}^{n-1}$; заметим, однако, что однородная координата x^n не является функцией на $\mathbf{P}^n$.

(ii) Пусть S^n есть n-мерная сфера в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$. Ее сечение гиперплоскостью (скажем, $x_1=0$) является подмногообразием $S^{n-1} \subset S^n$, и x_1 — его *глобальное* уравнение (определенное на всей сфере S^n).

Замечание. Так как теорема о неявной функции верна также для *аналитических* отображений, результаты п. 4.4, 4.5, 4.6 справедливы и для аналитических структур.

5. Дифференциальные формы на многообразии.

5.1. Векторное пространство $\Omega_x^p(X)$ форм степени p. Пусть X есть n-мерное дифференцируемое многообразие. Зафиксируем раз и навсегда точку $x \in X$. *Формой степени* p

$$\varphi \in \Omega_x^p(X)$$

называется *полилинейная кососимметрическая функция* от p касательных векторов $V_1, V_2, \ldots, V_p \in T_x(X)$.

Если векторы $V_1, V_2, \ldots, V_p$ линейно зависимы, то вследствие полилинейности и кососимметричности

$$\varphi(V_1, \ldots, V_p) = 0.$$

В частности, не существует ненулевой формы степени выше n.

Очевидно, $\Omega_x^p(X)$ являются векторными пространствами. В этих пространствах можно ввести операцию *внешнего умножения*

$$\wedge:\ \Omega_x^p(X)\otimes\Omega_x^q(X)\to\Omega_x^{p+q}(X)$$

при помощи равенства

$$(\varphi\wedge\psi)(V_1,\ V_2,\ \dots,\ V_{p+q})=$$
$$=\frac{1}{(p+q)!}\sum_i(-)^i\varphi(V_{i_1},\ \dots,\ V_{i_p})\psi(V_{i_{p+1}},\ \dots,\ V_{i_{p+q}}),$$

где сумма берется по всем перестановкам i символов $\{1,\ 2,\ \dots,\ p+q\}$, а $(-)^i=+1$, если перестановка i четная, и -1 в противном случае.

Из определения немедленно следует, что

$$\varphi\wedge\psi=(-)^{pq}\psi\wedge\varphi.$$

Векторные пространства $\Omega_x^p(X)$ конечномерны. Пусть h — карта некоторой окрестности точки x, и пусть $\frac{\partial}{\partial\xi_1},\ \frac{\partial}{\partial\xi_2},\ \dots,\ \frac{\partial}{\partial\xi_n}$ — касательные векторы, заданные в этой карте единичными векторами пространства $\mathbf{R}^n$, направленными по осям; обозначим через $d\xi_i\in\Omega_x^1(X)$ $(i=1,\ 2,\ \dots,\ n)$ форму первой степени, определенную равенствами

$$d\xi_i\left(\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)=\delta_{ij}\quad\text{(символ Кронекера).}$$

Легко видеть, что формы

$$d\xi_{i_1}\wedge d\xi_{i_2}\wedge\dots\wedge d\xi_{i_p}\quad(i_1<i_2<\dots<i_p)$$

образуют *базис* пространства $\Omega_x^p(X)$.

При $p=0$ мы положим $\Omega_x^0(X)=\mathbf{R}$, а внешнее произведение

$$\wedge:\ \Omega_x^0(X)\otimes\Omega_x^q(X)\to\Omega_x^q(X)$$

определим как умножение на скаляр в векторном пространстве $\Omega_x^q(X)$.

5.2. Пространство $\Omega^p(X)$ дифференциальных форм степени p. В дальнейшем слово «дифференцируемый» будет обозначать *«дифференцируемый класса C^∞»*.

Зададим для всякой точки $x \in X$ форму $\varphi(x) \in \Omega_x^p(X)$, *дифференцируемым образом зависящую от x* (иначе говоря, для каждой карты h коэффициенты разложения $\varphi(x)$ по внешним произведениям $d\xi_i(x)$ являются дифференцируемыми функциями x). Мы скажем в этом случае, что определена *дифференциальная форма степени p*: $\varphi \in \Omega^p(X)$.

Кроме операции *внешнего умножения* (см. п. 5.1), в пространствах $\Omega^p(X)$ вводится операция *внешнего дифференцирования*

$$d\colon \Omega^p(X) \to \Omega^{p+1}(X).$$

Внешний дифференциал формы φ задается равенством

$$(d\varphi)(V_0, V_1, \ldots, V_p) = \sum_{i=0}^{p} (-)^i V_i \cdot \varphi(V_0, \ldots, \widehat{V}_i, \ldots, V_p),$$

где производную формы по направлению V_i вычисляют, дифференцируя коэффициенты ее разложения в карте h.

В частности, если $p=0$, то φ — *дифференцируемая функция на X*, а $d\varphi$ — дифференциальная форма степени 1, которая сопоставляет вектору V_0 производную φ по направлению V_0. Это оправдывает обозначение $d\xi_i$, введенное в конце п. 5.1, если через $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ обозначить функции, задающие карту $h\colon X \to \mathbf{R}^n$.

Свойства внешнего дифференцирования.

1°. $dd=0$ (теорема Пуанкаре); это следует из определения и того, что

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial \xi_i}.$$

2°. $d(\varphi \wedge \psi) = d\varphi \wedge \psi + (-)^p \varphi \wedge d\psi$, где p — степень φ.

5.3. Преобразование дифференциальных форм. Всякое дифференцируемое отображение

$$f\colon X \to Y$$

индуцирует отображение

$$f^*\colon \Omega^p(Y) \to \Omega^p(X),$$

которое определяется как двойственное касательному отображению

$$[f^*\varphi](V_1, \ldots, V_p)_x = \varphi(T_x f V_1, \ldots, T_x f V_p)_y.$$

[Мы добавили индексы x и $y = f(x)$, чтобы напомнить, в каких точках определены касательные векторы V_i, $T_x f V_i$.]

Важное свойство отображения f^* состоит в том, что оно *коммутирует с внешним дифференцированием*:

$$\boxed{f^* d = d f^*}$$

(для доказательства следует воспользоваться п. 4.2).

С другой стороны, из «функториальных» свойств п. 4.2 следует, что

1°. $\mathbf{1}_X^* = \mathbf{1}_{\Omega^p(X)}$.

2°. Если $g \circ f\colon X \longrightarrow Y \xrightarrow{g} Z$, то

$$(g \circ f)^* = f^* g^*\colon \Omega^p(Z) \xrightarrow{g^*} \Omega^p(Y) \xrightarrow{f^*} \Omega^p(X).$$

Эти два свойства объединяют вместе, называя соответствие $f \rightsquigarrow f^*$ *контравариантным функтором*.

Частные случаи. (i) Если $p = 0$, то φ — функция и $f^*\varphi = \varphi \circ f$.

(ii) Пусть S — подмногообразие X, $i\colon S \to X$ — включение. Если $\varphi \in \Omega^p(X)$, то $i^*\varphi \in \Omega^p(S)$ называется *ограничением* φ на S и обозначается $\varphi | S$.

5.4. Дифференциальные формы с комплексными значениями. Так же, как в п. 5.1 мы определили формы со значениями в $\mathbf{R}$, можно было бы определить формы со значениями в $\mathbf{C}$. Обычно так и поступают в случае, когда X — комплексное аналитическое многообразие: *дифференциальной формой* на комплексном аналитическом многообразии X (комплексной размерности n) называют дифференциальную форму с комплексными значениями, определенную на действительном $2n$-мерном многообразии, соответствующем X. В локальной карте такая форма разлагается во внешнее произведение дифференциалов $d\xi_1, d\eta_1, \ldots, d\xi_n, d\eta_n$, где $\xi_1, \eta_1, \ldots$ $\ldots, \xi_n, \eta_n$ — координаты в пространстве $\mathbf{R}^{2n}$, соответствующем $\mathbf{C}^n$. На практике часто бывает удобнее разлагать форму φ по

$$d\zeta_i = d\xi_i + i d\eta_i \quad \text{и} \quad d\bar{\zeta}_i = d\xi_i - i d\eta_i.$$

Если в этом разложении не встречаются дифференциалы $d\bar{\zeta}_i$ и коэффициенты разложения являются голоморфными функциями, то мы назовем дифференциальную форму φ *голоморфной*. Очевидно, это понятие не зависит от выбора аналитической карты и могло бы быть определено внутренним образом.

6. Разбиение единицы на многообразии класса C^∞. Понятие разбиения единицы играет основную роль при переходе от локальных утверждений к глобальным на многообразиях.

6.1. Теорема. *Для всякого открытого покрытия $\{U_i\}_{i \in I}$ многообразия X класса C^∞ (I — некоторое множество индексов) существует локально конечное разбиение единицы, подчиненное этому покрытию, иначе говоря, существует такое семейство $\{\pi_i(x)\}_{i \in I}$ дифференцируемых функций класса C^∞, что*

(π1) $\pi_i \geqslant 0, \quad \sum_i \pi_i = 1$;

(π2) *каждая точка $x \in X$ имеет окрестность, пересекающуюся лишь с конечным числом носителей функций π_i;*

(π3) *носитель функции π_i содержится в U_i.*

Замечания. (i) Из условия (π2) следует, что суммирование в (π1) имеет смысл.

(ii) Из условия (π2) следует, что число тех π_i, которые не равны тождественно нулю, конечно или счетно.

6.2. Следствие. *Если A — замкнутое подмножество X и U — его открытая окрестность, то существует функция класса C^∞ с носителем в U, принимающая значения, заключенные между* 0 *и* 1, *и равная* 1 *в некоторой окрестности A.*

Достаточно применить теорему к покрытию многообразия X, состоящему из двух открытых множеств U и $X - A$.

Набросок доказательства теоремы. Используя свойство ($X1$) (п. 1), можно показать, что всякое открытое покрытие $\{U_i\}$ допускает локально конечное измельчение [3], т. е. существует такое *локально конечное* открытое покрытие $\{U'_j\}$, что каждое U'_j содержится хотя бы в одном из U_i. Более того, множества U'_j можно при этом выбрать так, что каждое $\overline{U'_j}$ компактно и содержится в области определения одной из локальных карт X. Тем же способом это покрытие измельчают в такое покрытие $\{U''_j\}$, что $\overline{U''_j} \subset U'_j$, и для каждого j строят функцию $\varphi_j \geqslant 0$ класса C^∞ с носителем U'_j, равную 1 на $\overline{U''_j}$ (так как при этом все происходит в области определения некоторой локальной карты, достаточно уметь строить такую функцию для областей евклидова пространства). Так как U''_j образуют покрытие X, сумма $\varphi = \sum_j \varphi_j$ всюду $\geqslant 1$ (и, значит, > 0). Следовательно, функции $\pi_j = \frac{\varphi_j}{\varphi}$ образуют локально конечное разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U'_j\}$. Разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_i\}$, строится тривиально путем перегруппировки функций π_j.

6.3. Применение: построение римановой метрики. Задать на многообразии X риманову метрику класса C^∞ — это значит задать в каждой точке $x \in X$ *симметрический положительно определенный тензор* $G(x)$ (т. е. билинейную симметрическую положительно определенную функцию от пар касательных векторов), *зависящий от x бесконечно дифференцируемым образом.* Покажем, что на многообразии класса C^∞ *такая метрика всегда существует*: действительно, если $\{h_i\colon U_i \to E_i\}$ — атлас X, то такой тензор $G_i(x)$ можно построить в каждой области U_i (например, взять тензор, записывающийся в координатах карты h_i единичной матрицей). После этого выбираем разбиение единицы $\{\pi_i\}$ класса C^∞, подчиненное покрытию $\{U_i\}$, и задаем $G(x)$ равенством

$$G(x) = \sum_i \pi_i(x)\, G_i(x).$$

6.4. Применение п. 6.3: построение трубчатой окрестности замкнутого подмногообразия. Пусть $S \subset X$ — замкнутое подмногообразие класса C^∞. Зададим на X риманову метрику класса C^∞ и отнесем каждой точке $y \in S$ семейство *дуг геодезических длины* $\varepsilon(y)$, *выходящих из y и ортогональных S* ($\varepsilon(y)$ — непрерывная функция точки y). Когда y пробегает S, это семейство заметает окрестность V многообразия S, и если «радиус» $\varepsilon(y)$ этой окрестности достаточно мал[1]), то через всякую точку $x \in V - S$ пройдет единственная дуга семейства (это утверждение мы приводим здесь без доказательства). Обозначив «основание» этой дуги через $\mu(x) \in S$, мы определим отображение $\mu\colon V - S \to S$, которое бесконечно дифференцируемым образом продолжается на S до тождественного преобразования. V называется *трубчатой окрестностью* подмногообразия S; $\mu\colon V \to S$ называется *C^∞-ретракцией* этой окрестности на S.

В качестве полезного следствия существования такой ретракции получаем, что *всякая дифференциальная форма $\varphi \in \Omega(S)$ является ограничением некоторой дифференциальной формы $\psi \in \Omega(X)$*. Действительно, пусть π — функция класса C^∞ с носителем в V, равная 1 на S (см. следствие 6.2). Носитель дифференциальной формы $\pi \cdot \mu^*\varphi$ лежит в V, так что нуль служит C^∞-продолжением φ на внешность V. Пусть

[1]) Если S компактно, радиус ε можно выбрать не зависящим от y.

$\psi \in \Omega(X)$ — полученная дифференциальная форма. Она, очевидно, удовлетворяет нашим требованиям, так как

$$\psi|S = \pi \cdot \mu^*\varphi|S = (\pi|S) \cdot \mu^*\varphi|S = \mu^*\varphi|S = \varphi,$$

поскольку $\mu|S = 1_S$ (равенство $\mu^*\varphi|S = (\mu|S)^*\varphi$ следует непосредственно из функториальных свойств п. 5.3).

7. Ориентация многообразий. Интегрирование на многообразиях.

7.1. Ориентация многообразия. *Ориентировать* многообразие X — это значит сопоставить каждой его локальной карте h: $U \to E$ число $\varepsilon_h = \pm 1$ таким образом, чтобы для всякой пары таких карт

$$h: U \to E, \qquad h': U' \to E'$$

знак якобиана $\det T_\xi(h' \circ h^{-1})$ в $h(U \cap U')$ совпадал со знаком $\varepsilon_h \cdot \varepsilon_{h'}$. Очевидно, что если X можно ориентировать, то можно построить атлас X, все карты которого согласуются при помощи преобразований с положительным якобианом. Такой атлас мы будем называть *ориентированным*. Обратно, *всякий ориентированный атлас* $\{h_i$: $U_i \to E_i\}$ *задает ориентацию*. Действительно, пусть h: $U \to E$ — какая-нибудь локальная карта, и пусть $\{h'_j$: $U'_j \to E'_j\}$ — атлас U, полученный ограничением заданного атласа (множества U'_j — это связные компоненты $U_i \cap U$); множества U'_j делятся на 2 класса: те, для которых якобиан $\det T_\xi(h'_j \circ h^{-1})$ отрицателен, и те, для которых он положителен. Легко проверить, что (поскольку атлас $\{h'_j\}$ ориентирован) множества из разных классов между собой не пересекаются, откуда вследствие связности U мы заключаем, что один из двух классов пуст. Если пуст первый класс, то мы положим $\varepsilon_h = 1$, если второй, то $\varepsilon_h = -1$.

Пусть ε и ε' — две ориентации X. Локальные карты X делятся на два класса в зависимости от того, какое из двух равенств выполнено: $\varepsilon_h = -\varepsilon'_h$ или $\varepsilon_h = +\varepsilon'_h$. Как и выше, доказывается, что области определения двух карт, принадлежащих разным классам, не пересекаются. Таким образом, *если X связно, то один из двух классов пуст*. Если пуст первый, то $\varepsilon = \varepsilon'$, если второй, то $\varepsilon = -\varepsilon'$. Мы доказали тем самым, что *если связное многообразие ориентируемо, то оно допускает ровно две ориентации ε и $-\varepsilon$.*

7.2. Пример неориентируемого многообразия: проективное действительное пространство $\mathbf{P}^n$ при четном n. Действительно, рассмотрим атлас $\{h_i: U_i \to \mathbf{R}^n, i = 0, 1, \ldots, n\}$ многообразия $\mathbf{P}^n$, определенный в п. 2.4 (ii).

Ориентации ε многообразия $\mathbf{P}^n$ соответствует набор чисел ε_{h_i}. Заметим, что якобиан преобразования $h_1 \circ h_0^{-1}$ равен $\dfrac{-1}{\xi_1^{n+1}}$. Таким образом, при четном n знак этого якобиана различен для двух связных компонент $\{\xi_1 > 0\}$ и $\{\xi_1 < 0\}$ множества $U_0 \cap U_1$ и не может поэтому равняться знаку $\varepsilon_{h_0} \cdot \varepsilon_{h_1}$ во всем $U_0 \cap U_1$.

7.3. *Всякое комплексное аналитическое многообразие допускает каноническую ориентацию.* Действительно, всякое аналитическое отображение $f: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ определяет отображение $f: \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ с *положительным* якобианом; в этом легко убедиться, если заметить, что действительную матрицу Якоби $T_{(\xi, \eta)}(f)$ можно формально записать в переменных $\zeta = \xi + i\eta$, $\bar{\zeta} = \xi - i\eta$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \dfrac{\partial f_i}{\partial \zeta_j} & 0 \\ \hline 0 & \dfrac{\partial \bar{f}_i}{\partial \bar{\zeta}_j} \\ \hline \end{array}$$

где $\dfrac{\partial \bar{f}_i}{\partial \bar{\zeta}_j} = \overline{\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial \zeta_j}\right)}$. Как следствие получаем, что *всякий комплексный аналитический атлас многообразия X ориентирован*, что задает каноническую ориентацию этого многообразия.

7.4. Определение ориентации при помощи n касательных векторов. Пусть ε — некоторая ориентация n-мерного многообразия X. Каждому набору из n *линейно независимых* касательных векторов $V_1, V_2, \ldots, V_n \in T_x(X)$ сопоставим число

$$\varepsilon(V_1, V_2, \ldots, V_n) = \varepsilon_h \operatorname{sgn} \det \|v_{ij}\| = \pm 1,$$

где $\|v_{ij}\|$ есть $(n \times n)$-матрица, образованная координатами векторов $V_1, \ldots, V_n$ в карте h некоторой связной окрестности точки x.

Очевидно, что это число не зависит от карты h и что *если многообразие X ориентируемо*, то его ориентация полностью определяется заданием точки x и системы векторов $V_1, V_2, \ldots, V_n \in T_x(X)$, для которой $\varepsilon(V_1, V_2, \ldots, V_n) = +1$. Такая система векторов называется *ориентирующим репером многообразия X в точке x*.

7.5. Определение ориентации при помощи дифференциальной формы n-й степени. Предположим, что на n-мерном многообразии X задана дифференциальная форма φ степени n, *нигде не обращающаяся в нуль*. Если через $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ обозначить координаты локальной карты $h\colon U \to E$, то φ в U запишется в виде

$$\varphi = \rho_h(x)\, d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge \ldots \wedge d\xi_n.$$

Функция $\rho_h(x)$ не обращается в нуль на связном множестве U, значит, она сохраняет знак. Обозначим этот знак через ε_h; мы немедленно убеждаемся, что соответствие $h \rightsquigarrow \varepsilon_h$ задает *ориентацию* X.

Обратно, предположим, что задана некоторая ориентация ε многообразия X. Выбрав на X риманову метрику $G(x)$ (п. 6.3), сопоставим каждой системе из n касательных векторов $V_1, V_2, \ldots, V_n \in T_x(X)$ «объем» (в метрике G) параллелепипеда, построенного на этих n векторах[1]), со знаком $\varepsilon(V_1, V_2, \ldots, V_n)$. Таким образом мы зададим дифференциальную форму степени n, нигде не обращающуюся в нуль; мы

[1]) Этот объем определяется выражением $(\det \|G(V_i, V_j)\|_{ij})^{1/2}$.

назовем ее *элементом объема* ориентированного многообразия X, заданным метрикой G.

7.6. Интеграл от дифференциальной формы по ориентированному многообразию. Пусть X есть n-мерное ориентированное многообразие, φ — дифференциальная форма на X степени n с компактным носителем.

Определим *интеграл* φ *по* X, *обозначаемый* $\int\limits_X \varphi$ (точнее его следовало бы обозначить $\int\limits_{X,\varepsilon} \varphi$, где ε — ориентация X).

Предположим для начала, что носитель φ содержится в области определения U локальной карты h. В выбранных на этой карте координатах $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ форма φ запишется в виде

$$\varphi = \rho_h(\xi)\, d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge \ldots \wedge d\xi_n.$$

Положим в этом случае по определению

$$\int\limits_X \varphi = \varepsilon_h \int\int \ldots \int d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n \rho_h(\varepsilon).$$

Этот интеграл, очевидно, сходится, так как носитель ρ_h компактен. Более того, он не зависит от выбранной карты h: действительно, при замене карты $h \rightsquigarrow h'$ функция ρ_h умножится на якобиан отображения $h \circ h'^{-1}$, а $\varepsilon_h \rho_h$ умножится на *модуль* этого якобиана, что как раз соответствует правилу замены переменных в кратном интеграле.

Перейдем теперь к общему случаю. *Компактный* носитель φ можно покрыть *конечным* числом областей U_i, соответствующих картам h_i. Пусть $\{\pi_i\}$ — разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Положим

$$\int\limits_X \varphi = \sum_i \int\limits_X \pi_i \varphi.$$

Легко убедиться в том, что это выражение не зависит от выбора разбиения единицы.

Замечание. В еще более общем случае, когда носитель φ не компактен, мы скажем, что интеграл $\int\limits_X \varphi$ *сходится*, если бесконечный ряд $\sum\limits_i \int\limits_X \pi_i\varphi$ *суммируем* для всякого локально конечного разбиения единицы $\{\pi_i\}$ с компактными носителями. В этом случае $\int\limits_X \varphi$ полагается равным сумме этого ряда (очевидно, не зависящей от выбора разбиения благодаря предположению о суммируемости).

7.7. Интегрирование по многообразию с краем и формула Стокса. Чтобы определить *многообразие с краем* $\overline{X}$, достаточно слово в слово воспроизвести определение обычного многообразия, заменяя евклидово пространство $\mathbf{R}^n$ замкнутым евклидовым полупространством

$$\overline{\mathbf{R}^n_-} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\colon x_1 \leqslant 0\}.$$

В области определения локальной карты многообразия $\overline{X}$ точки, принадлежащие $\overline{X}$, делятся на два класса: те, которые отображаются на

$$\mathbf{R}^n_- = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\colon x_1 < 0\},$$

и те, которые отображаются на гиперплоскость

$$\partial\overline{\mathbf{R}^n_-} = \{0, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Такое разбиение $\overline{X}$ не зависит от выбора локальной карты (это следует непосредственно из теоремы о *топологической инвариантности открытых множеств* [4]). Таким образом, мы получаем разбиение $\overline{X}$ на два *многообразия* (в обычном смысле, т. е. без края) X и $\partial\overline{X}$ размерности n и $n-1$ соответственно, которые называют *внутренностью* и *краем* $\overline{X}$.

Дифференцируемая структура на многообразии с краем определяется так же, как на обычном многообразии: уточним лишь, что под дифференцируемым отображением на $\overline{\mathbf{R}^n_-}$ следует понимать отображение, которое можно продолжить до дифференцируемого отображения на $\mathbf{R}^n$. Таким образом, дифференцируемая структура на $\overline{X}$ индуцирует (путем ограничения атласов) дифференцируемые структуры на X и $\partial\overline{X}$. Аналогично ориентация $\overline{X}$ индуцирует ориентации X и $\partial\overline{X}$ (что касается $\partial\overline{X}$, то мы канонически отождествляем $\partial\overline{\mathbf{R}^n_-}$ с $\mathbf{R}^{n-1}$: $\{0, x_2, \ldots, x_n\} \rightsquigarrow \{x_2, \ldots, x_n\}$).

Очевидным образом определяются *касательное пространство* к $\overline{X}$ (это n-мерное векторное пространство), *дифференциальные формы* на $\overline{X}$, и если $\overline{X}$ ориентируемо, интеграл от дифференциальной формы с компактным носителем. Конечно,

$$\int_{\overline{X}} \varphi = \int_X \varphi \mid X.$$

Формула Стокса. *Если φ — дифференциальная форма на $\overline{X}$ с компактным носителем, то*

$$\boxed{\int_{\partial\overline{X}} \varphi \mid \partial\overline{X} = \int_{\overline{X}} d\varphi.}$$

Доказательство. С помощью локальных карт и разбиения единицы доказательство сводится к случаю $\overline{X} = \overline{\mathbf{R}^n_-}$; форма φ (степень которой предполагается равной $n-1$) записывается тогда в виде

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

а $d\varphi$ — в виде

$$d\varphi(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} (-)^{i-1} \frac{\partial\rho_i(x)}{\partial x_i}\right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Интегрируя, получаем требуемый результат.

8. Некоторые сведения о комплексных аналитических множествах (см. Абъянкар [1], Ганнинг и Росси [1]).

8.1. Подмножество S комплексного аналитического многообразия X называется *аналитическим в точке* a, если существуют окрестность U_a точки a и конечное число аналитических функций $s_1, s_2, \ldots, s_k$: $U_a \to \mathbf{C}$, таких, что

$$S \cap U_a = \{x \in U_a:\ s_1(x) = \ldots = s_k(x) = 0\}.$$

Функции s_i называются *локальными уравнениями* S.

Подмножество S называется *аналитическим*, если оно аналитично во всех точках многообразия X. В этом случае S — *замкнутое* подмножество X.

Коразмерностью аналитического множества S в точке a (обозначается $\operatorname{codim}_a S$) называется такое наибольшее целое q, что существует комплексное аналитическое подмногообразие размерности q, пересечение которого с S состоит лишь из точки a. Очевидно, число k локальных уравнений, задающих S, не меньше, чем коразмерность S, однако для сколько-нибудь сложных S это число больше коразмерности. *Размерность* S в a равна по определению $\dim_a S = n - \operatorname{codim}_a S$, где n — размерность X. Мы не будем доказывать, что если S лежит в подмногообразии $Y \subset X$, то размерность S как подмножества Y равна его размерности как подмножества X. Другое интересное свойство: для всякого x, достаточно близкого к a на S, $\dim_x S \leqslant \dim_a S$.

8.2. Аналитическое множество, определяемое идеалом. Так как все нижеследующие понятия будут локальными, мы предположим, что $X = \mathbf{C}^n$.

Обозначим через $\mathcal{O}_a$ *кольцо ростков аналитических функций в точке* a (т. е. кольцо рядов Тейлора в точке a от n переменных с ненулевым радиусом сходимости). Пусть $\mathfrak{S}_a \subset \mathcal{O}_a$ — *идеал* кольца $\mathcal{O}_a$ (т. е. такое подмножество, которое вместе с двумя любыми элементами содержит их сумму и, кроме того, $f_a \cdot \mathfrak{S}_a \subset \mathfrak{S}_a$ $\forall f_a \in \mathcal{O}_a$). Можно показать, что кольцо $\mathcal{O}_a$ *нётерово*, т. е. что всякий его идеал имеет *конечное* число образующих.

Но всякую конечную систему образующих идеала $\mathfrak{S}_a$ можно рассматривать как систему локальных уравнений аналитического множества, определенного в общей области сходимости U_a этих образующих, При этом увеличение числа образующих (т. е. добавление к исходной системе конечного числа элементов идеала) может в некоторых случаях уменьшить общую область сходимости, но в этой меньшей области аналитическое множество не изменится. Таким образом, мы сопоставляем идеалу $\mathfrak{S}_a$ *росток аналитического множества в точке* a (т. е. задаем аналитическое множество, *не фиксируя* окрестность точки a), обозначаемый $S(\mathfrak{S}(a))$.

8.3. Идеал аналитического множества. Пусть множество S является аналитическим в точке a. Множество ростков аналитических функций, обращающихся в нуль на S, очевидно, является *идеалом* кольца $\mathcal{O}_a$ и обозначается $\mathfrak{i}_a(S)$. Предположим, что S задано при помощи какого-то идеала $\mathfrak{S}_a$; чему равен в этом случае идеал $\mathfrak{i}_a(S(\mathfrak{S}_a))$? Ответ содержится в следующей теореме:

Теорема о нулях (Гильберт — Рюккерт). *Идеал* $\mathfrak{i}_a(S(\mathfrak{S}_a))$ *является радикалом идеала* $\mathfrak{S}_a$, *т. е. множеством ростков функций, некоторая степень которых принадлежит* $\mathfrak{S}_a$.

8.4. Ранг идеала. *Рангом* идеала $\mathfrak{S}_a \subset \mathcal{O}_a$ называют максимум рангов всевозможных матриц Якоби, образованных из функций, ростки которых принадлежат идеалу:

$$\operatorname{rang} \mathfrak{S}_a = \sup_{s_{1a}, \ldots, s_{ma} \in \mathfrak{S}_a} \operatorname{rang} \frac{D(s_1, \ldots, s_m)}{D(\xi_1, \ldots, \xi_n)}(a)$$

(это число конечно, так как кольцо $\mathcal{O}_a$ нётерово).

Предложение. *Росток* $S(\mathfrak{S}_a)$ *содержится в некотором подмногообразии коразмерности, равной рангу* $\mathfrak{S}_a$.

Доказательство. По определению ранга r идеала $\mathfrak{S}_a$ в $\mathfrak{S}_a$ можно выбрать r функций $s_1, s_2, \ldots$ $\ldots, s_r$, имеющих в a (а значит, в окрестности a) якобиан ранга r. Из п. 4.5 следует, что эти r функций являются локальными уравнениями подмногообразия коразмерности r, которое и содержит $S(\mathfrak{S}_a)$.

Следствие. $\operatorname{rang} \mathfrak{S}_a \leqslant \operatorname{codim} S(\mathfrak{S}_a)$.

В частном случае, когда выполнено *равенство* $\operatorname{rang} \mathfrak{S}_a = \operatorname{codim} S(\mathfrak{S}_a) = r$, мы покажем, что $S(\mathfrak{S}_a)$ — росток *подмногообразия коразмерности* r. Действительно, используя доказанное предложение, приходим к случаю $r = 0$. Таким образом, нужно доказать, что аналитическое множество коразмерности 0 в $\mathbf{C}^n$ совпадает со всем $\mathbf{C}^n$. Но это немедленно вытекает из определения коразмерности. В самом деле, так как аналитические функции комплексного переменного, не равные тождественно нулю, имеют лишь изолированные нули, то всякая прямая должна пересекаться с аналитическим множеством в изолированных точках или целиком ему принадлежать.

8.5. Регулярные точки аналитического множества.

Определения. Точка $a \in S$ называется *регулярной*, если $\operatorname{rang} \mathfrak{i}_a(S) = \operatorname{codim}_a S$; в противном случае a называется *особой*.

Предложение. ($a \in S$ — *регулярная точка*) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ (S *в окрестности* a *является подмногообразием*).

Доказательство. Импликация $\Rightarrow$ уже была доказана в предыдущем пункте (в качестве $\mathfrak{S}_a$ мы возьмем здесь весь идеал $\mathfrak{i}_a(S)$).

Обратно, если S — аналитическое подмногообразие коразмерности r, то в окрестности a можно выбрать такие координаты $z_1, z_2, \ldots, z_r$ с началом в a, что $S = \{z\colon z_1 = \ldots = z_r = 0\}$; идеал в a, порожденный функциями $z_1, z_2, \ldots, z_r$, имеет ранг r и, очевидно, совпадает со своим радикалом, т. е. он и есть $\mathfrak{i}_a(S)$.

8.6. Неприводимость. Нижеследующие определения могут применяться как *локально* (к росткам аналитических множеств), так и *глобально* (к аналитическим множествам). Аналитическое множество S называется *неприводимым*, если его нельзя представить в виде объединения двух отличных от него аналитических множеств. В противном случае оно называется *приводимым*. *Неприводимая компонента* S — это максимальный элемент семейства неприводимых аналитических множеств, содержащихся в S.

Глава II

ГОМОЛОГИИ И КОГОМОЛОГИИ МНОГООБРАЗИЙ

1. Цепи на многообразии (по де Раму). Формула Стокса.

1.1. *p-мерный элемент цепи* $[\sigma]$ на дифференцируемом многообразии X задается *выпуклым* p-мерным *полиэдром* Δ^p, *ориентацией* ε полиэдра Δ^p и *дифференцируемым отображением* σ: $\Delta^p \to X$.

Более точно, Δ^p — выпуклый компактный полиэдр некоторого p-мерного аффинного пространства E^p, а σ — ограничение некоторого дифференцируемого отображения, определенного в окрестности этого компакта.

Пусть φ — дифференциальная форма степени p на X. *Интеграл* φ *по элементу цепи* $[\sigma]$ определяется равенством

$$\int\limits_{[\sigma]} \varphi = \int\limits_{\Delta^p} \sigma^* \varphi,$$

где интеграл по ориентированному полиэдру Δ^p, очевидно, имеет смысл, так как $\sigma^*\varphi$ — это ограничение на компакт Δ^p дифференциальной формы класса C^∞, заданной в окрестности этого компакта.

1.2. *p-мерная цепь* γ на X определяется формальной линейной комбинацией с целыми коэффициентами конечного числа p-мерных элементов цепи. Условимся, кроме того, что две такие комбинации

$$\sum_i n_i [\sigma_i] \quad \text{и} \quad \sum_j n'_j [\sigma'_j]$$

задают *одну и ту же цепь* γ, если для всякой формы φ совпадают значения интегралов

$$\int_{\gamma} \varphi = \sum_i n_i \int_{[\sigma_i]} \varphi = \sum_j n'_j \int_{[\sigma'_j]} \varphi.$$

1.3. Граница. Пусть $[\sigma] = (\Delta^p, \varepsilon, \sigma)$ — элемент p-мерной цепи. Каждая грань Δ_i^p полиэдра Δ^p содержится в $(p-1)$-мерной плоскости E_i^p, которую мы снабдим следующей ориентацией ε_i:

$$\varepsilon_i(V_1, V_2, \ldots, V_{p-1}) = \varepsilon(V_0, V_1, V_2, \ldots, V_{p-1}),$$

где V_0 — внешняя нормаль к грани E_i^p.

Положив $\sigma_i = \sigma \mid \Delta_i^p$, мы определим тем самым элемент цепи

$$[\sigma_i] = (\Delta_i^p, \varepsilon_i, \sigma_i).$$

Сумма всех элементов цепи, сопоставленных таким образом всем граням полиэдра Δ^p, называется *границей* $[\sigma]$ и обозначается $\partial[\sigma]$. Для цепи $\gamma = \sum_i n_i[\sigma_i]$ мы положим $\partial\gamma = \sum_i n_i\partial[\sigma_i]$. Из формулы Стокса (п. 1.4) немедленно следует, что цепь $\partial\gamma$ не зависит от представления $\sum_i n_i[\sigma_i]$ цепи γ и что, с другой стороны, $\partial\partial\gamma = 0$ (простое следствие того, что $dd = 0$).

1.4. Формула Стокса:

$$\boxed{\int_{\partial\gamma} \varphi = \int_{\gamma} d\varphi.}$$

Достаточно доказать эту формулу в случае, когда цепь γ совпадает с элементарной цепью $[\sigma]$, и распространить доказательство на общий случай по линейности. Полагая $\psi = \sigma^*\varphi$, мы приходим к формуле

$$\int_{\Delta^p} d\psi = \sum_i \int_{\Delta_i^p} \psi,$$

которая доказывается так же, как и формула из п. I. 7.7 (в сущности это та же самая формула, только Δ^p — многообразие с *кусочно* дифференцируемым краем, а в п. I. 7.7 мы предполагали, что край — дифференцируемое многообразие).

1.5. Преобразования цепей. Пусть $f: X \to Y$ — дифференцируемое отображение многообразий. Сопоставим каждому элементу цепи $[\sigma] = (\Delta^p, \varepsilon, \sigma)$ в X элемент цепи $f_*[\sigma] = (\Delta_p, \varepsilon, f \circ \sigma)$ в Y и всякой цепи $\gamma = \sum\limits_i n_i [\sigma_i]$ в X цепь $f_*\gamma = \sum\limits_i n_i f_* [\sigma_i]$ в Y.

Очевидно, что $\int\limits_{f_*\gamma} \varphi = \int\limits_{\gamma} f^*\varphi$ (непосредственное следствие того, что $(f \circ \sigma)^*\varphi = \sigma^* f^*\varphi$ (см. п. I.5.3)).

Это равенство показывает, что цепь $f_*\gamma$ не зависит от представления цепи γ. Кроме того, объединяя его с формулой Стокса и равенством $df^* = f^*d$ из п. I.5.3, мы получаем равенство

$$\boxed{\partial f_* = f_* \partial.}$$

Действительно,

$$\int\limits_{\partial f_*\gamma} \varphi = \int\limits_{f_*\gamma} d\varphi = \int\limits_{\gamma} f^* d\varphi = \int\limits_{\gamma} df^*\varphi = \int\limits_{\partial\gamma} f^*\varphi = \int\limits_{f_* \partial\gamma} \varphi.$$

1.6. Пример. Пусть $X = S^2$ — единичная сфера евклидова пространства $\mathbf{R}^3$. Параметрическое представление этой сферы в полярных координатах задает двумерный элемент цепи $[\sigma] = (\Delta, \varepsilon, \sigma)$ (Δ — прямоугольник длины 2π и ширины π, $\sigma: \Delta \to S^2$ — отображение, определяемое координатами долгота — широта). Интеграл любой формы φ по этому элементу цепи равен интегралу φ по сфере S^2, взятой с ориентацией ε_{S^2}, «соответствующей» ε ($\varepsilon_{S^2} \circ \sigma = \varepsilon$). В частности, если дифференциальная форма φ — это телесный угол, т. е. элемент объема (см. п. I.7.5), соответствующий ориентации ε_{S^2} и метрике на S^2, индуцированной евклидовой метрикой из $\mathbf{R}^3$, то

$$\int_{[\sigma]} \varphi = 4\pi.$$

Отметим, что $d\varphi = 0$ (так так φ — форма максимальной степени) и что $\partial[\sigma] = 0$. Эти свойства выражают, говоря соответственно, что форма φ *замкнута* и что $[\sigma]$ — *цикл*. В то же время φ не является точной дифференциальной формой, а $[\sigma]$ не является границей, т. е. не существует ни формы ψ, для которой $\varphi = d\psi$, ни цепи γ, для которой $[\sigma] = \partial\gamma$; действительно, в противном случае из формулы Стокса следовало бы, что $\int_{[\sigma]} \varphi = 0$.

2. Гомологии.

2.1. Основной интерес понятия цепи состоит в том, что при помощи цепей строятся группы гомологий, которыми мы теперь займемся. В настоящее время принято определение цепи, несколько отличающееся от данного в предыдущем параграфе и пригодное для любого топологического пространства. На многообразиях эти определения порождают одни и те же группы гомологий, но современное определение позволяет распространить на *непрерывные отображения* результаты, доказанные для дифференцируемых.

Сформулируем теперь общие свойства цепей, уже полученные в предыдущем параграфе для дифференцируемых отображений многообразий.

Всякому топологическому пространству X ставится в соответствие *абелева группа* $C_*(X)$, называемая *группой цепей* X. Эта группа градуирована в соответствии с размерностью p цепей:

$$C_*(X) = \bigoplus_p C_p(X)$$

и снабжена *гомоморфизмом границы*

$$\partial\colon C_*(X) \to C_*(X),$$

уменьшающим размерность на единицу и таким, что

$$\partial\partial = 0.$$

Всякому непрерывному отображению $f\colon X \to Y$ соответствует гомоморфизм $f_*\colon C_*(X) \to C_*(Y)$, сохраняющий размерность цепей и коммутирующий с ∂. Это соответствие $f \rightsquigarrow f_*$ является *ковариантным функтором* (см. п. I.4.2).

2.2. Определение группы гомологий. Обозначим через $Z_*(X) = \operatorname{Ker} \partial$ *ядро* гомоморфизма ∂, т. е. множество таких цепей $\gamma \in C_*(X)$, для которых $\partial\gamma = 0$. Такие цепи называются *циклами*, а $Z_*(X)$ — *группой циклов.*

Обозначим через $B_*(X) = \operatorname{Im} \partial$ *образ* гомоморфизма ∂, т. е. совокупность цепей вида $\partial\gamma$. Эти цепи называются *границами*, а $B_*(X)$ — *группой границ.*

Из $\partial\partial = 0$ следует, что $B_*(X)$ — подгруппа группы $Z_*(X)$. Таким образом, определена факторгруппа

$$H_*(X) = Z_*(X)/B_*(X),$$

которую и называют *группой гомологий* пространства X. Ее элементы называются *классами гомологий*: два цикла принадлежат одному и тому же классу гомологий, если они отличаются на границу; такие циклы называются *гомологичными.*

Все вышеопределенные группы, очевидно, градуированы в соответствии с размерностями входящих в них цепей. Таким образом,

$$H_*(X) = \bigoplus_{p=0,\,1,\,2,\,\dots} H_p(X).$$

При $p = 0$ полагают $Z_0(X) = C_0(X)$, так что $H_0(X) = C_0(X)/B_0(X)$. Но $C_0(X)$ — это *свободная группа множества* X (группа формальных линейных комбинаций точек X), а $B_0(X)$ — это подгруппа $C_0(X)$, порожденная линейными комбинациями вида $[x] - [x']$, где x и x' — концы *дуги* (пути), лежащей в X. Таким образом, $H_0(X)$ — это свободная абелева группа, образующими которой являются *компоненты линейной связности пространства* X.

2.3. Примеры. (i) Пусть $X = S^n$ есть n-мерная сфера пространства $\mathbf{R}^{n+1}$. Она связна, поэтому $H_0(S^n) \approx \mathbf{Z}$ (группа всех целых чисел). Кроме того, можно показать, что $H_*(S^n)$ равна нулю во всех размерностях, *кроме размерности* n, а $H_n(S^n) \approx \mathbf{Z}$ и порождается циклом, который можно построить аналогично циклу $[\sigma]$ из примера 1.6.

(ii) Пусть $X = \mathbf{P}^n$ есть n-мерное действительное проективное пространство. Очевидно, $H_0(\mathbf{P}^n) \approx \mathbf{Z}$. Кроме того, можно показать, что $H_{2p}(\mathbf{P}^n) = 0$, а $H_{2p+1}(\mathbf{P}^n) \approx \mathbf{Z}_2$ (циклическая группа второго порядка), кроме случая $2p + 1 = n$, когда $H_{2p+1}(\mathbf{P}^{2p+1}) \approx \mathbf{Z}$. Образующую в размерности $2p + 1$ можно интуитивно представлять себе в виде $(2p + 1)$-мерной проективной плоскости $\mathbf{P}^{2p+1} \subset \mathbf{P}^n$ [1]).

Таким же образом можно построить цепи, соответствующие $2p$-мерным проективным плоскостям $\mathbf{P}^{2p} \subset \mathbf{P}^n$; заметим, однако, что вследствие неориентируемости $\mathbf{P}^{2p}$ (п. I.7.2) эти цепи не являются циклами, а имеют границу, соответствующую дважды пробегаемой плоскости $\mathbf{P}^{2p-1}$. Это и объясняет, почему группы $(2p - 1)$-мерных гомологий изоморфны $\mathbf{Z}_2$ ($\mathbf{P}^{2p-1}$ не является границей, но $2\mathbf{P}^{2p-1}$ является).

2.4. Кручение. В п. 2.3 (ii) мы рассмотрели пример группы гомологий с *кручением*: говорят, что абелева группа G имеет кручение, если она содержит циклические элементы конечного порядка.

Практически группы гомологий имеют, как правило, *конечное* число образующих и изоморфны поэтому [2]) прямой сумме нескольких циклических групп конечного ($\mathbf{Z}_r$) или бесконечного ($\mathbf{Z}$) порядка. Оставив в этой прямой сумме лишь группы бесконечного порядка, мы получим *свободную группу* (с конечным числом образующих), которую называют группой гомологий *по модулю кручения*. Случай бесконечного числа образующих несколько более сложен [3]), и вся-

---

[1]) То есть ее можно задать циклом, построенным при помощи параметрического представления такой $(2p+1)$-мерной плоскости.

[2]) Не совсем тривиальное упражнение в чистой алгебре.

[3]) Например, группа без кручения не обязательно свободна.

кий раз, когда мы будем иметь дело с кручением, этот случай будет (неявно) опускаться.

2.5. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Поскольку гомоморфизм $f_*\colon C_*(X) \to C_*(Y)$ из п. 2.1 коммутирует с ∂, он переводит циклы в циклы, а границы в границы. Следовательно, он индуцирует гомоморфизм $f_*\colon H_*(X) \to H_*(Y)$ групп гомологий, сохраняющий размерность. Соответствие $f \rightsquigarrow f_*$ является *ковариантным функтором*, откуда, в частности, следует, что если $f\colon X \approx Y$ — гомеоморфизм, то $f_*\colon H_*(X) \approx H_*(Y)$ — изоморфизм абелевых групп.

2.6. Ретракции. Непрерывное отображение $r\colon X \to A$ называется *ретракцией*, если

1°. A — подпространство X;

2°. $r|A = 1_A$.

Пусть $i\colon A \to X$ — включение A в X. Условие 2° можно записать в виде $r \circ i = 1_A$, откуда вследствие функториальности получаем $r_* i_* = 1_{H_*(A)}$:

$$\begin{tikzcd} & H_*(X) \arrow[dr, "r_*"] & \\ H_*(A) \arrow[ur, "i_*"] \arrow[rr, "1"] & & H_*(A) \end{tikzcd}$$

Это соотношение показывает, что $H_*(A)$ есть *прямой сомножитель* группы $H_*(X)$ (т. е. $\exists G\colon H_*(X) \approx H_*(A) \times G$).

2.7. Пример. Теорема Брауэра о неподвижной точке. Обозначим через E^n замкнутый единичный шар пространства $\mathbf{R}^n$. Его границей является сфера S^{n-1}. Пространство E^n «гомологически тривиально» (п. 2.9), чего нельзя сказать про S^{n-1} (п. 2.3 (i)). Отсюда следует, что $H_*(S^{n-1})$ не является подгруппой $H_*(E^n)$, так что *не существует ретракции E^n на S^{n-1}*.

Следствием последнего утверждения является теорема Брауэра о неподвижной точке: *всякое непрерывное отображение $f\colon E^n \to E^n$ имеет по крайней мере одну неподвижную точку*. Действительно, предположим противное, т. е. что $f(x) \neq x$ $\forall x \in E^n$, и обозначим через $r(x)$ точку пересечения со сферой S^{n-1} луча $\overline{f(x), x}$ (рис. II.1). Легко убедиться в том, что определенное таким способом отображение $r\colon E^n \to S^{n-1}$ непрерывно; очевидно, что $r|S^{n-1} = 1_{S^{n-1}}$, т. е. r — ретракция, что противоречит предыдущему утверждению.

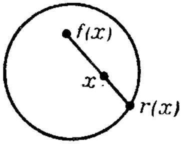


Рис. II.1.

2.8. Гомотопия. Два непрерывных отображения f_0 и $f_1\colon X \to Y$ называются *гомотопными* (обозначается $f_0 \simeq f_1$), если их можно «проинтерполировать» при помощи непрерывного семейства отображений $f_\tau\colon X \to Y$[1]).

Можно доказать следующее важное свойство: *два гомотопных отображения индуцируют один и тот же гомоморфизм групп гомологий*:

$$f_0 \simeq f_1 \Rightarrow \boxed{f_{0*} = f_{1*}}\colon H_*(X) \to H_*(Y).$$

2.9. Деформационные ретракции. Ретракция $r\colon X \to A$ (см. п. 2.6) называется *деформационной ретракцией*, если $i \circ r \simeq 1_X$. Из функториальности и свойства 2.8 следует, что $i_* r_* = 1_{H_*(X)}$. Учитывая 2.6, мы получаем в этом случае, что $r_*\colon H_*(X) \to H_*(A)$ — *изоморфизм* (а i_* — обратный изоморфизм).

Важный частный случай. Пространство X называется *стягиваемым*, если существует деформационная ретракция, переводящая X в одну из его точек. В этом случае X *гомологически тривиально*,

---

[1]) Говорят, что семейство непрерывных отображений $f_\tau: X \to Y$ ($\tau \in [0, 1]$) «интерполирует» f_0 и f_1, если $f(x, \tau) = f_\tau(x)$ задает непрерывное отображение $f: X \times [0, 1] \to Y$.

т. е. его гомологии совпадают с гомологиями точки:

$$H_p(X) = 0, \qquad p > 0,$$
$$H_0(X) = \mathbf{Z}.$$

2.10. Примеры. *Евклидово пространство* $\mathbf{R}^n$ *стягиваемо.* Действительно, если через r: $\mathbf{R}^n \to P$ обозначить ретракцию $\mathbf{R}^n$ в начало координат P, то соотношение

$$f_\tau(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\tau x_1, \tau x_2, \ldots, \tau x_n)$$

задает *гомотопию* между

$$i \circ r = f_0 \quad \text{и} \quad \mathbf{1}_{\mathbf{R}^n} = f_1.$$

То же рассуждение показывает, что *стягиваема всякая звездная область* в $\mathbf{R}^n$. Легко видеть также, что существует деформационная ретракция кругового цилиндра на окружность, лежащую в его основании, и т. д.

2.11. Относительные гомологии. Пусть (X, A) — *пара*, т. е. X — топологическое пространство, а A — его подпространство. Пусть i_*: $C_*(A) \to C_*(X)$ — гомоморфизм[1]), индуцированный включением i: $A \to X$. Факторгруппа

$$C_*(X, A) = C_*(X)/i_*C_*(A)$$

называется группой *относительных цепей* пары (X, A). Гомоморфизм ∂, очевидно, индуцирует гомоморфизм

$$\partial\colon\ C_*(X, A) \to C_*(X, A),$$

обладающий свойствами, перечисленными в п. 2.1, так что можно построить группу *относительных гомологий*

$$H_*(X, A) = Z_*(X, A)/B_*(X, A),$$

где

$$Z_*(X, A) = \operatorname{Ker} \partial, \quad B_*(X, A) = \operatorname{Im} \partial.$$

Отметим, что представителем «относительного цикла» [элемента из $Z_*(X, A)$] будет цепь в X, граница

[1]) Этот гомоморфизм *инъективен*, так что $C_*(A)$ можно считать подгруппой $C_*(X)$.

которой лежит в A. Эта граница будет циклом в A, и мы без труда убеждаемся, что ее класс гомологий в A зависит лишь от класса относительных гомологий [в (X, A)] исходного относительного цикла. Таким образом, определен гомоморфизм

$$\partial_*\colon H_p(X, A) \to H_{p-1}(A).$$

Для относительных гомологий также справедливы *функториальные* свойства и свойство *гомотопии*; достаточно заменить в формулировках п. 1.5 и 2.8 слово «отображение» на «отображение пар» [задать отображение пар $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ — это значит задать две пары (X, A), (Y, B) и такое отображение $f\colon X \to Y$, что $f(A) \subset B$].

Кроме того, гомоморфизм ∂_* преобразуется «естественным» образом при отображениях пар

$$f\colon (X, A) \to (Y, B),$$

т. е. диаграмма

$$\begin{tikzcd} H_p(X, A) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\partial_*"] & H_p(Y, B) \arrow[d, "\partial_*"] \\ H_{p-1}(A) \arrow[r, "(f \mid A)_*"] & H_{p-1}(B) \end{tikzcd}$$

коммутативна [5].

2.12. Замечание о коэффициентах. Вместо того чтобы определять цепи как линейные комбинации *с целыми коэффициентами* элементов цепи, мы, конечно, могли бы брать линейные комбинации с коэффициентами в $\mathbf{R}$ или, например, в $\mathbf{C}$. Таким образом, взяв коэффициенты в каком-нибудь *поле*, мы заменим все *группы* (группы цепей, группы гомологий и т. д.) *векторными пространствами*. В результате такой замены мы «убьем» кручение: если «обычная» (т. е. с коэффициентами в $\mathbf{Z}$) группа гомологий имеет конечное число образующих, то *по модулю кручения* (п. 2.4) она определяет *свободную группу с конечным числом образующих*, и гомологии с коэффициентами в поле — это не что иное, как *векторное пространство, натянутое на эти образующие*.

3. Когомологии.

3.1. Коцепи. На всяком топологическом пространстве X определено понятие *коцепи, двойственное к понятию цепи.* С помощью коцепей строится группа когомологий пространства. Если X — дифференцируемое многообразие и если нас интересуют когомологии с коэффициентами в $\mathbf{R}$ или в $\mathbf{C}$, то коцепи можно заменить *дифференциальными формами,* определенными на всем многообразии, а двойственность выразится в интегрировании (это *теорема де Рама*).

Сформулируем основные свойства коцепей, приводя в квадратных скобках эти свойства на языке дифференциальных форм.

Всякому топологическому пространству X мы сопоставляем абелеву группу $C^*(X)$ [векторное пространство $\Omega(X)$], называемую *группой коцепей* X [пространством дифференциальных форм на X]. Эта группа градуирована по *«степеням»* p коцепей:

$$C^*(X) = \bigoplus_p C^p(X) \quad \left[\Omega(X) = \bigoplus_p \Omega^p(X)\right],$$

в ней определен *гомоморфизм кограницы* δ [дифференциал d], увеличивающий степень на единицу и такой, что

$$\delta\delta = 0 \qquad [dd = 0].$$

Всякому непрерывному отображению $f\colon X \to Y$ сопоставляется гомоморфизм $f^*\colon C^*(Y) \to C^*(X)$, сохраняющий степень коцепей и коммутирующий с δ. Соответствие $f \rightsquigarrow f^*$ является *контравариантным функтором.*

3.2. Определение группы когомологий строится совершенно аналогично п. 2.2.

Коциклы: $Z^*(X) = \operatorname{Ker} \delta$ [замкнутые дифференциальные формы: $\Phi(X) = \operatorname{Ker} d$].

Кограницы: $B^*(X) = \operatorname{Im} \delta$ [точные дифференциальные формы: $d\Omega(X)$].

Группа когомологий: $H^*(X) = Z^*(X)/B^*(X)$ $[=\Phi(X)/d\Omega(X)]$.

Все эти группы градуированы по *степеням* коцепей:

$$H^*(X) = \bigoplus_{p=0,\,1,\,2,\,\ldots} H^p(X)$$

(если X — многообразие размерности n, то суммирование распространяется лишь на $p \leqslant n$).

При $p = 0$ полагают $B^0(X) = 0$, так что

$$H^0(X) = Z^0(X) \qquad [= \Phi^0(X)].$$

Но $\Phi^0(X)$ — это пространство дифференцируемых на X функций с нулевым дифференциалом; такие функции равны константе на каждой связной компоненте многообразия X, так что размерность векторного пространства $H^0(X)$ равна *числу компонент связности* X.

3.3. Всякое непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ индуцирует гомоморфизм $f^*\colon H^*(Y) \to H^*(X)$ групп когомологий, сохраняющий степень.

Соответствие $f \rightsquigarrow f^*$ является *контравариантным функтором*.

Следствия. *Если $f\colon X \approx Y$ — гомеоморфизм, то $f^*\colon H^*(Y) \approx H^*(X)$ — изоморфизм; если A — ретракт X, то $H^*(A)$ является прямым сомножителем $H^*(X)$.*

3.4. Гомотопия. *Два гомотопных отображения индуцируют один и тот же гомоморфизм групп когомологий*:

$$f_0 \simeq f_1 \Rightarrow f_0^* = f_1^*.$$

Следствие. *Стягиваемое пространство когомологически тривиально*, т. е. его когомологии совпадают с когомологиями точки:

$$H^p(X) = 0 \quad \text{при} \quad p > 0,$$
$$H^0(X) = \mathbf{C} \quad \text{или} \quad \mathbf{R}$$

для когомологий с коэффициентами в $\mathbf{C}$ или $\mathbf{R}$.

В частности, тот факт, что евклидово пространство когомологически тривиально, известен как теорема, *обратная к теореме Пуанкаре*: всякая замкнутая дифференциальная форма в евклидовом пространстве является точным дифференциалом.

3.5. Относительные когомологии. Для всякой пары (X, A) рассмотрим гомоморфизм ограничения[1]) коцепей

$$i^*: C^*(X) \to C^*(A).$$

Ядро этого гомоморфизма

$$C^*(X, A) = \operatorname{Ker} i^*$$

называется группой *относительных коцепей* пары (X, A) [в случае многообразий это ядро будет обозначаться $\Omega(X, A)$: это пространство *дифференциальных форм на X, ограничение которых на подмногообразие A равно нулю*].

В этой группе, очевидно, определен гомоморфизм кограницы, обладающий свойствами, перечисленными в п. 3.1, так что можно определить группу относительных когомологий:

$$H^*(X, A) = Z^*(X, A)/B^*(X, A)[=\Phi(X, A)/d\Omega(X, A)],$$
$$Z^*(X, A) = \operatorname{Ker} \delta, \quad B^*(X, A) = \operatorname{Im} \delta.$$

Для этих групп когомологий можно построить (аналогично гомоморфизму ∂_*) гомоморфизм

$$\delta^*: H^p(A) \to H^{p+1}(X, A),$$

определяемый следующим образом: пусть φ — коцикл в A, принадлежащий классу когомологий $h^p \in H^p(A)$, и пусть ψ — коцепь в X, такая, что $i^*\psi = \varphi$ (если A — замкнутое дифференцируемое подмногообразие X, то такая форма ψ всегда существует, согласно п. I.6.4; в общем случае оказывается, что в h^p можно выбрать такой коцикл φ, что ψ существует); тогда $\delta\psi$ определяет коцикл в X, ограничение которого на A равно нулю:

$$\delta\psi | A = i^*\delta\psi = \delta i^*\psi = \delta\varphi = 0.$$

Значит, это относительный коцикл в (X, A) и можно проверить, что его класс относительных когомологий,

[1]) Напомним (п. I.6.4), что если A — *замкнутое* дифференцируемое подмногообразие многообразия X, то гомоморфизм *ограничения* дифференциальных форм *сюръективен*.

обозначаемый $\delta^* h^p \in H^{p+1}(X, A)$, зависит только от исходного класса h^p.

Все предложения п. 3.3, 3.4 переносятся на случай относительных когомологий, лишь слово «отображение» надо всюду заменить на «отображение пар» [6].

3.6. Замечание. Уточним свойства дифференциальной формы $d\psi$ из п. 3.5 в случае, когда A — замкнутое подмногообразие X. В п. I. 6.4 мы положили форму ψ равной $\pi \cdot \mu^* \varphi$ в трубчатой окрестности подмногообразия A, где μ — ретракция трубчатой окрестности на A, а π — функция класса C^∞, равная 1 *в некоторой окрестности* A. Таким образом, в этой последней окрестности

$$d\psi = d\mu^* \varphi = \mu^* d\varphi = 0,$$

так что *носитель* $d\psi$ *не пересекается с* A; это свойство является более сильным, чем свойство $d\psi \mid A = 0$, установленное в п. 3.5.

4. Двойственность де Рама.

4.1. Уточним определение (упомянутое в п. 3.1) группы $C^*(X)$ как объекта, $\mathbf{Z}$-двойственного группе $C_*(X)$. *Коцепью* (с коэффициентами в $\mathbf{Z}$) называется *линейное* отображение φ: $C_*(X) \to \mathbf{Z}$, т. е. φ ставит в соответствие всякой цепи γ целое число, обозначаемое $\langle \varphi \mid \gamma \rangle$. Мы скажем, что φ — коцепь *степени* p, если $\langle \varphi \mid \gamma \rangle = 0$ для всякой цепи, размерность которой не равна p. Гомоморфизм кограницы δ *определяется* равенством

$$\langle \delta\varphi \mid \gamma \rangle = \langle \varphi \mid \partial\gamma \rangle.$$

Из этого соотношения следует, что число $\langle \varphi \mid \gamma \rangle$ равно нулю всякий раз, когда γ — цикл, а φ — кограница или γ — граница, а φ — коцикл. Отсюда получаем, что $\langle \varphi \mid \gamma \rangle$ зависит лишь от класса гомологий γ и класса когомологий φ и определяет *билинейную форму*

$$\langle \mid \rangle \colon H^p(X) \otimes H_p(X) \to \mathbf{Z}.$$

Зададим себе следующий алгебраический вопрос: можно ли из того, что группа $C^*(X)$ $\mathbf{Z}$-двойственна

$C_*(X)$ в смысле $\langle | \rangle$, вывести, что группа $H^*(X)$ $\mathbf{Z}$-двойственна группе $H_*(X)$ в смысле $\langle | \rangle$?

Ответ: *да, по модулю кручения.* Если брать коэффициенты не в $\mathbf{Z}$, а в *поле*, то не придется заботиться о кручении и $H^*(X)$ будет *векторным пространством, двойственным к* $H_*(X)$.

4.2. Двойственность, рассмотренная в п. 4.1, приобретает особый интерес в связи с *теоремой де Рама*, в которой утверждается, что для определения группы когомологий $H^*(X)$ с коэффициентами в $\mathbf{R}$ или в $\mathbf{C}$ можно заменить $C^*(X)$ на $\Omega(X)$, δ на d, а $\langle | \rangle$ на интегрирование (формула $\langle \delta\varphi | \gamma \rangle = \langle \varphi | \partial\gamma \rangle$ превращается при этом в *формулу Стокса*). Итак, справедлива

Теорема двойственности де Рама. *Группа когомологий дифференциальных форм $H^p(X)$ отождествляется при помощи билинейной формы — интегрирования с пространством всех линейных функций на $H_p(X)$.*

Следствие. *Если φ — замкнутая дифференциальная форма, интеграл от которой по всякому циклу равен нулю, то φ — точный дифференциал* [действительно, φ задает на $H_p(X)$ нулевую функцию, и из теоремы двойственности де Рама следует, что ее класс когомологий равен нулю].

4.3. Рассуждения п. 4.1 очевидным образом распространяются на *относительные* гомологии и когомологии [*относительные коцепи* пары (X, A) — это коцепи, ограничение которых на A равно нулю, т. е. такие коцепи φ, что $\langle \varphi | \gamma \rangle = 0$ $\forall \gamma \in i_* C_*(A)$, откуда и следует, что $C^*(X, A)$ двойственно к $C_*(X, A) = C_*(X)/i_* C_*(A)$].

Теорема де Рама также обобщается на этот случай: *группа относительных когомологий $H^p(X, A)$ дифференциальных форм отождествляется при помощи билинейной формы — интегрирования с пространством всех линейных функций на $H_p(X, A)$.*

4.4 Сопряженность ∂_* и δ^*. Из сопряженности операторов δ и ∂ ($\langle \delta\varphi | \gamma \rangle = \langle \varphi | \partial\gamma \rangle$ — формула

Стокса) немедленно вытекает сопряженность операторов δ^* и ∂_*:

$$\langle \delta^* k \mid h \rangle = \langle k \mid \partial_* h \rangle,$$

где ∂_* и δ^* — гомоморфизмы, определенные в п. 2.11 и 3.5:

$$h \in H_p(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A);$$
$$H^p(X, A) \xleftarrow{\delta^*} H^{p-1}(A) \ni k.$$

5. Семейства носителей. Изоморфизм и двойственность Пуанкаре.

5.1. *Семейством носителей* в топологическом пространстве[1]) X называют множество Φ замкнутых подмножеств X, удовлетворяющее трем следующим условиям:

(Ф1) $A, B \in \Phi \Rightarrow A \cup B \in \Phi$;

(Ф2) $\left.\begin{array}{l} A \in \Phi,\ B \subset A, \\ B \text{ — замкнутое множество} \end{array}\right\} \Rightarrow B \in \Phi$;

(Ф3) для всякого $A \in \Phi$ некоторая его окрестность принадлежит семейству Φ[2]).

Примеры. Семейство F всех замкнутых множеств и семейство c всех компактов являются семействами носителей.

Если X — *подпространство* пространства Y и Ψ — семейство носителей в Y, то можно проверить, что семейства

$$\Psi \mid X = \{A \subset X\colon\ A \in \Psi\}$$[3]),

$$\Psi \cap X = \{A = B \cap X\colon\ B \in \Psi\}$$

являются семействами носителей в X.

В частности, $c_Y \mid X = c_X$, $F_Y \cap X = F_X$.

---

[1]) В этом параграфе все топологические пространства предполагаются *локально компактными* и *паракомпактными* [3].

[2]) Условие (Ф3) не очень существенно и будет использоваться лишь в п. 5.6 и 6.5.

[3]) Чтобы это семейство удовлетворяло условию (Ф3), подпространство X *должно быть локально замкнутым* (т. е. быть пересечением открытого и замкнутого подмножеств Y).

5.2. Когомологии с носителями в Ф. Мы не будем здесь давать определения *носителя* коцепи (это довольно тонкий вопрос). Напомним лишь, что в случае многообразий *носителем дифференциальной формы* φ (обозначается $\operatorname{supp}\varphi$) называется наименьшее замкнутое множество, вне которого $\varphi(x)=0$.

Носители коцепей, как и носители дифференциальных форм, — это замкнутые множества, обладающие следующими свойствами:

(supp¹) $\operatorname{supp}(\varphi+\psi)\subset\operatorname{supp}\varphi\cup\operatorname{supp}\psi$;

(supp²) $\operatorname{supp}\delta\varphi\subset\operatorname{supp}\varphi$;

(supp³) $\forall f\colon X\to Y$ и $\forall\psi\in C^*(Y)$

$$\operatorname{supp}f^*\psi\subset f^{-1}(\operatorname{supp}\psi).$$

Пусть Ф — семейство носителей в X. Обозначим через $C^*({}^{\Phi}X)$ *группу коцепей с носителями в* Ф:

$$C^*({}^{\Phi}X)=\{\varphi\in C^*(X)\colon \operatorname{supp}\varphi\in\Phi\}.$$

Вследствие (Ф1) и (supp¹) это действительно *группа*, а вследствие (Ф2) и (supp²) на ней *определено действие гомоморфизма кограницы* δ. Значит, можно построить соответствующую группу *когомологий*:

$H^*({}^{\Phi}X)$ — группа когомологий группы $C^*({}^{\Phi}X)$.

Назовем непрерывное отображение

$$f\colon {}^{\Phi}X\to{}^{\Psi}Y$$

топологических пространств с заданными в них семействами носителей *когомологически допустимым*, если $f^{-1}(\Psi)\subset\Phi$. Из (supp³) следует, что такое отображение индуцирует гомоморфизм

$$f^*\colon C^*({}^{\Psi}Y)\to C^*({}^{\Phi}X)$$

и, значит, гомоморфизм

$$f^*\colon H^*({}^{\Psi}Y)\to H^*({}^{\Phi}X)$$

и что соответствие $f\rightsquigarrow f^*$ является *контравариантным функтором* (определенным на категории допустимых отображений). В частности, если в качестве семейства носителей взято семейство *замкнутых* *множеств*, то *все непрерывные отображения когомологически допустимы* (так как при непрерывном отображении прообраз замкнутого множества замкнут). Поэтому *когомологии с замкнутыми носителями* $H^*({}^FX)$, которые совпадают с «обычными» когомологиями $H^*(X)$, находятся в привилегированном положении.

5.3. Гомологии с носителями в Φ. *Носителем* элемента цепи $[\sigma]$ (обозначается $\operatorname{supp}[\sigma]$) называют образ в X отображения σ; это *компакт* в X (образ компакта Δ при непрерывном отображении σ).

Изменим определение цепи, данное в п. 1.2: потребуем, чтобы формальная линейная комбинация

$$\gamma = \sum_i n_i [\sigma_i]$$

была не конечной, а лишь *локально конечной*, т. е. чтобы всякая точка x имела окрестность U_x, пересекающуюся лишь с конечным числом носителей $[\sigma_i]$. Отсюда легко следует, что множество

$$\operatorname{supp}\gamma = \bigcup_i \operatorname{supp}[\sigma_i]$$

замкнуто. Это множество называют *носителем цепи* γ[1].

Эти замкнутые множества обладают такими свойствами:

(supp_1) $\quad \operatorname{supp}(\gamma+\gamma') = \operatorname{supp}\gamma \cup \operatorname{supp}\gamma'$;

(supp_2) $\quad \operatorname{supp}\partial\gamma \subset \operatorname{supp}\gamma$.

Обозначим через $C_*({}_\Phi X)$ *группу цепей с носителями в семействе* Φ:

$$C_*({}_\Phi X) = \{\gamma \in C_*(X)\colon \operatorname{supp}\gamma \in \Phi\}.$$

Из (Φ1) и (supp_1) следует, что это действительно *группа*, а из (Φ_2) и (supp_2) следует, что на ней опре-

---

[1]) Пользуясь определением цепи, данным в п. 1.2, мы сталкиваемся с той трудностью, что множество $\bigcup \operatorname{supp}[\sigma_i]$, вообще говоря, *зависит* от выбранного представления γ. Эта трудность исчезает, если воспользоваться более современными определениями цепей.

делено действие гомоморфизма границы ∂, и можно построить соответствующую группу *гомологий*:

$$H_*({}_\Phi X) \text{ — группа гомологий группы } C_*({}_\Phi X).$$

Непрерывное отображение

$$f\colon {}_\Phi X \to {}_\Psi Y$$

топологических пространств, снабженных семействами носителей, назовем *гомологически допустимым*, если

(f_1) f является Φ-собственным, т. е. для всякого компакта $K \subset Y$ и $\forall A \in \Phi$ множество $f^{-1}(K) \cap A$ — компакт;

(f_2) $f(\Phi) \subset \Psi$.

Легко видеть, что условие (f_1) эквивалентно следующему:

(f_1') для всякого локально конечного семейства $\{A_i \subset X\}$, такого, что $\bigcup\limits_i A_i \in \Phi$, семейство $\{f(A_i)\}$ локально конечно в Y.

Это условие позволяет определить образ $f_*\gamma$ цепи γ с носителем в Φ, причем носитель этого образа содержится в Ψ благодаря условию (f_2) и очевидному свойству

(supp_3) $\quad \operatorname{supp} f_*(\gamma) = f(\operatorname{supp} \gamma)$

$$\forall f\colon X \to Y \text{ и } \forall \gamma \in C_*(X).$$

Тем самым допустимое отображение индуцирует гомоморфизм

$$f_*\colon H_*({}_\Phi X) \to H_*({}_\Psi Y),$$

и соответствие $f \rightsquigarrow f_*$ является *ковариантным функтором* на категории допустимых отображений.

В частности, если в качестве семейства носителей взять семейство *компактов*, то *все непрерывные отображения гомологически допустимы*, так как

1°. всякое замкнутое подмножество компакта — компакт;

2°. образ компакта при непрерывном отображении компактен.

Кроме того, гомологии с компактными носителями $H_*({}_cX)$ совпадают с обычными гомологиями $H_*(X)$ (так как всякое локально конечное семейство подмножеств компакта *конечно*).

5.4. Изоморфизм Пуанкаре[1]. *Для всякого семейства* Φ *носителей* на компактном n-мерном *ориентируемом* многообразии X существует *канонический изоморфизм*

$$\boxed{H_p({}_\Phi X) \approx H^{n-p}({}^\Phi X)}\,^{2)}$$

между группами гомологий и когомологий с одними и теми же коэффициентами.

Мы не приводим здесь построение этого изоморфизма, так как оно становится естественным лишь в связи с понятием *потока*, вводимым в п. 6; так же как распределение является обобщением обычной функции, потоки представляют собой обобщение дифференциальных форм и одновременно цепей.

5.5. Индекс пересечения. Двойственность Пуанкаре. Рассмотрим билинейную форму

$$\langle \mid \rangle\colon H^p(X) \otimes H_p(X) \to \mathbf{Z},$$

определенную в п. 4.1. Изоморфизм Пуанкаре переводит группу когомологий $H^p(X)$ (с замкнутыми носителями) в группу гомологий $H_{n-p}({}_FX)$, а указанную билинейную форму — в билинейную форму

$$\langle \mid \rangle\colon H_{n-p}({}_FX) \otimes H_p(X) \to \mathbf{Z},$$

которую интерпретируют как *индекс пересечения* циклов; в п. 7 мы поймем точный геометрический смысл этого индекса пересечения.

Двойственность де Рама становится *двойственностью Пуанкаре*:

---

[1] Многие авторы называют этот изоморфизм «двойственностью Пуанкаре».

[2] Следствие. *Все группы гомологий и когомологий размерностей* $>n$ *равны нулю.*

Группа гомологий с замкнутыми носителями $H_{n-p}({}_F X)$ $\mathbf{Z}$-двойственна по модулю кручения группе $H_p(X)$ относительно билинейной формы — индекса пересечения.

Частный случай. Если многообразие X компактно, то семейство замкнутых множеств совпадает с семейством компактов и двойственность Пуанкаре становится двойственностью между обычными гомологиями $H_p(X)$ и $H_{n-p}(X)$; следствие: для всякого ориентируемого связного и компактного n-мерного многообразия X имеем $H_n(X) \approx \mathbf{Z}$.

5.6. Кограница Лере. Пусть X — дифференцируемое многообразие, S — замкнутое подмногообразие коразмерности r. Мы уже отмечали (замечание 3.6), что конструкция 3.5, служащая для построения гомоморфизма δ^*, сопоставляет всякой замкнутой дифференциальной форме φ на S форму $d\psi$ на X, *носитель которой не пересекается с S*. С другой стороны, носитель ψ может быть выбран сколь угодно близким к носителю φ (если взять трубчатую окрестность из п. I. 6.4 достаточно малой). Итак, если $\operatorname{supp} \varphi \in \Phi | S$, где Φ — семейство носителей на X, то в силу аксиомы (Ф3) можно добиться того, что $\operatorname{supp} \psi \in \Phi$ и, значит, $\operatorname{supp} d\psi \in \Phi | X - S$.

Отсюда получаем гомоморфизм [7]

$$\delta^*\colon H^p({}^{\Phi}|S) \to H^{p+1}({}^{\Phi}|X - S).$$

Если многообразия X и S ориентированы, то при помощи изоморфизма Пуанкаре гомоморфизм δ^* переносится на гомологии и порождает гомоморфизм

$$\delta^*\colon H_{q-r}({}_{\Phi}|S) \to H_{q-1}({}_{\Phi}|X - S), \quad q = n - p,$$

который называется *кограницей Лере* и интерпретируется геометрически следующим образом:

ретракция $\mu\colon V \to S$ превращает трубчатую окрестность V в расслоенное пространство (см. п. IV. 2) с базой S и r-мерным шаром в качестве слоя; значит, граница $\dot{V}$ многообразия V расслоена на $(r-1)$-мерные сферы. Кограница Лере раздувает $(q-r)$-мерные циклы S в циклы $X-S$, расслоенные на эти $(r-1)$-мерные сферы.

Частный случай: $\Phi = c$ (семейство компактов в X).

В этом случае $\Phi|S$ и $\Phi|X-S$ будут просто семействами компактов на S и на $X-S$, и кограница Лере запишется в виде

$$\delta^*\colon H_{q-r}(S) \to H_{q-1}(X-S).$$

6. Потоки. Здесь X предполагается n-мерным *ориентированным* дифференцируемым многообразием.

6.1. *Потоком* j на X называется непрерывная[1]) линейная форма на $\Omega({}^cX)$. В частности, *каждая цепь* γ *определяет поток*

$$\gamma[\varphi] = \langle \varphi \mid \gamma \rangle = \int_\gamma \varphi;$$

каждая дифференциальная форма ω *определяет поток*

$$\omega[\varphi] = \int_X \omega \wedge \varphi.$$

Если $j[\varphi]$ отличается от нуля лишь для форм φ степени p, мы будем говорить, что j — поток *размерности* p или *степени* $n-p$. Обозначим через $J_p(X) = J^{n-p}(X)$ векторное пространство потоков размерности p (степени $n-p$).

6.2. Носитель потока. Мы будем говорить, что j — *нулевой поток в открытом множестве* D, если $j[\varphi] = 0$ для всякой дифференциальной формы φ, (компактный) носитель которой содержится в D.

Следующая теорема показывает, что понятие потока *локально*:

---

[1]) Под словом «непрерывная» подразумевается следующее: если φ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ — дифференциальные формы класса C^∞, носители которых содержатся в одном и том же компакте, лежащем в области определения некоторой карты, и коэффициенты которых (вычисленные в этой карте) равномерно стремятся к нулю вместе со всеми своими производными при $i \to \infty$, то $j[\varphi_i] \to 0$.

Теорема. *Если* $j = 0$ *в некоторой окрестности* U_x *каждой точки* $x \in D$, *то* $j = 0$ *в* D.

Действительно, пусть $\{\pi_x\}_{x \in D}$ — локально конечное разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_x\}_{x \in D}$; для всякой формы φ с носителем в D

$$j[\varphi] = j\Big[\sum_x \pi_x\varphi\Big] = \sum_x j[\pi_x\varphi] = 0$$

(так как носитель φ компактен, в сумму входит лишь *конечное* число ненулевых членов, что позволяет использовать линейность j).

Определение. Дополнение к наибольшему открытому множеству, в котором $j = 0$, называется *носителем* j (из предыдущей теоремы ясен смысл понятия «наибольшее открытое множество, в котором $j = 0$»).

Если j — форма (соотв. цепь), это определение совпадает с определением носителя формы (соотв. цепи).

Замечание. Очевидно, выражение $j[\varphi]$ можно определить и для форм с некомпактным носителем при условии, что компактно множество $\operatorname{supp} j \cap \operatorname{supp}\varphi$; более общим образом, можно было бы определить «сходимость» выражения $j[\varphi]$, аналогично тому как определялась сходимость интеграла (п. I. 7.6).

Потоки с носителями из семейства Φ. Обозначим через

$$J_p({}_\Phi X) = J^{n-p}({}_\Phi X)$$

векторное пространство потоков размерности p с носителями из семейства Φ. Пусть $f: {}_\Phi X \to {}_\Psi Y$ — *гомологически допустимое* дифференцируемое отображение (п. 5.3). Покажем, что оно индуцирует линейное отображение $f_*: J_p({}_\Phi X) \to J_p({}_\Psi Y)$, сопряженное к линейному отображению f^* дифференциальных форм (соответствие $f \rightsquigarrow f_*$ будет тогда ковариантным функтором).

Так как f есть Φ-собственное отображение (свойство (f_1) из п. 5.3), то замкнутое множество

$$\operatorname{supp} j \cap \operatorname{supp} f^*\psi \subset \operatorname{supp} j \cap f^{-1}(\operatorname{supp}\psi)$$

компактно для всякого потока j с носителем из Φ и всякой формы ψ с компактным носителем. Поэтому можно определить поток $f_* j$ равенством $(f_* j)[\psi] = j[f^*\psi]$. С другой стороны, легко видеть, что

$$\operatorname{supp} f_* j \subset f(\operatorname{supp} j),$$

и поэтому в силу свойства (f_2) из п. 5.3 $\operatorname{supp} f_* j \in \Psi$.

6.3. Граница и дифференциал потока. Поток ∂j определяется равенством

$$\boxed{\partial j[\varphi] = j[d\varphi].}$$

Из формулы Стокса следует, что это определение совпадает с обычным определением границы, когда поток равен цепи.

Поток dj определяется равенством

$$\boxed{dj = w\,\partial j,}$$

где w — линейный оператор, умножающий поток степени p на $(-)^p$.

Проверим, что это определение совпадает с обычным определением дифференциала, когда поток j равен форме ω:

$$d\omega[\varphi] = \int_X d\omega \wedge \varphi = \int_X d(\omega \wedge \varphi) - w\omega \wedge d\varphi =$$
$$= -\int_X w\omega \wedge d\varphi = -w\omega[d\varphi] =$$
$$= -\partial w\omega[\varphi] = w\,\partial\omega[\varphi].$$

6.4. Гомологии потоков определяются очевидным образом при помощи оператора ∂ или d (это одно и то же), и мы будем обозначать их

$$H_p J({}_\Phi X) = H^{n-p} J({}_\Phi X)$$

для потоков размерности p (степени $n-p$) с носителями из семейства Φ.

6.5. Гомологичность потоков дифференциальным формам. В п. 6.1 мы видели, что всякая дифференциальная форма задает поток, поэтому мы имеем каноническое отображение

$$\Omega({}^{\Phi}X) \to J({}_{\Phi}X).$$

Теорема. *Это каноническое отображение индуцирует изоморфизм групп гомологий*:

$$\boxed{H^p({}^{\Phi}X) \approx H^pJ({}_{\Phi}X).}$$

Идея доказательства состоит в построении *регуляризующего оператора* R_ε, коммутирующего с ∂, который преобразует всякий поток в форму класса C^∞ («сглаживая» его функцией класса C^∞, так же как регуляризуют распределение, превращая его в обычную функцию). Здесь ε — параметр: взяв ε достаточно малым, мы получим оператор R_ε, изменяющий потоки сколь угодно мало. В частности, носитель $R_\varepsilon j$ можно сделать сколь угодно близким к носителю j, так что [в силу аксиомы (Ф3) о семействах носителей] носитель $R_\varepsilon j$ будет принадлежать тому же семейству.

6.6. Гомологичность потоков цепям. Поскольку каждая цепь задает поток (п. 6.1), мы имеем каноническое отображение

$$C_*({}_{\Phi}X) \to J({}_{\Phi}X).$$

Теорема. *Это каноническое отображение индуцирует изоморфизм групп гомологий*:

$$H_p({}_{\Phi}X) \approx H_pJ({}_{\Phi}X).$$

Этот изоморфизм и изоморфизм п. 6.5 *дают изоморфизм Пуанкаре* (п. 5.4).

6.7. Полезный пример: поток, определяемый замкнутым ориентированным подмногообразием. *Замкнутое ориентированное* p-мерное *подмногообразие* S (с краем или без края) очевидным образом определяет p-мерный поток

$$S[\varphi] = \int_S \varphi \,|\, S$$

[мы ввели требование замкнутости S для того, чтобы $\operatorname{supp}(\varphi|S)$ был компактным, если компактен $\operatorname{supp}\varphi$].

Носитель этого потока, очевидно, совпадает с множеством S.

Его *границей* служит, согласно формуле Стокса из п. I. 7.7, поток, определяемый ориентированным подмногообразием ∂S. В частности, если многообразие S не имело границы, оно определяет *замкнутый* поток, т. е. *класс гомологий* пространства X. Однако обратное утверждение, что всякий класс гомологий X может быть представлен некоторым подмногообразием, вообще говоря, *неверно* (это зависит от размерности); этот трудный вопрос входит в теорию кобордизмов Тома [1].

7. Индекс пересечения [1]).

7.1. В п. 5.5 был определен *индекс пересечения* $\langle\gamma'|\gamma\rangle$ двух циклов (или, скорее, их классов гомологий). Попробуем определить (по крайней мере для некоторых случаев) более общее понятие индекса пересечения $\langle k|j\rangle$ двух *потоков* j и k.

Если k совпадает с дифференциальной формой, мы положим $\langle k|j\rangle = j[k]$; это не что иное, как интеграл $\int_j k$, если j — цепь, а если j — тоже дифференциальная форма, то

$$\langle k\mid j\rangle = j[k] = \int_X j \wedge k.$$

Пусть теперь j и k — два каких-нибудь потока. Мы скажем, что выражение $\langle k|j\rangle$ имеет смысл, если для любых регуляризующих операторов R_ε и R'_ε (см. п. 6.5) $\langle R'_\varepsilon k\mid R_\varepsilon j\rangle$ стремится к определенному пределу при $\varepsilon \to 0$, и положим $\langle k|j\rangle$ равным этому пределу.

Если $\operatorname{supp} j \cap \operatorname{supp} k$ компактно, и если одно из двух выражений $\langle k|\partial j\rangle$, $\langle dk|j\rangle$ имеет смысл, то имеет смысл и другое и они равны; действительно,

$$\langle R'k\mid R\,\partial j\rangle = \langle R'k\mid \partial Rj\rangle = \langle dR'k\mid Rj\rangle = \langle R'\,dk\mid Rj\rangle.$$

---

[1]) Его называют также *индексом Кронекера*.

В частности, $\langle k|j\rangle = 0$ всякий раз, когда один из потоков замкнут, а другой гомологичен нулю; отсюда следует, что если j и k — два замкнутых потока ($\partial j = \partial k = 0$), то *$\langle k|j\rangle$ зависит лишь от классов гомологий j и k.*

7.2. Мы будем говорить, что j — поток *класса C^∞ в точке x*, если в некоторой окрестности U_x этой точки он равен дифференциальной форме ω класса C^∞ (т. е. если $j - \omega = 0$ в U_x в смысле п. 6.2). Множество точек, в которых j есть поток класса C^∞, очевидно, открыто. Его дополнение называется *носителем особенностей* потока j. Если $\operatorname{supp} j \cap \operatorname{supp} k$ компактно, и если носители особенностей j и k не пересекаются, то выражение $\langle k|j\rangle$, очевидно, имеет смысл; действительно, локально мы приходим к случаю, когда один из двух потоков — форма класса C^∞. На самом деле благодаря некоторым свойствам регуляризаторов справедлива более сильная (доказанная де Рамом)

Теорема. *Для того чтобы выражение $\langle k|j\rangle$ имело смысл, достаточно, чтобы $\operatorname{supp} j \cap \operatorname{supp} k$ было компактным и чтобы носитель особенностей каждого из этих двух потоков не пересекался с носителем особенностей границы другого.*

7.3. Предположим, что потоки j и k определены *замкнутыми ориентированными подмногообразиями* (*возможно, с краем*) S_1 и S_2 (см. п. 6.7). Заметив, что носитель формы класса C^∞ не может иметь меру нуль, мы видим, что носители особенностей двух этих потоков совпадают с самими множествами S_1 и S_2 (если только размерность одного из этих подмногообразий не равна n).

Предыдущая теорема в данном случае звучит так: *чтобы выражение $\langle S_2|S_1\rangle$ имело смысл, достаточно, чтобы $S_1 \cap S_2$ было компактно и чтобы*

$$\partial S_1 \cap S_2 = S_1 \cap \partial S_2 = \emptyset.$$

Мы укажем простой способ вычисления этого выражения в случае, когда подмногообразия S_1 и S_2 (размерностей p и $n - p$) *пересекаются трансверсально* [10].

Их пересечение состоит в этом случае из конечного числа изолированных точек $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(N)}$ (так как $S_1 \cap S_2$ компактно). Договоримся считать, что ориентации подмногообразий S_1 и S_2 *согласованы* в точке $x^{(i)}$, если система касательных векторов в $x^{(i)}$

$$(V_1,\ V_2, \ldots, V_p,\ W_1,\ W_2, \ldots, W_{n-p}),$$

полученная добавлением к ориентирующему реперу $(V_1,\ V_2,\ \ldots,\ V_p)$ для S_1 ориентирующего репера $(W_1, W_2,\ \ldots,\ W_{n-p})$ для S_2, является ориентирующим репером для выбранной ориентации X.

Теорема. $\langle S_2 | S_1 \rangle = N^+ - N^-$, *где* N^+ (*соотв.* N^-) — *число точек* $x^{(i)}$, *в которых ориентации* S_1 *и* S_2 *согласованы* (*соотв. не согласованы*).

Очевидно, достаточно доказать это в окрестности одной точки $x^{(i)}$. Иначе говоря, достаточно проверить, что если

$X = \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{n-p}$ и ориентация задается векторами $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$;

$S_1 = \mathbf{R}^p$ и ориентация задается векторами $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_p}\right)$;

$S_2 = \mathbf{R}^{n-p}$ и ориентация задается векторами $\left(\frac{\partial}{\partial x_{p+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$,

то $\langle S_2 | S_1 \rangle = 1$. Это проверяется непосредственно с использованием (не излагавшегося здесь) построения регуляризаторов.

7.4. Пример. Пусть X — комплексная сфера комплексной размерности n (действительной размерности $2n$), а S — компактное n-мерное подмногообразие — действительная часть этой сферы. Снабдим X канонической ориентацией комплексного аналитического многообразия, а S — произвольной ориентацией. Тогда индекс пересечения S с самим собой определяется по *формуле Э. Картана* [1]:

$$\langle S \mid S \rangle = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетно;} \\ 2(-)^{n/2}, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$$

Доказательство. Многообразие S не имеет края и определяет поэтому *замкнутый* поток. Согласно п. 7.1, индекс пересечения не изменится, если заменить S подмногообразием S', определяющим гомологичный поток:

$$\langle S' \mid S \rangle = \langle S \mid S \rangle.$$

Выберем S' так, чтобы S' и S пересекались трансверсально и можно было воспользоваться п. 7.3.

Полезно заметить, что комплексная сфера X гомеоморфна *касательному расслоению* над действительной сферой S, т. е. пространству касательных векторов, проведенных во всех точках S: действительно, если

$$z_k = x_k + iy_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

— координаты в $\mathbf{C}^{n+1}$, то уравнение X в $\mathbf{C}^{n+1}$ запишется в виде

$$z \cdot z = \sum_{k=0}^{n} z_k^2 = 1, \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} x \cdot x - y \cdot y = 1, \\ x \cdot y = 0. \end{cases}$$

Сопоставим точке $z \in X$ точку евклидова пространства $\mathbf{R}^{n+1}$ с координатами $\dfrac{x_k}{\sqrt{1 + y \cdot y}}$ и вектор с компонентами y_k и с началом в этой точке; ясно, что при этом будет определен гомеоморфизм X на пространство касательных векторов к единичной сфере $S \subset \mathbf{R}^{n+1}$. При этом всякое векторное поле, касательное к единичной сфере, задает подмногообразие $S' \subset X$, очевидно гомологичное [1]) исходному подмногообразию S (задающему нулевое векторное поле). Таким образом, следуя п. 7.3, мы должны изучить

[1]) Действительно, всякое векторное поле на многообразии, очевидно, гомотопно нулевому векторному полю: достаточно умножить это поле на скаляр λ, стремящийся к нулю.

точки, в которых это векторное поле обращается в нуль. Возьмем, например, векторное поле $y(x)$, заданное координатами (в объемлющем евклидовом пространстве)

$$y_k(x) = \lambda x_k x_0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$
$$y_0(x) = \lambda (x_0^2 - 1),$$

где λ — произвольный положительный параметр (рис. II. 2).

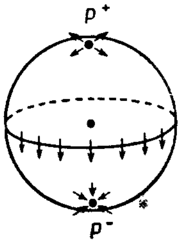


Рис. II.2.

Это действительно поле, касательное к сфере, так как

$$x \cdot y(x) = \lambda x_0 (x \cdot x - 1) = 0.$$

Кроме того, оно обращается в нуль лишь в двух полюсах рассматриваемой сферы

$$P^{\pm}: \ x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0, \qquad x_0 = \pm 1.$$

Около этих полюсов локальная карта сферы задается координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а поле $y(x)$ приблизительно равно $y_k(x) \approx \pm \lambda x_k$ около точек $P^{\pm}$.

Следовательно, если многообразие S задается около P^+ ориентирующим репером

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \ \frac{\partial}{\partial x_2}, \ \ldots, \ \frac{\partial}{\partial x_n},$$

то многообразие S' будет задано ориентирующим репером

$$\frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial}{\partial y_1}, \ \frac{\partial}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial}{\partial y_2}, \ \ldots, \ \frac{\partial}{\partial x_n} + \lambda \frac{\partial}{\partial y_n}$$

(который стремится к предыдущему при $\lambda \to 0$, откуда мы видим, что ориентация S' выбрана корректно) (рис. II. 3).

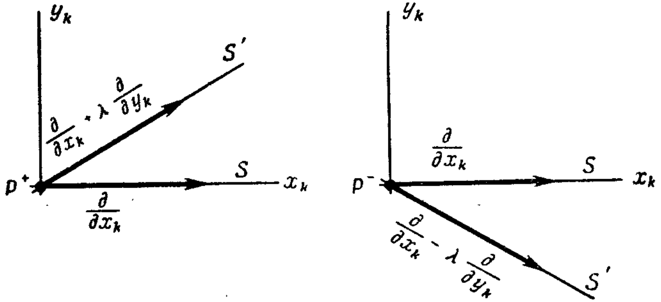


Рис. II. 3.

Вспомнив, что каноническая ориентация комплексного многообразия задается ориентирующим репером

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n},$$

получаем, что ориентирующие реперы S и S' согласуются в точке P^+ с точностью до знака $(-)^{n(n-1)/2}$. Аналогичное рассуждение дает для точки P^- тот же результат, умноженный на $(-1)^n$ [из-за знака минус в уравнениях $y_k(x) = -\lambda x_k$].

Отсюда мы получаем анонсированный результат

$$\langle S' \mid S \rangle = (-)^{n(n-1)/2}(1 + (-)^n).$$

Замечания. (i) Результат для нечетного n можно получить непосредственно ввиду кососимметричности индекса пересечения:

$$\langle S' \mid S \rangle = (-)^{\dim S \dim S'} \langle S \mid S' \rangle,$$

что в нашем случае дает

$$\langle S \mid S \rangle = (-)^{n^2} \langle S \mid S \rangle.$$

(ii) Одним из следствий этого результата для четного n является хорошо известная теорема о том, что непрерывное векторное поле на четномерной сфере где-нибудь обязательно обращается в нуль.

Глава III

ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ ЛЕРЕ

Эта теория обобщает на комплексные аналитические многообразия теорию вычетов Коши. На протяжении всей главы через X будет обозначаться комплексное аналитическое многообразие, а через S (в п. 1—3) — замкнутое аналитическое подмногообразие комплексной коразмерности 1. Локальное уравнение S (с ненулевым градиентом) в окрестности одной из его точек y будет обозначаться $s_y(x) = 0$. Если для S существует глобальное уравнение, мы будем записывать его в виде $s(x) = 0$. Вообще если буква, обозначающая функцию (или дифференциальную форму), встречается с индексом y, это означает, что соответствующая функция (или дифференциальная форма) определена лишь в окрестности $U_y \subset X$ точки $y \in S$.

1. Деление и дифференцирование дифференциальных форм.

1.1. Лемма (локальная) о делении форм. *Если ω_y — дифференциальная форма (регулярная в рассматриваемой окрестности), такая, что $ds_y \wedge \omega_y = 0$, то в той же окрестности существует регулярная форма ψ_y, такая, что*

$$\omega_y = ds_y \wedge \psi_y;$$

ограничение $\psi_y | S$ этой формы зависит лишь от ω_y и s_y; его обозначают

$$\psi_y | S = \frac{\omega_y}{ds_y}\bigg|_S;$$

если ω_y голоморфна в точке y, то ψ_y также может быть выбрана голоморфной в этой точке, и поэтому $\psi_y | S$ голоморфна.

Доказательство. Утверждение станет очевидным, если выбрать в X локальные координаты $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, такие, что $s_y(x) \equiv \xi_1$, и разложить дифференциальные формы по базису, порожденному $d\xi_1, d\xi_2, \ldots, d\xi_n$. В единственности ограничения $\psi_y|S$ убеждаемся, замечая, что если $\omega_y = 0$ (т. е. $d\xi_1 \wedge \wedge \psi_y = 0$), то в разложение ψ_y должен входить множитель $d\xi_1$, но $d\xi_1|S = 0$.

Лемма (глобальная). *Если S задается глобальным уравнением $s(x) = 0$, и если ω — такая регулярная дифференциальная форма на X, что $ds \wedge \omega = 0$, то существует такая регулярная форма ψ на X, что*

$$\omega = ds \wedge \psi;$$

через $\psi|S = \left.\frac{\omega}{ds}\right|_S$ обозначают ограничение этой формы; это ограничение зависит лишь от ω и s; оно голоморфно, если ω голоморфна.

Доказательство. Как и раньше, строим локальные формы ψ_y и соединяем их при помощи разбиения единицы (отметим, что если ω голоморфна, то построенная таким образом форма ψ вовсе не обязана быть голоморфной; в то же время $\psi|S$ голоморфна вследствие локальной леммы).

1.2. Дифференцирование формы. В отличие от деления понятие дифференцирования формы по s вводится в случае, когда s — *глобальное* уравнение.

Пусть ω — *замкнутая регулярная форма на* X, такая, что $ds \wedge \omega = 0$. По лемме 1.1 существует регулярная на X форма ω_1, такая, что $\omega = ds \wedge \omega_1$; так как ω замкнута, то

$$ds \wedge d\omega_1 = -d\omega = 0 \overset{1.1}{\Rightarrow} \exists \omega_2 \colon\ d\omega_1 = ds \wedge \omega_2;$$

но

$$ds \wedge d\omega_2 = -d(d\omega_1) = 0 \overset{1.1}{\Rightarrow}$$

$$\overset{1.1}{\Rightarrow} \exists \omega_3, \ldots, \overset{1.1}{\Rightarrow} \exists \omega_\alpha \colon\ d\omega_{\alpha-1} = ds \wedge \omega_\alpha.$$

На каждом шаге эта конструкция содержит элемент произвола (свобода выбора ψ в лемме 1.1). Тем не менее справедливо

Предложение 1.3. *Класс когомологий* $\omega_\alpha|S$ *в* S *зависит лишь от* ω *и* s.

Доказательство. Достаточно доказать, что если $\omega = 0$, то $\omega_\alpha|S$ когомологична нулю. Мы имеем

$$\omega = ds \wedge \omega_1 = 0 \overset{1.1}{\Rightarrow} \exists\chi_1\colon\ \omega_1 = ds \wedge \chi_1, \quad d\omega_1 = -ds \wedge d\chi_1;$$

но

$$d\omega_1 = ds \wedge \omega_2 \Rightarrow ds \wedge (\omega_2 + d\chi_1) = 0 \overset{1.1}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \exists\chi_2\colon\ \omega_2 = -d\chi_1 + ds \wedge \chi_2, \quad d\omega_2 = -ds \wedge d\chi_2;$$

$$d\omega_2 = ds \wedge \omega_3 \Rightarrow ds \wedge (\omega_3 + d\chi_2) = 0, \ldots \overset{1.1}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \exists\chi_\alpha\colon\ \omega_\alpha = -d\chi_{\alpha-1} + ds \wedge \chi_\alpha.$$

Следовательно,

$$\omega_\alpha|S = d(-\chi_{\alpha-1}|S).$$

1.4. Обозначения. *Класс когомологий* $\omega_\alpha|S$ в S обозначается

$$\left.\frac{d^{\alpha-1}\omega}{ds^\alpha}\right|_S\colon\ \omega_\alpha|S \in \left.\frac{d^{\alpha-1}\omega}{ds^\alpha}\right|_S \in H^*(S).$$

Исходя из этого обозначения, напишем формально

$$\omega_\alpha|S \in \left.\frac{d^{\alpha-1}(ds \wedge \omega_1)}{ds^\alpha}\right|_S = \left.\frac{d^{\alpha-1}\omega_1}{ds^{\alpha-1}}\right|_S,$$

а также, если $\omega = d\omega'$ (по-прежнему предполагается, что $ds \wedge \omega = 0$),

$$\omega_\alpha|S \in \left.\frac{d^{\alpha-1}(d\omega')}{ds^\alpha}\right|_S = \left.\frac{d^\alpha\omega'}{ds^\alpha}\right|_S.$$

Лере показал, что эти обозначения согласованы и что определенные таким образом «производные» подчиняются обычным правилам вычисления производных (формула Лейбница).

1.5. Замечание. Все вышеизложенное можно было проделать аналогичным образом и в случае *действительных* многообразий (считая S многообразием *действительной* коразмерности 1). Именно в этом случае Гельфанд и Шилов [1] вводят понятия деления и дифференцирования форм, чтобы определить «меру Дирака» $\delta(s)$ и ее производные: пусть $X = \mathbf{R}^n$ $S \subset \mathbf{R}^n$ — ориентированное подмногообразие, заданное уравнением $s(x) = 0$; действие $\delta(s)$ на основную функцию $f(x)$ задается равенством

$$\delta(s)[f] = \int\limits_S \frac{\omega}{ds}\Big|_S,$$

где $\omega = f(x)dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$ (заметьте, что как размерность S, так и степень $\frac{\omega}{ds}\Big|_S$ равны $n-1$); аналогично производная $\delta(s)$ порядка α задается равенством

$$\delta^{(\alpha)}(s)[f] = \int\limits_S \frac{d^\alpha\omega}{ds^{\alpha+1}}\Big|_S.$$

Физики постоянно используют эти понятия.

2. Теорема о вычетах в случае простого полюса.

2.1. Лемма (форма-вычет). *Пусть φ — замкнутая регулярная форма в $X - S$, имеющая на S «полярную особенность первого порядка», т. е. $\forall y \in S$ $s_y\varphi$ является ограничением на $X - S$ формы ω_y, регулярной в окрестности y. Тогда в окрестности y существуют регулярные формы ψ_y и θ_y, такие, что*

$$\boxed{\varphi = \frac{ds_y}{s_y} \wedge \psi_y + \theta_y.}$$

Форма $\psi_y|S$ замкнута, зависит только от φ, называется формой-вычетом формы φ и обозначается

$$\boxed{\operatorname{res}[\varphi] = \frac{s_y\varphi}{ds_y}\Big|_S.}$$

Эта форма голоморфна, если φ мероморфна.

Доказательство. (i) *Существование* ψ_y *и* θ_y. Форма $d\omega_y$ регулярна и $ds_y \wedge d\omega_y = 0$ (так как $d\omega_y = ds_y \wedge \varphi$ на $X - S$). Значит, по локальной лемме 1.1 в окрестности y существует такая регулярная форма θ_y, что $d\omega_y = ds_y \wedge \theta_y$.

Форма $s_y(\varphi - \theta_y)$ регулярна и $ds_y \wedge s_y(\varphi - \theta_y) = 0$. Значит, в окрестности y существует такая регулярная форма ψ_y, что

$$s_y(\varphi - \theta_y) = ds_y \wedge \psi_y.$$

(ii) $\psi_y | S$ *зависит лишь от* φ *и* s_y. Достаточно доказать, что если $\varphi = 0$, то $\psi_y | S = 0$. Но

$$\frac{ds_y}{s_y} \wedge \psi_y + \theta_y = 0 \Rightarrow ds_y \wedge \theta_y = 0 \overset{1.1}{\Rightarrow} \exists \theta'_y : \theta_y = ds_y \wedge \theta'_y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ds_y \wedge (\psi_y + s_y \theta'_y) = 0 \overset{1.1}{\Rightarrow} \exists \theta''_y : \psi_y + s_y \theta'_y = ds_y \wedge \theta''_y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_y | S = 0.$$

(iii) $\psi_y | S$ *не зависит от* s_y. Пусть $\overset{*}{s}_y = 0$ — другое локальное уравнение S в окрестности y.

Равенство $\varphi = \dfrac{ds_y}{s_y} \wedge \psi_y + \theta_y$ можно переписать в виде

$$\varphi = \frac{d\overset{*}{s}_y}{\overset{*}{s}_y} \wedge \psi_y + d\left(\ln \frac{s_y}{\overset{*}{s}_y}\right) \wedge \psi_y + \theta_y.$$

Но так как $\dfrac{s_y}{\overset{*}{s}_y}$ — голоморфная функция, не равная нулю в окрестности y, ее логарифм регулярен, поэтому можно положить

$$\theta^*_y = \theta_y + d\left(\ln \frac{s_y}{\overset{*}{s}_y}\right) \wedge \psi_y,$$

$$\psi^*_y = \psi_y.$$

(iv) $\psi_y | S$ *замкнута*. Так как φ замкнута, то

$$\frac{ds_y}{s_y} \wedge d\psi_y - d\theta_y = 0;$$

как и в пункте (ii), отсюда следует, что $d\psi_y | S = 0$.

(v) *Оправдание обозначения* $\operatorname{res}[\varphi] = \left.\dfrac{s_y\varphi}{ds_y}\right|_S$.

В случае когда $ds_y \wedge \varphi = 0$ в окрестности y, конструкцию пункта (i) можно провести с $\theta_y = 0$, и тогда $\psi_y | S$ совпадет с формой $\left.\dfrac{\omega_y}{ds_y}\right|_S$, определенной в лемме 1.1.

2.2. Кограница Лере. В частном случае, который нас здесь интересует ($\operatorname{codim}_{\mathbb{R}} S = 2$), гомоморфизм δ^* из п. II. 5.6 запишется в виде

$$\delta^*\colon H_p(S) \to H_{p+1}(X - S).$$

Уточним его геометрическую интерпретацию.

Пусть $\overline{V}$ — замкнутая трубчатая окрестность подмногообразия S, а $\mu\colon \overline{V} \to S$ — ретракция, превращающая $\overline{V}$ в расслоенное пространство со слоем, изоморфным единичному диску D комплексной плоскости (можно считать, что ограничение комплексной функции s_y на каждый из слоев $\mu^{-1}(y')$ является для y', достаточно близких к y, изоморфизмом этого слоя на диск в комплексной плоскости; при этом на слое возникает каноническая ориентация). Пусть σ — элемент p-мерной цепи в S, который мы будем противозаконно считать ориентированным полиэдром, *вложенным* в S. Множество $\mu^{-1}(\sigma)$ является клеткой, изоморфно произведению диска D на полиэдр σ и определяет в X элемент цепи

$$\mu^*\sigma = D \otimes \sigma$$

(ориентированное произведение ориентированных клеток D и σ). Граница[1]) этой клетки имеет вид

$$\partial\mu^*\sigma = \partial(D \otimes \sigma) = \partial D \otimes \sigma + D \otimes \partial\sigma.$$

Обозначим через $\delta_\mu\colon C_p(S) \to C_{p+1}(X - S)$ гомоморфизм, который элементу цепи σ ставит в соответствие цепь $\partial D \otimes \sigma$. Интуитивно можно себе представлять, что этот гомоморфизм раздувает цепи S в цепи X—S,

[1]) Приведем общую формулу для границы произведения:

$$\partial(\sigma \otimes \tau) = \partial\sigma \otimes \tau + (-1)^{\dim \sigma} \sigma \otimes \partial\tau.$$

расслоенные на окружности ∂D. Гомоморфизм δ_μ антикоммутирует с гомоморфизмом границы, так как

$$\partial\delta_\mu\sigma = \partial(\partial D \otimes \sigma) = -\partial D \otimes \partial\sigma = -\delta_\mu\partial\sigma,$$

и индуцирует поэтому гомоморфизм групп гомологий

$$\delta_*\colon\ H_p(S) \to H_{p+1}(X - S),$$

который совпадает с δ^* с точностью до знака: на самом деле

$$\delta^* = w\delta_*$$

(по поводу этого знака см. формулу п. II. 6.3, связывающую границу и дифференциал потока). В дальнейшем кограницей Лере мы будем называть именно гомоморфизм δ_*, а обозначать его будем просто δ.

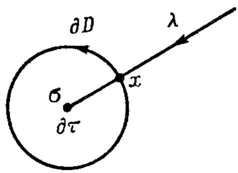


Рис. III. 1.

2.3. Перестановка ∂ и δ. Пусть σ есть p-мерный цикл в S, а τ — относительный $(2n - p - 1)$-мерный цикл в (X, S). Преобразуя σ при помощи изоморфизма Пуанкаре и применяя формулу Стокса, мы видим, что

$$\langle \delta^*\sigma \mid \tau \rangle = \langle \sigma \mid \partial\tau \rangle,$$

т. е.

$$(-)^{p+1} \langle \delta_*\sigma \mid \tau \rangle = \langle \sigma \mid \partial\tau \rangle.$$

Это соотношение можно пояснить следующим геометрическим рассуждением (рис. III. 1).

Предположим, что циклы σ и τ гомологичны[1]) подмногообразиям, так что мы можем использовать определение индекса пересечения II. 7.3, и предположим, что подмногообразие τ пересекает S трансвер-

[1]) В смысле потоков.

сально. Метрику можно выбрать таким образом, что τ будет состоять из геодезических, ортогональных к S. Тогда если ретракция μ определяется с помощью этой метрики, и если $\delta_\mu\sigma$ и τ пересекаются трансверсально в точке x, то σ и $\partial\tau$ пересекаются трансверсально в точке $\mu(x)$. Пусть λ — геодезическая, соединяющая x и $\mu(x)$ и ориентированная к $\mu(x)$. В точке x подмногообразия $\delta_\mu\sigma$ и τ локально могут быть представлены как ориентированные произведения

$$\delta_\mu\sigma = \partial D \otimes \sigma, \qquad \tau = \lambda \otimes \partial\tau,$$

откуда и получается соотношение между ориентациями

$$\varepsilon_X(\tau,\ \delta_\mu\sigma) = \varepsilon_X(\lambda,\ \partial\tau,\ \partial D,\ \sigma) = (-)^p\,\varepsilon_X(\lambda,\ \partial D,\ \partial\tau,\ \sigma) =$$
$$= (-)^p\,\varepsilon_C(\lambda,\ \partial D)\,\varepsilon_S(\partial\tau,\ \sigma) = (-)^{p+1}\,\varepsilon_S(\partial\tau,\ \sigma).$$

2.4. Теорема о вычетах. *Если γ — цикл в S (с компактным носителем) и φ — замкнутая дифференциальная форма в $X - S$, имеющая на S полярную особенность первого порядка, то справедлива формула вычетов:*

$$\boxed{\int\limits_{\delta\gamma} \varphi = 2\pi i \int\limits_{\gamma} \operatorname{res}[\varphi],}$$

где $\operatorname{res}[\varphi]$ — *это форма-вычет* φ, *определенная в* п. 2.1, *а* $\delta\gamma$ — *кограница Лере цикла* γ, *определенная в* п. 2.2.

Доказательство. Рассмотрим семейство представителей $\delta_{\mu_\varepsilon}\gamma$ того класса гомологий, которому принадлежит $\delta\gamma$, определенных ретракциями μ_ε: $\overline{V}_\varepsilon \to S$, где радиус ε трубчатой окрестности $\overline{V}_\varepsilon$ стремится к нулю. Имеем

$$\int\limits_{\delta\gamma} \varphi = \int\limits_{\delta_{\mu_\varepsilon}\gamma} \varphi \text{ для всякого } \varepsilon, \text{ и, значит, } = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\delta_{\mu_\varepsilon}\gamma} \varphi.$$

Пусть σ — один из элементов цепи, входящих в γ, носитель которого заключен в области определения U

какой-нибудь локальной карты многообразия X. При достаточно малом ε носитель $\delta_{\mu_\varepsilon}\sigma$ будет заключен в U, и если в рассматриваемой карте локальное уравнение S задается координатой ξ_1, мы получаем

$$\varphi = \frac{d\xi_1}{\xi_1} \wedge \psi + \theta \quad \text{в} \quad U$$

и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\delta_{\mu_\varepsilon}\sigma} \varphi = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D_\varepsilon \otimes \sigma} \frac{d\xi_1}{\xi_1} \wedge \psi =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{d\xi_1}{\xi_1} \int_\sigma \psi \,|\, S = 2\pi i \int_\sigma \psi \,|\, S = 2\pi i \int_\sigma \operatorname{res}[\varphi].$$

2.5. Следствие. *Класс когомологий* $\operatorname{res}[\varphi]$ *в* S *зависит только от класса когомологий* φ *в* $X - S$. *Его называют «класс-вычет» формы* φ *и обозначают* $\operatorname{Res}[\varphi]$.

Доказательство. Если φ когомологична нулю в $X - S$, то ее интеграл по всякому циклу в $X - S$ (и, в частности, по всякому циклу вида $\delta\gamma$) равен нулю. Поэтому $\int_\gamma \operatorname{res}[\varphi]$ равен нулю по всякому циклу γ в S. Но в силу теоремы де Рама из этого следует, что $\operatorname{res}[\varphi]$ когомологичен нулю в S.

3. Теорема о вычетах в случае кратного полюса.

3.1. Теорема существования «класса-вычета» (Ж. Лере). *Всякая форма* φ, *регулярная и замкнутая в* $X - S$, *когомологична в* $X - S$ *некоторой форме* $\tilde{\varphi}$, *имеющей на* S *простой полюс.*

Определение. Класс когомологий $\operatorname{res}[\tilde{\varphi}]$, однозначно определенный в силу следствия 2.5, называется *классом-вычетом* φ и обозначается $\operatorname{Res}[\varphi]$.

Мы приводим эту теорему без доказательства; в п. 3.3 будет указан случай, когда форму $\tilde{\varphi}$ легко построить в явном виде.

3.2. Теорема о вычетах (непосредственное следствие п. 2.4 и 3.1). *Если* γ — *цикл в* S (*с компактным носителем*), *а* φ — *дифференциальная форма,* *«замкнутая» в $X - S$, то имеет место формула вычетов*

$$\boxed{\int\limits_{\delta\gamma} \varphi = 2\pi i \int\limits_{\gamma} \operatorname{Res}[\varphi],}$$

где $\operatorname{Res}[\varphi]$ — *это класс-вычет* φ, *существование которого следует из теоремы* 3.1.

3.3. Построение класса-вычета в случае, когда S задается глобальным уравнением. *Предположения*: S задается глобальным уравнением $s(x) = 0$; форма φ имеет на S полярную особенность порядка α $(\alpha > 1)$, иначе говоря, $s^{\alpha}\varphi$ продолжается до формы ω, регулярной на X.

Задача состоит в построении формы $\tilde{\varphi}$, когомологичной в $X - S$ форме φ и имеющей на S полярную особенность первого порядка.

Тем же рассуждением, что и в п. 2.1 (i) (но с использованием *глобальной* леммы 1.1), доказывается существование таких регулярных в X форм ψ и θ, что

$$\varphi = \frac{ds}{s^{a}} \wedge \psi + \frac{\theta}{s^{\alpha-1}}.$$

Отсюда

$$\varphi = d\left(-\frac{1}{\alpha-1}\frac{\psi}{s^{\alpha-1}}\right) + \frac{1}{s^{\alpha-1}}\left(\frac{d\psi}{\alpha-1} + \theta\right),$$

т. е. φ когомологична в $X - S$ форме

$$\frac{\theta_1}{s^{\alpha-1}} = \frac{1}{s^{\alpha-1}}\left(\frac{d\psi}{\alpha-1} + \theta\right),$$

которая имеет на S полярную особенность порядка $\alpha - 1$. Форма $\tilde{\varphi}$ строится, таким образом, индукцией по α.

3.4. Связь с понятием производной формы. Допустим, что наряду с предположениями п. 3.3 выполнено еще предположение $ds \wedge \varphi = 0$. В этом случае форма $\omega = s^{\alpha}\varphi$ регулярна и *замкнута* в

$X: d\omega = \alpha s^{\alpha-1} ds \wedge \varphi = 0$ и, очевидно, $ds \wedge \omega = 0$. Тем самым выполнено предположение п. 1.2, и из п. 3.3 видно, что класс-вычет $\operatorname{Res}[\varphi]$ совпадает с умноженным на $\frac{1}{(\alpha-1)!}$ классом $\left.\frac{d^{\alpha-1}\omega}{ds^{\alpha}}\right|_S$, определенным в п. 1.2:

$$\operatorname{Res}[\varphi] = \frac{1}{(\alpha-1)!} \left.\frac{d^{\alpha-1}\omega}{ds^{\alpha}}\right|_S.$$

В общем случае Лере рассматривает это равенство как *определение* символа $\left.\frac{d^{\alpha-1}\omega}{ds^{\alpha}}\right|_S$ и показывает, что это определение согласуется с обычными правилами действий с производными (ср. п. 1.4).

4. Сложные вычеты

4.1. Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_m$ — замкнутые аналитические подмногообразия X комплексной коразмерности 1, *пересекающиеся в общем положении*, т. е. такие, что в окрестности каждой точки пересечения

$$y \in S^I = \bigcap_{i \in I} S_i \quad (I \subset \{1, 2, \ldots, m\})$$

дифференциалы ds_{iy} $(i \in I)$ линейно независимы (s_{iy} обозначает локальное уравнение S_i в окрестности точки y). В этом случае каждое из пересечений S^I является вследствие п. I. 4.5 *комплексным аналитическим подмногообразием в* S^J при $J \subset I$ комплексной коразмерности $|I| - |J|$. Таким образом, рассматривая вместо пары (X, S) из предыдущих пунктов соответствующую пару многообразий, можно построить последовательность *«гомоморфизмов-вычетов»*:

$$H^p(X - S_1 \cup \ldots \cup S_m) \xrightarrow{\operatorname{Res}_1}$$

$$\xrightarrow{\operatorname{Res}_1} H^{p-1}(S_1 - S_2 \cup \ldots \cup S_m) \xrightarrow{\operatorname{Res}_2}$$

$$\xrightarrow{\operatorname{Res}_2} H^{p-2}(S_1 \cap S_2 - S_3 \cup \ldots \cup S_m) \xrightarrow{\operatorname{Res}_3} \ldots \xrightarrow{\operatorname{Res}_m}$$

$$\xrightarrow{\operatorname{Res}_m} H^{p-m}(S_1 \cap \ldots \cap S_m),$$

а также последовательность гомоморфизмов — *кограниц Лере*:

$$H_p(X - S_1 \cup \ldots \cup S_m) \xleftarrow{\delta_1} H_{p-1}(S_1 - S_2 \cup \ldots \cup S_m) \xleftarrow{\delta_2}$$
$$\xleftarrow{\delta_2} H_{p-2}(S_1 \cap S_2 - S_3 \cup \ldots \cup S_m) \xleftarrow{\delta_3} \ldots \xleftarrow{\delta_m}$$
$$\xleftarrow{\delta_m} H_{p-m}(S_1 \cap \ldots \cap S_m).$$

Композициями этих гомоморфизмов являются гомоморфизмы

$$H^p(X - S_1 \cup \ldots \cup S_m) \xrightarrow{\mathrm{Res}^m} H^{p-m}(S_1 \cap \ldots \cap S_m),$$
$$H_p(X - S_1 \cup \ldots \cup S_m) \xleftarrow{\delta^m} H_{p-m}(S_1 \cap \ldots \cap S_m),$$

связанные *формулой сложных вычетов*

$$\int_{\delta^m \gamma} \varphi = (2\pi i)^m \int_{\gamma} \mathrm{Res}^m [\varphi]$$

(достаточно m раз применить формулу обычных вычетов).

4.2. Кососимметричность сложной кограницы. Мы получаем из γ цикл

$$\delta^m \gamma = \delta_1 \circ \delta_2 \circ \ldots \circ \delta_m \gamma,$$

расслоенный на ориентированное произведение m окружностей [1])

$$\partial D_1 \otimes \partial D_2 \otimes \ldots \otimes \partial D_m.$$

Поэтому для всякой перестановки η символов $\{1, 2, \ldots, m\}$ имеем

$$\delta_{\eta_1} \circ \delta_{\eta_2} \circ \ldots \circ \delta_{\eta_m} \gamma = (-)^{\eta} \delta_1 \circ \delta_2 \circ \ldots \circ \delta_m \gamma,$$

где $(-)^{\eta}$ — знак перестановки. Иначе говоря, операция сложной кограницы *кососимметрична* по индексам

[1]) Заметьте, что сложная кограница δ^m не имеет ничего общего с кограницей

$$\delta^*: H_p(S_1 \cap \ldots \cap S_m) \to H_{p+2m-1}(X - S_1 \cap \ldots \cap S_m),$$

получаемой при применении определения из п. II. 5.6 к подмногообразию $S_1 \cap \ldots \cap S_m \subset X$.

1, 2, ..., m, и, значит, то же самое верно по отношению к сложному вычету.

4.3. Вычисление сложных вычетов. Сложный вычет формы φ, имеющей на $S_1, S_2, \ldots, S_m$ полярные особенности порядков $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, обозначается

$$\operatorname{Res}^m[\varphi] = \frac{1}{(\alpha_1-1)!\ldots(\alpha_m-1)!}\,\frac{d^{\alpha_1+\ldots+\alpha_m-m}\omega}{ds_1^{\alpha_1}\wedge ds_2^{\alpha_2}\wedge\ldots\wedge ds_m^{\alpha_m}}\Bigg|_{S_1\cap\ldots\cap S_m},$$

где $\omega = s_1^{\alpha_1}s_2^{\alpha_2}\ldots s_m^{\alpha_m}\varphi$, и вычисляется методами предыдущих пунктов.

Если $s_1, s_2, \ldots, s_m$ — *глобальные* уравнения, и если ω — такая дифференциальная форма, регулярная в окрестности $S_1, S_2, \ldots, S_m$, что

$$ds_1\wedge\ldots\wedge ds_m\wedge d\omega = 0,$$

то полагают

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_m}\omega}{\partial s_1^{\alpha_1}\ldots\partial s_m^{\alpha_m}}\Bigg|_S = \frac{d^{\alpha_1+\ldots+\alpha_m}[ds_1\wedge\ldots\wedge ds_m\wedge\omega]}{ds_1^{1+\alpha_1}\wedge\ldots\wedge ds_m^{1+\alpha_m}}\Bigg|_S.$$

Определенные таким образом *частные производные* подчиняются всем обычным правилам действий с частными производными (симметрия по индексам, формула Лейбница, формула замены переменных).

5. Обобщение на относительные гомологии. Все понятия предыдущих пунктов легко обобщаются на случай относительных гомологий и когомологий. Для двух комплексных аналитических подмногообразий S и S' комплексной коразмерности 1, *пересекающихся в общем положении*, определяют кограницу Лере

$$\delta\colon H_p(S, S') \to H_{p+1}(X-S, S')$$

при помощи той же конструкции, что и в п. 2.2, лишь выбирая ретракцию μ таким образом, чтобы $\mu(S')\subset \subset S'$ (для этого в окрестности S выбирают такую метрику, чтобы S' состояло из геодезических, ортогональных к S). Аналогично определяется гомоморфизм Res:

$$\mathrm{Res}\colon H^{p+1}(X - S,\ S') \to H^p(S,\ S').$$

Формула вычетов не изменится:

$$\int_{\delta\gamma} \varphi = 2\pi i \int_{\gamma} \mathrm{Res}\,[\varphi],$$

но γ в этом случае является *относительным* циклом в $(S,\ S')$, а φ — такой замкнутой дифференциальной формой в $X - S$, что $\varphi \mid S' = 0$.

Глава IV

ТЕОРЕМА ИЗОТОПИИ ТОМА

1. Объемлющая изотопия [1]**.** Напомним, что гомеоморфизмом двух пар топологических пространств g: $(X, A) \approx (Y, B)$ называется такой гомеоморфизм g: $X \approx Y$, что $g|A$: $A \approx B$ ($A \subset X$, $B \subset Y$ — подпространства).

1.1. Гомеоморфизм

$$g: (X, S_0) \approx (X, S_1)$$

называется *объемлющей изотопией* S_0 в X [2]), если в X существует такое семейство подпространств $\{S_\tau\}_{\tau \in [0,1]}$, соединяющее S_0 и S_1, и такое семейство *непрерывно зависящих от* τ [3]) *гомеоморфизмов* $g_\tau: (X, S_0) \approx \approx (X, S_\tau)$, что g_0 — тождественное отображение, $g_1 = g$.

Подпространства S_0 и S_1 называются в этом случае *изотопными в* X. Отметим, что задать объемлющую изотопию — это значит лишь задать гомеоморфизм g; «соединяющие семейства» $\{S_\tau\}$ и $\{g_\tau\}$ при этом не заданы, и только предполагается, что они существуют; явное задание этих семейств мы назовем *реализацией* объемлющей изотопии. Семейство гомео-

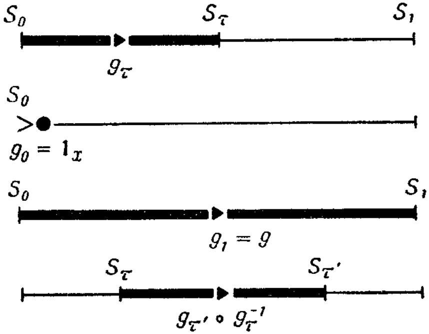
---

[1]) Хотя это понятие интересно и само по себе, можно прочитать сначала п. 1 гл. VI, где объясняется, зачем оно введено.

[2]) Более точно, *объемлющей изотопией* S_0 в S_1 *внутри* X. [Употребляется также термин *«окружающая» изотопия* (см. Хуа и Теплиц [1]). — *Прим. перев.*]

[3]) Иначе говоря, отображение $G: X \times [0, 1] \to X$, определенное равенством $G(x, \tau) = g_\tau(x)$, непрерывно.

морфизмов, реализующих объемлющую изотопию, удобно представлять в виде такой диаграммы:



1.2. Назовем две объемлющие изотопии

$$g,\ h\colon\ (X,\ S_0) \approx (X,\ S_1)$$

эквивалентными (обозначается $g \equiv h$), если существуют реализации этих изотопий с *одним и тем же* семейством соединяющих пространств $\{S_\tau\}$. Соотношение $g \equiv h$ действительно является *отношением эквивалентности*: свойства рефлексивности и симметрии, очевидно, выполняются, а свойство транзитивности вытекает из следующей леммы.

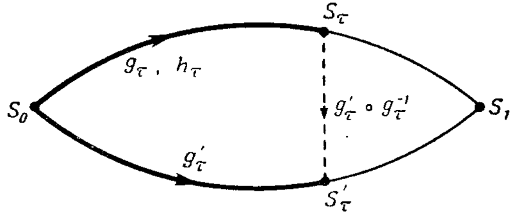
1.3. Лемма. *Пусть* $g \overset{S_\tau}{\equiv} h$ — *две объемлющие изотопии, реализованные с помощью семейств отображений*

$$g_\tau,\ h_\tau\ :\ (X,\ S_0) \approx (X,\ S_\tau);$$

если существует другое семейство соединяющих пространств S'_τ, *реализующее* g, *то с его помощью можно реализовать также и* h.

Действительно, пусть $g'_\tau\colon\ (X,\ S_0) \approx (X,\ S'_\tau)$ — вторая реализация g; тогда h реализуется при помощи семейства

$$h'_\tau = g'_\tau \circ g_\tau^{-1} \circ h_\tau \colon (X, S_0) \approx (X, S'_\tau).$$

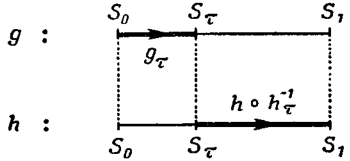


Определение. Назовем *классами объемлющей изотопии* классы эквивалентности по отношению $\equiv$.

1.4. Теорема. *Две эквивалентные объемлющие изотопии гомотопны.*

Действительно, если $g \overset{S_\tau}{\equiv} h$, то семейство отображений $\gamma_\tau = h \circ h_\tau^{-1} \circ g_\tau$ реализует гомотопию

$$g \simeq h \colon (X, S_0) \approx (X, S_1).$$



1.5. Следствие. *Две эквивалентные объемлющие изотопии индуцируют один и тот же изоморфизм групп гомологий*:

$$g \equiv h \Rightarrow g_* = h_* \colon H_*({}_\Phi X, S_0) \approx H_*({}_\Phi X, S_1),$$
$$\text{или } H_*({}_\Phi| X - S_0) \approx H_*({}_\Phi| X - S_1),$$
$$\text{или } H_*({}_\Phi| S_0) \approx H_*({}_\Phi| S_1)$$

для всякого семейства носителей Φ, *инвариантного относительно гомеоморфизмов.*

1.6. Пример. Пусть

$X = \mathbf{C}$ — (комплексная плоскость);
$S_0 = S_1$ — множество, состоящее из двух точек $x = +1$, $x = -1$;
g — тождественное отображение;
h — симметрия относительно центра 0: $h(x) = -x$.

Гомеоморфизмы g и h: $(X, S_0) \approx (X, S_0)$ являются объемлющими изотопиями S_0 в X: их можно реализовать при помощи семейств

$$S_\tau = S_0, \quad g_\tau = 1_X;$$
$$S'_\tau = \{x = e^{i\pi\tau}, \quad x = -e^{i\pi\tau}\},$$
$$h_\tau \text{ — поворот на угол } \pi\tau : h_\tau(x) = e^{i\pi\tau}x.$$

Эти изотопии не эквивалентны, так как

$$g_*\colon\ H_0(S_0) \to H_0(S_0)$$

— тождественный автоморфизм, а

$$h_*\colon\ H_0(S_0) \to H_0(S_0)$$

— автоморфизм, переставляющий образующие $H_0(S_0)$, ибо h переставляет точки $x = +1$, $x = -1$.

2. Расслоенные пространства

2.1. *Расслоенным пространством* называют топологическое пространство Y, в котором определена такая *проекция* (непрерывное отображение на)

$$\pi\colon\ Y \to T$$

на пространство T, которое называется *базой*, что для всякого $t \in T$ пространство $Y_t = \pi^{-1}(t)$ гомеоморфно заданному пространству X, называемому *слоем*; Y_t называется слоем над t.

Тривиальный пример. Прямое произведение $X \times T$ с очевидной проекцией на T.

Расслоенным отображением f: $Y \to Y'$ расслоенного пространства Y в расслоенное пространство Y' *с той же базой* T называется непрерывное отображение, коммутирующее с проекцией, т. е. такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & Y' \arrow[d, "\pi'"] \\ & T \end{tikzcd}$$

коммутативна. Иначе говоря, f переводит слой Y_t в слой Y'_t над той же точкой t. В частности, если $Y = X \times T$, а $Y = X' \times T$, то задать расслоенное отображение f — это значит указать семейство непрерывных отображений f_t: $X \to X'$, непрерывно зависящих от t.

Если задано непрерывное отображение k: $T' \to T$, то каждому расслоению Y со слоем X и базой T мы сопоставим естественным образом расслоение Y' с *тем же слоем* X, но с базой T', требуя, чтобы диаграмма

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "\bar{k}"] \arrow[d, "\pi'"] & Y \arrow[d, "\pi"] \\ T' \arrow[r, "k"] & T \end{tikzcd}$$

была коммутативна. Это расслоение назовем *прообразом расслоения Y при отображении k* [обозначается $Y' = k^{-1}(Y)$].

Построение осуществляется следующим образом: пространство Y' — это подпространство в $Y \times T'$, состоящее из тех точек (y, t'), для которых $\pi(y) = k(t')$, а отображения π' и $\bar{k}$ определены равенствами

$$\pi'(y, t') = t', \quad \bar{k}(y, t') = y.$$

Частный случай: T' — подпространство T, k — естественное вложение. В этом случае $k^{-1}(Y)$ — подпространство в Y, состоящее из точек, проектирующихся в T'; мы скажем, что $k^{-1}(Y)$ является *ограничением расслоения Y на T'* [обозначается $k^{-1}(Y) = Y|T'$].

Сечением σ расслоенного пространства Y называется такое непрерывное отображение σ: $T \to Y$, для которого $\pi \circ \sigma = 1_T$. Другими словами, сечение сопоставляет каждой точке t базы точку слоя Y_t, причем это соответствие непрерывно по t.

2.2. Тривиальное расслоенное пространство. Расслоенное пространство Y называется *тривиальным*, если существует *расслоенный гомеоморфизм* f: $Y \approx X \times T$, т. е. такой гомеоморфизм f, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & X \times T \arrow[d, "\pi'"] \\ & T \end{tikzcd}$$

коммутативна. Такой гомеоморфизм f называется *тривиализацией* расслоения Y.

Примеры нетривиальных расслоенных пространств.

2.3. Пусть $Y = T = \mathbf{C} - \{0\}$ — комплексная плоскость с выброшенным началом координат, π: $Y \to T$ — отображение $\pi(y) = y^2$. Слой Y_t состоит из двух точек

$$y = \sqrt{t} \quad \text{и} \quad y = -\sqrt{t}.$$

Значит, X — пространство, состоящее из двух точек; при этом Y не гомеоморфно $X \times T$, так как Y связно, а $X \times T$ нет.

2.4. Пусть T есть n-мерное дифференцируемое многообразие, Y — касательное расслоение к этому многообразию (см. пример II. 7.4).

В этом случае Y_t — касательное пространство к многообразию в точке t и, значит, слой X представляет собой n-мерное векторное пространство. Сечением Y является непрерывное векторное поле на T. Легко видеть, что касательное расслоение к *сфере четной размерности* нетривиально: действительно, в п. II. 7.4 было доказано, что любые два сечения этого расслоения обязательно пересекаются, что неверно в случае тривиального расслоения.

2.5. Локально тривиальное расслоенное пространство. Расслоенное пространство Y называется *локально тривиальным*, если для всякой точки t его базы существует окрестность Θ_t, такая, что $Y|\Theta_t$ является тривиальным расслоением [8].

Часто, говоря о расслоенном пространстве, подразумевают, что оно локально тривиально. Все пространства, рассмотренные нами в примерах, локально тривиальны. Классическая теорема гласит, что *всякое локально тривиальное расслоение со стягиваемой базой тривиально*[1].

Другое полезное (и очевидное) свойство: прообраз (локально) тривиального расслоения (локально) тривиален.

2.6. Расслоенные пары. Предыдущие понятия естественно распространяются на пары топологических пространств (см. п. II. 2.11). *Расслоенной парой* с базой T назовем пару (Y, S), для которой определена такая проекция π: $Y \to T$, что для всякой точки $t \in T$ пара (Y_t, S_t) гомеоморфна заданной паре (X, S_0) [через S_t мы обозначили $\pi^{-1}(t) \cap S$]. Расслоенную пару назовем *тривиальной*, если существует такой расслоенный гомеоморфизм f: $Y \approx X \times T$, что $f|S : S \approx S_0 \times T$. Аналогично определяется локально тривиальная расслоенная пара.

Класс изотопии, связанный с путем. Пусть $(X \times T, S)$ — *локально тривиальная* расслоенная пара с базой T, λ: $[0, 1] \to T$ — путь в T. Расслоенная пара $\lambda^{-1}(X \times T, S)$ локально тривиальна и имеет стягиваемую базу $[0, 1]$, следовательно, она тривиальна.

Тривиализовать эту пару — значит задать непрерывное семейство гомеоморфизмов

$$f_\tau : X \approx X, \text{ таких, что } f_\tau | S_{\lambda(\tau)} : S_{\lambda(\tau)} \approx S_0,$$

т. е. *объемлющую изотопию*

$$g = f_1^{-1} \circ f_0 : (X, S_{\lambda(0)}) \approx (X, S_{\lambda(1)}),$$

класс которой, очевидно, зависит лишь от пути, а не от выбора тривиализации.

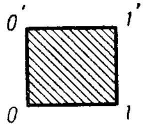
Покажем, что в действительности *этот класс зависит лишь от гомотопического класса пути.* Действи-

[1] База предполагается локально компактной и паракомпактной.

тельно, пусть λ и λ' — два гомотопных пути с общими концами

$$t_0 = \lambda(0) = \lambda'(0) \quad \text{и} \quad t_1 = \lambda(1) = \lambda'(1).$$

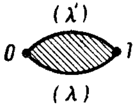
Гомотопия (с фиксированными концами) между двумя этими путями задается таким непрерывным отображением Λ квадрата



в T, что

$$\Lambda \mid [0, 1] = \lambda, \ \Lambda \mid [0', 1'] = \lambda', \ \Lambda([0, 0']) = t_0, \ \Lambda([1, 1')] = t_1.$$

Отождествляя все точки сегментов $[0, 0']$ и $[1, 1']$, мы приходим к непрерывному отображению Λ_* фигуры



в T. Расслоение $\Lambda_*^{-1}(X \times T, S)$ локально тривиально, имеет стягиваемую базу и, следовательно, тривиально. Ограничивая тривиализацию $f_\tau : X \approx X$ этого расслоения

мы получаем тривиализации $\lambda^{-1}(X \times T, S)$ и $\lambda'^{-1}(X \times T, S)$. Значит, гомеоморфизм $g = f_1^{-1} \circ f_0$ является объемлющей изотопией, *связанной с двумя путями* λ и λ'.

2.7. Пример. Пусть $X = \mathbf{C}$, $T = \mathbf{C} - \{0\}$, S — подмногообразие $X \times T$, заданное уравнением $x^2 - t = 0$. Расслоенная пара $(X \times T, S)$ локально тривиальна, ее слоем является пара $(X, S_1 = \{x = 1, x = -1\})$. С путем λ: $[0, 1] \to T$, определенным равенством $\lambda(\tau) = e^{2i\pi\tau}$, можно связать объемлющую изотопию h из примера 1.6.

3. Стратифицированные множества

3.0. Пример. Рассмотрим в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^3$ поверхность S, заданную уравнением

$$x^2-y^2z=0 \quad (\text{рис. IV.1}),$$

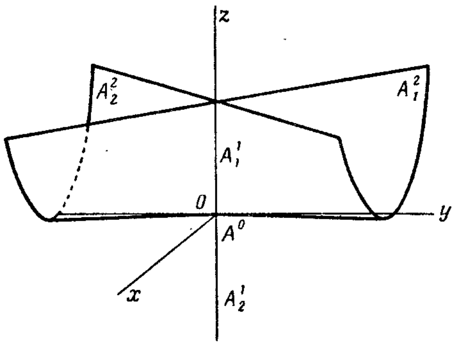


Рис. IV.1.

и разложим ее в сумму *многообразий* следующим образом:

$$S=A_1^2\cup A_2^2\cup A_1^1\cup A_2^1\cup A^0,$$

где

$$A_1^2=S\cap\{y>0\}, \qquad A_2^2=S\cap\{y<0\},$$
$$A_1^1=\{x=y=0,\ z>0\}, \qquad A_2^1=\{x=y=0,\ z<0\},$$
$$A^0=\{x=y=z=0\}.$$

Как говорят в таком случае, мы *стратифицировали* множество S; многообразия A называются при этом *стратами. Границей страта* A называется множество $\partial A=\bar{A}-A$. В рассматриваемом частном случае

$$\partial A_1^2=\partial A_2^2=A_1^1\cup A^0, \qquad \partial A_1^1=\partial A_2^1=A^0, \qquad \partial A^0=\varnothing.$$

3.1. Первичная стратификация. Пусть Y есть p-мерное дифференцируемое многообразие, S —

замкнутое подмножество Y. Скажем, что на S задана *первичная стратификация*, если в S построена *последовательность вложенных замкнутых множеств*

$$S = S^{p_1} \supset S^{p_2} \supset \ldots \supset S^{p_\lambda} \supset \ldots, \quad p_1 > p_2 > \ldots > p_\lambda > \ldots,$$

таких, что выполнены следующие два свойства:

1°. (*свойство стратов*) $S^{p_\lambda} - S^{p_{\lambda+1}}$ — *дифференцируемое подмногообразие* Y размерности p_λ, связные компоненты которого $A_i^{p_\lambda}$ (предполагается, что их конечное число) называются *стратами* [1]);

2°. (*свойство границы*) граница $\partial A = \bar{A} - A$ каждого из стратов A является объединением стратов, размерность которых строго меньше размерности A.

3.2. Пример. Если в примере 3.0 в качестве стратов взять подмногообразия $\overset{2}{A_1}$, $\overset{2}{A_2}$ и $\overset{1}{A} = \{x = y = 0\}$, то свойство границы не будет выполнено.

3.3. Первичная стратификация комплексного аналитического множества. Обозначим через σ операцию, сопоставляющую каждому комплексному аналитическому множеству S аналитическое множество $\sigma(S)$ его особых точек. Используя три операции: σ, $\cap$ и «разложение на неприводимые компоненты», — можно всякому аналитическому множеству S сопоставить семейство *неприводимых* аналитических множеств S_α. Положим $A_\alpha = S_\alpha - \bigcup\limits_{\beta < \alpha} S_\beta$, где $\beta < \alpha$ означает, что S_β строго вложено в S_α. По построению A_α является *аналитическим подмногообразием*; из неприводимости S_α следует, что A_α *связно* и $\bar{A}_\alpha = S_\alpha$ (см. Абъянкар [1, § 44 C]), так что

$$\partial A_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} S_\beta,$$

т. е. свойство границы выполнено. Таким образом, мы построили каноническую первичную стратификацию S.

[1]) Многообразие отрицательной размерности по определению пусто.

3.4. Пример. Снова рассмотрим пример 3.0, но уже в пространстве $\mathbf{C}^3$, а не в $\mathbf{R}^3$. Описанная выше каноническая конструкция приводит к семейству множеств

$$\{S^2 = S,\ S^1 = \sigma(S) = \text{ось } z\}$$

и канонической стратификации

$$A^2 = S - S^1, \quad A^1 = S^1.$$

3.5. Пример. Пусть $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_m$ — объединение *замкнутых подмногообразий, находящихся в общем положении*. Данная выше каноническая конструкция приводит к семейству аналитических множеств без особенностей [1])

$$S_i,\ S_i \cap S_j,\quad S_i \cap S_j \cap S_k,\ \ldots,$$

т. е. к стратификации

$$A_i = S_i - \bigcup_{j \neq i} (S_i \cap S_j),$$
$$A_{ij} = S_i \cap S_j - \bigcup_{k \neq i \neq j} S_i \cap S_j \cap S_k,\ \ldots.$$

3.6. Регулярное примыкание. Скажем, что страт A примыкает к страту B (обозначается $A \prec B$), если $A \subset \partial B$. Совокупность стратов B, к которым примыкает A, называется *звездой* A.

Чтобы дать определение *стратификации*, исходя из первичной стратификации, введем дополнительные условия *регулярного примыкания*. Эти условия локальны, так что объемлющее многообразие Y можно считать евклидовым пространством [9]. Обозначим через $T_a(A)$ гиперплоскость (в евклидовом пространстве Y), касательную к страту A в точке $a \in A$. Назовем страты $A \prec B$ *регулярно примыкающими в точке* $a \in A$, если всякая точка $b \in B$, пробегающая некоторую окрестность точки a, удовлетворяет двум следующим условиям (так называемые *условия* А *и* В *Уитни*):

А) угол между $T_b(B)$ и $T_a(A)$ стремится к нулю одновременно с $|b - a|$;

---

[1]) Точнее, это связные компоненты ($\Leftrightarrow$ неприводимые компоненты) указанных многообразий.

В) если $r\colon B\to A$ — локальная ретракция[1]) B на A, то угол между вектором $\overrightarrow{b, r(b)}$ и плоскостью $T_b(B)$ стремится к нулю одновременно с $|b-a|$ [2]).

Примеры.

3.7. Рассмотрим пример 3.2 (скорее даже 3.4, если мы хотим, чтобы выполнялось свойство границы; впрочем, это несущественно). В точке, лежащей на оси y, касательная плоскость к страту A^2 горизонтальна и, значит, ортогональна страту A^1, т. е. для стратов $A^1 \prec A^2$ условие А Уитни не выполняется в начале координат.

3.8. Пусть $S\subset \mathbf{R}^3$ — поверхность, заданная уравнением

$$y(y-z^2)+x^2=0$$

(«утончающийся» конус, рис. IV. 2). Возьмем в качестве стратов

$$A^1 = \text{ось } z, \quad A^2 = S - A^1.$$

Пусть $r\colon A^2\to A^1$ — ортогональная проекция A^2 на ось A^1. Когда точка b стремится к нулю по параболе $A^2\cap\{x=0\}$, касательная плоскость $T_b(A^2)$ становится ортогональной к направлению $\overrightarrow{b, r(b)}$; следовательно, условие В в начале координат для стратов $A^1\prec A^2$ не выполнено.

3.9. Пусть $S\subset \mathbf{R}^3$ — цилиндр (рис. IV. 3), заданный в цилиндрических координатах (ρ, θ, z) уравнением $\rho = e^{\theta}$; возьмем в качестве страта A^1 ось z, $A^2 = S - A^1$.

---

[1]) То есть такое отображение $r\colon B\to A$ (определенное в окрестности точки a), что $r\cup \mathbf{1}_A\colon B\cup A\to A$ непрерывно. Строго говоря, именно $r\cup \mathbf{1}_A$ является ретракцией. Для построения r можно расслоить Y параллельными гиперплоскостями, трансверсальными A в точке a, и определить $r(b)$ как точку пересечения с A гиперплоскости, проходящей через b.

[2]) Заметим, что если А выполнено, то из выполнения условия В для некоторой ретракции r следует, что В выполняется для любой ретракции.

Свойство В не выполняется для стратов $A^1 \prec A^2$ ни в одной точке [угол между плоскостью $T_b(A^2)$ и $\overrightarrow{b, r(b)}$ постоянен]. Заметим, что свойство А выполняется, хотя у плоскости $T_b(A^2)$ нет предельного положения

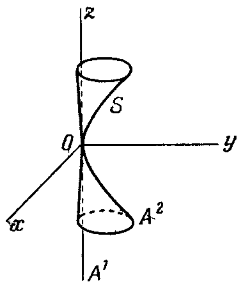


Рис. IV.2.

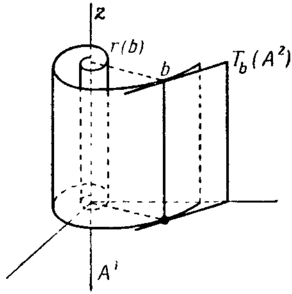


Рис. IV.3.

при $b \to A^1$. Именно поэтому условие А не было сформулировано так:

A′) $$\boxed{\lim_{b \to a} T_b(B) \supset T_a(A).}$$

Определение. Назовем первичную стратификацию *стратификацией*, если всякая пара примыкающих стратов $A \prec B$ *регулярно примыкает* во всех точках $a \in A$. Например, если первичные стратификации примеров 3.7, 3.8 измельчить, добавив страт нулевой размерности — начало координат, то получится настоящая стратификация.

4. Теорема изотопии Тома

4.1. В п. 2.6 мы видели, каким образом объемлющая изотопия связана с локально тривиальными расслоенными парами. Теорема Тома позволяет убедиться в локальной тривиальности *дифференцируемой* расслоенной пары: мы предполагаем, что $\pi\colon Y \to T$ — дифференцируемое отображение многообразия Y в *связное* многообразие T, а S — стратифицированное подмножество Y. Для упрощения формулировок заметим, что если задана стратификация подмножества $S \subset Y$, то можно задать стратификацию всего Y: достаточно взять связные компоненты $Y - S$ в качестве дополнительных стратов. Скажем, что *стратифицированное множество Y является* (локально) *тривиальным расслоением*, если существуют стратифицированное множество X и (локальный) расслоенный гомеоморфизм $f\colon Y \approx X \times T$, отображающий каждый страт из Y в произведение некоторого страта из X на многообразие T. Это свойство, очевидно, влечет за собой (локальную) тривиальность пары (Y, S), и если выбранная стратификация не слишком тонка по отношению к топологической структуре S[1]), то оно эквивалентно локальной тривиальности.

Итак, пусть $Y \xrightarrow{\pi} T$ — локально тривиальное стратифицированное расслоение. Предположим сначала, что реализующий локальную тривиализацию гомеоморфизм f является диффеоморфизмом. Тогда ясно, что отображение каждого страта из Y на T является *субмерсией*, т. е. *ранг ограничения π на каждый страт равен размерности T*[2]). Теорема Тома представляет собой в некотором смысле обращение этого замечания в случае, когда проекция π — собственное отображение[3]).

Теорема о тривиальности. Пусть Y — стратифицированное множество[4]), а $\pi\colon Y \to T$ — такое собственное дифференцируемое отображение Y на связное дифференцируемое многообразие T, что *ограничение π на каждый страт Y имеет ранг, равный размерности T*. Тогда Y является *локально тривиальным стратифицированным расслоением*[5]).

---

[1]) Более точно, если всякий гомеоморфизм $f\colon (X, S) \approx (X, S)$ оставляет каждый страт из S глобально инвариантным.

[2]) Если T связно, то это отображение даже сюръективно.

[3]) Если $Y = X \times T$, то это последнее условие эквивалентно компактности X.

[4]) При доказательстве этой теоремы Том придает слову «стратифицированный» несколько иной смысл, слегка изменяя условия регулярного примыкания (см. раздел «Источники», IV).

[5]) В теореме ничего не говорится о *дифференцируемости* тривиализующего гомеоморфизма f. И действительно, известны примеры, когда f нельзя сделать диффеоморфизмом.

В случае когда π не есть собственное отображение, легко привести противоречащие примеры.

4.2. Пример (рис. IV. 4). Пусть π — ортогональная проекция плоскости $Y = \mathbf{R}^2$ на ось $T = \mathbf{R}$, S — гипербола $xt = 1$, разложенная на два страта (две ветви гиперболы).

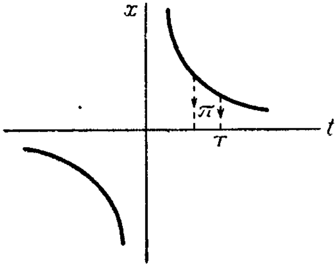


Рис. IV. 4.

Ограничение π на каждый из стратов имеет ранг 1, однако в начале координат локальной тривиальности нет.

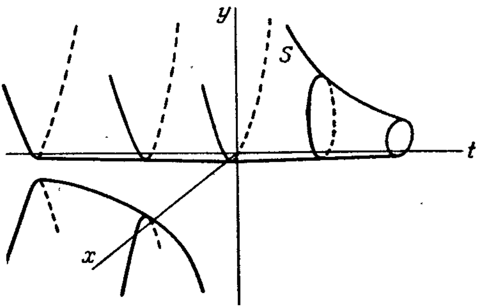


Рис. IV. 5.

4.3. Пример (рис. IV. 5). А вот контрпример, где ограничение π даже сюръективно: π — ортогональная проекция пространства $\mathbf{R}^3 \ni (x, y, t)$ на ось t, S — поверхность, заданная уравнением

$$s \equiv x^2 + ty^2 - y = 0, \qquad y \geqslant 0.$$

Поверхность S сама по себе является стратом [S — многообразие, так как дифференциал $ds = 2xdx + (2ty - 1)dy + y^2dt$ нигде на S не обращается в нуль]; отображение $\pi|S$, очевидно, сюръективно; это отображение ранга 1, поскольку dt и ds не пропорциональны нигде на S. Однако в начале координат нет локальной тривиальности (когда t проходит через нуль, S_t из эллипса превращается в ветвь гиперболы).

4.4. Критические множества. Видимые контуры. Пусть π: $Y \to T$ — дифференцируемое отображение стратифицированного множества Y на дифференцируемое многообразие T. Для всякого страта A из Y назовем *критическим множеством страта* A множество cA тех точек A, где $\operatorname{rang}(\pi|A) < \dim T$[1]).

4.5. Лемма. *Если* $A \prec B$, *то* $A \cap \overline{cB} \subset cA$.

Это легко выводится из свойства А Уитни. Для простоты используем свойство А′: пусть a — точка A, входящая в $\overline{cB}$; согласно свойству А′, имеем $T_a(A) \subset \lim\limits_{b \to a} T_b(B)$. Но для $cB \ni b \to a$ касательная гиперплоскость $T_b(B)$ проектируется в гиперплоскость размерности $\leqslant q-1$; значит, то же самое справедливо относительно гиперплоскостей $\lim\limits_{b \to a} T_b(B)$ и $T_a(A)$.

4.6. Следствие. *Объединение критических множеств cB по всем стратам B из Y является замкнутым множеством.*

Действительно,

$$\overline{cB} = cB \cup (\overline{cB} \cap \partial B) = cB \cup \bigcup_{A \prec B} (\overline{cB} \cap A) \subset cB \cup \bigcup_{A \prec B} cA$$

в силу леммы 4.5. Так как число стратов конечно, получаем

$$\overline{\bigcup_B cB} = \bigcup_B \overline{cB} = \bigcup_B cB.$$

---

[1]) Отметим различие между этим определением и обычным определением критического множества: если $\dim A < \dim T$, то *все многообразие A будет критическим.*

Видимые контуры. Замкнутые множества $\overline{cA}$ (соотв. $\bigcup_A cA$) назовем *видимыми контурами в прообразе* страта A (соотв. стратифицированного множества Y).

Предположим, что проекция π — *собственное отображение*. Тогда всякое замкнутое подмножество из Y проектируется в замкнутое подмножество из T[1]. Замкнутые множества $\overline{\pi(cA)} = \pi(\overline{cA})$ $\left(\text{соотв. } \bigcup_A \pi(cA)\right)$ назовем *видимыми контурами в образе*, или, короче, *видимыми контурами* страта A (соотв. стратифицированного множества Y).

Из теоремы Тома о тривиальности немедленно получаем следующее предложение:

Пусть π: $Y \to T$ — *собственное* дифференцируемое отображение стратифицированного множества Y на дифференцируемое многообразие T, и пусть L — *видимый контур* Y; на каждой связной компоненте Θ множества $T - L$ стратифицированное множество $Y|\Theta$ является *локально тривиальным расслоением.*

5. «Многообразия» Ландау.

5.1. Пусть π: $Y^p \to T^q$ — *аналитическое собственное* отображение комплексных аналитических многообразий, комплексные размерности которых равны соответственно p и q. Предположим, что многообразие Y *аналитически стратифицировано*, т. е. определяющие его стратификацию замкнутые вложенные множества $Y = S^{p_0} \supset S^{p_1} \supset S^{p_2} \supset \ldots$ являются *комплексными аналитическими множествами.* Замыканием страта A является в этом случае комплексное аналитическое множество S_A — неприводимая компонента одного из S^{p_i}.

5.2. Лемма. *Видимый контур в прообразе $\overline{cA}$ является комплексным аналитическим множеством.*

Действительно, пусть p_A — размерность A, и пусть

$$\{s_1(y),\ s_2(y),\ \ldots,\ s_r(y)\}$$

[1] Простое упражнение из общей топологии: используется лишь тот факт, что T локально компактно.

— набор аналитических функций, локально порождающих идеал множества S_A (п. I. 8.3). Пусть $t_1(y)$, $t_2(y)$, ..., $t_q(y)$ — аналитические функции, локально определяющие проекцию π: $Y^p \to T^q$.

Определим аналитическое подмножество $\Sigma_A \subset S_A$ условием, что на Σ_A, помимо функций s_i, обращаются в нуль все миноры порядка $p - p_A + q$ матрицы

$$(ST)\quad \begin{array}{c} \\ k=1 \\ \vdots \\ p \end{array} \begin{array}{c|c} i=1, \ldots, r & j=1, \ldots, q \\ \hline \dfrac{\partial s_i}{\partial y_k} & \dfrac{\partial t_j}{\partial y_k} \end{array}.$$

Тогда $\Sigma_A \cap A = cA$. Действительно, на многообразии A ранг матрицы $\left\| \dfrac{\partial s_i}{\partial y_k} \right\|$ равен $p - p_A$; предположим для определенности, что верхний левый минор порядка $p - p_A$ не обращается в нуль в окрестности некоторой точки $a \in A$; из этого следует, что в окрестности a координаты $y_1, y_2, \ldots, y_p$ можно заменить координатами

$$y'_1 = s_1(y), \ \ldots, \ y'_{p-p_A} = s_{p-p_A}(y),$$
$$y'_{p-p_A+1} = y_{p-p_A+1}, \ \ldots, \ y'_p = y_p;$$

в этих новых координатах матрица (ST) будет выглядеть так:

$$\begin{array}{c} \\ k=1 \\ \vdots \\ p-p_A \\ \vdots \\ p \end{array} \begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{i=1, \ldots, p-p_A, \ldots, r} & j=1, \ldots, q \\ \hline \begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{matrix} & ? & ? \\ \hline 0 & 0 & \dfrac{\partial t_j}{\partial y'_k} \end{array}$$

Обращение в нуль всех миноров (ST) порядка $p - p_A + q$ эквивалентно обращению в нуль всех миноров порядка q матрицы

$$\left\| \frac{\partial t_j}{\partial y'_k} \right\|_{k=p-p_A+1, \ldots, p}^{j=1, \ldots, q},$$

которая задает линейное отображение, касательное к $\pi | A$.

Таким образом, действительно

$$\Sigma_A \cap A = cA, \text{ т. е. } cA = \Sigma_A - \Sigma_A \cap \partial A,$$

и так как Σ_A и ∂A — комплексные аналитические множества, мы получаем, что $\overline{cA}$ — *комплексное аналитическое множество* — связная компонента Σ_A (см. Абъянкар [1, § 44, C]).

5.3. Следствие. *Видимый контур* (в образе) $\pi(\overline{cA})$ *является комплексным аналитическим множеством.* Это следует из теоремы Реммерта [1] (см. также Ганнинг и Росси [1]) об образе комплексного аналитического множества при собственном аналитическом отображении.

«Многообразия» Ландау. Аналитическое множество $LA = \pi(\overline{cA})$ — видимый контур страта A — мы назовем *«многообразием»* [1]) *Ландау страта A*. В дальнейшем нас будут интересовать лишь «многообразия» Ландау коразмерности 1, поэтому мы предполагаем, что

$$\boxed{p_A \geqslant q - 1.}$$

5.4. Особенности «многообразий» Ландау. При изучении особенностей «многообразий» Ландау мы воспользуемся результатами Тома [2] об осо-

[1]) Слово «миогообразие» (взятое в кавычки) употребляется здесь в смысле аиглийского «variety», а не «manifold»: речь идет об аналитических множествах, вообще говоря, с особенностями.

бенностях критических множеств аналитических отображений[1]). Основным понятием, благодаря которому оказывается возможным систематическое изучение вопроса, служит понятие отображения *общего положения*, к несчастью, слишком тонкое, чтобы мы могли его здесь точно привести; отметим лишь, что

1°. всякое отображение аппроксимируется отображением общего положения;

2°. всякое отображение, достаточно близкое к отображению общего положения, является отображением общего положения.

Приведем несколько результатов Тома: для отображений общего положения, во-первых,

$$\boxed{\dim cA = \dim \pi(cA) = q - 1;}$$

во-вторых, множество точек, где $\operatorname{rang}(\pi|A) = q - 1$ [*критические точки коранга*[2]) 1], *не имеет особенностей*; если, кроме того, в некоторой критической точке $\operatorname{rang}(\pi|cA) = q - 1$, то эта точка называется *простой* коранга 1; таким образом, ограничение π на множество простых критических точек коранга 1 является *погружением* многообразий.

Приведем один результат в частном случае при $\boxed{q = 2}$[3]):

Для отображений π общего положения все критические точки имеют коранг 1, т. е. критическая кривая cA не имеет особенностей; особые критические точки (точки, где ранг $\pi|cA$ равен нулю, а не единице) являются изолированными и проектируются в точки возврата кривой $\pi(cA)$.

1) На самом деле Тома интересует *действительный дифференцируемый* случай, но большинство его рассуждений легко переносится на комплексный аналитический случай (там, где речь идет лишь о локальной структуре).

2) Речь идет о *коранге в образе*, равном по определению размерности образа минус раиг.

3) Частные случаи $q = 3$ и $q = 4$ также были исследованы Томом исчерпывающим образом.

5.5. Пример. Пусть A — *тор*, вложенный в евклидово пространство $\mathbf{R}^3$, и пусть π — ортогональная проекция этого тора на плоскость $\mathbf{R}^2$ (плоскость рисунка). Если угол между осью тора и этой плоскостью достаточно мал, то проекция будет выглядеть, как на рис. IV. 6 или как на рис. IV. 7.

Критическая кривая cA не имеет особенностей. На рисунке изображена проекция этой критической кривой; у проекции есть четыре точки возврата a, b, a',

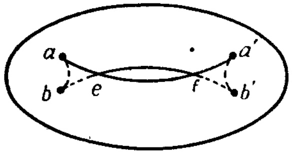


Рис. IV. 6.

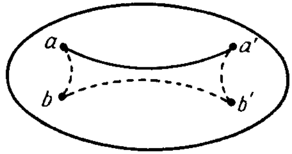


Рис. IV. 7.

b' — проекции точек, где касательная к cA перпендикулярна к плоскости рисунка. Неустранимость точек возврата для отображения π общего положения[1]) проявляется в том, что они сохраняются при малых изменениях угла между осью и плоскостью. Заметим, что на рис. IV. 6 есть также две двойные точки e и f, но соответствующие ветви критической кривой в прообразе не пересекаются; тем самым эти точки нельзя обнаружить при *локальном* исследовании *прообраза*.

5.6. Многообразия Ландау примыкающих стратов. Назовем точку $u \in LA \cap LB$ *точкой истинного*[2]) *пересечения* многообразий Ландау LA и LB, если она является проекцией точки

$$a \in \overline{cA} \cap \overline{cB}.$$

[1]) Эта *устойчивость* точек возврата кривых Ландау оказалась неприятной неожиданностью для физиков, которые, столкнувшись с ней в одном примере (см. Иден, Ландшоф, Полкингорн, Тэйлор [1]), решили, что их пример в каком-то смысле «патологичен».

[2]) Употребляется также термин «эффективное пересечение» (см. Хуа и Теплиц [1]). — *Прим. перев.*

Предположим, что $A \prec B$ и что a — простая критическая точка коранга 1 страта A. Пусть $b \in cB$ — простая критическая точка коранга 1 страта B; когда b стремится к a, угол между касательными плоскостями $T_a(A)$ и $T_b(B)$ стремится к нулю, так же как и угол

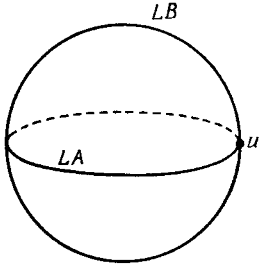


Рис. IV. 8.

между их проекциями; положив $u = \pi(a)$, $v = \pi(b)$, мы получаем, что при $v \to u$ касательная $(q-1)$-плоскость $T_v(LB)$ стремится к касательной $(q-1)$-плоскости $T_u(LA)$. Иначе говоря, *в точке истинного пересечения многообразия Ландау двух примыкающих стратов касаются друг друга.*

5.7. Пример (рис. IV. 8): B — сфера, A — окружность большого круга этой сферы, π — проекция на плоскость рисунка.

Глава V

ВЕТВЛЕНИЕ ВОКРУГ «МНОГООБРАЗИЙ» ЛАНДАУ

1. Изложение проблемы.

1.0. Фундаментальная группа топологического пространства. Напомним, что *путем* α с началом u и концом v в топологическом пространстве T называется непрерывное отображение α: $[0, 1] \to T$, такое, что $\alpha(0) = u$, $\alpha(1) = v$. Если конец v пути α совпадает с началом u' пути α', то можно определить путь $\alpha' \cdot \alpha$ с началом u и концом v', полагая

$$(\alpha' \cdot \alpha)(\tau) = \begin{cases} \alpha(2\tau) & \text{при} \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1/2, \\ \alpha'(2\tau - 1) & \text{при} \quad 1/2 \leqslant \tau \leqslant 1. \end{cases}$$

Интуитивно путь $\alpha' \cdot \alpha$ можно представлять себе в виде последовательно проходимых путей α и α'.

Через α^{-1} мы обозначим путь α, проходимый в обратном направлении, т. е. путь с началом v и концом u, заданный равенством

$$\alpha^{-1}(\tau) = \alpha(1 - \tau).$$

Два пути α и α' *с одним и тем же началом* u и *одним и тем же концом* v называются *гомотопными*, если их можно соединить непрерывно зависящим от параметра τ семейством путей α_τ с *началом* u и *концом* v.

Гомотопность путей является отношением эквивалентности, согласованным с определенным выше законом умножения путей, так что можно говорить о произведении двух гомотопических классов путей, естественно, при условии, что концы путей первого класса совпадают с началами путей второго.

Фиксируем в T раз и навсегда точку u_0 и рассмотрим множество всевозможных путей (называемых *пет-*

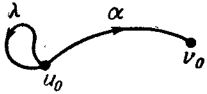
лями с началом u_0), начинающихся и кончающихся в точке u_0. Множество *гомотопических классов петель с началом* u_0 с приведенным законом умножения является *группой:* единичным элементом служит класс постоянной петли (той, которая отображает [0, 1] в точку u_0); обратным к классу петли λ является класс петли λ^{-1}. Эту группу называют *фундаментальной группой* (или одномерной гомотопической группой) *с началом* u_0 *топологического пространства* T и обозначают $\pi_1(T, u_0)$.

Что произойдет, если начальную точку u_0 заменить другой точкой v_0? Пусть α — путь с началом u_0 и концом v_0 [1]). Соответствие

$$[\alpha]\colon\ \pi_1(T, u_0) \to \pi_1(T, v_0),$$

определенное равенством

$$[\alpha](\lambda) = \alpha \cdot \lambda \cdot \alpha^{-1},$$



очевидно, является *гомоморфизмом*, который зависит лишь от *гомотопического класса* α; при этом $[\alpha^{-1}]$ является обратным гомоморфизмом, так что α — изоморфизм [2]). Этот изоморфизм удобно описывать в терминах деформаций петель.

Петля $[\alpha](\lambda) = \alpha \cdot \lambda \cdot \alpha^{-1}$ *получается при деформации петли* λ, *при которой начальная точка проходит путь* α.

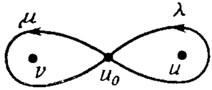
В частности, положив $u_0 = v_0$, мы получаем геометрическую интерпретацию *внутренних автоморфизмов* группы $\pi_1(T, u_0)$.

---

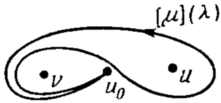
[1]) Всегда предполагается, что пространство T линейно связно и такой путь существует.

[2]) Таким образом, каждый раз, когда фундаментальная группа интересует нас лишь с точностью до изоморфизма, излишне указывать начальную точку.

Пример[1]). Пусть $T = \mathbf{R}^2 - \{u, v\}$ — плоскость с двумя выколотыми точками. Тогда $\pi_1(T, u_0)$ — свободная (не абелева) группа, порожденная λ и μ:



Элемент $[\mu](\lambda)$ может быть представлен петлей.



1.1. Изложим теперь центральную проблему этой главы. Пусть $Y^p = X^n \times T^q$ $(p = n + q)$ — произведение комплексных аналитических многообразий, причем многообразие X предполагается *компактным*, и пусть $\pi\colon Y \to T$ — естественная проекция[2]). Пусть S — аналитически стратифицированное подмножество Y, L — «многообразие» Ландау, видимый контур S в T. В предыдущей главе мы видели, что $(Y, S) \mid T - L$ является локально тривиальной расслоенной парой; значит, всякий гомотопический класс $\lambda \in \pi_1(T - L, u_0)$ определяет класс объемлющей изотопии S_{u_0} в слое Y_{u_0} и, следовательно, автоморфизм

$$\lambda_*\colon H_*(Y_{u_0}, S_{u_0}) \to H_*(Y_{u_0}, S_{u_0})$$

или

$$H_*(Y_{u_0} - S_{u_0}) \to H_*(Y_{u_0} - S_{u_0})$$

. . . .

Соответствие $\lambda \rightsquigarrow \lambda_*$ определяет гомоморфизм $*$ фундаментальной группы базы в группу автоморфизмов H_*:

$$*\colon \pi_1(T - L, u_0) \to \operatorname{Aut} H_*(Y_{u_0}, S_{u_0}),$$

---

[1]) Впредь ни в формулировках, ни в обозначениях мы не будем различать *петлю* и ее гомотопический класс, так что практически нарисовать петлю — это значит представить гомотопический класс петли при помощи ориентированной линии.

[2]) Дополнительное предположение (см. предыдущую главу) о том, что Y является произведением, сделано лишь для удобства изложения.

и настоящая глава в основном посвящена изучению этого гомоморфизма.

Чтобы дать его точное описание, нам придется сделать два следующих предположения:

Предположение 1[1]): *S является объединением замкнутых подмногообразий S_1, S_2, ... комплексной коразмерности* 1, *находящихся в общем положении* (с очевидной стратификацией).

Всякий страт A в S представляется в виде

$$A = S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_m - \bigcup_{k>m} S_k$$

и для всякой точки $a \in A$ существуют окрестность V, не пересекающаяся с S_k при $k > m$, и такие координаты $y_1, \ldots, y_p$, что $S_i \cap V$ лежит в гиперплоскости $y_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, причем точка a совпадает с началом координат. Положим $\pi(V) = W$ и введем в W локальные координаты $t_1, t_2, \ldots, t_q$ с началом в точке $u = \pi(a)$; ограничение проекции π на V будет задаваться тогда системой аналитических функций $t_1(y)$, $t_2(y), \ldots, t_q(y)$. Заметим, что мы предпочли выбрать координаты, в которых S_i записываются простым способом, рискуя упустить из виду структуру произведения в Y.

Предположение 2: *T односвязно, т. е.* $\pi_1(T) = 0$.

Назовем *простой петлей* с началом u_0 петлю λ, построенную следующим образом: мы задаем

1°. регулярную точку $u \in L$ многообразия Ландау L комплексной коразмерности 1;

2°. путь θ в $T - L$ с началом u_0 и концом u_1, близким к u;

3°. такие координаты $t_1, t_2, \ldots, t_q$ в окрестности точки u, что L определяется уравнением $t_1 = 0$. После этого фиксируем переменные $t_2, \ldots, t_q$, заставляем

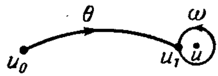
---

[1]) Мы делаем это предположение в связи с невозможностью изучить все мыслимые стратификации. Отметим в то же время, что одна недавно доказанная теорема позволяет заменить произвольное аналитическое множество множеством, удовлетворяющим предположению 1, при помощи процедуры «разрешения особенностей» (Хиронака [1]).

комплексную переменную t_1 описать малую окружность в положительном направлении вокруг начала координат и определяем, таким образом, *малую петлю* ω с началом u_1.

Простая петля λ задается равенством

$$\lambda = [\theta^{-1}](\omega) = \theta^{-1} \cdot \omega \cdot \theta.$$



1.2. Предложение. $\pi_1(T) = 0 \Leftrightarrow \pi_1(T - L)$ порождается простыми петлями.

Импликация $\Leftarrow$ очевидна, так как всякая малая петля, а значит, и всякая простая петля, гомотопна нулю в T.

Чтобы доказать $\Rightarrow$, надо показать, что всякая петля λ в $T - L$ с началом в u_0 гомотопна произведению простых петель. По предположению λ гомотопна нулю в T, т. е. существует непрерывное отображение $\Lambda : \square \to T$ квадрата в пространство T, совпадающее с λ на нижней стороне квадрата и переводящее три другие стороны в точку u_0. По классической теореме теории гомотопий непрерывное отображение Λ можно приблизить дифференцируемым отображением Λ'; последнее в свою очередь (по *теореме о трансверсальности*) можно приблизить отображением Λ'', *трансверсальным*[1]) на L. Но $\Lambda''^{-1}(L)$ состоит из конечного числа изолированных точек, так как $\Lambda''^{-1}(L)$ замкнуто в компакте $\square$, и эти точки $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ являются прообразами регулярных точек L действительной коразмерности 2.

После этого достаточно заменить нижнюю сторону квадрата, которую мы рассматриваем как путь в $\square$,

[1]) Понятие отображения, *трансверсального на стратифицированном множестве*, определяется в [10]. Мы здесь используем доказанный Уитни [3] факт, что всякое комплексное аналитическое множество можно стратифицировать; в этом случае точки стратов максимальной размерности, очевидно, являются регулярными.

последовательностью простых петель, как это сделано на рис. V. 1, и отобразить все это в $T - L$ при помощи отображения Λ''.

2. Простой пинч. Формулы Пикара — Лефшеца.

2.1. Описание простого пинча. Допустим, что *a — простая критическая точка страта A коранга в образе* 1 (в обозначениях п. 1, предположения 1),

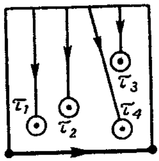


Рис. V.1.

не входящая в замыкание критических множеств других стратов. Как известно, в случае общего положения критическое множество cA в окрестности a не имеет особенностей и изоморфно проектируется на LA. Поэтому можно выбрать такие локальные координаты, что

$$LA \cap W = \{t_1 = 0\},$$

$$cA \cap V = \{y_1 = y_2 = \ldots = y_{n+1} = 0\} \subset A \cap V =$$
$$= \{y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 0\},$$
$$t_2(y) = y_{n+2}, \ldots, t_q(y) = y_p$$

(действительно, из того, что $\pi | cA \cap V$: $cA \cap V \to LA \cap W$ является изоморфизмом, следует, что якобиан $t_2, \ldots, t_q$ по $y_{n+2}, \ldots, y_p$ не обращается в нуль).

Таким образом, остается определить лишь функцию $t_1(y)$. В случае общего положения ее ограничение на A будет иметь (ср. Том) на cA квадратичную особенность, и можно добиться того, чтобы эта функция записывалась в виде

$$t_1(0, \ldots, 0, y_{m+1}, \ldots, y_p) = y_{m+1}^2 + \ldots + y_{n+1}^2.$$

Кроме того, так как a не является критической ни для одного из многообразий, входящих в звезду страта A, каждый из членов $y_1, \ldots, y_m$ должен входить в функцию $t_1(y)$ линейным образом, и, значит, эта функция запишется в виде

$$t_1(y) = y_1 + y_2 + \ldots + y_m + y_{m+1}^2 + \ldots + y_{n+1}^2.$$

Сформулируем теперь все это в терминах структуры расслоения Y. Если положить

$$x_1 = y_2, \quad x_2 = y_3, \ldots, \quad x_n = y_{n+1},$$

то очевидно, что в окрестности V в системе координат $(x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_q)$ проекция π запишется просто $(x, t) \overset{\pi}{\rightsquigarrow} (t)$. В этой новой системе уравнения многообразий $S_1, S_2, \ldots, S_m$ примут вид

$$\begin{aligned}
&s_1(x, t) \equiv t_1 - (x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} + x_m^2 + \ldots + x_n^2) = 0,\\
&s_2(x, t) \equiv x_1 = 0,\\
&s_3(x, t) \equiv x_2 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&s_m(x, t) \equiv x_{m-1} = 0.
\end{aligned}$$

Внутри слоя $Y_t \approx X$ многообразия $S_{it} = Y_t \cap S_i$ находятся в общем положении всюду, кроме гиперплоскости $t_1 = 0$, где, как мы скажем, они имеют *простой пинч* или *квадратичный пинч*. Более точно, выражение «квадратичный пинч» относится лишь к случаю $m \leqslant n$, когда квадратичные члены действительно входят в $s_1(x, t)$, а случай $m = n + 1$ будет называться *линейным пинчем*:

$$\begin{aligned}
&s_1(x, t) \equiv t_1 - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = 0,\\
&s_2(x, t) \equiv x_1 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&s_{n+1}(x, t) \equiv x_n = 0.
\end{aligned}$$

[Это случай, когда многообразие Ландау LA является просто *проекцией* страта A размерности $q - 1$ [1].]

На рис. V.2 представлены ситуации, возникающие в окрестности простого пинча в случае малых

[1]) Так как мы по-прежнему предполагаем, что в окрестности u коразмерность LA равна 1, случаи $m > n+1$ исключены.

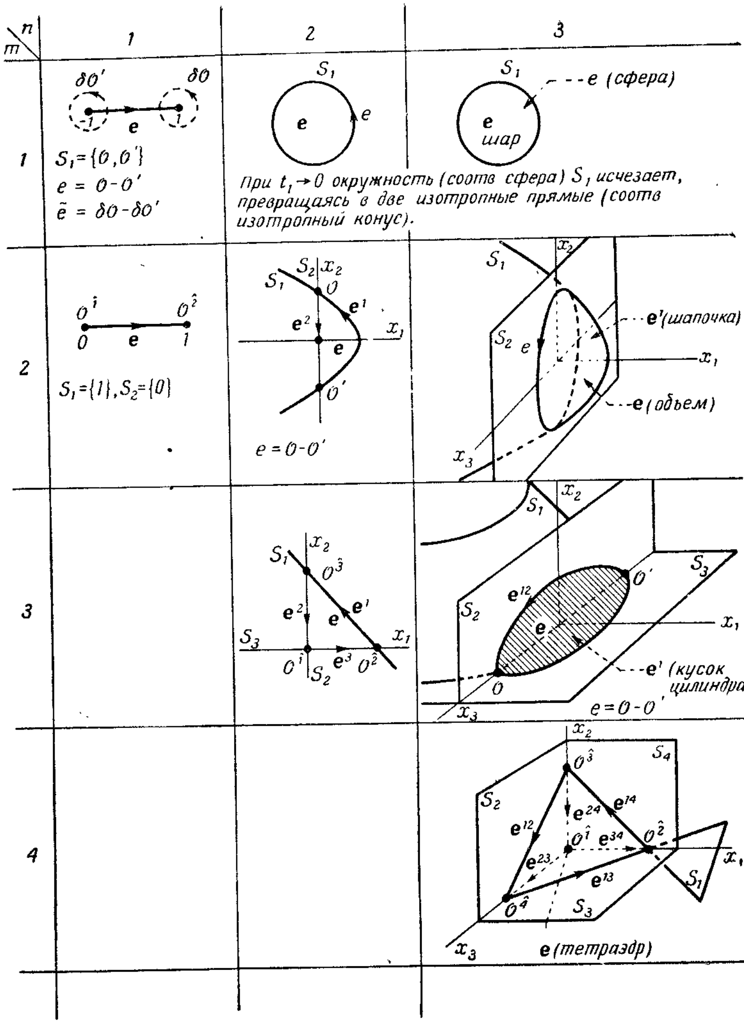

n
m
1
2
3
δ0′
δ0
e
S₁={0,0′}
e = 0-0′
ẽ = δ0-δ0′
S₁
e
S₁
e (сфера)
e
шар
При t₁→0 окружность (соотв сфера) S₁ исчезает, превращаясь в две изотропные прямые (соотв изотропный конус).
S₁={1}, S₂={0}
e = 0-0′
e′(шапочка)
e (объем)
e′ (кусок цилиндра)
e = 0-0′
e (тетраэдр)
4

Рис. V.2.

размерностей. Рассматривается открытое множество $U_t = Y_t \cap V$ с описанными выше локальными координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а параметр t_1 выбран действительным, положительным и достаточно малым, для того чтобы вся интересующая нас часть рисунка содержалась в открытом множестве U_t.

2.2. Описание исчезающих цепей. На рис. V.2 изображены также несколько цепей, которые будут играть важную роль. Все эти цепи «исчезают» при $t_1 \to 0$, откуда и произошло их название. Перечислим их.

Исчезающая клетка **e** — это действительная клетка, ограниченная многообразиями $S_1, S_2, \ldots, S_m$[1]:

$$\mathbf{e}\begin{cases} x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n & \text{действительные,} \\ s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_m \geqslant 0; \end{cases}$$

ориентация **e** выбирается произвольно; на рисунке выбрана ориентация, определенная системой действительных осей $(\operatorname{Re} Ox_1, \operatorname{Re} Ox_2, \ldots, \operatorname{Re} Ox_n)$.

Исчезающей сферой e назовем сложную границу исчезающей клетки: $e = \partial_m \circ \partial_{m-1} \circ \ldots \circ \partial_1 \mathbf{e}$, где ∂_i — операция взятия той части границы, которая находится в многообразии S_i,

$$e\begin{cases} x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n & \text{действительные,} \\ s_1 = s_2 = \ldots = s_m = 0. \end{cases}$$

Исчезающим циклом $\tilde{e}$ назовем сложную кограницу (см. п. III.4.1) исчезающей сферы:

$$\tilde{e} = \delta_1 \circ \delta_2 \circ \ldots \circ \delta_m e,$$

где δ_i означает кограницу Лере по отношению к многообразию S_i.

---

[1]) В дальнейшем, обозначая многообразия S_{it} или открытое множество U_t, мы будем опускать индекс t: условимся, что мы находимся в слое Y_t, где $t = (t_1, 0, \ldots, 0)$, а t_1 действительно, положительио и мало.

Более общим образом, для любой возрастающей последовательности целых чисел

$$\{i_1 < i_2 < \ldots < i_\mu\} \subset \{1, 2, \ldots, m\}$$

положим по определению

$$\mathbf{e}^{i_1 i_2 \ldots i_\mu} = \partial_{i_\mu} \circ \ldots \circ \partial_{i_2} \circ \partial_{i_1} \mathbf{e},$$

$$\tilde{e}_{j_1 j_2 \ldots j_{m-\mu}} = \delta_{i_1} \circ \delta_{i_2} \circ \ldots \circ \delta_{i_\mu} \mathbf{e}^{i_1 i_2 \ldots i_\mu},$$

где $\{j_1, j_2, \ldots, j_{m-\mu}\}$ — возрастающая последовательность, дополнительная к $\{i_1, i_2, \ldots, i_\mu\}$. Это обозначение построено по следующему мнемоническому правилу: верхние индексы нумеруют многообразия S_i, которые содержат рассматриваемую цепь; нижние индексы нумеруют многообразия S_i, которые ограничивают рассматриваемую цепь; жирный шрифт показывает, что рассматриваемая цепь ограничена *всеми* многообразиями S_i, которые ее не содержат; верхняя тильда показывает, что рассматриваемая цепь пересекается только с теми многообразиями S_i, которые ее ограничивают.

Случай $m = n + 1$ (линейный пинч) особый: исчезающей сферы e, а значит, и исчезающего цикла $\tilde{e}$ не существует; цепи

$$\mathbf{e}^{1, 2 \ldots \hat{i} \ldots n+1} = \partial_{n+1} \circ \ldots \circ \hat{\partial}_i \circ \ldots \circ \partial_1 \mathbf{e}$$

с точностью до знака вырождаются в точки, которые мы обозначим

$$\mathfrak{S}^{\hat{i}} = \bigcap_{j \neq i} S_j.$$

2.3. Характеристика исчезающих классов. Предыдущее описание было проведено в специально выбранной системе координат. Удобно иметь более внутренние критерии для распознавания исчезающих цепей или, точнее, их классов гомологий: пусть

$$e(U \cap S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_m) \in H_{n-m}(U \cap S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_m)$$

— класс гомологий исчезающей сферы,

$$\mathbf{e}(U, S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_m) \in H_n(U, S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_m)$$

— класс относительных гомологий исчезающей клетки,

$$\tilde{e}(U - S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_m) \in H_n(U - S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_m)$$

— класс гомологий исчезающего цикла и т. д.

Опишем сначала исчезающую сферу. Многообразие $U \cap S_1 \cap \ldots \cap S_m$ — это $(n-m)$-мерная комплексная сфера; $(n-m)$-мерная «действительная» сфера является ее деформационным ретрактом[1]), а ее группа гомологий $H_{n-m}(U \cap S_1 \cap \ldots \cap S_m)$ — бесконечная циклическая группа, порожденная классом этой сферы.

С другой стороны, можно показать, что в открытом множестве U все операторы границы ∂_i и кограницы δ_i устанавливают *изоморфизм* соответствующих групп гомологий. Поэтому все эти группы гомологий являются бесконечными циклическими[2]) и порождаются соответствующими исчезающими классами, которые тем самым однозначно определяются по исчезающей сфере. Практически это означает, что если мы, к примеру, построим такую компактную цепь множества U, m-кратная сложная граница которой является исчезающей сферой e, то эта цепь гомологична исчезающей клетке е.

2.4. Локализация. Формулы Пикара. Как следует из предположений п. 1, для того чтобы изучить ветвление групп гомологий, т. е. узнать дейст-

[1]) Если открытое множество U достаточно хорошее, скажем шар, достаточно большой, чтобы в нем помещалась $(n-m)$-мерная «действительная» сфера.

[2]) Лишь в двух *особых случаях* ситуацня несколько меняется из-за нульмерных гомологий.

Случай $m=n$: $H_n(U - S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n)$ является свободной группой с двумя образующими

$$\delta_1 \circ \ldots \circ \delta_n \mathfrak{S} \quad \text{и} \quad \delta_1 \circ \ldots \circ \delta_n \mathfrak{S}',$$

где $\mathfrak{S}$ н $\mathfrak{S}' \in H_0(U \cap S_1 \cap S_2 \ldots \cap S_n)$ — классы двух точек, образующих нульмерную сферу $U \cap S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n$; отметим, что

$$e = \mathfrak{S} - \mathfrak{S}' \quad \text{и} \quad \tilde{e} = \delta_1 \circ \ldots \circ \delta_n \mathfrak{S} - \delta_1 \circ \ldots \circ \delta_n \mathfrak{S}'.$$

Случай $m = n+1$: $H_n(U - S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{n+1})$ является свободной группой с $n+1$ образующимн

$$\delta_1 \circ \ldots \circ \widehat{\delta_i} \circ \ldots \circ \delta_{n+1} \mathfrak{S}^{\hat{i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

вие фундаментальной группы $\pi_1(T - L)$ на различные группы гомологий слоя Y_t, достаточно знать действие *малой петли* ω, определенной в окрестности регулярной точки $u \in L$ многообразия L комплексной коразмерности 1. Из п. 2.1 следует, что *в случае общего положения* u является проекцией *простой критической точки* $a \in S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_m$, соответствующей *простому пинчу* многообразий $S_{1u}, S_{2u}, \ldots, S_{mu}$. Интуитивно ясно, что при этих условиях задачу можно *локализовать* внутри слоя, т. е. решать ее внутри шара U, содержащего точку пинча a. Более точно можно показать, что если цикл Γ является представителем класса h гомологий слоя, то в качестве представителя преобразованного класса $\omega_* h$ можно взять цикл Γ', *отличающийся от цикла* Γ *лишь внутри шара* U.

Соответствие $\Gamma \rightsquigarrow \Gamma' - \Gamma$ определяет, таким образом, гомоморфизм, который мы обозначим Var (от слова вариация), групп гомологий X в соответствующие группы гомологий U, например:

$$\mathrm{Var}\colon\ H_n(X - S) \to H_n(U - S),$$
$$\mathrm{Var}\colon\ H_n(X, S) \to H_n(U, S),$$

или, более общим образом,

$$\mathrm{Var}\colon H_n(X - S_{\mu+1 \ldots m}, S_{1, 2 \ldots \mu}) \to$$
$$\to H_n(U - S_{\mu+1 \ldots m}, S_{1, 2 \ldots m});$$

впредь мы будем употреблять сокращенные обозначения

$$S_{i_1 i_2 \ldots i_\mu} = \bigcup_{i = i_1, \ldots, i_\mu} S_i, \quad S^{i_1 i_2 \ldots i_\mu} = \bigcap_{i = i_1, \ldots, i_\mu} S_i.$$

Но в п. 2.3 мы показали, что все рассматриваемые группы гомологий в U *циклические* и порождаются соответствующими *исчезающими цепями*; следовательно, вариации классов гомологий

$$h \in H_{n-m}(S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_m),$$
$$\tilde{h} \in H_n(X - S),$$
$$\mathbf{h} \in H_n(X, S),$$
$$\tilde{h}_{1, 2 \ldots \mu} \in H_n(X - S_{\mu+1 \ldots m}, S_{1, 2 \ldots \mu})$$

обязательно имеют вид (соответственно)

$$\left.\begin{array}{ll}(\mathrm{P}) & \operatorname{Var} h = Ne, \\ (\tilde{\mathrm{P}}) & \operatorname{Var} \tilde{h} = N\tilde{e}, \\ (\mathbf{P}) & \operatorname{Var} \mathbf{h} = N\mathbf{e}, \\ (\tilde{\mathrm{P}}_{1,2,\ldots,\mu}) & \operatorname{Var} \tilde{h}_{1,2\ldots\mu} = N\tilde{e}_{1,2\ldots\mu},\end{array}\right\} \text{(Формулы Пикара)},$$

где N — целое число, зависящее от h (соответственно $\tilde{h}$, $\mathbf{h}$, $\tilde{h}_{1,2\ldots\mu}$), которое нужно определить.

2.5. Формулы Лефшеца. Эти формулы выражают целые числа N, входящие в формулы Пикара. Например, формуле $(\tilde{\mathrm{P}})$ соответствует формула

$$(\tilde{\mathrm{L}}) \qquad \boxed{N = (-)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \langle \mathbf{e} \mid \tilde{h} \rangle.}$$

Чтобы понять интуитивно эту формулу, заметим, что *индекс пересечения* $\langle \mathbf{e} \mid \tilde{h} \rangle$ показывает, сколько раз $\tilde{h}$ пересекает исчезающую клетку $\mathbf{e}$, ограниченную многообразиями $S_1, S_2, \ldots, S_m$, т. е., если угодно, это есть коэффициент *зацепления* h с многообразиями $S_1, S_2, \ldots, S_m$.

Из формулы $(\tilde{\mathrm{L}})$ легко выводятся формулы (L), $(\mathbf{L})$, $(\tilde{\mathrm{L}}_{1,2\ldots\mu})$:

$$(\mathrm{L}) \qquad \boxed{N = (-)^{\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2}} \langle e \mid h \rangle.}$$

Чтобы доказать (L), положим $\tilde{h} = \delta_1 \circ \ldots \circ \delta_m h$; операция кограницы, очевидно, коммутирует с Var, так что

$$\operatorname{Var} \tilde{h} = \delta_1 \circ \ldots \circ \delta_m \operatorname{Var} h = \delta_1 \circ \ldots \circ \delta_m N e = N\tilde{e};$$

но по формуле $(\tilde{\mathrm{L}})$

$$N = (-)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \langle \mathbf{e} \mid \tilde{h} \rangle,$$

откуда получаем (L), переставляя ∂ и δ. Далее,

$$
(\mathbf{L}) \quad \boxed{\begin{array}{l} N = (-)^{\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2}} \langle e \mid h \rangle, \\ \text{где} \quad h = \partial_m \circ \ldots \circ \partial_1 \mathbf{h}. \end{array}}
$$

Действительно, операция границы, очевидно, коммутирует с Var, так что

$$
\operatorname{Var} h = \partial_m \circ \ldots \circ \partial_1 \operatorname{Var} \mathbf{h} = \partial_m \circ \ldots \circ \partial_1 N\mathbf{e} = Ne,
$$

и остается только применить (L). Наконец,

$$
(\tilde{\mathrm{L}}_{1,\,2\,\ldots\,\mu}) \quad \boxed{\begin{array}{l} N = (-)^{\frac{(n-\mu+1)(n-\mu+2)}{2}} \langle \mathbf{e}^{1,\,2\,\ldots\,\mu} \mid \tilde{h}^{1,\,2\,\ldots\,\mu} \rangle, \\ \text{где } \tilde{h}^{1,\,2\,\ldots\,\mu} = \partial_\mu \circ \ldots \circ \partial_1 \tilde{h}_{1,\,2\,\ldots\,\mu}. \end{array}}
$$

Доказательство предоставляется читателю[1]).

2.6. Характер ветвления. Найдем для начала *индексы пересечения* исчезающих классов: согласно п. II. 7.4,

$$
\langle e \mid e \rangle = \begin{cases} 2\,(-)^{\frac{(n-m)(n-m+1)}{2}}, & \text{если } n-m+1 \text{ нечетно}, \\ 0, & \text{если } n-m+1 \text{ четно}. \end{cases}
$$

Отсюда, применяя правило перестановки ∂ и δ (см. п. III. 2.3), получаем

$$
\langle \mathbf{e}^{1,\,2\,\ldots\,\mu} \mid \tilde{e}^{1,\,2\,\ldots\,\mu} \rangle =
$$

$$
= \begin{cases} 2(-)^{\frac{(n-\mu+1)(n-\mu+2)}{2}+1}, & \text{если } n-m+1 \text{ нечетно}, \\ 0, & \text{если } n-m+1 \text{ четно}, \end{cases}
$$

---

[1]) Отметим, что формулы Пикара—Лефшеца верны даже в особых случаях п. 2.3, когда рассуждения п. 2.4 не проходят. В случае $m=n+1$, когда исчезающей сферы e не существует, условимся, что соответствующий класс — *нулевой;* тогда вариации h и $\tilde{h}$, очевидно, равны *нулю* (так как e и $\tilde{e}=0$), а вариация $\mathbf{h}$ равна нулю, поскольку $N = \langle e \mid h \rangle = 0$.

где

$$\tilde{e}^{1,2\dots\mu}=\delta_{\mu+1}\circ\dots\circ\delta_m e=\partial_\mu\circ\dots\circ\partial_1\tilde{e}_{1,2\dots\mu}.$$

Таким образом, из формул Пикара — Лефшеца следуют формулы

$$\omega_*\tilde{e}_{1,2\dots\mu}=$$
$$=\tilde{e}_{1,2\dots\mu}+(-)^{\frac{(n-\mu+1)(n-\mu+2)}{2}}\langle \mathrm{e}^{1,2\dots\mu}\,|\,\tilde{e}^{1,2\dots\mu}\rangle\,\tilde{e}_{1,2\dots\mu}=$$
$$=\begin{cases}-\tilde{e}_{1,2\dots\mu}, & \text{если}\quad n-m+1 \text{ нечетно},\\ \tilde{e}_{1,2\dots\mu}, & \text{если}\quad n-m+1 \text{ четно},\end{cases}$$

которые, впрочем, легко получить и непосредственно. Отсюда вытекают следующие утверждения:

Если $(n-m+1)$ *нечетно*, то после двух оборотов вокруг L класс $\tilde{h}_{1,2\dots\mu}$ отображается в себя:

$$\omega_*^2\tilde{h}_{1,2\dots\mu}=\omega_*(\tilde{h}_{1,2\dots\mu}+N\tilde{e}_{1,2\dots\mu})=\tilde{h}_{1,2\dots\mu},$$

т. е. мы имеем *ветвление типа квадратного корня.*

Если $n-m+1$ *четно*, то каждый новый оборот вокруг L добавляет к $\tilde{h}_{1,2\dots\mu}$ одно и то же кратное исчезающего класса:

$$\omega_*^k\tilde{h}_{1,2\dots\mu}=\tilde{h}_{1,2\dots\mu}+kN\tilde{e}_{1,2\dots\mu},$$

т. е. мы имеем *ветвление логарифмического типа.*

2.7. Инвариантные классы. Мы назовем *инвариантным классом* класс гомологий, который содержит цикл, расположенный *вне открытого множества* U; в силу п. 2.4 из инвариантности *следует* отсутствие ветвления, т. е. $\omega_*h=h$, но a priori инвариантность — это *более сильное* свойство.

2.8. Предложение. *Для инвариантности класса* $_{1,2\dots\mu}$ *необходимо и достаточно, чтобы индексы пересечения* $\tilde{h}_{1,2\dots\mu}$ *со всеми элементами из* $H_n(U-S_{1,2\dots\mu},\ S_{\mu+1\dots m})$ *были равны нулю.*

Это предложение, которое доказывается с помощью двойственности Пуанкаре (п. II. 5.5), мы примем без доказательства.

2.9. Следствие[1]). *Для инвариантности класса $\tilde{h}_{1,2\ldots\mu}$ необходимо и достаточно, чтобы индекс N в формуле* $(\tilde{\mathrm{L}}_{1,2\ldots\mu})$ *был равен нулю.*

Действительно, как было показано в п. 2.3, $H_n(U-S_{1,2\ldots\mu}, S_{\mu+1\ldots m})$ порождается [1]) исчезающим классом $\tilde{e}_{\mu+1\ldots m}$, индекс пересечения которого с $\tilde{h}_{1,2\ldots\mu}$ равен числу N из формулы Лефшеца (достаточно переставить ∂ и δ).

2.10. Лемма. *Пусть* $\tilde{h}_{1,2\ldots\mu}$ — *некоторый класс гомологий,*

$$\tilde{h}^{1,2\ldots\mu}=\partial_\mu\circ\ldots\circ\partial_1\tilde{h}_{1,2\ldots\mu}$$

и

$$N=(-)^{\frac{(n-\mu+1)(n-\mu+2)}{2}}\langle \mathrm{e}^{1,2\ldots\mu}\,|\,\tilde{h}^{1,2\ldots\mu}\rangle.$$

Если $n-m+1$ нечетно, то класс

$$\tilde{h}'_{1,2\ldots\mu}=2\tilde{h}_{1,2\ldots\mu}+N\tilde{e}_{1,2\ldots\mu}$$

инвариантен.

Эта лемма вытекает непосредственно из следствия 2.9 и формулы для индекса пересечения исчезающих классов (п. 2.6).

2.11. Доказательство формулы Пикара—Лефшеца в случае, когда $n-m+1$ нечетно[2]). По лемме 2.10

$$\omega_*\tilde{h}'_{1,2\ldots\mu}=\tilde{h}'_{1,2\ldots\mu}.$$

Учитывая, что $\omega_*\tilde{e}_{1,2\ldots\mu}=-\tilde{e}_{1,2\ldots\mu}$, получаем

$$2\omega_*\tilde{h}_{1,2\ldots\mu}-N\tilde{e}_{1,2\ldots\mu}=2\tilde{h}_{1,2\ldots\mu}+N\tilde{e}_{1,2\ldots\mu},$$

т. е.

$$2\omega_*\tilde{h}_{1,2\ldots\mu}=2\tilde{h}_{1,2\ldots\mu}+2N\tilde{e}_{1,2\ldots\mu};$$

---

[1]) Это следствие неверно в особых случаях $\mu=m=n$ и $\mu=m=n+1$.

[2]) Доказательство в случае четного $n-m+1$ мы здесь не приводим.

деля последнее выражение на 2, получаем формулу Пикара — Лефшеца [1]).

2.12. Доказательство формулы Пикара — Лефшеца в случае, когда $\mu = 0$, $m = n+1$. Мы хотим доказать, что если $m = n + 1$, то $\omega_* \tilde{h} = \tilde{h}$. Пусть

$$N = (-)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \langle \mathbf{e} \mid \tilde{h} \rangle.$$

В силу двойственности

$$\langle \mathbf{e} \mid \delta_1 \circ \delta_2 \circ \ldots \circ \delta_n \widehat{\mathfrak{S}^{n+1}} \rangle =$$
$$= (-)^{\frac{n(n+1)}{2}} \langle \widehat{\mathfrak{S}^{n+1}} \mid \widehat{\mathfrak{S}^{n+1}} \rangle = (-)^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

значит, класс

$$\tilde{h}' = \tilde{h} + (-)^n N \delta_1 \circ \delta_2 \circ \ldots \circ \delta_n \widehat{\mathfrak{S}^{n+1}}$$

инвариантен (см. следствие 2.9).

Но, очевидно,

$$\omega_* \delta_1 \circ \delta_2 \circ \ldots \circ \delta_n \widehat{\mathfrak{S}^{n+1}} = \delta_1 \circ \delta_2 \circ \ldots \circ \delta_n \omega_* \widehat{\mathfrak{S}^{n+1}} =$$
$$= \delta_1 \circ \delta_2 \circ \ldots \circ \delta_n \widehat{\mathfrak{S}^{n+1}},$$

откуда $\omega_* \tilde{h} = \tilde{h}$.

Заметим, что при $N \neq 0$ класс $\tilde{h}$, *хотя он и не разветвляется, не является инвариантным в смысле* п. 2.7.

3. Изучение некоторых особых точек «многообразий» Ландау. Формулы Пикара — Лефшеца позволяют *в принципе* полностью решить проблему ветвления. Действовать надо следующим образом.

(i) Вычислить фундаментальную группу $\pi_1(T - L, u_0)$ и выбрать семейство порождающих ее *простых петель* (п. 2.1).

---

[1]) Это деление на 2 законно, так как мы знаем (п. 2.4), что вариация $\tilde{h}_{1,2\ldots\mu}$ является элементом *свободной* группы $H_n(U - S_{\mu+1\ldots m}, S_{1,2\ldots\mu})$.

(ii) Вычислить группы гомологий слоя Y_{u_0} и выбрать из элементов этих групп *исчезающие классы*, соответствующие каждой из простых петель: класс гомологий h будет исчезающим для простой петли $\lambda = \theta^{-1} \cdot \omega \cdot \theta$, если $\theta_* h$ является одним из определенных в п. 2.3 исчезающих классов.

(iii) Вычислить все индексы пересечения всех классов гомологий, участвующих в задаче.

(iv) После того как все эти вычисления проделаны, остается только применить формулы Пикара—Лефшеца.

За исключением нескольких простых случаев, очевидно, что этот рецепт трудно выполним. Мы ограничимся в этом пункте изучением двух локальных моделей, интересных не только как иллюстрации, ибо мы решим в них проблему ветвления в окрестности особой точки *общего положения* «многообразий» Ландау; будут изучаться особые точки двух типов (см. п. IV. 5):

1° точки истинного пересечения двух многообразий Ландау;

2° точки возврата кривой Ландау.

Мимоходом мы столкнемся с одним фактом, который заслуживает более глубокого изучения: четыре этапа предложенного выше способа не независимы, и, в частности, знание фундаментальной группы $\pi_1(T - L, u_0)$ дает заранее некоторые сведения об исчезающих классах и их пересечениях.

Первая модель — истинное пересечение двух многообразий Ландау.

3.1. Мы рассматриваем два примыкающих страта

$$A = S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_m \cap S_{m+1} - \bigcup_{j > m+1} S_j,$$

$$B = S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_m - \bigcup_{j > m} S_j$$

и предполагаем, что все происходит в открытом множестве $V \subset Y$ ($V \cap S_j = \emptyset$ для $j > m+1$) с такими координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_q)$, что

$$s_1(x, t) \equiv$$
$$\equiv t_1 - [x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} + (x_m - t_2)^2 + x_{m+1}^2 + \ldots + x_n^2],$$
$$s_2(x, t) \equiv x_1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$s_m(x, t) \equiv x_{m-1},$$
$$s_{m+1}(x, t) \equiv x_m.$$

Воспользовавшись этими специальными координатами, мы изучим ситуацию *общего положения*, описанную в гл. IV, п. 5.6

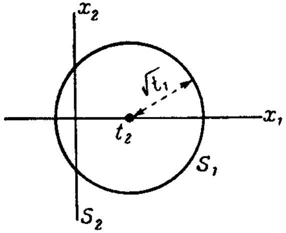


Рис. V. 3.

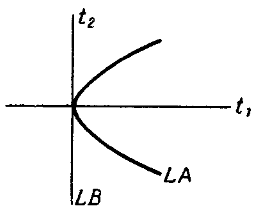


Рис. V. 4.

Пример: $m = 1$, $n = 2$;

$$s_1 \equiv t_1 - [(x_1 - t_2)^2 + x_2^2] \quad \text{(рис. V. 3)},$$
$$s_2 \equiv x_2.$$

Критические множества задаются уравнениями

$$cA = \{(x, t)\colon\ x_1 = x_2 = \ \ldots\ = x_n = 0,\ t_1 - t_2^2 = 0\},$$
$$cB = \{(x, t)\colon \text{ все } x_i = 0, \text{ кроме } x_m,\ x_m = t_2,\ t_1 = 0\},$$

и многообразиями Ландау будут, таким образом,

$$LA\colon\ t_1 - t_2^2 = 0 \quad \text{и} \quad LB\colon\ t_1 = 0 \quad \text{(рис. V. 4)}.$$

Положим $L = LA \cup LB$ и предположим, чтобы упростить обозначения, что карта $(t_1, t_2, \ldots, t_q)$ шара $W = \pi(V)$ отображает его на все пространство $\mathbf{C}^q$.

Так как явно встречаются только координаты t_1 и t_2, мы можем без ограничения общности положить $q = 2$.

3.2. Вычисление $\pi_1(W - L)$. Проекция $\mathrm{pr}\colon (t_1, t_2) \rightsquigarrow t_1$ превращает $W - L$ в расслоенное пространство с базой $\mathbf{C} - \{0\}$ и слоем

$$\mathrm{pr}^{-1}(t_1) = \mathbf{C} - \{\sqrt{t_1}\} \cup \{-\sqrt{t_1}\} \approx \mathbf{C} - \{1\} \cup \{-1\}.$$

Рассмотрим в слое $\mathrm{pr}^{-1}(1)$ петли α, α' с началом $u_0 = (1, 0)$, изображенные на рис. V. 5, и пусть γ —

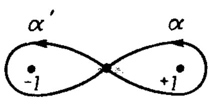


Рис. V. 5. Плоскость комплексного переменного t_2 (слой).

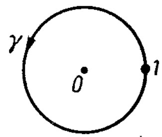


Рис. V. 6. Плоскость комплексного переменного t_1 (база).

петля с началом u_0, заданная соотношением

$$\gamma\colon \tau \rightsquigarrow (t_1 = e^{2\pi i \tau},\ t_2 = 0) \quad (\text{рис. V. 6}).$$

Петли α, α', γ *лежат в* $W - L$ *и удовлетворяют соотношениям*

$$\gamma \cdot \alpha \cdot \gamma^{-1} = \alpha', \qquad \gamma \cdot \alpha' \cdot \gamma^{-1} = \alpha$$

(очевидным из геометрической интерпретации сопряжения; см. п. 1.0).

Простым техническим упражнением[1]) является доказательство того, что α, α', γ *порождают группу* $\pi_1(W - L, u_0)$ *и не связаны никакими соотношениями, кроме двух указанных*; иначе говоря, $\pi_1(W - L, u_0)$ — это факторгруппа свободной (не абелевой) группы с образующими α, α', γ по подгруппе, порожденной образующими $\gamma \cdot \alpha \cdot \gamma^{-1} \cdot \alpha'^{-1}$ и $\gamma \cdot \alpha' \cdot \gamma^{-1} \cdot \alpha^{-1}$[2]).

3.3. Выбор простых петель. Петли α и α', очевидно, простые, однако γ не простая (так как нуль, вокруг которого обходит γ, не является регулярной

[1]) Здесь используется техника *точной гомотопической последовательности расслоения.*

[2]) Еще проще — это факторгруппа свободной группы, натянутой на α, γ, по подгруппе, порожденной $\gamma^2 \cdot \alpha \cdot \gamma^{-2} \cdot \alpha^{-1}$.

точкой L). Напротив, петли $\beta = \alpha^{-1} \cdot \gamma$ и $\beta' = \alpha'^{-1} \cdot \gamma$ простые, как показывает схематический рис. V.7. (Истолкование этого рисунка предоставляется воображению читателя.)

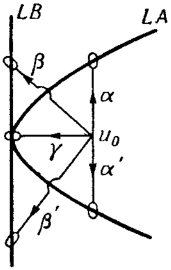


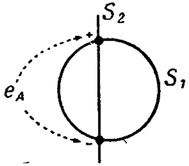
Рис. V.7.

Но очевидные алгебраические рассуждения показывают, что группа $\pi_1(W - L, u_0)$ *порождается простыми петлями* α, α', β, β', *связанными соотношениями*

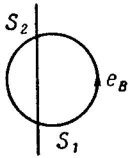
$$(\alpha\beta) \qquad \alpha \cdot \beta = \alpha' \cdot \beta' = \beta \cdot \alpha' = \beta' \cdot \alpha.$$

3.4. Описание некоторых исчезающих цепей (t_1, t_2 действительные; t_1, $t_1 - t_2^2 > 0$). Сферы:

$$e_A \begin{cases} x_1, \ldots, x_n & \text{действительные,} \\ s_1 = \ldots = s_m = s_{m+1} = 0; \end{cases}$$

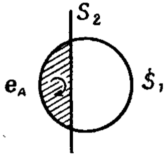


$$e_B \begin{cases} x_1, \ldots, x_n & \text{действительные,} \\ s_1 = \ldots = s_m = 0. \end{cases}$$

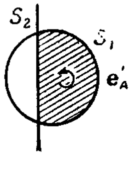


Клетки:

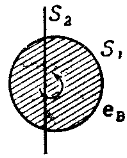
$$\mathbf{e}_A \begin{cases} x_1, \ldots, x_n & \text{действительные,} \\ s_1, \ldots, s_m > 0, & s_{m+1} < 0; \end{cases}$$



$$\mathbf{e}'_A \begin{cases} x_1, \ldots, x_n & \text{действительные,} \\ s_1, \ldots, s_m > 0, & s_{m+1} > 0; \end{cases}$$



$$\mathbf{e}_B \begin{cases} x_1, \ldots, x_n & \text{действительные,} \\ s_1, \ldots, s_m > 0. \end{cases}$$



Мы видим, что клетка $\mathbf{e}_B$ есть объединение клеток $\mathbf{e}_A$ и $\mathbf{e}'_A$.

Если ориентацию одной из предыдущих цепей выбрать произвольно, то ориентация всех остальных однозначно определится из соотношений

$$(A) \quad e_A = \partial_{m+1} \circ \partial_m \circ \ldots \circ \partial_1 \mathbf{e}_A = \partial_{m+1} \circ \partial_m \circ \ldots \circ \partial_1 \mathbf{e}'_A;$$

$$(B) \quad e_B = \partial_m \circ \ldots \circ \partial_1 \mathbf{e}_B;$$

$$(AB) \quad \mathbf{e}_B = \mathbf{e}'_A - \mathbf{e}_A.$$

Заметим, что $\mathbf{e}_A$ и $\mathbf{e}'_A$ должны входить в формулу (AB) *с противоположными* знаками, иначе (A) и (B) будут несовместимы с тем фактом, что e_B — цикл: $\partial_{m+1} e_B = 0$.

3.5. Группы гомологий. $U \cap S_1 \cap \ldots \cap S_m \cap S_{m+1}$ — это $(n-m-1)$-мерная комплексная сфера, так что ее $(n-m-1)$-мерная группа гомологий является бесконечной циклической и порождается классом e_A. Аналогично $U \cap S_1 \cap \ldots \cap S_m$ есть $(n-m)$-мерная комплексная сфера, и ее $(n-m)$-мерная группа гомологий порождается e_B.

Отсюда легко вывести [1]), что группа $H_n(U, S_1 \cup \ldots \cup S_m \cup S_{m+1})$ — свободная абелева группа, натянутая на $\mathbf{e}_A$ и $\mathbf{e}_B$.

Аналогичным образом [2]) можно показать, что $H_n(U - S_1 \cup \ldots \cup S_m \cup S_{m+1})$ — свободная абелева группа с двумя образующими $\tilde{e}_A$ и $\tilde{e}_B$, где

$$\tilde{e}_A = \delta_1 \circ \ldots \circ \delta_m \circ \delta_{m+1} e_A,$$

[1]) С помощью «точной гомологической последовательности».

[2]) Речь идет о частном случае теоремы разложения (см. Фотиади, Фруассар, Ласку и Фам [1]), которая выводится из точной гомологической последовательности Лере.

в то время как $\tilde{e}_B$ — цикл в $U - S_1 \cup \ldots \cup S_m \cup S_{m+1}$, гомологичный в $U - S_1 \cup \ldots \cup S_m$ циклу $\delta_1 \circ \ldots \circ \delta_m e_B$; заметим, что мы таким образом определили класс $\tilde{e}_B$ лишь с точностью до некоторого кратного $\tilde{e}_A$; геометрически этот произвол выражается в различных способах, которыми цикл $\delta_1 \circ \ldots \circ \delta_m e_B$ можно сдвинуть с многообразия S_{m+1}.

3.6. Применение формул Пикара — Лефшеца[1]). Действие *простой петли* λ ($\lambda = \alpha, \alpha', \beta, \beta'$) на класс $\tilde{h} \in H_n(X - S)$ задается формулой Пикара—Лефшеца

$$\lambda_* \tilde{h} = \tilde{h} + N_\lambda \tilde{e}_\lambda; \quad N_\lambda = (-)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \langle \mathbf{e}_\lambda \mid \tilde{h} \rangle,$$

где $\tilde{e}_\lambda$ — класс из $H_n(X - S)$ (инъективный образ класса из $H_n(U - S)$), а индекс пересечения N_λ зависит лишь от класса исчезающей клетки $\mathbf{e}_\lambda$ в $H_n(U, S)$.

Легко определить, какая из клеток п. 3.4 является исчезающей для петли λ; находим

$$\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_A, \quad \mathbf{e}_{\alpha'} = \mathbf{e}'_A, \quad \mathbf{e}_\beta = \mathbf{e}_{\beta'} = \mathbf{e}_B.$$

Из соотношения (AB) следует, что

$$(N) \qquad \boxed{N_\beta = N_{\beta'} = N_{\alpha'} - N_\alpha.}$$

С другой стороны, сфера e_A (соотв. e_B) является исчезающей для α, α' (соотв. β, β'), так что

$$\tilde{e}_\alpha = \tilde{e}_{\alpha'} = \tilde{e}_A,$$

а $\tilde{e}_\beta$ (и $\tilde{e}_{\beta'}$) $= \tilde{e}_B$ с точностью до некоторого кратного $\tilde{e}_A$.

Всегда можно выбрать $\tilde{e}_B = \tilde{e}_\beta$ и тогда $\tilde{e}_{\beta'} = \tilde{e}_B + \nu \tilde{e}_A$, где ν — целое число, которое мы определим ниже.

[1]) Мы рассмотрим здесь лишь ветвление гомологий $H_n(X - S)$, оставляя изучение остальных гомологий читателю в качестве упражнения.

Применяя два раза формулу Пикара—Лефшеца, получаем

$$\beta_* \alpha'_* \tilde{h} = \alpha'_* \tilde{h} + (-)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \langle \mathbf{e}_B \,|\, \alpha'_* \tilde{h} \rangle \tilde{e}_B =$$

$$= \tilde{h} + (-)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \left[\langle \mathbf{e}'_A \,|\, \tilde{h} \rangle \tilde{e}_A + \langle \mathbf{e}_B \,|\, \tilde{h} + N_{\alpha'} \tilde{e}_A \rangle \tilde{e}_B \right] =$$

$$= \tilde{h} + N_{\alpha'} \tilde{e}_A + N_\beta \tilde{e}_B + (-)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} N_{\alpha'} \langle \mathbf{e}_B \,|\, \tilde{e}_A \rangle \tilde{e}_B;$$

но из правила перестановки ∂ и δ следует, что

$$\begin{array}{ccc}
\langle \mathbf{e}_B & | \; \tilde{e}_A \rangle = \langle 0 \,|\, e_A \rangle = 0 \\
\partial_1 \big\downarrow & \big\uparrow \delta_1 & \\
\vdots & \vdots & \\
\partial_m \big\downarrow & \big\uparrow \delta_m & \\
e_B & & \\
\partial_{m+1} \big\downarrow & \big\uparrow \delta_{m+1} & \\
0 & e_A &
\end{array}$$

и, значит,

$$\beta_* \alpha'_* \tilde{h} = \tilde{h} + N_{\alpha'} \tilde{e}_A + N_\beta \tilde{e}_B.$$

Аналогично

$$\beta'_* \alpha_* \tilde{h} = \tilde{h} + N_\alpha \tilde{e}_A + N_{\beta'} (\tilde{e}_B + \nu \tilde{e}_A) =$$

$$= \tilde{h} + (N_\alpha + \nu N_{\beta'}) \tilde{e}_A + N_{\beta'} \tilde{e}_B.$$

Приравнивая эти два выражения в соответствии с $(\alpha\beta)$ и учитывая (N), мы получаем

$$\boxed{\nu = 1.}$$

Упражнение. Используя соотношения $(\alpha\beta)$, показать, что

$$\langle \mathbf{e}_A \,|\, \tilde{e}_B \rangle = (-)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

и что

$$\langle \mathbf{e}'_A | \tilde{e}_B \rangle = \left\{ \mp (-)^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{при} \quad n - m \left\{ \begin{array}{l} \text{четном,} \\ \text{нечетном} \end{array} \right. \right.$$

(чтобы получить последнее соотношение, используйте формулы для индекса пересечения из п. 2.6).

Вторая модель: точка возврата кривой Ландау.

3.7. Пусть A^k есть k-мерное ($k > 2$) комплексное аналитическое многообразие[1]), $\pi : A^k \to T$ — аналитическое отображение A^k на двумерное комплексное

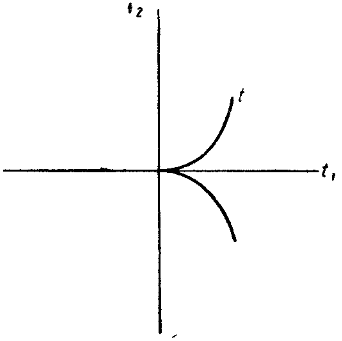


Рис. V. 8.

аналитическое многообразие. Ситуацию общего положения, возникающую в окрестности точки возврата, можно описать локальной моделью

$$\pi\colon (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k) \rightsquigarrow (t_1, t_2),$$
$$t_1 = \xi_1,$$
$$t_2 = \xi_2^3 - \xi_1\xi_2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 + \ldots + \xi_k^2.$$

Критическим множеством является «парабола»

$$cA^k = \{\xi\colon 3\xi_2^2 - \xi_1 = 0,\ \xi_3 = \xi_4 = \ldots = \xi_k = 0\},$$

которая проектируется в кривую Ландау, заданную параметрически уравнениями

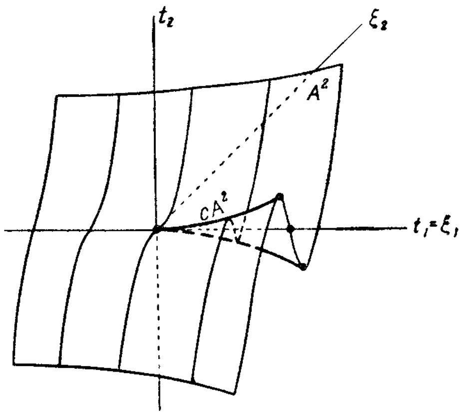
$$L\colon\ t_1 = 3\xi_2^2, \quad t_2 = -2\xi_2^3,$$

т. е.

$$L = \{t\colon\ 4t_1^3 - 27t_2^2 = 0\} \qquad (\text{рис. V. 8}).$$

[1]) Предположеиие (которое мы делали до сих пор) о том, что многообразие A^k является *стратом* некоего большего многообразия, не добавило бы ничего существенного.

3.8. Вычисление фундаментальной группы $\pi_1(W - L, u_0)$. Примем за начальную точку



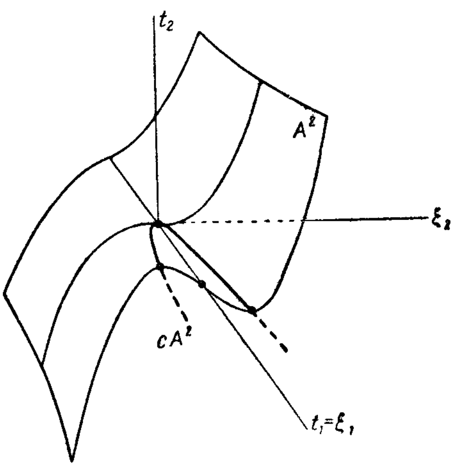


Рис. V.9. График отображения π: $A^2 \to T$ («сборка» Уитни (Уитни [2])).

$u_0 = (1, 0)$, и пусть λ, μ — простые петли, каждая из которых соответствует одной из двух действительных ветвей кривой Ландау (рис. V. 10).

Предложение. *Группа* $\pi_1(W - L, u_0)$ *порождается* λ *и* μ, *связанными соотношением*

$$(\lambda\,\mu) \qquad \boxed{\lambda \cdot \mu \cdot \lambda = \mu \cdot \lambda \cdot \mu.}$$

Интересно получить это соотношение, используя многообразие A^2, изображенное на рис. V.9. Здесь

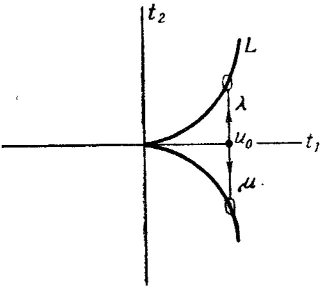


Рис. V.10.

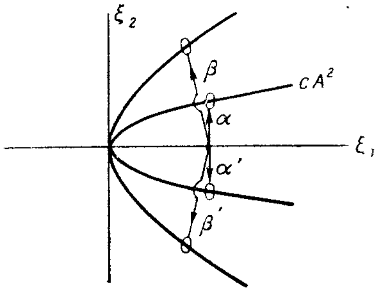


Рис. V.11

$A^2 - \pi^{-1}(L)$ является трехлистным накрытием[1]) над $W - L$.

Но $\pi^{-1}(L)$ задается уравнением

$$4t_1^3(\xi) - 27t_2^2(\xi) \equiv 4\xi_1^3 - 27(\xi_2^3 - \xi_1\xi_2)^2 \equiv$$
$$\equiv (3\xi_2^2 - \xi_1)^2(4\xi_1 - 3\xi_2^2) = 0,$$

т. е. $\pi^{-1}(L)$ является объединением двух парабол, касающихся друг друга (одна из них, очевидно, совпадает с cA^2).

Как и в п. 3.3, фундаментальная группа $\pi_1(A^2 - \pi^{-1}(L), a)$ [где $a = (\xi_1 = 1,\ \xi_2 = 0)$] порождается простыми петлями $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ (рис. V. 11), связанными соотношениями

$$(\alpha\beta) \qquad \alpha \cdot \beta = \alpha' \cdot \beta' = \beta \cdot \alpha' = \beta' \cdot \alpha.$$

---

[1]) То есть расслоением с дискретным слоем, состоящим из трех точек.

Проекция π индуцирует гомоморфизм фундаментальных групп

$$\begin{aligned} \pi_*\colon\ & \pi_1(A^2-\pi^{-1}(L),\ a)\to\pi_1(W-L,\ u_0);\\ \pi_*\alpha &= \lambda^2,\\ \pi_*\alpha' &= \mu^2,\\ \pi_*\beta &= \lambda^{-1}\mu\lambda,\\ \pi_*\beta' &= \mu^{-1}\lambda\mu. \end{aligned}$$

Два первых соотношения становятся очевидными, если вспомнить, что петли α, α' обходят вокруг квадратичных критических точек проекции π; что же касается двух последних соотношений, то читатель, обладающий минимумом воображения, усмотрит их из рис. V.12.

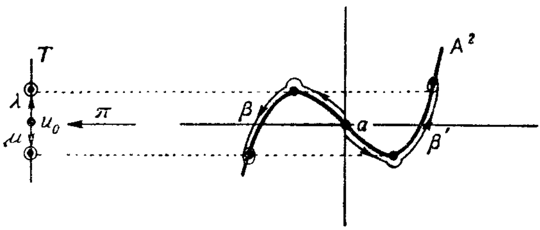


Рис. V. 12.

Соотношения ($\lambda\mu$) следуют из соотношений ($\alpha\beta$). Доказательство того, что α и μ порождают $\pi_1(W-L, u_0)$ и не связаны никакими другими соотношениями, кроме соотношения ($\lambda\mu$), снова является простым техническим упражнением [1]).

3.9. Гомологии слоя. Пусть $S_t^{k-2}=\pi^{-1}(t)$ — слой многообразия A^k. Легко видеть [2]), что для всех

---

[1]) По-прежнему благодаря точной гомотопической последовательности расслоения.

[2]) Если выбрать точку $t=(0,t_2)$, то

$$S_t^{k-2}=\left\{(\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_k)\colon \xi_2^2+\xi_3^2+\ldots+\xi_k^2=t_2\right\},$$

что является частным случаем ситуации, изученной в статье Фама [1].

$t \notin L$ группа $H_{k-2}(S_t^{k-2})$ — свободная абелева группа с двумя образующими. В точке $u_0 = (1, 0)$, где

$$S_{u_0}^{k-2} = \{(\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_k) : s(\xi) \equiv \equiv \xi_2(\xi_2 - 1)(\xi_2 + 1) + \xi_3^2 + \ldots + \xi_k^2 = 0\},$$

в качестве этих образующих можно выбрать сферы (рис. V. 13)

$$e_\lambda \begin{cases} \xi_2 \text{ действительное}, \ -1 \leqslant \xi_2 \leqslant 0, \\ \xi_3, \ldots, \xi_k \text{ чисто мнимые}, \\ s(\xi) = 0, \end{cases}$$

$$e_\mu \begin{cases} \xi_2 \text{ действительное}, \ 0 \leqslant \xi_2 \leqslant 1, \\ \xi_3, \ldots, \xi_k \text{ действительные}, \\ s(\xi) = 0. \end{cases}$$

Эти сферы являются исчезающими соответственно для петель λ и μ. Они трансверсально пересекаются в

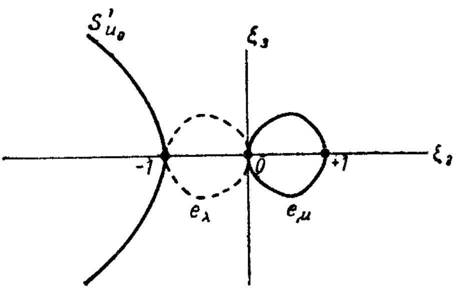


Рис. V. 13.

единственной точке (начале координат), и если их ориентировать в начале координат при помощи ориентирующих реперов $(\mathrm{Im}\, O\xi_3, \ldots, \mathrm{Im}\, O\xi_k)$ и $(\mathrm{Re}\, O\xi_3, \ldots, \mathrm{Re}\, O\xi_k)$ соответственно, то их индекс пересечения будет равен

$$\langle e_\mu \mid e_\lambda \rangle = (-)^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}}.$$

3.10. Использование формул Пикара—Лефшеца. Ветвление класса $h \in H_{k-2}(S^{k-2})$ задается формулами Пикара — Лефшеца

$$\lambda_* h = h + N_\lambda e_\lambda, \qquad N_\lambda = (-)^{\frac{k(k-1)}{2}} \langle e_\lambda | h \rangle;$$

$$\mu_* h = h + N_\mu e_\mu, \qquad N_\mu = (-)^{\frac{k(k-1)}{2}} \langle e_\mu | h \rangle.$$

Упражнение. С помощью формул Пикара—Лефшеца и соотношения $\lambda\mu\lambda = \mu\lambda\mu$ показать, что индекс пересечения $\langle e_\mu | e_\lambda \rangle = \mp 1$; показать, что если ориентация выбрана, как в п. 3.9, то

$$(\lambda\mu\lambda)_* h = (\mu\lambda\mu)_* h = h + (N_\lambda - N_\mu) e_\lambda + (N_\mu - (-)^k N_\lambda) e_\mu$$

и

$$(\lambda\mu\lambda^{-1})_* h = h + (N_\lambda - N_\mu)(e_\lambda - e_\mu).$$

Глава VI

АНАЛИТИЧНОСТЬ ИНТЕГРАЛА, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ПАРАМЕТРА

В этой главе изучаются интегралы вида

$$J(t) = \int_{\Gamma} \varphi_t, \tag{0}$$

где Γ — компактная цепь комплексного аналитического многообразия X, φ_t — дифференциальная форма (вообще говоря с особенностями) на X, *голоморфно зависящая от параметра* t ($t \in T$, T — комплексное аналитическое многообразие). В п. 1 мы покажем, что при некоторых условиях функция $J(t)$ остается голоморфной до тех пор, пока цепь Γ допускает некоторые непрерывные деформации; при этих деформациях особую роль будут играть некоторые подмногообразия S многообразия X, а именно подмногообразия, которые должны будут *ограничивать* цепь Γ, и подмногообразия, которых цепь Γ должна будет *«избегать»* (особенности формы φ_t). Существование *объемлющей изотопии* S в X (п. IV. 1) гарантирует одновременно возможность такой деформации Γ и голоморфность функции $J(t)$. Таким образом, $J(t)$ может иметь особенности лишь на *«многообразиях» Ландау*, определенных в главе IV (п. 5).

В п. 2 мы подробно изучим характер особенности на таком «многообразии» Ландау L.

1. Голоморфность интеграла, зависящего от параметра. Начнем с двух очевидных лемм, в которых многообразие X можно считать просто дифференцируемым, а не комплексным аналитическим.

1.1. Лемма. Предположение: *форма φ_t, голоморфно зависящая от t, остается регулярной в окре-*

стности носителя Γ, *когда* t *меняется в окрестности точки* $t_0 \in T$.

Заключение: $J(t)$ *голоморфна в точке* t_0.

Доказательство. Дифференцируя под знаком $\int$, убеждаемся в том, что выражение (0) бесконечно дифференцируемо по координатам (t) и что его дифференциал по комплексно сопряженным координатам $(\bar{t})$ равен нулю.

1.2. Лемма. *Пусть теперь цепь* Γ *непрерывно изменяется в зависимости от* t, *а предположения леммы* 1.1 *усилены следующим образом*:

1°. $\Gamma(t)$ — *цикл*;

2°. φ_t *регулярна и замкнута в окрестности* $U(t)$ *носителя* $\Gamma(t)$ $\forall t \in W$, W — *открытое подмножество* T.

Тогда $J(t)$ *голоморфна в* W.

Доказательство. Из замкнутости φ_t следует, что интеграл зависит лишь от класса гомологий $h_*(U(t))$ цикла $\Gamma(t)$.

Но так как $\Gamma(t)$ меняется непрерывно, очевидно, что при t', достаточно близких к t, цикл $\Gamma(t)$ гомологичен $\Gamma(t')$ в $U(t')$:

$$\Gamma(t) \in h_*(U(t')).$$

Значит, $J(t') = \int\limits_{\Gamma(t)} \varphi_{t'}$ и из леммы 1.1 получаем, что функция $J(t')$ голоморфна в точке t.

1.3. Замечание. В лемме 1.2, очевидно, можно считать, что $\Gamma(t)$ — *относительный* цикл по модулю подмногообразия S, если предположить дополнительно, что $\varphi_t \mid S = 0$.

1.4. Начиная с этого места, предполагается, что X — *комплексное аналитическое* многообразие. Пусть $S_t \subset X$ — *замкнутое* комплексное аналитическое подмногообразие комплексной коразмерности 1, аналитически зависящее от t (т. е. его локальные уравнения аналитичны по t).

Пусть, далее, φ_t — дифференциальная форма, голоморфно зависящая от t, регулярная и *замкнутая* в $X - S_t$, а ω_t — форма на S_t, принадлежащая *классу-вычету* φ_t:

$$\omega_t \in \operatorname{Res}[\varphi_t] \qquad [11].$$

Тогда, *если* $\gamma(t)$ — *цикл* $S(t)$, *непрерывно зависящий от* t, *то функция*

$$J(t) = \int\limits_{\gamma(t)} \omega_t$$

голоморфна. Действительно, по теореме о вычетах

$$J(t) = \int\limits_{\delta\gamma(t)} \varphi(t),$$

и мы оказываемся в условиях леммы 1.2, где

$$U(t) = X - S_t.$$

1.5. В замечании 1.3 мы коснулись случая, когда $\Gamma(t)$ — *относительный* цикл X по модулю *фиксированного* подмногообразия. Займемся теперь случаем, когда это подмногообразие аналитически зависит от t.

Пусть $S_t \subset X$ — замкнутое комплексное аналитическое подмногообразие коразмерности 1, аналитически зависящее от t, $\Gamma(t)$ — *относительный цикл* (X, S_t), непрерывно меняющийся вместе с t, φ_t — такая *замкнутая* и регулярная на X дифференциальная форма, что $\varphi_t | S_t = 0$ (так будет, например, в случае *произвольной голоморфной формы максимальной степени*).

Предположим, кроме того, что

(φ 1) φ_t локально в окрестности всякой точки $y \in S_t$ выражается в виде

$$\varphi_t(x) = [s_y(x, t)]^\alpha \omega_y(x),$$

где $\omega_y(x)$ — не зависящая от t дифференциальная форма, определенная в окрестности точки y, $\alpha \geqslant 0$ — целое число, а $s_y(x, t)$ — локальное уравнение S_t

в окрестности y, причем предполагается, что оно удовлетворяет следующим условиям[1]):

(φ2) $\dfrac{1}{s_y(x, t)} \dfrac{\partial s_y(x, t)}{\partial t}$ не зависит от y;

(φ3) $\dfrac{d s_y(x, t)}{s_y(x, t)} \wedge \omega_y(x)$ не зависит от t (здесь d — дифференциал при постоянном t).

При $\alpha > 0$ условия (φ2) и (φ3) следуют из (φ1). Действительно, (φ2) следует в этом случае из равенства

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial t} = \frac{\alpha}{s_y} \frac{\partial s_y}{\partial t} \varphi_t,$$

а (φ3) — из равенства

$$0 = d\varphi_t(x) = [s_y(x, t)]^{\alpha} \left[\alpha \frac{d s_y(x, t)}{s_y(x, t)} \wedge \omega_y(x) + d\omega_y(x)\right].$$

Предложение 1.6. *Если выполнены условия* п. 1.5, *то функция*

$$J(t) = \int_{\Gamma(t)} \varphi_t$$

голоморфна.

Доказательство. Интеграл зависит лишь от класса относительных гомологий $h_*(X, S_t)$ относительного цикла $\Gamma(t)$. Пусть $\gamma(t) = \partial\Gamma(t)$.

Построим, как в п. III.2.2, трубчатую окрестность V многообразия S_{t_0} и ретракцию μ: $V \to S_{t_0}$.

При $y \in S_{t_0}$ и t, достаточно близком к t_0, S_t пересекает диск $\mu^{-1}(y)$ в единственной точке $x(y, t)$; когда y пробегает цикл $\gamma(t_0)$, геодезическая yx_t, соединяющая y с $x(y, t)$, заметает цепь $\Gamma_{t_0 t}$, часть границы которой, лежащая в S_{t_0}, совпадает с $-\gamma(t_0)$; очевидно, $\Gamma(t_0) + \Gamma_{t_0 t} \in h_*(X, S_t)$ и

$$J(t) = \int_{\Gamma(t_0)} \varphi_t + \int_{\Gamma_{t_0 t}} \varphi_t.$$

[1]) Отметим, что (φ2) выполняется, если $s(x, t)$ — *глобальное уравнение*, а (φ3) — если ω есть *голоморфная форма максимальной степени.*

Первый интеграл голоморфен вследствие леммы 1.1. Чтобы исследовать второй интеграл, заметим, что функция $\ln\frac{s_y(t)}{s_y(t_0)}$, не зависящая от y в силу ($\varphi 2$), является однозначной на диске $\mu^{-1}(y)$ с разрезом $\overline{yx_t}$. Скачок этой функции на разрезе равен $2\pi i$; отсюда

$$\int\limits_{\Gamma_{t_0t}} \varphi_t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Delta_{t_0t}}\left(\ln\frac{s_y(t)}{s_y(t_0)}\right)\varphi_t,$$

где цикл Δ_{t_0t} получается из цепи Γ_{t_0t}, если разрез $\overline{yx_t}$ заменить обходом вокруг обеих сторон этого разреза

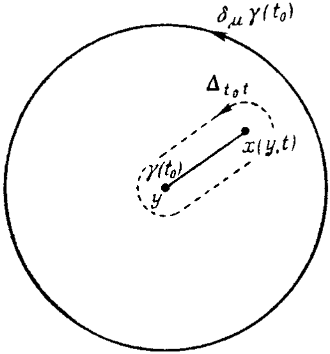


Рис. VI.1.

(рис. VI.1). Ввиду того что подинтегральная форма $\left(\ln\frac{s_y(t)}{s_y(t_0)}\right)\varphi_t$ *замкнута* [это следует из ($\varphi 3$)], цикл Δ_{t_0t} можно заменить гомологичным циклом $\delta_\mu\gamma(t_0)$ и голоморфность полученного интеграла следует из леммы 1.1.

1.7. В дальнейшем вместо *одного* подмногообразия S мы будем рассматривать *семейство* комплексных аналитических подмногообразий $\{S_{1t}, S_{2t}, \ldots, S_{mt}\}$ коразмерности 1, находящихся в общем положении и аналитически зависящих от t.

Точно так же, как в п. 1.4, можно показать, что если φ_t — дифференциальная форма, голоморфно зависящая от t, регулярная и *замкнутая* в

$X-(S_1\cup\ \ldots\ \cup S_m)_t$ и имеющая на $(S_1\cap\ \ldots\ \cap S_m)_t$ *сложный вычет*

$$\omega_t\in \operatorname{Res}^m[\varphi_t],$$

а $\gamma(t)$—цикл на $(S_1\cap\ldots\cap S_m)_t$, непрерывно зависящий от t, *то функция*

$$J(t)=\int\limits_{\gamma(t)}\omega_t$$

голоморфна. Предложение 1.6 также можно обобщить следующим образом:

1.8. Предложение. *Пусть* $\Gamma(t)$ — *непрерывно зависящий от* t *относительный цикл на* $(X,(S_1\cup\ \ldots\ \cup S_m)_t)$, φ_t — *такая регулярная и замкнутая на* X *дифференциальная форма, что* $\varphi_t|S_{it}=0$ $(i=1,2,\ \ldots,\ m)$. *Кроме того, предположим, что*

(φ1) *в окрестности каждой точки*

$$y\in\left(S_{i_1}\cap\ \ldots\ \cap S_{i_\mu}\right)_t(\{i_1,\ \ldots,\ i_\mu\}\subset\{1,\ 2,\ \ldots,\ m\})$$

φ_t *локально выражается в виде*

$$\varphi_t(x)=\prod_{i=i_1,\ \ldots,\ i_\mu}[s_{iy}(x,\ t)]^{\alpha_i}\,\omega_y(x),$$

где $\omega_y(x)$ — *не зависящая от* t *дифференциальная форма, определенная в окрестности* y, $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_\mu$ — *целые числа* $\geqslant 0$, *а* $s_{iy}(x,t)$ — *локальные уравнения многообразий* S_{it} *в окрестности* y, *удовлетворяющие дополнительным условиям*

(φ2) $\dfrac{1}{s_{iy}}\dfrac{\partial s_{iy}}{\partial t}$ *не зависит от* y,

(φ3) $\dfrac{ds_{iy}}{s_{iy}}\wedge\omega_y$ *не зависит от* t.

Тогда функция $J(t)=\int\limits_{\Gamma(t)}\varphi_t$ *голоморфна.*

Доказательство. Предположим сначала, что

$$\begin{array}{ccccccc} T= & T^{(1)} & \times & T^{(2)} & \times\ \ldots\ \times & T^{(m)}, \\ \Downarrow & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ t= & \big(t^{(1)}, & & t^{(2)}, & \ldots, & t^{(m)}\big), \end{array}$$

а функция $s_{iy}(x,t)$ зависит лишь от $t^{(i)}$ $(i=1,2,\ldots,m)$. В этом случае, точно так же, как в предложении 1.8, доказывается голоморфность функции $J(t)$ по каждой из переменных $t^{(1)}, \ldots, t^{(m)}$ отдельно, откуда (по теореме Хартогса) следует ее голоморфность по t.

Общий случай можно свести к предыдущему, увеличивая многообразие параметров, т. е. погружая T в $\underbrace{T \times T \times \ldots \times T}_{m \text{ раз}}$ при помощи диагонального отображения

$$t \rightsquigarrow (t, t, \ldots, t).$$

2. Особенность интеграла, зависящего от параметра. Используя результаты гл. V (п. 2), мы можем оценить в регулярной точке $u \in L$, соответствующей простому пинчу, особую часть интеграла, взятого по циклу

$$\tilde{\Gamma}_{1,2\ldots\mu} \in \tilde{h}_{1,2\ldots\mu} \in H_n(X - S_{\mu+1\ldots m}, S_{1,2\ldots\mu})$$

(используются обозначения п. V.2).

Изучаемый интеграл записывается в виде

$$(2.0) \quad J_\alpha(t) = \int\limits_{\tilde{h}_{1,2\ldots\mu}} \left(\prod_{j=1}^{\mu} \frac{[-s_j(x,t)]^{-\alpha_j}}{(-\alpha_j)!} \right) \frac{\omega}{\prod\limits_{k=\mu+1}^{m} [s_k(x,t)]^{\alpha_k}},$$

где $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ — набор целых чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu \leqslant 0$, $\alpha_{\mu+1}, \ldots, \alpha_m > 0$; той же буквой α мы будем обозначать также целое число $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i$; ω — *голоморфная* дифференциальная форма на X *степени* n $(n = \dim X)$, не зависящая от t; $s_i(x,t)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ — уравнения многообразий S_i; чтобы упростить обозначения, мы предположим, что эти уравнения глобальны. В более общем случае можно предположить, что как $s_i(x, t)$, так и дифференциальная форма ω зависят от рассматриваемой карты (все подинтегральное выражение от нее не зависит); но тогда чтобы обеспечить аналитичность $J_\alpha(t)$ вне «многообразия» Ландау, следует ввести те же ограничения, что и в п. 1 (см. предложение 1.8).

2.1. Пусть $l(t)$ — локальное уравнение «многообразия» Ландау L в окрестности точки $u \in L$. *Тогда в* *окрестности точки и функцию* $J_\alpha(t)$ *можно представить в виде*

(2.1′) $n+m-1$ нечетно:

$$J_\alpha(t) = -\frac{N}{2}\,\frac{(2\pi i)^{m-\mu} A \prod_{i=1}^{m} (-\lambda_i)^{\alpha_i}}{(\alpha_{\mu+1}-1)!\ldots(\alpha_m-1)!} \times$$

$$\times \frac{[l(t)]^{\frac{n+m-1}{2}-\alpha}}{\Gamma\left(1+\frac{n+m-1}{2}-\alpha\right)}(1+o(t)) + \text{f. h.};$$

(2.1″) $n+m-1$ четно и $\geqslant 2\alpha$:

$$J_\alpha(t) = \frac{N(2\pi i)^{m-\mu-1} A \prod_{i=1}^{m} (-\lambda_i)^{\alpha_i}}{(\alpha_{\mu+1}-1)!\ldots(\alpha_m-1)!} \times$$

$$\times \frac{[l(t)]^{\frac{n+m-1}{2}-\alpha}}{\left(\frac{n+m-1}{2}-\alpha\right)!} \ln l(t)(1+o(t)) + \text{f. h.};$$

(2.1‴) $n+m-1$ четно и $<2\alpha$:

$$J_\alpha(t) = -N\,\frac{(2\pi i)^{m-\mu-1} A \prod_{i=1}^{m} (-\lambda_i)^{\alpha_i}}{(\alpha_{\mu+1}-1)!\ldots(\alpha_m-1)!} \times$$

$$\times \frac{\left(\alpha-\frac{n+m-1}{2}-1\right)!}{[-l(t)]^{\alpha-\frac{n+m-1}{2}}}(1+o(t)) + N\ln l(t) \times \text{f. h.} + \text{f. h.};$$

кроме того, в двух частных случаях имеем

(2.1$^{\text{IV}}$) $\mu = m = n+1$: $J_\alpha(t)$ голоморфна;

(2.1$^{\text{V}}$) $m = n+1,\ \mu = 0$: $J_\alpha(t)$ имеет полюс,

$$J_\alpha(t) = (-)^{n+1} N\,\frac{(2\pi i)^n A \prod_{i=1}^{n+1} \lambda_i^{\alpha_i}}{(\alpha_1-1)!\ldots(\alpha_{n+1}-1)!} \times$$

$$\times \frac{(\alpha-n-1)!}{[l(t)]^{\alpha-n}}(1+o(t)) + \text{f. h.}$$

Во всех этих формулах f.h. означает функцию, голоморфную в точке u, а $o(t)$ — голоморфную функцию, обращающуюся в нуль в точке u; N — индекс пересечения, который дается формулой Лефшеца, λ_i — коэффициенты разложения дифференциальной формы $\pi^* dl$ (т. е. dl как формы на Y) в точке пинча a;

$$\pi^* dl = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, ds_i \tag{2.2}$$

(существование такого разложения следует из того, что $\pi^* dl \,|\, S_1 \cap \ldots \cap S_m$ обращается в нуль в критической точке a). Наконец, A задано формулой

$$A = \frac{(2\pi)^{\frac{n-m+1}{2}} \rho}{\sqrt{D}}, \tag{2.3}$$

где ρ — коэффициент в точке a дифференциальной формы

$$\omega \wedge dt_1 \wedge dt_2 \wedge \ldots \wedge dt_q = \rho \, dy_1 \wedge dy_2 \wedge \ldots \wedge dy_p,$$

а D — детерминант матрицы M', которая получается, если вычеркнуть одну из m последних строчек и соответствующий столбец квадратной матрицы

$$M = \begin{array}{c|c|c|c|} & j'=1,2,\ldots,p & k'=1,\ldots,q & i'=1,\ldots,m \\ \hline j=1,\ldots,p & \dfrac{\partial^2 l}{\partial y_j \, \partial y_{j'}} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial^2 s_i}{\partial y_j \, \partial y_{j'}} & \dfrac{\partial t_{k'}}{\partial y_j} & \lambda_{i'} \dfrac{\partial s_{i'}}{\partial y_j} \\ \hline k=1,\ldots,p & \dfrac{\partial t_k}{\partial y_{j'}} & & \\ \cline{1-2} i=1,\ldots,m & \lambda_i \dfrac{\partial s_i}{\partial y_{j'}} & \multicolumn{2}{c|}{0} \\ \hline \end{array}$$

Из соотношения (2.2) следует, что детерминант D не зависит от того, какая именно строка вычеркивается. Из того же соотношения получаем, что левый верхний блок матрицы M является *тензором* относительно координат y. С другой стороны, $\dfrac{\partial t_{k'}}{\partial y_j}$ и $\dfrac{\partial s_{i'}}{\partial y_j}$ —

векторы относительно тех же координат, так что $\sqrt{D}$ меняется как элемент объема пространства Y, т. е. как коэффициент ρ. Таким образом, коэффициент A из формулы (2.3) является *скаляром* относительно координат y, как, впрочем, и относительно координат t, что нетрудно проверить. Можно также проверить, что выражения (2.1) инвариантны относительно замен локального уравнения $l(t)$ «многообразия» Ландау.

2.4. Вычисление коэффициента A. Выберем координаты $(y_1, y_2, \ldots, y_p)$, $(t_1, t_2, \ldots, t_q)$ таким образом, что

$$s_1(y) = y_1, \quad s_2(y) = y_2, \ \ldots, \ s_m(y) = y_m, \quad l(t) = t_1,$$

а проекция π: $Y \to T$ записывается в виде

$$t_1 = l(y), \ t_2 = y_{n+2}, \ \ldots, \ t_q = y_p \quad (p = n + q).$$

При этом матрица M будет иметь вид

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|}
 & (m) & j=1,\ldots,r & (q-1) & & (q-1) & (m) \\
\hline
(m) & ? & ? & ? & \begin{matrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_m\end{matrix} & 0 & \begin{matrix}\lambda_1 & \ldots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ldots & \lambda_m\end{matrix} \\
\cline{1-5}\cline{7-7}
i=1,\ldots,r & ? & \dfrac{\partial^2 l}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j} & ? & 0 & & 0 \\
\cline{1-4}\cline{6-6}
(q-1) & ? & ? & ? & & 1 & \\
\hline
 & \lambda_1 \ldots \lambda_m & 0 & 0 & & & \\
\cline{1-4}
(q-1) & 0 & 0 & 1 & & 0 & \\
\cline{1-4}
(m) & \begin{matrix}\lambda_1 & \ldots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ldots & \lambda_m\end{matrix} & 0 & 0 & & & \\
\hline
\end{array}$$

где

$$\xi_1 = y_{m+1}, \quad \xi_2 = y_{m+2}, \ \ldots, \ \xi_r = y_{m+r} \quad (r = n - m + 1).$$

Таким образом,

$$\sqrt{D} = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_m \sqrt{\det \left\| \frac{\partial^2 l}{\partial \xi_i \, \partial \xi_j} \right\|}.$$

Заметим, что $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ можно интерпретировать как координаты на многообразии

$$(S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_m)_\perp = Y_\perp \cap S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_m,$$

где $Y_\perp$ — подмногообразие Y, *трансверсальное* к L [в рассматриваемых координатах $Y_\perp = Y | (t_2 = t_3 = \ldots \ldots = t_q = 0)$]. Значит, $\det \left\| \frac{\partial^2 l}{\partial \xi_i \, \partial \xi_j} \right\|$ совпадает с гессианом ограничения на $(S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_m)_\perp$ функции l (обозначается $\mathrm{Hess}_\perp l$), а условие простого пинча эквивалентно тому, что D не обращается в нуль. Вычислим теперь коэффициент ρ; по определению это коэффициент дифференциальной формы

$$(\omega \wedge dl)_\perp = (\omega \wedge dl) | Y_\perp = \\ = \rho \, ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m \wedge d\xi_1 \wedge \ldots \wedge d\xi_r,$$

т. е.

$$(2.5) \qquad \left. \frac{(\omega \wedge dl)_\perp}{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m} \right|_{(S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_m)_\perp} = \\ = \rho \, d\xi_1 \wedge \ldots \wedge d\xi_r.$$

Окончательно

$$(2.6) \qquad A = \frac{(2\pi)^{\frac{n-m+1}{2}} \rho}{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_m \sqrt{\mathrm{Hess}_\perp l}},$$

где ρ определяется из (2.5).

Выражение (2.6) интересно тем, что в двух случаях $m = n$ и $m = n + 1$ оно становится очень простым.

Случай $m = n + 1$: $r = 0$, $\mathrm{Hess}_\perp l = 1$; *в слое* Y_u можно вычислить *скаляр*

$$\rho_{\widehat{n+1}} = \left. \frac{\omega}{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_n} \right|_{(S_1 \cap \ldots \cap S_n)_u}.$$

В этом случае (2.5) записывается в виде

$$\rho = \frac{(\omega \wedge dl)_\perp}{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_{n+1}}\bigg|_{(S_1 \cap \ldots \cap S_n \cap S_{n+1})_\perp},$$

т. е. в силу (2.2)

$$\rho = \lambda_{n+1}\rho_{\widehat{n+1}}.$$

Таким образом,

$$(2.7) \quad A = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n} \frac{\omega}{ds_1 \wedge ds_2 \wedge \ldots \wedge ds_n}\bigg|_a.$$

Случай $m = n : r = 1$, $\mathrm{Hess}_\perp l = \frac{\partial^2 l}{\partial \xi^2}$; координату ξ можно выбрать так, чтобы $l_\perp = \frac{\xi^2}{2}$, т. е. $\mathrm{Hess}_\perp l = 1$; в слое Y_t при t, близких к u, $t \notin L$, многообразия S_{1t}, $S_{2t}, \ldots, S_{nt}$ находятся в общем положении, и поэтому можно вычислить *скаляр*

$$\sigma_t = \frac{\omega}{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_n}\bigg|_{(S_1 \cap \ldots \cap S_n)_t}.$$

Тогда в точке t мы получаем равенства

$$dl = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, ds_i + dl_\perp = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, ds_i + \xi \, d\xi,$$

$$(\omega \wedge dl)_\perp = \sigma_t \, ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_n \wedge \xi \, d\xi$$

и, следовательно,

$$\rho = \lim_{t \to u} \sigma_t \xi.$$

Таким образом,

$$(2.8) \quad A = \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n} \times$$

$$\times \lim_{t \to u} \sqrt{2l(t)} \frac{\omega}{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_n}\bigg|_{(S_1 \cap \ldots \cap S_n)_t}.$$

2.9. Знак выражений (2.1). Знаки некоторых величин, входящих в выражения (2.1), не определены: знак $\sqrt{l(t)}$, когда $n + m - 1$ нечетно; знак N, зависящий от ориентации исчезающего класса; знак A, в выражение которого входит $\sqrt{\mathrm{Hess}_\perp l}$ [см. (2.6)]. Уточним правило выбора этих знаков. Рассмотрим значение t, при котором $l(t)>0$, и положим $\sqrt{l(t)}>0$, а знак NA определим при помощи следующего предложения (см. Лере [2, п. 22]):

Многообразие $(S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_m)_\perp$ содержит ориентированный шар с ориентированной границей — исчезающей сферой $e(S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_m)_t$, на котором $\sqrt{\mathrm{Hess}_\perp l}\, d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge \ldots \wedge d\xi_r$ задает положительную меру.

2.10. Доказательство формул (2.1) (Ж. Лере). Как и при доказательстве предложения 1.8, удобно предположить, что

$$T = T^{(1)} \times T^{(2)} \times \ldots \times T^{(m)},$$

а каждое s_i *зависит лишь от* $t^{(i)} \in T^{(i)}$, причем зависимость от $t^{(i)}$ *действительно* имеет место. Более того, *в окрестности точки* u на каждом из $T^{(i)}$ мы зададим такую аффинную структуру, что $s_i(x, t^{(i)})$ будет *линейной* функцией от $t^{(i)}$ для $x \in U$. *Однородным полиномом степени* β, где $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$ ($\beta_i \geqslant 0$ — целые)[1]), назовем произведение $P_\beta(t) = \prod_{i=1}^{m} P_{\beta_i}(t^{(i)})$ однородных полиномов $P_{\beta_i}(t^{(i)})$ степени β_i. Из полиномов такого типа нам встретятся полиномы $P_\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ от операторов дифференцирования и выражения $\prod_{i=1}^{m} P_{\beta_i}\left(\frac{\partial s_i}{\partial t^{(i)}}\right)$ (сокращенно $P_\beta(\dot{s})$), причем в силу условия линейности $P_\beta(\dot{s})$ есть функция, зависящая лишь от x (при $x \in U$), и предполагается, что в открытом множестве U она не обращается в нуль.

---

[1]) Буквой β будем обозначать также целое число $\sum_{i=1}^{m} \beta_i$.

Первый шаг: *построение вспомогательных функций.* Пусть $R_{\beta,\gamma} = \frac{Q_\beta}{Q_\gamma}$ — рациональная функция — отношение двух однородных полиномов степеней β и γ. Предполагая для определенности, что

$$\beta_j - \gamma_j \leqslant 0 \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ \nu),$$
$$\beta_j - \gamma_j > 0 \qquad (j = \nu + 1,\ \ldots,\ m),$$

положим

$$(2.11)\quad j_{R_{\beta,\gamma}}(t) = \int\limits_{e^{\nu+1\ldots m}} \frac{d^{\sum\limits_{k=\nu+1}^{m}(\beta_k-\gamma_k-1)}}{ds_{\nu+1}^{\beta_{\nu+1}-\gamma_{\nu+1}} \wedge \ldots \wedge ds_m^{\beta_m-\gamma_m}} \times \left[\left(\prod_{j=1}^{\nu} \frac{(-s_j)^{\gamma_j-\beta_j}}{(\gamma_j-\beta_j)!}\right) R_{\beta,\gamma}(-\dot{s})\,\omega'\right],$$

где ω, так же как и ω в формуле (2.0), есть некоторая голоморфная форма степени n, не зависящая от t, которую мы определим позднее. Для всякого однородного полинома P справедлива *формула дифференцирования*[1])

$$(2.12)\qquad \boxed{P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) j_R(t) = j_{PR}(t).}$$

Оценим $j_1(t)$. Очевидно,

$$j_1(t) = \int\limits_{e} \omega' \sim \rho' \operatorname{mes} e,$$

где ρ' — коэффициент формы $\omega' = \rho' dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, вычисленный в точке пинча a; $\operatorname{mes} e$, т. е. меру исчезающей клетки e, легко вычислить в системе локальных координат из п. V. 2.1. Действительно, это объем,

[1]) Эту формулу мы приводим без доказательства; ее легко получить, последовательно применяя формулы дифференцирования (10.5) и (10.6) из работы Лере [1].

заметаемый исчезающей клеткой $\mathbf{e}^m$ при возрастании t_1 от нуля, т. е. (prim — первообразная)

$$\operatorname{mes}\mathbf{e} = \operatorname{prim}\operatorname{mes}\mathbf{e}^m = (\operatorname{prim})^2\operatorname{mes}\mathbf{e}^{m-1,\,m} = \ldots$$
$$\ldots = (\operatorname{prim})^{m-1}\operatorname{mes}\mathbf{e}^{2\,\cdots\,m};$$

но $\operatorname{mes}\mathbf{e}^{2\,\cdots\,m}$ — это объем шара радиуса $\sqrt{t_1}$ в $(n-m+1)$-мерном пространстве, равный

$$\operatorname{mes}\mathbf{e}^{2\,\cdots\,m} = \frac{\pi^{\frac{n-m+1}{2}}\,|t_1|^{\frac{n-m+1}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{n-m+1}{2}\right)},$$

так что

$$\operatorname{mes}\mathbf{e} = \frac{\pi^{\frac{n-m+1}{2}}\,|t_1|^{\frac{n+m-1}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{n+m-1}{2}\right)}.$$

Значит, в рассматриваемых координатах

$$j_1(t) \sim \frac{\pi^{\frac{n-m+1}{2}}\,\rho'\,|t_1|^{\frac{n+m-1}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{n+m-1}{2}\right)}$$

и соответственно в произвольных координатах

$$(2.13)\qquad j_1(t) = \frac{A'\,[l(t)]^{\frac{n+m-1}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{n+m-1}{2}\right)}\,(1+o(t))\,^{1)},$$

где A' определяется выражением (2.3), в котором ω следует заменить на ω'.

2.14. Лемма. *Функция* $j_{R_{\beta,\gamma}}(t)\,[l(t)]^{\beta-\gamma-\frac{n+m-1}{2}}$ *голоморфна в точке u.*

Это утверждение достаточно доказать при $\beta=0$; переход к общему случаю осуществляется с помощью

---

[1]) Отметим, что эта формула справедлива также в случае $m=n+1$.

формулы дифференцирования (2.12). Но

$$j_{R_{0,\gamma}}(t)=\int\limits_{e}\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{(-s_i)^{\gamma_i}}{\gamma_i!}\right)R_{0,\gamma}(-\dot{s})\,\omega'$$

и, как нам известно, $\operatorname{mes} e<\mathrm{const}\cdot|l(t)|^{\frac{n+m-1}{2}}$; поскольку, очевидно, $|s_i|<\mathrm{const}\cdot|l(t)|$, из этого вытекает, что

$$\left|j_{R_{0,\gamma}}(t)\right|<\mathrm{const}\cdot|l(t)|^{\gamma+\frac{n+m-1}{2}},$$

т. е. функция $j_{R_{0,\gamma}}(t)\,|l(t)|^{-\gamma-\frac{n+m-1}{2}}$ ограничена по модулю; с другой стороны, она однозначна, так как

$$\omega_* e=\{\mp e \quad \text{при} \quad n+m-1\begin{cases}\text{нечетном,}\\ \text{четном}\end{cases}$$

(см. п. V. 2.6), и, следовательно (по теореме Римана), она голоморфна.

2.15. Лемма. *Если* $n+m-1$ *четно, то* $j_{R_{\beta,\gamma}}(t)$ *голоморфна.*

Действительно, в этом случае все исчезающие классы *инвариантны* в смысле п. V. 2.7, что позволяет применить лемму 1.2.

Докажем, кроме того, что, *за исключением случаев, когда* $n+m-1$ — *четное число* $<2(\beta-\gamma)$, справедлива формула

(2.16) $$j_{R_{\beta,\gamma}}(t)=$$

$$=\frac{A'\left(\prod\limits_{i=1}^{m}\lambda_i^{\beta_i-\gamma_i}\right)R_{\beta,\gamma}(\dot{s})}{\Gamma\left(1+\frac{n+m-1}{2}-\beta+\gamma\right)}[l(t)]^{\frac{n+m-1}{2}-\beta+\gamma}(1+o(t)).$$

Действительно, по формуле дифференцирования (2.12) имеем $j_1(t)=Q_\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)j_{1/Q_\gamma}(t)$, так что, интегрируя (2.13), мы получаем с учетом леммы 2.14

$$j_{1/Q_\gamma}(t)=\frac{A'\left(\prod_{i=1}^{m}\lambda_i^{-\gamma_i}\right)[l(t)]^{\frac{n+m-1}{2}+\gamma}}{Q_\gamma(\dot s)\,\Gamma\left(1+\frac{n+m-1}{2}+\gamma\right)}(1+o(t)).$$

Применяя к полученному выражению дифференциальный оператор $Q_\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$, получаем (2.16), за исключением случая четного $n+m-1<2(\beta-\gamma)$, когда степень старшего члена обращается в нуль после нескольких дифференцирований.

Второй шаг: *сравнение изучаемого интеграла с вспомогательными функциями.* Положим $R=\frac{Q^+}{Q^-}$, где

Q^+ — однородный полином степени

$$(0, 0\ \ldots,\ 0, \alpha_{\mu+1},\ \ldots,\ \alpha_m),$$

Q^- — однородный полином степени

$$(-\alpha_1,\ \ldots,\ -\alpha_\mu, 0,\ \ldots,\ 0),$$

и выберем в качестве формы ω, входящей в определение вспомогательных функций первого шага, форму

$$\omega'=\frac{\omega}{R(-\dot s)}.$$

Тогда по теореме о вычетах

$$j_R(t)=\int\limits_{e_{\mu+1\ldots m}}\frac{d^{\sum\limits_{k=\mu+1}^{m}(\alpha_k-1)}}{ds_{\mu+1}^{\alpha_{\mu+1}}\wedge\ldots\wedge ds_m^{\alpha_m}}\left[\left(\prod_{j=1}^{\mu}\frac{(-s_j)^{-\alpha_j}}{(-\alpha_j)!}\right)\omega\right]=$$

$$=\frac{(\alpha_{\mu+1}-1)!\ldots(\alpha_m-1)!}{(2\pi i)^{m-\mu}}\int\limits_{\tilde e_{1,2\ldots\mu}}\left(\prod_{j=1}^{\mu}\frac{(-s_j)^{-\alpha_j}}{(-\alpha_j)!}\right)\frac{\omega}{s_{\mu+1}^{\alpha_{\mu+1}}\ldots s_m^{\alpha_m}}.$$

2.17. Теорема. *При нечетном $n-m+1$ функция*

$$J_\alpha(t)+\frac{N}{2}\,\frac{(2\pi i)^{m-\mu}}{(\alpha_{\mu+1}-1)!\ldots(\alpha_m-1)!}\,j_R(t)$$

голоморфна в точке u.

Действительно, класс $2\tilde h_{1,2\ldots\mu}+N\tilde e_{1,2\ldots\mu}$ инвариантен (см. лемму V.2.10). *Формула* (2.1′) *следует из этой теоремы и формулы* (2.16).

2.18. Займемся теперь случаем, когда $n+m-1$ *четно*. Можно считать, что цикл $\tilde{\Gamma}_{1,2\ldots\mu}$, по которому ведется интегрирование, пересекает сферу $\dot{U}$ (границу шара U) трансверсально. Это приводит к разложению

$$\begin{array}{c} \tilde{\Gamma}_{1,2\ldots\mu} = {}'\tilde{\Gamma}_{1,2\ldots\mu} + {}''\tilde{\Gamma}_{1,2\ldots\mu}. \\ \qquad\quad \cap \qquad\qquad \cap \\ \qquad\quad U \qquad\quad X-U \end{array}$$

Можно показать, что в $U - S_{\mu+1\ldots m}$ цепь $'\tilde{\Gamma}_{1,2\ldots\mu}$ гомологична по модулю $\dot{U} \cup S_{1,2\ldots\mu}$ цепи $N\delta_{\mu+1}\circ\ldots$ $\ldots\circ\delta_m\gamma^{\mu+1\ldots m}$, где $\gamma^{\mu+1\ldots m}$ — цепь в $U \cap S^{\mu+1\ldots m}$ с границей $S_{1,2\ldots\mu}$; при обходе $l(t)$ вокруг нуля цепь $\gamma^{\mu+1\ldots m}$ меняется непрерывно и ее мера остается *ограниченной*, если $l(t)$ делает вокруг нуля *конечное* число оборотов.

2.19. Лемма. *Пусть P — однородный полином степени* $(0, \ldots, 0, \alpha_{\mu+1}-1, \ldots, \alpha_m-1)$. *Функция*

$$J_\alpha(t) - \frac{1}{(\alpha_{\mu+1}-1)!\ldots(\alpha_m-1)!\,P(-s)}\,P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\times$$
$$\times\int\limits_{'\tilde{\Gamma}_{1,2\ldots\mu}}\left(\prod_{j=1}^{\mu}\frac{(-s_j)^{-\alpha_j}}{(-\alpha_j)!}\right)\frac{\omega}{s_{\mu+1}\ldots s_m}$$

голоморфна в точке u.

Действительно, в дифференциальный оператор $P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ входят лишь $\frac{\partial}{\partial t^{(k)}}$ $(k=\mu+1, \ldots, m)$, поэтому переменные $t^{(j)}$ $(j=1, 2, \ldots, \mu)$, а значит, и соответствующие многообразия S_j можно считать *фиксированными*. Из результатов п. 1 следует в этом случае, что интеграл по $''\Gamma_{1,2\ldots\mu}$ голоморфен, т. е. функция

$$J_\alpha(t) - \int\limits_{'\tilde{\Gamma}_{1,2\ldots\mu}}\left(\prod_{j=1}^{\mu}\frac{(-s_j)^{-\alpha_j}}{(-\alpha_j)!}\right)\frac{\omega}{s_{\mu+1}^{\alpha_{\mu+1}}\ldots s_m^{\alpha_m}}$$

голоморфна. Чтобы убедиться в том, что это и есть функция из леммы 2.19, достаточно, как и при доказательстве леммы 1.2, заметить, что при малом изменении t цепь $'\tilde{T}_{1,2\ldots\mu}$ можно выбрать *не зависящей от* t, что позволяет дифференцировать под знаком интеграла.

2.20 [1]). *Справедливо тождество*

$$\int\limits_{'\tilde{T}_{1,2\ldots\mu}} \left(\prod_{j=1}^{\mu} \frac{(-s_j)^{-\alpha_j}}{(-\alpha_j)!}\right) \frac{\omega}{s_{\mu+1}\ldots s_m} =$$

$$= \int\limits_{{}^0\Gamma} \prod_{j=1}^{\mu} \frac{(-s_j)^{-\alpha_j}}{(-\alpha_j)!} \frac{\omega}{s_{\mu+1}\ldots s_m} +$$

$$+ (2\pi i)^{m-\mu} N \int\limits_{\gamma^{\mu+1\ldots m}} \frac{1}{ds_{\mu+1}\wedge\ldots\wedge ds_m}\left[\left(\prod_{j=1}^{\mu} \frac{(-s_j)^{-\alpha_j}}{(-\alpha_j)!}\right)\omega\right],$$

где ${}^0\Gamma$ — *цепь на* $\dot{U}$, *пересекающая* $S_{\mu+1}, \ldots, S_m$ *трансверсально* (рис. VI. 2). Действительно, п. 2.18 можно переформулировать так:

$$'\tilde{T}_{1,2\ldots\mu} = N\delta^{\varepsilon}_{\mu+1}\circ\ \ldots\ \circ\delta^{\varepsilon}_{m}\gamma^{\mu+1\ldots m} + {}^{\varepsilon}\Gamma +$$

$$+ \text{цепь на } S_{1,2\ldots\mu} + \text{некоторая граница},$$

где ${}^{\varepsilon}\Gamma$ — некоторая цепь в $\dot{U} - S_{\mu+1\ldots m}$, а индекс ε над δ означает радиус трубчатой окрестности, с помощью которой определяется кограница δ. Ненулевые интегралы соответствуют лишь первым двум членам этой суммы; *при* $\varepsilon\to 0$ интеграл по первому члену считается с помощью вычетов (при конечном ε нельзя применять теорему о вычетах, так как $\gamma^{\mu+1\ldots m}$ *не является циклом*). Таким образом, мы получаем доказываемую формулу с ${}^0\Gamma = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} {}^{\varepsilon}\Gamma$; сходимость интеграла по ${}^0\Gamma$ следует из того, что все $S_k \cap {}^0\Gamma$ имеют в ${}^0\Gamma$ действительную коразмерность 2, в то время как s_k появляются в знаменателе в первой степени.

---

[1]) В п. 2.20—2.23 следует исключить случай $\mu=0$, $m=n+1$.

2.21. Лемма. *Если $n+m-1$ четно, то функция*

$$f_\alpha(t) = \int\limits_{'\tilde{T}_{1,\,2\ldots\mu}} \left(\prod_{j=1}^{\mu} \frac{(-s_j)^{-\alpha_j}}{(-\alpha_j)!}\right) \frac{\omega}{s_{\mu+1}\cdots s_m} - (2\pi i)^{m-\mu-1} NP(-\dot{s})\, j_{R/P}(t) \ln l(t)$$

голоморфна в точке u.

[Степень P равна $0, \ldots 0, \alpha_{\mu+1}-1, \ldots, \alpha_m-1$.]

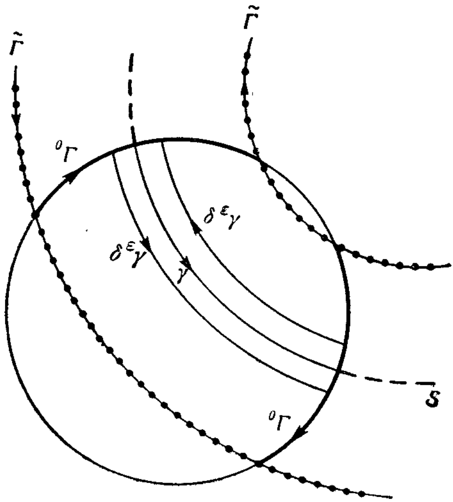


Рис. VI. 2.

Действительно, по формуле Пикара — Лефшеца

$$\mathrm{Var}\ '\tilde{T}_{1,\,2\ldots\mu} = N\delta_{\mu+1} \circ \ldots \circ \delta_m e^{\mu+1\ldots m},$$

откуда, учитывая теорему о вычетах, определение $j_{R/P}(t)$ и лемму 2.15, получаем, что функция $f_\alpha(t)$ однозначна. Построим для нее мажоранту; в силу леммы 2.15 ее второй член не превосходит $\mathrm{const} \cdot |\ln l(t)|$, а первый член можно оценить по формуле п. 2.20. В п. 2.20 интеграл по $^0\Gamma$ сходится абсолютно и равномерно и, значит, ограничен, что же касается интеграла по $\gamma^{\mu+1\,\ldots\,m}$, то его подинтегральное выражение при $\mu>0$ мажорируется константой, а при $\mu=0$ — функцией $\frac{\text{const}}{\sqrt{|l(t)|}}$ (чтобы в этом убедиться, воспользуйтесь локальными координатами). Окончательно

$$|f_\alpha(t)|<\text{const}\cdot|\ln l(t)|+\frac{\text{const}}{\sqrt{|l(t)|}},$$

откуда вследствие однозначности вытекает голоморфность $f_\alpha(t)$.

2.22. Теорема. *Пусть P — однородный полином степени β. Если $n+m-1$ четно, то функция*

$$F_\alpha(t)=J_\alpha(t)-\frac{(2\pi i)^{m-\mu-1}N}{(\alpha_{\mu+1}-1)!\ldots(\alpha_m-1)!}P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[j_{R/P}(t)\ln l(t)]$$

голоморфна при $\beta\geqslant\alpha-\frac{n+m-1}{2}$. В частном случае $\beta=(0,\ \ldots,\ 0,\alpha_{\mu+1}-1,\ldots,\ \alpha_m-1)$ эта теорема является непосредственным следствием лемм 2.19 и 2.21. Общий случай выводится из этого частного с помощью следующей леммы.

2.23. Лемма. *Если P и P' — два таких однородных полинома, что $P(-\dot{s})P'(-\dot{s})\neq0$, и если*

$$\deg P=\beta\geqslant\alpha-\frac{n+m-1}{2},$$

то функция

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)P'\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[j_{R/PP'}(t)\ln l(t)]-P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[j_{R/P}(t)\ln l(t)]$$

голоморфна в точке $\bar{u}$.

Для доказательства этой леммы достаточно вспомнить, что $j_{R/PP'}(t)$ имеет на L нуль порядка $\geqslant\beta+\beta'-\alpha\frac{n+m-1}{2}$ (см. лемму 2.14), т. е. порядка $\geqslant\beta'=\deg P'$, так что функция

$$P'\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[j_{R/PP'}(t)\ln l(t)]-j_{R/P}(t)\ln l(t)$$

голоморфна.

Таким образом, теорема 2.22 доказана. Из этой теоремы и из (2.16) *следуют формулы* (2.1″) *и* (2.1‴).

Осталось рассмотреть два частных случая.

2.24. Доказательство (2.1^{IV}):

$$\mu = m = n+1, \qquad J_\alpha(t) = \int_{h} \prod_{i=1}^{n+1} \frac{[-s_i(x, t)]^{-\alpha_i}}{(-\alpha_i)!}\,\omega.$$

В силу формулы Пикара — Лефшеца h не разветвляется, и, следовательно, $J_\alpha(t)$ *однозначна*. Она, очевидно, *ограничена* и, значит, *голоморфна*.

2.25. Доказательство (2.1^{V}):

$$\mu = 0, \quad m = n+1, \quad J_\alpha(t) = \int_{\tilde h} \frac{\omega}{s_1^{\alpha_1} \ldots s_n^{\alpha_n} s_{n+1}^{\alpha_{n+1}}}.$$

Из п. V.2.12 следует, что класс

$$\tilde h + (-)^n N \delta_1 \circ \delta_2 \circ \ldots \circ \delta_n \mathfrak{S}^{\widehat{n+1}}$$

инвариантен. Значит,

$$J_\alpha(t) = \text{f. h.} + (-)^{n+1} N \int_{\delta_1 \circ \delta_2 \circ \ldots \circ \delta_n \mathfrak{S}^{\widehat{n+1}}} \frac{\omega}{s_1^{\alpha_1} \ldots s_n^{\alpha_n} s_{n+1}^{\alpha_{n+1}}}.$$

Преобразуя второй интеграл, как в лемме 2.19, и применяя затем формулу вычетов, получаем

$$J_\alpha(t) = \text{f. h.} + \frac{(-)^{n+1} N}{(\alpha_1 - 1)! \ldots (\alpha_n - 1)!\, (\alpha_{n+1} - 1)!\, P(-\dot s)} \times$$
$$\times P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \int_{\delta_1 \circ \ldots \circ \delta_n \mathfrak{S}^{\widehat{n+1}}} \frac{\omega}{s_1 \ldots s_n s_{n+1}} =$$
$$= \text{f. h.} + \frac{(-)^{n+1} N (2\pi i)^n}{(\alpha_1 - 1)! \ldots (\alpha_n - 1)!\, (\alpha_{n+1} - 1)!\, P(-\dot s)} \times$$
$$\times P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\omega}{s_{n+1}} \frac{1}{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_n}\bigg|_{\mathfrak{S}^{\widehat{n+1}}},$$

где P — однородный полином степени $(\alpha_1 - 1, \ldots$
$\ldots, \alpha_n - 1, \alpha_{n+1} - 1)$.

Но в локальных координатах п. V.2.1

$$s_{n+1}\left(\mathfrak{S}^{\widehat{n+1}}\right) = t_1,$$

т. е. в произвольных координатах

$$s_{n+1}\left(\mathfrak{S}^{\widehat{n+1}}\right) = \frac{l(t)}{\lambda_{n+1}},$$

так что

$$J_a(t) = \text{f. h.} + \frac{(-)^{n+1} N (2\pi i)^n \left(\prod_{i=1}^{n+1} \lambda_i^{\alpha_i - 1}\right)}{(\alpha_1 - 1)! \ldots (\alpha_{n+1} - 1)!} \times$$

$$\times \lambda_{n+1} \frac{\omega}{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_n}\bigg|_a \frac{(\alpha - n - 1)!}{[l(t)]^{\alpha - n}}.$$

Глава VII

ВЕТВЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА В СЛУЧАЕ, КОГДА ПОДИНТЕГРАЛЬНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ САМО ИМЕЕТ ВЕТВЛЕНИЕ

Мы уже изучили ветвление интеграла в случае, когда подинтегральная форма имеет на $S_1, S_2, \ldots, S_m$ полярные особенности; именно, применяя формулу Пикара — Лефшеца и теорему о вычетах, мы выяснили, что при обходе вокруг многообразия Ландау L по простой петле ω_L интеграл $J(t) = \int\limits_{\tilde{\Gamma}} \varphi_t$ переходит в

$$\omega_L^* J(t) = J(t) + N \int\limits_{\tilde{e}} \varphi_t = J(t) + N(2\pi i)^m \int\limits_{e} \operatorname{Res}^m \varphi_t.$$

В этой главе мы хотим решить аналогичную задачу в случае, когда сама подинтегральная форма φ_t имеет ветвление на $S_1, S_2, \ldots, S_m$. При этом мы имеем дело уже не с пространством $Y - S$, а с его *накрытием* $\widetilde{Y - S}$. Начнем с нескольких общих фактов о накрытиях.

1. Некоторые сведения о накрытиях. Накрытием топологического пространства[1] Y называют локально тривиальное расслоенное пространство $\tilde{Y} \xrightarrow{r} Y$ с *дискретным слоем* F.

1.1. Обозначим через $F_y = r^{-1}(y)$ слой над y. Так же, как и в п. IV. 2.6, можно показать, что *всякий путь λ в пространстве Y с началом a и концом b порождает изоморфизм*

$$\lambda_\cdot : \quad F_a \to F_b,$$

[1] В дальнейшем Y предполагается локально компактным и паракомпактным.

зависящий лишь от гомотопического класса этого пути. Этот изоморфизм строится следующим образом: если $\tilde{a} \in F_a$, то в $\tilde{Y}$ существует единственный путь $\tilde{\lambda}_{\tilde{a}}$ с началом $\tilde{a}$, такой, что $r \circ \tilde{\lambda}_{\tilde{a}} = \lambda$; конец $\tilde{b}$ этого пути и есть по определению точка $\lambda . \tilde{a}$.

1.2. Положив в 1.1 $a = b$, мы определим гомоморфизм

$$\chi\colon \pi_1(Y, a) \to \operatorname{Aut} F_a \text{ равенством } \chi(\lambda) = \lambda..$$

Факторгруппа $\Omega_a = \pi_1(Y, a)/\operatorname{Ker} \chi$ (изоморфная образу χ в $\operatorname{Aut} F_a$) называется *структурной группой накрытия.* С точностью до изоморфизма эта группа не зависит от выбора начальной точки a.

1.3. Проекция $r\colon \tilde{Y} \to Y$ индуцирует гомоморфизм фундаментальных групп

$$r_{\tilde{a}}\colon \pi_1(\tilde{Y}, \tilde{a}) \to \pi_1(Y, a) \qquad [\text{где } a = r(\tilde{a})],$$

определенный равенством $r_{\tilde{a}}(\tilde{\lambda}) = r \circ \tilde{\lambda}$.

Этот гомоморфизм *инъективен*, так как если проекция петли $\tilde{\lambda} \subset \tilde{Y}$ гомотопна нулю, то и сама петля гомотопна нулю [1]).

1.4. Положим $\pi_1^{\tilde{a}} = \operatorname{Im} r_{\tilde{a}}$; это подгруппа в $\pi_1(Y, a)$, состоящая из петель λ, «поднятия» которых $\tilde{\lambda}_{\tilde{a}}$ (обозначение из п. 1.1) кончаются в точке $\tilde{a}$, причем, очевидно,

$$\bigcap_{\tilde{a} \in F_a} \pi_1^{\tilde{a}} = \operatorname{Ker} \chi.$$

Всюду в дальнейшем предполагается, что пространство $\tilde{Y}$ линейно связно (и локально линейно связно).

1.5. Множество $\pi_1(Y, a)/\pi_1^{\tilde{a}}$ *левых классов смежности группы* $\pi_1(Y, a)$ *по* $\pi_1^{\tilde{a}}$ *изоморфно слою* F_a. Действительно, пусть $\tilde{a}\colon \pi_1(Y, a) \to F_a$ — отображение, со-

[1]) Здесь мы имеем дело с частным случаем общего свойства накрывающей гомотопии в расслоеиных пространствах; именно это свойство используется при доказательстве того, что всякое расслоение со стягиваемой базой тривиально.

поставляющее петле λ точку $\tilde{b} = \lambda.\tilde{a}$. Это отображение, очевидно, сюръективно, так как для всякой точки $\tilde{b} \in F_a$ в $\tilde{Y}$ существует путь $\tilde{\lambda}$, соединяющий $\tilde{a}$ с $\tilde{b}$, так что достаточно положить $\lambda = r \circ \tilde{\lambda}$. Пусть теперь для двух петель λ и λ' мы имеем $\lambda.\tilde{a} = \lambda'.\tilde{a}$; это означает, что пути $\tilde{\lambda}_{\tilde{a}}$ и $\tilde{\lambda}'_{\tilde{a}}$ кончаются в одной и той же точке $\tilde{b}$, т. е. $\tilde{\lambda}_{\tilde{a}}^{-1} \cdot \tilde{\lambda}'_{\tilde{a}}$ — петля с началом в $\tilde{a}$, проектирующаяся в $\lambda^{-1} \cdot \lambda'$ или $\lambda^{-1} \cdot \lambda' \in \pi_1^{\tilde{a}}$.

1.6. *Если $\tilde{a}$ и $\tilde{b} \in F_a$, то подгруппы $\pi_1^{\tilde{a}}$ и $\pi_1^{\tilde{b}}$ являются сопряженными относительно внутреннего автоморфизма* $\pi_1(Y, a)$. Действительно, пусть $\tilde{\lambda}$ — путь с началом $\tilde{a}$ и концом $\tilde{b}$, и пусть $\lambda = r \circ \tilde{\lambda}$. Из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(\tilde{Y},\ \tilde{a}) & \xrightarrow{r_{\tilde{a}}} & \pi_1(Y,\ a) \\
\wr\Big\downarrow[\tilde{\lambda}] & & \wr\Big\downarrow[\lambda] \\
\pi_1(\tilde{Y},\ \tilde{b}) & \xrightarrow{r_{\tilde{b}}} & \pi_1(Y,\ a)
\end{array}$$

(вертикальные стрелки — изоморфизмы) следует, что $\operatorname{Im} r_{\tilde{a}}$ и $\operatorname{Im} r_{\tilde{b}}$ сопряжены относительно автоморфизма $[\lambda]$.

1.7. Регулярное накрытие. Накрытие называется *регулярным*, если $\pi_1^{\tilde{a}}$ — инвариантная (относительно внутренних автоморфизмов) подгруппа группы $\pi_1(Y, a)$. В этом случае $\pi_1^{\tilde{a}}$ не зависит от выбора $\tilde{a} \in F_a$ (в силу 1.6) и совпадает с $\operatorname{Ker} \chi$ (в силу 1.4). Отсюда вследствие 1.5 получаем, что *структурная группа Ω_a изоморфна слою F_a*, на котором она действует транзитивно как *умножение слева*. Зафиксировав раз и навсегда точку $\tilde{a}$ из п. 1.5, мы *отождествим* слой F_a с группой Ω_a, что позволит определить также и умножение *справа* точки из F_a на элемент из Ω_a. Мы сейчас увидим, что это умножение справа канонически распространяется на все слои F_b, так что *Ω_a действует на всем накрытии $\tilde{Y}$ как группа правых сдвигов, сохраняющих проекцию r*. А именно, пусть $\omega \in \Omega_a$; правый сдвиг $.\omega$ переводит точку $\tilde{b} \in \tilde{Y}$ в точку

$\tilde{b}.\omega = \lambda.\left((\lambda^{-1}.\tilde{b}).\omega\right)$, где λ — какой-нибудь путь, соединяющий a с $b = r(\tilde{b})$, $\lambda^{-1}.\tilde{b}$ — точка F_a, переходящая при умножении справа на ω в точку $(\lambda^{-1}.\tilde{b}).\omega$ и отображающаяся снова в F_b под действием сдвига $\lambda.$. Легко видеть, что полученная таким образом точка $\tilde{b}.\omega$ не зависит от выбора пути λ.

1.8. Построение всевозможных накрытий пространства Y. Всякой подгруппе $\pi_1^{\cdot}$ группы $\pi_1(Y, a)$ можно сопоставить единственное с точностью до расслоенного изоморфизма накрытие $\tilde{Y} \xrightarrow{r} Y$, для которого $r_{\tilde{a}}(\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{a})) = \pi_1^{\cdot}$; в качестве пространства $\tilde{Y}$ можно взять множество гомотопических классов путей в Y, отождествляя пути, эквивалентные по модулю $\pi_1^{\cdot}$.

В частности, при $\pi_1^{\cdot} = 0$ полученное накрытие называется *универсальным накрытием* Y; это единственное односвязное накрытие Y и оно «накрывает» все остальные.

2. Обобщенные формулы Пикара — Лефшеца.

2.1. Вернемся к обозначениям и предположениям гл. V, интересуясь теперь гомологиями не $X - S_t \approx \approx (Y - S)_t$, а $\widetilde{X - S_t} \approx (\widetilde{Y - S})_t$, где $\widetilde{Y - S}$ — *накрытие* $Y - S$, $(\widetilde{Y - S})_t = \widetilde{Y - S} \cap \tilde{\pi}^{-1}(t)$, а проекция $\tilde{\pi}$ определяется из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} \widetilde{Y - S} \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "\tilde{\pi}"'] & Y - S \arrow[d, "\pi"] \\ & T \end{tikzcd}$$

Отметим, что, если $Y - S$ — локально тривиальное расслоение с базой T, то же самое верно и для $\widetilde{Y - S}$ по определению слова «накрытие». Поэтому «многообразия» Ландау в нашей новой задаче те же, что и в гл. V. Так же как и в гл. V, задачу о ветвлении вокруг этих многообразий можно *локализовать* и решать в открытом множестве $\widetilde{V-S} = \widetilde{Y-S}|V$, где V — малая шаровая окрестность точки пинча $a \in S_1 \cap S_2 \cap \ldots$ $\ldots \cap S_m$. Структура накрытия $\widetilde{V-S}$, очевидно, очень проста. Действительно, подмногообразия $S_1, S_2, \ldots$ $\ldots, S_m$ пересекаются в Y в общем положении, так что $V-S$ имеет гомотопический тип произведения m окружностей:

$$V - S \approx (\mathbf{C} - \{0\})^m \times \mathbf{C}^{p-m}.$$

Как известно, в этом случае фундаментальная группа $\pi_1(V-S)$ — это *свободная коммутативная группа*, порождаемая малыми петлями $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$, обходящими соответственно вокруг $S_1, S_2, \ldots, S_m$. Поэтому всякое накрытие $\widetilde{V-S}$ *регулярно* и, следовательно, $\pi_1(V-S)$ действует как *группа автоморфизмов* накрытия (мы рассматриваем ее как группу *левых* автоморфизмов; так как она коммутативна, ее действие справа, определенное в п. 1.7, совпадает с действием слева, определенным в п. 1.2)[1]).

2.2. Описание исчезающих цепей. Выберем, как и в гл. V, точку $t \notin L$ и положим $U = V_t$.

Можно считать, что *исчезающая клетка* $\mathbf{e}$ из п. V.2.2 является «клеткой» (не компактной) в $U-S$, прообраз которой $r^{-1}(\mathbf{e})$ в $\widetilde{U-S} = \widetilde{Y-S}|(U-S)$ является объединением клеток ${}_f\mathbf{e}$, $f \in F$ (здесь дискретное множество F — слой накрытия). Каждой из этих «клеток» ${}_f\mathbf{e}$ сопоставим «цикл»[2]):

$${}_fe = (1-\omega_1)(1-\omega_2)\ldots(1-\omega_m)_{*f}\mathbf{e}.$$

---

[1]) Отметим, что в работе Фама [1] привилегированную роль играют те накрытия $\widetilde{V-S}$, на которых $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ действуют независимо, т. е. подгруппа $\pi_1' \subset \pi_1(V-S)$ порождается петлями вида $\omega_1^{\nu^1}, \omega_2^{\nu^2}, \ldots$ без участия «смешанных» членов вида $\omega_1\omega_2, \ldots$

[2]) Это цикл в $\widetilde{U-S}$ с *некомпактным носителем;* соответствующее семейство носителей описано в добавлении, п. 3.

Можно построить (Фам [1]) деформацию этого «цикла», *отодвигающую* его от S, и превратить его в *цикл с компактным носителем* в $\widetilde{U-S}$, обозначаемый ${}_f\tilde{e}$, проекция которого $\tilde{e} = r_{*f}\tilde{e}$ принадлежит исчезающему классу $\tilde{e}(U-S)$ из гл. V. Рис. VII.1 иллюстрирует переход от «цикла» ${}_f\tilde{e} = (1-\omega)_{*f}\mathbf{e}$ — к циклу ${}_f\tilde{e}$ в случае $n = m = 1$; через ω обозначена единственная образующая структурной группы, за ее представитель

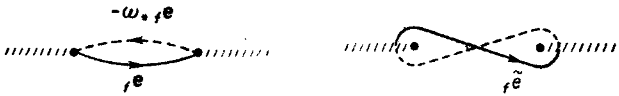


Рис. VII. 1.

$U-S$ можно принять маленькую петлю вокруг *какой-либо одной* из точек, образующих S_t. Разными линиями (сплошной и пунктирной) мы обозначаем клетки, лежащие на разных листах (разрез, разделяющий эти листы, выбран произвольно; на рисунке он заштрихован).

В общем случае (когда n и m произвольны) можно получить интуитивное представление о ситуации, если заметить, что петля ω_i не действует на «i-ю границу» «клетки» ${}_f\mathbf{e}$ («i-й границей» мы называем часть «границы», лежащую в S_i) [1]). При этом «цикл» ${}_f\dot{e}$, определенный выше, «имеет в S нулевую границу», поэтому не удивительно, что его можно сдвинуть с S и превратить в цикл в $\widetilde{U-S}$.

2.3. Формулы Пикара—Лефшеца. *Вариация класса гомологий $\tilde{h} \in H_n(X - S_t)$ определяется*

---

[1]) Всем этим выражениям в кавычках (достаточно интуитивиым?) не следует придавать особого смысла (см. ниже, п. 2.5).

по формуле[1])

$$(\tilde{\mathrm{P}}) \qquad \boxed{\operatorname{Var}\tilde{h} = \sum_{f\in F} {}_fN_f\tilde{e},}$$

где

$$(\tilde{\mathrm{L}}) \qquad \boxed{{}_fN = (-)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \langle {}_f\mathbf{e} \mid \tilde{h}\rangle.}$$

Чтобы убедиться в том, что сумма в $(\tilde{\mathrm{P}})$ имеет смысл, заметим, что даже в случае, когда слой F бесконечен, существует лишь *конечное* число ненулевых индексов пересечения, так как $\tilde{h}$ — это класс гомологий с *компактными носителями.*

2.4. Применение к ветвлению интеграла. Из формул $(\tilde{\mathrm{P}})$, $(\tilde{\mathrm{L}})$ получаем формулы ветвления интеграла $J(t) = \int\limits_{\tilde{h}} \varphi_t$, где φ_t — замкнутая дифференциальная форма на $X - S_t$, голоморфно зависящая от t: обозначая через $\operatorname{Disc}_L J(t) = (1 - \omega_L^*) J(t)$ разрыв $J(t)$, получаем

$$(\mathrm{Disc}\ 1) \qquad \operatorname{Disc}_L J(t) = -\sum_{f\in F} {}_fN \int\limits_{f\tilde{e}} \varphi_t.$$

Если подинтегральное выражение имеет в окрестности $S_1, S_2, \ldots, S_m$ «не слишком большую» особенность [практически, если его модуль растет не быстрее чем $\frac{1}{|s_i|^a}$ $(0 < a < 1)$ при стремлении к S_i вдоль некото-

[1]) См Фам [1]. В действительности эта формула доказаиа там лишь в случае накрытий с «независимыми» разветвлениями (см. примечание 1 на стр. 165), но я думаю, что она верна и в общем случае. Во всяком случае, поскольку она верна для универсального накрытия над $U - S$, она верна также и в случае произвольного накрытия для всякого класса $\tilde{h}$, являющегося проекцией некоторого класса универсального накрытия, т. е. для всякого цикла $\tilde{\Gamma}$, который после поднятия в универсальное накрытие останется циклом (когда я говорю о классе $\tilde{h}$ или цикле $\tilde{\Gamma}$, подразумевается, конечно, след этого класса или цикла в $\widetilde{U - S}$: задача чисто локальна).

рого направления; пример: функция $\left.\frac{\ln s_i}{|s_i|^b}(0<b<1)\right]$, то цикл ${}_f\tilde{e}$, по которому ведется интегрирование, можно заменить на ${}_fe=(1-\omega_1)\ \ldots\ (1-\omega_m)_f\mathbf{e}$, что дает

$$(\text{Disc } 2)\quad \operatorname{Disc}_L J(t)=-\sum_{f\in F} {}_fN \int\limits_{{}_f\mathbf{e}} \operatorname{Disc}_1 \operatorname{Disc}_2 \ldots \operatorname{Disc}_m \varphi_t$$

[где по определению $\operatorname{Disc}_i \psi=\left(1-\omega_i^*\right)\psi$].

Предположим, более общим образом, что φ_t имеет особенности предыдущего типа на многообразиях $S_1, S_2, \ldots, S_m$ и полярные особенности (без ветвления) на многообразиях $S_{\mu+1}, \ldots, S_m$. В этом случае цикл ${}_f\tilde{e}$ можно заменить на

$$\delta_{\mu+1}\circ\ \ldots\ \circ\delta_m(1-\omega_1)(1-\omega_2)\ldots(1-\omega_\mu)_*\,{}_f\mathbf{e}^{\mu+1\ldots m},$$

где δ_i — кограница Лере, по отношению к подмногообразию S_i, а через ${}_f\mathbf{e}^{\mu+1\ldots m}$ обозначена сложная граница клетки ${}_f\mathbf{e}$:

$${}_f\mathbf{e}^{\mu+1\ldots m}=\partial_m\circ\ \ldots\ \circ\partial_{\mu+1}\,{}_f\mathbf{e}.$$

В этом случае по теореме Лере о вычетах получаем

$$(\text{Disc } 3)\quad \operatorname{Disc}_L J(t)=-(2\pi i)^{m-\mu}\sum_{f\in F}{}_fN\times$$
$$\times\int\limits_{{}_f\mathbf{e}^{\mu+1\ldots m}} \operatorname{Res}_{\mu+1}\ldots\operatorname{Res}_m \operatorname{Disc}_1\ldots\operatorname{Disc}_\mu \varphi_t.$$

2.5. **Обобщение на случай относительных гомологий.** Если форма φ_t имеет на $S_1, S_2, \ldots, S_\mu$ $(\mu\leqslant m)$ «не слишком большие» особенности (см. п. 2.4), то ее можно интегрировать даже по тем цепям, которые пересекаются с $S_1, S_2, \ldots, S_\mu$, и естественно попытаться решить проблему ветвления для интеграла $J(t)=\int\limits_{\tilde{\Gamma}_{1,2\ldots\mu}}\varphi_t$, где цепь $\tilde{\Gamma}_{1,2\ldots\mu}$, по которой ведется интегрирование, «имеет границу в $S_1\cup S_2\cup\ \ldots\ \cup S_\mu$». К несчастью, определить понятие «имеет границу в S» для цепи, которая должна разветвляться при обходе вокруг S, — дело довольно тонкое. В работе Фама [1] это препятствие обходится при помощи очевидной стратификации Y, при которой стратами являются подмногообразия

$$Y-S, \quad S_i - \bigcup_{k\neq i} S_k, \quad S_i \cap S_j - \bigcup_{k \neq i,\, j} S_k,$$

и «связывания» накрытий каждого из этих стратов в одно пространство $\widetilde{Y}$; затем предполагается, что интегрирование ведется по классу гомологий

$$\tilde{h}_{1,\,2\,\ldots\,\mu} \in H_*(\widetilde{Y-S}_{\mu+1\,\ldots\,m},\ \tilde{S}_{1,\,2\,\ldots\,\mu}).$$

Недостаток этого метода в том, что он применим не ко всем накрытиям над $Y-S$, а приводит лишь к тем из них, для которых ветвления «независимы» [примечание 1, стр. 165], причем бесконечные накрытия получаются лишь с помощью неприятных ухищрений. Лучше не стараться расширить пространство $\widetilde{Y-S}$; в добавлении (п. 3) показано, что все вышеуказанные гомологии можно переопределить для случая специально подобранных *семейств носителей* в $\widetilde{Y-S}$, при этом новое определение имеет то преимущество, что оно применимо к любым накрытиям.

Результат работы Фама [1] формулируется так:

$$(\tilde{\mathrm{P}}_{1,\,2\,\ldots\,\mu}) \qquad \boxed{\operatorname{Var} \tilde{h}_{1,\,2\,\ldots\,\mu} = \sum_{f\in F} {}_fN \omega_1\omega_2 \ldots \omega_{\mu *}\, {}_f\tilde{e}_{1,\,2\,\ldots\,\mu},}$$

где

$$(\tilde{\mathrm{L}}_{1,\,2\,\ldots\,\mu})$$

$$\boxed{{}_fN = (-)^{\mu}(-)^{\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}} \langle {}_f\tilde{e}_{\mu+1\,\ldots\,m} \mid \tilde{h}_{1,\,2\,\ldots\,\mu} \rangle,}$$

а ${}_f\tilde{e}_{1,\,2\,\ldots\,\mu}$ — цепь, получающаяся сдвигом с $S_{\mu+1\,\ldots\,m}$ цепи $(1-\omega_{\mu+1}) \ldots (1-\omega_m)_{*f}e$; цепь ${}_f\tilde{e}_{\mu+1\,\ldots\,m}$ определяется аналогичным образом. Из этой формулы следует формула разрыва, аналогичная (Disc 2), с $\mathrm{Disc}_{\mu+1} \ldots \mathrm{Disc}_m \varphi_l$ под интегралом.

3. Добавление об относительных гомологиях и семействах носителей.

3.1. Лемма. *Пусть $X = Y - S$ — локально компактное паракомпактное топологическое пространство, такое, что S является в Y деформационным ретрактом некоторой своей открытой окрестности. Обозначим через U эту окрестность, а через $g_\tau : U \to U$ — гомотопию, переводящую тождественное отображение ($g_0 = 1_U$) в ретракцию $r: U \to S$ ($g_1 = i \circ r$). Предположим, что выполнены следующие условия:*

(i) *(устойчивость S): $g_\tau(S) = S$ для всех $\tau \in [0, 1]$;*

(ii) *(уменьшение окрестностей): g_τ при $\tau < 1$ гомеоморфно отображает U на открытое множество U_τ, уменьшающееся при возрастании τ; обозначим через $g_{\tau\tau'}$: $U_\tau \to U_{\tau'}$ возникающий при этом естественный гомеоморфизм. Мы требуем, чтобы*

$$g_{\tau\tau'}(U_{\tau''}) \subset U_{\tau''} \quad \forall \tau'' > \tau' > \tau;$$

(iii) *для всякого компакта K из X существует такое $\tau < 1$, что*

$$K \cap U_\tau = \emptyset.$$

Пусть Φ — такое семейство носителей в X, что

(Φ_i) *$\Phi \cap (Y - U_\tau)$ для всякого $\tau < 1$ есть семейство компактов;*

(Φ_{ii}) *для всякого $A \subset \Phi | U - S$*

$$\bigcup_{\tau < 1} g_\tau(A) \in \Phi \,|\, U - S.$$

Тогда существует канонический изоморфизм

$$H_*({}_\Phi X) \approx H_*(Y, S).$$

Примеры. Если Y — дифференцируемое многообразие, а S — замкнутое подмногообразие, семейство (U_τ, g_τ) легко построить, взяв в качестве U трубчатую окрестность S (см. п. I. 6.4).

Примеры семейств Φ:

1°. $c \cap (Y - S)$, где c — семейство компактов в Y;

2°. семейство всех тех замкнутых подмножеств X, пересечение которых с $Y - U_\tau$ компактно при всех $\tau < 1$.

Доказательство леммы 3.1. Из очевидных свойств вырезания и деформационной ретракции следует существование канонического изоморфизма

$$H_*(Y, S) \approx H_*(X, U - S).$$

С другой стороны, применив условие (Φ_i) при $\tau = 0$, получаем очевидный гомоморфизм

$$\varphi : C_*({}_\Phi X) \to C_*(X, U - S),$$

который в каждой цепи из $C_*({}_\Phi X)$ уничтожает те ее элементы, носители которых лежат в $U - S$.

Этот гомоморфизм, очевидно, *сюръективен*, и ядро его совпадает с группой $C_*({}_\Phi | U - S)$. Мы получаем, таким образом, точную последовательность[1])

$$0 \to C_*({}_\Phi | U - S) \xrightarrow{j} C_*({}_\Phi | X) \xrightarrow{\varphi} C_*(X, U - S) \to 0,$$

которой соответствует точная гомологическая последовательность

$$\ldots \to H_p({}_\Phi | U - S) \xrightarrow{j_*} H_p({}_\Phi X) \xrightarrow{\varphi_*} H_p(X, U - S) \xrightarrow{\partial_*}$$
$$\to H_{p-1}({}_\Phi | U - S) \to \ldots$$

Покажем теперь, что $H_*({}_\Phi | U - S) = 0$; тогда φ_* — *изоморфизм*, и лемма будет доказана.

Для любых $\tau < \tau'$ отображение

$$g_{\tau\tau'} : U_\tau - S \to U_{\tau'} - S$$

(ограничение $g_{\tau'} \circ g_\tau^{-1}$ на $U_\tau - S$) гомотопно тождественному.

Пусть $G_{\tau\tau'}: C_p({}_\Phi | U_\tau - S) \to C_{p+1}({}_\Phi | U_\tau - S)$ — соответствующий оператор гомотопии; чтобы убедиться в том, что он действует вышеуказанным образом, надо проверить, что если γ — локально конечная цепь с носителем в $\Phi \mid U_\tau - S$, то

1°. $G_{\tau\tau'}\gamma$ *тоже локально конечна*. Пусть K — компакт в $U_\tau - S$; вследствие (iii) существует множество $U_{\tau''}$, не пересекающееся с K; положим $\gamma = \gamma' + \gamma''$,

[1]) Дальнейшие рассуждения требуют от читателя некоторого знакомства с гомологиями цепных комплексов (см., например, Маклейн [1, гл. II]).

где γ'' состоит из элементов цепи γ, носители которых лежат в $U_{\tau''}$; согласно (ii), носитель $G_{\tau\tau'}\gamma''$ также лежит в $U_{\tau''}$, поэтому

$$(\operatorname{supp} G_{\tau\tau'}\gamma) \cap K = (\operatorname{supp} G_{\tau\tau'}\gamma') \cap K.$$

Но, согласно (Φ_i), γ' — *конечная* цепь, поэтому $G_{\tau\tau'}\gamma'$ тоже конечная цепь, и мы убедились, таким образом, в том, что K пересекается лишь с конечным числом элементов цепи $G_{\tau\tau'}\gamma$.

2°. $\operatorname{supp} G_{\tau\tau'}\gamma \in \Phi \mid U_\tau - S$; это с очевидностью вытекает из (Φ_{ii}) и аксиомы (Ф2), п. II.5.1.

Покажем, что всякий цикл $z \in Z_p\left({}_\Phi| U - S\right)$ гомологичен нулю в $H_p\left({}_\Phi| U - S\right)$. По определению оператора гомотопии $z_\tau - g_{\tau\tau' *} z_\tau = \partial G_{\tau\tau'} z_\tau$ для всякого цикла $z_\tau \in Z_p\left({}_\Phi| U_\tau - S\right)$. Пусть $\tau_0 = 0,\ \tau_1,\ \tau_2, \ldots$ — бесконечная возрастающая последовательность, стремящаяся к 1; рассмотрим цепь

$$\gamma = \sum_{i=0,\,1,\,2,\,\ldots} G_{\tau_i \tau_{i+1}} z_{\tau_i}, \quad \text{где} \quad z_{\tau_i} = g_{\tau_i *} z.$$

Эта цепь *локально конечна*, ибо вследствие (iii) семейство $\left(U_{\tau_i} - S\right)_i$ локально конечно в X. Кроме того, согласно (Φ_{ii}), его носитель содержится в $\Phi \mid U - S$. Но ясно, что $\partial\gamma = z$ и доказательство закончено.

3.2. Прообраз семейства носителей. Пусть $f\colon \tilde{X} \to X$ — непрерывное отображение локально компактных паракомпактных топологических пространств и Φ — семейство носителей в X. Обозначим через $f_*^{-1}(\Phi)$ совокупность таких подмножеств $\tilde{X}$, образы которых принадлежат Φ и пересечения которых с прообразом всякого компакта компактны. Легко видеть, что $f_*^{-1}(\Phi)$ — это *семейство носителей*[1]) в $\tilde{X}$, при-

---

[1]) Это семейство носителей упоминает Серр в трудах семинара Картана 1950—1951 гг. (см. А. Картан [2, сообщение 21]), чтобы проиллюстрировать понятие «хорошо приспособленных семейств».

чем это *наибольшее из тех семейств носителей* $\tilde{\Phi}$, *для которых отображение*

$$f\colon {}_{\tilde{\Phi}}\tilde{X} \to {}_{\Phi}X$$

гомологически допустимо (п. II. 5.3).

3.3. Предположим, что отображение f из п. 3.2 является ограничением некоторого отображения $f: \tilde{Y} \to Y$, причем $\tilde{X} = \tilde{Y} - \tilde{S}$, $X = Y - S$, $S = f(\tilde{S})$. Предположим также, что $\tilde{S}$ и S имеют в $\tilde{Y}$ и Y окрестности $\tilde{U}$ и $U = f(\tilde{U})$, в которых определены гомотопии $\tilde{g}_\tau$ и g_τ, удовлетворяющие условиям леммы 3.1 и коммутирующие с проекцией f. Тогда если Φ — семейство носителей в X, удовлетворяющее условиям леммы 3.1, то, как легко проверить, тем же условиям удовлетворяет и семейство $f_*^{-1}(\Phi)$ в $\tilde{X}$. Отсюда мы получаем канонический изоморфизм

$$H_*\left({}_{f_*^{-1}(\Phi)}\tilde{X}\right) \approx H_*(\tilde{Y}, \tilde{S}).$$

Применение к задаче из п. 2.5. Если даны пара (Y, S) и накрытие $r\colon \widetilde{Y - S} \to Y - S$, то для определения относительных гомологий $H_*(\tilde{Y}, \tilde{S})$ можно не строить ни пространство $\tilde{Y}$, ни пространство $\tilde{S}$; достаточно выбрать в $Y - S$ семейство Φ, удовлетворяющее условиям леммы 3.1, и положить *по определению*

$$H_*(\tilde{Y}, \tilde{S}) = H_*\left({}_{r_*^{-1}(\Phi)}\widetilde{Y - S}\right).$$

Некоторые уточнения и дополнения

«Аналитик! Будь верен Правде, или Эквидомоид-мститель[1]) ночью сожмет твою грудь тоской и тревогой»

(Леопольд Гюго)

1. Топологическое пространство называется *отделимым* (в смысле Хаусдорфа), если любые две его различные точки имеют непересекающиеся окрестности. Из того что пространство локально гомеоморфно $\mathbf{R}^n$ [свойство $(X0)$ п. I. 1], не следует его отделимость; важный контрпример — пучок ростков непрерывных функций на $\mathbf{R}^n$.

2. В $\mathbf{P}^n$ вводится фактортопология топологии $\mathbf{R}^{n+1}-\{0\}$ по рассматриваемому отношению эквивалентности; иначе говоря, открытые множества в $\mathbf{P}^n$ — это образы открытых множеств из $\mathbf{R}^{n+1}-\{0\}$.

3. *Отделимое* топологическое пространство X называется *паракомпактным*, если *всякое открытое покрытие X допускает локально конечное измельчение.* Можно доказать, что такое пространство *нормально*, т. е. любые два замкнутых непересекающихся множества имеют непересекающиеся окрестности. Вот полезное свойство нормальных пространств: для всякого открытого покрытия $\{U_i\}$ пространства X существует такое открытое покрытие $\{V_i\}$, что $\overline{V}_i \subset U_i$.

Связь между паракомпактностью многообразий и свойством $(X1)$ из п. I. 1 становится очевидной благодаря следующей теореме:

Для того чтобы *локально компактное* пространство было *паракомпактным*, необходимо и достаточно, чтобы каждая из его связных компонент была объединением *счетного* числа компактов.

4. Теорема о *топологической инвариантности открытых множеств*: если два подпространства евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ *гомеоморфны*, и если одно из них *открыто* (в $\mathbf{R}^n$), то другое тоже открыто. Доказательство этой весьма тонкой теоремы см., например, в книге Эйленберга и Стинрода [1, гл. XI].

5. Для полноты следует упомянуть еще два свойства гомологий.

(i) *Вырезание*: пусть (X, A) — пара, U — подмножество в A, замыкание которого лежит внутри A; тогда существует канонический изоморфизм

$$H_*(X, A) \approx H_*(X-U, A-U).$$

---

[1]) Определение слова «эквидомоид» см. у Кено [1], откуда заимствована эта цитата. [Эквидомоидом Леопольда Гюго называется пересечение равных цилиндров, оси которых — большие диагонали правильного $2n$-угольника. Как и другие создания Л. Гюго (гюгодомоидальная $(1/m)$-ичная арифметика, чисто мнимая $(1/m)$-мерная геометрия и др.), теория эквидомоидов отличается крайним романтизмом. Член Французского математического общества известный французский писатель Р. Кено посвятил Л. Гюго главу своей книги (Кено [1]). — *Прим. ред.*]

Хотя доказательство этого свойства не очевидно, оно весьма наглядно: так как при вычислении относительных гомологий пары (X, A) мы *«пренебрегаем»* цепями, лежащими в A, то не удивительно, что часть A можно выкинуть.

(ii) *Точная гомологическая последовательность*: последовательность

$$\ldots \xleftarrow{\partial_*} H_p(X, A) \leftarrow H_p(X) \xleftarrow{i_*} H_p(A) \xleftarrow{\partial_*} H_{p+1}(X, A) \leftarrow \ldots$$

(где $H_p(X) \to H_p(X, A)$ — гомоморфизмы, индуцированные проекцией $C_*(X) \to C_*(X, A)$) *точна*, т. е. образ каждого гомоморфизма совпадает с ядром следующего.

6. Осталось упомянуть два свойства когомологий.

(i) *Вырезание*: формулируется точно так же, как и для гомологий [5].

(ii) *Точная когомологическая последовательность*:

$$\ldots \xrightarrow{\delta^*} H^p(X, A) \to H^p(X) \xrightarrow{i^*} H^p(A) \xrightarrow{\delta^*} H^{p+1}(X, A) \to \ldots$$

(где $H^p(X, A) \to H^p(X)$ — гомоморфизмы, индуцированные включением $C^*(X, A) \to C^*(X)$).

7. В весьма общем случае возникает *точная когомологическая последовательность замкнутого подпространства* S

$$\ldots \xrightarrow{\delta^*} H^p({}^{\Phi}|\, X - S) \to H^p({}^{\Phi}X) \xrightarrow{i^*} H^p({}^{\Phi}|\, S) \xrightarrow{\delta^*}$$
$$\to H^{p+1}({}^{\Phi}|\, X - S) \to \ldots$$

В случае ориентированных многообразий эта последовательность под действием изоморфизма Пуанкаре переходит в *точную гомологическую последовательность Лере*, которая в частном случае $\Phi = c$ записывается просто в виде

$$\ldots \xrightarrow{\delta^*} H_q(X - S) \xrightarrow{j_*} H_q(X) \xrightarrow{i^*}$$
$$\to H_{q-r}(S) \xrightarrow{\delta^*} H_{q-1}(X - S) \xrightarrow{j_*} \ldots$$
$$(q = \dim X - p,\ r = \operatorname{codim} S),$$

где j_* — гомоморфизм, индуцированный включением $j\colon X - S \to X$; i^* интерпретируется как «пересечение» с S циклов X.

8. Часто в локально тривиальные расслоенные пространства вводят дополнительную структуру, задавая *группу G автоморфизмов слоя* и требуя, чтобы различные локальные тривиализации были согласованы относительно преобразований из этой группы (например, в случае касательного расслоения к многообразию в качестве G можно взять группу линейных преобразований). В этом случае говорят, что задано *косое произведение со структурной группой* (по-английски fibre bundle).

9. Так как в формулировке условий А и В Уитни участвуют «углы» между гиперплоскостями, можно было бы предположить, что понятие регулярного примыкания связано с *метрическими* свойствами окружающего пространства. Но это не так, ибо

условие стремления к нулю некоторых углов между гиперплоскостями можно выразить, сказав, что некоторые точки «пространства, расслоенного на грассмановы многообразия» (А. Картан [1]), стремятся к некоторым «циклам Шуберта» (А. Картан [1]) этого пространства (см. Том [4]; на самом деле в этой работе используется «расстояние» в грассмановом многообразии, но вместо этого можно рассмотреть «равномерную топологию»).

10. Пусть Y — дифференцируемое многообразие, M и N — два дифференцируемых подмногообразия в Y соответственно коразмерностей m' и n'. Говорят, что M и N *трансверсальны* в точке $y \in M \cap N$, если их касательные пространства в точке y порождают все касательное пространство $T_y(Y)$:

$$T_y(M) \oplus T_y(N) = T_y(Y).$$

(В случае коразмерности 1 это понятие совпадает с понятием «общего положения».) Подмногообразия M и N *трансверсальны*, если они трансверсальны в каждой точке их пересечения. При этом $M \cap N$ оказывается подмногообразием коразмерности $m' + n'$ (если условиться, что многообразие отрицательной размерности пусто).

Дифференцируемое отображение $f\colon X \to Y$ называется *трансверсальным* подмногообразию $M \subset Y$, если его график трансверсален подмногообразию $X \times M \subset X \times Y$; оно называется *трансверсальным стратифицированному множеству* $L \subset Y$, если оно трансверсально каждому из стратов L (заметим, что вследствие условия А Уитни, если отображение трансверсально какому-нибудь страту L, то в окрестности этого страта оно трансверсально его звезде).

11. Возникает естественный вопрос: существует ли для заданной замкнутой формы ω на S такая замкнутая форма φ на $X - S$, что ω — ее вычет? Ответ получаем из точной когомологической последовательности

$$\ldots \xleftarrow{\text{Res}} H^q(X-S) \xleftarrow{i^*} H^q(X) \xleftarrow{i^{*T}}$$
$$\leftarrow H^{q-2}(S) \xleftarrow{\text{Res}} H^{q-1}(X-S) \xleftarrow{i^*} \ldots,$$

двойственной точной гомологической последовательности Лере (см. [7] с $r = 2$) относительно билинейной формы — интегрирования (двойственность де Рама).

Из этой последовательности видно, что класс когомологий $h^{q-2} \in H^{q-2}(S)$ является вычетом класса $H^{q-1}(X-S)$ тогда и только тогда, когда образ h^{q-2} при гомоморфизме i^{*T} равен нулю (относительно явного вида i^{*T} см. Лере [1]). В частности, так будет всегда, если S и X — алгебраические подмногообразия $\mathbf{C}^N$, которые при очевидной компактификации $\mathbf{C}^N$ и $\mathbf{CP}^N$ трансверсально пересекают «бесконечно удаленную гиперплоскость» (см. Фари [1, теорема о разложении], где показано, что при этих условиях гомоморфизм $i^*\colon H_q(X) \to H_{q-2}(S)$ нулевой; то же самое, очевидно, справедливо и относительно двойственного ему i^{*T}).

Источники

Здесь указано происхождение основных идей данной книги (за исключением возможных ошибок, которые следует считать моим личным вкладом).

Глава I. По поводу основных понятий, относящихся к *дифференцируемым многообразиям*, см. Уитни [1], де Рам [1]. Большое влияние на меня оказал также курс Дегёвеля в Институте Анри Пуанкаре (1962—1963).

Глава II. Современное и вполне элементарное изложение теории *гомологий* можно найти в книге Уоллеса [1]. См. также книгу Эйленберга и Стинрода [1], которым мы обязаны *аксиоматическим* подходом к теории, и Маклейна [1], где излагается *алгебраическая* техника.

Понятие *семейства носителей* и *изоморфизм Пуанкаре* в общем виде заимствованы у А. Картана [2]; некоторые факты из этой области кратко изложены в статье Фотиади и др. [1].

Понятие *потока* ввел де Рам [1], см. также Норге [3].

Глава III. Лере [1]. См. также изложение Норге [1], которому принадлежит более общая формулировка (Норге [2]) *теории вычетов Лере*.

Глава IV. Понятие *объемлющей изотопии* часто встречается в литературе, но устоявшейся терминологии нет. Здесь мы следуем работе Фотиади и др. [1].

Понятие *стратифицированного множества* ввели Уитни [3] и Том [3]. Формулировка условий *регулярного примыкания* Уитни заимствована из работы Тома [4].

Формулировка и эскиз доказательства *теоремы изотопии* Тома впервые были опубликованы в работе Тома [3]. Ее подробное доказательство было рассказано на семинаре Тома — Мальгранжа по дифференциальной геометрии (I. H. E. S., Bures-sur-Yvette, 1964—1965), текст готовится к печати. При доказательстве Том использует в действительности несколько иное определение регулярного примыкания, чем Уитни, состоящее в основном из свойства «выстилания» (существование функций, «выстилающих» границы стратов). Но, по-видимому, это свойство выстилання является следствием условий A и B Уитни (Том сообщил об этом недавно в письме к Д. Фотиади).

Два замечания по поводу формулировки теоремы.

1°. Пространством базы T у Тома является отрезок [0, 1], но его рассуждения легко обобщить на случай q-мерного куба (индукцией по q, Фотиади и др. [1]), откуда следует локальная тривиальность над любым q-мерным многообразием.

2°. При формальном чтении сообщения Тома [3] может показаться, что *сюръективность* отображения π на каждом страте должна входить в число предположений. На самом деле ее легко вывести из других предположений, а именно: π — собственное отображение, $\operatorname{rang}(\pi \mid A) = \dim T$, страты удовлетворяют условиям регулярного примыкания.

Относительно *особенностей дифференцируемых отображений* см. Уитни [2] и Том [2] [1]).

Глава V. По поводу ветвления классов гомологий (*формула Пикара — Лефшеца*) см. Лефшец [1]. Более прямое доказательство дал Фари [1]. Эти авторы интересуются лишь гомологиями $H_n(S)$ в случае единственного подмногообразия S [это соответствует формуле (PL) из п. V. 2.4, V. 2.5].

Случай гомологий $H_n(X - S)$, где S — *объединение* подмногообразий, находящихся в общем положении, можно получить с помощью некоторого обобщения двойственности Пуанкаре: см. Фотиади, Фруассар, Ласку и Фам [1]. Независимый подход предложен в статье Фама [1].

Глава VI. В основном вся эта глава скопирована со статьи Лере [1], разница лишь в том, что я рассматриваю случай *объединения* нескольких подмногообразий — обобщение простое, но несколько утомительное.

Глава VII. См. Фам [1].

По разным главам разбросаны некоторые общие факты о *расслоенных пространствах, накрытиях, гомотопических группах* и т. д. По поводу всех этих понятий см. А. Картан [1], Стинрод [1], Хилтон [1] и т. д.

---

[1]) См. также Арнольд [1*], Брискорн [1*], Мальгранж [1*], Мезер [1*], Уитни [4*] и сборник переводов «Особенности дифференцируемых отображений», М., 1968. — *Прим. ред.*

ЛИТЕРАТУРА[1])

Абъянкар (Abhyankar S. S.)

[1] Local Analytic Geometry, Academic Press, New York, 1964.

Арнольд В. И.

[1*] Особенности гладких отображений, *УМН*, **XXIII**, 1 (1968), 3—44.

Брискорн (Brieskorn E.)

[1*] Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten, *Inventiones mathematicae*, 2, № 1 (1966), 1—14. [Перевод в сб. *Математика*, 11 : 6 (1967), 133—144.]

Ганнинг, Росси (Gunning R., Rossi H.)

[1] Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, 1965. [Перевод: Аналитические функции многих комплексных переменных, изд-во «Мир», М., 1969.]

Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.

[1] Обобщенные функции (вып. 1), М., 1958.

Зарисский (Zariski O.)

[1*] Algebraic surfaces, Springer, Berlin, 1935.

Иден, Ландшоф, Полкингорн, Тэйлор (Eden R. J., Landshoff P. V., Polkinghorne J. C., Taylor J. C.)

[1] Acnodes and cusps on Landau curves, *J. Math. Phys.* (1961), 656—663.

Картан А. (Cartan H.)

[1] Séminaire Henri Cartan, 1949—1950, Éc. Norm. Sup., Paris.

[2] Séminaire Henri Cartan, 1950—1951, Éc. Norm. Sup., Paris.

Картан Э. (Cartan É.)

[1] Sur les propriétés topologiques des quadriques complexes, Oeuvres complètes, Partie I, t. 2, 1227—1246, Gauthier-Villars, Paris, 1952.

Кено (Queneau R.)

[1] Bords, Hermann, Paris, 1963.

---

[1]) Звездочкой отмечены работы, добавленные редактором перевода. — *Прим. ред.*

Куткоски (Cutkosky R. E.)
[1] Singularities and discontinuities of Feynman amplitudes, *J. Math. Phys.* (1960), 429—433.

Ландау Л. Д.
[1] On analytic properties of vertex parts in Quantum Field theory, *Nuclear Phys.*, **13** (1959), 181—192.

Лере (Leray J.)
[1] Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy III), *Bull. Soc. math. Fr.*, 87 (1959), 81—180. [Перевод: Дифференциальное и интегральное исчисление на комплексном аналитическом многообразии, ИЛ, М., 1961.]
[2] Un prolongement de la transformation de Laplace... (Problème de Cauchy IV), *Bull. Soc. Math. Fr.*, **90** (1962), 39—156. [Перевод: Обобщенное преобразование Лапласа, изд-во «Мир», М., 1969.]

Лефшец (Lefschetz S.)
[1] L'analysis situs et la géométrie algébrique, Gauthier-Villars, Paris, 1950.

Маклейн (Mac Lane S.)
[1] Homology, Springer-Verlag, Berlin, 1963. [Перевод: Гомология, изд-во «Мир», М., 1966.]

Мальгранж (Malgrange B.)
[1*] Ideals of differentiable functions, Oxford University Press, 1966. [Перевод: Идеалы дифференцируемых функций, изд-во «Мир», М., 1968.]

Мезер (Mather J.)
[1*] Stability of C^∞ mappings: III Finitely determined map-germs, Publications de l'Inst. des Hautes Etudes Scientifiques, № 35 (1968); IV Classification of stable germs by R-Algebras; V Transversality (в печати).

Милнор (Milnor J.)
[1] On manifolds homeomorphic to the 7-sphere, *Ann. Math.*, **64** (1956), 399—405.

Нильсон (Nilsson N.)
[1] Some growth and ramification properties of certain integrals on algebraic manifolds, *Arkiv för Matematik*, **5**, № 32 (1964), 463—476.
[2] Asymptotic estimates for spectral functions, *Arkiv för Matematik*, **5**, № 35.

Норге (Norguet F.)
[1] Dérivées partielles et résidus de formes différentielles sur une variété analytique complexe, Séminaire P. Lelong, Faculté des sciences de Paris, 1958—1959.
[2] Sur la théorie des résidus, *C. R. Acad. Sc.*, **248** (1959), 2057—2059.

[3] Problèmes sur les formes différentielles et les courants, *Ann. Inst. Fourier*, **11** (1961), 1—82.

Особенности дифференцируемых отображений (сб. переводов), изд-во «Мир», М., 1968.

Понцано, Редже (Ponzano G., Regge T.)

[1*] The monodromy group of one-loop relativistic Feynman integrals (препринт).

Понцано, Редже, Спир, Вестуотер (Ponzano G., Regge T., Speer E. R., Westwater M. J.)

[1*] The monodromy rings of a class of self-energy graphs (препринт).

Пуанкаре (Poincaré H.)

[1]* Œuvres complètes, t. VI, Gauthier-Villars, Paris, 1953.

де Рам (De Rham G.)

[1] Variétés différentiables, Hermann, Paris, 1960. [Перевод: Дифференцируемые многообразия, ИЛ, М., 1956.]

Редже (Regge T.)

[1*] The fundamental group of Poincaré and the analytic properties of Feynman relativistic amplitudes, Nobel symposium series 8 (1968).

Редже, Баруччи (Regge T., Barucchi G.)

[1] On the properties of Landau curves, *Nuovo Cimento*, **34**, № 1 (1964), 106—140.

Реммерт (Remmert R.)

[1] Projectionen analytischer Mengen, *Math. Ann.*, **130** (1956), 410—441.

Стинрод (Steenrod N.)

[1] The topology of Fibre Bundles, Princeton University Press, 1951.

Том (Thom R.)

[1] Quelques propriétés globales des variétés différentiables, *Comm. Math. Helv.*, **28**, 1 (1954), 17—86.

[2] Les singularités des applications différentiables, *Ann. Inst. Fourier*, **6** (1956), 43—87.

[3] La stabilité topologique des applications polynomiales, *L'enseignement mathématique*, 8 (1962), 24—33.

[4] Propriétés différentielles locales des ensembles analytiques, Séminaire Bourbaki, № 281 (1964—1965).

Уитни (Whitney H.)

[1] Differentiable manifolds, *Ann. Math.*, **37**, № 3 (1936), 645—680.

[2] On singularities of mappings of the plane into the plane, *Ann. Math.*, **62**, № 3 (1955), 374—410.

[3] Tangents to an analytic variety, *Ann. Math.*, **81**, № 3 (1965), 496—549.

[4*] Singularities of mappings of Euclidean spaces, Symp. intern. topolog. alg., Mexico City, 1958, 285—301. [Перевод в сб. *Математика*, **13** : 2 (1969), 105—123.]

Уоллес (Wallace A. H.)
[1] An introduction to algebraic topology, Pergamon Press, 1961 (International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics).

Фам (Pham F.)
[1] Formules de Picard — Lefschetz généralisées et ramification des intégrales, *Bull. Soc. Math. Fr.*, **93** (1965), 333—367. [Перевод в сб. *Математика*, **13** : 4 (1969), 61—93.]
[2*] Singularités des processus de diffusion multiple, *Ann. de l'Inst. H. Poincaré*, sect. A, **6**, № 2 (1963).

Фари (Fary I.)
[1] Cohomologie des variétés algébriques, *Ann. Math.*, 2 serie, **65** (1957), 21—73.

Фаулер (Fowler M.)
[1] Introduction to momentum space integration techniques in perturbation theory, *J. Math. Phys.*, **3** (1962), 936—945.

Федербуш (Federbush P.)
[1] Calculation of some homology groups relevant to sixth-order Feynman diagrams, *J. Math. Phys.*, **6** (1965), 941—954. [Перевод в книге Хуа и Теплиц [1*, стр. 188—221].]

Фотиади, Фруассар, Ласку, Фам (Fotiadi D., Froissart M., Lascoux J., Pham F.)
[1] Applications of an isotopy theorem, *Topology*, **4** (1965), 159—191. [Перевод в книге Хуа и Теплиц [1*, стр. 142—182].]

Фэрли, Ландшоф, Нутол, Полкингорн (Fairlie D. P., Landshoff P. V., Nuttall J., Polkinghorne J. C.)
[1] Singularities of the second type, *J. Math. Phys.*, **3** (1962), 594—602.

Хилтон (Hilton P. J.)
[1] An introduction to homotopy theory, Cambridge University Press, Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics, 43, 1961.

Хиронака (Hironaka H.)
[1] Resolution of singularities, *Ann. Math.*, **79**, № 1 (1964), 109—203; № 2, 205—326. [Перевод в сб. *Математика*, **9** : 6 (1965), 2—70; **10** : 1 (1966), 3—89; **10** : 2 (1966), 3—58.]

Хуа, Теплиц (Hwa R. C., Teplitz V. L.)
[1*] Homology and Feynman integrals, W. A. Benjamin, Inc, N. J. Amsterdam, 1966. [Перевод: Гомология и фейнмановские интегралы, изд-во «Мир», М., 1969.]

Эйленберг, Стинрод (Eilenberg S., Steenrod N.)
[1] Foundations of Algebraic Topology, Princeton University Press, 1952. [Перевод: Основания алгебраической топологии, Физматгиз, М., 1958.]

ОГЛАВЛЕНИЕ

Ф. Фам

ВВЕДЕНИЕ В ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ЛАНДАУ

Редактор *Н. И. Плужникова* Художник *Н. А. Фильчагина*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *М. П. Грибова* Корректор *В. С. Соколов*

Сдано в производство 23/IX 1969 г. Подписано к печати 16/II 1970 г.
Бум. № 2 84×108¹/₃₂=2,88 бум. л. Усл. печ. л. 9,66. Уч.-изд. л. 7,91.
Изд. № 1/5309. Цена 55 коп. Зак. 324

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР“ Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29