БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА
МАТЕМАТИКА

Ф. ФАМ

ОСОБЕННОСТИ ПРОЦЕССОВ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

Singularités des processus de diffusion multiple

par

Frédéric Pham
(C. E. R. N.-Genève et C. E. N.-Saclay)

ANNALES DE L'INSTITUT HENRI POINCARÉ
SECTION A., PHYSIQUE THÉORIQUE
Vol. VI, *n°* 2, 1967, *p.* 89-204

БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА «МАТЕМАТИКА»

Ф. ФАМ

ОСОБЕННОСТИ ПРОЦЕССОВ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

Перевод с французского
В. А. ГОЛУБЕВОЙ

Под редакцией
А. Л. ОНИЩИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1972

УДК 513.83 : 530.1

Автор знаком советскому читателю по русскому переводу его книги «Введение в топологическое исследование особенностей Ландау» («Мир», 1970). Его новая работа посвящена исследованию аналитических свойств S-матрицы Фейнмана — одному из бурно развивающихся в настоящее время разделов математической физики. Особенности Ландау S-матрицы в физической области интерпретируются как видимые контуры. Используя методы дифференциальной топологии, созданные Томом, автор показывает, что эти видимые контуры имеют очень простое строение. В книге поставлено много нерешенных задач.

Книга представляет интерес для математиков, занимающихся функциональным анализом, математической физикой и смежными вопросами, а также для физиков-теоретиков. Она доступна студентам старших курсов соответствующих специальностей.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. 2-2-3
29-72

ВВЕДЕНИЕ

Резюме. Как недавно заметили Коулман и Нортон, феноменологическое понятие «многократного рассеяния» для процессов с произвольным числом частиц позволяет дать очень простую интерпретацию особенностей Ландау S-матрицы в физической области. Здесь эта физическая интерпретация углубляется с помощью одной геометрической идеи: *особенности Ландау являются видимыми контурами.* Используя методы дифференциальной топологии, созданные Томом и развитые в приложениях I—IV, мы показываем, что эти видимые контуры имеют в физической области значительно более простое строение, чем могло бы показаться. Это обстоятельство позволяет точно сформулировать обычные гипотезы об аналитичности S-матрицы (смещение с физической области, правила Куткоски и т. д.) и установить простую связь между этими гипотезами и понятием многократного рассеяния: таким образом правила Куткоски ведут прямым путем к *свойству факторизации S-матрицы для событий, разделенных большими промежутками времени.*

Далее, используя идею видимого контура, мы систематически изучаем «иерархию» особенностей различных процессов, подкрепляя таким образом гипотезы соображениями математической согласованности.

План

Введение. В нем излагается сущность физической идеи многократного рассеяния и резюмируются наиболее существенные топологические результаты.

Глава 0. Изучение абстрактного (комбинаторного) понятия *графа,* в котором вырисовывается идея «категории графов».

Глава I. Топологическое изучение пространств, которые физика связывает с «графами многократного рассеяния», и отображений, соответствующих «стягиванию» этих графов; исследование свойств отображений, возникающих при *композиции* стягиваний.

Глава II. Здесь с помощью исследования аналитических свойств S-матрицы и ее абсорбтивных частей выясняется, как появляется «иерархия» особенностей.

Глава III. Своеобразие графов с кратными линиями объясняется существованием упругих процессов.

Приложение 0. Одна лемма из анализа, полезная для доказательства факторизации S-матрицы в процессах многократного рассеяния.

Приложение I. Некоторые идеи Тома об устойчивых типах особенностей дифференцируемых отображений.
Приложение II. Возникновение новых типов особенностей при композиции отображений.
Приложение III. Изучение «комплексных обходов» вещественных многообразий и аналитических свойств «почти вещественных» интегралов.
Приложение IV. Простой случай коммутативной фундаментальной группы.

* * *

Трудности, на которые натолкнулась квантовая теория поля, привели Гейзенберга [11] в 1943 г. к введению понятия S-матрицы, которую он считал фундаментальной наблюдаемой в физике; Гейзенберг полагал, что это единственное понятие, которое сохранится в «будущей теории». С тех пор были достигнуты большие успехи в изучении общих свойств S-матрицы, в особенности ее *аналитических* свойств, и это позволило связать между собой различные экспериментальные результаты и глубже понять динамику сильных взаимодействий. В общем изучении этих аналитических свойств можно различить два стиля исследования. Первый состоит в том, что, отправляясь от аксиом теории поля (которые в настоящее время четко сформулированы, см. [17], [36]), строго доказывают аналитичность S-матрицы в той или иной области (комплексного пространства энергий-импульсов). Хотя этот путь длинен и труден, он уже привел к некоторым предсказаниям, которые допускают экспериментальную проверку. Второй, эвристический, путь — это путь, по которому мы пойдем; он состоит в том, чтобы попытаться, наоборот, предугадать, в каких областях S-матрица будет обязательно иметь особенности. Решающий шаг в этом направлении был сделан Ландау [18], который основывался на теории возмущений. Исследования, проделанные после него, расширили наши представления, подтвердив существование «особенностей Ландау» на более глубоком уровне, чем теория возмущений, но в том, что касается грубых результатов, мы не получили никакого уточнения: например, мы по-прежнему

не умеем в общем случае выделить «физический лист» и не знаем простых критериев того, чтобы особенность Ландау на нем действительно присутствовала. Откладывая на будущее выяснение этого таинственного понятия «физического листа», интересно посмотреть, что можно сказать о *физической области*: в конце концов именно здесь осуществляются эксперименты. В случае столкновения двух частиц единственные особенности Ландау, которые имеются в физической области, — «нормальные пороги», но это ничего нам не дает. Когда число частиц увеличивается, особенности все более и более сложных «графов Фейнмана» начинают попадать в физическую область, что интуитивно можно представить себе так: описываемые графами «виртуальные» процессы становятся «действительно» возможными *процессами многократного рассеяния*, такими, что их можно наблюдать в пузырьковой камере. К этому упрощению физической интерпретации[1]) прибавляется математическое упрощение: мы покажем, что топологическая структура особенностей Ландау в физической области является наиболее банальной, какую только можно вообразить, и совершенно подобна структуре нормальных порогов. Это позволит нам просто и точно сформулировать обычные гипотезы об аналитичности S-матрицы (правила Куткоски [4] и т. д.), которые до настоящего времени были окутаны туманом. Разумеется, нам надо будет привести точные аргументы в пользу этих гипотез (не претендуя пока на их доказательство в рамках теории поля). Такие аргументы нам предоставит *феноменологическое понятие многократного рассеяния*. В частности, мы увидим, что правила Куткоски связаны со свойством *факторизации S-матрицы для последовательности процессов, разделенных большими промежутками времени*. Это очень важное свойство[2])

---

[1]) Подчеркнутому недавно Коулманом и Нортоном [3].

[2]) Гольдбергер и Уотсон [8]. Интересно отметить, что свойство, очень похожее на свойство факторизации амплитуд, явилось отправной точкой при формулировании основ квантовой механики по Фейнману [6], которое как раз позволило ему открыть его графы.

позволяет понять, почему S-матрица, определенная лишь в терминах *асимптотических* состояний рассеяния в моменты $-\infty$ и $+\infty$, тем не менее может служить для описания лабораторного эксперимента, в котором начальные частицы должны быть *приготовлены*, а конечные частицы должны быть *обнаружены* в конечные моменты времени. Мне кажется, что эти физические аргументы (развитые в § 3 настоящего введения) дают значительно более убедительное обоснование, чем теория возмущений[1]). Мы дополним их аргументами другого рода, которые предназначены служить вехами в будущем доказательстве гипотез. Уже давно подозревали (эта идея несколько уточнена в [30]), что определенная «иерархия» графов устанавливает логическую зависимость между их особенностями; эта зависимость будет объектом систематического изучения в следующих главах (и прежде всего в главе II), которое, как я надеюсь, убедит читателя в силе топологических методов[2]). В частности, математические соображения совершенно общего характера позволят нам «частично»[3]) доказать гипотезы для графов более высокого порядка, допустив их справедливость для графов более низкого порядка.

1. Обзор общих свойств S-матрицы

1.1. S-матрица. Важным фактом, позволяющим говорить об S-матрице, является существование асимп-

[1]) Это не помешает нам обосновать эти гипотезы *также* и в теории возмущений (см. § 4 настоящего введения).

[2]) Существенную роль играют, с одной стороны, идеи Тома об особенностях дифференцируемых отображений [37]; с другой стороны, — общая техника изучения аналитичности кратных интегралов, созданная Лере [22] и развитая Фотиади, Фруассаром, Ласку и автором [7], [28]; см. обзорную работу [29]. При ограничении на *вещественную* область, принятом здесь, общая теория упрощается (см. приложение III к настоящей работе).

[3]) Чтобы доказать гипотезы *в полном объеме* (а также чтобы дать начало индукции), к этим математическим аргументам придется присоединить дополнительные соображения. Очевидным кандидатом является *условие унитарности S-матрицы*, которое в простых частных случаях действительно позволяет получить окончательный результат; но я не пытался исследовать общий случай ввиду крайне сложного комбинаторного характера условий унитарности.

тотических состояний [10], [31], т. е. тот факт, что всякая физическая система стремится к разделению[1]) в моменты времени $-\infty$ и $+\infty$ на системы (называемые соответственно in и out), состоящие из четко различающихся независимых частиц. Для описания множества I независимых частиц можно выбрать в качестве канонических переменных, кроме спина[2]) и внутренних квантовых чисел каждой из этих частиц, их *энергии-импульсы* p_i $(i \in I)$, принадлежащие поле гиперболоида

$$M_i = \{p_i = (p_i^0, \mathbf{p}_i) \in \mathbb{R}^4 \mid p_i^2 \equiv (p_i^0)^2 - \mathbf{p}_i^2 = m_i^2;\ p_i^0 > 0\},$$

где m_i — *масса* (по предположению отличная от нуля) частицы i. *Состояние* задается волновой функцией $\psi(p^I)$, суммируемой с квадратом на *массовой поверхности* $M^I = \prod_{i \in I} M_i$, снабженной мерой

$$\mu^I = \prod_{i \in I} \mu_i, \qquad \mu_i = d^4 p_i \delta(p_i^2 - m_i^2).$$

Обозначим через $\langle \psi | S | \varphi \rangle$ *матричный элемент S-матрицы между двумя такими состояниями*, т. е. амплитуду перехода из состояния in, описываемого волновой функцией $\varphi(p^I)$, в состояние out, описываемое волновой функцией $\psi(p^J)$. Удобно ввести «интегральное ядро» $\langle p^J | \mathbf{S} | p^I \rangle$, определенное выражением

$$\langle \psi | S | \varphi \rangle = \int\limits_{I \cup J} \langle p^J | \mathbf{S} | p^I \rangle \bar{\psi}(p^J) \varphi(p^I),$$

где символ $\int\limits_{I \cup J}$ нужно понимать как интегрирование по массовой поверхности $M^{I \cup J}$ с мерой $\mu^{I \cup J}$. Это интегральное ядро $\langle p^J | \mathbf{S} | p^I \rangle$ является распределе-

---

[1]) При условии, что отсутствуют частицы с нулевой массой.

[2]) Для простоты мы ограничимся случаем частиц *с нулевым спином*.

нием[1]) на многообразии $M^{I \cup J}$. Из *инвариантности* S-матрицы *относительно сдвига*[2]) следует, что распределение $\langle p^J | \mathbf{S} | p^I \rangle$ разлагается на множители

$$\langle p^J | \mathbf{S} | p^I \rangle = \delta^4(p_I - p_J) \langle p^J | S | p^I \rangle,$$

где

$$p_I = \sum_{i \in I} p_i, \qquad p_J = \sum_{j \in J} p_j,$$

а $\langle p^J | S | p^I \rangle$ обозначает распределение, которое допускает ограничение на многообразие $\{p_I - p_J = 0\}$. Мы будем использовать следующие обозначения:

$\mathscr{E}^{IJ}$ = евклидово пространство $\{(p_i)_{i \in I \cup J} | p_I - p_J = 0\}$ (*закон сохранения энергии-импульса*);

$\mathscr{P}^{IJ} = \mathscr{E}^{IJ} \cap M^{I \cup J}$.

Распределение $\langle p^J | S | p^I \rangle$ рассматривается на этом многообразии $\mathscr{P}^{IJ}$.

1.2. Свойство асимптотической факторизации (разложение на пучки). Представим себе процесс $I \to J$, при котором частицы из множества $I \cup J$ группируются в «пучки», расположенные в пространстве *на большом расстоянии* друг от друга. Интуитивно можно ожидать [39], что эти пучки представляют независимые процессы, так что амплитуда перехода будет попросту *произведением* амплитуд каждого из этих процессов. В самом деле, можно доказать [12] следующее

---

[1]) Это вытекает из *теоремы о ядре Шварца* и из того факта, что S-матрица является *ограниченным* оператором (на это доказательство мне указал Д. Яголницер, узнавший его в свою очередь от Д. Рюэля).

[2]) Инвариантность относительно сдвига записывается так: $\langle \psi | S | \varphi \rangle = \langle \psi_a | S | \varphi_a \rangle$, где φ_a (соотв. ψ_a) обозначает состояние, «сдвинутое на четырехмерный вектор a», которое определяется следующим образом:

$$\varphi_a(p^I) = e^{i \sum_{i \in I} p_i \cdot a} \varphi(p^I).$$

Свойство разложения на пучки. Пусть $\mathscr{K}$ — нетривиальное разбиение множества $I \cup J$, $a = (a_K)_{K \in \mathscr{K}}$ — семейство четырехмерных векторов, таких, что *все их разности* $a_K - a_{K'}$ *пространственноподобны* (т. е. $(a_K - a_{K'})^2 < 0$), φ_a (соотв. ψ_a) — волновая функция, полученная из φ (соотв. ψ) в результате сдвига каждой частицы $i \in I$ (соотв. J) на вектор a_{K_i}, $K_i \ni i$, т. е.

$$\varphi_a(p^I) = e^{\sum_{i \in I} p_i \cdot a_{K_i}} \varphi(p^I).$$

Тогда, если все $(a_K - a_{K'})^2$ стремятся к $-\infty$, то $\langle \psi_a | S | \varphi_a \rangle$ стремится к выражению

$$\int_{I \cup J} \left(\prod_{K \in \mathscr{K}} \langle p^{I \cap K} | \mathbf{S} | p^{I \cap K} \rangle \right) \bar{\psi}(p^J) \varphi(p^I).$$

1.3. Определение усеченных амплитуд. Усеченные амплитуды $\langle p^J | \mathbf{S} | p^I \rangle_{\text{т}}$ определяются посредством индукции по множествам I и J с помощью разложений

$$\langle p^J | \mathbf{S} | p^I \rangle = \sum_{\mathscr{K}'} \prod_{K \in \mathscr{K}'} \langle p^{I \cap K} | \mathbf{S} | p^{I \cap K} \rangle_{\text{т}},$$

где сумма распространена на *все разбиения* $\mathscr{K}'$ множества $I \cup J$ (включая тривиальное разбиение). Каждый из членов, определенных таким образом, удовлетворяет, очевидно, закону сохранения энергии-импульса, причем усеченная амплитуда $\langle p^J | \mathbf{S} | p^I \rangle_{\text{т}}$ дает вклад в матричный элемент $\langle \psi | S | \varphi \rangle$ лишь при условии, что носители волновых функций $\varphi(p^I)$, $\psi(p^J)$ запрещают всякое «частичное» сохранение энергии-импульса.

Интересно посмотреть, во что превращается разложение на «пучки», если каждый из сомножителей заменить его разложением на усеченные амплитуды. Очевидно, вклад дают лишь разбиения $\mathscr{K}'$, более мелкие, чем заданное разбиение $\mathscr{K}$; в частности, вклад члена $\langle p^J | \mathbf{S} | p^I \rangle$ для всякого нетривиального разбиения $\mathscr{K}$ будет нулевым; это означает, что преобразование Фурье $\langle a^J | \mathbf{S} | a^I \rangle_{\text{т}}$ усеченной амплитуды

$\langle p^J | S | p^I \rangle_T$ стремится к нулю, когда «относительные» векторы a стремятся к бесконечности в пространственно-подобном направлении. Это свойство преобразования Фурье тесно связано со «слабой сингулярностью» усеченной амплитуды $\langle p^J | S | p^I \rangle_T$: в самом деле, она является, по-видимому, довольно регулярным распределением — вероятно, «хорошим» *граничным значением аналитической функции.* Грубо говоря, усеченная амплитуда есть то, что остается после вычитания из полной амплитуды наиболее сингулярных членов (тех, которые содержат δ-функции частичных законов сохранения энергии-импульса), членов, которые «ответственны» за факторизацию S-матрицы при больших пространственно-подобных интервалах. Мы увидим в следующих главах, что у усеченной амплитуды остаются другие особенности (менее сильные), соответствующие факторизации S-матрицы для больших временно-подобных интервалов (*процессы многократного рассеяния*).

2. Особенности Ландау S-матрицы

2.1. Замечание Коулмана и Нортона. Простейшая из особых точек Ландау — полюс, описывающий распространение промежуточной частицы (рис. 1), известна со времен создания релятивистской квантовой механики. Ее интерпретации в терминах «двойного рассеяния» посвящена обширная литература[1]). Однако довольно любопытно, что только недавно заметили [3], что феноменологическое понятие многократного рассеяния позволяет дать очень простую интерпретацию уравнений Ландау *для произвольного графа.*

Рассмотрим для определенности граф, изображенный на рис. 2. Его можно интерпретировать как три последовательных рассеяния, причем каждое из трех «столкновений» происходит в малой (практически точечной) области (A, B, C) пространства-времени. Пусть τ_7 (соотв. τ_8, τ_9) — «время жизни» частицы 7

[1]) Ср., например, [14], [15], [38].

(соотв. 8, 9), т. е. интервал между моментом ее рождения и моментом ее уничтожения; тогда «скоростями» этих частиц будут четырехмерные векторы

$$v_7 = \overline{AC}/\tau_7, \qquad v_8 = \overline{AB}/\tau_8, \qquad v_9 = \overline{BC}/\tau_9,$$

а их энергиями-импульсами —

$$p_7 = \overline{AC}/\alpha_7, \qquad p_8 = \overline{AB}/\alpha_8, \qquad p_9 = \overline{BC}/\alpha_9,$$

где $\alpha_i = \tau_i/m_i$. Задание импульсов p_i и положительных параметров α_i однозначно, с точностью до общего сдвига, определяет положение точек A, B, C в пространстве-времени *при условии, что* $\alpha_7 p_7 = \alpha_8 p_8 + \alpha_9 p_9$.

Рис. 1.

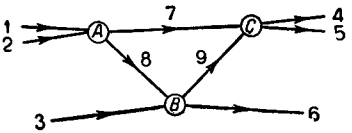


Рис. 2.

Обобщая сказанное на произвольные «графы многократного рассеяния», аналогичным образом получим уравнения

$$\text{(L)} \qquad \sum_{i \in I} z(i)\alpha_i p_i = 0,$$

где через I обозначено множество внутренних линий графа, а через z — *произвольный цикл*, построенный на этих внутренних линиях ($z(i) = 0$, если цикл z не содержит линии i; $+1$, если он ее содержит с той же ориентацией; -1, если он ее содержит с противоположной ориентацией). К уравнениям (L), очевидно, нужно присоединить уравнения, выражающие закон сохранения энергии-импульса в каждой вершине, и все ограничения на массы[1]). Таким путем мы получаем хорошо известные из теории возмущений *уравнения Ландау*. Исключая внутренние импульсы p_i и положительные параметры[2]) α_i из этих уравнений,

[1]) Не забывая условия положительности энергии.

[2]) Параметры α_i должны быть положительными, так как положительны τ_i (частицы не могут «двигаться попятно во времени»).

мы получаем соотношения между внешними импульсами: это — уравнения *особенностей Ландау* рассматриваемого графа. Теперь может быть сформулирована

Гипотеза А. *Распределение* $\langle p^{I_2} | S | p^{I_1} \rangle_{\text{т}}$ *равно некоторой аналитической функции во всех точках многообразия* $\mathcal{P}^{I_1, I_2}$, *исключая «особенности Ландау»* для всех связных графов многократного рассеяния, имеющих множество входящих линий I_1 и множество выходящих линий I_2.

2.2. Особенности Ландау как «видимые контуры». Всякому графу **G** поставим в соответствие пространство $\mathcal{P}(\mathbf{G})$: пересечение массовой поверхности $M^{\mathbf{I}}$ ($\mathbf{I}$ — множество *всех* линий графа, как внутренних, так и внешних) с евклидовым пространством $\mathcal{E}(\mathbf{G})$, определенным законом сохранения энергии-импульса в каждой вершине. Мы увидим (гл. I), что для почти всех значений масс это пространство $\mathcal{P}(\mathbf{G})$ является *многообразием*. Пусть π — каноническая проекция этого многообразия на многообразие $\mathcal{P}^{I_1 I_2}$ *внешних* импульсов графа. Будет проверено, что точка $p^{\mathbf{I}} \in \mathcal{P}(\mathbf{G})$ является критической[1]) для проекции π тогда и только тогда, когда существуют параметры α_i, не все одновременно равные нулю, такие, что для всякого цикла z, построенного на множестве I внутренних линий графа, выполняются уравнения

$$\text{(L)} \qquad \sum_{i \in I} z(i) \alpha_i p_i = 0.$$

Уравнения Ландау, следовательно, являются просто уравнениями критического множества (с дополнительными условиями $\alpha_i \geqslant 0$), так что особые точки Ландау составляют кусок *видимого контура* (образа мно-

[1]) Точка $x \in \mathcal{P}$ называется *критической* для отображения π: $\mathcal{P}$ (пространство-прообраз) $\to \mathcal{B}$ (пространство-образ), если касательное отображение $T_x\pi$: $T_x\mathcal{P} \to T_{\pi(x)}\mathcal{B}$ *не является сюръективным*. Иначе говоря, касательное пространство в точке x имеет своим образом касательное пространство *меньшей размерности*, чем касательное пространство в пространстве-образе; коразмерность этого образа называется *корангом* критической точки.

жества критических точек). Вообще, видимый контур является очень сложным геометрическим объектом (вспомним причудливые формы каустических поверхностей в геометрической оптике). Однако мы увидим, что та его часть, которая соответствует условию $\alpha_i \geqslant 0$, наоборот, имеет очень простое строение.

Начнем со следующего замечания.

2.3. Выпуклость особенностей Ландау вне массовой поверхности. Вместо пространства $\mathscr{P}(\mathbf{G})$ из предыдущего пункта рассмотрим пространство

$$\mathscr{P}'(\mathbf{G}) = M^I \cap \mathscr{E}(\mathbf{G})$$

(ограничения на массы налагаются только для *внутренних* линий). Легко видеть, что условие критичности точки $p^{\mathbf{I}} \in \mathscr{P}'(\mathbf{G}) \xrightarrow{\pi} \mathscr{E}^{I_1 I_2}$ выражается с помощью тех же уравнений (L). Пусть $\overset{c}{p}{}^{\mathbf{I}}$ — точка пространства $\mathscr{P}'(\mathbf{G})$, в которой уравнения (L) имеют решение, подчиненное условию $\alpha_i \geqslant 0$ $\forall i \in I$. Рассмотрим в евклидовом пространстве $\mathscr{E}(\mathbf{G})$ линейную функцию

$$t(p^{\mathbf{I}}) = \sum_{i \in I} \alpha_i \overset{c}{p}_i \cdot (p_i - \overset{c}{p}_i).$$

Легко видеть, что на массовой поверхности M^I это выражение неотрицательно, потому что все члены $\overset{c}{p}_i \cdot (p_i - \overset{c}{p}_i)$ неотрицательны; иначе говоря, гиперплоскость $\{t(p^{\mathbf{I}}) = 0\}$, проходящая через точку $\overset{c}{p}{}^{\mathbf{I}}$, является опорной к пространству $\mathscr{P}'(\mathbf{G})$. С другой стороны, эта гиперплоскость, очевидно, «вертикальная» (так как точка $\overset{c}{p}{}^{\mathbf{I}}$ является критической), т. е. проектируется в гиперплоскость[1]) пространства $\mathscr{E}^{I_1 I_2}$. Впрочем, используя уравнения (L), легко проверить непосредственно, что на самом деле функция $t(p^{\mathbf{I}})$ зависит только от *внешних* импульсов $p^{I_1 I_2}$. Таким

[1]) Как обычно, под гиперплоскостью и гиперповерхностью мы понимаем плоскость и поверхность коразмерности 1 в рассматриваемом пространстве.

образом, *через всякую особую точку Ландау можно провести гиперплоскость, по отношению к которой проекция всего пространства* $\mathscr{P}'(\mathbf{G})$ *расположена с одной стороны, так что, в частности, эта гиперплоскость является опорной ко всему видимому контуру.*

2.4. Как «сместить физическую область» с особенностей Ландау в окрестности «гладкой» точки [1]**.** Возвращаясь к массовой поверхности, мы видим, что все пространство $\mathscr{P}(\mathbf{G})$ проектируется по одну сторону от своих особенностей Ландау. Мы будем говорить, что точка $p^{l_1 l_2} \in \mathscr{P}^{l_1 l_2}$, близкая к рассматриваемой особой точке Ландау, находится «выше или ниже порога графа **G**», если она принадлежит, соответственно не принадлежит образу пространства $\mathscr{P}(\mathbf{G})$. Мы воспользуемся этим определением, чтобы дополнить гипотезу А об аналитичности амплитуды рассеяния в физической области, указав те «комплексные смещения» с особенностей Ландау, которые дают возможность связать различные аналитические функции, разделенные этими особенностями. Всякая *гладкая* точка Ландау имеет окрестность U, в которой многообразие Ландау L можно задать уравнением $l = 0$ $(dl \neq 0)$, где l — вещественная аналитическая функция. *Мы выберем знак функции* l *так, чтобы выше порога выполнялось условие* $l > 0$. Аналитическая функция l допускает комплексификацию $\mathbf{l}$, которая в достаточно малой комплексной окрестности **U** является уравнением *комплексного аналитического многообразия коразмерности* 1 (так как $d\mathbf{l} \neq 0$); это «комплексификация» **L** многообразия L. Теперь может быть сформулирована

Гипотеза В. Ограничение распределения $\langle p^{l_2} | S | p^{l_1} \rangle_{\mathrm{T}}$ на достаточно малую окрестность U является *граничным значением аналитической в комплексной области* $\mathbf{U} \cap \{\mathrm{Im}\, \mathbf{l} > 0\}$ *функции, допускаю-*

[1]) Мы будем называть точку Ландау *гладкой*, если она допускает окрестность U, в которой особые точки Ландау *всех возможных графов* образуют единственное аналитическое подмногообразие L *коразмерности* 1.

щей аналитическое продолжение вдоль всякого пути в области **U — L**.

Замечание. Из того факта, что рассматриваемая аналитическая функция имеет особенности только на **L**, вытекает, что граничное значение не зависит от точной формы области $\{\operatorname{Im} l > 0\}$ (т. е. не зависит от выбора локального уравнения l). Чтобы получить инвариантную формулировку, надо использовать понятие «класса смещения», введенное в приложении III. *Причина, по которой мы отдали предпочтение классу смещения* $\{\operatorname{Im} l > 0\}$ перед противоположным по знаку классом $\{\operatorname{Im} l < 0\}$, *будет объяснена в* § 3 *настоящего введения.*

2.5. Строение «главных» особенностей. Доказав в п. 2.3 выпуклость особенностей Ландау, мы убедились в том, что в этих точках не может быть слишком заметных «неприятностей» (таких, как точка возврата, и др.), по крайней мере вне массовой поверхности. В главе I мы докажем значительно более точный результат, справедливый как на массовой поверхности, так и вне ее, и относящийся к строению «главных особенностей» графов. Рассмотрим критическую точку *коранга* 1, т. е. точку, в которой уравнения (L) удовлетворяются *единственной* системой параметров α_i (с точностью до общего множителя) [1]. Мы назовем такую критическую точку *главной*, если *все* параметры α_i *строго положительны* [2]. Образ главной критической точки мы будем называть «главной точкой Ландау (рассматриваемого графа)». В главе I мы докажем, что все главные особенности являются особенностями типа S_1 в классификации Тома; это означает (ср. приложение I), что ситуацию в окрестности критической точки можно описать следующим образом:

Тип S_1 в классификации Тома

Критическое множество является *аналитическим многообразием* размерности, на единицу меньшей

[1]) Вообще, коранг критической точки равен размерности векторного пространства решений (α_i) уравнений (L).

[2]) Более общее определение будет дано в главе I, п. I. 2.5.

размерности пространства-образа, а его проекция на видимый контур является *изоморфизмом аналитических многообразий*[1]); ограничение отображения π на полный прообраз *прямой*[2]), трансверсальной к видимому контуру, является *функцией*, имеющей *невырожденную квадратичную критическую точку* (т. е. точку, в которой, по определению, дифференциал этой функции обращается в нуль, а «гессиан» — определитель из ее вторых производных — отличен от нуля).

Замечание. Рассмотрим несколько менее общий случай, когда размерность «пространства-прообраза» $\mathcal{P}(\mathbf{G})$ на единицу меньше размерности пространства-образа. То, что мы называем «видимым контуром», является в этом случае просто *проекцией* пространства $\mathcal{P}(\mathbf{G})$, а точки коранга 1 — это точки, в которых эта проекция является (локальным) изоморфизмом аналитических многообразий (теорема о неявных функциях). Примеры такой ситуации дают графы, изображенные на рис. 1 и 3. Мы не будем в дальнейшем рассматривать случаи (коранга > 1), когда размерность пространства-прообраза *еще меньше*, например, на две единицы меньше размерности пространства-образа, как это имеет место для графов, изображенных на рис. 4 и 5. На самом деле особенности Ландау таких графов имеют коразмерность > 1 и являются просто *пересечениями* особенностей других графов (граф рис. 4 получается из двух графов, аналогичных графу рис. 1, а граф рис. 5 — из шести графов, аналогичных графу рис. 3).

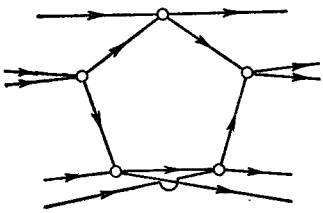


Рис. 3.

---

[1]) В частности, всякое критическое значение (точка Ландау) является (локально) образом *единственной* критической точки.

[2]) Так как речь идет о локальной картине, то естественно употреблять термин «прямая» вместо «одномерное аналитическое множество».

2.6. Абсорбтивные части. Согласно гипотезе B, в малой комплексной окрестности **U**, содержащей многообразие Ландау **L**, определена аналитическая функция (вообще говоря, многозначная), такая, что $\langle p^{l_2} | S | p^{l_1} \rangle_{\mathrm{T}}$ является ее граничным значением, соответствующим области $\{\mathrm{Im}\, \mathbf{l} > 0\}$. Рассмотрим теперь

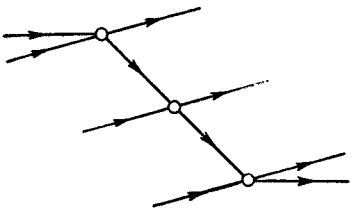


Рис. 4.

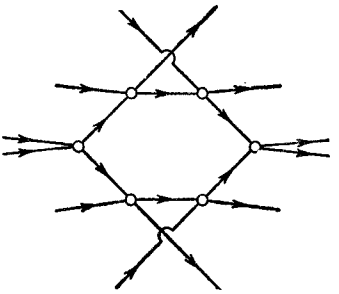


Рис. 5.

в области $\{\mathrm{Im}\, \mathbf{l} < 0\}$ ветвь этой функции, *совпадающую с* $\langle p^{l_2} | S | p^{l_1} \rangle_{\mathrm{T}}$ *ниже порога*, и пусть $\langle p^{l_2} | S | p^{l_1} \rangle_{\mathrm{T}}^{(\mathrm{L})}$ — граничное значение этой функции. Абсорбтивной частью, соответствующей **L**, называется следующее распределение (определенное только в окрестности U):

$$\langle p^{l_2} | A | p^{l_1} \rangle^{(\mathrm{L})} = \langle p^{l_2} | S | p^{l_1} \rangle_{\mathrm{T}} - \langle p^{l_2} | S | p^{l_1} \rangle_{\mathrm{T}}^{(\mathrm{L})}.$$

Положим

$$\langle p^{l_2} | \mathbf{A} | p^{l_1} \rangle^{(\mathrm{L})} = \delta^4 (p_{l_1} - p_{l_2}) \langle p^{l_2} | A | p^{l_1} \rangle^{(\mathrm{L})}.$$

Мы сформулируем сейчас правило («правило Куткоски»), позволяющее вычислять абсорбтивные части.

Рассмотрим такую точку Ландау, что существует *один и только один граф* **G**, имеющий эту точку *главной точкой Ландау*. Из п. 2.5 тогда следует, что эта точка является *гладкой*, так что в окрестности рассматриваемой точки можно определить абсорбтивную часть, соответствующую *многообразию* Ландау **L**.

Гипотеза С. Если выполнены указанные условия и если, кроме того, граф **G** является *простым*[1]), т. е. всякие две его вершины соединены самое большее одной линией, абсорбтивная часть, соответствующая многообразию L, задается выражением

$$\text{(A)} \qquad \langle p^{I_2} | \mathbf{A} | p^{I_1} \rangle^{(\mathrm{L})} = \int\limits_{I} \prod_{v} \langle \mathbf{S}_v \rangle_{\mathrm{T}},$$

где произведение распространено на все вершины v графа **G**; через $\langle \mathbf{S}_v \rangle_{\mathrm{T}}$ обозначен элемент S-матрицы «элементарного процесса», отвечающего вершине v; интегрирование, как обычно, производится по массовой поверхности M^I, соответствующей *внутренним* импульсам, с мерой $\mu^I = \prod\limits_{i \in I} d^4 p_i \delta(p_i^2 - m_i^2)$[2]).

Избавляясь в формуле (**A**) от функции $\delta^4(p_{I_1} - p_{I_2})$, выражающей закон сохранения полной энергии-импульса, получаем формулу

$$(A) \qquad \langle p^{I_2} | A | p^{I_1} \rangle^{(\mathrm{L})} = \int\limits_{\pi^{-1}(p^{I_1 I_2})} \prod_{v} \langle S_v \rangle_{\mathrm{T}},$$

в которой интегрирование вдоль «слоя» $\pi^{-1}(p^{I_1 I_2}) \subset \subset \mathscr{P}(\mathbf{G})$ производится по мере

$$\sigma_{p^{I_1 I_2}}(\mathbf{G}) = \varepsilon_{p^{I_1 I_2}}(\mathbf{G}) \prod_{i \in I} \delta(p_i^2 - m_i^2),$$

где $\varepsilon_{p^{I_1 I_2}}(\mathbf{G})$ — каноническая мера на подпространстве евклидова пространства $\mathscr{E}(\mathbf{G})$, прообразе точки $p^{I_1 I_2}$. Принимая во внимание аналитичность функций $\langle S_v \rangle_{\mathrm{T}}$ (гипотезы А и В), мы видим, что интеграл (A) выше порога принадлежит к интегралам типа, исследованного в приложении III, и, следовательно, определяет аналитическую функцию, свойства которой мы уточним в главе II.

---

[1]) *Графы с кратными линиями будут рассмотрены в главе* III.

[2]) Напомним, что условия *положительности энергии* $p_i^0 > 0$ включены в определение массовой поверхности M^I.

3. Факторизация S-матрицы

Пусть $\mathbf{G}$ — связный граф многократного рассеяния, имеющий множество входящих линий I_1 и множество выходящих линий I_2. Мы будем изучать асимптотическое поведение амплитуды элементарного процесса $I_1 \to I_2$ при действии на волновые пакеты различных частиц *подходящих сдвигов в пространстве-времени*, предназначенных для того, чтобы *мы получили возможность наблюдать процесс* $\mathbf{G}$. Каждой вершине v графа $\mathbf{G}$ мы сопоставим четырехмерный вектор a_v, на который будут сдвинуты все внешние частицы, инцидентные v. Выбор системы векторов (a_v) производится следующим образом. Пусть $\overset{c}{p}{}^{I_1 I_2} \in \mathscr{P}^{I_1 I_2}$ — точка Ландау, изображающая средние энергии-импульсы внешних частиц. *Предположим, что речь идет о главной точке Ландау графа* $\mathbf{G}$, так что ей соответствуют (п. 2.5) внутренние импульсы $\overset{c}{p}_i$, определенные однозначно, и положительные параметры α_i, определенные с точностью до общего множителя. Анализ Коулмана и Нортона наводит на мысль интерпретировать этот общий множитель τ как шкалу времени процесса и, рассматривая четырехмерные векторы $a_i = \tau\alpha_i \overset{c}{p}_i$, определить по ним векторы a_v с помощью уравнений $a_i = a_{v_i''} - a_{v_i'}$, где через v_i' и v_i'' обозначены, соответственно, начало и конец линии i (векторы a_v определены при этом лишь с точностью до общего векторного слагаемого, что не имеет значения в силу инвариантности S-матрицы относительно сдвига). В результате таких сдвигов элемент усеченной S-матрицы

$$\langle \psi | S | \varphi \rangle_{\mathrm{T}} = \int\limits_{I_1 I_2} \langle p^{I_2} | \mathbf{S} | p^{I_1} \rangle_{\mathrm{T}} \bar{\psi}(p^{I_2}) \varphi(p^{I_1})$$

примет вид

$$\langle S \rangle(\tau) = \langle \psi_a | S | \varphi_a \rangle_{\mathrm{T}} = \\ = \int\limits_{I_1 I_2} \langle p^{I_2} | \mathbf{S} | p^{I_1} \rangle_{\mathrm{T}} e^{i \sum\limits_v p_v \cdot a_v} \bar{\psi}(p^{I_2}) \varphi(p^{I_1}),$$

где p_v обозначает «алгебраическую сумму» *внешних* импульсов, инцидентных вершине v (взятых со знаком плюс, если они входят в вершину, и со знаком минус, если они выходят из вершины), равную также, в силу закона сохранения энергии-импульса, «алгебраической сумме» (с противоположным знаком) внутренних импульсов, инцидентных v. С помощью несложной выкладки получаем

$$\sum_v p_v \cdot a_v = -\sum_{i \in I} p_i a_i,$$

так что фазовый множитель в интеграле можно записать в виде

$$-\sum_{i \in I} p_i \cdot a_i = -\tau \sum_{i \in I} \alpha_i \overset{c}{p}_i \cdot p_i = -\tau \left[t(p^{I_1 I_2}) + \sum_{i \in I} \alpha_i m_i^2 \right],$$

где $t(p^{I_1 I_2})$ — линейная функция, определенная в п. 2.3, при помощи которой задается уравнение касательной гиперплоскости к многообразию Ландау в точке $\overset{c}{p}{}^{I_1 I_2}$. Следовательно, интеграл является преобразованием Фурье (множитель $e^{-i\tau t(p^{I_1 I_2})}$) произведения функции $\bar{\psi}(p^{I_1 I_2})\varphi(p^{I_1 I_2})$, *которую мы выберем бесконечно дифференцируемой и имеющей компактный носитель в малой окрестности точки* $\overset{c}{p}{}^{I_1 I_2}$, *на граничное значение функции, аналитической в полуокрестности, лежащей в верхней полуплоскости*[1]. Как показано в приложении 0, *этот интеграл* $\langle S \rangle(\tau)$ *при* $\tau \to -\infty$ *стремится к нулю быстрее любой отрица-*

---

[1]) Точнее, выберем локальную систему координат, первой из которых является функция t, а остальные обозначаются через (u_i). Так как $dt|\mathbf{L} = 0$, то, очевидно, никакие из $du_i|\mathbf{L}$ не могут обращаться в нуль. Принимая во внимание гипотезу B, получаем отсюда, что

1) $\langle p^{I_2} | S | p^{I_1} \rangle_{\mathrm{T}}$ *есть непрерывная функция от* (u_i), *значениями которой являются распределения по переменной* t,

2) для каждой *вещественной точки* (u_i) это распределение является граничным значением аналитической функции в полуокрестности, лежащей в *верхней полуплоскости переменной* t $(\operatorname{Im} t > 0)$.

Таким образом, мы находимся как раз в условиях заключительного следствия приложения 0.

тельной степени τ. *При* $\tau \to +\infty$ таким же свойством обладает функция $\langle S\rangle^{(L)}(\tau)$, полученная в результате замены распределения $\langle p^{l_2}|\,\mathbf{S}\,|p^{l_1}\rangle_T$ распределением $\langle p^{l_2}|\,\mathbf{S}\,|p^{l_1}\rangle_T^{(L)}$, определенным в п. 2.6.

Гипотеза С позволяет сформулировать следующее предложение, которое дает очень интересное выражение для функции $\langle A\rangle^{(L)}(\tau) = \langle S\rangle(\tau) - \langle S\rangle^{(L)}(\tau)$:

Предложение[1]. *С точностью до функции с быстрым убыванием интеграл* $\langle S\rangle(\tau)$ *при* $\tau \to +\infty$ *ведет себя как функция*

$$\langle A\rangle(\tau) = \int\limits_{l_1 l_2} \left(\prod_v \langle \mathbf{S}_v\rangle_T\, e^{-i \sum\limits_{i \in \mathbf{I}} p_i a_i}\, \bar{\psi}(p^{l_2})\, \varphi(p^{l_1}) \right).$$

Таким образом мы получаем факторизацию S-матрицы, которая навела на мысль рассматривать вершины графа как *независимые* процессы [8]. Фазовый множитель $p_i a_i$ соответствует распространению «свободной» частицы i от точки ее возникновения (где она играет роль частицы out) до точки ее уничтожения (где она играет роль частицы in). Этот фазовый множитель имеет назначение «гасить» амплитуду процесса: действительно, можно убедиться в том, что $\langle A\rangle(\tau)$ стремится к нулю как отрицательная степень $\sqrt{\tau}$[2]).

Замечание. Ясно, почему нельзя ожидать, что гипотеза С будет иметь тот же вид и для графов

---

[1]) Необходимо сделать следующие предположения: $\mathbf{G}$ — *единственный* граф, имеющий точку $\overset{c}{p}{}^{l_1 l_2}$ главной особенностью, и этот граф *имеет лишь простые линии.*

[2]) Это в точности явление «разложения на волновые пакеты» в квантовой механике. С математической точки зрения мы имеем здесь интеграл по поверхности $\mathscr{P}(\mathbf{G})$ от функции класса C^∞, умноженной на $e^{-i\tau t}(p^{l_1 l_2})$. Вычисляя этот интеграл методом стационарной фазы, можно показать, что асимптотически он ведет себя как $\tau^{-n/2}$, где n — ранг квадратичной формы, являющейся главным членом разложения в ряд Тейлора функции $t|\mathscr{P}(\mathbf{G})$ в критической точке.

с кратными линиями. В самом деле, с промежуточными частицами, «путешествующими вместе», нельзя обращаться так же, как со свободными частицами, т. е. они не могут играть роль частиц out (соотв. in) в тех вершинах, где они создаются (соотв. уничтожаются). Следовательно, такой вершине мы не можем поставить в соответствие $\langle S_v \rangle_T$.

4. Обсуждение

Как мы только что видели, гипотезы A, B, C непосредственно приводят нас к феноменологическому понятию многократного рассеяния[1]). Какие другие обоснования имеются для этих гипотез?

Напомним сначала аргументы, заимствованные из теории возмущений. Результаты приложения III непосредственно применимы к интегралам Фейнмана[2]), причем предложение A.III.3.1 доказывает гипотезы A, B, в то время как доказательство гипотезы C получается из формулы (Disc 1) (к сожалению, в теории возмущений амплитуды, связанные с вершинами графов, заменяются на постоянные, что маскирует тонкости, о которых говорилось в заключительном замечании предыдущего параграфа).

Остановимся несколько подробнее на следующих *аргументах совместимости*. В то время как в гипотезах A, B речь идет об *аналитических свойствах* амплитуд, гипотеза C дает нам *интегральные соотношения* между этими амплитудами. Очевидно, необходимо проверить, что одни свойства совместимы с другими; именно этим мы займемся в главе II. Идея, уже упомянутая в конце п. 2.6, состоит в выяснении аналитических свойств *интегралов поглощения* (интегралов,

---

[1]) Этого можно было бы достичь и с помощью более слабых гипотез, ср. [15], [16].

[2]) Если не говорить о том, что для интегралов Фейнмана изучаемая «проекция» не является «собственной». Это обстоятельство поднимает проблему «особенностей Ландау второго рода» (видимые контуры «на бесконечности»), не говоря уже о вопросах сходимости интегралов.

о которых идет речь в гипотезе С), считая известными (на основании гипотез А, В, С) аналитические свойства подинтегрального выражения. Мы докажем при этом три теоремы А, В, С, поразительное сходство которых с гипотезами А, В, С ставит интересные проблемы согласованности. В частности, сравнение гипотезы С и теоремы С, дающее равенство между скачками амплитуды рассеяния и абсорбтивной части, приведет нас к факту отсутствия особенностей у амплитуды рассеяния, аналитически продолженной вдоль некоторой петли (п. II.3.2). Чисто топологическое рассуждение (вычисление некоторой гомотопической группы) покажет нам (п. II. 3.3), что эта голоморфность аналитического продолжения эквивалентна голоморфности самой амплитуды в «точках Ландау», в которых не все α_i положительны. Таким образом, мы получим связь между гипотезой С и постулатом о *положительности параметров* α_i, включенном в гипотезу А.

Конечно, сейчас мы еще далеки от доказательства гипотез. Впрочем, до сих пор мы пренебрегали одним существенным физическим соображением: речь идет об *унитарности S-матрицы*, из которой кэмбриджским физикам недавно удалось «извлечь» в некоторых частных случаях ([2], [19], [20]) правила Куткоски. Благодаря развитым здесь топологическим методам, ничто нам не мешает в принципе проделать то же самое в общем случае, если бы не крайняя комбинаторная сложность соотношений унитарности. Но даже распутав этот клубок, мы не смогли бы еще доказать гипотезы, так как получить аналитические свойства интеграла из аналитических свойств подинтегрального выражения и исследовать аналитические свойства решения интегрального уравнения — далекие друг от друга задачи. В действительности настоящая проблема сводится к решению задачи последнего типа, и ее можно сформулировать следующим образом: зная интегральные соотношения между амплитудами — соотношения унитарности — и «минимум» аналитических свойств этих амплитуд, содержащийся

в «линейной программе» теории поля, извлечь отсюда их аналитические свойства «в полной мере» (гипотезы A, B, C). Эта проблема, несомненно, является трудной, если она вообще разрешима в рамках современной линейной программы (единственные сведения, которыми мы располагаем в настоящее время относительно амплитуд N частиц, касаются их аналитичности вне массовой поверхности).

ГЛАВА 0

НЕКОТОРЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ СВОЙСТВА ГРАФОВ

Настоящая глава, в которой формализм доведен до предела, может произвести неприятное впечатление. Читателю рекомендуется бегло с ней ознакомиться (например, просмотрев рисунки), с тем чтобы возвращаться к ней по мере надобности.

В § 0.1 напоминаются некоторые классические понятия (ср., например, [1]), важнейшими из которых являются понятия *циклов* (0.1.3) и *законов сохранения* (0.1.4). В п. 0.2.2 напоминается основное для дальнейшего понятие *стягивания*[1]), а также предлагаются терминология (*подграфы*, *факторграфы*, *расширения графов*) и обозначения (*точные последовательности графов*), заимствованные из теории групп и оказавшиеся весьма удобными. Продолжая аналогию, мы изучаем *тривиальные расширения* (0.3), которые служат для построения *расслоенных произведений* (0.4). Понятие расслоенного произведения будет играть важную роль в главе II, в частности при изучении «двойных скачков», где оно приведет нас к общей формулировке «соотношений Куткоски — Штейнмана» (как говорят специалисты в теории S-матрицы).

Выражаясь математически, можно сказать, что все эти понятия, вероятно, найдут свое место в стандартных рамках «категории графов»; в соответствии с этим в п. 0.2.1 вводится определение *гомоморфизма графов*, — но дальше по этому пути я не продвинулся.

0.1. Пути, циклы и законы сохранения графов

0.1.1. Определение графа. *Графом* называется совокупность двух множеств — множества линий I и

---

[1]) Которое многие физики имеют обыкновение называть «редукцией».

множества вершин V и отображения, которое каждой линии ставит в соответствие пару вершин, называемых соответственно *началом* и *концом* линии[1]). Говорят, что линия i *инцидентна* вершине v, если она имеет эту вершину своим началом или концом (говорят также, что вершина v инцидентна линии i). Множество линий, инцидентных вершине v, называется *звездой* вершины v.

В дальнейшем нам будет удобно представлять себе граф как множество *путей*, снабженное ассоциативной операцией, которая не всюду определена: композиция $c'c$ двух путей c и c' определена тогда и только тогда, когда конец пути c совпадает с началом пути c'. Определен путь c^{-1}, обратный к пути c (это путь, «пробегаемый в обратном направлении»). Композиции $c^{-1}c$ и cc^{-1} всегда определены: их можно отождествить соответственно с началом и концом пути c. Такая точка зрения интересна потому, что нет нужды вводить множество вершин, которое выступает здесь как множество путей специального вида («нулевых путей»).

Читатель может пропустить следующий параграф, который посвящен формализации этой идеи. Тем не менее необходимо остановиться на одном *обозначении*: запись $i \in v$ (соответственно $i^{-1} \in v$) обозначает, что линия i имеет вершину v своим началом (соответственно концом).

0.1.2. Группоиды. Рассмотрим множество G, снабженное *не всюду определенной* ассоциативной операцией, которая записывается мультипликативно.

Ассоциативность. Операция называется *ассоциативной*, если для всякой тройки a, b, $c \in G$, такой, что ab и bc определены, $(ab)c$ и $a(bc)$ также определены и равны между собой (их общее значение записывается abc). Отсюда выводится, что если

---

[1]) Рассмотрение графов *с внешними линиями*, т. е. таких, у которых некоторые линии не имеют начала или конца, сводится к изучаемому здесь случаю добавлением *общей* вершины (бесконечно удаленной вершины), инцидентной всем внешним линиям.

в последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ композиция любых двух последовательных элементов определена, то существует *единственный* элемент $a_1 a_2 \ldots a_n \in G$, являющийся композицией всех a_k с *произвольным расположением скобок.*

Единица. Элемент $c \in G$ называется *единицей,* если $ea = a$ (соответственно $ae = a$) всякий раз, когда ea (соответственно ae) определено.

Обратный элемент. Говорят, что a' является *обратным к элементу* a (или a является обратным к элементу a'), если aa' и $a'a$ определены и являются единицами. *Единственность обратного элемента* (если он существует) очевидна, так как если a' и a'' два обратных к a элемента, то композиция $a'aa''$ определена и равна одновременно a' и a'' (используем ассоциативность и определение единицы).

Определение группоида[1]). *Группоидом* называется множество G, снабженное ассоциативной (не всюду определенной) операцией, такой, что для всякого элемента $a \in G$ имеется обратный, обозначаемый a^{-1}.

Свойства группоидов.

i) *Всякая единица является своим обратным элементом.*

Действительно, если e — единица, то элемент $(ee^{-1})e$ определен и равен одновременно e (так как ee^{-1} есть единица) и e^{-1} (так как e — единица).

ii) *Если ab определен, то и $b^{-1}a^{-1}$ определен и равен $(ab)^{-1}$.*

Проверка того, что элемент $b^{-1}a^{-1}$ является обратным к ab, не представляет никакого труда, *если известно, что он определен.* Последнее доказывается повторным применением свойства ассоциативности. Заметим сначала, что $(ab)b^{-1}$ определен и равен a. Отсюда получаем, что $(ab)^{-1}(ab)b^{-1}$ определен и равен, с одной стороны, $(ab)^{-1}a$, а с другой b^{-1}. Но так

[1]) Это классическое определение обычно формулируется в более общих рамках теории категорий: ср., например, [5], гл. I.

как aa^{-1} определен, то $[(ab)^{-1}a]a^{-1}$ определен, откуда следует нужный результат, поскольку $(ab)^{-1}a = b^{-1}$.

iii) *Свойство «элемент ba^{-1} определен», рассматриваемое как отношение между элементами a, b из G, является отношением эквивалентности*:

оно *рефлексивно*, так как aa^{-1} определен;

оно *симметрично*, так как если ba^{-1} определен, то и ab^{-1} определен на основании ii);

оно *транзитивно*: если ba^{-1} и cb^{-1} определены, то из ассоциативности и из того, что $b^{-1}b$ определен, вытекает, что $cb^{-1}ba^{-1}$, т. е. ca^{-1}, определен.

Классы эквивалентности, определенные отношением iii), называются *вершинами*. Принадлежность элемента a к классу v (обозначается $a \in v$) выражается словами: v является *началом* a или *концом* a^{-1}. Из этого соглашения вытекает, что *ab определен тогда и только тогда, когда конец элемента b совпадает с началом элемента a.*

Если aa определен, т. е. начало и конец элемента a совпадают, то мы будем говорить, что a является *петлей*.

iv) *Всякая вершина содержит одну и только одну единицу.*

Вершина содержит единицу: действительно, если $a \in v$, то v содержит единицу $a^{-1}a$, так как $(a^{-1}a)a^{-1}$ определен. Она содержит только одну единицу: если бы v содержала две единицы e и e', то $e'e^{-1}$ был бы определен. Но, согласно i), $e^{-1} = e$. Следовательно, $e'e$ определен и равен одновременно e и e'.

На основании свойства iv) *мы условимся отождествлять множество вершин с множеством единиц группоида.*

Гомоморфизмы группоидов. Мы определим их очевидным образом, как отображения φ: $G \to G'$, сохраняющие структуру группоида. Иначе говоря,

1) если ab определен в G, то $\varphi(a)\varphi(b)$ определен в G' и равен $\varphi(ab)$;

2) $\varphi(a)^{-1} = \varphi(a^{-1})$.

Очевидным следствием свойства 1) является тот факт, что отображение φ *преобразует петли в петли.* С другой стороны, φ сохраняет отношение эквивалентности iii) и, следовательно, преобразует *вершины в вершины.*

Примеры группоидов. *Группа* — это группоид с единственной вершиной. Вообще, произвольный группоид G можно построить (так же, как и любую группу), задавая семейство $I \subset G$ *образующих* группоида и семейство *соотношений* между этими образующими («определяющих соотношений» группоида). *Граф* — это группоид, допускающий семейство определяющих соотношений вида $aa^{-1} = bb^{-1}$, где a и b — некоторые элементы множества I или множества

$$I^{-1} = \{i^{-1} \mid i \in I\}.$$

Элементы множества I — это *линии* графа. Элементы группоида G, порожденного множеством I, являются *путями* графа.

0.1.3. Циклы. Вернемся опять к изучению графов. Введем некоторые новые определения.

Петлей (ср. 0.1.2) называется путь, начало и конец которого совпадают.

Путь c является *направленным*, если его можно представить в виде $i_1 i_2 \ldots i_p$, где i_k принадлежат I (но не I^{-1}).

Направленная петля называется *циркуляцией* (или *током*). Обозначим через $\mathbb{Z}(I)$ *свободную абелеву группу над* I, элементами которой являются конечные формальные линейные комбинации с целыми положительными или отрицательными коэффициентами: $\gamma = \sum_{i \in I} n_i i$ ($n_i \neq 0$ лишь для конечного числа индексов i); назовем их *цепями.* В частности, всякий путь $c = i_1^{\varepsilon_1} i_2^{\varepsilon_2} \ldots i_p^{\varepsilon_p}$ ($\varepsilon_k = \pm 1$) определяет цепь $\Gamma c = \sum_i n_i i$, где суммирование производится по всем различным линиям i, входящим в представление пути c, причем n_i равно сумме чисел ε_k, соответствующих i-й линии.

Всякой вершине $v \in V$ мы поставим в соответствие линейную функцию с целыми значениями

$$v^*\colon \mathbb{Z}(I) \to \mathbb{Z},$$

определенную равенством

$$v^*\left(\sum_i n_i i\right) = \sum_{i \in v} n_i - \sum_{i^{-1} \in v} n_i.$$

В частности, если Γc — цепь, определенная путем c, мы имеем

$$v^*(\Gamma c) = \begin{cases} 0, & \text{если } c \text{ не инцидентен } v \text{ или} \\ & \text{если } c \text{ петля;} \\ +1, & \text{если } c \in v,\ c^{-1} \notin v; \\ -1, & \text{если } c^{-1} \in v,\ c \notin v. \end{cases}$$

Цепь $\gamma \in \mathbb{Z}(I)$ называется *циклом*, если $v^*(\gamma) = 0\ \forall v \in V$. Множество циклов является, очевидно, *подгруппой* группы $\mathbb{Z}(I)$; мы обозначим ее через Z_*. Легко видеть, что эта *подгруппа может быть порождена цепями* Γl, *определенными петлями* l рассматриваемого *графа*.

0.1.4. Законы сохранения. Рассмотрим множество всех линейных функций $f\colon \mathbb{Z}(I) \to \mathbb{Z}$ с целыми значениями, *обращающихся в нуль на всяком цикле*. Это подгруппа двойственной к $\mathbb{Z}(I)$ группы $\mathbb{Z}^I$: *подгруппа, ортогональная к* Z_*. Мы обозначим ее через V^*.

В случае конечных графов (единственном случае, который нас практически будет интересовать), т. е. в случае, когда I является конечным множеством, V^* есть не что иное, как *подгруппа, порожденная всеми функциями* v^*, $v \in V$. В этом случае группу $\mathbb{Z}^I$ можно отождествить с $\mathbb{Z}(I)$, и тогда, в частности, функция v^* отождествляется с конечной формальной линейной комбинацией

$$\sum_{\substack{i \in v \\ i^{-1} \notin v}} i - \sum_{\substack{i^{-1} \in v \\ i \notin v}} i,$$

которую можно интуитивно интерпретировать как «закон сохранения тока» в вершине v (считая каждую линию проводником «тока»). По этой причине группу V^* мы будем называть *пространством законов сохранения графа.*

Замечание. Из того, что Z_* и V^* «взаимно ортогональны» (в случае конечных графов), не вытекает, что группа $\mathbb{Z}(I)$ является прямой суммой подгрупп Z_* и V^*. Например, для графа

группа Z_* порождена элементами вида $z_* = i - j$, а V^* — элементами вида $v^* = i + j$ и $Z_* \oplus V^*$ яв-

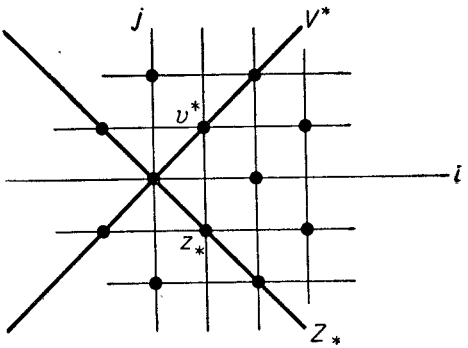


Рис. 6. Циклы и законы сохранения для указанного выше графа.

ляется лишь *подрешеткой* решетки $\mathbb{Z}(i, j)$ точек с целыми координатами на плоскости (рис. 6).

0.2. Подграфы и факторграфы

0.2.1. Гомоморфизмы графов. *Гомоморфизмом графов* называется отображение φ: $G \to G'$ пространства путей графа G в пространство путей графа G', *сохраняющее закон композиции*; следовательно, это частный случай гомоморфизма группоидов, введенного

в п. 0.1.2. Такое отображение не обязательно переводит линии графа G в линии графа G' (ср. рис. 7), однако известно (0.1.2), что оно переводит вершины

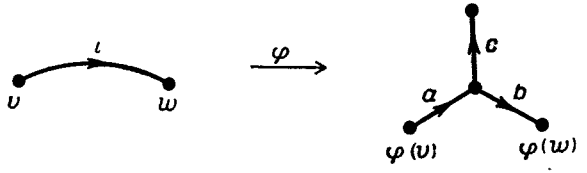


Рис. 7. Пример гомоморфизма графов: линия i преобразуется в путь ba.

в вершины и петли в петли. С другой стороны, оно индуцирует, очевидно, гомоморфизм групп цепей

$$\varphi_*\colon Z(I) \to Z(I'),$$

который определяется так: цепи $\gamma = \sum_i n_i i$ ставится в соответствие цепь $\varphi_*\gamma = \sum_i n_i \Gamma'\varphi(i)$, где через $\Gamma'\varphi(i)$ обозначена цепь, определенная путем $\varphi(i)$ в графе G'. Этот гомоморфизм φ_* преобразует циклы в циклы (так как циклы порождены петлями); поэтому можно написать

$$\varphi_*\colon Z_* \to Z'_*.$$

Из соображений двойственности получаем отсюда гомоморфизм

$$\varphi^*\colon V'^* \to V^*.$$

Закончим на этом изложение общих свойств графов и перейдем исключительно к изучению специального типа гомоморфизмов графов: *вложений* и *стягиваний*

0.2.2. Вложения и стягивания. *Вложение графов* (обозначаемое $\iota\colon G' \rightarrowtail G$) — это такой гомоморфизм, что $I' \subset I$ и что $\iota|I'$ является тождественным отображением. Говорят, что G' является *подграфом* в G.

Стягивание графов (обозначаемое $\varkappa\colon G \twoheadrightarrow G''$) — это такой гомоморфизм, что $I \supset I''$, а $\varkappa|I''$ является

тождественным отображением, причем $\varkappa$ преобразует всякую линию из $\mathbf{C}\,I''$ в единицу (нулевую линию) графа G''. Мы будем говорить в этом случае, что G'' является *факторграфом* графа G.

Легко видеть, что для всякого графа G задание произвольного подмножества $I' \subset I$ (соотв. $I'' \subset I$) определяет единственный[1]) подграф G' (соотв. факторграф G'') и соответствующее вложение (соотв. стягивание). Граф G' получается просто в результате ограничения на I' операции в графе G. Что касается G'', то пространство его путей получается из пространства путей графа G в результате «короткого замыкания» всех линий, принадлежащих множеству $\mathbf{C}I''$.

Если $\mathbf{C}\,I'' = I'$, то мы будем говорить, что последовательность $G' \overset{\iota}{\rightarrowtail} G \overset{\varkappa}{\twoheadrightarrow} G''$ является точной, или что G'' является *факторграфом* графа G по G': $G'' = G/G'$, или что G' является *ядром* стягивания $\varkappa$: $G' = \ker \varkappa$, или что G является *расширением графа G' с помощью G''*, или что G является *расширением над G''* с ядром G'; все эти выражения заимствованы из теории групп.

0.2.3. Точная последовательность циклов.

Предложение. *Всякая точная последовательность графов*

$$G' \overset{\iota}{\rightarrowtail} G \overset{\varkappa}{\twoheadrightarrow} G''$$

индуцирует на циклах точную последовательность групп[2])

$$(Z) \qquad Z'_* \overset{\iota_*}{\rightarrowtail} Z_* \overset{\varkappa_*}{\twoheadrightarrow} Z''_*.$$

Действительно, Z'_* есть, очевидно, подгруппа в Z_*. Далее, очевидно, что $\varkappa_*$ — сюръективное отображение,

---

[1]) Исключая те случаи *стягивания*, когда множество $\mathbf{C}\,I''$ содержит *связные компоненты* графа G. Эти связные компоненты дают вершины графа G'', которые мы можем либо оставить *изолированными*, либо отождествить с другой какой-либо вершиной G''.

[2]) Обозначения $\rightarrowtail$ и $\twoheadrightarrow$ для моно- и эпиморфизмов заимствованы у Мак-Лейна [24].

так как всякая петля графа G'' получается в результате «короткого замыкания» некоторой петли из G. Наконец, цикл графа G аннулируется отображением $\varkappa_*$ тогда и только тогда, когда он состоит из линий множества I', но последнее означает, что он является циклом графа G'.

Следствие. *Для того чтобы $Z_* = Z''_*$, необходимо и достаточно, чтобы G' был деревом* (*деревом* называется граф без циклов)[1]).

Упражнение. Дерево A, являющееся подграфом в G, называется *максимальным* в G, если в G не существует никакого другого дерева, его содержащего. Проверьте, что если G'' — факторграф графа G по максимальному дереву, то все линии графа G'' являются петлями, так что $Z''_* = \mathbb{Z}(I'')$.

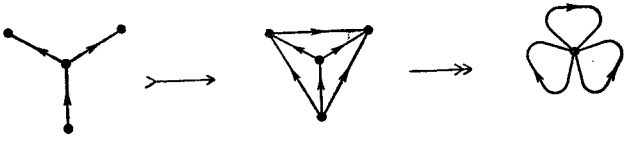


Рис. 8. Стягивание, ядро которого является максимальным деревом.

Принимая во внимание следствие, мы получаем хорошо известное свойство: *множество I'', дополнительное к максимальному дереву, определяет базис группы циклов графа G* (рис. 8).

0.2.4. Точная последовательность законов сохранения. Из предложения п. 0.2.3 в силу двойственности мы получаем

Следствие. *Точная последовательность графов*

$$G' \overset{\iota}{\rightarrowtail} G \overset{\varkappa}{\twoheadrightarrow} G''$$

[1]) Иногда еще требуют, чтобы дерево было связным. Несвязный граф без циклов называют «лесом».

индуцирует для законов сохранения точную последовательность групп

$$(V) \qquad V'^* \xleftarrow{\iota^*} V^* \xleftarrow{\varkappa^*} V''^*.$$

0.3. Тривиальные расширения: объединения и букеты графов

0.3.1. Мы будем говорить, что точная последовательность графов $G' \rightarrowtail G \twoheadrightarrow G''$ является *расщепляющейся*, или что G является *тривиальным расширением* графов G' и G'', если можно написать также и точную последовательность

$$G' \twoheadleftarrow G \leftarrowtail G''.$$

Обобщая сказанное, мы назовем точную последовательность *расщепляющейся справа*, соответственно *слева* (или тривиальным справа, соответственно слева, расширением), если имеет место последовательность

$$G' \rightarrowtail G \underset{\leftarrowtail}{\overset{\twoheadrightarrow}{}} G'', \text{ соответственно } G' \underset{\twoheadleftarrow}{\overset{\rightarrowtail}{}} G \twoheadrightarrow G''.$$

В каждом из этих двух случаев точная последовательность абелевых групп (Z) канонически расщепляется [1]), так что $Z_* = Z'_* \oplus Z''_*$. Аналогично, $V^* = V'^* \oplus V''^*$. Следовательно, если два графа, имеющие одинаковые множества линий и одинаковые группы циклов (следовательно, одинаковые законы сохранения), назвать *эквивалентными*, то легко видеть, что *тривиальное (справа или слева) расширение двух заданных графов является единственным с точностью до эквивалентности* [2]).

0.3.2. Построение всех тривиальных расширений двух заданных графов. Для всякой пары графов

---

[1]) Конечно, последовательность (Z), будучи точной последовательностью *свободных* групп, *всегда расщепляется*, но, вообще говоря, не *каноническим* образом.

[2]) Заметим, что это отношение эквивалентности является более слабым, чем изоморфизм графов (см. п. 0.2.1). Например, два графа, изображенные на рис. 9, эквивалентны, но пространства их путей совершенно различны.

(G', G''), имеющих *непересекающиеся* множества линий I' и I'' соответственно, можно построить очевидное тривиальное расширение, а именно, их *объединение* $G' \cup G''$, определенное просто как объединение пространств путей обоих графов.

Другим тривиальным расширением является *букет* (рис. 9) $G' \underset{v', v''}{\vee} G''$, который получается из объединения в результате отождествления вершины $v' \in V'$ с вершиной $v'' \in V''$.

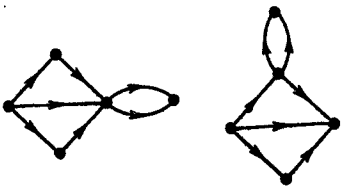


Рис. 9. Букет двух графов.

Из следующего пункта вытекает, что это — *единственно возможные тривиальные расширения*, если по крайней мере один из двух графов G', G'' является *связным* (напомним, что граф называется связным, если всякие две его вершины можно соединить путем).

0.3.3. *Пусть* $G' \overset{\iota'}{\rightarrowtail} G \underset{\iota''}{\overset{\varkappa''}{\rightleftarrows}} G''$ — *точная последовательность, расщепляющаяся справа, и пусть* G' *связен. Тогда* G *равен объединению или букету графов* G' *и* G'' (*и, следовательно, эта точная последовательность расщепляется*).

Доказательство. Рассмотрим образы вершин графов G' и G'' при отображениях ι' и ι''. Если для всякой пары вершин $(v' \in V', v'' \in V'')$ мы имеем $\iota' v' \neq \iota'' v''$, то, очевидно, $G = G' \cup G''$. Если существует *одна и только одна пара вершин*, такая, что $\iota' v' = \iota'' v''$, то, очевидно, $G = G' \underset{v', v''}{\vee} G''$.

Остается, следовательно, доказать, что *если* G' *связен*, то не может существовать двух таких пар (v'_1, v''_1), (v'_2, v''_2). В самом деле, пусть $v_1 = \iota' v'_1 = \iota'' v''_1$ и $v_2 = \iota' v'_2 = \iota'' v''_2$. Так как G' связен, то существует путь в G', соединяющий v'_1 с v'_2. Следовательно, из определения факторграфа вытекает равенство $\varkappa'' \iota' v'_1 = \varkappa'' \iota' v'_2$, которое можно еще записать так:

$\varkappa''\iota''v_1'' = \varkappa''\iota''v_2''$. Отсюда получаем, что $v_1'' = v_2''$ (так как $\varkappa''\iota'' = 1$). Значит, $v_1 = v_2$ и, поскольку ι' и ι'' — вложения, $v_1' = v_2'$. Следовательно, две рассматриваемые пары идентичны.

0.3.4. Посмотрим теперь, что дает нам предыдущее рассуждение в случае, если G' не связен. Легко видеть, что тогда может существовать столько пар (v', v''), сколько связных компонент в G'. Следовательно, G получается присоединением к G'' (всякий раз при помощи операции «букет») некоторых связных компонент графа G'.

Далее, рассмотрим факторграф $G''' = G/G''$ (ср. рис. 10):

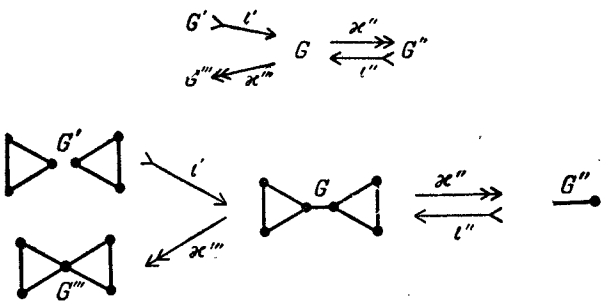


Рис. 10. Точная последовательность $(\iota', \varkappa'')$ расщепляется справа, в то время как точная последовательность $(\iota'', \varkappa''')$ расщепляется слева; G' является объединением, а G''' — букетом.

Легко видеть, что G''' получается из G' отождествлением тех вершин, которые присоединяются в G к одной и той же связной компоненте графа G''. Следовательно, возможны два случая: либо $G' = G'''$ (и точная последовательность расщепляется), либо G''' — букет. Теперь можно резюмировать результаты п. 0.3.3 (о точной последовательности, расщепляющейся *справа*, $(\iota', \varkappa'')$) и п. 0.3.4 (о точной последовательности, расщепляющейся *слева* $(\iota'', \varkappa''')$).

Предложение. *Если в точной последовательности, расщепляющейся справа, граф, стоящий слева,*

не является объединением (т. е. если он связен) или если в точной последовательности, расщепляющейся слева, граф, стоящий справа, не является букетом, то эта точная последовательность является расщепляющейся.

Сформулируем теперь очень полезное предложение, из которого вытекает, что одного лишь знания *циклов* графа достаточно, чтобы решить вопрос о тривиальности точной последовательности.

0.3.5. Предложение. *Если G'' не является букетом, то необходимым и достаточным условием того, чтобы точная последовательность $G' \rightarrowtail G \twoheadrightarrow G''$ расщеплялась справа, является расщепление точной последовательности циклов.*

Как мы уже отметили в п. 0.3.1, это условие является необходимым. Докажем обратное.

Тот факт, что G'' не является букетом, означает, что в каждой из его связных компонент дополнение к звезде любой вершины связно. Следовательно, через всякую пару линий i_1, i_2 этой звезды проходит петля, имеющая со звездой общими лишь эти две линии. Но так как точная последовательность циклов расщепляется, то эта петля графа G'' является также петлей в G, откуда вытекает, что линии i_1 и i_2 в G также инцидентны одной вершине. Следовательно, G'' является подграфом в G, и последовательность $G' \rightarrowtail G \twoheadrightarrow G''$ расщепляется справа.

Из 0.3.4 и 0.3.5 получаем

0.3.6. Предложение. *Если граф, стоящий слева, не является объединением, а граф, стоящий справа, не является букетом, то тривиальность точной последовательности графов равносильна тривиальности соответствующей точной последовательности циклов.*

0.4. Расслоенные произведения

0.4.1. Определение расслоенного произведения В следующих главах объектами нашего исследования будут графы, рассматриваемые не изолированно, а как *расширения* над заданным графом $\mathbf{G}_0$. Итак, пусть

$\mathbf{G}' \twoheadrightarrow \mathbf{G}_0$ и $\mathbf{G}'' \twoheadrightarrow \mathbf{G}_0$ — два таких расширения. Мы скажем, что стягивание $\varkappa$: $\mathbf{G} \twoheadrightarrow \mathbf{G}_0$ является *расслоенным произведением стягиваний* $\varkappa'$ и $\varkappa''$ или что расширение $\mathbf{G}$ является *расслоенным произведением расширений* $\mathbf{G}'$ и $\mathbf{G}''$, если

1) $\mathbf{G}$ является расширением над $\mathbf{G}'$ и над $\mathbf{G}''$;

2) $G = \ker \varkappa$ является тривиальным расширением графа $G' = \ker \varkappa'$ с помощью $G'' = \ker \varkappa''$.

Следовательно, расслоенное произведение можно изобразить с помощью следующей точной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
G' \arrow[r, shift left] \arrow[dr, dashed] \arrow[ddr] & G \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] \arrow[d] & G'' \arrow[l, shift left] \arrow[dl, dashed] \arrow[ddl] \\
 & G \arrow[dl, shift right] \arrow[dr, shift left] \arrow[dd, "\varkappa"] & \\
G' \arrow[dr, shift right, "\varkappa'"'] & & G'' \arrow[dl, shift left, "\varkappa''"] \\
 & G_0 &
\end{tikzcd}$$

где вложения, изображенные пунктиром, определены как композиции:

$$\begin{tikzcd}
 & \arrow[dl, dashed] \arrow[d] & \arrow[dr, dashed] \arrow[l] & \\
 & & &
\end{tikzcd}$$

Рассматривая точную диаграмму циклов, которая получается отсюда на основании п. 0.2.3, легко видеть, что гомоморфизм $\varkappa_*$: $\mathbf{Z}_* \to \mathbf{Z}_{0*}$ является *расслоенным произведением*[1]) гомоморфизмов $\varkappa'_*$: $\mathbf{Z}'_* \to \mathbf{Z}_{0*}$ и $\varkappa''_*$: $\mathbf{Z}''_* \to \mathbf{Z}_{0*}$. Для законов сохранения имеем двойственное предложение: вложение $\varkappa^*$: $\mathbf{V}_0^* \subset \mathbf{V}^*$

---

[1]) *Расслоенное произведение* $\mathbf{Z}_* = \mathbf{Z}'_* \wedge \mathbf{Z}''_*$ — это подгруппа в $\mathbf{Z}'_* \times \mathbf{Z}''_*$, образованная такими парами (z', z''), что $\varkappa'_* z' = \varkappa''_* z''$; это общее значение и есть по определению $\varkappa_*(z', z'')$.

является *амальгамированной суммой*[1]) двух вложений $\varkappa'^*$: $\mathbf{V}_0^* \subset \mathbf{V}'^*$ и $\varkappa''^*$: $\mathbf{V}_0^* \subset \mathbf{V}''^*$.

Отсюда следует, как и в п. 0.3.1, что расслоенное произведение двух стягиваний графов *единственно с точностью до эквивалентности*. Но в противоположность тому, что мы видели в п. 0.3.2, часто случается даже, что это расслоенное произведение по-настоящему *единственно*, либо вообще *не существует*. Мы приведем конструктивные критерии, позволяющие решить этот вопрос.

0.4.2. Построение расслоенного произведения. Пусть даны два стягивания $\varkappa'$ и $\varkappa''$; тогда известны их ядра G' и G'' и, следовательно, на основании § 0.3, известны все тривиальные расширения G графа G' с помощью G''. Задача построения расслоенного произведения сводится, следовательно, к проблеме *построения расширения* $\mathbf{G}$ *графа* G *с помощью* $\mathbf{G}_0$, *факторграфами которого являются* $\mathbf{G}'$ и $\mathbf{G}''$. Мы дадим необходимые и достаточные условия существования такого расширения, предполагая для простоты, что ядра G' и G'' *связны*; тогда каждый из них стягивается на *одну* вершину графа $\mathbf{G}_0$. Если речь идет о двух различных вершинах, то легко убедиться, что *существует одно и только одно расслоенное произведение, определенное как расширение графа* $G' \cup G''$ (и обратно, существование расслоенного произведения, являющегося расширением графа $G' \cup G''$, приводит, очевидно, к тому, что G' и G'' стягиваются на две различные вершины графа $\mathbf{G}_0$). Соответствующий пример приведен на рис. 11[2]).

Предположим теперь, что G' и G'' стягиваются на *одну и ту же вершину* v_0 графа $\mathbf{G}_0$, так что расслоен-

---

[1]) *Амальгамированная сумма* $\mathbf{V}^* = \mathbf{V}'^* \vee \mathbf{V}''^*$ — это фактор-группа группы $\mathbf{V}'^* \oplus \mathbf{V}''^*$ по подгруппе, образованной элементами вида $(\varkappa'^* v^*, -\varkappa''^* v^*)$, $v^* \in \mathbf{V}_0$. Иначе говоря, $(\varkappa'^* v^*, 0)$ и $(0, \varkappa''^* v^*)$ задают один и тот же элемент группы $\mathbf{V}^*$.

[2]) На этом, как и на всех следующих рисунках, изображены графы *с внешними линиями*. Такие графы мы будем изучать в следующих главах.

ное произведение, если оно определено, необходимо является расширением *букета*.

Не ограничивая общности, можно рассматривать лишь линии графа $\mathbf{G}_0$, инцидентные v_0. Пусть I_0 —

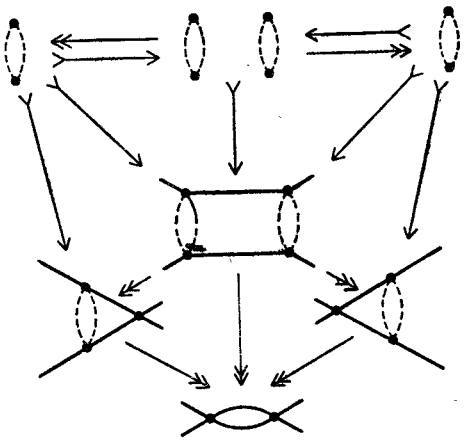


Рис. 11. Расслоенное произведение, определенное при помощи объединения.

звезда вершины v_0 в $\mathbf{G}_0$. Нам будет удобнее рассматривать звезду, «излучающую во внешность»:

$$\bar{I}_0 = \{a \in I_0 \cup I_0^{-1} \mid a \in v_0\}.$$

Граф $\mathbf{G}$ будет полностью определен, если сопоставить каждой линии $a \in \bar{I}_0$ вершину графа G, которая должна быть ее началом в $\mathbf{G}$.

Для всякой вершины v' графа G' положим

$$I'_{v'} = \{a \in I_0 \mid a \in v' \text{ в } \mathbf{G}'\};$$

аналогично, для всякой вершины $v'' \in G''$ положим

$$I''_{v''} = \{a \in \bar{I}_0 \mid a \in v'' \text{ в } \mathbf{G}''\}.$$

Предложение. *Для того чтобы расслоенное произведение было расширением букета* $G' \bigvee_{v', v''} G''$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\bar{I}_0 = I'_{v'} \cup I''_{v''}$.

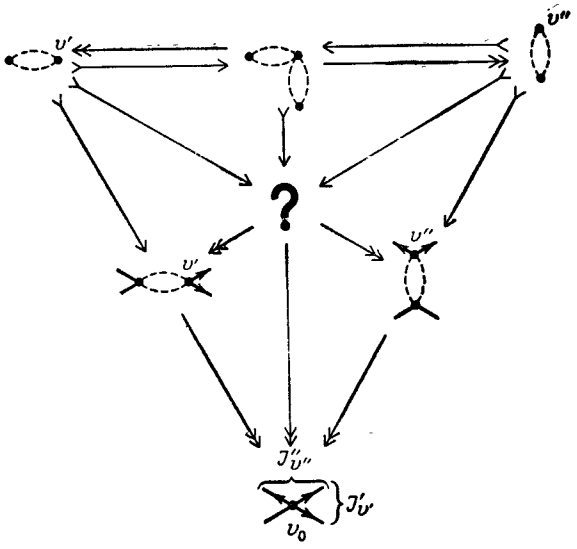


Рис. 12. Пример, когда расслоенное произведение не существует.

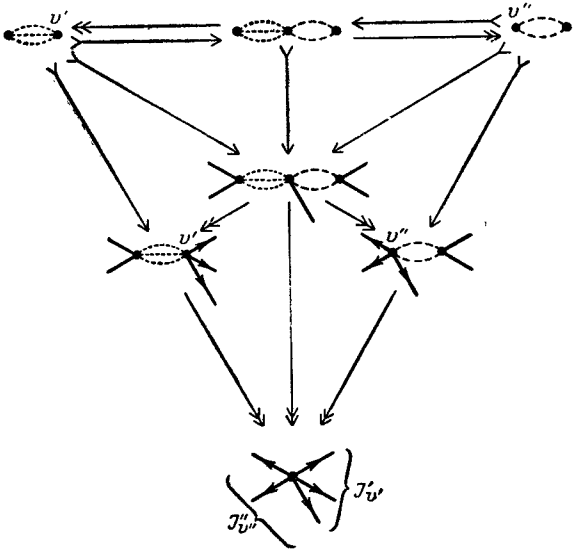


Рис. 13. Единственное расслоенное произведение, определенное букетом.

Детали рассуждений мы оставляем читателю. Укажем лишь идею построения. Припишем каждой линии из $J'_{v'}$ в качестве начала вершину графа $G' \bigvee_{v',\, v''} G''$, которая является ее началом в $\mathbf{G}''$, а каждой линии из $J''_{v''}$ — вершину, которая является ее началом в $\mathbf{G}'$.

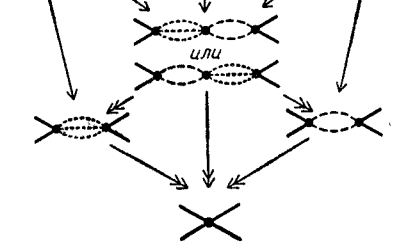


Рис. 14. Два расслоенных произведения, определенных букетами.

Эти определения совпадают на пересечении $J'_{v'} \cap J''_{v''}$, всем элементам которого приписывается «узел букета» (общий образ вершин v' и v'').

Можно построить *в точности столько расслоенных произведений, сколько существует пар* (v', v''), удовлетворяющих условиям этого предложения. Часто таких пар не существует (рис. 12), иногда существует одна единственная пара (рис. 13), иногда их больше (рис. 14).

0.4.3. Совместимые стягивания. Так как в дальнейшем это понятие будет очень важным, удобно ввести термин для выражения того факта, что расслоенное произведение двух стягиваний существует. В этом случае мы будем говорить, что эти стягивания *совместимы*.

Еще одно полезное определение: мы будем говорить, что стягивание $\varkappa$: $\mathbf{G} \twoheadrightarrow \mathbf{G}_0$ *доминирует* стягивание $\varkappa'$: $\mathbf{G}' \twoheadrightarrow \mathbf{G}_0$, если оно разлагается следующим

образом: $\varkappa$: $G \twoheadrightarrow G' \twoheadrightarrow G_0$. Необходимо заметить, что существование стягивания, доминирующего одновременно два стягивания $\varkappa'$ и $\varkappa''$, т. е. существование диаграммы

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads] \arrow[dd, two heads, "\varkappa"] & \\ G' \arrow[dr, two heads, "\varkappa'"'] & & G'' \arrow[dl, two heads, "\varkappa''"] \\ & G_0 & \end{tikzcd}$$

не влечет за собой совместимости стягиваний $\varkappa'$ и $\varkappa''$ [1]).

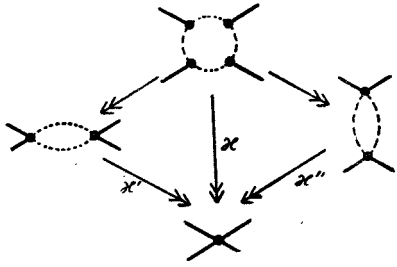


Рис. 15. Два стягивания $\varkappa'$ и $\varkappa''$, хотя и «несовместимые» (ср. рис. 7), *доминируются* одним и тем же стягиванием $\varkappa$.

Контрпример приведен на рис. 15.

---

[1]) Следовательно, значение, приписываемое здесь слову «совместимый», отлично от значения, приписываемого этому слову Стаппом [35].

ГЛАВА I

ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВ, СВЯЗАННЫХ С ГРАФАМИ

Начиная с этого места мы будем рассматривать лишь конечные графы с внешними линиями, *без циркуляций* [1]). Отсутствие циркуляций позволяет определить на множестве вершин [2]) *отношение порядка* (частичного), соответствующее физически «причинной упорядоченности» событий, представленных этими вершинами. В этой главе мы сопоставим каждому графу $\mathbf{G}$ указанного вида аналитическое пространство $\mathscr{P}(\mathbf{G})$ и каждому стягиванию [3]) $\varkappa$: $\mathbf{G} \twoheadrightarrow \mathbf{G}'$ — аналитическое отображение: $\mathscr{P}(\varkappa)$: $\mathscr{P}(\mathbf{G}) \to \mathscr{P}(\mathbf{G}')$. Речь всегда будет идти о вещественных аналитических пространствах, но, может быть, небезынтересно заметить, что некоторые результаты распространяются и на *комплексификации* этих пространств; в таких случаях мы в соответствующем месте будем ставить знак ($\mathbb{C}$). Чтобы избежать недоразумений, мы будем ставить знак ($\mathbb{R}$) в тех случаях, когда вещественная структура играет существенную роль.

I.1. Пространства $\mathscr{P}(\mathbf{G})$ и их отображения

Каждая линия $\mathbf{i}$ графа $\mathbf{G}$ представляет частицу с массой $m_{\mathbf{i}} > 0$. Пусть $M_{\mathbf{i}}$ — *пола положительных энергий* соответствующего массового гиперболоида:

$$M_{\mathbf{i}} = \{p = (p^0, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^4 \mid p^2 \equiv (p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = m_{\mathbf{i}}^2;\ p^0 > 0\}.$$

---

[1]) Исключая те, которые проходят через «бесконечно удаленную вершину».

[2]) Отныне под множеством вершин мы будем понимать множество всех вершин, *кроме бесконечноудаленной*. Заметим, что исключение одной вершины не изменяет группы «законов сохранения».

[3]) Запрещается стягивать внешние линии. Ядро стягивания, не имеющее ни одной внешней линии, уже не является графом рассматриваемого вида, и ему не соответствует никакое пространство.

Пространство $\mathscr{P}(\mathbf{G})$ *графа* мы определим как сечение «массовой поверхности» $M^{\mathbf{I}} = \prod_{\mathbf{l} \in \mathbf{I}} M_{\mathbf{l}}$ линейным пространством $\mathscr{E}(\mathbf{G})$, уравнение которого выражает закон сохранения энергии-импульса в каждой вершине:

$$\mathscr{E}(\mathbf{G}) = \left\{ (\mathbf{p}_{\mathbf{l}} \in \mathbb{R}^4)_{\mathbf{l} \in \mathbf{I}} \,\middle|\, \sum_{\mathbf{l} \in \mathbf{I}} \mathbf{v}^*(\mathbf{l})\, \mathbf{p}_{\mathbf{l}} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \right\};$$

$$\mathscr{P}(\mathbf{G}) = M^{\mathbf{I}} \cap \mathscr{E}(\mathbf{G}).$$

Следовательно, $\mathscr{P}(\mathbf{G})$ является *вещественным аналитическим*[1]) *множеством*. Оно будет даже *для всех значений масс, кроме исключительных, аналитическим многообразием размерности* $3|\mathbf{I}| - 4 \dim \mathbf{V}^* = 4 \dim \mathbf{Z}_* - |\mathbf{I}|$. В самом деле, пусть $\sigma\colon \mathscr{E}(\mathbf{G}) \to \mathbb{R}^{|\mathbf{I}|}$ — отображение, которое точке $p^{\mathbf{I}} = (p_{\mathbf{l}})_{\mathbf{l} \in \mathbf{I}}$ ставит в соответствие набор чисел $(s_{\mathbf{l}} = p_{\mathbf{l}}^2)$. Для того чтобы аналитическое множество $\sigma^{-1}((m_{\mathbf{l}}^2))$, в котором $\mathscr{P}(\mathbf{G})$ является связной компонентой, было многообразием, достаточно, чтобы точка $(m_{\mathbf{l}}^2)$ была «регулярным значением» отображения σ, т. е. чтобы она не принадлежала «видимому контуру» отображения σ, *который является «тощим» множеством*[2]). Поучительно записать это условие в явном виде. Точки $(p_{\mathbf{l}})$, удовлетворяющие законам сохранения, можно записать в виде $p_{\mathbf{l}} = \sum_k \mathbf{z}_k(\mathbf{l})\, q_k$, где $(\mathbf{z}_k \in \mathbf{Z}_*)$ — базис группы циклов графа $\mathbf{G}$, q_k — независимые переменные[3]). Следовательно,

---

[1]) И даже *связной компонентой вещественного алгебраического многообразия* (variety). Алгебраическая структура почти не играет роли в наших последующих рассуждениях.

[2]) То есть множеством, замыкание которого нигде не плотно. Действительно, σ — полиномиальное отображение, так что его критическое множество является алгебраическим. Но проекция алгебраического множества полуалгебраична (теория исключения); поэтому видимый контур является полуалгебраическим множеством. По теореме Сарда [32] он имеет меру нуль, так что должен *содержаться в собственном алгебраическом подмножестве пространства* $\mathbb{R}^{|\mathbf{I}|}$.

[3]) Заметим, что $q_k \in \mathbb{R}^4$. Пусть $I'' \subset \mathbf{I}$ — множество, дополнительное к некоторому максимальному дереву в $\mathbf{G}$. Как отмече-

имеем [1]) $\partial s_i/\partial q_k = (2p_i^0, -\mathbf{p}_i)\,\mathbf{z}_k(\mathbf{i})$, и условие того, чтобы точка (p_i) была критической, т. е. чтобы ранг матрицы $\|\partial s_i/\partial q_k\|$ был меньше $|\mathbf{I}|$, эквивалентно условию существования параметров α_i, не равных одновременно нулю и таких, что

$$\text{(L)} \qquad \sum_{i \in I} \alpha_i p_i \mathbf{z}(\mathbf{i}) = 0 \qquad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{Z}_*.$$

I. 1.1. Пример. Рассмотрим граф «без внутренности», т. е. граф, образованный внешними линиями, инцидентными одной и той же вершине $\mathbf{v}$. Группа $\mathbf{Z}_*$ порождена комбинациями $\mathbf{v}^*(\mathbf{i})\,\mathbf{i} - \mathbf{v}^*(\mathbf{j})\,\mathbf{j}$ всевозможных пар линий $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$. Уравнения (L), следовательно, означают, что все p_i пропорциональны друг другу, *что возможно лишь в том случае, когда сумма входящих масс равна сумме выходящих масс.*

На этом примере видно, что «исключительные» значения масс очень часто реализуются в физике, и, в частности, для всех графов «без внутренности», описывающих процессы упругого рассеяния. Тем не менее мы, ссылаясь на «исключительный» характер этих особенностей, исключим их из нашего рассмотрения, оставляя за собой возможность изучать их с помощью предельного перехода, отправляясь от «регулярных» значений масс.

I.1.2. Отображения $\mathscr{S}(\varkappa)$. Из п. 0.2.4 получаем, в частности, что для всякого стягивания $\varkappa\colon \mathbf{G} \twoheadrightarrow \mathbf{G}'$ пространство $\mathbf{V}'^*$ законов сохранения графа $\mathbf{G}'$ вложено в пространство $\mathbf{V}^*$ законов сохранения графа $\mathbf{G}$. Следовательно, каноническая проекция евклидова пространства $\mathbb{R}^{4\mathbf{I}}$ на евклидово подпространство $\mathbb{R}^{4\mathbf{I}'}$ $(\mathbf{I} \supset \mathbf{I}')$ индуцирует проекцию

$$\mathscr{E}(\varkappa)\colon \mathscr{E}(\mathbf{G}) \to \mathscr{E}(\mathbf{G}')$$

но на стр. 36, в $\mathbf{Z}_*$ можно выбрать базис $(z_k,\ k \in I'')$, где $z_k(k) = 1$ и $z_k(l) = 0$ $(l \in I'',\ l \neq k)$. При таком выборе базиса имеем $q_k = p_k$. — *Прим. ред.*

[1]) Автор использует обозначение

$$\frac{\partial s_l}{\partial q_k} = \left(\frac{\partial s_l}{\partial q_k^0}, \frac{\partial s_l}{\partial q_k^1}, \frac{\partial s_l}{\partial q_k^2}, \frac{\partial s_l}{\partial q_k^3}\right). \text{ — } \textit{Прим. ред.}$$

и (после ограничения на массовую поверхность) аналитическое отображение

$$\mathscr{P}(\varkappa)\colon \mathscr{P}(\mathbf{G}) \to \mathscr{P}(\mathbf{G}').$$

($\mathbb{R}$) Предложение. *Отображение $\mathscr{P}(\varkappa)$ является собственным* [1]).

Для доказательства используется следующая (очевидная)

Лемма. *Для того чтобы замкнутое множество $K \subset \mathscr{P}(\mathbf{G})$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы все энергии $p_{\mathbf{i}}^0$ были ограничены, когда $(p_{\mathbf{i}})$ пробегает K.*

Доказательство. Пусть $G = \ker \varkappa$ — ядро стягивания $\varkappa$. Достаточно доказать, что из ограниченности энергий $p_{\mathbf{i}'}^0$ ($\mathbf{i}' \in \mathbf{I}'$) вытекает то же свойство для энергий p_i^0 ($i \in I$, где I — множество линий графа G). Пусть $v \in V$ — вершина, максимальная по отношению к причинной упорядоченности в подграфе G. Указанное свойство, очевидно, выполняется для всех линий G, инцидентных v, так как энергии (*положительные*!), соответствующие всем этим линиям, входят с одним и тем же знаком в закон сохранения в вершине v. Избавляясь от всех этих линий, повторим рассуждения для полученного таким образом подграфа графа G, и т. д.

I. 1.3. Расслоенные произведения. Из рассмотрений п. 0.4.1 легко вывести, что «функтор» $\mathscr{P}$ «коммутирует с расслоенными произведениями», т. е. преобразует расслоенное произведение стягиваний графов в расслоенное произведение отображений пространств [2]).

---

[1]) То есть полный прообраз всякого компакта компактен.

[2]) Напомним определение расслоенного произведения $f \wedge g\colon X \wedge Y \to T$ двух отображений $f\colon X \to T$ и $g\colon Y \to T$: $X \wedge Y$ есть подпространство в $X \times Y$, образованное такими парами (x, y), что $f(x) = g(y)$; это общее значение t и есть по определению $(f \wedge g)(x, y)$. Из этого определения следует, что $(f \wedge g)^{-1}(t) = f^{-1}(t) \times g^{-1}(t)$: *слой является произведением слоев* (отсюда название «расслоенное произведение»). Очевидно, что $(f \wedge g)(X \wedge Y) = f(X) \cap g(Y)$: *образ есть пересечение образов.*

Иначе говоря, если $\varkappa_1\colon \mathbf{G}_1 \twoheadrightarrow \mathbf{G}_0$ и $\varkappa_2\colon \mathbf{G}_2 \twoheadrightarrow \mathbf{G}_0$ — два совместимых стягивания, а $\varkappa_1 \wedge \varkappa_2\colon \mathbf{G}_1 \wedge \mathbf{G}_2 \twoheadrightarrow G_0$ — их расслоенное произведение, то мы имеем

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{S}(\mathbf{G}_1 \wedge \mathbf{G}_2) = \mathscr{S}(\mathbf{G}_1) \wedge \mathscr{S}(\mathbf{G}_2) \arrow[dl, "\mathscr{S}(\varkappa_1 \wedge \varkappa_2)"'] \arrow[dr, "\mathscr{S}(\varkappa_1) \wedge \mathscr{S}(\varkappa_2)"] & \\
\mathscr{S}(\mathbf{G}_0) \arrow[rr, equal] & & \mathscr{S}(\mathbf{G}_0)
\end{tikzcd}$$

I. 2. Особенности отображений $\mathscr{S}(\varkappa)$

Для изучения особенностей отображения $\mathscr{S}(\varkappa)\colon \mathscr{S}(\mathbf{G}) \to \mathscr{S}(\mathbf{G}')$ можно рассматривать пространство $\mathscr{E}(\varkappa)^{-1}(\mathscr{S}(\mathbf{G}'))$, являющееся расслоенным пространством с базой $\mathscr{S}(\mathbf{G}')$ и евклидовым слоем; в нем подмногообразие $\mathscr{S}(\mathbf{G})$ определяется уравнениями $p_i^2 - m_i^2 = 0$, $i \in I$. Применяя затем формулу (L) приложения I, находим, что критическое множество отображения $\mathscr{S}(\varkappa)$ получается в результате исключения параметров α_i, среди которых имеются ненулевые, из системы уравнений

$$\text{(L)} \qquad \sum_{i \in I} \alpha_i p_i z(i) = 0 \qquad \forall z \in Z_*$$

(т. е. тех же уравнений, что и (L) из § I. 1, только взятых относительно линий i и циклов z *подграфа* G, являющегося ядром стягивания). Уравнения (L) — это *уравнения Ландау*. Образ критического множества («видимый контур» отображения $\mathscr{S}(\varkappa)$) называется *множеством Ландау* [1]) стягивания $\varkappa$, а его точки называются *точками Ландау*.

Будем обозначать через $\Gamma(\varkappa)$ критическое множество, а через $\mathrm{L}(\varkappa)$ — множество Ландау.

I. 2.1. Изучение критических точек коранга 1. Критическими точками коранга 1 являются такие точки, для которых векторное пространство решений (α_i) уравнений (L) имеет размерность 1. Поставим перед собой задачу выяснить характер этих критических

[1]) Или *многообразием Ландау*, когда речь действительно идет о многообразии в смысле дифференциальной топологии.

точек «в общем положении». В первое время нам будет удобно *забыть об ограничениях на массы для графа-«образа»* [1]) $\mathbf{G}'$, т. е. изучить особенности отображения

$$\mathscr{P}'(\varkappa)\colon \mathscr{P}'(\mathbf{G}) \to \mathscr{E}(\mathbf{G}'),$$

где $\mathscr{P}'(\mathbf{G}) = M^I \cap \mathscr{E}(\mathbf{G})$ (ограничения на массы только для подграфа G). Затем достаточно будет заметить, что наш главный результат (указанное ниже правило I. 2.3 об особенностях «типа S_1») в силу замечания А. I. 3.2 остается справедливым после ограничения на массовую поверхность.

Поставим первый вопрос: удовлетворяется ли «условие трансверсальности» из приложения I? Согласно формулам этого приложения, нетрансверсальность для критической точки коранга 1 эквивалентна существованию четырехмерных векторов V_k, не всех равных нулю, и скаляров β_i, таких, что

$$(\mathrm{T}_f^t\mathrm{s})_1 \quad \sum_{i \in I} \left(\sum_k \alpha_i \mathbf{z}_j(i) z_k(i) V_k + \beta_i \mathbf{z}_j(i) p_i \right) = 0 \quad \forall \mathbf{z}_j \in \mathbf{Z}_*,$$

$$(\mathrm{T}_f^t\mathrm{s})_2 \quad \sum_k z_k(i) V_k \cdot p_i = 0 \quad \forall i \in I,$$

где $(\mathbf{z}_j)$, соответственно (z_k), — базис группы $\mathbf{Z}_*$, соответственно Z_*.

Полагая $W_i = \sum_k z_k(i) V_k$, преобразуем эти уравнения в следующие:

$$(\mathrm{T}_f^t\mathrm{s})'_1 \quad \sum_{i \in I} (\alpha_i W_i + \beta_i p_i) \mathbf{z}_j(i) = 0 \quad \forall \mathbf{z}_j \in \mathbf{Z}_*,$$

$$(\mathrm{T}_f^t\mathrm{s})'_2 \quad W_i \cdot p_i = 0 \quad \forall i \in I,$$

где четырехмерные векторы W_i должны удовлетворять законам сохранения подграфа G (что обеспечивает существование векторов V_k).

Попытаемся извлечь из этих уравнений некоторые простые правила.

(C) **I. 2.2. Правило, применимое при «периферических» стягиваниях.** Линию i подграфа G, ядра стягивания $\varkappa\colon \mathbf{G} \twoheadrightarrow \mathbf{G}'$, будем называть *периферической*, если су-

[1]) Заметим, что в уравнения (L) не входит явно граф-образ $\mathbf{G}'$.

ществует такой цикл $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}_*$, что i — единственная его линия, общая с G. *Предположим, что все линии графа G являются периферическими* (пример: рис. 16, контрпример: рис. 17). *Тогда, если всякий цикл графа G содержит по крайней мере одну линию i, такую, что $\alpha_i \neq 0$, то условие трансверсальности удовлетворяется.*

Рис. 16. Пример стягивания, для которого все линии являются периферическими.

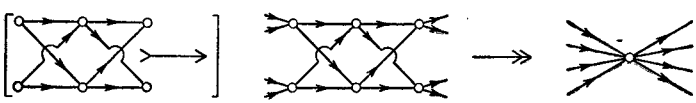


Рис. 17. Пример стягивания, для которого никакая линия не является периферической.

В самом деле, будем рассуждать от противного и предположим, что существует система четырехмерных векторов W_i, из которых не все нулевые, и скаляров β_i, удовлетворяющих условиям $(\mathrm{T}f's)'_1$, $(\mathrm{T}f's)'_2$ В силу $(\mathrm{T}f's)'_1$, $\alpha_i W_i + \beta_i p_i = 0$ для всякой периферической линии i, т. е. для всякой линии. Подставляя это в $(\mathrm{T}f's)'_2$, получим $\beta_i p_i^2 = 0$; так как мы предположили, что массы отличны от нуля, то $\beta_i = 0$, *и потому мы должны иметь* $\alpha_i W_i = 0$ $\forall i \in I$. Покажем, что это условие приводит к существованию цикла графа G, для которого все α_i равны нулю, что противоречит предположению.

Действительно, пусть G'' — подграф (непустой) графа G, состоящий из линий, для которых $W_i \neq 0$. Так как W_i должны удовлетворять законам сохранения графа G, то они должны удовлетворять и законам сохранения графа G'', что возможно (поскольку $W_i \neq 0$ на G'') лишь в том случае, когда G'' имеет по меньшей мере один цикл.

Замечание. Можно задаться вопросом, верно ли утверждение, обратное к I. 2.2, т. е. *обязательно ли нарушается условие трансверсальности в случае, когда существует цикл графа G, для которого все α_i равны нулю?*

Ответ *утвердительный, если этот цикл имеет не более трех линий* (при этом безразлично, является стягивание периферическим или нет). Но для цикла, имеющего более трех линий, противоречащий пример приведен на рис. 18. В этом примере легко построить

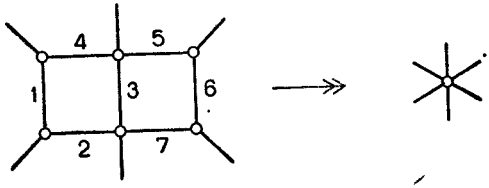


Рис. 18. Иллюстрация к замечанию I. 2.2.

критическую точку, для которой $\alpha_5\alpha_6\alpha_7 \neq 0$, но $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, причем четыре вектора p_1, p_2, p_3, p_4 *линейно независимы.* Так как стягивание периферическое, то рассуждение из п. I. 2.2 показывает, что следует взять $W_5 = W_6 = W_7 = 0$. Тогда законы сохранения дадут равенство четырех первых W_i (с точностью до знака). Но так как p_1, p_2, p_3, p_4 порождают все пространство $\mathbb{R}^4$, то невозможно удовлетворить условиям $(\mathrm{T}f's)'_2$ одновременно на четырех первых линиях.

($\mathbb{R}$) **I.2.3. Правило, применимое к произвольному стягиванию.** *Если $\alpha_i \geqslant 0$ $\forall i \in I$ и если всякий цикл графа G содержит по крайней мере одну линию, для которой $\alpha_i > 0$, то условие трансверсальности удовлетворяется. Более того, если критическая точка «обыкновенная», то «трансверсальный индекс» равен нулю.*

Действительно, так как $Z_* \subset \mathbf{Z}_*$, то условия $(\mathrm{T}f's)'_1$ должны тем более выполняться на Z_*. Заменяя $\mathbf{z}_i$ в $(\mathrm{T}f's)'_1$ на z_k, умножая полученное уравнение на V_k

и суммируя по k, получим, принимая во внимание $(\mathrm{T}f's)_2$,

$$\sum_{i \in I} \alpha_i W_i^2 = 0.$$

Однако, согласно $(\mathrm{T}f's)'_1$, W_i являются пространственно-подобными векторами. Поэтому написанное равенство выполняется лишь тогда, когда $\alpha_i W_i = 0$ на всякой линии, и рассуждения можно продолжить так же, как при доказательстве трансверсальности в п. I. 2.2.

Но мы используем лишь условия, *ограниченные* на Z_*, которые как раз позволяют судить (замечание А. I. 3.1) об «исключительности» критической точки. Следовательно, критическая точка является обыкновенной.

Что касается утверждения о равенстве нулю «трансверсального индекса», то оно вытекает из того факта, доказанного в следующем пункте, что *проекция* пространства $\mathscr{P}(\mathbf{G})$ вся расположена *по одну сторону от своего видимого контура.*

(ℝ) **I.2.4. Выпуклость пространства $\mathscr{P}'(\mathbf{G})$ вблизи эффективной критической точки.** Критическую точку мы будем называть *эффективной*, если уравнения Ландау в ней удовлетворяются системой параметров $\alpha_i \geqslant 0$. Пусть $\overset{c}{p}{}^{\mathrm{I}} \in \mathscr{P}'(\mathbf{G})$ — эффективная критическая точка произвольного коранга; выберем решение ($\alpha_i \geqslant 0$) уравнений Ландау в этой точке. Рассмотрим на $\mathscr{E}(\mathbf{G})$ линейную функцию, равную нулю в точке $\overset{c}{p}{}^{\mathrm{I}}$:

$$t(p^{\mathrm{I}}) = \sum_{i \in I} \alpha_i \overset{c}{p}_i \cdot (p_i - \overset{c}{p}_i).$$

Ограничение этого выражения на положительные полы массовых гиперболоидов ($p_i^2 = m_i^2$, $p_i^0 > 0$) никогда не будет отрицательным. Следовательно, гиперплоскость $\{t(p^{\mathrm{I}}) = 0\}$ является опорной по отношению к пространству $\mathscr{P}'(\mathbf{G})$. С другой стороны, эта гипер-

плоскость, очевидно, «вертикальна» (рис. 19), т. е. ее уравнение зависит лишь от координат «базы» $\mathscr{E}(\mathbf{G}')$ [1]). Следовательно, ее проекция на $\mathscr{E}(\mathbf{G}')$ является опорной по отношению ко всякому видимому контуру пространства $\mathscr{P}'(\mathbf{G})$.

Таким образом, кроме *локального* результата, сформулированного в конце п. I. 2.3 (трансверсальный индекс критической точки равен нулю), мы получаем *глобальный* результат: *проекция пространства* $\mathscr{P}(\mathbf{G})$ *целиком расположена по одну сторону видимого контура.*

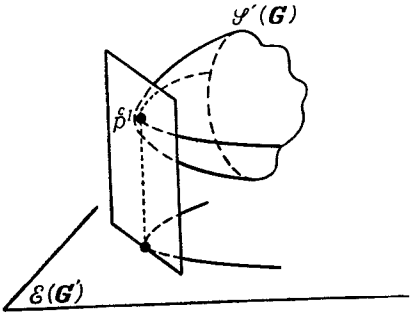


Рис. 19. Выпуклость видимого контура.

Получаются также очень сильные ограничения на критические точки коранга > 1. Если существует решение ($\alpha_i > 0$) уравнений Ландау, то всякое достаточно близкое решение также будет положительным, и, применяя предыдущее рассуждение, мы для критической точки коранга r получим $(r-1)$-*параметрическое семейство гиперплоскостей, опорных по отношению к видимому контуру.* Итак, всякая особенность коранга >1 имеет вид «клина» (ср., например, рис. 23). Но это совсем не тот вид, который имеют особенности «общего положения» по Тому (определение которых мы напоминаем в приложении I). Следовательно, особенности коранга >1 для графов мно-

---

[1]) Заметим, что дифференциал функции t в точке $\overset{c}{p}{}^I$, имеющий вид

$$dt(\overset{c}{p}{}^I) = \sum_{i \in I} \alpha_i \overset{c}{p}_i \, dp_i,$$

является не чем иным, как «горизонтальным» ковектором $\omega = \pi_y^* \theta$, см. приложение I (A. I. 1).

гократного рассеяния обладают некоторым своеобразием: мы к ним вернемся вновь в § I. 3.

I. 2.5. Резюме и заключительные замечания. Мы только что определили *эффективную* критическую точку, как точку, в которой уравнения Ландау удовлетворяются системой параметров $\alpha_i \geqslant 0$. *Если, кроме того, коранг равен* 1 (т. е. если α_i определены единственным образом с точностью до постоянного множителя) и *если всякий цикл графа* $\ker \varkappa$ *содержит по крайней мере одну линию* i, *для которой* α_i *не равно нулю*, то критическая точка будет называться *главной*. Образ эффективной (соотв. главной) критической точки будет эффективной (соотв. главной) точкой Ландау.

Из всего предыдущего необходимо отметить следующее:

1. *Всякое эффективное*[1]) *множество Ландау ограничивает образ* $\mathcal{P}(\varkappa)$.

2. *Всякое главное*[1]) *множество Ландау является многообразием коразмерности* 1, *соответствующим ситуации типа* S_1^+ *в классификации Тома.* [Термин «тип S_1» соответствует критической точке коранга 1, трансверсально критической и обыкновенной. Эта ситуация детально описана в приложении I (A. I. 2); знак $+$ напоминает о том, что трансверсальный индекс критической точки равен нулю.]

Приведем в заключение тривиальное замечание, поясняющее, чем интересно понятие «главная точка Ландау»: *если дана эффективная точка Ландау, то всегда можно найти стягивание, для которого она является главной точкой Ландау.* Действительно, пусть $\varkappa_1$: $\mathbf{G}_1 \twoheadrightarrow \mathbf{G}_0$ — стягивание, имеющее x_1 эффективной критической точкой. Предположим, что уравнения Ландау в точке x_1 удовлетворяются системой чисел α_i, причем некоторые из них равны нулю, а остальные положительны (как мы видели в п. I. 3.2, такая си-

[1]) Автор употребляет выражение «эффективное (главное) миожество Ландау» в случае, когда все точки Ландау данного стягивания являются эффективными (соотв. главными). — *Прим. ред.*

стема всегда существует для точки коранга >1). Стягивая все линии графа G_1, для которых $\alpha_i=0$, мы получим граф G_2 (который, как легко убедиться, *не имеет циркуляций*). Это дает нам диаграмму стягиваний

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, two heads, "\varkappa_{12}"] \arrow[dr, two heads, "\varkappa_1"'] & G_2 \arrow[d, two heads, "\varkappa_2"] \\ & G_0 \end{tikzcd}$$

такую, что $x_2=\mathscr{S}(\varkappa_{12})x_1$ является эффективной критической точкой для $\varkappa_2$. Если точка x_2 имеет коранг >1, то к ней можно применить снова тот же процесс; он должен остановиться после конечного числа шагов, так как граф G_1 имеет лишь конечное число линий. В конце концов мы получим диаграмму стягиваний

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, two heads, "\varkappa_{1n}"] \arrow[dr, two heads, "\varkappa_1"'] & G_n \arrow[d, two heads, "\varkappa_n"] \\ & G_0 \end{tikzcd}$$

такую, что $x_n=\mathscr{S}(\varkappa_{1n})(x_1)$ является критической точкой коранга 1 со строго положительными α_i и, следовательно, *главной критической точкой стягивания* $\varkappa_n$.

I.3. Композиция особенностей

Композиция двух стягиваний

$$\begin{tikzcd} G' \arrow[r, two heads, "\varkappa'"] \arrow[dr, two heads, "\varkappa'_0"'] & G \arrow[d, two heads, "\varkappa_0"] \\ & G_0 \end{tikzcd}$$

порождает коммутативную диаграмму отображений

$$\begin{tikzcd} \mathscr{S}(G') \arrow[r, "\mathscr{S}(\varkappa')"] \arrow[dr, "\mathscr{S}(\varkappa'_0)"'] & \mathscr{S}(G) \arrow[d, "\mathscr{S}(\varkappa_0)"] \\ & \mathscr{S}(G_0) \end{tikzcd}$$

к которой можно попытаться применить анализ, проведенный в приложении II.

I. 3.0. Видимый контур многообразия Ландау является множеством Ландау. Пусть $L(\varkappa') \subset \mathscr{P}(G)$ — главное множество Ландау стягивания $\varkappa'$. Оно является многообразием (соответствующим, согласно I. 2.3, ситуации типа S_1^+), и так как отображение $\mathscr{P}(\varkappa_0)$ проектирует его на $\mathscr{P}(G_0)$, то естественно попытаться найти его видимый контур.

Если мы находимся вне критического множества $\Gamma(\varkappa_0)$, то, как показывает § A.II. 3, *видимый контур множества Ландау* $L(\varkappa')$ *совпадает с множеством Ландау* $L(\varkappa_0')$. Более того, если $L(\varkappa_0')$ является главным множеством Ландау стягивания $\varkappa_0'$, то отображение $\mathscr{P}(\varkappa_0) \mid L(\varkappa')$ является отображением типа S_1^+ (A.II.2).

Остается изучить случай, когда $L(\varkappa')$ *пересекает критическое множество* $\Gamma(\varkappa_0)$. В этом случае мы будем говорить, что мы имеем дело с *эффективным пересечением* множеств Ландау $L(\varkappa_0)$ и $L(\varkappa_0')$. Следующие пункты посвящены анализу различных случаев эффективного пересечения.

I. 3.1. Случай коранга 1: эффективное касание двух множеств Ландау[1]**.** Наиболее простой случай эффективного пересечения — это описанная в § A. II. 4 «особенность типа $(S_1 \circ S_1)_1$». Напомним, что в этом случае множествами Ландау в пространстве-образе $\mathscr{P}(G_0)$ являются два многообразия L_0, L_0' коразмерности 1, касающиеся друг друга вдоль многообразия $\Lambda_0 = L_0 \cap L_0'$ коразмерности 2. По этой причине мы будем говорить, что мы имеем дело с *эффективным касанием* множеств Ландау $L(\varkappa_0)$ и $L(\varkappa_0')$; см. рис. 20.

Как узнать, что реализуется именно эта ситуация? Из п. I. 2.3 мы уже знаем, что $\mathscr{P}(\varkappa_0)$ и $\mathscr{P}(\varkappa')$ — отображения типа S_1^+ всякий раз, когда мы имеем дело с *главными* особенностями. Теперь, чтобы убедиться в том, что композиция действительно является

[1]) В соответствии с общепринятой терминологией этот случай следовало бы назвать «эффективным пересечением». Мы предпочитаем более узкий термин «эффективное касание», сохраняя термин «эффективное пересечение» для обозначения более общей ситуации.

отображением типа $(S_1^+ \circ S_1^+)_1$, необходимо проверить, с одной стороны, условие трансверсальности:

(Trs) $\mathrm{L}(\varkappa')$ *и* $\Gamma(\varkappa_0)$ *пересекаются трансверсально*;

с другой стороны, условие на коранг:

(Crg 1) *отображение* $\mathcal{P}(\varkappa_0')$, *или, что равносильно, отображение* $\mathcal{P}(\varkappa_0) \mid \mathrm{L}(\varkappa')$, *имеет коранг* 1.

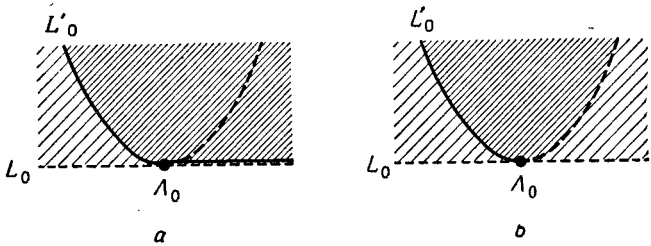


Рис. 20. Эффективное касание двух множеств Ландау $L(\varkappa_0)$ и $L(\varkappa_0')$. Сплошные линии — эффективная часть множества $L(\varkappa_0')$; пунктирные кривые — неэффективная часть $L(\varkappa_0')$; пунктирные прямые — $L(\varkappa_0)$. Более темная заштрихованная область — образ $\mathcal{P}(\varkappa_0')$; светлая заштрихованная область — образ $\mathcal{P}(\varkappa_0)$. *a*. Общий случай $\dim \mathcal{P}(\mathbf{G}') \geqslant \dim \mathcal{P}(\mathbf{G})$. *b*. Частный случай $\dim \mathcal{P}(\mathbf{G}') = \dim \mathcal{P}(\mathbf{G}) - 1$.

Прежде чем перейти к записи условий трансверсальности в явном виде, уточним обозначения. Пусть G_0, G', G_0' — ядра стягиваний $\varkappa_0$, $\varkappa'$, $\varkappa_0'$:

$$\begin{tikzcd}
 & & G_0 \arrow[d] \\
 & G_0' \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
G' \arrow[ur] \arrow[rr] & & G' \arrow[r, two heads, "\varkappa'"] \arrow[dr, two heads, "\varkappa_0'"'] & G \arrow[d, two heads, "\varkappa_0"] \\
 & & & G_0
\end{tikzcd}$$

и I_0, Z_{0*}, I', Z_*', и т. д. — соответствующие множества линий и группы циклов ($I_0' = I_0 \cup I'$ и Z_{0*}' — расшире-

ние над Z_{0*} с ядром Z'_*). Критические множества $\Gamma(\varkappa_0)$ и $\Gamma(\varkappa')$ задаются уравнениями Ландау

$$\Gamma(\varkappa_0): \qquad \sum_{i_0 \in I_0} \alpha_{i_0} p_{i_0} z_0(i_0) = 0 \qquad \forall z_0 \in Z_{0*},$$

$$\Gamma(\varkappa'): \qquad \sum_{i' \in I'} \alpha_{i'} p_{i'} z'(i') = 0 \qquad \forall z' \in Z'_*.$$

Многообразие Ландау $L(\varkappa')$, образ множества $\Gamma(\varkappa')$, можно задать локальным уравнением $l(\varkappa') = 0$, левая часть которого имеет в рассматриваемой точке следующий дифференциал:

$$dl(\varkappa') = \sum_{i' \in I'} \alpha_{i'} p_{i'} dp_{i'}.$$

Уточним, в каком смысле это выражение определяет $dl(\varkappa')$. В качестве базиса $(\mathbf{z}'_h)$ группы $\mathbf{Z}'_*$ можно выбрать объединение базиса (z'_i) группы Z'_* (ядра) и семейства $(\mathbf{z}'_j)$ циклов, дающих в результате стягивания базис $(\mathbf{z}_j)$ группы $\mathbf{Z}_*$ (факторгруппы):

$$\begin{array}{ccccc} Z'_* & \rightarrowtail & \mathbf{Z}'_* & \overset{\varkappa'_*}{\twoheadrightarrow} & \mathbf{Z}_* \\ (z'_i) & = & \underbrace{(z'_i)\ (z'_j)}_{(\mathbf{z}'_h)} & \longmapsto & (\mathbf{z}_j) \end{array}$$

Если в приведенном выше выражении заменить $dp_{i'}$ его разложением $\sum_h \mathbf{z}'_h(i')\, dq_h$ и учесть уравнения Ландау, то мы увидим, что члены ядра не дают вклада, так что можно написать

$$dl(\varkappa') = \sum_{i' \in I'} \sum_j \alpha_{i'} p_{i'} \mathbf{z}'_j(i')\, dq_j.$$

Имея эти выражения, мы уже можем записать условие трансверсальности. С помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям п. I. 2.1, проведение которых мы оставим в качестве упражнения читателю, можно установить, что *отрицание* этого условия эквивалентно существованию четырехмерных векторов V_k, среди

которых не все равны нулю, и скаляров β_i, таких, что

$$\sum_{i_0 \in I_0} \left(\sum_k \alpha_{i_0} \mathbf{z}_j(i_0) z_{0k}(i_0) V_k + \beta_{i_0} p_{i_0} \mathbf{z}_j(i_0) \right) +$$

$$(\mathrm{T}_j'\mathrm{s}) \qquad + \sum_{i' \in I'} \alpha_{i'} p_{i'} \mathbf{z}_j'(i') = 0 \qquad \forall \mathbf{z}_j \in \mathbf{Z}_*,$$

$$\sum_k z_{0k}(i_0) V_k \cdot p_{i_0} = 0 \qquad \forall i_0 \in \mathbf{I}_0,$$

где z_{0k} пробегает базис группы Z_{0*}.

Не пытаясь детально исследовать эти уравнения, мы довольствуемся тем, что укажем очевидный случай, в котором они не удовлетворяются, и в котором, следовательно, условие трансверсальности выполнено.

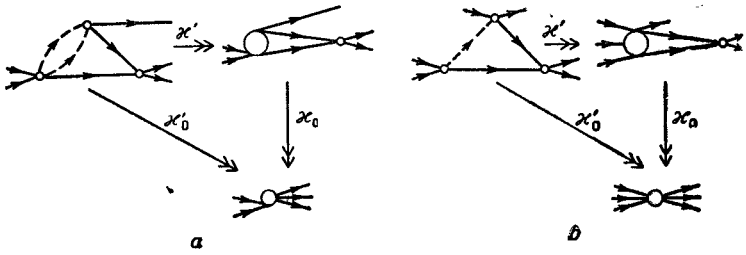


Рис. 21. Примеры стягиваний, при которых возникают эффективные касания: *a* соответствует рис. 20, *a*, а *b* — рис. 20, *b*.

Это случай, *когда существует линия* $i' \in I'$, *периферическая для композиции стягиваний* $\varkappa_0'$ (ср. п. I. 2.2, где определено слово «периферический») *и такая, что* $\alpha_{i'} \neq 0$. Действительно, тогда существовал бы цикл $\mathbf{z}_j$, для которого первое уравнение ($\mathrm{T}_j'\mathrm{s}$) записывалось бы в виде $\alpha_{i'} p_{i'} = 0$, что невозможно, если $p_{i'}^2 = m_{i'}^2 \neq 0$.

Пример. Композиции стягиваний, изображенные на рис. 21 (подробно изученные в [19], [20]), удовлетворяют, очевидно, указанному критерию «периферичности». Следовательно, всякое эффективное пересечение коранга 1 будет *эффективным касанием*. Рисунок 21, *a* воспроизводит ситуацию, изображенную на рис. 20, *a*, а рис. 21, *b* — ситуацию, изображенную на рис. 20, *b*.

Нерешенная задача. Существуют ли такие композиции стягиваний, при которых условие трансверсальности нарушается?

I.3.2. Коранг 2: общие соображения. Случай коранга 2 более труден для изучения. Из свойств выпуклости, установленных в п. I. 2.4, мы уже сделали вывод, что особенность коранга 2 наверняка не является особенностью «общего положения» в смысле приложения I. Те же аргументы показывают, что она не является и «устойчивой особенностью композиции отображений» в смысле приложения II (фигура рис. 43 невыпукла).

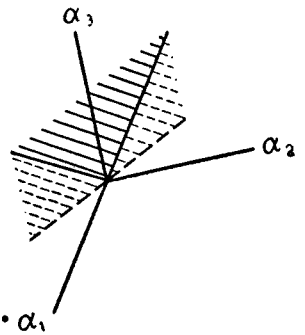


Рис. 22. Плоскость (α_i) для «строго эффективной» критической точки коранга 2.

Чтобы отыскать причину этого своеобразия, забудем о треугольной диаграмме, приведенной вначале этого параграфа, и рассмотрим *одно* стягивание $\varkappa_0'$: $\mathbf{G}' \twoheadrightarrow \mathbf{G}_0$, имеющее *строго эффективную критическую точку* x' *коранга* 2, т. е. такую, в которой уравнения Ландау имеют решение $\left(\alpha_{i_0'} > 0 \ \forall i_0' \in I_0'\right)$. Иначе говоря, *плоскость векторов* $\left(\alpha_{i_0'}\right)$ (двумерное векторное подпространство пространства $\mathbb{R}^{|I_0'|}$, определенное решениями уравнений Ландау) *заходит в первый квадрант* пространства $\mathbb{R}^{|I_0'|}$. Этот первый квадрант высекает тогда на ней некоторый «сектор» (рис. 22), каждая из двух границ которого определяется приравниванием нулю некоторого числа параметров $\alpha_{i_0'}$. Как и в п. I. 2.5, мы можем тогда стянуть две соответствующие системы линий и с помощью определенных таким образом стягиваний $\varkappa'$,

$\bar{\varkappa}'$ построить квадратную диаграмму

$$\begin{tikzcd} G' \arrow[r, two heads, "\varkappa'"] \arrow[d, two heads, "\bar{\varkappa}'"'] \arrow[dr, two heads, "\varkappa_0'"] & G \arrow[d, two heads, "\varkappa_0"] \\ \bar{G} \arrow[r, two heads, "\bar{\varkappa}_0"] & G_0 \end{tikzcd}$$

такую, что образы x и $\bar{x}$ точки x' в $\mathcal{P}(\mathbf{G})$ и $\mathcal{P}(\bar{\mathbf{G}})$ являются *эффективными критическими точками стягиваний* $\varkappa_0$ и $\bar{\varkappa}_0$. Применяя рассуждения п. I. 2.5, *можно считать, что они имеют коранг* 1. Тогда точка x' обязательно является критической (коранга 1) для стягиваний $\varkappa'$ и $\bar{\varkappa}'$ (в противном случае ее коранг для стягивания $\varkappa_0'$ был бы равен не двум, а единице).

Рис. 23. Поверхности Ландау для квадратной диаграммы типа I. 3.2. Две плоскости, образующие грани «крыши», — это $L(\varkappa_0)$ и $L(\bar{\varkappa}_0)$. Невидимая поверхность — это эффективная часть $L(\varkappa_0')$. Заштрихованная область, которую она ограничивает, — это образ отображения $\mathcal{P}(\varkappa_0')$.

Все эти рассуждения позволяют понять, почему *топологическая* классификация *треугольных диаграмм отображений*, предпринятая в приложении II, неприменима к нашей проблеме исследования критических точек коранга 2: скорее нужно было бы изучать *топологические типы квадратных* и даже более сложных *коммутативных диаграмм*. В случае когда плоскость векторов $\left(\mathbf{a}_{i_0}'\right)$ пересекает еще и другие координатные гиперплоскости (лежащие вне первого квадранта: например, плоскость $\alpha_3 = 0$ на рис. 22), могут возникать другие особенности (не эффективные).

Вот некоторые внушающие ужас подробности. Забавы ради я изобразил на рис. 23 то, что мне ка-

жется «устойчивой» формой видимого контура для квадратной диаграммы предыдущего типа. Эта поверхность получена «склеиванием» двух экземпляров поверхности, изображенной на рис. 43, и достаточно взглянуть на нее, чтобы убедиться в том, что она обладает требуемыми свойствами выпуклости.

Упражнение. Квадратная диаграмма, изображенная на рис. 24, принадлежит к числу самых простых диаграмм, допускающих критические точки коранга 2. Исследуйте их множества Ландау (обратите

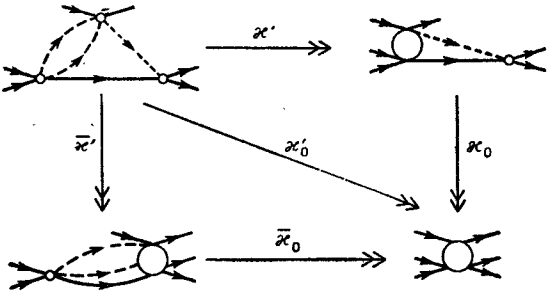


Рис. 24. Квадратная диаграмма стягиваний.

внимание на то, что точки Ландау коранга 2 в этом примере являются в то же время критическими для отображения, которое переводит пространство $\mathcal{F}(G_0)$ в «пространство инвариантов»; следовательно, в пространстве инвариантов мы будем иметь искаженный образ «действительной» ситуации).

I. 3.3. Коранг 2: случай «эффективного перекрещивания». Очень простой пример особенности коранга 2 предоставляет нам диаграмма стягиваний из п. I. 3.2, в которой $\varkappa_0'$ является *расслоенным произведением стягиваний* $\varkappa_0$ и $\bar{\varkappa}_0$. Если предполагать, что мы имеем дело с главными особенностями стягиваний $\varkappa_0$ и $\bar{\varkappa}_0$, то для полного описания ситуации можно воспользоваться замечаниями п. I. 1.3 относительно расслоенных произведений. Множество Ландау $L(\varkappa_0')$ образует «диэдр», каждая из двух «граней» которого

является «половиной» одного из многообразий Ландау $L(\varkappa_0)$, $L(\bar{\varkappa}_0)$; эти два многообразия пересекаются трансверсально (что вытекает, например, из соображений выпуклости); образом $\mathcal{P}(\varkappa_0')$ является область, заключенная внутри диэдра; см. рис. 25. В обозначениях § A. II. 4 эта ситуация *для любой из двух соответствующих ей треугольных диаграмм* может быть охарактеризована равенством $z_{q-1} = y_p$. Иначе говоря, *многообразие Ландау* $L(\varkappa')$ *является полным прообразом многообразия Ландау* $L(\bar{\varkappa}_0)$ *при отображении* $\mathcal{P}(\varkappa_0)$.

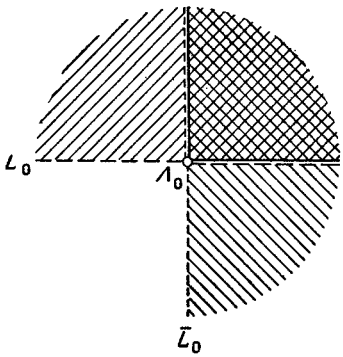


Рис. 25. Эффективное перекрещивание двух множеств Ландау $L(\varkappa_0)$ и $L(\bar{\varkappa}_0)$; горизонтальная ось — $L(\varkappa_0)$; вертикальная ось — $L(\bar{\varkappa}_0)$; сплошная линия — $L(\varkappa_0')$. Светлые заштрихованные области — образы $\mathcal{P}(\varkappa_0)$ и $\mathcal{P}(\bar{\varkappa}_0)$. Темная заштрихованная область — образ $\mathcal{P}(\varkappa_0')$.

Такую ситуацию мы будем называть *эффективным перекрещиванием* множеств Ландау $L(\varkappa_0)$, $L(\bar{\varkappa}_0)$. Я попытаюсь показать, что она *характеризует расслоенное произведение.* Действительно, пусть $l(\varkappa') = 0$ — локальное уравнение многообразия Ландау $L(\varkappa')$. В п. I. 3.1 мы видели, что дифференциал функции $l(\varkappa')$ можно записать в виде

$$dl(\varkappa') = \sum_{i' \in I'} \sum_j \alpha_{i'} p_{i'} z_{0j}'(i)\, dq_j.$$

Тот факт, что мы имеем дело с эффективным перекрещиванием, равносилен тому, что *на всем* $L(\varkappa')$ *этот дифференциал зависит лишь от координат базы* $\mathcal{P}(G_0)$ *и не зависит от координат слоя* $\mathcal{P}(\varkappa_0)^{-1}(p^{I_0})$. Последнее выражается условием

$$\sum_{i' \in I'} \alpha_{i'} p_{i'} z_0'(i') = 0 \qquad \forall z_0' \in Z_{0*}',$$

которое должно удовлетворяться на всем $L(\varkappa')$, т. е. для всех решений $\alpha_{i'}$, $p_{i'}$ уравнений Ландау

$$\sum_{i' \in I'} \alpha_{i'} p_{i'} z'(i') = 0 \qquad \forall z' \in Z'_*,$$

где $p_{i'}$ должны еще принадлежать $\mathscr{P}(G)$. Забудем на время о последнем ограничении и положим $a_{i'} = \alpha_{i'} p_{i'}$. Мы увидим, что всякая система четырехмерных векторов $(a_{i'})$, «ортогональных» к Z'_*, должна быть «ортогональна» к $Z'_{0*} | I'$ (ограничению группы Z'_{0*} на подмножество линий I'). Если учесть очевидное включение $Z'_* \subset Z'_{0*} | I'$, то отсюда вытекает, что $Z'_* = Z'_{0*} | I'$, т. е. что точная последовательность групп

$$Z'_* \rightarrowtail Z'_{0*} \twoheadrightarrow Z_*$$

расщепляется. Следовательно (предложение 0.3.6), *то же можно сказать и о точной последовательности графов*

$$G' \rightarrowtail G'_0 \twoheadrightarrow G,$$

так что мы имеем дело с расслоенным произведением.

Единственное слабое место наших рассуждений — это то, что мы забыли о дополнительных ограничениях на $(a_{i'})$: $Z'_{0*} | I'$ может быть *строго больше*, чем Z'_*, если эти дополнительные ограничения дают в точности недостающие соотношения. Однако,

1) мне кажется, что только «исключительные» значения масс могут дать возможность извлечь из этих ограничений *линейные соотношения с целыми коэффициентами* между $(a_{i'})$;

2) даже если по практическим соображениям (существование упругих процессов) нельзя выбросить из рассмотрения эти исключительные значения масс, мне кажется крайне неправдоподобным, что можно получить линейные соотношения с целыми коэффициентами,

которые точно совпадают с соотношениями из $(Z'_{0*}|I')/Z'_*$.

Эти два пункта требуют проверки.

I.3.4. Замечание: расслоенное произведение не имеет главных точек Ландау. Действительно, легко проверить, что $L(\varkappa_0 \wedge \bar{\varkappa}_0)$ содержит лишь точки коранга $\geqslant 2$ (в частности, точки из $L(\varkappa_0) \cap L(\bar{\varkappa}_0)$) *или же точки, в которых* α_i *обращаются в нуль на некотором цикле.*

ГЛАВА II

АНАЛИТИЧНОСТЬ АМПЛИТУД РАССЕЯНИЯ И ПОГЛОЩЕНИЯ

Приступим теперь к изложению существа проблемы: вопросов аналитичности S-матрицы. Речь идет об изучении математической согласованности системы гипотез A, B, C, сформулированных во введении, с тем, чтобы как можно дальше продвинуться по пути *доказательства* этих гипотез. Некоторые осложнения, физический смысл которых был разъяснен во введении (конец § 3), возникают из-за существования графов с кратными линиями. Изучением этих осложнений мы займемся в следующей главе; *в настоящей главе мы будем рассматривать только графы с простыми линиями.*

II. 1. Аналитичность амплитуд рассеяния

II. 1.1. Нам будет удобно изображать «элементарный процесс» $I_1 \to I_2$ с помощью *графа* $\mathbf{G}_0$ (связного графа без внутренних линий, см. рис. 26) и обозначать амплитуду этого элементарного процесса через

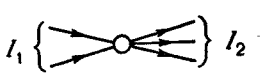


Рис. 26. Граф элементарного процесса.

$S(\mathbf{G}_0)$ (вместо $\langle p^{I_2} | S | p^{I_1} \rangle_{\mathrm{T}}$). Это распределение на многообразии $\mathscr{P}(\mathbf{G}_0)$, являющееся *граничным значением аналитической функции*, если считать, что верны гипотезы A, B.

Рассматривая теперь более общий случай *графа* $\mathbf{G}$ *многократного рассеяния* (с простыми линиями!), мы назовем *амплитудой процесса многократного рассеяния* и обозначим через $S(\mathbf{G})$ произведение амплитуд элементарных процессов, соответствующих каждой

вершине графа G. Из гипотез A и B немедленно вытекает, что это произведение распределений корректно определено как распределение на многообразии $\mathcal{S}(\mathbf{G})$ и является граничным значением аналитической функции. Таким образом, гипотезам A и B можно дать следующую формулировку:

Гипотеза A. Распределение $S(\mathbf{G})$ равно некоторой аналитической функции всюду, кроме множества эффективных точек Ландау для всех стягиваний на граф G.

Гипотеза B. В окрестности эффективного многообразия Ландау распределение $\mathcal{S}(\mathbf{G})$ является граничным значением функции, аналитической вне комплексификации этого многообразия Ландау, причем граничное значение берется относительно смещения $\{\operatorname{Im} \mathbf{l} > 0\}$, где $\mathbf{l}$ — локальное уравнение многообразия Ландау, выбранное так, чтобы выше порога выполнялось условие $l > 0$.

II. 1.2. Замечание. Смещение, определенное таким образом в окрестности «гладких» точек Ландау (см.

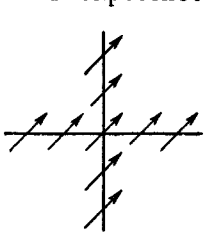


Рис. 27. Смещение в окрестности точек пересечения в общем положении.

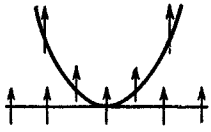


Рис. 28. Смещение в окрестности точек эффективного касания.

примечание на стр. 16), легко обобщается на *пересечения многообразий Ландау*. Если речь идет о многообразиях, находящихся в общем положении, то это обобщение выполняется автоматически на основании § A. III. 1. Если речь идет об *эффективном касании* (п. I. 3.1), то надо воспользоваться тем фактом, что множества точек, *лежащих выше порога*, для обоих

касающихся многообразий расположены «с одной и той же стороны» (рис. 20). Если, в соответствии с приложением III, условиться изображать смещение при помощи «векторного поля», трансверсального к многообразиям, с которых мы смещаемся, то этим двум случаям будут соответствовать рис. 27 и 28. Заметим, что в случае эффективного касания *достаточно сместиться с одного из многообразий, чтобы автоматически сместиться и со второго* в окрестности точек пересечения.

II. 2. Аналитичность амплитуд поглощения

II.2.1. Пусть $\mathbf{G}_0$ — граф элементарного процесса, а $\mathbf{G}$ — граф многократного рассеяния, стягивающийся на $\mathbf{G}_0$:

$$\mathbf{G} \xrightarrow{\varkappa_0} \mathbf{G}_0.$$

Назовем *интегралом поглощения, связанным с процессом многократного рассеяния* $\mathbf{G}$, и обозначим через $A_{\mathbf{G}}$ функцию, определенную на $S(\mathbf{G}_0)$ *выше порога процесса* $\mathbf{G}$ при помощи следующего интеграла:

$$A_{\mathbf{G}}(p^{\mathbf{I}_0}) = \int\limits_{\mathscr{S}(\varkappa_0)^{-1}(p^{\mathbf{I}_0})} S(\mathbf{G}),$$

в котором интегрирование по слою $\mathscr{S}(\varkappa_0)^{-1}(p^{\mathbf{I}_0})$ производится по «канонической» мере $\sigma_{p^{\mathbf{I}_0}}(\mathbf{G})$, определенной во введении (2.6) [1]).

Априори мы не знаем, имеет ли интеграл смысл, так как $S(\mathbf{G})$ — не функция, а распределение. Однако это распределение является граничным значением аналитической функции относительно некоторого комплексного смещения (гипотеза В). Следовательно, если это смещение можно выбрать *совместимым с отображением* $\mathscr{S}(\varkappa_0)$ (А. III. 2), то $A_{\mathbf{G}}(p^{\mathbf{I}_0})$ может быть определен как *интеграл по смещенному слою* (напомним, что в силу предложения I. 1.2 слой

[1]) Само собой разумеется, что $\mathbf{I}_0$ — множество линий графа $\mathbf{G}_0$.

компактен). В этом случае интеграл не только имеет смысл, но даже является *аналитической функцией* от p^{I_0} (A.III. 3).

Согласно приложению III (A. III. 2.2), «плохие» точки p^{I_0}, т. е. точки, в которых функция $A_G(p^{I_0})$ может иметь особенности, являются *критическими значениями* ограничения отображения $\mathscr{S}(\varkappa_0)$ на различные страты, которые определяются множествами особых точек подинтегрального выражения $S(\mathbf{G})$. Приведем перечень этих стратов.

0) *Страты максимальной размерности.*

Это открытые множества в $\mathscr{S}(\mathbf{G})$. Их видимые контуры дают *множество Ландау стягивания* $\varkappa_0$.

1) *Страты коразмерности* 1.

Они состоят по существу из главных многообразий Ландау всех стягиваний $\varkappa'$: $\mathbf{G}' \twoheadrightarrow \mathbf{G}$. Видимые контуры этих многообразий Ландау являются (согласно I. 3.0) не чем иным, как *многообразиями Ландау композиций стягиваний* $\varkappa_0'$: $\mathbf{G}' \xrightarrow{\varkappa'} \mathbf{G} \xrightarrow{\varkappa_0} \mathbf{G}_0$.

2) *Страты коразмерности* 2.

Рассмотрим стягивание $\varkappa'$: $\mathbf{G}' \twoheadrightarrow \mathbf{G}$, имеющее особенность типа *эффективного перекрещивания* (I. 3.3); пусть $\Lambda' \subset \mathscr{S}(\mathbf{G})$ — соответствующий страт коразмерности 2 — пересечение двух многообразий в общем положении L_1', L', составляющих множество Ландау стягивания $\varkappa'$. Известно, что эффективное перекрещивание соответствует особенности коранга 2, т. е. что ядро кокасательного отображения $\mathscr{S}(\varkappa')^*$ двумерно; легко видеть, что *это ядро является не чем иным, как кокасательным пространством, трансверсальным к* Λ'. Отсюда вытекает, что видимый контур для Λ' есть не что иное, как множество Ландау композиции стягиваний

$$\varkappa_0'\colon\ \mathbf{G}' \xrightarrow{\varkappa'} \mathbf{G} \xrightarrow{\varkappa_0} \mathbf{G}_0.$$

Разумеется, особые множества Ландау определяют, кроме стратов эффективного пересечения, и все остальные типы стратов коразмерности 2. Рассмотрим, например, страты *эффективного касания.* Согласно замечанию II. 1.2, в окрестности касательного

страта достаточно сместиться с одного из касающихся многообразий, чтобы автоматически сместиться и со второго. Следовательно, все построения приложения III можно повторить, не обращая внимания на существование этих касательных стратов, которые не могут послужить препятствием к построению смещений.

Рассмотрим теперь страт *неэффективного перекрещивания*, например страт пересечения двух многообразий Ландау, находящихся в общем положении, которые нельзя рассматривать как множества Ландау одного и того же стягивания. Мы покажем (II. 3.4, теорема D), что «двойной скачок» вокруг таких многообразий Ландау равен нулю. В силу формулы (Disc 2) приложения III, отсюда следует, что *интеграл поглощения не имеет скачка при обходе видимого контура страта пересечения.* Если формулы скачка понимать «в смысле распределения» (A. III. 3.4), то этого достаточно для доказательства *неособого* характера этого видимого контура.

3) Аналогичные рассуждения можно провести для стратов более высоких размерностей, определяющих эффективные перекрещивания трех множеств Ландау, и т. д.

Бегло очерченный выше анализ приводит к теореме [1]):

Теорема А. *Интеграл поглощения $A_{\mathbf{G}}$ корректно определен и равен аналитической функции выше порога графа* $\mathbf{G}$ *вне множеств Ландау всех стягиваний* $\varkappa_0'$, *доминирующих* $\varkappa_0$, *т. е. всех стягиваний, которые можно представить в виде композиции* $\varkappa_0'$: $G' \xrightarrow{\varkappa'} \mathbf{G} \xrightarrow{\varkappa_0} \mathbf{G}_0$.

Можно даже уточнить эту теорему следующим образом:

---

[1]) Эта теорема соответствует приблизительно *сильному иерархическому принципу* Полкингорна и др. Недавно они установили [21], что их сильный иерархический принцип неверен, но причина этого в том, что они сформулировали его при слишком сильных ограничениях, рассматривая лишь *главные* точки Ландау стягивания $\varkappa_0'$.

II. 2.2. *Единственные точки Ландау стягивания $\varkappa_0'$, в которых интеграл A_G имеет особенности (точки Ландау, «эффективные для интеграла поглощения»), — это точки, в которых $\alpha_{i'} \geqslant 0$ для всякой линии i' ядра стягивания $\varkappa'$.*

Докажем это. В случае 1) мы имеем многообразие Ландау L' (стягивания $\varkappa'$). Рассмотрим его видимый контур. Он вычисляется так же, как и видимый контур пространства $\mathscr{P}(G)$ в главе I, единственное различие состоит в том, что к уравнениям $p_{i_0}^2 = m_{i_0}^2$ необходимо присоединить уравнение многообразия Ландау $l'=0$. Критическое множество определяется, следовательно, условием: существуют параметры α_{i_0}, такие, что дифференциальная форма

$$dl' + \sum_{i_0 \in I_0} \alpha_{i_0} p_{i_0} \cdot dp_{i_0}$$

обращается в нуль, если ограничить ее на слой (I_0 — множество линий ядра стягивания $\varkappa_0$). Но дифференциал dl' (точнее, его обратный образ в пространстве-прообразе $\mathscr{P}(G')$) имеет вид

$$dl' = \sum_{i' \in I'} \alpha_{i'} p_{i'} \cdot dp_{i'}$$

(I' — множество линий ядра стягивания $\varkappa'$), так что написанная выше дифференциальная форма принимает вид

$$\sum_{i_0' \in I_0'} \alpha_{i_0'} p_{i_0'} \cdot dp_{i_0'}$$

($I_0' = I' \cup I_0$ — множество линий ядра стягивания $\varkappa_0'$). Отсюда, как мы и предвидели, легко получаются уравнения Ландау композиции стягиваний $\varkappa_0'$. Дополнительное уточнение II. 2.2 вытекает тогда просто из следующего факта: *особыми для подинтегрального выражения являются точки из L', в которых $\alpha_i \geqslant 0$* (гипотеза А для стягивания $\varkappa'$).

В случае 2) рассуждение проводится аналогично, только мы имеем *два* многообразия Ландау L_1' и L_2'.

Критическое множество для $\Lambda' = L_1' \cap L_2'$ определяется условием существования параметров $(\lambda_1', \lambda_2', \alpha_{i_0})$, таких, что дифференциальная форма

$$\lambda_1' \, dl_1' + \lambda_2' \, dl_2' + \sum_{i_0 \in I_0} \alpha_{i_0} p_{i_0} \cdot dp_{i_0}$$

обращается в нуль, если ограничить ее на слой. Но общее выражение $\lambda_1' \, dl_1' + \lambda_2' \, dl_2'$ для трансверсального к Λ' ковектора можно записать в виде

$$\lambda_1' \, dl_1' + \lambda_2' \, dl_2' = \sum_{i' \in I'} \alpha_{i'} p_{i'} \cdot dp_{i'},$$

где $(\alpha_{i'})$ — однозначно определенный элемент двумерного пространства векторов $(\alpha_{i'})$, удовлетворяющих уравнениям Ландау стягивания $\varkappa'$. Мы приходим опять к выражению

$$\sum_{i_0' \in I_0'} \alpha_{i_0} p_{i_0'} \cdot dp_{i_0'}.$$

Дополнительное уточнение II. 2.2 вытекает из следующего факта. Согласно А. III. 2.2, мы должны рассматривать *не все* критическое множество для Λ', а лишь часть, соответствующую условию λ_1' и $\lambda_2' > 0$; иначе говоря, ковектор $\lambda_1' \, dl_1' + \lambda_2' \, dl_2'$ должен принадлежать «первому квадранту» (рис. 27). Но этот «первый квадрант» может быть как раз определен с помощью условий $\alpha_i' \geqslant 0 \ \forall i' \in I'$.

II. 2.3. «Естественные» обходы. В приложении III речь идет не только об аналитичности интеграла вне видимых контуров. В нем также говорится о том, как связаны между собой различные аналитические функции, разделенные этими видимыми контурами. Таким образом, может быть сформулирована следующая

Теорема В. *Две аналитические функции* $A_G(p^{I_0})$, *определенные по разные стороны от множества Ландау* L_0 *композиции стягиваний* $\varkappa_0'$: $G' \xrightarrow{\varkappa'} G \xrightarrow{\varkappa_0} G_0$ (в предположении, что это множество эффективно

для интеграла поглощения A_G) *получаются одна из другой с помощью аналитического продолжения при малом комплексном обходе множества* L_0' *в области* $\{\operatorname{Im} l_0' > 0\}$, *где* l_0' — *локальное уравнение множества* L_0', *выбранное так, чтобы*

$$dl_0' = \sum_{i_0' \in I_0'} \alpha_{i_0'} p_{i_0'} \cdot dp_{i_0'} \qquad (\alpha_i \geqslant 0 \quad \forall i' \in I').$$

Такой обход мы будем называть *естественным обходом для интеграла поглощения* A_G. Более общо, мы назовем *естественным путем для интеграла поглощения* A_G «почти вещественный» путь, огибающий эффективные множества Ландау интеграла A_G при помощи естественных обходов.

Необходимо заметить, что *всякий естественный путь для интеграла поглощения равным образом является естественным для амплитуды рассеяния.* Действительно, среди эффективных множеств Ландау интеграла поглощения $(\alpha_{i'} \geqslant 0)$ находятся, в частности, все эффективные множества Ландау амплитуды рассеяния $\left(\alpha_{i_0'} \geqslant 0\right)$, и способ обойти эти множества не зависит от того, рассматриваем мы теорему B или гипотезу B. В силу этого замечания, формула скачка

$$A_G = S(G_0) - S^{(L_0)}(G_0),$$

справедливая (в силу гипотезы C; см. введение, п. 2.6) чуть выше главного порога L_0 стягивания $\varkappa_0$, может быть аналитически продолжена вдоль всякого естественного для A_G пути, *определяющего* аналитическое продолжение функции $S^{(L_0)}(G_0)$ вдоль такого пути.

Предостережение! Нельзя забывать, что среди особенностей интеграла A_G, вообще говоря, фигурируют все точки Ландау самого стягивания $\varkappa_0$ (II. 2.1.0). В силу замечания A. III. 3.2, «вообще говоря», *не существует никакого обхода, который был бы естественным для* A_G *в окрестности таких мно-*

жеств, так что последние нельзя обойти никаким естественным путем. Этот факт заставляет думать, что выше порога стягивания $\varkappa_0$, возможно, существуют области, которые никаким естественным путем нельзя связать с главным порогом L_0 стягивания $\varkappa_0$. В таких областях, по-видимому, трудно, если вообще возможно, интерпретировать интеграл поглощения как скачок амплитуды рассеяния.

II. 2.4. Замечание. Для читателей, которые слышали об особенностях Ландау второго типа (возникающих из-за наличия «пинча на бесконечности» у цикла интегрирования), заметим, что этих особенностей второго типа *не существует для интегралов поглощения в той области, в которой мы их определили*, т. е. выше порога. Причина этого в том, что отображение $\mathscr{P}(\varkappa_0)$ является *собственным* (I. 1.2) — существенное обстоятельство, которое позволило нам применить предложение А. III. 2.2. Это уже неверно, если попытаться аналитически продолжить функцию A_G во внешность ее первоначальной области определения (например, ниже порога), так как цикл интегрирования деформируется, становясь *комплексным*, а комплексификация $\mathscr{P}(\varkappa_0)$ не является собственной.

II. 3. Скачки амплитуд

II. 3.1. Скачки интегралов поглощения. Пусть L_0' — многообразие Ландау композиции стягиваний

$$\varkappa_0'\colon\ G' \xrightarrow{\varkappa'} G \xrightarrow{\varkappa_0} G_0,$$

эффективное для интеграла поглощения A_G. Вычислим скачок этого интеграла при обходе вокруг L_0', *предполагая, что* $\mathscr{P}(\varkappa_0')$ — *отображение типа* S_1^+; это позволяет использовать результаты п. А.III. 3.3.

Так как мы имеем дело с особенностями типа S_1^+, то можно говорить о значениях *выше* и *ниже* порога и определить, как в приложении III, аналитические продолжения интеграла поглощения выше порога: A_G^+ получается при «положительном мнимом» обходе,

а A_G^- — при «отрицательном мнимом» обходе (рис. 29). Необходимо различать два случая в соответствии с тем, первый или второй обход является естественным для A_G; мы будем говорить, что в первом случае имеет место *соответствие*, а во втором — *несоответствие*. Например, мы имеем соответствие, если L_0' яв-

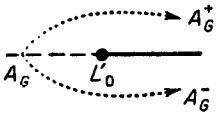


Рис. 29. Аналитические продолжения интеграла поглощения.

ляется главной особенностью для $\varkappa_0'$. Пример несоответствия будет приведен в п. II. 3.3. Вернемся к анализу различных случаев, рассмотренных в § II. 2.

Случай 1. L_0' *является видимым контуром главного многообразия Ландау* L' *стягивания* $\varkappa'$.

Так как мы имеем дело с главным многообразием Ландау, отображение $\mathscr{S}(\varkappa')$ имеет тип S_1^+; но по предположению то же можно сказать о $\mathscr{S}(\varkappa_0')$ и, следовательно (см. п. А. II. 3.2), также о $\mathscr{S}(\varkappa_0)|L'$. Обозначим через $\mathbf{e}_{L'}^{\varkappa_0}$ *исчезающую клетку*, т. е. шар, расположенный в многообразии $\mathscr{S}(\varkappa_0)^{-1}(p^{I_0})$ и определенный условием $l' \geqslant 0$.

Если имеет место *соответствие*, то формула $(\mathrm{Disc}\ 2)^+$ из приложения III дает:

$$A_G^+ - A_G^- = \int\limits_{\mathbf{e}_{L'}^{\varkappa_0}} \mathrm{Disc}^{(L')}\, S(\mathbf{G}).$$

Скачок $\mathrm{Disc}^{(L')} S(\mathbf{G})$ легко вычисляется на основании гипотезы С. Нужно заметить, что так как L' является *главной* особенностью для $\varkappa'$, ядро $\varkappa'$ обязательно *связно* и, следовательно, стягивается *в одну единственную вершину* графа $\mathbf{G}$, так что среди всех элементарных процессов, составляющих $\mathbf{G}$, тот, который представлен этой вершиной, имеет скачок при обходе

множества L′. Применяя к нему гипотезу C, получаем

$$\mathrm{Disc}^{(L')} S(\mathbf{G}) = \int\limits_{e^{\varkappa'}} S(\mathbf{G}'),$$

где $e^{\varkappa'}$ — «исчезающая сфера», слой отображения $\mathcal{P}(\varkappa')$ (эта сфера исчезает при приближении p^{I} к L′, т. е. как раз на границе клетки $\mathbf{e}_{L'}^{\varkappa_0}$).

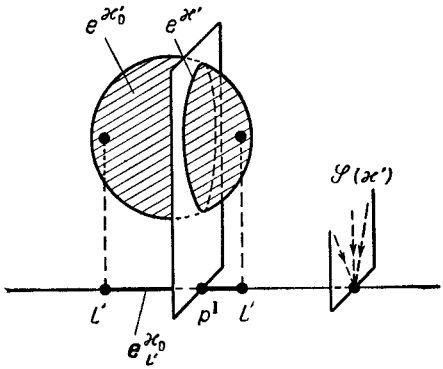


Рис. 30. «Расслоение» на сферы $e^{\varkappa'}$ над клеткой $\mathbf{e}_{L'}^{\varkappa_0}$.

Следовательно, $A_{\mathbf{G}}^{+} - A_{\mathbf{G}}^{-}$ задается повторным интегралом по шару $\mathbf{e}_{L'}^{\varkappa_0}$, над которым задано «расслоение» на *сферы* $e^{\varkappa'}$, исчезающие на границе шара. Легко убедиться, что пространство этого «расслоения» является не чем иным, как сферой (рис. 30)

$$e^{\varkappa_0'} = \mathcal{P}(\varkappa_0')^{-1}(p^{\mathrm{I}_0}).$$

Таким образом, в случае соответствия имеем

$$A_{\mathbf{G}}^{+} - A_{\mathbf{G}}^{-} = \int\limits_{e^{\varkappa_0'}} S(\mathbf{G}').$$

Если имеет место *несоответствие*, то из формулы (Disc 2)$^-$ приложения III получаем

$$A_{\mathbf{G}}^{+} - A_{\mathbf{G}}^{-} = \int\limits_{e_{L'}^{\varkappa_0}} \omega_*'^{-1} \operatorname{Disc}^{(L')} S(\mathbf{G}),$$

где ω' — гомотопический класс положительно ориентированной малой петли вокруг L', а ω_*' — действие этой малой петли на подинтегральное выражение. Так преобразованное подинтегральное выражение можно записать в виде

$$\omega_*'^{-1} \operatorname{Disc}^{(L')} S(\mathbf{G}) = \int\limits_{e^{\varkappa'}{}_*\omega'^{-1}} S(\mathbf{G}'),$$

где ${}_*\omega'^{-1}$ обозначает действие петли ω'^{-1} в базе $\mathscr{P}(\mathbf{G}) - L'$ на гомологиях слоя $\mathscr{P}(\varkappa')^{-1}(p^{\mathrm{I}})$. Ее действие на исчезающем классе состоит просто в изменении знака:

$$e^{\varkappa'}{}_*\omega'^{-1} = (-)^{\dim \varkappa' + 1} e^{\varkappa'},$$

где через $\varkappa'$ обозначена размерность слоя $\mathscr{P}(\varkappa')^{-1}(p^{\mathrm{I}})$ (ср., например, [29], гл. V, п. 2.6).

Аналогично, в случае несоответствия имеем

$$A_{\mathbf{G}}^{+} - A_{\mathbf{G}}^{-} = (-)^{\dim \varkappa' + 1} \int\limits_{e^{\varkappa_0'}} S(\mathbf{G}').$$

Случай 2. L_0' — *видимый контур пересечения* $\Lambda' = L_1' \cap L_2'$ *главных многообразий Ландау стягиваний* $\varkappa_1'$: $\mathbf{G}_1' \twoheadrightarrow \mathbf{G}$ и $\varkappa_2'$: $\mathbf{G}_2' \twoheadrightarrow \mathbf{G}$ (расслоенным произведением которых является $\varkappa'$: $\mathbf{G}' \twoheadrightarrow \mathbf{G}$).

На этот раз *исчезающая клетка* $\mathbf{e}_{L_1 L_2}^{\varkappa_0}$ ограничена *двумя* многообразиями L_1', L_2' (рис. 31): это подмножество слоя $\mathscr{P}(\varkappa_0)^{-1}(p^{\mathrm{I}_0})$, определенное условиями $l_1' \geqslant 0$, $l_2' \geqslant 0$.

Если имеется *соответствие*, то формула (Disc 2)$^+$ из приложения III дает

$$A_{\mathbf{G}}^{+} - A_{\mathbf{G}}^{-} = -\int\limits_{e^{\varkappa_0}_{L_1' L_2'}} \mathrm{Disc}^{(L_1')}\,\mathrm{Disc}^{(L_2')}\, S(\mathbf{G}).$$

Двойной скачок, стоящий под знаком интеграла, будет вычислен в п. II. 3.4. Мы получим [1])

$$\mathrm{Disc}^{(L_1')}\,\mathrm{Disc}^{(L_2')}\, S(\mathbf{G}) = \int\limits_{e^{\varkappa_1'} \times e^{\varkappa_2'}} S(\mathbf{G}'),$$

где $e^{\varkappa_1'}$ и $e^{\varkappa_2'}$ — исчезающие сферы, слои отображений $\mathscr{P}(\varkappa_1')$ и $\mathscr{P}(\varkappa_2')$ (их произведение является слоем для

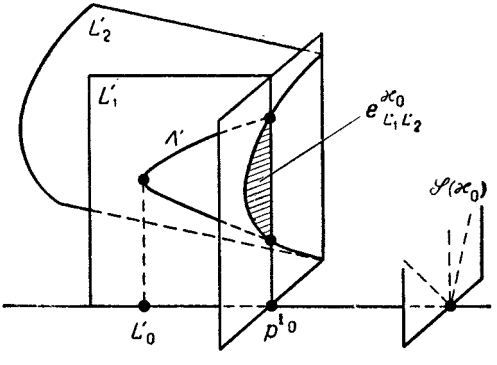


Рис. 31. Клетка $\mathbf{e}^{\varkappa_0}_{L_1' L_2'}$.

$\mathscr{P}(\varkappa'))$; одна из них исчезает на L_1', другая — на L_2'. Таким образом, получаем, что $A_{\mathbf{G}}^{+} - A_{\mathbf{G}}^{-}$ задается повторным интегралом, взятым по клетке $\mathbf{e}^{\varkappa_0}_{L_1' L_2'}$, над которой имеется расслоение на произведение двух

[1]) Этот результат тривиально доказывается в случае, когда $\mathbf{G}_1'$ и $\mathbf{G}_2'$ стягиваются на две различные вершины графа $\mathbf{G}$; для этого достаточно применить гипотезу С последовательно к двум этим вершинам.

сфер $e^{\varkappa_1'}$, $e^{\varkappa_2'}$, каждая из которых исчезает на одной из двух границ L_1', L_2' этой клетки. Легко видеть, что пространство этого «расслоения» является не чем иным, как сферой $e^{\varkappa_0'} = \mathscr{S}(\varkappa_0')^{-1}(p^{I_0})$, т. е. слоем композиции стягиваний

$$\varkappa_0'\colon\ \mathbf{G}' \xrightarrow{\varkappa'} \mathbf{G} \xrightarrow{\varkappa_0} \mathbf{G}_0.$$

Если имеет место *несоответствие*, то формула $(\mathrm{Disc}\ 2)^-$ из приложения III дает:

$$A_{\mathbf{G}}^+ - A_{\mathbf{G}}^- = -\int\limits_{e^{\varkappa_0}_{L_1 L_2'}} \omega_{1*}'^{-1}\omega_{2*}'^{-1}\,\mathrm{Disc}^{(L_1')}\,\mathrm{Disc}^{(L_2')}\,S(\mathbf{G}).$$

Действие петли $\omega_1'^{-1}$ на сферу $e^{\varkappa_1'}$ сводится к умножению на $(-)^{\dim \varkappa_1' + 1}$, в то время как действие петли $\omega_2'^{-1}$ на $e^{\varkappa_2'}$ — к умножению на $(-)^{\dim \varkappa_2' + 1}$. Окончательная формула, следовательно, отличается от случая, в котором имеет место соответствие, знаком $(-)^{\dim \varkappa' + 1}$.

Случай 3 и т. д.: рассуждения аналогичны.

Резюмируя, мы можем сформулировать следующую теорему:

Теорема С. *Пусть* L_0' — *многообразие Ландау композиции стягиваний* $\varkappa_0'\colon \mathbf{G}' \xrightarrow{\varkappa'} \mathbf{G} \xrightarrow{\varkappa_0} \mathbf{G}_0$, *эффективное для интеграла поглощения* $A_{\mathbf{G}}$ *и соответствующее ситуации типа* S_1^+. *Скачок интеграла поглощения выше порога* L_0' *в случае соответствия задается следующим выражением*:

$$A_{\mathbf{G}}^+ - A_{\mathbf{G}}^- = \int\limits_{e^{\varkappa_0'}} S(\mathbf{G}'),$$

а в случае несоответствия — тем же выражением, умноженным на $(-)^{\dim \varkappa'+1}$.

II.3.2. Сравнение скачков. Мы уже отмечали (см. II.2.3), что если многообразие Ландау L_0' композиции стягиваний $\varkappa_0'$: $G' \xrightarrow{\varkappa'} G \xrightarrow{\varkappa_0} G_0$ является *эффективным для амплитуды рассеяния* $S(G_0)$, то оно тем более будет таким же для интеграла поглощения A_G. Более того, мы теперь знаем, что эти две функции *имеют одинаковые скачки при обходе* L_0' *при условии, что* L_0' *является главной особенностью для* $\varkappa_0'$. Действительно, на основании гипотезы С и теоремы С мы имеем

$$S(G_0) - S^{(L_0')}(G_0) = A_G - A_G^{(L_0')} = \int\limits_{e^{\varkappa_0'}} S(G'),$$

где через A_G (вместо A_G^+) мы обозначили «естественную» ветвь (случай соответствия) и через $A_G^{(L_0)}$ (вместо A_G^-) — «противоположную» ветвь. Это равенство скачков заслуживает того, чтобы попытаться найти его «глубокие причины». Действительно, если бы мы умели доказывать его *прямо*, то мы бы имели, благодаря теореме С, *индуктивное доказательство гипотезы* С («индукция» здесь понимается в следующем смысле: при доказательстве теоремы С мы предполагаем, что гипотеза С верна для стягивания $\varkappa'$). Попробуем найти прямое доказательство.

Напомним, что интеграл поглощения, интерпретируемый в окрестности главного многообразия Ландау L_0 стягивания $\varkappa_0$ (гипотеза С для стягивания $\varkappa_0$) как скачок амплитуды рассеяния

$$A_G = S(G_0) - S^{(L_0)}(G_0),$$

может быть продолжен вдоль всякого *естественного пути* (II.2.3). Чтобы занумеровать различные входящие в рассмотрение ветви аналитических функций, удобно определить *петли*, обходящие множества Ландау (или, вернее, гомотопические классы петель).

Начнем с окрестности комплексифицированного многообразия Ландау $\mathbf{L}_0$, которое мы окружим «малой положительной петлей» (определенной, например, на комплексной аналитической прямой, трансверсальной к $\mathbf{L}_0$), затем удлиним эту петлю, смещая ее начальную точку вдоль «естественного пути», выбранного подходящим образом. Если через λ_0 обозначить эту

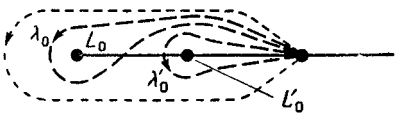


Рис. 32. Петли λ_0 и λ'_0 (изображены жирной пунктирной линией). Светлая пунктирная линия — петля, гомотопная $\lambda'_0 \cdot \lambda_0$.

петлю, а через $\lambda_{0*}S(\mathbf{G}_0)$ — ветвь функции $S(\mathbf{G}_0)$, полученную в результате аналитического продолжения вдоль λ_0, то интеграл поглощения можно записать следующим образом:

(a) $$A_{\mathbf{G}} = (1 - \lambda_{0*})\, S(\mathbf{G}_0).$$

Предположим, что естественный путь завел нас чуть выше порога $\mathbf{L}'_0$. Воспользуемся им для построения «малой положительной петли» λ'_0 вокруг $\mathbf{L}'_0$. Равенство скачков записывается так:

(b) $$(1 - \lambda'_{0*})\, S(\mathbf{G}_0) = (1 - \lambda'_{0*})\, A_{\mathbf{G}}.$$

Подставляя (a) в (b), получаем

(c) $$\boxed{\lambda'_{0*}\lambda_{0*}S(\mathbf{G}_0) = \lambda_{0*}S(\mathbf{G}_0).}$$

Впрочем, полученное уравнение эквивалентно (b), если предположить, что выполнено равенство (a) (т. е. если принять гипотезу C для стягивания $\varkappa$).

Таким образом, *гипотеза* C *для композиции стягиваний* $\varkappa'$ *выводится из гипотезы* C *для его компонент* $\varkappa_0$ *и* $\varkappa'$ *при условии, что мы умеем доказывать* (c).

На рис. 32 представлены различные петли в наиболее простом случае, когда естественный путь не пе-

ресекает других множеств Ландау, кроме L_0'. Мы видим, что если сделать разрез вдоль вещественной оси справа от L_0, то функцию $(1-(\lambda_0'\cdot\lambda_0)_*)\,S(G_0)$ можно интерпретировать как *скачок функции* $S(G_0)$ *на разрезе* (справа от L_0').

Соотношение (с) можно тогда в эквивалентных терминах выразить так: *этот скачок, как справа, так и слева от* L_0' *равен интегралу поглощения.* В этой форме, вероятно, можно было бы вывести (с), и, следовательно, гипотезу С из унитарности S-матрицы [1]).

II.3.3. Ветвление в окрестности точек эффективного касания. Продолжим наше исследование «ветвления амплитуд» (закона их изменения под действием

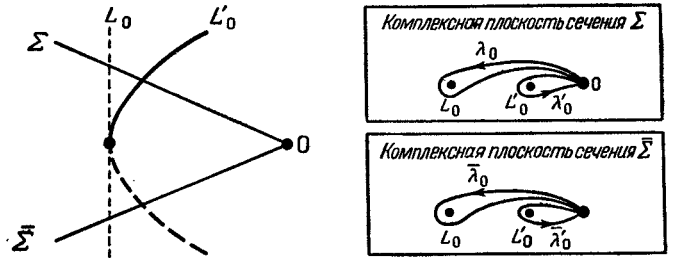


Рис. 33. Построение петель в окрестности точки эффективного касания.

разных петель). Рассмотрим вначале ситуацию, описанную в п. I. 3.1: эффективное касание множеств Ландау $L(\varkappa_0)$ и $L(\varkappa_0')$. На рис. 33 воспроизведен рис. 20 и с помощью сечений прямыми Σ, $\bar{\Sigma}$ определены четыре петли λ_0, λ_0', $\bar{\lambda}_0$, $\bar{\lambda}_0'$. В сечении Σ ситуация точно такая же, как описанная в предыдущем пункте (кривая, изображенная сплошной линией, является *главным* многообразием Ландау стягивания

[1]) Например, это очевидно, если G является «графом унитарности», в то время как G′ не является таковым: соотношение унитарности имеет тогда одинаковый вид справа и слева от L_0'. Пример, рассмотренный Ландшофом и Оливом в [19], входит в этот класс (рис. 21, *b*).

$\varkappa_0'$). Наоборот, сечение $\bar{\Sigma}$ пересекает *неэффективную* часть множества Ландау L_0', так что

$$(1-\bar{\lambda}_{0*}')\,S(G_0)=0.$$

Вычисляя фундаментальную группу (первую гомотопическую группу) комплексного пространства, из которого удалены комплексные многообразия L_0, L_0', мы замечаем (ср. [29], гл. V, п. 3.3), что четыре указанные выше петли не являются независимыми, а удовлетворяют соотношениям

$$\lambda_0'\cdot\lambda_0=\bar{\lambda}_0'\cdot\bar{\lambda}_0=\lambda_0\cdot\bar{\lambda}_0'=\bar{\lambda}_0\cdot\lambda_0'.$$

В частности, $\bar{\lambda}_0'=\lambda_0^{-1}\cdot\lambda_0'\cdot\lambda_0$, и приведенную выше формулу ветвления можно записать в виде

$$(1-\lambda_{0*}^{-1}\lambda_{0*}'\lambda_{0*})\,S(G_0)=0$$

или

$$\boxed{\lambda_{0*}S(G_0)=\lambda_{0*}'\lambda_{0*}S(G_0).}$$

Это есть в точности уравнение (c) — *ключ к гипотезе* C. Таким образом, уравнение (c) в окрестности точки эффективного касания эквивалентно свойству отсутствия ветвления вокруг неэффективной части множества Ландау. Принимая во внимание сказанное в предыдущем пункте, мы видим, что *в окрестности точек эффективного касания* (L_0, L_0') *гипотеза* C *для эффективной части множества* L_0', *с одной стороны, и неособый характер*[1]) *неэффективной части, с другой стороны, суть два эквивалентных свойства, если допустить, что гипотеза* C *выполнена для составляющих стягиваний* $\varkappa_0$ *и* $\varkappa'$.

Замечание о несоответствии. Неэффективная часть множества L_0' в окрестности точки эффективного касания дает нам пример несоответствия

[1]) «Неразветвленность» влечет за собой «несингулярность», если формулы ветвления понимать *в смысле распределений*; ср. A. III. 3.4.

в смысле п. II. 3.1. Действительно, это ситуация типа S_1^+, и если $l_0'=0$ — локальное уравнение множества L_0', причем $l_0'>0$ выше порога (т. е. справа на рис. 33), то дифференциал функции l_0' запишется так:

$$dl_0' = \sum_{i_0' \in I_0'} \alpha_{i_0'} p_{i_0'} \cdot dp_{i_0'},$$

где $\alpha_{i'} \leqslant 0$ *для всякого* $i' \in I'$; *следовательно, это обход* $\operatorname{Im} l_0 < 0$, *естественный для интеграла поглощения* A_G.

II.3.4. Двойные скачки. Рассмотрим два стягивания

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[d, "\varkappa_0"] \\ \bar{G} \arrow[r, two heads, "\bar{\varkappa}"] & G_0 \end{tikzcd}$$

главные многообразия Ландау которых L_0, $\bar{L}_0$ пересекаются в общем положении. Предполагая, что никакое другое множество Ландау не находится в этой окрестности, мы будем изучать действие на амплитуду рассеяния $S(G_0)$ локальной фундаментальной группы комплексифицированного пространства $\pi_1^{\mathrm{loc}}(\mathscr{P}(G_0) - L_0 \cup \bar{L}_0)$; это *свободная коммутативная группа с двумя образующими* ω, $\bar{\omega}$ (петли, обходящие L_0 и $\bar{L}_0$). Мы уже умеем вычислять «простые скачки»: согласно гипотезе C,

$$(1-\omega_*)\, S(G_0) = A_G = \int_{e^{\varkappa_0}} S(G).$$

Теперь мы будем интересоваться *двойным скачком* $(1-\bar{\omega}_*)(1-\omega_*)S(G_0)$ и, главным образом, выяснением того, *когда этот двойной скачок равен нулю.* Можно было бы попытаться использовать результаты предыдущих пунктов относительно аналитичности интеграла A_G, но мы получим значительно более полные результаты путем *прямого* исследования.

Речь, следовательно, идет о том, как изменяется интеграл поглощения

$$\int\limits_{e^{\varkappa_0}} S(\mathbf{G})$$

под действием петли $\bar{\omega}$. A priori имеются две возможные причины изменения интеграла:

1) деформация цикла интегрирования $e^{\varkappa_0}$, который должен «избегать» особенностей подинтегрального выражения;

2) переход к другой ветви самого подинтегрального выражения.

Мы покажем, что в рассматриваемом случае первая возможность исключается.

В самом деле, интеграл поглощения немного выше главного порога L_0 определен как интеграл по *несмещенному вещественному* циклу $e^{\varkappa_0}$, и это справедливо как «справа», так и «слева» от $\bar{L}_0$ (рис. 25), потому что обе эти области ограничены главным порогом L_0. С другой стороны, так как $\bar{L}_0$ *не является* множеством Ландау для стягивания $\varkappa_0$, то существует «естественный путь для интеграла поглощения» (II. 2.3), который, обходя $\bar{L}_0$ по малому комплексному контуру, преобразует цикл интегрирования $e^{\varkappa_0}$ *слева* от $\bar{L}_0$ в цикл интегрирования $e^{\varkappa_0}$ *справа*. Но так как эти два цикла вещественны, а множество особых точек, которые они должны обходить, инвариантно относительно операции комплексного сопряжения, то комплексно сопряженный путь будет обладать тем же свойством. Пробегая один из этих двух путей, а затем другой в противоположном направлении, мы увидим, что *петля $\bar{\omega}$ тривиально действует на цикл интегрирования $e^{\varkappa_0}$.*

Остается вторая возможность: ветвь подинтегрального выражения изменяется под действием петли $\bar{\omega}$. Но это означает, что подинтегральное выражение имеет особенность на $\mathscr{P}(\varkappa_0)^{-1}(\bar{L}_0)$, и что, следовательно, существует стягивание $\varkappa'$: $\mathbf{G}' \twoheadrightarrow \mathbf{G}$, имеющее $\mathscr{P}(\varkappa_0)^{-1}(\bar{L}_0)$ главным множеством Ландау: мы узнаем в этом определение *«эффективного перекре-*

щивания» двух множеств Ландау L_0, $\bar{L}_0$. В таком случае

$$(1-\bar{\omega}_*)A_{\mathbf{G}}=\int\limits_{e^{\varkappa_0}}(1-\omega'_*)S(\mathbf{G}),$$

где ω' — гомотопический класс «малой петли» вокруг $L(\varkappa')=\mathscr{P}(\varkappa_0)^{-1}(\bar{L}_0)$. Применяя гипотезу C к подинтегральному выражению, мы получаем повторный интеграл по сфере $e^{\varkappa_0}$, над которой задано расслоение на сферы $e^{\varkappa'}$. Это расслоение тривиально, и его можно представить как произведение сфер $e^{\varkappa_0}\times e^{\bar{\varkappa}_0}$, являющееся слоем композиции отображений $\mathscr{P}(\varkappa'_0)$.

Резюмируя предыдущее, сформулируем такую теорему:

Теорема D. *Двойной скачок при обходе точек эффективного перекрещивания записывается следующим образом*:

$$(1-\bar{\omega}_*)(1-\omega_*)S(\mathbf{G})=\int\limits_{e^{\varkappa_0}\times e^{\bar{\varkappa}_0}}S(\mathbf{G}'),$$

где цикл интегрирования есть не что иное, как слой композиции отображений $\mathscr{P}(\varkappa'_0)$, *канонически гомеоморфный произведению двух исчезающих сфер* $e^{\varkappa_0}$, $e^{\bar{\varkappa}_0}$.

При обходе точек неэффективного перекрещивания двойной скачок равен нулю.

Поскольку «эффективное перекрещивание» имеет место только в случае «расслоенного произведения» (ср. I. 3.3), вторая часть теоремы D дает нам

Следствие. *Если стягивания* $\varkappa_0$ *и* $\bar{\varkappa}_0$ *несовместимы, то двойной скачок равен нулю.*

Здесь речь шла об интересном обобщении соотношений, именуемых среди специалистов *соотношениями Куткоски — Штейнмана* [27]. Вот почему я думаю, что стоило бы углубить обсуждение п. I. 3.3, тем более что эти соотношения нам еще понадобятся в конце гл. III.

ГЛАВА III

УПРУГИЕ ПОРОГИ И ГРАФЫ С КРАТНЫМИ ЛИНИЯМИ

Упругим называется такой элементарный процесс, в котором множество входящих частиц совпадает с множеством выходящих частиц. В частности, начальные и конечные массы одинаковы, и это равенство масс приводит к некоторым своеобразным явлениям. Об одном из них мы уже упомянули в гл. I, а именно, о наличии *особых* точек у пространства $\mathscr{S}(\mathbf{G})$, соответствующего графу, имеющему упругую

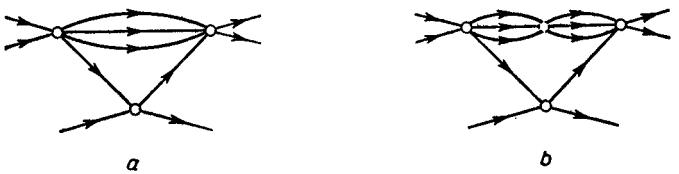


Рис. 34. Вставка упругой вершины в кратную линию (упругая вершина изображена пунктирным кружочком).

вершину. Теперь рассмотрим другой пример, тесно связанный с предыдущим: если в графе с кратными линиями (рис. 34, *a*) «вставить» в середину кратной линии упругую вершину (рис. 34, *b*), то *полученный граф будет иметь те же множества Ландау*[1]), *что и исходный граф*. Действительно, уравнения Ландау налагают на энергии-импульсы кратной линии условие их пропорциональности между собой, а *упругий* характер вставленной вершины тогда обязывает входящие в эту вершину энергии-импульсы быть рав-

---

[1]) Читатель может спросить, как определяется критическое множество и видимый контур *особого* аналитического множества, — ибо таково пространство графа после добавления упругой вершины. Вопрос, поставленный в столь общей форме, является очень тонким (ср. по этому поводу [29], гл. IV). Но здесь достаточно в качестве *определения* взять уравнения Ландау.

ными выходящим (в силу закона сохранения энергии-импульса). Интуитивно это явление можно было бы объяснить с помощью заключительного замечания § 3 введения: кратная линия изображает частицы, *путешествующие вместе*, и вставить упругую вершину — это значит *заставить эти частицы взаимодействовать*.

После нескольких замечаний относительно топологии упругих процессов (III. 1) мы укажем (III. 2), как должна быть видоизменена гипотеза С для графов с кратными линиями. В § III. 3 мы увидим, почему существование упругих процессов требует видоизменения рассуждений гл. II, касающихся математической согласованности гипотез, и почему модифицированная гипотеза *С* удовлетворяет новым критериям согласованности.

III. 1. Топологическое исследоваиие упругих порогов

III. 1.1. Нормальные пороги и упругие пороги. Назовем *нормальным стягиванием* такое стягивание, у которого ядро состоит из одной кратной линии I

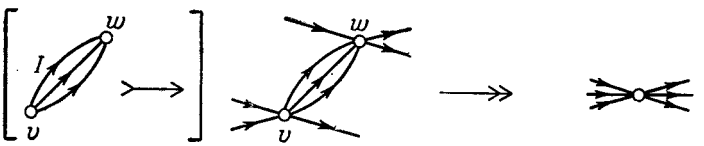


Рис. 35. Нормальное стягивание.

(рис. 35). Уравнения Ландау такого стягивания — это просто условия пропорциональности всех p_i, $i \in I$. Следовательно, множество Ландау имеет вид $\left\{ p_I^2 = \left(\sum_{i \in I} m_i \right)^2 \right\}$, где p_I — внешняя переменная, равная сумме p_i, $i \in I$. Такое множество Ландау называется *нормальным порогом*.

Общий анализ главных множеств Ландау, проведенный в гл. I, применим, в частности, к нормальным порогам и показывает, что они являются многообра-

зиями коразмерности 1, что ниже порога слой будет пустым множеством, а выше порога он гомеоморфен сфере[1]) и т. д. Однако при этом анализе не рассматривались «исключительные» значения масс, для которых пространство графа не является многообразием. Но такие исключительные значения в точности реализуются *упругими стягиваниями*, т. е. нормальными стягиваниями, при которых кратная линия I, ядро стягивания, имеет своим началом или концом упругую вершину $I \to I$ (рис. 36). Разумеется, этот

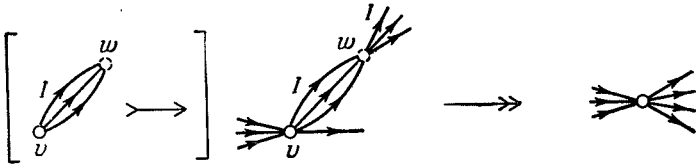


Рис. 36. Упругое стягивание.

случай легко изучить непосредственно. Если I — множество внешних линий, инцидентных упругой вершине, то *упругий порог* Σ_I задается уравнением

$$\left(\sum_{i \in I} p_i\right)^2 = \left(\sum_{i \in I} m_i\right)^2,$$

все *вещественные* решения которого на массовой поверхности M^I составляют *диагональ* D_I, которая определяется условием пропорциональности всех p_i, $i \in I$. Эта диагональ есть множество *квадратичных особых точек* комплексного аналитического множества Σ, заданного указанным уравнением. Образно говоря, локальная модель для Σ_I получается с помощью «подвешивания» (вдоль диагонали) «сфер радиуса нуль».

Заметим, что по определению диагонали $D_I \subset \subset D_J$ $\forall J \subset I$. Иначе говоря, всякая вещественная точка упругого порога Σ_I принадлежит также «частичным» упругим порогам Σ_J $\forall J \subset I$. Таким образом, даже при

[1]) Для нормальных порогов это верно *всюду выше порога*, а не только в некоторой окрестности. Это следствие того факта, что нормальное стягивание *не имеет других точек Ландау*, кроме главных.

локальном исследовании ветвления амплитуд в принципе невозможно рассматривать *один* упругий порог, забывая о существовании всех других. К счастью, в действительности все выглядит проще, как показывает следующий ниже анализ [1]).

III. 1.2. Локальная фундаментальная группа в окрестности упругих порогов. Пусть I — множество входящих (или выходящих) частиц элементарного процесса. Чтобы упростить обозначения, предположим, что все массы равны 1, и обозначим через $\mathbf{M}^I$ *комплексную массовую поверхность*

$$\mathbf{M}^I = \{p^I = (p_i \in \mathbb{C}^4)_{i \in I} \mid p_i^2 \equiv (p_i^0)^2 - \mathbf{p}_i^2 = 1 \qquad \forall i \in I\}.$$

Всякому подмножеству $J \subset I$ ($|J| > 1$) соответствует *комплексный упругий порог*

$$\Sigma_J = \{p^I \in \mathbf{M}^I \mid p_J^2 = |J|^2\},$$

где $p_J = \sum_{i \in J} p_i$, а через $|J|$ обозначено число элементов множества J, которое также равно «полной массе» этого множества частиц. Каждое Σ_J является аналитическим множеством с особенностями; множество его особых точек есть не что иное, как «диагональ» $\mathbf{D}_J$, определенная условием равенства всех p_i $\forall i \in J$. Локально Σ_J имеет топологический тип *вырожденного квадратичного конуса* с вершиной $\mathbf{D}_J$. Вопрос состоит в том, чтобы узнать, как расположены все эти конусы в окрестности диагонали, не заузлены ли они один с другим. Точнее, может быть поставлена такая

Задача. *Является ли коммутативной локальная фундаментальная группа* $\pi_1^{\mathrm{loc}}\left(\mathbf{M}^I - \bigcup_{J \subset I} \Sigma_J\right)$ *в окрестности точки диагонали* $\mathbf{D}_I$?

---

[1]) Читателю может показаться, что мы для собственного удовольствия усложняем положение, работая в «пространстве четырехмерных векторов» вместо того, чтобы работать в «пространстве инвариантов», где упругие пороги выглядят более простыми. Но не надо забывать, что если мы будем изучать больше четырех независимых четырехмерных векторов, то их скалярные произведения уже не будут независимыми, и связи, которым подчинены эти скалярные произведения, определяют довольно сложное алгебраическое многообразие.

Первый шаг на пути к утвердительному ответу дает следующая

Лемма. *Многообразия Σ_J находятся в общем положении всюду, кроме алгебраического множества коразмерности* 3.

Для доказательства этой леммы заметим вначале, что диагонали $\mathbf{D}_J$ имеют в $\mathbf{M}^I$ коразмерности $\geqslant 3$. Вне этих диагоналей Σ_J являются многообразиями. То, что подсемейство $\mathcal{F}$ этого семейства многообразий находится в общем положении, равносильно тому, что в точке пересечения $\bigcap\limits_{J \in \mathcal{F}} \Sigma_J$ система уравнений

$$\sum_{\substack{J \in \mathcal{F} \\ i \in J}} \alpha_J p_J + \alpha_i p_i = 0 \qquad \forall i \in I$$

имеет лишь тривиальное решение ($\alpha_J = 0$, $\alpha_i = 0$). Рассмотрим, в частности, семейство, состоящее из двух элементов $\mathcal{F} = \{J, J'\}$. Так как $J \neq J'$, то по крайней мере одно из двух множеств $J - J'$, $J' - J$ непусто; предположим, что непусто первое из них. Для $i \in J - J'$ из написанной выше системы уравнений получаем

$$\alpha_J p_J + \alpha_i p_i = 0.$$

Отсюда видно, что *вне подмножества коразмерности* 3, *определенного условием пропорциональности некоторого p_i и некоторого p_J, интересующие нас многообразия попарно находятся в общем положении.*

Чтобы закончить доказательство леммы, достаточно показать, что пересечения троек многообразий $\Sigma_J \cap \Sigma_{J'} \cap \Sigma_{J''}$ имеют коразмерность $\geqslant 3$. В этом можно убедиться следующим образом. Если одно из трех множеств $J - J' \cup J''$, $J' - J'' \cup J$, $J'' - J \cup J'$ непусто, то такое же рассуждение, как и раньше, приводит к уравнению того же типа. Тем самым доказывается, что вне подмножества коразмерности 3 три изучаемых многообразия находятся в общем положении. Если все три подмножества $J - J' \cup J''$ и т. д. пусты, то $J \cup J' \cup J''$ допускает *разбиение* $\{J_1 = J' \cup \cup J'' - J,\ J_2 = J'' \cup J - J',\ J_3 = J \cup J' - J''\}$. Если

один член разбиения содержит более одного элемента, например, i и $j \in J_1$, то из данной выше системы уравнений получаем

$$\alpha_{J'} p_{J'} + \alpha_{J''} p_{J''} + \alpha_i p_i = 0,$$
$$\alpha_{J'} p_{J'} + \alpha_{J''} p_{J''} + \alpha_j p_j = 0.$$

Мы видим, что эти уравнения не могут удовлетворяться вне диагонали D_{ij}. Поэтому и здесь достаточно удалить множество коразмерности 3 (диагональ), чтобы получить три многообразия в общем положении. Итак, остается изучить только один случай, когда каждый член разбиения имеет лишь один элемент: $J_1 = \{j_1\}$, $J_2 = \{j_2\}$, $J_3 = \{j_3\}$, т. е. случай, когда $J = \{j_2, j_3\}$, $J' = \{j_3, j_1\}$, $J'' = \{j_1, j_2\}$. Но в этом случае нетрудно убедиться непосредственно, что пересечение $\Sigma_J \cap \Sigma_{J'} \cap \Sigma_{J''}$ имеет коразмерность 3.

Заметим, что формулировка леммы очень напоминает предположения теоремы из приложения IV. Именно поэтому мне кажется, что ответ на поставленную задачу является утвердительным. Чтобы убедиться в этом, достаточно было бы построить гомеоморфизм исследуемой окрестности на все $\mathbb{C}^n$, преобразующий семейство подмножеств Σ_J в семейство подмножеств $S_J \subset \mathbb{C}^n$, удовлетворяющих гипотезам приложения IV (задача построения хорошей *локальной модели* подмножеств Σ_J). Не знаю, возможно ли это, тем не менее можно заметить, что квадратичные конусы S_J, полученные из Σ_J с помощью *нерелятивистского приближения* [1]), в точности удовлетворяют

---

[1]) На массовой поверхности M^I левая часть $p_J^2 - |J|^2$ уравнения множества Σ_J может быть заменена следующим выражением:

$$\left(\sum_{i \in J} \sqrt{p_i^2 + 1}\right)^2 - \left(\sum_{i \in J} p_i\right)^2 - |J|^2.$$

Нерелятивистское приближение этой аналитической функции получается в результате отбрасывания в разложении Тейлора членов порядка выше второго; получаем тогда

$$|J| \sum_{i \in J} p_i^2 - \left(\sum_{i \in J} p_i\right)^2,$$

т. е. уравнение квадратичного конуса.

гипотезам приложения IV, и что физически вполне оправданно считать нерелятивистское приближение хорошей локальной моделью окрестности порогов. Если бы мы умели это доказать, мы бы получили таким образом

Предложение. *В окрестности точки диагонали* $\mathbf{D}_I$ *локальная фундаментальная группа* $\pi_1^{\mathrm{loc}}\left(\mathbf{M}^I - \bigcup_{J\subset I} \Sigma_J\right)$ *является свободной коммутативной группой с канонической базой*

$$(\lambda_J)_{\substack{J\subset I,\\ |J|\geqslant 2}}$$

где каждая петля λ_J *«обходит» соответствующее множество* Σ_J.

Это предложение нам будет очень полезно в дальнейшем, и мы допустим, что оно справедливо.

III.1.3. Замечание о смещениях. С точки зрения «смещения с физической области» упругие пороги представляют собой патологическое явление. Действительно, легко проверить, что невозможно сместиться (в смысле приложения III) с «изотропного конуса» (сферы радиуса нуль) в окрестности вершины этого конуса. Эта патология без сомнения имеет связь с трудностями, которые встречаются при попытке определить S-матрицу в окрестности диагонали D (ср. [13]).

III.2. Гипотеза С для графов с кратными линиями

Используя эвристическую аргументацию, мы уже предсказали, что наличие *кратных линий* в ядре стягивания должно привести к изменению формулировки гипотезы С. Сейчас мы уточним, как именно нужно изменить эту формулировку. Мы будем опираться лишь на изложенные в следующем пункте соображения математической согласованности. Тем не менее, этой гипотезе и ее связям с унитарностью S-матрицы посвящено большое количество работ, и, по-видимому,

все они подтверждают предлагаемую ниже общую формулировку.

III. 2.1. Гипотеза С для нормальных порогов. *Абсорбтивная часть, соответствующая нормальному порогу* L, *в обозначениях введения может быть задана любым из двух выражений*

$$\langle p^{l_2} | \mathbf{A} | p^{l_1} \rangle^{(\mathrm{L})} = \int_I \langle \mathbf{S}_v \rangle \left\langle \left(\prod_{J \in I} \lambda_J \right)_* \mathbf{S}_w \right\rangle =$$

$$= \int_I \left\langle \left(\prod_{J \subset I} \lambda_J \right)_* \mathbf{S}_v \right\rangle \langle \mathbf{S}_w \rangle,$$

где через I *обозначена кратная линия, ядро нормального стягивания,* v *и* w — *начало и конец этой кратной линии,* λ_J — *гомотопический класс «малой петли» вокруг упругого порога* $\mathbf{\Sigma}_J$, *соответствующего кратной линии* $J \subset I$; *этот класс был определен в п.* III. 1.2.

Иначе говоря, мы заменяем амплитуду, соответствующую какой-нибудь из двух вершин, т. е. началу или концу, кратной линии, аналитическим продолжением этой амплитуды вдоль композиции петель $\prod_{J \in I} \lambda_J$, т. е. вдоль петли, обходящей вокруг *всех упругих порогов* [1]) (как «частичных», так и «полного» порога) кратной линии I.

Замечание. По определению, абсорбтивная часть при обходе порога L может быть записана в виде

$$\langle p^{l_2} | \mathbf{A} | p^{l_1} \rangle^{(\mathrm{L})} = (1 - \lambda_*) \langle p^{l_2} | \mathbf{S} | p^{l_1} \rangle,$$

где λ — гомотопический класс малой петли вокруг порога **L**. Если **L** — нормальный *не упругий* порог и, следовательно, аналитическое многообразие коразмерности 1, то этот гомотопический класс определяется как обычно. *Но если* **L** — *упругий порог, то можно также определить* λ, *используя* III. 1.2, *и формулировка* III. 2.1 *гипотезы* С *остается в стиле.* Обратим

[1]) Обоснование см. в [9], [26], [27], [35].

внимание на то, что петля λ обходит только упругий порог **L** и не обходит связанных с ним «частичных» упругих порогов.

III. 2.2. Общая формулировка гипотезы С. Как подсказывает п. III. 2.1, для всякого стягивания, ядро которого имеет кратные линии, формулировка гипотезы С должна быть изменена следующим образом[1]):

Композиция петель $\prod_{I \subset I} \lambda_I$ *действует на амплитуду, соответствующую началу или концу «максимальной» кратной линии I, причем эту операцию необходимо повторить столько раз, сколько имеется «максимальных» кратных линий.*

Заметим, что даже в случае, если несколько максимальных кратных линий инцидентны одной и той же вершине (как на рис. 37), порядок операций без-

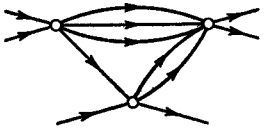


Рис. 37. Граф, в котором несколько максимальных кратных линий инцидентны одной вершине.

различен, так как, в силу п. III. 1.2, различные «упругие петли» коммутируют.

Заметим также, что никогда не следует рассматривать графы, подобные изображенному на рис. 34, *b*, т. е. графы, в которых упругая вершина «глупо» вставлена в середину кратной линии.

III. 3. Пересмотр согласованности гипотез

Видоизменив таким образом гипотезу С для графов с кратными линиями, мы должны теперь, очевидно, соответствующим образом изменить определение интегралов поглощения, данное в п. II.2.1. Мы вправе ожидать тогда некоторых изменений в рассуж-

[1]) В работе [20] можно найти пример, подтверждающий это правило.

дениях гл. II. Однако мы увидим, что эти изменения компенсируются своеобразным явлением, возникающим в результате «вставки упругих вершин», так что в конце концов основные результаты гл. II остаются справедливыми.

III. 3.1. Вставка упругих вершин. Пусть $\mathbf{G}$ — граф многократного рассеяния, J — некоторое множество линий графа $\mathbf{G}$, имеющих общее начало (соответственно конец). Мы будем называть *J-упругим расширением графа* $\mathbf{G}$ граф $\mathbf{G}_J$, полученный при помощи вставки упругой вершины в множество линий J

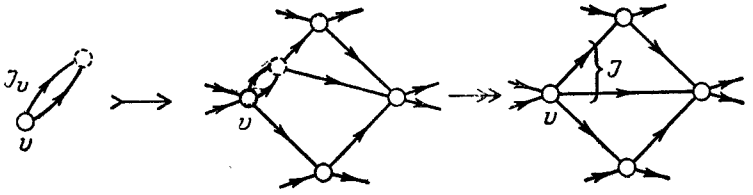


Рис. 38. J-упругое расширение графа.

(рис. 38). Очевидно, речь идет о расширении, ядро которого состоит из кратной линии J_v, выходящей из вершины v (соответственно оканчивающейся в вершине v). В случае когда J — *кратная линия* графа $\mathbf{G}$, имеется *два способа* рассматривать граф $\mathbf{G}_J$ как расширение графа $\mathbf{G}$, в соответствии с тем, от чего мы отправляемся: от *начала* v или *конца* w кратной линии. Обозначим через $\varkappa_{J_v}$ и $\varkappa_{J_w}$: $\mathbf{G}_J \twoheadrightarrow \mathbf{G}$ два соответствующих стягивания.

Итак, пусть $\mathbf{G}$ — граф, имеющий кратную линию J с началом v и концом w; рассмотрим стягивание $\varkappa'$: $\mathbf{G}' \twoheadrightarrow \mathbf{G}$, ядро которого связно и переходит в вершину v (будем для краткости говорить: «стягивание на $\mathbf{G}$ в v»). Множество линий J в $\mathbf{G}'$ будет по-прежнему иметь общий конец w, так что можно определить J-упругое расширение $\mathbf{G}'_J$ графа $\mathbf{G}'$. Различные расширения можно включить в следующие две точные

диаграммы. Диаграмма (I) имеет тип «расслоенного произведения» (см. рис. 39):

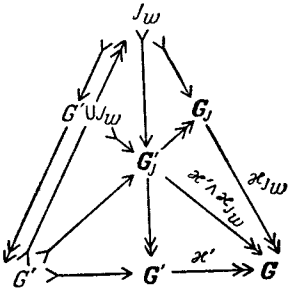
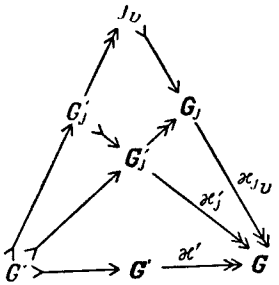


Диаграмма (II) определяет новое стягивание $\varkappa'_J$ которое будет называться «J-упругим расширением стягивания $\varkappa'$»; это стягивание графа $\mathbf{G}$ в v, связное ядро которого является расширением ядра $\varkappa'$ (см. рис. 40):



Своеобразное явление. Пусть $\varkappa_0$: $\mathbf{G} \twoheadrightarrow \mathbf{G}_0$ — стягивание, ядро которого содержит кратную линию J (в дальнейшем $\varkappa_0$ будет просто стягиванием всех внутренних линий графа $\mathbf{G}$). *Главные многообразия Ландау* L' *и* L'_J *стягиваний* $\varkappa'$ *и* $\varkappa'_J$ *имеют при проектировании на* $\mathscr{P}(\mathbf{G}_0)$ *один и тот же видимый контур.*

Доказательство. При помощи рассуждения, аналогичного приведенному в п. II. 2.2.1), можно показать, что критическое множество отображения $\mathscr{P}(\varkappa_0)|\mathrm{L}'_J$ задается уравнениями Ландау композиции стягиваний $\varkappa'_J \circ \varkappa'_J$, причем на параметры $\alpha_{i'_J}(i'_J \in I'_J)$

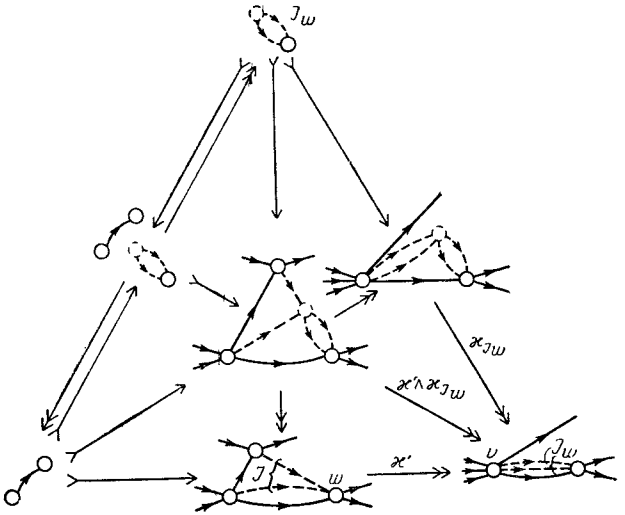


Рис. 39. Расслоенное произведение стягивания $\varkappa'$ на упругое стягивание.

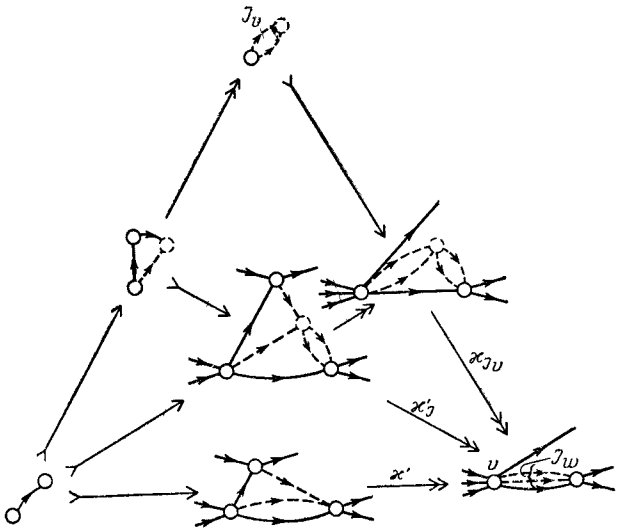


Рис. 40. J-упругое расширение стягивания $\varkappa'$.

нужно наложить дополнительные ограничения, связанные с тем, что L'_J — *главное* множество Ландау. Мы предположим, что L'_J является главным *в строгом смысле* (т. е. что все $\alpha_{i'_J}$ строго положительны). Тогда

1) четырехмерные векторы p_{j_v}, $j_v \in J_v$, не могут все быть пропорциональны. Действительно, для того, чтобы они были такими, необходимо, чтобы все циклы $j_v - j'_v$ из J_v были циклами в G'_J, т. е. чтобы G'_J был тривиальным расширением над J_v (предложение 0.3.6). Но тогда стягивание $\varkappa'_J$ было бы расслоенным произведением и не имело бы главных точек Ландау (замечание I. 3.4).

Из 1) вытекает, что

2) *четырехмерные векторы* p_{j_w}, $j_w \in J_w$, *не могут все быть пропорциональными*: это запрещается законом сохранения энергии-импульса в *упругой* вершине. Но так как J_w — подграф в $\mathbf{G}'_J$ то 2) означает, что все α_{j_w} $(j_w \in J_w)$ равны нулю. Следовательно, мы находимся на критическом множестве графа, полученного из $\mathbf{G}'_J$ *стягиванием кратной линии* J_w, т. е. в точности графа $\mathbf{G}'$.

Замечание. Это своеобразное явление можно было бы исследовать, используя коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dr, "\varkappa_0"] & \\
G'_J \arrow[ur, "\varkappa'\wedge\varkappa_{J_w}"] \arrow[dr, "\varkappa'_J"'] & & G_0 \\
 & G \arrow[ur, "\varkappa_0"'] &
\end{tikzcd}$$

и свойства расслоенного произведения.

III. 3.2. Интегралы поглощения: особенности подинтегрального выражения. Наличие кратных линий в графе $\mathbf{G}$ приводит нас к необходимости изменения также и подинтегрального выражения $S(\mathbf{G})$ в интеграле поглощения $A_{\mathbf{G}}$. С вершиной v — началом (или концом) максимальной кратной линии I оказывается

связанной амплитуда $\left(\prod_{J\subset I}\lambda_J\right)_*\langle S_v\rangle$. Аналитические свойства измененного таким образом подинтегрального выражения легко вывести из гипотез A, B, C (содержащих утверждения об аналитических свойствах распределения $\langle S_v\rangle$) и теорем A, B, C (содержащих утверждения об аналитических свойствах распределения $(1-\lambda_{J*})\langle S_v\rangle$). Очевидно, что единственными возможными особенностями, как и ранее, являются множества Ландау стягиваний на $\mathbf{G}$, но нужно позаботиться о корректном определении новых «критериев эффективности». Наиболее простой случай — это случай стягивания: $\varkappa'$: $\mathbf{G}'\twoheadrightarrow\mathbf{G}$ в v, *не доминирующего никакого из упругих стягиваний* $\varkappa_{J_v}$: $\mathbf{G}_J\twoheadrightarrow\mathbf{G}$, $J\subset I$. Из теоремы A вытекает тогда, что скачки $(1-\lambda_{J*})S(\mathbf{G})$ не имеют особенностей на $\mathrm{L}(\varkappa')$. Следовательно, *начальная амплитуда* $S(\mathbf{G})$ *и измененная амплитуда* $\left(\prod_{J\subset I}\lambda_J\right)_* S(\mathbf{G})$ *имеют особенности на одних и тех же частях множества* $\mathrm{L}(\varkappa')$, *а именно тех, которые соответствуют значениям параметров* $(\alpha_{i'}\geqslant 0)$.

Рассмотрим теперь случай стягивания в v, которое доминирует $\varkappa_{J_v}$. *Мы всегда можем рассматривать его как J-упругое расширение некоторого стягивания* $\varkappa'$: $\mathbf{G}'\twoheadrightarrow\mathbf{G}$ *и обозначать его, как в* п. III.3.1, *через*

$$\varkappa'_J\colon\ \mathbf{G}'_J\twoheadrightarrow\mathbf{G}$$

($\varkappa'$ получается из $\varkappa'_J$ «удалением упругой вершины», т. е. операцией, обратной к «вставке упругой вершины»). Используя все обозначения п. III.3.1, мы можем сформулировать такую лемму:

Лемма. *Эффективными для* $\lambda_{J*}\langle S_v\rangle$ *являются лишь те части множества* $\mathrm{L}(\varkappa'_J)$, *для которых* $\alpha_{i'}\geqslant 0$ *на всякой линии графа* G', *в то время как* $\alpha_{J_v}<0$ *на некоторых линиях из* J_v.

Доказательство. Согласно гипотезе A, эффективными частями для $\langle S_v\rangle$ являются лишь те части,

для которых $\alpha_{i'_J} \geqslant 0$ на всякой линии из G'_J. Но, как мы уже заметили (II. 3.2), гипотеза C и теорема C дают нам тогда равенство скачков $\langle S_v \rangle$ и $\langle 1-\lambda_{J^*} \rangle \langle S_v \rangle$, так что $\lambda_{J^*} \langle S_v \rangle$ не является разрывной и, следовательно, *не имеет особенностей*[1]). Значит, амплитуда $\lambda_{J^*} \langle S_v \rangle$ может иметь особенности лишь на частях, *не эффективных для* $\langle S_v \rangle$, *но эффективных для* $(1-\lambda_{J^*}) \langle S_v \rangle$. Эффективность для $(1-\lambda_{J^*}) \langle S_v \rangle$ выражается в точности условием $\alpha_{i'} \geqslant 0$ для всякой линии графа G' (ср. II. 2.2). Таким образом, лемма доказана.

III. 3.3. Аналитичность интегралов поглощения: пересмотр теорем A, B, C. Чтобы найти множества особых точек интеграла поглощения $A_{\mathbf{G}}$, мы должны, как и в гл. II, найти *видимые контуры множеств особых точек подинтегрального выражения.* Эти особые точки возникают из двух источников: во-первых, из стягиваний $\varkappa'$: $\mathbf{G}' \twoheadrightarrow \mathbf{G}$, которые не доминируют никакого упругого стягивания, и, во-вторых, из различных «упругих расширений» стягивания $\varkappa'$. Но своеобразное явление, описанное в п. III. 3.1, показывает, что *многообразия Ландау стягиваний* $\varkappa'$ *имеют те же видимые контуры, что и многообразия Ландау их упругих расширений.* Кроме того, если мы посмотрим на *критерии эффективности* для этих многообразий Ландау, то мы получим условия $(\alpha_{i'} \geqslant 0)$ для стягивания $\varkappa'$ и более сильные условия (лемма III. 3.2) для упругих расширений стягивания $\varkappa'$. Таким образом, *упругие расширения стягивания* $\varkappa'$ *не дают никаких новых особых точек интеграла поглощения по сравнению с теми, которые даются расширением* $\varkappa'$.

В результате получаем, что *теорема* A *в том виде, в каком она сформулирована в гл.* II, *остается справедливой для графов с кратными линиями, если оставить в формулировке* III. 2.2 *критерия эффективности только стягивания* $\varkappa'$, *не доминирующие никакого упругого стягивания.*

---

[1]) См. примечание 1 на стр. 86.

Аналогичное заключение справедливо для теоремы B.

Перейдем к теореме C, т. е. к вычислению скачка интеграла поглощения. Здесь необходимо обратить внимание на то, что особенность интеграла является видимым контуром *нескольких* особых многообразий подинтегрального выражения (возникающих из стягивания $\varkappa'$ и его различных упругих расширений), так что скачок задается не просто интегралом типа (Disc 2) приложения III, а *суммой* таких интегралов [1]). Однако в одном случае положение остается простым, а именно, в случае, когда видимый контур $L(\varkappa'_0)$ является множеством Ландау, *эффективным для амплитуды рассеяния*, т. е. когда не только $\alpha_{i'}$, но и все $\alpha_{i'_0}$ положительны. Из леммы III. 3.2 тогда вытекает, что подинтегральное выражение $\left(\prod_J \lambda_J\right)_* S(\mathbf{G})$ имеет особенность только на множестве Ландау стягивания $\varkappa'$ и *не имеет особенностей на множествах Ландау его упругих расширений.* Следовательно, скачок задается, как в гл. II, единственным интегралом

$$A_{\mathbf{G}} - A_{\mathbf{G}}^{(L'_0)} = \int\limits_{e_{L'}^{\varkappa_0}} \mathrm{Disc}^{(L')}\left(\prod_J \lambda_J\right)_* S(\mathbf{G}).$$

Подинтегральное выражение упрощается, если использовать результаты п. II. 3.4 о двойных скачках. Подставляя $1-\lambda'_*$ вместо $\mathrm{Disc}^{(L')}$, мы видим, что $(1-\lambda'_*)(1-\lambda_J)_* S(\mathbf{G}) = 0$, если $\varkappa'$ и $\varkappa_{J_v}$ несовместимы (соотношения Куткоски — Штейнмана). Но применяя критерий существования расслоенного произведения (предложение 0.4.2), легко видеть, что $\varkappa'$ и $\varkappa_{J_v}$ несовместимы тогда и только тогда, когда J *не является*

---

[1]) Мне кажется, что на самом деле эти интегралы можно преобразовать, учитывая гипотезу C для упругих стягиваний, но я проделал соответствующие вычисления лишь в простых частных случаях.

в $\mathbf{G}'$ *кратной линией.* Следовательно, в написанном выше выражении все λ_J, не соответствующие кратным линиям графа $\mathbf{G}'$, можно заменить на 1. Что касается остальных, то их можно поменять местами с $\mathrm{Disc}^{(L')}$, что даст нам следующий вид подинтегрального выражения:

$$\left(\prod_{J' \text{ кратная в } \mathbf{G}'} \lambda_{J'}\right)_* \mathrm{Disc}^{(L')} S(\mathbf{G}).$$

Заменяя, как и в гл. II, $\mathrm{Disc}^{(L')} S(\mathbf{G})$ его выражением, которое получается из гипотезы C, мы приходим к следующему заключению:

Модифицированная теорема C. *В случае когда множество Ландау* L_0' *эффективно для амплитуды рассеяния* $S(\mathbf{G}_0)$, *в подинтегральное выражение интеграла*

$$\int_{e^{\varkappa_0'}} S(\mathbf{G}')$$

необходимо внести точно такое же изменение, как и в гипотезе C. *Иначе говоря, всегда имеет место равенство скачков*

$$A_{\mathbf{G}} - A_{\mathbf{G}}^{(L_0')} = S(\mathbf{G}_0) - S^{(L_0')}(\mathbf{G}_0).$$

Напомним, что это равенство скачков является глубоким фактом, которому мы дали *прямое* обоснование в п. II.3.3. Таким образом, выполнение этого равенства является хорошим подтверждением правильности *модифицированной* гипотезы C.

ПРИЛОЖЕНИЕ 0

Теорема[1]. *Пусть $\varphi(x)$ — функция класса C^∞ с компактным носителем (например, содержащимся в интервале $(0, 1)$), F — распределение, являющееся граничным значением функции $f(z)$, аналитической в комплексной полуокрестности интервала $[0, 1]$, лежащей в верхней полуплоскости. Тогда функция*

$$\Phi(t) = \langle F, e^{itx}\varphi(x)\rangle$$

стремится к нулю быстрее любой отрицательной степени t при $t \to +\infty$.

Доказательство. 1) Достаточно доказать, что $\Phi(t) \to 0$. Утверждение о быстроте убывания можно вывести отсюда с помощью интегрирования по частям.

Например, для доказательства того, что $\Phi(t) \to 0$ быстрее, чем $1/t$, достаточно рассмотреть выражение

$$t\Phi(t) = \langle F, te^{itx}\varphi(x)\rangle = \frac{1}{i}\left[\langle F', e^{itx}\varphi(x)\rangle + \langle F, e^{itx}\varphi'(x)\rangle\right]$$

и заметить, что производные F' и φ' удовлетворяют условиям теоремы.

2) Можно предположить, что аналитическая функция $f(z)$ стремится к нулю при $z \to 0$ и при $z \to 1$ (по всякому направлению, трансверсальному вещественной оси).

Действительно, так как функция $f(z)$ имеет своим граничным значением распределение, то она ограничена по модулю отрицательной степенью расстояния от вещественной оси:

$$|f(x + iy)| < 1/y^N.$$

Поэтому достаточно заменить ее аналитической функцией

$$[z(z-1)]^{N+1} f(z),$$

разделив $\varphi(x)$ на $[x(x-1)]^{N+1}$ (полученная в результате функция остается бесконечно дифференцируемой, так как носитель φ не содержит точек 0 и 1).

---

[1]) Эта теорема, вероятно, известна аналитикам, но мне не удалось найти ее в литературе. Я получил ее доказательство в результате дискуссии с А. Мартином, В. Глазером и Ж. Бро.

3) Для доказательства того, что $\Phi(t)\to 0$, допустим, что выполнены условия 2), и рассмотрим функцию

$$\tilde{F}(t)=\int_{\Gamma} e^{itz} f(z)\,dz,$$

где Γ — дуга, соединяющая точки 0 и 1 в верхней полуплоскости и трансверсальная вещественной оси в этих точках. В силу интегральной теоремы Коши, эта функция не зависит от выбора дуги Γ. При $t\to+\infty$ подинтегральное выражение равномерно стремится к нулю на компакте Γ:

$$|e^{itz} f(z)|\leqslant M|z(z-1)|e^{-ty}.$$

Следовательно, $\tilde{F}(t)\to 0$ при $t\to+\infty$.

С другой стороны, $\tilde{F}(t)$ при $t\to-\infty$ растет не быстрее многочлена. Действительно, $\tilde{F}(t)$ можно считать преобразованием Фурье распределения с компактным носителем χF (где χ — характеристическая функция интервала [0, 1]). Следовательно, это аналитическая функция со степенным ростом (не превосходящая $M(1+|t|^N)$, где N — порядок распределения χF).

Для окончания доказательства осталось заметить, что $\Phi(t)$ является сверткой функции $\tilde{F}$ с преобразованием Фурье $\tilde{\varphi}$ функции φ и что $\tilde{\varphi}$ — интегрируемая (даже аналитическая) функция с быстрым убыванием при $t\to\mp\infty$.

Чтобы доказать, что свертка

$$\Phi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{F}(t')\,\tilde{\varphi}(t-t')\,dt'$$

стремится к нулю при $t\to+\infty$, разобьем интеграл на две части

$$\int_{-\infty}^{t/2}+\int_{t/2}^{\infty}.$$

Первый интеграл оценивается следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{t/2}|\tilde{F}(t')\,\tilde{\varphi}(t-t')\,dt'|\leqslant\int_{-\infty}^{t/2}M(1+|t'|)^N|\tilde{\varphi}(t-t')|\,dt'=$$

$$=\int_{t/2}^{\infty}M(1+|t-t''|)^N|\tilde{\varphi}(t'')|\,dt''\leqslant\int_{t/2}^{\infty}M(1+|t''|)^N|\tilde{\varphi}(t'')|\,dt''.$$

Это выражение стремится к нулю при $t \to \infty$ (в силу интегрируемости функции $(1+|t|)^N \tilde{\varphi}(t)$). Второй интеграл оценивается так:

$$\int_{t/2}^{\infty} |\tilde{F}(t')\tilde{\varphi}(t-t')|\,dt' \leqslant \left[\sup_{t'>t/2} |\tilde{F}(t')|\right] \int_{t/2}^{\infty} |\tilde{\varphi}(t-t')|\,dt' \leqslant$$

$$\leqslant \left[\sup_{t'>t/2} |\tilde{F}(t')|\right] \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\varphi}(t'')|\,dt''.$$

Так как $\tilde{F}(t)$ стремится к нулю при $t \to \infty$, то этот интеграл стремится к нулю.

Замечание. Вместо *одного* распределения (F, φ) можно задать *семейство распределений* (F_u, φ_u), *непрерывно зависящих от параметра* u. Тогда быстрое убывание функции $\Phi_u(t) = \langle F_u, e^{itx}\varphi_u(x)\rangle$ будет *равномерным по* u *на всяком компакте.*

Доказательство. Достаточно проверить равномерность оценок, которые использовались при доказательстве теоремы.

Следствие. *Если* $\varphi_u(x)$ *имеет компактный носитель в совокупности переменных* (u, x), *то для функции*

$$\Phi(t) = \int \langle F_u, e^{itx}\varphi_u(x)\rangle\,du$$

справедливо утверждение теоремы о быстром убывании.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

ВИДИМЫЕ КОНТУРЫ МНОГООБРАЗИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ ПЕРЕСЕЧЕНИЯМИ

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^p$ рассмотрим дифференцируемое подмногообразие S коразмерности m, заданное m уравнениями $s_1(y) = s_2(y) = \ldots = s_m(y) = 0$, причем $ds_1 \wedge ds_2 \wedge \ldots \wedge ds_m \neq 0$. Пусть $\pi\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ — каноническая проекция [1]) пространства $\mathbb{R}^p$ на евклидово пространство $\mathbb{R}^q$ $(q < p)$. Мы изучим локальные особенности дифференцируемого отображения [2]) $\pi \mid S\colon S \to \mathbb{R}^q$. Эта задача ничем не отличается от общей задачи, изученной Томом в [37], и все нижеследующее является лишь переформулировкой идей Тома в применении к нашему специальному способу постановки задачи.

A. I. 1. Критические точки

Пусть

$$\underset{y}{\mathbb{R}^p} = \underset{x}{\mathbb{R}^n} \times \underset{t}{\mathbb{R}^q}.$$

Напомним, что точка $y = (x, t) \in S$ называется *критической* для отображения $\pi|S$, если касательное к $\pi|S$ отображение в точке y не является сюръективным. Это равносильно тому, что касательное отображение не является инъективным, т. е. что в точке t существует вектор $\theta \neq 0$, кокасательный к $\mathbb{R}^q$, такой, что $(\pi \mid S)_y^* \theta = 0$, т. е. $\pi_y^* \theta \mid S = 0$. Ядро кокасательного отображения, т. е. пространство всех возможных векторов θ, является векторным пространством, размерность которого называется *корангом* (в пространстве-образе) критической точки y.

Для того чтобы вектор ω, кокасательный к $\mathbb{R}^p$ в точке y, имел нулевое ограничение на S, необходимо и достаточно, чтобы

---

[1]) В силу *локального* характера этого исследования, в качестве π можно взять произвольное дифференцируемое расслаивающее отображение многообразий.

[2]) Все наши рассуждения используют лишь *теорему о неявных функциях*. Следовательно, их можно применить и в случае, когда слово «дифференцируемый» всюду заменено словом «аналитический».

он был представим в виде

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, ds_i(y).$$

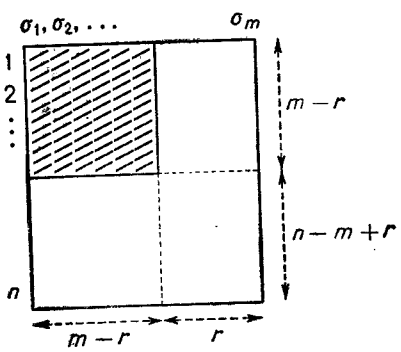
С другой стороны, для того чтобы вектор ω можно было представить в виде $\pi_y^* \theta$, необходимо и достаточно, чтобы он был «параллелен $\mathbb{R}^q$», т. е. чтобы его ограничение на «слой» $\mathbb{R}^n$ было нулевым. Следовательно, точка y является критической тогда и только тогда, когда можно найти параметры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, не все равные нулю, такие что

$$\text{(L)} \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, ds_i(y)\,|_{t=\text{const}} = 0.$$

Отсюда же видно, что *коранг* критической точки совпадает с размерностью векторного пространства (α_i) решений уравнения (L).

A. I. 2. Трансверсально критические точки

Пусть $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ — последовательность m векторов пространства $\mathbb{R}^n$. Обозначим через F_r подмножество пространства $\mathbb{R}^{mn}$, на котором матрица размера $m \times n$, определяющая последовательность σ, имеет в точности ранг $m - r$. Легко проверить, что F_r является *подмногообразием* коразмерности $r(n - m + r)$.



С другой стороны, рассмотрим отображение $S'\colon S \to \mathbb{R}^{mn}$, определенное формулами:

$$\text{(S')} \qquad \sigma_i(y) = \frac{\partial}{\partial x} s_i(y).$$

Ясно, что результаты § A. I. 1 можно сформулировать следующим образом: *точка y является критической точкой коранга r тогда и только тогда, когда* $S'(y) \in F_r$.

Определение (Р. Том). Критическая точка y коранга r называется *трансверсально критической*, если отображение S' трансверсально в точке y над F_r, т. е. если график отображения S' пересекает $S \times F_r$ трансверсально в точке $S'(y)$ (рис. 41).

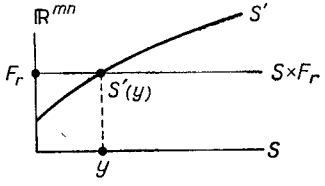


Рис. 41. Трансверсальность критической точки.

Тогда $S' \cap (S \times F_r)$ в окрестности точки $S'(y)$ является подмногообразием размерности

$$\dim S - \operatorname{codim} F_r = p - m - r(n - m + r).$$

Это подмногообразие проектируется на S в подмногообразие S_r той же размерности. Отсюда вытекает такой результат:

Множество трансверсально критических точек коранга r является подмногообразием S_r размерности $p - m - r(n - m + r)$[1]).

Если отображение S' *трансверсально всюду над всеми F_r*, то мы получаем разбиение многообразия S на подмногообразия S_r ($r \geqslant r_0 = \sup\{m - n, 0\}$). О множестве S_{r_0} можно сказать только, что это открытое множество точек из S, в которых ранг отображения $\pi|S$ максимален, и мы его обозначим просто через S. Но к подмногообразию S_r ($r > r_0$) можно опять применить те же рассуждения, которые мы только что использовали для многообразия S. Если отображение S'_r: $S_r \to \mathbb{R}^{mn}$ трансверсально[2])

---

[1]) Обозначим через S_0 открытое множество подмногообразия S, образованное точками, в которых ранг $\pi|S$ равен размерности q пространства-образа («регулярные точки» многообразия S). Если $\dim S < q$, т. е. $m > n$, то это открытое множество, очевидно, пусто. Тогда первым непустым из множеств F_r является F_{m-n} *открытое* подмножество пространства $\mathbb{R}^{mn}$, так что множество $S' \cap (S \times F_{m-n})$ является открытым в S' и проектируется в *открытое* подмножество S_{m-n} многообразия S, а именно в множество точек, в которых ранг $(\pi|S) = \dim S$.

[2]) В действительности это условие трансверсальности следует изменить так, чтобы учесть сведения об отображении S'_r которыми мы уже обладаем, а именно:

1) тот факт, что касательное пространство к S_r содержится в касательном пространстве к S;

всюду над всеми $F_{r'}$, то мы получаем разбиение S_r на подмногообразия $S_{r'r} = S_{r'}(S_r)$. Очевидно, что $\dim S_r < q$ (в частности, $\dim S_1 = p - m - (n - m + 1) = p - n - 1 = q - 1$). Поэтому непустыми являются лишь те подмногообразия $S_{r'r}$, для которых $r' \geqslant r$. О S_{rr} можно сказать только, что это открытое множество точек из S_r, в которых $\pi | S_r$ имеет максимальный ранг, или «обыкновенных критических точек коранга r»; мы обозначим его просто через S_r. Далее можно повторить ту же процедуру, начиная с $S_{r'r}$ $(r' > r)$, и т. д. По причине убывания размерностей этот итерационный процесс после конечного числа шагов остановится, и мы получим таким образом конечное разбиение многообразия S на подмногообразия убывающих размерностей: S — открытое множество в S, S_r, $S_{r'r}$, ..., $S_{r''\ldots r'r}$ $(r'' > \ldots > r' > r)$. Для определения этих подмногообразий *необходимо выполнение условий трансверсальности на всех этапах.* Если эти условия выполнены, то мы будем говорить, что имеем дело со случаем *общего положения.* Случай общего положения является *устойчивым*: так как отображение, трансверсальное к многообразию, остается трансверсальным и после малой деформации, то особенность, например, типа S_{21} после малой деформации также остается особенностью типа S_{21}. Но настоящая проблема — узнать, остается ли неизменным *топологический тип* особенности. Действительно, можно себе представить, что «символ» S_{21}, например, охватывает бесконечное множество топологически различных ситуаций, что значительно повысило бы интерес к указанной выше классификации. На самом деле Том сумел непосредственно проверить, что самые простые из вышеуказанных «символов» не обладают такой патологией, а для малых размерностей пространства-образа даже дают *полную классификацию топологически устойчивых типов особенностей.*

---

2) *«соотношения интегрируемости»* между коэффициентами отображения S'_r: так как в уравнения многообразия S_r входят первые производные функции s_i, то коэффициенты отображения S'_r содержат их вторые производные, и можно убедиться, что тождества $\dfrac{\partial^2 s_i}{\partial x_j \partial x_k} = \dfrac{\partial^2 s_i}{\partial x_k \partial x_j}$ при $r > 1$ дают нетривиальные соотношения между этими коэффициентами.

Далее, вместо того чтобы рассматривать S'_r как отображение $S_r \to \mathbb{R}^{mn}$, мы будем считать его *сечением подрасслоения в* $S \times \mathbb{R}^{mn}$, определенного указанными выше условиями, и *именно от этого сечения мы будем требовать трансверсальности к* $F_{r'}$.

Точно так же, когда мы захотим повторить указанный процесс и определить условие трансверсальности для отображений $S'_{r'r}$ и т. д., мы должны иметь в виду условия, аналогичные условиям 1) и 2) (только все более сложные).

Примеры

$\boxed{q=1}$ *Единственная особенность общего положения*: S_1.

Пусть дана *функция* t: $S \to \mathbb{R}$. Критическая точка — это точка, в которой градиент $\partial t/\partial \xi$ обращается в нуль (через ξ мы обозначили локальную систему координат на S); очевидно, что всякая критическая точка имеет коранг 1. Если эта точка трансверсально критическая, то она является *изолированной критической точкой*, и мы имеем ситуацию типа S_1. Условие трансверсальности в этом случае выражается необращением в нуль «гессиана» (определителя из вторых производных) функции t. В этом случае всегда можно выбрать координаты ξ таким образом, чтобы t записывалась в следующем виде:

$$t = \pm \xi_1^2 \pm \xi_2^2 \pm \ldots \pm \xi_s^2 \qquad (s = \dim S),$$

и единственный возможный произвол состоит в выборе знаков $\pm$. Следовательно, *топологический* (*и даже дифференцируемый*) *тип ситуации* S_1 *целиком определяется заданием «индекса» критической точки, т. е. числа отрицательных собственных значений квадратичной формы* $\dfrac{\partial^2 t}{\partial \xi_i \, \partial \xi_j}$.

$\boxed{q=2}$ *Единственные особенности общего положения*: S_1 и S_{21} (предполагаем, что $\dim S \geqslant 2$).

Если условие трансверсальности выполнено, то множеством критических точек является *кривая* S_1 [1]), а многообразие S_1 — это множество точек, в которых касательная к этой кривой не является «вертикальной» (т. е. перпендикулярной к плоскости проекции). Пересекая S «вертикальной» гиперплоскостью, трансверсальной к этой кривой, мы приходим к предыдущему случаю. Значит, *ситуация* S_1 *для* $q = 2$ *описывается следующей локальной моделью*:

$$\begin{cases} t_1 = \xi_1 & \text{(уравнение трансверсальной гиперплоскости)}, \\ t_2 = \pm \xi_2^2 \pm \ldots \pm \xi_s^2, \end{cases}$$

и ее дифференцируемый тип полностью характеризуется *трансверсальным индексом* критической точки (числом отрицательных собственных значений квадратичной формы, полученной ограничением на трансверсальную гиперплоскость).

Многообразие S_{21} состоит из изолированных точек («исключительные критические точки»), в которых касательная к S_1 вертикальна и «не остается стационарным образом в этом вертикальном положении» (трансверсальность отображения S_1' по от-

[1]) Упражнение: покажите, что S_2 пусто.

ношению к F_2). *Локальную модель для ситуации S_{21} можно описать следующим образом*:

$$t_1 = \xi_1,$$
$$t_2 = \xi_2^3 \pm \xi_1\xi_2 \pm \xi_3^2 \pm \xi_4^2 \pm \ldots \pm \xi_s^2,$$

откуда следует, что видимый контур имеет точку возврата (см., например, рис. V9 работы [29]).

$\boxed{q = 3}$ ($\dim S \geqslant 3$). *Единственные особенности общего положения*: S_1, S_{21}, S_{321}.

Отметим общий факт: если некоторый символ удалось представить локальной моделью для некоторых размерностей (s, q) пространства-прообраза и пространства-образа, то локальная модель для $(s+1, q+1)$ получается из нее с помощью «надстройки», т. е. путем добавления одной и той же переменной к пространству-прообразу и пространству-образу (ср. со способом, при помощи которого случай $q = 2$ для S_1 получается из случая $q = 1$). Так, в ситуации S_{21} для $q = 3$ видимый контур будет поверхностью, имеющей *ребро возврата*. Напротив, ситуация S_{321} здесь появляется впервые. Она характеризуется существованием точки возврата у вышеуказанного ребра возврата (особенность, называемая «ласточкиным-хвостом»).

$\boxed{q = 4}$

Здесь впервые появляются особенности типа S_2. Подробнее см. Том [37].

А. I. 3. Аналитическая запись условия трансверсальности

Пусть $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ — точка многообразия F_r; предположим для определенности, что $\sigma_{r+1} \wedge \sigma_{r+2} \wedge \ldots \wedge \sigma_m \neq 0$. В окрестности точки σ многообразие F_r тогда задается следующими уравнениями:

$$\sigma_\rho \wedge \sigma_{r+1} \wedge \sigma_{r+1} \wedge \ldots \wedge \sigma_m = 0, \qquad \rho = 1, 2, \ldots, r,$$

так что его касательное пространство в точке σ определяется уравнениями

$$d\sigma_\rho \wedge \sigma_{r+1} \wedge \sigma_{r+2} \wedge \ldots \wedge \sigma_m +$$
$$+ \sum_{\mu=r+1}^{m} (-)^{\mu-r} \sigma_\rho \wedge \sigma_{r+1} \wedge \sigma_{r+2} \wedge \ldots \wedge d\sigma_\mu \wedge \ldots \wedge \sigma_m = 0,$$
$$\rho = 1, 2, \ldots, r,$$

которые после подстановки вместо σ_ρ их выражений

$$\sigma_\rho = \sum_{\mu=r+1}^{m} \alpha_\mu^\rho \sigma_\mu$$

преобразуются в следующие уравнения:

$$\left(d\sigma_\rho - \sum_{\mu=r+1}^{m} \alpha_\mu^\rho d\sigma_\mu\right) \wedge \sigma_{r+1} \wedge \sigma_{r+2} \wedge \ldots \wedge \sigma_m = 0,$$

т. е. в уравнения

$$(F_r^*) \qquad \alpha\sigma_\rho^\perp - \sum_{\mu=r+1}^{m} \alpha_\mu^\rho \alpha\sigma_\mu^\perp = 0, \qquad \rho = 1, 2, \ldots, r,$$

где $d\sigma_i^\perp$ обозначает проекцию вектора $d\sigma_i$ на пространство, ортогональное к $(m-r)$-мерной гиперплоскости, натянутой на векторы $\sigma_{r+1}, \sigma_{r+2}, \ldots, \sigma_m$. Таким образом, кокасательное пространство к $S \times F_r$ натянуто на векторы $(dy_j, d\sigma_i^\perp)$, связанные соотношениями (F_r^*) и условием

$$(S^*) \qquad ds_i(y) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Уравнения для кокасательного пространства к $(S \times F_r) \cap S'$ получаются отсюда, если заменить $d\sigma_i^\perp$ их выражениями, полученными из уравнений (S'):

$$d\sigma_i^\perp = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2 s_i(y)}{\partial y_j \partial x^\perp} dy_j,$$

где через $x^\perp$ обозначены координаты пространства, ортогонального к векторам $\sigma_{r+1}, \sigma_{r+2}, \ldots, \sigma_m$. Искомое кокасательное пространство, следовательно, порождено векторами dy_j, связанными соотношениями

$$(F_r^*)' \qquad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{p} \alpha_i^\rho \frac{\partial^2 s_i(y)}{\partial y_j \partial x^\perp} dy_j = 0, \qquad \rho = 1, 2, \ldots, r,$$

$$(S^*)' \qquad \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial s_i}{\partial y_j} dy_j = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

где α_i^ρ при $i \leqslant r$ определены следующим образом:

$$\alpha_i^\rho = \begin{cases} -1 & \text{при } i = \rho, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следовательно, условие трансверсальности эквивалентно тому, что матрица

$$
\begin{array}{c}
j = \\
\overbrace{1,\ 2,\ \ldots \qquad\qquad p} \\
x^{\perp}\left\{\boxed{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^1 \frac{\partial^2 s_i}{\partial y_j\, \partial x^{\perp}}}\right. \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x^{\perp}\left\{\boxed{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^r \frac{\partial^2 s_i}{\partial y_j\, \partial x^{\perp}}}\right. \\
i = \left\{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{array}\right. \boxed{\frac{\partial s_i}{\partial y_j}}
\end{array}
$$

имеет максимальный ранг. Учитывая, что число столбцов этой матрицы не меньше числа строк ($p \geqslant m + r(p - m - r)$, если $\dim S_r \geqslant 0$), мы видим, что *нарушение условия трансверсальности в критической точке коранга r* означает существование r ортогональных к векторам $\sigma_i = \partial s_i / \partial x$ векторов $V^{\rho} \in \mathbb{R}^n$, из которых хотя бы один отличен от нуля, и m чисел β_i, таких, что выполняется следующее условие:

$$
(\mathrm{T}_j^{\prime}\mathrm{s})_1 \qquad \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{\rho=1}^{r} \sum_{k=1}^{n} a_i^{\rho} \frac{\partial^2 s_i}{\partial y_j\, \partial x_k} V_k^{\rho} + \beta_i \frac{\partial s_i}{\partial y_j} \right) = 0,
$$

$$
j = 1,\ 2,\ \ldots,\ p.
$$

Запишем, кроме того, условие ортогональности векторов V^{ρ} и σ_i:

$$
(\mathrm{T}_j^{\prime}\mathrm{s})_2 \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial s_i}{\partial x_k} V_k^{\rho} = 0, \qquad \begin{array}{l} \rho = 1,\ 2,\ \ldots,\ r, \\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m. \end{array}
$$

Напомним, что векторы α^{ρ} образуют базис векторного пространства решений уравнения (L) в критической точке.

Исключительные критические точки

«Исключительные критические точки» (точки, в которых ранг отображения $\pi | S_r$ не максимален) можно охарактеризовать как точки, в которых размерность кокасательного пространства к S_r,

ограниченного на слой, не минимальна. Ограничение на слой в указанной матрице означает замену $\partial/\partial y_j$ на $\partial/\partial x_k$. В матрице, полученной таким путем, число столбцов не больше числа строк $[n \leqslant m + r(n - m + r)]$, и *исключительный* характер критической точки означает существование ненулевого вектора $V \in \mathbb{R}^n$, такого, что

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \alpha_i^\rho \frac{\partial^2 s_i}{\partial x_k \, \partial x^\perp} V_k = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial s_i}{\partial x_k} V_k = 0,$$

причем первое уравнение должно выполняться для всех ρ и *для тех координат* $x^\perp$, *для которых* $\partial s_i/\partial x^\perp = 0$. Таким образом, это условие можно сформулировать еще и так:

существуют ненулевой вектор $V \in \mathbb{R}^n$ *и параметры* β_i, *такие, что*

$$(\mathrm{Exc})_1 \quad \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_i^\rho \frac{\partial^2 s_i}{\partial x_k \, \partial x_j} V_k + \beta_i \frac{\partial s_i}{\partial x_j} \right) = 0, \qquad \begin{array}{l} j = 1, 2, \ldots, n, \\ \rho = 1, 2, \ldots, r, \end{array}$$

$$(\mathrm{Exc})_2 \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial s_i}{\partial x_k} V_k = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

А. I. 3.1. Замечание. В случае, когда коранг равен 1 ($r = 1$), пара уравнений (Exc) идентична паре ($\mathrm{T}_f^{\prime}\mathrm{s}$) с точностью до того, что дифференцирование по y_j заменяется дифференцированием только по x_j. Следовательно, если уравнения (Exc) не удовлетворяются, то и уравнения ($\mathrm{T}_f^{\prime}\mathrm{s}$) *тем более* не удовлетворяются. Это означает, что мы имеем *обыкновенную трансверсально критическую точку коранга* 1, т. е. особенность типа S_1.

А. I. 3. 2. Замечание. Так как уравнения (Exc) не зависят явно от координат базы, то можно произвольно уменьшить базу (заменить $\mathbb{R}^q$ на $\mathbb{R}^{q'} \subset \mathbb{R}^q$), не изменяя характера особенности S_1. На первый взгляд это кажется парадоксальным, так как в качестве $\mathbb{R}^{q'}$ можно выбрать касательное пространство к видимому контуру. Но в действительности при этом нарушится условие $ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m \neq 0$, т. е. S (в общем случае) перестанет быть многообразием, и наш анализ будет неприменим. Впрочем, все это очевидно и геометрически, и нет нужды прибегать к уравнениям.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

ОСОБЕННОСТИ КОМПОЗИЦИИ ОТОБРАЖЕНИЙ

Пусть задана коммутативная диаграмма дифференцируемых отображений

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & \mathbb{R}^p \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R}^q \end{tikzcd}$$

Естественно спросить, какие особенности имеет композиция h отображений f и g, если известны особенности отображений f и g. Общая теория в духе идей Тома, по-видимому, никогда не разрабатывалась и, вероятно, была бы очень сложной. Она привела бы к определению новых типов особенностей для отображения h, которые, будучи *устойчивыми* относительно малых изменений составляющих отображений f и g, тем не менее окажутся *неустойчивыми*, если свободно изменять h, забывая о том, что h является композицией отображений (эти особенности не являются особенностями «общего положения» в смысле приложения I). В дальнейшем мы удовольствуемся тем, что введем, применяя элементарные рассуждения, «первые типы» особенностей, появляющиеся в этой классификации (в том же смысле, в каком тип S_1 есть «первый тип», появляющийся в классификации Тома).

Определения и обозначения

Регулярное отображение, или субмерсия, — отображение, имеющее *серъективное* касательное отображение.

Γf = *критическое множество* отображения f = множество точек, в которых f не является регулярным.

$\mathrm{L}f = f(\Gamma f)$ = *видимый контур* отображения f.

Результаты, сформулированные в § A. II. 1, A. II. 2, A. II. 3, тривиально следуют из этих определений. Само собой разумеется, что мы выбираем раз и навсегда тройку точек, соответствующих друг другу при отображениях f, g, h, и что исследование «регулярности» отображений f, g, h производится в этих точках.

A. II. 1. Если h регулярно, то g также регулярно

Следствие: $\Gamma h \supset f^{-1}(\Gamma g)$; $\mathrm{L}h \supset \mathrm{L}g$.

А. II. 2. Предположим, что f регулярно

Тогда, если g регулярно, то h также регулярно (и обратно, в силу А. II. 1).

Следствие: $\Gamma h = f^{-1}(\Gamma g)$; $\mathrm{L}h = \mathrm{L}g$: *видимые контуры совпадают.*

Заметим, что если $n > p$, то размерность множества $\Gamma h = f^{-1}(\Gamma g)$ будет, вообще говоря, больше, чем размерность множества Γg, и, следовательно, больше размерности видимого контура, откуда вытекает, что *критическое множество Γh не является трансверсально критическим* (в смысле Тома).

А. II. 3. Предположим, что g регулярно

Тогда, если h сингулярно, то f также сингулярно.

Следствие: $\Gamma f \supset \Gamma h$.

Предположим, кроме того, что f — отображение типа S_1.

Тогда Γf является *многообразием*, которое изоморфно проектируется на *многообразие* $\mathrm{L}f$, и мы сразу убеждаемся, что

$$\Gamma h = f^{-1}\Gamma(g \mid \mathrm{L}f),$$

откуда

$$\mathrm{L}h = \mathrm{L}(g \mid \mathrm{L}f).$$

Последнее можно выразить с помощью следующей фразы: *видимый контур композиции отображений является видимым контуром видимого контура.* Более того,

А. II. 3. 1. *Если $g|\mathrm{L}f$ типа S_1, то h также типа S_1.*

Действительно, отображение f — как мы предположили, типа S_1 — можно записать с помощью следующей локальной модели:

$$f: \begin{cases} y_1 = x_1, \\ \cdots\cdots \\ y_{p-1} = x_{p-1}, \\ y_p = \pm x_p^2 \pm \ldots \pm x_n^2. \end{cases}$$

Многообразие $\mathrm{L}f$ имеет уравнение $y_p = 0$, и легко видеть, что гипотезы: $g|\mathrm{L}f$ типа S_1 и g регулярно — аналитически можно выразить с помощью следующей локальной модели

$$g: \begin{cases} z_1 = y_1, \\ \cdots\cdots \\ z_{q-1} = y_{q-1}, \\ z_q = \pm y_q^2 \pm \ldots \pm y_{p-1}^2 + y_p. \end{cases}$$

Композиция отображений f и g дает, очевидно, требуемый результат.

А.II.3.2. *Если h — отображение типа S_1^+, то $g \mid \mathrm{L}f$ — также типа S_1^+* [1]).

Действительно, так как Γf изоморфно проектируется на $\mathrm{L}f$, то $g \mid \mathrm{L}f$ — того же типа, что и $h \mid \Gamma f$. Но в начале § А. II. 3 мы видели, что Γf содержит Γh, так что все сводится к доказательству того, что ограничение особенности типа S_1^+ на многообразие, содержащее критическое многообразие, также является особенностью типа S_1^+, что совершенно очевидно. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть, что происходит в сечении, трансверсальном к критическому многообразию, и использовать тот факт, что положительно определенная квадратичная форма остается положительно определенной, если ее ограничить на подпространство.

А. II. 4. Особенности типа $S_1 \circ S_1$

Предположим, что отображения f и g имеют особенности типа S_1. Для композиции отображений $h = g \circ f$ могут получиться самые разные типы особенностей, среди которых мы условимся выделять типы, *устойчивые относительно малых деформаций отображений f и g*. Мы увидим, что имеется *всего навсего два устойчивых типа*, по крайней мере когда отображение g имеет тип S_1^+: первый тип, обозначаемый $(S_1 \circ S_1)_1$, для которого коранг отображения h равен 1; второй тип, обозначаемый $(S_1 \circ S_1)_2$, соответствующий корангу отображения h, равному 2.

Необходимое условие устойчивости, очевидно [2]), следующее:

А.II.4.0. *$\mathrm{L}f$ и Γg пересекаются трансверсально.*

Пусть $V = \mathrm{L}f \cap \Gamma g$. Так как Γg изоморфно проектируется на $\mathrm{L}g$, то подмногообразие $V \subset \Gamma g$ изоморфно проектируется на подмногообразие $\Lambda \subset \mathrm{L}g$ коразмерности 2 в $\mathbb{R}^q$. В пространстве-образе $\mathbb{R}^q$ выберем систему координат $(z_1, z_2, \ldots, z_q)$ так, чтобы z_q было локальным уравнением многообразия $\mathrm{L}g$, а (z_{q-1}, z_q) — системой локальных уравнений многообразия Λ. В «промежуточном» пространстве $\mathbb{R}^p$ выберем координаты

---

[1]) Через S_1^+ обозначается особенность типа S_1 с *трансверсальным индексом, равным нулю.*

[2]) Это очевидно, если под «топологическим типом композиции отображений» понимать не только топологический тип отображения h, рассматриваемого изолированно, а топологический тип диаграммы отображений

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & \cdot \arrow[d, "g"] \\ & \cdot \end{tikzcd}$$

$y_1, \ldots, y_p$ так, чтобы $y_p = 0$ было локальным уравнением многообразия $\mathrm{L}f$ и $y_{q-1} = 0$, $y_q = 0, \ldots, y_{p-1} = 0$ — системой локальных уравнений многообразия Γg, а в качестве первых координат возьмем $y_1 = z_1$, $y_2 = z_2, \ldots, y_{q-2} = z_{q-2}$ (такой выбор обусловлен *изоморфным* характером отображения $g \mid \mathrm{V}\colon \mathrm{V} \to \Lambda$). Наконец, в пространстве-прообразе $\mathbb{R}^n$ выберем координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ так, чтобы $x_p = 0$, $x_{p+1} = 0, \ldots, x_n = 0$ была системой локальных уравнений многообразия Γf, а в качестве первых координат возьмем $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, \ldots, x_{p-1} = y_{p-1}$. Чтобы полностью определить отображения f и g, остается задаться функциями $y_p(x)$, $z_q(y)$, $z_{q-1}(y)$. Две первые (поскольку f и g — отображения типа S_1) должны начинаться с квадратичных членов

$$y_p(x) = Q_f(x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n) + \ldots,$$
$$z_q(y) = Q_g(y_{q-1}, y_q, \ldots, y_{p-1}) + \ldots,$$

где Q_f и Q_g — невырожденные квадратичные формы своих аргументов. Наоборот, функция $z_{q-1}(y)$ выбирается не вполне однозначно; это связано с коранго отображения h. Чтобы выразить этот факт *инвариантным* образом, введем «трансверсальное кокасательное пространство», обозначаемое $T^*(\mathbb{R}^q/\Lambda)$: это двумерное пространство ковекторов пространства $\mathbb{R}^q$, ограничение которых на Λ равно нулю (здесь это пространство, порожденное ковекторами dz_q и dz_{q-1}). Так как $\Lambda \subset \mathrm{L}g$, то пространство $T^*(\mathbb{R}^q/\Lambda)$ содержит ядро кокасательного отображения g^*, которое одномерно, поскольку мы имеем дело с критической точкой коранга 1 (здесь этим ядром является пространство, порожденное ковектором dz_q). Следовательно, $g^*T^*(\mathbb{R}^q/\Lambda)$ — *одномерное* векторное пространство, так что ковектор $\theta \in g^*T^*(\mathbb{R}^q/\Lambda)$ определен однозначно с точностью до умножения на постоянную (здесь можно положить $\theta = d[z_{q-1}(y)]$). О ковекторе θ известны только два факта: во-первых, его ограничение на V равно нулю (так как кокасательное к V пространство является образом кокасательного к Λ пространства при отображении g^*); во-вторых, его ограничение на Γg не равно нулю (так как кокасательное к Γg пространство является *изоморфным* образом кокасательного к $\mathrm{L}g$ пространства при отображении g^*). Напротив, об ограничении ковектора θ на $\mathrm{L}f$ мы ничего не знаем, так что надо различать два случая: $\theta \mid \mathrm{L}f \neq 0$ и $\theta \mid \mathrm{L}f = 0$. Сразу видно, что первое условие соответствует случаю *коранга* 1 для отображения $g \mid \mathrm{L}f$ (или, что то же самое, для композиции отображений h), в то время как второе условие — случаю *коранга* 2.

А. II. 4.1. Случай коранга 1. Из трех условий $\theta \mid \mathrm{V} = 0$, $\theta \mid \Gamma g \neq 0$, $\theta \mid \mathrm{L}f \neq 0$ вытекает, что разложение функции $z_{q-1}(y)$ начинается с линейного члена относительно y_p в сумме с линейной функцией от $(y_{q-1}, y_q, \ldots, y_{p-1})$. Если отображение g не является отображением типа S_1^+, необходимо еще уточнить, как расположен этот последний линейный член по отношению

к *изотропному конусу* квадратичной формы Q_g [1]. Но если g — отображение типа S_1^+, т. е. если квадратичная форма Q_g *положительно определена*, то все ясно: при подходящем выборе координат $y_{q-1}, y_q, \ldots, y_{p-1}$ мы будем иметь $Q_g = y_{q-1}^2 + y_q^2 + \ldots + y_{p-1}^2$ и $\theta \mid Lf = dy_{p-1}$, и диаграмму отображений

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g"] \\ \cdot \arrow[r, "f"] & \cdot \end{tikzcd}$$

можно задать с помощью следующей локальной модели:

$$f: \begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \cdots \\ y_{p-1} = x_{p-1}, \\ y_p = \pm x_p^2 \pm \ldots \pm x_n^2, \end{cases}$$

$$g: \begin{cases} z_1 = y_1, \\ z_2 = y_2, \\ \cdots \\ z_{q-2} = y_{q-2}, \\ z_{q-1} = y_{p-1} + y_p, \\ z_q = y_{q-1}^2 + y_q^2 + \ldots + y_{p-1}^2, \end{cases}$$

$$h = g \circ f: \begin{cases} z_1 = x_1, \\ z_2 = x_2, \\ \cdots \\ z_{q-2} = x_{q-2}, \\ z_{q-1} = x_{p-1} \pm x_p^2 \pm \ldots \pm x_n^2, \\ z_q = x_{q-1}^2 + x_q^2 + \ldots + x_{p-1}^2. \end{cases}$$

---

[1]) Правильнее, обратной квадратичной формы, определенной на сопряженном пространстве. Точнее, матрица из вторых производных

$$\left\| \frac{\partial^2 z_q}{\partial y_i \, \partial y_j} \right\|$$

определяет *невырожденную квадратичную форму* Q_g на касательном пространстве, трансверсальном к Γg. Ограничивая ее на Lf, мы получаем невырожденную квадратичную форму $Q_g \mid Lf$, определенную на пространстве $T_*(Lf/V)$ касательных к Lf и трансверсальных к V векторов. Обратная квадратичная форма $(Q_g \mid Lf)^{-1}$ определена на сопряженном пространстве $T_*(Lf/V)$, которому принадлежит ковектор $\theta \mid Lf$ (так как $\theta \mid V = 0$). Изотропный *конус* определяется условием $(Q_g \mid Lf)^{-1}(\theta \mid Lf) = 0$.

Легко вычислить критическое множество Γh: это объединение двух многообразий

$$f^{-1}(\Gamma g) = \{x_{q-1} = x_q = \ldots = x_{p-2} = x_{p-1} = 0\}$$

и

$$\{x_{q-1} = x_q = \ldots = x_{p-2} = x_p = x_{p+1} = \ldots = x_n = 0\}.$$

В пространстве-образе $\mathbb{R}^q$ первое многообразие проектируется на $\mathrm{L}g = \{z_q = 0\}$, второе — на многообразие, касательное к $\mathrm{L}g$, т. е. $\{z_q = z_{q-1}\}$ (рис. 42). На рис. 42 представлен не только

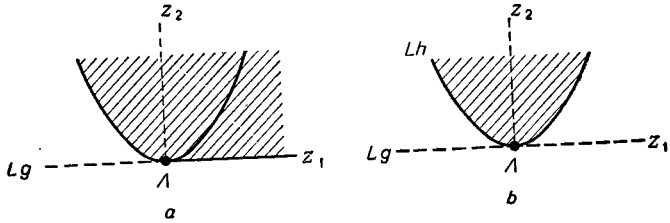


Рис. 42. Видимый контур композиции отображений $(S_1^+ \circ S_2^+)_1$. Заштрихованная область — образ композиции отображений h. Сплошная кривая — видимый контур отображения h. a — общий случай $n \geqslant p$; b — частный случай $n = p - 1$.

«общий случай» $n \geqslant p$, но также и «частный случай» $n = p - 1$ (то, что f: $\mathbb{R}^{p-1} \to \mathbb{R}^p$ — отображение типа S_1, равносильно тому, что его ранг равен $p - 1$, и, следовательно, оно является «погружением»).

А. II. 4.2. Случай коранга 2. Рассмотрим случай коранга 2, т. е. случай, когда $\theta|\mathrm{L}f$ обращается в нуль. Если мы хотим определить *устойчивую* ситуацию, то необходимо наложить новое *условие трансверсальности*, которое можно сформулировать следующим образом: *пусть*

$$[\theta \mid \mathrm{L}f]\colon \mathrm{V} \to T^*(\mathrm{L}f/\mathrm{V})$$

— отображение, которое всякой точке из V *ставит в соответствие кокасательный вектор* $\theta|\mathrm{L}f$, *определенный в этой точке; мы предположим, что это отображение трансверсально над значением* 0.

Так как пространство $T^*(\mathrm{L}f/\mathrm{V})$ имеет размерность $p - q + 1$, а V — размерность $q - 2$, то можно показать, что «устойчивая ситуация коранга 2», определенная указанным условием трансверсальности, возможна лишь при условии $p - q + 1 \leqslant q - 2$, т. е.

$p \leqslant 2q-3$. Множество точек коранга 2 является тогда *многообразием размерности* $2q-3-p$ (многообразие $[\theta|Lf]^{-1}(0)$).

Локальная модель для этой ситуации отличается от случая А. II. 4.1 лишь выражением функции $z_{q-1}(y)$: на V можно вы-

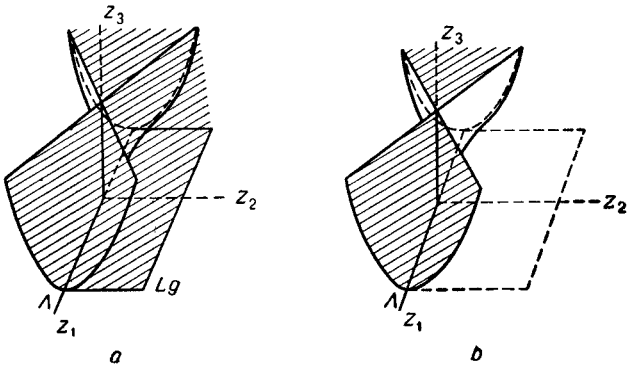


Рис. 43. Видимый контур композиции отображений $\left(S_1^+ \circ S_1^+\right)_2$ $(p=q=3)$. Заштрихованный объем — образ композиции отображений h. Непрозрачная поверхность — видимый контур h. a — общий случай $n \geqslant p$; b — частный случай $n=p-1$.

брать локальные координаты таким образом, что отображение $[\theta|Lf]$ запишется в виде

$$[\theta|Lf](y_1, y_2, \ldots, y_{q-2}) = \\ = y_1\,dy_{p-1} + y_2\,dy_{p-2} + \ldots + y_{p-q+1}\,dy_{q-1},$$

так что функция $z_{q-1}(y)$ будет иметь следующий вид:

$$z_{q-1}(y) = y_p + y_1 y_{p-1} + y_2 y_{p-2} + \ldots + y_{p-q+1} y_{q-1}.$$

Локальная модель для композиции отображений тогда имеет вид

$$h: \begin{cases} z_1 = x_1, \\ z_2 = x_2, \\ \cdots\cdots \\ z_{q-2} = x_{q-2}, \\ z_{q-1} = \pm x_p^2 \pm \ldots \pm x_n^2 + x_1 x_{p-1} + x_2 x_{p-2} + \ldots + x_{p-q+1} x_{q-1}, \\ z_q = \pm x_{q-1}^2 \pm x_q^2 \pm \ldots \pm x_{p-1}^2 \end{cases}$$

(здесь мы уже не предполагаем, что g типа S_1^+). Критическое множество Γh является объединением двух многообразий:

$$f^{-1}(\Gamma g) = \{x_{q-1} = x_q = \ldots = x_{p-1} = 0\}$$

и

$$\left\{x_p = \ldots = x_n = 0; \qquad \frac{x_{p-1}}{x_1} = \frac{x_{p-2}}{x_2} = \ldots = \frac{x_{q-1}}{x_{p-q+1}}\right\},$$

которые проектируются соответственно на

$$\mathrm{L}g = \{z_q = 0\}$$

и на

$$\left\{\frac{z_q}{z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_{q-2}^2} = \left(\frac{z_{q-1}}{z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_{p-q+1}}\right)^2\right\}.$$

В частности, если $p = q = 3$, то это последнее множество записывается в виде $\{z_1^2 z_3 - z_2^2 = 0\}$ и имеет в начале координат особенность, называемую «острием» (рис. 43).

ПРИЛОЖЕНИЕ III

КОМПЛЕКСНЫЕ СМЕЩЕНИЯ[1]) ВЕЩЕСТВЕННЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Пусть Y — замкнутое подмногообразие дифференцируемого многообразия Y, S — замкнутое подмножество в Y, имеющее непустое пересечение с Y. *Смещением* многообразия Y с множества S называется *вложение* многообразия Y в Y — S, гомотопический класс которого (как *вложения* Y в Y — S) содержит вложение, *сколь угодно близкое* к заданному вложению $Y \subset$ Y. Этот гомотопический класс мы будем называть *классом смещения*.

В дальнейшем мы будем предполагать, что Y — трубчатая окрестность многообразия Y (к этому случаю все сводится, если Y является компактом или если выражение «сколь угодно близкий» понимать в смысле «равномерной сходимости», подходящим образом определенной). Выберем некоторую *ретракцию* ρ: Y $\to Y$.

Основная лемма. *В определении классов смещения можно, не ограничивая общности, заменить пространство вложений* $Y \to$ Y *пространством (дифференцируемых) сечений ретракции* ρ.

Доказательство. Для всякого вложения φ: $Y \to$ Y, достаточно близкого к включению $Y \subset$ Y, отображение $\rho \circ \varphi$: $Y \to$ Y будет достаточно близким к тождественному для того, чтобы быть *диффеотопным* ему. Таким образом, $\rho|\varphi(Y)$ будет изоморфизмом; пусть σ: $Y \to \varphi(Y)$ — обратное отображение, также являющееся изоморфизмом. Из диффеотопии $\rho \circ \varphi \simeq 1_Y$ получаем диффеотопию $\varphi \simeq \sigma$: $Y \to \varphi(Y)$, откуда следует, что вложение φ можно продеформировать в сечение σ, *не изменяя его образа* и, следовательно, не задевая замкнутого множества S, если φ его не задевает.

В дальнейшем мы воспользуемся этой леммой для построения нужных нам смещений как *сечений* некоторой ретракции ρ, которая всякий раз будет выбираться «наиболее удобным» образом для рассматриваемой частной задачи.

Всюду в дальнейшем Y будет *вещественным аналитическим многообразием* размерности p, а Y — «комплексной окрестностью» многообразия Y, расслоенной с помощью ретракции ρ на шары E^p. Множество S будет комплексно аналитическим множеством. Такая ситуация естественно возникает, когда мы хотим определить распределение, являющееся «граничным значением» на Y некоторой комплексно аналитической функции, имеющей S своим множеством особенностей. В случае, если эта функция не растет слишком

---

[1]) В оригинале «détournement». — *Прим. перев.*

быстро при приближении к S, можно ожидать, что каждый класс смещения определяет такое «граничное значение».

Чисто топологические рассмотрения, приведенные в § A. III. 1 и A. III. 2, будут использованы в § A. III. 3 для изучения аналитических свойств интеграла по «почти вещественному» циклу, т. е. по циклу, определенному при помощи смещения вещественного многообразия. Эта задача очень напоминает задачу, изученную Лере в [23], гл. II [1]) (в частности, используя результаты Лере, можно было бы уточнить приведенное ниже замечание A. III. 3.2).

A. III. 1. Смещения с подмногообразий

A.III.1.1. Пусть S — *замкнутое аналитическое подмногообразие* многообразия Y коразмерности 1, допускающее в **Y** «комплексификацию» **S**. Если комплексная окрестность **Y** достаточно мала, то можно выбрать ретракцию ρ таким образом, чтобы она переводила многообразие **S** в себя и превращала его в *подрасслоение* расслоения $\mathbf{Y}|S$ (с базой S), имеющее в качестве слоя «экваториальную гиперплоскость» E^{p-1} шара E^p. Пространство $\mathbf{Y}-\mathbf{S}$ является, следовательно, расслоением над S со слоем $E^p - E^{p-1}$ и имеет тот же гомотопический тип, что и расслоение нормальных к S единичных векторов в Y (двулистное накрытие многообразия S). *Будем предполагать, что вложение* $S \subset Y$ *ориентируемо*, так что это последнее расслоение тривиально. Тогда два его сечения [2]) определят (с точностью до гомотопии) два сечения расслоения $(\mathbf{Y}-\mathbf{S})|S$. Но так как $\mathbf{Y}$ — расслоение на шары, то эти два сечения, определенные над *замкнутым* множеством S, продолжаются в сечения над всем Y и определяют *два класса смещений многообразия* Y *с подмногообразия* **S** (очевидно, что эти сечения можно выбрать сколь угодно близкими к нулевому сечению, так что мы действительно получим *смещения*).

A. III. 1.2. Рассуждения п. A. III. 1.1 можно повторить в случае, когда S является уже не подмногообразием, а *объединением* замкнутых ориентируемых *подмногообразий* $S_1, S_2, \ldots, S_m$ коразмерности 1, находящихся в *общем положении*. Достаточно рассмотреть разложение многообразия Y на «страты»

$$A^I = \bigcap_{i \in I} S_i - \bigcup_{i \notin I} S_i, \qquad I \subset \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Выберем ретракцию ρ так, чтобы она переводила каждое S_i в себя и превращала $\mathbf{Y}-\mathbf{S}$ в «мультирасслоение», имеющее слоем над

---

[1]) Внимание: слово «détournement» у Лере имеет несколько иной смысл.

[2]) В действительности имеется 2^k сечений, где k — число связных компонент S. Чтобы упростить формулировки, мы неявно будем предполагать S связным.

A^1 шар E^p, из которого удалены гиперплоскости E_i^{p-1} (находящиеся в общем положении). Над минимальным стратом

$$A^M = S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_m$$

расслоение $(Y - S)|A^M$ имеет 2^m сечений, которые шаг за шагом можно продолжить в сечения над другими стратами. Мы имеем, следовательно, 2^m классов смещений. Если S_i допускают глобальные уравнения $s_i = 0$ и s_i — комплексное продолжение функции s_i, то каждый из этих классов смещений можно охарактеризовать системой знаков

$$(\varepsilon_i = \operatorname{sgn} \operatorname{Im} s_i)_{i=1, 2, \ldots, m}$$

(эти знаки постоянны на всем множестве $\sigma(Y)$).

А. III. 1.3. *Если* S *является аналитическим множеством с особенностями*, то часто бывает невозможно сместить с него многообразие Y, даже локально. Например, возьмем в качестве S «полукубическую параболу»

$$S = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{C}^2 \mid y_1^3 - y_2^2 = 0\}.$$

Пусть ρ — естественная ретракция пространства $\mathbb{C}^2$ на $\mathbb{R}^2$, при которой $\mathbb{C}^2$ отождествляется с касательным расслоением к $\mathbb{R}^2$. В этом касательном расслоении множество S выглядит как векторное поле, изображенное на рис. 44, и, следовательно, содержит в произвольно малой окрестности начала координат *сколь*

Рис. 44. Комплексные точки «полукубической параболы».

угодно малые векторы произвольных направлений. Это ясно указывает на невозможность построения в окрестности начала координат векторного поля, состоящего из произвольно малых векторов и не пересекающегося с S.

А. III. 2. Смещения, совместимые с проекцией

А. III. 2.1. В дополнение к условиям п. А. III. 1.2 зададим на Y *вещественную аналитическую функцию*

$$\pi: Y \to \mathbb{R},$$

имеющую *ранг, всюду равный* 1 [1]), и допускающую комплексно аналитическое продолжение

$$\pi\colon \mathbf{Y} \to \mathbf{C}.$$

Это продолжение π имеет (комплексный) ранг, равный 1 на всем $\mathbf{Y}$ (для достаточно малого $\mathbf{Y}$), и, следовательно, вещественный ранг, равный 2. Значит, если $r\colon \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ — естественная ретракция, то отображение $r \circ \pi$ имеет ранг 1, так что его поверхности уровня

$$\mathbf{Y}'_t = (r \circ \pi)^{-1}(t)$$

определяют «слоение» многообразия $\mathbf{Y}$. Так как, очевидно, это слоение трансверсально подмногообразию Y, то от ретракции ρ можно потребовать, чтобы она оставляла на месте каждый «лист» $\mathbf{Y}'_t$, *т. е. чтобы диаграмма* [2])

$$(\mathrm{R})\qquad \begin{tikzcd} \mathbf{Y} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\pi"] & Y \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbf{C} \arrow[r, "r"] & \mathbf{R} \end{tikzcd}$$

была коммутативной.

Под *«смещением, совместимым с проекцией* π», мы будем понимать смещение σ многообразия Y, которое проектируется в некоторое смещение s множества $\mathbf{R}$, т. е. задание коммутативной диаграммы

$$(\mathrm{S})\qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbf{Y} - \mathbf{S} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbf{R} \arrow[r, "s"] & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

где $\rho \circ \sigma = 1_Y$ и $r \circ s = 1_{\mathbf{R}}$.

Заметим, что в силу этих двух последних условий и коммутативности диаграммы (R) диаграмма (S) коммутативна тогда и только тогда, когда сечение σ принимает значения в $\mathbf{Y}_{s(\mathbf{R})} - \mathbf{S}$, где

$$\mathbf{Y}_{s(\mathbf{R})} = \pi^{-1}(s(\mathbf{R})).$$

---

[1]) Если, кроме того, π — *собственное* отображение, то это условие приводит к тому, что Y является расслоением с базой $\mathbf{R}$ (и, следовательно, тривиальным расслоением, по меньшей мере топологически, если не аналитически).

[2]) Но тогда нужно отказаться от условия, чтобы многообразия $\mathbf{S}_i$ переходили в себя, если только они тоже не трансверсальны к слоению (это как раз случай, когда ограничение π на каждый страт A^I также имеет ранг 1).

Лемма. *Если ограничение π на каждый страт A^I имеет ранг* 1, *то смещение σ можно реализовать так, чтобы оно было совместимым с проекцией π и не сдвигало $\mathbb{R}$, т. е. проектировалось в естественное вложение $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$. Если, кроме того, проекция π является собственной, то в качестве s можно взять произвольное смещение, достаточно близкое к вложению $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что сечение σ можно выбрать так, чтобы оно принимало значения в $\mathbf{Y}_{\mathbb{R}} - \mathbf{S}$ (соотв. $\mathbf{Y}_{s(\mathbb{R})} - \mathbf{S}$). Выберем $\mathbf{Y}$ достаточно малым для того, чтобы ограничение π на каждый комплексифицированный страт $\mathbf{A}^I$ имело ранг 1. Тогда многообразия $\mathbf{S}_i$ будут трансверсальны к «листам» $\mathbf{Y}'_i$, и от ретракции ρ можно потребовать, чтобы она переводила в себя также и эти многообразия $\mathbf{S}_i$, как в п. А. III. 1.2. Но само пространство $\mathbf{Y}_{\mathbb{R}}$ также переходит в себя при отображении ρ (в силу коммутативности диаграммы (R)) и трансверсально пересекает многообразия $\mathbf{S}_i$. Следовательно, оно является подрасслоением расслоения $\mathbf{Y}$, полученного в результате пересечения слоя E^p экваториальной гиперплоскостью $E_{\mathbb{R}}^{p-1}$, находящейся в общем положении с E_i^{p-1}. Значит, $\mathbf{Y}_{\mathbb{R}} - E$ является мультирасслоением, аналогичным мультирасслоению $\mathbf{Y} - \mathbf{S}$ из п. А. III. 1.2 и отличающимся от последнего лишь тем, что его слой имеет на 1 меньшую размерность, и мы можем применить к нему рассуждения из п. А. III. 1.2. Если теперь заменить $\mathbf{Y}_{\mathbb{R}}$ на $\mathbf{Y}_{s(\mathbb{R})}$, то это равносильно деформации гиперплоскости $E_{\mathbb{R}}^{p-1}$, и предыдущие рассуждения еще применимы *при условии, что деформация является достаточно малой* (нужно только, чтобы деформированная гиперплоскость $E_{\mathbb{R}}^{p-1}$ не перестала пересекать шар E^p). Если же проекция π является *собственной*, то смещение s можно выбрать достаточно близким к вложению $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ для того, чтобы это свойство выполнялось всюду.

А. III. 2.2. Смещение в окрестности изолированной критической точки[1]. Рассуждения, использованные в лемме А. III. 2.1, уже неприменимы в окрестности критических точек отображения $\pi \mid A^I$. Однако заметим, что если научиться строить смещение в окрестности этих критических точек, то с помощью рассуждения леммы А. III. 2.1 (свойство *продолжения* сечений) его можно автоматически распространить на все Y. Вся задача, следовательно, сводится к рассмотрению окрестности V критических точек. Мы ограничимся случаем изолированной критической

---

[1]) В этом параграфе развивается идея Ландшофа и Олива [19], которая является, в свою очередь, усовершенствованным вариантом одной идеи Стаппа [34].

точки[1]) отображения $\pi \mid A^I$. Поместим эту критическую точку в начало системы локальных координат $y_1, y_2, \ldots, y_p$ $(y_j = y_j' + iy_j'')$, выбранных так, чтобы π было проектированием на гиперплоскость $y_p = t$ и чтобы ρ: $\mathbf{V} \to V$ было очевидной ретракцией

$$\rho(y_1, y_2, \ldots, y_p) = (y_1', y_2', \ldots, y_p').$$

Сечение этой ретракции тогда отождествляется с векторным полем на окрестности $\mathbf{V}$. Выберем в начале координат вектор v, трансверсальный к многообразиям S_i. Если v достаточно мал, то комплексная точка, им изображаемая, находится вне $\mathbf{S}$, и это свойство сохраняется при параллельном переносе вектора v

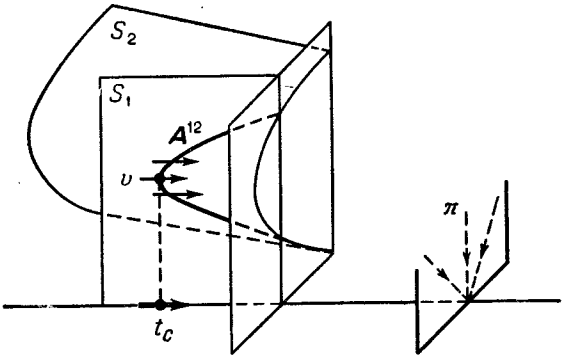


Рис. 45. Смещение, совместимое с проекцией.

в достаточно малой окрестности $\mathbf{V}$[2]). Иначе говоря, постоянное поле векторов, равных v, определяет смещение, очевидно, совместимое (в силу выбора координат) с проекцией π (рис. 45). Если $s_i(y')$, $i \in I$, — локальные уравнения многообразий S_i, то $2^{|I|}$ классов смещений, определенных в п. А. III. 1.2, могут быть охарактеризованы знаками ε_i дифференциалов $ds_i(v)$, $i \in I$. Критическая точка характеризуется условием $dt \mid A^I = 0$, т. е.

$$(\alpha) \qquad dt = \sum_{i \in I} \alpha_i \, ds_i.$$

---

[1]) Известно (М. Морс), что всякая функция имеет, вообще говоря, лишь *невырожденные квадратичные* (и, следовательно, изолированные) критические точки. Квадратичный характер этих точек не играет здесь существенной роли.

[2]) Это утверждение справедливо, так как $\mathbf{S}$ является объединением замкнутых многообразий, в противном случае см. контрпример в п. А. III. 1.3.

Следовательно, условие параллельности вектора v слою записывается в виде

$$dt(v) = \sum_{i \in I} \alpha_i \, ds_i(v) = 0,$$

и легко видеть, что такой вектор v можно выбрать всегда, за исключением случая, когда $\varepsilon_i \alpha_i \geqslant 0 \ \forall i \in I$ (соотв. $\leqslant 0 \ \forall i \in I$); в этом последнем случае $dt(v) > 0$ (соотв. < 0).

Короче говоря, *в окрестности V изолированной критической точки отображения $\pi \mid A^I$ все $2^{|I|}$ классов смещений совместимы с проекцией π. Все классы можно реализовать, «не сдвигая $\mathbb{R}$», кроме двух случаев, характеризуемых условиями $\varepsilon_i \alpha_i \geqslant 0 \ \forall i \in I$* (соотв. $\varepsilon_i \alpha_i \leqslant 0 \ \forall i \in I$), *которые можно реализовать, «сдвигая $\mathbb{R}$ в верхнюю (соотв. нижнюю) полуплоскость».*

Все результаты этого параграфа можно резюмировать следующим образом:

Предложение. *Предположим, что аналитическое отображение π: $Y \to \mathbb{R}$ является собственным и имеет ранг 1 (и, следовательно, является расслоением) и что его ограничение на всякий страт A^I имеет лишь изолированные критические точки, проектирующиеся в различные точки множества $\mathbb{R}$. Тогда каждый класс смещений может быть реализован совместимым с проекцией π образом. Более того, единственными точками, с которых следует сместить $\mathbb{R}$, являются критические значения отображения $\pi \mid A^I$ в тех критических точках, в которых знаки ε_i ($i \in I$), характеризующие класс смещения, все совпадают (соотв. все противоположны) со знаками параметров α_i из уравнения* (α); *вблизи этих критических значений необходимо сместить $\mathbb{R}$ в верхнюю (соотв. нижнюю) полуплоскость.*

A. III. 3. Аналитичность интеграла по «почти вещественному» циклу

A. III. 3.1. Сейчас мы воспользуемся результатами § A. III. 2 для изучения аналитических свойств интеграла (как функции параметра t) от дифференциальной формы φ_t степени $n = p - 1$, регулярной и замкнутой на «слое» $\mathbf{Y}_t - \mathbf{S}_t$ и аналитически зависящей от параметра t. Известно, что при некоторых предосторожностях [1]) такой интеграл будет аналитической функцией от t

[1]) Достаточно, например, сделать одно из следующих двух предположений:

1) $\mathbf{Y}$ является *произведением аналитических многообразий* $\mathbf{Y} = \mathbf{X} \times \mathbf{C}$, π — каноническая проекция;

2) $\mathbf{Y}$ является *замкнутым аналитическим подмногообразием* коразмерности 1 в таком произведении (соотв. пересечением таких подмногообразий, находящихся в общем положении), π — ограниченне канонической проекции; кроме того, φ_t есть *вычет* (соотв. кратный вычет) замкнутой дифференциальной формы, аналитически зависящей от t. Подробности см. в [22] или [29], гл. VI.

до тех пор, пока цикл интегрирования (в предположении, что он компактен) можно изменять непрерывно по t в $\mathbf{Y}_t - \mathbf{S}_t$. Но каждому *смещению, совместимому с проекцией* π (которая предполагается *собственной*), очевидно, соответствует такой «почти вещественный» цикл, изменяющийся непрерывно, когда t пробегает «смещенную вещественную ось» $s(\mathbb{R})$. Точнее, каждому *классу смещений* при t, пробегающем $s(\mathbb{R})$, соответствует *класс гомологий* $h_t \in H_n(\mathbf{Y}_t - \mathbf{S}_t)$, являющийся образом фундаментального класса ориентированного компактного многообразия $\mathbf{Y}_{t'}(t' = r(t))$ при смещении σ. Можно также рассмотреть более общий случай, когда подинтегральная форма φ_t *многозначна*, т. е. определена на *накрытии* $\widetilde{\mathbf{Y} - \mathbf{S}}$ многообразия $\mathbf{Y} - \mathbf{S}$. В этом случае, чтобы придать смысл интегралу, нужно непрерывным образом выбрать на смещенном слое «ветвь» формы φ_t, что равносильно выбору способа «поднятия» цикла интегрирования из $\mathbf{Y}_t - \mathbf{S}_t$ в $\widetilde{\mathbf{Y}_t - \mathbf{S}_t}$. Это всегда возможно при условии односвязности вещественного слоя Y_t, так как смещение, будучи гомеоморфизмом, сохраняет односвязность.

Таким образом, из предложения A. III. 2.2 немедленно вытекает следующее

Предложение. *Интеграл* $J(t) = \int\limits_{h_t} \varphi_t$ *является аналитической функцией вещественного параметра* t, *исключая критические значения, упомянутые в предложении* A. III. 2.2. *Кроме того, каждая из двух функций* $J(t)$, *определенных по разные стороны от такого критического значения, является аналитическим продолжением другой при малом обходе критического значения в верхней* (*случай* $\varepsilon_i\alpha_i \geqslant 0$) *или нижней* (*случай* $\varepsilon_i\alpha_i \leqslant 0$) *комплексной полуплоскости.*

A. III. 3.2. Замечание. В предложении A. III. 2.2 мы предполагали, что проекция π имеет ранг 1, и потому мы обязаны *исключить из рассмотрения критические значения, которые может иметь сама проекция* π. Эти критические значения обладают тем свойством, что вещественные слои Y_t, определенные по разные стороны от них, имеют различные гомотопические типы (теория Морса [25]). Поэтому неудивительно, если эти критические значения окажутся *непреодолимыми* с точки зрения «почти вещественных» интегралов, т. е. если вещественные слои, определенные по разные стороны, не будут связаны никаким комплексным обходом (рис. 46). Чтобы уточнить эту мысль, рассмотрим невырожденную квадратичную критическую точку индекса k. Забывая о наличии подмногообразий $\mathbf{S}_i$, можно поставить задачу о том, чтобы связать классы гомологий $h_t \in H_n(\mathbf{Y}_t)$, определенные вещественными слоями по разные стороны критического значения, с помощью малого комплексного обхода. Эта задача, очевидно, инвариантна по отношению к комплексному сопряжению: если такой обход существует, то комплексно сопряженный обход также приведет к цели. Следовательно, классы гомологий h_t

должны быть *инвариантными при полном обходе критического значения*, что возможно лишь в том случае, если их индекс пересечения с «исчезающим циклом» равен нулю (теорема Пикара — Лефшеца). Этот индекс пересечения легко вычислить, так как мы имеем в явном виде локальную модель слоя Y_t в окрестности критической точки. Получаем, что при $t > t_c$ (t_c — критическое значение) этот индекс пересечения равен нулю или ± 2 в соответствии с тем, является ли «коиндекс» $p - k$ критической точки четным или нечетным; при $t < t_c$, очевидно, достаточно заменить коиндекс индексом. Следовательно, если *по крайней мере одно* из двух чисел k и $p - k$ нечетно, то можно *с уверенностью* сказать, что два класса гомологий h_t ($t > t_c$ и $t < t_c$)

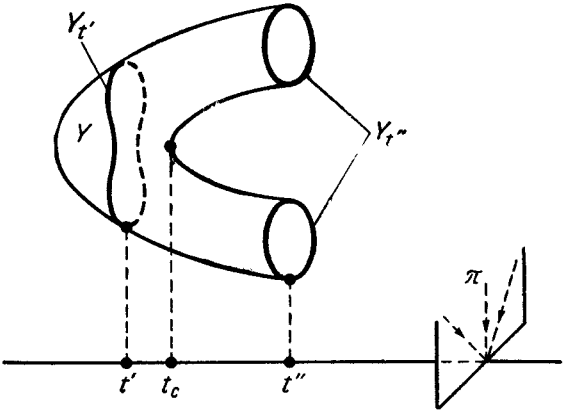


Рис. 46. Критическая точка нечетного индекса: вещественные слои $Y_{t'}$ и $Y_{t''}$ не связаны никаким комплексным обходом.

не связаны малым комплексным обходом. Если оба числа k и $p - k$ четны, то такой уверенности уже нет, и я думаю, что ничего определенного нельзя сказать без *глобального* изучения гомологий.

А. III. 3.3. Скачки интеграла. В этом пункте мы исследуем особенность интеграла в точке t_c, являющейся проекцией *невырожденной квадратичной точки* страта A^I, не критической для других многообразий $\overline{A}^J = \bigcap_{i \in J} S_i$, $J \neq I$; это случай *простого пинча*, исследованный в [29]. Напомним некоторые результаты из работы [29]. Функция $J(t)$ аналитически продолжается вдоль всякого пути, лежащего в окрестности критического значения t_c и не содержащего его. Кроме того, если *подинтегральное выражение имеет лишь полюсы*, то точка t_c является особенностью

одного из следующих трех типов:

логарифмической, если $\dim A_t^I$ нечетна,

алгебраической порядка 2, если $\dim A_t^I$ четна,

полюсом, если $\dim A_t^I = -1$,

где через $\dim A_t^I$ обозначена размерность страта-слоя «общего положения», т. е. здесь, в случае *одномерного* пространства параметров

$$\dim A_t^I = \dim A^I - 1.$$

Формулы скачков, приведенные в работе [29], становятся особенно простыми в случае критической точки индекса нуль [1]), т. е. в случае, когда квадратичная форма, задающая функцию $\pi|A^I$ в окрестности критической точки, является *положительно определенной*. При $t > t_c$ обозначим через $J^+(t)$ (соотв. $J^{-1}(t)$) функцию, полученную в результате аналитического продолжения функции $J(t)$, $t < t_c$, в верхнюю (соотв. нижнюю) полуплоскость (рис. 47).

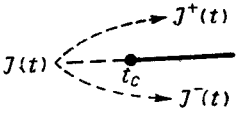


Рис. 47. Аналитические продолжения функции $J(t)$.

Речь идет о вычислении разности $J^+(t) - J^-(t)$. Случай «индекса нуль», интересен тем, что в качестве *исчезающей клетки* e_{It} работы [29] можно взять просто *вещественную* клетку, ограниченную многообразиями $S_{it} \subset Y_t$, $i \in I$ ([29], рис. V. 2); мы снабдим ее ориентацией, выбранной для Y_t. С другой стороны, в качестве *исчезающей сферы* e_t^I можно взять вещественную сферу $A_t^I = \bigcap_{i \in I} S_{it}$, ориентация которой будет уточнена ниже.

Приняв эти соглашения и предположив, что *подинтегральное выражение однозначно*, мы можем записать скачок интеграла с помощью следующих формул:

$$(\mathrm{Disc}\ 1)^+ \qquad \boxed{J^+(t) - J^-(t) = (2\pi i)^{\mu} \int\limits_{e_t^I} \mathrm{Res}^I\, \varphi_t,}$$

[1]) Это как раз случай, представляющий наибольший интерес для нас с практической точки зрения; ср. I. 2.5.

если $\varepsilon_i\alpha_i \geqslant 0$, и

(Disc 1)$^-$
$$\boxed{J^+(t) - J^-(t) = (-)^{\mu-1}(2\pi i)^{\mu} \int\limits_{e_t^I} \mathrm{Res}^I \varphi_t,}$$

если $\varepsilon_i\alpha_i \leqslant 0$.

В этих формулах $\mathrm{Res}^I \varphi_t = \mathrm{Res}_{i_1} \mathrm{Res}_{i_2} \ldots \mathrm{Res}_{i_\mu} \varphi_t$ — *кратный вычет* формы φ_t по отношению к многообразиям $\mathbf{S}_{i_1}, \mathbf{S}_{i_2}, \ldots, \mathbf{S}_{i_\mu}$, $\{i_1, i_2, \ldots, i_\mu\} = I$. Ориентация *исчезающей сферы* e_t^I получается из ориентации исчезающей клетки (введенной выше) по формуле «кратной границы»:
$$e_t^I = \partial_{i_1}\partial_{i_2} \ldots \partial_{i_\mu} \mathbf{e}_{It}$$
(граничные операторы действуют в том же порядке, что и операторы «вычетов»).

Доказательство формул (Disc 1). Достаточно (как и в [29]) применить формулу Пикара — Лефшеца и формулу вычетов Лере. Класс h_t локально может быть представлен (при соглашениях, принятых в п. А. III. 2.2) как векторное поле, трансверсальное к $\mathbf{S}_{it}$ и, следовательно, трансверсальное к границе клетки $\mathbf{e}_{It}$, и легко видеть, что эта клетка представляет собой *сток* или *источник* векторного поля, если $\varepsilon_i\alpha_i \geqslant 0$ $\forall i$ или, соответственно, $\leqslant 0$ $\forall i$ (она не является ни стоком, ни источником, если не все $\varepsilon_i\alpha_i$ имеют одинаковый знак). Для индекса пересечения $\langle \mathbf{e}_{It} | h_t \rangle$ (применяя рассуждения, аналогичные рассуждениям работы [29], гл. II, пример 7.4) получаем следующие значения:
$$\langle \mathbf{e}_{It} | h_t \rangle = \begin{cases} (-)^{n(n-1)/2}, & \text{если } \varepsilon_i\alpha_i \geqslant 0 \quad \forall i \in I, \\ (-)^{n(n+1)/2}, & \text{если } \varepsilon_i\alpha_i \leqslant 0 \quad \forall i \in I, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$
Остается лишь подставить эти значения в формулу Пикара — Лефшеца. В случае $\varepsilon_i\alpha_i \leqslant 0$ $\forall i$ необходимо иметь в виду, что мы начинаем со значения интеграла $J^-(t)$ (действительно, именно этот интеграл берется по «почти вещественному» циклу h_t) и что $J^+(t)$ получается из него при помощи обхода вокруг t_c в *отрицательном* направлении. Следовательно, надо применить формулу Пикара — Лефшеца «наизнанку».

Замечание. В том случае, когда мы имеем дело с *одним-единственным* подмногообразием S (при $\mu = 1$), S_t *пусто* при $t < t_c$ (по крайней мере в той части слои, которая близка к критической точке). Следовательно, функция $J(t)$ определена при $t < t_c$ как интеграл по несмещенному слою Y_t, в то время как $J^+(t)$ и $J^-(t)$ (при $t > t_c$) определены с помощью двух

возможных смещеиий этого слоя. Формулу (Disc 1) легко тогда доказать непосредственно, сравиивая эти два смещения. Ситуация не так проста, если $\mu > 1$, так как только *одна* из двух функций $J^{\pm}(t)$ определена с помощью смещения слоя Y_t (ср. с предложеиием А. III. 3.1). Формула (Disc 1) дает нам интересные сведения о *другой* функции: действительно, так как цикл интегрироваиия e_t^I является *вещественным* многообразием, то для аналитического продолжения интеграла, фигурирующего в формуле (Disc 1), можно повторить рассуждения, проделанные для интеграла $J(t)$.

Когда *подинтегральная функция многозначна*, приходится иметь дело с иакрытием $\widetilde{\mathbf{Y}-\mathbf{S}}$ пространства $\mathbf{Y}-\mathbf{S}$. Если это иакрытие регулярно (например, универсальное накрытие), то известно, что фундаментальная группа $\pi_1(\mathbf{Y}-\mathbf{S})$ действует на нем как *группа правых операторов*. Обозначим через $\tilde{y}\cdot\omega$ точку иакрытия $\widetilde{\mathbf{Y}-\mathbf{S}}$, полученную из точки $\tilde{y}$ под действием петли $\omega \in \pi_1(\mathbf{Y}-\mathbf{S})$. Если φ — фуикция на $\widetilde{\mathbf{Y}-\mathbf{S}}$, то через $\omega_*\varphi$ мы обозначим преобразованную функцию, определеиную формулой [1])

$$(\omega_*\varphi)\,\tilde{y} = \varphi(\tilde{y}\cdot\omega).$$

Так как многообразия $\mathbf{S}_i$ пересекаются в общем положении, то локальиая фундаментальная группа в окрестиости критической точки является *свободной коммутативной группой* с μ образующими $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_\mu}$, где ω_i — класс малой петли в положительном направлении вокруг $\mathbf{S}_i$. В этих обозначениях, если подинтегральное выражение ие «слишком сингулярно» [2]) иа $S_{i_1}, \ldots, S_{i_\mu}$, то скачок интеграла задается формулами:

(Disc 2)$^+$

$$\boxed{J^+(t) - J^-(t) = \int\limits_{\mathbf{e}_{It}} \mathrm{Disc}^I\,\varphi_t, \quad \text{если} \quad \varepsilon_i\alpha_i \geqslant 0,}$$

(Disc 2)$^-$

$$\boxed{J^+(t) - J^-(t) = (-)^{\mu-1} \int\limits_{\mathbf{e}_{It}} \left(\omega_{i_1}^{-1}\omega_{i_2}^{-1}\ldots\omega_{i_\mu}^{-1}\right)_* \mathrm{Disc}^I\,\varphi_t,}$$

если $\varepsilon_i\alpha_i \leqslant 0$.

---

[1]) В работах [28] и [29] правый оператор ω рассматривался как левый, а оператор ω_* обозначался через ω^*. Хотя это не имеет здесь значения, так как рассматриваемая группа коммутативна, иаше новое обозначение более логичио. В частности, обозначение ω^* неудачно потому, что может навести на мысль о «контравариаитном» характере «функтора» $\omega \rightsquigarrow \omega^*$.

[2]) Подробности см. в работах [28], [29]. Идея состоит в том, чтобы допустить касание цикла интегрирования с $\mathbf{S}_{i_1}, \ldots, \mathbf{S}_{i_\mu}$, не нарушая сходимости интеграла в этих точках.

В этих формулах $\mathrm{Disc}^I \varphi_t$ — *кратный скачок* формы φ_t по отношению к подмногообразиям $\mathbf{S}_i$, $i \in I$, определенный формулой

$$\mathrm{Disc}^I \varphi_t = \left(\prod_{i \in I} (1 - \omega_{i_*})\right) \varphi_t.$$

Далее, $\mathbf{e}_{It}$ — «исчезающая клетка», все время вещественная, «поднятая» в $\widetilde{\mathbf{Y}_t - \mathbf{S}_t}$ следующим образом: вне окрестности ее границы эту клетку можно рассматривать как кусок смещенного слоя; так как для определения класса h_t необходимо «поднять» смещенный слой в $\widetilde{\mathbf{Y}_t - \mathbf{S}_t}$, то можно условиться поднимать исчезающую клетку *таким же образом.*

Доказательство формул (Disc 2). Указанный выше способ поднимать клетку является *единственным* способом, дающим в $\widetilde{\mathbf{Y}_t - \mathbf{S}_t}$ ненулевой индекс пересечения $\langle \mathbf{e}_{It} | h_t \rangle$. Значения этого индекса пересечения тогда будут такими же, как и в неразветвленном случае. Остается лишь применить формулу (Disc 2) работы [29] (гл. VII).

Замечание. Точно так же как и формулы (Disc 1), в случае $\mu = 1$ формулы (Disc 2) легко доказать непосредственно, сравнивая смещения, которые определяют $J^+(t)$ и $J^-(t)$. Необходимо принять во внимание, что наш способ поднятия клеток дает различные результаты в зависимости от того, пользуемся ли мы первым или вторым из этих смещений. Это поясняет, почему формулы $(\mathrm{Disc}\ 2)^+$ и $(\mathrm{Disc}\ 2)^-$, которые должны, очевидно, давать один и тот же результат, *формально* отличаются на ω_*^{-1}.

А. III. 3.4. Замечание: скачки «в смысле теории распределений». Вместо того чтобы определить скачки так, как мы только что сделали это в п. А. III. 3.3, мы могли бы определить их как *распределения.* Например, $\mathrm{Disc}\, J(t) = J^+(t) - J^-(t)$ можно считать *распределением* на вещественной оси, определив $J^\pm(t)$ как распределение, являющееся «граничным значением» аналитической функции $J(t)$ при подходящем смещении. При этом соглашении полюсу аналитической функции $J(t)$ соответствует скачок, сконцентрированный в особой точке t_c, так что (в случае простого полюса) можно написать

$$\mathrm{Disc}\, J(t) = \delta(t - t_c)\, \mathrm{Res}\, J(t).$$

Аналогично, скачок $\mathrm{Disc}^I \varphi_t$, входящий в формулу (Disc 2), может быть определен как распределение, и если φ_t имеет полюс на $\mathbf{S}_i$, то распределение $\mathrm{Disc}_i\, \varphi_t$ сконцентрировано на S_i и равно вычету формы φ_t. *Эта точка зрения имеет то преимущество, что превращает формулу* (Disc 1) *в частный случай формулы* (Disc 2).

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

ЗАМЕЧАНИЕ О ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ГРУППЕ ДОПОЛНЕНИЯ К АЛГЕБРАИЧЕСКОМУ МНОЖЕСТВУ[1])

Теорема. *Пусть* $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_m$ — *объединение неприводимых алгебраических множеств коразмерности* 1, *заданных в* C^n *условием обращения в нуль неприводимых многочленов* $s_1, s_2, \ldots, s_m$. *Предположим, что выполнено следующее условие: вне алгебраического подмножества коразмерности* $\geqslant 3$ *компактификации множеств* $S_1, S_2, \ldots, S_m$ *в* CP^n *являются многообразиями в общем положении по отношению друг к другу и по отношению к «бесконечноудаленной гиперплоскости». Тогда фундаментальная группа* $\pi_1(C^n - S)$ *является свободной коммутативной группой с* m *образующими.*

Доказательство. Пересечем S p-мерной гиперплоскостью общего положения $C^p \subset C^n$ $(1 \leqslant p < n)$. Вложение j^p: $C^p - S \to C^n - S$ индуцирует гомоморфизм

$$j^p_*: \pi_1(C^p - S) \to \pi_1(C^n - S).$$

1-й шаг: *сюръективность гомоморфизма* j^p_* *для всякого* $p \geqslant 1$.

Речь идет о том, чтобы доказать, что всякая петля λ из $C^n - S$ гомотопна петле в $C^p - S$. В C^n петля λ гомотопна нулю при очевидной линейной гомотопии. Пусть Λ: $\square \to C^n$ — отображение квадрата в C^n, определяющее эту гомотопию. Немного деформируя λ, всегда можно прийти к случаю, когда Λ *трансверсально над* S. Тогда $\Lambda^{-1}(S)$ состоит из конечного числа точек, внутренних для квадрата и являющихся прообразами «обыкновенных» точек множества S. Заменяя периметр квадрата последовательностью «прямолинейных петель», окружающих каждую точку из $\Lambda^{-1}(S)$ (рис. 48), и отображая все это в C^n с помощью Λ, мы видим, что λ *гомотопна в* $C^n - S$ *последовательности прямолинейных петель, окружающих обыкновенные точки множества* S[2]). Но каждый из соответствующих прямолинейных отрезков содержится в некоторой прямой C^1, которую можно считать трансверсальной к S (немного подвинув ее, если нужно). И так как все сечения *общего положения изотопны*, то все эти петли можно перевести в *сечение общего положения*

---

[1]) Идея этого приложения, так же как и ссылка на Зарисского, были сообщены мне проф. Р. Томом.

[2]) Ср. [29], гл. V, предложение 1.2.

одной и той же прямой $\mathbb{C}^1$, что и доказывает сюръективность для $p = 1$, и тем более для произвольного p.

2-й шаг: $\pi_1(\mathbb{C}^2 - S) = Z^m$ (*Зарисский*).

Рассмотрим сечение общего положения гиперплоскостью $\mathbb{C}^2$. В этом сечении S_i — неприводимые кривые без особенностей в общем положении по отношению друг к другу и по отношению к бесконечноудаленной прямой. Тогда из теоремы Зарисского [40] (цитированной Серром в [33]), вытекает, что $\pi_1(\mathbb{C}^2 - S)$ является свободной коммутативной группой с m образующими.

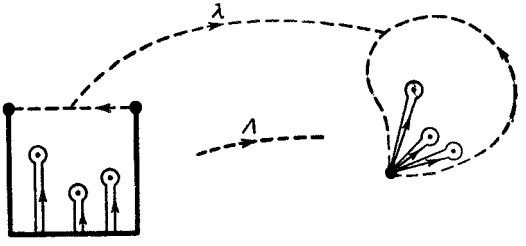


Рис. 48. Разложение петли на «прямолинейные» петли.

В ней имеется канонический базис, который состоит из m прямолинейных петель, обходящих точки кривых $S_1, S_2, \ldots, S_m$ соответственно в сечениях общего положения прямой $\mathbb{C}^1$.

3-й шаг: *инъективность гомоморфизма* j_*^2 *при условиях теоремы.*

Инъективность доказывается с помощью построения гомоморфизма s_*, композиция которого с j_*^2 является изоморфизмом. Действительно, гомоморфизм s_* — это гомоморфизм, индуцированный отображением $s\colon \mathbb{C}^n - S \to \mathbb{C}^{*m}$, которое всякой точке $x \in \mathbb{C}^n - S$ сопоставляет m ненулевых комплексных чисел $s_1(x), s_2(x), \ldots, s_m(x)$. То, что композиция гомоморфизмов

$$s_* \circ j_*^2\colon \underset{\substack{\| \\ Z^m}}{\pi_1(\mathbb{C}^2 - S)} \to \underset{\substack{\| \\ Z^m}}{\pi_1(\mathbb{C}^{*m})}$$

является изоморфизмом, вытекает из данного выше описания канонического базиса группы $\pi_1(\mathbb{C}^2 - S)$ и из того факта, что уравнения $s_i = 0$ являются *неприводимыми* уравнениями поверхностей S_i не только в $\mathbb{C}^n$, но также и (с локальной точки зрения) во всяком сечении общего положения.

БЛАГОДАРНОСТИ

Эта работа является докторской диссертацией, и я благодарен Комиссариату по атомной энергии, а также Европейскому центру ядерных исследований (*CERN*), которые предоставили мне средства для ее реализации. Профессор Ж. Ивон руководил этой работой, и я глубоко ему признателен за это и за его неоценимые советы, которыми я руководствовался при редактировании. Я весьма обязан профессорам Л. ван Хову и Ж. Прентки за их гостеприимство в *CERN*, где мне были предоставлены все возможности для окончания работы и ее публикации; я благодарю профессоров К. Блоха и А. Мессия за ту атмосферу в Национальном институте ядерной физики и техники в Сакле, которая стимулировала начало этой работы: именно там, во время дискуссий с М. Фруассаром, Д. Яголницером и Д. Цванцигером, у меня возникла идея этой работы.

Что касается математических вопросов, то я пользовался неоценимой помощью профессора Р. Тома, который, не ограничиваясь тем, что подавал существенные идеи, не раз помогал мне распутывать детали. Я выражаю ему глубокую благодарность, так же как и Д. Фотиади и Ж. Ласку, многочисленные советы которых и постоянный интерес оказали мне неоценимую помощь.

Я не могу забыть профессоров Р. Германа, В. Глазера, Ф. Люрса, А. Мартина, а также Д. Бесси, Ж. Бро, Р. Стора, Д. Вильямса, их моральную поддержку и полезные замечания. Я благодарю также профессора Ж. К. Полкингорна и его сотрудников за приятное посещение Кэмбриджа, положившее начало плодотворному обмену корреспонденцией с доктором Д. И. Оливом. Наконец, я весьма признателен профессору А. Хефлигеру за дружественный прием, который я всегда находил в Институте математики Женевского университета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Berge C., Théorie des graphes et ses applications, Paris, Dunod, 1958. [Перевод: Берж К., Теория графов и ее применение, М., 1962.]
2. Bloxham M. J. W., On certain physical-region singularities in S matrix theory (Cambridge preprint, 1965).
3. Coleman S. and Norton R. E., *Nuovo Cimento*, **38** (1965), 438.
4. Cutkosky R. E., *J. Math. Phys.*, **1** (1960), 429.
5. Ehresmann C., Catégories et Structures (Travaux et resherches mathématiques), Paris, Dunod, 1965.
6. Feynman R. P., *Revs. Modern Phys.*, **20** (1948), 367.
7. Fotiadi D., Froissart M., Lascoux J. and Pham F., *Topology*, **4** (1965), 159. [Перевод в книге Хуа Р. и Теплиц В., Гомология и фейнмановскне интегралы, М., 1969, стр. 142—182.]
8. Goldberger M. L. and Watson K. M., *Phys. Rev.*, **127** (1962), 2284.
9. Gunson J., *J. Math. Phys.*, **6** (1965), 827, 845, 852.
10. Haag R., *Phys. Rev.*, **112** (1958), 669.
11. Heisenberg W., *Zeit. Physik*, **120** (1943), 513.
12. Hepp K., *Helv. Phys. Acta*, **37** (1964), 659.
13. Hepp K., *Commun. Math. Phys.*, **1** (1965), 95.
14. Hepp K., *J. Math. Phys.*, **6** (1965), 1762.
15. Iagolnitzer D., *J. Math. Phys.*, **6** (1965), 1576.
16. Iagolnitzer D., S matrix theory and phenomenological space-time description (Saclay preprint, 1965).
17. Jost R., The general theory of quantized fields, Amer. Math. Soc., 1965. [Перевод: Йост Р., Общая теория квантованных полей, М., 1967.]
18. Landau L. D., *Nuclear Physics*, **13** (1959), 181.
19. Landshoff P. V. and Olive D. I., *J. Math. Phys.*, **7** (1966), 1464.
20. Landshoff P. V., Olive D. I., and Polkinghorne J. C., *J. Math. Phys.*, **7** (1966), 1600.
21. Landshoff P. V., Olive D. I. and Polkinghorne J. C. The hierarchical principle in perturbation theory (Cambridge preprint, 1965).
22. Leray J., *Bull. Soc. Math. France*, **87** (1959), 81. [Перевод: Лере Ж., Дифференциальное и интегральное исчисления на комплексном аналитическом многообразии, М., 1961.]
23. Leray J., *Bull. Soc. Math. France*, **90** (1962), 39. [Перевод: Лере Ж., Котаке Т., Гординг Л., Задача Коши, М., 1967.]

24. MacLane S., Homology, Berlin, 1963. [Перевод: Маклейн С., Гомология, М., 1961.]
25. Milnor J., Morse theory, Princeton Univ. Press, 1963. [Перевод: Милнор Дж., Теория Морса, М., 1965.]
26. Olive D. I., *Phys. Rev.*, **135B** (1964), 745.
27. Olive D. I., *Nuovo Cimento*, 37 (1965), 1422.
28. Pham F., *Bull. Soc. Math. France*, 93 (1965), 333. [Перевод: Фам Ф., Обобщенные формулы Пикара — Лефшеца и ветвление интегралов, сб. *Математика*, 13 : 4 (1969), 61—93.]
29. Pham F., Introduction à l'étude topologique des singularités de Landau, Paris, 1967. [Перевод: Фам Ф., Введение в топологическое исследование особенностей Ландау, М., 1970.]
30. Polkinghorne J. C., *Nuovo Cimento*, 23 (1962), 360; **25** (1962), 901.
31. Ruelle D., *Helv. Phys. Acta*, **35** (1962), 147.
32. Sard A., *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48** (1942), 883.
33. Serre J. P., In *Séminaire Bourbaki*, **12** (1959—1960), Exposé 204.
34. Stapp H. P., *Phys. Rev.*, **125** (1962), 2139.
35. Stapp H. P., Lectures on Analytic S matrix theory, Matscience Report, 26, The Institute of Mathematical Sciences, Madras, 1964.
36. Streater R. F., Wightman A. S., PCT, Spin and statistics, and all that, Benjamin, 1964. [Перевод: Стриттер Р. Ф. и Вайтман А. С., PCT, спин, статистика и все такое, М., 1966.]
37. Thom R., *Ann. Inst. Fourier*, **6** (1956), 43.
38. Wanders G., *Helv. Phys. Acta*, 38 (1965), 142.
39. Wichmann E. H. and Crichton J. H., *Phys. Rev.*, **132** (1963), 2788.
40. Zariski O., Algebraic Surfaces, New York, 1948.

ДОБАВЛЕНИЕ

ОСОБЕННОСТИ ЛАНДАУ В ФИЗИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ[1])

Напомним, что́ называют *особенностями Ландау*. Это особенности фейнмановских интегралов, рассматриваемых как аналитические функции «внешних» импульсов частиц в соответствующих графах Фейнмана. В мои задачи не входит объяснение того, как фейнмановские интегралы были введены в физику и почему физики интересовались изучением их особенностей, даже несмотря на то, что их вера в сами интегралы оказалась поколебленной. Я не буду говорить и о тонких причинах (построение дисперсионных соотношений), побудивших физиков изучать особенности, появляющиеся при *комплексных* значениях импульсов. Вместо этого я хочу показать, что для *вещественных* импульсов в так называемой *физической области* особенности Ландау являются довольно простыми геометрическими объектами, которые могут быть введены непосредственно с помощью чисто «кинематических» рассмотрений, и поэтому должны играть важную роль в *любой* разумной теории элементарных процессов, каково бы ни было «динамическое» содержание такой теории. Мой доклад состоит из двух частей: в первой части вводятся геометрические объекты, называемые особенностями Ландау, и изучаются их свойства; во второй части речь идет об их физическом смысле и о той роли, которую они играют в различных теориях элементарных процессов.

1. Кинематика процессов многократного рассеяния

«Эксперимент по рассеянию» (называемый также «экспериментом по столкновению частиц») состоит

---

[1]) Pham F., Landau singularities in the physical region, в книге «Battelle rencontres», New York, Amsterdam, 1968, p. 420—432. [Добавлено при переводе.]

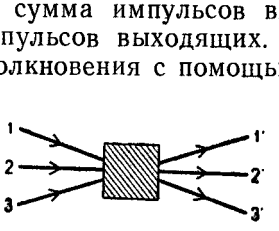
в том, что несколько частиц направляют навстречу друг другу и смотрят, что происходит, измеряя как можно точнее импульсы входящих и выходящих частиц. Напомним основные понятия релятивистской кинематики. Если $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^3$ — импульс частицы i с массой m_i, то ее энергия задается формулой $p_i^0 = \sqrt{\mathbf{p}_i^2 + m_i^2}$. Чтобы все величины были записаны в ковариантной форме, определяют четырехмерный импульс

$$p_i = (p_i^0, \mathbf{p}_i) \in \mathbb{R}^4,$$

принадлежащий *массовой поверхности*

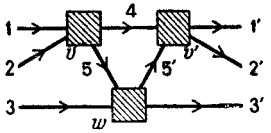
$$M_i = \{p_i \in \mathbb{R}^4 \mid p_i^2 = m_i^2,\ p_i^0 > 0\}$$

(где через $p_i^2 \equiv (p_i^0)^2 - \mathbf{p}_i^2$ обозначено скалярное произведение вектора p_i на себя в лоренцевой метрике). В дальнейшем мы будем придерживаться этих обозначений и под «импульсом» всегда будем подразумевать четырехмерный импульс. Всякое столкновение удовлетворяет закону *сохранения импульса*, который утверждает, что сумма импульсов входящих частиц равна сумме импульсов выходящих. Удобно изображать процесс столкновения с помощью графа: например, граф 1



изображает процесс, в котором три частицы 1, 2, 3 сталкиваются и порождают три частицы 1′, 2′, 3′ (элементарный процесс рассеяния). Каков детальный механизм столкновения и какого типа «катастрофа» происходит в то время, когда частицы занимают одну и ту же область пространства-времени, — неизвестно, и черный ящик графа 1 символизирует это незнание. Представим себе, что с помощью некоторого тонкого эксперимента удается «расчленить» катастрофу графа 1 в последовательность более

мелких катастроф, как изображено, например, на графе 2:



(процесс многократного рассеяния).

Мы не спрашиваем сейчас, как это сделать, и имеет ли это смысл; мы просто хотим знать, допустимо ли это кинематически: для каких значений «внешних» импульсов (p_1, p_2, p_3, $p_{1'}$, $p_{2'}$, $p_{3'}$) можно найти «внутренние» импульсы p_4, p_5, $p_{5'}$ так, чтобы закон сохранения импульса удовлетворялся в каждой вершине графа 2? Заметим, что этот же вопрос можно задать и в более общем случае, когда граф 1 уже не является «элементарным» графом рассеяния, а является графом многократного рассеяния, из которого граф 2 может быть получен «расчленением» некоторых вершин. Чтобы сформулировать эту проблему в такой общей постановке, обозначим через $\varkappa$: $G_2 \twoheadrightarrow G_1$ операцию «стягивания» некоторых линий графа G_2, приводящую к графу G_1. Обозначим через $\mathscr{P}(G_i)$, $i = 1, 2$, *пространство графа* G_i, выделяемое из произведения массовых поверхностей всех частиц графа G_i условием сохранения импульса в каждой вершине. Мы имеем каноническое отображение

$$\mathscr{P}(\varkappa)\colon \mathscr{P}(G_2) \to \mathscr{P}(G_1),$$

определенное путем «забывания» импульсов стянутых линий. Тогда поставленный выше вопрос сводится к следующему: какие точки из $\mathscr{P}(G_1)$ принадлежат образу этого отображения?

Для графов мы будем использовать следующие обозначения. *Граф многократного рассеяния* — это связный ориентированный граф G, линии которого изображают частицы, а вершины — столкновения между частицами. Такой граф не должен иметь направленных петель, так что множество вершин будет частично упорядоченным; это соответствует *причинной*

упорядоченности последовательных столкновений. Множество вершин будет обозначаться через V, множество линий — через I; $v(i)$ — *коэффициент инцидентности* вершины v по отношению к линии i, равный $+1$, -1 или 0. Через Z будет обозначаться *группа циклов* графа, определенная как пересечение ядер всех гомоморфизмов

$$v_*\colon \mathbb{Z}(I) \to \mathbb{Z},$$

связанных с функциями инцидентности

$$v\colon I \to \mathbb{Z}$$

всех вершин графа ($\mathbb{Z}$ — группа целых чисел, а $\mathbb{Z}(I)$ — свободная абелева группа над множеством I). Если $z \in Z$, то через $z(i)$ будет обозначаться вклад линии i в цикл z (целое число). Напомним, что базис свободной абелевой группы Z может быть построен следующим образом: выберем в G максимальное *дерево* (подграф без циклов); тогда для каждой линии k вне этого дерева имеется единственный цикл z_k, такой, что $z_k(k) = 1$ и $z_k(l) = 0$ для остальных линий l, лежащих вне дерева; такие циклы z_k и образуют базис группы Z. Пространство графа определяется следующим образом:

$$\mathscr{P}(G) = \left\{ p^I \in \prod_{i \in I} M_i \,\middle|\, \sum_{i \in I} v(i)\, p_i = 0 \quad \forall v \in V \right\}.$$

Иногда удобно забывать условие на массы (в уравнении массовой поверхности) и рассматривать евклидово пространство

$$\mathscr{E}(G) = \left\{ p^I \in (\mathbb{R}^4)^{|I|} \,\middle|\, \sum_{i \in I} v(i)\, p_i = 0 \quad \forall v \in V \right\}.$$

Тогда, вводя полиномиальное отображение

$$s\colon \mathscr{E}(G) \to \mathbb{R}^{|I|},$$
$$p^I \mapsto (p_i^2)_{i \in I},$$

мы видим, что $\mathscr{P}(G)$ — связная компонента алгебраического множества $s^{-1}((m_i^2))$. Если $(m_i^2)_{i \in I}$ — регулярное значение отображения s, то это алгебраическое множе-

ство является *многообразием.* Таким образом, мы получаем

Предложение 1. *Для почти всех значений масс пространство $\mathscr{P}(G)$ является многообразием.*

Поучительно записать в явном виде условие критичности отображения s. Выберем в качестве системы координат на $\mathscr{E}(G)$ систему импульсов (p_k), соответствующих дополнению к максимальному дереву[1]). Для касательного к s отображения получим

$$\frac{\partial s_i}{\partial p_k^{(\mu)}} = 2p_i \cdot \frac{\partial p_i}{\partial p_k^{(\mu)}} = \begin{cases} 2p_i^{(0)} z_k(i), & \mu = 0, \\ -2p_i^{(\mu)} z_k(i), & \mu = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Поэтому отображение s будет критическим тогда и только тогда, когда можно написать линейное соотношение, в котором не все коэффициенты равны нулю:

$$\sum_{i \in I} \alpha_i p_i z_k(i) = 0 \qquad \forall k,$$

т. е.

$$\sum_{i \in I} \alpha_i p_i z(i) = 0 \qquad \forall z \in \mathbf{Z}.$$

Пример. В случае графа 1 группа циклов порождена циклами $1-2$, $2-3$, $1+1'$, $1'-2'$, $2'-3'$, так что предыдущие соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_1 p_1 - \alpha_2 p_2 &= 0, \\ \alpha_2 p_2 - \alpha_3 p_3 &= 0, \\ \alpha_1 p_1 + \alpha_{1'} p_{1'} &= 0, \\ \alpha_{1'} p_{1'} - \alpha_{2'} p_{2'} &= 0, \\ \alpha_{2'} p_{2'} - \alpha_{3'} p_{3'} &= 0 \end{aligned}$$

и означают просто, что импульсы всех частиц параллельны друг другу. Это влечет за собой следующее соотношение между массами:

$$m_1 + m_2 + m_3 = m_{1'} + m_{2'} + m_{3'}.$$

---

[1]) Точнее, систему компонент $\left(p_k^{(\mu)}\right)$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ этих импульсов. — *Прим. ред.*

Мы хотели бы изучить отображение

$$\mathscr{P}(\varkappa)\colon\ \mathscr{P}(G_2)\to\mathscr{P}(G_1),$$

соответствующее стягиванию

$$\varkappa\colon\ G_2\twoheadrightarrow G_1.$$

Мы будем обозначать через G подграф графа G_2, образованный линиями, которые мы хотим стянуть, а через I, V и т. д. — множество линий, вершин и т. д. этого подграфа. Сначала сформулируем следующее очевидное

Предложение 2. *Отображение $\mathscr{P}(\varkappa)$ является собственным* (т. е. полный прообраз любого компактного подмножества компактен).

Действительно, замкнутое подмножество массовой поверхности компактно тогда и только тогда, когда *энергия* p^0 ограничена. Таким образом, предложение 2 просто означает, что из ограниченности энергий «внешних» линий (т. е. линий графа G_1) следует ограниченность энергий «внутренних» линий (линий графа G). Этот результат легко следует из закона сохранения энергии в каждой вершине.

Если массы выбраны некритическими, так что $\mathscr{P}(G_2)$ и $\mathscr{P}(G_1)$ являются *многообразиями* (предложение 1), то мы можем говорить о касательном отображении к $\mathscr{P}(\varkappa)$ и искать его критические точки, т. е. точки, в которых касательное отображение не сюръективно. Касательный вектор к $\mathscr{P}(G_2)$ может быть представлен касательным вектором X к $\mathscr{E}(G_2)$, подчиненным условиям $ds_j(X)=0$, где $s_j=p_j^2$, $j\in I_2$. Вычислим $\ker d\mathscr{P}(\varkappa)$ — ядро касательного отображения; оно состоит из векторов X, компоненты которых вдоль «внешних» линий обращаются в нуль. Тогда уравнения $ds_j(X)=0$ тривиально удовлетворяются для $j\in I_1$, и их нужно записать только для $j\in I$, где они имеют вид

$$ds_i(X)=\sum_k\frac{\partial s_i}{\partial p_k}\cdot X_k=2\sum_k z_k(i)\,p_i\cdot X_k,$$

причем четырехмерные векторы X_k обозначают компоненты вектора X вдоль линий k, принадлежащих

дополнению в I к максимальному дереву графа G. Таким образом,

$$\ker d\mathcal{P}(\varkappa)=\left\{X \,\middle|\, \sum_k z_k(i)\, p_i \cdot X_k=0 \qquad \forall i\in I\right\}.$$

Легко проверить, что $d\mathcal{P}(\varkappa)$ не сюръективно тогда и только тогда, когда эти уравнения его ядра не являются независимыми, т. е. выполняется соотношение

$$\sum_{i\in I} \alpha_i p_i z_k(i)=0 \qquad \forall k$$

или

$$\sum_{i\in I} \alpha_i p_i z(i)=0 \qquad \forall z\in Z.$$

Эти параметры α_i (не все равные нулю) называются *фейнмановскими параметрами*, а уравнения — *уравнениями Ландау*. Заметим, что формально они совпадают с уравнениями, выписанными в связи с предложением 1, но обозначения I, Z имеют здесь другой смысл, так как теперь они относятся к *подграфу* G, состоящему из линий, стянутых при отображении $\varkappa$. Таким образом, мы доказали

Предложение 3. *Точка $p^{I_2}\in\mathcal{P}(G_2)$ является критической для $\mathcal{P}(\varkappa)$ тогда и только тогда, когда существует система не обращающихся одновременно в нуль фейнмановских параметров (α_i), удовлетворяющих уравнениям Ландау. Возможные системы фейнмановских параметров образуют векторное пространство, размерность которого равна корангу критической точки (в пространстве-образе).*

Во второй части мы увидим, что фейнмановские параметры допускают физическую интерпретацию с точностью до множителя, как «отрезки времени» между моментами рождения и уничтожения соответствующих частиц. Таким образом, критические точки, в которых фейнмановские параметры могут быть выбраны *неотрицательными*, будут играть привилегированную роль. Мы назовем их *эффективными критическими точками. Если, более того, коранг равен* 1 (т. е. фейнмановские параметры определены однозначно с точностью до множителя пропорциональности),

и если *все* фейнмановские параметры можно взять строго *положительными*, то мы назовем критическую точку *главной*. Образ критической точки в $\mathcal{F}(G_1)$ мы будем называть *точкой Ландау*; она будет называться *эффективной*, соотв. *главной* точкой Ландау, если она получается из эффективной, соотв. главной критической точки.

Теперь мы приведем первое нетривиальное предложение.

Предложение 4. *В окрестности главной критической точки отображение $\mathcal{F}(\varkappa)$ имеет тот же локальный аналитический тип, что и надстройка функции Морса индекса* 0, *т. е. в $\mathcal{F}(G_2)$* (соответственно в $\mathcal{F}(G_1)$) *можно выбрать такие локальные аналитические координаты $x_1, x_2, \ldots, x_m$ в $\mathcal{F}(G_2)$ и $y_1, y_2, \ldots, y_m$ в $\mathcal{F}(G_1)$, что отображение $\mathcal{F}(\varkappa)$ имеет вид*

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= x_2, \\ &\vdots \\ y_{n-1} &= x_{n-1}, \\ y_n &= x_n^2 + x_{n+1}^2 + \ldots + x_m^2. \end{aligned}$$

Замечания. Последняя строка является локальной моделью функции Морса $y_n(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m)$ индекса 0. Операция «надстройки» (в терминологии Тома) состоит в увеличении размерности пространства-прообраза и пространства-образа тривиальным способом при помощи добавления одного и того же множества переменных. Получающийся тип отображения в классификации особенностей по Тому называется типом S_1. Перечислим его простые свойства, которые понадобятся, когда мы перейдем к физической интерпретации: множество Ландау является *многообразием коразмерности* 1 (многообразие $y_n = 0$); каждая точка Ландау является проекцией *только одной критической точки* (по крайней мере в рассматриваемой окрестности); наконец, образ $\mathcal{F}(\varkappa)$ *весь расположен по одну сторону от многообразия*

Ландау ($y_n \geqslant 0$), которое можно поэтому интерпретировать как *порог процесса многократного рассеяния.*

Набросок доказательства. Особенность Морса функции характеризуется невырожденностью квадратичной формы — «гессиана» функции, определенного матрицей вторых частных производных. Аналогично, в случае отображения, имеющего критическую точку коранга 1, *на ядре касательного отображения* можно определить квадратичную форму, называемую «трансверсальным гессианом» (определенную с точностью до умножения на ненулевое число), невырожденность которого будет характеризовать тип S_1 особенности. «Тип S_1 с нулевым трансверсальным индексом» будет характеризоваться положительной определенностью (или отрицательной определенностью) трансверсального гессиана. Я не имею возможности дать здесь формальное определение трансверсального гессиана, а просто укажу, как он вычисляется в настоящей ситуации: это квадратичная форма

$$H(X) = \sum_{i;\, k,\, \mu;\, k',\, \mu'} \alpha_i \frac{\partial^2 s_i}{\partial p_k^{(\mu)} \partial p_{k'}^{(\mu')}} X_k^{(\mu)} X_{k'}^{(\mu')} =$$

$$= \sum_{i,\, k,\, k'} \alpha_i z_k(i)\, z_{k'}(i)\, X_k \cdot X_{k'} =$$

$$= \sum_i \alpha_i Y_i^2,$$

где мы положили

$$Y_i = \sum_k z_k(i)\, X_k.$$

Теперь тот факт, что $X \in \ker d\mathscr{P}(\varkappa)$, выражается соотношениями

$$p_i \cdot Y_i = 0 \qquad \forall i \in I$$

(см. доказательство предложения 3). Так как p_i — временно-подобные векторы $(p_i^2 > 0)$, то отсюда следует, что Y_i должны быть *пространственно-подобными.* Поэтому для положительных фейнмановских

параметров трансверсальный гессиан $H(X) = \sum_i \alpha_i Y_i^2$ *отрицательно определен* (Y_i не могут все обращаться в нуль, если только X не равен нулю), и предложение 4 доказано.

Упражнение. Покажите, что предложение 4 останется справедливым, если допустить, чтобы фейнмановские параметры обращались в нуль *на некотором дереве* графа G.

Предложение 4 дает лишь *локальную* информацию. Но некоторая *глобальная* информация легко может быть получена следующим образом. Пусть $p^c \in \mathscr{P}(G_2)$ — эффективная критическая точка произвольного коранга; выберем систему (α_i) неотрицательных фейнмановских параметров, удовлетворяющих уравнениям Ландау в p^c. На евклидовом пространстве $\mathscr{E}(G_2)$ рассмотрим линейную функцию

$$t(p) = \sum_{i \in I} \alpha_i (p_i - p_i^c) \cdot p_i^c.$$

Она обращается в нуль в p^c и *неотрицательна* на $\mathscr{P}(G_2)$; в самом деле, ни один из членов $(p_i - p_i^c) \cdot p_i^c$ не может быть отрицательным, когда оба четырехмерных вектора p_i, p_i^c принадлежат одной и той же массовой поверхности. Поэтому $\{t(p) = 0\}$ — *опорная гиперплоскость для* $\mathscr{P}(G_2)$ в $\mathscr{E}(G_2)$ (и даже для $\mathscr{P}^*(G_2)$ — — пространства, получающегося из $\mathscr{P}(G_2)$, если забыть условия на массы для *внешних* линий, которые не играют никакой роли в предыдущих рассуждениях). Теперь из критического характера точек p^c следует — и это также можно проверить непосредственно с помощью уравнений Ландау, — что эта гиперплоскость является полным прообразом некоторой гиперплоскости в $\mathscr{E}(G_1)$, т. е. функция $t(p)$ зависит *только от внешних импульсов*. Эту функцию можно поэтому рассматривать как уравнение гиперплоскости в $\mathscr{E}(G_1)$, «опорной» к проекции $\mathscr{P}^*(G_2)$.

Таким образом, мы имеем следующее свойство «выпуклости»:

Предложение 5. *Через каждую эффективную точку Ландау проходит гиперплоскость, которая является опорной к проекции пространства $\mathscr{S}^*(G_2)$. В частности, она будет опорной к множеству Ландау.*

Дальнейшие проблемы

1. Было бы интересно исследовать возможные топологические типы критических точек коранга > 1. В противоположность случаю коранга 1, они, по-видимому, не являются точками общего положения.

2. «Иерархия» особенностей.

Если некоторые из фейнмановских параметров обращаются в нуль, то можно стянуть соответствующие линии, получив при этом другой граф G_3, для которого данная точка еще будет критической. Таким образом, мы приходим к изучению особенностей отображения, являющегося композицией двух отображений:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{S}(G_2) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathscr{S}(G_3) \arrow[d] \\ & \mathscr{S}(G_1) \end{tikzcd}$$

Следующий пример «композиции особенностей» является простым случаем ситуации, действительно встречающейся в физике. Рассмотрим следующую композицию отображений плоскости в плоскость:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h = g\circ f"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

$$\begin{cases} f: \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \mapsto \begin{matrix} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2^2, \end{matrix} \\ g: \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} \mapsto \begin{matrix} z_1 = y_1 + y_2, \\ z_2 = y_1^2, \end{matrix} \\ h: \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \mapsto \begin{matrix} z_1 = x_1 + x_2^2, \\ z_2 = x_1^2. \end{matrix} \end{cases}$$

Интуитивно отображение f можно представлять себе как «складывание» x-плоскости вдоль оси $x_2 = 0$ и проектирование ее на y-плоскость, причем складка проектируется на ось $y_2 = 0$. Далее, g «складывает» y-плоскость вдоль другой оси $y_1 = 0$ и проектирует ее на z-плоскость под углом к образу первого складывания. На рис. 1 показан образ композиции отображений в z-плоскости: множество Ландау (множество

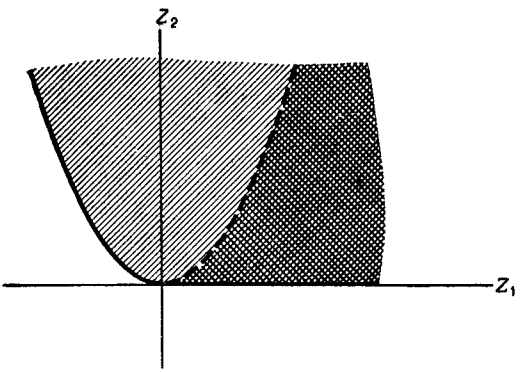


Рис. 1. Образ композиции отображений. Светлая заштрихованная область покрыта дважды, темная — четырежды.

критических значений) состоит из полуоси $z_2 = 0$, $z_1 \geqslant 0$ и касательной к ней параболы $z_2 = z_1^2$. (Эта парабола есть не что иное, как образ первого складывания.) Это простейший пример того, что физики называют *эффективным пересечением* кривых Ландау. Дальнейшее изучение этих вопросов см. в [5].

2. Физический смысл особенностей Ландау

Интерес к особенностям в физической области был пробужден благодаря следующему очень простому замечанию Коулмана и Нортона. Рассмотрим какой-нибудь процесс многократного рассеяния, например представленный графом 2[1]) на стр. 147, и вообразим

[1]) Для ясности изложения все рассуждения в этой части проводятся на конкретном примере графа 2, хотя их сразу можно было бы обобщить на произвольный граф.

идеальный случай, когда различные взаимодействия происходят в *точках* v, v', w пространства-времени. Тогда четырехмерные векторы $a_4 = \overline{vv'}$, $a_5 = \overline{vw}$, $a_{5'} = \overline{wv'}$ изображают пространственно-временные интервалы, пробегаемые частицами 4, 5, 5′. Следовательно, они должны быть пропорциональны импульсам этих частиц:

$$a_i = \alpha_i p_i, \qquad i = 4, 5, 5';$$

множители пропорциональности α_i можно интерпретировать как $\alpha_i = \tau_i/m_i$, где τ_i — собственное время жизни частицы i, измеряемое в ее системе покоя. (Напишем $a_i = \tau_i p_i/m_i$ и заметим, что p_i/m_i — «четырехмерная скорость» частицы i.) В этих обозначениях уравнение Ландау $\alpha_4 p_4 = \alpha_5 p_5 + \alpha_{5'} p_{5'}$ примет вид $a_4 = a_5 + a_{5'}$, и его можно интерпретировать как очевидное необходимое и достаточное условие существования пространственно-временной диаграммы (v, v', w). Более того, *положительность фейнмановских параметров* просто означает, что τ_i положительны, т. е. что частицы не могут уничтожаться раньше, чем они созданы.

Конечно, рассмотренный выше идеальный случай противоречит законам квантовой механики, так как мы были вынуждены приписать частицам точные импульсы *и* координаты. Но во всяком случае мы можем надеяться понять смысл особенностей Ландау в «макроскопическом» пределе, когда промежутки между последовательными столкновениями велики по сравнению с неопределенностями положений. Более того, пусть волновые функции φ_j входящих ($j = 1, 2, 3$) и выходящих ($j = 1', 2', 3'$) частиц достаточно тесно распределены в *импульсном* представлении вокруг некоторого среднего значения p_j^c, определяющего *главную точку Ландау* (p_j^c) графа 2.

В силу предложения 3, задание точки (p_j^c) однозначно определяет (по крайней мере локально) систему внутренних импульсов p_j^c ($j = 4, 5, 5'$), удовлетворяющих уравнениям Ландау, вместе с фейнманов-

скими параметрами, определенными с точностью до множителя. Поэтому оно определяет, *с точностью до произвольного скалярного множителя* τ, пространственно-временные интервалы $a_i = \tau a_i p_j^c$, в которых мы можем надеяться обнаружить последовательные взаимодействия, если они вообще происходят. Поэтому, предполагая, что все волновые функции φ_j перекрываются в некоторой области пространства-времени, мы можем надеяться сделать многократное рассеяние более вероятным, подвергая частицы различным пространственно-временным сдвигам, отличающимся в точности на данные выше интервалы a_i (для достаточно больших τ). Пусть

частицы 1 и 2 подвергаются сдвигу a_v,

частицы 1′ и 2′ подвергаются сдвигу $a_{v'}$,

частицы 3 и 3′ подвергаются сдвигу a_w,

где $a_{v'} - a_v = a_4$, $a_w - a_v = a_5$, $a_{v'} - a_w = a_{5'}$. Тогда можно ожидать, что асимптотически, для больших пространственно-временны́х сдвигов, выбранных указанным частным образом, амплитуда рассеяния рассматриваемого процесса (граф 1) не будет уменьшаться так быстро, как это было бы для произвольных пространственно-временны́х сдвигов, и будет вести себя как произведение амплитуд, связанных с вершинами графа 2, проинтегрированное по всем возможным состояниям промежуточных частиц.

Подставим эти сдвиги в уравнения. В импульсном представлении нам задано распределение $S(p_1, p_2, p_3; p_{1'}, p_{2'}, p_{3'})$ — интегральное ядро, связанное с оператором рассеяния S (по теореме Шварца о ядре). Амплитуда рассеяния имеет вид

$$\langle \varphi'_{1'} \otimes \varphi_{2'} \otimes \varphi_{3'} | S | \varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \varphi_3 \rangle =$$

$$= \int \left(\prod_{l=\substack{1,\,2,\,3\\1',\,2',\,3'}} \frac{d^3\mathbf{p}_l}{2p_l^0} \right) S(p_1, p_2, p_3; p_{1'}, p_{2'}, p_{3'}) \times$$

$$\times \varphi_1(p_1)\varphi_2(p_2)\varphi_3(p_3)\overline{\varphi_{1'}(p_{1'})}\,\overline{\varphi_{2'}(p_{2'})}\,\overline{\varphi_{3'}(p_{3'})}, \qquad (1)$$

а для состояний после сдвига она приобретет вид

$$\langle \varphi_{1'}^{a_{v'}} \otimes \varphi_{2'}^{a_{v'}} \otimes \varphi_{3'}^{a_w} | S | \varphi_1^{a_v} \otimes \varphi_2^{a_v} \otimes \varphi_3^{a_w} \rangle =$$
$$= \int [\text{то же подинтегральное выражение}] \times$$
$$\times \exp i [(p_1 + p_2) a_v + (p_3 - p_{3'}) \cdot a_w - (p_{1'} + p_{2'}) \cdot a_{v'}], \tag{1a}$$

где обозначение φ^a используется для состояния, полученного из φ с помощью пространственно-временнóго сдвига на вектор a:

$$\varphi^a(p) = \varphi(p) \times \exp ip \cdot a.$$

Мы хотели бы установить для этой амплитуды следующую асимптотическую формулу:

$$(1\tau) \underset{\tau \to \infty}{\sim} \int \left(\prod_{\substack{h=1,\,2,\,3 \\ 1',\,2',\,3' \\ 4,\,5,\,5'}} \frac{d^3\mathbf{p}_h}{2p_h^0} \right) S(p_1, p_2; p_4, p_5) \times$$
$$\times S(p_3, p_5; p_{3'}, p_{5'}) S(p_4, p_{5'}; p_{1'}, p_{2'}) \times$$
$$\times \varphi_1(p_1) \varphi_2(p_2) \varphi_3(p_3) \overline{\varphi_{1'}(p_{1'})} \overline{\varphi_{2'}(p_{2'})} \overline{\varphi_{3'}(p_{3'})} \times$$
$$\times \exp i [p_4 \cdot a_4 + p_5 \cdot a_5 + p_{5'} \cdot a_{5'}], \tag{2}$$

которая выражает факторизацию процесса v, w, v'. Фазовые множители $\exp i(p_i \cdot a_i)$ в подинтегральном выражении описывают эволюцию частиц 4, 5, 5′ от момента рождения до момента уничтожения.

Итак, каким образом перейти от (1a) к (2)? Несложное вычисление показывает, что фазовый множитель в (1a) в точности равен фазовому множителю в (2) для любых внутренних импульсов p_4, p_5, $p_{5'}$, удовлетворяющих закону сохранения импульса в каждой вершине. Но заметим, что функция

$$\sum_{i=4,\,5,\,5'} p_i \cdot a_i = \tau \sum_{i=4,\,5,\,5'} \alpha_i p_i \cdot p_i^c$$

как раз равна, с точностью до постоянной фазы, которую можно вынести за знак интеграла, умноженной на τ функции

$$t(p) = \sum_i \alpha_i (p_i - p_i^c) \cdot p_i^c,$$

рассмотренной в предложении 5. Напомним, что эта функция зависит на самом деле только от *внешних* импульсов, и ее можно считать линейной аппроксимацией для уравнения многообразия Ландау. Таким образом,

$$(1\tau) = \int [\text{подинтегральное выражение (1)}] \times \exp i\tau t(p).$$

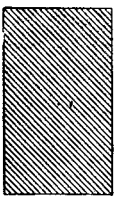
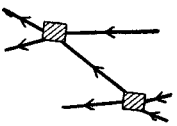
Асимптотическое поведение этого выражения при $\tau \to \infty$ будет, очевидно, зависеть только от характера особенности подинтегрального выражения (1) вблизи $\tau = 0$, т. е. вблизи многообразия Ландау.

Мы не будем продолжать рассуждения дальше и сформулируем только следующее заключение: *характерные черты* «многократного рассеяния» *в процессе столкновения макроскопически определяются строением особенностей оператора рассеяния на соответствующем многообразии Ландау.* По поводу дальнейших подробностей мы отсылаем читателя к работе [5], где показано, как можно постулировать строение особенностей оператора рассеяния, приводящее в точности к поведению типа «многократного рассеяния» (2).

В заключение позвольте мне кратко перечислить различные точки зрения, принятые сейчас среди физиков, относительно «особенностей Ландау в физической области». Начнем с того, что слово «особенность» можно понимать двумя различными способами: в *дифференцируемом* смысле и в *аналитическом* смысле. С другой стороны, можно различить по существу три типа физического подхода к проблеме особенностей. Первый из них — изучение *фейнмановских интегралов*, которые обычно считаются хорошими моделями при изучении особенностей. Можно показать, что все постулаты аналитичности, требуемые в [5], выполняются для фейнмановских интегралов, и это, конечно, очень приятно. Второй подход — так на-

зываемая «*теория S-матрицы*», в которой пытаются прямо построить теорию оператора S, не используя уравнения поля и т. д. Так как выбор «аксиом S-матрицы» более или менее остается на усмотрение теоретика, он мог бы, несомненно, постулировать аналитические свойства, сформулированные в [5]. Однако специалисты по теории S-матрицы не любят это делать, потому что эти свойства представляются излишними, как математически, так и физически: математически потому, что многое о строении особенностей графа можно вывести из строения особенностей других графов, используя метод «композиции особенностей» (см. конец § 1); физически же потому, что условие *унитарности* оператора S накладывает столь сильные ограничения на строение его особенностей, что очень трудно вообразить унитарный оператор S с аналитическими свойствами, отличными от вышеупомянутых. Третий подход — с математической точки зрения, несомненно, наиболее удовлетворительный, — это *общая квантовая теория поля* или *аксиоматическая теория поля*. Хотя с этой теорией очень трудно оперировать, она уже дала некоторые обнадеживающие указания относительно асимптотического поведения.

Следующая таблица суммирует положение в настоящий момент:

	Фейнмановские интегралы	Теория S-матрицы	Теория поля
Дифференцируемая структура		Яголницер, Уэндерс (надлежащие предположения о дифференцируемой структуре приводят к правильному асимптотическому поведению)	Хепп: изучение процесса двойного рассеяния 

Продолжение

	Фейнмановские интегралы	Теория S-матрицы	Теория поля
Аналитическая структура	О. К. (ср. 5)	Олив, Полкингорн, Стапп, ... (аналитичность в связи с унитарностью)	?

ЛИТЕРАТУРА

1. Coleman S., Norton R. E., *Nuovo Cimento*, 38 (1965), 438.
2. Eden R. J., Landshoff P. V., Olive D. I., Polkinghorne J. C., The Analytic S Matrix, Cambridge Univ. Press, 1966.
3. Hepp K., *J. Math. Phys.*, **6** (1965), 1762.
4. Iagolnitzer D., *J. Math. Phys.*, **6** (1965), 1576; Thèse, Paris, 1967.
5. Pham F., Ann. Inst. Henri Poincaré, **VI**, № 2 (1967), 89; Symposia on Theoretical Physics, vol. 7 (Plenum Press, New York).
6. Wanders G., *Helv. Physica Acta*, 38 (1965), 192.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 5

1. Обзор общих свойств S-матрицы 8
2. Особенности Ландау S-матрицы 12
3. Факторизация S-матрицы 21
4. Обсуждение 24

Глава 0. Некоторые комбинаторные свойства графов . . 27

0.1. Пути, циклы и законы сохранения графов . . . 27
0.2. Подграфы и факторграфы 33
0.3. Тривиальные расширения: объединении и букеты графов 37
0.4. Расслоенные произведения 40

Глава I. Топологическое исследование пространств, связанных с графами 47

I.1. Пространства $\mathscr{P}(G)$ и их отображения 47
I.2. Особенности отображений $\mathscr{P}(\varkappa)$ 51
I.3. Композиция особенностей 58

Глава II. Аналитичность амплитуд рассеяния и поглощения 69

II.1. Аналитичность амплитуд рассеяния 69
II.2. Аналитичность амплитуд поглощения 71
II.3. Скачки амплитуд 77

Глава III. Упругие пороги и графы с кратными линиями . . 90

III.1. Топологическое исследование упругих порогов 91
III.2. Гипотеза С для графов с кратными линиями 96
III.3. Пересмотр согласованности гипотез 98

Приложение 0 107

Приложение I. **Видимые контуры многообразий, определенных пересечениями** 110

А. I. 1. Критические точки 110
А. I. 2. Трансверсально критические точки 111

А. I. 3. Аналитическая запись условия трансверсальности 115

Приложение II. **Особенности композиции отображений** 119

А. II. 1. Если h регулярно, то g также регулярно . . 119
А. II. 2. Предположим, что f регулярно 120
А. II. 3. Предположим, что g регулярно 120
А. II. 4. Особенности типа $S_1 \circ S_1$ 121

Приложение III. **Комплексные смещения с вещественных многообразий** 127

А. III. 1. Смещения с подмногообразий 128
А. III. 2. Смещения, совместимые с проекцией 129
А. III. 3. Аналитичность интеграла по «почти вещественному» циклу 133

Приложение IV. **Замечание о фундаментальной группе дополнения к алгебраическому множеству** 140

Благодарности 142

Литература 143

Добавление. Особенности Ландау в физической области 145

1. Кинематика процессов многократного рассеяния . 145
2. Физический смысл особенностей Ландау 156
Литература 162

Уважаемый читатель!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и др. просим присылать по адресу: *Инд. 129820, Москва И-110 ГСП, 1-й Рижский пер., 2, издательство «Мир».*

Ф. Фам

ОСОБЕННОСТИ ПРОЦЕССОВ
МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

Редактор *Н. И. Плужникова*
Художник *Д. В. Орлов*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *Е. Д. Кузнецова*
Корректор *О. К. Румянцева*
Сдано в набор 22/VI 1971 г.
Подписано к печати 22/II 1972 г.
Бумага № 2 84×108 1/32=2,63 бум. л., 8,82 усл. печ. л.
Уч.-изд. л. 7,47. Изд. № 1/5995
Цена 60 коп. Зак. 1190

Издательство «Мир»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29.

В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «МИР»

выйдет в свет

следующая книга:

Като Т. **Теория возмущений линейных операторов,** Берлин — Гейдельберг — Нью-Йорк, 1966, перев. с англ., 37 л.

Монография крупнейшего японского ученого математика Т. Като представляет собой выдающееся явление в математической литературе. Она посвящена важному разделу функционального анализа, тесно связанному с современной теоретической физикой.

Книга написана с большим педагогическим мастерством, содержит значительное число интересных задач, часть из которых подробно разобрана. Предполагая знание лишь элементарных фактов из функционального анализа, автор вводит читателя в круг современных проблем теории возмущений.

Книга представляет интерес для научных работников, занимающихся функциональным анализом, математической физикой и смежными вопросами. Она будет, несомненно, полезна и физикам-теоретикам.

ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ!

Только предварительный заказ на книги в магазинах, торгующих научно-технической литературой, обеспечит своевременное получение интересующих вас книг.