

Н.Н.ФЕДОРОВ

ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов
радиотехнических специальностей
вузов



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1980

ББК 22.313

Ф 33

УДК 538.3

Рецензенты:

кафедра радиотехники Северо-Западного заочного политехнического института (зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. Н. П. Красюк); д-р техн. наук, проф. Г. З. Айзенберг (Московский электротехнический институт связи)

Федоров Н. Н.

Ф 33 Основы электродинамики: Учеб. пособие для вузов.— М.: «Выш. школа», 1980.—399 с., ил.

В пер. 1 р. 10 к.

В книге рассматриваются основные законы и соотношения современной электродинамики.

Предназначается для студентов радиотехнических специальностей вузов. Может быть полезна аспирантам и лицам, специализирующимся в области теоретической и прикладной электродинамики.

Ф $\frac{30401-129}{001(01)-80}$ 103—80

2402000000

537

ББК 22.313

© Издательство «Высшая школа», 1980

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие написано в соответствии с программой курса «Электродинамика», утвержденной МВ и ССО СССР. За время, прошедшее после выпуска в свет книги того же названия (1965 г.), этот курс претерпел существенные изменения. Изменилась и методика его изложения. В силу этого предлагаемая книга представляет собой полностью переработанное изложение курса электродинамики. Сохранена лишь основная методическая линия, принятая ранее, которая заключается в следующем.

Теоретический материал, используемый для решения конкретных электродинамических задач, излагается не сразу, а по мере появления в нем необходимости. Каждое новое теоретическое положение сопровождается решением фундаментальной электродинамической задачи, помогающей его усвоению. Например, граничные условия излагаются при решении простейшей краевой задачи об отражении и преломлении плоских волн. Аналогично понятие о потенциалах вводится при решении задач о возбуждении электромагнитного поля, где их применение является вполне оправданным. В основу изложения материала положены уравнения Максвелла, обоснование которых приводится в первых главах.

Многолетний опыт преподавания курса электродинамики убеждает в правильности подобного подхода. Доказано, что хорошее усвоение курса студентами возможно лишь тогда, когда математический анализ материала осуществляется до конца. Этот принцип и принят в предлагаемой книге, причем детали этого анализа вынесены в приложения.

Детальный анализ необходим также из соображений высокой загрузки студентов в ведущих технических вузах и целесообразности облегчения изучения курса электродинамики, насыщенного математикой.

В книге излагаются основы электродинамики, поэтому в ней отсутствуют разделы технической электродинамики, которые обычно рассматриваются в специальных курсах.

Автор выражает искреннюю благодарность рецензентам рукописи — коллективу кафедры радиотехники СЗПИ (зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. Н. П. Красюк), заслуженному деятелю науки и техники д-ру техн. наук, проф. Г. З. Айзенбергу и канд. техн. наук, доц. Г. А. Ерохину за тщательный просмотр рукописи и ряд ценных замечаний, принятых автором при окончательной ее доработке.

Ряд основных положений курса электродинамики обсуждался автором совместно с д-ром техн. наук, проф. Е. Н. Васильевым и д-ром техн. наук, проф. А. В. Нетушилом, которым автор выражает глубокую признательность. Автор сердечно благодарит также коллектив кафедры основ радиотехники МЭИ за совместную плодотворную работу над курсом электродинамики. Книга не была бы закончена без помощи З. С. Федоровой, Н. Н. Федорова и С. Н. Федорова, которых автор сердечно благодарит.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ ВЕЛИЧИН, ИСПОЛЬЗОВАННЫХ В КНИГЕ *

- E — мгновенное значение вектора напряженности электрического поля, В/м.
 D — мгновенное значение вектора электрического смещения, Кл/м.
 B — мгновенное значение вектора магнитной индукции, Тл.
 H — мгновенное значение вектора напряженности магнитного поля, А/м.
 \dot{E} — комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля.
 \dot{D} — комплексная амплитуда вектора электрического смещения.
 \dot{B} — комплексная амплитуда вектора магнитной индукции.
 \dot{H} — комплексная амплитуда вектора напряженности магнитного поля.
 $Q_э$ — мгновенное значение электрического заряда, Кл.
 $\rho_э$ — мгновенное значение объемной плотности электрического заряда, Кл/м³.
 $\sigma_э$ — мгновенное значение поверхностной плотности электрического заряда, Кл/м².
 $Q_м$ — мгновенное значение магнитного заряда, Вб или В·с.
 $\rho_м$ — мгновенное значение объемной плотности магнитного заряда, Вб/м³ или В·с/м³.
 $\sigma_м$ — мгновенное значение поверхностной плотности магнитного заряда, Вб/м² или В·с/м².
 $\dot{Q}_э$ — комплексная амплитуда электрического заряда.
 $\dot{\rho}_э$ — комплексная амплитуда объемной плотности электрического заряда.
 $\dot{\sigma}_э$ — комплексная амплитуда поверхностной плотности электрического заряда.
 $\dot{Q}_м$ — комплексная амплитуда магнитного заряда.
 $\dot{\rho}_м$ — комплексная амплитуда объемной плотности магнитного заряда.
 $\dot{\sigma}_м$ — комплексная амплитуда поверхностной плотности магнитного заряда.
 $I_э$ — мгновенное значение электрического тока, А.
 $J_э$ — мгновенное значение вектора плотности электрического тока, А/м².
 $v_э$ — мгновенное значение вектора плотности поверхностного электрического тока, А/м.
 $v_{эп}$ — мгновенное значение вектора плотности поверхностного электрического тока проводимости.
 $v_{э\Sigma}$ — мгновенное значение вектора плотности суммарного поверхностного тока.
 $I_м$ — мгновенное значение магнитного тока, В.
 $J_м$ — мгновенное значение вектора плотности магнитного тока, В/м².
 $v_м$ — мгновенное значение вектора плотности поверхностного магнитного тока, В/м.

* В соответствии с ГОСТ 18238—72, 19880—74, 1494—77.

- $\mathbf{v}_{\text{мп}}$ — мгновенное значение вектора плотности поверхностного магнитного тока проводимости.
 $\mathbf{v}_{\text{м}\Sigma}$ — мгновенное значение вектора плотности суммарного поверхностного магнитного тока.
 $\dot{\mathbf{J}}_{\text{э}}$ — комплексная амплитуда вектора плотности электрического тока.
 $\dot{\mathbf{v}}_{\text{э}}$ — комплексная амплитуда вектора плотности поверхностного электрического тока.
 $\dot{\mathbf{v}}_{\text{эп}}$ — комплексная амплитуда вектора плотности поверхностного электрического тока проводимости.
 $\dot{\mathbf{v}}_{\text{э}\Sigma}$ — комплексная амплитуда вектора плотности суммарного поверхностного электрического тока.
 $\dot{\mathbf{J}}_{\text{м}}$ — комплексная амплитуда вектора плотности магнитного тока.
 $\dot{\mathbf{v}}_{\text{м}}$ — комплексная амплитуда вектора плотности поверхностного магнитного тока.
 $\dot{\mathbf{v}}_{\text{мп}}$ — комплексная амплитуда вектора плотности поверхностного магнитного тока проводимости.
 $\dot{\mathbf{v}}_{\text{м}\Sigma}$ — комплексная амплитуда вектора плотности суммарного поверхностного магнитного тока.
 ϵ_0 — электрическая постоянная, Ф/м.
 μ_0 — магнитная постоянная, Гн/м.
 ϵ_a — абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, Ф/м.
 μ_a — абсолютная магнитная проницаемость среды, Гн/м.
 ϵ_r — относительная диэлектрическая проницаемость среды (безразмерная величина).
 μ_r — относительная магнитная проницаемость среды (безразмерная величина).
 $\mathbf{F}_{\text{э}}$ — вектор силы взаимодействия между электрическими зарядами, Н.
 l — вектор длины, м.
 U — разность потенциалов, В.
 C — электрическая емкость, Ф.
 S — вектор площади, м².
 Ω — телесный угол, ср.
 $\Phi_{\mathbf{E}}$ — поток вектора \mathbf{E} , В·м.
 V — объем, м³.
 \mathbf{P} — вектор поляризованности веществ, Кл/м².
 χ_a — диэлектрическая восприимчивость, Ф/м.
 ξ, η, ζ — координаты в ортогональной обобщенной криволинейной системе координат.
 (ϵ_a) — тензор абсолютной диэлектрической проницаемости среды.
 f — частота колебаний, Гц.
 ω — угловая частота колебаний, с⁻¹.
 $j = \sqrt{-1}$.
 t — время, с.
 $\mathbf{G}(\omega)$ — вектор спектральной плотности.
 \mathbf{v} — вектор скорости, м/с.
 $\Phi_{\mathbf{B}}$ — поток вектора \mathbf{B} , Вб или В·с.
 $\Psi_{\mathbf{B}}$ — потокоцепление вектора \mathbf{B} , Вб или В·с.
 \mathbf{M} — вектор намагниченности, А/м.
 χ_m — магнитная восприимчивость (безразмерная величина).
 (μ_a) — тензор абсолютной магнитной проницаемости среды.
 R — электрическое сопротивление, Ом.
 γ_a — удельная электрическая проводимость среды, См/м.
 γ_m — удельная магнитная проводимость среды, Ом/м.
 ϵ_a — комплексная абсолютная диэлектрическая проницаемость среды.
 μ_a — комплексная абсолютная магнитная проницаемость среды.
 $e = 2,7$ — основание натуральных логарифмов.
 div — (дивергенция), rot (ротор), grad (градиент) — математические дифференциальные операции.

- ω — число витков.
- $\mathbf{1}_\xi, \mathbf{1}_\eta, \mathbf{1}_\zeta$ — единичные векторы (орты), ориентированные вдоль направленной ξ, η, ζ .
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ — скалярное произведение вектора \mathbf{a} на вектор \mathbf{b} .
- $[\mathbf{a} \mathbf{b}]$ — векторное произведение вектора \mathbf{a} на вектор \mathbf{b} .
- $[\]$ — векторное произведение*.
- $\sum_{k=1}^{n_1}$ — знак суммы, суммируются величины от значения $k=1$ до значения $k=n_1$.
- L — индуктивность, Гн.
- M — взаимная индуктивность, Гн.
- $\mathbf{\Pi}$ — мгновенное значение вектора Пойнтинга, Вт/м².
- P — мгновенное значение мощности, Вт.
- W — энергия, Дж.
- \mathbf{a}^* — сопряженное значение вектора \mathbf{a} .
- $\dot{\mathbf{\Pi}}$ — комплексное значение вектора Пойнтинга.
- $\dot{\mathbf{\Pi}}_d$ — действительная часть вектора Пойнтинга.
- $\dot{\mathbf{\Pi}}_m$ — мнимая часть вектора Пойнтинга.
- Re — действительная часть комплексной величины.
- Im — мнимая часть комплексной величины.
- \mathbf{U} — мгновенное значение вектора Умова, Вт/м².
- ∇^2 — дифференциальный математический оператор Лапласа.
- γ — комплексный коэффициент распространения, м⁻¹.
- Z_c — комплексное характеристическое сопротивление среды, Ом.
- β — действительная часть коэффициента γ , или коэффициент фазы, м⁻¹.
- α — мнимая часть коэффициента γ , или коэффициент затухания, м⁻¹.
- v_ϕ — фазовая скорость, м/с.
- $v_{гр}$ — групповая скорость, м/с.
- c_0 — скорость света в вакууме, м/с.
- c — скорость света в среде с параметрами μ_a, ϵ_a .
- $\mathbf{1}_n$ — единичный нормальный вектор.
- $\mathbf{1}_\tau$ — единичный тангенциальный вектор.
- M^o — коэффициент отражения.
- M^n — коэффициент преломления.
- $Z_{ст}$ — комплексное характеристическое сопротивление материала.
- λ — длина волны, м.
- h_ξ, h_η, h_ζ — коэффициенты Лямэ в обобщенной ортогональной криволинейной системе координат.
- $\gamma_{в}$ — коэффициент распространения поля в волноводах, м⁻¹.
- h — продольное волновое число в волноводах, м⁻¹.
- h' — коэффициент затухания поля в волноводах за счет конечной проводимости металлических стенок, м⁻¹.
- h'' — коэффициент затухания поля в волноводах за счет потерь в диэлектрике, заполняющем волновод, м⁻¹.
- g — поперечное волновое число в волноводах быстрых волн, м⁻¹.
- p — поперечное волновое число в волноводах медленных волн, м⁻¹.
- H_{mn} — магнитные волны типа mn .
- E_{mn} — электрические волны типа mn .
- T — поперечные электромагнитные волны.
- J_m — функции Бесселя первого рода порядка m .
- N_m — функция Бесселя второго рода или функция Неймана порядка m .
- η_{mn} — значение корней функции Бесселя.
- ν_{mn} — значение корней производной функции Бесселя.
- I_m — модифицированная функция Бесселя порядка m .

*Поскольку квадратные скобки означают векторное произведение, в книге принята следующая «иерархия» скобок: $\langle \{ \{ \} \} \rangle$.

- K_m — функция Макдональда порядка m .
 E_{mnp} — электрические волны типа mnp в объемных резонаторах.
 H_{mnp} — магнитные волны типа mnp в объемных резонаторах.
 Q — добротность объемных резонаторов.
 A_a — комплексная амплитуда векторного электрического потенциала, Тл·м.
 \dot{U}_a — комплексная амплитуда скалярного электрического потенциала, В.
 \dot{A}_m — комплексная амплитуда векторного магнитного потенциала, Кл/м.
 \dot{U}_m — комплексная амплитуда скалярного магнитного потенциала, А.
 \int_{S_1} — интеграл по поверхности S_1 .
 \oint_{S_1} — интеграл по замкнутой поверхности S_1 .
 \int_{l_1} — интеграл по пути l_1 .
 \oint_{l_1} — интеграл по замкнутому контуру l_1 .
 \int_{V_1} — интеграл по объему V_1 .

ГЛАВА 1

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

§ 1.1. Место электродинамики среди технических дисциплин. Назначение электродинамики и основные этапы ее развития

Прежде всего необходимо уяснить место, занимаемое электродинамикой среди общетеоретических и специальных дисциплин.

Электродинамику можно рассматривать как часть курса физики и теоретических основ электротехники, с одной стороны, и как дальнейшее развитие курсов теории цепей и сигналов или основ радиотехники — с другой. Таким образом, базовый курс электродинамики является переходным между указанными теоретическими курсами и такими специальными курсами, как «Распространение радиоволн», «Антенно-фидерные устройства», «Техника высоких частот», «Квантовая радиоэлектроника» и др.

Круг вопросов, рассматриваемых электродинамикой, в последнее время значительно расширился и решение практических задач существенно усложнилось.

В настоящее время физикой электродинамикой понимают раздел науки, описывающий процессы возбуждения и распространения электромагнитных волн в различных средах. Как правило, задачи электродинамики связаны с диапазоном высоких частот, используемых современной радиотехникой.

Трудно представить себе современного радиоспециалиста-исследователя, не имеющего представления об электродинамических процессах, независимо от того, в какой из областей радиотехники он работает.

Генерирование электромагнитных колебаний сверхвысоких частот, канализация этих колебаний по волноводам, процессы излучения электромагнитной энергии и улавливания ее приемными антеннами — таков круг задач, требующих изучения электродинамики. Анализ и создание ферритовых устройств, приборов, использующих плазму, квантовых устройств также возможны на базе законов электродинамики.

Электродинамика получила сейчас очень широкое распространение и развитие ее далеко от завершения.

Основным объектом изучения электродинамики является электромагнитное поле.

Электромагнитное поле представляет собой особый вид материи. По определению В. И. Ленина [1], «... материя есть то, что, действуя на наши органы чувств, производит ощущение; материя есть объективная реальность, данная нам в ощущении, ...».

История развития электродинамики, определяемая трудами многих ученых, могла бы составить предмет самостоятельного исследования. Приведем главнейшие ее этапы.

В 1753 г. в работе «Речь о явлениях воздушных от электрической силы происходящих» и в 1756 г. в труде «Теория электричества, разработанная математическим путем» М. В. Ломоносов высказал мысль о динамической природе электричества, о связи между электрическими и световыми явлениями. В 1819 г. Эрстед открыл влияние электрического тока на магнитную стрелку. В 1820 г. Ампер исследовал действие тока на ток, в результате чего была установлена связь между магнитными и электрическими явлениями. В 1831 г. М. Фарадей открыл явление электромагнитной индукции. В 1873 г. Дж. Максвелл опубликовал «Трактат об электричестве и магнетизме», в котором в математической форме изложил основные законы электромагнитного поля. Им же было введено понятие о токе смещения, позволившее разработать теорию электромагнитного поля в пространстве и в конечном счете установить связь между электромагнитными колебаниями и светом. В 1888 г. ученик знаменитого физика Гельмгольца—Г. Герц в работе «Силы электрических колебаний, рассмотренные согласно теории Максвелла» дал метод решения уравнений Максвелла и экспериментально доказал возможность существования электромагнитных волн в пространстве. В 1895 г. А. С. Попов осуществил первую в мире радиосвязь с помощью электромагнитных волн.

В 1899 г. П. Н. Лебедев экспериментально доказал давление света, т. е. электромагнитных волн, на тела. Было подтверждено наличие инертной массы у электромагнитного поля. В 1916 г. А. Эйнштейн высказал мысль об искривлении светового луча в поле тяготения, которая в 1919 г. была подтверждена Эддингтоном, измерившим отклонение светового луча в гравитационном поле Солнца. Таким образом, было доказано существование гравитационной массы у электромагнитного поля. В 1960 г. Р. В. Паунд взвесил световой луч. Материальность электромагнитного поля была окончательно доказана, чем был нанесен еще один удар по «энергетической» физике, которая, по определению В. И. Ленина [1], «есть источник новых идеалистических попыток мыслить движение без материи...».

Электромагнитное поле является носителем энергии, способной преобразовываться в другие виды энергии, что широко используется в современной технике.

В данном пособии рассматривается макроскопическая электродинамика, т. е. процессы на расстояниях, значительно превышающих внутриатомные расстояния.

При математическом описании процессов в электромагнитном поле вводят четыре основных вектора поля:

E—вектор напряженности электрического поля;

D—вектор электрического смещения, или электрической индукции;

B—вектор магнитной индукции;

H—вектор напряженности магнитного поля.

Поля, описываемые этими векторами, создаются электрическими зарядами Q_3 и токами I_3 , которые в свою очередь могут создаваться электромагнитным полем. Дополнительно в современную электродинамику вводят удобные для анализа величины магнитного заряда Q_m и магнитного тока I_m , облегчающие решение ряда задач. Смысл этих величин будет определен в дальнейшем.

Электродинамика устанавливает математическую связь между векторами поля, токами и зарядами в различных конкретных случаях, когда эти векторы являются функциями времени.

§ 1.2. Система единиц. Закон Кулона. Вектор напряженности электрического поля E . Разность потенциалов U . Теорема Гаусса для вакуума

В настоящем пособии используется система единиц МКСА (метр, килограмм, секунда, ампер), являющаяся Международной системой единиц измерения—СИ [2].

В 1785 г. Кулон экспериментально определил силу взаимодействия между двумя заряженными телами малых размеров, помещенными в вакуум. В принятой системе единиц измерения эту силу можно определить с помощью закона Кулона, выражаемого соотношением

$$F_3 = \frac{Q_3 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{1}_r. \quad (1.1)$$

Здесь F_3 —вектор силы взаимодействия между зарядами, Н; Q_3 , Q_3 —взаимодействующие заряды, Кл; ϵ_0 —коэффициент пропорциональности (электрическая постоянная вакуума); r —расстояние между центрами зарядов, м; $\mathbf{1}_r$ —единичный вектор (орт), направленный вдоль r таким образом, что разноименные заряды притягиваются, а одноименные отталкиваются (рис. 1.1).

Вектором напряженности электрического поля E называют силу, действующую на единичный положительный заряд:

$$E = F_3 / Q_3 \mathbf{1}_r, \quad (1.2)$$

$$E \rightarrow \text{Н/Кл}, \quad (1.3)$$

$$E = \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{1}_r. \quad (1.4)$$

Введем понятие разности потенциалов U между точками a_2 и a_1 , под которой понимают интеграл

$$U = \int_{a_1}^{a_2} E dl = \int_{l_1}^{l_2} E dl. \quad (1.5)$$

Разность потенциалов представляет собой работу силы E на пути l_1 . Единицей измерения разности потенциалов является вольт:

$$U \rightarrow \text{В} = \text{Н} \cdot \text{м/Кл}. \quad (1.6)$$

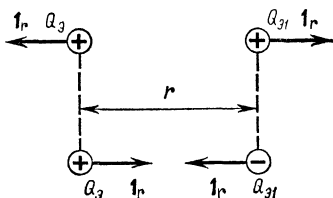


Рис. 1.1

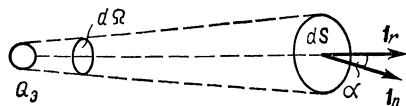


Рис. 1.2

Из формул (1.3), (1.6) следуют единицы измерения \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} \rightarrow \text{В/м}. \quad (1.7)$$

Как известно из курса физики, емкостью конденсатора C называют отношение заряда Q_3 к разности потенциалов на обкладках конденсатора:

$$C = Q_3/U. \quad (1.8)$$

В системе МКСА емкость измеряют в фарадах:

$$C \rightarrow \Phi = \text{Кл/В}. \quad (1.9)$$

Единицы измерения электрической постоянной можно определить из выражения (1.4)

$$\epsilon_0 \rightarrow \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Кл}}{\text{В} \cdot \text{м}} = \frac{\Phi}{\text{м}}. \quad (1.10)$$

Таким образом, единицей измерения ϵ_0 является фарада на метр. В системе МКСА

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}. \quad (1.11)$$

Рассмотрим бесконечно малую площадку dS , находящуюся в поле, создаваемом зарядом Q_3 (рис. 1.2).

Пусть расстояние от центра заряда до площадки равно r . Определим бесконечно малый поток вектора \mathbf{E} ($d\Phi_E$) с помощью соотношения

$$d\Phi_E = \mathbf{E} dS, \quad dS = dS \mathbf{1}_n,$$

где $\mathbf{1}_n$ — единичный вектор, нормальный к площадке dS .

С учетом выражения (1.4) можно записать

$$d\Phi_E = \frac{Q_3 dS}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{1}_r \mathbf{1}_n.$$

Выражение

$$\frac{dS \mathbf{1}_r \mathbf{1}_n}{r^2} = d\Omega$$

определяет бесконечно малый телесный угол, характеризующий угол зрения, под которым из точки расположения заряда видна пло-

щадка dS . Вводя понятие телесного угла, получаем

$$d\Phi_E = \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0} d\Omega.$$

Переходя от бесконечно малой площадки dS к площадке конечных размеров S_1 , можно записать

$$\Phi_E = \int_{S_1} \mathbf{E} dS = \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega_1} d\Omega.$$

Здесь Ω_1 — телесный угол, в пределах которого из точки расположения центра заряда наблюдается площадка S_1 .

В случае замкнутой поверхности S_1 , окружающей заряд Q_3 , полный поток вектора \mathbf{E} , проходящего через эту поверхность, может быть найден путем интегрирования по всей замкнутой поверхности. Полный телесный угол вокруг точки при этом равен 4π и

$$\Phi_E = \oint_{S_1} \mathbf{E} dS = \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{Q_3}{\epsilon_0}.$$

Соотношение

$$\oint_{S_1} \mathbf{E} dS = Q_3/\epsilon_0 \quad (1.12)$$

является математическим выражением *теоремы Гаусса для вакуума*.

§ 1.3. Теорема Гаусса для вещества. Вектор электрического смещения \mathbf{D} . Первое материальное уравнение среды. Первое уравнение непрерывности

В диэлектрической среде под влиянием поля происходит процесс поляризации. Он заключается в том, что положительные и отрицательные заряды атомов диэлектрика под действием силы \mathbf{E} смещаются относительно друг друга. Положительные заряды движутся в направлении поля \mathbf{E} , отрицательные — против него. Диэлектрик поляризуется, т. е. перестает быть электрически нейтральным. Для математической оценки этого процесса, рассмотрим некоторую

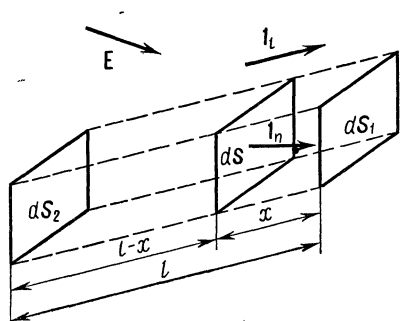


Рис. 1.3

бесконечно малую поверхность dS в веществе, единичная нормаль к которой \mathbf{l}_n не обязательно совпадает с направлением поля \mathbf{E} (рис. 1.3). Предположим, что в результате процесса поляризации положительные заряды, входящие в состав атомов, расположенных на поверхности dS , сместились на некоторое расстояние x . Направление смещения, которое характеризуется единичным вектором \mathbf{l}_l , определяется ориентацией вектора \mathbf{E} и свойствами среды. Это на-

правление может не совпадать с направлением вектора \mathbf{E} . В результате смещения положительные заряды расположатся на поверхности dS_1 . Заряды, находившиеся левее поверхности dS на расстоянии x от нее, смещаясь вправо, займут место на поверхности dS_1 . Таким образом, сместившиеся положительные заряды займут объем, ограниченный поверхностями dS и dS_1 . Этот объем может быть легко подсчитан:

$$dV_+ = dSx\mathbf{1}_n\mathbf{1}_l.$$

Допустим, что каждый положительный заряд равен $Q_{э1}$ и число зарядов, охваченных процессом поляризации в 1 м^3 , составляет N_1 . Тогда суммарный положительный заряд $dQ'_{э+}$, прошедший через поверхность dS в результате поляризации, можно определить из соотношения

$$dQ'_{э+} = Q_{э1}N_1 dV_+ = Q_{э1}N_1 dSx\mathbf{1}_n\mathbf{1}_l.$$

Отрицательные заряды, находившиеся на поверхности dS до начала действия внешнего поля \mathbf{E} , в результате этого действия сместятся в направлении, обратном направлению смещения положительных зарядов. Это направление определяется единичным вектором $-\mathbf{1}_l$.

Примем, что после смещения расстояние между положительными и отрицательными зарядами нейтрального атома равно l . Тогда отрицательные заряды, находившиеся на поверхности dS , сместятся влево на расстояние $l-x$ и расположатся на поверхности dS_2 . Объем между поверхностями dS и dS_2 будет заполнен сместившимися отрицательными зарядами, и суммарный отрицательный заряд $dQ'_{э-}$, прошедший через поверхность dS в результате поляризации, определится формулой

$$dQ'_{э-} = Q_{э1}N_1 dS(l-x)(-\mathbf{1}_n)(-\mathbf{1}_l).$$

Прохождение положительных зарядов слева направо через поверхность dS эквивалентно прохождению отрицательных зарядов справа налево. Поэтому общий заряд $dQ'_э$, прошедший через поверхность dS в результате поляризации, можно найти суммированием зарядов $dQ'_{э+}$ и $dQ'_{э-}$:

$$dQ'_э = dQ'_{э+} + dQ'_{э-} = Q_{э1}N_1 l\mathbf{1}_l\mathbf{1}_n dS.$$

Вводят обозначение

$$Q_{э1}N_1 l\mathbf{1}_l = Q_{э1}N_1 l = \mathbf{P}.$$

Величину \mathbf{P} называют *вектором поляризованности вещества*. Единицей измерения поляризованности вещества является кулон на квадратный метр:

$$\mathbf{P} \rightarrow \text{Кл/м}^2. \quad (1.13)$$

При этом

$$dQ'_э = \mathbf{P} dS\mathbf{1}_n = \mathbf{P} dS.$$

В конкретных случаях вектор \mathbf{P} может являться функцией координат. В силу этого заряд Q'_3 , прошедший через конечную поверхность S_1 , следует отыскивать путем интегрирования полученного выражения по этой поверхности:

$$Q'_3 = \int_{S_1} \mathbf{P} d\mathbf{S}.$$

Если процесс поляризации вызван зарядом, находившимся внутри замкнутой поверхности S_1 , и необходимо определить заряд Q'_3 , прошедший через эту поверхность в результате поляризации среды, то интегрирование должно быть распространено на замкнутую поверхность:

$$Q'_3 = \oint_{S_1} \mathbf{P} d\mathbf{S}.$$

Это количество электричества выйдет за пределы замкнутой поверхности S_1 . Внутри поверхности останется заряд $-Q'_3$, связанный с зарядом Q_3 и создававший совместно с ним до процесса поляризации нейтральные атомы среды. Таким образом, процесс поляризации среды сводится к появлению помимо первоначального заряда Q_3 , создавшего поле \mathbf{E} , дополнительного поляризационного заряда $-Q'_3$. Учитывая этот заряд в выражении теоремы Гаусса для вакуума (1.12), можно получить формулу, позволяющую определить поле в конкретной среде. При этом выражение (1.12) запишется в виде

$$\oint_{S_1} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (Q_3 - Q'_3),$$

или

$$\oint_{S_1} \epsilon_0 \mathbf{E} d\mathbf{S} = Q_3 - \oint_{S_1} \mathbf{P} d\mathbf{S}.$$

Объединив интегралы, получим

$$\oint_{S_1} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) d\mathbf{S} = Q_3.$$

Введем обозначение

$$\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \mathbf{D}. \quad (1.14)$$

Величину \mathbf{D} называют *вектором электрического смещения*. Интегральное соотношение

$$\oint_{S_1} \mathbf{D} d\mathbf{S} = Q_3 \quad (1.15)$$

является математическим выражением *теоремы Гаусса для вещества*. Легко определить единицу измерения вектора электрического смещения:

$$\mathbf{D} \rightarrow \text{Кл/м}^2. \quad (1.16)$$

Теорема Гаусса, записанная в форме (1.15), справедлива для идеальной диэлектрической среды. Если среда проводящая, то при выводе этой теоремы необходимо учитывать заряды, создаваемые в среде за счет токов проводимости. В дальнейшем будет дан вывод выражения, соответствующего теореме Гаусса для проводящей среды.

Выражение (1.14) позволяет установить связь между векторами \mathbf{D} и \mathbf{E} , т. е. вывести первое материальное уравнение среды. Это уравнение различно для различных сред, и на нем необходимо остановиться подробно. Прежде всего рассмотрим однородную линейную изотропную среду и монохроматическое поле, т. е. поле, изменяющееся с одной угловой частотой ω .

В этом случае вектор поляризованности вещества \mathbf{P} можно считать пропорциональным вектору поля \mathbf{E} :

$$\mathbf{P} = \chi_3 \mathbf{E}. \quad (1.17)$$

Коэффициент пропорциональности χ_3 называют *диэлектрической восприимчивостью вещества*. При этом выражение (1.14) запишется в виде

$$\mathbf{D} = (\epsilon_0 + \chi_3) \mathbf{E}.$$

Введя обозначение

$$\epsilon_0 + \chi_3 = \epsilon_a, \quad (1.18)$$

получим уравнение

$$\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}, \quad (1.19)$$

которое представляет собой *первое материальное уравнение среды*.

Величину ϵ_a называют *абсолютной диэлектрической проницаемостью среды*. Единицы измерения диэлектрической восприимчивости и диэлектрической проницаемости такие же, как для ϵ_0 — Ф/м.

Введем безразмерную величину — относительную диэлектрическую проницаемость среды:

$$\epsilon_r = \epsilon_a / \epsilon_0. \quad (1.20)$$

В реальных средах она может изменяться в значительных пределах — от отрицательных сотен (плазма), нулевых значений (плазма) до положительных десятков тысяч (титанаты бария).

Для монохроматического поля и неоднородной среды, параметры которой являются функциями обобщенных криволинейных координат ξ, η, ζ , диэлектрическая проницаемость становится функцией этих координат:

$$\epsilon_a = \epsilon_a(\xi, \eta, \zeta)$$

и первое материальное уравнение среды принимает вид

$$\mathbf{D} = \epsilon_a(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{E}. \quad (1.21)$$

Для монохроматического поля и однородной нелинейной изотропной среды диэлектрическая проницаемость зависит от поля

$$\epsilon_a = \epsilon_a(E)$$

и первое материальное уравнение среды записывается таким образом:

$$\mathbf{D} = \epsilon_a(E) \mathbf{E}. \quad (1.22)$$

Для монохроматического поля в однородной линейной анизотропной среде каждая из составляющих вектора \mathbf{D} вдоль координатных направлений ξ, η, ζ в общем случае зависит от трех координатных составляющих вектора \mathbf{E} , что отражено следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} D_{\xi} &= \epsilon_{a11} E_{\xi} + \epsilon_{a12} E_{\eta} + \epsilon_{a13} E_{\zeta}, \\ D_{\eta} &= \epsilon_{a21} E_{\xi} + \epsilon_{a22} E_{\eta} + \epsilon_{a23} E_{\zeta}, \\ D_{\zeta} &= \epsilon_{a31} E_{\xi} + \epsilon_{a32} E_{\eta} + \epsilon_{a33} E_{\zeta}, \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

или в сокращенной векторной форме

$$\mathbf{D} = (\epsilon_a) \mathbf{E}, \quad (1.24)$$

где (ϵ_a) — тензор абсолютной диэлектрической проницаемости среды:

$$(\epsilon_a) = \begin{pmatrix} \epsilon_{a11} & \epsilon_{a12} & \epsilon_{a13} \\ \epsilon_{a21} & \epsilon_{a22} & \epsilon_{a23} \\ \epsilon_{a31} & \epsilon_{a32} & \epsilon_{a33} \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

Применение тензора (ϵ_a) показывается выражением (1.23).

Применительно к анизотропной среде каждая из составляющих вектора \mathbf{D} в общем случае изменяется в своем масштабе по отношению к соответствующей составляющей вектора \mathbf{E} и в силу этого ориентация вектора \mathbf{D} не совпадает с ориентацией вектора \mathbf{E} .

В случае монохроматического поля целесообразно рассматривать отдельно поля, обладающие дискретным и непрерывным спектрами частот. Если параметры среды не зависят от частоты для однородной линейной изотропной среды справедливо материальное уравнение (1.19) независимо от спектрального состава поля. Такую среду называют недиспергирующей. Если параметры среды являются функциями частоты, то говорят, что среда обладает дисперсией и называется диспергирующей.

Допустим, что спектр частот дискретен и вектор \mathbf{E} может быть представлен рядом гармонических составляющих. Предположим также, что среда является диспергирующей, однородной, линейной и изотропной. При этом векторы поля могут быть представлены в следующем соотношении:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \mathbf{E}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \\ + \mathbf{E}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots + \mathbf{E}_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) + \dots$$

Пусть

$$\epsilon_a = \epsilon_a(\omega). \quad (1.26)$$

Тогда первое материальное уравнение среды можно записать следующим образом:

$$\mathbf{D} = \epsilon_a(\omega_0) \mathbf{E}_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \epsilon_a(\omega_1) \mathbf{E}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \\ + \epsilon_a(\omega_2) \mathbf{E}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots + \epsilon_a(\omega_n) \mathbf{E}_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) + \dots \quad (1.27)$$

Такая запись возможна в силу применимости принципа суперпозиции к линейной среде.

В случае непрерывного спектра частот для определения вида первого материального уравнения среды можно использовать преобразование Фурье или Лапласа [3]. Если вектор \mathbf{E} записать как временную функцию $\mathbf{E}(t)$, то с помощью прямого преобразования Фурье можно получить вектор спектральной плотности этой функции:

$$\mathbf{G}_E(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1.28)$$

По известному вектору спектральной функции $\mathbf{G}_E(\omega)$ можно найти вектор $\mathbf{E}(t)$ с помощью обратного преобразования Фурье:

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_E(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.29)$$

Аналогично определяют вектор $\mathbf{D}(t)$ по его спектральной плотности $\mathbf{G}_D(\omega)$:

$$\mathbf{D}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_D(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.30)$$

Таким образом, по известному вектору спектральной плотности $\mathbf{G}_D(\omega)$ можно найти вектор $\mathbf{D}(t)$. Для вектора спектральной плотности $\mathbf{G}_D(\omega)$ справедливо так же, как для каждой составляющей дискретного спектра, обычное материальное уравнение вида (1.19) с учетом частотной зависимости $\varepsilon_a(\omega)$:

$$\mathbf{G}_D(\omega) = \varepsilon_a(\omega) \mathbf{G}_E(\omega). \quad (1.31)$$

Используя обратное преобразование Фурье (1.30), получаем первое материальное уравнение для непрерывного спектра частот:

$$\mathbf{D}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_a(\omega) \mathbf{G}_E(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.32)$$

Как указывалось, первое материальное уравнение среды в случае непрерывного спектра может быть получено также с помощью преобразования Лапласа. Прямое преобразование Лапласа, примененное к вектору $\mathbf{E}(t)$, определяет его изображение $\mathbf{E}(p)$:

$$\mathbf{E}(p) = \int_0^{\infty} \mathbf{E}(t) e^{-pt} dt, \quad (1.33)$$

где

$$p = c + j\omega. \quad (1.34)$$

Вектор $\mathbf{E}(t)$ можно определить с помощью обратного преобразования Лапласа:

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \mathbf{E}(p) e^{pt} dp. \quad (1.35)$$

Аналогично, если известно изображение $\mathbf{D}(p)$ вектора $\mathbf{D}(t)$, то этот вектор определяют из соотношения

$$\mathbf{D}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \mathbf{D}(p) e^{pt} dp. \quad (1.36)$$

Зная изображение $\varepsilon_a(p)$ диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$ и изображение $\mathbf{E}(p)$ вектора $\mathbf{E}(t)$, можно легко получить изображение $\mathbf{D}(p)$ вектора $\mathbf{D}(t)$:

$$\mathbf{D}(p) = \varepsilon_a(p) \mathbf{E}(p). \quad (1.37)$$

Тогда

$$\mathbf{D}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \varepsilon_a(p) \mathbf{E}(p) e^{pt} dp. \quad (1.38)$$

Выражение (1.38) представляет собой еще одну возможную форму записи первого материального уравнения в случае непрерывного спектра частот.

Рассмотрим среду, параметры которой изменяются по заданному временному закону. Допустим, что диэлектрическая проницаемость ε_a изменяется по закону

$$\varepsilon_a = \varepsilon_a(t) \quad (1.39)$$

и не зависит от частоты

$$\varepsilon_a = \varepsilon_a(\omega) \quad (1.40)$$

При этом для однородной линейной и изотропной, но параметрической среды*, будет справедливо первое материальное уравнение, сходное по форме с (1.19):

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a(t) \mathbf{E}. \quad (1.41)$$

Положение существенно осложняется, если наряду с изменением ε_a во времени существует зависимость ε_a и от частоты ω :

$$\varepsilon_a = \varepsilon_a(t, \omega). \quad (1.42)$$

Как известно из теории цепей [3], при воздействии сигнала $u_1(t)$ на параметрическую цепь с коэффициентом передачи $K(\omega, t)$ сигнал на выходе цепи

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{u_1}(\omega) K(\omega, t) e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.43)$$

где $G_{u_1}(\omega)$ — спектральная функция входного сигнала:

$$G_{u_1}(\omega) = \int u_1(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (1.44)$$

При использовании преобразования Лапласа эти выражения запишутся следующим образом:

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} u_1(p) K(p, t) e^{pt} dp, \quad (1.45)$$

$$u_1(p) = \int_0^{\infty} u_1(t) e^{-pt} dt. \quad (1.46)$$

Поскольку нахождение спектральной функции или изображения входного сигнала не представляет труда, решение задачи сводится к отысканию коэффициента передачи параметрической цепи.

В нашем случае должен быть найден коэффициент передачи параметрической среды, который выражается зависимостью диэлектрической проницаемости ε_a от частоты ω и времени t . Таким образом, при использовании преобразования Фурье первое материальное уравнение запишется в форме, сходной с (1.32):

$$\mathbf{D}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_a(t, \omega) \mathbf{G}_E(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.47)$$

где спектральную функцию $\mathbf{G}_E(\omega)$ находят по формуле (1.28).

Обозначая аналогично (1.31):

$$\mathbf{G}_D(\omega) = \varepsilon_a(t, \omega) \mathbf{G}_E(\omega), \quad (1.48)$$

получаем

$$\mathbf{D}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_D(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.49)$$

При использовании преобразования Лапласа материальное уравнение запишется в виде (1.38):

$$\mathbf{D}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} \varepsilon_a(t, p) \mathbf{E}(p) e^{pt} dp. \quad (1.50)$$

* Параметрической называют среду, параметры которой изменяются во времени.

Для всех видов первого материального уравнения справедлива теорема Гаусса, соответствующая соотношению (1.16).

Иногда электрический заряд $Q_э$ целесообразно выражать через его объемную плотность $\rho_э$:

$$Q_э = \int_{V_1} \rho_э dV. \quad (1.51)$$

Найдем единицу измерения объемной плотности электрического заряда:

$$\rho_э \rightarrow \text{Кл/м}^3.$$

При этом теорема Гаусса запишется в виде

$$\oint_{S_1} \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_{V_1} \rho_э dV. \quad (1.52)$$

Если в замкнутой поверхности S_1 находится заряд $Q_э$, который с течением времени уменьшается, то это уменьшение будет связано с существованием тока $I_э$, вытекающего из объема, окруженного поверхностью S_1 . Связь тока $I_э$ с зарядом $Q_э$ определяется соотношением

$$I_э = -\frac{\partial Q_э}{\partial t} = -\int_{V_1} \frac{\partial \rho_э}{\partial t} dV. \quad (1.53)$$

Знак «минус» перед производной объясняется тем, что с течением времени заряд $Q_э$ уменьшается. Ток $I_э$ связан с плотностью тока $\mathbf{J}_э$ соотношением

$$I_э = \oint_{S_1} \mathbf{J}_э d\mathbf{S}. \quad (1.54)$$

Это выражение позволяет найти единицу измерения плотности электрического тока:

$$\mathbf{J}_э \rightarrow \text{А/м}^2.$$

С учетом (1.54) выражение (1.53) может быть переписано в виде

$$\oint_{S_1} \mathbf{J}_э d\mathbf{S} = -\int_{V_1} \frac{\partial \rho_э}{\partial t} dV. \quad (1.55)$$

Соотношение (1.55) называют *первым уравнением непрерывности в интегральной форме*, связывающим плотность электрического тока с объемной плотностью электрического заряда.

Если плотность зарядов не изменяется во времени, то интеграл по поверхности равен нулю, что свидетельствует о замкнутости, непрерывности линий плотности постоянного тока.

§ 1.4. Вектор магнитной индукции \mathbf{B} . Связь вектора \mathbf{B} с током

Эксперименты показывают, что неподвижный заряд $Q_э$ в магнитном поле не испытывает никаких воздействий со стороны этого поля.

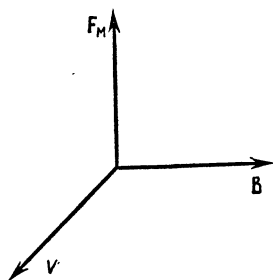


Рис. 1.4

Если же этот заряд движется в магнитном поле со скоростью v , то по данным опытов, например с катодными лучами (движущимися электрическими зарядами), возникает сила F_M , действующая на движущийся заряд и вызывающая изменение его траектории.

По результатам экспериментов можно определить величину и направление этой силы как функцию скорости движения заряда v , интенсивности и ориентации силовых линий магнитного поля, характеризуемых некоторым вектором B . Вектор B ориентирован так же, как и силовые линии магнитного поля. При этом справедливо экспериментальное соотношение

$$F_M = Q_3 [vB], \quad (1.56)$$

которое иллюстрируется рис. 1.4.

Если помимо магнитного поля B движущийся заряд находится также в электрическом поле E , он испытывает действие суммарной силы F :

$$F = F_3 + F_M = Q_3 (E + [vB]), \quad (1.57)$$

называемой силой Лоренца.

С помощью соотношения

$$F_M = Q_3 [vB] = I_{F_M} Q_3 v B \sin \alpha,$$

где I_{F_M} — орт, характеризующий направление силы F_M ; α — угол между векторами v и B , можно найти вектор B .

Действительно, определив опытным путем (например, по смещению пятна на экране катодной трубки) величину силы F_M , а также, зная угол α между вектором скорости v и ориентацией силовых линий магнитного поля B , величину заряда Q_3 и скорость его движения v , можно определить модуль вектора $|B|$:

$$|B| = \frac{F_M}{Q_3 v \sin \alpha}.$$

Поскольку направление этого вектора совпадает с ориентацией силовых линий поля, вектор B может быть определен полностью.

Существует и другая методика определения вектора B . Изменяя направление вектора v и фиксируя силу F_M , находят максимальное значение силы $F_{M \max}$, соответствующее $\alpha = 90^\circ$.

Направление вектора B при этом будет перпендикулярным вектору v , а его модуль

$$|B| = \frac{F_{M \max}}{Q_3 v}.$$

На основании соотношения (1.56) определим единицу измерения вектора \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} \rightarrow \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{Кл} \cdot \text{м}}.$$

Из (1.5) следует, что $\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{Кл}} = \mathbf{B}$, поэтому

$$\mathbf{B} \rightarrow \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2} = \text{Тл}. \quad (1.58)$$

Введем понятие об элементарном потоке $d\Phi_B$ вектора \mathbf{B} через бесконечно малую поверхность dS :

$$d\Phi_B = \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (1.59)$$

Конечный поток Φ_B через конечную поверхность S_1 может быть найден по соотношению

$$\Phi_B = \int_{S_1} \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (1.60)$$

Магнитное поле в электродинамических процессах создается за счет электрического тока I_3 . Важно установить математическую связь между током I_3 и вектором \mathbf{B} . Эту связь можно получить экспериментально (рис. 1.5).

Плоскость катушки с числом витков w_1 пересекает ток I_3 , создающий магнитное поле \mathbf{B} . Поток этого вектора Φ_B , пересекающий виток катушки, находят из соотношения (1.60). Если площадь витка катушки S_1 достаточно мала, то в пределах этой площади вектор \mathbf{B} можно считать неизменным и записать выражение (1.60) в виде

$$\Phi_B = BS_1 \cos \alpha,$$

где α — угол между нормалью к поверхности S_1 и вектором \mathbf{B} .

Предположив, что периметр катушки равен l_1 , найдем число витков, приходящееся на бесконечно малый участок этого периметра dl : $\frac{w_1 dl}{l_1}$.

Поток Φ_B пересечет на участке dl плоскость витка катушки $\frac{w_1 dl}{l_1}$ раз.

Поток $d\Psi_B$, сцепленный с $\frac{w_1 dl}{l_1}$ витками, определяется произведением

$$d\Psi_B = \Phi_B \frac{w_1 dl}{l_1}.$$

Полный поток, сцепленный со всеми витками катушки, или полное потокосцепление Ψ_B , может быть найдено путем интегри-

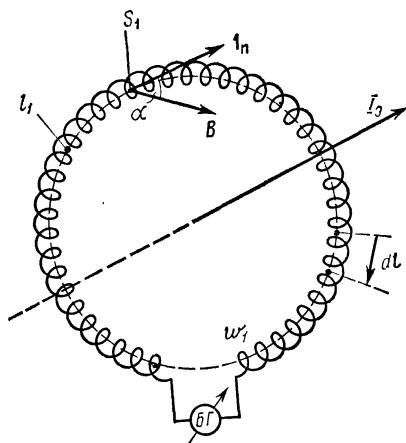


Рис. 1.5

рования по всему периметру l_1 катушки:

$$\Psi_B = \oint_{l_1} \Phi_B \frac{\omega_1}{l_1} dl = \frac{\omega_1}{l_1} \oint_{l_1} BS_1 \cos \alpha dl = \frac{\omega_1 S_1}{l_1} \oint_{l_1} B \cos \alpha dl.$$

Здесь α — угол между вектором \mathbf{B} и нормалью к поверхности S_1 . С этой нормалью совпадает направление участка периметра dl . Следовательно, α является углом между векторами \mathbf{B} и dl . При этом произведение под интегралом можно представить в векторной форме:

$$B \cos \alpha dl = \mathbf{B} dl.$$

Тогда

$$\Psi_B = \frac{\omega_1 S_1}{l_1} \int_{l_1} \mathbf{B} dl.$$

Подсоединив к концам катушки баллистический гальванометр $БГ$ (см. рис. 1.5), позволяющий измерить суммарное потягосцепление Ψ_B при различных величинах тока I_3 , можно экспериментально найти зависимость интеграла $\oint_{l_1} \mathbf{B} dl = \frac{\Psi_B l_1}{\omega_1 S_1}$ от тока I_3 . В результате экспериментов, осуществленных в вакууме, было установлено, что интеграл $\oint_{l_1} \mathbf{B} dl$ пропорционален току I_3 . Другими словами, была экспериментально установлена справедливость соотношения

$$\oint_{l_1} \mathbf{B} dl = \mu_0 I_3, \quad (1.61)$$

где μ_0 — коэффициент пропорциональности, называемый *магнитной постоянной*:

$$\mu_0 = \frac{\oint_{l_1} \mathbf{B} dl}{I_3} \dots$$

Определим единицу измерения магнитной постоянной:

$$\mu_0 \rightarrow \frac{\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{А}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м} \cdot \text{А}} = \text{Гн/м}. \quad (1.62)$$

В системе МКСА

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}. \quad (1.63)$$

Если в эксперименте магнитное поле \mathbf{B} создается током I_3 , протекающим по второй катушке с числом витков ω_2 , то соотношение (1.62) должно быть записано в виде

$$\oint_{l_1} \mathbf{B} dl = \mu_0 \omega_2 I_3. \quad (1.64)$$

§ 1.5. Воздействие внешнего магнитного поля на вещество.
Вектор напряженности магнитного поля H .
Закон полного тока.
Второе материальное уравнение среды.
Второе уравнение непрерывности

Рассмотрим эксперимент, иллюстрируемый рис. 1.6.

На сердечник, выполненный из некоторого материала, намотана катушка с числом витков w_2 , по которой пропускается ток I_2 . Магнитное поле измеряется в точке наблюдения b при наличии сердечников, выполненных из различных материалов.

Эксперименты показывают, что при этом имеются три варианта поведения магнитного поля: 1) при использовании ферромагнитных сердечников магнитное поле резко возрастает; 2) при использовании диамагнитных сердечников магнитное поле уменьшается; 3) при использовании парамагнитных сердечников магнитное поле не претерпевает существенных изменений по сравнению с опытом в отсутствие сердечника.

Наблюдаемые факты можно объяснить различной ориентацией элементарных магнитов в веществе под действием внешнего поля.

Для количественного описания влияния вещества на магнитное поле примем следующую схему рассуждений.

Добавочное магнитное поле, вызываемое определенной ориентацией элементарных магнитов, можно считать эквивалентным полю, создаваемому добавочным током I_3 , однократно охватывающим сердечник и равномерно распределенным по его длине. В зависимости от величины и ориентации добавочного тока создаваемое им добавочное магнитное поле может совпадать с первичным полем тока I_2 . При этом суммарное поле возрастает — случай, эквивалентный ферромагнитному сердечнику. Добавочное поле может быть ориентировано так, что суммарное поле будет уменьшаться — случай, эквивалентный диамагнитному сердечнику. Парамагнитному сердечнику соответствует нулевое значение тока I_3 . Отметим, что при надлежащей ориентации тока I_3 возможно изменение не только величины, но и ориентации суммарного поля.

Далее выбираем контур обхода l_1 (см. рис. 1.6), участок ac которого находится в пределах сердечника, а участок cda — вне его.

Рассмотрим бесконечно малый ток dI_3 , охватывающий бесконечно малый участок контура обхода dl . Отношение dI_3/dl зависит от ориентации контура обхода. Если эта ориентация совпадает с линиями тока, то отношение $dI_3/dl = 0$, так как при движении вдоль линий тока прира-

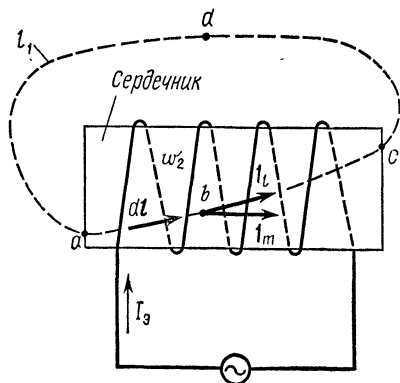


Рис. 1.6

шение dI'_3 равно нулю. Если dl перпендикулярно линиям тока, то это отношение будет максимальным. Введем обозначение

$$\left(\frac{dI'_3}{dl}\right)_{\max} = M. \quad (1.65)$$

Пусть направление dl , при котором производная dI'_3/dl максимальна, характеризуется единичным вектором $\mathbf{1}_m$. Если ориентация контура обхода не совпадает с направлением $\mathbf{1}_m$ и характеризуется единичным вектором $\mathbf{1}_l$, то производная dI'_3/dl может быть получена путем проекции ее максимального значения M , соответствующего направлению $\mathbf{1}_m$, на новое направление $\mathbf{1}_l$. Эта проекция характеризуется скалярным произведением векторов $\mathbf{1}_l$ и $\mathbf{1}_m$. Следовательно, $dI'_3/dl = M\mathbf{1}_l\mathbf{1}_m$.

Обозначив

$$M\mathbf{1}_m = \mathbf{M}, \quad (1.66)$$

где \mathbf{M} — вектор намагниченности вещества, получим

$$\frac{dI'_3}{dl} = \mathbf{M}\mathbf{1}_l,$$

или

$$dI'_3 = \mathbf{M}\mathbf{1}_l dl = \mathbf{M}dl. \quad (1.67)$$

Ток I'_3 найдем интегрированием выражения (1.67) на участке ac контура обхода, находящемся в веществе:

$$I'_3 = \int_{ac} \mathbf{M}dl.$$

На участке cda контура обхода нет вещества и вектор \mathbf{M} равен нулю. Следовательно,

$$\int_{cda} \mathbf{M}dl = 0.$$

Прибавляя этот интеграл к интегралу на участке ac , не изменяем интеграл на участке ac . Тогда можно записать

$$I'_3 = \int_{ac} \mathbf{M}dl + \int_{cda} \mathbf{M}dl.$$

Объединяя участки ac и cda контура обхода, получаем интеграл по замкнутому контуру l_1 :

$$I'_3 = \oint_{l_1} \mathbf{M}dl. \quad (1.68)$$

Таким образом, влияние вещества на процесс формирования магнитного поля можно свести к появлению дополнительного тока I'_3 помимо первичного тока I_3 , создавшего первичное поле, которое вызвало внутренние процессы в веществе. Для оценки магнитного

поля, возникающего под влиянием тока в веществе, можно использовать соотношение (1.64) при условии добавления к току I_2 , протекающему по катушке с числом витков ω_2 , «одновиткового» тока I_3 . При этом выражение (1.64) запишется в виде

$$\oint_{l_1} \mathbf{B} dl = \mu_0 \omega_2 I_2 + \mu_0 I_3 = \mu_0 \omega_2 I_2 + \mu_0 \oint_{l_1} \mathbf{M} dl.$$

Объединяя интегралы, получаем

$$\oint_{l_1} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) dl = \omega_2 I_2. \quad (1.69)$$

Введем обозначение

$$\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} = \mathbf{H}, \quad (1.70)$$

где \mathbf{H} — вектор напряженности магнитного поля.

По аналогии с вектором электрического смещения, или вектором электрической индукции \mathbf{D} , вектор \mathbf{H} в силу сходности рассуждений целесообразно было бы назвать вектором магнитного смещения или вектором магнитной индукции, а вектор \mathbf{B} — вектором напряженности магнитного поля. К сожалению, установившуюся терминологию изменить невозможно.

С учетом обозначения (1.70) выражение (1.69) можно переписать в виде

$$\oint_{l_1} \mathbf{H} dl = \omega_2 I_2, \quad (1.71)$$

или при $\omega_2 = 1$

$$\oint_{l_1} \mathbf{H} dl = I_2. \quad (1.72)$$

Это выражение носит название *закона полного тока*. Под I_2 понимают ток, протекающий через некоторую площадку, охватываемую контуром интегрирования l_1 .

Определим единицу измерения напряженности магнитного поля:

$$\mathbf{H} \rightarrow \text{А/м}. \quad (1.73)$$

Выражение (1.70) представляет собой математическую связь между векторами \mathbf{B} и \mathbf{H} , называемую *вторым материальным уравнением среды*. Это уравнение записывается по-разному для различных сред, и на нем следует остановиться подробно. Дальнейшие рассуждения во многом аналогичны рассуждениям, приведенным при выводе первого материального уравнения среды (см. § 1.3).

Для однородной линейной изотропной среды и монохроматического поля вектор намагниченности вещества \mathbf{M} полагают пропорциональным вектору напряженности поля \mathbf{H} :

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}. \quad (1.74)$$

Коэффициент пропорциональности χ_m называют *магнитной восприимчивостью вещества*.

Выражения (1.65) и (1.74) позволяют определить единицы измерения вектора намагниченности вещества и магнитной восприимчивости:

$$\mathbf{M} \rightarrow \text{А/м}, \quad (1.75)$$

$$\chi_m \rightarrow \frac{\text{А} \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{А}} = 1. \quad (1.76)$$

Таким образом, χ_m является безразмерной величиной.

Подставив выражение (1.74) в формулу (1.70), получим

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \chi_m \mathbf{H} = \mathbf{H} \mu_0 (1 + \chi_m). \quad (1.77)$$

Введя обозначение

$$\mu_0 (1 + \chi_m) = \mu_a, \quad (1.78)$$

где μ_a называют *абсолютной магнитной проницаемостью вещества*, можно записать

$$\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}. \quad (1.79)$$

Коэффициент пропорциональности μ_a измеряется на основании соотношения (1.78) в тех же единицах, что и магнитная постоянная:

$$\mu_a \rightarrow \text{Гн/м}. \quad (1.80)$$

Аналогично относительной диэлектрической проницаемости введем относительную магнитную проницаемость:

$$\mu_r = \mu_a / \mu_0, \quad (1.81)$$

которая является также безразмерной величиной. В реальных средах относительная магнитная проницаемость может быть действительной или комплексной величиной и колебаться в пределах от единицы до десятков тысяч. Запись второго материального уравнения для различных сред в значительной степени аналогична записи первого материального уравнения.

Так, для монохроматического поля и неоднородной линейной изотропной среды магнитная проницаемость в общем случае становится функцией обобщенных криволинейных координат ξ, η, ζ :

$$\mu_a = \mu_a(\xi, \eta, \zeta)$$

и второе материальное уравнение записывается таким образом:

$$\mathbf{B} = \mu_a(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{H}. \quad (1.82)$$

Для монохроматического поля и однородной нелинейной изотропной среды магнитная проницаемость является функцией поля:

$$\mu_a = \mu_a(H)$$

и второе материальное уравнение записывается таким образом:

$$\mathbf{B} = \mu_a(H) \mathbf{H}. \quad (1.83)$$

Для монохроматического поля и однородной линейной анизотропной среды справедливы соотношения вида (1.23)

$$\left. \begin{aligned} B_{\xi} &= \mu_{a11} H_{\xi} + \mu_{a12} H_{\eta} + \mu_{a13} H_{\zeta}, \\ B_{\eta} &= \mu_{a21} H_{\xi} + \mu_{a22} H_{\eta} + \mu_{a23} H_{\zeta}, \\ B_{\zeta} &= \mu_{a31} H_{\xi} + \mu_{a32} H_{\eta} + \mu_{a33} H_{\zeta}, \end{aligned} \right\} \quad (1.84)$$

или в сокращенной векторной форме

$$\mathbf{B} = (\mu_a) \mathbf{H}, \quad (1.85)$$

где (μ_a) — тензор абсолютной магнитной проницаемости:

$$(\mu_a) = \begin{pmatrix} \mu_{a11} & \mu_{a12} & \mu_{a13} \\ \mu_{a21} & \mu_{a22} & \mu_{a23} \\ \mu_{a31} & \mu_{a32} & \mu_{a33} \end{pmatrix} \quad (1.86)$$

В общем случае в анизотропной среде каждая из составляющих вектора \mathbf{B} изменяется в своем масштабе по отношению к соответствующей составляющей вектора \mathbf{H} , что в конечном счете приводит к несовпадению ориентаций векторов \mathbf{B} и \mathbf{H} .

Для немонохроматического поля и недиспергирующей среды справедливы формы записи второго материального уравнения, перечисленные ранее.

Если спектр частот поля дискретен и среда обладает частотной зависимостью (диспергирующая среда), то второе материальное уравнение сходно по форме с первым материальным уравнением (1.27):

$$\mathbf{B} = \mu_a(\omega_0) \dot{H}_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \mu_a(\omega_1) H_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \dots + \mu_a(\omega_2) H_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots + \mu_a(\omega_n) H_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) + \dots \quad (1.87)$$

Для непрерывного спектра частот и диспергирующей среды можно использовать преобразование Фурье или Лапласа. В первом случае справедливо соотношение вида (1.32)

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu_a(\omega) \mathbf{G}_H(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.88)$$

Здесь

$$\mathbf{G}_H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.89)$$

и соответственно

$$\mathbf{H}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_H(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.90)$$

Во втором случае могут быть записаны соотношения видов (1.38) и (1.33)

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \mu_a(p) \mathbf{H}(p) e^{pt} dp, \quad (1.91)$$

$$\mathbf{H}(p) = \int_0^{\infty} \mathbf{H}(t) e^{-pt} dt, \quad (1.92)$$

где p определяется выражением (1.34).

Если абсолютная магнитная проницаемость μ_a изменяется по заданному временному закону

$$\mu_a = \mu_a(t) \quad (1.93)$$

и среда не обладает дисперсией, то для однородной линейной изотропной среды будет справедливо соотношение

$$\mathbf{B} = \mu_a(t) \mathbf{H}. \quad (1.94)$$

Среда при этом называется параметрической. Сложнее, когда абсолютная магнитная проницаемость не только изменяется во времени, но и является функцией частоты:

$$\mu_a = \mu_a(t, \omega). \quad (1.95)$$

При определении вида второго материального уравнения среды может быть использовано преобразование Фурье либо Лапласа, аналогично тому, как это было сделано при выводе первого материального уравнения. Получаемые при этом соотношения аналогичны (1.47) и (1.50):

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu_a(t, \omega) \mathbf{G}_H(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.96)$$

или

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \mu_a(t, p) \mathbf{H}(p) e^{pt} dp. \quad (1.97)$$

Здесь $\mathbf{G}_H(\omega)$ и $\mathbf{H}(p)$ вычисляются с помощью соотношений (1.89) и (1.92).

В § 1.3 было выведено первое уравнение непрерывности, представляющее собой математическую связь вектора плотности электрического тока \mathbf{J}_a с объемной плотностью электрического заряда ρ_a . В основу вывода была положена обобщенная теорема Гаусса, связывающая поток вектора \mathbf{D} с зарядом Q_a . В случае магнитных векторов поток вектора \mathbf{B} определяется соотношением (1.60). В теореме Гаусса поток вектора \mathbf{D} записывается через замкнутую поверхность S_1 . Записав аналогичный поток вектора \mathbf{B} , следует приравнять его нулю в силу замкнутости магнитных силовых линий и того факта, что пока не известны отдельно существующие положительные или отрицательные магнитные полюса, которые можно было бы рассматривать в качестве положительных или отрицательных магнитных зарядов Q_m . Тем не менее, иногда при расчетах целесообразно искусственно вводить сторонние магнитные заряды Q_m . Термин «сторонний» означает, что этот заряд вводится дополнительно со стороны и является источником поля. Концепция магнитного заряда и связанного с ним стороннего магнитного тока, как будет показано в дальнейшем, приводит к так называемому принципу перестановочной двойственности электродинамических уравнений, позволяющему существенно облегчить решение ряда электродинамических задач. Исходя из этих соображений, выражение для потока вектора \mathbf{B} через замкнутую поверхность S_1 следует записывать в двух формах:

без учета магнитных зарядов

$$\oint_{S_1} \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0, \quad (1.98)$$

при введении магнитных зарядов

$$\oint_{S_1} \mathbf{B} d\mathbf{S} = Q_m. \quad (1.99)$$

Равенства (1.98) и (1.99) справедливы тогда, когда в среде можно не учитывать так называемых магнитных потерь, характеризуемых магнитной проводимостью, которая будет введена в дальнейшем. При наличии магнитной проводимости эти формулы изменятся.

На основании (1.58) магнитная индукция B измеряется в веберах на квадратный метр.

С помощью соотношений (1.99) и (1.58) можно установить единицу измерения магнитного заряда:

$$Q_m \rightarrow \frac{B \cdot c}{M^2} \cdot M^2 = B \cdot c = \text{Вб}. \quad (1.100)$$

Магнитный заряд Q_m связан с его объемной плотностью ρ_m соотношением вида (1.51):

$$Q_m = \int_{V_1} \rho_m dV. \quad (1.101)$$

Найдем единицу измерения объемной плотности магнитного заряда:

$$\rho_m \rightarrow \frac{B \cdot c}{M^3} = \frac{\text{Вб}}{M^3}. \quad (1.102)$$

Формулу (1.99) с учетом (1.101) можно записать как

$$\oint_{S_1} \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_{V_1} \rho_m dV. \quad (1.103)$$

Искусственно допуская введение в электродинамику сторонних магнитных зарядов, следует признать и существование стороннего магнитного тока I_m , связанного с зарядом соотношением вида (1.53):

$$I_m = -\frac{\partial Q_m}{\partial t} = -\int_{V_1} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} dV. \quad (1.104)$$

Определим единицу измерения магнитного тока:

$$I_m \rightarrow \frac{B \cdot c}{c} = B. \quad (1.105)$$

Поскольку сторонний магнитный ток измеряется в вольтах, правильнее было бы назвать его сторонним напряжением, однако сохраним принятую ранее терминологию.

Магнитный ток связан с плотностью тока J_m соотношением вида (1.54)

$$I_m = \oint_{S_1} \mathbf{J}_m d\mathbf{S}. \quad (1.106)$$

Отсюда можно найти единицу измерения плотности магнитного тока

$$J_m \rightarrow B/M^2. \quad (1.107)$$

С учетом (1.106) соотношение (1.104) может быть записано следующим образом:

$$\oint_{S_1} \mathbf{J}_m d\mathbf{S} = - \int_{V_1} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} dV. \quad (1.108)$$

Это выражение называют *вторым уравнением непрерывности в интегральной форме*, связывающим плотность стороннего магнитного тока \mathbf{J}_m с объемной плотностью стороннего магнитного заряда ρ_m .

§ 1.6. Электрическая проводимость среды. Закон Ома в дифференциальной и интегральной формах. Сторонний электрический ток. Ток смещения. Обобщенный закон полного тока

В правой части выражения (1.72), определяющего закон полного тока, записывается ток I_a . В соответствии с приведенным ранее обоснованием под этим током следует понимать ток генератора, протекающий по проводнику и создающий магнитное поле. Однако такое представление не является единственно возможным. Если переменное во времени магнитное поле создано каким-либо источником тока и в пространстве, где существует магнитное поле, имеются проводники, то в последних, как показывает опыт, возникают токи проводимости. Эти токи в свою очередь создают магнитное поле, взаимодействующее с первичным полем. В результате получается суммарное поле, являющееся результатом действия токов генераторов и токов, существующих в проводящей среде. Соотношение (1.72) потому и называют законом полного тока, что в нем фигурирует суммарное магнитное поле, созданное всеми токами, существующими в рассматриваемой части пространства. Эти токи целесообразно разделять. Токи, создаваемые генераторами, условились называть сторонними электрическими токами или токами возбуждения, а токи, создаваемые полем в проводящей среде — токами проводимости.

Можно записать следующие соотношения, связывающие сторонний электрический ток I_a с вектором его плотности \mathbf{J}_a и ток проводимости $I_{\text{эл}}$ — с вектором его плотности $\mathbf{J}_{\text{эл}}$:

$$I_a = \int_{S_1} \mathbf{J}_a d\mathbf{S}, \quad (1.109)$$

$$I_{\text{эл}} = \int_{S_1} \mathbf{J}_{\text{эл}} d\mathbf{S}. \quad (1.110)$$

Так как ток $I_{\text{эл}}$ создается полем, нагляднее выразить его через поле с помощью закона Ома:

$$I_{\text{эл}} = U/R, \quad (1.111)$$

где U — разность потенциалов на концах проводящего участка среды; R — сопротивление проводящего участка, равное

$$R = \frac{l}{S\gamma_a} \quad (1.112)$$

(l — длина проводящего участка, м; S — сечение проводящего участка, м²; γ_3 — удельная электрическая проводимость среды, См/м).

Подставив выражение (1.112) в (1.111), получаем

$$I_{\text{эп}} = \frac{U}{l} S \gamma_3.$$

В электродинамике приходится иметь дело с величинами, изменяющимися от точки к точке рассматриваемого пространства. В силу этого полученное соотношение лучше выразить в дифференциальной форме:

$$dI_{\text{эп}} = \frac{dU}{dl} dS \gamma_3.$$

Здесь $dI_{\text{эп}}$ — бесконечно малый ток, протекающий через бесконечно малое сечение dS в результате существования на бесконечно малой длине dl проводящего участка бесконечно малой разности потенциалов dU .

Поделив обе части этого выражения на dS , получаем

$$\frac{dI_{\text{эп}}}{dS} = J_{\text{эп}} = \frac{dU}{dl} \gamma_3. \quad (1.113)$$

Разность потенциалов U можно выразить с помощью формулы (1.5):

$$U = \int_{l_1} \mathbf{E} dl_1$$

(l_1 — единичный вектор, ориентированный вдоль длины dl).

Следовательно, $dU/dl = \mathbf{E} l_1$.

Тогда вместо (1.113) получим

$$J_{\text{эп}} = \mathbf{E} l_1 \gamma_3.$$

Умножая обе части этого выражения скалярно на орт l_1 , находим

$$J_{\text{эп}} l_1 = \mathbf{J}_{\text{эп}} = \mathbf{E} l_1 \gamma_3,$$

или

$$\mathbf{J}_{\text{эп}} = \gamma_3 \mathbf{E}. \quad (1.114)$$

Соотношение (1.114) называют *законом Ома в дифференциальной форме*. Оно связывает вектор плотности тока электрической проводимости $\mathbf{J}_{\text{эп}}$ с вектором напряженности электрического поля \mathbf{E} через удельную электрическую проводимость среды γ_3 .

Соотношение (1.114) можно рассматривать как *третье материальное уравнение среды*. Аналогично первому и второму материальным уравнениям его можно записать по-разному для различных сред.

Для неоднородной среды имеем выражение вида (1.82):

$$\mathbf{J}_{\text{эп}} = \gamma_3(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{E}. \quad (1.115)$$

Для нелинейной среды справедлива формула, аналогичная (1.83):

$$\mathbf{J}_{\text{эл}} = \gamma_{\text{э}}(E) \mathbf{E}, \quad (1.116)$$

а для анизотропной среды — соотношения вида (1.84), (1.85), (1.86):

$$\left. \begin{aligned} J_{\text{эл}\xi} &= \gamma_{\text{эл}11} E_{\xi} + \gamma_{\text{эл}12} E_{\eta} + \gamma_{\text{эл}13} E_{\zeta}, \\ J_{\text{эл}\eta} &= \gamma_{\text{эл}21} E_{\xi} + \gamma_{\text{эл}22} E_{\eta} + \gamma_{\text{эл}23} E_{\zeta}, \\ J_{\text{эл}\zeta} &= \gamma_{\text{эл}31} E_{\xi} + \gamma_{\text{эл}32} E_{\eta} + \gamma_{\text{эл}33} E_{\zeta}, \end{aligned} \right\} \quad (1.117)$$

или в сокращенной векторной форме

$$\mathbf{J}_{\text{эл}} = (\gamma_{\text{э}}) \mathbf{E}, \quad (1.118)$$

где $(\gamma_{\text{э}})$ — тензор удельной электрической проводимости:

$$(\gamma_{\text{э}}) = \begin{pmatrix} \gamma_{\text{эл}11} & \gamma_{\text{эл}12} & \gamma_{\text{эл}13} \\ \gamma_{\text{эл}21} & \gamma_{\text{эл}22} & \gamma_{\text{эл}23} \\ \gamma_{\text{эл}31} & \gamma_{\text{эл}32} & \gamma_{\text{эл}33} \end{pmatrix} \quad (1.119)$$

В случае дискретного спектра частот и наличия частотной зависимости $\gamma_{\text{э}} = \gamma_{\text{э}}(\omega)$ третье материальное уравнение среды приобретает вид, сходный с (1.87):

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\text{эл}} &= \gamma_{\text{э}}(\omega_0) \mathbf{E}_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \gamma_{\text{э}}(\omega_1) \mathbf{E}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \\ &+ \gamma_{\text{э}}(\omega_2) \mathbf{E}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots + \gamma_{\text{э}}(\omega_n) \mathbf{E}_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) + \dots \end{aligned} \quad (1.120)$$

В случае непрерывного спектра частот и частотной зависимости $\gamma_{\text{э}}$ справедливы соотношения вида (1.88), (1.89) или (1.91), (1.92):

$$\mathbf{J}_{\text{эл}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{\text{э}}(\omega) \mathbf{G}_E(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.121)$$

или

$$\mathbf{J}_{\text{эл}}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \gamma_{\text{э}}(p) \mathbf{E}(p) e^{pt} dp. \quad (1.122)$$

В этих соотношениях $\mathbf{G}_E(\omega)$, $\mathbf{E}(p)$ и p находят соответственно с помощью выражений (1.28), (1.33) и (1.34).

Для параметрической среды характерны формулы вида (1.96) или (1.97):

$$\mathbf{J}_{\text{эл}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\gamma}_{\text{э}}(t, \omega) \mathbf{G}_E(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.123)$$

или

$$\mathbf{J}_{\text{эл}}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \dot{\gamma}_{\text{э}}(t, p) \mathbf{E}(p) e^{pt} dp. \quad (1.124)$$

С учетом соотношений (1.110) и (1.114) можно записать следующее выражение для тока проводимости:

$$I_{\text{эл}} = \int_{S_1} \mathbf{J}_{\text{эл}} d\mathbf{S} = \int_{S_1} \gamma_{\text{э}} \mathbf{E} d\mathbf{S}. \quad (1.125)$$

Выражение (1.125) является законом Ома в интегральной форме в случае изменяющихся параметров среды и поля.

Приведенные рассуждения применимы к средам, обладающим проводимостью. Однако, по опытным данным, при подведении к об-

кладкам конденсатора переменного напряжения в цепи конденсатора проходит ток, создающий магнитное поле так же, как и ток проводимости. Экспериментально доказана справедливость закона полного тока (1.72) в случае замены тока I_0 током, протекающим в цепи конденсатора. Этот ток получил название *тока смещения*.

Ампер установил закон, исследуя токи в проводниках и поля, создаваемые этими токами. Фарадей проанализировал результаты воздействия переменных во времени полей на проводящие цепи.

Заслуга Максвелла заключается в том, что он наряду с понятием тока проводимости ввел понятие тока смещения. Дадим математическую формулировку этого понятия.

Продифференцируем выражение (1.15) по времени:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (1.126)$$

Поскольку вектор \mathbf{D} измеряется в Кл/м², единицей измерения производной $\partial \mathbf{D} / \partial t$ является Кл/(м²·с.). Но Кл/с = А и А/м² является единицей измерения плотности тока. Таким образом,

$$\partial \mathbf{D} / \partial t \rightarrow \text{А/м}^2.$$

Эту производную можно рассматривать как некоторую плотность тока. Составные части этой плотности тока, определяемые выражением (1.126), позволяют сделать следующие выводы. Выражение $dQ'_3 = \mathbf{P} dS \mathbf{1}_n$ представляет собой математическую связь вектора поляризованности вещества \mathbf{P} с зарядом dQ'_3 , прошедшим через поверхность dS в результате процесса поляризации. Переписав это выражение в форме $dQ'_3/dS = \mathbf{P} \mathbf{1}_n$ и умножив скалярно обе части на $\mathbf{1}_n$, получаем

$$\frac{dQ'_3}{dS} \mathbf{1}_n = \mathbf{P}.$$

Производная

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dQ'_3}{dS} \right) \mathbf{1}_n = \frac{d}{dS} \left(\frac{\partial Q'_3}{\partial t} \right) \mathbf{1}_n.$$

Производная $\partial Q'_3 / \partial t = I'_3$ представляет собой ток I'_3 , созданный в результате смещения в диэлектрике зарядов Q'_3 . Этот ток называют *током смещения в диэлектрике*. Тогда

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{dI'_3}{dS} \mathbf{1}_n = \mathbf{J}'_3 \mathbf{1}_n = \mathbf{J}'_3, \quad (1.127)$$

где \mathbf{J}'_3 — плотность тока смещения в диэлектрике.

Таким образом, второе слагаемое в выражении (1.126) есть плотность тока смещения в диэлектрике, возникающая в результате процесса поляризации.

Следовательно, если между обкладками конденсатора заключен диэлектрик, то в нем возникает ток смещения, способный создать магнитное поле. Опыт показывает, что магнитное поле создается и в том случае, когда диэлектрика между пластинами нет и они поме-

щены в вакуум. В соответствии с теорией Максвелла при этом возникает ток смещения в вакууме, вектор плотности которого

$$\mathbf{J}'_{\text{эв}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.128)$$

Этот ток создается фотонами.

Полная плотность тока смещения

$$\mathbf{J}_c = \partial \mathbf{D} / \partial t. \quad (1.129)$$

Таким образом, в общем случае магнитное поле определяется тремя токами: сторонним электрическим током I_s (1.109), током проводимости $I_{\text{эп}}$ (1.125) и током смещения, определяемым по формуле

$$I_c = \int_{S_1} \mathbf{J}_c d\mathbf{S} = \int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S}. \quad (1.130)$$

Если в процессе формирования магнитного поля участвуют все три тока, то закон полного тока (1.72) следует записать в расширенной форме:

$$\oint_{l_1} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{J}_s d\mathbf{S} + \int_{S_1} \gamma_s \mathbf{E} d\mathbf{S} + \int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S}. \quad (1.131)$$

Это выражение дает математическую связь между сторонним током, создавшим поле, и векторами поля. В силу того что вектор \mathbf{D} с помощью материальных уравнений среды может быть определен через вектор \mathbf{E} , уравнение (1.131) при известной плотности тока и параметрах среды является уравнением, в котором неизвестны два вектора поля: \mathbf{E} и \mathbf{H} . Для его решения необходимо второе уравнение, связывающее эти векторы.

§ 1.7. Теорема Гаусса для вещества в случае проводящей среды

В § 1.3 было показано, что теорема Гаусса для вещества (1.16) справедлива в случае непроводящей среды — идеального диэлектрика. При выводе этой теоремы помимо стороннего электрического заряда, создающего поле, были учтены заряды, возникающие за счет токов смещения. Для проводящей среды должны быть учтены также заряды, возникающие за счет токов проводимости. В основу рассуждений положено выражение (1.16).

При наличии проводимости γ_s в среде, ограниченной замкнутой поверхностью S_1 , в которой находится сторонний заряд Q_s , создающий поле, за пределы этой поверхности будет вытекать ток проводимости $I_{\text{эп}}$, определяемый выражением (1.125). В результате этого сторонний заряд Q_s , внесенный в поверхность S_1 в момент времени $t=0$, будет уменьшаться по закону

$$Q_s - \int_0^t I_{\text{эп}} dt = Q_s - \oint_{S_1} \int_0^t \gamma_s \mathbf{E} dt d\mathbf{S}.$$

Подставив это выражение в правую часть теоремы Гаусса (1.16) вместо заряда Q_3 , получаем

$$\oint_{S_1} \mathbf{D} d\mathbf{S} = Q_3 - \oint_{S_1} \int_0^t \gamma_3 \mathbf{E} dt d\mathbf{S}.$$

Далее, объединяя поверхностные интегралы

$$\oint_{S_1} \left(\mathbf{D} + \int_0^t \gamma_3 \mathbf{E} dt \right) d\mathbf{S} = Q_3, \quad (1.132)$$

находим соотношение, являющееся *теоремой Гаусса для вещества в случае проводящей среды*. Если среда не является однородной линейной анизотропной или поле носит спектральный характер, то ток проводимости следует записывать с учетом третьего материального уравнения, выражающего связь плотности тока проводимости с вектором \mathbf{E} в каждом конкретном случае.

§ 1.8. Закон электромагнитной индукции Фарадея.

Сторонний магнитный ток. Магнитная проводимость среды.

Закон электромагнитной индукции в расширенной форме.

Перестановочная двойственность интегральных уравнений электродинамики

В 1831 г. Фарадей открыл явление электромагнитной индукции, заключающееся в том, что переменное во времени магнитное поле, пересекающее плоскость проводящего витка, создает на его концах разность потенциалов. Фарадей установил, что разность потенциалов пропорциональна скорости изменения потока вектора магнитной индукции \mathbf{B} . Выразим это математически:

$$U = - \partial \Phi_B / \partial t, \quad (1.133)$$

где U — разность потенциалов на концах проводящего витка; Φ_B — поток вектора \mathbf{B} через площадь витка S_1 .

Знак «минус» означает, что возникающая разность потенциалов порождает в витке ток такого направления, при котором создаваемый этим током вокруг витка вторичный магнитный поток направлен против первичного (внешнего) магнитного потока. Суммарный магнитный поток при этом уменьшается, что можно считать следствием включения дополнительной разности потенциалов в цепь внешнего источника, создающего первичное поле. Знак этой разности потенциалов должен быть противоположен знаку напряжения источника, создающего первичное магнитное поле.

Используя выражения (1.5) и (1.60), соотношение (1.133) можно записать в виде

$$\oint_{l_1} \mathbf{E} dl = - \int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}. \quad (1.134)$$

Интеграл в левой части взят по замкнутому контуру l_1 , так как виток считается замкнутым. В интеграле в правой части площадь S_1 представляет собой площадь замкнутого витка. Полученное соотношение дает математическую связь между векторами электрического и магнитного полей, которая существует в динамических, т. е. изменяющихся во времени полях. Это соотношение называется *законом электромагнитной индукции Фарадея*. Совместно с выражением (1.131) и уравнениями среды (1.19), (1.79) оно образует систему уравнений, связывающих электрические и магнитные векторы со сторонними электрическими токами.

Сравнивая математическую форму выражений (1.131) и (1.134), можно заметить схожесть двух соотношений в случае, когда электрическая проводимость среды γ_a равна нулю и отсутствует сторонний электрический ток, определяемый плотностью \mathbf{J}_a .

В § 1.5 было сказано о целесообразности введения в электродинамику в некоторых случаях искусственных сторонних магнитных зарядов Q_m (1.99). Если такие заряды введены в расчет, то на основании формулы (1.104) следует учитывать сторонние магнитные токи I_m , связанные с плотностью \mathbf{J}_m соотношением (1.106).

Так как ток I_m измеряется в вольтах, то введение сторонних магнитных зарядов можно рассматривать как введение некоторого внешнего стороннего напряжения дополнительно к разности потенциалов, определяемой интегралом $\oint_{l_1} \mathbf{E} d\mathbf{l}$.

Это напряжение, создаваемое внешними источниками, существует в той части пространства, где предполагается наличие стороннего магнитного тока I_m , который, как указывалось, было бы правильнее назвать сторонним напряжением. В этом случае, его следует учесть в законе электромагнитной индукции, сложив с разностью потенциалов, создаваемой за счет изменяющегося во времени магнитного поля. Тогда выражение (1.134) принимает вид

$$\oint_{l_1} \mathbf{E} d\mathbf{l} + I_m = - \int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S},$$

или

$$\oint_{l_1} \mathbf{E} d\mathbf{l} + \int_{S_1} \mathbf{J}_m d\mathbf{S} = - \int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}. \quad (1.135)$$

В дальнейшем станет ясно, как практически реализуется введение магнитного тока и когда этим понятием целесообразно пользоваться.

Выражение (1.135) можно записать в ином виде:

$$\oint_{l_1} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_{S_1} \mathbf{J}_m d\mathbf{S} - \int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}. \quad (1.136)$$

Используя материальные уравнения среды (1.19), (1.79), можно записать законы полного тока и электромагнитной индукции (1.131),

(1.136) в другой форме:

$$\oint_{l_1} \mathbf{H} dl = \int_{S_1} \mathbf{J}_a dS + \int_{S_1} \gamma_a \mathbf{E} dS + \int_{S_1} \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} dS, \quad (1.137)$$

$$\oint_{l_1} \mathbf{E} dl = - \int_{S_1} \mathbf{J}_m dS - \int_{S_1} \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} dS. \quad (1.138)$$

Принимая $\gamma_a = 0$ и сравнивая оба выражения, можно заметить, что при $\gamma_a = 0$ переход от одного к другому осуществляется путем замены вектора \mathbf{H} на вектор \mathbf{E} и обратно, плотности тока \mathbf{J}_a на плотность тока \mathbf{J}_m , взятую со знаком «минус», и обратно, абсолютной диэлектрической проницаемости ϵ_a на абсолютную проницаемость μ_a , взятую со знаком «минус». При проведении таких перестановок уравнение (1.137) (при $\gamma_a = 0$) переходит в (1.138) и, наоборот, уравнение (1.138) — в (1.137). Это свойство электродинамических уравнений называют *перестановочной двойственностью*.

Если $\gamma_a \neq 0$, то перестановочная двойственность справедлива при условии добавления в уравнение (1.138) члена — $\int_{S_1} \gamma_m \mathbf{H} dS$.

При этом следовало бы добавить еще одну перестановку: электрическую проводимость γ_a заменить на магнитную проводимость γ_m , взятую с обратным знаком, и обратно.

Учитывая, что введенный интеграл измеряется в вольтах, $\mathbf{H} \rightarrow \text{А/м}$, $dS \rightarrow \text{м}^2$, определим единицу измерения γ_m :

$$\gamma_m \rightarrow \frac{\text{В} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{А}} = \frac{\text{Ом}}{\text{м}}. \quad (1.139)$$

Величину γ_m называют *удельной магнитной проводимостью*, хотя правильнее было бы назвать ее удельным магнитным сопротивлением.

Величина γ_m введена в уравнение (1.138) формально с целью записи закона электромагнитной индукции в форме, сходной с законом полного тока, что позволило бы переходить от одного уравнения к другому с помощью принципа перестановочной двойственности. Как будет определено в дальнейшем, физический γ_m характеризует потери в веществе при воздействии на него магнитного поля.

Если допустить существование интеграла

$$\int_{S_1} \gamma_m \mathbf{H} dS,$$

то закон электромагнитной индукции следовало бы записать в виде

$$\oint_{l_1} \mathbf{E} dl = - \int_{S_1} \mathbf{J}_m dS - \int_{S_1} \gamma_m \mathbf{H} dS - \int_{S_1} \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} dS. \quad (1.140)$$

Введем обозначение

$$\int_{S_1} \gamma_m \mathbf{H} dS = \mathbf{J}_{мп}. \quad (1.141)$$

Этот интеграл можно рассматривать в соответствии с используемой терминологией как ток магнитной проводимости.

Введем понятие вектора плотности тока магнитной проводимости:

$$\mathbf{J}_{\text{мп}} = \gamma_{\text{м}} \mathbf{H}. \quad (1.142)$$

Тогда

$$I_{\text{мп}} = \int_{S_1} \mathbf{J}_{\text{мп}} d\mathbf{S}. \quad (1.143)$$

Выражение (1.142) представляет собой *четвертое материальное уравнение среды*. Так же как соотношение (1.114) для плотности тока электрической проводимости, оно справедливо в случае однородной линейной, изотропной среды, не обладающей дисперсией.

Для других сред можно записать соотношения, полученные из формул (1.115) — (1.124) путем перестановок: $\gamma_{\text{э}} \rightarrow -\gamma_{\text{м}}$,

$$J_{\text{эп}} \rightarrow -J_{\text{мп}}, \quad \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H},$$

Для неоднородной среды

$$\mathbf{J}_{\text{мп}} = \gamma_{\text{м}} (\xi, \eta, \zeta) \mathbf{H}. \quad (1.144)$$

Для нелинейной среды

$$\mathbf{J}_{\text{мп}} = \gamma_{\text{м}}(H) \mathbf{H}. \quad (1.145)$$

Для анизотропной среды

$$\left. \begin{aligned} J_{\text{мп}\xi} &= \gamma_{\text{м}11} H_{\xi} + \gamma_{\text{м}12} H_{\eta} + \gamma_{\text{м}13} H_{\zeta}, \\ J_{\text{мп}\eta} &= \gamma_{\text{м}21} H_{\xi} + \gamma_{\text{м}22} H_{\eta} + \gamma_{\text{м}23} H_{\zeta}, \\ J_{\text{мп}\zeta} &= \gamma_{\text{м}31} H_{\xi} + \gamma_{\text{м}32} H_{\eta} + \gamma_{\text{м}33} H_{\zeta}, \end{aligned} \right\} \quad (1.146)$$

или в векторной форме

$$\mathbf{J}_{\text{мп}} = (\gamma_{\text{м}}) \mathbf{H}, \quad (1.147)$$

где $(\gamma_{\text{м}})$ — тензор удельной магнитной проводимости:

$$(\gamma_{\text{м}}) = \begin{pmatrix} \gamma_{\text{м}11} & \gamma_{\text{м}12} & \gamma_{\text{м}13} \\ \gamma_{\text{м}21} & \gamma_{\text{м}22} & \gamma_{\text{м}23} \\ \gamma_{\text{м}31} & \gamma_{\text{м}32} & \gamma_{\text{м}33} \end{pmatrix} \quad (1.148)$$

В случае дискретного спектра частот и наличия частотной зависимости $\gamma_{\text{м}} = \gamma_{\text{м}}(\omega)$ справедливо соотношение

$$\mathbf{J}_{\text{мп}} = \gamma_{\text{м}}(\omega_0) \mathbf{H}_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \gamma_{\text{м}}(\omega_1) \mathbf{H}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \\ + \gamma_{\text{м}}(\omega_2) \mathbf{H}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots + \gamma_{\text{м}}(\omega_n) \mathbf{H}_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) + \dots \quad (1.149)$$

Для непрерывного спектра частот и частотной зависимости $\gamma_{\text{м}}$ имеем

$$\mathbf{J}_{\text{мп}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{\text{м}}(\omega) \mathbf{G}_H(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.150)$$

или

$$\mathbf{J}_{\text{мп}}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \gamma_{\text{м}}(p) \mathbf{H}(p) e^{pt} dp, \quad (1.151)$$

где $G_H(\omega)$, $\mathbf{H}(p)$ и p находят соответственно из формул (1.89), (1.92), (1.34).

Для параметрической среды четвертое материальное уравнение записывается в виде

$$J_{\text{мп}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{\text{м}}(t, \omega) G_H(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.152)$$

или

$$J_{\text{мп}}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \gamma_{\text{м}}(t, p) H(p) e^{pt} dp. \quad (1.153)$$

Уравнения (1.137) и (1.140) представляют собой обобщенные законы полного тока и электромагнитной индукции. Они являются основой для дальнейшего анализа электродинамических процессов.

§ 1.9. Вид интегрального соотношения $\oint_{S_1} \mathbf{B} d\mathbf{S} = Q_{\text{м}}$ в случае среды, обладающей магнитной проводимостью

В § 1.5 было показано, что выражение (1.99) справедливо в отсутствие магнитной проводимости $\gamma_{\text{м}}$. При наличии магнитной проводимости должно быть учтено уменьшение магнитного заряда $Q_{\text{м}}$ вследствие существования токов магнитной проводимости, как это было сделано в § 1.7. Этот ток для замкнутой поверхности определяется формулой (1.141).

Предполагая, что все процессы начались в момент времени $t=0$, вместо заряда $Q_{\text{м}}$ в правой части выражения (1.99) следует поставить соотношение

$$Q_{\text{м}} - \int_0^t I_{\text{мп}} dt = Q_{\text{м}} - \oint_{S_1} \int_0^t \gamma_{\text{м}} \mathbf{H} dt d\mathbf{S}.$$

При этом выражение (1.99) записывается в виде

$$\oint_{S_1} \mathbf{B} d\mathbf{S} = Q_{\text{м}} - \oint_{S_1} \int_0^t \gamma_{\text{м}} \mathbf{H} dt d\mathbf{S}.$$

Объединяя поверхностные интегралы, получаем

$$\oint_{S_1} \left(\mathbf{B} + \int_0^t \gamma_{\text{м}} \mathbf{H} dt \right) d\mathbf{S} = Q_{\text{м}}. \quad (1.154)$$

Если среда не является однородной, линейной и изотропной или поле носит спектральный характер, то ток проводимости следует записывать с учетом четвертого материального уравнения среды для каждого конкретного случая.

В отсутствие сторонних магнитных токов и при условии $Q_{\text{м}}=0$ выражение (1.154) приобретает вид

$$\oint_{S_1} \left(\mathbf{B} + \int_0^t \gamma_{\text{м}} \mathbf{H} dt \right) d\mathbf{S} = 0. \quad (1.155)$$

§ 1.10. Комплексные амплитуды векторов поля, зарядов и токов.

Уравнения электродинамики для комплексных амплитуд в интегральной форме. Интегральные уравнения электродинамики в случае спектральных сигналов

Выражения закона полного тока и закона электромагнитной индукции (1.137), (1.140) являются сложными интегро-дифференциальными соотношениями, поэтому следует добиваться их упрощения. В теории электрических цепей существенное упрощение расчетов дает введение комплексного метода, который может быть с успехом использован и в электродинамике. Предположим, что среда линейна и векторы поля создаются монохроматическим током, т. е. током, колеблющимся с частотой ω . Плотность монохроматического тока

$$\mathbf{J}_a = \mathbf{J}_{am} \cos(\omega t + \varphi_{J_a}),$$

или в другой форме

$$\mathbf{J}_a = \operatorname{Re} \left\{ \left(\mathbf{J}_{am} e^{j\varphi_{J_a}} \right) e^{j\omega t} \right\}.$$

Введем обозначение

$$\mathbf{J}_{am} e^{j\varphi_{J_a}} = \mathbf{j}_a, \quad (1.156)$$

где \mathbf{j}_a — комплексная амплитуда плотности стороннего электрического тока.

Тогда

$$\mathbf{J}_a = \operatorname{Re} (\mathbf{j}_a e^{j\omega t}).$$

Таким образом, для получения мгновенного значения вектора плотности стороннего электрического тока при известном значении его комплексной амплитуды достаточно умножить комплексную амплитуду на $e^{j\omega t}$ и взять действительную часть этого произведения. Аналогично могут быть представлены все функции, входящие в уравнения электродинамики:

$$\left. \begin{aligned} Q_a &= \operatorname{Re} (\dot{Q}_a e^{j\omega t}), & Q_m &= \operatorname{Re} (\dot{Q}_m e^{j\omega t}), \\ \rho_a &= \operatorname{Re} (\dot{\rho}_a e^{j\omega t}), & \rho_m &= \operatorname{Re} (\dot{\rho}_m e^{j\omega t}), \\ \mathbf{J}_a &= \operatorname{Re} (\mathbf{j}_a e^{j\omega t}), & \mathbf{J}_m &= \operatorname{Re} (\mathbf{j}_m e^{j\omega t}), \\ \mathbf{E} &= \operatorname{Re} (\dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t}), & \mathbf{H} &= \operatorname{Re} (\dot{\mathbf{H}} e^{j\omega t}), \\ \mathbf{D} &= \operatorname{Re} (\dot{\mathbf{D}} e^{j\omega t}), & \mathbf{B} &= \operatorname{Re} (\dot{\mathbf{B}} e^{j\omega t}). \end{aligned} \right\} \quad (1.157)$$

Производные по времени векторов поля записываются в виде

$$\partial \mathbf{E} / \partial t = \operatorname{Re} (j\omega \dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t}), \quad \partial \mathbf{H} / \partial t = \operatorname{Re} (j\omega \dot{\mathbf{H}} e^{j\omega t}). \quad (1.158)$$

Подставляя значения производной вектора \mathbf{E} и функций, входящих в уравнение (1.137), получаем

$$\operatorname{Re} \oint_{l_1} \dot{\mathbf{H}} e^{j\omega t} dl = \operatorname{Re} \int_{S_1} \mathbf{j}_a e^{j\omega t} dS + \operatorname{Re} \int_{S_1} \gamma_a \dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t} dS + \operatorname{Re} \int_{S_1} j\omega \epsilon_a \dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t} dS.$$

Заменяя равенство действительных частей равенством комплексных величин, можно отбросить знак вещественности Re и далее все выражение сократить на множитель $e^{j\omega t}$. В результате получаем закон полного тока для комплексных амплитуд функций:

$$\oint_{l_1} \dot{\mathbf{H}} dl = \int_{S_1} \mathbf{J}_a d\mathbf{S} + \int_{S_1} \gamma_a \dot{\mathbf{E}} d\mathbf{S} + \int_{S_1} j\omega\epsilon_a \dot{\mathbf{E}} d\mathbf{S}.$$

Объединяя третий и четвертый интегралы, получаем

$$\oint_{l_1} \dot{\mathbf{H}} dl = \int_{S_1} \mathbf{J}_a d\mathbf{S} + \int_{S_1} (j\omega\epsilon_a + \gamma_a) \dot{\mathbf{E}} d\mathbf{S},$$

или

$$\oint_{l_1} \dot{\mathbf{H}} dl = \int_{S_1} \mathbf{J}_a d\mathbf{S} + \int_{S_1} j\omega \left(\epsilon_a - j \frac{\gamma_a}{\omega} \right) \dot{\mathbf{E}} d\mathbf{S}.$$

Вводя обозначение

$$\epsilon_a - j \frac{\gamma_a}{\omega} = \tilde{\epsilon}_a, \quad (1.159)$$

где $\tilde{\epsilon}_a$ — комплексная абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, запишем закон полного тока в форме

$$\oint_{l_1} \dot{\mathbf{H}} dl = \int_{S_1} \mathbf{J}_a d\mathbf{S} + \int_{S_1} j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}} d\mathbf{S}. \quad (1.160)$$

Аналогичные преобразования можно сделать и в отношении закона электромагнитной индукции (1.140):

$$\oint_{l_1} \dot{\mathbf{E}} dl = - \int_{S_1} \mathbf{J}_m d\mathbf{S} - \int_{S_1} j\omega \left(\mu_a - j \frac{\gamma_m}{\omega} \right) \dot{\mathbf{H}} d\mathbf{S}.$$

Обозначив

$$\mu_a - j \frac{\gamma_m}{\omega} = \tilde{\mu}_a, \quad (1.161)$$

где $\tilde{\mu}_a$ — комплексная абсолютная магнитная проницаемость среды, получаем закон электромагнитной индукции в виде

$$\oint_{l_1} \dot{\mathbf{E}} dl = - \int_{S_1} \mathbf{J}_m d\mathbf{S} - \int_{S_1} j\omega \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}} d\mathbf{S}. \quad (1.162)$$

Сравнивая законы полного тока и электромагнитной индукции для мгновенных значений функций и для комплексных амплитуд, нетрудно видеть, что введение комплексных амплитуд существенно упрощает математическую запись в силу того, что дифференцирова-

ние функций по времени в комплексном методе заменяется умножением на $j\omega$. Соответственно интегрирование можно заменить делением на $j\omega$. На основании этого соотношения (1.132) и (1.154) в случае использования комплексных амплитуд можно записать следующим образом:

$$\oint_{S_1} \left(\varepsilon_a \dot{\mathbf{E}} + \frac{1}{j\omega} \gamma_a \dot{\mathbf{E}} \right) dS = \dot{Q}_a,$$

$$\oint_{S_1} \left(\mu_a \dot{\mathbf{H}} + \frac{1}{j\omega} \gamma_m \dot{\mathbf{H}} \right) dS = \dot{Q}_m,$$

или

$$\oint_{S_1} \left(\varepsilon_a - j \frac{\gamma_a}{\omega} \right) \dot{\mathbf{E}} dS = \dot{Q}_a, \quad (1.163)$$

$$\oint_{S_1} \left(\mu_a - j \frac{\gamma_m}{\omega} \right) \dot{\mathbf{H}} dS = \dot{Q}_m. \quad (1.164)$$

С учетом формул (1.159) и (1.161) выражения (1.163) и (1.164) можно переписать в виде

$$\oint_{S_1} \tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}} dS = \dot{Q}_a, \quad (1.165)$$

$$\oint_{S_1} \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}} dS = \dot{Q}_m. \quad (1.166)$$

Так же легко записываются уравнения среды для комплексных амплитуд:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}, \quad (1.167)$$

$$\mathbf{B} = \mu_a \dot{\mathbf{H}}. \quad (1.168)$$

Первое и второе уравнения непрерывности (1.55) и (1.108) для комплексных амплитуд значительно упрощаются, так как производные по времени заменяются множителем $j\omega$:

$$\oint_{S_1} \mathbf{J}_a dS = - \int_{V_1} j\omega \dot{\rho}_a dV, \quad (1.169)$$

$$\oint_{S_1} \mathbf{J}_m dS = - \int_{V_1} j\omega \dot{\rho}_m dV. \quad (1.170)$$

Когда сторонние токи не являются монохроматическими, использование комплексных амплитуд также возможно. При этом, если среда линейная, следует различать два основных случая:

1. Сторонние токи представляют собой сумму составляющих дискретного частотного спектра.

При решении задачи уравнения электродинамики записывают для каждой из составляющих дискретного частотного спектра. Для диспергирующей среды в эти уравнения вводят параметры среды, соответствующие рассматриваемой частотной гармонике.

Основные интегральные уравнения электродинамики при этом приобретают вид

$$\oint_{l_1} \dot{\mathbf{H}}_{\omega_n} dl = \int_{S_1} \mathbf{J}_{\varepsilon\omega_n} dS + \int_{S_1} j\omega_n \bar{\varepsilon}_a(\omega_n) \dot{\mathbf{E}}_{\omega_n} dS, \quad (1.171)$$

$$\oint_{l_1} \dot{\mathbf{E}}_{\omega_n} dl = - \int_{S_1} \mathbf{J}_{M\omega_n} dS - \int_{S_1} j\omega_n \tilde{\mu}_a(\omega_n) \dot{\mathbf{H}}_{\omega_n} dS. \quad (1.172)$$

Здесь $\dot{\mathbf{E}}_{\omega_n}$, $\dot{\mathbf{H}}_{\omega_n}$, $\mathbf{J}_{\varepsilon\omega_n}$, $\mathbf{J}_{M\omega_n}$ — комплексные амплитуды гармонических составляющих; $\bar{\varepsilon}_a(\omega_n)$, $\tilde{\mu}_a(\omega_n)$ — комплексные абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости на частоте, соответствующей рассматриваемой гармонике. Решение задачи сводится к суперпозиции гармонических составляющих:

$$\dot{\mathbf{E}}_{\Sigma} = \sum_{n=0}^m \dot{\mathbf{E}}_{\omega_n}, \quad \dot{\mathbf{H}}_{\Sigma} = \sum_{n=0}^m \dot{\mathbf{H}}_{\omega_n}, \quad (1.173)$$

где m — число учитываемых гармоник.

2. Частотный спектр сторонних токов непрерывен.

При этом может быть использовано либо преобразование Фурье, либо преобразование Лапласа. Покажем запись уравнений электродинамики на примере преобразования Фурье.

Как известно, в случае непрерывного спектра векторы поля можно определить с помощью формул (1.29) и (1.90).

Аналогично можно представить векторы плотностей сторонних токов:

$$\mathbf{J}_{\varepsilon}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_{J_{\varepsilon}}(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.174)$$

$$\mathbf{J}_M(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_{J_M}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.175)$$

Здесь $\mathbf{G}_{J_{\varepsilon}}(\omega)$, $\mathbf{G}_{J_M}(\omega)$ — векторы спектральных плотностей сторонних электрического и магнитного токов.

Далее, подставляя соотношения (1.29), (1.90), (1.174), (1.175) в выражения законов полного тока (1.137) и электромагнитной индукции (1.138), получаем

$$\begin{aligned} \oint_{l_1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_H(\omega) e^{j\omega t} d\omega dl &= \int_{S_1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_{J_{\varepsilon}}(\omega) e^{j\omega t} d\omega dS + \int_{S_1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{\varepsilon}(\omega) \mathbf{G}_E(\omega) \times \\ &\times e^{j\omega t} d\omega dS + \int_{S_1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \{ \varepsilon_a(\omega) \mathbf{G}_E(\omega) e^{j\omega t} d\omega \} dS, \\ \oint_{l_1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_E(\omega) e^{j\omega t} d\omega dl &= - \int_{S_1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_{J_M}(\omega) e^{j\omega t} d\omega dS - \int_{S_1} \frac{1}{2\pi} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_M(\omega) \mathbf{G}_H(\omega) e^{j\omega t} d\omega dS - \int_{S_1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \{ \mu_a(\omega) \mathbf{G}_H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \} dS. \end{aligned}$$

Сокращая на 2л, меняя местами внутренний и внешний интегралы и дифференцируя по времени, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \oint_{I_1} \mathbf{G}_H(\omega) e^{j\omega t} dl d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S_1} \mathbf{G}_{J_{\mathfrak{z}}}(\omega) e^{j\omega t} dS d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S_1} \gamma_{\mathfrak{z}}(\omega) \mathbf{G}_E(\omega) e^{j\omega t} dS d\omega + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S_1} j\omega \varepsilon_a(\omega) \mathbf{G}_E(\omega) e^{j\omega t} dS d\omega, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \oint_{I_1} \mathbf{G}_E(\omega) e^{j\omega t} dl d\omega = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S_1} \mathbf{G}_{J_M}(\omega) e^{j\omega t} dS d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S_1} \gamma_M(\omega) \mathbf{G}_H(\omega) e^{j\omega t} \times \\ \times dS d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S_1} j\omega \mu_a(\omega) \mathbf{G}_H(\omega) e^{j\omega t} dS d\omega.$$

Поскольку внешнее интегрирование правой и левой частей этих уравнений осуществляется по одной и той же переменной и в одинаковых пределах, подынтегральные выражения можно объединить и внешний интеграл отбросить. Это позволяет сократить уравнения на множитель $e^{j\omega t}$.

В результате законы полного тока и электромагнитной индукции для спектральных составляющих функций записываются в виде

$$\oint_{I_1} \mathbf{G}_H(\omega) dl = \int_{S_1} \mathbf{G}_{J_{\mathfrak{z}}}(\omega) dS + \int_{S_1} \gamma_{\mathfrak{z}}(\omega) \mathbf{G}_E(\omega) dS + \int_{S_1} j\omega \varepsilon_a(\omega) \mathbf{G}_E(\omega) dS, \quad (1.176)$$

$$\oint_{I_1} \mathbf{G}_E(\omega) dl = - \int_{S_1} \mathbf{G}_{J_M}(\omega) dS - \int_{S_1} \gamma_M(\omega) \mathbf{G}_H(\omega) dS - \int_{S_1} j\omega \mu_a(\omega) \mathbf{G}_H(\omega) dS. \quad (1.177)$$

Объединяя второй и третий интегралы в правых частях полученных уравнений и используя соотношения (1.159), (1.161), находим

$$\oint_{I_1} \mathbf{G}_H(\omega) dl = \int_{S_1} \mathbf{G}_{J_{\mathfrak{z}}}(\omega) dS + \int_{S_1} j\omega \tilde{\varepsilon}_a \mathbf{G}_E(\omega) dS, \quad (1.178)$$

$$\oint_{I_1} \mathbf{G}_E(\omega) dl = - \int_{S_1} \mathbf{G}_{J_M}(\omega) dS - \int_{S_1} j\omega \tilde{\mu}_a \mathbf{G}_H(\omega) dS. \quad (1.179)$$

Сравнивая эти уравнения с (1.171), (1.172), нетрудно заметить их сходство. Разница лишь в том, что уравнения (1.171), (1.172) записаны для комплексных амплитуд функций, а уравнения (1.178), (1.179) — для спектральных составляющих этих функций.

После определения спектральных составляющих функции $\mathbf{E}(t)$ и $\mathbf{H}(t)$ можно найти с помощью обратного преобразования Фурье (1.29), (1.90).

Аналогично получают интегральные соотношения для изображений векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} в случае использования преобразования Лапласа:

$$\oint_{I_1} \mathbf{H}(p) dl = \int_{S_1} \mathbf{J}_{\mathfrak{z}}(p) dS + \int_{S_1} p \tilde{\varepsilon}_a(p) \mathbf{E}(p) dS, \quad (1.180)$$

$$\oint_{I_1} \mathbf{E}(p) dl = - \int_{S_1} \mathbf{J}_M(p) dS - \int_{S_1} p \tilde{\mu}_a(p) \mathbf{H}(p) dS. \quad (1.181)$$

Переход от изображений $\mathbf{H}(p)$, $\mathbf{E}(p)$ к векторам поля осуществляется с помощью преобразования (1.35) для вектора $\mathbf{E}(t)$ и преобразования для вектора $\mathbf{H}(t)$ вида

$$\mathbf{H}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \mathbf{H}(p) e^{pt} dp. \quad (1.182)$$

ГЛАВА 2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

§ 2.1. Теорема Остроградского — Гаусса. Теорема Стокса

Полученные в гл. 1 интегральные уравнения дают возможность решать различные электродинамические задачи. В ряде случаев эти задачи проще решить с помощью дифференциальных уравнений. При выборе формы записи уравнений электродинамики необходимо исходить из конкретной задачи. Следует предпочесть интегральную или дифференциальную форму записи уравнений в зависимости от того, какая из этих форм обеспечивает более легкое решение задачи. Переход от интегральных уравнений к дифференциальным может быть осуществлен с помощью двух теорем векторного анализа, теоремы Остроградского — Гаусса и теоремы Стокса [4], [5].

Теорема Остроградского — Гаусса. Теорема Остроградского — Гаусса связывает интеграл от вектора \mathbf{a} по замкнутой поверхности S_1 с интегралом от дивергенции этого вектора по объему V_1 , ограниченному замкнутой поверхностью S_1 :

$$\oint_{S_1} \mathbf{a} dS = \int_{V_1} \operatorname{div} \mathbf{a} dV. \quad (2.1)$$

Напомним, что математическая операция дивергенции вектора (см. приложение I) определяется пределом

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \mathbf{a} dS}{\Delta V}. \quad (2.2)$$

В числителе этого выражения записывается поток вектора \mathbf{a} через малую замкнутую поверхность ΔS , в знаменателе — малый объем ΔV , находящийся внутри замкнутой поверхности ΔS . Предельным переходом малый объем ΔV стягивается в точку. Таким образом, дивергенция вектора определяется характером потока вектора \mathbf{a} , записанного в числителе. Этот поток может быть положительным, равен нулю или отрицательным. Соответственно дивергенция \mathbf{a} может быть положительна, равна нулю или отрицательна.

В зависимости от принятой системы координат $\operatorname{div} \mathbf{a}$ может иметь различную математическую форму. В приложении I дан вывод $\operatorname{div} \mathbf{a}$ в обобщенной криволинейной ортогональной системе координат ξ ,

η , ζ и приведены ее математические выражения в наиболее часто употребляемых системах координат.

Теорема Стокса. Теорема Стокса связывает интеграл от вектора \mathbf{a} по замкнутому контуру l_1 с интегралом от ротора этого вектора по поверхности S_1 , ограниченной замкнутым контуром l_1 :

$$\oint_{l_1} \mathbf{a} d\mathbf{l} = \int_{S_1} \text{rot } \mathbf{a} d\mathbf{S}. \quad (2.3)$$

Известно, что математическая операция ротора вектора (см. приложение I) определяется пределом

$$\text{rot}_n \mathbf{a} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta l} \mathbf{a} d\mathbf{l}}{\Delta S} \mathbf{1}_n. \quad (2.4)$$

В числителе этого выражения записывается циркуляция вектора \mathbf{a} по малому замкнутому контуру Δl ; в знаменателе — малая поверхность ΔS , охватываемая замкнутым контуром Δl ; $\mathbf{1}_n$ — единичная нормаль к поверхности ΔS , связанная правилом правого винта с направлением обхода контура Δl (при движении винта в направлении обхода контура направление единичной нормали должно совпадать с поступательным движением винта).

Запись $\text{rot}_n \mathbf{a}$ означает, что выражение (2.4) определяет составляющую ротора, ориентированную в направлении единичной нормали $\mathbf{1}_n$ к поверхности ΔS .

В зависимости от принятой системы координат математическое выражение $\text{rot } \mathbf{a}$ может быть различным. В приложении I дан вывод $\text{rot } \mathbf{a}$ в обобщенной криволинейной ортогональной системе координат ξ , η , ζ и приведены его математические выражения в наиболее часто употребляемых системах координат.

§ 2.2. Переход от интегральных уравнений электродинамики к дифференциальным. Применение принципа перестановочной двойственности к дифференциальным уравнениям электродинамики

В гл. 1 был выведен ряд интегральных уравнений, определяющих электродинамические процессы в различных случаях. Уравнения были выведены как для мгновенных значений функций, так и для их комплексных амплитуд. Используем эти соотношения для вывода дифференциальных уравнений электродинамики.

Переход от интегральных уравнений к дифференциальным — легко осуществить с помощью теорем Остроградского — Гаусса и Стокса. Применяя теорему Стокса (2.3) к интегралу $\oint_{l_1} \mathbf{H} d\mathbf{l} =$

$= \int_{S_1} \text{rot } \mathbf{H} d\mathbf{S}$, можно записать соотношение (1.137) в виде

$$\int_{S_1} \text{rot } \mathbf{H} d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{J}_s d\mathbf{S} + \int_{S_1} \gamma_s \mathbf{E} d\mathbf{S} + \int_{S_1} \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} d\mathbf{S}.$$

Интегрирование ведется по одной и той же произвольной поверхности S_1 . Опуская интегралы, получаем дифференциальное уравнение (2.5), которое будет записано позднее.

Аналогично можно преобразовать выражение закона электромагнитной индукции (1.140), в результате чего получаем уравнение (2.6). Для преобразования уравнений (1.132), (1.154), (1.155), (1.55), (1.108) используют теорему Остроградского—Гаусса. Методику этого преобразования продемонстрируем на примере уравнения (1.132).

Представим заряд Q_3 в виде объемного интеграла от объемной плотности заряда ρ_3 так, как это сделано в формуле (1.51). Тогда соотношение (1.132) запишется таким образом:

$$\oint_{S_1} \left(\mathbf{D} + \int_0^t \gamma_3 \mathbf{E} dt \right) d\mathbf{S} = \int_{V_1} \rho_3 dV.$$

Используя теорему Остроградского—Гаусса (2.1) для левой части выражения, получаем

$$\int_{V_1} \operatorname{div} \left(\mathbf{D} + \int_0^t \gamma_3 \mathbf{E} dt \right) dV = \int_{V_1} \rho_3 dV.$$

Интегрирование осуществляется по одному и тому же произвольному объему V_1 . Опуская интегралы, получаем соотношение (2.7). Аналогично преобразуются уравнения (1.154), (1.155), (1.55), (1.108).

В результате сделанных преобразований возникают дифференциальные уравнения электродинамики для мгновенных значений функций:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_3 + \gamma_3 \mathbf{E} + \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.5)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mathbf{J}_m - \gamma_m \mathbf{H} - \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (2.6)$$

$$\operatorname{div} \left(\mathbf{D} + \int_0^t \gamma_3 \mathbf{E} dt \right) = \rho_3, \quad (2.7)$$

$$\operatorname{div} \left(\mathbf{B} + \int_0^t \gamma_m \mathbf{H} dt \right) = \rho_m, \quad (2.8)$$

или при $\rho_m = 0$

$$\operatorname{div} \left(\mathbf{B} + \int_0^t \gamma_m \mathbf{H} dt \right) = 0, \quad (2.9)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_3 = -\partial \rho_3 / \partial t, \quad (2.10)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_m = -\partial \rho_m / \partial t. \quad (2.11)$$

Аналогично могут быть получены дифференциальные соотношения электродинамики для комплексных амплитуд функций:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}}_a + j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}, \quad (2.12)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -\dot{\mathbf{J}}_m - j\omega \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}, \quad (2.13)$$

$$\operatorname{div} (\tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}) = \dot{\rho}_a, \quad (2.14)$$

$$\operatorname{div} (\tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}) = \dot{\rho}_m, \quad (2.15)$$

или при $\rho_m = 0$

$$\operatorname{div} (\tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}) = 0, \quad (2.16)$$

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{J}}_a = -j\omega \dot{\rho}_a, \quad (2.17)$$

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{J}}_m = -j\omega \dot{\rho}_m. \quad (2.18)$$

Уравнения (2.5) и (2.12) называются *первым уравнением Максвелла для мгновенных значений функций и их комплексных амплитуд*, уравнения (2.6) и (2.13)—*вторым уравнением Максвелла для мгновенных значений функций и их комплексных амплитуд*.

Соответственно уравнения (2.10) и (2.17) называются *первым уравнением непрерывности* для мгновенных значений и комплексных амплитуд, а уравнения (2.11) и (2.18)—*вторым уравнением непрерывности для мгновенных значений функций и их комплексных амплитуд*.

Так же, как и для интегральных уравнений, для дифференциальных уравнений электродинамики справедлив принцип перестановочной двойственности. Уравнение (2.12) переходит в (2.13) и, наоборот, уравнение (2.14)—в уравнение (2.15) и, наоборот, уравнение (2.17)—в уравнение (2.18) и, наоборот, уравнения среды (1.167)—в (1.168) и, наоборот, при осуществлении следующих перестановок:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &\rightleftharpoons \dot{\mathbf{H}}, & \dot{\mathbf{J}}_a &\rightleftharpoons -\dot{\mathbf{J}}_m, \\ \tilde{\epsilon}_a &\rightleftharpoons -\tilde{\mu}_a, & \dot{\rho}_a &\rightleftharpoons -\dot{\rho}_m, \\ \epsilon_a &\rightleftharpoons -\mu_a, & \dot{\mathbf{D}} &\rightleftharpoons -\dot{\mathbf{B}}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Аналогичный переход наблюдается в уравнениях, записанных для мгновенных значений электродинамических функций. При этом необходимы перестановки вида

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\rightleftharpoons \mathbf{H}, & \mathbf{J}_a &\rightleftharpoons -\mathbf{J}_m, \\ \gamma_a &\rightleftharpoons -\gamma_m, & \epsilon_a &\rightleftharpoons -\mu_a, \\ \mathbf{D} &\rightleftharpoons -\mathbf{B}, & \rho_a &\rightleftharpoons -\rho_m. \end{aligned} \quad (2.20)$$

§ 2.3. Дифференциальные уравнения электродинамики в случае квазистатических и статических полей

Написанные уравнения электродинамики выведены в общей форме, допускающей различные упрощения в конкретных случаях. Прежде всего рассмотрим случай квазистатических полей, когда частота

колебаний настолько мала, что можно пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости. При этом уравнения (2.5), (2.6) и (2.12), (2.13) записываются соответственно в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_s + \gamma_s \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mathbf{J}_m - \gamma_m \mathbf{H} - \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (2.21)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}}_s + \gamma_s \dot{\mathbf{E}}, \quad \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -\dot{\mathbf{J}}_m - j\omega \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}. \quad (2.22)$$

В случае статических полей частоту колебаний следует полагать равной нулю и уравнения упрощаются еще больше:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_s + \gamma_s \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mathbf{J}_m - \gamma_m \mathbf{H}. \quad (2.23)$$

Аналогично записываются уравнения для комплексных амплитуд. Если проводимости среды γ_s и γ_m равны нулю, то электрическое и магнитное поле становятся полностью независимыми:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_s, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mathbf{J}_m. \quad (2.24)$$

Если магнитные токи не вводятся в расчет, то полагают

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0.$$

Подобный подход может быть использован при записи интегральных уравнений электродинамики.

Таким образом, общие уравнения электродинамики включают в себя как частные случаи уравнения, соответствующие квазистатическим и статическим полям.

§ 2.4. Несамостоятельность некоторых уравнений электродинамики

Рассматривая систему уравнений электродинамики, можно заметить, что помимо уравнений Максвелла, связывающих векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} со сторонними токами, существуют уравнения (2.7), (2.8) для мгновенных значений векторов поля и уравнения (2.14), (2.15) для их комплексных амплитуд.

Для отыскания векторов поля \mathbf{E} и \mathbf{H} достаточно двух уравнений Максвелла, содержащих эти векторы. Возникает вопрос, не являются ли уравнения (2.7), (2.8), (2.14) и (2.15) лишними уравнениями, переопределяющими систему уравнений Максвелла. Покажем на примере уравнений для комплексных амплитуд, что уравнения (2.14), (2.15) могут быть получены из уравнений Максвелла (2.12), (2.13).

Подвергнем уравнение (2.12) операции дивергенции:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = \operatorname{div} \dot{\mathbf{J}}_s + j\omega \operatorname{div} (\tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}).$$

В приложении I приводится векторное тождество $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$, в силу чего

$$\operatorname{div} (\tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}) = \frac{j}{\omega} \operatorname{div} \dot{\mathbf{J}}_s. \quad (2.25)$$

Аналогично из уравнения (2.13) находим

$$\operatorname{div}(\vec{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}) = \frac{j}{\omega} \operatorname{div} \mathbf{J}_m. \quad (2.26)$$

Подставляя в формулы (2.25), (2.26) выражения для $\operatorname{div} \mathbf{J}_a$ и $\operatorname{div} \mathbf{J}_m$ из уравнений непрерывности (2.17), (2.18), получаем соотношения (2.14), (2.15).

Таким же образом может быть доказана несамостоятельность уравнений (2.7), (2.8).

ГЛАВА 3

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ КАК СЛЕДСТВИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

§ 3.1. Вывод первого закона Кирхгофа на основании уравнений электродинамики

Основными законами электротехники являются закон Ома, первый и второй законы Кирхгофа. Первый закон Кирхгофа гласит, что алгебраическая сумма токов в узловой точке цепи равна нулю. Второй закон Кирхгофа можно сформулировать следующим образом: алгебраическая сумма э. д. с. сторонних источников в замкнутой электрической цепи равна сумме падений напряжений на ее элементах.

Покажем, что эти законы являются следствием основных уравнений электродинамики. В основу рассуждений положим уравнение (1.132). Дифференцируя обе части этого уравнения по времени, получаем

$$\oint_{S_1} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \gamma_a \mathbf{E} \right) d\mathbf{S} = \frac{\partial Q_a}{\partial t}. \quad (3.1)$$

С учетом соотношений (1.129), (1.114), (1.53), (1.54) выражение (3.1) можно записать в виде

$$\oint_{S_1} (\mathbf{J}_c + \mathbf{J}_{ан} + \mathbf{J}_a) d\mathbf{S} = 0. \quad (3.2)$$

Рассматривая узловую точку электрической цепи, состоящую из n проводников (рис. 3.1), и пренебрегая токами смещения между проводниками, уравнение (3.2) можно записать таким образом:

$$\oint_{S_1} (\mathbf{J}_{ан} + \mathbf{J}_a) d\mathbf{S} = 0. \quad (3.3)$$

В этом случае S_1 — замкнутая поверхность, окружающая узловую точку.

Плотности токов проводимости и токов источников существуют в пространстве там, где расположены проводники. В силу этого интеграл по замкнутой поверхности можно представить как сумму интегралов по площади поперечного сечения проводников. При этом уравнение (3.3) приобретает вид

$$\sum_{k=1}^{n_1} \int_{S_k} \mathbf{J}_{\text{ан}k} d\mathbf{S} + \sum_{p=1}^{n_2} \int_{S_p} \mathbf{J}_{\text{э}p} d\mathbf{S} = 0, \quad (3.4)$$

где

$$n_1 + n_2 = n.$$

Каждый из интегралов представляет собой ток I_m , протекающий по проводнику. Тогда вместо соотношения (3.4) можно записать

$$\sum_{m=1}^n I_m = 0. \quad (3.5)$$

Выражение (3.5) является *первым законом Кирхгофа, выведенным на основании уравнений электродинамики.*

§ 3.2. Вывод второго закона Кирхгофа на основании уравнений электродинамики

Разность потенциалов U , возникающая на концах проводящего витка при пересечении площади витка переменным во времени магнитным потоком Φ_B , выражается соотношением (1.133). С учетом формулы (1.5), считая контур l_1 замкнутым, получаем

$$\oint_{l_1} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}. \quad (3.6)$$

Рассмотрим в качестве замкнутого контура l_1 замкнутую электрическую цепь с сосредоточенными постоянными. В этом случае поток Φ_B может создаваться за счет тока I_n в индуктивностях L_n замкнутой цепи, а также за счет токов I_m в других замкнутых цепях, связанных с рассматриваемой цепью взаимными индуктивностями M_m . Если число витков в катушках отлично от единицы, то поток Φ_B следует заменить потокоцеплением Ψ_B .

В теории цепей индуктивность L_n определяют как коэффициент пропорциональности между током I_n в катушке и потоком вектора \mathbf{B} , сцепленным с витками этой катушки:

$$\Psi_{BL} = L_n I_n. \quad (3.7)$$

Взаимную индуктивность M_m определяют как коэффициент пропорциональности между током I_m в другой цепи, индуктивно связанной с катушкой в данной цепи, и потоком вектора \mathbf{B} , сцепленным с витками этой катушки:

$$\Psi_{BM} = M_m I_m. \quad (3.8)$$

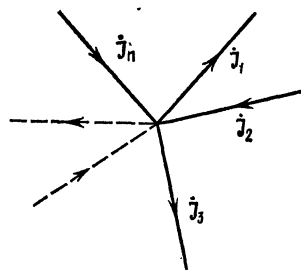


Рис. 3.1

В рассматриваемой цепи может быть несколько индуктивностей и взаимных индуктивностей, связывающих ее с другими цепями. Общий поток, сцепленный со всеми индуктивными элементами, представляет собой сумму частных потоков, поэтому можно записать

$$\Psi_B = \sum_{n=1}^{n_1} L_n I_n + \sum_{m=1}^{m_1} M_m I_m. \quad (3.9)$$

Соответственно частную производную $\partial\Phi_B/\partial t$, входящую в правую часть выражения (3.6) для цепи с сосредоточенными постоянными, можно заменить производной $\partial\Psi_B/\partial t$, которая с учетом выражения (3.9) записывается в виде

$$\frac{d\Psi_B}{dt} = \sum_{n=1}^{n_1} L_n \frac{dI_n}{dt} + \sum_{m=1}^{m_1} M_m \frac{dI_m}{dt}. \quad (3.10)$$

Подчеркнем еще раз, что L_n —индуктивности, входящие в замкнутый контур l_1 (замкнутую цепь); M_m —взаимные индуктивности, связывающие контур l_1 с токами I_m в других контурах.

Интеграл по замкнутому контуру l_1 в левой части выражения (3.6) можно представить суммой интегралов, определяющих разности потенциалов на активных сопротивлениях и емкостях контура l_1 .

Вектор напряженности электрического поля \mathbf{E} в цепи связан с вектором плотности тока проводимости $\mathbf{J}_{\text{эп}}$ в контуре соотношением (1.114). Определяя \mathbf{E} из этого соотношения и подставляя его в интеграл $\int_{l_1} \mathbf{E} d\mathbf{l}$, получаем

$$\int_{l_1} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_{l_1} \frac{\mathbf{J}_{\text{эп}}}{\gamma_{\text{э}}} d\mathbf{l}. \quad (3.11)$$

Умножим и разделим дробь, стоящую под интегралом, на площадь поперечного сечения элементов цепи, обладающих активной проводимостью:

$$\int_{l_1} \frac{\mathbf{J}_{\text{эп}}}{\gamma_{\text{э}}} d\mathbf{l} = \int_{l_1} \frac{\mathbf{J}_{\text{эп}} S}{\gamma_{\text{э}} S} \mathbf{1}_l dl. \quad (3.12)$$

Здесь $\mathbf{1}_l$ —единичный вектор (орт), совпадающий по направлению с вектором $d\mathbf{l}$ и, очевидно, с единичной нормалью к площади поперечного сечения.

Поэтому

$$\mathbf{1}_l S = \mathbf{S},$$

и ток проводимости в цепи

$$I_{\text{эп}} = \mathbf{J}_{\text{эп}} \mathbf{S}.$$

Тогда интегральное соотношение (3.11) может быть записано в форме

$$\int_{l_{\gamma}} \mathbf{E} dl = \frac{I_{\text{эп}}}{\gamma_{\text{э}} S} \int_{l_{\gamma}} dl = \frac{I_{\text{эп}} l_{\gamma}}{\gamma_{\text{э}} S}. \quad (3.13)$$

Под длиной l_{γ} понимают длину элементов цепи, обладающих активной проводимостью $\gamma_{\text{э}}$. В соответствии с (1.112) выражение (3.13) приобретает вид

$$U_R = \int_{l_{\gamma}} \mathbf{E} dl = I_{\text{эп}} R. \quad (3.14)$$

Таким образом, найдена часть интеграла по замкнутому контуру l_1 , соответствующая разности потенциалов U_R на элементах цепи, обладающих активной проводимостью. Если таких участков несколько, то вместо выражения (3.14) получим

$$\sum_{p=1}^{p_1} \int_{l_{\gamma p}} \mathbf{E}_p dl = \sum_{p=1}^{p_1} I_{\text{эп } p} R_p. \quad (3.15)$$

Плотность тока смещения J_c в конденсаторах, включенных в контур l_1 , определяется соотношением (1.129), которое с учетом формулы (1.19) можно записать таким образом:

$$\mathbf{J}_c = \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

откуда

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_a} \int_0^t \mathbf{J}_c dt.$$

При этом интеграл $\int_{l_1} \mathbf{E} dl$ запишется в виде

$$\int_{l_c} \mathbf{E} dl = \frac{1}{\epsilon_a} \int_{l_c} \int_0^t \mathbf{J}_c dt dl = \frac{1}{\epsilon_a} \int_0^t \int_{l_c} \mathbf{J}_c dl dt,$$

где l_c — длина пути токов смещения, или расстояние между обкладками конденсатора.

Умножив и разделив это выражение на площадь обкладок конденсатора S_c , получаем

$$\int_{l_c} \mathbf{E} dl = \frac{1}{\epsilon_a} \int_0^t \int_{l_c} \frac{\mathbf{J}_c S_c}{S_c} dl dt = \frac{1}{\epsilon_a} \int_0^t \int_{l_c} \frac{\mathbf{J}_c S_c \mathbf{1}_l}{S_c} dl dt. \quad (3.16)$$

Здесь $\mathbf{1}_l$ — единичный вектор (орт), направленный вдоль пути dl ; $\mathbf{J}_c S_c \mathbf{1}_l = I_c$ — ток, протекающий через конденсатор.

Тогда вместо выражения (3.16) получим

$$\int_{l_c} \mathbf{E} dl = \frac{1}{\varepsilon_a S_c} \int_0^t \int_{l_c} I_c dl dt = \frac{l_c}{\varepsilon_a S_c} \int_0^t I_c dt,$$

где

$$\frac{l_c}{\varepsilon_a S_c} = \frac{1}{C};$$

C — емкость конденсатора.

Следовательно, падение напряжения на конденсаторе равно

$$\int_{l_c} \mathbf{E} dl = U_c = \frac{1}{C} \int_0^t I_c dt. \quad (3.17)$$

При включении в электрическую цепь нескольких конденсаторов выражение следует записать в виде

$$\sum_{q=1}^{q_1} \int_{l_{Cq}} \mathbf{E}_q dl = \sum_{q=1}^{q_1} \frac{1}{C_q} \int_0^t I_{Cq} dt. \quad (3.18)$$

Помимо падения напряжений на индуктивных катушках, резисторах и конденсаторах в электрическую цепь входят сторонние разности потенциалов U_a , создаваемые источниками. При этом, как обычно, справедливо соотношение

$$\int_{l_a} \mathbf{E}_a dl = U_a. \quad (3.19)$$

При наличии нескольких источников создаваемые ими разности потенциалов необходимо просуммировать:

$$\sum_{k=1}^{k_1} \int_{l_{a_k}} \mathbf{E}_{a_k} dl = \sum_{k=1}^{k_1} U_{a_k}. \quad (3.20)$$

Таким образом, в формировании контурного интеграла $\oint_{l_1} \mathbf{E} dl$ в левой части закона Фарадея (3.6) в общем случае участвуют выражения (3.15), (3.18), (3.20). В процессе суммирования разности потенциалов, создаваемые сторонними источниками, следует брать с обратными знаками:

$$\oint_{l_1} \mathbf{E} dl = - \sum_{k=1}^{k_1} \int_{l_{a_k}} \mathbf{E}_{a_k} dl + \sum_{p=1}^{p_1} \int_{l_{\gamma_p}} \mathbf{E}_p dl + \sum_{q=1}^{q_1} \int_{l_{Cq}} \mathbf{E}_q dl.$$

Подставляя значения интегралов из формул (3.15), (3.18), (3.20), получаем

$$\oint_{l_1} \mathbf{E} dl = - \sum_{k=1}^{k_1} U_{a_k} + \sum_{p=1}^{p_1} I_{\text{ан}p} R_p + \sum_{q=1}^{q_1} \frac{1}{C_q} \int_0^t I_{Cq} dt. \quad (3.21)$$

Правая часть закона Фарадея (3.6) определяется соотношением (3.10). Подставляя в выражение (3.6) формулы (3.21) и (3.10), получаем

$$-\sum_{k=1}^{k_1} U_{\text{э}k} + \sum_{p=1}^{p_1} I_{\text{э}p} R_p + \sum_{q=1}^{q_1} \frac{1}{C_q} \int_0^t I_{C_q} dt = -\sum_{n=1}^{n_1} L_n \frac{dI_n}{dt} - \sum_{m=1}^{m_1} M_m \frac{dI_m}{dt},$$

или, опуская часть индексов,

$$\sum_{k=1}^{k_1} U_{\text{э}k} = \sum_{p=1}^{p_1} I_p R_p + \sum_{q=1}^{q_1} \frac{1}{C_q} \int_0^t I_q dt + \sum_{n=1}^{n_1} L_n \frac{dI_n}{dt} + \sum_{m=1}^{m_1} M_m \frac{dI_m}{dt}. \quad (3.22)$$

Это соотношение представляет собой *второй закон Кирхгофа для цепи с сосредоточенными постоянными*, по которому сумма э. д. с. сторонних источников тока в замкнутой электрической цепи равна сумме падений напряжения на ее элементах.

ГЛАВА 4

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

§ 4.1. Теорема Пойнтинга для мгновенных значений векторов поля

Рассмотрим первое и второе уравнения Максвелла для мгновенных значений векторов поля, определяемые уравнениями (2.5) и (2.6).

Умножая уравнение (2.5) скалярно на вектор \mathbf{E} , а (2.6) — на вектор \mathbf{H} и вычитая первое произведение из второго, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} = & -\mathbf{J}_m \mathbf{H} - \gamma_m H^2 - \\ & -\mu_a \frac{\partial H}{\partial t} H - \mathbf{J}_s \mathbf{E} - \gamma_s E^2 - \epsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} E. \end{aligned} \quad (4.1)$$

В приложении I приводится векторное тождество $\operatorname{div} [\mathbf{a}\mathbf{b}] = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}$, в левой части которого находится дивергенция векторного произведения вектора \mathbf{a} на вектор \mathbf{b} .

На основании векторного тождества уравнение (4.1) можно записать в виде

$$\operatorname{div} [\mathbf{E}\mathbf{H}] + \mathbf{J}_m \mathbf{H} + \gamma_m H^2 + \mu_a \frac{\partial H}{\partial t} H + \mathbf{J}_s \mathbf{E} + \gamma_s E^2 + \epsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} E = 0. \quad (4.2)$$

Полученное уравнение называют *теоремой Пойнтинга в дифференциальной форме для мгновенных значений векторов поля*.

Проинтегрируем выражение (4.2) по объему V_1 , содержащему все источники сторонних токов, учтенные при написании уравне-

ний Максвелла:

$$\int_{V_1} \operatorname{div} [\mathbf{E}\mathbf{H}] dV + \int_{V_1} \mathbf{J}_m \mathbf{H} dV + \int_{V_1} \gamma_m H^2 dV + \int_{V_1} \mu_a \frac{\partial H}{\partial t} H dV + \\ + \int_{V_1} \mathbf{J}_s \mathbf{E} dV + \int_{V_1} \gamma_s E^2 dV + \int_{V_1} \epsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} E dV = 0. \quad (4.3)$$

На основании теоремы Остроградского—Гаусса (2.1) и учитывая, что векторное произведение

$$[\mathbf{E}\mathbf{H}] = \mathbf{\Pi} \quad (4.4)$$

представляет собой вектор, уравнение (4.3) после перегруппировки членов можно записать в виде

$$\oint_{S_1} \mathbf{\Pi} d\mathbf{S} + \int_{V_1} \mathbf{J}_m \mathbf{H} dV + \int_{V_1} \mathbf{J}_s \mathbf{E} dV + \int_{V_1} \gamma_m H^2 dV + \int_{V_1} \gamma_s E^2 dV + \\ + \int_{V_1} \mu_a \frac{\partial H}{\partial t} H dV + \int_{V_1} \epsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} E dV = 0. \quad (4.5)$$

Уравнение (4.5) называют *теоремой Пойнтинга в интегральной форме для мгновенных значений векторов поля, а вектор $\mathbf{\Pi}$ —мгновенным значением вектора Пойнтинга.*

Необходимо определить физический смысл выражения (4.5). Для этого выясним единицы измерения входящих в него интегралов:

$$\mathbf{E} \rightarrow \text{В/м}, \quad \mathbf{H} \rightarrow \text{А/м}, \\ \mathbf{\Pi} \rightarrow \frac{\text{В} \cdot \text{А}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}. \quad (4.6)$$

Таким образом, единицей измерения вектора Пойнтинга является ватт на квадратный метр. Другими словами, вектор Пойнтинга представляет собой плотность мощности, или мощность электромагнитного поля, проходящую через поверхность в один квадратный метр, находящуюся в плоскости, параллельной плоскости, в которой расположены векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} . Интеграл $\oint_{S_1} \mathbf{\Pi} d\mathbf{S}$, измеряемый в ваттах, можно трактовать как мощность электромагнитного поля, проходящую через замкнутую поверхность S_1 , охватывающую объем V_1 , в котором сосредоточены все сторонние источники поля.

Мощность источников поля характеризуется интегралами $\int_{V_1} \mathbf{J}_m \mathbf{H} dV$ и $\int_{V_1} \mathbf{J}_s \mathbf{E} dV$.

Первый интеграл представляет собой мощность, создаваемую сторонними магнитными токами, а второй интеграл—сторонними электрическими токами. Эти интегралы берут по всему объему V_1 , однако они будут отличны от нуля только в пределах объемов, в которых существуют плотности токов \mathbf{J}_m и \mathbf{J}_s . Возможна ситуация, когда поле создается либо сторонними магнитными, либо сторонними электрическими токами. Тогда один из интегралов обращается в нуль.

Интегралы $\int_{V_1} \dot{\gamma}_m H^2 dV$ и $\int_{V_1} \dot{\gamma}_e E^2 dV$ отличны от нуля, если среда обладает магнитной и электрической проводимостями. Эти интегралы можно рассматривать как мощности, расходуемые на нагревание среды за счет магнитных и электрических потерь. При наличии магнитной и электрической проводимостей возникают токи и соответственно расходуется мощность источников. В практических случаях иногда можно пренебречь магнитными потерями или электрическими потерями (или теми и другими), как например, в случае достаточно совершенных диэлектриков.

Интеграл

$$\int_{V_1} \mu_a \frac{\partial H}{\partial t} H dV = P_m \quad (4.7)$$

характеризует мощность магнитного поля, сосредоточенную в объеме V_1 , или мощность, затраченную на образование магнитного поля, а интеграл

$$\int_{V_1} \epsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} E dV = P_e \quad (4.8)$$

— мощность электрического поля, сосредоточенную в объеме V_1 , или мощность, затраченную на образование электрического поля.

Полную мощность электромагнитного поля, сосредоточенную в объеме V_1 , можно представить как сумму мощностей P_m и P_e :

$$P = \int_{V_1} \mu_a \frac{\partial H}{\partial t} H dV + \int_{V_1} \epsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} E dV. \quad (4.9)$$

Таким образом, в выражение (4.5) входит сумма мощностей источников поля, мощностей потерь, мощностей магнитного и электрического полей, сосредоточенных в объеме V_1 , и мощности, выходящей за пределы этого объема через поверхность S_1 . Эта сумма равна нулю, что позволяет рассматривать выражение в качестве уравнения баланса мгновенных мощностей в пространстве, ограниченном поверхностью S_1 . Теорема Пойнтинга (4.5) представляет собой одно из важнейших уравнений электродинамики, с помощью которого можно производить различные практические расчеты. Так, например, знание вектора Пойнтинга позволяет определить мощность, перехватываемую параболами радиотелескопов. Представляет большой интерес определение энергии электромагнитного поля, сосредоточенной в объеме V_1 , и энергии потерь в среде, что позволяет, например, рассчитать добротность объемных резонаторов (колебательных контуров, используемых на сверхвысоких частотах).

Энергию электромагнитного поля, запасенную в объеме V_1 , или энергию, затраченную на образование этого поля, можно найти интегрированием по времени выражений (4.7), (4.8), определяющих

щих мощности магнитного и электрического полей:

$$W_m = \int_0^t P_m dt = \int_0^t \int_{V_1} \mu_a \frac{\partial H}{\partial t} H dV dt. \quad (4.10)$$

Выражение $\frac{\partial H}{\partial t} dt = dH$ представляет собой дифференциал поля H . Интеграл по времени при этом переходит в интеграл по полю H . Допуская, что в момент времени $t=0$ поле отсутствовало, а в момент времени t равнялось H , выражение для магнитной энергии можно записать в форме

$$W_m = \int_{V_1} \int_0^H \mu_a H dH dV.$$

Осуществив внутреннее интегрирование по переменной H , получаем

$$W_m = \int_{V_1} \frac{\mu_a H^2}{2} dV. \quad (4.11)$$

Аналогичные рассуждения справедливы в отношении энергии электрического поля, мощность которого определяется формулой (4.8):

$$W_a = \int_0^t P_a dt = \int_0^t \int_{V_1} \varepsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} E dV dt, \\ \frac{\partial E}{\partial t} dt = dE, \\ W_a = \int_{V_1} \int_0^E \varepsilon_a E dE dV, \quad (4.12)$$

$$W_a = \int_{V_1} \frac{\varepsilon_a E^2}{2} dV. \quad (4.13)$$

Выражения (4.11) и (4.13) дают значение энергии магнитного и электрического полей, сосредоточенной в объеме V_1 . Подынтегральные выражения представляют собой объемные плотности магнитной ΔW_m и электрической ΔW_a энергий:

$$\Delta W_m = \frac{\mu_a H^2}{2}, \quad (4.14)$$

$$\Delta W_a = \frac{\varepsilon_a E^2}{2}. \quad (4.15)$$

В системе МКСА энергии W_m и W_a измеряются в джоулях:

$$W_m \rightarrow \text{Дж}, \quad W_a \rightarrow \text{Дж}, \quad (4.16)$$

а плотности этих энергий — в джоулях на кубический метр:

$$\Delta W_m \rightarrow \text{Дж/м}^3, \quad \Delta W_a \rightarrow \text{Дж/м}^3. \quad (4.17)$$

Полная энергия электромагнитного поля, сосредоточенная в объеме V_1 , равна сумме энергий W_m и W_a :

$$W = W_m + W_a = \int_{V_1} \left(\frac{\mu_a H^2}{2} + \frac{\epsilon_a E^2}{2} \right) dV. \quad (4.18)$$

§ 4.2. Теорема Пойнтинга для комплексных амплитуд векторов поля

В основу рассуждений положим уравнения Максвелла для комплексных амплитуд векторов поля (2.12), (2.13).

Раскрывая значения $\vec{\epsilon}_a$ и $\vec{\mu}_a$ с помощью формул (1.159), (1.161), получаем

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}}_a + \gamma_a \dot{\mathbf{E}} + j\omega \epsilon_a \dot{\mathbf{E}}, \quad (4.19)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -\dot{\mathbf{J}}_m - \gamma_m \dot{\mathbf{H}} - j\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}. \quad (4.20)$$

Пусть $\dot{\mathbf{H}}^*$, $\dot{\mathbf{J}}_a^*$, $\dot{\mathbf{E}}^*$ обозначают сопряженные значения комплексных амплитуд векторов $\dot{\mathbf{H}}$, $\dot{\mathbf{J}}_a$, $\dot{\mathbf{E}}$, т. е. такие их значения, у которых знаки перед мнимыми частями комплексных амплитуд заменены на обратные.

Тогда уравнение (4.19) для сопряженных комплексных амплитуд приобретет вид

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}^* = \dot{\mathbf{J}}_a^* + \gamma_a \dot{\mathbf{E}}^* - j\omega \epsilon_a \dot{\mathbf{E}}^*. \quad (4.21)$$

В соответствии с правилами перехода к сопряженным значениям знак перед последним слагаемым в правой части уравнения (4.19) заменен на обратный.

Далее, умножая уравнение (4.20) скалярно на вектор $\dot{\mathbf{H}}^*$, а уравнение (4.21) — на вектор $\dot{\mathbf{E}}$ и вычитая из первого произведения второе, получаем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}^* \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}^* = & -\dot{\mathbf{J}}_m \dot{\mathbf{H}}^* - \gamma_m \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{H}}^* - j\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{H}}^* - \\ & - \dot{\mathbf{J}}_a^* \dot{\mathbf{E}} - \gamma_a \dot{\mathbf{E}}^* \dot{\mathbf{E}} + j\omega \epsilon_a \dot{\mathbf{E}}^* \dot{\mathbf{E}}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

В силу векторного тождества $\dot{\mathbf{H}}^* \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}^* = \operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}^*]$, а также того обстоятельства, что произведение комплексной величины на ее сопряженное значение дает квадрат амплитуды модуля $\dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{H}}^* = |\dot{\mathbf{H}}|^2$, $\dot{\mathbf{E}}^* \dot{\mathbf{E}} = |\dot{\mathbf{E}}|^2$, выражение (4.22) можно записать таким образом:

$$\operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}^*] + \dot{\mathbf{J}}_m \dot{\mathbf{H}}^* + \dot{\mathbf{J}}_a^* \dot{\mathbf{E}} + \gamma_m |\dot{\mathbf{H}}|^2 + \gamma_a |\dot{\mathbf{E}}|^2 + j\omega \mu_a |\dot{\mathbf{H}}|^2 - j\omega \epsilon_a |\dot{\mathbf{E}}|^2 = 0. \quad (4.23)$$

По аналогии с уравнением (4.2) уравнение (4.23) называют *теоремой Пойнтинга в дифференциальной форме для комплексных амплитуд векторов поля*.

Интегрируя полученное уравнение по объему V_1 , включающему источники сторонних электрических и магнитных токов, и исполь-

зую теорему Остроградского—Гаусса (2.1), на основании которой

$$\int_{V_1} \operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*] dV = \oint_{S_1} [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*] dS,$$

представим уравнение (4.23) в интегральной форме:

$$\begin{aligned} \oint_{S_1} [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*] dS + \int_{V_1} \mathbf{J}_m \dot{\mathbf{H}}^* dV + \int_{V_1} \mathbf{J}_s^* \dot{\mathbf{E}} dV + \int_{V_1} \gamma_m |\dot{\mathbf{H}}|^2 dV + \\ + \int_{V_1} \gamma_s |\dot{\mathbf{E}}|^2 dV + \int_{V_1} j\omega\mu_a |\dot{\mathbf{H}}|^2 dV - \int_{V_1} j\omega\epsilon_a |\dot{\mathbf{E}}|^2 dV = 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Первый, второй и третий интегралы в уравнении (4.24) представляют собой в общем случае комплексные величины, т. е. их можно выразить суммой действительной и мнимой частей. В силу того что проводимости γ_m и γ_s —действительные величины и квадраты модулей $|\dot{\mathbf{H}}|^2$ и $|\dot{\mathbf{E}}|^2$ —также действительные величины, четвертый и пятый интегралы являются действительными. Величины ω , μ_a , $|\dot{\mathbf{H}}|^2$, ϵ_a , $|\dot{\mathbf{E}}|^2$ являются также действительными. Следовательно, последние два интеграла представляют собой мнимые величины.

Выражение (4.24) по аналогии с (4.5) можно рассматривать в качестве уравнения баланса мощностей в пространстве, но не мгновенных, а комплексных, активных и реактивных. В развернутой форме это выражение, поделенное на два (что имеет, как увидим далее, определенный смысл), записывается как

$$\begin{aligned} \oint_{S_1} \operatorname{Re} \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*] dS + j \oint_{S_1} \operatorname{Im} \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*] dS + \\ + \int_{V_1} \operatorname{Re} \frac{1}{2} \mathbf{J}_m \dot{\mathbf{H}}^* dV + j \int_{V_1} \operatorname{Im} \frac{1}{2} \mathbf{J}_m \dot{\mathbf{H}}^* dV + \\ + \int_{V_1} \operatorname{Re} \frac{1}{2} \mathbf{J}_s^* \dot{\mathbf{E}} dV + j \int_{V_1} \operatorname{Im} \frac{1}{2} \mathbf{J}_s^* \dot{\mathbf{E}} dV + \\ + \int_{V_1} \frac{1}{2} \gamma_m |\dot{\mathbf{H}}|^2 dV + \int_{V_1} \frac{1}{2} \gamma_s |\dot{\mathbf{E}}|^2 dV + \int_{V_1} \frac{1}{2} j\omega\mu_a |\dot{\mathbf{H}}|^2 dV - \\ - \int_{V_1} \frac{1}{2} j\omega\epsilon_a |\dot{\mathbf{E}}|^2 dV = 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Разделяя действительные и мнимые части, найдем отдельно баланс активных и реактивных мощностей в пространстве:

$$\begin{aligned} \oint_{S_1} \operatorname{Re} \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*] dS + \int_{V_1} \operatorname{Re} \frac{1}{2} \mathbf{J}_m \dot{\mathbf{H}}^* dV + \int_{V_1} \operatorname{Re} \frac{1}{2} \mathbf{J}_s^* \dot{\mathbf{E}} dV + \\ + \int_{V_1} \frac{1}{2} \gamma_m |\dot{\mathbf{H}}|^2 dV + \int_{V_1} \frac{1}{2} \gamma_s |\dot{\mathbf{E}}|^2 dV = 0, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \oint_{S_1} \operatorname{Im} \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*] dS + \int_{V_1} \operatorname{Im} \frac{1}{2} \mathbf{J}_m \dot{\mathbf{H}}^* dV + \int_{V_1} \operatorname{Im} \frac{1}{2} \mathbf{J}_s^* \dot{\mathbf{E}} dV + \\ + \int_{V_1} \frac{1}{2} \omega\mu_a |\dot{\mathbf{H}}|^2 dV - \int_{V_1} \frac{1}{2} \omega\epsilon_a |\dot{\mathbf{E}}|^2 dV = 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Рассмотрим более подробно один из интегралов, входящих в выражение (4.26), в частности интеграл $\int_{V_1} \gamma_3 |\dot{\mathbf{E}}|^2 dV$.

В этом интеграле $|\dot{\mathbf{E}}|^2$ представляет собой *квадрат модуля комплексной амплитуды вектора напряженности электрического поля*. Составим сходный интеграл: $\int_{V_1} \gamma_3 \mathbf{E}^2 dV$, в котором \mathbf{E}^2 представляет собой *квадрат мгновенного значения вектора \mathbf{E}* . Допустим, что вектор \mathbf{E} изменяется по закону $\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos(\omega t + \varphi_E)$. Тогда

$$\int_{V_1} \gamma_3 \mathbf{E}^2 dV + \int_{V_1} \gamma_3 E_m^2 \frac{1 + \cos 2(\omega t + \varphi_E)}{2} dV.$$

Полученное соотношение характеризует мгновенную мощность, теряемую в объеме V_1 на нагревание среды за счет удельной электрической проводимости γ_3 . Усредненную за период мощность можно получить путем следующего интегрирования:

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{V_1} \gamma_3 \mathbf{E}^2 dV dt = \frac{1}{\omega T} \int_0^{2\pi} \int_{V_1} \gamma_3 \mathbf{E}^2 dV d(\omega t),$$

$$\omega = 2\pi f, \quad T = 1/f,$$

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{V_1} \gamma_3 \mathbf{E}^2 dV d(\omega t),$$

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{V_1} \gamma_3 E_m^2 \frac{1 + \cos 2(\omega t + \varphi_E)}{2} dV d(\omega t) = \int_{V_1} \frac{\gamma_3 E_m^2}{2} dV.$$

В рассматриваемом случае комплексная амплитуда $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_m e^{i\varphi_E}$, $|\dot{\mathbf{E}}| = E_m$. Квадрат модуля комплексной амплитуды $|\dot{\mathbf{E}}|^2 = E_m^2$. Следовательно, интеграл

$$\int_{V_1} \frac{1}{2} \gamma_3 |\dot{\mathbf{E}}|^2 dV = \int_{V_1} \frac{\gamma_3 E_m^2}{2} dV$$

представляет собой усредненную за период колебаний мощность, теряемую на нагревание среды.

Интеграл $\oint_{S_1} \text{Re} \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}^*] d\mathbf{S}$ можно рассматривать как активную, усредненную за период колебаний мощность, проходящую через замкнутую поверхность S_1 , а интегралы $\int_{V_1} \text{Re} \frac{1}{2} \mathbf{J}_m \dot{\mathbf{H}}^* dV$ и $\int_{V_1} \text{Re} \frac{1}{2} \mathbf{J}_3 \dot{\mathbf{E}} dV$ — соответственно как усредненные активные мощности, отдаваемые источниками сторонних магнитных и электрических токов в объем V_1 . Наконец, интеграл $\int_{V_1} \frac{1}{2} \gamma_m |\dot{\mathbf{H}}|^2 dV$ можно рассматривать в качестве

усредненной за период колебаний активной мощности, возникающей при наличии удельной магнитной проводимости, или мощности потерь в веществе при воздействии на него магнитного поля.

В ряде случаев, когда магнитная проницаемость вещества является действительной величиной, в соответствии с выражением (1.161) следует полагать $\gamma_m = 0$, т. е. указанная мощность потерь отсутствует.

Первый интеграл в выражении (4.27) характеризует усредненную за период колебаний реактивную мощность, проходящую через поверхность S_1 , второй и третий интегралы — усредненные реактивные мощности источников сторонних магнитного и электрического токов. Эти мощности сходны с реактивной мощностью в теории цепей, возникающей при отсутствии согласования сопротивлений источников с входными сопротивлениями питаемых ими устройств.

Интегралы $\int_{V_1} \frac{1}{2} \omega \mu_a |\dot{\mathbf{H}}|^2 dV$, $\int_{V_1} \frac{1}{2} \omega \epsilon_a |\dot{\mathbf{E}}|^2 dV$ представляют собой усредненные мощности, затраченные на создание магнитного и электрического полей в объеме V_1 . По аналогии с выражением (4.4) векторное произведение

$$\frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}^*] = \dot{\mathbf{\Pi}} \quad (4.28)$$

называют *комплексным вектором Пойнтинга*, который состоит из действительной и мнимой частей.

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}^*] = \dot{\mathbf{\Pi}}_d, \quad (4.29)$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{Im} [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}^*] = \dot{\mathbf{\Pi}}_m. \quad (4.30)$$

Дж. Пойнтинг опубликовал свою работу [13] в 1884 г. В 1874 г. Н. А. Умов [14] ввел понятие потока энергии. Он определил плотность потока энергии как произведение плотности переносимой энергии $\Delta W = dW/dV$ на вектор скорости \mathbf{v} . Эта функция носит название *мгновенного значения вектора Умова*:

$$\Delta W \mathbf{v} = \mathbf{Y}.$$

Н. А. Умов вывел важные соотношения для сил давления, вызываемых потоком энергии. Однако он не занимался вопросом переноса энергии электромагнитного поля в отличие от Пойнтинга. Следует четко представлять, что вектор Пойнтинга и вектор Умова — в общем случае не одно и то же. Эти векторы могут быть равны, если определить долю общей плотности энергии ΔW , участвующей в переносе и составляющей поток электромагнитного поля. Обозначая эту долю ΔW_1 , получим

$$\mathbf{Y}_1 = \Delta W_1 \mathbf{v} = \mathbf{\Pi}.$$

§ 5.1. Постановка вопроса

В предыдущих главах были обоснованы электродинамические уравнения, являющиеся математическим выражением экспериментальных фактов. В данной главе определяются условия, при выполнении которых решение этих уравнений, полученное каким-либо методом, можно считать единственным. Обычно теорема единственности сначала доказывается для ограниченного объема V_1 , окруженного замкнутой поверхностью S_1 , а затем распространяется на неограниченный объем.

§ 5.2. Теорема единственности решения уравнений Максвелла для ограниченного объема

Теорема может быть доказана при соблюдении следующих условий:

- 1) в начальный момент времени $t=0$ заданы значения векторов поля $\mathbf{E}(0)$ и $\mathbf{H}(0)$ в пределах всего ограниченного объема V_1 ;
- 2) на поверхности S_1 , ограничивающей рассматриваемый объем V_1 , заданы значения тангенциальных к S_1 составляющие поля $\mathbf{E}_\tau(t)$ либо $\mathbf{H}_\tau(t)$ в интервале времени t , в течение которого изучаются электродинамические процессы.

Доказательство теоремы проводится от противного. Пусть имеются два различных решения уравнений Максвелла для полей $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ и $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$, удовлетворяющих уравнениям (2.5) и (2.6). Запишем эти уравнения для каждого из двух решений:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_1 = \mathbf{J}_s + \gamma_s \mathbf{E}_1 + \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t}, \quad (5.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_1 = -\mathbf{J}_m - \gamma_m \mathbf{H}_1 - \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t}, \quad (5.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_2 = \mathbf{J}_s + \gamma_s \mathbf{E}_2 + \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial t}, \quad (5.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_2 = -\mathbf{J}_m - \gamma_m \mathbf{H}_2 - \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial t}. \quad (5.4)$$

Уравнение для первого и второго решений записаны для одного и того же объема V_1 . Векторы поля, соответствующие первому и второму решениям, создаются одними и теми же сторонними токами. Вследствие этого параметры среды и возбуждающие токи в записанных уравнениях одни и те же.

В силу справедливости принципа суперпозиции для линейной среды уравнениям (2.5) и (2.6) должно удовлетворять третье, разностное решение:

$$\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{H}_3 = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2. \quad (5.5)$$

Вычитая почленно из уравнения (5.1) уравнение (5.3) и из уравнения (5.2) уравнение (5.4), а также учитывая, что разность роторов двух векторов равна ротору разности этих векторов, получаем следующие соотношения:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \gamma_3(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) + \epsilon_a \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2),$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \gamma_m(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) - \mu_a \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2),$$

или окончательно после подстановки в них выражения (5.5)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_3 = \gamma_3 \mathbf{E}_3 + \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}_3}{\partial t}, \quad (5.6)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_3 = -\gamma_m \mathbf{H}_3 - \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}_3}{\partial t}. \quad (5.7)$$

Как следует из уравнений (5.6), (5.7), третье решение не имеет источников поля и не может быть физически реализовано. Рассмотрим вопрос более строго.

Поскольку в уравнениях Максвелла (5.6), (5.7) отсутствуют сторонние токи, их не будет и в теореме Пойнтинга (4.5), записанной для третьего решения:

$$\oint_{S_1} [\mathbf{E}_3 \mathbf{H}_3] d\mathbf{S} + \int_V \gamma_m H_3^2 dV + \int_V \gamma_3 E_3^2 dV + \\ + \int_{V_1} \mu_a \frac{\partial H_3}{\partial t} H_3 dV + \int_{V_1} \epsilon_a \frac{\partial E_3}{\partial t} E_3 dV = 0. \quad (5.8)$$

Произведение $[\mathbf{E}_3 \mathbf{H}_3] d\mathbf{S}$ представляет собой проекцию вектора Пойнтинга на направление нормали к поверхности S_1 , умноженную на элемент площади dS . Проекция вектора $[\mathbf{E}_3 \mathbf{H}_3]$ на нормаль к поверхности S_1 , или нормальная к S_1 составляющая вектора Пойнтинга, создается тангенциальными к этой поверхности составляющими векторов $\mathbf{E}_{\tau 3}$ и $\mathbf{H}_{\tau 3}$. В силу условия 2), положенного в основу доказательства теоремы единственности на поверхности S_1 , значения тангенциальных составляющих вектора \mathbf{E}_τ либо \mathbf{H}_τ заданы однозначно, следовательно,

$$\mathbf{E}_{\tau 1} = \mathbf{E}_{\tau 2} = \mathbf{E}_\tau,$$

или

$$\mathbf{H}_{\tau 1} = \mathbf{H}_{\tau 2} = \mathbf{H}_\tau, \\ \mathbf{E}_{\tau 3} = \mathbf{E}_{\tau 1} - \mathbf{E}_{\tau 2} = 0, \quad (5.9)$$

или

$$\mathbf{H}_{\tau 3} = \mathbf{H}_{\tau 1} - \mathbf{H}_{\tau 2} = 0. \quad (5.10)$$

Таким образом, при соблюдении условия (5.9) либо (5.10) произведение

$$[\mathbf{E}_3 \mathbf{H}_3] d\mathbf{S} = 0 \quad (5.11)$$

и теорема Пойнтинга (5.8) могут быть записаны таким образом:

$$\int_{V_1} \gamma_m H_3^2 dV + \int_{V_1} \gamma_3 E_3^2 dV + \int_{V_1} \mu_a \frac{\partial H_3}{\partial t} H_3 dV + \int_{V_1} \epsilon_a \frac{\partial E_3}{\partial t} E_3 dV = 0. \quad (5.12)$$

В соответствии с выражением (4.9) последние два интеграла представляют собой мощность магнитного и электрического полей, сосредоточенную в объеме V_1 . Эту мощность можно представить как производную по времени от энергии электромагнитного поля W_3 , накопленной в объеме V_1 :

$$P = \partial W_3 / \partial t. \quad (5.13)$$

Тогда уравнение (5.12) может быть записано в виде

$$\frac{\partial W_3}{\partial t} = - \int_{V_1} \gamma_m H_3^2 dV - \int_{V_1} \gamma_e E_3^2 dV. \quad (5.14)$$

Интегралы в правой части при наличии поля H_3 , E_3 существенно положительны. Следовательно, для справедливости равенства (5.14) необходимо выполнение условия

$$\partial W_3 / \partial t < 0 \quad (5.15)$$

либо

$$\partial W_3 / \partial t = 0. \quad (5.16)$$

В последнем случае поля H_3 , E_3 не существует. По условию 1) доказательства теоремы в начальный момент времени в пределах всего объема V_1 однозначно заданы поля $\mathbf{E}(0)$ и $\mathbf{H}(0)$. Другими словами, в начальный момент времени

$$\mathbf{E}_1(0) = \mathbf{E}_2(0) = \mathbf{E}(0), \quad \mathbf{H}_1(0) = \mathbf{H}_2(0) = \mathbf{H}(0),$$

т. е. в начальный момент времени поля, соответствующего третьему решению, не существует:

$$\mathbf{E}_3(0) = \mathbf{E}_1(0) - \mathbf{E}_2(0) = 0, \quad \mathbf{H}_3(0) = \mathbf{H}_1(0) - \mathbf{H}_2(0) = 0. \quad (5.17)$$

В начальный момент времени энергия электромагнитного поля, соответствующая третьему решению, равна нулю в силу соотношений (5.17). Дальнейшее уменьшение энергии невозможно, следовательно, невозможно соблюдение неравенства (5.15).

Таким образом, приходим к заключению о справедливости неравенства (5.16), что приводит к условию

$$\mathbf{E}_3 = \mathbf{H}_3 = 0, \quad (5.18)$$

или с учетом соотношений (5.5)

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2. \quad (5.19)$$

При соблюдении условий 1) и 2) возможно существование только одного электромагнитного поля, удовлетворяющего уравнениям Максвелла. Таким образом, теорему единственности решения уравнений Максвелла для ограниченного объема V_1 можно считать доказанной.

§ 5.3. Теорема единственности решения уравнений Максвелла для неограниченного объема

В случае неограниченного объема нельзя требовать выполнение условия 2), так как поверхность S_1 находится на бесконечно удаленном расстоянии и задание тангенциальных к этой поверхности составляющих поля невозможно. Условие 2) необходимо для доказательства равенства нулю интеграла $\oint_{S_1} [\mathbf{E}_3 \mathbf{H}_3] d\mathbf{S}$ в теореме Пойнтинга (5.8). Условие 1) может быть задано (обычно в форме нулевого условия, т. е. отсутствия поля в начальный момент времени). Равенство нулю первого интеграла в уравнении (5.8) при неограниченном объеме V_1 сводится к предельному соотношению:

$$\lim_{S_1 \rightarrow \infty} \oint_{S_1} [\mathbf{E}_3 \mathbf{H}_3] d\mathbf{S} = 0. \quad (5.20)$$

Так как площадь S_1 растет пропорционально второй степени расстояния r , то это равенство может быть соблюдено, если убывание векторов поля с расстоянием происходит по закону

$$\mathbf{E}(r) = \mathbf{E}/r^k, \quad \mathbf{H}(r) = \mathbf{H}/r^k, \quad (5.21)$$

где

$$k > 1. \quad (5.22)$$

При этом следует предположить, что все источники поля находятся на конечном расстоянии от начала координат.

При выполнении условий 1) и (5.21), (5.22) доказательство теоремы единственности для неограниченного объема V_1 не отличается от доказательства, проведенного для ограниченного объема. Как будет показано далее, в свободном пространстве без потерь, в котром

$$\gamma_m = \gamma_s = 0, \quad (5.23)$$

векторы поля убывают пропорционально первой степени расстояния. С учетом соотношения (5.23) теорема Пойнтинга (5.8) в этом случае записывается в виде

$$\partial W_3 / \partial t = - \oint_{S_1} [\mathbf{E}_3 \mathbf{H}_3] d\mathbf{S}. \quad (5.24)$$

Так как все источники поля расположены в пределах объема V_1 , то электромагнитное поле распространяется в направлении к поверхности S_1 , и, следовательно, интеграл в правой части положителен или равен нулю. Как указывалось, при соблюдении условия 1) доказательства теоремы производная энергии по времени не может быть отрицательна. Следовательно, справедливо равенство $\partial W_3 / \partial t = 0$, и рост энергии W_3 , соответствующий третьему решению, от первоначального нулевого значения невозможен. Третьего решения не существует.

Для среды с потерями, как будет показано в дальнейшем, соблюдаются условия (5.21), (5.22) и теорема единственности также доказываемая.

Можно предложить еще один ход рассуждений, пригодный в том случае, когда электромагнитные процессы рассматриваются в ограниченном, не бесконечно большом интервале времени. При этом поле, распространяющееся в пространстве с ограниченной световой скоростью, за ограниченный интервал времени не сможет достигнуть бесконечно удаленной поверхности S_1 . Таким образом, если время не бесконечно велико, $\oint_{S_1} [\mathbf{E}_3 \mathbf{H}_3] d\mathbf{S} = 0$.

ГЛАВА 6 ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ ВЕКТОРОВ ПОЛЯ

§ 6.1. Постановка вопроса

Электродинамические уравнения Максвелла представляют собой при заданных сторонних токах и параметрах среды систему двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с двумя неизвестными векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} . Эти уравнения можно решать либо путем исключения одного из двух неизвестных векторов поля с последующим решением дифференциального уравнения в частных производных второго порядка, либо непосредственно. Дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, записанное для мгновенных значений какого-либо из векторов поля, называют *волновым уравнением*, а для комплексных амплитуд — уравнением Гельмгольца.

В этой главе рассматривается методика получения волновых уравнений и уравнений Гельмгольца для векторов поля.

§ 6.2. Волновые уравнения для векторов поля

Система уравнений Максвелла для мгновенных значений векторов поля записывается в форме соотношений (2.5), (2.6).

Для исключения какого-либо из векторов поля, например \mathbf{E} , берут ротор от обеих частей уравнения (2.5), меняя порядок дифференцирования в последнем члене:

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{J}_a + \gamma_a \text{ rot } \mathbf{E} + \epsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \text{ rot } \mathbf{E}. \quad (6.1)$$

При этом параметры среды полагают постоянными, не зависящими от координат.

В приложении I приводится векторное тождество $\text{rot rot } \mathbf{a} = = \text{grad div } \mathbf{a} - \nabla^2 \mathbf{a}$, где ∇^2 — оператор Лапласа.

Применяя это тождество в уравнении (6.1), получаем

$$\text{grad div } \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{J}_a + \gamma_a \text{rot } \mathbf{E} + \epsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{E}.$$

Далее подставляем в это уравнение значение $\text{rot } \mathbf{E}$ из второго уравнения Максвелла (2.6):

$$\begin{aligned} \text{grad div } \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{J}_a + \gamma_a \left(-\mathbf{J}_m - \gamma_m \mathbf{H} - \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) + \\ + \epsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mathbf{J}_m - \gamma_m \mathbf{H} - \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Группируя члены, меняя знаки на обратные и раскрывая скобки, находим

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{H} - \gamma_a \gamma_m \mathbf{H} - \gamma_a \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \gamma_m \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu_a \epsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \text{grad div } \mathbf{H} = \\ = -\text{rot } \mathbf{J}_a + \gamma_a \mathbf{J}_m + \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{J}_m}{\partial t}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{H} - \mu_a \epsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - (\gamma_a \mu_a + \gamma_m \epsilon_a) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \gamma_a \gamma_m \mathbf{H} - \text{grad div } \mathbf{H} = \\ = -\text{rot } \mathbf{J}_a + \gamma_a \mathbf{J}_m + \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{J}_m}{\partial t}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Используя перестановки (2.20), получаем уравнение для вектора \mathbf{E} :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} - \mu_a \epsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - (\gamma_a \mu_a + \gamma_m \epsilon_a) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \gamma_a \gamma_m \mathbf{E} - \text{grad div } \mathbf{E} = \\ = \text{rot } \mathbf{J}_m + \gamma_m \mathbf{J}_a + \mu_a \frac{\partial \mathbf{J}_a}{\partial t}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Решение уравнений (6.2) и (6.3) дает возможность при заданных параметрах среды и сторонних токах определить векторы \mathbf{H} и \mathbf{E} . Эти уравнения записаны с учетом всех потенциально возможных факторов, определяющих электродинамический процесс. Обращает внимание большая сложность правых частей этих уравнений. В дальнейшем будут показаны пути упрощения правых частей, определяющих возбуждение векторов поля.

Для среды без потерь уравнения существенно упрощаются

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu_a \epsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \text{grad div } \mathbf{H} = -\text{rot } \mathbf{J}_a + \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{J}_m}{\partial t}, \quad (6.4)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_a \epsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \text{grad div } \mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{J}_m + \mu_a \frac{\partial \mathbf{J}_a}{\partial t}. \quad (6.5)$$

При отсутствии потерь могут быть легко найдены выражения для $\text{div } \mathbf{H}$ и $\text{div } \mathbf{E}$. При $\gamma_a = \gamma_m = 0$ соотношения (2.7) и (2.8), с учетом формул (1.19) и (1.79) записываются в виде

$$\begin{aligned} \text{div}(\epsilon_a \mathbf{E}) &= \rho_a, \\ \text{div}(\mu_a \mathbf{H}) &= \rho_m, \end{aligned}$$

или

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_a} \rho_a, \quad (6.6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_a} \rho_m. \quad (6.7)$$

Из уравнений непрерывности (2.10) и (2.11) следует, что

$$\rho_a = - \int_0^t \operatorname{div} \mathbf{J}_a dt, \quad (6.8)$$

$$\rho_m = - \int_0^t \operatorname{div} \mathbf{J}_m dt, \quad (6.9)$$

откуда

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = - \frac{1}{\varepsilon_a} \int_0^t \operatorname{div} \mathbf{J}_a dt, \quad (6.10)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = - \frac{1}{\mu_a} \int_0^t \operatorname{div} \mathbf{J}_m dt. \quad (6.11)$$

Подставляя значения $\operatorname{div} \mathbf{H}$ и $\operatorname{div} \mathbf{E}$ в уравнения (6.4), (6.5), получаем волновые уравнения:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = - \frac{1}{\mu_a} \int_0^t \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{J}_m dt - \operatorname{rot} \mathbf{J}_a + \varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{J}_m}{\partial t}, \quad (6.12)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = - \frac{1}{\varepsilon_a} \int_0^t \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{J}_a dt + \operatorname{rot} \mathbf{J}_m + \mu_a \frac{\partial \mathbf{J}_a}{\partial t}. \quad (6.13)$$

Уравнения (6.2), (6.3), (6.12), (6.13) используют в случаях, когда задана система токов и требуется определить векторы поля. Если исследуются процессы распространения электромагнитных волн в среде с заданными параметрами и сторонние токи, возбуждающие поле, находятся за пределами анализируемой части пространства, то правые части указанных уравнений обращаются в нуль.

Уравнения (6.12) и (6.13) при этом записываются в форме известных простейших волновых уравнений:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0, \quad (6.14)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (6.15)$$

В случае статического поля ($\partial/\partial t = 0$) волновые уравнения переходят в уравнения Лапласа:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = 0, \quad (6.16)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = 0. \quad (6.17)$$

Представленные уравнения записаны в общей форме, пригодной для любой системы координат. В конкретной системе координат оператор Лапласа, приложенный к вектору \mathbf{a} , определяют с помощью тождества $\nabla^2 \mathbf{a} = \text{grad div } \mathbf{a} - \text{rot rot } \mathbf{a}$.

В конкретной системе координат вычисляют операторы $\text{grad div } \mathbf{a}$ и $\text{rot rot } \mathbf{a}$, что позволяет найти $\nabla^2 \mathbf{a}$. В приложении I дана формула для $\nabla^2 \mathbf{a}$, записанная в криволинейной ортогональной обобщенной системе координат. Подставляя значение коэффициентов Лямэ, можно получить выражения для $\nabla^2 \mathbf{a}$ в любой из конкретных систем координат.

§ 6.3. Уравнения Гельмгольца для векторов поля

Система уравнений Максвелла для комплексных амплитуд векторов поля записывается в виде соотношений (2.12), (2.13).

Подвергая первое уравнение операции ротора, находим

$$\text{rot rot } \dot{\mathbf{H}} = \text{rot } \dot{\mathbf{J}}_a + j\omega \tilde{\epsilon}_a \text{rot } \dot{\mathbf{E}}.$$

Подставляя значение $\text{rot } \dot{\mathbf{E}}$ из второго уравнения, получаем

$$\text{rot rot } \dot{\mathbf{H}} = \text{rot } \dot{\mathbf{J}}_a + j\omega \tilde{\epsilon}_a (-\dot{\mathbf{J}}_m - j\omega \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}),$$

или

$$\text{rot rot } \dot{\mathbf{H}} = \text{rot } \dot{\mathbf{J}}_a - j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{J}}_m + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{H}}.$$

Используя тождество $\nabla^2 \mathbf{a} = \text{grad div } \mathbf{a} - \text{rot rot } \mathbf{a}$, получаем

$$\text{grad div } \dot{\mathbf{H}} - \nabla^2 \dot{\mathbf{H}} = \text{rot } \dot{\mathbf{J}}_a - j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{J}}_m + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{H}},$$

или после группировки членов

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{H}} - \text{grad div } \dot{\mathbf{H}} = -\text{rot } \dot{\mathbf{J}}_a + j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{J}}_m. \quad (6.18)$$

С помощью выражения (2.15) можно раскрыть вид $\text{div } \dot{\mathbf{H}}$:

$$\text{div } \dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_a} \dot{\rho}_m, \quad (6.19)$$

а из уравнения непрерывности (2.18) найти $\dot{\rho}_m$:

$$\dot{\rho}_m = \frac{j}{\omega} \text{div } \dot{\mathbf{J}}_m.$$

После подстановки $\dot{\rho}_m$ в выражение (6.19) получаем

$$\text{div } \dot{\mathbf{H}} = \frac{j}{\omega \mu_a} \text{div } \dot{\mathbf{J}}_m. \quad (6.20)$$

Подставляя значение $\text{div } \dot{\mathbf{H}}$ в уравнение (6.18) и группируя члены, получаем уравнение Гельмгольца для вектора $\dot{\mathbf{H}}$ в окончательной форме:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{H}} = \frac{j}{\omega \mu_a} \text{grad div } \dot{\mathbf{J}}_m - \text{rot } \dot{\mathbf{J}}_a + j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{J}}_m. \quad (6.21)$$

Уравнение для вектора $\dot{\mathbf{E}}$ можно получить с помощью перестановок (2.19):

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}} = \frac{j}{\omega \tilde{\epsilon}_a} \text{grad div } \dot{\mathbf{J}}_a + \text{rot } \dot{\mathbf{J}}_m + j\omega \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{J}}_a. \quad (6.22)$$

Уравнения (6.21), (6.22) представляют собой уравнения Гельмгольца и являются неоднородными дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка со сложной правой частью.

В случаях, когда исследуются процессы распространения электромагнитных волн и сторонние токи $\dot{\mathbf{J}}_a$ и $\dot{\mathbf{J}}_m$, возбуждающие поле, находятся за пределами анализируемой части пространства, неоднородные уравнения Гельмгольца переходят в однородные уравнения вида

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{H}} = 0, \quad (6.23)$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}} = 0. \quad (6.24)$$

ГЛАВА 7

РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ПРОСТЕЙШЕМ СЛУЧАЕ ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ

§ 7.1. Постановка вопроса

Однородные уравнения Гельмгольца (6.23) и (6.24) выведены в предположении, что среда, в которой распространяются электромагнитные волны, однородна, линейна и изотропна. Эти уравнения записаны в общей векторной форме и их решение можно проводить в любой системе координат. Для этого следует раскрыть оператор Лапласа ∇^2 в конкретной системе координат и представить векторные уравнения Гельмгольца системой скалярных уравнений. Наиболее простой вид оператор Лапласа имеет в декартовой системе координат, что определяет простоту скалярных уравнений, соответствующих уравнению Гельмгольца. Поэтому изучение методов решения уравнений Гельмгольца целесообразно начать, используя декартову систему координат.

§ 7.2. Определение вида скалярных уравнений, соответствующих уравнениям Гельмгольца в декартовой системе координат

В приложении I показан вид операции $\nabla^2 a$ в криволинейной системе координат. Подставляя коэффициенты Лямэ, соответствующие декартовой системе координат, получаем выражение для

операции $\nabla^2 \mathbf{a}$ в этой системе:

$$\nabla^2 a = \mathbf{1}_x \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \right) + \mathbf{1}_y \left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2} \right) + \mathbf{1}_z \left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \right).$$

Подставляя выражение для оператора Лапласа в уравнение (6.23) и представляя вектор $\dot{\mathbf{H}}$ в виде

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{1}_x \dot{H}_x + \mathbf{1}_y \dot{H}_y + \mathbf{1}_z \dot{H}_z, \quad (7.1)$$

получаем

$$\mathbf{1}_x \left(\frac{\partial^2 \dot{H}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_x}{\partial z^2} \right) + \mathbf{1}_y \left(\frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial z^2} \right) + \mathbf{1}_z \left(\frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial z^2} \right) + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a (\mathbf{1}_x \dot{H}_x + \mathbf{1}_y \dot{H}_y + \mathbf{1}_z \dot{H}_z) = 0. \quad (7.2)$$

Приравнивая нулю члены при одинаковых ортах, запишем систему скалярных уравнений для вектора $\dot{\mathbf{H}}$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \dot{H}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_x}{\partial z^2} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{H}_x &= 0, \\ \frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial z^2} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{H}_y &= 0, \\ \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial z^2} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{H}_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

В этой системе налицо разделение функций, т. е. каждое скалярное уравнение содержит только одну составляющую вектора $\dot{\mathbf{H}}$. Заметим, что такое разделение возможно только в прямолинейной (декартовой) системе координат.

Система скалярных уравнений для вектора $\dot{\mathbf{E}}$ записывается аналогично (7.3):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial z^2} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_x &= 0, \\ \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial z^2} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_y &= 0, \\ \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

§ 7.3. Плоские волны

Системы скалярных уравнений (7.3) и (7.4) приобретают наиболее простой вид в случае плоских волн.

Плоской называют волну, распространяющуюся вдоль какой-либо линейной координаты и неизменную в каждый фиксированный момент времени в плоскости, перпендикулярной этой координате.

Строго плоских волн физически не существует, так как фронт такой волны, находящийся в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, должен был бы простирается до бесконечности. В случае источника малых размеров реально существуют сферические волны, которые при больших значениях радиуса в пределах ограниченного участка волны можно рассматривать как плоские. При решении практических задач в ряде случаев представление электромагнитной волны плоской является разумной идеализацией и дает возможность получить ценные сведения о процессе. Допуская, что вектор Пойнтинга плоской волны ориентирован вдоль оси z декартовой системы координат:

$$\dot{\Pi} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*] = \dot{\Pi}_z, \quad (7.5)$$

можно утверждать, что он должен быть создан составляющими поля в плоскости xy . Составляющие поля, ориентированные вдоль оси z , должны отсутствовать. Подобное поле иногда называют поперечным электромагнитным полем или полем типа Т. Поскольку составляющие поля должны быть неизменными в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, т. е. в плоскости xy , производные по этим координатам должны быть равны нулю. Таким образом, можно записать следующие математические условия поставленной задачи:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_z = \dot{H}_z = 0, \quad \dot{E}_x, \dot{E}_y, \dot{H}_x, \dot{H}_y \neq 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

Системы скалярных уравнений (7.3) и (7.4) в частных производных превращаются в обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \dot{H}_x}{dz^2} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{H}_x = 0, \\ \frac{d^2 \dot{H}_y}{dz^2} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{H}_y = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \dot{E}_x}{dz^2} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_x = 0, \\ \frac{d^2 \dot{E}_y}{dz^2} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_y = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

Решение любой пары уравнений, например (7.8), может быть записано в форме

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x = A_1 e^{-\gamma z} + A_2 e^{\gamma z}, \\ \dot{E}_y = B_1 e^{-\gamma z} + B_2 e^{\gamma z}, \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

где

$$\gamma = \omega \sqrt{\tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a} \quad (7.10)$$

— коэффициент распространения.

Если среда обладает электрическими или магнитными потерями, проницаемости ϵ_a или μ_a являются комплексными величинами и, следовательно, комплексен коэффициент распространения γ . Если первоначально было записано решение уравнений (7.8) и введены постоянные интегрирования A и B , то при записи решений уравнений (7.7) не следует вводить новых постоянных интегрирования в силу того, что векторы поля $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ связаны уравнениями Максвелла и решение уравнений (7.7) может быть записано с помощью известных решений для составляющих поля \dot{E}_x, \dot{E}_y . Процесс отыскания решений для составляющих поля \dot{H}_x, \dot{H}_y базируется на уравнениях Максвелла (2.12), (2.13).

Принципиально для отыскания вектора $\dot{\mathbf{H}}$ при известном векторе $\dot{\mathbf{E}}$ можно использовать любое из этих уравнений. При использовании уравнения (2.12), в котором вектор $\dot{\mathbf{H}}$ находится под знаком дифференциального оператора — ротора, пришлось бы решать дифференциальное уравнение для определения вектора $\dot{\mathbf{H}}$. Применяя уравнение (2.13), необходимо взять только ротор известного решения, что сделать достаточно просто. Поэтому для отыскания вектора $\dot{\mathbf{H}}$ по известному вектору $\dot{\mathbf{E}}$ целесообразно применять второе уравнение Максвелла, а для отыскания вектора $\dot{\mathbf{E}}$ по найденному вектору $\dot{\mathbf{H}}$ — первое уравнение Максвелла.

В случае плоских волн сторонние токи отсутствуют и система уравнений Максвелла должна быть записана в виде

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}, \quad (7.11)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}. \quad (7.12)$$

Из уравнения (7.12) следует, что

$$\dot{\mathbf{H}} = -\frac{1}{j\omega \tilde{\mu}_a} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}. \quad (7.13)$$

В приложении I дано следующее выражение для ротора в декартовой системе координат:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{1}_x \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \mathbf{1}_y \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \mathbf{1}_z \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right).$$

С учетом соотношений (7.6) можно записать выражение для $\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}$:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -\mathbf{1}_x \frac{d\dot{E}_y}{dz} + \mathbf{1}_y \frac{d\dot{E}_x}{dz}.$$

Подставляя значение $\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}$ в (7.13), получаем формулу для вектора $\dot{\mathbf{H}}$:

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{1}_x \frac{1}{j\omega \tilde{\mu}_a} \cdot \frac{d\dot{E}_y}{dz} - \mathbf{1}_y \frac{1}{j\omega \tilde{\mu}_a} \cdot \frac{d\dot{E}_x}{dz}. \quad (7.14)$$

Следует обратить внимание на то, что составляющая поля \dot{H}_x формируется за счет ортогональной к ней составляющей \dot{E}_y , а составляющая поля \dot{H}_y — ортогональной к ней составляющей \dot{E}_x . Составляющие поля \dot{H}_x , \dot{E}_y и \dot{H}_y , \dot{E}_x образуют векторы Пойнтинга, направленные вдоль оси z , определяющие распространение электромагнитных волн в заданном направлении. Используя выражения (7.14) и (7.9), можно получить соотношение для составляющей поля \dot{H}_x :

$$\dot{H}_x = \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a} (-j\gamma B_1 e^{-\gamma z} + j\gamma B_2 e^{j\gamma z}).$$

Подставляя значение γ (7.10), получаем

$$\dot{H}_x = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mu}_a/\tilde{\epsilon}_a}} (-B_1 e^{-\gamma z} + B_2 e^{j\gamma z}).$$

Далее, вводя обозначение

$$Z_c = \sqrt{\tilde{\mu}_a/\tilde{\epsilon}_a}, \quad (7.15)$$

выражение для \dot{H}_x можно переписать в виде

$$\dot{H}_x = \frac{1}{Z_c} (-B_1 e^{-\gamma z} + B_2 e^{j\gamma z}). \quad (7.16)$$

Аналогично находят соотношение для составляющей поля \dot{H}_y :

$$\dot{H}_y = \frac{1}{Z_c} (A_1 e^{-\gamma z} - A_2 e^{j\gamma z}). \quad (7.17)$$

Определим единицы измерения величины Z_c :

$$Z_c = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_a}{\tilde{\epsilon}_a}} \rightarrow \sqrt{\frac{\Gamma_H \cdot M}{M \cdot \Phi}} = \sqrt{\frac{\Gamma_H}{\Phi}}.$$

В силу того что $\omega L \rightarrow \text{Ом} = \Gamma_H/\text{с}$ и $\frac{1}{\omega C} \rightarrow \text{Ом} = \text{с}/\Phi$,

$$\Gamma_H = \text{Ом} \cdot \text{с} \text{ и } \Phi = \text{с}/\text{Ом}.$$

Следовательно,

$$Z_c \rightarrow \sqrt{\frac{\Gamma_H}{\Phi}} = \sqrt{\frac{\text{Ом} \cdot \text{с} \cdot \text{Ом}}{\text{с}}} = \text{Ом}. \quad (7.18)$$

Величина Z_c измеряется в омах и называется *характеристическим сопротивлением среды*.

Подставив выражения (1.159) и (1.161) в формулу (7.15), получаем

$$Z_c = \sqrt{\frac{j\tilde{\mu}_a}{\tilde{\epsilon}_a}} = \sqrt{\frac{\mu_a - j\frac{\gamma_M}{\omega}}{\epsilon_a - j\frac{\gamma_D}{\omega}}}. \quad (7.19)$$

Представив $\tilde{\epsilon}_a$ и $\tilde{\mu}_a$ в виде

$$\tilde{\epsilon}_a = |\tilde{\epsilon}_a| e^{-j\alpha_\epsilon}, \quad \tilde{\mu}_a = |\tilde{\mu}_a| e^{-j\alpha_\mu}, \quad (7.20)$$

где

$$|\tilde{\epsilon}_a| = \sqrt{\epsilon_a^2 + \left(\frac{\gamma_a}{\omega}\right)^2}, \quad \alpha_\epsilon = \arctg \frac{\gamma_a}{\omega \epsilon_a}, \quad (7.21)$$

$$|\tilde{\mu}_a| = \sqrt{\mu_a^2 + \left(\frac{\gamma_\mu}{\omega}\right)^2}, \quad \alpha_\mu = \arctg \frac{\gamma_\mu}{\omega \mu_a}, \quad (7.22)$$

находим

$$Z_c = \sqrt{\frac{|\tilde{\mu}_a| e^{-j\alpha_\mu}}{|\tilde{\epsilon}_a| e^{-j\alpha_\epsilon}}} = \sqrt{\frac{|\tilde{\mu}_a|}{|\tilde{\epsilon}_a|}} e^{-j \frac{\alpha_\mu - \alpha_\epsilon}{2}}. \quad (7.23)$$

В среде с потерями волновое сопротивление является комплексной величиной. Углы α_μ и α_ϵ называются *углами магнитных и электрических потерь*.

Как следует из формул (7.9), (7.16), поведение плоских волн в значительной степени определяется коэффициентом распространения γ . С учетом выражений (7.10), (7.20) можно записать

$$\gamma = \omega \sqrt{\tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a} = \omega \sqrt{|\tilde{\mu}_a| |\tilde{\epsilon}_a| e^{-j(\alpha_\mu + \alpha_\epsilon)}} = \omega \sqrt{|\tilde{\mu}_a| |\tilde{\epsilon}_a|} e^{-j \frac{\alpha_\mu + \alpha_\epsilon}{2}}, \quad (7.24)$$

или

$$\gamma = \omega \sqrt{|\tilde{\mu}_a| |\tilde{\epsilon}_a|} \left(\cos \frac{\alpha_\mu + \alpha_\epsilon}{2} - j \sin \frac{\alpha_\mu + \alpha_\epsilon}{2} \right). \quad (7.25)$$

Таким образом, в общем случае коэффициент распространения является комплексным. Как всякая комплексная величина, он может быть представлен суммой действительной и мнимой частей:

$$\gamma = \beta - j\alpha, \quad (7.26)$$

где

$$\beta = \omega \sqrt{|\tilde{\mu}_a| |\tilde{\epsilon}_a|} \cos \frac{\alpha_\mu + \alpha_\epsilon}{2} \quad (7.27)$$

— фазовая постоянная, а

$$\alpha = \omega \sqrt{|\tilde{\mu}_a| |\tilde{\epsilon}_a|} \sin \frac{\alpha_\mu + \alpha_\epsilon}{2} \quad (7.28)$$

— постоянная затухания, или амплитудная постоянная.

Смысл этих названий становится ясным после подстановки равенства (7.26) в какое-либо из выражений для составляющих поля, например в выражение для \dot{E}_x (7.9):

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= A_1 e^{-\gamma z} + A_2 e^{\gamma z} = A_1 e^{-j(\beta - j\alpha)z} + \\ &+ A_2 e^{j(\beta - j\alpha)z} = A_1 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + A_2 e^{\alpha z} e^{j\beta z}. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Из этого выражения следует, что коэффициент α влияет на амплитуду составляющих поля, а коэффициент β определяет фазу колебания. Как видно из выражений (7.21), (7.22), для среды с потерями модули $|\tilde{\epsilon}_a|$, $|\tilde{\mu}_a|$ и углы потерь α_ϵ , α_μ являются функциями частоты ω . Следовательно, функцией частоты является коэффициент распространения γ .

Полученные решения для составляющих поля содержат два слагаемых с двумя постоянными интегрированиями. Математически это определяется тем, что решались дифференциальные уравнения второго порядка. Необходимо выяснить физический смысл каждого из слагаемых. Для этого целесообразно перейти от комплексных амплитуд к мгновенным значениям векторов поля. Такой переход может быть осуществлен с помощью формул (1.157). Положив в основу рассуждений выражение (7.29), получим

$$E_x(t) = \operatorname{Re}(\dot{E}_x e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(A_1 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\omega t} + A_2 e^{\alpha z} e^{j\beta z} e^{j\omega t}) = \\ = A_1 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) + A_2 e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z). \quad (7.30)$$

Рассмотрим аргументы косинусов $\omega t - \beta z$ и $\omega t + \beta z$. Зафиксируем время $t = t_1$ и точку на оси $z = z_1$. Тогда первый аргумент или фаза примет значение $\omega t_1 - \beta z_1$ и второй аргумент — соответственно $\omega t_1 + \beta z_1$. Давая времени t приращение dt , найдем, на какое расстояние dz переместятся точки с фазами $\omega t_1 - \beta z_1$ и $\omega t_1 + \beta z_1$, т. е. потребуем соблюдения равенств:

$$\omega(t_1 + dt) - \beta(z_1 + dz) = \omega t_1 - \beta z_1, \\ \omega(t_1 + dt) + \beta(z_1 + dz) = \omega t_1 + \beta z_1.$$

Сокращая одинаковые члены, получаем

$$\omega dt - \beta dz = 0, \quad \omega dt + \beta dz = 0,$$

откуда

$$dz/dt = \omega/\beta \quad \text{и} \quad dz/dt = -\omega/\beta.$$

Производные $dz/dt = v_\Phi$ представляют собой скорость перемещения фиксированного значения фазы вдоль оси z . Эту скорость называют *фазовой скоростью*. Фазовая скорость, соответствующая фазе $\omega t - \beta z$, определяется выражением

$$v_\Phi = \omega/\beta. \quad (7.31)$$

Эта скорость положительна, т. е. первое слагаемое в выражении (7.30) соответствует волне, распространяющейся в сторону положительных значений оси z . Это так называемая *падающая волна*. В среде с потерями амплитуда этой волны убывает по мере продвижения по закону $e^{-\alpha z}$.

Подставляя общее выражение для β (7.27) в формулу (7.31), получаем

$$v_\Phi = \frac{\omega}{\omega \sqrt{|\tilde{\mu}_a| |\tilde{\epsilon}_a| \cos \frac{\alpha_\epsilon + \alpha_\mu}{2}}},$$

или

$$v_\Phi = \frac{1}{\sqrt{|\tilde{\mu}_a| |\tilde{\epsilon}_a| \frac{\alpha_\epsilon + \alpha_\mu}{2}}}. \quad (7.32)$$

Для среды с потерями знаменатель этого выражения зависит от частоты ω .

Таким образом, в средах, обладающих дисперсией, фазовая скорость является функцией частоты.

Фазовая скорость, соответствующая фазе $\omega t + \beta z$, определяется выражением

$$v_{\phi} = -\omega/\beta. \quad (7.33)$$

Эта скорость отрицательна, т. е. второе слагаемое в выражении (7.30) соответствует волне, распространяющейся в сторону отрицательных значений оси z . Это так называемая *отраженная волна*. Она возникает тогда, когда на пути падающей волны существует препятствие, отражающее всю волну или ее часть в обратном направлении. Если препятствия нет, то нет и отраженной волны. Постоянная интегрирования A_2 при этом должна равняться нулю. Существует лишь одна падающая волна. При возникновении отраженной волны ее амплитуда $A_2 e^{\alpha z_0}$, где z_0 — координата отражающего препятствия, определяется амплитудой падающей волны $A_1 e^{-\alpha z_0}$ и условиями отражения. При этом справедливо соотношение

$$A_2 e^{\alpha z_0} = M^{\circ} A_1 e^{-\alpha z_0}. \quad (7.34)$$

Коэффициент M° , который в общем случае является комплексной величиной, называют *коэффициентом отражения*.

В поглощающей среде амплитуда отраженной волны должна быть наибольшей у отражающего препятствия и уменьшается по мере удаления от него, т. е. по мере уменьшения координаты z . Это определяется множителем $e^{\alpha z}$, который имеет наибольшее значение при максимальном значении координаты $z = z_0$, соответствующем месту расположения отражающего препятствия. Указанный множитель уменьшается по мере уменьшения координаты z , т. е. по мере распространения отраженной волны в обратную сторону — к началу координат.

С помощью соотношения (7.34) постоянную интегрирования A_2 можно выразить через постоянную A_1 , если известен коэффициент отражения M° . Тогда в выражении (7.30) для составляющей поля E_x остается неизвестной лишь одна постоянная интегрирования A_1 , являющаяся амплитудной постоянной, которую принципиально невозможно определить, поскольку в исходные уравнения Гельмгольца не были введены сторонние токи.

§ 7.4. Групповая скорость

Как известно, с помощью монохроматического колебания нельзя передавать информацию. Передача информации неизбежно связана с модуляцией и спектром частот. Спектр частот может быть дискретным или непрерывным в зависимости от вида модуляции и сигнала. Скорость распространения группы электромагнитных волн, обладающих спектром частот, несущих передаваемую информацию, называют *групповой скоростью*.

Групповая скорость в случае дискретного спектра частот. В случае дискретного спектра частот комплексные амплитуды векторов поля содержат ряд различных частотных составляющих. Комплексная амплитуда вектора $\dot{\mathbf{E}}_x$ падающей волны при этом с учетом выражения (7.29) записывается в виде формы

$$\dot{\mathbf{E}}_x = \dot{\mathbf{E}}_{x_0} e^{-\alpha_0 z} e^{-j\beta_0 z} + \dot{\mathbf{E}}_{x_1} e^{-\alpha_1 z} e^{-j\beta_1 z} + \dot{\mathbf{E}}_{x_2} e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} + \dots \\ \dots + \dot{\mathbf{E}}_{x_n} e^{-\alpha_n z} e^{-j\beta_n z} \quad (7.35)$$

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ — постоянные затухания и фазовые постоянные, определяемые формулами (7.27), (7.28) и соответствующие частотам дискретного спектра $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$.

Для перехода от комплексных амплитуд к мгновенным значениям векторов используют формулы вида (1.157). При этом выражение (7.35) переходит в соотношение

$$\mathbf{E}_x(t) = \text{Re} \left\{ \dot{\mathbf{E}}_{x_0} e^{-\alpha_0 z} e^{-j\beta_0 z} e^{j\omega_0 t} + \dot{\mathbf{E}}_{x_1} e^{-\alpha_1 z} e^{-j\beta_1 z} e^{j\omega_1 t} + \right. \\ \left. + \dot{\mathbf{E}}_{x_2} e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} e^{j\omega_2 t} + \dots + \dot{\mathbf{E}}_{x_n} e^{-\alpha_n z} e^{-j\beta_n z} e^{j\omega_n t} \right\} = \\ = \text{Re} \left\{ \dot{\mathbf{E}}_{x_0} e^{-\alpha_0 z} e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} + \dot{\mathbf{E}}_{x_1} e^{-\alpha_1 z} e^{j(\omega_1 t - \beta_1 z)} + \right. \\ \left. + \dot{\mathbf{E}}_{x_2} e^{-\alpha_2 z} e^{j(\omega_2 t - \beta_2 z)} + \dots + \dot{\mathbf{E}}_{x_n} e^{-\alpha_n z} e^{j(\omega_n t - \beta_n z)} \right\}.$$

Выделяя в качестве множителя колебание основной частоты спектра ω_0 , получаем

$$\mathbf{E}_x(t) = \text{Re} \left\{ e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} \left[\dot{\mathbf{E}}_{x_0} e^{-\alpha_0 z} + \dot{\mathbf{E}}_{x_1} e^{-\alpha_1 z} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times e^{j\{(\omega_1 - \omega_0)t - (\beta_1 - \beta_0)z\}} + \dot{\mathbf{E}}_{x_2} e^{-\alpha_2 z} e^{j\{(\omega_2 - \omega_0)t - (\beta_2 - \beta_0)z\}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \dots + \dot{\mathbf{E}}_{x_n} e^{-\alpha_n z} e^{j\{(\omega_n - \omega_0)t - (\beta_n - \beta_0)z\}} \right] \right\}. \quad (7.36)$$

Вводя обозначение

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{E}}_{x_0} e^{-\alpha_0 z} + \dot{\mathbf{E}}_{x_1} e^{-\alpha_1 z} e^{j\{(\omega_1 - \omega_0)t - (\beta_1 - \beta_0)z\}} + \\ + \dot{\mathbf{E}}_{x_2} e^{-\alpha_2 z} e^{j\{(\omega_2 - \omega_0)t - (\beta_2 - \beta_0)z\}} + \dots + \\ + \dot{\mathbf{E}}_{x_n} e^{-\alpha_n z} e^{j\{(\omega_n - \omega_0)t - (\beta_n - \beta_0)z\}} = \dot{\mathbf{F}}, \quad (7.37)$$

получаем

$$\dot{\mathbf{E}}_x = \text{Re} \left\{ \dot{\mathbf{F}} e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} \right\}. \quad (7.38)$$

Составляющие поля, несущие информацию, связаны с частотами спектра $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. Эти составляющие заключены в векторе $\dot{\mathbf{F}}$. Определим скорость распространения этого вектора вдоль оси z .

Функцию $\dot{\mathbf{F}}$ можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{E}}_{x_0} e^{-\alpha_0 z} + \dot{\mathbf{E}}_{x_1} e^{-\alpha_1 z} e^{j(\beta_1 - \beta_0) \left(\frac{\omega_1 - \omega_0}{\beta_1 - \beta_0} t - z \right)} + \\ + \dot{\mathbf{E}}_{x_2} e^{-\alpha_2 z} e^{j(\beta_2 - \beta_0) \left(\frac{\omega_2 - \omega_0}{\beta_2 - \beta_0} t - z \right)} + \dots + \\ + \dot{\mathbf{E}}_{x_n} e^{-\alpha_n z} e^{j(\beta_n - \beta_0) \left(\frac{\omega_n - \omega_0}{\beta_n - \beta_0} t - z \right)}, \quad (7.39)$$

где фазовая постоянная β определяется выражением (7.27).

В некотором приближении коэффициент β можно считать пропорциональным частоте ω . Тогда при достаточно узком спектре может быть записано следующее приближенное равенство дробей:

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{\beta_1 - \beta_0} \approx \frac{\omega_2 - \omega_0}{\beta_2 - \beta_0} \approx \dots \approx \frac{\omega_n - \omega_0}{\beta_n - \beta_0} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} \approx \left. \frac{d\omega}{d\beta} \right|_{\omega=\omega_0, \beta=\beta_0}. \quad (7.40)$$

С некоторой степенью точности эти дроби можно приравнять производной $d\omega/d\beta$, взятой при $\omega = \omega_0$, $\beta = \beta_0$. Легко определить единицы измерения этой производной:

$$\frac{d\omega}{d\beta} = \frac{m}{c}.$$

Производная $d\omega/d\beta$ измеряется в тех же единицах, что и скорость. Вводя обозначение

$$\left. \frac{d\omega}{d\beta} \right|_{\omega=\omega_0, \beta=\beta_0} = v_{\text{гp}} \quad (7.41)$$

и используя его в выражении (7.39), получаем

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{E}}_{x_0} e^{-\alpha_0 z} + \dot{\mathbf{E}}_{x_1} e^{-\alpha_1 z} e^{j(\beta_1 - \beta_0)(v_{\text{гp}} t - z)} + \dot{\mathbf{E}}_{x_2} e^{-\alpha_2 z} e^{j(\beta_2 - \beta_0)(v_{\text{гp}} t - z)} + \dots + \dot{\mathbf{E}}_{x_n} e^{-\alpha_n z} e^{j(\beta_n - \beta_0)(v_{\text{гp}} t - z)}. \quad (7.42)$$

Зависимость функции $\dot{\mathbf{F}}$, заключающей в себе передаваемую информацию, от координаты z определяется разностью $v_{\text{гp}} t - z$.

Зафиксируем время $t = t_1$ и точку на оси $z = z_1$. Тогда разность $v_{\text{гp}} t - z$ получит определенное значение $v_{\text{гp}} t_1 - z_1$. Дадим времени t_1 приращение dt и определим новое положение точки на оси $z + dz$, при котором значение разности останется прежним. Для этого составим равенство

$$v_{\text{гp}}(t_1 + dt) - (z_1 + dz) = v_{\text{гp}} t_1 - z_1,$$

откуда

$$v_{\text{гp}} dt = \overline{dz}, \quad dz/dt = v_{\text{гp}}. \quad (7.43)$$

Таким образом, $v_{\text{гp}}$ определяет скорость перемещения фиксированных значений функции $\dot{\mathbf{F}}$ вдоль оси z . Говоря иначе, $v_{\text{гp}}$ определяет скорость перемещения вдоль оси z группы составляющих спектра частот, несущего информацию. Поэтому величина $v_{\text{гp}}$ получила название групповой скорости.

Фазовая скорость определяется соотношением (7.31). Если среда не обладает дисперсией, то фазовая скорость не зависит от частоты ω . При этом для частот спектра $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ справедливо соотношение

$$v_{\Phi} = \text{const} = \frac{\omega_0}{\beta_0} = \frac{\omega_1}{\beta_1} = \frac{\omega_2}{\beta_2} = \dots = \frac{\omega_n}{\beta_n}, \quad (7.44)$$

откуда

$$\omega_0 = v_{\Phi} \beta_0, \quad \omega_1 = v_{\Phi} \beta_1, \quad \omega_2 = v_{\Phi} \beta_2, \quad \dots, \quad \omega_n = v_{\Phi} \beta_n. \quad (7.45)$$

Подставляя выражение (7.45) в (7.40), получаем

$$\frac{v_{\Phi}(\beta_1 - \beta_0)}{\beta_1 - \beta_0} = \frac{v_{\Phi}(\beta_2 - \beta_0)}{\beta_2 - \beta_0} = \dots = \frac{v_{\Phi}(\beta_n - \beta_0)}{\beta_n - \beta_0} = \frac{d\omega}{d\beta} \Big|_{\substack{\omega=\omega_0 \\ \beta=\beta_0}} = v_{\text{гp}}.$$

Отсюда следует, что $v_{\Phi} = v_{\text{гp}}$, т. е. в среде, не обладающей дисперсией, групповая скорость равна фазовой скорости.

Групповая скорость в случае непрерывного спектра частот. В случае непрерывного спектра частот векторы поля могут быть представлены с помощью обратного преобразования Фурье (1.29). Для плоской волны аргумент ωt в показателе степени заменяется на $\omega t - \beta z$ и обратное преобразование Фурье записывается в форме

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_E(\omega) e^{j(\omega t - \beta z)} d\omega. \quad (7.46)$$

В случае диспергирующей среды фазовая постоянная β является функцией частоты ω . В силу этого β может быть разложена в ряд относительно основной частоты ω_0 . Если спектр узкий, то в разложении можно ограничиться двумя первыми членами ряда:

$$\beta \approx \beta_0 + \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right) \Big|_{\substack{\omega=\omega_0 \\ \beta=\beta_0}} (\omega - \omega_0). \quad (7.47)$$

Используя соотношение (7.41), получаем

$$\beta \approx \beta_0 + \frac{\omega - \omega_0}{v_{\text{гp}}}. \quad (7.48)$$

Тогда

$$\begin{aligned} e^{j(\omega t - \beta z)} &= e^{j\left(\omega_0 t - \omega_0 t + \omega t - \beta_0 z - \frac{\omega - \omega_0}{v_{\text{гp}}} z\right)} = \\ &= e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} e^{j\left(\omega t - \omega_0 t - \frac{\omega - \omega_0}{v_{\text{гp}}} z\right)} = e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} e^{j(\omega - \omega_0)\left(t - \frac{z}{v_{\text{гp}}}\right)} = \\ &= e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} e^{j\frac{\omega - \omega_0}{v_{\text{гp}}}(v_{\text{гp}} t - z)}. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Подставим соотношение (7.49) в (7.46)

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_E(\omega) e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} e^{j\frac{\omega - \omega_0}{v_{\text{гp}}}(v_{\text{гп}} t - z)} d\omega. \quad (7.50)$$

Введем обозначение

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(\omega) e^{j\frac{\omega - \omega_0}{v_{\text{гп}}}(v_{\text{гп}} t - z)} d\omega = \mathbf{F}_1(v_{\text{гп}} t - z). \quad (7.51)$$

Тогда выражение (7.50) можно представить в виде

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{F}_1(v_{\text{гп}} t - z) e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)}.$$

Функция $\mathbf{F}_1(v_{\text{гп}} t - z)$ играет роль амплитуды колебания, несущей информацию.

Точки фиксированного значения функции $F_1(v_{гр}t - z)$ перемещаются вдоль оси z со скоростью $v_{гр}$.

Таким образом, в случае дискретного и непрерывного спектров частот скорость передачи информации вдоль оси z равна групповой скорости, определяемой формулой (7.41).

§ 7.5. Распространение плоских волн в различных средах

Рассмотрим распространение плоских волн в трех характерных средах: вакууме, среде с потерями и металле.

Распространение плоских волн в вакууме. В вакууме $\tilde{\mu}_a = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м, $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$ Ф/м

$$\gamma = \omega \sqrt{\tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \beta, \quad \alpha = 0. \quad (7.52)$$

Таким образом, в вакууме плоская волна не испытывает затухания. Фазовая скорость

$$v_\phi = \omega/\beta = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} = c_0, \quad (7.53)$$

где c_0 — скорость света в вакууме.

В вакууме фазовая скорость равна скорости света и не зависит от частоты, следовательно, вакуум является недиспергирующей средой. Групповая скорость

$$v_{гр} = \left. \frac{d\omega}{d\beta} \right|_{\substack{\omega=\omega_0 \\ \beta=\beta_0}} = \left. \frac{1}{d\beta/d\omega} \right|_{\substack{\omega=\omega_0 \\ \beta=\beta_0}} = \frac{1}{d/d\omega (\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0})} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = v_\phi.$$

В вакууме, как и должно быть, в случае недиспергирующей среды групповая скорость равна фазовой скорости.

Если вакуум заменен идеальным диэлектриком с параметрами ϵ_a, μ_a , то коэффициент распространения

$$\gamma = \beta = \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a}, \quad (7.54)$$

а фазовая и групповая скорости равны друг другу:

$$v_\phi = v_{гр} = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu \epsilon}} = c. \quad (7.55)$$

Здесь c — скорость света в среде с параметрами μ_a, ϵ_a .

Распространение плоских волн в среде с потерями. Для среды с потерями справедливы соотношения (7.27), (7.28). Электромагнитная волна испытывает затухание, определяемое величиной потерь.

Фазовая скорость

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{|\tilde{\mu}_a| |\tilde{\epsilon}_a| \cos \frac{\alpha_\mu + \alpha_\epsilon}{2}}}. \quad (7.56)$$

Поскольку все величины в формуле (7.56) являются функциями частоты, фазовая скорость также является функцией частоты, что указывает на существование дисперсии.

Групповая скорость

$$v_{\text{гр}} = \left. \frac{d\omega}{d\beta} \right|_{\substack{\omega=\omega_0 \\ \beta=\beta_0}} = \frac{1}{\left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\substack{\omega=\omega_0 \\ \beta=\beta_0}}} = \frac{1}{d/d\omega \left(\omega \sqrt{|\tilde{\mu}_a| |\tilde{\epsilon}_a| \cos \frac{\alpha_\mu + \alpha_\epsilon}{2}} \right)} \quad (\text{при } \omega = \omega_0). \quad (7.57)$$

Групповая скорость в этом случае не равна фазовой. Зависимость фазовой скорости от частоты приводит к различным скоростям распространения фазы составляющих частотного спектра, в результате чего сигнал в среде с потерями испытывает искажения.

В дальнейшем будет показана возможность существования электродинамических сред, не обладающих потерями, но являющихся диспергирующими.

Распространение плоских волн в металлах. Для хорошо проводящих металлов, даже при самых высоких частотах, используемых в настоящее время в радиотехнике, соблюдается неравенство

$$\gamma_a / \omega \gg \epsilon_a = \epsilon_0. \quad (7.58)$$

Покажем справедливость этого утверждения, взяв в качестве примера медь и колебание с длиной волны $\lambda = 1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}$.

Для меди ($\gamma_a \approx 5 \cdot 10^7 \text{ См/м}$)

$$\frac{\gamma_a}{\omega} = \frac{5 \cdot 10^7}{6,28 \cdot 3 \cdot 10^{11}} = 2,65 \cdot 10^{-5} \gg \epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}.$$

Таким образом, с большой степенью точности можно считать, что

$$\tilde{\epsilon}_a = -j \frac{\gamma_a}{\omega}. \quad (7.59)$$

Тогда постоянная распространения при $\tilde{\mu}_a = \mu_a$:

$$\gamma = \omega \sqrt{\mu_a \left(-j \frac{\gamma_a}{\omega} \right)} = \sqrt{-j \omega \mu_a \gamma_a}.$$

Так как $-j = e^{-j \frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} - j \sin \frac{\pi}{2}$, то

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{\omega \mu_a \gamma_a e^{-j \frac{\pi}{2}}} = \sqrt{\omega \mu_a \gamma_a} e^{-j \frac{\pi}{4}} = \sqrt{\omega \mu_a \gamma_a} \left(\cos \frac{\pi}{4} - j \sin \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \sqrt{\omega \mu_a \gamma_a} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \end{aligned}$$

и окончательно

$$\gamma = \sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma_a}{2}} (1 - j). \quad (7.60)$$

Для металлов справедливо равенство

$$\beta = \alpha = \sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma_a}{2}}. \quad (7.61)$$

Фазовая скорость

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma_a}{2}}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_a \gamma_a}}. \quad (7.62)$$

Групповая скорость

$$v_{гр} = \frac{1}{\frac{d\beta}{d\omega}} \Big|_{\substack{\omega=\omega_0 \\ \beta=\beta_0}} = \frac{1}{\frac{d}{d\omega} \left(\sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma_a}{2}} \right)} \quad (\text{при } \omega = \omega_0),$$

или после дифференцирования

$$v_{гр} = 2 \sqrt{\frac{2\omega_0}{\mu_a \gamma_a}}. \quad (7.63)$$

Таким образом, групповая скорость в два раза выше фазовой. При

$$\gamma_a \rightarrow \infty \quad \alpha \rightarrow \infty. \quad (7.64)$$

В идеально проводящем металле затухание поля бесконечно велико, вследствие чего поле равно нулю. При

$$\gamma_a \rightarrow \infty \quad \mathbf{E}; \mathbf{H} \rightarrow 0. \quad (7.65)$$

На основании соотношения (7.58) в металле можно пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости и первое уравнение Максвелла (2.12) записать в виде

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{J}_a + j\omega \left(\epsilon_0 - j \frac{\gamma_a}{\omega} \right) \dot{\mathbf{E}} \approx \mathbf{J}_a + \gamma_a \dot{\mathbf{E}}. \quad (7.66)$$

Рассматривая в качестве поля $\dot{\mathbf{H}}$ составляющую $\dot{\mathbf{H}}_y$ падающей волны (7.17), можно написать

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_y &= 1y \frac{A_1}{Z_c} e^{-i\gamma z}, \\ \text{rot } \dot{\mathbf{H}}_y &= -1_x \frac{\partial \dot{\mathbf{H}}_y}{\partial z} = \frac{-1_x A_1}{Z_c} (-j) \gamma e^{-i\gamma z}. \end{aligned} \quad (7.67)$$

Подставляя значение $\text{rot } \dot{\mathbf{H}}_y$ в уравнение (7.66), получаем

$$j \frac{A_1}{Z_c} \gamma e^{-i\gamma z} = \mathbf{J}_{ax} + \gamma_a \dot{\mathbf{E}}_x,$$

или

$$j \frac{A_1}{Z_c} (\beta - j\alpha) e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} = j_{\text{эx}} + \gamma_{\text{э}} \dot{E}_x. \quad (7.68)$$

В правой части выражения (7.68) находится сумма плотностей стороннего электрического тока и тока проводимости. Плотности тока убывают, так же как и поле, по закону $e^{-\alpha z}$. Однако в силу того, что в левой части α является множителем, невозможно сразу сказать, как будут изменяться плотности токов при стремлении α к бесконечности в идеальном металле.

Для выяснения поведения плотностей токов преобразуем выражение (7.68). Прежде всего с помощью выражений (7.15) и (7.59) определим вид характеристического сопротивления Z_c для металлов:

$$Z_c = Z_m \sqrt{\frac{\bar{\mu}_a}{\bar{\epsilon}_a}} \approx \sqrt{\frac{\mu_a}{-j \frac{\gamma_{\text{э}}}{\omega}}} = \sqrt{\frac{j \mu_a \omega}{\gamma_{\text{э}}}} = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2 \gamma_{\text{э}}}} (1 + j). \quad (7.69)$$

С учетом выражений (7.69) и (7.61) соотношение (7.68) можно переписать в виде

$$j \frac{A_1}{\sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2 \gamma_{\text{э}}}} (1 + j)} \sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma_{\text{э}}}{2}} (1 - j) e^{-\sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma_{\text{э}}}{2}} z} e^{-j\beta z} = j_{\text{эx}} + \gamma_{\text{э}} \dot{E}_x,$$

или

$$j \frac{A_1 (1 - j) e^{-j\beta z} \gamma_{\text{э}}}{(1 + j) e^{\sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma_{\text{э}}}{2}} z}} = j_{\text{эx}} + \gamma_{\text{э}} \dot{E}_x. \quad (7.70)$$

В случае идеального металла $\gamma_{\text{э}}$ стремится к бесконечности. К бесконечности стремится числитель и знаменатель левой части выражения (7.70). Раскроем неопределенность в выражении

$e^{\sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma_{\text{э}}}{2}} z}$ по правилу Лопиталья:

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma_{\text{э}} \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{\text{э}}}{e^{\sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma_{\text{э}}}{2}} z}} &= \lim_{\gamma_{\text{э}} \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{d\gamma_{\text{э}}} (\gamma_{\text{э}})}{\frac{d}{d\gamma_{\text{э}}} e^{\sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma_{\text{э}}}{2}} z}} = \\ &= \lim_{\gamma_{\text{э}} \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma_{\text{э}}}{2}} z} \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2}} \frac{1}{2 \sqrt{\gamma_{\text{э}}}}} = \lim_{\gamma_{\text{э}} \rightarrow \infty} \frac{2 \sqrt{\gamma_{\text{э}}}}{e^{\sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma_{\text{э}}}{2}} z} \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2}}}. \end{aligned}$$

Применяя правило Лопиталья повторно, получаем

$$\begin{aligned}
 \lim_{\gamma_a \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{\gamma_a}}{e\sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma_a}{2}}z\sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2}}z} &= \lim_{\gamma_a \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{d\gamma_a}(2\sqrt{\gamma_a})}{\frac{d}{d\gamma_a}\left(e\sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma_a}{2}}z\sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2}}z\right)} = \\
 &= \lim_{\gamma_a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\gamma_a}e\sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma_a}{2}}z\frac{\omega\mu_a}{2}z^2\frac{1}{2\sqrt{\gamma_a}}} = \\
 &= \lim_{\gamma_a \rightarrow \infty} \frac{2}{e\sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma_a}{2}}z\frac{\omega\mu_a}{2}z^2} = 0. \quad (7.71)
 \end{aligned}$$

Таким образом, раскрытие неопределенности в левой части выражения (7.70) показывает, что плотности токов в идеальном металле стремятся к нулю при любом сколь угодно малом значении z , и при стремлении z к нулю плотности токов возрастают до бесконечности. Другими словами, в идеальном металле ток протекает в слое нулевой толщины и его плотность бесконечно велика. Это явление называют *поверхностным эффектом* или *скин-эффектом*.

Рассматривая распространение электромагнитного поля в реальных металлах, вводят понятие глубины проникновения поля в металл, под которой понимают расстояние, обеспечивающее затухание поля в $e=2,718$ раз. Математически это условие можно выразить таким образом: $e^{-\alpha d} = \frac{1}{e} = e^{-1}$, откуда для глубины проникновения d можно записать [см. выражение (7.61)]

$$d = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_a\gamma_a}}. \quad (7.72)$$

§ 7.6. Поляризация плоских волн

Под поляризацией понимают закон изменения направления и величины вектора напряженности электрического поля в данной точке пространства за период колебания. Взяв за основу падающую волну, определим возможные случаи поляризации плоских волн.

На основании соотношений (7.9) запишем следующие выражения для составляющих поля падающей волны:

$$\dot{E}_x = A_1 e^{-iyz}, \quad \dot{E}_y = B_1 e^{-iyz}.$$

Постоянные A_1 и B_1 могут быть комплексными величинами, т. е.

$$A_1 = |A_1| e^{j\varphi_x}, \quad B_1 = |B_1| e^{j\varphi_y}.$$

В среде с потерями коэффициент распространения является комплексным, вследствие чего составляющие поля записываются в виде

$$\dot{E}_x = |A_1| e^{j\varphi_x} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}, \quad \dot{E}_y = |B_1| e^{j\varphi_y} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}.$$

Переходя от комплексных амплитуд к мгновенным значениям, получаем

$$\begin{aligned} E_x(t) &= |A_1| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_x), \\ E_y(t) &= |B_1| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_y). \end{aligned} \quad (7.73)$$

Введем обозначения

$$\varphi = \varphi_x - \varphi_y, \quad \psi = \omega t - \beta z. \quad (7.74)$$

Разделив выражения (7.73) на модули $|A_1|$, $|B_1|$ и используя обозначения (7.74), получаем

$$\begin{aligned} \frac{E_x(t)}{|A_1|} &= e^{-\alpha z} \cos(\psi + \varphi_x), \\ \frac{E_y(t)}{|B_1|} &= e^{-\alpha z} \cos\{(\psi + \varphi_x) - \varphi\} = \\ &= e^{-\alpha z} \cos(\psi + \varphi_x) \cos \varphi + e^{-\alpha z} \sin(\psi + \varphi_x) \sin \varphi = \frac{E_x(t)}{|A_1|} \cos \varphi + \\ &+ e^{-\alpha z} \sqrt{1 - \left(\frac{E_x(t)}{|A_1|}\right)^2} e^{2\alpha z} \sin \varphi, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &\sqrt{1 - \left(\frac{E_x(t)}{|A_1|}\right)^2} e^{2\alpha z} \sin \varphi \times \\ &\times \frac{E_y(t)}{|B_1|} - \frac{E_x(t)}{|A_1|} \cos \varphi = e^{-\alpha z} \sqrt{1 - \left(\frac{E_x(t)}{|A_1|}\right)^2} e^{2\alpha z} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Возводя это выражение в квадрат, находим

$$\begin{aligned} \left(\frac{E_y(t)}{|B_1|}\right)^2 - 2 \frac{E_y(t)}{|B_1|} \cdot \frac{E_x(t)}{|A_1|} \cos \varphi + \left(\frac{E_x(t)}{|A_1|}\right)^2 \cos^2 \varphi = \\ = e^{-2\alpha z} \sin^2 \varphi - \left(\frac{E_x(t)}{|A_1|}\right)^2 \sin^2 \varphi, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \left(\frac{E_y(t)}{|B_1|}\right)^2 - 2 \frac{E_y(t)}{|B_1|} \cdot \frac{E_x(t)}{|A_1|} \cos \varphi + \left(\frac{E_x(t)}{|A_1|}\right)^2 - \\ - e^{-2\alpha z} \sin^2 \varphi = 0. \end{aligned} \quad (7.75)$$

Составляющие $E_x(t)$, $E_y(t)$ вектора напряженности электрического поля можно рассматривать как координаты конца вектора $\mathbf{E}(t)$ на плоскости xy . Положение этого вектора определяет характер поляризации поля. Упростим запись выражения (7.75) путем введения следующих обозначений:

$$\begin{aligned} E_y(t) = y, \quad E_x(t) = x, \quad \frac{1}{|B_1|^2} = \alpha_1, \quad -\frac{1}{|B_1|} \cdot \frac{1}{|A_1|} \cos \varphi = \alpha_2, \\ \frac{1}{|A_1|^2} = \alpha_3, \quad -e^{-2\alpha z} \sin^2 \varphi = \alpha_4. \end{aligned} \quad (7.76)$$

Тогда выражение (7.75) запишется как

$$\alpha_1 y^2 + 2\alpha_2 yx + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 = 0. \quad (7.77)$$

Полученное выражение представляет собой уравнение кривой второго порядка в координатах $y = E_y(t)$ и $x = E_x(t)$. Таким образом, в общем случае конец вектора $\mathbf{E}(t)$ перемещается по кривой второго порядка. В аналитической геометрии показывается, что характер этой кривой определяется знаком детерминанта:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2^2 = \frac{1}{(|B_1| |A_1|)^2} - \frac{\cos^2 \varphi}{(|B_1| |A_1|)^2}. \quad (7.78)$$

Если детерминант больше нуля, то кривая представляет собой эллипс или, в частном случае, окружность. Если детерминант равен нулю, то эллипс вырождается в прямую линию.

Рассмотрим возможные случаи:

$$1) 0 < |\varphi| < \pi/2 \text{ или } 0 < |\varphi_x - \varphi_y| < \pi/2. \quad (7.79)$$

Детерминант больше нуля, конец вектора $\mathbf{E}(t)$ перемещается по эллипсу, возникает эллиптическая поляризация. Составляющие $E_x(t)$, $E_y(t)$ вектора $\mathbf{E}(t)$ изменяются, как видно из выражения (7.73), в результате изменения времени t и координаты z . И то и другое вызывает вращение вектора $\mathbf{E}(t)$ по эллипсу (рис. 7.1 и 7.2). В поглощающей среде при $\alpha \neq 0$ размеры эллипса по мере продвижения вдоль оси z уменьшаются.

$$2) |\varphi| = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{|B_1|} = \frac{1}{|A_1|}. \quad (7.80)$$

Уравнение (7.75) записывается в форме

$$E_y^2(t) + E_x^2(t) = |A_1|^2 e^{-2\alpha z}. \quad (7.81)$$

Это уравнение представляет собой уравнение окружности. В непоглощающей среде при $\alpha = 0$ радиус окружности постоянен. В поглощающей среде радиус окружности, равный $|A_1| e^{-\alpha z}$, уменьшается с продвижением вдоль оси z . Возникает круговая поляризация, конец вектора $\mathbf{E}(t)$ при изменении времени t и координаты z вра-

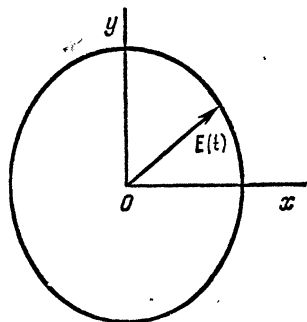


Рис. 7.1

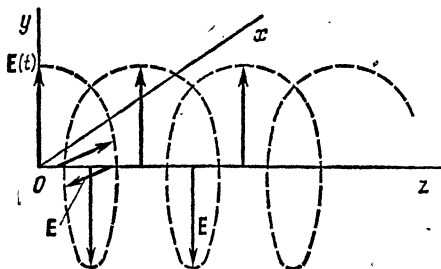


Рис. 7.2

щается по окружности.

$$3) \varphi = 0. \quad (7.82)$$

Уравнение (7.75) записывается в виде

$$\left(\frac{E_y(t)}{|B_1|} \right)^2 - 2 \frac{E_y(t)}{|B_1|} \cdot \frac{E_x(t)}{|A_1|} + \left(\frac{E_x(t)}{|A_1|} \right)^2 = 0,$$

или

$$\begin{aligned} \left(\frac{E_y(t)}{|B_1|} - \frac{E_x(t)}{|A_1|} \right)^2 &= 0, \\ E_y(t) &= \frac{|B_1|}{|A_1|} E_x(t). \end{aligned} \quad (7.83)$$

Это уравнение является уравнением прямой линии, наклон которой к осям определяется угловым коэффициентом $\frac{|B_1|}{|A_1|}$. При этом вектор $\mathbf{E}(t)$ неподвижен в пространстве при изменении времени t и координаты z . Возникает линейная поляризация.

§ 7.7. Ортогональность векторов $\mathbf{E}(t)$ и $\mathbf{H}(t)$

Составляющие поля падающей плоской волны можно найти с помощью соотношений (7.9), (7.16), (7.17):

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= A_1 e^{-i\nu z}, \quad \dot{E}_y = B_1 e^{-i\nu z}, \\ \dot{H}_x &= -\frac{B_1}{Z_c} e^{-i\nu z}, \quad \dot{H}_y = \frac{A_1}{Z_c} e^{-i\nu z}. \end{aligned} \quad (7.84)$$

Для поглощающей среды справедливы формулы (7.23), (7.26). Амплитуды A_1 и B_1 могут быть комплексными:

$$A_1 = |A_1| e^{i\varphi_A}, \quad B_1 = |B_1| e^{i\varphi_B}. \quad (7.85)$$

Тогда для комплексных амплитуд векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ можно записать

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{1}_x |A_1| e^{i\varphi_A} e^{-\alpha z} e^{-i\beta z} + \mathbf{1}_y |B_1| e^{i\varphi_B} e^{-\alpha z} e^{-i\beta z}, \quad (7.86)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}} = & -\mathbf{1}_x \frac{|B_1| e^{i\varphi_B}}{\sqrt{\frac{|\tilde{\mu}_a|}{|\tilde{\epsilon}_a|}}} e^{-\alpha z} e^{-i\beta z} e^{j \frac{\alpha \mu - \alpha \epsilon}{2}} + \\ & + \mathbf{1}_y \frac{|A_1| e^{i\varphi_A}}{\sqrt{\frac{|\tilde{\mu}_a|}{|\tilde{\epsilon}_a|}}} e^{-\alpha z} e^{-i\beta z} e^{j \frac{\alpha \mu - \alpha \epsilon}{2}}. \end{aligned} \quad (7.87)$$

Умножив комплексные амплитуды на $e^{j\omega t}$ и взяв действительные части, получаем мгновенные значения векторов поля:

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{1}_x |A_1| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_A) + \mathbf{1}_y |B_1| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_B), \quad (7.88)$$

$$\mathbf{H}(t) = -\mathbf{1}_x \frac{|B_1|}{\sqrt{\frac{|\tilde{\mu}_a|}{|\tilde{\varepsilon}_a|}}} e^{-\alpha z} \cos\left(\omega t - \beta z + \varphi_B + \frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}\right) + \mathbf{1}_y \frac{|A_1|}{\sqrt{\frac{|\tilde{\mu}_a|}{|\tilde{\varepsilon}_a|}}} e^{-\alpha z} \cos\left(\omega t - \beta z + \varphi_A + \frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}\right). \quad (7.89)$$

Для определения ортогональности векторов $\mathbf{E}(t)$ и $\mathbf{H}(t)$ достаточно написать их скалярное произведение. Если скалярное произведение равно нулю, то векторы ортогональны:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t) \mathbf{H}(t) &= -\frac{|A_1| |B_1|}{\sqrt{\frac{|\tilde{\mu}_a|}{|\tilde{\varepsilon}_a|}}} e^{-2\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_A) \times \\ &\times \cos\left(\omega t - \beta z + \varphi_B + \frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}\right) + \frac{|A_1| |B_1|}{\sqrt{\frac{|\tilde{\mu}_a|}{|\tilde{\varepsilon}_a|}}} e^{-2\alpha z} \times \\ &\times \cos(\omega t - \beta z + \varphi_B) \cos\left(\omega t - \beta z + \varphi_A + \frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}\right). \end{aligned} \quad (7.90)$$

Так как $\cos \psi_1 \cos \psi_2 = \frac{1}{2} \{ \cos(\psi_1 - \psi_2) + \cos(\psi_1 + \psi_2) \}$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t) \mathbf{H}(t) &= \frac{|A_1| |B_1|}{2 \sqrt{\frac{|\tilde{\mu}_a|}{|\tilde{\varepsilon}_a|}}} e^{-2\alpha z} \left\{ -\cos\left(\varphi_A - \varphi_B - \frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}\right) - \right. \\ &- \cos\left(2\omega t - 2\beta z + \varphi_A + \varphi_B + \frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}\right) + \cos\left(\varphi_B - \varphi_A - \frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}\right) + \\ &\left. + \cos\left(2\omega t - 2\beta z + \varphi_B + \varphi_A + \frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}\right) \right\}, \\ \mathbf{E}(t) \mathbf{H}(t) &= \frac{|A_1| |B_1|}{2 \sqrt{\frac{|\tilde{\mu}_a|}{|\tilde{\varepsilon}_a|}}} e^{-2\alpha z} \left\{ -\cos\left(\varphi_A - \varphi_B - \frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}\right) + \right. \\ &\left. + \cos\left(\varphi_B - \varphi_A - \frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (7.91)$$

Поскольку \cos является четной функцией, из выражения (7.91) следует, что скалярное произведение равно нулю и мгновенные значения векторов $\mathbf{E}(t)$ и $\mathbf{H}(t)$ ортогональны в следующих случаях:

- а) в среде нет потерь: $\alpha_\mu = \alpha_\varepsilon = 0$;
- б) потери таковы, что $\alpha_\mu = \alpha_\varepsilon$ и $(\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon)/2 = 0$;
- в) фазы амплитуд одинаковы: $\varphi_A = \varphi_B$.

ГЛАВА 8 ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ВЕКТОРОВ ПОЛЯ

§ 8.1. Постановка вопроса

При решении практических задач приходится постоянно сталкиваться с ситуацией, когда параметры среды скачкообразно изменяются от одних значений до других. Подобная ситуация возникает при введении в однородную среду диэлектрических, полупроводящих и металлических поверхностей, при передаче электромагнитных волн с помощью волноводов, при решении задачи радиолокации и во многих других случаях. Следует ожидать, что скачкообразное изменение параметров среды может повлечь за собой такое же изменение векторов поля, что в свою очередь вызовет появление бесконечно больших производных этих векторов по координатам. При этом значение роторов векторов поля, входящих в уравнения Максвелла, станут бесконечно большими и непосредственное использование этих уравнений для решения электродинамических задач будет затруднено.

Очевидно, необходимо знать законы поведения векторов поля на границе раздела двух сред, так называемые граничные условия. Эти законы выводят из уравнений электродинамики с помощью следующего приема. Границу раздела двух сред полагают обладающей некоторой малой толщиной, в пределах которой происходит не скачкообразный, а непрерывный переход от параметров первой среды к параметрам второй среды. Такое же непрерывное изменение происходит и с векторами поля. При этих допущениях проводят анализ процесса, используя имеющиеся уравнения электродинамики. Далее, устремляя толщину границы раздела к нулю, осуществляют предельный переход и получают граничные условия, определяющие поведение векторов поля на границе раздела.

Поскольку любой вектор поля, произвольно ориентируемый относительно границы раздела, можно представить в виде суммы нормальной к границе и тангенциальной к ней составляющих, анализ осуществляют отдельно для нормальных и тангенциальных составляющих поля, что существенно облегчает задачу.

§ 8.2. Граничные условия для нормальных составляющих векторов поля

Рассмотрим границу раздела двух сред, первая из которых обладает параметрами $\tilde{\mu}_{a1}$, $\tilde{\epsilon}_{a1}$, а вторая — параметрами $\tilde{\mu}_{a2}$, $\tilde{\epsilon}_{a2}$. Допустим, что толщина границы раздела равна Δd (рис. 8.1).

В этой границе выделим небольшой объем высотой Δd с площадью верхнего и нижнего оснований ΔS . Пусть единичной нормалью к верхнему основанию является $\mathbf{1}_{n1}$, а единичной нормалью к нижнему основанию $\mathbf{1}_{n2}$. В основу рассуждений положим интегральное соотношение (1.165).

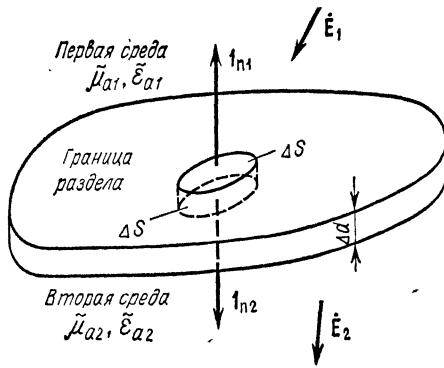


Рис. 8.1

В качестве поверхности S_1 возьмем замкнутую поверхность, ограничивающую объем, расположенный в границе. Значение вектора \vec{E} в первой среде полагаем равным \vec{E}_1 , значение вектора \vec{E} во второй среде — \vec{E}_2 . В силу малости площадей оснований ΔS считаем, что в пределах этих оснований векторы \vec{E}_1 и \vec{E}_2 можно считать неизменными.

При этих условиях выражение (1.165) может быть записано в форме

$$\oint_{S_1} \tilde{\epsilon}_a \vec{E} dS = (\tilde{\epsilon}_{a1} \vec{E}_1 \mathbf{1}_{n1} + \tilde{\epsilon}_{a2} \vec{E}_2 \mathbf{1}_{n2}) \Delta S + \psi_{E6} = \dot{Q}_a,$$

где ψ_{E6} — доля потока, проходящего через боковую часть поверхности S_1 .

При $\Delta d \rightarrow 0$ $\psi_{E6} \rightarrow 0$, и для бесконечно тонкой границы раздела справедливо соотношение

$$\oint_{S_1} \tilde{\epsilon}_a \vec{E} dS = (\tilde{\epsilon}_{a1} \vec{E}_1 \mathbf{1}_{n1} + \tilde{\epsilon}_{a2} \vec{E}_2 \mathbf{1}_{n2}) \Delta S = \dot{Q}_a.$$

При выбранном на рис. 8.1 направлении векторов \vec{E}_1 и \vec{E}_2 можно написать

$$\vec{E}_1 \mathbf{1}_{n1} = -\dot{E}_{1n}, \quad \vec{E}_2 \mathbf{1}_{n2} = \dot{E}_{2n}.$$

Тогда

$$\oint_{S_1} \tilde{\epsilon}_a \vec{E} dS = (-\tilde{\epsilon}_{a1} \dot{E}_{1n} + \tilde{\epsilon}_{a2} \dot{E}_{2n}) \Delta S = \dot{Q}_a,$$

откуда

$$-\tilde{\epsilon}_{a1} \dot{E}_{1n} + \tilde{\epsilon}_{a2} \dot{E}_{2n} = \dot{Q}_a / \Delta S = \dot{\sigma}_a. \quad (8.1)$$

Легко определить единицы измерения $\dot{\sigma}_a$:

$$\dot{\sigma}_a \rightarrow \text{Кл/м}^2. \quad (8.2)$$

Величину $\dot{\sigma}_a$ называют *комплексной амплитудой поверхностной плотности сторонних электрических зарядов*.

Выражение (8.1) является граничным условием для векторов \dot{E}_{1n} и \dot{E}_{2n} .

Если на границе раздела нет поверхностной плотности электрических зарядов ($\dot{\sigma}_a = 0$), то

$$\tilde{\epsilon}_{a2} \dot{E}_{2n} = \tilde{\epsilon}_{a1} \dot{E}_{1n}, \quad (8.3)$$

или

$$\dot{E}_{2n}/\dot{E}_{1n} = \tilde{\epsilon}_{a1}/\tilde{\epsilon}_{a2}. \quad (8.4)$$

В общем случае нормальные составляющие векторов \dot{E}_1 и \dot{E}_2 при переходе через границу раздела испытывают скачкообразные изменения.

Применяя свойство перестановочной двойственности электродинамических уравнений в выражении (8.1):

$$\begin{aligned} \dot{E}_{1n} &\rightarrow \dot{H}_{1n}, & \dot{E}_{2n} &\rightarrow \dot{H}_{2n}, & \tilde{\epsilon}_{a1} &\rightarrow -\tilde{\mu}_{a1}, \\ \tilde{\epsilon}_{a2} &\rightarrow -\tilde{\mu}_{a2}, & \dot{Q}_a &\rightarrow -\dot{Q}_m, & \dot{\sigma}_a &\rightarrow -\dot{\sigma}_m, \end{aligned}$$

получим следующие граничные условия для нормальных составляющих векторов \dot{H}_1 и \dot{H}_2 :

$$-\tilde{\mu}_{a1}\dot{H}_{1n} + \tilde{\mu}_{a2}\dot{H}_{2n} = \dot{Q}_m/\Delta S = \dot{\sigma}_m. \quad (8.5)$$

Определим единицу измерения $\dot{\sigma}_m$:

$$\dot{\sigma}_m \rightarrow \frac{B \cdot c}{M^2}. \quad (8.6)$$

Величину $\dot{\sigma}_m$ называют *комплексной амплитудой поверхностной плотности сторонних магнитных зарядов*.

При отсутствии на границе раздела поверхностной плотности магнитных зарядов ($\dot{\sigma}_m = 0$) выражение (8.5) записывается в виде

$$\dot{H}_{2n}/\dot{H}_{1n} = \tilde{\mu}_{a1}/\tilde{\mu}_{a2}. \quad (8.7)$$

В общем случае нормальные составляющие векторов \dot{H}_1 и \dot{H}_2 при переходе через границу раздела испытывают скачкообразные изменения.

§ 8.3. Граничные условия для тангенциальных составляющих векторов поля

Рассмотрим боковую часть граничной поверхности толщиной Δd (рис. 8.2). В основу рассуждений положим интегральное соотношение (1.160).

В качестве контура обхода l_1 выберем малый контур со сторонами Δd и Δh . Введем тангенциальные к границе раздела единичные векторы $\mathbf{1}_{\tau 1}$ и $\mathbf{1}_{\tau 2}$ и нормальный к плоскости контура обхода единичный вектор $\mathbf{1}_n$. Кроме того, введем единичный вектор $\mathbf{1}_{n1}$, направленный в сторону первой среды и нормальный к границе раздела. В силу малости контура обхода положим неизменными векторы \dot{H}_1 и \dot{H}_2 в пределах сторон Δh контура обхода. Запишем выражение (1.160) при принятых допущениях:

$$\oint_{l_1} \dot{H} dl = (\dot{H}_1 \mathbf{1}_{\tau 1} + \dot{H}_2 \mathbf{1}_{\tau 2}) \Delta h + \Psi_{\Delta d} = (\mathbf{J}_a + j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{E}) \Delta d \Delta h \mathbf{1}_n,$$

где $\Psi_{\Delta d}$ — доля интеграла при обходе сторон Δd контура обхода.

При $\Delta d \rightarrow 0$ $\Psi_{\Delta d} \rightarrow 0$ и интеграл

$$\oint_{l_1} \dot{\mathbf{H}} d\mathbf{l} = (\dot{\mathbf{H}}_1 \mathbf{1}_{\tau_1} + \dot{\mathbf{H}}_2 \mathbf{1}_{\tau_2}) \Delta h = \lim_{\Delta d \rightarrow 0} (\dot{\mathbf{J}}_s + j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}) \Delta d \Delta h \mathbf{1}_n.$$

При принятых на рис. 8.2 направлениях векторов поля можно написать равенства

$$\dot{\mathbf{H}}_1 \mathbf{1}_{\tau_1} = \dot{H}_{1\tau}, \quad \dot{\mathbf{H}}_2 \mathbf{1}_{\tau_2} = -\dot{H}_{2\tau},$$

где $\dot{H}_{1\tau}$, $\dot{H}_{2\tau}$ — тангенциальные составляющие векторов $\dot{\mathbf{H}}_1$, $\dot{\mathbf{H}}_2$.

Раскрывая выражение для $\tilde{\epsilon}_a$ с помощью формулы (1.159), получаем

$$\dot{H}_{1\tau} - \dot{H}_{2\tau} = \lim_{\Delta d \rightarrow 0} (\dot{\mathbf{J}}_s + j\omega \epsilon_a \dot{\mathbf{E}} + \gamma_s \dot{\mathbf{E}}) \Delta d \mathbf{1}_n. \quad (8.8)$$

Функция $j\omega \epsilon_a \dot{\mathbf{E}}$ всегда конечна в силу ограниченности частоты ω и вектора $\dot{\mathbf{E}}$, поэтому

$$\lim_{\Delta d \rightarrow 0} (j\omega \epsilon_a \dot{\mathbf{E}}) \Delta d \mathbf{1}_n = 0.$$

При конечных значениях вектора плотности тока $\dot{\mathbf{J}}_s$ и проводимости γ_s , что соответствует всем возможным средам, за исключением идеальной металлической среды, справедливо соотношение

$$\lim_{\Delta d \rightarrow 0} (\dot{\mathbf{J}}_s + \gamma_s \dot{\mathbf{E}}) \Delta d \mathbf{1}_n = 0$$

и граничные условия для тангенциальных составляющих векторов $\dot{\mathbf{H}}_1$ и $\dot{\mathbf{H}}_2$ записываются в форме

$$\dot{H}_{1\tau} = \dot{H}_{2\tau}. \quad (8.9)$$

Тангенциальные составляющие векторов $\dot{\mathbf{H}}_1$ и $\dot{\mathbf{H}}_2$ при переходе через границу раздела не испытывают изменений. В идеальной проводящей среде вследствие поверхностного эффекта (см. § 7.5) плотности стороннего электрического тока $\dot{\mathbf{J}}_s$ и тока проводимости $\gamma_s \dot{\mathbf{E}}$ возрастают до бесконечности:

$$\lim_{\Delta d \rightarrow 0} (\dot{\mathbf{J}}_s + \gamma_s \dot{\mathbf{E}}) \Delta d \mathbf{1}_n = \dot{v}_s + \dot{v}_{\text{сп}} = \dot{v}_{\Sigma}. \quad (8.10)$$

Здесь \dot{v}_s — комплексная амплитуда плотности поверхностного стороннего электрического тока; $\dot{v}_{\text{сп}}$ — комплексная амплитуда плотности поверхностного электрического тока проводимости; \dot{v}_{Σ} — комплекс-

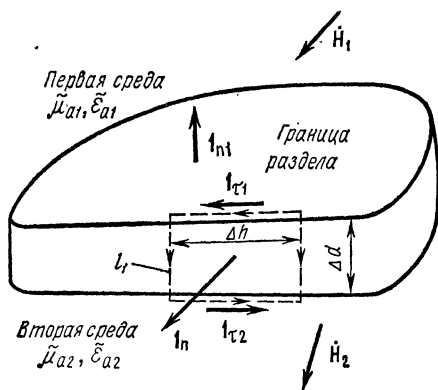


Рис. 8.2

ная амплитуда плотности суммарного поверхностного электрического тока.

Легко установить единицы измерения плотностей поверхностных токов:

$$\dot{v}_a, \dot{v}_{aп}, \dot{v}_{a\Sigma} \rightarrow \frac{A \cdot M}{M^2} = \frac{A}{M}. \quad (8.11)$$

Для идеальной металлической среды, как было показано в § 7.5, поле в металле равно нулю, что соответствует выражению

$$\dot{H}_{2\tau} = 0. \quad (8.12)$$

Граничные условия для тангенциальных составляющих (8.8) в случае, если вторая среда является идеальным металлом, записываются таким образом:

$$\dot{H}_{1\tau} = \dot{v}_a + \dot{v}_{aп} = \dot{v}_{a\Sigma}. \quad (8.13)$$

Если стороннего электрического тока нет, то справедливо соотношение

$$\dot{H}_{1\tau} = \dot{v}_{aп}. \quad (8.14)$$

Учитывая, что ток и созданное им поле связаны правилом правого винта, выражение (8.13) можно записать в векторной форме:

$$\dot{H}_{1\tau} = [(\dot{v}_a + \dot{v}_{aп}) \mathbf{1}_{n1}] = [\dot{v}_{a\Sigma} \mathbf{1}_{n1}] \quad (8.15)$$

и при отсутствии стороннего тока

$$\dot{H}_{1\tau} = [\dot{v}_{aп} \mathbf{1}_{n1}]. \quad (8.16)$$

Использование перестановок вида

$$\begin{aligned} \dot{H}_{1\tau} &\rightarrow \dot{E}_{1\tau}, \quad \dot{H}_{2\tau} \rightarrow \dot{E}_{2\tau}, \quad \dot{v}_a \rightarrow -\dot{v}_m, \\ \dot{v}_{aп} &\rightarrow -\dot{v}_{mп}, \quad \dot{v}_{a\Sigma} \rightarrow -\dot{v}_{m\Sigma}, \end{aligned}$$

где

$$\dot{v}_m = \lim_{\Delta d \rightarrow 0} (\mathbf{j}_m \Delta d \mathbf{1}_n), \quad (8.17)$$

$$\dot{v}_{mп} = \lim_{\Delta d \rightarrow 0} (\gamma_m \dot{H} \Delta d \mathbf{1}_n), \quad (8.18)$$

дает граничные условия для тангенциальных составляющих векторов электрического поля \dot{E}_1 и \dot{E}_2 .

Для всех сред, за исключением воображаемых сред с бесконечной магнитной проводимостью γ_m и случая введения в расчет плотности стороннего тока \dot{v}_m , справедливы граничные условия, получаемые в результате перестановок вида (8.9):

$$\dot{E}_{1\tau} = \dot{E}_{2\tau}. \quad (8.19)$$

Тангенциальные составляющие электрического поля при переходе через границу раздела не испытывают изменений.

При введении в расчет стороннего магнитного тока и воображаемой среды с бесконечной магнитной проводимостью γ_m (что является удобным искусственным допущением для полного применения принципа перестановочной двойственности) в результате перестановки вида (8.13) можно записать соотношение

$$\dot{E}_{1\tau} = -\dot{v}_m - \dot{v}_{mp} = -\dot{v}_{m\Sigma}. \quad (8.20)$$

Если, как часто бывает, сторонний магнитный ток в расчет не введен и среда обладает конечной магнитной и бесконечно большой электрической проводимостями ($\gamma_s \rightarrow \infty$), то

$$\dot{E}_{1\tau} = 0, \quad (8.21)$$

поскольку при $\gamma_s \rightarrow \infty$ $\dot{E}_{2\tau} = 0$ и поля во второй среде нет.

У поверхности идеального металла не может быть тангенциальных составляющих электрического поля при отсутствии стороннего магнитного тока.

Таким образом, если вторая среда представляет собой идеальный металл, у ее поверхности существуют только нормальная составляющая поля \dot{E} и тангенциальная составляющая поля \dot{H} . Вектор Пойнтинга (4.28) ориентирован при этом вдоль границы раздела первой среды с идеальной металлической средой.

Аналогично соотношению (8.14) граничные условия для металла (8.18) при введении в расчет сторонних магнитных токов и воображаемой среды с бесконечной магнитной проводимостью можно записать в векторной форме:

$$\dot{E}_{1\tau} = [I_{n1}(\dot{v}_m + \dot{v}_{mp})] = [I_{n1}\dot{v}_{m\Sigma}]. \quad (8.22)$$

ГЛАВА 9

ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ПЛОСКУЮ ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД КАК ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ПРОСТЕЙШЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

§ 9.1. Постановка вопроса

Пространство, состоящее из двух сред с различными параметрами, разделенных плоской границей раздела, является простейшей неоднородной средой со скачкообразным изменением свойств. Электродинамические задачи для таких сред решают с помощью граничных условий, выведенных в гл. 8.

Подобные задачи называют граничными или краевыми. Простейшей краевой задачей, рассматриваемой в настоящей главе, является падение плоской волны на плоскую границу раздела двух сред.

§ 9.2. Вывод основных уравнений. Законы Снеллиуса. Коэффициенты отражения и преломления

Пусть плоская волна падает из первой среды с параметрами $\vec{\epsilon}_{a1}, \vec{\mu}_{a1}$ на плоскую границу раздела со второй средой, обладающей параметрами $\vec{\epsilon}_{a2}, \vec{\mu}_{a2}$. Плоскостью падения называют плоскость, содержащую нормаль к границе раздела и вектор Пойнтинга падающей волны. Угол падения φ представляет собой угол между вектором Пойнтинга падающей волны $\vec{\Pi}$ и нормалью к границе раздела.

При рассмотрении плоской волны, падающей на плоскую границу раздела, целесообразно использовать декартову систему координат (рис. 9.1).

Углом отражения φ_0 называют угол между вектором Пойнтинга отраженной волны $\vec{\Pi}_0$ и нормалью к границе раздела, углом преломления φ_n — угол между вектором Пойнтинга преломленной волны $\vec{\Pi}_n$ и нормалью к границе раздела.

Векторы \vec{E} и \vec{H} находятся в плоскости, перпендикулярной вектору Пойнтинга. Ориентация в этой плоскости вектора \vec{E} и ортогонального к нему вектора \vec{H} может быть произвольной. Вектор \vec{E} падающей волны всегда можно представить в виде суммы двух составляющих: находящейся в плоскости падения и перпендикулярной ей. Рассмотрев электродинамическую задачу для обоих указанных случаев, путем суперпозиции результатов можно получить решение для любого заданного расположения вектора \vec{E} (любой поляризации) и соответственно для любого расположения вектора \vec{H} , ортогонального к вектору \vec{E} .

Рассмотрим первый случай, когда вектор \vec{E} расположен в плоскости падения xz (рис. 9.1). Вектор \vec{H} ориентирован вдоль оси y . Оси распространения падающей, отраженной и преломленной волн обозначим соответственно n, n_0, n_n . Для анализа целесообразно взять тот вектор поля, который в заданной системе координат содержит меньше составляющих. В первом случае таким вектором является вектор \vec{H} , ориентированный вдоль оси y . В случае падающей волны, распространяющейся вдоль оси n , в соответствии с формулами (7.9), (7.16), (7.17) для вектора \vec{H} справедливо выражение

$$\dot{H}_y = C_1 e^{-i\gamma_1 n}. \quad (9.1)$$

Считая в силу однородности каждой из двух сред, что вектор \vec{H} в отраженной и преломленной волнах не изменяет ориентации вдоль оси y , а может изменить только амплитуду и фазу, можно записать следующие соотношения для

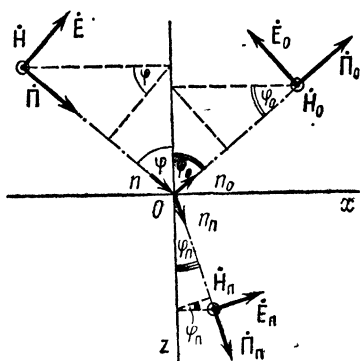


Рис. 9.1

этих векторов:

$$\dot{H}_{y_0} = C_1 \dot{M}_{Hy}^0 e^{-i\gamma_1 n_0}, \quad (9.2)$$

$$\dot{H}_{y_n} = C_1 \dot{M}_{Hy}^n e^{-i\gamma_2 n_n}. \quad (9.3)$$

В соответствии с формулой (7.10)

$$\gamma_1 = \omega \sqrt{\overline{\mu_{a1} \varepsilon_{a1}}}, \quad (9.4)$$

$$\gamma_2 = \omega \sqrt{\overline{\mu_{a2} \varepsilon_{a2}}}. \quad (9.5)$$

Коэффициенты \dot{M}_{Hy}^0 и \dot{M}_{Hy}^n в общем случае являются комплексными коэффициентами отражения и преломления составляющих поля \dot{H}_y для первого случая ориентации вектора \dot{E} , находящегося в плоскости падения.

Задачей анализа электродинамического процесса является определение углов отражения φ_0 и преломления φ_n при заданном угле падения φ , а также коэффициентов отражения \dot{M}_{Hy}^0 и преломления \dot{M}_{Hy}^n .

Для решения поставленной задачи прежде всего необходимо перейти от осей n, n_0, n_n , для которых написаны выражения (9.1), (9.2), (9.3), к системе координат x, y, z . Точки, заданные в системе координат n, n_0, n_n , можно представить в декартовой системе координат с помощью формул:

$$\left. \begin{aligned} n &= z \cos \varphi + x \sin \varphi, \\ n_0 &= -z \cos \varphi_0 + x \sin \varphi_0, \\ n_n &= z \cos \varphi_n + x \sin \varphi_n. \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

При написании этих формул учитывалось, что фронт плоской волны в падающей и преломленной волнах распространяется в сторону положительных значений осей x и z , а в отраженной волне — в сторону положительных значений оси x и отрицательных значений оси z , чем и объясняется знак «минус» перед членом $z \cos \varphi_0$ во второй формуле (9.6). Подставляя выражения (9.6) в формулы (9.1), (9.2), (9.3), получаем

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_y &= C_1 e^{-i\gamma_1 (z \cos \varphi + x \sin \varphi)}, \\ \dot{H}_{y_0} &= C_1 \dot{M}_{Hy}^0 e^{-i\gamma_1 (-z \cos \varphi_0 + x \sin \varphi_0)}, \\ \dot{H}_{y_n} &= C_1 \dot{M}_{Hy}^n e^{-i\gamma_2 (z \cos \varphi_n + x \sin \varphi_n)}. \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

Для определения углов φ_0, φ_n и коэффициентов $\dot{M}_{Hy}^0, \dot{M}_{Hy}^n$ следует использовать граничные условия (8.9), которые предполагают равенство тангенциальных составляющих полного магнитного поля в первой и второй средах. Полное магнитное поле в первой среде складывается из полей падающей и отраженной волн. Во второй среде существует лишь поле преломленной волны. В рассматриваемом случае поля $\dot{H}, \dot{H}_0, \dot{H}_n$ ориентированы одинаково и являются тангенциальными по отношению к границе раздела. В силу этого

граничные условия (8.9) записываются в виде

$$\dot{H}_y + \dot{H}_{y0} = \dot{H}_{yn} \quad (\text{при } z = 0) \quad (9.8)$$

или

$$C_1 e^{-i\gamma_1 x \sin \varphi} + C_1 \dot{M}_{Hy}^0 e^{-i\gamma_1 x \sin \varphi_0} = C_1 \dot{M}_{Hy}^n e^{-i\gamma_2 x \sin \varphi_n}.$$

Равенство возможно при соблюдении условий

$$\sin \varphi = \sin \varphi_0, \quad \gamma_1 \sin \varphi = \gamma_2 \sin \varphi_n, \quad 1 + \dot{M}_{Hy}^0 = \dot{M}_{Hy}^n. \quad (9.9)$$

Из первых двух равенств (9.9) следуют так называемые законы Снеллиуса:

$$\varphi = \varphi_0, \quad (9.10)$$

$$\frac{\sin \varphi_n}{\sin \varphi} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \sqrt{\frac{\mu_{a1} \tilde{\epsilon}_{a1}}{\mu_{a2} \tilde{\epsilon}_{a2}}}. \quad (9.11)$$

Для среды с потерями $\sin \varphi_n$ является комплексной величиной

$$\sin \varphi_n = a_1 - jb_1. \quad (9.12)$$

Если при этом в первой среде потерь нет и γ_1 — действительная величина, то в силу равенства $\gamma_1 \sin \varphi_0 = \gamma_2 \sin \varphi_n$ произведение $\gamma_2 \sin \varphi_n$ является также величиной действительной и вдоль оси x происходит изменение фазы колебаний. Затухание колебаний вдоль оси x отсутствует.

Из выражений (9.10), (9.11) можно определить углы отражения и преломления, а последнее равенство в выражении (9.9) является первым уравнением с двумя неизвестными коэффициентами \dot{M}_{Hy}^0 и \dot{M}_{Hy}^n . Для определения этих коэффициентов необходимо вывести второе уравнение, которое может быть получено из граничных условий (8.19). В рассматриваемом случае тангенциальной составляющей электрического поля является составляющая \dot{E}_x . Ее можно найти с помощью первого уравнения Максвелла (2.12), которое при отсутствии сторонних токов записывается в виде

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}. \quad (9.13)$$

Из этого уравнения следует, что

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{j\omega \tilde{\epsilon}_a} \text{rot } \dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{j\omega \tilde{\epsilon}_a} \left\{ \mathbf{1}_x \left(\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} \right) + \mathbf{1}_y \left(\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right) + \mathbf{1}_z \left(\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} \right) \right\}. \quad (9.14)$$

В нашем случае составляющие поля $\dot{H}_x = \dot{H}_z = 0$ и производная $\partial/\partial y = 0$.

Вследствие этого соотношение (9.14) можно переписать следующим образом:

$$\dot{\mathbf{E}} = -\mathbf{1}_x \frac{1}{j\omega \tilde{\epsilon}_a} \cdot \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} + \mathbf{1}_z \frac{1}{j\omega \tilde{\epsilon}_a} \cdot \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x}. \quad (9.15)$$

В полях падающей, отраженной и преломленной волн существуют две составляющие электрического поля:

$$\dot{E}_x = -\frac{1}{j\omega\tilde{\epsilon}_a} \cdot \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z}, \quad (9.16)$$

$$\dot{E}_z = \frac{1}{j\omega\tilde{\epsilon}_a} \cdot \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x}. \quad (9.17)$$

При расчете составляющих \dot{E}_x в падающей и отраженной волнах следует полагать $\tilde{\epsilon}_a = \tilde{\epsilon}_{a1}$ и соответственно $\dot{H}_y = \dot{H}_{y1}$ и $\dot{H}_y = \dot{H}_{y0}$.

При определении \dot{E} в преломленной волне полагают $\tilde{\epsilon}_a = \tilde{\epsilon}_{a2}$ и $\dot{H}_y = \dot{H}_{yп}$.

В соответствии с этим получается

$$\dot{E}_x = -\frac{1}{j\omega\tilde{\epsilon}_{a1}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \{C_1 e^{-j\gamma_1 (z \cos \varphi + x \sin \varphi)}\} = \frac{\gamma_1 \cos \varphi}{\omega\tilde{\epsilon}_{a1}} C_1 e^{-j\gamma_1 (z \cos \varphi + x \sin \varphi)}.$$

Подставляя значение γ_1 из формулы (9.4), находим

$$\dot{E}_x = \sqrt{\frac{\mu_{a1}}{\epsilon_{a1}}} \cos \varphi C_1 e^{-j\gamma_1 (z \cos \varphi + x \sin \varphi)}. \quad (9.18)$$

Аналогично, считая $\varphi_0 = \varphi$, можно написать

$$\begin{aligned} \dot{E}_{x0} &= -\frac{1}{j\omega\tilde{\epsilon}_{a1}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \{C_1 \dot{M}_{Hy}^0 e^{-j\gamma_1 (-z \cos \varphi + x \sin \varphi)}\} = \\ &= -\sqrt{\frac{\mu_{a1}}{\epsilon_{a1}}} \cos \varphi \dot{M}_{Hy}^0 C_1 e^{-j\gamma_1 (-z \cos \varphi + x \sin \varphi)}, \end{aligned} \quad (9.19)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_{xp} &= -\frac{1}{j\omega\tilde{\epsilon}_{a2}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \{C_1 \dot{M}_{Hy}^п e^{-j\gamma_2 (z \cos \varphi_p + x \sin \varphi_p)}\} = \\ &= \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\epsilon_{a2}}} \cos \varphi_p \dot{M}_{Hy}^п C_1 e^{-j\gamma_2 (z \cos \varphi_p + x \sin \varphi_p)}. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Граничные условия (8.17) запишутся аналогично условиям (9.8):

$$\begin{aligned} \dot{E}_x + \dot{E}_{x0} &= \dot{E}_{xp}, \quad (9.21) \\ \sqrt{\frac{\mu_{a1}}{\epsilon_{a1}}} \cos \varphi C_1 e^{-j\gamma_1 x \sin \varphi} - \sqrt{\frac{\mu_{a1}}{\epsilon_{a1}}} \cos \varphi \dot{M}_{Hy}^0 C_1 e^{-j\gamma_1 x \sin \varphi} &= \\ &= \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\epsilon_{a2}}} \cos \varphi_p \dot{M}_{Hy}^п C_1 e^{-j\gamma_2 x \sin \varphi_p}. \end{aligned}$$

Разделив все члены уравнения на $\sqrt{\frac{\mu_{a1}}{\epsilon_{a1}}} \cos \varphi C_1$ и учитывая равенство $e^{-j\gamma_1 x \sin \varphi} = e^{-j\gamma_2 x \sin \varphi_p}$, получаем

$$1 - \dot{M}_{Hy}^0 = \sqrt{\frac{\mu_{a2}\epsilon_{a1}}{\epsilon_{a2}\mu_{a1}}} \cdot \frac{\cos \varphi_p}{\cos \varphi} \dot{M}_{Hy}^п. \quad (9.22)$$

Это соотношение целесообразно выразить с помощью закона Снеллиуса (9.11) таким образом, чтобы в нем существовал только угол падения:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \varphi_{\Pi}}{\cos \varphi} &= \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_{\Pi}}}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi \frac{\tilde{\mu}_{a1} \tilde{\varepsilon}_{a1}}{\tilde{\mu}_{a2} \tilde{\varepsilon}_{a2}}}}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mu}_{a2} \tilde{\varepsilon}_{a2}}} \cdot \frac{\sqrt{\tilde{\mu}_{a2} \tilde{\varepsilon}_{a2} - \sin^2 \tilde{\mu}_{a1} \tilde{\varepsilon}_{a1}}}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}. \end{aligned} \quad (9.23)$$

Подстановка полученного выражения в уравнение (9.22) дает соотношение

$$1 - M_{Hy}^o = \sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}_{a1}}{\tilde{\varepsilon}_{a2} \tilde{\mu}_{a1}}} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2} \tilde{\varepsilon}_{a2} - \tilde{\mu}_{a1} \tilde{\varepsilon}_{a1} \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi}} M_{Hy}^{\Pi}. \quad (9.24)$$

Вторым уравнением, связывающим коэффициенты M_{Hy}^o и M_{Hy}^{Π} , является соотношение (9.9). Решая эти уравнения совместно, можно найти выражения для коэффициентов преломления M_{Hy}^{Π} и отражения M_{Hy}^o составляющих поля \dot{H}_y :

$$M_{Hy}^{\Pi} = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}_{a1}}{\tilde{\varepsilon}_{a2} \tilde{\mu}_{a1}}} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2} \tilde{\varepsilon}_{a2} - \tilde{\mu}_{a1} \tilde{\varepsilon}_{a1} \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi}}}, \quad (9.25)$$

$$M_{Hy}^o = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}_{a1}}{\tilde{\varepsilon}_{a2} \tilde{\mu}_{a1}}} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2} \tilde{\varepsilon}_{a2} - \tilde{\mu}_{a1} \tilde{\varepsilon}_{a1} \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi}}} - 1, \quad (9.26)$$

которые сходны с известными в оптике формулами Френеля.

Был рассмотрен первый случай поляризации, когда вектор \dot{E} находится в плоскости падения. При этом были получены выражения коэффициентов преломления и отражения для составляющей поля \dot{H}_y .

При такой поляризации вектор \dot{E} обладает нормальной по отношению к границе раздела составляющей. Часто подобную поляризацию называют вертикальной.

Нетрудно получить выражения этих коэффициентов для второго случая поляризации (горизонтальной), когда вектор \dot{E} перпендикулярен плоскости падения. При этом вектор \dot{H} имеет две составляющие \dot{H}_x и \dot{H}_z , а вектор \dot{E} — одну составляющую \dot{E}_y .

Для определения коэффициентов преломления M_{Ey}^{Π} и отражения M_{Ey}^o используем принцип перестановочной двойственности, на основании которого поле \dot{H}_y заменяется на поле \dot{E}_y и в выражениях

(9.25), (9.26) осуществляются перестановки вида $\tilde{\mu}_{a1} \leftrightarrow -\tilde{\epsilon}_{a1}$, $\tilde{\mu}_{a2} \leftrightarrow \tilde{\epsilon}_{a2}$. Выражения для M_{Ey}^n и M_{Ey}^o записываются в форме

$$M_{Ey}^n = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a1}}{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\epsilon}_{a1}}} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\epsilon}_{a2} - \tilde{\mu}_{a1}\tilde{\epsilon}_{a1} \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi}}}, \quad (9.27)$$

$$M_{Ey}^o = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a1}}{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\epsilon}_{a1}}} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\epsilon}_{a2} - \tilde{\mu}_{a1}\tilde{\epsilon}_{a1} \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi}}} - 1. \quad (9.28)$$

Легко найти коэффициенты преломления и отражения для других составляющих поля. Покажем вывод на примере составляющей электрического поля \dot{E}_x . Коэффициент отражения M_{Ex}^o определяется отношением \dot{E}_{x0}/\dot{E}_x при $z=0$.

Из выражений (9.18) и (9.19) следует, что

$$\left. \frac{\dot{E}_{x0}}{\dot{E}_x} \right|_{z=0} = M_{Ex}^o = - \frac{\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a1}}{\tilde{\epsilon}_{a1}}} \cos \varphi M_{Hy}^o C_1 e^{-j\gamma_1 x \sin \varphi}}{\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a1}}{\tilde{\epsilon}_{a1}}} \cos \varphi C_1 e^{-j\gamma_1 x \sin \varphi}},$$

или

$$M_{Ex}^o = -M_{Hy}^o. \quad (9.29)$$

Аналогично коэффициент преломления M_{Ex}^n определяется отношением $\left. \frac{\dot{E}_{xn}}{\dot{E}_x} \right|_{z=0} = M_{Ex}^n$. Подставляя значения составляющих поля из формул (9.18) и (9.20), получаем

$$M_{Ex}^n = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\epsilon}_{a1}}{\tilde{\epsilon}_{a2}\tilde{\mu}_{a1}}} \cdot \frac{\cos \varphi_n}{\cos \varphi} M_{Hy}^n.$$

Далее, используя соотношения (9.23) и (9.25), получаем соответственно

$$\begin{aligned} M_{Ex}^n &= \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\epsilon}_{a1}}{\tilde{\epsilon}_{a2}\tilde{\mu}_{a1}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\epsilon}_{a2}}} \cdot \frac{\sqrt{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\epsilon}_{a2} - \tilde{\mu}_{a1}\tilde{\epsilon}_{a1} \sin^2 \varphi}}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} M_{Hy}^n = \\ &= \sqrt{\frac{\tilde{\epsilon}_{a1}}{\tilde{\epsilon}_{a2}\tilde{\mu}_{a1}}} \cdot \frac{\sqrt{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\epsilon}_{a2} - \tilde{\mu}_{a1}\tilde{\epsilon}_{a1} \sin^2 \varphi}}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} M_{Hy}^n, \\ M_{Ex}^n &= \frac{2}{\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\epsilon}_{a1}}{\tilde{\epsilon}_{a2}\tilde{\mu}_{a1}}} \cdot \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}{\sqrt{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\epsilon}_{a2} - \tilde{\mu}_{a1}\tilde{\epsilon}_{a1} \sin^2 \varphi}} + 1}. \end{aligned} \quad (9.30)$$

Аналогично могут быть найдены выражения коэффициентов отражения и преломления для других составляющих при различной поляризации поля.

§ 9.3. Угол полного преломления (угол Брюстера)

Рассмотрим выражение (9.26), определяющее коэффициент отражения для составляющей поля \dot{H}_y в случае вертикальной поляризации.

Коэффициент \dot{M}_{Hy}^0 равен нулю при соблюдении условия

$$\sqrt{\frac{\tilde{\epsilon}_{a1}}{\tilde{\epsilon}_{a2}\tilde{\mu}_{a1}}} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\epsilon}_{a2} - \tilde{\mu}_{a1}\tilde{\epsilon}_{a1} \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi}} = 1. \quad (9.31)$$

Полагая параметры двух сред заданными, определим значение угла падения $\varphi = \varphi_B$, называемого *углом Брюстера*, при котором выполняется равенство (9.31). Это равенство может быть записано в форме

$$\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\epsilon}_{a1}\tilde{\epsilon}_{a2} - \tilde{\mu}_{a1}\tilde{\epsilon}_{a1}^2 \sin^2 \varphi_B = \tilde{\epsilon}_{a2}^2\tilde{\mu}_{a1} - \tilde{\epsilon}_{a2}^2\tilde{\mu}_{a1} \sin^2 \varphi_B,$$

откуда

$$\sin \varphi_B = \sqrt{\frac{\tilde{\epsilon}_{a2}(\tilde{\epsilon}_{a2}\tilde{\mu}_{a1} - \tilde{\epsilon}_{a1}\tilde{\mu}_{a2})}{\tilde{\mu}_{a1}(\tilde{\epsilon}_{a2}^2 - \tilde{\epsilon}_{a1}^2)}}. \quad (9.32)$$

Выражение (9.32) позволяет определить условия, при которых возможно полное преломление падающей волны, когда коэффициент отражения равен нулю. С помощью формулы (9.32) этот процесс можно проанализировать для любых сред. Однако для простоты и наглядности ограничимся средами, лишенными потерь, в которых диэлектрические и магнитные проницаемости являются действительными величинами. При этом $\tilde{\epsilon}_{a1} = \epsilon_{a1}$, $\tilde{\mu}_{a1} = \mu_{a1}$, $\tilde{\epsilon}_{a2} = \epsilon_{a2}$, $\tilde{\mu}_{a2} = \mu_{a2}$.

Рассмотрим несколько возможных случаев.

$$1. \mu_{a1} = \mu_{a2}, \epsilon_{a2}, \epsilon_{a1} > 0, \sin \varphi_B = \sqrt{\frac{\epsilon_{a2}}{\epsilon_{a2} + \epsilon_{a1}}}. \quad (9.33)$$

Угол Брюстера физически возможен. При $\epsilon_{a2} = \epsilon_{a1}$ возникает кажущееся противоречие; в силу того что обе среды одинаковы, отражение отсутствует при любом угле падения, а угол Брюстера получает определенное значение: $\varphi_B = 45^\circ$. Это следует понимать так, что по мере приближения ϵ_{a2} к ϵ_{a1} угол Брюстера стремится к 45° , при равенстве же диэлектрических и магнитных проницаемостей понятие угла Брюстера теряет смысл и полученные соотношения становятся неприменимыми.

$$2. \mu_{a1} \neq \mu_{a2}, \epsilon_{a2} > \epsilon_{a1}, \sin \varphi_B = \sqrt{\frac{\epsilon_{a2}(\epsilon_{a2}\mu_{a1} - \epsilon_{a1}\mu_{a2})}{\mu_{a1}(\epsilon_{a2}^2 - \epsilon_{a1}^2)}}. \quad (9.34)$$

Знаменатель при этом больше нуля и для физического осуществления полного преломления необходимо соблюдение двух условий:

$$\begin{aligned} & \text{а) } \epsilon_{a2}\mu_{a1} > \epsilon_{a1}\mu_{a2}, \\ & \text{б) } \epsilon_{a2}(\epsilon_{a2}\mu_{a1} - \epsilon_{a1}\mu_{a2}) < \mu_{a1}(\epsilon_{a2}^2 - \epsilon_{a1}^2). \end{aligned} \quad (9.35)$$

$$\text{в) } \mu_{a1} \neq \mu_{a2}, \epsilon_{a2} < \epsilon_{a1}.$$

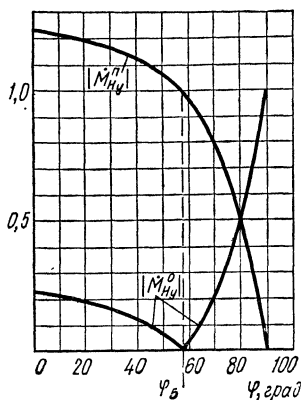


Рис. 9.2

Знаменатель в выражении (9.34) отрицателен и для физического осуществления полного преломления требуется соблюдение двух условий:

- а) $\epsilon_{a2}\mu_{a1} < \epsilon_{a1}\mu_{a2}$,
- б) $|\epsilon_{a2}(\epsilon_{a2}\mu_{a1} - \epsilon_{a1}\mu_{a2})| < |\mu_{a1}(\epsilon_{a2}^2 - \epsilon_{a1}^2)|$.

$$(9.36)$$

Аналогично могут быть получены условия полного преломления в случае горизонтальной поляризации.

Из приведенного анализа следует, что полное преломление возникает не во всех средах. Значение угла Брюстера φ_B является фиксированным. Если угол падения меньше или больше угла Брюстера, то полное преломление падающей волны исчезает. Сказанное иллюстрируется графиком рис. 9.2, построенным для модуля коэффициента M_{Hy}^o и коэффициента M_{Hy}^p в случае падения плоской волны с вектором \vec{E} , находящимся в плоскости падения из вакуума на среду с относительными магнитной и диэлектрической проницаемостями $\mu_2 = 1$ и $\epsilon_2 = 2,4$.

§ 9.4. Полное внутреннее отражение

При известных параметрах первой и второй сред и заданном угле падения угол преломления можно найти с помощью закона Снеллиуса (9.11). Рассматривая для простоты среды без потерь, получаем

$$\sin \varphi_n = \sin \varphi \sqrt{\frac{\mu_{a1}\epsilon_{a1}}{\mu_{a2}\epsilon_{a2}}}. \quad (9.37)$$

При соблюдении неравенства

$$\mu_{a1}\epsilon_{a1} > \mu_{a2}\epsilon_{a2} \quad (9.38)$$

всегда можно подобрать угол падения φ , при котором

$$\sin \varphi_n = 1 \text{ и } \varphi_n = \pi/2. \quad (9.39)$$

Выражение (9.37) позволяет легко определить угол падения, при котором соблюдаются условия (9.39). Этот угол называют *углом полного внутреннего отражения* $\varphi_{во}$:

$$\sin \varphi_{во} = \sqrt{\frac{\mu_{a2}\epsilon_{a2}}{\mu_{a1}\epsilon_{a1}}}. \quad (9.40)$$

Из формулы (9.37) следует, что при соблюдении неравенства (9.38) и увеличении угла падения φ до значения, при котором

$$\varphi > \varphi_{во}, \quad (9.41)$$

возникает неравенство

$$\sin \varphi_n > 1. \quad (9.42)$$

При этом становятся неясными поведение преломленной волны и весь процесс отражения и преломления. Задачей настоящего параграфа является анализ процессов отражения и преломления при углах падения, равных или превышающих угол полного внутреннего отражения $\varphi_{во}$. Если первая и вторая среды лишены потерь, то на основании формулы (9.37) $\sin \varphi_n$ — величина действительная. Выполнение неравенства (9.42) при действительных значениях угла φ_n невозможно. Будем считать этот угол комплексной величиной:

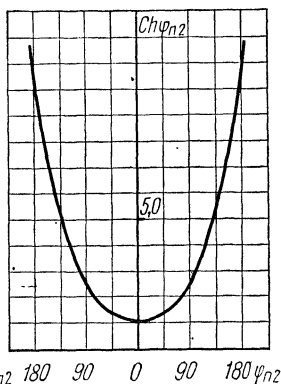


Рис. 9.3

$$\varphi_n = \varphi_{n1} + j\varphi_{n2}. \quad (9.43)$$

Тогда

$$\sin \varphi_n = \sin(\varphi_{n1} + j\varphi_{n2}) = \sin \varphi_{n1} \cos(j\varphi_{n2}) + \cos \varphi_{n1} \sin(j\varphi_{n2}).$$

Справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \cos(j\varphi_{n2}) &= \operatorname{ch} \varphi_{n2}, \\ \sin(j\varphi_{n2}) &= j \operatorname{sh} \varphi_{n2}. \end{aligned}$$

При этом

$$\sin \varphi_n = \sin \varphi_{n1} \operatorname{ch} \varphi_{n2} + j \cos \varphi_{n1} \operatorname{sh} \varphi_{n2}.$$

Но, как указывалось, в случае сред с действительными параметрами величина $\sin \varphi_n$ должна быть действительной, что может быть достигнуто при $\varphi_{n1} = \pi/2$. Тогда

$$\cos \varphi_{n1} = 0, \quad \sin \varphi_{n1} = 1, \quad \varphi_n = \pi/2 + j\varphi_{n2}, \quad (9.44)$$

$$\sin \varphi_n = \sin(\pi/2 + j\varphi_{n2}) = \operatorname{ch} \varphi_{n2}. \quad (9.45)$$

На рис. 9.3 дан график $\operatorname{ch} \varphi_{n2}$. Как следует из графика, $\operatorname{ch} \varphi_{n2}$ может принимать любое положительное значение, начиная с единицы. Следовательно, если угол преломления определяется выражением (9.44), то возможно соблюдение неравенства (9.42). Необходимо выяснить, какому физическому процессу соответствуют полученные соотношения. При соблюдении неравенства (9.42)

$$\cos \varphi_n = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_n}$$

превращается в мнимую величину и это выражение может быть записано в форме

$$\cos \varphi_n = -j \sqrt{\sin^2 \varphi_n - 1}. \quad (9.46)$$

Смысл знака «минус» перед корнем будет пояснен далее.

Подставляя выражение (9.46) в формулы для преломленного

поля (9.7), получаем соотношение

$$\begin{aligned} \dot{H}_{y\pi} &= C_1 M_{Hy}^{\pi} e^{-j\gamma_2 (z \cos \varphi_{\pi} + x \sin \varphi_{\pi})} = C_1 M_{Hy}^{\pi} e^{-j\gamma_2 (-j\sqrt{\sin^2 \varphi_{\pi} - 1} z + \sin \varphi_{\pi} x)} = \\ &= C_1 M_{Hy}^{\pi} e^{-\gamma_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_{\pi} - 1} z} e^{-j\gamma_2 \sin \varphi_{\pi} x}, \end{aligned} \quad (9.47)$$

из которого ясно, что в случае полного внутреннего отражения вдоль оси z возникает экспоненциальное затухание поля. Вдоль оси x происходит распространение волны. Из этого же выражения следует, что при выборе знака «плюс» перед корнем в выражении (9.46) возникает не затухание, а возрастание поля вдоль оси z , что невозможно в силу того, что продвижение вдоль оси z эквивалентно удалению от источников поля и дополнительные источники поля отсутствуют.

Таким образом, явление полного внутреннего отражения сопровождается возникновением своеобразной волны, распространяющейся вдоль границы раздела во второй среде и затухающей по экспоненте в направлении, перпендикулярном границе раздела. Волна как бы «прижимается» к первой среде, обладающей большим значением произведения $\mu_{a1}\epsilon_{a1}$. Волны такого типа, называемые *поверхностными*, имеют большое значение в радиотехнике.

Рассмотрим фазовую скорость поверхностной волны. Для этого найдем мгновенное значение составляющей магнитного поля во второй среде, комплексная амплитуда которой определяется формулой (9.47)

$$H_{y\pi}(t) = \text{Re}(\dot{H}_{y\pi} e^{i\omega t}) = \text{Re}(C_1 M_{Hy}^{\pi} e^{-\gamma_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_{\pi} - 1} z} e^{-j\gamma_2 \sin \varphi_{\pi} x} e^{i\omega t}).$$

Представим комплексный (в общем случае) коэффициент преломления в виде суммы действительной и мнимой частей:

$$M_{Hy}^{\pi} = M_{1Hy}^{\pi} + jM_{2Hy}^{\pi}. \quad (9.48)$$

Для сред без потерь в силу справедливости выражение (7.54) можно написать

$$\gamma_2 = \beta_2 = \omega \sqrt{\mu_{a2}\epsilon_{a2}}. \quad (9.49)$$

С учетом формул (9.48) и (9.49) выражение для $H_{y\pi}(t)$ записывают в виде

$$\begin{aligned} H_{y\pi}(t) &= \text{Re} \left\langle C_1 e^{-\beta_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_{\pi} - 1} z} \left(M_{1Hy}^{\pi} + jM_{2Hy}^{\pi} \right) \times \right. \\ &\times \left. \left\{ \cos(\omega t - \omega \sqrt{\mu_{a2}\epsilon_{a2}} \sin \varphi_{\pi} x) + j \sin(\omega t - \omega \sqrt{\mu_{a2}\epsilon_{a2}} \sin \varphi_{\pi} x) \right\} \right\rangle, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} H_{y\pi}(t) &= C_1 e^{-\beta_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_{\pi} - 1} z} \left\{ M_{1Hy}^{\pi} \cos(\omega t - \omega \sqrt{\mu_{a2}\epsilon_{a2}} \sin \varphi_{\pi} x) - \right. \\ &\left. - M_{2Hy}^{\pi} \sin(\omega t - \omega \sqrt{\mu_{a2}\epsilon_{a2}} \sin \varphi_{\pi} x) \right\}. \end{aligned} \quad (9.50)$$

Зафиксируем фазу тригонометрических функций, давая времени t и координате x определенное значение:

$$\omega t_1 - \omega \sqrt{\mu_{a2}\epsilon_{a2}} \sin \varphi_{\pi} x_1.$$

Далее найдем скорость перемещения этого фиксированного значения фазы вдоль оси x при изменении времени t . Для этого дадим времени t_1 приращение dt и соответственно координате x_1 — приращение dx . Новое значение фазы приравняем старому, аналогично тому, как это было сделано при определении фазовой скорости плоской волны в § 7.3:

$$\begin{aligned} \omega t_1 - \omega \sqrt{\mu_{a2} \varepsilon_{a2}} \sin \varphi_n x_1 &= \\ = \omega (t_1 + dt) - \omega \sqrt{\mu_{a2} \varepsilon_{a2}} \sin \varphi_n (x_1 + dx), \end{aligned}$$

или, сокращая одинаковые члены,

$$\begin{aligned} 0 &= \omega dt - \omega \sqrt{\mu_{a2} \varepsilon_{a2}} \sin \varphi_n dx, \\ \frac{dx}{dt} &= v_{\varphi x} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu_{a2} \varepsilon_{a2}} \sin \varphi_n} = \frac{1}{\sqrt{\mu_{a2} \varepsilon_{a2}} \sin \varphi_n}, \end{aligned} \quad (9.51)$$

где $v_{\varphi x}$ — фазовая скорость волны в направлении координаты x ; $\frac{1}{\sqrt{\mu_{a2} \varepsilon_{a2}}} = c$ — скорость света во второй среде.

При этом выражение (9.51) приобретет вид

$$v_{\varphi x} = c / \sin \varphi_n. \quad (9.52)$$

В случае полного внутреннего отражения справедливо соотношение (9.42) и, следовательно,

$$v_{\varphi x} < c. \quad (9.53)$$

Поверхностная волна обладает фазовой скоростью, меньшей скорости света. Подобные волны называют медленными волнами. Таким образом, поверхностная волна является волной медленной. Представляет интерес определение средних значений векторов Пойнтинга, ориентированных вдоль осей z и x во второй среде.

Вектор Пойнтинга определяется одной составляющей магнитного поля \dot{H}_{yn} (9.47) и двумя составляющими электрического поля \dot{E}_{xn} и \dot{E}_{zn} (9.16), (9.17). Применительно к рассматриваемому случаю эти формулы записываются в виде

$$\dot{E}_{xn} = -\frac{1}{j\omega \varepsilon_{a2}} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{yn}}{\partial z}, \quad (9.54)$$

$$\dot{E}_{zn} = \frac{1}{j\omega \varepsilon_{a2}} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{yn}}{\partial x}. \quad (9.55)$$

Подставляя значение \dot{H}_{yn} из выражения (9.47) и учитывая, что $\gamma_2 = \beta_2$, получаем

$$\dot{E}_{xn} = \frac{1}{j\omega \varepsilon_{a2}} \beta_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_n - 1} C_1 \dot{M}_{Hy}^n e^{-\beta_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_n - 1} z} e^{-j\beta_2 \sin \varphi_n x}, \quad (9.56)$$

$$\dot{E}_{zn} = \frac{1}{j\omega \varepsilon_{a2}} (-j) \beta_2 \sin \varphi_n C_1 \dot{M}_{Hy}^n e^{-\beta_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_n - 1} z} e^{-j\beta_2 \sin \varphi_n x}. \quad (9.57)$$

Средние значения векторов Пойнтинга, ориентированных вдоль осей x и z , определяются соответственно выражениями:

$$\dot{\mathbf{I}}_{dx} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}_{zn} \dot{\mathbf{H}}_{yn}^*], \quad (9.58)$$

$$\dot{\mathbf{I}}_{dz} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}_{xn} \dot{\mathbf{H}}_{yn}^*]. \quad (9.59)$$

Подставляя сюда значения $\dot{\mathbf{E}}_{xn}$, $\dot{\mathbf{E}}_{zn}$ и $\dot{\mathbf{H}}_{yn}^*$, получаем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{I}}_{dx} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[-\mathbf{1}_z \frac{\beta_2 \sin \varphi_n}{\omega \varepsilon_{a2}} C_1 \dot{M}_{Hy}^n e^{-\beta_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_n - 1} z} \times \right. \\ &\times e^{-j\beta_2 \sin \varphi_n x} \mathbf{1}_y C_1 \dot{M}_{Hy}^{n*} e^{-\beta_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_n - 1} z} e^{j\beta_2 \sin \varphi_n x} \left. \right] = \\ &= \mathbf{1}_x \frac{\beta_2 \sin \varphi_n}{2\omega \varepsilon_{a2}} C_1^2 |\dot{M}_{Hy}^n|^2 e^{-2\beta_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_n - 1} z}, \end{aligned} \quad (9.60)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{I}}_{dz} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\mathbf{1}_x \frac{\beta_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_n - 1}}{j\omega \varepsilon_{a2}} C_1 \dot{M}_{Hy}^n \times \right. \\ &\times e^{-\beta_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_n - 1} z} e^{-j\beta_2 \sin \varphi_n x} \mathbf{1}_y C_1 \dot{M}_{Hy}^{n*} e^{-\beta_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_n - 1} z} e^{j\beta_2 \sin \varphi_n x} \left. \right] = \\ &= \mathbf{1}_z \operatorname{Re} \frac{\beta_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_n - 1}}{j2\omega \varepsilon_{a2}} C_1^2 |\dot{M}_{Hy}^n|^2 e^{-2\beta_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_n - 1} z} = 0. \end{aligned} \quad (9.61)$$

Следовательно, существует действительная часть вектора Пойнтинга, ориентированного вдоль координаты x , что свидетельствует о распространении волны в этом направлении. Вектор Пойнтинга, ориентированный вдоль оси z , обладает только мнимой частью, его действительная часть равна нулю. Вдоль координаты z электромагнитная волна не распространяется, происходит пульсация мощности в этом направлении. Половину периода цикла вектор Пойнтинга направлен в сторону положительных значений оси z , половину периода — в сторону отрицательных значений. Среднее за период колебаний значение вектора Пойнтинга равно нулю.

Таким образом, в случае полного внутреннего отражения существуют три вектора Пойнтинга, средние значения которых отличны от нуля: 1) вектор Пойнтинга волны, падающей на границу раздела; 2) вектор Пойнтинга волны, отраженной от границы раздела; 3) вектор Пойнтинга поверхностной волны, распространяющейся вдоль оси x .

Нетрудно представить себе схему устройства, предназначенного для канализации электромагнитной энергии с помощью поверхностных волн (рис. 9.4). Концы пластины из диэлектрика $Пл$, ориен-

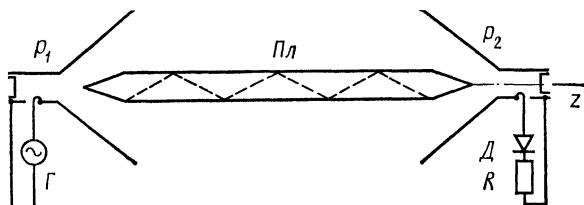


Рис. 9.4

тированной вдоль координаты z , введены в рупоры, один из которых (рупор P_1) излучает электромагнитную энергию, создаваемую генератором G , а другой рупор P_2 принимает ее. Электромагнитная волна, проникая в диэлектрик, падает на границу раздела диэлектрик — воздух под разными углами, в том числе и под углами, равными или большими угла полного внутреннего отражения. Часть энергии отражается от одной границы раздела и падает на другую границу раздела также под углами, равными или большими угла полного внутреннего отражения; процесс отражения повторяется.

В воздухе с двух сторон пластины образуется поверхностная волна, распространяющаяся вдоль оси z . В результате процесс передачи энергии осуществляется двумя волнами — внешней по отношению к диэлектрику поверхностной, медленной волной и внутренней волной, распространяющейся в диэлектрике. Подобные волноводы поверхностных, медленных волн находят широкое применение, и их работа будет подробно разобрана в последующих главах.

§ 9.5. Падение плоской волны на плоскую границу раздела с идеальным металлом

В § 7.5 было установлено, что поле в идеально проводящем металле равно нулю. Комплексная диэлектрическая проницаемость второй среды $\tilde{\epsilon}_{a2}$ при этом стремится к бесконечности, а коэффициент отражения для составляющей \dot{H}_y в соответствии с формулой (9.26) — к единице. Таким образом, суммарное значение тангенциальной составляющей магнитного поля у идеальной отражающей поверхности удваивается по сравнению с падающей волной. Волна полностью отражается и распространяется в первой среде под углом отражения, равным углу падения.

§ 9.6. Падение плоской волны на границу раздела с реальным металлом

В отличие от идеального металла электромагнитное поле в реальном металле существует, хотя и быстро затухает. Комплексная диэлектрическая проницаемость второй среды в силу справедливости неравенства (7.58) может быть записана в виде формулы (7.59). В случае падения плоской волны из воздуха или вакуума на реальный металл закон Снеллиуса (9.11) записывается в форме

$$\sin \varphi_n = \sin \varphi \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0}{\mu_{a2} \left(-j \frac{\gamma_{a2}}{\omega} \right)}}. \quad (9.62)$$

Считая $\mu_{a2} \geq \mu_0$ и учитывая неравенство (7.58), получаем

$$\sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0}{\mu_{a2} (-j) \frac{\gamma_{a2}}{\omega}}} \approx 0, \quad (9.63)$$

$$\sin \varphi_n \approx 0, \quad \cos \varphi_n = 1. \quad (9.64)$$

Таким образом, независимо от угла падения угол преломления в реальном металле близок к нулю. Электромагнитная энергия проникает в реальный металл в направлении, перпендикулярном границе раздела, и вызывает его нагрев. Для определения мощности электромагнитного поля, расходуемой на нагрев реального металла, необходимо установить математическую связь между составляющими поля в реальном металле. Допустим, что рассматривается поляризация поля, когда вектор \vec{E} падающей волны находится в плоскости падения. Составляющие поля преломленной волны определяются соотношениями (9.7), (9.20). Для вычисления составляющей $\dot{E}_{zп}$ используют выражение (9.17):

$$\begin{aligned} \dot{E}_{zп} &= \frac{1}{j\omega\tilde{\epsilon}_{a2}} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{yп}}{\partial x} = \\ &= -\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}}{\tilde{\epsilon}_{a2}}} \sin \varphi_{п} \dot{M}_{Hy}^{п} C_1 e^{-j\gamma_2 (z \cos \varphi_{п} + x \sin \varphi_{п})}. \end{aligned} \quad (9.65)$$

С учетом условий (9.64) можно считать, что

$$\dot{E}_{zп} \approx 0 \quad (9.66)$$

и

$$\dot{E}_{xп} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}}{\tilde{\epsilon}_{a2}}} \dot{M}_{Hy}^{п} C_1 e^{-j\gamma_2 (z \cos \varphi_{п} + x \sin \varphi_{п})}. \quad (9.67)$$

Взяв отношение $\dot{E}_{xп}$ к $\dot{H}_{yп}$, получаем

$$\frac{\dot{E}_{xп}}{\dot{H}_{yп}} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}}{\tilde{\epsilon}_{a2}}} = Z_m, \quad (9.68)$$

где Z_m — комплексное характеристическое сопротивление металла.

Если можно считать $\tilde{\mu}_{a2} = \mu_{a2}$, то с учетом выражения (7.59) волновое сопротивление металла записывается в виде, аналогичном (7.69):

$$Z_m = \sqrt{\frac{\omega\mu_{a2}}{2\gamma_{a2}}} (1 + j). \quad (9.69)$$

При известных параметрах реального металла его волновое сопротивление может быть всегда рассчитано.

Формулу (9.68) можно записать иначе:

$$\dot{E}_{xп} = \dot{H}_{yп} Z_m. \quad (9.70)$$

Проведя аналогичный анализ для поляризации, когда вектор \vec{H} падающей волны лежит в плоскости падения и тангенциальной к границе раздела является составляющая $\dot{E}_{yп}$, получим соотношение, сходное с (9.70):

$$\dot{E}_{yп} = -\dot{H}_{xп} Z_m. \quad (9.71)$$

Соотношения (9.70) и (9.71), связывающие ортогональные друг к другу тангенциальные к границе раздела составляющие электрического и магнитного полей, называют *граничными условиями у поверхности реального металла*.

Полученные соотношения имеют большое значение. Обычно при расчете поля в электродинамических системах реальный металл заменяют идеальным, обладающим бесконечно большой проводимостью. При этом получают тангенциальные к металлу составляющие магнитного поля, мало отличающиеся от тех составляющих, которые были бы получены при учете конечной проводимости металла, т. е. в реальном металле. Тангенциальные составляющие напряженности электрического поля для идеального металла оказываются равными нулю в силу известных граничных условий у поверхности идеального металла, определяемых формулой (8.19). Поэтому равна нулю и нормальная к металлу составляющая вектора Пойнтинга

$$\dot{P}_{\perp n} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{E}_{\tau} \dot{H}_{\tau}^*], \quad (9.72)$$

определяющая мощность потерь в металле.

Для реальных сред справедливы граничные условия (8.9). Вследствие этого поле \dot{H}_{yp} в металле можно заменить полем \dot{H}_y в первой среде. При этом формула (9.70) записывается в виде

$$\dot{E}_{xp} = \dot{H}_y Z_m. \quad (9.73)$$

Аналогичную замену можно осуществить и в формуле (9.71)

$$\dot{E}_{yp} = -\dot{H}_x Z_m. \quad (9.74)$$

Эти соотношения устанавливают связь между тангенциальными составляющими электрического поля во второй среде (реальном металле) и тангенциальными составляющими магнитного поля в первой среде.

Как было отмечено, разница между тангенциальными составляющими магнитного поля, рассчитанными для идеального и реального металлов, весьма мала, если реальный металл обладает большой проводимостью. Следовательно, без большой погрешности в выражениях (9.73), (9.74) магнитные поля \dot{H}_y и \dot{H}_x , существующие у поверхности реального металла, можно заменить магнитными полями, полученными при условии, что металл идеален. Таким образом, проводя расчет для идеального металла (что легче сделать), можно получить значение тангенциальных составляющих электрического поля в реальном металле и, как будет показано в дальнейшем, определить мощность потерь в реальном металле с учетом его конкретных свойств.

Соотношения, аналогичные (9.73), (9.74), получаются и в случае криволинейных границ раздела с реальным металлом. При этом их записывают в более общей форме [15]:

$$[\mathbf{1}_n \dot{E}_n] = -Z_m [\mathbf{1}_n [\mathbf{1}_n \dot{H}]]. \quad (9.75)$$

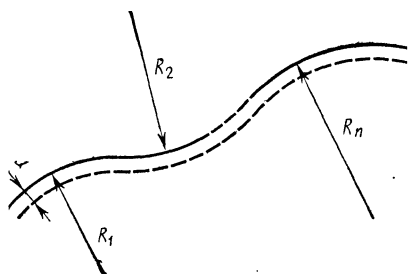


Рис. 9.5

Здесь $\mathbf{1}_n$ — единичная нормаль к границе раздела, ориентированная внутрь реального металла; $\dot{\mathbf{E}}_n$ — комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля в преломленной волне у границы раздела; Z_m — комплексное характеристическое сопротивление металла; $\dot{\mathbf{H}}$ — комплексная амплитуда вектора напряженности магнитного поля в первой среде у границы раздела.

Формула (9.75) справедлива при выполнении следующих ограничений: все параметры, характеризующие кривизну поверхности и обладающие размерностями длины, должны быть много больше глубины проникновения поля в металл d [см. формулу (7.72)]:

$$R_1, R_2, \dots, R_n \gg d, \quad (9.76)$$

где R_1, R_2, \dots, R_n — радиусы кривизны (рис. 9.5), характеризующие поверхность металла.

Заметим, что ограничения (9.76) в практических случаях не являются жесткими и им можно обычно удовлетворить.

Не проводя общего доказательства справедливости формулы (9.75), покажем, что соотношения, полученные с ее помощью в случае плоской границы раздела с реальным металлом, совпадают с выражениями (9.73), (9.74). Допустим, что нормаль $\mathbf{1}_n$ совпадает с осью z декартовой системы координат. Тогда члены формулы (9.75) запишутся в виде

$$[\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{E}}_n] = [1_z (\mathbf{1}_x \dot{E}_{xp} + \mathbf{1}_y \dot{E}_{yp} + \mathbf{1}_z \dot{E}_{zp})] = \mathbf{1}_y \dot{E}_{xp} - \mathbf{1}_x \dot{E}_{yp}.$$

Аналогично,

$$[\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{H}}] = \mathbf{1}_y \dot{H}_x - \mathbf{1}_x \dot{H}_y$$

и

$$[\mathbf{1}_n [\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{H}}]] = [1_z (\mathbf{1}_y \dot{H}_x - \mathbf{1}_x \dot{H}_y)] = -\mathbf{1}_x \dot{H}_x - \mathbf{1}_y \dot{H}_y.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (9.75), получаем

$$\mathbf{1}_y \dot{E}_{xp} - \mathbf{1}_x \dot{E}_{yp} = Z_m \mathbf{1}_x \dot{H}_x + Z_m \mathbf{1}_y \dot{H}_y,$$

или, приравнявая члены при одинаковых ортах,

$$\dot{E}_{xp} = \dot{H}_y Z_m, \quad \dot{E}_{yp} = -\dot{H}_x Z_m.$$

Видим, что эти соотношения в точности совпадают с (9.73) и (9.74).

§ 9.7. Мощность потерь в реальном металле

В соответствии с граничными условиями у поверхности реального металла существуют тангенциальные составляющие магнитного и электрического полей. Эти составляющие создают вектор Пойн-

тинга, направленный внутрь металла, нормально к границе раздела. Таким образом, возникает поток мощности, расходуемой на нагрев металла, или мощность потерь. Среднее значение вектора Пойнтинга определяется выражением (4.29). Нормальная к границе раздела составляющая этого вектора получается проекцией его на направление единичной нормали к границе раздела:

$$\dot{\Pi}_{дн} = \mathbf{1}_n (\mathbf{1}_n \dot{\Pi}_д) = \mathbf{1}_n \left(\mathbf{1}_n \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}^*] \right) = \mathbf{1}_n \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{1}_n [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}^*]),$$

где $\mathbf{1}_n [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}^*]$ является смешанным произведением (единичная нормаль умножается скалярно на результат векторного произведения). В смешанном произведении допустимы циклические перестановки:

$$\mathbf{1}_n [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}^*] = \dot{\mathbf{H}}^* [\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{E}}].$$

Следовательно,

$$\dot{\Pi}_{дн} = \mathbf{1}_n \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\dot{\mathbf{H}}^* [\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{E}}]).$$

Определяя нормальную составляющую вектора Пойнтинга в реальном металле $\dot{\Pi}_{дн}^п$, следует использовать составляющие поля в металле:

$$\dot{\Pi}_{дн}^п = \mathbf{1}_n \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\dot{\mathbf{H}}_п^* [\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{E}}_п])$$

и соотношение (9.75)

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_{дн}^п &= \mathbf{1}_n \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \dot{\mathbf{H}}_п^* (-Z_m [\mathbf{1}_n [\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{H}}]]) \} \Rightarrow \\ &= \mathbf{1}_n \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ -Z_m \dot{\mathbf{H}}_п^* [\mathbf{1}_n [\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{H}}]] \}. \end{aligned} \quad (9.77)$$

Здесь $\dot{\mathbf{H}}_п^* [\mathbf{1}_n [\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{H}}]]$ — также смешанное произведение.

Осуществляя циклическую перестановку, получаем

$$\dot{\mathbf{H}}_п^* [\mathbf{1}_n [\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{H}}]] = [\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{H}}] [\dot{\mathbf{H}}_п^* \mathbf{1}_n] = - [\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{H}}] [\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{H}}_п^*].$$

Первое векторное произведение дает тангенциальную составляющую поля $\dot{\mathbf{H}}$ в первой среде, у границы раздела с реальным металлом:

$$[\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{H}}] = \dot{\mathbf{H}}_т,$$

второе векторное произведение — тангенциальную составляющую сопряженного вектора $\dot{\mathbf{H}}_п^*$ у границы раздела с реальным металлом:

$$[\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{H}}_п^*] = \dot{\mathbf{H}}_{тп}^*.$$

В силу граничных условий (8.9) эта тангенциальная составляющая магнитного поля во второй среде равна тангенциальной составляющей в первой среде у границы раздела. Следовательно,

$$\dot{\mathbf{H}}_{тп}^* = \dot{\mathbf{H}}_т^*.$$

Тогда можно записать следующее соотношение:

$$\dot{\mathbf{H}}_n^* [1_n [1_n \dot{\mathbf{H}}]] = -\dot{\mathbf{H}}_\tau \dot{\mathbf{H}}_\tau^* = -|\dot{\mathbf{H}}_\tau|^2. \quad (9.78)$$

Подставляя его в формулу (9.77), получаем

$$\dot{\mathbf{P}}_{дн}^n = 1_n \frac{1}{2} \operatorname{Re} (Z_m |\dot{\mathbf{H}}_\tau|^2).$$

Используя выражение для волнового сопротивления металла (9.69) и взяв действительную часть, находим окончательное соотношение для вектора Пойнтинга в реальном металле:

$$\dot{\mathbf{P}}_{дн}^n = 1_n \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_{a2} \omega}{2\gamma_{a2}}} |\dot{\mathbf{H}}_\tau|^2. \quad (9.79)$$

Мощность, теряемую в реальном металле площадью S_1 , на которую падает электромагнитная волна, определяют путем интегрирования вектора Пойнтинга по этой поверхности:

$$P_{\text{пот}} = \int_{S_1} \dot{\mathbf{P}}_{дн}^n dS, \\ P_{\text{пот}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_{a2} \omega}{2\gamma_{a2}}} \int_{S_1} |\dot{\mathbf{H}}_\tau|^2 dS. \quad (9.80)$$

Для расчета мощности, теряемой в реальном металле, необходимо знать параметры металла, частоту колебаний и значение тангенциальной составляющей магнитного поля у границы раздела с реальным металлом.

ГЛАВА 10

КАРТИНЫ ПОЛЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ У ИДЕАЛЬНОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ ПРИ ПАДЕНИИ НА НЕЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ. ДУХПЛОСКОСТНОЙ ВОЛНОВОД

§ 10.1. Постановка вопроса

Для локализации электромагнитного поля и направления его в желаемую сторону часто используют металлические плоскости различных конфигураций. Рассмотрим картины поля, возникающие у идеальной металлической плоскости при падении на нее плоской волны. Анализ этого простейшего случая облегчит понимание более сложных процессов, происходящих в реальных системах, предназначенных для канализаций электромагнитного поля. Покажем, что между двумя металлическими плоскостями возможно распространение электромагнитной энергии и определим условия, при которых оно происходит. Поскольку вектор \mathbf{E} может быть ориентирован

различно по отношению к плоскости падения, рассмотрим два крайних случая:

- 1) вектор \mathbf{E} лежит в плоскости падения;
- 2) вектор \mathbf{E} перпендикулярен плоскости падения.

Очевидно, любое иное положение вектора \mathbf{E} можно представить суперпозицией этих крайних случаев.

§ 10.2. Случай первый. Вектор \mathbf{E} лежит в плоскости падения. Волны электрического типа

Зададимся направлением вектора Пойнтинга падающей волны $\mathbf{\Pi}$. Тогда фронт падающей волны, под которым подразумевается плоскость одинаковой фазы, будет нормален к вектору $\mathbf{\Pi}$. Обозначим следы плоскостей одной фазы сплошными линиями (рис. 10.1).

Условимся, что каждая сплошная линия сдвинута по отношению к соседней на расстояние, равное половине длины волны. В пределах каждой такой линии вектор \mathbf{E} неизменен по величине и направлению. В соседних линиях вектор \mathbf{E} одинаков по величине и обратен по направлению. Задавшись направлением вектора \mathbf{E} в какой-либо линии фронта и зная направление вектора $\mathbf{\Pi}$, можно однозначно определить ориентацию вектора \mathbf{H} . Падающая волна, достигнув металлической плоскости, вызывает отраженную волну, фронт которой распространяется в направлении вектора Пойнтинга отраженной волны $\mathbf{\Pi}_0$. При определении направления векторов \mathbf{E}_0 в фронтах отраженной волны следует исходить из граничных условий у идеальной металлической поверхности, в силу которых суммарная тангенциальная составляющая поля \mathbf{E} у поверхности должна быть равна нулю. Направление вектора \mathbf{H}_0 определяется направлением вектора \mathbf{E}_0 и ориентацией вектора Пойнтинга отраженной волны $\mathbf{\Pi}_0$.

На рис. 10.2 на сетке фронтов падающей и отраженной волн показано направление суммарных векторов $\mathbf{E}_\Sigma = \mathbf{E} + \mathbf{E}_0$ в точках пересечения фронтов. Линии вектора \mathbf{E}_Σ образуют характерные замкнутые петли. На рис. 10.3 на сетке фронтов падающей и

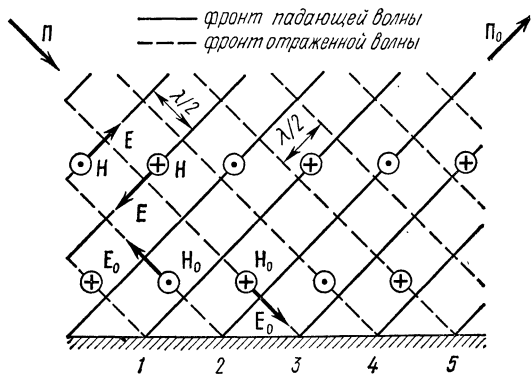


Рис. 10.1

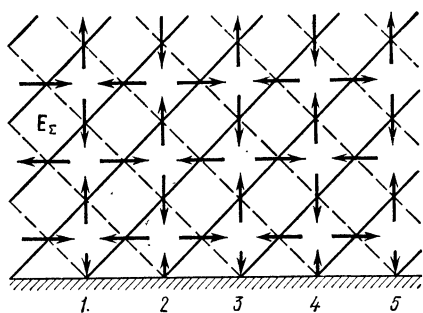


Рис. 10.2

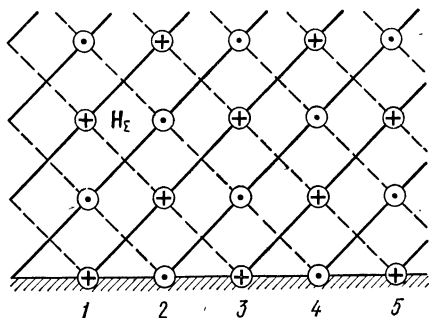


Рис. 10.3

отраженной волн показано направление суммарных векторов \mathbf{H}_Σ , ориентированных нормально к плоскости рисунка.

На рис. 10.4 дана общая картина распределения в полупространстве силовых линий электрического и магнитного полей, построенная по рис. 10.2 и 10.3. Изображенные картины соответствуют фиксированному моменту времени. Они движутся вдоль металлической плоскости слева направо. Определим масштаб полученных картин и скорость их движения.

На рис. 10.5 показано отдельно пересечение двух фронтов падающей волны с двумя фронтами отраженной волны. Из рисунка следует, что

$$a = \frac{\lambda}{2 \cos \varphi}, \quad b = \frac{\lambda}{2 \sin \varphi}. \quad (10.1)$$

Таким образом, масштаб картин определяется длиной волны и углом падения плоской волны на металлическую плоскость.

На рис. 10.6 показан фронт падающей волны, соответствующий фиксированному моменту времени $t = t_1$. Параллельная линия соответствует положению этого фронта через время dt .

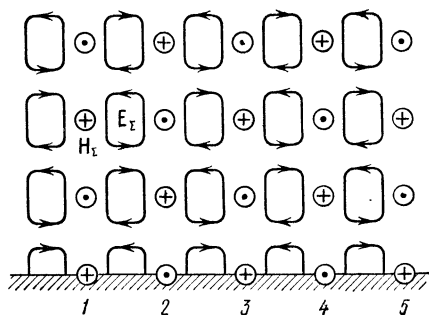


Рис. 10.4

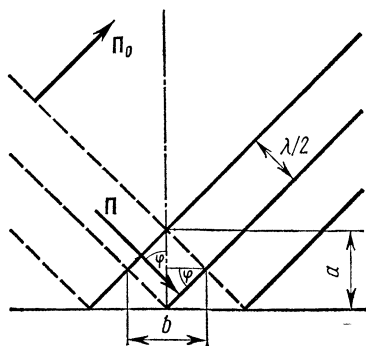


Рис. 10.5

Из рис. 10.6 следует, что

$$ac = \frac{bc}{\sin \varphi} = \frac{c dt}{\sin \varphi}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}}.$$

Отношение

$$\frac{ac}{dt} = v_\Phi = \frac{c}{\sin \varphi} \geq c.$$

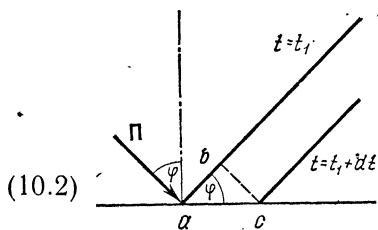


Рис. 10.6

Таким образом, скорость распространения точек одинаковой фазы вдоль границы раздела может быть больше скорости света в среде. При этом нет противоречия с положением Эйнштейна в силу того, что фазовая скорость не представляет собой скорости переноса электромагнитного поля. Примером фазовой скорости может служить движение морской волны к берегу и щепки, находящейся в воде. Щепка перемещается со скоростью движения материальных частиц воды к берегу, которая значительно меньше скорости перемещения гребней волн в результате поперечных колебаний воды, т. е. попеременного подъема и опускания двух соседних участков воды. Это попеременное опускание и подъем создает впечатление быстрого движения волн к берегу со скоростью, которую можно считать фазовой.

Из рис. 10.4 видно, что поле, перемещающееся вдоль границы раздела, обладает только поперечными по отношению к направлению перемещения составляющими магнитного поля \mathbf{H} . Электрическое поле \mathbf{E} помимо поперечной обладает продольной составляющей, совпадающей по направлению с вектором фазовой скорости.

Подобную волну называют волной электрического типа и обозначают E . Таким образом, волной типа E называют такую, у которой существует продольная составляющая вектора напряженности электрического поля и нет продольной составляющей вектора напряженности магнитного поля.

§ 10.3. Случай второй. Вектор \mathbf{E} перпендикулярен плоскости падения. Волны магнитного типа

Ход рассуждений при рассмотрении второго случая аналогичен первому случаю. Рис. 10.7—10.10 соответствуют рис. 10.1—10.4. Отличие заключается в том, что замкнутые петли линий \mathbf{E} во втором случае заменяются замкнутыми петлями линий \mathbf{H} .

Масштабы картин поля и выражения для фазовой скорости также аналогичны. В первом случае образуется волна типа E , во втором случае поле \mathbf{E} не имеет продольных составляющих, совпадающих по направлению с вектором фазовой скорости, и расположено в плоскости, перпендикулярной направлению распространения.

Продольной составляющей обладает поле \mathbf{H} . Такую волну называют волной магнитного типа и обозначают H . Проведенный анализ показывает допустимость ограничения распространения

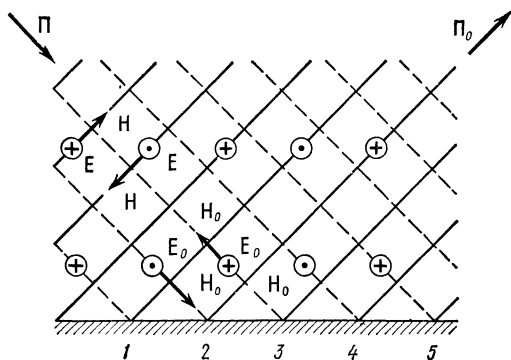


Рис. 10.7

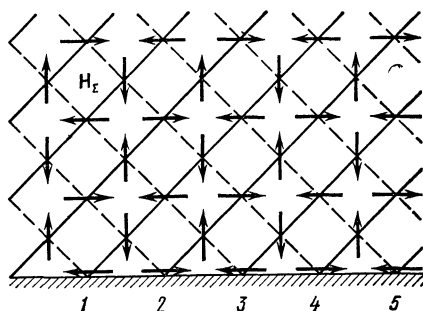


Рис. 10.8

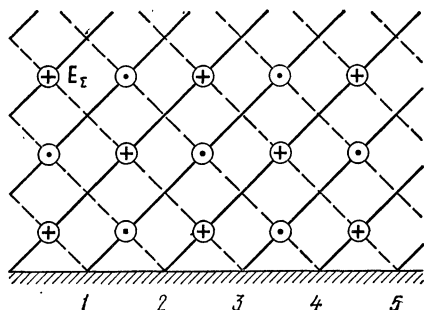


Рис. 10.9

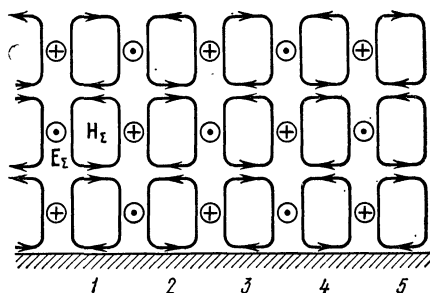


Рис. 10.10

электромагнитного поля с одной стороны металлической плоскостью. Попробуем ограничить электромагнитное поле с двух сторон, поместив параллельно первой металлической плоскости вторую.

§ 10.4. Двухплоскостной волновод

Поместим выше первой металлической плоскости вторую бесконечную плоскость из идеального металла таким образом, чтобы не нарушить имеющейся картины поля. Для этого вторую плоскость следует размещать на расстояниях $l = na$, где $n = 1, 2, 3, \dots$ — ряд целых чисел. При этом поле \mathbf{E} будет подходить к металлическим плоскостям нормально, а поле \mathbf{H} — тангенциально. Граничные условия будут соблюдены и картина поля между двумя плоскостями будет такой же, как и в случае одной плоскости.

Картина поля при $n=1$ и волне типа E показана на рис. 10.11. Волна подобного типа обладает одной вариацией поля по направлению, перпендикулярному плоскостям, и называется волной типа E_1 . Картина поля при $n=2$ и волне типа H_2 показаны на рис. 10.12.

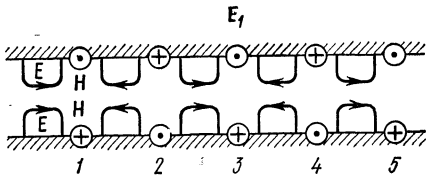


Рис. 10.11

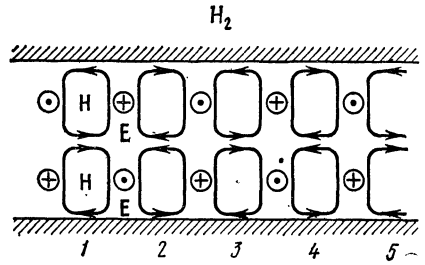


Рис. 10.12

С учетом выражения (10.1) расстояния между плоскостями

$$l = na = n \frac{\lambda}{2 \cos \varphi} \quad (10.3)$$

Величина l зависит от угла падения φ . Если требуется волна более высокого типа, например $2n$ при неизменном угле φ , то для ее возникновения следует в два раза увеличить расстояние l . Минимальное расстояние, при котором возможно существование волны с $n = 1$,

$$l_1 = 1 \frac{\lambda}{2}.$$

Минимальное расстояние, при котором возможно существование волны с $n = 2$,

$$l_2 = \lambda.$$

При

$$\lambda/2 < l < \lambda \quad (10.4)$$

это условие является условием единственности волны с $n = 1$. Все волны с большими индексами не смогут распространяться между двумя плоскостями. При расстоянии: $\lambda < l < \frac{3}{2}\lambda$ возникнет волна с $n = 2$ и не сможет возникнуть волны с $n = 3$. Однако одновременно сможет существовать и волна с $n = 1$, называемая основной. Таким образом, путем надлежащего выбора расстояния между плоскостями можно обеспечить условие единственности волны основного типа и нельзя обеспечить условия единственности волн высшего типа. Введение второй плоскости позволило еще более ограничить электромагнитное поле в пространстве. Система из двух бесконечных плоскостей физически нереальна. Далее будут рассмотрены реальные канализирующие системы — волноводы.

Заметим на основании формулы (10.3), что при $l \leq \lambda/2$ в двухплоскостном волноводе не могут существовать волны типа E или H. Однако, если силовые линии магнитного поля ориентированы тангенциально по отношению к плоскостям, а силовые линии электрического поля перпендикулярны к ним, как показано на рис. 10.13, возникает волна, у которой вектор Пойнтинга ориен-

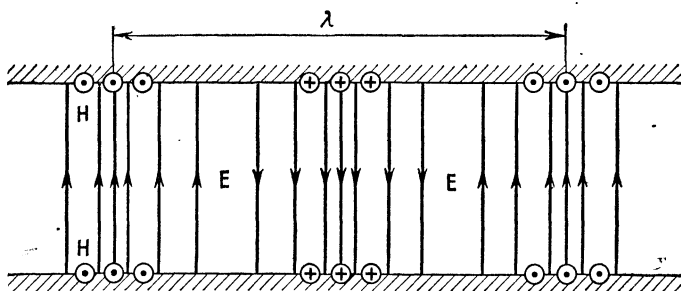


Рис. 10.13

тирован вдоль оси волновода. Подобная волна не обладает продольными составляющими электрического и магнитного полей и называется волной типа Т. Поскольку вектор Пойнтинга в такой волне совпадает с осью распространения, фазовая скорость волны типа Т равна скорости света в среде, заполняющей волновод. Из выражения (10.2) следует, что угол падения φ такой волны должен быть равен 90° .

ГЛАВА 11

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ВОЛНАХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ТИПОВ

§ 11.1. Постановка вопроса

В гл. 10 были рассмотрены теоретически простейшие, физически нереальные устройства, канализирующие электромагнитные волны. При этом была установлена для двух случаев поляризации вектора \mathbf{E} падающей волны возможность существования в канализирующих системах волн электрического и магнитного типов. В случае какого-либо промежуточного положения вектор \mathbf{E} падающей волны может быть разложен на две составляющие: 1) находящуюся в плоскости падения; 2) лежащую в плоскости, перпендикулярной плоскости падения. При этом в канализирующей системе будут существовать две независимые волны — типов Е и Н и суммарное поле образуется в результате суперпозиции этих колебаний. В ряде важных практических устройств указанные волны существуют раздельно, и специально обеспечиваются условия существования волн одного или другого типа. Поэтому представляет интерес изучение общих условий, при которых возможно их существование, и определение соотношений, связывающих составляющие поля для волн типа Е или Н. Математически эта задача сводится к исследованию уравнений Максвелла в отсутствие продольной составляющей либо поля \mathbf{H} , либо поля \mathbf{E} . В настоящей главе будет проведено такое исследование в самом общем случае исполь-

зования обобщенной ортогональной криволинейной системы координат. При этом в качестве продольной оси, вдоль которой распространяется поле, будет выбрана ось ζ . Тогда волнам электрического типа будет соответствовать равенство нулю продольной составляющей магнитного поля: $\mathbf{H}_\zeta = 0$ и волнам магнитного типа — условие $\mathbf{E}_\zeta = 0$.

§ 11.2. Система скалярных уравнений Максвелла в обобщенной ортогональной криволинейной системе координат

В основу анализа положены векторные уравнения Максвелла для комплексных амплитуд (2.12) и (2.13). Здесь не рассматриваются вопросы возбуждения электромагнитного поля заданной системы токов \mathbf{J}_a и \mathbf{J}_m , в силу чего токи следует положить равными нулю. При этом уравнения Максвелла запишутся в виде

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}, \quad (11.1)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}. \quad (11.2)$$

Запишем векторы $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ в развернутой форме в обобщенной ортогональной криволинейной системе координат ξ, η, ζ (см. приложение I):

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{1}_\xi \dot{E}_\xi + \mathbf{1}_\eta \dot{E}_\eta + \mathbf{1}_\zeta \dot{E}_\zeta, \quad (11.3)$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{1}_\xi \dot{H}_\xi + \mathbf{1}_\eta \dot{H}_\eta + \mathbf{1}_\zeta \dot{H}_\zeta, \quad (11.4)$$

где $\mathbf{1}_\xi, \mathbf{1}_\eta, \mathbf{1}_\zeta$ — орты, соответствующие координатам ξ, η, ζ .

Используя выражение для ротора вектора \mathbf{a} , приведенное в приложении II, получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = & \mathbf{1}_\xi \frac{1}{h_\eta h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{E}_\zeta h_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{E}_\eta h_\eta) \right\} + \\ & + \mathbf{1}_\eta \frac{1}{h_\xi h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{E}_\xi h_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{E}_\zeta h_\zeta) \right\} + \\ & + \mathbf{1}_\zeta \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{E}_\eta h_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{E}_\xi h_\xi) \right\}, \end{aligned} \quad (11.5)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = & \mathbf{1}_\xi \frac{1}{h_\eta h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{H}_\zeta h_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{H}_\eta h_\eta) \right\} + \\ & + \mathbf{1}_\eta \frac{1}{h_\xi h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{H}_\xi h_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{H}_\zeta h_\zeta) \right\} + \mathbf{1}_\zeta \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{H}_\eta h_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{H}_\xi h_\xi) \right\}, \end{aligned} \quad (11.6)$$

где h_ξ, h_η, h_ζ — коэффициенты Лямэ, соответствующие координатам ξ, η, ζ .

Подставив выражения (11.3), (11.4), (11.5), (11.6) в уравнения (11.1), (11.2) и приравняв в левой и правой частях члены при одинаковых ортах, получаем из каждого векторного уравнения

Максвелла по три скалярных уравнения:

$$\frac{1}{h_\eta h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{H}_\zeta h_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{H}_\eta h_\eta) \right\} = j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_\xi, \quad (11.7)$$

$$\frac{1}{h_\xi h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{H}_\xi h_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{H}_\zeta h_\zeta) \right\} = j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_\eta, \quad (11.8)$$

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{H}_\eta h_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{H}_\xi h_\xi) \right\} = j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_\zeta, \quad (11.9)$$

$$\frac{1}{h_\eta h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{E}_\zeta h_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{E}_\eta h_\eta) \right\} = -j\omega \tilde{\mu}_a \dot{H}_\xi, \quad (11.10)$$

$$\frac{1}{h_\xi h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{E}_\xi h_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{E}_\zeta h_\zeta) \right\} = -j\omega \tilde{\mu}_a \dot{H}_\eta, \quad (11.11)$$

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{E}_\eta h_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{E}_\xi h_\xi) \right\} = -j\omega \tilde{\mu}_a \dot{H}_\zeta. \quad (11.12)$$

Система (11.7) представляет собой систему скалярных уравнений Максвелла в обобщенной ортогональной криволинейной системе координат.

§ 11.3. Волны электрического и магнитного типов

Для волн электрического типа в уравнении (11.7) следует положить

$$\dot{H}_\zeta = 0. \quad (11.13)$$

При этом скалярные уравнения Максвелла запишутся в следующей форме:

$$-\frac{1}{h_\eta h_\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{H}_\eta h_\eta) = j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_\xi, \quad (11.14)$$

$$\frac{1}{h_\xi h_\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{H}_\xi h_\xi) = j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_\eta, \quad (11.15)$$

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{H}_\eta h_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{H}_\xi h_\xi) \right\} = j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_\zeta, \quad (11.16)$$

$$\frac{1}{h_\eta h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{E}_\zeta h_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{E}_\eta h_\eta) \right\} = -j\omega \tilde{\mu}_a \dot{H}_\xi, \quad (11.17)$$

$$\frac{1}{h_\xi h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{E}_\xi h_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{E}_\zeta h_\zeta) \right\} = -j\omega \tilde{\mu}_a \dot{H}_\eta, \quad (11.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{E}_\eta h_\eta) = \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{E}_\xi h_\xi). \quad (11.19)$$

Попробуем выразить поперечные к направлению распространения ζ составляющие поля \dot{H}_ξ , \dot{H}_η , \dot{E}_ξ , \dot{E}_η через продольную составляющую \dot{E}_ζ и получить уравнение, в котором содержалась бы только эта продольная составляющая. Если бы эта операция была возможна, то отыскание составляющих поля в конкретных канализирующих системах существенно упростилось бы. Необходимо было бы решить уравнение для продольной составляющей \dot{E}_ζ , а

затем с помощью формул, связывающих поперечные составляющие поля с \dot{E}_ζ , можно было бы определить и поперечные составляющие.

Умножим уравнение (11.18) на коэффициент Лямэ h_η и выразим функцию $\dot{H}_\eta h_\eta$:

$$\dot{H}_\eta h_\eta = \frac{j}{\omega \tilde{\mu}_a} \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{E}_\xi h_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{E}_\zeta h_\zeta) \right\}. \quad (11.20)$$

Подставим полученное соотношение в уравнение (11.14), предварительно умножив последнее на коэффициент Лямэ h_ξ :

$$-\frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \cdot \frac{j}{\omega \tilde{\mu}_a} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\langle \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{E}_\xi h_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{E}_\zeta h_\zeta) \right\} \right\rangle = j \omega \tilde{\epsilon}_a (\dot{E}_\xi h_\xi).$$

Сгруппируем члены, содержащие $(\dot{E}_\xi h_\xi)$:

$$\begin{aligned} j \omega \tilde{\epsilon}_a (\dot{E}_\xi h_\xi) + \frac{j}{\omega \tilde{\mu}_a} \cdot \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{E}_\xi h_\xi) \right\} = \\ = \frac{j}{\omega \tilde{\mu}_a} \cdot \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{E}_\zeta h_\zeta) \right\}. \end{aligned} \quad (11.21)$$

Умножим уравнение (11.17) на коэффициент Лямэ h_ξ и выразим функцию $\dot{H}_\xi h_\xi$:

$$\dot{H}_\xi h_\xi = \frac{j}{\omega \tilde{\mu}_a} \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{E}_\zeta h_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{E}_\eta h_\eta) \right\}. \quad (11.22)$$

Подставим полученное соотношение в уравнение (11.15), предварительно умножив последнее на коэффициент Лямэ h_η :

$$\frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \cdot \frac{j}{\omega \tilde{\mu}_a} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\langle \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{E}_\zeta h_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{E}_\eta h_\eta) \right\} \right\rangle = j \omega \tilde{\epsilon}_a (\dot{E}_\eta h_\eta).$$

Сгруппируем члены, содержащие $(\dot{E}_\eta h_\eta)$:

$$\begin{aligned} j \omega \tilde{\epsilon}_a (\dot{E}_\eta h_\eta) + \frac{j}{\omega \tilde{\mu}_a} \cdot \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{E}_\eta h_\eta) \right\} = \\ = \frac{j}{\omega \tilde{\mu}_a} \cdot \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{E}_\zeta h_\zeta) \right\}. \end{aligned} \quad (11.23)$$

Подставим функции $\dot{E}_\xi h_\xi$ в выражение (11.20) из уравнения (11.14):

$$\begin{aligned} \dot{H}_\eta h_\eta = \frac{j}{\omega \tilde{\mu}_a} \cdot \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ -\frac{1}{j \omega \tilde{\epsilon}_a} \cdot \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{H}_\eta h_\eta) \right\} - \\ - \frac{j}{\omega \tilde{\mu}_a} \cdot \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{E}_\zeta h_\zeta). \end{aligned}$$

Сгруппировав члены, получаем

$$\begin{aligned} (\dot{H}_\eta h_\eta) + \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a} \cdot \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{H}_\eta h_\eta) \right\} = \\ = -\frac{j}{\omega \tilde{\mu}_a} \cdot \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{E}_\zeta h_\zeta). \end{aligned} \quad (11.24)$$

Далее подставим функцию $\dot{E}_\eta h_\eta$ в выражение (11.22) из уравнения (11.15):

$$\begin{aligned} \dot{H}_\xi h_\xi = & -\frac{j}{\omega \tilde{\mu}_a} \cdot \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{1}{j \omega \tilde{\epsilon}_a} \cdot \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{H}_\xi h_\xi) \right\} + \\ & + \frac{j}{\omega \tilde{\mu}_a} \cdot \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{E}_\zeta h_\zeta). \end{aligned}$$

Сгруппировав члены, находим

$$\begin{aligned} \dot{H}_\xi h_\xi + \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a} \cdot \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{H}_\xi h_\xi) \right\} = \\ = \frac{j}{\omega \tilde{\mu}_a} \cdot \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{E}_\zeta h_\zeta). \end{aligned} \quad (11.25)$$

Выражения (11.21), (11.23), (11.24) и (11.25) дают связь поперечных составляющих поля с продольной составляющей \dot{E}_ζ , однако она имеет сложный, дифференциальный характер, так как вторые члены в этих выражениях, содержащие искомые функции, стоят под знаком производных по координате ζ .

Для определения уравнения, содержащего только продольную составляющую электрического поля \dot{E}_ζ , используют уравнение (11.16), в которое подставляют выражения (11.20) и (11.22):

$$\begin{aligned} \frac{h_\zeta}{h_\xi h_\eta} \cdot \frac{j}{\omega \tilde{\mu}_a} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{E}_\xi h_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{E}_\zeta h_\zeta) \right\} \right\rangle - \\ - \frac{h_\zeta}{h_\xi h_\eta} \cdot \frac{j}{\omega \tilde{\mu}_a} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left\langle \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{E}_\zeta h_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{E}_\eta h_\eta) \right\} \right\rangle = j \omega \tilde{\epsilon}_a (\dot{E}_\zeta h_\zeta). \end{aligned}$$

Перегруппируем несколько это уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{h_\zeta}{h_\xi h_\eta} \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{E}_\zeta h_\zeta) \right\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{E}_\zeta h_\zeta) \right\} \right\rangle + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a (\dot{E}_\zeta h_\zeta) = \\ = \frac{h_\zeta}{h_\xi h_\eta} \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{E}_\xi h_\xi) \right\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{E}_\eta h_\eta) \right\} \right\rangle. \end{aligned} \quad (11.26)$$

В нем помимо составляющей \dot{E}_ζ содержатся составляющие \dot{E}_ξ и \dot{E}_η . Попробуем их исключить. Из уравнений (11.14), (11.15) получаем

$$h_\zeta j \omega \tilde{\epsilon}_a (\dot{E}_\xi h_\xi) = -\frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{H}_\eta h_\eta), \quad (11.27)$$

$$h_\zeta j \omega \tilde{\epsilon}_a (\dot{E}_\eta h_\eta) = \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{H}_\xi h_\xi). \quad (11.28)$$

Продифференцируем выражение (11.27) по ξ и (11.28) по η :

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \zeta} (\dot{H}_\eta h_\eta) = -j \omega \tilde{\epsilon}_a \frac{\partial}{\partial \xi} \{ h_\zeta (\dot{E}_\xi h_\xi) \}, \quad (11.29)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \zeta} (\dot{H}_\xi h_\xi) = j \omega \tilde{\epsilon}_a \frac{\partial}{\partial \eta} \{ h_\zeta (\dot{E}_\eta h_\eta) \}. \quad (11.30)$$

Далее продифференцируем уравнение (11.16) по ζ :

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \zeta} (\dot{H}_\eta h_\eta) - \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \zeta} (\dot{H}_\xi h_\xi) = j\omega \tilde{e}_a \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_\xi h_\eta \dot{E}_\zeta). \quad (11.31)$$

Подставим в уравнение (11.31) соотношения (11.29), (11.30) и произведем сокращение на $j\omega \tilde{e}_a$:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \{h_\zeta (\dot{E}_\xi h_\eta)\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \{h_\zeta (\dot{E}_\eta h_\xi)\} = - \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_\xi h_\eta \dot{E}_\zeta). \quad (11.32)$$

Продифференцируем это соотношение по ζ :

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \zeta} \{h_\zeta (\dot{E}_\xi h_\eta)\} + \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \zeta} \{h_\zeta (\dot{E}_\eta h_\xi)\} = - \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} (h_\xi h_\eta \dot{E}_\zeta). \quad (11.33)$$

Выражение (11.33) устанавливает связь между вторыми производными составляющих \dot{E}_ξ , \dot{E}_η и второй производной составляющей \dot{E}_ζ . Эта связь может быть использована для исключения составляющих \dot{E}_ξ , \dot{E}_η из правой части уравнения (11.26). Сравним правую часть уравнения (11.26) с левой частью уравнения (11.33):

$$\frac{h_\zeta}{h_\xi h_\eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{E}_\xi h_\xi) \right\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{E}_\eta h_\eta) \right\} \right\}$$

и

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \zeta} \{h_\zeta (\dot{E}_\xi h_\eta)\} + \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \zeta} \{h_\zeta (\dot{E}_\eta h_\xi)\}.$$

Если допустить, что коэффициенты Лямэ h_ξ и h_η не являются функциями координаты ζ и коэффициент h_ζ равен единице (ζ — прямолинейная координата), то правую часть уравнения (11.26) можно записать в виде

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \zeta} (\dot{E}_\xi h_\eta) + \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \zeta} (\dot{E}_\eta h_\xi) \right\}.$$

При указанных ограничениях в отношении коэффициентов Лямэ уравнение (11.33) можно представить (после деления на произведение коэффициентов Лямэ $h_\xi h_\eta$ правой и левой частей) таким образом:

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \zeta} (\dot{E}_\xi h_\eta) + \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \zeta} (\dot{E}_\eta h_\xi) \right\} = - \frac{\partial^2 \dot{E}_\zeta}{\partial \zeta^2}. \quad (11.34)$$

Следовательно, правая часть уравнения (11.26) стала равной левой части уравнения (11.34) и может быть заменена на правую часть выражения (11.34). В результате такой операции получается уравнение, в которое входит только продольная составляющая электрического поля \dot{E}_ζ :

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_\zeta}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \cdot \frac{\partial \dot{E}_\zeta}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \cdot \frac{\partial \dot{E}_\zeta}{\partial \eta} \right) \right\} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{e}_a \dot{E}_\zeta = 0. \quad (11.35)$$

Уравнение справедливо при выполнении указанных ограничений относительно коэффициентов Лямэ используемой системы координат.

Математически эти ограничения могут быть записаны в следующей форме:

$$h_{\xi}, h_{\eta} \neq f(\xi), \quad h_{\zeta} = 1. \quad (11.36)$$

Физически подобные ограничения сводятся к тому, что рассматриваемая система, канализирующая электромагнитные волны, должна быть прямолинейной вдоль оси распространения ζ , и коэффициенты Лямэ используемой системы координат не должны меняться по мере продвижения вдоль этой оси.

Принятые ограничения позволяют упростить формулы связывающие поперечные составляющие поля с продольной составляющей.

Так, вместо выражений (11.21), (11.23), (11.24), (11.25) можно записать соответственно:

$$\dot{E}_{\xi} + \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a} \cdot \frac{\partial^2 E_{\xi}}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a} \cdot \frac{1}{h_{\xi}} \cdot \frac{\partial^2 \dot{E}_{\xi}}{\partial \xi \partial \zeta} \quad (11.37)$$

$$\dot{E}_{\eta} + \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a} \cdot \frac{\partial^2 E_{\eta}}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a} \cdot \frac{1}{h_{\eta}} \cdot \frac{\partial^2 \dot{E}_{\xi}}{\partial \eta \partial \zeta}, \quad (11.38)$$

$$\dot{H}_{\eta} + \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a} \cdot \frac{\partial^2 H_{\eta}}{\partial \zeta^2} = -\frac{j}{\omega \tilde{\mu}_a} \cdot \frac{1}{h_{\xi}} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\xi}}{\partial \zeta}, \quad (11.39)$$

$$\dot{H}_{\xi} + \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a} \cdot \frac{\partial^2 \dot{H}_{\xi}}{\partial \zeta^2} = \frac{j}{\omega \tilde{\mu}_a} \cdot \frac{1}{h_{\eta}} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\xi}}{\partial \eta}. \quad (11.40)$$

Связь поперечных составляющих, хотя и несколько упростилась, но все же носит достаточно сложный, дифференциальный характер.

Решение конкретной электродинамической задачи для поля типа Е теперь представляется в следующем виде.

Прежде всего должно быть решено в конкретной системе координат при соблюдении ограничений (11.36) уравнение (11.35). После определения продольной составляющей поля E_{ξ} поперечные составляющие поля находят с помощью соотношений (11.37) — (11.40), т. е. путем решения дифференциальных уравнений. В дальнейшем будут определены пути упрощения этой процедуры.

Для волны типа Н, когда продольная составляющая поля $\dot{E}_{\xi} = 0$, все рассуждения могли бы быть аналогичными. Однако вывод существенно упрощается за счет использования принципа перестановочной двойственности.

Действительно, при проведении перестановок вида

$$\dot{E} \leftrightarrow \dot{H}, \quad \tilde{\epsilon}_a \leftrightarrow -\tilde{\mu}_a$$

система исходных уравнений Максвелла не изменяется, составляющая $\dot{H}_{\xi} = 0$ заменяется составляющей

$$\dot{E}_{\xi} = 0 \quad (11.41)$$

и вместо волны электрического типа возникает волна магнитного типа.

При этом исходное уравнение (11.35) для составляющей \dot{E}_ξ заменяется аналогичным уравнением для составляющей \dot{H}_ξ :

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_\xi}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \cdot \frac{\partial \dot{H}_\xi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \cdot \frac{\partial \dot{H}_\xi}{\partial \eta} \right) \right\} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a \dot{H}_\xi = 0. \quad (11.42)$$

Выражения для поперечных составляющих поля (11.37)—(11.40) в случае волны магнитного типа записываются в таком виде:

$$\dot{H}_\xi + \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{\partial^2 H_\xi}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{1}{h_\xi} \cdot \frac{\partial^2 \dot{H}_\xi}{\partial \xi^2}, \quad (11.43)$$

$$\dot{H}_\eta + \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{\partial^2 \dot{H}_\eta}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{1}{h_\eta} \cdot \frac{\partial^2 \dot{H}_\xi}{\partial \eta \partial \zeta}, \quad (11.44)$$

$$\dot{E}_\eta + \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{\partial^2 \dot{E}_\eta}{\partial \zeta^2} = \frac{j}{\omega \varepsilon_a} \cdot \frac{1}{h_\xi} \cdot \frac{\partial \dot{H}_\xi}{\partial \xi}, \quad (11.45)$$

$$\dot{E}_\xi + \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{\partial^2 \dot{E}_\xi}{\partial \zeta^2} = - \frac{j}{\omega \varepsilon_a} \cdot \frac{1}{h_\eta} \cdot \frac{\partial \dot{H}_\xi}{\partial \eta}. \quad (11.46)$$

Проведенный анализ показывает, что определение поперечных составляющих поля через продольные составляющие в случае волн электрического и магнитного типов может быть достаточно простым, если известна зависимость этих составляющих от координаты ξ . Тогда в выражениях (11.37)—(11.40) и (11.43)—(11.46) вторые производные поперечных составляющих поля по координате ξ могут быть определены и задача нахождения поперечных составляющих поля сведется к дифференцированию выражений для \dot{E}_ξ или \dot{H}_ξ , определенных путем решения уравнения (11.35) или (11.42). В дальнейшем этот путь и будет использован при исследовании процессов в волноводах и объемных резонаторах.

ГЛАВА 12

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПРОЦЕССАХ В ВОЛНОВОДАХ — РЕАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ, КАНАЛИЗИРУЮЩИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

§ 12.1. Постановка вопроса

В гл. 10 были рассмотрены процессы, происходящие в двуплоскостной канализирующей системе, в которой могут возникать волны электрического или магнитного типа, распространяющиеся с фазовой скоростью, большей скорости света в среде, заполняющей пространство между плоскостями. Система исследовалась в предположении бесконечной протяженности плоскостей, ограничивающих поле, и вследствие этого была физически нереальной. Подобную систему называют *волноводом быстрых волн*.

В гл. 9 описывались процессы, возникающие в случае полного внутреннего отражения. Было установлено [см. формулу (9.53)], что фазовая скорость поверхностной волны меньше скорости света в среде, где эта волна распространяется. На рис. 9.4 была показана идеализированная система, позволяющая канализировать электромагнитное поле с фазовой скоростью, меньшей скорости света. Идеализация заключалась в допущении бесконечной протяженности диэлектрической пластины в плоскости, перпендикулярной плоскости рисунка. Такую канализующую систему называют *волноводом медленных волн*.

Рассмотренные в гл. 7 плоские волны распространяются в пространстве с фазовой скоростью, равной скорости света в этом пространстве. Могут быть реальные системы, канализующие электромагнитное поле с фазовой скоростью, равной скорости света. Вектор Пойнтинга в них ориентирован вдоль оси системы и образован поперечными по отношению к этой оси составляющими электромагнитного поля. Продольные составляющие поля

$$\dot{E}_z = \dot{H}_z = 0. \quad (12.1)$$

Подобную волну называют *поперечной электромагнитной волной* или *волной типа Т*.

Таким образом, возможно принципиальное разделение волноводных устройств на три группы: 1) волноводы быстрых волн; 2) волноводы медленных волн; 3) волноводы, использующие волну типа Т. Далее будут высказаны основные соображения, касающиеся волноводов каждой из этих групп.

§ 12.2. Основные сведения о процессах в волноводах быстрых волн

Для волн электрического или магнитного типа справедливы уравнения (11.35), (11.42), аналогичные по математической форме. Рассмотрим какое-либо из этих уравнений, например (11.35).

Зависимость поля \dot{E}_z от поперечных координат определяется видом конкретной координатной системы и особенностями конкретной задачи. Попробуем определить зависимость поля \dot{E}_z от продольной координаты ζ . Для этого проведем разделение переменных в уравнении (11.35) по методу Фурье.

Представим \dot{E}_z в виде произведения двух функций:

$$\dot{E}_z = \dot{Z} \dot{E}_{z0}(\xi, \eta). \quad (12.2)$$

Функция \dot{Z} зависит от координаты ζ и не зависит от координат ξ, η .

Функция $\dot{E}_{z0}(\xi, \eta)$ зависит от координат ξ, η и не зависит от координаты ζ . Подставив выражение (12.2) в уравнение (11.35), получаем

$$\begin{aligned} \dot{E}_{z0} \frac{\partial^2 \dot{Z}}{\partial \zeta^2} + \dot{Z} \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial \eta} \right) \right\} + \\ + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{Z} \dot{E}_{z0} = 0. \end{aligned}$$

Разделив это уравнение на произведение $Z\dot{E}_{\zeta_0}$, находим

$$\frac{1}{Z} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{\dot{E}_{\zeta_0}} \cdot \frac{1}{h_{\xi} h_{\eta}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_{\eta}}{h_{\xi}} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\zeta_0}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_{\xi}}{h_{\eta}} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\zeta_0}}{\partial \eta} \right) \right\} = -\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a. \quad (12.3)$$

В полученном соотношении сумма функций координат ζ и ξ , η равна постоянной величине $-\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a$. Такое равенство осуществимо, если каждая из этих функций в отдельности равна постоянному числу, т. е. если соблюдаются соотношения

$$\frac{1}{Z} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial \zeta^2} = -\gamma_B^2. \quad (12.4)$$

$$\frac{1}{\dot{E}_{\zeta_0}} \cdot \frac{1}{h_{\xi} h_{\eta}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_{\eta}}{h_{\xi}} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\zeta_0}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_{\xi}}{h_{\eta}} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\zeta_0}}{\partial \eta} \right) \right\} = -\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a + \gamma_B^2. \quad (12.5)$$

Назовем γ_B коэффициентом распространения поля в волноводе.

Подставив эти соотношения в уравнение (12.3), убеждаемся в равенстве левой и правой частей.

Соотношения (12.4) и (12.5) позволяют получить следующие уравнения для функций Z и \dot{E}_{ζ_0} :

$$\frac{d^2 Z}{d\zeta^2} + \gamma_B^2 Z = 0, \quad (12.6)$$

$$\frac{1}{h_{\xi} h_{\eta}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_{\eta}}{h_{\xi}} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\zeta_0}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_{\xi}}{h_{\eta}} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\zeta_0}}{\partial \eta} \right) \right\} + (\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a - \gamma_B^2) \dot{E}_{\zeta_0} = 0. \quad (12.7)$$

Вводя обозначение

$$\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a - \gamma_B^2 = g^2, \quad (12.8)$$

где g — поперечное волновое число в волноводе, получаем

$$\frac{1}{h_{\xi} h_{\eta}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_{\eta}}{h_{\xi}} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\zeta_0}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_{\xi}}{h_{\eta}} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\zeta_0}}{\partial \eta} \right) \right\} + g^2 \dot{E}_{\zeta_0} = 0. \quad (12.9)$$

Аналогичное уравнение может быть получено для составляющей \dot{H}_{ζ_0} в случае волн магнитного типа:

$$\frac{1}{h_{\xi} h_{\eta}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_{\eta}}{h_{\xi}} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{\zeta_0}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_{\xi}}{h_{\eta}} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{\zeta_0}}{\partial \eta} \right) \right\} + g^2 \dot{H}_{\zeta_0} = 0. \quad (12.10)$$

Справедлива также формула, эквивалентная (12.2):

$$\dot{H}_{\zeta} = Z \dot{H}_{\zeta_0}(\xi, \eta). \quad (12.11)$$

Решение обыкновенного уравнения второго порядка (12.6) можно записать в форме

$$Z = A_1 e^{-i\gamma_B \zeta} + A_2 e^{i\gamma_B \zeta}. \quad (12.12)$$

Коэффициент распространения поля в волноводе γ_B аналогичен по смыслу коэффициенту распространения γ плоской волны [см. формулу (7.10)].

Из выражения (12.8) следует, что

$$\gamma_{\text{в}}^2 = \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a - g^2. \quad (12.13)$$

Сравнивая это выражение с (7.10), видим, что коэффициент распространения поля в волноводе $\gamma_{\text{в}}$ отличен от коэффициента распространения γ для плоских волн.

Как и в случае плоских волн, $\gamma_{\text{в}}$ может быть комплексной величиной, если среда, заполняющая волновод, обладает потерями ($\tilde{\mu}_a$, $\tilde{\epsilon}_a$ комплексны). Значения действительной и мнимой частей $\gamma_{\text{в}}$ будут отличны от соответствующих значений коэффициента фазы β и коэффициента, затухания α , определяемых соотношениями (7.27) и (7.28).

Действительную часть $\gamma_{\text{в}}$ обозначим h , а мнимую h'' . Тогда

$$\gamma_{\text{в}} = h - jh''. \quad (12.14)$$

Действительную часть h коэффициента распространения называют *продольным волновым числом*, а мнимую часть h'' — *коэффициентом затухания поля в волноводе за счет потерь в диэлектрике, заполняющем волновод*.

Подставляя формулу (12.14) в (12.12), получаем выражение

$$\dot{Z} = A_1 e^{-h''\zeta} e^{-jh''\zeta} + A_2 e^{h''\zeta} e^{jh''\zeta}, \quad (12.15)$$

которое после подстановки в (12.2) дает

$$\dot{E}_{\zeta} = A_1 e^{-h''\zeta} e^{-jh''\zeta} \dot{E}_{\zeta 0} + A_2 e^{h''\zeta} e^{jh''\zeta} \dot{E}_{\zeta 0}. \quad (12.16)$$

Далее можно провести рассуждения, аналогичные изложенным в § 7.3.

Перейдем от комплексной амплитуды \dot{E}_{ζ} к мгновенному значению этой составляющей. На основании формул (1.157) такой переход осуществляется с помощью соотношений вида

$$E_{\zeta}(t) = \text{Re} (\dot{E}_{\zeta} e^{j\omega t}), \quad (12.17)$$

$$E_{\zeta}(t) = \text{Re} \{ A_1 e^{-h''\zeta} e^{j(\omega t - h''\zeta)} \dot{E}_{\zeta 0} + A_2 e^{h''\zeta} e^{j(\omega t + h''\zeta)} \dot{E}_{\zeta 0} \}.$$

Считая $\dot{E}_{\zeta 0} = |E_{\zeta 0}| e^{j\varphi_1}$, получаем

$$\begin{aligned} E_{\zeta}(t) &= \text{Re} \{ A_1 e^{-h''\zeta} e^{j(\omega t - h''\zeta + \varphi_1)} |E_{\zeta 0}| + A_2 e^{h''\zeta} e^{j(\omega t + h''\zeta + \varphi_1)} |E_{\zeta 0}| \} = \\ &= A_1 e^{-h''\zeta} |E_{\zeta 0}| \cos(\omega t - h''\zeta + \varphi_1) + \\ &+ A_2 e^{h''\zeta} |E_{\zeta 0}| \cos(\omega t + h''\zeta + \varphi_1). \end{aligned} \quad (12.18)$$

Рассмотрим скорость перемещения вдоль оси ζ точек фиксированной фазы, или фазовую скорость первого слагаемого в выражении (12.18). Для этого зафиксируем время t и координату ζ , положив $t = t_1$, $\zeta = \zeta_1$. При этом фаза получит фиксированное значение $\omega t_1 - h''\zeta_1 + \varphi_1$. Далее дадим времени t приращение dt , координате ζ — приращение $d\zeta$ и новое значение фазы приравняем прежнему фиксированному значению:

$$\omega t_1 - h''\zeta_1 + \varphi_1 = \omega(t_1 + dt) - h''(\zeta_1 + d\zeta) + \varphi_1.$$

Сокращая одинаковые члены, получаем

$$d\zeta/dt = v_{\phi} = \omega/h. \quad (12.19)$$

Аналогичная операция со вторым слагаемым в выражении (12.18) приводит к соотношению

$$v_{\phi} = -\omega/h. \quad (12.20)$$

Полученные результаты позволяют утверждать, что первое слагаемое в выражении (12.18) представляет собой электромагнитную волну, распространяющуюся в сторону положительных значений оси ζ , т. е. падающую волну в волноводе; второе слагаемое — волну, распространяющуюся в сторону отрицательных значений оси ζ , т. е. отраженную волну. Падающая волна при наличии потерь убывает по мере роста координаты ζ , а отраженная волна возрастает по мере приближения к отразившему ее препятствию. В волноводной системе без потерь коэффициент h'' равен нулю и амплитуда поля остается неизменной.

Аналогичные рассуждения могут быть проведены и для волн магнитного типа. При этом вместо формул (12.16), (12.18) следует записать

$$\dot{H}_{\zeta} = B_1 e^{-h''\zeta} e^{-jh\zeta} \dot{H}_{\zeta 0} + B_2 e^{h''\zeta} e^{jh\zeta} \dot{H}_{\zeta 0}, \quad (12.21)$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_{\zeta}(t) = & B_1 e^{-h''\zeta} |\dot{H}_{\zeta 0}| \cos(\omega t - h\zeta + \varphi_2) + \\ & + B_2 e^{h''\zeta} |\dot{H}_{\zeta 0}| \cos(\omega t + h\zeta + \varphi_2). \end{aligned} \quad (12.22)$$

Выражение для фазовой скорости (12.19) позволяет сделать важные выводы. Рассмотрим его подробнее. Из выражений (12.13) и (12.14) следует, что

$$\gamma_{\text{в}} = h - jh'' = \sqrt{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a - g^2}, \quad (12.23)$$

где

$$h = \text{Re} \sqrt{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a - g^2}, \quad (12.24)$$

$$h'' = \text{Im} \sqrt{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a - g^2}. \quad (12.25)$$

Допустим для простоты, что потерь нет и

$$h = \sqrt{\omega^2 \mu_a \epsilon_a - g^2}. \quad (12.26)$$

При этом

$$h'' = 0 \quad (12.27)$$

и фазовая скорость

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{h} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 \mu_a \epsilon_a - g^2}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a} \sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \epsilon_a}}},$$

или

$$v_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \epsilon_a}}}, \quad (12.28)$$

где

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}} \quad (12.29)$$

— скорость света в среде с параметрами μ_a, ϵ_a .

Если g — действительное число и $g^2 > 0$, то при условии соблюдения неравенства

$$\frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \epsilon_a} < 1 \quad (12.30)$$

v_ϕ — действительное число и

$$v_\phi > c. \quad (12.31)$$

При этом в волноводной системе распространяются быстрые волны. При условии соблюдения неравенства

$$\frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \epsilon_a} > 1 \quad (12.32)$$

v_ϕ — мнимое число и распространение волн прекращается.

В справедливости этого легко убедиться, записав выражение (12.26) в виде

$$h = \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a} \sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \epsilon_a}}. \quad (12.33)$$

При выполнении условия (12.32)

$$h = -j\omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a} \sqrt{\frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \epsilon_a} - 1}. \quad (12.34)$$

При этом первое слагаемое в выражении (12.21), соответствующее падающей волне, с учетом равенства (12.27) может быть записано таким образом:

$$\begin{aligned} \dot{H}_z &= B_1 e^{-j \left(-j\omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a} \sqrt{\frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \epsilon_a} - 1} \right) z} = \\ &= B_1 e^{-\omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a} \sqrt{\frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \epsilon_a} - 1} z}. \end{aligned} \quad (12.35)$$

Возникает затухание поля, несмотря на отсутствие потерь в волноводной системе. Это затухание объясняется неблагоприятной интерференцией составляющих поля, пришедших в результате отражения от стенок разными путями в одну и ту же точку волноводной системы.

Критический случай, разграничивающий распространение и затухание волны, наступает при соблюдении условия

$$\frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \epsilon_a} = 1. \quad (12.36)$$

Если поперечное волновое число, магнитную и диэлектрическую проницаемости считать постоянными и изменять угловую частоту ω ,

то критический случай, соответствующий критической угловой частоте, наступает при соблюдении равенства

$$\frac{g^2}{\omega_{\text{кр}}^2 \mu_a \varepsilon_a} = 1, \quad (12.37)$$

откуда

$$\omega_{\text{кр}} = \frac{g}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}} = gc. \quad (12.38)$$

При

$$\omega > \omega_{\text{кр}} \quad (12.39)$$

возникает неравенство (12.30) и волна распространяется в волноводной системе.

В случае

$$\omega < \omega_{\text{кр}} \quad (12.40)$$

справедливо неравенство (12.32) и поле затухает в волноводной системе.

При

$$\omega = \omega_{\text{кр}} \quad (12.41)$$

справедливо соотношение (12.37). В соответствии с выражением (12.28) фазовая скорость при этом стремится к бесконечности.

Волноводная система заполнена полем, составляющие поля вдоль оси ξ находятся в одной фазе, но распространения поля вдоль оси нет.

С помощью (12.38) легко получить формулы для критической частоты $f_{\text{кр}}$ и критической длины волны $\lambda_{\text{кр}}$:

$$f_{\text{кр}} = \frac{gc}{2\pi}, \quad (12.42)$$

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{c}{f_{\text{кр}}} = \frac{2\pi}{g}. \quad (12.43)$$

При

$$\lambda < \lambda_{\text{кр}} \quad (12.44)$$

распространение поля в волноводной системе возможно.

При

$$\lambda > \lambda_{\text{кр}} \quad (12.45)$$

возникает затухание в волноводе.

При

$$\lambda = \lambda_{\text{кр}} \quad (12.46)$$

волноводная система заполнена полем, составляющие поля вдоль оси ξ находятся в одинаковой фазе, но распространения поля вдоль оси ξ не происходит.

На основании проведенного рассмотрения можно утверждать, что волноводная система быстрых волн пропускает, фильтрует электромагнитные колебания с частотами, большими критической

частоты или соответственно с длинами волн, меньшими критической длины волны. Таким образом, подобные волноводные системы можно считать фильтрами высоких частот.

В § 7.4 было получено выражение для групповой скорости или скорости распространения информации при переносе ее плоскими волнами [см. выражение (7.41)]. Если электромагнитное поле определенного спектрального состава распространяется не в свободном пространстве, а в волноводе, то вывод выражения для групповой скорости поля в волноводе ничем не отличается от вывода, проведенного в § 7.4. Следует только коэффициент фазы в свободном пространстве β заменить продольным волновым числом h . При этом групповая скорость поля в волноводе

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dh} \bigg|_{\substack{\omega=\omega_0 \\ h=h_0}} = \frac{1}{dh/d\omega} \bigg|_{\substack{\omega=\omega_0 \\ h=h_0}}. \quad (12.47)$$

Подставляя сюда выражение для h (12.26) и дифференцируя, получаем

$$v_{\text{гр}} = \frac{1}{\frac{2\omega\mu_a\epsilon_a}{2\sqrt{\omega^2\mu_a\epsilon_a - g^2}}} \bigg|_{\omega=\omega_0},$$

или с учетом равенства (12.29)

$$v_{\text{гр}} = c \sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega_0^2\mu_a\epsilon_a}}. \quad (12.48)$$

Сравнивая полученное выражение с формулой для фазовой скорости (12.28), можно вывести следующее соотношение:

$$v_{\text{гр}}v_{\text{ф}} = c^2. \quad (12.49)$$

Как следует из формулы (12.48),

$$v_{\text{гр}} < c. \quad (12.50)$$

Таким образом, скорость переноса информации в волноводах не может быть больше скорости света в среде, заполняющей волноводную систему.

§ 12.3. Упрощение уравнений, связывающих поперечные составляющие поля с продольными, при использовании волноводов быстрых волн

Рассмотрим соотношения, справедливые для падающей волны электрического типа. В соответствии с выражением (12.2) и (12.12) напишем (положив $A_1 = 1$)

$$\dot{E}_{\zeta} = \dot{E}_{\zeta 0} e^{-i\nu_{\text{в}}\zeta}. \quad (12.51)$$

Аналогичная зависимость от координаты ζ существует для поперечных составляющих поля, так как фазовая скорость у всех

составляющих поля должна быть одинаковой. В силу этого справедливы следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_\xi &= \dot{E}_{\xi 0} e^{-i\gamma_B \xi}, \\ \dot{E}_\eta &= \dot{E}_{\eta 0} e^{-i\gamma_B \xi}, \\ \dot{H}_\xi &= \dot{H}_{\xi 0} e^{-i\gamma_B \xi}, \\ \dot{H}_\eta &= \dot{H}_{\eta 0} e^{-i\gamma_B \xi}. \end{aligned} \right\} \quad (12.52)$$

Подставим выражения для \dot{E}_ξ и \dot{E}_ζ в уравнение (11.37):

$$\dot{E}_{\xi 0} e^{-i\gamma_B \xi} - \frac{\gamma_B^2}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a} \dot{E}_{\xi 0} e^{-i\gamma_B \xi} = \frac{-i\gamma_B}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a} \frac{1}{h_\xi} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\xi 0}}{\partial \xi} e^{-i\gamma_B \xi}.$$

Умножим полученное соотношение на $\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a$ и сгруппируем члены:

$$\dot{E}_{\xi 0} e^{-i\gamma_B \xi} (\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a - \gamma_B^2) = -j \frac{\gamma_B}{h_\xi} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\xi 0}}{\partial \xi} e^{-i\gamma_B \xi}.$$

Далее, используя первое из соотношений (12.52) и формулу (12.8), получаем

$$\dot{E}_\xi = -j \frac{\gamma_B}{h_\xi g^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\xi 0}}{\partial \xi} e^{-i\gamma_B \xi}. \quad (12.53)$$

Аналогично могут быть получены выражения для поперечных составляющих поля в случае волн электрического типа:

$$\dot{E}_\eta = -j \frac{\gamma_B}{h_\eta g^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\xi 0}}{\partial \eta} e^{-i\gamma_B \xi}, \quad (12.54)$$

$$\dot{H}_\xi = j \frac{\omega \tilde{\epsilon}_a}{h_\eta g^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\xi 0}}{\partial \eta} e^{-i\gamma_B \xi}, \quad (12.55)$$

$$\dot{H}_\eta = -j \frac{\omega \tilde{\epsilon}_a}{h_\xi g^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\xi 0}}{\partial \xi} e^{-i\gamma_B \xi}, \quad (12.56)$$

$$\dot{H}_\zeta = 0. \quad (12.57)$$

Подобным же образом можно найти формулы для поперечных составляющих поля в случае волн магнитного типа. Эти формулы легко вывести с помощью принципа перестановочной двойственности. Осуществим в выражениях (12.53)–(12.57) перестановки вида $\mathbf{H} \leftrightarrow \dot{\mathbf{E}}, \tilde{\epsilon}_a \rightarrow \tilde{\mu}_a$:

$$\dot{H}_\xi = -j \frac{\gamma_B}{h_\xi g^2} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{\xi 0}}{\partial \xi} e^{-i\gamma_B \xi}, \quad (12.58)$$

$$\dot{H}_\eta = -j \frac{\gamma_B}{h_\eta g^2} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{\xi 0}}{\partial \eta} e^{-i\gamma_B \xi}, \quad (12.59)$$

$$\dot{E}_\xi = -j \frac{\omega \tilde{\mu}_a}{h_\eta g^2} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{\xi 0}}{\partial \eta} e^{-i\gamma_B \xi}, \quad (12.60)$$

$$\dot{E}_\eta = j \frac{\omega \tilde{\mu}_a}{h_\xi g^2} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{\xi 0}}{\partial \xi} e^{-i\gamma_B \xi}, \quad (12.61)$$

$$\dot{E}_\zeta = 0. \quad (12.62)$$

Можно также записать выражение, аналогичное (12.51),

$$\dot{H}_z = \dot{H}_{z0} e^{-i\gamma_B z}. \quad (12.63)$$

Полученные соотношения называют формулами перехода от продольных составляющих поля к поперечным. Не следует забывать, что они справедливы при соблюдении ограничений (11.36).

Если потери в волноводных системах отсутствуют, то в выведенных соотношениях требуется осуществить изменения вида

$$\tilde{\epsilon}_a \rightarrow \epsilon_a, \quad \tilde{\mu}_a \rightarrow \mu_a, \quad \gamma_B \rightarrow h. \quad (12.64)$$

Отметим, что выведенные формулы не учитывают потерь в металлических стенках волновода, ограничивающих поле. Учтенные путем введения коэффициента затухания h'' потери—это потери в среде, заполняющей волновод. Кроме коэффициента затухания h'' , возникающего за счет потерь в диэлектрике, заполняющем волновод, может возникнуть коэффициент затухания h' , характеризующий затухание поля за счет потерь в металле.

При этом коэффициент распространения поля в волноводе

$$\gamma_B = h - jh' - jh''. \quad (12.65)$$

Если потерями в диэлектрике можно пренебречь, а потери в металле должны быть учтены, то

$$\gamma_B = h - jh'. \quad (12.66)$$

Учет потерь, возникающих в металлических стенках волноводной системы, будет проведен в последующих главах.

§ 12.4. Основные сведения о процессах в волноводах медленных волн

В § 12.2 было выведено выражение (12.28) для фазовой скорости в волноводных системах. Было указано, что при действительном поперечном волновом числе g фазовая скорость больше скорости света в среде с параметрами μ_a, ϵ_a .

Чтобы фазовая скорость стала меньше скорости света, поперечное волновое число должно быть мнимым. Другими словами, поперечное волновое число g в выведенных формулах переходит в jp :

$$\text{Тогда} \quad g \rightarrow jp. \quad (12.67)$$

$$g^2 \rightarrow -p^2. \quad (12.68)$$

Учитывая это в формуле (12.28), получаем

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{\omega^2 \mu_a \epsilon_a}}}. \quad (12.69)$$

При этом справедливо неравенство

$$v_\phi < c. \quad (12.70)$$

Коэффициент распространения в соответствии с выражениями (12.23)—(12.25) в случае медленных волн

$$\gamma_{\text{в}} = h - jh'' = \sqrt{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a + p^2}, \quad (12.71)$$

где

$$h = \text{Re} \sqrt{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a + p^2}, \quad (12.72)$$

$$h'' = \text{Im} \sqrt{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a + p^2}. \quad (12.73)$$

Если потери в среде, заполняющей волновод, отсутствуют,

$$h'' = 0$$

и

$$\gamma_{\text{в}} = h = \sqrt{\omega^2 \mu_a \epsilon_a + p^2}. \quad (12.74)$$

Так же как и при анализе волноводов быстрых волн, выведенные формулы не учитывают потерь в металлических стенках волновода.

При определении групповой скорости нельзя механически использовать выражение (12.48), заменив в нем g^2 на $-p^2$. При этом получилось бы, что групповая скорость, определяющая скорость передачи информации, стала бы больше скорости света, что противоречит известному положению Эйнштейна. Вывод выражения для групповой скорости необходимо проводить с учетом основных соотношений (12.47) и (12.74). При этом следует считаться с тем, что *поперечное волновое число p в волноводах медленных волн является функцией частоты ω* . Используя формулу (12.47), получаем

$$v_{\text{гр}} = \frac{1}{\frac{d}{d\omega} \sqrt{\omega^2 \mu_a \epsilon_a + p^2}} = \frac{1}{\frac{2\omega \mu_a \epsilon_a + 2p \frac{dp}{d\omega}}{2 \sqrt{\omega^2 \mu_a \epsilon_a + p^2}}},$$

$$v_{\text{гр}} = \frac{\sqrt{\omega^2 \mu_a \epsilon_a + p^2}}{\omega \mu_a \epsilon_a + p \frac{dp}{d\omega}}. \quad (12.75)$$

Зная закон изменения поперечного волнового числа p для конкретной замедляющей волноводной системы, можно найти групповую скорость.

Основные уравнения для продольных составляющих поля в случае волн электрического и магнитного типов соответственно записываются следующим образом:

$$\frac{1}{h_{\xi} h_{\eta}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_{\eta}}{h_{\xi}} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\xi 0}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_{\xi}}{h_{\eta}} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\xi 0}}{\partial \eta} \right) \right\} - p^2 \dot{E}_{\xi 0} = 0, \quad (12.76)$$

$$\frac{1}{h_{\xi} h_{\eta}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_{\eta}}{h_{\xi}} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{\xi 0}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_{\xi}}{h_{\eta}} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{\xi 0}}{\partial \eta} \right) \right\} - p^2 \dot{H}_{\xi 0} = 0. \quad (12.77)$$

Формулы перехода, связывающие поперечные составляющие поля с продольными, могут быть получены из соотношений (12.53)—(12.62) с учетом выражения (12.68).

При этом получим
для волн электрического типа:

$$\dot{E}_{\xi} = j \frac{\gamma_B}{h_{\xi} \rho^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\xi 0}}{\partial \xi} e^{-j\gamma_B \xi}, \quad (12.78)$$

$$\dot{E}_{\eta} = j \frac{\gamma_B}{h_{\eta} \rho^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\xi 0}}{\partial \eta} e^{-j\gamma_B \xi}, \quad (12.79)$$

$$\dot{H}_{\xi} = -j \frac{\omega \tilde{\epsilon}_a}{h_{\eta} \rho^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\xi 0}}{\partial \eta} e^{-j\gamma_B \xi}, \quad (12.80)$$

$$\dot{H}_{\eta} = j \frac{\omega \tilde{\epsilon}_a}{h_{\xi} \rho^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\xi 0}}{\partial \xi} e^{-j\gamma_B \xi}, \quad (12.81)$$

$$\dot{H}_{\zeta} = 0; \quad (12.82)$$

для волн магнитного типа:

$$\dot{H}_{\xi} = j \frac{\gamma_B}{h_{\xi} \rho^2} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{\xi 0}}{\partial \xi} e^{-j\gamma_B \xi}, \quad (12.83)$$

$$\dot{H}_{\eta} = j \frac{\gamma_B}{h_{\eta} \rho^2} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{\xi 0}}{\partial \eta} e^{-j\gamma_B \xi}, \quad (12.84)$$

$$\dot{E}_{\xi} = j \frac{\omega \tilde{\mu}_a}{h_{\eta} \rho^2} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{\xi 0}}{\partial \eta} e^{-j\gamma_B \xi}, \quad (12.85)$$

$$\dot{E}_{\eta} = -j \frac{\omega \tilde{\mu}_a}{h_{\xi} \rho^2} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{\xi 0}}{\partial \xi} e^{-j\gamma_B \xi}, \quad (12.86)$$

$$\dot{E}_{\zeta} = 0. \quad (12.87)$$

Если потери в волноводных системах отсутствуют, то в выведенных соотношениях следует осуществить изменения вида (12.64).

§ 12.5. Основные сведения о процессах в волноводах, канализирующих волны типа Т

Характерным признаком волн типа Т являются равенство нулю продольных составляющих поля [см. выражение (12.1)]. Вектор Пойнтинга в такой волне ориентирован вдоль оси волновода ξ . При этом фронт волны движется вдоль оси волновода и фазовая скорость должна быть равна скорости света в рассматриваемой среде:

$$v_{\phi} = c. \quad (12.88)$$

В соответствии с выражением (12.28) равенство (12.88) соблюдается при условии

$$g = 0. \quad (12.89)$$

Поперечное волновое число в случае волн типа Т равно нулю. Это также является характерным признаком волн этого типа.

Из формулы (12.23) следует, что для волн типа Т

$$\gamma_B = \omega \sqrt{\tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a}. \quad (12.90)$$

Сравнивая это выражение с (7.10), можно сделать вывод, что коэффициент распространения в волноводе для волн типа Т равен коэффициенту распространения в неограниченной среде с параметрами $\mu_a \epsilon_a$:

$$\gamma_{\text{в}} = \gamma. \quad (12.91)$$

В случае волн типа Т справедливы формулы (7.26), (7.27), (7.28). Групповая скорость определяется соотношением (12.48). При соблюдении условия $g=0$

$$v_{\text{гр}} = c. \quad (12.92)$$

Для волн типа Т групповая скорость равна скорости света в среде, заполняющей волновод.

Формулы перехода, связывающие поперечные составляющие поля с продольными, для волн типа Т не могут быть использованы ввиду равенства нулю продольных составляющих.

Соотношения (12.38), (12.42), (12.43) в случае волн типа Т при соблюдении равенства $g=0$ приводят к следующим результатам:

$$\omega_{\text{кр}} = 0, \quad f_{\text{кр}} = 0, \quad \lambda_{\text{кр}} \rightarrow \infty. \quad (12.93)$$

Критическая частота равна нулю. Это означает, что колебания всех частот, включая постоянный ток, могут распространяться в волноводных системах, использующих волны типа Т. Это является важным преимуществом волн подобного типа.

ГЛАВА 13 ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ВОЛНОВОД

§ 13.1. Решение основного уравнения для продольных составляющих поля в прямоугольном волноводе

В качестве основного для волн электрического типа следует использовать уравнение (12.9). Очевидно, при анализе прямоугольных электродинамических систем целесообразно применять декартову систему координат. Расположим координатные оси так, как показано на рис. 13.1. Выберем следующее соответствие криволинейных и декартовых координат:

$$\xi \rightarrow x, \quad \eta \rightarrow y, \quad \zeta \rightarrow z, \\ h_{\xi} = h_{\eta} = 1. \quad (13.1)$$

Координатная система удовлетворяет ограничениям (11.36) и, следовательно, воз-

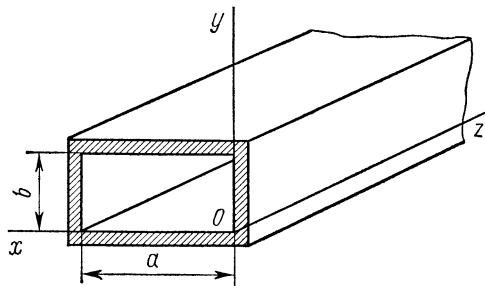


Рис. 13.1

можно использование основных уравнений (12.9), (12.10) и формул перехода (12.53)—(12.62).

В декартовой системе координат основное уравнение записывается в форме

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{z0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{z0}}{\partial y^2} + g^2 \dot{E}_{z0} = 0. \quad (13.2)$$

В такой же форме записывается уравнение для продольной составляющей магнитного поля:

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_{z0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_{z0}}{\partial y^2} + g^2 \dot{H}_{z0} = 0. \quad (13.3)$$

Решение этих уравнений проводят по методу Фурье. Положим

$$\dot{E}_{z0} = XY. \quad (13.4)$$

Функция X зависит от координаты x и не зависит от координаты y . Функция Y зависит от координаты y и не зависит от координаты x . Подставляя выражение (13.4) в уравнение (13.2), получаем

$$Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + g^2 XY = 0.$$

Разделим это уравнение на XY :

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -g^2.$$

Первое слагаемое является функцией только координаты x , второе — функцией только координаты y . Их сумма может равняться постоянному числу $-g^2$ лишь тогда, когда каждое слагаемое в отдельности равно постоянному числу. Положим

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -g_x^2, \quad \frac{1}{Y} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -g_y^2, \quad (13.5)$$

где

$$g_x^2 + g_y^2 = g^2. \quad (13.6)$$

Уравнения (13.5) представляют собой дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Поэтому частные производные можно заменить обыкновенными производными и записать уравнения в виде

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + g_x^2 X = 0, \quad (13.7)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + g_y^2 Y = 0. \quad (13.8)$$

Электромагнитное поле распространяется в волноводе, многократно отражаясь от его стенок, вследствие чего в результате интерференции возникают стоячие волны вдоль координат x и y ,

как было показано в § 10.4, при анализе двухплоскостного волновода, В силу этого решение уравнений (13.7), (13.8) запишется

$$X = A_1 \cos(g_x x) + A_2 \sin(g_x x), \quad (13.9)$$

$$Y = B_1 \cos(g_y y) + B_2 \sin(g_y y). \quad (13.10)$$

В соответствии с формулой (13.4)

$$\dot{E}_{z0} = \{A_1 \cos(g_x x) + A_2 \sin(g_x x)\} \{B_1 \cos(g_y y) + B_2 \sin(g_y y)\}. \quad (13.11)$$

Решение уравнения (13.3) проводят аналогично:

$$\dot{H}_{z0} = \{A_3 \cos(g_x x) + A_4 \sin(g_x x)\} \{B_3 \cos(g_y y) + B_4 \sin(g_y y)\}. \quad (13.12)$$

До настоящего момента анализ не зависит от того, исследуются ли волны типа Е или Н. Для определения постоянных необходимо применение граничных условий, записываемые по-разному для волн различных типов. Поэтому дальнейшее рассмотрение должно осуществляться для каждого из типов волн в отдельности.

§ 13.2. Волны электрического типа

В случае волн электрического типа составляющая поля \dot{E}_{z0} касательна ко всем четырем стенкам волновода. Считая металл стенок идеальным, обладающим бесконечной проводимостью γ_s , можно использовать граничные условия у поверхности идеального металла (8.19). При этом можно написать

$$\dot{E}_{z0} = 0 \quad (\text{у стенок волновода}). \quad (13.13)$$

В соответствии с рис. 13.1 и формулой (13.11) у правой боковой стенки волновода при $x=0$

$$A_1 \{B_1 \cos(g_y y) + B_2 \sin(g_y y)\} = 0,$$

откуда

$$A_1 = 0. \quad (13.14)$$

У левой боковой стенки волновода при $x=a$ с учетом выражения (13.14) справедливо соотношение

$$A_2 \sin(g_x a) \{B_1 \cos(g_y y) + B_2 \sin(g_y y)\} = 0.$$

Коэффициент A_2 не может равняться нулю, поскольку при этом исчезает продольная составляющая поля \dot{E}_{z0} [см. выражение (13.11)]. Следовательно,

$$\sin(g_x a) = 0 \quad (13.15)$$

и

$$g_x a = m\pi,$$

где m — ряд целых чисел.

Ряд m не может начинаться с нуля, так как при $m=0$ $g_x=0$, и продольная составляющая поля \dot{E}_{z0} исчезает. Таким образом,

$$g_x = \frac{m\pi}{a} \quad (m=1, 2, 3 \dots). \quad (13.16)$$

Подставляя выражения (13.14) и (13.16) в формулу (13.11), получаем

$$\dot{E}_{z0} = A_2 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \{B_1 \cos(g_y y) + B_2 \sin(g_y y)\}. \quad (13.17)$$

У нижней стенки волновода при $y=0$ должно соблюдаться равенство

$$A_2 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) B_1 = 0,$$

откуда

$$B_1 = 0. \quad (13.18)$$

У верхней стенки волновода при $y=b$ справедливо соотношение

$$A_2 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) B_2 \sin(g_y b) = 0.$$

Коэффициент B_2 не может равняться нулю, так как с учетом равенства (13.18) продольная составляющая поля \dot{E}_{z0} [см. выражение (13.17)] исчезает. Следовательно,

$$\sin(g_y b) = 0 \text{ и } g_y b = n\pi,$$

где n — ряд целых чисел.

Символ n вместо m выбран здесь потому, что целые числа m и n не обязательно должны совпадать.

Ряд n не может начинаться с нуля, так как при $n=0$ $g_y=0$, и продольная составляющая поля \dot{E}_{z0} исчезает.

Тогда

$$g_y = \frac{n\pi}{b} \quad (n=1, 2, 3 \dots) \quad (13.19)$$

и выражение (13.17) записывается в окончательном виде:

$$\dot{E}_{z0} = C_1 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right), \quad (13.20)$$

где

$$C_1 = A_2 B_2. \quad (13.21)$$

Поперечное волновое число g определяется выражениями (13.6), (13.16) и (13.19):

$$g^2 = g_{mn}^2 = g_x^2 + g_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad (13.22)$$

$$g = g_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}. \quad (13.23)$$

С помощью граничных условий найдены все постоянные, за исключением амплитудной постоянной C_1 , которую в данной постановке задачи нельзя определить, поскольку в исходных уравнениях Максвелла сторонние токи \mathbf{J}_a и \mathbf{J}_m , определяющие амплитуду поля, были положены равными нулю.

Как следует из выражения (13.20), возможно бесконечное число значений продольной составляющей поля \dot{E}_{z0} в зависимости от значений чисел m и n . Каждые конкретные значения чисел m и n определяют волну конкретного типа, обозначаемую E_{mn} . Так, при $m=1$ и $n=2$ возникает волна типа E_{12} и т. д.

Зная продольную составляющую электрического поля, нетрудно найти поперечные составляющие поля с помощью формул перехода (12.53)—(12.57). Считая диэлектрик внутри волновода идеальным и стенки волновода бесконечно проводящими, т. е. соблюдая условия (12.64), можно записать эти формулы в декартовой системе координат. Используя соответствие (13.1), получаем

$$\dot{E}_x = -j \frac{h}{g^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial x} e^{-jhz}, \quad (13.24)$$

$$\dot{E}_y = -j \frac{h}{g^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial y} e^{-jhz}, \quad (13.25)$$

$$\dot{H}_x = j \frac{\omega \varepsilon_a}{g^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial y} e^{-jhz}, \quad (13.26)$$

$$\dot{H}_y = -j \frac{\omega \varepsilon_a}{g^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial x} e^{-jhz}, \quad (13.27)$$

$$\dot{H}_z = 0. \quad (13.28)$$

Подставляя в эти выражения значение \dot{E}_{z0} (13.20) и учитывая соотношения (12.51), (13.23), можно написать

$$\dot{E}_x = j \frac{h}{g_{mn}^2} C_1 \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}, \quad (13.29)$$

$$\dot{E}_y = j \frac{h}{g_{mn}^2} C_1 \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}, \quad (13.30)$$

$$\dot{E}_z = C_1 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}, \quad (13.31)$$

$$\dot{H}_x = -j \frac{\omega \varepsilon_a}{g_{mn}^2} C_1 \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}, \quad (13.32)$$

$$\dot{H}_y = j \frac{\omega \varepsilon_a}{g_{mn}^2} C_1 \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}, \quad (13.33)$$

$$\dot{H}_z = 0. \quad (13.34)$$

Полученные соотношения позволяют найти все составляющие поля для волн типа E_{mn} .

Продольное волновое число h определяется с помощью выражения (12.26). В рассматриваемом случае оно может быть записано в виде

$$h = h_{mn} = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - g_{mn}^2}. \quad (13.35)$$

§ 13.3. Волны магнитного типа

В случае волн магнитного типа тангенциальными к стенкам волновода являются составляющие электрического поля \dot{E}_x и \dot{E}_y , определяемые формулами перехода (12.58)—(12.62). Запишем эти формулы в декартовой системе координат, используя соотношения (13.1) и (12.64):

$$\dot{H}_x = -j \frac{h}{g^2} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{z0}}{\partial x} e^{-jhz}, \quad (13.36)$$

$$\dot{H}_y = -j \frac{h}{g^2} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{z0}}{\partial y} e^{-jhz}, \quad (13.37)$$

$$\dot{E}_x = -j \frac{\omega \mu_a}{g^2} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{z0}}{\partial y} e^{-jhz}, \quad (13.38)$$

$$\dot{E}_y = j \frac{\omega \mu_a}{g^2} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{z0}}{\partial x} e^{-jhz}, \quad (13.39)$$

$$\dot{E}_z = 0. \quad (13.40)$$

Найдем составляющие \dot{E}_x , \dot{E}_y , подставляя в формулы (13.38), (13.39) выражение (13.12):

$$\begin{aligned} \dot{E}_x = & -j \frac{\omega \mu_a}{g^2} e^{-jhz} \{A_3 \cos(g_x x) + A_4 \sin(g_x x)\} \times \\ & \times \{-B_3 g_y \sin(g_y y) + B_4 g_y \cos(g_y y)\}, \end{aligned} \quad (13.41)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_y = & j \frac{\omega \mu_a}{g^2} e^{-jhz} \{-A_3 g_x \sin(g_x x) + A_4 g_x \cos(g_x x)\} \times \\ & \times \{B_3 \cos(g_y y) + B_4 \sin(g_y y)\}. \end{aligned} \quad (13.42)$$

В соответствии с граничными условиями $\dot{E}_x = 0$, $\dot{E}_y = 0$ у стенок волновода

$$\dot{E}_y = 0 \quad (\text{при } x=0 \text{ и } x=a), \quad (13.43)$$

$$\dot{E}_x = 0 \quad (\text{при } y=0 \text{ и } y=b). \quad (13.44)$$

С учетом выражения (13.42) и условия (13.43) получаем

$$j \frac{\omega \mu_a}{g^2} e^{-jhz} A_4 g_x \{B_3 \cos(g_y y) + B_4 \sin(g_y y)\} = 0,$$

откуда $A_4 g_x = 0$.

Условие $g_x = 0$, как будет показано далее, выполняется лишь в частных случаях. Более общим условием является

$$A_4 = 0. \quad (13.45)$$

При $x=a$ из выражения (13.42) и условия (13.43) следует

$$-j \frac{\omega \mu_a}{g^2} e^{-jhz} A_3 g_x \sin(g_x a) \{B_3 \cos(g_y y) + B_4 \sin(g_y y)\} = 0.$$

Условие $g_x = 0$, как указывалось, выполняется только в частных случаях. Коэффициент A_3 не может равняться нулю, так как при

соблюдении условия (13.45) продольная составляющая поля \dot{H}_{z0} [см. формулу (13.12)] исчезает и, следовательно, исчезают остальные составляющие поля в волноводе. Остается предположить, что

$$\sin(g_x a) = 0. \quad (13.46)$$

Отсюда $g_x a = m\pi$, где m — ряд целых чисел.

Если этот ряд начать с нуля, то при $m=0$ $g_x=0$. При этом в выражении (13.12) исчезает зависимость поля от координаты x и сохраняется зависимость от координаты y . В соответствии с формулой (13.38) составляющая электрического поля \dot{E}_x при этом существует. Составляющая поля E_y обращается в нуль. Таким образом, можно написать

$$g_x = \frac{m\pi}{a} \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (13.47)$$

Видно, что величина g_x может быть равна нулю только в частном случае — при $m=0$.

Были использованы граничные условия (13.43). Переходя к граничным условиям (13.44), запишем выражение (13.41) для составляющей поля \dot{E}_x с учетом соотношений (13.45) и (13.47):

$$\dot{E}_x = -j \frac{\omega\mu_a}{g^2} e^{-jhz} A_3 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \{-B_3 g_y \sin(g_y y) + B_4 g_y \cos(g_y y)\}. \quad (13.48)$$

Используем граничные условия (13.44). При $y=0$

$$\dot{E}_x = -j \frac{\omega\mu_a}{g^2} e^{-jhz} A_3 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) B_4 g_y = 0,$$

откуда $B_4 g_y = 0$.

Как будет показано далее, величина g_y может быть равна нулю только в частном случае. Следовательно,

$$B_4 = 0. \quad (13.49)$$

При $y=b$

$$\dot{E}_x = j \frac{\omega\mu_a}{g^2} e^{-jhz} A_3 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) B_3 g_y \sin(g_y b) = 0.$$

Коэффициент B_3 не может быть равен нулю, так как с учетом выражения (13.49) составляющая \dot{H}_{z0} в формуле (13.12) исчезает, исчезают и остальные составляющие поля. Остается предположить, что $\sin(g_y b) = 0$, $g_y b = n\pi$, где n — ряд целых чисел. При $n=0$ $g_y=0$. В этом случае составляющая поля \dot{H}_{z0} не зависит от координаты y и если g_x не равно нулю, то сохраняется зависимость поля от координаты x . В соответствии с формулой (13.39) возникает составляющая электрического поля \dot{E}_y , и такое поле может существовать. Следовательно, поочередно либо g_x , либо g_y могут быть равны нулю, одновременное равенство нулю этих постоянных невозможно. При этом продольная составляющая поля H_{z0} не являлась бы функцией координат x и y и остальные составляющие поля не существовали бы.

Таким образом, ряд чисел n может начинаться с нуля

$$g_y = \frac{n\pi}{b} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (13.50)$$

Поперечное волновое число g для волн магнитного типа определяется так же, как и для волн электрического типа, с помощью соотношения (13.23).

Учитывая соотношения (13.23), (12.63), (13.45), (13.47), (13.49), (13.50), используя формулы (13.12), (13.36)—(13.40) и положив

$$A_3 B_3 = C_2, \quad (13.51)$$

можно написать следующие выражения для составляющих поля волны магнитного типа:

$$\dot{H}_x = j \frac{h}{g_{mn}^2} C_2 \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}, \quad (13.52)$$

$$\dot{H}_y = j \frac{h}{g_{mn}^2} C_2 \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}, \quad (13.53)$$

$$\dot{H}_z = C_2 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}, \quad (13.54)$$

$$\dot{E}_x = j \frac{\omega\mu_a}{g_{mn}^2} C_2 \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}, \quad (13.55)$$

$$\dot{E}_y = -j \frac{\omega\mu_a}{g_{mn}^2} C_2 \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}, \quad (13.56)$$

$$\dot{E}_z = 0, \quad (13.57)$$

которые позволяют получить все составляющие поля для волн типа H_{mn} . Продольное волновое число h определяется формулой (13.35).

§ 13.4. Фазовая скорость, длина волны в волноводе, критическая длина волны, критическая частота. Волны основных типов в прямоугольном волноводе

Выражение (12.28), определяющее фазовую скорость в волноводах быстрых волн, можно упростить с помощью соотношений (12.29), (12.43) и формул

$$\lambda = c/f, \quad (13.58)$$

$$\frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a} = \frac{g^2 c^2}{4\pi^2 f^2} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2. \quad (13.59)$$

Здесь λ —длина волны в свободном пространстве с параметрами μ_a , ε_a .

Подставляя выражение (13.59) в (12.28), находим фазовую скорость в волноводе:

$$v_{\Phi} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}}. \quad (13.60)$$

Групповую скорость можно получить с помощью формулы (12.48) либо равенства (12.49), из которого следует, что $v_{гр} = c^2/v_{ф}$.

Используя соотношение (13.60), получаем

$$v_{гр} = c \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}. \quad (13.61)$$

Введем обозначение длины волны в волноводе:

$$\lambda_{в} = v_{ф}/f. \quad (13.62)$$

С учетом формулы (13.58) получаем

$$\lambda_{в} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}}. \quad (13.63)$$

Длина волны в волноводе быстрых волн больше длины волны в свободном пространстве. Найдем выражения для критической длины волны и критической частоты в прямоугольном волноводе.

Критическая длина волны определяется соотношением (12.43), а поперечное волновое число g — формулой (13.23).

Отсюда следует, что

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}},$$

или

$$\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}. \quad (13.64)$$

Критическую угловую частоту можно получить из соотношения (12.38). Используя формулу (13.23), находим

$$\omega_{кр} = c \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}. \quad (13.65)$$

Критическую частоту колебаний, определяемую формулой (12.42), можно записать в виде

$$f_{кр} = c/2 \sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}. \quad (13.66)$$

Полученные соотношения для фазовой скорости, длины волны в волноводе, критической длины волн и критической частоты справедливы для волн как электрического, так и магнитного типов.

При исследовании волноводов вводят понятие волн основных типов. Под основным типом волны понимают колебание, у которого критическая длина волны имеет наибольшее значение.

Из выражения (13.64) следует, что основному типу волны соответствуют наименьшие возможные значения m и n . В случае волн электрического типа в соответствии с формулами (13.16), (13.19) такими наименьшими значениями являются $m = 1$, $n = 1$. Соответ-

ствующую волну обозначают E_{11} . Ее критическая длина волны определяется соотношением

$$\lambda_{\text{кр}}(E_{11}) = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}. \quad (13.67)$$

Тип E_{11} является основным для волн электрического типа.

В случае волн магнитного типа в соответствии с выражениями (13.47), (13.50) наименьшими возможными значениями m и n являются две допустимые комбинации: $m=0, n=1$; $m=1, n=0$.

Как было установлено в § 13.3, эти коэффициенты одновременно не могут равняться нулю. Из анализа выражения (13.64) можно сделать следующий вывод.

Размер a условились считать соответствующим широкой стенке волновода, размер b — узкой. Следовательно, $a > b$ и при одинаковых значениях m и n $m/a < n/b$.

Вследствие этого для получения наибольшего значения $\lambda_{\text{кр}}$ целесообразно максимально уменьшить отношение n/b , что соответствует $n=0$. При этом основной волне магнитного типа будет соответствовать комбинация $m=1, n=0$.

Такую волну обозначают H_{10} . Критическая длина волны этого колебания определяется формулой

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2}{\sqrt{1/a^2}}, \text{ или } \lambda_{\text{кр}}(H_{10}) = 2a. \quad (13.68)$$

Забегая вперед, скажем, что обычно выбирают

$$b \approx a/2. \quad (13.69)$$

При этом

$$\lambda_{\text{кр}}(E_{11}) = \frac{2}{\sqrt{1/a^2 + 4/a^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} a = 0,91a. \quad (13.70)$$

Сравнивая формулы (13.68) и (13.70), можно написать следующее неравенство:

$$\lambda_{\text{кр}}(E_{11}) < \lambda_{\text{кр}}(H_{10}). \quad (13.71)$$

Из всех возможных волн наибольшей критической длиной волны обладает основная волна магнитного типа H_{10} .

С помощью формулы (13.64) определим критические длины волн некоторых характерных колебаний:

$$\lambda_{\text{кр}}(H_{20}) = a, \quad (13.72)$$

$$\lambda_{\text{кр}}(H_{01}) = 2b. \quad (13.73)$$

Заметим, что

$$\lambda_{\text{кр}}(H_{20}) > \lambda_{\text{кр}}(E_{11}). \quad (13.74)$$

Продольное волновое число h можно выразить через критическую длину волны заданного типа.

Для этого используем соотношение (12.26), которое можно за-

писать в ином виде:

$$h = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}}.$$

Применяя формулы (12.29), (13.58), (13.59), получаем

$$\begin{aligned} h &= \frac{2\pi f}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}, \\ h &= \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}. \end{aligned} \quad (13.75)$$

Эти выражения будут использованы при определении условий существования волн заданного типа.

§ 13.5. Условия существования волн различных типов в прямоугольном волноводе

Условие существования волны заданного типа определяется неравенством (12.44). Подставляя значения $\lambda_{кр}$ из формулы (13.64), получаем

$$\lambda < \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}. \quad (13.76)$$

Таким образом, волна типа H_{10} существует, если

$$\lambda < 2a. \quad (13.77)$$

Волна типа H_{20} на основании соотношения (13.76) будет существовать, если

$$\lambda < a. \quad (13.78)$$

Если обеспечивается неравенство (13.78), то одновременно выполняется и неравенство (13.77). Таким образом, если обеспечивается условие существования волны более высокого типа, обладающей большими значениями m и n , то одновременно выполняется условие существования волны более низкого типа с меньшими значениями m и n . Другими словами, невозможно обеспечить существование волны более высокого типа в единственном числе путем подбора размеров волновода. Одновременно создаются условия существования волн более низких типов. В то же время возможно создание таких условий, при которых будет существовать волна заданного типа и все более низкие типы волн и не смогут существовать волны более высоких типов. Поясним сказанное на примере основной волны магнитного типа H_{10} . Для ее существования необходимо соблюдение неравенства (13.77). Для того чтобы прохождение волн типа H_{20} стало невозможным, в соответствии с условием затухания (12.45) следует потребовать, чтобы

$$\lambda > \lambda_{кр}(H_{20}). \quad (13.79)$$

Используя соотношения (13.77), (13.79), (13.72), получаем условие существования волны H_{10} и затухания волн типа H_{m0} со зна-

чениями $m = 2, 3, 4 \dots$:

$$2a > \lambda > a. \quad (13.80)$$

При соблюдении этого неравенства выполняется неравенство

$$\lambda > 0,91a = \lambda_{кр(E_{11})}.$$

Следовательно, неравенство (13.80) обеспечивает затухание любой волны электрического типа.

В неравенство (13.80) входит только размер a волновода.

Размер b определяет критические длины волн для волн типа H_{0n} . Оба размера (a и b) определяют критические длины волн для волн типа H_{mn} со значениями m и n , отличными от нуля, и для волн типа E_{mn} . Основной среди волн типа H_{0n} является волна типа H_{01} с критической длиной волны, равной $2b$. Для исключения волны типов H_{0n} с $n \geq 1$ достаточно потребовать соблюдение неравенства

$$\lambda > 2b = \lambda_{кр(H_{01})}. \quad (13.81)$$

Запишем условия (13.80) и (13.81) совместно:

$$2a > \lambda > a, \quad \lambda > 2b. \quad (13.82)$$

Неравенства (13.82) обеспечивают условия единственности существования основной волны типа H_{10} . При их соблюдении невозможно возникновение волн других типов, как электрических, так и магнитных.

При решении практических задач важно знать структуру поля в волноводах для волн различных типов. Покажем, как можно определить картины поля без детального математического анализа, с помощью граничных условий у поверхности идеального металла. После этого будет приведена строгая методика построения картин поля.

§ 13, 6. Определение картин поля в прямоугольном волноводе с помощью граничных условий у поверхности идеального металла

Предлагаемая здесь методика построения картин поля не является строгой и носит скорее мнемонический характер. Она базируется на следующих основных положениях:

а) волны электрического типа обладают продольной составляющей электрического поля, ориентированной вдоль оси распространения; магнитное поле расположено в поперечной плоскости;

б) волны магнитного типа обладают продольной составляющей магнитного поля, ориентированной вдоль оси распространения; электрическое поле расположено в поперечной плоскости.

в) электрические силовые линии подходят нормально к поверхности идеального металла; у поверхности металла не может быть тангенциального электрического поля;

г) магнитные силовые линии подходят тангенциально к поверхности идеального металла и представляют собой замкнутые петли;

д) индекс m типа волны показывает число вариаций поля между стенками волновода в направлении оси x ;

е) индекс n типа волны показывает число вариаций поля между стенками волновода в направлении оси y ;

ж) магнитные и электрические силовые линии ортогональны.

Основываясь на этих общих положениях, покажем построение картин поля в случае волн электрического типа. Прежде всего выясним возможность существования волн с нулевыми индексами, т. е. волн типов E_{00} , E_{10} , E_{01} .

Волна электрического типа должна обладать продольной составляющей электрического поля. Рассмотрим поперечное сечение волновода в координатах x , y (рис. 13.2).

В средней части сечения изобразим продольную составляющую электрического поля, ориентированную вдоль оси z . В плоскости поперечного сечения след этой составляющей обозначим крестиком. В случае волны типа E_{00} не существует вариаций поля вдоль осей x и y . Следовательно, аналогичные продольные составляющие электрического поля должны без изменения интенсивности поля возникнуть у боковых и у горизонтально расположенных стенок волновода (крестики на рис. 13.2). При этом электрическое поле у поверхности металла было бы расположено тангенциально, что невозможно. Значит, волна типа E_{00} возникнуть не может. По аналогичным соображениям невозможны волны типов E_{01} и E_{10} .

Таким образом, основной волной электрического типа является волна E_{11} , обладающая одной вариацией поля вдоль оси x и одной вариацией вдоль оси y . В такой волне магнитное поле расположено в плоскости поперечного сечения. Изобразим его в виде пунктирных замкнутых петель (рис. 13.3).

Магнитное поле формируется за счет составляющих H_x и H_y . Петля подходит тангенциально к стенкам волновода, что согласуется с граничными условиями. Каждая из составляющих поля достигает максимума в средней части стенок и спадает к их краям. На рис. 13.3 показаны эпюры составляющих H_x и H_y . Каждая из них дает одну вариацию поля вдоль оси x и y , что соответствует индексам исследуемой волны. По мере продвижения от стенок волновода к середине сечения густота магнитных силовых линий уменьшается до нуля. Таким образом, если рассматривать, например, изменение составляющей поля H_x вдоль оси y , то поле от максимального значения у верхней стенки уменьшится

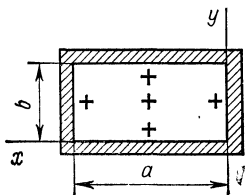


Рис. 13.2

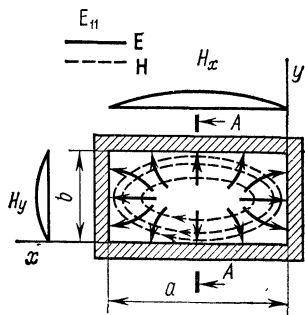


Рис. 13.3

до нуля при $y = b/2$ и далее возрастет до максимального значения при $y = 0$.

Следовательно, имеет место одна вариация поля H_x вдоль оси y . Аналогично изменяется составляющая поля H_y вдоль оси x .

Изображенное магнитное поле удовлетворяет поставленным условиям. Электрические силовые линии должны быть ортогональны магнитным, подходить нормально к стенкам волновода и иметь продольную составляющую. Руководствуясь этим, можно изобразить это поле на рис. 13.3 в виде сплошных линий, представляющих собой полупетли уходящие вдоль оси z . Задав произвольным направлением поля \mathbf{H} , следует выбрать направление поля \mathbf{E} исходя из того, что волна распространяется вдоль оси z и вдоль этой оси должен быть ориентирован вектор Пойнтинга. Как известно, последний определяется выражением $\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E} \mathbf{H}]$ и представляет собой векторное произведение вектора \mathbf{E} на вектор \mathbf{H} . Ориентацию векторного произведения определяют по правилу движения правоходового винта, рукоятка которого поворачивается по кратчайшему пути от вектора \mathbf{E} к вектору \mathbf{H} . На рис. 13.4 волна типа E_{11} показана в другой проекции — в координатах x, z .

Рис. 13.4 соответствует сечению AA на рис. 13.3. Точки и крестики представляют собой следы магнитных силовых линий. Картина поля перемещается вдоль оси z с фазовой скоростью v_{ϕ} , определяемой выражением (13.60). Расстояние между точками одинаковой фазы представляет собой длину волны в волноводе λ_b , которая может быть рассчитана с помощью формулы (13.63).

После построения картины поля волны типа E_{11} нетрудно построить картины поля электрической волны любого типа. Допустим, желательнее получить картину поля волны E_{23} . Эта волна должна обладать двумя вариациями поля вдоль оси x и тремя вариациями поля вдоль оси y .

Разобьем пространство между боковыми стенками вдоль оси x на две равные части и пространство вдоль оси y на три равные части. В результате на рис. 13.5 поперечное сечение волновода будет разбито на шесть отсеков.

В каждом отсеке независимо построим картину поля волны типа E_{11} , первоначально не указывая направления силовых линий. Пос-

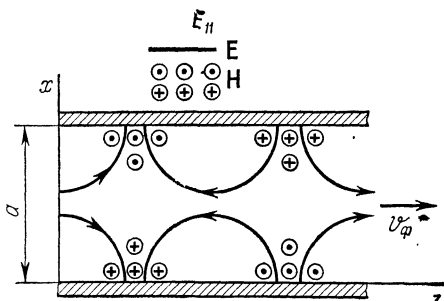


Рис. 13.4

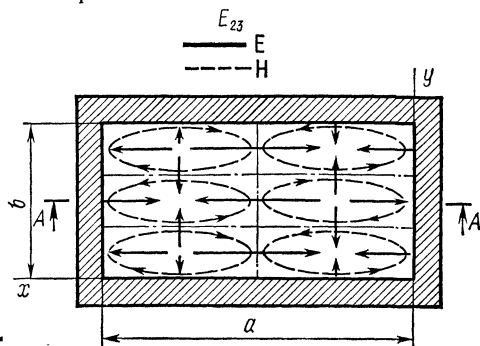


Рис. 13.5

ле этого в каком-либо из отсеков определим направление силовых линий так, как было сделано при построении картины поля волны типа E_{11} . Все соседние силовые линии в других отсеках должны быть направлены в одну сторону, так как в противном случае они уничтожали бы друг друга.

На рис. 13.6 это поле, показанное в координатах x, z , соответствует сечению AA на рис. 13.5. При построении поля волны типа E_{mn} с любыми значениями индексов следует разбить пространство между боковыми стенками на m равных частей и пространство между верхней и нижней стенками на n равных частей. Далее в каждом отсеке нужно построить картину поля волны типа E_{11} .

Затем перейдем к построению картин поля волн магнитного типа. Определим возможность существования волны с двумя нулевыми индексами, т. е. волны типа H_{00} . Электрическое поле в волнах магнитного типа располагается в плоскости поперечного сечения, т. е. в координатах x, y . Попробуем обеспечить отсутствие вариации поля вдоль координаты y за счет ориентации электрических силовых линий вдоль оси y (см. рис. 13.7) и создания одинаковой их густоты вдоль оси x во избежание изменения поля вдоль этой оси. В этом случае должны существовать электрические силовые линии у боковых стенок волновода так, как показано на рисунке. При этом должно существовать тангенциальное электрическое поле у боковых стенок волновода, что невозможно.

Второй вариант показан на рис. 13.8, где электрическое поле нормально к боковым стенкам волновода и обеспечивается отсутствие его вариации вдоль координаты x . При этом нельзя обеспечить отсутствия вариации поля вдоль координаты y , так как возникли

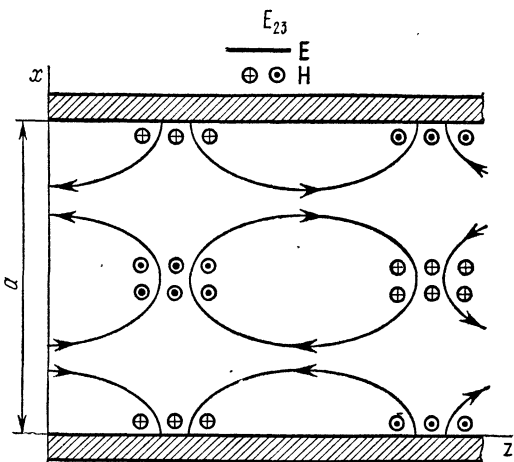


Рис. 13.6

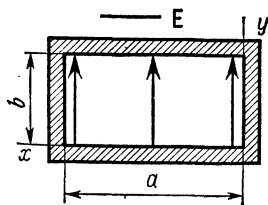


Рис. 13.7

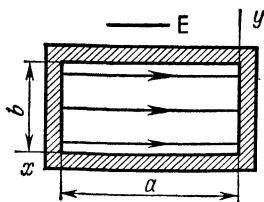


Рис. 13.8

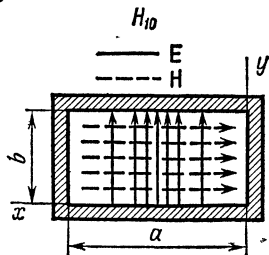


Рис. 13.9

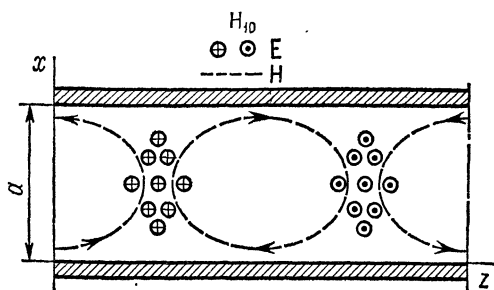


Рис. 13.10

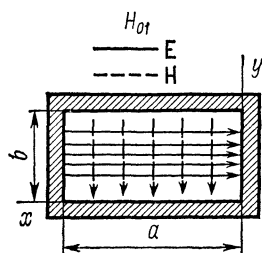


Рис. 13.11

бы тангенциальные составляющие электрического поля у нижней и верхней стенок волновода, показанные на рисунке. Таким образом, волна типа H_{00} существовать не может.

Рассмотрим волну типа H_{10} , имеющую одну вариацию поля вдоль оси x и нуль вариаций поля вдоль оси y . Расположим электрические силовые линии вдоль оси y и сделаем так, чтобы густота их уменьшалась по мере приближения к боковым стенкам волновода (рис. 13.9). У боковых стенок электрическое поле должно уменьшаться до нуля для обеспечения граничных условий. На рисунке электрические силовые линии подходят нормально к верхней и нижней стенкам.

Магнитное поле имеет продольную составляющую и должно быть ортогонально электрическому полю. Таким образом, магнитное поле представляет собой горизонтальные петли, расположенные в координатах x, z . На рис. 13.9 пунктиром показаны торцевые части этих петель. Густота петель вдоль оси y одинаковая, они подходят тангенциально к стенкам волновода, что соответствует граничным условиям у поверхности идеального металла. На рис. 13.10 показано поле волны типа H_{10} в координатах x, z . Крестиками и точками обозначены следы электрических силовых линий. После выбора направления магнитных линий направление электрических силовых линий выбирают так, чтобы вектор Пойнтинга был направлен в сторону положительных значений оси z . Соседние силовые линии направлены в одну сторону.

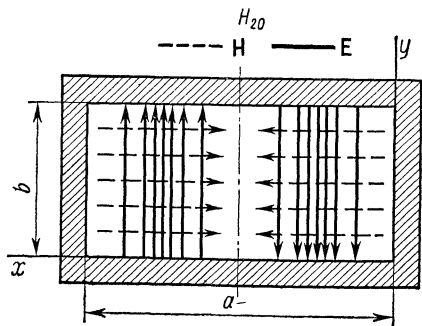


Рис. 13.12

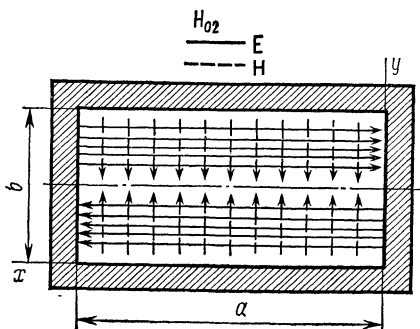


Рис. 13.13

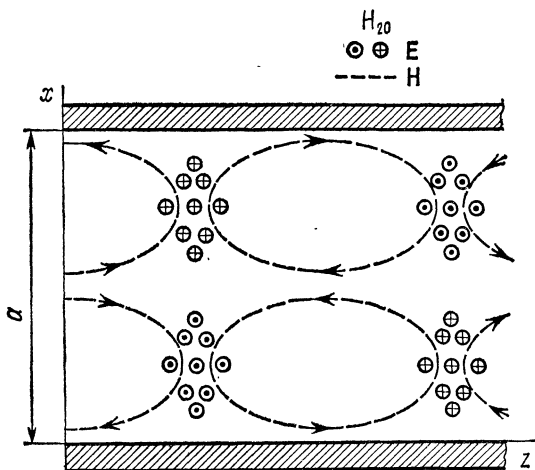


Рис. 13.14

Картину поля волны типа H_{01} строят аналогично. Она отличается от картины поля волны типа H_{10} тем что оси x и y как бы меняются местами. Эту картину легко получить путем поворота поля волны типа H_{10} в плоскости поперечного сечения на 90° по часовой стрелке или против нее. Картина поля волны типа H_{01} в плоскости поперечного сечения показана на рис. 13.11.

Зная картины поля волн H_{10} и H_{01} , можно построить картины поля волн типа H_{m0} или H_{0n} . В случае волны типа H_{m0} расстояние между боковыми стенками волновода разбивают на m частей и в каждом из образовавшихся отсеков независимо строят картину поля волны типа H_{10} . В случае волны типа H_{0n} расстояние между нижней и верхней стенками волновода разбивают на n частей и в отсеках строят картину поля волны типа H_{01} .

На рис. 13.12 дана картина поля волны типа H_{20} , а на рис. 13.13 — волны типа H_{02} . На рис. 13.14 показана картина поля волны типа H_{20} в координатах x, z . Поле волны H_{11} должно обладать одной вариацией вдоль оси x и одной вариацией вдоль оси y . Электрическое поле находится в плоскости x, y . Магнитное поле обладает продольной составляющей. Электрические силовые линии должны подходить нормально к стенкам волновода. Очевидно, для обеспечения вариации поля электрические силовые линии не могут идти вдоль оси x или y и должны претерпевать изгиб, как показано на рис. 13.15. Поле \mathbf{H} ортогонально полю \mathbf{E} . Поле действительно имеет одну вариацию вдоль осей x и y . Магнитное поле обладает продольной составляющей и ортогонально электрическому полю. Торцевые части петель показаны на рисунке пунктирными линиями. Взаимное направление электрических и магнитных силовых линий выбирают так, чтобы вектор Пойнтинга был ориентирован вдоль оси z . Соседние силовые линии направлены в одну сторону.

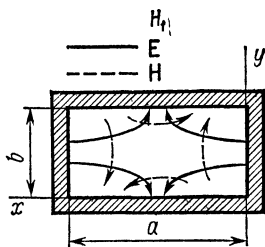


Рис. 13.15

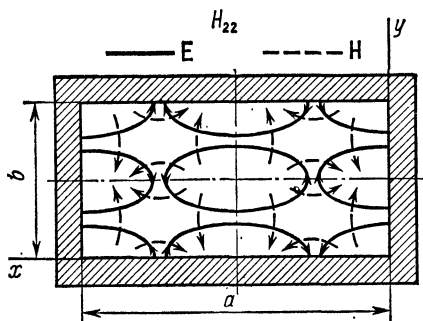


Рис. 13.16

Построение картин поля волн типа H_{mn} с ненулевыми индексами m и n производят по принципу, изложенному ранее. Расстояние между боковыми стенками волновода разбивают на m частей, а расстояние между нижней и верхней стенками — на n частей. В каждом из отсеков независимо строят картину поля волны типа H_{11} . Пример такого построения дан на рис. 13.16, на котором показана картина поля волны типа H_{22} в координатах x, y . В поле волны типа H_{22} , так же как в поле волны типа E_{23} (см. рис. 13.6), электрические силовые линии образуют не только полупетли, опирающиеся на стенки, но и замкнутые петли, как и магнитные силовые линии.

Изложенная методика построения картин поля не является строгой. На примере картины поля волны типа H_{10} будет показан аналитический метод построения подобных картин.

§ 13.7. Аналитический метод построения картин поля в прямоугольном волноводе

Метод целесообразно показать на примере построения конкретного поля, например поля основной волны типа H_{10} . Формулы (13.52) — (13.57) позволяют определить составляющие поля волн магнитного типа. Для рассматриваемого типа волны $m=1, n=0$. Подставляя эти значения в указанные формулы, получим выражения для составляющих поля:

$$\dot{H}_x = j \frac{h}{g_{mn}^2} C_2 \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-jhz}, \quad (13.83)$$

$$\dot{H}_y = 0, \quad (13.84)$$

$$H_z = C_2 \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-jhz}, \quad (13.85)$$

$$\dot{E}_x = 0, \quad (13.86)$$

$$\dot{E}_y = -j \frac{\omega \mu_a}{g_{mn}^2} C_2 \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-jhz}, \quad (13.87)$$

$$\dot{E}_z = 0. \quad (13.88)$$

Введем обозначения

$$\frac{h}{g_{mn}^2} C_2 \frac{\pi}{a} = A_1, \quad \frac{\omega \mu_a}{g_{mn}^2} C_2 \frac{\pi}{a} = A_2. \quad (13.89)$$

С учетом этих обозначений отличные от нуля составляющие поля запишутся в следующем виде:

$$\dot{H}_x = j A_1 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-jhz}, \quad (13.90)$$

$$\dot{H}_z = C_2 \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-jhz}, \quad (13.85)$$

$$\dot{E}_y = -j A_2 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-jhz}. \quad (13.91)$$

Приведенные выражения дают комплексные амплитуды поля. Картина поля в волноводе перемещается с фазовой скоростью. Для получения картины поля следует сделать как бы мгновенную его фотографию. Другими словами, надо от комплексных амплитуд поля перейти к мгновенным значениям и далее зафиксировать время. Переход осуществляют с помощью формул (1.157). Тогда можно написать

$$\left. \begin{aligned} H_x(t) &= \text{Re}(\dot{H}_x e^{j\omega t}), \\ H_z(t) &= \text{Re}(\dot{H}_z e^{j\omega t}), \\ E_y(t) &= \text{Re}(\dot{E}_y e^{j\omega t}). \end{aligned} \right\} \quad (13.92)$$

Подставляя в эти выражения значения \dot{H}_x , \dot{H}_z , \dot{E}_y из формул (13.90), (13.85), (13.91), получаем

$$\begin{aligned} H_x(t) &= \text{Re} \left\{ j A_1 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{j(\omega t - hz)} \right\} = \\ &= \text{Re} \left\langle j A_1 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \{ \cos(\omega t - hz) + j \sin(\omega t - hz) \} \right\rangle, \\ H_z(t) &= \text{Re} \left\{ C_2 \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{j(\omega t - hz)} \right\} = \\ &= \text{Re} \left\langle C_2 \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \{ \cos(\omega t - hz) + j \sin(\omega t - hz) \} \right\rangle, \\ E_y(t) &= \text{Re} \left\{ -j A_2 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{j(\omega t - hz)} \right\} = \\ &= \text{Re} \left\langle -j A_2 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \{ \cos(\omega t - hz) + j \sin(\omega t - hz) \} \right\rangle. \end{aligned}$$

Отбрасывая мнимые части, можно написать выражения для мгновенных значений составляющих поля:

$$\left. \begin{aligned} H_x(t) &= -A_1 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin(\omega t - hz), \\ H_z(t) &= C_2 \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cos(\omega t - hz), \\ E_y(t) &= A_2 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin(\omega t - hz). \end{aligned} \right\} \quad (13.93)$$

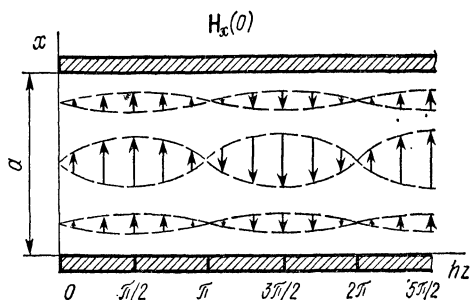


Рис. 13.17

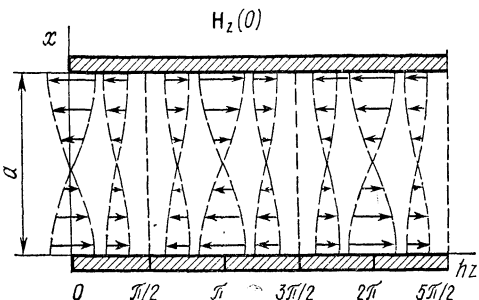


Рис. 13.18

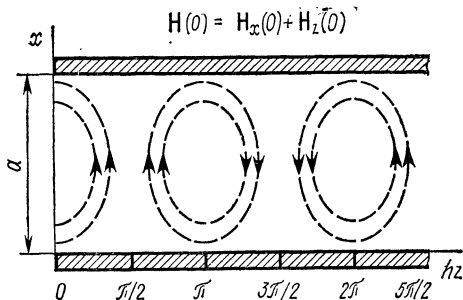


Рис. 13.19

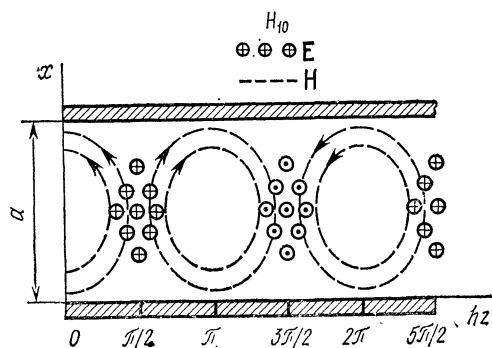


Рис. 13.20

Далее следует зафиксировать время. Для простоты выберем время $t = 0$. При этом выражения (13.93) запишутся в виде

$$H_x(0) = A_1 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin(hz), \quad (13.94)$$

$$H_z(0) = C_2 \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cos(hz), \quad (13.95)$$

$$E_y(0) = -A_2 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin(hz). \quad (13.96)$$

Полученные составляющие поля не зависят от координаты y и являются функциями координат x и z .

Изобразим на рис. 13.17 картину изменения вектора $\mathbf{H}_x(0)$ в плоскости x, hz , используя формулу (13.94). Построим на рис. 13.18 в этой же плоскости картину изменения вектора $\mathbf{H}_z(0)$, используя формулу (13.95). Суммарное магнитное поле будет определяться суммой векторов $\mathbf{H}_x(0)$ и $\mathbf{H}_z(0)$. В результате сложения полей возникают замкнутые силовые линии, показанные на рис. 13.19. Вектор $\mathbf{E}_y(0)$ ориентирован вдоль оси y . Его изменение определяется формулой (13.96). В плоскости x, hz этот вектор можно по-

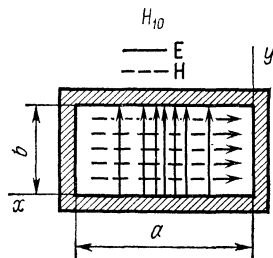


Рис. 13.21

казать в виде крестиков и точек, густота которых изменяется по синусоидальному закону вдоль осей x и hz .

Суммарное электромагнитное поле в плоскости $x, (hz)$ показано на рис. 13.20, а в плоскости x, y — на рис. 13.21. Эти рисунки аналогичны рис. 13.10 и 13.9, построенным без строгого математического анализа, на основании общих положений. Аналогично могут быть получены аналитические выражения для строгого построения картин поля волн любых типов.

ГЛАВА 14 КРУГЛЫЙ ВОЛНОВОД

§ 14.1. Решение основного уравнения для продольных составляющих поля в круглом волноводе

Запишем основное уравнение для волн электрического типа (12.9):

$$\frac{1}{h_{\xi} h_{\eta}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_{\eta}}{h_{\xi}} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_{\xi}}{h_{\eta}} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial \eta} \right) \right\} + g^2 \dot{E}_{z0} = 0.$$

При анализе круглых цилиндрических систем целесообразно использовать цилиндрическую систему координат, расположив их так, как показано на рис. 14.1. Выберем следующее соответствие цилиндрических и криволинейных координат:

$$\xi \rightarrow r, \quad \eta \rightarrow \varphi, \quad \zeta \rightarrow z, \quad h_{\xi} = 1, \quad h_{\eta} = r. \quad (14.1)$$

Координатная система удовлетворяет ограничениям (11.36), и использование основного уравнения и формул перехода возможно. Применяя соотношения (14.1), получаем уравнение (12.9) в виде

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial \varphi} \right) \right\} + g^2 \dot{E}_{z0} = 0. \quad (14.2)$$

В аналогичной форме может быть записано основное уравнение для продольной составляющей \dot{H}_{z0} в случае волны магнитного типа:

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \dot{H}_{z0}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_{z0}}{\partial \varphi} \right) \right\} + g^2 \dot{H}_{z0} = 0. \quad (14.3)$$

Дальнейшее решение основных уравнений покажем на примере волн электрического типа. Раскроем скобки в уравнении (14.2):

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{z0}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{E}_{z0}}{\partial \varphi^2} + g^2 \dot{E}_{z0} = 0. \quad (14.4)$$

Умножим уравнение на r^2 , чтобы освободить вторую производную по φ от членов, содержащих r :

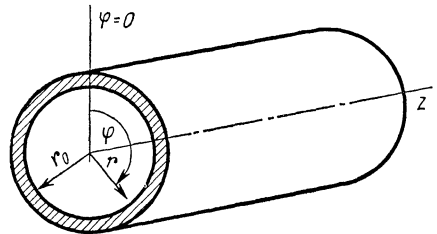


Рис. 14.1

$$r^2 \frac{\partial^2 \dot{E}_{z0}}{\partial r^2} + \frac{r^2}{r} \frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial r} + g^2 r^2 \dot{E}_{z0} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{z0}}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (14.5)$$

Следуя методу Фурье, положим

$$\dot{E}_{z0} = R(r) \Phi(\varphi), \quad (14.6)$$

где $R(r)$ — функция только координаты r ; $\Phi(\varphi)$ — функция только координаты φ .

Подставим выражение (14.6) в уравнение (14.5) и осуществим дифференцирование:

$$\Phi r^2 \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \Phi \frac{r^2}{r} \cdot \frac{\partial R}{\partial r} + g^2 r^2 R \Phi + R \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (14.7)$$

Разделим это уравнение на произведение $R\Phi$:

$$\frac{r^2}{R} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r^2}{Rr} \cdot \frac{\partial R}{\partial r} + g^2 r^2 + \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (14.8)$$

Первые три слагаемых в полученном уравнении являются функцией только координаты r и не зависят от координаты φ . Последнее слагаемое является функцией только координаты φ и не зависит от координаты r .

В результате можно сказать, что сумма двух функций, одна из которых зависит от координаты r , а вторая — от координаты φ , равна нулю. Подобное положение возможно только тогда, когда первая и вторая функции в отдельности равны одному и тому же постоянному числу, причем, если в первом равенстве взят определенный знак перед этим числом, то во втором равенстве знак должен быть изменен на обратный. Из этих соображений уравнение (14.8) можно разбить на два независимых соотношения:

$$\frac{r^2}{R} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r^2}{Rr} \cdot \frac{\partial R}{\partial r} + g^2 r^2 = m^2, \quad (14.9)$$

$$\frac{1}{\Phi} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -m^2. \quad (14.10)$$

Умножив соотношение (14.9) на R и разделив на r^2 , получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для функции R :

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dR}{dr} + \left(g^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0. \quad (14.11)$$

Умножив уравнение (14.10) на Φ и перегруппировав члены, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для функции Φ :

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0. \quad (14.12)$$

Электромагнитная волна распространяется вдоль оси z и в плоскости поперечного сечения вследствие интерференции колебаний, пришедших разными путями в одну точку, возникают стоячие волны, В одной и той же точке поперечного сечения в один и тот же момент

времени не может быть различных полей. Кроме того, поле в любой точке волновода должно быть конечным. Поэтому функция Φ должна быть конечной, периодической по φ , а функция R — конечной при изменении радиуса r от нуля до r_0 .

С учетом сказанного запишем решение уравнения (14.12)

$$\Phi = A_1 \cos(m\varphi) + A_2 \sin(m\varphi). \quad (14.13)$$

Поскольку при исследовании распространения волн в круглом волноводе выбор начала отсчета угла φ произволен, без нарушения общности анализа можно положить

$$A_2 = 0. \quad (14.14)$$

Тогда функция

$$\Phi = A_1 \cos(m\varphi). \quad (14.15)$$

Число m может принимать любое целое значение, начиная с нуля. Уравнение (14.11) исследовалось Бесселем [8,9]. Решение этого уравнения записывается в виде

$$R = B_1 J_m(gr) + B_2 N_m(gr). \quad (14.16)$$

Первое независимое решение $J_m(gr)$ называют функцией Бесселя первого рода порядка m . Следует учитывать, что порядок функции m представляет собой коэффициент, входящий в решение (14.15) для функции Φ . Он определяет число вариаций поля по углу φ .

Таблицы и графики функций $J_m(gr)$ имеются в многочисленных справочниках [24]. Графики функций трех первых порядков показаны на рис. 14.2.

Как следует из рисунка, характер функций $J_m(gr)$ при изменении аргумента затухающий, колебательный. В пределах всего диапазона изменения аргумента функции $J_m(gr)$ остаются конечными.

Второе независимое решение $N_m(gr)$ называют функцией Бесселя второго рода порядка m , или функцией Неймана порядка m . Порядок, так же как и в функциях Бесселя первого рода, определяет число вариаций поля по углу φ . Функции Бесселя второго рода сходны с функциями Бесселя первого рода, за исключением точки

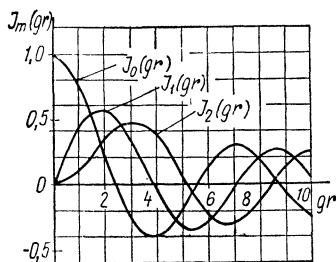


Рис. 14,2

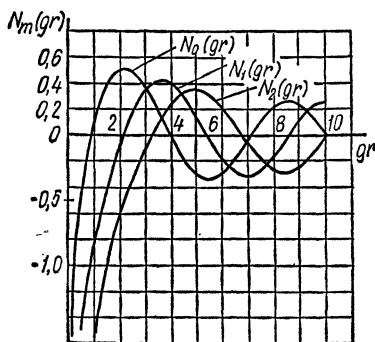


Рис. 14,3

$gr=0$, где эти функции устремляются к $-\infty$. Графики указанных функций первых трех порядков приведены на рис. 14.3. Постоянные интегрирования B_1, B_2 в выражении (14.16) могут принимать различные значения в том числе мнимые, в зависимости от конкретных условий решаемой задачи. При этом решение записывается в виде

$$R_1 = B_3 \{J_m(gr) + jN_m(gr)\} = B_3 H_m^{(1)}(gr), \quad (14.17)$$

или

$$R_1 = B_4 \{J_m(gr) - jN_m(gr)\} = B_4 H_m^{(2)}(gr). \quad (14.18)$$

Функции $H_m^{(1)}(gr)$, $H_m^{(2)}(gr)$ называют соответственно функциями Бесселя третьего и четвертого рода порядка m , или функциями Ханкеля первого и второго рода порядка m . Если при исследованиях взят временной множитель $e^{j\omega t}$ (а не $e^{-j\omega t}$), то решение (14.18) соответствует цилиндрической бегущей волне, распространяющейся от оси z в радиальном направлении и затухающей до нуля в бесконечности. Решение (14.17) соответствует цилиндрической волне, распространяющейся из бесконечности к оси z ; его можно рассматривать как цилиндрическую волну, отраженную от цилиндрического препятствия, симметричного относительно оси z . При временном множителе $e^{-j\omega t}$ возникает обратная ситуация — функция $H_m^{(1)}(gr)$ соответствует падающей волне, а функция $H_m^{(2)}(gr)$ — отраженной волне.

В круглом волноводе не могут существовать радиальные волны. Поле распространяется вдоль оси z . В силу этого решения с функциями Ханкеля должны быть отброшены.

Также не имеет физического смысла решение, использующее функцию Неймана. В реальных волноводных системах не могут существовать бесконечно большие поля в пределах всего пространства волновода, занятого полем. В круглом волноводе ось волновода, соответствующая значениям $r=0$, является частью пространства, в котором существует поле. Следовательно, при исследовании процессов в круглом волноводе в решении (14.16) следует положить

$$B_2 = 0. \quad (14.19)$$

С учетом этого на основании формул (14.6), (14.15), (14.16) можно найти продольную составляющую электрического поля:

$$\dot{E}_{z0} = C_1 I_m(gr) \cos(m\phi), \quad (14.20)$$

где

$$C_1 = B_1 A_1. \quad (14.21)$$

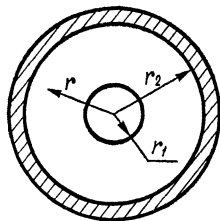


Рис. 14.4

Следует сказать, что при рассмотрении волн волноводного типа в коаксиальном волноводе, сечение которого показано на рис. 14.4, необходимо учитывать, что в случае идеально проводящих сте-

нок электромагнитное поле может существовать в пространстве, находящемся между радиусами r_1 и r_2 . Таким образом, в этой системе текущее значение радиуса может изменяться от r_1 до r_2 и значения $gr=0$ в пространстве, занятом полем, не существует. Следовательно, в решении (14.16) нет оснований приравнять коэффициент B_2 нулю. В диапазоне изменения аргумента бесселевых функций от gr_1 до gr_2 функция Неймана конечна, и ее не следует отбрасывать.

В силу того что основное уравнение (14.3) для продольной составляющей магнитного поля \dot{H}_{z0} аналогично основному уравнению (14.2) для \dot{E}_{z0} , решение для \dot{H}_{z0} следует написать в форме (14.20):

$$\dot{H}_{z0} = C_2 J_m(gr) \cos(m\varphi). \quad (14.22)$$

Полученные формулы для продольных составляющих поля дают возможность провести полный анализ волн электрического и магнитного типов.

§ 14.2. Волны электрического типа

В случае волны электрического типа составляющая \dot{E}_{z0} касательна к стенкам волновода, и граничные условия у поверхности идеального металла записываются в виде

$$\dot{E}_{z0} = 0 \quad (\text{при } r = r_0). \quad (14.23)$$

Применяя выражение (14.20), получаем

$$C_1 J_m(gr_0) \cos(m\varphi) = 0,$$

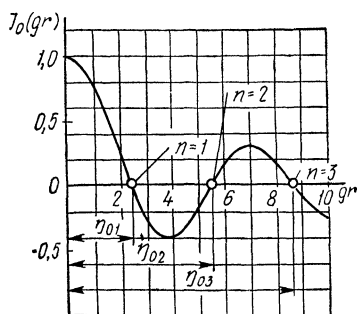
откуда

$$J_m(gr_0) = 0. \quad (14.24)$$

Как следует из графиков функций Бесселя (см. рис. 14.2), функция каждого порядка обладает бесконечно большим числом значений аргумента gr , при котором функция обращается в нуль. Эти значения называют корнями функций Бесселя и обозначают η_{mn} , где m — порядок функции; n — порядковый номер корня, начиная со значений gr , отличных от нуля. Рис. 14.5 иллюстрирует сказанное. В табл. 14.1 приведены некоторые значения корней η_{mn} функций $J_m(gr)$.

Таблица 14.1

n	m		
	0	1	2
1	2,405	3,832	5,135
2	5,520	7,016	8,417
3	8,654	10,174	11,620



Таким образом, условие (14.24) выполняется, если справедливо соотношение $gr_0 = \eta_{mn}$.

Поскольку значения η зависят от индексов mn , целесообразно эти же индексы приписать поперечному волновому числу:

$$g_{mn}r_0 = \eta_{mn}, \quad g_{mn} = \eta_{mn}/r_0. \quad (14.25)$$

При этом вместо выражения (14.20) для составляющей \dot{E}_{z0} можно написать

$$\dot{E}_{z0} = C_1 J_m \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r \right) \cos(m\varphi). \quad (14.26)$$

Далее можно определить составляющие поля в круглом волноводе в случае волны электрического типа. Используя формулы перехода (12.51), (12.53)—(12.57), выполняя условия (12.64) и соответствие координат (14.1), получаем следующие соотношения:

$$\dot{E}_r = -j \frac{h}{g^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial r} e^{-jhz}, \quad (14.27)$$

$$\dot{E}_\varphi = -j \frac{h}{rg^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial \varphi} e^{-jhz}, \quad (14.28)$$

$$\dot{E}_z = \dot{E}_{z0} e^{-jhz}, \quad (14.29)$$

$$\dot{H}_r = j \frac{\omega \varepsilon_a}{rg^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial \varphi} e^{-jhz}, \quad (14.30)$$

$$\dot{H}_\varphi = -j \frac{\omega \varepsilon_a}{g^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial r} e^{-jhz}, \quad (14.31)$$

$$\dot{H}_z = 0. \quad (14.32)$$

Для получения окончательных выражений используем формулы (14.25) и (14.26):

$$\dot{E}_r = -j \frac{hr_0}{\eta_{mn}} C_1 J'_m \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r \right) \cos(m\varphi) e^{-jhz}, \quad (14.33)$$

$$\dot{E}_\varphi = j \frac{hr_0}{r\eta_{mn}} C_1 m J_m \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r \right) \sin(m\varphi) e^{-jhz}, \quad (14.34)$$

$$\dot{E}_z = C_1 J_m \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r \right) \cos(m\varphi) e^{-jhz}, \quad (14.35)$$

$$\dot{H}_r = -j \frac{\omega \varepsilon_a r_0^2}{r\eta_{mn}} C_1 m J_m \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r \right) \sin(m\varphi) e^{-jhz}, \quad (14.36)$$

$$\dot{H}_\varphi = -j \frac{\omega \varepsilon_a r_0}{\eta_{mn}} C_1 J'_m \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r \right) \cos(m\varphi) e^{-jhz}, \quad (14.37)$$

$$\dot{H}_z = 0. \quad (14.38)$$

Здесь

$$J'_m \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r \right) = \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r \right)} \left\{ J_m \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r \right) \right\}. \quad (14.39)$$

Продольное волновое число h определяется из формулы (13.35). Подставляя в нее значение g_{mn} (14.25), получаем

$$h = h_{mn} = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0}\right)^2}. \quad (14.40)$$

§ 14.3. Волны магнитного типа

В случае волны магнитного типа составляющие поля определяются соотношениями (12.58)—(12.63), которые при соблюдении условий (12.64) и соответствия координат (14.1) могут быть записаны в таком виде:

$$\dot{H}_r = -j \frac{h}{g^2} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{z0}}{\partial r} e^{-jhz}, \quad (14.41)$$

$$\dot{H}_\varphi = -j \frac{h}{rg^2} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{z0}}{\partial \varphi} e^{-jhz}, \quad (14.42)$$

$$\dot{H}_z = \dot{H}_{z0} e^{-jhz}, \quad (14.43)$$

$$\dot{E}_r = -j \frac{\omega \mu_a}{rg^2} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{z0}}{\partial \varphi} e^{-jhz}, \quad (14.44)$$

$$\dot{E}_\varphi = j \frac{\omega \mu_a}{g^2} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{z0}}{\partial r} e^{-jhz}, \quad (14.45)$$

$$\dot{E}_z = 0. \quad (14.46)$$

Тангенциальной к стенкам волновода является составляющая поля \dot{E}_φ . Найдем ее с помощью выражений (14.45) и (14.22):

$$\dot{E}_\varphi = j \frac{\omega \mu_a}{g^2} C_2 g J'_m(gr) \cos(m\varphi) e^{-jhz}. \quad (14.47)$$

Граничные условия у поверхности идеального металла имеют вид

$$\dot{E}_\varphi = 0 \quad (\text{при } r = r_0) \quad (14.48)$$

или

$$j \frac{\omega \mu_a}{g^2} C_2 g J'_m(gr_0) \cos(m\varphi) e^{-jhz} = 0,$$

откуда

$$J'_m(gr_0) = 0. \quad (14.49)$$

Производная функции Бесселя по аргументу равна нулю при $r = r_0$. Так как функция Бесселя первого рода носит колебательный характер, ее производная также будет колебательной функцией.

На рис. 14.6 приведены функция $J_0(gr)$ и ее производная.

Как следует из рисунка, граничное условие (14.49) удовлетворяется при бесконечно большом числе дискретных значений аргумента gr . Каждое такое значение аргумента соответствует при заданном радиусе волновода определенному поперечному волновому числу g и, следовательно, определенному типу волны.

Обозначим значения корней производной функций Бесселя μ_{mn} , где m — порядок функции; n — порядковый номер корня, начиная со значений gr , отличных от нуля. Тогда граничные условия (14.49) будут удовлетворены при $gr_0 = \mu_{mn}$. Каждому значению индексов m, n будет соответствовать определенное значение g . Поэтому следует написать

$$g_{mn} r_0 = \mu_{mn},$$

откуда

$$g_{mn} = \mu_{mn} / r_0. \quad (14.50)$$

В табл. 14.2 приведены некоторые значения корней μ_{mn} производной функций Бесселя.

Таблица 14.2

n	m		
	0	1	2
1	3,832	1,840	3,054
2	7,016	5,335	6,705
3	10,174	8,536	9,965

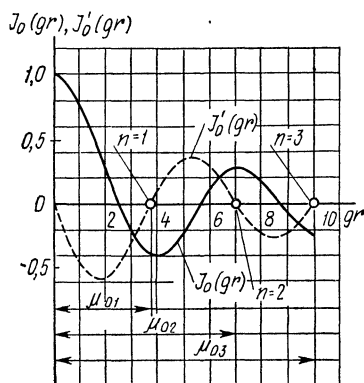


Рис. 14.6

Далее можно получить окончательные выражения для составляющих магнитного поля в круглом волноводе, используя формулы (14.41) — (14.46), (14.22) и (14.50):

$$\dot{H}_r = -j \frac{hr_0}{\mu_{mn}} C_2 J'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \cos(m\varphi) e^{-jhz}, \quad (14.51)$$

$$\dot{H}_\varphi = j \frac{hr_0^2}{r \mu_{mn}} C_2 m J_m \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \sin(m\varphi) e^{-jhz}, \quad (14.52)$$

$$\dot{H}_z = C_2 J_m \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \cos(m\varphi) e^{-jhz}, \quad (14.53)$$

$$\dot{E}_r = j \frac{\omega \mu_a r_0^2}{r \mu_{mn}} C_2 m J_m \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \sin(m\varphi) e^{-jhz}, \quad (14.54)$$

$$\dot{E}_\varphi = j \frac{\omega \mu_a r_0}{\mu_{mn}} C_2 J'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \cos(m\varphi) e^{-jhz}, \quad (14.55)$$

$$\dot{E}_z = 0. \quad (14.56)$$

Продольное волновое число (13.35) приобретает вид

$$h = h_{mn} = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} \right)^2}. \quad (14.57)$$

§ 14.4. Фазовая скорость, длина волны в волноводе, критическая длина волны. Волны основных типов в круглом волноводе

Для круглого волновода справедливы выведенные ранее выражения (13.60), (13.61), (13.63).

Общим для критической длины волны является выражение (12.43).

В случае волн электрического типа $g = g_{mn} = \eta_{mn}/r_0$ и критическая длина волны

$$\lambda_{кр} (E_{mn}) = \frac{2\pi r_0}{\eta_{mn}} = \frac{6,28 \cdot r_0}{\eta_{mn}}. \quad (14.58)$$

В случае волн магнитного типа $g = g_{mn} = \mu_{mn}/r_0$ и критическая длина волны

$$\lambda_{кр} (H_{mn}) = \frac{2\pi r_0}{\mu_{mn}} = \frac{6,28 r_0}{\mu_{mn}}. \quad (14.59)$$

Основной волне соответствует наибольшее значение критической длины волны и, следовательно, наименьшие значения η_{mn} и μ_{mn} .

Из табл. 14.1 и 14.2 следует, что наименьшими значениями η_{mn} и μ_{mn} являются: $\eta_{01} = 2,405$ и $\mu_{11} = 1,840$.

Таким образом, в случае волн электрического типа основной является волна типа E_{01} с критической длиной волны

$$\lambda_{кр} (E_{01}) = \frac{6,28 r_0}{2,405} = 2,61 r_0, \quad (14.60)$$

а в случае волн магнитного типа — волна типа H_{11} с критической длиной волны

$$\lambda_{кр} (H_{11}) = \frac{6,28 r_0}{1,84} = 3,41 r_0. \quad (14.61)$$

Видно, что критическая длина волны основной волны магнитного типа больше критической длины волны основной волны электрического типа.

§ 14.5. Условия существования волн различных типов в круглом волноводе

Определим критические длины волн для колебаний, ближайших к основным волнам электрического и магнитного типов.

Из табл. 14.1 следует, что ближайшим к η_{01} числом является $\eta_{11} = 3,832$. Этому числу соответствует волна типа E_{11} с критической длиной волны

$$\lambda_{кр} (E_{11}) = \frac{6,28 r_0}{3,832} = 1,64 r_0. \quad (14.62)$$

Из табл. 14.2 видно, что ближайшим к μ_{11} числом является $\mu_{21} = 3,054$. Этому числу соответствует волна типа H_{21} с критической длиной волны

$$\lambda_{кр} (H_{21}) = \frac{6,28 r_0}{3,054} = 2,05 r_0. \quad (14.63)$$

Волна типа E_{11} не может возникнуть в волноводе при условии

$$\lambda > \lambda_{кр (E_{11})} = 1,64r_0.$$

Аналогично, невозможны волны типа H_{21} при условии

$$\lambda > \lambda_{кр (H_{21})} = 2,05r_0.$$

Если желательно, чтобы в волноводе существовала основная волна электрического типа E_{01} и не возникали волны высших электрических типов, необходимо соблюдение неравенства

$$\lambda_{кр (E_{01})} = 2,61r_0 > \lambda > 1,64r_0. \quad (14.64)$$

Если желательно, чтобы в волноводе существовала основная волна магнитного типа H_{11} и не возникали волны высших магнитных типов, требуется соблюдение неравенства

$$\lambda_{кр (H_{11})} = 3,41r_0 > \lambda > 2,05r_0. \quad (14.65)$$

Сравнительная оценка позволяет сделать вывод, что при соблюдении левой части неравенства (14.64) $2,61r_0 > \lambda$ будет выполнена левая часть неравенства (14.65): $3,41r_0 > \lambda$.

Следовательно, будут соблюдены условия существования не только волны типа E_{01} , но и волны типы H_{11} . Другими словами, невозможно путем правильного выбора радиуса волновода обеспечить единственность существования основной волны электрического типа. С другой стороны, возможна единственность существования основной волны магнитного типа при выполнении неравенства

$$3,41r_0 > \lambda > 2,61r_0. \quad (14.66)$$

При этом обеспечивается существование волны типа H_{11} , невозможно возникновение волны типа E_{01} и в силу соблюдения правых частей неравенств (14.64) и (14.65) невозможно создание волн высших типов. Неравенство (14.66) может быть переписано в иной форме:

$$\lambda/2,61 > r_0 > \lambda/3,41. \quad (14.67)$$

Неравенства (14.66) и (14.67) являются условиями единственности существования основной волны магнитного типа в круглом волноводе.

Сравнивая значения корней функций Бесселя η_{mn} в табл. 14.1 со значениями корней производной функций Бесселя μ_{mn} в табл. 14.2, можно заметить справедливость следующего равенства:

$$\eta_{1n} = \mu_{0n}. \quad (14.68)$$

Это равенство вытекает из свойств функций Бесселя. На основании соотношений (14.58) и (14.59) вместо равенства (14.68) можно записать

$$\lambda_{кр (E_{1n})} = \lambda_{кр (H_{0n})}. \quad (14.69)$$

Оказывается невозможным разделение волн типов E_{in} и H_{on} путем рационального выбора радиусов волноводов. Если с помощью соответствующей системы возбуждения в волноводе созданы волны типа H_{on} , то они могут вырождаться в волны типа E_{in} . Такое вырождение волн является нежелательным явлением в круглых волноводах.

§ 14.6. Картины поля в круглом волноводе

Картины поля в круглом волноводе могут быть построены по методу, описанному в § 13.7. Здесь приводятся конечные результаты.

На рис. 14.7 показана картина поля в круглом волноводе в случае основной волны магнитного типа H_{11} , на рис. 14.8 — картина поля основной волны электрического типа E_{01} , а на рис. 14.9 — картины поля волн типов H_{01} и E_{11} . Эти волны имеют одинаковую критическую длину волны на основании соотношения (14.69) и могут вырождаться одна в другую.

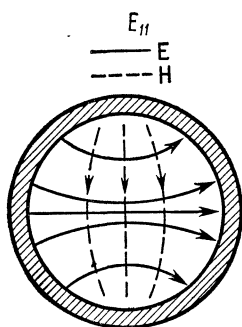


Рис. 14.7

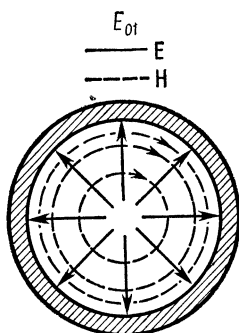


Рис. 14.8

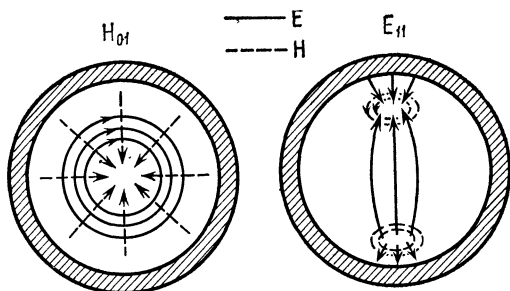


Рис. 14.9

ГЛАВА 15 КРУГЛЫЙ КОАКСИАЛЬНЫЙ ВОЛНОВОД

§ 15.1. Возможные типы волн в круглом коаксиальном волноводе

В круглом коаксиальном волноводе (рис. 15.1) за счет центрального стержня возможны поперечные электромагнитные волны или волны типа Т. В таком поле электрические силовые линии расположены радиально и опираются на заряды, находящиеся на центральном стержне и внутренней поверхности трубы. Магнитные силовые линии представляют собой окружности, коаксиальные по отношению к стержню волновода. Суммарное электромагнитное поле находится в плоскости r, φ цилиндрической системы координат, которая перпендикулярна оси распространения z , совпадающей с осью волновода.

Помимо волн типа Т в коаксиальном волноводе возможно существование волн электрического и магнитного типов. Распространение этих волн происходит путем многократного отражения поля от внутренней поверхности трубы и центрального стержня аналогично процессу, происходящему в волноводах.

В настоящей главе будет проведен анализ как волн типа Т, так и волн электрического и магнитного типов в коаксиальном волноводе.

§ 15.2. Волны типа Т

Так как в волнах типа Т отсутствуют продольные составляющие электрического или магнитного поля, основные уравнения для этих составляющих (12.9), (12.10) не могут быть положены в основу рассуждений. Однако выражение для магнитного поля в таком волноводе нетрудно найти путем применения закона полного тока:

$$\oint_{l_1} \mathbf{H} d\mathbf{l} = I.$$

При использовании комплексных амплитуд закон полного тока переписывается без каких-либо изменений:

$$\oint_{l_1} \dot{\mathbf{H}} d\mathbf{l} = \dot{I}. \quad (15.1)$$

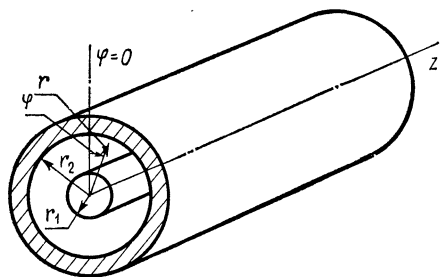


Рис. 15.1

Под током \dot{I} следует понимать электрический ток, протекающий по центральному стержню волновода. В случае волн типа Т вектор Пойнтинга ориентирован вдоль оси распростра-

нения, и, следовательно, электромагнитное поле распространяется вдоль оси волновода со скоростью света в среде, заполняющей волновод. С такой же скоростью должен распространяться электрический ток вдоль центрального стержня. Пренебрегая потерями в среде, коэффициент распространения γ можно считать равным фазовой постоянной β .

Изменение фазы вдоль оси распространения z подчиняется закону $e^{-i\beta z}$. В силу этого ток, протекающий по центральному стержню,

$$\dot{I} = \dot{I}_0 e^{-i\beta z}, \quad (15.2)$$

где \dot{I}_0 — значение тока в точке $z = 0$.

Подставив ток \dot{I} в выражение (15.1), получаем

$$\oint_{l_1} \dot{\mathbf{H}} d\mathbf{l} = \dot{I}_0 e^{-i\beta z}. \quad (15.3)$$

Выбирая в качестве контура интегрирования окружность, лежащую в плоскости r, φ , и учитывая цилиндрическую симметрию задачи, можно написать

$$\oint_{l_1} \dot{\mathbf{H}} d\mathbf{l} = \dot{H} \oint_{l_1} d\mathbf{l} = \dot{H} 2\pi r.$$

Подставляя результат в формулу (15.3), находим

$$\dot{H} 2\pi r = \dot{I}_0 e^{-i\beta z},$$

или

$$\dot{H} = \dot{H}_\varphi = \frac{\dot{I}_0 e^{-i\beta z}}{2\pi r}. \quad (15.4)$$

Таким образом, определено полное магнитное поле, ориентированное вдоль координаты φ .

Электрическое поле можно получить из первого уравнения Максвелла. В случае отсутствия потерь можно записать

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = j\omega \epsilon_a \dot{\mathbf{E}}, \quad (15.5)$$

откуда

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{j\omega \epsilon_a} \text{rot } \dot{\mathbf{H}}. \quad (15.6)$$

Используя формулу для ротора вектора в цилиндрической системе координат (см. приложение I), получим

$$\begin{aligned} \text{rot } \dot{\mathbf{H}} = & \mathbf{1}_r \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} (\dot{H}_z) - \frac{\partial}{\partial z} (\dot{H}_\varphi r) \right\} + \mathbf{1}_\varphi \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (\dot{H}_r) - \frac{\partial}{\partial r} (\dot{H}_z) \right\} + \\ & + \mathbf{1}_z \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (\dot{H}_\varphi r) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (\dot{H}_r) \right\} \end{aligned}$$

или, подставляя в это выражение значение \dot{H}_φ из формулы (15.4),

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = -\mathbf{1}_r \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\dot{H}_\varphi r) = -\mathbf{1}_r \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\dot{I}_0 e^{-i\beta z}}{2\pi} \right) = \mathbf{1}_r j \frac{\beta \dot{I}_0 e^{-i\beta z}}{2\pi r}. \quad (15.7)$$

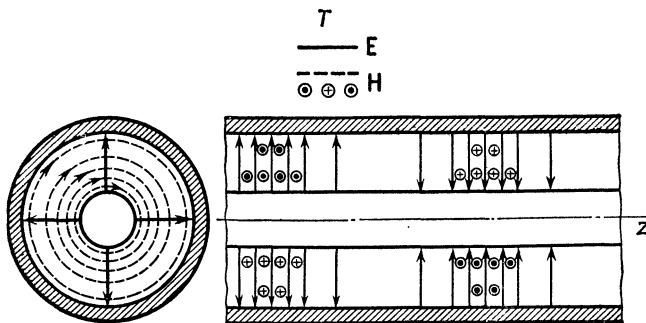


Рис. 15.2

Все остальные члены $\text{rot } \mathbf{H}$ равны нулю. Далее с помощью выражений (15.6) и (15.7) легко получить формулу для напряженности электрического поля в случае волны Т в коаксиальном волноводе:

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_r = 1_r \frac{\beta I_0 e^{-j\beta z}}{\omega \varepsilon_a 2\pi r}. \quad (15.8)$$

Подставим в эту формулу значение фазовой постоянной β (7.54). Тогда

$$\dot{\mathbf{E}}_r = 1_r \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \cdot \frac{I_0 e^{-j\beta z}}{2\pi r}. \quad (15.9)$$

Так как

$$\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = Z_c, \quad (15.10)$$

где Z_c — характеристическое сопротивление среды, то

$$\dot{\mathbf{E}}_r = 1_r Z_c \frac{I_0 e^{-j\beta z}}{2\pi r} = 1_r Z_c H_\varphi. \quad (15.11)$$

Таким образом, может быть определено полное электромагнитное поле волны типа Т в круглом коаксиальном волноводе.

Представляет интерес нахождение характеристического сопротивления коаксиального волновода, под которым понимают отношение комплексных амплитуд напряжения и тока в заданном сечении линии передачи. Используя формулы (1.4), (15.11), можно определить разность потенциалов между внутренним стержнем и внешней оболочкой коаксиального волновода:

$$\dot{U} = \int_{r_1}^{r_2} \dot{E}_r dr = \int_{r_1}^{r_2} Z_c \frac{I_0 e^{-j\beta z}}{2\pi r} dr = Z_c \frac{I_0 e^{-j\beta z}}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Разделив \dot{U} на ток \dot{I} , определяемый выражением (15.2), получаем характеристическое сопротивление коаксиального волновода Z_n :

$$Z_n = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z_c \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (15.12)$$

Коаксиальный волновод, работающий на волнах типа Т, можно использовать со сколь угодно низких частот, в том числе для канализации постоянного тока, что является преимуществом подобных волноводных систем:

На рис. 15.2 показана картина поля волны типа Т в круглом коаксиальном волноводе.

§ 15.3. Волны электрического и магнитного типов

В § 14.1 указывалось, что при рассмотрении волн волноводного типа в коаксиальном волноводе в решение основного уравнения помимо функции Бесселя первого рода должна входить функция Бесселя второго рода или функция Неймана. Эта функция обладает особенностью при $r=0$ и поэтому исключается из решения в обычном круглом волноводе. В круглом коаксиальном волноводе пространство, занятое электромагнитным полем, лежит в следующем диапазоне изменения радиуса (см. рис. 15.1):

$$r_1 < r < r_2. \quad (15.13)$$

При этом функция Неймана остается конечной, и ее необходимо включить в решение.

Как было установлено в § 14.1, решение основного уравнения для продольной составляющей электрического поля \dot{E}_{z0} в цилиндрической системе координат дается формулами (14.6), (14.15), (14.16). Подставляя выражения (14.15) и (14.16) в формулу (14.6), получаем

$$\dot{E}_{z0} = \{B_1 J_m(gr) + B_2 N_m(gr)\} A_1 \cos(m\varphi),$$

или

$$\dot{E}_{z0} = \{C_1 J_m(gr) + C_2 N_m(gr)\} \cos(m\varphi). \quad (15.14)$$

Здесь

$$C_1 = B_1 A_1, \quad C_2 = B_2 A_1. \quad (15.15)$$

Выражение для продольной составляющей магнитного поля записывается аналогично:

$$\dot{H}_{z0} = \{D_1 J_m(gr) + D_2 N_m(gr)\} \cos(m\varphi). \quad (15.16)$$

Рассмотрим в качестве примера ход анализа волн электрического типа в круглом коаксиальном волноводе.

Поле \dot{E}_{z0} тангенциально к стенкам волновода. У поверхности идеального металла справедливы следующие граничные условия:

$$\dot{E}_{z0} = 0 \quad \left(\text{при} \quad \begin{array}{l} r = r_1 \\ r = r_2 \end{array} \right). \quad (15.17)$$

Применяя граничные условия в выражении (15.14), получаем

$$\left. \begin{array}{l} C_1 J_m(gr_1) + C_2 N_m(gr_1) = 0, \\ C_1 J_m(gr_2) + C_2 N_m(gr_2) = 0. \end{array} \right\} \quad (15.18)$$

В этой системе уравнений C_1, C_2 — постоянные, в общем случае отличные от нуля, что возможно при равенстве нулю определителя системы:

$$\begin{vmatrix} J_m(gr_1) & N_m(gr_1) \\ J_m(gr_2) & N_m(gr_2) \end{vmatrix} = 0, \quad (15.19)$$

или

$$J_m(gr_1)N_m(gr_2) - J_m(gr_2)N_m(gr_1) = 0. \quad (15.20)$$

Соотношение (15.20) представляет собой трансцендентное уравнение относительно поперечного волнового числа g . Для каждого заданного порядка m -функций Бесселя и заданного отношения радиусов

$$r_2/r_1 = p \quad (15.21)$$

уравнение может быть решено численно или графически. При этом может быть найдено бесконечное количество дискретных значений n волновых чисел g , удовлетворяющих уравнению (15.20). Обозначим корни этого уравнения g_{mn} . Далее введем обозначение

$$g_{mn}r_1 = k_{mn}. \quad (15.22)$$

В табл. 15.1 даны значения k_{mn} , умноженные на $(p-1)$, для заданного отношения радиусов p и некоторых фиксированных значений порядка функций m и номера корня n .

Таблица 15.1

p	$(p-1)k_{01}$	$(p-1)k_{02}$	$(p-1)k_{03}$
1,2	3,140	6,282	9,424
1,5	3,135	6,280	9,423
2,0	3,122	6,273	9,418
p	$(p-1)k_{11}$	$(p-1)k_{12}$	$(p-1)k_{13}$
1,2	3,146	6,285	9,426
1,5	3,161	6,293	9,431
2,0	3,197	6,312	9,445

Выражение для критической длины волны (12.43) с учетом соотношений (15.21), (15.22) записывается в виде

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi r_1}{k_{mn}} = \frac{2\pi r_1(p-1)}{(p-1)k_{mn}} = \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{(p-1)k_{mn}}. \quad (15.23)$$

Составляющие поля для волн типа E_{mn} можно определить с помощью общих формул перехода (14.27) — (14.32).

Продольная составляющая электрического поля \dot{E}_{z0} определяется формулой (15.14).

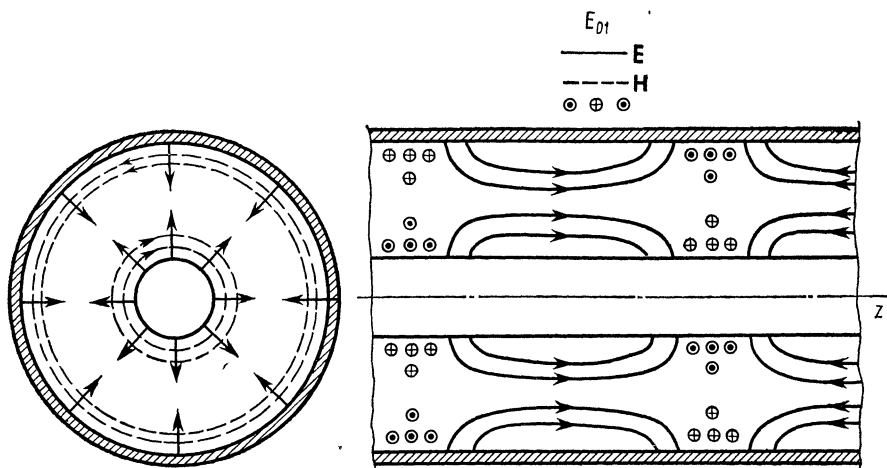


Рис. 15.3

В качестве примера на рис. 15.3 показана картина поля волны типа E_{01} в коаксиальном волноводе. Волны магнитного типа можно исследовать аналогично.

В настоящее время волны типа E_{mn} или H_{mn} не находят практического применения в коаксиальных волноводах, поскольку потери в коаксиальном волноводе больше потерь в обычном круглом волноводе. Линии передачи коаксиального типа работают на волнах типа Т.

ГЛАВА 16

БЕСКОНЕЧНО ПРОТЯЖЕННАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПЛАСТИНА КАК ПРИМЕР ВОЛНОВОДА МЕДЛЕННЫХ ВОЛН

§ 16.1. Постановка вопроса

Плоская диэлектрическая пластина с параметрами μ_a, ϵ_a толщиной $2d$ в направлении координаты x , бесконечно протяженная вдоль координаты y и оси z (рис. 16.1), помещена в воздухе. При $z < 0$ пластина обрывается и входит в рупор, также бесконечно протяженный вдоль оси y и создающий электромагнитное поле, излучаемое вдоль оси z . В результате воздействия этого поля в пластине

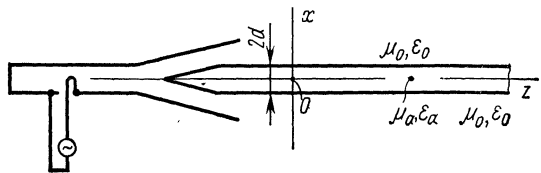


Рис. 16.1

и вокруг нее создается волна, параметры которой необходимо определить. В рупоре, где осуществляется возбуждение пластины, вектор Пойнтинга возбуждающего поля может иметь различное направление относительно нормали к пластине, совпадающей с осью x . Если угол, составленный вектором Пойнтинга и осью x , меньше угла полного внутреннего отражения, то в соответствии с анализом подобных процессов, проведенным в § 9.4, волна, попавшая изнутри диэлектрика на границу раздела диэлектрик—воздух, преломится на границе и выйдет в воздух. Если угол, составленный вектором Пойнтинга и осью x , равен или больше угла полного внутреннего отражения, то такая волна отразится от границы раздела с воздухом и, попав под тем же углом на другую границу раздела, вновь отразится от нее. Этот процесс будет продолжаться по мере продвижения волны вдоль оси z . В результате в диэлектрической пластине возникает волна обычного волноводного типа, распространяющаяся в пластине с фазовой скоростью, превышающей скорость света в диэлектрике c . Другими словами, в пластине будет распространяться быстрая волна. В соответствии с явлением полного внутреннего отражения (см. § 9.4) в воздухе у поверхностей пластины образуется медленная волна, распространяющаяся вдоль оси z , с фазовой скоростью, меньшей скорости света в воздухе c_0 . Обе волны (внутренняя и внешняя) образуют единое электромагнитное поле с одной и той же фазовой скоростью v_ϕ , удовлетворяющей неравенству

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}} < v_\phi < c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (16.1)$$

Так как

$$c < c_0, \quad (16.2)$$

соблюдение этого неравенства вполне возможно.

Таким образом, волна, обладающая фазовой скоростью v_ϕ внутри и вне диэлектрика, по отношению к скорости света в диэлектрике может быть быстрой, а по отношению к скорости света в воздухе—медленной. В настоящей главе будут определены параметры подобных волн и выяснены условия их существования.

Разумеется, бесконечно протяженная пластина представляет собой идеализацию реальных волноводных систем, однако это существенно упрощает анализ и позволяет наглядно проследить процессы, происходящие в волноводах медленных волн.

§ 16.2. Вывод основных соотношений

Для определенности дадим вывод основных уравнений для волн электрического типа. Исследование магнитного поля может быть осуществлено аналогично.

Основным уравнением для продольной составляющей электрического поля быстрой волны, распространяющейся в пластине, будет уравнение (12.9).

В декартовой системе координат справедливо соответствие

$$\xi \rightarrow x, \eta \rightarrow y, \zeta \rightarrow z, h_\xi = h_\eta = 1.$$

При этом основное уравнение записывается в форме

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{z0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{z0}}{\partial y^2} + g^2 \dot{E}_{z0} = 0.$$

Поскольку пластина является бесконечно протяженной вдоль координаты y (волна распространяется вдоль оси z) и нет отражения поля от краев пластины, производная $\partial^2 \dot{E}_{z0} / \partial y^2 = 0$ и основное уравнение записывается в виде

$$d^2 \dot{E}_{z0} / dx^2 + g^2 \dot{E}_{z0} = 0. \quad (16.3)$$

Решением этого уравнения будет соотношение

$$\dot{E}_{z0} = A_1 \cos(gx) + A_2 \sin(gx). \quad (16.4)$$

Остальные составляющие поля, распространяющиеся в пластине, можно получить с помощью общих формул перехода (13.24)—(13.28).

Подставляя в эти формулы решение (16.4), получаем следующие соотношения для составляющих поля быстрой волны, распространяющейся в пластине:

$$\dot{E}_x = -j \frac{h}{g^2} \{-gA_1 \sin(gx) + gA_2 \cos(gx)\} e^{-jhz}, \quad (16.5)$$

$$\dot{H}_y = -j \frac{\omega \epsilon_a}{g^2} \{-gA_1 \sin(gx) + gA_2 \cos(gx)\} e^{-jhz}, \quad (16.6)$$

$$\dot{E}_z = \{A_1 \cos(gx) + A_2 \sin(gx)\} e^{-jhz}. \quad (16.7)$$

Основным уравнением для продольной составляющей электрического поля медленной волны, распространяющейся в воздухе, будет уравнение (12.76).

Обозначим продольную составляющую электрического поля в воздухе \dot{E}_{z0B} . Переходя к декартовой системе координат и учитывая, что производная $\partial \dot{E}_{z0B} / \partial y = 0$, получаем основное уравнение в форме

$$\frac{d^2 \dot{E}_{z0B}}{dx^2} - p^2 \dot{E}_{z0B} = 0 \quad (16.8)$$

с решением

$$\dot{E}_{z0B} = B_1 e^{-px} + B_2 e^{px}. \quad (16.9)$$

Поверхностная волна убывает по мере удаления от замедляющей системы, поэтому следует положить

$$B_2 = 0 \quad (16.10)$$

и записать решение в виде

$$\dot{E}_{z0B} = B_1 e^{-px}. \quad (16.11)$$

Формулами перехода от продольной составляющей электрического поля к поперечным составляющим являются соотношения (12.78) — (12.82). Запишем их в декартовой системе координат:

$$\dot{E}_{xв} = j \frac{h}{p^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z0в}}{\partial x} e^{-jhz}, \quad (16.12)$$

$$\dot{E}_{yв} = j \frac{h}{p^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z0в}}{\partial y} e^{-jhz}, \quad (16.13)$$

$$\dot{H}_{xв} = -j \frac{\omega \varepsilon_0}{p^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z0в}}{\partial y} e^{-jhz}, \quad (16.14)$$

$$\dot{H}_{yв} = j \frac{\omega \varepsilon_0}{p^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z0в}}{\partial x} e^{-jhz}, \quad (16.15)$$

$$\dot{H}_{zв} = 0. \quad (16.16)$$

Подставляя в эти формулы решение (16.11), получаем соотношения:

$$\dot{E}_{xв} = -j \frac{h}{p} B_1 e^{-px} e^{-jhz}, \quad (16.17)$$

$$\dot{H}_{yв} = -j \frac{\omega \varepsilon_0}{p} B_1 e^{-px} e^{-jhz}, \quad (16.18)$$

$$\dot{E}_{zв} = B_1 e^{-px} e^{-jhz}, \quad (16.19)$$

характеризующие поле медленной волны, распространяющейся в воздухе около пластины.

§ 16.3. Четные и нечетные волны. Определение трансцендентных уравнений для поперечных волновых чисел

Для определения поперечных волновых чисел g и p необходимо применить граничные условия на границе раздела диэлектрик — воздух. Из формул (16.5)—(16.7) следует, что каждая составляющая поля в пластине складывается из двух слагаемых. Для упрощения выводов решение обычно проводят для двух частных случаев: 1) амплитудный коэффициент $A_1 = 0$; 2) амплитудный коэффициент $A_2 = 0$.

В первом случае составляющие поля \dot{E}_x , \dot{H}_y , определяющие вектор Пойнтинга, ориентированный вдоль оси z , изменяются по закону $\cos(gx)$, т. е. по четному закону, во втором случае — по закону $\sin(gx)$, т. е. представляет собой нечетные функции координаты x . Первый случай соответствует четным волнам, второй — нечетным волнам. Рассмотрим их отдельно.

1. **Четные волны** $A_1 = 0$. Запишем тангенциальные к границе раздела воздух — диэлектрик составляющие поля в пластине при $A_1 = 0$:

$$\dot{H}_y = -j \frac{\omega \varepsilon_a}{g} A_2 \cos(gx) e^{-jhz}, \quad (16.20)$$

$$\dot{E}_z = A_2 \sin(gx) e^{-jhz}, \quad (16.21)$$

или, применяя граничные условия (8.9), (8.17),

$$\dot{H}_y = H_{yB} \quad (\text{при } x = d), \quad (16.22)$$

$$\dot{E}_z = \dot{E}_{zB} \quad (\text{при } x = d), \quad (16.23)$$

$$-j \frac{\omega \varepsilon_a}{g} A_2 \cos(gd) e^{-jhz} = -j \frac{\omega \varepsilon_0}{p} B_1 e^{-pd} e^{-jhz},$$

$$A_2 \sin(gd) e^{-jhz} = B_1 e^{-pd} e^{-jhz}.$$

Разделив почленно второе уравнение на первое и произведя сокращения, получаем

$$\frac{g}{\varepsilon_a} \operatorname{tg}(gd) = \frac{p}{\varepsilon_0}.$$

Умножая обе части на $\varepsilon_0 d$, получаем трансцендентное уравнение, связывающее поперечные волновые числа g и p в случае четных волн:

$$\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_a} gd \operatorname{tg}(gd) = pd. \quad (16.24)$$

2. **Нечетные волны** $A_2 = 0$. При этом тангенциальные к границе раздела воздух—диэлектрик составляющие поля в пластине записываются в форме

$$\dot{H}_y = j \frac{\omega \varepsilon_a}{g} A_1 \sin(gx) e^{-jhz}, \quad (16.25)$$

$$\dot{E}_z = A_1 \cos(gx) e^{-jhz}, \quad (16.26)$$

или, применяя граничные условия (16.22), (16.23),

$$j \frac{\omega \varepsilon_a}{g} A_1 \sin(gd) e^{-jhz} = -j \frac{\omega \varepsilon_0}{p} B_1 e^{-pd} e^{-jhz},$$

$$A_1 \cos(gd) e^{-jhz} = B_1 e^{-pd} e^{-jhz}.$$

Разделив почленно второе уравнение на первое, находим

$$\frac{g}{\varepsilon_a} \operatorname{ctg}(gd) = -\frac{p}{\varepsilon_0}.$$

Умножая обе части на $\varepsilon_0 d$, получаем трансцендентное уравнение, связывающее поперечные волновые числа p и g в случае нечетных волн:

$$\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_a} gd \operatorname{ctg}(gd) = -pd. \quad (16.27)$$

§ 16.4. Решение трансцендентных уравнений и определение поперечных волновых чисел. Критические частоты в случае электрических волн различных типов

Полученные трансцендентные уравнения для четных и нечетных волн содержат неизвестные g и p . Для их определения необходимо ввести еще одно уравнение, которое можно получить с помощью

выражений (12.26), (12.74) для продольных волновых чисел h , записанных для быстрых и медленных волн.

В рассматриваемом случае медленные волны распространяются в воздухе, для которого $\mu_a = \mu_0$, $\epsilon_a = \epsilon_0$. Следовательно, продольное волновое число для медленных волн

$$h = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 + p^2}. \quad (16.28)$$

Как указывалось в § 16.1, фазовая скорость быстрой и медленной волн должна быть одной и той же. В силу справедливости соотношения (12.19) должны быть одинаковыми и продольные волновые числа. Приравняв выражения (12.26) и (16.28), получаем

$$\omega^2 \mu_a \epsilon_a - g^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 + p^2,$$

или

$$\omega^2 (\mu_a \epsilon_a - \mu_0 \epsilon_0) = g^2 + p^2.$$

Умножая это соотношение на d^2 :

$$(gd)^2 + (pd)^2 = \omega^2 d^2 (\mu_a \epsilon_a - \mu_0 \epsilon_0) \quad (16.29)$$

и вводя обозначение

$$\omega^2 d^2 (\mu_a \epsilon_a - \mu_0 \epsilon_0) = R^2,$$

где

$$R = \omega d \sqrt{\mu_a \epsilon_a - \mu_0 \epsilon_0}, \quad (16.30)$$

получаем

$$(gd)^2 + (pd)^2 = R^2. \quad (16.31)$$

Соотношение (16.31) представляет собой уравнение окружности в координатах gd и pd радиуса R . Решая совместно трансцендентные уравнения (16.24), (16.27) и уравнение (16.31), находят значения поперечных волновых чисел g и p .

Решение может быть осуществлено с помощью ЭВМ или графически. На рис. 16.2 и 16.3 показано графическое решение этих

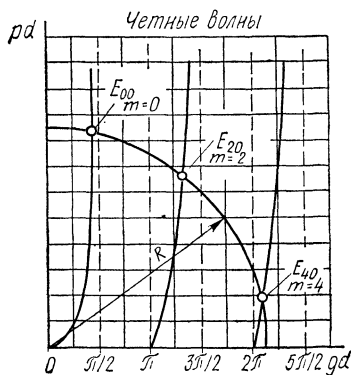


Рис. 16.2

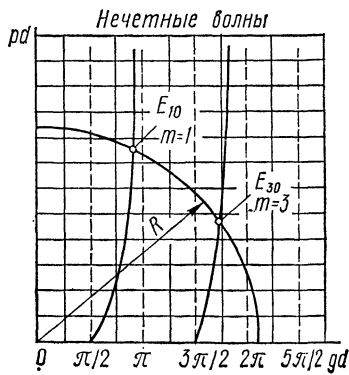


Рис. 16.3

уравнений. Точки пересечения окружностей с кривыми $\frac{\epsilon_0}{\epsilon_a}gd \operatorname{tg}(gd) = pd$ и $-\frac{\epsilon_0}{\epsilon_a}gd \operatorname{ctg}(gd) = pd$ дают значение gd и pd , откуда для заданной полутолщины пластины d определяют поперечные волновые числа g и p . При изображении кривых следует помнить, что значения pd и gd должны быть положительными, что соответствует наличию или отсутствию тангенсоид или катангенсоид в квадранте.

Поскольку поле не зависит от координаты y , в обычной системе обозначения электрических волн в волноводе (волны типа E_{mn}) индекс n , определяющий число вариаций поля по координате y , должен равняться нулю. Индекс m означает порядковый номер пересечения окружностей с кривыми. Пересечению в первом квадранте соответствует $m=0$, пересечению во втором квадранте — $m=1$, в третьем — $m=2$ и т. д.

Как следует из рисунков, волна типа E_{00} может существовать при любом значении R , так как при этом имеется точка пересечения в интервале от $gd=0$ до $gd=\pi/2$.

Волна типа E_{10} может существовать только при $R > \pi/2$ и т. д. Таким образом, условием существования волн типа E_{m0} будет

$$R > m \frac{\pi}{2}. \quad (16.32)$$

Подставляя значение R из выражения (16.30), имеем

$$\omega d \sqrt{\mu_a \epsilon_a - \mu_0 \epsilon_0} > m \frac{\pi}{2}. \quad (16.33)$$

При заданных параметрах пластины это выражение позволяет получить значение критической частоты, начиная с которого возможно существование волн заданного типа:

$$\omega_{\text{кр}} = \frac{m\pi}{2d \sqrt{\mu_a \epsilon_a - \mu_0 \epsilon_0}}. \quad (16.34)$$

Для волны типа E_{00} при $m=0$

$$\omega_{\text{кр}}(E_{00}) = 0. \quad (16.35)$$

Однако нулевая критическая частота не означает, что диэлектрическая пластина может быть практически использована в качестве волноводной системы на сколь угодно низких частотах. Малому значению частоты соответствует малое значение радиуса R и в соответствии с рис. 16.2 малые значения поперечных волновых чисел p , g . При этом исчезает поверхностный характер поля, которое перестает концентрироваться около замедляющей системы — диэлектрической пластины. Оно приобретает характер волны, излученной возбуждающей системой. Диэлектрическая система перестает играть существенную роль в формировании поля.

Продольное волновое число h , как следует из выражения (16.28), при малом значении p приближается к волновому числу $\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$, характеризующему распространение волн в свободном пространстве.

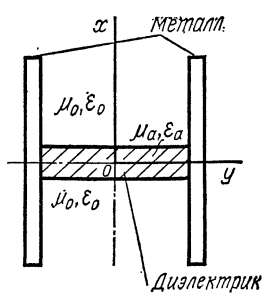


Рис. 16.4

Радиус R и поперечные волновые числа g и p возрастают при заданной частоте с увеличением параметров μ_a , ϵ_a диэлектрика и толщины пластины $2d$. Возрастание p приводит к большему затуханию поля на заданном расстоянии x от пластины. Большая часть энергии начинает распространяться внутри замедляющей системы. Несовершенство диэлектрика приводит при этом к росту потерь в волноводном тракте. Поэтому при практическом создании волноводов медленных волн следует выбирать компромиссное решение, при котором поле обладает необходимым затуханием по мере уда-

ления от поверхности замедляющей системы и в то же время потери остаются в заданной норме.

При изгибе замедляющей системы возникает опасность при малых значениях p излучения поля (отрыва от замедляющей системы) в месте изгиба. Это также необходимо учитывать. Несомненно, что по мере создания промышленностью более совершенных диэлектриков роль волноводных систем, использующих медленные волны, будет возрастать.

Были рассмотрены процессы в идеализированной волноводной системе. Допущение бесконечной протяженности диэлектрической пластины вдоль координаты y позволяло считать поле не зависящим от этой координаты. В случае волн магнитного типа с составляющими \dot{H}_x , \dot{H}_z и \dot{E}_y можно взять диэлектрическую пластину конечных размеров вдоль оси y , разместив по бокам две металлические пластины так, как показано на рис. 16.4. При этом составляющая поля \dot{E}_y ориентирована нормально к металлическим стенкам, что допускается граничными условиями у поверхности идеального металла, и общая картина поля будет такой же, как и в случае бесконечной протяженности диэлектрической пластины вдоль оси y . Подобный Н-образный металлодиэлектрический волновод используют на практике.

§ 16.5. Коэффициент замедления поверхностных волн

Фазовая скорость определяется соотношением (12.19). Подставляя в него значение h (16.28), получаем

$$v_{\Phi} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 + p^2}} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sqrt{1 + \frac{p^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0}}},$$

или

$$v_{\Phi} = \frac{c_0}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0}}}, \quad (16.36)$$

где c_0 — скорость света в вакууме.

Знаменатель выражения (16.36) можно представить в виде

$$\sqrt{1 + \frac{p^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0}} = 1 + k_3. \quad (16.37)$$

При этом фазовая скорость

$$v_{\Phi} = c_0 / (1 + k_3). \quad (16.38)$$

Коэффициент k_3 называют *коэффициентом замедления*. Он характеризует уменьшение фазовой скорости по сравнению со скоростью света. Этот коэффициент является важным показателем замедляющих систем и часто используются при их анализе.

§ 16.6. Групповая скорость поверхностных волн

Как указывалось, поле быстрой волны, распространяющейся в диэлектрической пластине, и поле медленной волны, излучаемое вне пластины, представляют собой единое электромагнитное поле замедляющей системы.

Основным для групповой скорости является выражение (12.47):

$$v_{\text{гр}} = \left. \frac{1}{\partial h / \partial \omega} \right|_{\substack{\omega = \omega_0 \\ h = h_0}}$$

Для продольного волнового числа h может быть выбрано либо выражение (12.26), либо выражение (16.28). Если в основу положить формулу (12.26), то с учетом зависимости g от ω

$$\frac{dh}{d\omega} = \frac{2\omega\mu_a\epsilon_a - 2g \frac{dg}{d\omega}}{2\sqrt{\omega^2\mu_a\epsilon_a - g^2}} = \frac{\omega\mu_a\epsilon_a - g \frac{dg}{d\omega}}{\sqrt{\omega^2\mu_a\epsilon_a - g^2}}.$$

При этом

$$v_{\text{гр}} = \left. \frac{\omega \sqrt{\mu_a\epsilon_a} \sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega^2\mu_a\epsilon_a}}}{\omega\mu_a\epsilon_a \left(1 - \frac{g}{\omega\mu_a\epsilon_a} \cdot \frac{dg}{d\omega}\right)} \right|_{\omega = \omega_0},$$

или

$$v_{\text{гр}} = \left. \frac{c}{1 - \frac{g}{\omega\mu_a\epsilon_a} \cdot \frac{dg}{d\omega}} \sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega^2\mu_a\epsilon_a}} \right|_{\omega = \omega_0}, \quad (16.39)$$

где c — скорость света в среде с параметрами μ_a , ϵ_a .

При изменении частоты ω в соответствии с формулой (16.30) и рис. 16.2 и 16.3 изменяются радиус R и поперечное волновое число g . Определив для конкретного случая численное значение производной $dg/d\omega$, можно с помощью формулы (16.39) рассчитать групповую скорость.

§ 16.7. Картины поля при использовании диэлектрической пластины в качестве замедляющей системы

На рис. 16.5 и 16.6 показаны картины поля волн типов E_{20} и E_{30} , построенные для плоского диэлектрического волновода в результате расчета поперечных волновых чисел и использования формул (16.5)—(16.7) и (16.17)—(16.19).

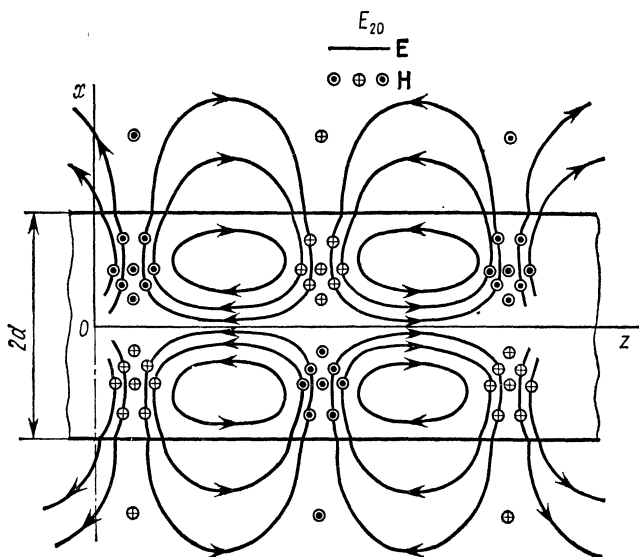


Рис. 16.5

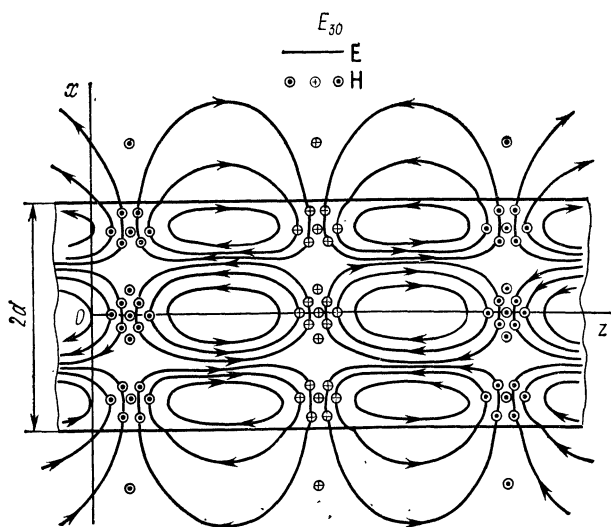


Рис. 16.6

§ 17.1. Постановка вопроса

Бесконечно протяженная диэлектрическая пластина является идеализацией реальной волноводной системы. Бесконечная протяженность пластины вдоль направления распространения электромагнитной волны, т. е. вдоль оси z , эквивалентна отсутствию отраженного поля. Подобрав должным образом нагрузку волноводной системы, можно обеспечить отсутствие отраженного поля, аналогично тому, как это делается при нагрузке длинной линии на характеристическое сопротивление. Существенная идеализация заключается в том, что пластина принимается бесконечно протяженной вдоль оси y , что приводит к независимости поля от этой координаты.

Реальные волноводные системы конечны в плоскости поперечного сечения. Такой реальной системой является Н-образный металлодиэлектрический волновод (см. рис. 16.4), работающий на волнах магнитного типа, и круглый диэлектрический стержень или нить, укрепленный в воздухе с помощью специальных устройств, влиянием которых можно пренебречь при рассмотрении основных свойств подобной замедляющей системы. В диэлектрическом стержне аналогично диэлектрической пластине, исследованной в гл. 16, распространяются быстрые волны. Поле, многократно отражаясь от боковой поверхности стержня под углом, равным или большим углом полного внутреннего отражения, распространяется вдоль оси стержня, создавая за его пределами поверхностную медленную волну, тяготеющую к поверхности диэлектрического волновода.

В настоящей главе будут выведены основные соотношения, определяющие работу такого устройства. В конце главы будут кратко перечислены возможные модификации диэлектрических волноводных систем, практически используемых в настоящее время. Подробный анализ подобных систем отсутствует, так как он выходит за рамки курса «Основы электродинамики».

§ 17.2. Вывод основного уравнения для продольных составляющих поля быстрой волны внутри круглого диэлектрического стержня и его решение

При исследовании поля внутри круглого диэлектрического волновода следует использовать основные уравнения для продольных составляющих поля, записанных в цилиндрической системе координат. Они были определены в § 14.1 при исследовании круглого волновода [см. соотношения (14.2), (14.3)]. Подстановкой вида (14.6) эти уравнения можно разделить на два самостоятельных уравнения (14.11) и (14.12).

Решение уравнения (14.11) представляет собой сумму функций Бесселя первого и второго рода и записывается в виде (14.16). Решение уравнения (14.12) может быть представлено в виде (14.13).

Как указывалось, внутри диэлектрического волновода, так же, как и в диэлектрической пластине, распространяются быстрые волноводные волны, для которых справедливы уравнения (14.11) и (14.12). Поскольку ось волновода, соответствующая значениям координаты $r=0$, входит в пространство, где происходит распространение волн, из решения вида (14.16) следует убрать функцию Бесселя второго рода $N_m(gr)$, обладающую особенностью при $r=0$. Другими словами, в этом решении необходимо положить $B_2=0$, как было сделано при анализе круглого металлического волновода, и записать решение таким образом:

$$R = B_1 J_m(gr). \quad (17.1)$$

Соотношения (14.6), (14.13) и (17.1) позволяют написать следующее выражение для продольной составляющей электрического поля внутри диэлектрического стержня

$$\dot{E}_{z0} = B_1 J_m(gr) \{A_1 \cos(m\varphi) + A_2 \sin(m\varphi)\}. \quad (17.2)$$

Вводя обозначения

$$B_1 A_1 = C_1 \quad \text{и} \quad B_1 A_2 = C_2, \quad (17.3)$$

получаем

$$\dot{E}_{z0} = J_m(gr) \{C_1 \cos(m\varphi) + C_2 \sin(m\varphi)\}. \quad (17.4)$$

Аналогичное выражение может быть получено в результате решения уравнения (14.3) для продольной составляющей магнитного поля в диэлектрическом стержне:

$$\dot{H}_{z0} = J_m(gr) \{C_3 \cos(m\varphi) + C_4 \sin(m\varphi)\}. \quad (17.5)$$

§ 17.3. Вывод основного уравнения для продольных составляющих поля медленной волны вне диэлектрического стержня и его решение

Как было показано в § 12.4, в случае медленных волн поперечное волновое число g переходит в $j\rho$. Основные уравнения (14.2) и (14.3) для продольных составляющих полей \dot{E}_{z10} и \dot{H}_{z10} при этом записываются в форме

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \dot{E}_{z10}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z10}}{\partial \varphi} \right) \right\} - \rho^2 \dot{E}_{z10} = 0, \quad (17.6)$$

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \dot{H}_{z10}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{z10}}{\partial \varphi} \right) \right\} - \rho^2 \dot{H}_{z10} = 0. \quad (17.7)$$

С помощью подстановки вида

$$\dot{E}_{z10} = R_1(r) \Phi_1(\varphi) \quad (17.8)$$

уравнение (17.4) можно свести к двум $K_m(pr)$ $I_m(pr)$ уравнениям для функций $R_1(r)$ и $\Phi_1(\varphi)$:

$$\frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dR_1}{dr} - \left(p^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) R_1 = 0, \quad (17.9)$$

$$\frac{d^2 \Phi_1}{d\varphi^2} + m^2 \Phi_1 = 0. \quad (17.10)$$

Решением уравнения являются функции Бесселя третьего и четвертого родов порядка m , которые часто называют *модифицированными функциями Бесселя* $I_m(pr)$ порядка m и *функциями Макдональда* $K_m(pr)$ порядка m .

В отличие от функций Бесселя первого и второго родов, модифицированные функции Бесселя и функции Макдональда носят не колебательный, а монотонно убывающий или возрастающий характер. Графики этих функций нулевого и первого порядков показаны на рис. 17.1. Таким образом, в общем случае решение уравнения (17.9) должно содержать модифицированную функцию Бесселя $I_m(pr)$ и функцию Макдональда $K_m(pr)$:

$$R_1 = B_3 I_m(pr) + B_4 K_m(pr), \quad (17.11)$$

где B_3 и B_4 — амплитудные коэффициенты.

В зависимости от области пространства, в которой ищут решение, одна из этих постоянных равна нулю. Это обусловлено тем, что функция $I_m(pr)$ имеет особенность (стремится к ∞), как следует из рис. 17.1, при $r \rightarrow \infty$, а функция $K_m(pr)$ — при $r = 0$.

Медленные волны существуют вне стержня при $r \geq r_0$, где r_0 — радиус стержня.

Амплитуда медленных волн не может бесконечно возрастать по мере удаления от поверхности стержня. Следовательно, в решении (17.11) необходимо убрать функцию $I_m(pr)$, положив

$$B_3 = 0. \quad (17.12)$$

Функцию $K_m(pr)$ следует сохранить, так как нигде в области существования медленных волн значение текущего радиуса не достигает нуля. Другими словами, особенность функции $K_m(pr)$ исключается. При этом справедливо выражение

$$R_1 = B_4 K_m(pr). \quad (17.13)$$

Решение уравнения (17.10) записывается в обычной форме:

$$\Phi_1 = A_1 \cos(m\varphi) + A_2 \sin(m\varphi). \quad (17.14)$$

Продольная составляющая \dot{E}_{z10} на основании формулы (17.8) равна

$$\dot{E}_{z10} = B_4 K_m(pr) \{ A_1 \cos(m\varphi) + A_2 \sin(m\varphi) \}. \quad (17.15)$$

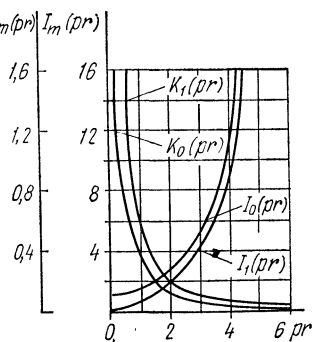


Рис. 17.1

Вводя обозначение

$$B_4 A_1 = C_5, \quad B_4 A_2 = C_6, \quad (17.16)$$

получаем

$$\dot{E}_{z10} = K_m(pr) \{C_5 \cos(m\varphi) + C_6 \sin(m\varphi)\}. \quad (17.17)$$

Решение уравнения (17.7) для продольной составляющей магнитного поля приводит к аналогичным результатам:

$$\dot{H}_{z10} = K_m(pr) \{C_7 \cos(m\varphi) + C_8 \sin(m\varphi)\}. \quad (17.18)$$

§ 17.4. Определение поперечных составляющих поля быстрой и медленной волн

Переход от продольных составляющих поля к поперечным осуществляется с помощью общих формул (14.27)—(14.32) и (14.41)—(14.46).

Составляющие поля быстрой волны, распространяющейся внутри стержня, можно получить путем подстановки соотношений (17.4), (17.5) в эти формулы. В результате подстановки могут быть записаны следующие выражения:

$$\dot{E}_{r3} = -j \frac{h}{g} J'_m(gr) \{C_1 \cos(m\varphi) + C_2 \sin(m\varphi)\} e^{-jhz}, \quad (17.19)$$

$$\dot{E}_{\varphi3} = -j \frac{hm}{rg^2} J_m(gr) \{-C_1 \sin(m\varphi) + C_2 \cos(m\varphi)\} e^{-jhz}, \quad (17.20)$$

$$\dot{E}_{z3} = J_m(gr) \{C_1 \cos(m\varphi) + C_2 \sin(m\varphi)\} e^{-jhz}, \quad (17.21)$$

$$\dot{H}_{r3} = j \frac{\omega \varepsilon_a m}{rg^2} J_m(gr) \{-C_1 \sin(m\varphi) + C_2 \cos(m\varphi)\} e^{-jhz} \quad (17.22)$$

$$\dot{H}_{\varphi3} = -j \frac{\omega \varepsilon_a}{g} J'_m(gr) \{C_1 \cos(m\varphi) + C_2 \sin(m\varphi)\} e^{-jhz}, \quad (17.23)$$

$$\dot{H}_{z3} = 0, \quad (17.24)$$

$$\dot{H}_{rM} = -j \frac{h}{g} J'_m(gr) \{C_3 \cos(m\varphi) + C_4 \sin(m\varphi)\} e^{-jhz}, \quad (17.25)$$

$$\dot{H}_{\varphi M} = -j \frac{hm}{rg^2} J_m(gr) \{-C_3 \sin(m\varphi) + C_4 \cos(m\varphi)\} e^{-jhz}, \quad (17.26)$$

$$\dot{H}_{zM} = J_m(gr) \{C_3 \cos(m\varphi) + C_4 \sin(m\varphi)\} e^{-jhz}, \quad (17.27)$$

$$\dot{E}_{rM} = -j \frac{\omega \mu_a m}{rg^2} J'_m(gr) \{-C_3 \sin(m\varphi) + C_4 \cos(m\varphi)\} e^{-jhz}, \quad (17.28)$$

$$\dot{E}_{\varphi M} = j \frac{\omega \mu_a}{g} J'_m(gr) \{C_3 \cos(m\varphi) + C_4 \sin(m\varphi)\} e^{-jhz}, \quad (17.29)$$

$$\dot{E}_{zM} = 0. \quad (17.30)$$

Составляющие поля медленной волны, распространяющейся вне диэлектрического стержня, получают подстановкой в выражения (14.27)—(14.32) и (14.41)—(14.46) формул для продольных составляющих поля (17.17), (17.18). При этом необходимо учитывать вы-

ражение (12.68), справедливое для медленных волн:

$$g^2 \rightarrow -p^2.$$

Диэлектрическая и магнитная проницаемости ϵ_a и μ_a переходят соответственно в электрическую и магнитную постоянные ϵ_0 и μ_0 .

В результате указанных операций получаются следующие соотношения для составляющих поля медленной волны:

$$\dot{E}_{r1z} = j \frac{h}{p} K'_m(pr) \{C_5 \cos(m\varphi) + C_6 \sin(m\varphi)\} e^{-jhz}, \quad (17.31)$$

$$\dot{E}_{\varphi1z} = j \frac{hm}{rp^2} K_m(pr) \{-C_5 \sin(m\varphi) + C_6 \cos(m\varphi)\} e^{-jhz}, \quad (17.32)$$

$$\dot{E}_{z1z} = K_m(pr) \{C_5 \cos(m\varphi) + C_6 \sin(m\varphi)\} e^{-jhz}, \quad (17.33)$$

$$\dot{H}_{r1z} = -j \frac{\omega \epsilon_0 m}{rp^2} K_m(pr) \{-C_5 \sin(m\varphi) + C_6 \cos(m\varphi)\} e^{-jhz}, \quad (17.34)$$

$$\dot{H}_{\varphi1z} = j \frac{\omega \epsilon_0}{p} K'_m(pr) \{C_5 \cos(m\varphi) + C_6 \sin(m\varphi)\} e^{-jhz}, \quad (17.35)$$

$$\dot{H}_{z1z} = 0, \quad (17.36)$$

$$\dot{H}_{r1M} = j \frac{h}{p} K'_m(pr) \{C_7 \cos(m\varphi) + C_8 \sin(m\varphi)\} e^{-jhz}, \quad (17.37)$$

$$\dot{H}_{\varphi1M} = j \frac{hm}{rp^2} K_m(pr) \{-C_7 \sin(m\varphi) + C_8 \cos(m\varphi)\} e^{-jhz}, \quad (17.38)$$

$$\dot{H}_{z1M} = K_m(pr) \{C_7 \cos(m\varphi) + C_8 \sin(m\varphi)\} e^{-jhz}, \quad (17.39)$$

$$\dot{E}_{r1M} = j \frac{\omega \mu_0 m}{rp^2} K_m(pr) \{-C_7 \sin(m\varphi) + C_8 \cos(m\varphi)\} e^{-jhz}, \quad (17.40)$$

$$\dot{E}_{\varphi1M} = -j \frac{\omega \mu_0}{p} K'_m(pr) \{C_7 \cos(m\varphi) + C_8 \sin(m\varphi)\} e^{-jhz}, \quad (17.41)$$

$$\dot{E}_{z1M} = 0. \quad (17.42)$$

§ 17.5. Определение поперечных волновых чисел g , p и продольного волнового числа h . Возможность раздельного существования волн электрического и магнитного типов

Поперечные волновые числа определяют с помощью граничных условий у поверхности диэлектрического стержня

$$\dot{E}_\varphi = \dot{E}_{\varphi1}, \quad \dot{H}_\varphi = \dot{H}_{\varphi1}, \quad \dot{E}_z = \dot{E}_{z1}, \quad \dot{H}_z = \dot{H}_{z1} \quad (\text{при } r = r_0). \quad (17.43)$$

Пока отсутствуют сведения, на основании которых можно было бы судить о допустимости раздельного существования волн электрического и магнитного типов в круглом диэлектрическом волноводе. Поэтому сначала целесообразно применить граничные условия к суммарному полю, представляющему собой суперпозицию полей электрического и магнитного типов, а затем определить, возможно ли раздельное существование полей электрического и магнитного типов.

Запишем выражения для суммарного поля $\dot{E}_{\varphi\Sigma}$ внутри стержня и $\dot{E}_{\varphi1\Sigma}$ вне стержня, используя соответственно формулы (17.20),

(17.29) и (17.32), (17.41):

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\varphi\Sigma} = \dot{E}_{\varphi z} + \dot{E}_{\varphi m} = & -j \frac{hm}{rg^2} J_m(gr) \{-C_1 \sin(m\varphi) + C_2 \cos(m\varphi)\} e^{-jhz} + \\ & + j \frac{\omega\mu_a}{g} J'_m(gr) \{C_3 \cos(m\varphi) + C_4 \sin(m\varphi)\} e^{-jhz}, \end{aligned} \quad (17.44)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\varphi 1\Sigma} = \dot{E}_{\varphi 1z} + \dot{E}_{\varphi 1m} = & j \frac{hm}{rp^2} K_m(pr) \{-C_5 \sin(m\varphi) + \\ & + C_6 \cos(m\varphi)\} e^{-jhz} - j \frac{\omega\mu_0}{p} K'_m(pr) \{C_7 \cos(m\varphi) + C_8 \sin(m\varphi)\} e^{-jhz}. \end{aligned} \quad (17.45)$$

Применим граничные условия (17.43):

$$\dot{E}_{\varphi\Sigma} = \dot{E}_{\varphi 1\Sigma} \quad (\text{при } r = r_0). \quad (17.46)$$

Одинаковые составляющие поля внутри и вне стержня должны изменяться вдоль координаты φ по одному и тому же закону, иначе выполнение граничных условий станет невозможным. Так как выбор начала отсчета угла φ произволен, таким законом может быть либо $\sin(m\varphi)$, либо $\cos(m\varphi)$. Важно, чтобы у соответствующих составляющих поля (например, \dot{E}_φ) внутри и вне стержня закон изменения был одним и тем же.

Допустим, что все составляющие поля \dot{E}_φ изменяются по закону $\sin(m\varphi)$. Тогда в выражениях для составляющих поля внутри стержня (17.19)–(17.30) амплитудные коэффициенты C_2 и C_3 следует положить равными нулю. Аналогично, в выражениях для составляющих поля вне стержня (17.31)–(17.42) должны быть приравнены нулю амплитудные коэффициенты C_6 и C_7 :

$$C_2 = C_3 = C_6 = C_7 = 0. \quad (17.47)$$

Нетрудно убедиться в том, что при соблюдении этих условий по одному и тому же закону изменяются вдоль координаты φ одинаковые составляющие поля внутри и вне диэлектрического стержня.

Выполнение граничных условий (17.46) дает

$$\begin{aligned} \frac{hm}{r_0 g^2} J_m(gr_0) C_1 + \frac{\omega\mu_a}{g} J'_m(gr_0) C_4 = \\ = - \frac{hm}{r_0 p^2} K_m(pr_0) C_5 - \frac{\omega\mu_0}{p} K'_m(pr_0) C_8. \end{aligned} \quad (17.48)$$

Поступая аналогично в отношении составляющих \dot{H}_φ , \dot{E}_z , \dot{H}_z , получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} - \frac{\omega\varepsilon_a}{g} J'_m(gr_0) C_1 - \frac{hm}{r_0 g^2} J_m(gr_0) C_4 = \\ = \frac{\omega\varepsilon_0}{p} K'_m(pr_0) C_5 + \frac{hm}{r_0 p^2} K_m(pr_0) C_8, \end{aligned} \quad (17.49)$$

$$J_m(gr_0) C_1 = K_m(pr_0) C_5, \quad (17.50)$$

$$J_m(gr_0) C_4 = K_m(pr_0) C_8. \quad (17.51)$$

Определим коэффициенты C_5 и C_8 из соотношений (17.50) и (17.51)

$$C_5 = \frac{J_m(gr_0)}{K_m(pr_0)} C_1, \quad (17.52)$$

$$C_8 = \frac{J_m(gr_0)}{K_m(pr_0)} C_4. \quad (17.53)$$

Подставим значения этих коэффициентов в уравнения (17.48) и (17.49), поменяв местами члены:

$$\begin{aligned} & \frac{hm}{r_0 g^2} J_m(gr_0) C_1 + \frac{hm J_m(gr_0)}{r_0 p^2 K_m(pr_0)} K_m(pr_0) C_1 = \\ & = -\frac{\omega \mu_a J'_m(gr_0)}{g} C_4 - \frac{\omega \mu_0 K'_m(pr_0) J_m(gr_0)}{p K_m(pr_0)} C_4, \end{aligned} \quad (17.54)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\omega \varepsilon_a J'_m(gr_0) C_1}{g} - \frac{\omega \varepsilon_0 K'_m(pr_0) J_m(gr_0)}{p K_m(pr_0)} C_1 = \\ & = \frac{hm}{r_0 g^2} J_m(gr_0) C_4 + \frac{hm}{r_0 p^2} \cdot \frac{K_m(pr_0) J_m(gr_0)}{K_m(pr_0)} C_4. \end{aligned} \quad (17.55)$$

Разделим почленно уравнение (17.54) на (17.55):

$$\frac{\frac{hm}{r_0 g^2} J_m(gr_0) + \frac{hm}{r_0 p^2} J_m(gr_0)}{\frac{\omega \varepsilon_a}{g} J'_m(gr_0) + \frac{\omega \varepsilon_0}{p} \cdot \frac{K'_m(pr_0) J_m(gr_0)}{K_m(pr_0)}} = \frac{\frac{\omega \mu_a}{g} J'_m(gr_0) + \frac{\omega \mu_0}{p} \cdot \frac{K'_m(pr_0) J_m(gr_0)}{K_m(pr_0)}}{\frac{hm}{r_0 g^2} J_m(gr_0) + \frac{hm}{r_0 p^2} J_m(gr_0)}.$$

Проводя необходимые сокращения, получаем

$$\frac{\frac{hm}{r_0} \left(\frac{1}{g^2} + \frac{1}{p^2} \right)}{\frac{\omega \varepsilon_a}{g} \cdot \frac{J'_m(gr_0)}{J_m(gr_0)} + \frac{\omega \varepsilon_0}{p} \cdot \frac{K'_m(pr_0)}{K_m(pr_0)}} = \frac{\frac{\omega \mu_a}{g} \cdot \frac{J'_m(gr_0)}{J_m(gr_0)} + \frac{\omega \mu_0}{p} \cdot \frac{K'_m(pr_0)}{K_m(pr_0)}}{\frac{hm}{r_0} \left(\frac{1}{g^2} + \frac{1}{p^2} \right)},$$

или

$$\begin{aligned} (hmr_0)^2 \left\{ \frac{1}{(gr_0)^2} + \frac{1}{(pr_0)^2} \right\}^2 &= (\omega r_0)^2 \left\{ \frac{\varepsilon_a J'_m(gr_0)}{gr_0 J_m(gr_0)} + \right. \\ & \left. + \frac{\varepsilon_0 K'_m(pr_0)}{pr_0 K_m(pr_0)} \right\} \left\{ \frac{\mu_a J'_m(gr_0)}{gr_0 J_m(gr_0)} + \frac{\mu_0 K'_m(pr_0)}{pr_0 K_m(pr_0)} \right\}. \end{aligned} \quad (17.56)$$

Уравнение (17.56) связывает неизвестные g и p . Необходимо определить второе уравнение, связывающее эти неизвестные.

Продольное волновое число h для быстрых и медленных волн определяется соотношениями (12.26) и (16.28). В § 16.4 указывалось, что продольные волновые числа должны быть одинаковыми у быстрой и медленной волн. Следовательно, справедливо уравнение

$$\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - g^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 + p^2.$$

Умножая его на r_0^2 и группируя члены, получаем второе уравнение, связывающее неизвестные g и p :

$$(pr_0)^2 + (gr_0)^2 = (\omega r_0)^2 (\mu_a \varepsilon_a - \mu_0 \varepsilon_0). \quad (17.57)$$

Совместное решение уравнений (17.56) и (17.57) может быть осуществлено либо с помощью ЭВМ, либо (что более трудоемко и менее точно) графически. Ход рассуждений при этом следующий.

Задаются значениями gr_0 и из уравнения (17.57) определяют pr_0 . Далее из соотношения (12.26) или (16.28) находят продольное волновое число h . Затем по точкам для различных значений gr_0 , а также соответствующих значений pr_0 и h проводят построение левой и правой частей уравнения (17.56).

При этом возникает два самостоятельных графика, точки пересечения которых дают значения gr_0 , а следовательно, и pr_0 , удовлетворяющие уравнению (17.56). Таким образом можно получить значения поперечных волновых чисел в волноводе g и p и продольного волнового числа h .

С учетом соотношений (17.47), (17.19) — (17.30), а также (17.31) — (17.42) формулы для составляющих поля внутри и вне стержня приобретают следующий вид:

$$\dot{E}_{r\Sigma} = -j \left\{ \frac{h}{g} J'_m(gr) C_1 + \frac{\omega\mu_a m}{rg^2} J_m(gr) C_4 \right\} \cos(m\varphi) e^{-jhz}, \quad (17.58)$$

$$\dot{E}_{\varphi\Sigma} = j \left\{ \frac{hm}{rg^2} J_m(gr) C_1 + \frac{\omega\mu_a}{g} J'_m(gr) C_4 \right\} \sin(m\varphi) e^{-jhz}, \quad (17.59)$$

$$\dot{E}_{z\Sigma} = J_m(gr) C_1 \cos(m\varphi) e^{-jhz}, \quad (17.60)$$

$$\dot{H}_{r\Sigma} = -j \left\{ \frac{\omega\varepsilon_a m}{rg^2} J_m(gr) C_1 + \frac{h}{g} J'_m(gr) C_4 \right\} \sin(m\varphi) e^{-jhz}, \quad (17.61)$$

$$\dot{H}_{\varphi\Sigma} = -j \left\{ \frac{\omega\varepsilon_a}{g} J'_m(gr) C_1 + \frac{hm}{gr^2} J_m(gr) C_4 \right\} \cos(m\varphi) e^{-jhz}, \quad (17.62)$$

$$\dot{H}_{z\Sigma} = J_m(gr) C_4 \sin(m\varphi) e^{-jhz}; \quad (17.63)$$

для составляющих поля вне стержня

$$\dot{E}_{r1\Sigma} = j \left\{ \frac{h}{p} K'_m(pr) C_5 + \frac{\omega\mu_0 m}{rp^2} K_m(pr) C_8 \right\} \cos(m\varphi) e^{-jhz}, \quad (17.64)$$

$$\dot{E}_{\varphi1\Sigma} = -j \left\{ \frac{hm}{rp^2} K_m(pr) C_5 + \frac{\omega\mu_0}{p} K'_m(pr) C_8 \right\} \sin(m\varphi) e^{-jhz}, \quad (17.65)$$

$$\dot{E}_{z1\Sigma} = C_5 K_m(pr) \cos(m\varphi) e^{-jhz}, \quad (17.66)$$

$$\dot{H}_{r1\Sigma} = j \left\{ \frac{\omega\varepsilon_0 m}{rp^2} K_m(pr) C_5 + \frac{h}{p} K'_m(pr) C_8 \right\} \sin(m\varphi) e^{-jhz}, \quad (17.67)$$

$$\dot{H}_{\varphi1\Sigma} = j \left\{ \frac{\omega\varepsilon_0}{p} K'_m(pr) C_5 + \frac{hm}{rp^2} K_m(pr) C_8 \right\} \cos(m\varphi) e^{-jhz}, \quad (17.68)$$

$$\dot{H}_{z1\Sigma} = C_8 K_m(pr) \sin(m\varphi) e^{-jhz}. \quad (17.69)$$

С помощью соотношений (17.48), (17.49), (17.52), (17.53) амплитудные коэффициенты C_4 , C_5 , C_8 можно выразить через один амплитудный коэффициент C_1 . В формулах (17.58) — (17.69) этим пренебрежено для сохранения наглядности их вывода.

При определении поперечных и продольных волновых чисел с помощью граничных условий использовалось суммарное поле, представляющее собой суперпозицию волн электрического и магнит-

ного типов. Рассмотрим возможность раздельного существования этих волн. Для этого воспользуемся соотношением (17.55):

Условием отсутствия поля электрического типа в стержне является равенство нулю амплитудного коэффициента C_1 .

Из формулы (17.52) следует, что условие $C_1 = 0$ обеспечивает равенство нулю амплитудного коэффициента C_5 для поля электрического типа вне стержня.

Таким образом, при $C_1 = 0$ исчезает поле электрического типа внутри и вне стержня. При этом выражение (17.55) представляется в виде

$$\frac{hm}{r_0 g^2} J_m(g r_0) C_4 + \frac{hm}{r_0 \rho^2} J_m(g r_0) C_4 = 0,$$

или

$$\frac{hm}{r_0} \left(\frac{1}{g^2} + \frac{1}{\rho^2} \right) J_m(g r_0) C_4 = 0, \quad (17.70)$$

откуда $C_4 = 0$.

На основании соотношения (17.53) при $C_4 = 0$ равен нулю и амплитудный коэффициент C_8 . При этом исчезает не только электрическое, но и магнитное поле.

Таким образом, в общем случае при использовании диэлектрического волновода возникает волна комбинированного электромагнитного типа, представляющая собой комбинацию волн электрического и магнитного типов. Из выражения (17.70) следует только одна возможность существования амплитудного коэффициента C_4 , а следовательно, и коэффициента C_8 . Эта возможность соответствует условию

$$m = 0. \quad (17.71)$$

Если возникает волна симметричного типа, поле которой не изменяется вдоль координаты φ , то при равенстве нулю коэффициентов C_1 и C_5 , т. е. в отсутствие волны электрического типа, возможно существование коэффициентов C_4 и C_8 , а значит, волны магнитного типа. При соблюдении условия (17.71) возможен и обратный процесс, при котором существует волна электрического типа и отсутствует волна магнитного типа. В этом можно убедиться на примере аналогичного анализа, взяв в качестве исходного соотношения не (17.55), а (17.54).

Анализ был сделан в предположении, что составляющие поля \dot{E}_φ изменяются по закону $\sin(m\varphi)$. Так же можно было бы допустить изменение этой составляющей по закону $\cos(m\varphi)$. При этом характеристическое уравнение для определения волновых чисел остается неизменным, изменяются лишь выражения для составляющих поля.

Составляющие поля в случае симметричных волн определяют из общих соотношений (17.19) — (17.42), полагая в них $m = 0$. В результате в случае волн электрического типа возникают составляющие поля $\dot{E}_{rз}$, $\dot{H}_{\varphi з}$ и $\dot{E}_{zз}$ внутри и вне стержня. Для волн магнитного типа сохраняются составляющие поля $\dot{H}_{rм}$, $\dot{E}_{\varphi м}$ и $\dot{H}_{zм}$ внутри и вне стержня.

Одним из основных недостатков волноводной системы, выполненной с помощью круглого диэлектрического стержня при наличии зависимости поля от угла φ , т. е. при соблюдении условия $m \neq 0$, является поляризационная неустойчивость поля. Поскольку волноводная система симметрична относительно оси z , первоначальная картина поля в поперечной плоскости, вызванная определенной системой токов, возбуждающих поле, может поворачиваться вдоль координаты φ по мере продвижения электромагнитной волны вдоль оси волновода. При этом положение силовых линий электрического и магнитного полей или поляризация поля по отношению к начальному отсчету угла φ изменяется вдоль оси волновода. Эта поляризационная неустойчивость может возникнуть вследствие небольших изменений параметров диэлектрика или габаритных размеров волновода вдоль оси z , а также изгиба волновода. В силу того что устройство, предназначенное для приема электромагнитного поля, переданного с помощью диэлектрического волновода, рассчитано на определенную поляризацию поля, нормальная работа волноводной системы при поляризационной неустойчивости может быть нарушена.

Для получения стабильных поляризационных характеристик служит система (рис. 17.2), в которой полукруглый в поперечном сечении диэлектрический стержень расположен на металлической пластине. Электрическое поле в соответствии с граничными условиями у поверхности идеального металла должно быть всегда нормальным к поверхности металла, что обеспечивает постоянство поляризации поля вдоль оси волновода. Заметим, что число волноводных систем, работающих на поверхностных волнах и использующих диэлектрик или диэлектрик в комбинации с металлом, может быть довольно большим. На рис. 17.3 показан трубчатый диэлектрический волновод, а на рис. 17.4 — диэлектрический волновод, внутри которого находится металлический стержень. Подобный волновод называют линией Губо по имени предложившего его исследователя. В качестве такого волновода можно использовать медную эмалированную проволоку. Могут быть также диэлектрические волноводы различных сечений, например эллиптического или крестообразного. Подобные волноводные системы представляют собой широкое поле для исследования.

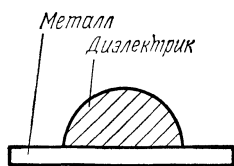


Рис. 17.2

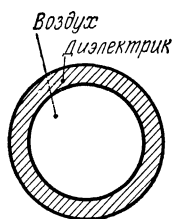


Рис. 17.3

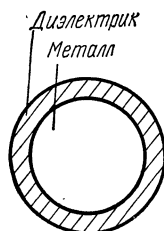


Рис. 17.4

ГЛАВА 18
КРУГЛЫЙ СПИРАЛЬНЫЙ ВОЛНОВОД

§ 18.1. Постановка вопроса

В ряде случаев в качестве замедляющей системы используют круглую металлическую спираль, возбуждаемую с помощью коаксиальной линии, разворачивающейся в круглый рупор (рис. 18.1). Угол α наклона витков спирали к плоскости поперечного сечения связан с параметрами спирали соотношением

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a/2}{2r_0} = \frac{a}{4r_0}. \quad (18.1)$$

Точный анализ спиральной замедляющей системы довольно труден, поэтому ее рассмотрение будет проведено при существенном упрощении.

Допустим, что спираль представляет собой сплошной цилиндр, выполненный из материала с анизотропной проводимостью в направлении витков спирали. Такое предположение тем точнее, чем тоньше провод и меньше шаг намотки. Далее сделаем обычное предположение о конечности поля на оси спирали при $r=0$ и убывании поля до нуля на бесконечно большом расстоянии от оси спирали, т. е. при $r \rightarrow \infty$. Ввиду сложности анализа будут исследованы только симметричные волны, не зависящие от координаты φ . При этом предполагается, что вокруг спирали создается поле медленной волны, «прижимающееся» внутри и вне спирали к ее виткам. В отличие от диэлектрического стержня медленная волна распространяется не только вне, но и внутри системы. Это следует учитывать при записи и решении основного уравнения для продольных составляющих поля.

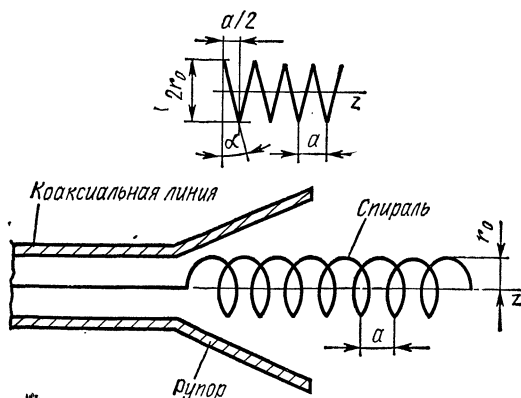


Рис. 18.1

§ 18.2. Вывод основного уравнения для продольных составляющих поля медленной волны и его решение. Составляющие поля в спиральном волноводе

Основными для продольных составляющих поля медленной волны \dot{E}_{z10} и \dot{H}_{z10} являются уравнения (17.6), (17.7). В дальнейшем будут рассмотрены только симметричные волны, у которых поле не зависит от координаты φ и, следовательно,

$$\frac{\partial \dot{E}_{z10}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \dot{H}_{z10}}{\partial \varphi} = 0. \quad (18.2)$$

При этом уравнения для продольных составляющих поля записываются в виде

$$\frac{d^2 \dot{E}_{z10}}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d \dot{E}_{z10}}{dr} - p^2 \dot{E}_{z10} = 0, \quad (18.3)$$

$$\frac{d^2 \dot{H}_{z10}}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d \dot{H}_{z10}}{dr} - p^2 \dot{H}_{z10} = 0. \quad (18.4)$$

Эти уравнения совпадают по математической форме с уравнением (17.9), выведенным в § 17.3, при условии, что $m=0$.

Решение уравнения (17.9) записывается в виде (17.11)

$$R_1 = B_3 I_m(pr) + B_4 K_m(pr),$$

где $I_m(pr)$ — модифицированная функция Бесселя порядка m , а $K_m(pr)$ — функция Макдональда порядка m .

Графики этих функций были приведены на рис. 17.1.

Решениями уравнений (18.3) и (18.4) являются модифицированная функция Бесселя $I_0(pr)$ и функция Макдональда $K_0(pr)$ нулевого порядка. Для области внутри спирали следует использовать только модифицированную функцию Бесселя в силу ее конечности при $r=0$. Для области вне спирали необходимо применить только функцию Макдональда ввиду ее ограниченности при $r \rightarrow \infty$. На основании изложенного решения уравнений (18.3) и (18.4) могут быть записаны в форме:

область внутри спирали ($r \leq r_0$)

$$\begin{aligned} \dot{E}_{z10} &= A_1 I_0(pr), \\ \dot{H}_{z10} &= B_1 I_0(pr); \end{aligned} \quad (18.5)$$

область вне спирали ($r \geq r_0$)

$$\begin{aligned} \dot{E}_{z20} &= A_2 K_0(pr), \\ \dot{H}_{z20} &= B_2 K_0(pr). \end{aligned} \quad (18.6)$$

Для отыскания составляющих поля внутри и вне спирали можно использовать общие соотношения (14.27) — (14.32) и (14.41) — (14.46), записанные для быстрых волн. Переход к медленным волнам осуществляется путем замены поперечного волнового числа g на $j\rho$ и

g^2 на $-p^2$. Кроме того, должна быть учтена независимость продольных составляющих поля от координаты φ , т. е. соотношения (18.2). Медленная волна распространяется в воздухе, в силу чего $\mu_a = \mu_0$, $\varepsilon_a = \varepsilon_0$.

С учетом сказанного можно записать следующие выражения:

$$\dot{E}_r = j \frac{\hbar}{p^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial r} e^{-j\hbar r}, \quad (18.7)$$

$$\dot{H}_\varphi = j \frac{\omega \varepsilon_0}{p^2} \cdot \frac{\partial E_{z0}}{\partial r} e^{-j\hbar z}, \quad (18.8)$$

$$\dot{E}_z = \dot{E}_{z0} e^{-j\hbar z}, \quad (18.9)$$

$$\dot{H}_r = j \frac{\hbar}{p^2} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{z0}}{\partial r} e^{-j\hbar z}, \quad (18.10)$$

$$\dot{E}_\varphi = -j \frac{\omega \mu_0}{p^2} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{z0}}{\partial r} e^{-j\hbar z}, \quad (18.11)$$

$$\dot{H}_z = \dot{H}_{z0} e^{-j\hbar z}. \quad (18.12)$$

Действуя так же, как и при анализе процессов в диэлектрическом стержне, допустим, что поле медленной волны в спирали представляет собой суперпозицию волн электрического и магнитного типов. Подставляя выражения (18.5), (18.6) в формулы (18.7) — (18.12), получаем следующие соотношения для составляющих поля внутри и вне спирали:

область внутри спирали ($r \leq r_0$)

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{r1} &= j \frac{\hbar}{p} A_1 I'_0(pr) e^{-j\hbar z}, \\ \dot{H}_{\varphi1} &= j \frac{\omega \varepsilon_0}{p} A_1 I'_0(pr) e^{-j\hbar z}, \\ \dot{E}_{z1} &= A_1 I_0(pr) e^{-j\hbar z}, \\ \dot{H}_{r1} &= j \frac{\hbar}{p} B_1 I'_0(pr) e^{-j\hbar z}, \\ \dot{E}_{\varphi1} &= -j \frac{\omega \mu_0}{p} B_1 I'_0(pr) e^{-j\hbar z}, \\ \dot{H}_{z1} &= B_1 I_0(pr) e^{-j\hbar z}, \end{aligned} \right\} \quad (18.13)$$

область вне спирали ($r \geq r_0$)

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{r2} &= j \frac{\hbar}{p} A_2 K'_0(pr) e^{-j\hbar z}, \\ \dot{H}_{\varphi2} &= j \frac{\omega \varepsilon_0}{p} A_2 K'_0(pr) e^{-j\hbar z}, \\ \dot{E}_{z2} &= A_2 K_0(pr) e^{-j\hbar z}, \\ \dot{H}_{r2} &= j \frac{\hbar}{p} B_2 K'_0(pr) e^{-j\hbar z}, \\ \dot{E}_{\varphi2} &= -j \frac{\omega \mu_0}{p} B_2 K'_0(pr) e^{-j\hbar z}, \\ \dot{H}_{z2} &= B_2 K_0(pr) e^{-j\hbar z}. \end{aligned} \right\} \quad (18.14)$$

§ 18.3. Определение поперечного и продольного волновых чисел

При отыскании поперечного и продольного волновых чисел p и h используем следующие граничные условия:

1) равенство нулю тангенциальных к виткам спирали составляющих электрического поля в направлении анизотропной проводимости (т. е. вдоль витков спирали), которое должно выполняться для составляющих внешнего и внутреннего по отношению к спирали поля;

2) равенство при $r=r_0$ внутренних и внешних тангенциальных к образующей анизотропного цилиндра (т. е. ориентированных вдоль координаты z) составляющих электрического поля; проводимость анизотропного цилиндра в этом направлении равна нулю;

3) как известно, одним из граничных условий для тангенциальных составляющих у поверхности идеального металла является равенство тангенциальной составляющей магнитного поля плотности поверхностного тока [см. условие (8.13)]; поскольку плотность поверхностного тока внутренней и внешней поверхностей спирали одинакова, это граничное условие переходит в равенство тангенциальных составляющих магнитного поля в направлении анизотропной проводимости, т. е. вдоль витков спирали.

Выразим перечисленные граничные условия в математической форме (при $r=r_0$):

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{\varphi 1} \cos \alpha + \dot{E}_{z 1} \sin \alpha &= 0, \\ \dot{E}_{\varphi 2} \cos \alpha + \dot{E}_{z 2} \sin \alpha &= 0, \\ \dot{E}_{z 1} &= \dot{E}_{z 2}, \\ \dot{H}_{\varphi 1} \cos \alpha + \dot{H}_{z 1} \sin \alpha &= \dot{H}_{\varphi 2} \cos \alpha + \dot{H}_{z 2} \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (18.15)$$

Подставляя значения составляющих поля из выражений (18.7) — (18.12) в граничные условия (18.15), получаем

$$-j \frac{\omega \mu_0}{p} B_1 I'_0(pr_0) + A_1 I_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha = 0, \quad (18.16)$$

$$-j \frac{\omega \mu_0}{p} B_2 K'_0(pr_0) + A_2 K_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha = 0, \quad (18.17)$$

$$A_1 I_0(pr_0) = A_2 K_0(pr_0), \quad (18.18)$$

$$\begin{aligned} j \frac{\omega \varepsilon_0}{p} \dot{A}_1 I'_0(pr_0) + B_1 I_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha &= \\ = j \frac{\omega \varepsilon_0}{p} A_2 K'_0(pr_0) + B_2 K_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \quad (18.19)$$

Подставляя выражение (18.18) в (18.16), находим

$$-j \frac{\omega \mu_0}{p} B_1 I'_0(pr_0) + A_2 K_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

или с учетом соотношения (18.17)

$$\begin{aligned} -j \frac{\omega \mu_0}{p} B_1 I'_0(pr_0) + j \frac{\omega \mu_0}{p} B_2 K'_0(pr_0) &= 0, \\ -B_1 I'_0(pr_0) + B_2 K'_0(pr_0) &= 0. \end{aligned} \quad (18.20)$$

Определим амплитудные коэффициенты A_1 и A_2 из выражений (18.16) и (18.17):

$$A_1 = \frac{j\omega\mu_0 B_1 I'_0(pr_0)}{pI_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha}, \quad (18.21)$$

$$A_2 = \frac{j\omega\mu_0 B_2 K'_0(pr_0)}{pK_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha}. \quad (18.22)$$

Подставляя значения этих коэффициентов в выражение (18.19), можно написать

$$\begin{aligned} & \frac{j\omega\varepsilon_0 j\omega\mu_0 B_1 \{I'_0(pr_0)\}^2}{p^2 I_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha} + B_1 I_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha = \\ & = \frac{j\omega\varepsilon_0 j\omega\mu_0 B_2 \{K'_0(pr_0)\}^2}{p^2 K_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha} + B_2 K_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \quad (18.23)$$

Найдем коэффициент B_1 из уравнения (18.20):

$$B_1 = \frac{K'_0(pr_0)}{I'_0(pr_0)} B_2. \quad (18.24)$$

Подставляя значение коэффициента B_1 в выражение (18.23) и сокращая коэффициенты B_2 , получаем

$$\begin{aligned} & -\frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_0 K'_0(pr_0) I'_0(pr_0)}{p^2 I_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha} + \frac{K'_0(pr_0) I_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha}{I'_0(pr_0)} = \\ & = -\frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_0 \{K'_0(pr)\}^2}{p^2 K_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha} + K_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & -\frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_0 I'_0(pr_0)}{p^2 I_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha} + \frac{I_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha}{I'_0(pr_0)} = \\ & = -\frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_0 K'_0(pr_0)}{p^2 K_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha} + \frac{K_0(pr_0)}{K'_0(pr_0)} \operatorname{tg} \alpha, \end{aligned}$$

откуда

$$\omega^2\mu_0\varepsilon_0 \left\{ \frac{K'_0(pr_0)}{K_0(pr_0)} - \frac{I'_0(pr_0)}{I_0(pr_0)} \right\} = p^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \left\{ \frac{K_0(pr_0)}{K'_0(pr_0)} - \frac{I_0(pr_0)}{I'_0(pr_0)} \right\}.$$

Это выражение может быть записано в иной форме:

$$\begin{aligned} & \omega \sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = p \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\frac{\frac{K_0(pr_0)}{K'_0(pr_0)} - \frac{I_0(pr_0)}{I'_0(pr_0)}}{\frac{K'_0(pr_0)}{K_0(pr_0)} - \frac{I'_0(pr_0)}{I_0(pr_0)}}} = \\ & = p \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\frac{\{K_0(pr_0) I'_0(pr_0) - K'_0(pr_0) I_0(pr_0)\} K_0(pr_0) I_0(pr_0)}{K'_0(pr_0) I'_0(pr_0) \{K'_0(pr_0) I_0(pr_0) - K_0(pr_0) I'_0(pr_0)\}}}, \end{aligned}$$

или

$$\omega \sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = p \operatorname{tg} \alpha \sqrt{-\frac{K_0(pr_0) I_0(pr_0)}{K'_0(pr_0) I'_0(pr_0)}}.$$

Отсюда

$$p = \frac{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}{\operatorname{tg} \alpha} \sqrt{-\frac{K'_0(pr_0) I'_0(pr_0)}{K_0(pr_0) I_0(pr_0)}}. \quad (18.25)$$

Выражение (18.25) представляет собой трансцендентное уравнение для поперечного волнового числа p . Продольное волновое число h определяют с помощью соотношения (16.28).

При больших значениях p , при которых справедливо неравенство $pr_0 \gg 1$, к модифицированной функции Бесселя и функции Макдональда могут быть применены асимптотические соотношения. При этом можно показать, что корень в выражении (18.25) близок к единице, т. е. для p получается приближенное выражение

$$p \approx \frac{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (18.26)$$

Фазовая скорость определяется соотношением (12.19). С увеличением поперечного волнового числа p возрастает продольное волновое число h и снижается фазовая скорость v_ϕ .

Рост p происходит с уменьшением $\operatorname{tg} \alpha$, который пропорционален в соответствии с выражением (18.1) шагу намотки a . Таким образом, фазовая скорость снижается с уменьшением шага намотки спирали.

При анализе спирального волновода было сделано предположение об одновременном существовании полей электрического и магнитного типов. Рассмотрим возможность их раздельного существования.

Как следует из формул (18.5) и (18.6), поле электрического типа определяется амплитудными коэффициентами A_1 и A_2 , а поле магнитного типа — коэффициентами B_1 и B_2 . Из граничных условий (18.18) вытекает, что равенство нулю коэффициента A_1 приводит к равенству нулю коэффициента A_2 , а из граничных условий (18.16), (18.17) явствует, что при равенстве нулю коэффициентов A_1 и A_2 тождественно равны нулю коэффициенты B_1 и B_2 . Следовательно, исчезновение поля электрического типа неизбежно приводит к исчезновению поля магнитного типа и наоборот.

Таким образом, сделанное ранее предположение о необходимости одновременного существования полей электрического и магнитного типов в спиральном волноводе оказывается правильным. Раздельное существование этих полей в спиральном волноводе невозможно.

ГЛАВА 19

ГРЕБЕНЧАТЫЙ МЕТАЛЛИЧЕСКИЙ ВОЛНОВОД

§ 19.1. Постановка вопроса

В настоящее время существует большое число волноводных систем, работающих на поверхностных медленных волнах, представляющих собой ту или иную металлическую структуру, периодически-

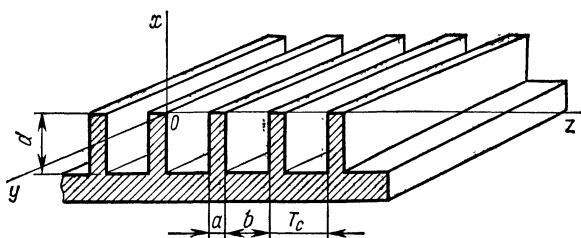


Рис. 19.1

скую вдоль оси распространения. К ним относятся: гребенчатая металлическая структура (рис. 19.1), круглый металлический ребристый волновод (рис. 19.2), ленточные структурные волноводы (рис. 19.3, *a* и *б*), стержневой структурный волновод (рис. 19.4). Можно предложить много других вариантов подобных структур, представляющих широкое поле для исследования.

В этой главе будет рассмотрен гребенчатый металлический волновод. Для простоты протяженность волновода вдоль оси y полагаем бесконечной. Если электрические токи, протекающие по поверхности металла такого волновода, ориентированы вдоль

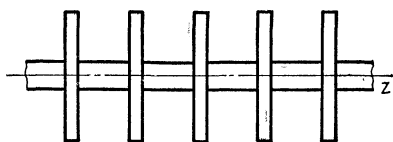
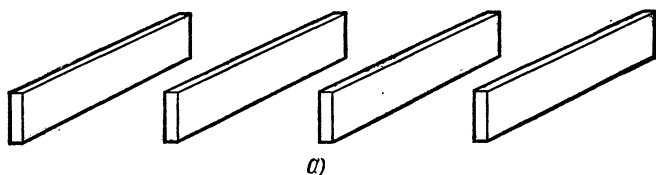
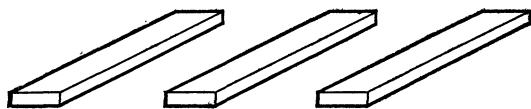


Рис. 19.2

оси z , то за счет канавок в структуре их путь удлиняется по сравнению с расстоянием вдоль оси z . При некоторых условиях это приводит, как увидим из анализа, к замедлению фазовой скорости электромагнитного поля, распространяющегося вдоль оси z . Такие электрические токи могут быть созданы только магнитным полем, нахо-



a)



б)

Рис. 19.3

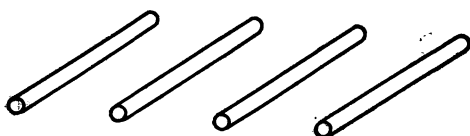


Рис. 19.4

дядимся в плоскости, перпендикулярной направлению ориентации токов, т. е. в плоскости xy . Другими словами, они могут быть созданы только волной электрического типа, у которой магнитное поле расположено в плоскости xy . Волна магнитного типа создает токи, ориентированные вдоль оси y , путь которых не удлиняется за счет волноводной структуры. Таким образом, в данной главе будет рассмотрено распространение волны электрического типа в гребенчатом волноводе.

§ 19.2. Вывод основного уравнения для продольной составляющей электрического поля в гребенчатом волноводе и его решение

Основным уравнением для продольной составляющей электрического поля, распространяющегося над гребенчатым волноводом, в случае волн электрического типа является уравнение (11.35):

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_\xi}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(h_\eta \cdot \frac{\partial \dot{E}_\xi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(h_\xi \cdot \frac{\partial \dot{E}_\xi}{\partial \eta} \right) \right\} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_\xi = 0.$$

Это уравнение записано в криволинейной ортогональной системе координат ξ, η, ζ . Запишем его в декартовой системе координат, выбрав следующее соответствие координат: $\xi \rightarrow x, \eta \rightarrow y, \zeta \rightarrow z, h_\xi = h_\eta = 1$:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial y^2} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_z = 0.$$

Ввиду неограниченной протяженности структуры вдоль координаты y и отсутствия потерь в среде, положим $\partial/\partial y = 0, \tilde{\mu}_a = \mu_a, \tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a$, где μ_a, ϵ_a — параметры диэлектрика, окружающего гребенчатый волновод.

При этих условиях основное уравнение запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2} + \omega^2 \mu_a \epsilon_a \dot{E}_z = 0. \quad (19.1)$$

В силу периодичности структуры допустим, что решение этого уравнения можно представить в виде бегущей волны, на которую оказывает влияние периодический процесс с периодом T_c , равным периоду структуры. Другими словами, представим решение в виде суперпозиции бесконечного числа гармоник:

$$\dot{E}_z = e^{-i h_0 z} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) e^{-j \frac{2\pi n}{T_c} z}. \quad (19.2)$$

Функции $f_n(x)$ отражают зависимость амплитуд гармоник от координаты x .

Подставляя выражение (19.2) в уравнение (19.1), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \left\{ \omega^2 \mu_a \epsilon_a - \left(h_0 + \frac{2\pi n}{T_c} \right)^2 \right\} f_n(x) + \frac{d^2 f_n(x)}{dx^2} \right\rangle e^{-j \left(\frac{2\pi n}{T_c} + h_0 \right) z} = 0. \quad (19.3)$$

Для выполнения этого равенства необходимо равенство нулю каждого члена ряда:

$$\frac{d^2 f_n(x)}{dx^2} + \left\{ \omega^2 \mu_a \varepsilon_a - \left(h_0 + \frac{2\pi n}{T_c} \right)^2 \right\} f_n(x) = 0. \quad (19.4)$$

При

$$\omega^2 \mu_a \varepsilon_a > \left(h_0 + \frac{2\pi n}{T_c} \right)^2 \quad (19.5)$$

решение уравнения (19.4) имеет вид

$$f_n = A_n e^{-j g_n x}, \quad (19.6)$$

где

$$g_n = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - \left(h_0 + \frac{2\pi n}{T_c} \right)^2}.$$

Это решение представляет собой волну, распространяющуюся вдоль оси x . Нас интересует поверхностная медленная волна, распространяющаяся вдоль оси z . Амплитуда такой волны должна убывать с ростом координаты x , что возможно при соблюдении неравенства

$$\left(h_0 + \frac{2\pi n}{T_c} \right)^2 > \omega^2 \mu_a \varepsilon_a. \quad (19.7)$$

При этом уравнение (19.4) записывается в виде

$$\frac{d^2 f_n(x)}{dx^2} - \left\{ \left(h_0 + \frac{2\pi n}{T_c} \right)^2 - \omega^2 \mu_a \varepsilon_a \right\} f_n(x) = 0 \quad (19.8)$$

с решением

$$f_n(x) = A_n e^{-p_n x}, \quad (19.9)$$

где

$$p_n = \sqrt{\left(h_0 + \frac{2\pi n}{T_c} \right)^2 - \omega^2 \mu_a \varepsilon_a}. \quad (19.10)$$

С учетом выражений (19.2), (19.10) можно записать

$$\dot{E}_z = e^{-j h_0 z} \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-p_n x} e^{-j \frac{2\pi n}{T_c} z},$$

или

$$\dot{E}_z = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-p_n x} e^{-j \left(h_0 + \frac{2\pi n}{T_c} \right) z}. \quad (19.11)$$

Таким образом, поле над гребенчатым волноводом представляет собой суперпозицию волн, затухающих вдоль координаты x с коэффициентом затухания p_n и обладающих фазовыми постоянными h_n , где

$$h_n = h_0 + \frac{2\pi n}{T_c}. \quad (19.12)$$

Коэффициент затухания p_n в данном случае играет роль поперечного волнового числа, а фазовая постоянная — продольного волнового числа.

Как известно, фазовая скорость равна отношению угловой частоты ω к фазовой постоянной: $v_\phi = \omega/h$.

В рассматриваемом случае

$$v_\phi = \omega/h_n. \quad (19.13)$$

Если

$$h_n = \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a} = \beta, \quad (19.14)$$

то фазовая скорость $v_\phi = 1/\sqrt{\mu_a \epsilon_a}$ равна скорости света в среде с параметрами μ_a, ϵ_a . При

$$h_n < \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a} \quad (19.15)$$

$v_\phi > c$, что соответствует быстрой волне. При

$$h_n > \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a} \quad (19.16)$$

$v_\phi < c$, что соответствует медленной волне.

Из соотношения (19.10) следует, что p_n увеличивается с ростом номера гармоники n и уменьшением периода структуры T_c . Наименьшее значение p_n имеет при $n = 0$

$$p_0 = \sqrt{h_0^2 - \omega^2 \mu_a \epsilon_a}. \quad (19.17)$$

При достаточно малом периоде структуры T_c можно считать, что поле над гребенчатым волноводом определяется преимущественно основной гармоникой, соответствующей $n = 0$, и влияние более высоких гармоник на структуру медленной волны невелико. При этом волновод можно рассматривать как некоторую сплошную замедляющую поверхность типа диэлектрической пластины. Такое приближение, очевидно, тем точнее, чем меньше период гребенчатой структуры.

Дальнейший анализ будет проведен при допущении пренебрежения высшими гармониками, что существенно упрощает задачу.

Оценим величину периода структуры, при котором можно пренебречь высшими гармониками.

Для того чтобы затухание высших гармоник происходило значительно быстрее по сравнению с основной гармоникой, требуется соблюдение неравенства

$$p_n \gg p_0. \quad (19.18)$$

Подставляя в него формулы (19.10) и (19.17), получаем

$$\sqrt{\left(h_0 + \frac{2\pi n}{T_c}\right)^2 - \omega^2 \mu_a \epsilon_a} \gg \sqrt{h_0^2 - \omega^2 \mu_a \epsilon_a}. \quad (19.19)$$

Это неравенство справедливо при

$$\frac{2\pi n}{T_c} \gg h_0. \quad (19.20)$$

Неравенство (19.20) усиливается с ростом номера гармоники n , но должно соблюдаться уже для первой гармоники: $2\pi/T_c \gg h_0$, откуда

$$T_c \ll \frac{2\pi}{h_0}. \quad (19.21)$$

Медленная волна перестает существовать с приближением фазовой скорости к скорости света или при соблюдении равенства (19.14), которое для основной гармоники имеет вид

$$h_0 = \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (19.22)$$

Допустим, что медленная волна должна обладать фазовой скоростью, в k раз меньшей скорости света. Для этого необходимо, чтобы

$$h_0 = k \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (19.23)$$

Подставляя соотношение (19.23) в неравенство (19.21), получаем

$$T_c \ll \lambda/k. \quad (19.24)$$

Примем условно, что

$$T_c \approx 0,1 \frac{\lambda}{k}. \quad (19.25)$$

Тогда уже при малых замедлениях, соответствующих $k \approx 1$, период структуры должен составлять величину порядка 0,1 длины волны. Следует помнить, что λ соответствует длине волны в свободном пространстве с параметрами μ_a , ϵ_a .

§ 19.3. Определение поперечного и продольного волновых чисел

Волновые числа определяют путем применения граничных условий, приравнивания тангенциальных составляющих полей $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ у поверхности гребенчатого волновода, т. е. при $x=0$.

На основании выражения (19.11) продольная составляющая электрического поля основной гармоники

$$\dot{E}_{z(0)} = A_0 e^{-p_0 x} e^{-j h_0 z}, \quad (19.26)$$

или в наиболее употребительной форме

$$\dot{E}_{z(0)} = \dot{E}_z e^{-j h_0 z}, \quad (19.27)$$

где

$$\dot{E}_{z0} = A_0 e^{-p_0 x}. \quad (19.28)$$

Переход от продольной составляющей электрического поля к поперечным составляющим в случае медленной волны осуществляется с помощью общих формул перехода (12.78) — (12.82).

В рассматриваемом случае

$\gamma_B = h_0$, $p = p_0$, $\xi \rightarrow x$, $\eta \rightarrow y$, $\zeta \rightarrow z$, $h_\xi = h_\eta = 1$, $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a$, $\partial/\partial y = 0$ и формулы перехода записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= j \frac{h_0}{p_0^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial x} e^{-jh_0 z}, \\ \dot{H}_y &= j \frac{\omega \epsilon_a}{p_0^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial x} e^{-jh_0 z}, \\ \dot{E}_y &= \dot{H}_x = \dot{H}_z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.29)$$

Используя соотношение (19.28) находим составляющие поля основной гармоник медленной волны над поверхностью гребенчатого волновода:

$$\dot{E}_{x(0)} = -j \frac{h_0}{p_0} A_0 e^{-p_0 x} e^{-jh_0 z}, \quad (19.30)$$

$$\dot{H}_{y(0)} = -j \frac{\omega \epsilon_a}{p_0} A_0 e^{-p_0 x} e^{-jh_0 z}, \quad (19.31)$$

$$\dot{E}_{y(0)} = \dot{H}_{x(0)} = \dot{H}_{z(0)} = 0. \quad (19.32)$$

Далее следует определить поле в канавках «гребенки». Канавки можно рассматривать как двухплоскостные волноводы, образованные ребрами «гребенки», короткозамкнутые на конце. Внешнее по отношению к канавкам поле имеет составляющие \dot{E}_x , \dot{H}_y , \dot{E}_z . Такие же составляющие должны содержать и поле в канавках. В § 10.4 было показано, что существование волн электрического типа в двухплоскостном волноводе с составляющими \dot{E}_z , \dot{E}_x , \dot{H}_y (осью распространения которого в разбираемом случае является ось x) возможно при условии, что расстояние между плоскостями составляет не менее $0,5\lambda$, где λ —длина волны. Таким расстоянием на рис. 19.1 является размер b . Как указывалось в § 19.2, проводимый анализ справедлив при малых значениях периода структуры, при котором $b \ll 0,5\lambda$.

Такая система подобна двухплоскостной длинной линии, в которой может существовать только волна типа Т, распространяющаяся вдоль оси x и обладающая \dot{E}_z и \dot{H}_y .

Двухплоскостная длинная линия замкнута на конце, следовательно, в ней должна установиться стоячая волна. В соответствии с граничными условиями вектор \dot{E}_{zk} поля в канавке, тангенциальный к ее дну, должен быть равен нулю при $x = -d$ (см. рис. 19.1). С учетом этого продольная составляющая электрического поля в канавке

$$\dot{E}_{zk} = B_0 \sin \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} (x+d) \right\} = B_0 \sin \left\{ \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a} (x+d) \right\}. \quad (19.33)$$

Магнитное поле в канавке \dot{H}_{yk} можно определить с помощью второго уравнения Максвелла (7.12). В рассматриваемом случае

$\bar{\mu}_a = \mu_a$ и

$$\dot{H}_{yк} = \frac{1_y}{j\omega\mu_a} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{zк}}{\partial x},$$

или

$$\dot{H}_{yк} = \frac{1_y}{j\omega\mu_a} \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \cos \left\{ \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} (x+d) \right\}.$$

Окончательно можем записать

$$\dot{H}_{yк} = \frac{1}{j \sqrt{\mu_a/\varepsilon_a}} \cos \left\{ \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} (x+d) \right\}. \quad (19.34)$$

Далее, используя граничные условия:

$$\dot{E}_{z(0)} = \dot{E}_{zк}, \quad \dot{H}_{y(0)} = \dot{H}_{yк} \quad (\text{при } x=0)$$

и формулы (19.26), (19.33) и (19.31), (19.34), получаем

$$\begin{aligned} A_0 e^{-jh_0 z} &= B_0 \sin(\omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} d), \\ -j \frac{\omega \varepsilon_a}{\rho_0} A_0 e^{-jh_0 z} &= \frac{1}{j \sqrt{\mu_a/\varepsilon_a}} \cos(\omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} d). \end{aligned}$$

Разделив первое уравнение на второе, находим

$$\frac{\rho_0}{\omega \varepsilon_a} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \operatorname{tg}(\omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} d),$$

откуда

$$\rho_0 = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \operatorname{tg}(\omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} d) = \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} d\right). \quad (19.35)$$

На основании формулы (19.17) можно написать, что

$$h_0 = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a + \rho_0^2}. \quad (19.36)$$

Фазовая скорость

$$v_\phi = \frac{\omega}{h_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{1 + \frac{\rho_0^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\rho_0^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}}}. \quad (19.37)$$

Из формулы (19.35) следует, что при $d = \lambda/4$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} d\right) \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad \rho_0 \rightarrow \infty.$$

Возникают бесконечно большие замедление и затухание поля вдоль оси x . Этот вывод неточен и является следствием приближенности анализа.

При $d > \lambda/4$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} d\right) < 0 \quad \text{и} \quad \rho_0 < 0.$$

Медленная волна не существует, так как поле начинает возрастать по мере удаления от замедляющей структуры, что не соответствует физическим условиям исследуемой проблемы. Полученный результат позволяет приближенно учесть поведение высших гармоник медленной волны. Формулы (19.10), (19.12) позволяют определить волновые числа p_n и h_n , а формула (19.13) — фазовую скорость высших гармоник. Неточность заключается в приближенном способе отыскания волновых чисел p_0 и h_0 . Кроме того, граничные условия применялись не для полного поля, а для основных гармоник, что также обуславливает приближенность расчета.

ГЛАВА 20

ЗАТУХАНИЕ ПОЛЯ В РЕАЛЬНЫХ ВОЛНОВОДАХ

§ 20.1. Постановка вопроса

Реальные волноводы выполняются из металла, обладающего конечной электрической проводимостью. Используемые в волноводах диэлектрики не являются идеальными. Поэтому амплитуда электромагнитных волн, распространяющихся в волноводах, уменьшается по мере продвижения поля вдоль оси волновода.

Оценка практической пригодности того или иного волноводного тракта невозможна без определения затухания поля. Неидеальность материалов, используемых в волноводах, не только приводит к уменьшению амплитуды поля и потерям мощности, но также искажает картину поля в волноводах, определенную в предыдущих главах. Однако потери в реальных диэлектриках и металлах незначительны и, как показывает более глубокий анализ, влияние неидеальности этих материалов на структуру поля также незначительно. Вследствие этого при анализе потерь в волноводах структуру поля принимают такой, какой обладают идеальные волноводные системы, лишенные потерь. С указанной степенью приближения и будут выведены в этой главе необходимые уравнения.

§ 20.2. Вывод уравнений для мощностей, теряемых в металле и диэлектрике волновода. Определение коэффициентов затухания

При наличии потерь коэффициент распространения γ_v , как было выяснено в § 12.3, определяется формулой

$$\gamma_v = h - jh' - jh''.$$

Здесь h' и h'' — коэффициенты затухания поля соответственно за счет потерь в металле и диэлектрике.

Действительная часть вектора Пойнтинга, возникающего в поле, распространяющемся в волноводе, определяется общим выражением

(4.29). В соответствии с формулами (12.51), (12.52), (12.58) — (12.63) можно записать

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_0 e^{-j\gamma_B \zeta}, \quad \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}_0 e^{-j\gamma_B \zeta}. \quad (20.1)$$

Используя выражение (12.65), получаем

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_0 e^{-(h' + h'') \zeta} e^{-j\hbar \zeta}, \quad (20.2)$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}_0 e^{-(h' + h'') \zeta} e^{-j\hbar \zeta}. \quad (20.3)$$

Соответственно для сопряженного значения $\dot{\mathbf{H}}^*$ имеем

$$\dot{\mathbf{H}}^* = \dot{\mathbf{H}}_0^* e^{-(h' + h'') \zeta} e^{j\hbar \zeta}. \quad (20.4)$$

Подставляя выражения (20.2), (20.4) в формулу (4.29), находим

$$\dot{\Pi}_d = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*] e^{-2(h' + h'') \zeta}. \quad (20.5)$$

Определим мощность P , проходящую через поперечное сечение волновода S_B . В случае трубчатых волноводов под S_B следует понимать поперечное сечение трубы, в случае волноводов медленных волн — сечение, в пределах которого распространяется подавляющая часть электромагнитного поля. Термин «подавляющая» несколько условен, и в различных ситуациях его можно трактовать по-разному. Обычно под S_B понимают сечение, в пределах которого распространяется 95% мощности электромагнитного поля.

Для мощности P можно написать следующее общее выражение:

$$\begin{aligned} P &= \int_{S_B} \dot{\Pi}_d dS = \frac{1}{2} \int_{S_B} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*] e^{-2(h' + h'') \zeta} dS = \\ &= \frac{1}{2} e^{-2(h' + h'') \zeta} \int_{S_B} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*] dS. \end{aligned} \quad (20.6)$$

Множитель $e^{-2(h' + h'') \zeta}$ можно вынести за знак интеграла, поскольку интегрирование осуществляется по площади поперечного сечения волновода, т. е. по координатам ξ , η .

Изменение мощности вдоль координаты ζ характеризуется производной

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\zeta} &= -2(h' + h'') \frac{1}{2} e^{-2(h' + h'') \zeta} \int_{S_B} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*] dS = \\ &= -(h' + h'') e^{-2(h' + h'') \zeta} \int_{S_B} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*] dS. \end{aligned} \quad (20.7)$$

Мощность P_n , теряемая на бесконечно малом расстоянии $d\zeta$: $dP_n = \left| \frac{dP}{d\zeta} \right| d\zeta$, выражается соотношением

$$dP_n = \left\{ (h' + h'') e^{-2(h' + h'') \zeta} \int_{S_B} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*] dS \right\} d\zeta.$$

Мощность, теряемую на конечном участке l длины волновода, можно найти путем интегрирования:

$$\begin{aligned} P_n &= \int_0^l \left\{ (h' + h'') e^{-2(h' + h'') \xi} \int_{S_B} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*] dS \right\} d\xi = \\ &= (h' + h'') \int_{S_B} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*] dS \int_0^l e^{-2(h' + h'') \xi} d\xi = \\ &= -\frac{h' + h''}{2(h' + h'')} \int_{S_B} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*] dS e^{-2(h' + h'') \xi} \Big|_0^l, \end{aligned}$$

или

$$P_n = \{1 - e^{-2(h' + h'') l}\} \frac{1}{2} \int_{S_B} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*] dS. \quad (20.8)$$

Полученное выражение включает в себя мощность потерь в металле и диэлектрике волновода. Неизвестными здесь являются величины P_n , h' , h'' .

В § 9.7 было дано следующее выражение для мощности, теряемой в реальном металле, при условии, что площадь поверхности металла равна S_1 :

$$P_{\text{пот}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_a^2 \omega^2}{2\gamma_{\text{э}2}}} \int_{S_1} |\dot{\mathbf{H}}_{\tau}|^2 dS.$$

В рассматриваемом случае интегрирование следует проводить по площади металла, образующего волноводную систему. Составляющие тангенциального к металлическим стенкам магнитного поля $\dot{\mathbf{H}}_{\tau}$ являются частью общего поля $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ в волноводе, и их зависимость от координаты ξ аналогична зависимостям (20.2), (20.3):

$$\dot{\mathbf{H}}_{\tau} = \dot{\mathbf{H}}_{0\tau} e^{-(h' + h'') \xi} e^{-jh\xi}. \quad (20.9)$$

В силу этого

$$\begin{aligned} \int_{S_1} |\dot{\mathbf{H}}_{\tau}|^2 dS &= \left(\int_{\xi} |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 h_{\xi}^2 d\xi + \int_{\eta} |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 h_{\eta}^2 d\eta \right) \int_0^l e^{-2(h' + h'') \xi} d\xi = \\ &= -\frac{1}{2(h' + h'')} e^{-2(h' + h'') \xi} \Big|_0^l \left(\int_{\xi} |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 h_{\xi}^2 d\xi + \int_{\eta} |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 h_{\eta}^2 d\eta \right) = \\ &= \frac{1}{2(h' + h'')} \{1 - e^{-2(h' + h'') l}\} \left(\int_{\xi} |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 h_{\xi}^2 d\xi + \int_{\eta} |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 h_{\eta}^2 d\eta \right). \quad (20.10) \end{aligned}$$

Здесь интегралы $\int_{\xi} |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 h_{\xi}^2 d\xi + \int_{\eta} |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 h_{\eta}^2 d\eta$ представляют собой доли поверхностных интегралов, взятые соответственно по координатам ξ и η .

Подставляя выражение (20.10) в формулу (9.80), получаем мощность, теряемую в металле волноводной системы с учетом потерь в диэлектрике этой системы

$$P_{\text{пот}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_{a2}\omega}{2\gamma_{a2}}} \frac{1}{2(h' + h'')} \{1 - e^{-2(h' + h'')l}\} \times \\ \times \left(\int_{\xi} |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 h_{\xi} d\xi + \int_{\eta} |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 h_{\eta} d\eta \right). \quad (20.11)$$

При отсутствии потерь в диэлектрике коэффициент затухания h'' следует приравнять нулю. Формула (20.11) содержит три неизвестных величины: $P_{\text{пот}}$, h' и h'' . Найдем выражение для мощности потерь в диэлектрике $P_{\text{пот. д}}$.

В § 4.2 была выведена теорема Пойнтинга (4.26):

$$\oint_{S_1} \text{Re} \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}^*] d\mathbf{S} + \int_{V_1} \text{Re} \frac{1}{2} \mathbf{j}_m \dot{\mathbf{H}}^* dV + \int_{V_1} \text{Re} \frac{1}{2} \mathbf{j}_e \dot{\mathbf{E}} dV + \\ + \int_{V_1} \frac{1}{2} \gamma_m |\dot{\mathbf{H}}|^2 dV + \int_{V_1} \frac{1}{2} \gamma_e |\dot{\mathbf{E}}|^2 dV = 0.$$

Два последних интеграла в этом соотношении представляют собой усредненную за период мощность, расходуемую на нагрев диэлектрика, обладающего магнитной и электрической проводимостями. Используя соотношения (20.2) и (20.3), можно записать эти интегралы в таком виде:

$$\int_{V_1} \frac{1}{2} \gamma_m |\dot{\mathbf{H}}|^2 dV = \frac{1}{2} \int_{\xi} \int_{\eta} \gamma_m |\dot{\mathbf{H}}_0|^2 h_{\eta} d\eta h_{\xi} d\xi \int_0^l e^{-2(h' + h'')\zeta} d\xi = \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2(h' + h'')} \{1 - e^{-2(h' + h'')l}\} \int_{\xi} \int_{\eta} \gamma_m |\dot{\mathbf{H}}_0|^2 h_{\eta} d\eta h_{\xi} d\xi, \quad (20.12)$$

$$\int_{V_1} \frac{1}{2} \gamma_e |\dot{\mathbf{E}}|^2 dV = \frac{1}{2} \int_{\xi} \int_{\eta} \gamma_e |\dot{\mathbf{E}}_0|^2 h_{\eta} d\eta h_{\xi} d\xi \int_0^l e^{-2(h' + h'')\zeta} d\xi = \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2(h' + h'')} \{1 - e^{-2(h' + h'')l}\} \int_{\xi} \int_{\eta} \gamma_e |\dot{\mathbf{E}}_0|^2 h_{\eta} d\eta h_{\xi} d\xi. \quad (20.13)$$

Здесь интегралы $\int_{\xi} \int_{\eta} \gamma_m |\dot{\mathbf{H}}_0|^2 h_{\eta} d\eta h_{\xi} d\xi$, $\int_{\xi} \int_{\eta} \gamma_e |\dot{\mathbf{E}}_0|^2 h_{\eta} d\eta h_{\xi} d\xi$

представляют собой интегралы, взятые по площади поперечного сечения, по координатам ξ и η .

Таким образом, полная мощность, теряемая в диэлектрике, обла-

дающем магнитной и электрической проводимостями,

$$P_{\text{пот. д}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2(h' + h'')} \{1 - e^{-2(h' + h'')l}\} \times \\ \times \left(\int_{\xi} \int_{\eta} \gamma_{\text{м}} |\dot{\mathbf{H}}_0|^2 h_{\eta} d\eta h_{\xi} d\xi + \int_{\xi} \int_{\eta} \gamma_{\text{э}} |\dot{\mathbf{E}}_0|^2 h_{\eta} d\eta h_{\xi} d\xi \right). \quad (20.14)$$

Мощность, теряемая полем при прохождении участка волновода длиной l , определяется формулой (20.8). Она равна суммарной мощности, теряемой в металле и диэлектрике волноводной системы:

$$P_{\text{п}} = P_{\text{пот}} + P_{\text{пот. д}}.$$

Используя соотношения (20.8), (20.11) и (20.14), получаем

$$P_{\text{п}} = \{1 - e^{-2(h' + h'')l}\} \frac{1}{2} \int_{S_{\text{В}}} \text{Re} [\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*] dS = \\ = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_{\text{а2}} \omega}{2\gamma_{\text{э2}}}} \cdot \frac{1}{2(h' + h'')} \{1 - e^{-2(h' + h'')l}\} \times \\ \times \left(\int_{\xi} |\dot{\mathbf{H}}_{\text{от}}|^2 h_{\xi} d\xi + \int_{\eta} |\dot{\mathbf{H}}_{\text{от}}|^2 h_{\eta} d\eta \right) + \\ + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2(h' + h'')} \{1 - e^{-2(h' + h'')l}\} \left(\int_{\xi} \int_{\eta} \gamma_{\text{м}} |\dot{\mathbf{H}}_0|^2 h_{\eta} d\eta h_{\xi} d\xi + \right. \\ \left. + \int_{\xi} \int_{\eta} \gamma_{\text{э}} |\dot{\mathbf{E}}_0|^2 h_{\eta} d\eta h_{\xi} d\xi \right),$$

или после сокращения

$$\int_{S_{\text{В}}} \text{Re} [\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*] dS = \\ = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_{\text{а2}} \omega}{2\gamma_{\text{э2}}}} \cdot \frac{1}{(h' + h'')} \left(\int_{\xi} |\dot{\mathbf{H}}_{\text{от}}|^2 h_{\xi} d\xi + \int_{\eta} |\dot{\mathbf{H}}_{\text{от}}|^2 h_{\eta} d\eta \right) + \\ + \frac{1}{h' + h''} \left(\int_{\xi} \int_{\eta} \gamma_{\text{м}} |\dot{\mathbf{H}}_0|^2 h_{\eta} d\eta h_{\xi} d\xi + \int_{\xi} \int_{\eta} \gamma_{\text{э}} |\dot{\mathbf{E}}_0|^2 h_{\eta} d\eta h_{\xi} d\xi \right).$$

Из этого выражения можно найти суммарный коэффициент затухания $h' + h''$:

$$\sqrt{\frac{\mu_{\text{а2}} \omega}{2\gamma_{\text{э2}}}} \left(\int_{\xi} |\dot{\mathbf{H}}_{\text{от}}|^2 h_{\xi} d\xi + \int_{\eta} |\dot{\mathbf{H}}_{\text{от}}|^2 h_{\eta} d\eta \right) + \rightarrow \\ \rightarrow + \int_{\xi} \int_{\eta} \gamma_{\text{м}} |\dot{\mathbf{H}}_0|^2 h_{\eta} d\eta h_{\xi} d\xi + \int_{\xi} \int_{\eta} \gamma_{\text{э}} |\dot{\mathbf{E}}_0|^2 h_{\eta} d\eta h_{\xi} d\xi \\ h' + h'' = \frac{\quad}{2 \int_{S_{\text{В}}} \text{Re} [\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*] dS}. \quad (20.15)$$

Каждый из этих коэффициентов определим с помощью формул:

$$h' = \frac{\sqrt{\frac{\mu_{a2}\omega}{2\gamma_{a2}}} \left(\int_{\xi} |\dot{H}_{0\tau}|^2 h_{\xi} d\xi + \int_{\eta} |\dot{H}_{0\tau}|^2 h_{\eta} d\eta \right)}{2 \int_{S_B} \operatorname{Re} [\dot{E}_0 \dot{H}_0^*] dS}, \quad (20.16)$$

$$h'' = \frac{\int_{\xi} \int_{\eta} \gamma_m |\dot{H}_0|^2 h_{\eta} d\eta h_{\xi} d\xi + \int_{\xi} \int_{\eta} \gamma_a |\dot{E}_0|^2 h_{\eta} d\eta h_{\xi} d\xi}{2 \int_{S_B} \operatorname{Re} [\dot{E}_0 \dot{H}_0^*] dS}. \quad (20.17)$$

Полезно напомнить, что интегралы в знаменателе этих выражений представляют собой интегралы по площади поперечного сечения, занятого электромагнитным полем.

Интегралы в числителе выражения (20.16) берут по ширине каждой из металлических поверхностей, образующих волновод, а интегралы в числителе выражения (20.17) — по площади поперечного сечения диэлектрика волновода. В зависимости от конкретной ситуации могут учитываться оба коэффициента затухания h' и h'' или любой из них.

В диэлектрике могут существовать как потери магнитного и электрического типов, так и отдельно какие-либо из них. Возможны случаи, когда потерями в диэлектрике можно пренебречь. Примеры расчета коэффициента затухания h' даны в приложении II.

ГЛАВА 21

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРАХ. ОБЪЕМНЫЙ РЕЗОНАТОР, СОЗДАННЫЙ НА БАЗЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ВОЛНОВОДА БЫСТРЫХ ВОЛН

§ 21.1. Общие сведения об объемных резонаторах

В диапазонах дециметровых, сантиметровых и более коротких волн при создании колебательных контуров приходится сталкиваться с серьезными трудностями. Паразитные емкости, уменьшение добротностей индуктивных катушек делают невозможным их использование в указанных диапазонах. Когда размеры колебательного контура становятся соизмеримыми с длиной волны, колебательный контур с сосредоточенными постоянными перестает быть колебательным контуром. В этом случае от систем с сосредоточенными постоянными переходят к системам с распределенными постоянными.

Как известно, замкнутая на конце длинная линия с длиной, равной четверти длины волны подводимого колебания, эквивалентна параллельному колебательному контуру, и часто ее используют

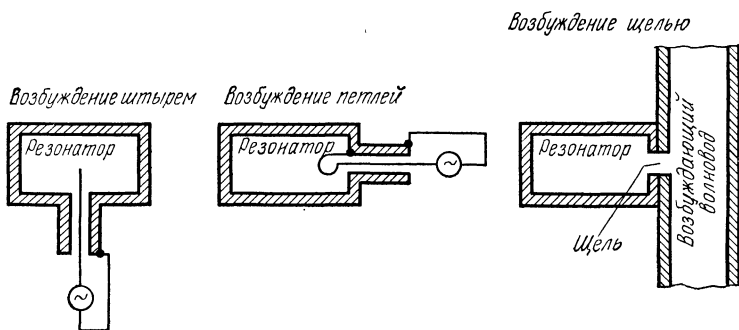


Рис. 21.1

в качестве колебательного контура. Однако понятие «длинная линия» справедливо до тех пор, пока поперечные размеры линии существенно меньше длины волны. Практически отрезки длинных линий могут служить колебательными контурами в метровом и дециметровом диапазонах волн.

Обычно в качестве длинных линий в этих диапазонах применяют отрезки коаксиальных волноводов, и созданный подобным образом колебательный контур называют *коаксиальным объемным резонатором*.

В короткой части дециметрового диапазона, а также в сантиметровом диапазоне волн в коаксиальных резонаторах помимо волн типа T , на которых они работают, возможно возбуждение волн высших волноводных типов, что затрудняет использование этих резонаторов.

В этих диапазонах широкое распространение нашли объемные резонаторы на базе волноводов быстрых волн различных сечений. Отрезок волновода закрывают с двух сторон металлическими стенками, через отверстия в стенках вводят штырь или петлю так, как показано на рис. 21.1, с помощью которых в резонаторе возбуждается электромагнитное поле. Возбуждение резонатора возможно также осуществлять с помощью щелей, прорезанных в стенках резонатора, и возбуждающего волновода (рис. 21.1). Электромагнитная волна, распространяющаяся в резонаторе, испытывает многократное отражение от стенок и при благоприятных фазовых соотношениях между падающими и отраженными волнами в системе могут установиться незатухающие колебания.

Одним из основных свойств подобных систем является их высокая добротность, достигающая десятков тысяч. В случае применения криогенной техники и сверхпроводящих материалов для стенок резонаторов их добротность можно существенно повысить. Как было установлено, волноводы быстрых волн нормально работают, когда их поперечные размеры соизмеримы с длиной волны. При переходе к диапазонам миллиметровых и субмиллиметровых волн использование волноводов быстрых волн становится затруднительным, так как их поперечные размеры становятся весьма малыми.

При создании резонаторов в диапазонах миллиметровых и субмиллиметровых волн применяют волноводы медленных волн, рабо-

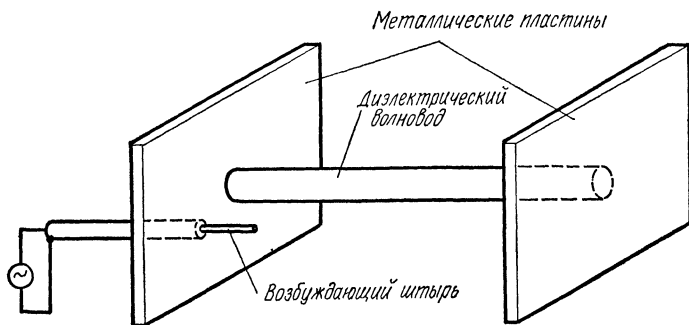


Рис. 21.2

тающие в этих диапазонах. При этом участок волновода медленных волн ограждают с двух сторон металлическими пластинами (рис.21.2, в случае круглого диэлектрического волновода). Возможно большое разнообразие конструкций объемных резонаторов, использующих волноводы медленных волн. В диапазоне субмиллиметровых волн находят применение объемные резонаторы так называемого открытого вида, построенные по типу оптических интерферометров. Рассмотрение этих резонаторов выходит за рамки настоящей книги.

§ 21.2. Вывод выражений для составляющих поля электрического типа в резонаторе, созданном на базе прямоугольного волновода быстрых волн

Используем в качестве объемного резонатора отрезок прямоугольного волновода длиной l , внутренние размеры которого показаны на рис.21.3. За исходные возьмем соотношения (13.29) — (13.34) для составляющих поля электрического типа в прямоугольном волноводе, введенные в § 13.2.

Эти выражения характеризуют поле, движущееся в волноводе в сторону положительных значений оси z . В объемном резонаторе в результате отражения волны от стенки, закрывающей волновод, возникает электромагнитное поле, перемещающееся в обратном направлении, в сторону отрицательных значений оси z . Отраженная волна отличается от падающей волны знаком перед продольной постоянной распространения h . В § 12.2 были получены выражения для фазовой скорости волны, распространяющейся в волноводе в сторону положительных и отрицательных значений оси z . В первом случае фазовая скорость $v_{\phi} = \omega/h$, во втором $v_{\phi} = -\omega/h$.

Таким образом, чтобы получить выражения для составляющих поля отраженной волны, в

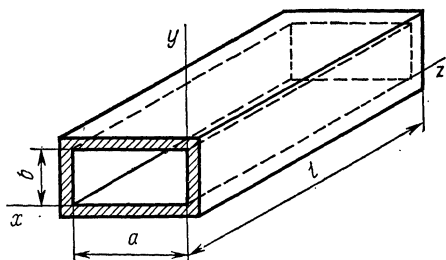


Рис. 21.3

формулах (13.29)—(13.34) достаточно изменить на обратный знак перед постоянной h и амплитудный коэффициент прямой волны C_1 заменить амплитудным коэффициентом C_3 отраженной волны. В результате этих операций получаются следующие выражения для составляющих поля отраженной волны:

$$\dot{E}_{x_0} = -j \frac{h}{g_{mn}^2} C_3 \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{jhz}, \quad (21.1)$$

$$\dot{E}_{y_0} = -j \frac{h}{g_{mn}^2} C_3 \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{jhz}, \quad (21.2)$$

$$\dot{E}_{z_0} = C_3 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{jhz}, \quad (21.3)$$

$$\dot{H}_{x_0} = -j \frac{\omega \varepsilon_a}{g_{mn}^2} C_3 \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{jhz}, \quad (21.4)$$

$$\dot{H}_{y_0} = j \frac{\omega \varepsilon_a}{g_{mn}^2} C_3 \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{jhz}, \quad (21.5)$$

$$\dot{H}_{z_0} = 0. \quad (21.6)$$

Суммарное поле в резонаторе является суперпозицией прямой и отраженной волн. При этом должны быть соблюдены граничные условия у стенок, ограничивающих волновод:

$$\dot{E}_z = 0 \quad (\text{при } z=0 \text{ и } z=l). \quad (21.7)$$

Тангенциальными по отношению к ограничивающим стенкам, лежащим в плоскости xy , являются составляющие \dot{E}_{xp} , \dot{E}_{yp} суммарного поля в резонаторе:

$$\dot{E}_{xp} = \dot{E}_x + \dot{E}_{x_0}, \quad \dot{E}_{yp} = \dot{E}_y + \dot{E}_{y_0}. \quad (21.8)$$

При этом граничные условия записываются в виде

$$\dot{E}_x + \dot{E}_{x_0} = 0 \quad (\text{при } z=0 \text{ и } z=l), \quad (21.9)$$

$$\dot{E}_y + \dot{E}_{y_0} = 0 \quad (\text{при } z=0 \text{ и } z=l). \quad (21.10)$$

Подставляя в граничные условия (21.9) выражения для \dot{E}_x и \dot{E}_{x_0} (13.29) и (21.1), получаем

$$j \frac{h}{g_{mn}^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) (C_1 e^{-jhz} - C_3 e^{jhz}) = 0$$

(при $z=0$ и $z=l$),

откуда

$$C_1 - C_3 = 0, \quad \text{или } C_1 = C_3 \quad (21.11)$$

и

$$j \frac{h}{g_{mn}^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) C_1 (e^{-jhl} - e^{jhl}) = 0.$$

Учитывая, что $\frac{e^{jhl} - e^{-jhl}}{2j} = \sin(hl)$, можно написать

$$j \frac{h}{g_{mn}^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) C_1 (-2j) \sin(hl) = Q.$$

Отсюда

$$\sin(hl) = 0, \quad hl = p\pi, \quad (21.12)$$

где

$$h = \frac{p\pi}{l} \quad (p = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (21.13)$$

К аналогичным результатам приводит выполнение граничных условий (21.10). Используя равенства (21.11) и соотношения (13.29)—(13.34), (21.1)—(21.6), получаем следующие выражения для составляющих суммарного поля в резонаторе:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{xp} &= j \frac{h}{g_{mn}^2} C_1 \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) (e^{-jhz} - e^{jhz}), \\ \dot{E}_{yp} &= j \frac{h}{g_{mn}^2} C_1 \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) (e^{-jhz} - e^{jhz}), \\ \dot{E}_{zp} &= C_1 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) (e^{-jhz} + e^{jhz}), \\ \dot{H}_{xp} &= -j \frac{\omega_p \varepsilon_a}{g_{mn}^2} C_1 \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) (e^{-jhz} + e^{jhz}), \\ \dot{H}_{yp} &= j \frac{\omega_p \varepsilon_a}{g_{mn}^2} C_1 \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) (e^{-jhz} + e^{jhz}), \\ \dot{H}_{zp} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

В эти выражения вместо частоты ω входит резонансная частота ω_p объемного резонатора.

В силу справедливости соотношений

$$\frac{e^{jhz} - e^{-jhz}}{2j} = \sin(hz), \quad \frac{e^{jhz} + e^{-jhz}}{2} = \cos(hz) \quad (21.14)$$

составляющие поля в резонаторе с учетом формулы (21.13) приобретают такой вид:

$$\dot{E}_{xp} = 2 \frac{p\pi}{lg_{mn}^2} C_1 \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \quad (21.15)$$

$$\dot{E}_{yp} = 2 \frac{p\pi}{lg_{mn}^2} C_1 \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \quad (21.16)$$

$$\dot{E}_{zp} = 2C_1 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \quad (21.17)$$

$$\dot{H}_{xp} = -j2 \frac{\omega_p \varepsilon_a}{g_{mn}^2} C_1 \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \quad (21.18)$$

$$\dot{H}_{yp} = j2 \frac{\omega_p \varepsilon_a}{g_{mn}^2} C_1 \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \quad (21.19)$$

$$\dot{H}_{zp} = 0. \quad (21.20)$$

При $p=0$ исчезают составляющие поля \dot{E}_{xp} и \dot{E}_{yp} , но остаются составляющие \dot{E}_{zp} , \dot{H}_{xp} , \dot{H}_{yp} . Таким образом, ряд целых чисел в выражении (21.13) может начинаться с нуля.

В отличие от волновода поле в объемном резонаторе представляет собой стоячие волны по всем трем координатным направлениям.

Поперечное волновое число g_{mn} находят с помощью формулы (13.23). В случае волн электрического типа индексы m и n не могут быть равны нулю.

Поле в резонаторе определяется тремя индексами: m , n и p . Волна электрического типа обозначается E_{mnp} .

§ 21.3. Вывод выражений для составляющих поля магнитного типа в резонаторе, созданном на базе прямоугольного волновода быстрых волн

За исходные примем выражения (13.52)—(13.57) для составляющих поля магнитного типа в прямоугольном волноводе, выведенные в § 13.3.

Изменяя на обратный знак перед постоянной h , вводя новый амплитудный коэффициент C_4 , получаем следующие формулы для составляющих поля отраженной волны:

$$\dot{H}_{x0} = -j \frac{h}{g_{mn}^2} C_4 \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{jhz}, \quad (21.21)$$

$$\dot{H}_{y0} = -j \frac{h}{g_{mn}^2} C_4 \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{jhz}, \quad (21.22)$$

$$\dot{H}_{z0} = C_4 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{jhz}, \quad (21.23)$$

$$\dot{E}_{x0} = j \frac{\omega\mu_a}{g_{mn}^2} C_4 \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{jhz}, \quad (21.24)$$

$$\dot{E}_{y0} = -j \frac{\omega\mu_a}{g_{mn}^2} C_4 \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{jhz}, \quad (21.25)$$

$$\dot{E}_{z0} = 0. \quad (21.26)$$

Применяя граничные условия (21.9), получаем

$$j \frac{\omega\mu_a}{g_{mn}^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) (C_2 e^{-jhz} + C_4 e^{jhz}) = 0$$

(при $z=0$ и $z=l$),

откуда

$$C_4 = -C_2 \quad (21.27)$$

и

$$j \frac{\omega\mu_a}{g_{mn}^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) C_2 (e^{-jhl} - e^{jhl}) = 0.$$

С учетом того что $\frac{e^{jhl} - e^{-jhl}}{2j} = \sin(hl)$,

граничное условие записывают в виде

$$-j2 \frac{\omega \mu_a}{g_{mn}^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) C_2 \sin(hl) = 0.$$

Отсюда

$$\sin(hl) = 0, \quad hl = p\pi, \quad (21.28)$$

где $h = \frac{p\pi}{l}$ ($p = 1, 2, 3 \dots$).

В отличие от выражения (21.13) для волн магнитного типа ряд чисел p нельзя начинать с нуля. Как будет показано далее, при $p = 0$ исчезают все составляющие поля.

Проводя действия, аналогичные § 21.2, учитывая соотношения (21.14), (21.27), (21.28), находим составляющие поля волн магнитного типа в резонаторе:

$$\dot{H}_{xp} = j2 \frac{f\pi}{lg_{mn}^2} C_2 \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \quad (21.29)$$

$$\dot{H}_{yp} = j2 \frac{p\pi}{lg_{mn}^2} C_2 \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \quad (21.30)$$

$$\dot{H}_{zp} = -j2C_2 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \quad (21.31)$$

$$\dot{E}_{xp} = 2 \frac{\omega \mu_a}{g_{mn}^2} C_2 \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \quad (21.32)$$

$$\dot{E}_{yp} = -2 \frac{\omega \mu_a}{g_{mn}^2} C_2 \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \quad (21.33)$$

$$\dot{E}_{zp} = 0. \quad (21.34)$$

Видно, что при $p = 0$, все составляющие поля обращаются в нуль, поэтому ряд чисел p в формуле (21.28) должен начинаться с единицы. Поперечное волновое число g_{mn} определяется формулой (13.23). Индексы m и n могут быть равны нулю только поочередно. Одновременное равенство их нулю невозможно, так как при этом все составляющие поля обращаются в нуль.

Волны магнитного типа, так же как и волны электрического типа, определяют тремя индексами: m , n и p и обозначают H_{mnp} .

§ 21.4. Определение резонансной частоты и основных типов волн в случае волн электрического и магнитного типов в резонаторе, созданном на базе прямоугольного волновода быстрых волн

Продольное h и поперечное g_{mn} волновые числа в волноводах связаны между собой соотношением (13.35). Это соотношение справедливо и для объемных резонаторов с той лишь разницей, что при исследовании процессов в волноводах под частотой ω понимают частоту колебаний, подводимых к волноводу от генератора, а в объем-

ных резонаторах частоту ω заменяют резонансной частотой ω_p собственных колебаний в резонаторе. С учетом этого выражение (13.35) необходимо переписать в форме

$$h = \sqrt{\omega_p^2 \mu_a \varepsilon_a - g_{mn}^2}, \quad (21.35)$$

откуда резонансная частота

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}} \sqrt{h^2 + g_{mn}^2}. \quad (21.36)$$

С учетом формул (21.13), (21.28), (13.23) для резонансной частоты получаем

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}. \quad (21.37)$$

Это соотношение пригодно для волн электрического и магнитного типов. Важно только помнить, что для волн электрического типа ряд чисел m и n должен начинаться с единицы (нулевые значения запрещены), а ряд чисел p может быть начат с нуля. В случае волн магнитного типа числа m и n поочередно могут быть равны нулю, но ряд чисел p должен начинаться с единицы.

В силу справедливости соотношения (12.29) резонансная частота

$$\omega_p = c \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}. \quad (21.38)$$

Используя соотношение (21.38), нетрудно получить выражения для резонансной частоты f_p и резонансной длины волны λ_p :

$$f_p = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}, \quad (21.39)$$

$$\lambda_p = \frac{c}{f_p} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}}. \quad (21.40)$$

Нельзя забывать, что резонансная длина волны λ_p (21.40) соответствует среде с параметрами μ_a , ε_a , заполняющей резонатор.

Как следует из выведенных соотношений, в резонаторе могут существовать волны различных типов с разными резонансными частотами. Другими словами, резонатор в отличие от обычного параллельного колебательного контура представляет собой многоволновую систему.

Аналогично волноводам, при анализе процессов в резонаторах может быть поставлен вопрос о волнах основного типа, обладающего наибольшей резонансной длиной волны λ_p и наименьшей резонансной частотой ω_p .

Для волн электрического типа наименьшими допустимыми значениями индексов m , n , p являются

$$m = 1, n = 1, p = 0. \quad (21.41)$$

Этим индексам соответствует волна типа E_{110} с резонансной частотой

$$\omega_p(E_{110}) = \pi c \sqrt{1/a^2 + 1/b^2} \quad (21.42)$$

и резонансной длиной волны

$$\lambda_p(E_{110}) = \frac{2}{\sqrt{1/a^2 + 1/b^2}} \cdot \quad (21.43)$$

Для волн магнитного типа наименьшие допустимые значения индексов m , n , p определяются равенствами:

$$m = 1, n = 0, p = 1. \quad (21.44)$$

Этим индексам соответствует волна типа H_{101} с резонансной частотой

$$\omega_p(H_{101}) = \pi c \sqrt{1/a^2 + 1/l^2} \quad (21.45)$$

и резонансной длиной волны

$$\lambda_p(H_{101}) = \frac{2}{\sqrt{1/a^2 + 1/l^2}} \cdot \quad (21.46)$$

В случае волны типа E_{110} , резонансная частота $\omega_p(E_{110})$ не зависит от длины резонатора l , а в случае волны типа H_{101} — от высоты b резонатора.

§ 21.5. Условия существования в резонаторе волн заданного типа

Как указывалось, резонатор представляет собой отрезок волновода длиной l , замкнутый с двух сторон металлическими плоскостями. Следовательно, условия существования волн заданного типа определяются прежде всего возможностью распространения волны типов E_{mn} и H_{mn} в заданном волноводе. Эти вопросы были рассмотрены в § 13.5. Общее условие распространения волн типа E_{mn} или H_{mn} определяется формулой (13.76). В резонаторах $\lambda = \lambda_p$, и условие (13.76) записывается в виде

$$\lambda_p < \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}} \cdot \quad (21.47)$$

Допустим, размеры a и b выбраны так, что это условие удовлетворяется, волны с индексами m и n распространяются, а волны с индексами $m+1$, n или m , $n+1$ затухают, и для них неравенство (21.47) не выполняется.

Необходимо найти условие, определяющее длину резонатора l , при котором возможно существование волн типа E_{mnp} или H_{mnp} .

В случае волн типа E_{mn0} такого условия не существует, так как резонансная длина волны не зависит от длины резонатора l . При этом в соответствии с формулой (21.40)

$$\lambda_p = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}} \cdot \quad (21.48)$$

Сравнивая это выражение с (21.47), можно сделать вывод, что при $p=0$ в резонаторе создаются волны электрического типа, соответствующие критическому случаю — границе условий распространения волн типа E_{mn} в волноводе.

При $p \neq 0$ резонансная длина волн уменьшается по сравнению с критическим случаем [формула (21.48)] и соблюдается условие распространения (21.47) волн с индексами m, n в волноводе. Тогда при заданных размерах a и b , типе волны и резонансной длине волн λ_p длину резонатора l определяют однозначно из выражения (21.40):

$$l = \frac{p}{\sqrt{(2/\lambda_p)^2 - (m/a)^2 - (n/b)^2}}. \quad (21.49)$$

§ 21.6. Картины поля в прямоугольном резонаторе

Сравнивая соотношения (13.29) — (13.34) для составляющих поля в прямоугольном волноводе в случае волн электрического типа с выражениями (21.15) — (21.20) для составляющих поля в прямоугольном объемном резонаторе в случае волн электрического типа, можно заметить, что законы изменения поля вдоль осей x, y в волноводе и резонаторе одинаковы. Разница заключается в характере изменения поля вдоль оси z . В волноводе поле представляет собой бегущую волну, в объемном резонаторе — стоячую волну. Аналогичная картина наблюдается при сопоставлении выражений (13.52) — (13.57) и (21.29) — (21.34), справедливых для полей магнитного типа соответственно в волноводе и резонаторе.

Таким образом, в плоскости поперечного сечения, в координатах x, y картины поля в волноводе и объемном резонаторе будут иметь

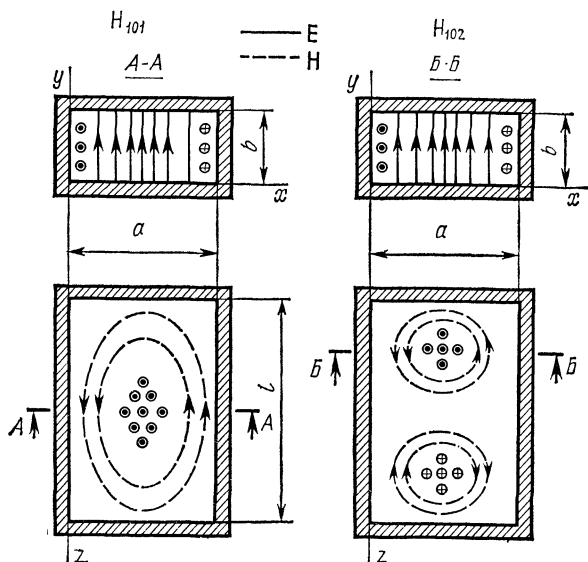


Рис. 21.4

сходный характер. При рассмотрении картин поля вдоль оси z должны быть соблюдены граничные условия у поверхности идеального металла, согласно которым у поперечных стенок резонатора, расположенных в плоскостях $z=0$ и $z=l$, должны существовать тангенциальные к стенкам составляющие магнитного поля и не может быть тангенциальных составляющих электрического поля. Это приводит к сдвигу картин электрического и магнитного полей в объемном резонаторе на четверть длины волны вдоль оси z по сравнению с мгновенными картинами поля в волноводе. Выражения (13.94), (13.95), (13.96), полученные в § 13.7 для волны типа H_{10} в прямоугольном волноводе, соответствуют мгновенной картине поля в момент времени $t=0$.

В объемном резонаторе составляющие поля определяются формулами (21.29) — (21.34). При индексах $m=1$, $n=0$ и $p=1$ они записываются в форме

$$\dot{H}_{xp} = j2 \frac{\pi}{g_{mn}^2 l} C_2 \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi}{l} z\right), \quad (21.50)$$

$$\dot{H}_{zp} = -j2 C_2 \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{l} z\right), \quad (21.51)$$

$$\dot{E}_{yp} = -\frac{2\omega_p \mu_a}{g_{mn}^2} C_2 \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{l} z\right). \quad (21.52)$$

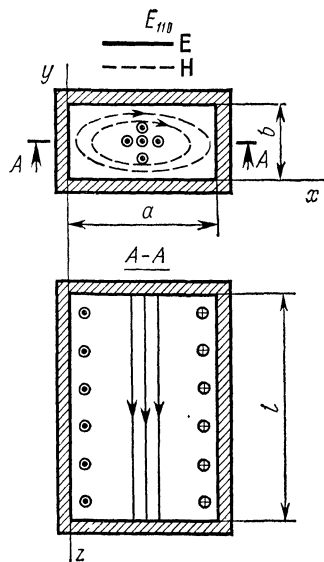


Рис. 21.5

Сравнивая выражения (13.94) — (13.96) и (21.50) — (21.52), можно заметить смещение магнитного и электрического полей на четверть длины волны вдоль оси z в резонаторе по сравнению с волноводом. С учетом сказанного можно легко построить картины поля в объемном резонаторе, взяв за основу картины поля в волноводе с индексами m и n , соответствующими индексам поля в резонаторе. В качестве примера на рис. 21.4 показана картина поля волн типов H_{101} и H_{102} , а на рис. 21.5 — картина поля волны типа E_{110} , при которой резонансная частота не зависит от длины резонатора l . В соответствии с выражениями (21.15) — (21.20) при этом $\dot{E}_{xp} = \dot{E}_{yp} = 0$ и существует только одна составляющая электрического поля \dot{E}_{zp} . Картина поля этой волны в плоскости x, y отличается от картины поля соответствующей волны типа E_{11} в прямоугольном волноводе (см. рис. 13.3).

**ОБЪЕМНЫЙ РЕЗОНАТОР, СОЗДАННЫЙ НА БАЗЕ
КРУГЛОГО ВОЛНОВОДА БЫСТРЫХ ВОЛН**

**§ 22.1. Вывод выражений для составляющих поля
электрического типа в резонаторе, созданном на базе
круглого волновода быстрых волн**

Используем в качестве объемного резонатора отрезок круглого волновода длиной l , радиусом r_0 , внутренние размеры которого показаны на рис. 22.1.

В качестве исходных возьмем соотношения (14.33) — (14.38) для составляющих электрического поля в круглом волноводе, выведенные в § 14.2.

Дальнейшие рассуждения не отличаются от тех, которые были приведены при исследовании поля в прямоугольном резонаторе.

Записывают выражения для обратной волны в резонаторе, отраженной от стенки резонатора, расположенной в плоскости $z = l$. Для этого в приведенных выражениях изменяют знаки перед постоянной h и вводят амплитудный коэффициент отраженной волны C_3 . В результате этих операций получаются следующие выражения, характеризующие поле отраженной волны:

$$\dot{E}_{r_0} = j \frac{hr_0}{\eta_{mn}} C_3 J'_m \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r \right) \cos(m\varphi) e^{jhz}, \quad (22.1)$$

$$\dot{E}_{\varphi_0} = -j \frac{hr_0^2}{r\eta_{mn}} C_3 m J_m \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r \right) \sin(m\varphi) e^{jhz}, \quad (22.2)$$

$$\dot{E}_{z_0} = C_3 J_m \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r \right) \cos(m\varphi) e^{jhz}, \quad (22.3)$$

$$\dot{H}_{r_0} = -j \frac{\omega \varepsilon_a r_0^2}{r\eta_{mn}} C_3 m J_m \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r \right) \sin(m\varphi) e^{jhz}, \quad (22.4)$$

$$\dot{H}_{\varphi_0} = -j \frac{\omega \varepsilon_a r_0}{\eta_{mn}} C_3 J'_m \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r \right) \cos(m\varphi) e^{jhz}, \quad (22.5)$$

$$\dot{H}_{z_0} = 0. \quad (22.6)$$

Суммарное поле в резонаторе представляет собой суперпозицию падающей и отраженной волн. При этом должны быть соблюдены граничные условия:

$$\dot{E}_{rp} = \dot{E}_r + \dot{E}_{r_0} = 0 \quad (\text{при } z = 0 \text{ и } z = l),$$

$$\dot{E}_{\varphi p} = \dot{E}_{\varphi} + \dot{E}_{\varphi_0} = 0 \quad (\text{при } z = 0 \text{ и } z = l).$$

Подставляя выражение для \dot{E}_r и \dot{E}_{r_0} и используя граничные условия при $z = 0$, получаем

$$j \frac{hr_0}{\eta_{mn}} J'_m \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r \right) \cos(m\varphi) (C_3 - C_1) = 0,$$

откуда

$$C_3 = C_1. \quad (22.7)$$

Применение граничных условий при $z=l$ и соблюдении равенства (22.7) приводит к соотношению

$$j \frac{hr_0}{\eta_{mn}} J'_{mn} \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r \right) \cos(m\varphi) C_1 \times \\ \times (e^{jhl} - e^{-jhl}) = 0.$$

Учитывая формулу (21.14), можно записать граничные условия в виде

$$-2 \frac{hr_0}{\eta_{mn}} J'_{mn} \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r \right) \cos(m\varphi) C_1 \sin(hl) = 0.$$

Отсюда

$$\sin(hl) = 0 \text{ и } hl = p\pi,$$

где p — ряд целых чисел, который, как будет показано в дальнейшем, может быть начат с нуля.

Таким образом,

$$h = p\pi/l, \quad p = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (22.8)$$

Используя выражения (14.33)—(14.38) и (22.1)—(22.6), а также соотношения (22.7), (22.8), (21.14) можно написать следующие формулы для суммарного поля в резонаторе:

$$\dot{E}_{rp} = -2 \frac{p\pi r_0}{l\eta_{mn}} C_1 J'_m \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r \right) \cos(m\varphi) \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \quad (22.9)$$

$$\dot{E}_{\varphi p} = 2 \frac{p\pi r_0^2}{rl\eta_{mn}^2} C_1 m J_m \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r \right) \sin(m\varphi) \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \quad (22.10)$$

$$\dot{E}_{zp} = 2C_1 J_m \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r \right) \cos(m\varphi) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \quad (22.11)$$

$$\dot{H}_{rp} = -2j \frac{\omega \epsilon_a r_0^2}{r\eta_{mn}^2} C_1 m J_m \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r \right) \sin(m\varphi) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \quad (22.12)$$

$$\dot{H}_{\varphi p} = -2j \frac{\omega p \epsilon_a r_0}{\eta_{mn}} C_1 J'_m \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r \right) \cos(m\varphi) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \quad (22.13)$$

$$\dot{H}_{zp} = 0. \quad (22.14)$$

Так же как и в прямоугольном резонаторе, волну электрического типа в круглом резонаторе обозначают E_{mnp} , где m — число вариаций поля вдоль координаты φ , а также порядок функции Бесселя, n — номер корня функции Бесселя и p — число вариаций поля вдоль оси z резонатора. При $p=0$ исчезают составляющие \dot{E}_{rp} и $\dot{E}_{\varphi p}$, но сохраняются составляющие \dot{E}_{zp} , \dot{H}_{rp} и $\dot{H}_{\varphi p}$, не зависящие от координаты z .

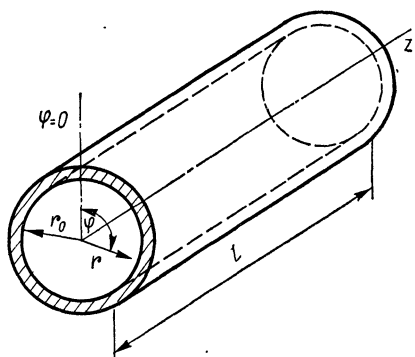


Рис. 22.1

§ 22.2. Вывод выражений для составляющих поля магнитного типа в резонаторе, созданном на базе круглого волновода быстрых волн

Используя выражения (14.51)—(14.56), определяющие поле магнитного типа в волноводе, можно записать соотношения для составляющих поля обратной волны:

$$\dot{H}_{r_0} = j \frac{hr_0}{\mu_{mn}} C_4 J'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \cos(m\varphi) e^{jhz}, \quad (22.15)$$

$$\dot{H}_{\varphi_0} = -j \frac{hr_0^2}{r\mu_{mn}^2} C_4 m J_m \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \sin(m\varphi) e^{jhz}, \quad (22.16)$$

$$\dot{H}_{z_0} = C_4 J_m \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \cos(m\varphi) e^{jhz}, \quad (22.17)$$

$$\dot{E}_{r_0} = j \frac{\omega\mu_a r_0^2}{r\mu_{mn}^2} C_4 m J_m \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \sin(m\varphi) e^{jhz}, \quad (22.18)$$

$$\dot{E}_{\varphi_0} = j \frac{\omega\mu_a r_0}{\mu_{mn}} C_4 J'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \cos(m\varphi) e^{jhz}, \quad (22.19)$$

$$\dot{E}_{z_0} = 0. \quad (22.20)$$

Суперпозируя поля прямой и обратной волн, применяя граничные условия при $z=0$ и $z=l$ и соотношения (21.14) так, как это делалось в § 22.1, получаем окончательно

$$C_4 = -C_2, \quad (22.21)$$

$$h = \frac{p\pi}{l}, \quad p = 1, 2, 3 \dots \quad (22.22)$$

$$\dot{H}_{rp} = -2j \frac{p\pi r_0}{l\mu_{mn}} C_2 J'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \cos(m\varphi) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \quad (22.23)$$

$$\dot{H}_{\varphi p} = 2j \frac{p\pi r_0^2}{lr\mu_{mn}^2} C_2 m J_m \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \sin(m\varphi) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \quad (22.24)$$

$$\dot{H}_{zp} = -2j C_2 J_m \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \cos(m\varphi) \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \quad (22.25)$$

$$\dot{E}_{rp} = 2 \frac{\omega_p \mu_a r_0^2}{r\mu_{mn}^2} C_2 m J_m \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \sin(m\varphi) \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \quad (22.26)$$

$$\dot{E}_{\varphi p} = 2 \frac{\omega_p \mu_a r_0}{\mu_{mn}} C_2 J'_m \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \cos(m\varphi) \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \quad (22.27)$$

$$\dot{E}_{zp} = 0. \quad (22.28)$$

Волны магнитного типа обозначают H_{mnp} , где m и p —числа вариаций по координатам φ и z , а n —номер корня производной функций Бесселя. Ряд для индекса p должен начинаться с единицы, так как при $p=0$ все составляющие поля исчезают.

§ 22.3. Определение резонансной частоты и основных типов волн в случае волн электрического и магнитного типов в резонаторе, созданном на базе круглого волновода быстрых волн

При исследовании процессов в круглом волноводе были выведены соотношения (14.40), (14.57) для продольных волновых чисел в случае волн электрического и магнитного типов. Они справедливы и для круглого объемного резонатора с той разницей, что вместо частоты колебаний ω следует брать резонансную частоту колебаний в резонаторе ω_p . Кроме того, необходимо учесть выражение (22.8) в случае волн электрического типа и (22.22) в случае волн магнитного типа.

С учетом сказанного выражения (14.40) и (14.57) записывают в виде

$$\frac{p\pi}{l} = \sqrt{\omega_p^2 \mu_a \varepsilon_a - \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0}\right)^2},$$

$$\frac{p\pi}{l} = \sqrt{\omega_p^2 \mu_a \varepsilon_a - \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0}\right)^2}.$$

Из первого выражения можно получить формулу для резонансной частоты круглого резонатора в случае волн электрического типа:

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}} \sqrt{\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0}\right)^2} = c \sqrt{\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0}\right)^2} \quad (p=0, 1, 2, 3, \dots). \quad (22.29)$$

Соответственно нетрудно найти формулы для резонансной частоты f_p и длины волны λ_p :

$$f_p = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0}\right)^2}, \quad (22.30)$$

$$\lambda_p = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0}\right)^2}}. \quad (22.31)$$

В случае волн магнитного типа справедливы соотношения

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}} \sqrt{\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0}\right)^2} = c \sqrt{\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0}\right)^2} \quad (p=1, 2, 3, \dots), \quad (22.32)$$

$$f_p = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0}\right)^2}, \quad (22.33)$$

$$\lambda_p = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0}\right)^2}}. \quad (22.34)$$

Так же как и прямоугольный резонатор, круглый резонатор представляет собой многоволновую систему, для которой основными являются колебания, обладающие наибольшей резонансной длиной

волны. При заданных размерах резонатора l и r_0 , как следует из соотношений (22.31) и (22.34), основные волны возникают при наименьших значениях индекса p и коэффициентов η_{mn} и μ_{mn} . В соответствии с табл. 14.1 и 14.2 наименьшими значениями η_{mn} и μ_{mn} являются

$$\eta_{01} = 2,405 \quad \text{и} \quad \mu_{11} = 1,84.$$

В случае волн электрического типа допустимо значение $p=0$. Волнам магнитного типа соответствует наименьшее значение $p=1$. Следовательно, для волн электрического типа основной является волна типа E_{010} с резонансной частотой

$$\omega_p(E_{010}) = c \frac{2,405}{r_0}, \quad (22.35)$$

а для волн магнитного типа — волна H_{111} , резонансная частота которой

$$\omega_p(H_{111}) = c \sqrt{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{1,84}{r_0}\right)^2}. \quad (22.36)$$

В случае волн электрического типа с нулевым последним индексом резонансная частота зависит только от диэлектрика, заполняющего резонатор, и его радиуса.

§ 22.4. Условия существования в резонаторе волн заданного типа

Условия существования волн заданного типа определяются прежде всего возможностью их распространения в волноводе, на базе которого построен резонатор. Эти вопросы были рассмотрены в § 14.4.

Для волн электрического типа условием распространения является неравенство $\lambda < \lambda_{кр}$, где $\lambda_{кр}$ находят с помощью соотношения (14.58). В случае волн магнитного типа справедливо соотношение (14.59) для $\lambda_{кр}$. В резонаторе длина волны колебания равна резонансной длине волны, определяемой соотношениями (22.31) и (22.34). Соответственно условия распространения записываются в форме

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0}\right)^2}} < \frac{2\pi r_0}{\eta_{mn}}, \quad (22.37)$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0}\right)^2}} < \frac{2\pi r_0}{\mu_{mn}}. \quad (22.38)$$

При $p \neq 0$ эти неравенства всегда соблюдаются. В случае волн электрического типа при $p=0$ неравенство (22.37) переходит в равенство. В резонаторе при этом существуют колебания, соответствующие критическому случаю — границе условий распространения волн типа E_{mn} в круглом волноводе.

§ 22.5. Картины поля в круглом резонаторе

Сравнивая выражения (14.33) — (14.38) для составляющих поля электрического типа в круглом волноводе с выражениями (22.9) — (22.14) для составляющих поля в резонаторе и проводя аналогичное сравнение формул (14.51) — (14.56) и (22.23) — (22.28) для волн магнитного типа, можно установить, что характер изменения поля вдоль координат r и φ в резонаторе такой же, как и в волноводе. Аналогично прямоугольным резонаторам необходимость соблюдения граничных условий приводит к тому, что электрическое и магнитное поля в объемном резонаторе смещаются относительно друг друга на четверть длины волны по сравнению с положением полей в волноводе. Поэтому картину поля в объемном резонаторе нетрудно построить по известной картине поля в волноводе с индексами m и n , соответствующими волнам в резонаторе.

На рис. 22.2 и 22.3 в качестве примера показаны картины поля волн основных типов E_{010} и H_{111} .

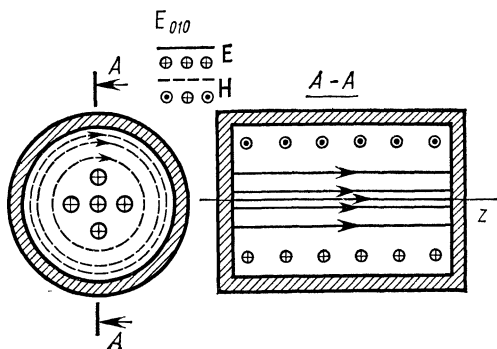


Рис. 22.2

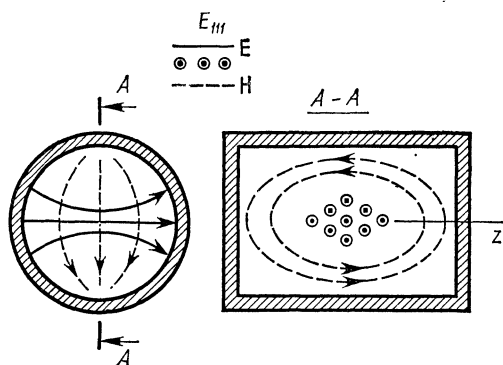


Рис. 22.3

ГЛАВА 23

ОБЪЕМНЫЙ РЕЗОНАТОР, СОЗДАННЫЙ НА БАЗЕ КРУГЛОГО КОАКСИАЛЬНОГО ВОЛНОВОДА

§ 23.1. Постановка вопроса

Обычно при работе с коаксиальными волноводами используют волны типа Т, при которых критическая частота уменьшается до нулевого значения. Объемные резонаторы, построенные на базе таких волноводов, также используют волны типа Т. Эти резонаторы, широко применяемые в диапазоне дециметровых волн и короткой части метрового диапазона, будут рассмотрены в настоящей главе.

§ 23.2. Вывод выражений для составляющих поля в коаксиальном объемном резонаторе, работающем на волнах типа Т

Рассмотрим коаксиальный резонатор (рис. 23.1), который представляет собой отрезок коаксиального волновода, закороченного поперечной металлической пластиной в плоскости $z=0$ и разомкнутого на расстоянии l от закорачивающей плоскости.

Допустим, что со стороны открытого конца волновода в нем возбуждается электромагнитное поле, перемещающееся со скоростью света в направлении закорачивающей плоскости, т. е. в сторону отрицательных значений оси z . Дойдя до закорачивающей плоскости, это поле отражается и перемещается в сторону положительных значений оси z . Суммарное поле в резонаторе представляет собой суперпозицию падающей и отраженной волн.

В § 15.2 были выведены соотношения (15.4), (15.9) для составляющих поля падающей волны в коаксиальном волноводе, распространяющейся в направлении положительных значений оси z .

В рассматриваемом случае падающая волна распространяется в сторону отрицательных значений оси z , поэтому в выражениях (15.4) и (15.9) знак в показателе степени следует изменить на обратный. Составляющие поля падающей волны в резонаторе при этом записываются в виде

$$\dot{H}_{\varphi n} = \frac{I_0}{2\pi r} e^{j\beta z}, \quad (23.1)$$

$$\dot{E}_{rn} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \cdot \frac{I_0}{2\pi r} e^{j\beta z}. \quad (23.2)$$

Отраженная волна распространяется в сторону положительных значений оси z , вследствие чего знак перед показателем степени должен быть сохранен таким, как в выражениях (15.4), (15.9). Кроме того, в плоскости $z=0$ должны быть соблюдены граничные условия у поверхности идеального металла — равенство нулю тангенциальных составляющих суммарного электрического поля. Составляющая \dot{E}_{rn} падающей волны и аналогичная составляющая \dot{E}_{ro} отраженной волны в сумме должны дать нуль в плоскости $z=0$, что возможно, если составляющая отраженного поля будет записана в форме

$$\dot{E}_{ro} = -\sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \cdot \frac{I_0}{2\pi r} e^{-j\beta z}. \quad (23.3)$$

При этом суммарное электрическое поле в резонаторе определяется соотношением

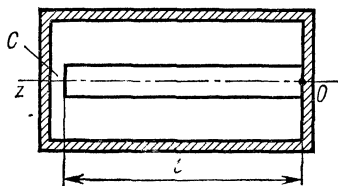


Рис. 23.1

$$\begin{aligned} \dot{E}_{rp} = \dot{E}_{rn} + \dot{E}_{ro} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \cdot \frac{I_0}{2\pi r} \times \\ \times (e^{j\beta z} - e^{-j\beta z}). \end{aligned} \quad (23.4)$$

В силу справедливости равенства

$$\frac{e^{j\beta z} - e^{-j\beta z}}{2j} = \sin(\beta z) \quad (23.5)$$

формулу (23.4) можно представить в ином виде:

$$\dot{E}_{rp} = 2j \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \cdot \frac{I_0}{2\pi r} \sin(\beta z). \quad (23.6)$$

При $z=0$ $\dot{E}_{rp} = 0$ и граничные условия удовлетворяются.

Далее найдем выражение для суммарного магнитного поля в резонаторе

$$\dot{H}_{\varphi p} = \dot{H}_{\varphi n} + \dot{H}_{\varphi o}.$$

В соответствии с граничными условиями это поле должно существовать в плоскости $z=0$, что возможно, если составляющая отраженного поля будет записана в форме

$$\dot{H}_{\varphi o} = \frac{I_0}{2\pi r} e^{-j\beta z}. \quad (23.7)$$

Тогда

$$\dot{H}_{\varphi p} = \frac{I_0}{2\pi r} (e^{j\beta z} + e^{-j\beta z}). \quad (23.8)$$

В силу справедливости равенства

$$\frac{e^{j\beta z} + e^{-j\beta z}}{2} = \cos(\beta z) \quad (23.9)$$

выражение для суммарного магнитного поля запишется таким образом:

$$\dot{H}_{\varphi p} = 2 \frac{I_0}{2\pi r} \cos(\beta z). \quad (23.10)$$

Это выражение удовлетворяет граничным условиям в плоскости $z=0$.

Найдем разность потенциалов между внутренним стержнем и внешней оболочкой в заданном сечении z коаксиального резонатора:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \int_{r_1}^{r_2} \dot{E}_{rp} dr = \int_{r_1}^{r_2} 2j \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \frac{I_0}{2\pi r} \sin(\beta z) dr = 2j \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \cdot \frac{I_0}{2\pi} \sin(\beta z) \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \\ &= 2j \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \cdot \frac{I_0}{2\pi} \sin(\beta z) \ln \frac{r_2}{r_1}. \end{aligned} \quad (23.11)$$

Далее определим ток в заданном сечении резонатора. Для этого используем закон полного тока вида (1.72) и выражение (23.10) для суммарного магнитного поля в резонаторе:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \oint_{l_1} \dot{H}_{\varphi p} dl = \int_0^{2\pi} 2 \frac{I_0}{2\pi r} \cos(\beta z) r d\varphi = \\ &= \frac{I_0}{\pi r} \cos(\beta z) r 2\pi = 2I_0 \cos(\beta z). \end{aligned} \quad (23.12)$$

Разделив \dot{U} на \dot{I} , получаем характеристическое сопротивление коаксиального резонатора:

$$Z_{cp} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = j \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \cdot \frac{i_0 \sin(\beta z) \ln \frac{r_2}{r_1}}{\pi 2 i_0 \cos(\beta z)},$$

или

$$Z_{cp} = j \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \ln \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{1}{2\pi} \operatorname{tg}(\beta z). \quad (23.13)$$

При $\operatorname{tg}(\beta z) > 0$ характеристическое сопротивление Z_{cp} имеет индуктивный характер, при $\operatorname{tg}(\beta z) < 0$ — емкостный характер. Выбирая z таким образом, чтобы характеристическое сопротивление было индуктивным, можно определить величину эквивалентной индуктивности $L_{\text{экр}}$, обладающей на резонансной частоте таким же сопротивлением:

$$j\omega_p L_{\text{экр}} = j \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \ln \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{1}{2\pi} \operatorname{tg}(\beta z),$$

или

$$\omega_p L_{\text{экр}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \ln \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{1}{2\pi} \operatorname{tg}(\beta z). \quad (23.14)$$

Если к разомкнутому концу резонатора подсоединить конденсатор с сосредоточенной емкостью C так, как показано на рис. 23.2, то система будет представлять собой параллельный колебательный контур. Частоту собственных колебаний такого контура определяют с помощью известного соотношения $\omega_p L_{\text{экр}} = 1/(\omega_p C)$. Подставляя значение $\omega_p L_{\text{экр}}$ из формулы (23.14), получаем

$$\frac{1}{\omega_p C} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \ln \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{1}{2\pi} \operatorname{tg}(\beta z),$$

откуда резонансная частота

$$\omega_p = \frac{1}{C \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \ln \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{1}{2\pi} \operatorname{tg}(\beta z)}. \quad (23.15)$$

Если необходимо определить емкость C , которая требуется для получения заданной резонансной частоты ω_p , то формулу (23.15) следует переписать в виде

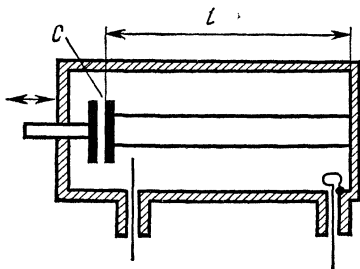


Рис. 23.2

$$C = \frac{1}{\omega_p \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \ln \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{1}{2\pi} \operatorname{tg}(\beta z)}. \quad (23.16)$$

Преимуществами описанного резонатора являются простота и замкнутость. Электромагнитное поле существует внутри замкнутого объема. Связь ре-

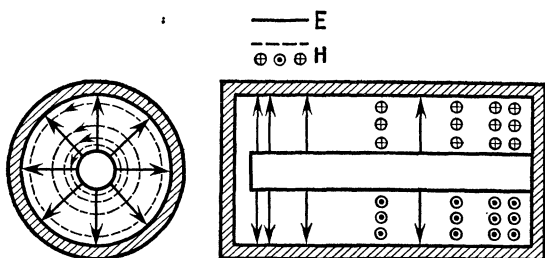


Рис. 23.3

зонатора с внешними устройствами осуществляется посредством штырей или петель (см. рис. 23.2). На рис. 23.3 показана картина электрического и магнитного полей в коаксиальном резонаторе.

ГЛАВА 24

ОБЪЕМНЫЙ РЕЗОНАТОР, СОЗДАННЫЙ НА БАЗЕ Н-ОБРАЗНОГО МЕТАЛЛОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА МЕДЛЕННЫХ ВОЛН

§ 24.1. Постановка вопроса

В § 16.4 был описан Н-образный металлодиэлектрический волновод медленных волн, представляющий собой реальный волновод медленных волн, созданный на базе диэлектрической пластины. В настоящей главе будет показано использование подобного волновода в качестве объемного резонатора, работающего на медленных волнах. Схематический вид резонатора показан на рис. 24.1.

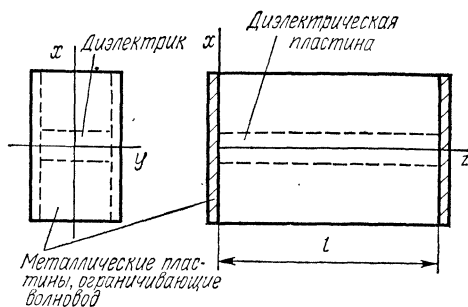


Рис. 24.1

§ 24.2. Вывод соотношений для составляющих поля магнитного типа в Н-образном металлодиэлектрическом волноводе медленных волн

Рассматриваемый волновод работает на волнах магнитного типа с составляющими поля \dot{H}_x , \dot{E}_y , \dot{H}_z . Оси координат расположены так, как показано на рис. 16.4. В § 16.2 были получены формулы (16.5)—(16.7) для составляющих поля внутри пластины и (16.17)—(16.19)—для составляющих поля вне пластины (в воздухе) в случае волн электрического типа.

Составляющие поля волн магнитного типа нетрудно определить

с помощью принципа перестановочной двойственности путем проведения в перечисленных формулах перестановок вида

$$\dot{\mathbf{E}} \leftrightarrow \dot{\mathbf{H}}, \quad \varepsilon_a \rightarrow -\mu_a, \quad \varepsilon_0 \rightarrow -\mu_0.$$

При этом возникают следующие соотношения для составляющих поля волн магнитного типа в Н-образном металлодиэлектрическом волноводе:

а) поле внутри пластины:

$$\dot{H}_x = -j \frac{h}{g^2} \{-gA_1 \sin(gx) + gA_2 \cos(gx)\} e^{-jhz}, \quad (24.1)$$

$$\dot{E}_y = j \frac{\omega\mu_a}{g^2} \{-gA_1 \sin(gx) + gA_2 \cos(gx)\} e^{-jhz}, \quad (24.2)$$

$$\dot{H}_z = \{A_1 \cos(gx) + A_2 \sin(gx)\} e^{-jhz}, \quad (24.3)$$

б) поле вне пластины:

$$\dot{H}_{xв} = -j \frac{h}{p} B_1 e^{-px} e^{-jhz}, \quad (24.4)$$

$$\dot{E}_{yв} = j \frac{\omega\mu_0}{p} B_1 e^{-px} e^{-jhz}, \quad (24.5)$$

$$\dot{H}_{zв} = B_1 e^{-px} e^{-jhz}. \quad (24.6)$$

Так же как и для волн электрического типа, можно отдельно рассмотреть четные и нечетные волны. В первом случае считают $A_1 = 0$, во втором — $A_2 = 0$. Оба случая рассматривают аналогично.

В качестве примера рассмотрим четные волны, для которых составляющие поля внутри пластины записывают в виде соотношений:

$$\dot{H}_x = -j \frac{h}{g} A_2 \cos(gx) e^{-jhz}, \quad (24.7)$$

$$\dot{E}_y = j \frac{\omega\mu_a}{g} A_2 \cos(gx) e^{-jhz}, \quad (24.8)$$

$$\dot{H}_z = A_2 \sin(gx) e^{-jhz}. \quad (24.9)$$

§ 24.3. Определение составляющих поля в объемном резонаторе, созданном на базе Н-образного металлодиэлектрического волновода, в случае четных волн магнитного типа

Соотношения (24.4)—(24.6) и (24.7)—(24.9) соответствуют падающей волне, распространяющейся в волноводе в сторону положительных значений оси z . В резонаторе помимо падающей существует отраженная волна. Составляющие поля отраженной волны можно найти из указанных соотношений путем замены амплитудных коэффициентов: A_2 на A_3 и B_1 на B_2 . Кроме того, следует заменить на обратный знак перед постоянной распространения h . В результате получаются следующие формулы для составляющих поля обратной волны внутри и вне пластины:

а) поле внутри пластины:

$$\dot{H}_{x_0} = j \frac{h}{g} A_3 \cos(gx) e^{jhz}, \quad (24.10)$$

$$\dot{E}_{y_0} = j \frac{\omega \mu_0}{g} A_3 \cos(gx) e^{jhz}, \quad (24.11)$$

$$\dot{H}_{z_0} = A_3 \sin(gx) e^{jhz}; \quad (24.12)$$

б) поле вне пластины:

$$\dot{H}_{x_{B0}} = j \frac{h}{p} B_2 e^{-px} e^{jhz}, \quad (24.13)$$

$$\dot{E}_{y_{B0}} = j \frac{\omega \mu_0}{p} B_2 e^{-px} e^{jhz}, \quad (24.14)$$

$$\dot{H}_{z_{B0}} = B_2 e^{-px} e^{jhz}. \quad (24.15)$$

Поле в резонаторе \dot{E}_p и \dot{H}_p является суперпозицией полей прямой и обратной волн:

$$\begin{aligned} \dot{H}_{xp} &= \dot{H}_x + \dot{H}_{x_0}, & \dot{E}_{yp} &= \dot{E}_y + \dot{E}_{y_0}, \\ \dot{H}_{zp} &= \dot{H}_z + \dot{H}_{z_0}, & \dot{H}_{x_{Bp}} &= \dot{H}_{x_B} + \dot{H}_{x_{B0}}, & \dot{E}_{y_{Bp}} &= \dot{E}_{y_B} + \dot{E}_{y_{B0}}, & H_{z_{Bp}} &= \dot{H}_{z_B} + \dot{H}_{z_{B0}}, \end{aligned}$$

поэтому можно записать

$$\dot{H}_{xp} = j \frac{h}{g} \cos(gx) (A_3 e^{jhz} - A_2 e^{-jhz}), \quad (24.16)$$

$$\dot{E}_{yp} = j \frac{\omega \mu_0}{g} \cos(gx) (A_3 e^{jhz} + A_2 e^{-jhz}), \quad (24.17)$$

$$\dot{H}_{zp} = \sin(gx) (A_3 e^{jhz} + A_2 e^{-jhz}), \quad (24.18)$$

$$\dot{H}_{x_{Bp}} = j \frac{h}{p} e^{-px} (B_2 e^{jhz} - B_1 e^{-jhz}), \quad (24.19)$$

$$\dot{E}_{y_{Bp}} = j \frac{\omega \mu_0}{p} e^{-px} (B_2 e^{jhz} + B_1 e^{-jhz}), \quad (24.20)$$

$$\dot{H}_{z_{Bp}} = e^{-px} (B_2 e^{jhz} + B_1 e^{-jhz}). \quad (24.21)$$

Для определения соотношений между коэффициентами A_3 , A_2 и B_2 , B_1 , а также постоянной h к тангенциальным составляющим поля следует применить граничные условия при $z=0$ и $z=l$, где, как показано на рис. 24.1, располагаются ограничивающие волновод идеальные металлические пластины.

Граничные условия сводятся к соотношениям:

$$\dot{E}_\tau = \dot{E}_{yp} = 0 \quad (\text{при } z=0, z=l), \quad (24.22)$$

$$\dot{H}_\tau = \dot{H}_{xp} = v_3 \quad (\text{при } z=0, z=l), \quad (24.23)$$

$$\dot{E}_{\tau B} = \dot{E}_{y_{Bp}} = 0 \quad (\text{при } z=0, z=l), \quad (24.24)$$

$$\dot{H}_{\tau B} = \dot{H}_{x_{Bp}} = v_3 \quad (\text{при } z=0, z=l). \quad (24.25)$$

Используя соотношения (24.17) и (24.20) при $z=0$, получаем

$$A_3 + A_2 = 0, \quad B_2 + B_1 = 0,$$

откуда

$$A_3 = -A_2, \quad (24.26)$$

$$B_2 = -B_1. \quad (24.27)$$

Используя выражения (24.26), (24.27), а также (21.14), (21.15), формулы (24.16)—(24.21) можно написать в следующем виде:

$$\dot{H}_{xp} = -2j \frac{h}{g} A_2 \cos(gx) \cos(hz), \quad (24.28)$$

$$\dot{E}_{yp} = 2 \frac{\omega_p \mu_a}{g} A_2 \cos(gx) \sin(hz), \quad (24.29)$$

$$\dot{H}_{zp} = -2j A_2 \sin(gx) \sin(hz), \quad (24.30)$$

$$\dot{H}_{xвp} = -2j \frac{h}{p} e^{-px} B_1 \cos(hz), \quad (24.31)$$

$$\dot{E}_{yвp} = 2 \frac{\omega_p \mu_0}{p} e^{-px} B_1 \sin(hz), \quad (24.32)$$

$$\dot{H}_{zвp} = -2j B_1 e^{-px} \sin(hz). \quad (24.33)$$

Продольное волновое число h находят с помощью граничных условий при $z=l$:

$$\sin(hl) = 0, \quad hl = k\pi,$$

откуда

$$h = \frac{k\pi}{l} \quad (k = 1, 2, 3 \dots). \quad (24.34)$$

Ряд целых чисел k не может быть начат с нуля, так как при $k=0$ все составляющие поля в резонаторе исчезают.

§ 24.4. Определение поперечных волновых чисел g , p и резонансной частоты Н-образного металлодиэлектрического резонатора

Для определения поперечных волновых чисел g и p , а также резонансной частоты ω_p можно взять методику, примененную при исследовании процессов в диэлектрической пластине, используемой в качестве волновода медленных волн (см. § 16.3 и 16.4). В соответствии с этой методикой используются граничные условия:

$$\dot{E}_{yp} = \dot{E}_{yвp}, \quad \dot{H}_{zp} = \dot{H}_{zвp} \quad (\text{при } x=d) \quad (24.35)$$

($2d$ —толщина пластины в направлении оси x).

На основании этих граничных условий получаем следующие соотношения:

$$\frac{\mu_a}{g} A_2 \cos(gd) = \frac{\mu_0}{p} e^{-pd} B_1, \quad (24.36)$$

$$A_2 \sin(gd) = B_1 e^{-pd}. \quad (24.37)$$

Деление выражения (24.37) на (24.36) дает трансцендентное уравнение

$$\frac{g}{\mu_a} \operatorname{tg}(gd) = \frac{p}{\mu_0},$$

которое может быть записано в форме

$$\frac{\mu_0}{\mu_a} gd \operatorname{tg}(gd) = pd. \quad (24.38)$$

Для определения второго уравнения, связывающего волновые числа g и p , используют формулы (12.26), (16.28) для продольного волнового числа h . В объемном резонаторе частота ω является резонансной частотой ω_p и формулы для h записываются в виде

$$h = \sqrt{\omega_p^2 \mu_a \varepsilon_a - g^2}, \quad (24.39)$$

$$h = \sqrt{\omega_p^2 \mu_0 \varepsilon_0 + p^2}. \quad (24.40)$$

Подставляя в эти выражения значение h (24.34) и возводя в квадрат, получаем

$$\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 = \omega_p^2 \mu_a \varepsilon_a - g^2,$$

$$\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 = \omega_p^2 \mu_0 \varepsilon_0 + p^2,$$

откуда

$$\omega_p^2 = \frac{1}{\mu_a \varepsilon_a} \left\{ \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 + g^2 \right\}, \quad (24.41)$$

$$\omega_p^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \left\{ \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 - p^2 \right\}. \quad (24.42)$$

Приравняем правые части и осуществим простые преобразования:

$$\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{\mu_a \varepsilon_a}{\mu_0 \varepsilon_0} - 1\right) = g^2 + \frac{\mu_a \varepsilon_a}{\mu_0 \varepsilon_0} p^2. \quad (24.43)$$

Умножая все члены на d^2 и учитывая соотношения (1.20), (1.81), выражение (24.43) можно переписать в виде

$$\left(\frac{dk\pi}{l}\right)^2 (\mu_r \varepsilon_r - 1) = (gd)^2 + (\sqrt{\mu_r \varepsilon_r} pd)^2. \quad (24.44)$$

Умножим обе части выражения (24.38) на $\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$:

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\mu_r}} gd \operatorname{tg}(gd) = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} pd. \quad (24.45)$$

Уравнения (24.44) и (24.45) представляют собой систему для определения поперечных волновых чисел p и g . Решение этих уравнений может быть осуществлено с помощью ЭВМ или графически. Рассмотрим последний способ. В прямоугольной системе координат gd , $\sqrt{\mu_r \varepsilon_r} pd$ строят график, определяемый соотношением (24.45).

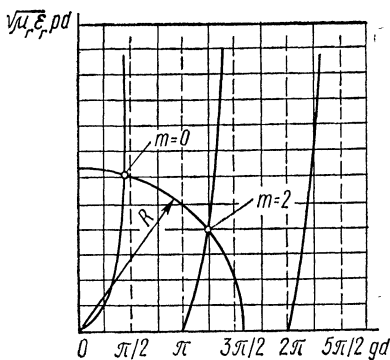


Рис. 24.2

Уравнение (24.44) представляет собой уравнение окружности в этих координатах. Если число k задано и параметры системы d, l, μ_r, ϵ_r известны, то радиус окружности

$$R = \frac{dk\pi}{l} \sqrt{\mu_r \epsilon_r - 1}. \quad (24.46)$$

Построение показано на рис. 24.2. Точки пересечения графиков дают значения gd и $\sqrt{\mu_r \epsilon_r} pd$. Так как значение $\sqrt{\mu_r \epsilon_r}$ и полутолщина пластины d известны, то, значит, поперечные волновые числа g, p определены и с помощью одного из соотно-

шений (24.41) или (24.42) можно отыскать резонансную частоту ω_p . Таким образом, можно найти все параметры Н-образного металлодиэлектрического объемного резонатора.

Тип волны в таком резонаторе обозначают H_{m0k} . Первому корню четной волны присваивают индекс $m=0$, второму — $m=2$. Так как поле не изменяется вдоль оси y , то второй индекс равен нулю, третий индекс соответствует числу ряда k в выражении (24.34). Нечетные волны в подобном резонаторе исследуют аналогично.

ГЛАВА 25

ДОБРОТНОСТЬ ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

§ 25.1. Постановка вопроса

При анализе процессов в объемных резонаторах в предыдущих главах было сделано допущение, что диэлектрик, заполняющий объем резонатора, идеален и металл, используемый в резонаторе, обладает бесконечной проводимостью. В тех случаях, когда объем резонатора заполнен воздухом, предположение об идеальности диэлектрика близко к истине. При создании объемных резонаторов на базе диэлектрических волноводов медленных волн с потерями в реальных диэлектриках необходимо считаться. Если в резонаторе не используются сверхпроводящие материалы и криогенная техника, то необходимо учитывать конечную проводимость металлических стенок резонатора.

Таким образом, в реальных условиях объемный резонатор обладает потерями. В колебательных системах потери оценивают добротностью. Это понятие может с успехом служить и для оценки потерь в реальных объемных резонаторах.

§ 25.2. Вывод общего выражения для добротности объемных резонаторов

По определению, добротностью Q называют умноженное на 2π отношение энергии W , запасенной в колебательной системе, к энергии $W_{\text{пт}}$, теряемой в этой системе в течение периода колебаний:

$$Q = 2\pi \frac{W}{W_{\text{пт}}}. \quad (25.1)$$

Энергию потерь можно выразить как произведение мощности потерь $P_{\text{п}\Sigma}$, под которой подразумевают суммарную мощность потерь в диэлектрике и металле объемного резонатора, на время, т. е. период колебания T_p , соответствующий резонансу:

$$W_{\text{пт}} = P_{\text{п}\Sigma} T_p. \quad (25.2)$$

Период колебаний T_p связан с частотой колебаний f_p известным соотношением $T_p = 1/f_p$, в силу чего $W_{\text{пт}} = P_{\text{п}\Sigma}/f_p$. При этом

$$Q = 2\pi f_p \frac{W}{P_{\text{п}\Sigma}}. \quad (25.3)$$

Выражение (25.3) является основным для подсчета добротности любой колебательной системы.

В § 4.1 было выведено следующее соотношение для полной энергии электромагнитного поля, заключенной в объеме V_1 :

$$W = \int_{V_1} \left(\frac{\mu_a H^2}{2} + \frac{\epsilon_a E^2}{2} \right) dV,$$

где H и E — мгновенные значения магнитного и электрического полей в объеме V_1 .

Таким образом, полная энергия поля представляет собой сумму мгновенных значений энергий магнитного и электрического полей. В колебательной системе происходит непрерывное преобразование электрической энергии в магнитную и обратно. Максимальному значению магнитного поля соответствует нулевое значение электрического поля и наоборот. Поэтому вместо суммы мгновенных значений магнитной и электрической энергий в последнем выражении можно взять максимальное значение либо магнитной, либо электрической энергии:

$$W = \int_{V_1} \frac{\mu_a H_m^2}{2} dV = \int_{V_1} \frac{\epsilon_a E_m^2}{2} dV, \quad (25.4)$$

где H_m и E_m — максимальные значения магнитного и электрического полей.

Мгновенные значения магнитного и электрического полей могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned} H &= H_m \cos(\omega t + \varphi_H), \\ E &= E_m \cos(\omega t + \varphi_E). \end{aligned}$$

Здесь φ_H и φ_E — начальные фазы магнитного и электрического полей.

В § 1.10 было введено понятие комплексных амплитуд функций, входящих в уравнения электродинамики. В соответствии с этим комплексные амплитуды полей \dot{H} и \dot{E} записываются в виде

$$\dot{H} = H_m e^{j\varphi_H}, \quad \dot{E} = E_m e^{j\varphi_E}.$$

Как следует из этих выражений, модули комплексных амплитуд векторов поля $|\dot{H}| = H_m$, $|\dot{E}| = E_m$ совпадают с максимальными значениями полей H_m и E_m .

Выразим энергию поля в выражении (25.4) через комплексные амплитуды \dot{H} или \dot{E} :

$$W = \int_{V_1} \frac{\mu_a |\dot{H}|^2}{2} dV = \int_{V_1} \frac{\varepsilon_a |\dot{E}|^2}{2} dV. \quad (25.5)$$

Если объем резонатора заполнен диэлектриком, обладающим в общем случае электрической и магнитной проводимостями γ_a и γ_m , то усредненную за период колебаний мощность потерь, возникающую за счет этих проводимостей, можно найти из теоремы Пойнтинга для комплексных амплитуд [см. соотношение (4.25)].

Интегралы

$$\int_{V_1} \frac{1}{2} \gamma_a |\dot{E}|^2 dV \quad \text{и} \quad \int_{V_1} \frac{1}{2} \gamma_m |\dot{H}|^2 dV$$

представляют собой соответственно усредненные за период колебаний мощности электрических и магнитных потерь. Выражение для мощности потерь в реальном металле было найдено в § 9.7:

$$P_{\text{пот}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_a \omega_p}{2\gamma_{a2}}} \int_{S_1} |\dot{H}_\tau|^2 dS.$$

Для объемного резонатора интеграл в этом выражении следует брать по площади всех металлических поверхностей, ограничивающих поле в резонаторе, и в качестве частоты подставлять резонансную частоту ω_p .

Таким образом, полная мощность потерь в общем случае складывается из потерь в металлических поверхностях резонатора, а также электрических и магнитных потерь в диэлектрике резонатора, т. е. можно записать

$$P_{\text{пз}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_a \omega_p}{2\gamma_{a2}}} \oint_{S_1} |\dot{H}_\tau| dS + \int_{V_1} \frac{1}{2} \gamma_a |\dot{E}|^2 dV + \int_{V_1} \frac{1}{2} \gamma_m |\dot{H}|^2 dV. \quad (25.6)$$

Подставляя выражения (25.5) и (25.6) в формулу (25.3), получаем следующее выражение для добротности объемного резонатора,

записанное в общей форме:

$$Q = \frac{\omega_p \frac{1}{2} \int_{V_1} \mu_a |\dot{\mathbf{H}}|^2 dV}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_{a2} \omega_p}{2\gamma_{a2}}} \oint_{S_1} |\dot{\mathbf{H}}_\tau|^2 dS + \frac{1}{2} \int_{V_1} \gamma_a |\dot{\mathbf{E}}|^2 dV + \frac{1}{2} \int_{V_1} \gamma_m |\dot{\mathbf{H}}|^2 dV},$$

или окончательно

$$Q = \frac{\sqrt{\omega_p \mu_a} \int_{V_1} |\dot{\mathbf{H}}|^2 dV}{\sqrt{\frac{\mu_{a2}}{2\gamma_{a2}}} \oint_{S_1} |\dot{\mathbf{H}}_\tau|^2 dS + \left(\gamma_a \int_{V_1} |\dot{\mathbf{E}}|^2 dV + \gamma_m \int_{V_1} |\dot{\mathbf{H}}|^2 dV \right) \frac{1}{\sqrt{\omega_p}}}. \quad (25.7)$$

В случаях, когда диэлектриком, заполняющим объем резонатора, является воздух, потерями в воздухе можно пренебречь и добротность представить в упрощенном виде

$$Q = \frac{\sqrt{\omega_p \mu_a} \int_{V_1} |\dot{\mathbf{H}}|^2 dV}{\sqrt{\frac{\mu_{a2}}{2\gamma_{a2}}} \oint_{S_1} |\dot{\mathbf{H}}_\tau|^2 dS}. \quad (25.8)$$

Расчеты добротностей объемных резонаторов выполнены в приложении III. Отметим, что добротности объемных резонаторов существенно больше добротностей колебательных контуров и при использовании сверхпроводящих материалов и криогенной техники могут достигать значений порядка сотен тысяч.

ГЛАВА 26

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

§ 26.1. Постановка вопроса

Как неоднократно отмечалось в предыдущих главах, объемные резонаторы представляют собой многоволновые системы. Если тип волн зафиксирован, т. е. выбраны определенные индексы m , n , p или k , то при заданных конструкции и размерах резонатор будет обладать определенной резонансной частотой и добротностью. Такой резонатор можно представить в виде параллельного колебательного контура с эквивалентными параметрами $L_{\text{экр}}$, $C_{\text{экр}}$ и $r_{\text{экр}}$ (рис. 26.1). Настоящая глава посвящена определению этих эквивалентных параметров.

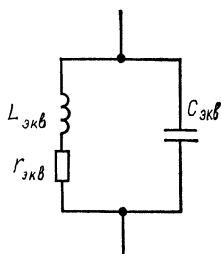


Рис. 26.1

§ 26.2. Определение эквивалентных параметров объемных резонаторов

При определении эквивалентных параметров объемных резонаторов предполагается, что электродинамический расчет резонатора произведен, поле для конкретного типа волн в резонаторе найдено, а также определены резонансная частота и добротность резонатора. На основании этих данных требуется определить параметры эквивалентного колебательного контура. Резонансная частота колебательного контура определяется соотношением:

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{L_{\text{эКВ}} C_{\text{эКВ}}}}. \quad (26.1)$$

Если величина ω_p известна, то достаточно определить либо $L_{\text{эКВ}}$, либо $C_{\text{эКВ}}$, а оставшийся параметр можно найти из формулы (26.1).

Покажем методику определения емкости $C_{\text{эКВ}}$. Для энергии электрического поля $W_{\text{э}}$, запасенной в конденсаторе, имеется известное выражение

$$W_{\text{э}} = \frac{C_{\text{эКВ}} |\dot{U}|^2}{2}, \quad (26.2)$$

где $|U|$ — модуль комплексной амплитуды разности потенциалов на обкладках конденсатора.

Модуль заряда конденсатора связан с модулем разности потенциалов соотношением

$$|\dot{Q}_{\text{э}}| = C_{\text{эКВ}} |\dot{U}|. \quad (26.3)$$

Подставив $|\dot{U}|$ из этой формулы в выражение (26.2), нетрудно найти емкость $C_{\text{эКВ}}$:

$$C_{\text{эКВ}} = \frac{|\dot{Q}_{\text{э}}|^2}{2W_{\text{э}}}. \quad (26.4)$$

После осуществления электродинамического расчета резонатора запасенную в нем энергию электрического поля можно определить с помощью формулы (25.5):

$$W_{\text{э}} = \int_{V_1} \frac{\epsilon_a |E|^2}{2} dV.$$

Таким образом, определение емкости $C_{\text{эКВ}}$ сводится к отысканию заряда $\dot{Q}_{\text{э}}$. Для большей наглядности поясним это на простом примере. Рассмотрим волну типа H_{101} в прямоугольном резонаторе, которой соответствует следующий набор индексов: m, n, p : $m=1, n=0, p=1$.

Используя соотношения (21.29) — (21.34), найдем составляющие

поля в резонаторе:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{xp} &= j2 \frac{\pi}{lg_{10}^2} C_2 \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi}{l} z\right), \\ \dot{H}_{zp} &= -j2 C_2 \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{l} z\right), \\ \dot{E}_{yp} &= -2 \frac{\omega_p \mu_a}{g_{10}^2} C_2 \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{l} z\right), \\ \dot{H}_{yp} &= \dot{E}_{xp} = \dot{E}_{zp} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (26.5)$$

Единственная составляющая электрического поля \dot{E}_{yp} создает заряды на нижней и верхней стенках резонатора. Эти заряды можно определить с помощью теоремы Гаусса, которая в рассматриваемом случае записывается таким образом:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_a &= \varepsilon_a \int_0^l \int_0^a E_{yp} dx dz = -\varepsilon_a 2 \frac{\omega_p \mu_a}{g_{10}^2} C_2 \frac{\pi}{a} \int_0^l \int_0^a \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{l} z\right) dx dz, \\ Q_a &= -\varepsilon_a 8 \frac{\omega_p \mu_a}{g_{10}^2} C_2 \frac{l}{\pi}, \\ |\dot{Q}_a| &= \varepsilon_a 8 \frac{\omega_p \mu_a}{g_{10}^2} C_2 \frac{l}{\pi}. \end{aligned} \quad (26.6)$$

Подставляя это значение заряда $|\dot{Q}_a|$ и значение энергии W_p (25.5) в формулу (26.4), можно найти эквивалентную емкость $C_{\text{эКВ}}$. Зная ω_p и $C_{\text{эКВ}}$, из выражения (26.1) получают эквивалентную индуктивность $L_{\text{эКВ}}$. Электродинамический расчет резонатора позволяет определить его добротность Q . В колебательном контуре добротность определяют по формуле

$$Q = \frac{1}{\omega_p C_{\text{эКВ}} R_{\text{эКВ}}}, \quad (26.7)$$

из которой можно найти активное сопротивление эквивалентного колебательного контура:

$$R_{\text{эКВ}} = \frac{1}{\omega_p C_{\text{эКВ}} Q}. \quad (26.8)$$

Резонансное сопротивление Z_p такого контура находят по известному соотношению

$$Z_p = \frac{Q}{\omega_p C_{\text{эКВ}}}. \quad (26.9)$$

Таким образом, все параметры эквивалентного колебательного контура определены через известные в результате электродинамического расчета параметры объемного резонатора.

Напоминаем еще раз, что замена объемного резонатора эквивалентным колебательным контурам возможна только для конкретного типа волн в объемном резонаторе и области частот вблизи резонансной частоты.

§ 27.1. Постановка вопроса

В предыдущих главах исследовалось распространение электромагнитных волн в различных средах и волноводных системах. При этом использовались электродинамические уравнения, в которых отсутствовали сторонние токи, в результате чего было невозможно определить амплитудные постоянные полей как функции сторонних токов. Можно было лишь судить об относительном изменении амплитуды и фазы поля в результате его прохождения через ту или другую среду или волноводную систему.

В ряде практических случаев бывает важно знать не только характер изменения поля, но и его абсолютное значение в результате возбуждения среды, волноводной или резонаторной системы заданным расположением и значениями сторонних токов. При этом в основу исследования необходимо положить электродинамические уравнения, в которых фигурируют заданные электрические или магнитные сторонние токи. Подобные задачи являются задачами анализа поля, возникающего в результате воздействия заданной системы токов. Помимо задач анализа возможны довольно сложные задачи синтеза, когда структура поля оказывается заданной и требуется определить систему сторонних токов, при которой такая структура поля будет существовать. Задачи синтеза относятся к специальным задачам электродинамики и в общем курсе их рассмотрение не предусмотрено.

В задачах анализа естественно добиваться максимального упрощения исходных электродинамических уравнений. В § 6.3 были определены следующие общие уравнения Гельмгольца для векторов поля \mathbf{H} и \mathbf{E} , в которые входят сторонние возбуждающие токи [см. уравнения (6.21) и (6.22)]:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{H} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \mathbf{H} &= \frac{j}{\omega \tilde{\mu}_a} \text{grad div } \mathbf{J}_m - \text{rot } \mathbf{J}_s + j\omega \tilde{\epsilon}_a \mathbf{J}_m, \\ \nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \mathbf{E} &= \frac{j}{\omega \tilde{\epsilon}_a} \text{grad div } \mathbf{J}_s + \text{rot } \mathbf{J}_m + j\omega \tilde{\mu}_a \mathbf{J}_s. \end{aligned}$$

Было проведено решение этих уравнений в случаях, когда сторонние токи \mathbf{J}_s и \mathbf{J}_m отсутствовали в данной части пространства. Решение этих уравнений в представленном виде крайне затруднено тем, что сторонние токи входят в правые части под знаком дифференциальных операторов.

Было бы целесообразно ввести в электродинамику какие-либо новые векторные функции, связанные простыми соотношениями с векторами поля \mathbf{H} , \mathbf{E} , для которых левые части электродинамических уравнений совпадали бы с хорошо изученным уравнением Гельмгольца, а правые части содержали бы сторонние токи непосред-

венно, без дифференциальных операторов. Решение электродинамических уравнений для этих функций существенно упростилось бы в силу упрощения правых частей. Отыскание векторов поля $\dot{\mathbf{H}}$ и $\dot{\mathbf{E}}$ в случае простой математической связи их с введенными функциями не представило бы существенных затруднений.

Отыскание подобных функций, называемых *векторными потенциалами*, оказывается возможным, чему и посвящена настоящая глава.

§ 27.2. Исходные уравнения электродинамики для векторов поля с участием сторонних токов. Векторный электрический потенциал

В § 2.2 были определены следующие электродинамические уравнения для векторов поля [см. уравнения (2.12)—(2.15)]:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} &= \dot{\mathbf{J}}_a + j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}, \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} &= -\dot{\mathbf{J}}_m - j\omega \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}, \\ \operatorname{div} (\tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}) &= \dot{\rho}_a, \\ \operatorname{div} (\tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}) &= \dot{\rho}_m. \end{aligned} \right\}$$

Считая среды и системы, в которых процессы описываются этими исходными уравнениями, линейными и, следовательно, удовлетворяющими принципу суперпозиции, указанные уравнения можно разбить на две группы, в одной из которых действуют сторонние электрические токи в отсутствие сторонних магнитных токов, а в другой—сторонние магнитные токи в отсутствие сторонних электрических токов. Суммарное поле, возникающее под действием сторонних электрических и магнитных токов, при этом является суперпозицией полей, найденных в результате самостоятельного решения каждой из групп уравнений.

В первой группе уравнений сохранены только сторонние электрические токи и заряды:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} - j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{J}}_a, \quad (27.1)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} + j\omega \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}} = 0, \quad (27.2)$$

$$\operatorname{div} (\tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}) = \dot{\rho}_a, \quad (27.3)$$

$$\operatorname{div} (\tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}) = 0. \quad (27.4)$$

Во второй группе уравнений сохранены только сторонние магнитные токи и заряды:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} - j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}} = 0, \quad (27.5)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} + j\omega \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}} = -\dot{\mathbf{J}}_m, \quad (27.6)$$

$$\operatorname{div} (\tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}) = 0, \quad (27.7)$$

$$\operatorname{div} (\tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}) = \dot{\rho}_m. \quad (27.8)$$

Нетрудно заметить, что переход от первой группы уравнений ко второй и обратно может быть осуществлен с помощью перестановок вида:

$$\dot{\mathbf{H}} \leftrightarrow \dot{\mathbf{E}}, \tilde{\epsilon}_a \leftrightarrow -\tilde{\mu}_a, \dot{\mathbf{J}}_a \leftrightarrow -\dot{\mathbf{J}}_m, \dot{\rho}_a \leftrightarrow -\dot{\rho}_m. \quad (27.9)$$

Отыщем решение первой группы уравнений в общем виде, без перехода к конкретной электродинамической задаче.

Простейшим уравнением в первой группе является уравнение (27.4). В силу справедливости векторного тождества (см. приложение I) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} \equiv 0$ решение уравнения (27.4) можно представить в виде

$$\tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}} = \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_a, \quad (27.10)$$

откуда

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\tilde{\mu}_a} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_a. \quad (27.11)$$

Векторную функцию $\dot{\mathbf{A}}_a$ называют *векторным электрическим потенциалом*.

Решение одного из уравнений получено. Следует определить, при каких условиях это решение удовлетворяет остальным уравнениям. Подставляя решение (27.10) в уравнение (27.2), находим

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} + j\omega \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_a = 0,$$

или

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} + \operatorname{rot} (j\omega \dot{\mathbf{A}}_a) = 0.$$

Сумма роторов функций так же, как и сумма производных, равна ротору от суммы функций:

$$\operatorname{rot} (\dot{\mathbf{E}} + j\omega \dot{\mathbf{A}}_a) = 0. \quad (27.12)$$

В приложении I рассмотрено векторное тождество $\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0$, где U — любая дифференцируемая скалярная функция. Положим

$$\dot{\mathbf{E}} + j\omega \dot{\mathbf{A}}_a = -\operatorname{grad} \dot{U}_a, \quad (27.13)$$

откуда

$$\dot{\mathbf{E}} = -\operatorname{grad} \dot{U}_a - j\omega \dot{\mathbf{A}}_a. \quad (27.14)$$

Скалярную функцию \dot{U}_a называют *скалярным электрическим потенциалом*.

Далее умножим все члены уравнения (27.1) на $\tilde{\mu}_a$:

$$\tilde{\mu}_a \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} - j\omega \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}} = \mu_a \dot{\mathbf{J}}_a.$$

Ввиду того что в данной главе рассматриваются процессы в однородных линейных средах, в которых параметры $\tilde{\mu}_a$, $\tilde{\epsilon}_a$ являются постоянными величинами, не зависящими от координат, $\tilde{\mu}_a$ можно

внести под знак ротора и уравнение записать в виде

$$\operatorname{rot}(\tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}) - j\omega \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}} = \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{J}}_a. \quad (27.15)$$

Подставляя в это уравнение значения $\tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}$ из формулы (27.10) и $\dot{\mathbf{E}}$ из формулы (27.14), получаем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_a + j\omega \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \operatorname{grad} \dot{U}_a + j\omega \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a j\omega \dot{\mathbf{A}}_a = \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{J}}_a,$$

или

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_a + j\omega \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \operatorname{grad} \dot{U}_a - \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{A}}_a = \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{J}}_a. \quad (27.16)$$

В приложении I приведено векторное тождество $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \nabla^2 \mathbf{a}$, где ∇^2 — оператор Лапласа. Там же дано выражение для оператора Лапласа в обобщенной ортогональной криволинейной системе координат. Этот оператор уже был использован при выводе уравнений Гельмгольца для векторов поля в § 6.3 и при исследовании плоских волн в гл. 7.

Применяя указанное векторное тождество, уравнение (27.16) можно записать в форме

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\mathbf{A}}_a - \nabla^2 \dot{\mathbf{A}}_a + j\omega \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \operatorname{grad} \dot{U}_a - \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{A}}_a = \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{J}}_a.$$

Недостатком этого уравнения является то, что в него входят две неизвестные функции: $\dot{\mathbf{A}}_a$ и \dot{U}_a . Для ликвидации одной из функций осуществим некоторые преобразования. В силу однородности среды внесем члены $j\omega \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a$ под знак градиента:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\mathbf{A}}_a - \nabla^2 \dot{\mathbf{A}}_a + \operatorname{grad}(j\omega \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{U}_a) - \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{A}}_a = \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{J}}_a.$$

Сумма градиентов функций равна градиенту от суммы функций. Поэтому уравнение можно записать в ином виде:

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \dot{\mathbf{A}}_a + j\omega \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{U}_a) - \nabla^2 \dot{\mathbf{A}}_a - \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{A}}_a = \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{J}}_a. \quad (27.17)$$

Вводя в электродинамику новые функции, правомерно выбрать их так, чтобы уравнения, содержащие эти функции, были максимально простыми. Если в уравнении (27.17) выбрать дивергенцию векторного электрического потенциала $\dot{\mathbf{A}}_a$ так, чтобы соблюдалось равенство

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{A}}_a = -j\omega \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{U}_a, \quad (27.18)$$

то из уравнения исчезнет функция \dot{U}_a , оно существенно упростится и приобретает вид

$$-\nabla^2 \dot{\mathbf{A}}_a - \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{A}}_a = \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{J}}_a,$$

или после перемены знаков

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}}_a + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{A}}_a = -\tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{J}}_a. \quad (27.19)$$

Соотношение (27.18) позволяет выразить функцию \dot{U}_a через векторный электрический потенциал:

$$\dot{U}_a = -\frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a\tilde{\epsilon}_a} \operatorname{div} \dot{\mathbf{A}}_a. \quad (27.20)$$

Подставив значение \dot{U}_a из формулы (27.20) в (27.14), получим соотношение, связывающее вектор электрического поля $\dot{\mathbf{E}}$ с потенциалом $\dot{\mathbf{A}}_a$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= \operatorname{grad} \left(\frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a\tilde{\epsilon}_a} \operatorname{div} \dot{\mathbf{A}}_a \right) - j\omega\dot{\mathbf{A}}_a = \\ &= \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a\tilde{\epsilon}_a} \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\mathbf{A}}_a - j\omega\dot{\mathbf{A}}_a. \end{aligned} \quad (27.21)$$

Связь вектора магнитного поля $\dot{\mathbf{H}}$ с потенциалом $\dot{\mathbf{A}}_a$ выражается соотношением (27.11).

Таким образом, оказалось возможным выразить векторы поля через новую функцию $\dot{\mathbf{A}}_a$, для которой получено уравнение (27.19). Левая часть этого уравнения совпадает по математической форме с левыми частями уравнений (6.21) и (6.22), т. е. является хорошо изученным уравнением Гельмгольца. Правая часть уравнения (27.19) выгодно отличается от правых частей уравнений (6.21), (6.22) тем, что сторонний электрический ток J_a входит в нее непосредственно, а не под знаком дифференциальных операций. После решения уравнения (27.19) и отыскания функции $\dot{\mathbf{A}}_a$ векторы поля $\dot{\mathbf{H}}$ и $\dot{\mathbf{E}}$ можно найти с помощью принципиально выполнимых дифференциальных операций, определяемых формулами (27.21) и (27.11). По сути дела задача, поставленная в § 27.1, завершена: найдены более простое по сравнению с (6.21), (6.22) уравнение (27.19) для функции $\dot{\mathbf{A}}_a$ и простые формулы перехода от этой функции к векторам поля.

В системе уравнений (27.1)–(27.4) не использовалось уравнение $\operatorname{div}(\tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}) = \dot{\rho}_a$. Подставим в это уравнение значение функции \dot{E} (27.14):

$$-\operatorname{div}(\tilde{\epsilon}_a \operatorname{grad} \dot{U}_a) - \operatorname{div}(\tilde{\epsilon}_a j\omega\dot{\mathbf{A}}_a) = \dot{\rho}_a.$$

Вынесем $\tilde{\epsilon}_a$ за знак операторов и разделим на $\tilde{\epsilon}_a$ обе части этого соотношения:

$$-\operatorname{div} \operatorname{grad} \dot{U}_a - j\omega \operatorname{div} \dot{\mathbf{A}}_a = \dot{\rho}_a/\tilde{\epsilon}_a.$$

Подставим в него значение $\operatorname{div} \dot{\mathbf{A}}_a$ (27.18):

$$-\operatorname{div} \operatorname{grad} \dot{U}_a - j\omega(-j\omega\tilde{\mu}_a\tilde{\epsilon}_a\dot{U}_a) = \dot{\rho}_a/\tilde{\epsilon}_a.$$

В приложении I указывается, что $\operatorname{div} \operatorname{grad} \dot{U}_a = \nabla^2 \dot{U}_a$. Тогда выведенное уравнение можно представить в окончательной форме:

$$\nabla^2 \dot{U}_a + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{U}_a = -\dot{\rho}_a/\tilde{\epsilon}_a. \quad (27.22)$$

Это уравнение является *скалярным уравнением Гельмгольца* с правой частью для скалярного электрического потенциала U_3 . Однако в рассматриваемом случае функция U_3 играет лишь промежуточную, эпизодическую роль. Когда возбуждение поля осуществляется системой сторонних электрических токов, достаточно ввести только один векторный электрический потенциал \dot{A}_3 , после определения которого векторы поля \dot{H} и \dot{E} можно однозначно найти с помощью формул (27.11), (27.21).

§ 27.3. Векторный магнитный потенциал

Решение второй группы уравнений (27.5)—(27.8), содержащей сторонние магнитные токи, может быть проведено аналогично решению первой группы уравнений (27.1)—(27.4), содержащей сторонние электрические токи. Переход от первой группы уравнений ко второй легко осуществить с помощью перестановок вида (27.9), что можно использовать для получения решения уравнений второй группы. В конечных выражениях (27.19), (27.21), (27.11) и (27.22) достаточно лишь сделать перестановки (27.9), добавив к ним перестановки следующего вида

$$\dot{A}_3 \rightarrow \dot{A}_M, \quad \dot{U}_3 \rightarrow \dot{U}_M. \quad (27.23)$$

Функции \dot{A}_M и \dot{U}_M называют соответственно *векторным магнитным* и *скалярным магнитным потенциалами*. В результате перестановок получаются окончательные выражения:

$$\nabla^2 \dot{A}_M + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{A}_M = -\tilde{\epsilon}_a \dot{J}_M, \quad (27.24)$$

$$\dot{H} = \frac{1}{j\omega \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a} \text{grad div } \dot{A}_M - j\omega \dot{A}_M, \quad (27.25)$$

$$\dot{E} = -\frac{1}{\tilde{\epsilon}_a} \text{rot } \dot{A}_M, \quad (27.26)$$

$$\nabla^2 \dot{U}_M + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{U}_M = -\dot{\rho}_M / \mu_a. \quad (27.27)$$

Если в рассматриваемом случае одновременно действует система электрических и магнитных токов, то суммарные поля \dot{H}_Σ и \dot{E}_Σ находят путем сложения полей, определяемых выражениями (27.11), (27.25), а также (27.21), (27.26). В итоге получают формулы:

$$\dot{H}_\Sigma = \frac{1}{\tilde{\mu}_a} \text{rot } \dot{A}_3 + \frac{1}{j\omega \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a} \text{grad div } \dot{A}_M - j\omega \dot{A}_M, \quad (27.28)$$

$$\dot{E}_\Sigma = \frac{1}{j\omega \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a} \text{grad div } \dot{A}_3 - j\omega \dot{A}_3 - \frac{1}{\tilde{\epsilon}_a} \text{rot } \dot{A}_M. \quad (27.29)$$

РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

§ 28.1. Постановка вопроса

В гл. 27 были получены неоднородные уравнения Гельмгольца видов (27.19) и (27.24) для векторных электрического и магнитного потенциалов. В общем курсе электродинамики невозможно рассмотреть решение этих уравнений во всей полноте так, как в курсах уравнений математической физики. Поэтому решение указанных уравнений будет изложено в объеме, необходимом для понимания содержания последующих глав.

§ 28.2. Разложение векторного уравнения Гельмгольца на скалярные. Решение однородного скалярного уравнения Гельмгольца в сферической системе координат

Исходными для анализа являются следующие неоднородные векторные уравнения Гельмгольца:

$$\nabla^2 \dot{A}_a + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{A}_a = - \tilde{\mu}_a \dot{J}_a, \tag{27.19}$$

$$\nabla^2 \dot{A}_m + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{A}_m = - \tilde{\epsilon}_a \dot{J}_m. \tag{27.24}$$

Эти уравнения аналогичны по математической форме. Достаточно рассмотреть решение любого из них. Решение оставшегося уравнения может быть найдено с помощью приводимых ранее перестановок. Выберем в качестве объекта исследования уравнение (27.19).

На основании векторного тождества

$$\text{rot rot } \mathbf{a} = \text{grad div } \mathbf{a} - \nabla^2 \mathbf{a}$$

можно написать

$$\nabla^2 \dot{A}_a = \text{grad div } \dot{A}_a - \text{rot rot } \dot{A}_a. \tag{28.1}$$

Выполнение этой операции в криволинейной ортогональной обобщенной системе координат ξ, η, ζ и подстановка результата в уравнение (27.19) дают сложное векторное уравнение. Разделяя векторное уравнение на систему скалярных, можно заметить, что получившаяся система скалярных уравнений оказывается крайне сложной. Сложность обусловлена тем, что в уравнение, соответствующее орту $\mathbf{1}_\xi$, входят не только составляющая $\dot{A}_{a\xi}$, но и составляющие $\dot{A}_{a\eta}$, $\dot{A}_{a\zeta}$. В уравнение, соответствующее орту $\mathbf{1}_\eta$, входят не только составляющая $\dot{A}_{a\eta}$, но и составляющие $\dot{A}_{a\xi}$, $\dot{A}_{a\zeta}$. Аналогично в уравнение, соответствующее орту $\mathbf{1}_\zeta$, входят не только составляющая $\dot{A}_{a\zeta}$, но и составляющие $\dot{A}_{a\xi}$, $\dot{A}_{a\eta}$. Возникающая система уравнений с так называемыми неразделенными функциями получается неизмеримо более сложной по сравнению с системой

уравнений, в которой функции разделены (в этой системе в уравнение, соответствующее орту $\mathbf{1}_\xi$, входит только одна составляющая $\dot{A}_{\xi\xi}$, в уравнение, соответствующее орту $\mathbf{1}_\eta$, — только одна составляющая $\dot{A}_{\eta\eta}$ и в уравнение, соответствующее орту $\mathbf{1}_\zeta$, — только одна составляющая $\dot{A}_{\zeta\zeta}$).

Возникновение уравнений с неразделенными функциями связано с тем, что коэффициенты Лямэ h_ξ , h_η , h_ζ в криволинейной системе координат могут быть функциями координат и их необходимо дифференцировать при выполнении операций, предусмотренных выражением (28.1). Только в декартовой системе координат все три коэффициента Лямэ h_x , h_y , h_z равны единице, а их производные по координатам x , y , z — нулю. Лишь в декартовой системе координат возможно полное разделение функций в скалярных уравнениях, соответствующих векторному уравнению (27.19), что существенно упрощает решение этого уравнения.

Представим векторное уравнение (27.19) в виде системы скалярных уравнений в декартовой системе координат. Для этого введем следующие выражения:

$$\dot{\mathbf{A}}_a = \mathbf{1}_x \dot{A}_{ax} + \mathbf{1}_y \dot{A}_{ay} + \mathbf{1}_z \dot{A}_{az}, \quad (28.2)$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}}_a = \mathbf{1}_x \nabla^2 \dot{A}_{ax} + \mathbf{1}_y \nabla^2 \dot{A}_{ay} + \mathbf{1}_z \nabla^2 \dot{A}_{az}, \quad (28.3)$$

$$\dot{\mathbf{J}}_a = \mathbf{1}_x \dot{J}_{ax} + \mathbf{1}_y \dot{J}_{ay} + \mathbf{1}_z \dot{J}_{az}, \quad (28.4)$$

в которых \dot{A}_{ax} , \dot{A}_{ay} , \dot{A}_{az} , \dot{J}_{ax} , \dot{J}_{ay} , \dot{J}_{az} представляют собой составляющие векторного электрического потенциала $\dot{\mathbf{A}}_a$ и стороннего электрического тока $\dot{\mathbf{J}}_a$ вдоль координатных направлений x , y , z .

Подставим полученные выражения в уравнение (27.19):

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_x \nabla^2 \dot{A}_{ax} + \mathbf{1}_y \nabla^2 \dot{A}_{ay} + \mathbf{1}_z \nabla^2 \dot{A}_{az} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a (\mathbf{1}_x \dot{A}_{ax} + \\ + \mathbf{1}_y \dot{A}_{ay} + \mathbf{1}_z \dot{A}_{az}) = -\tilde{\mu}_a (\mathbf{1}_x \dot{J}_{ax} + \mathbf{1}_y \dot{J}_{ay} + \mathbf{1}_z \dot{J}_{az}). \end{aligned} \quad (28.5)$$

Векторное уравнение (28.5) можно разбить на три скалярных уравнения путем приравнивания членов при одинаковых ортах:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \dot{A}_{ax} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{A}_{ax} &= -\tilde{\mu}_a \dot{J}_{ax}, \\ \nabla^2 \dot{A}_{ay} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{A}_{ay} &= -\tilde{\mu}_a \dot{J}_{ay}, \\ \nabla^2 \dot{A}_{az} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{A}_{az} &= -\tilde{\mu}_a \dot{J}_{az}. \end{aligned} \right\} \quad (28.6)$$

Для упрощения записи введем обозначение

$$\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a = \gamma^2. \quad (28.7)$$

Тогда систему уравнений (28.6) можно представить в форме

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \dot{A}_{ax} + \gamma^2 \dot{A}_{ax} &= -\tilde{\mu}_a \dot{J}_{ax}, \\ \nabla^2 \dot{A}_{ay} + \gamma^2 \dot{A}_{ay} &= -\tilde{\mu}_a \dot{J}_{ay}, \\ \nabla^2 \dot{A}_{az} + \gamma^2 \dot{A}_{az} &= -\tilde{\mu}_a \dot{J}_{az}. \end{aligned} \right\} \quad (28.8)$$

Здесь ∇^2 — оператор Лапласа в декартовой системе координат.

Полученные скалярные уравнения аналогичны по математической форме. Достаточно рассмотреть решение какого-либо из них. Прежде всего рассмотрим решение однородного скалярного уравнения Гельмгольца, сходного по математической форме со скалярными уравнениями системы (28.6). Запишем это уравнение в виде

$$\nabla^2 \Psi + \gamma^2 \Psi = 0. \quad (28.9)$$

Отметим, что в уравнениях (28.8) лапласиан $\nabla^2 \dot{A}_{\alpha x, y, z}$ берут в декартовой системе координат (иначе не разделяются функции), лапласиан же скалярной функции $\nabla^2 \Psi$ может быть взят в любой координатной системе.

Рассмотрим решение уравнения (28.9) в сферической системе координат в предположении, что задача сферически симметрична и производные по координатам φ и θ отсутствуют. С помощью выражения, приведенного в приложении I, можно определить лапласиан в сферической системе координат в случае зависимости поля только от координаты r :

$$\nabla^2 \Psi = \frac{d^2 \Psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d\Psi}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2 (\Psi r)}{dr^2}.$$

Подставляя выражение для лапласиана в уравнение (28.9), приводим его к виду

$$\frac{d^2 (\Psi r)}{dr^2} + \gamma^2 (\Psi r) = 0. \quad (28.10)$$

Уравнение (28.10) является по отношению к функции Ψr обычным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение можно записать в форме

$$\Psi r = C_1 e^{-i\gamma r} + C_2 e^{i\gamma r}, \quad (28.11)$$

откуда

$$\Psi = C_1 \frac{e^{-i\gamma r}}{r} + C_2 \frac{e^{i\gamma r}}{r}, \quad (28.12)$$

Функция Ψ представляет собой две сферические волны: падающую, определяемую слагаемым $C_1 \frac{e^{-i\gamma r}}{r}$, и отраженную, определяемую слагаемым $C_2 \frac{e^{i\gamma r}}{r}$.

Далее можно перейти к отысканию решения неоднородных уравнений системы (28.6). Для этого используют так называемые теоремы Грина, дающие интегральную связь между двумя различными скалярными функциями. В качестве одной из них будет использовано искомое решение уравнений (28.6), т. е. функции $\dot{A}_{\alpha x}$, $\dot{A}_{\alpha y}$ или $\dot{A}_{\alpha z}$, в качестве другой — только что найденная функция Ψ . Теоремы Грина позволяют определить искомые решения через функцию Ψ .

§ 28.3. Первая и вторая теоремы Грина

Запишем теорему Остроградского—Гаусса (2.1):

$$\oint_{S_1} \mathbf{a} d\mathbf{S} = \int_{V_1} \operatorname{div} \mathbf{a} dV.$$

Представим вектор \mathbf{a} в виде соотношения

$$\mathbf{a} = \Psi \operatorname{grad} U, \quad (28.13)$$

где Ψ и U —дифференцируемые по координатам скалярные функции.

Тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{div} (\Psi \operatorname{grad} U). \quad (28.14)$$

Используя векторное тождество, приведенное в приложении I, выражение (28.14) можно записать таким образом:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{grad} \Psi \operatorname{grad} U + \Psi \nabla^2 U. \quad (28.15)$$

Подстановка формулы (28.15) в теорему Остроградского—Гаусса приводит к выражению

$$\int_{V_1} (\operatorname{grad} \Psi \operatorname{grad} U + \Psi \nabla^2 U) dV = \oint_{S_1} \Psi \operatorname{grad} U d\mathbf{S}. \quad (28.16)$$

В этом выражении $\operatorname{grad} U d\mathbf{S} = \operatorname{grad} U \mathbf{1}_n dS$, где $\mathbf{1}_n$ —единичная нормаль к элементу поверхности dS .

Скалярное произведение $\operatorname{grad} U \mathbf{1}_n$ представляет собой проекцию градиента U на направление единичной нормали, т. е. нормальную составляющую $\operatorname{grad} U$. Следовательно, справедливо равенство

$$\operatorname{grad} U d\mathbf{S} = \frac{\partial v}{\partial n} dS, \quad (28.17)$$

где n —нормаль, а производная $\partial v / \partial n$ является производной функции v по нормали n к поверхности ∂S , или нормальной составляющей градиента U .

Подставим выражение (28.17) в формулу (28.16):

$$\int_{V_1} (\operatorname{grad} \Psi \operatorname{grad} U + \Psi \nabla^2 U) dV = \int_{S_1} \Psi \frac{\partial v}{\partial n} dS. \quad (28.18)$$

Полученное соотношение называется *первой теоремой Грина*. Эту теорему можно представить в несколько иной форме, если при выборе вектора \mathbf{a} функции Ψ и U в выражении (28.14) поменять местами, т. е. записать вектор \mathbf{a} в виде

$$\mathbf{a} = U \operatorname{grad} \Psi. \quad (28.19)$$

При этом первая теорема Грина приобретет вид

$$\int_{V_1} (\operatorname{grad} U \operatorname{grad} \Psi + U \nabla^2 \Psi) dV = \oint_{S_1} U \frac{\partial \Psi}{\partial n} dS. \quad (28.20)$$

Вычтем из выражения (28.20) соотношение (28.18) почленно:

$$\int_{V_1} (U \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 U) dU = \oint_{S_1} \left(U \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS. \quad (28.21)$$

Полученное соотношение называется *второй теоремой Грина*.

§ 28.4. Использование второй теоремы Грина с целью получения решения уравнения Гельмгольца для векторного электрического потенциала. Условия излучения

Выберем в качестве функции Ψ во второй теореме Грина функцию $\dot{\Psi}$, определяемую выражением (28.12), причем используем только ту часть этого выражения, которая соответствует падающей сферической волне. Амплитудный коэффициент C_1 положим равным единице. При этом можно записать

$$\Psi = \dot{\Psi} = \frac{e^{-i\gamma r}}{r}. \quad (28.22)$$

В качестве функции U выберем одно из искомых решений системы уравнений (28.6): \dot{A}_{ax} , \dot{A}_{ay} или \dot{A}_{az} . Для определенности пусть этим решением будет \dot{A}_{ax} .

Под расстоянием r будем понимать расстояние между точкой, в которой отыскивается решение \dot{A}_{ax} (назовем ее точкой наблюдения), и точками, в которых расположена заданная система токов \dot{J}_{ax} (назовем их точками источника). Координаты точки наблюдения обозначим x, y, z , а координаты точек источника — x', y', z' . Тогда расстояние r можно определить из соотношения.

$$r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}. \quad (28.23)$$

Интеграл по объему V_1 во второй теореме Грина берут по всему объему, включающему в себя все возможные точки наблюдения и точки источника. В процессе вычисления этого интеграла неизбежно будет проходиться точка, соответствующая $r=0$. В этой точке функция $\dot{\Psi}$ стремится к бесконечности или, как говорят, имеет особенность.

Следовательно, подставить эту функцию в объемный интеграл непосредственно нельзя. Во избежание этого затруднения окружим точку наблюдения малой сферой радиуса r_0 , объем которой равен V_0 . Далее вместо объема V_1 во второй теореме Грина возьмем объем $V_1 - V_0$. В пределах этого объема радиус r не может стать меньше радиуса r_0 , и особенность функции $\dot{\Psi}$ будет ликвидирована.

Под поверхностью S_1 следует понимать поверхность, охватывающую объем V_1 . Новый объем $V_1 - V_0$ охватывает поверхность $S_1 + S_0$, где S_0 — поверхность, охватывающая объем V_0 . Подставляя в формулу (28.21) в качестве функции U функцию \dot{A}_{ax} , в качестве функции Ψ — функцию $\dot{\Psi}$ и используя вместо объема V_1 объем $V_1 - V_0$,

а вместо поверхности S_1 — поверхность $S_1 - S_0$, получаем новое выражение для второй теоремы Грина:

$$\int_{V_1 - V_0} (\dot{A}_{\alpha x} \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \dot{A}_{\alpha x}) dV = \int_{S_1 + S_0} \left(\dot{A}_{\alpha x} \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \dot{A}_{\alpha x}}{\partial n} \right) dS. \quad (28.24)$$

Выразим функции $\nabla^2 \Psi$ и $\nabla^2 \dot{A}_{\alpha x}$ из уравнения (28.9) и первого уравнения системы (28.8):

$$\nabla^2 \Psi = -\gamma^2 \Psi, \quad (28.25)$$

$$\nabla^2 \dot{A}_{\alpha x} = -\gamma^2 \dot{A}_{\alpha x} - \tilde{\mu}_a J_{\alpha x}. \quad (28.26)$$

Подставим значения функций $\nabla^2 \Psi$ и $\nabla^2 \dot{A}_{\alpha x}$ из формул (28.25), (28.26) в объемный интеграл второй теоремы Грина:

$$\begin{aligned} & \int_{V_1 - V_0} (\dot{A}_{\alpha x} \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \dot{A}_{\alpha x}) dV = \\ & = \int_{V_1 - V_0} (-\dot{A}_{\alpha x} \gamma^2 \Psi + \Psi \gamma^2 \dot{A}_{\alpha x} + \Psi \tilde{\mu}_a J_{\alpha x}) dV = \int_{V_1 - V_0} \Psi \tilde{\mu}_a J_{\alpha x} dV. \end{aligned}$$

Подставляя значение функции Ψ из формулы (28.22), получаем следующее выражение для объемного интеграла:

$$\int_{V_1 - V_0} (\dot{A}_{\alpha x} \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \dot{A}_{\alpha x}) dV = \int_{V_1 - V_0} \tilde{\mu}_a J_{\alpha x} \frac{e^{-i\gamma r}}{r} dV. \quad (28.27)$$

При стремлении объема V_0 к нулю интеграл стремится к интегралу во всем объеме V_1 .

Перейдем к рассмотрению поверхностного интеграла в формуле (28.24). Представим этот интеграл в виде суммы двух интегралов по замкнутым поверхностям S_1 и S_0 :

$$\begin{aligned} \oint_{S_1 + S_0} \left(\dot{A}_{\alpha x} \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \dot{A}_{\alpha x}}{\partial n} \right) dS &= \oint_{S_1} \left(\dot{A}_{\alpha x} \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \dot{A}_{\alpha x}}{\partial n} \right) dS + \\ &+ \int_{S_0} \left(\dot{A}_{\alpha x} \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \dot{A}_{\alpha x}}{\partial n} \right) dS. \end{aligned} \quad (28.28)$$

Интеграл по поверхности S_1 при стремлении поверхности S_0 к нулю остается конечным. Следует определить поведение интеграла по поверхности S_0 в предельном случае, когда эта поверхность стремится к нулю.

Нормальная производная $\partial/\partial n$ представляет собой производную $\partial/\partial r$, взятую с обратным знаком:

$$\partial/\partial n = -\partial/\partial r.$$

Используя формулу (28.22), можно написать

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial n} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = j\gamma \frac{e^{-i\gamma r}}{r} + \frac{e^{-i\gamma r}}{r^2}, \\ \frac{\partial \dot{A}_{\alpha x}}{\partial n} &= -\frac{\partial \dot{A}_{\alpha x}}{\partial r}. \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в интеграл по поверхности S_0 :

$$\begin{aligned} & \oint_{S_0} \left(\dot{A}_{\text{эx}} \frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial n} - \dot{\Psi} \frac{\partial \dot{A}_{\text{эx}}}{\partial n} \right) dS = \\ & = \oint_{S_0} \left(\dot{A}_{\text{эx}} j\gamma \frac{e^{-j\gamma r}}{r} + \dot{A}_{\text{эx}} \frac{e^{-j\gamma r}}{r^2} + \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \cdot \frac{\partial \dot{A}_{\text{эx}}}{\partial r} \right) dS. \end{aligned} \quad (28.29)$$

В пределе при $r \rightarrow 0$ $dS \rightarrow 4\pi r_0^2$, $\dot{A}_{\text{эx}} \rightarrow \dot{A}_{\text{эx}}(x, y, z)$, т. е. $\dot{A}_{\text{эx}}$ стремится к значению этой функции в точке наблюдения x, y, z . Соответственно функции

$$\frac{e^{-j\gamma r}}{r} \rightarrow \frac{e^{-j\gamma r_0}}{r_0}, \quad \frac{e^{-j\gamma r}}{r^2} \rightarrow \frac{e^{-j\gamma r_0}}{r_0^2}.$$

Следовательно, при $r_0 \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & \oint_{S_0} \left(\dot{A}_{\text{эx}} \frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial n} - \dot{\Psi} \frac{\partial \dot{A}_{\text{эx}}}{\partial n} \right) dS \rightarrow \oint_{S_0} \left\{ \dot{A}_{\text{эx}}(x, y, z) j\gamma \frac{e^{-j\gamma r_0}}{r_0} + \right. \\ & \left. + \dot{A}_{\text{эx}}(x, y, z) \frac{e^{-j\gamma r_0}}{r_0^2} + \frac{e^{-j\gamma r_0}}{r_0} \cdot \frac{\partial \dot{A}_{\text{эx}}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \right\} 4\pi r_0^2. \end{aligned}$$

В пределе поверхностные интегралы от первого и последнего слагаемых обращаются в нуль:

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \oint_{S_0} \left\{ \dot{A}_{\text{эx}}(x, y, z) j\gamma \frac{e^{-j\gamma r_0}}{r_0} + \frac{e^{-j\gamma r_0}}{r_0} \cdot \frac{\partial \dot{A}_{\text{эx}}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \right\} 4\pi r_0^2 = 0. \quad (28.30)$$

Предел поверхностного интеграла от второго слагаемого записывается в виде

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \oint_{S_0} \dot{A}_{\text{эx}}(x, y, z) \frac{e^{-j\gamma r_0}}{r_0^2} 4\pi r_0^2 = 4\pi \dot{A}_{\text{эx}}(x, y, z). \quad (28.31)$$

Таким образом, в пределе при стремлении поверхности S_0 к нулю поверхностный интеграл в формуле (28.24) можно выразить соотношением

$$\begin{aligned} & \lim_{r_0 \rightarrow 0} \oint_{S_1+S_0} \left(\dot{A}_{\text{эx}} \frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial n} - \dot{\Psi} \frac{\partial \dot{A}_{\text{эx}}}{\partial n} \right) dS = \\ & = \oint_{S_1} \left(\dot{A}_{\text{эx}} \frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial n} - \dot{\Psi} \frac{\partial \dot{A}_{\text{эx}}}{\partial n} \right) dS + 4\pi \dot{A}_{\text{эx}}(x, y, z). \end{aligned} \quad (28.32)$$

Предел объемного интеграла во второй теореме Грина на основании соотношения (28.27) записывается в виде

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \int_{V_1-V_0} (\dot{A}_{\text{эx}} \nabla^2 \dot{\Psi} - \dot{\Psi} \nabla^2 \dot{A}_{\text{эx}}) dV = \int_{V_1} \mu_a j_{\text{эx}} \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV. \quad (28.33)$$

Используя формулы (28.32), (28.33), вторую теорему Грина можно записать таким образом:

$$\int_{V_1} \tilde{\mu}_a j_{\text{эx}} \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV = \oint_{S_1} \left(\dot{A}_{\text{эx}} \frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial n} - \dot{\Psi} \frac{\partial \dot{A}_{\text{эx}}}{\partial n} \right) dS + 4\pi \dot{A}_{\text{эx}}(x, y, z), \quad (28.34)$$

или иначе

$$\begin{aligned} \dot{A}_{\text{ax}}(x, y, z) = & \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} \int_{V_1} j_{\text{ax}} \frac{e^{-i\nu r}}{r} dV + \\ & + \frac{1}{4\pi} \oint_{S_1} \left\{ \frac{\partial \dot{A}_{\text{ax}}}{\partial n} \cdot \frac{e^{-i\nu r}}{r} - \dot{A}_{\text{ax}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-i\nu r}}{r} \right) \right\} dS. \end{aligned} \quad (28.35)$$

Следовательно, решение первого неоднородного скалярного уравнения для функции \dot{A}_{ax} системы уравнений (28.8) может быть найдено, если известны значения функции j_{ax} в пределах всего объема V_1 , а также значения функции \dot{A}_{ax} и ее нормальной производной на поверхности S_1 , охватывающей объем V_1 . Если значения функции \dot{A}_{ax} и ее нормальной производной на поверхности S_1 неизвестны, то для отыскания функции \dot{A}_{ax} необходимо решить интегральное уравнение (28.35). Остальные два уравнения системы (28.8) решают аналогично. Решения могут быть представлены в виде следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \dot{A}_{\text{ay}}(x, y, z) = & \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} \int_{V_1} j_{\text{ay}} \frac{e^{-i\nu r}}{r} dV + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \left\{ \frac{\partial \dot{A}_{\text{ay}}}{\partial n} \cdot \frac{e^{-i\nu r}}{r} - \dot{A}_{\text{ay}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-i\nu r}}{r} \right) \right\} dS, \end{aligned} \quad (28.36)$$

$$\begin{aligned} \dot{A}_{\text{az}}(x, y, z) = & \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} \int_{V_1} j_{\text{az}} \frac{e^{-i\nu r}}{r} dV + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \left\{ \frac{\partial \dot{A}_{\text{az}}}{\partial n} \cdot \frac{e^{-i\nu r}}{r} - \dot{A}_{\text{az}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-i\nu r}}{r} \right) \right\} dS. \end{aligned} \quad (28.37)$$

В случае неограниченного объема V_1 и бесконечно удаленной поверхности S_1 , а также при расположении источников поля на конечных расстояниях от точки наблюдения решения (28.35)–(28.37) существенно упрощаются. При этом возможны два хода рассуждения: 1) исходят из конечной скорости распространения электромагнитных волн и конечного времени наблюдения процесса. За конечное время наблюдения процесса электромагнитные волны не могут достигнуть бесконечно удаленной поверхности S_1 , и в случае неограниченного объема V_1 поверхностный интеграл в выражении (28.35) равен нулю; 2) определяют математические условия, при которых поверхностный интеграл стремится к нулю при бесконечном увеличении объема V_1 , т. е. выполняется предельное соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{S_1} \left\{ \frac{\partial \dot{A}_{\text{ax}}}{\partial n} \cdot \frac{e^{-i\nu r}}{r} - \dot{A}_{\text{ax}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-i\nu r}}{r} \right) \right\} dS = 0. \quad (28.38)$$

Найдем условия выполнения этого соотношения. При $r \rightarrow \infty$ нормаль $n \rightarrow r$. Поэтому производные по n в интеграле могут быть заменены производными по r . Элемент поверхности dS в сферической системе координат записывают в виде формулы (см. рис.29.4)

$dS = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta$. С учетом сказанного предельное соотношение (28.38) записывают в виде

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{S_1} \left\{ \frac{\partial \dot{A}_{ax}}{\partial r} \cdot \frac{e^{-j\gamma r}}{r} - \dot{A}_{ax} \left(-j\gamma \frac{e^{-j\gamma r}}{r} - \frac{e^{-j\gamma r}}{r^2} \right) \right\} 2\pi r^2 \sin \theta d\theta = 0. \quad (28.39)$$

Для выполнения этого равенства необходимо, чтобы

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(r \frac{\partial \dot{A}_{ax}}{\partial r} + j\gamma r \dot{A}_{ax} + \dot{A}_{ax} \right) = 0.$$

Очевидно, для этого достаточно условия

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(r \frac{\partial \dot{A}_{ax}}{\partial r} + j\gamma r \dot{A}_{ax} \right) = 0. \quad (28.40)$$

Аналогичные выражения определяют условия для составляющих векторного потенциала \dot{A}_{ay} и \dot{A}_{az} :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(r \frac{\partial \dot{A}_{ay}}{\partial r} + j\gamma r \dot{A}_{ay} \right) = 0, \quad (28.41)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(r \frac{\partial \dot{A}_{az}}{\partial r} + j\gamma r \dot{A}_{az} \right) = 0. \quad (28.42)$$

Условия (28.40)—(28.42) называют *условиями излучения*. Для их выполнения необходимо, чтобы векторные потенциалы и их производные убывали с расстоянием быстрее, чем по закону $1/r$.

При выполнении условий излучения в случае бесконечно большого объема V_1 выражения (28.35)—(28.37) записываются в такой форме:

$$\dot{A}_{ax}(x, y, z) = \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} \int_{V_1} \dot{J}_{ax} \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV, \quad (28.43)$$

$$\dot{A}_{ay}(x, y, z) = \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} \int_{V_1} \dot{J}_{ay} \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV, \quad (28.44)$$

$$\dot{A}_{az}(x, y, z) = \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} \int_{V_1} \dot{J}_{az} \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV. \quad (28.45)$$

Так как

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}}_a &= \mathbf{1}_x \dot{A}_{ax} + \mathbf{1}_y \dot{A}_{ay} + \mathbf{1}_z \dot{A}_{az}, \\ \dot{\mathbf{J}}_a &= \mathbf{1}_x \dot{J}_{ax} + \mathbf{1}_y \dot{J}_{ay} + \mathbf{1}_z \dot{J}_{az}, \end{aligned}$$

то, умножив соотношения (28.43)—(28.45) на соответствующие орты и сложив результаты, получим решение векторного уравнения Гельмгольца (27.19) с правой частью:

$$\dot{\mathbf{A}}_a = \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} \int_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_a \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV. \quad (28.46)$$

Функция $\frac{e^{-j\gamma r}}{4\pi r} = G(r)$ называется *функцией Грина в сферической системе координат*. Функции Грина могут быть найдены в различных системах координат путем решения уравнения (28.9) для функции Ψ в соответствующей системе координат с последующим применением второй теоремы Грина.

Функция Грина, умноженная на $\tilde{\mu}_a$, соответствует векторному потенциалу от единичной плотности тока, существующей в бесконечно малом объеме dV . Если излучающие устройства представляют собой идеально проводящие металлические поверхности, по которым протекают поверхностные сторонние токи с плотностью $\dot{\mathbf{v}}_a$, то объемный интеграл в выражении (28.46) должен быть заменен поверхностным интегралом вида

$$\dot{\mathbf{A}}_a = \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} \int_{S_1} \dot{\mathbf{v}}_a \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dS. \quad (28.47)$$

Аналогичные замены должны быть сделаны в выражениях (28.35)—(28.37).

§ 28.5. Отыскание решения уравнения Гельмгольца для векторного магнитного потенциала

Поскольку уравнение для векторного магнитного потенциала не отличается по математической форме от уравнения для векторного электрического потенциала, процесс отыскания решения для функции $\dot{\mathbf{A}}_m$ аналогичен описанному в § 28.4. Так как переход от уравнения (27.19) к уравнению (27.24) осуществляется с помощью перестановок вида

$$\dot{\mathbf{A}}_a \rightarrow \dot{\mathbf{A}}_m, \quad \tilde{\mu}_a \rightarrow -\tilde{\epsilon}_a, \quad \mathbf{J}_a \rightarrow -\mathbf{J}_m,$$

выражение для функции $\dot{\mathbf{A}}_m$ можно получить непосредственно из выражения (28.46) путем указанных перестановок. В результате возникает формула

$$\dot{\mathbf{A}}_m = \frac{\tilde{\epsilon}_a}{4\pi} \int_{V_1} \mathbf{J}_m \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV, \quad (28.48)$$

справедливая для неограниченного объема. В случае ограниченного объема в результате проведения перестановок в формулах (28.35)—(28.37) получаются следующие соотношения для составляющих век-

торного магнитного потенциала:

$$\begin{aligned} \dot{A}_{mx}(x, y, z) = & \frac{\tilde{\varepsilon}_a}{4\pi} \int_{V_1} j_{mx} \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV + \\ & + \frac{1}{4\pi} \oint_{S_1} \left\{ \frac{\partial \dot{A}_{mx}}{\partial n} \cdot \frac{e^{-j\gamma r}}{r} - \dot{A}_{mx} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) \right\} dS, \end{aligned} \quad (28.49)$$

$$\begin{aligned} \dot{A}_{my}(x, y, z) = & \frac{\tilde{\varepsilon}_a}{4\pi} \int_{V_1} j_{my} \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV + \\ & + \frac{1}{4\pi} \oint_{S_1} \left\{ \frac{\partial \dot{A}_{my}}{\partial n} \cdot \frac{e^{-j\gamma r}}{r} - \dot{A}_{my} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) \right\} dS, \end{aligned} \quad (28.50)$$

$$\begin{aligned} \dot{A}_{mz}(x, y, z) = & \frac{\tilde{\varepsilon}_a}{4\pi} \int_{V_1} j_{mz} \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV + \\ & + \frac{1}{4\pi} \oint_{S_1} \left\{ \frac{\partial \dot{A}_{mz}}{\partial n} \cdot \frac{e^{-j\gamma r}}{r} - \dot{A}_{mz} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) \right\} dS. \end{aligned} \quad (28.51)$$

Если излучающие устройства представляют собой идеально проводящие металлические поверхности, по которым протекают поверхностные сторонние токи с плотностью $\dot{\mathbf{v}}_m$, то объемные интегралы в выражениях (28.48)—(28.51) должны быть заменены на поверхностные интегралы вида

$$\dot{A}_m = \frac{\tilde{\varepsilon}_a}{4\pi} \int_{S_1} \dot{\mathbf{v}}_m \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dS. \quad (28.52)$$

ГЛАВА 29 ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ВИБРАТОР

§ 29.1. Постановка вопроса

В предыдущей главе были найдены общие решения уравнений Гельмгольца с правой частью для векторных электрического и магнитного потенциалов. В настоящей главе с помощью этих решений будет определено поле простейшего излучателя электрического типа — элементарного электрического вибратора. Несмотря на некоторую идеализацию, анализ этого простейшего излучателя дает возможность понять основные процессы, происходящие в реальных антенных устройствах, и позволяет наметить общий ход их расчета.

Назовем элементарным электрическим вибратором прямолинейный отрезок провода, по которому протекает электрический ток, комплексная амплитуда плотности которого равна \dot{J}_a . Длину провода l возьмем значительно меньшей длины волны колебания, подведенного к проводу. Положим, что комплексная амплитуда плотности тока \dot{J}_a остается постоянной в пределах всей длины

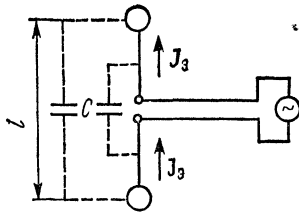


Рис. 29.1

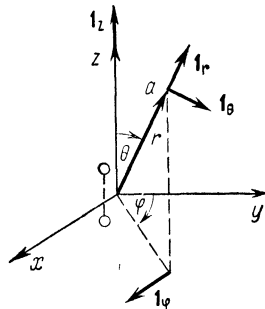


Рис. 29.2

провода l . Далее допустим, что поле определяется в точке наблюдения, удаленной от излучателя настолько, что расстояние r между любой точкой на длине вибратора и точкой наблюдения можно считать одним и тем же. Практическим аналогом элементарного электрического вибратора является устройство, показанное на рис. 29.1. Оно состоит из двух коротких проводов, на концах которых расположены металлические шары, представляющие собой сосредоточенные емкости. Сторонний ток с плотностью \mathbf{J}_a , протекающий по проводам, переходит в ток смещения, замыкающийся через распределенные емкости C , существующие между проводами вибратора. Сосредоточенная большая емкость между металлическими шарами существенно превышает распределенные емкости. В силу этого подавляющая часть тока смещения протекает через сосредоточенную емкость. Так как длина проводов мала по сравнению с длиной волны подводимого колебания, то изменение плотности стороннего тока \mathbf{J}_a , возникающее вследствие ответвления тока через распределение емкости, незначительно и им можно пренебречь. В результате при математическом анализе такой системы можно с большой степенью точности плотность тока \mathbf{J}_a и его фазу считать постоянными по длине вибратора. Подобное устройство было использовано Герцем в его опытах и получило название *элементарного электрического вибратора* или *диполя Герца*.

§ 29.2. Определение векторного электрического потенциала в поле элементарного электрического вибратора

В основу анализа положим общее решение векторного уравнения Гельмгольца в сферической системе координат, записанное в виде выражения (28.46).

Ориентируем вибратор вдоль полярной оси в сферической системе координат так, как показано на рис. 29.2. Выбрав координаты в последовательности r, φ, θ , угол φ следует отсчитывать от координаты y (см. приложение I). Поле определяется в точке наблюдения a . Плотность тока \mathbf{J}_a существует только в пределах провода вибратора. Следовательно, интеграл по безграничному объему V_1

будет отличен от нуля только в пределах объема провода. Элемент объема dV можно представить в виде скалярного произведения площади поперечного сечения провода \mathbf{S} на элемент длины провода dl :

$$dV = \mathbf{S} dl. \quad (29.1)$$

Тогда интегрирование по объему заменяется интегрированием по длине вибратора l и выражение (28.46) записывается в виде

$$\dot{\mathbf{A}}_a = \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} \int_1 \mathbf{j}_a \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \mathbf{S} dl. \quad (29.2)$$

Ввиду ограничений, отмеченных в § 29.1, расстояние r и плотность тока \mathbf{j}_a неизменны так же, как и площадь поперечного сечения \mathbf{S} . Следовательно, эти величины и $e^{-j\gamma r}$ в процессе интегрирования можно вынести за знак интеграла:

$$\dot{\mathbf{A}}_a = \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} (\mathbf{j}_a \mathbf{S}) \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \int_1 dl = \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} (\mathbf{j}_a \mathbf{S}) \frac{e^{-j\gamma r}}{r} l. \quad (29.3)$$

Векторы \mathbf{j}_a и \mathbf{S} совпадают по направлению. Их скалярное произведение равно току \dot{I}_a в вибраторе:

$$\mathbf{j}_a \mathbf{S} = \dot{I}_a \quad (29.4)$$

и, следовательно,

$$\dot{\mathbf{A}}_a = \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} \dot{I}_a \frac{e^{-j\gamma r}}{r} l.$$

В соответствии с рис. 29.2 можно написать

$$l = l \mathbf{1}_z \quad (29.5)$$

и выражение для векторного электрического потенциала приобретает окончательный вид

$$\dot{\mathbf{A}}_a = \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} \dot{I}_a \frac{e^{-j\gamma r}}{r} l \mathbf{1}_z. \quad (29.6)$$

§ 29.3. Определение составляющих поля элементарного электрического вибратора

Для определения составляющих поля могут быть использованы соотношения (27.11) и (27.21). Если с помощью какого-либо из этих соотношений определен вектор $\dot{\mathbf{H}}$ или $\dot{\mathbf{E}}$, то для определения оставшегося вектора можно также использовать уравнения Максвелла, записанные для части пространства, где находится точка наблюдения a , в которой нет сторонних токов. Из этих уравнений могут быть выведены следующие соотношения:

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{j\omega\tilde{\epsilon}_a} \text{rot } \dot{\mathbf{H}}, \quad (29.7)$$

$$\dot{\mathbf{H}} = - \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a} \text{rot } \dot{\mathbf{E}}. \quad (29.8)$$

Найдем вектор напряженности магнитного поля с помощью выражений (27.11) и (29.6):

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\tilde{\mu}_a} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_a = \frac{1}{\tilde{\mu}_a} \operatorname{rot} \left(\frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} j_a \frac{e^{-j\gamma r}}{r} l \mathbf{1}_z \right) = \frac{j_a l}{4\pi} \operatorname{rot} \left(\frac{e^{-j\gamma r}}{r} \mathbf{1}_z \right). \quad (29.9)$$

Ротор в этом выражении следует вычислить в сферической системе координат, что является довольно трудоемким. Процедуру можно упростить, прибегнув к следующим рассуждениям. Введем обозначения

$$\frac{e^{-j\gamma r}}{r} = \Psi, \quad \mathbf{1}_z = \mathbf{a}, \quad (29.10)$$

где Ψ — скалярная функция, и рассмотрим выражение $\operatorname{rot}(\Psi \mathbf{a})$.

В приложении I приведено тождество $\operatorname{rot}(\Psi \mathbf{a}) = [\operatorname{grad} \Psi \mathbf{a}] + \Psi \operatorname{rot} \mathbf{a}$. Используя формулу, приведенную в приложении I, можно определить градиент скалярной функции в сферической системе координат:

$$\operatorname{grad} \Psi = \mathbf{1}_r \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \mathbf{1}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \mathbf{1}_\theta \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}.$$

С учетом обозначения (29.10) получаем

$$\operatorname{grad} \Psi = -\mathbf{1}_r \frac{1}{r^2} (1 + j\gamma r) e^{-j\gamma r}. \quad (29.11)$$

Тогда

$$\operatorname{rot}(\Psi \mathbf{a}) = \left[-\mathbf{1}_r \frac{1}{r^2} (1 + j\gamma r) e^{-j\gamma r} \mathbf{1}_z \right] + \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \operatorname{rot} \mathbf{1}_z.$$

Орт $\mathbf{1}_z$ не дифференцируется, т. е.

$$\operatorname{rot} \mathbf{1}_z = 0$$

и

$$\operatorname{rot}(\Psi \mathbf{a}) = [-\mathbf{1}_r \mathbf{1}_z] \frac{1}{r^2} (1 + j\gamma r) e^{-j\gamma r}.$$

Как следует из рис. 29.2, векторное произведение

$$[-\mathbf{1}_r \mathbf{1}_z] = -\mathbf{1}_\varphi \sin \theta.$$

Следовательно,

$$\operatorname{rot}(\Psi \mathbf{a}) = -\mathbf{1}_\varphi \frac{1}{r^2} (1 + j\gamma r) e^{-j\gamma r} \sin \theta.$$

Подставляя это выражение в формулу (29.9), получаем окончательное выражение для вектора напряженности магнитного поля:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_\varphi = -\mathbf{1}_\varphi \frac{j_a e^{-j\gamma r} l \sin \theta}{4\pi r^2} (1 + j\gamma r). \quad (29.12)$$

Таким образом, элементарный электрический вибратор создает одну составляющую магнитного поля, ориентированную вдоль координаты φ в сферической системе координат. Для определения век-

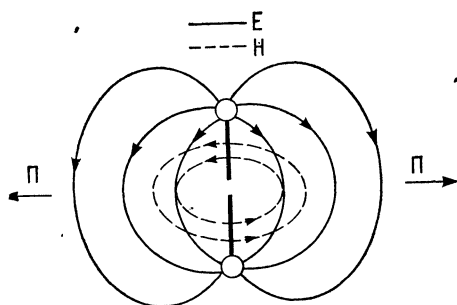


Рис. 29.3

тора $\dot{\mathbf{E}}$ можно применить либо выражение (27.21), либо формулу (29.7). В первом случае требуется определить довольно сложный двойной оператор $\text{grad div } \dot{\mathbf{A}}_a$ в сферической системе координат, во втором случае достаточно найти $\text{rot } \dot{\mathbf{H}}$, что несколько проще. Поэтому используем второй путь.

В приложении I дано следующее выражение для ротора в сферической системе координат:

$$\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{1}_r \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} (a_{\theta r}) - \frac{\partial}{\partial \theta} (a_{\varphi r} \sin \theta) \right\} + \mathbf{1}_{\varphi} \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (a_r) - \frac{\partial}{\partial r} (a_{\theta r}) \right\} + \mathbf{1}_{\theta} \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (a_{\varphi r} \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (a_r) \right\}.$$

Роль вектора \mathbf{a} играет $\dot{\mathbf{H}}_{\varphi}$:

$$\begin{aligned} \text{rot } \dot{\mathbf{H}}_{\varphi} &= -\mathbf{1}_r \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ -\frac{j_a e^{-j\gamma r l} \sin \theta}{4\pi r^2} (1 + j\gamma r) r \sin \theta \right\} + \\ &+ \mathbf{1}_{\theta} \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left\{ -\frac{j_a e^{-j\gamma r l} \sin \theta}{4\pi r^2} (1 + j\gamma r) r \sin \theta \right\} = \\ &= \mathbf{1}_r \frac{j_a e^{-j\gamma r l} \cos \theta}{2\pi r^3} (1 + j\gamma r) + \mathbf{1}_{\theta} \frac{j_a e^{-j\gamma r l} \sin \theta}{4\pi r^3} (1 + j\gamma r - \gamma^2 r^2). \end{aligned} \quad (29.13)$$

Подставляя выражение (23.13) в формулу (29.7), находим вектор напряженности электрического поля:

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{1}_r \frac{j_a e^{-j\gamma r l} \cos \theta}{j\omega \tilde{\epsilon}_a 2\pi r^3} (1 + j\gamma r) + \mathbf{1}_{\theta} \frac{j_a e^{-j\gamma r l} \sin \theta}{j\omega \tilde{\epsilon}_a 4\pi r^3} (1 + j\gamma r - \gamma^2 r^2). \quad (29.14)$$

Следовательно, электрическое поле вибратора обладает двумя составляющими: одной — ориентированной вдоль координаты r , другой — ориентированной вдоль координаты θ . Картина суммарного электромагнитного поля около вибратора показана на рис. 29.3.

§ 29.4. Ближняя, промежуточная и дальняя зоны поля элементарного электрического вибратора

Запишем полученные выражения для составляющих поля вибратора:

$$\dot{H}_{\varphi} = -\frac{j_a e^{-j\gamma r l} \sin \theta}{4\pi r^2} (1 + j\gamma r), \quad (29.15)$$

$$\dot{E}_r = \frac{j_a e^{-j\gamma r l} \cos \theta}{j\omega \tilde{\epsilon}_a 2\pi r^3} (1 + j\gamma r), \quad (29.16)$$

$$\dot{E}_{\theta} = \frac{j_a e^{-j\gamma r l} \sin \theta}{j\omega \tilde{\epsilon}_a 4\pi r^3} (1 + j\gamma r - \gamma^2 r^2). \quad (29.17)$$

Здесь

$$\gamma^2 = \omega^2 \bar{\mu}_a \bar{\epsilon}_a.$$

Если среда лишена потерь, то

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_a &\rightarrow \mu_a, & \bar{\epsilon}_a &\rightarrow \epsilon_a, \\ \gamma &\rightarrow \beta = \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a}. \end{aligned} \quad (29.18)$$

Так как скорость света c в среде с параметрами μ_a , ϵ_a определяется выражением $c = 1/\sqrt{\mu_a \epsilon_a}$, формулу для β можно переписать в иной форме:

$$\beta = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (29.19)$$

где λ — длина волны колебания в среде с параметрами $\mu_a \epsilon_a$:

$$\lambda = c/f. \quad (29.20)$$

Из выражений для составляющих поля вибратора следует, что всегда может быть определено такое расстояние r , при котором справедливо неравенство

$$\gamma r \ll 1. \quad (29.21)$$

Для среды без потерь это неравенство записывают в виде

$$\beta r = \frac{2\pi}{\lambda} r \ll 1, \text{ или } r \ll \frac{\lambda}{2\pi}. \quad (29.22)$$

При этом выражения для составляющих поля упрощаются:

$$\dot{H}_\varphi = - \frac{j_a e^{-j\gamma r} l \sin \theta}{4\pi r^2}, \quad (29.23)$$

$$\dot{E}_r = \frac{j_a e^{-j\gamma r} l \cos \theta}{j\omega \bar{\epsilon}_a 2\pi r^3}, \quad (29.24)$$

$$\dot{E}_\theta = \frac{j_a e^{-j\gamma r} l \sin \theta}{j\omega \bar{\epsilon}_a 4\pi r^3}. \quad (29.25)$$

Зону расстояний r , в пределах которой справедливо неравенство (29.22), называют *ближней зоной поля*. В этой зоне поле изменяется очень быстро, обратно пропорционально второй и третьей степеням расстояния.

В *промежуточной зоне поля*, в которой соблюдается приближенное равенство

$$\gamma r \approx 1, \text{ или } r \approx \frac{\lambda}{2\pi}, \quad (29.26)$$

не представляется возможным провести какие-либо упрощения в формулах (29.15)—(29.17).

В случае больших расстояний r , для которых справедливы

неравенства

$$\gamma^2 r^2 \gg \gamma r \gg 1, \text{ или } r \gg \frac{\lambda}{2\pi}, \quad (29.27)$$

формулы для расчета составляющих поля приобретают вид

$$\dot{H}_\varphi = -j \frac{j_a e^{-j\gamma r} l \sin \theta \gamma}{4\pi r}, \quad (29.28)$$

$$\dot{E}_r = \frac{j_a e^{-j\gamma r} l \cos \theta \gamma}{\omega \tilde{\epsilon}_a 2\pi r^2}, \quad (29.29)$$

$$\dot{E}_\theta = j \frac{j_a e^{-j\gamma r} l \sin \theta \gamma^2}{\omega \tilde{\epsilon}_a 4\pi r}. \quad (29.30)$$

Как следует из этих соотношений, составляющая поля \dot{E}_r убывает с ростом расстояния r значительно быстрее по сравнению с составляющими \dot{H}_φ , \dot{E}_θ , и этой составляющей можно пренебречь.

Таким образом, в зоне расстояний, для которой справедливо неравенство (29.27), называемой *дальней зоной поля*, практически существуют две составляющие поля \dot{H}_φ и \dot{E}_θ . Эти составляющие убывают пропорционально первой степени расстояния и обеспечивают возможность дальней радиосвязи. Поле с составляющими \dot{H}_φ и \dot{E}_θ в дальней зоне иначе называют *полем излучения*.

§ 29.5. Мощность, излучаемая элементарным электрическим вибратором в окружающее пространство. Сопротивление излучения

В ближней и промежуточных зонах поля необходимо учитывать три составляющие поля \dot{H}_φ , \dot{E}_r и \dot{E}_θ . Эти составляющие создают два вектора Пойнтинга, действительные значения которых в соответствии с выражением (4.29) могут быть представлены в виде

$$\dot{P}_{d\theta} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{E}_r \dot{H}_\varphi^*], \quad (29.31)$$

$$\dot{P}_{dr} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{E}_\theta \dot{H}_\varphi^*]. \quad (29.32)$$

Допустим для наглядности, что потерь в среде нет и $\tilde{\epsilon}_a \rightarrow \epsilon_a$, $\tilde{\mu}_a \rightarrow \mu_a$, $\gamma \rightarrow \beta$.

Используя формулу (29.15), найдем сопряженное значение составляющей магнитного поля \dot{H}_φ^* .

$$\dot{H}_\varphi^* = - \frac{j_a^* e^{j\beta r} l \sin \theta}{4\pi r^2} (1 - j\beta r). \quad (29.33)$$

Далее подставим значения \dot{E}_r и \dot{H}_φ из формул (29.16), (29.33) в выражение (29.31):

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_{d\theta} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\mathbf{1}_r \frac{j_a e^{-j\beta r} l \cos \theta}{j\omega \epsilon_a 2\pi r^3} (1 + j\beta r) (-\mathbf{1}_\varphi) \frac{j_a^* e^{j\beta r} l \sin \theta}{4\pi r^2} (1 - j\beta r) \right] = \\ &= -\mathbf{1}_\theta \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{|j_a|^2 l^2 \cos \theta \sin \theta}{j\omega \epsilon_a 8\pi^2 r^5} (1 + \beta^2 r^2) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (29.34)$$

Присутствие j в знаменателе означает, что действительная часть выражения в фигурных скобках равна нулю:

$$\dot{\Pi}_{d\theta} = 0. \quad (29.35)$$

Таким образом, действительное значение меридиональной составляющей вектора Пойнтинга равно нулю. Физически это означает, что в меридиональном направлении не происходит излучения энергии. Существует только колебание этой энергии вокруг вибратора. В дальней зоне реактивная мощность, определяемая мнимой частью вектора Пойнтинга, ориентированного вдоль координаты θ , убывает пропорционально кубу расстояния, т. е. весьма быстро, и для дальней радиосвязи не может быть использована.

Подставляя в выражение (29.32) значения $\dot{\mathbf{E}}_\theta$, $\dot{\mathbf{H}}_\varphi^*$ из формул (29.17), (29.33) и считая, что $\gamma \rightarrow \beta$, находим

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_{dr} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\mathbf{1}_\theta \frac{j_a e^{-j\beta r} l \sin \theta}{j\omega \epsilon_a 4\pi r^3} (1 + j\beta r - \beta^2 r^2) (-\mathbf{1}_\varphi) \frac{j_a^* e^{j\beta r} l \sin \theta}{4\pi r^2} (1 - j\beta r) \right] = \\ &= \mathbf{1}_r \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{|j_a|^2 l^2 (\sin \theta)^2}{j\omega \epsilon_a 16\pi^2 r^5} (1 + \beta^2 r^2 - \beta^2 r^2 + j\beta^3 r^3) \right\}, \end{aligned}$$

или окончательно

$$\dot{\Pi}_{dr} = \mathbf{1}_r \frac{|j_a|^2 l^2 \sin^2 \theta \beta^3}{\omega \epsilon_a 32\pi^2 r^2}. \quad (29.36)$$

Таким образом, существует действительная часть вектора Пойнтинга, ориентированного вдоль координаты r , убывающая пропорционально квадрату расстояния и обеспечивающая возможность дальней радиосвязи.

С помощью выражения (29.36) можно определить мощность $P_{из}$, излучаемую элементарным электрическим вибратором в окружающее пространство. Эта мощность представляет собой интеграл от вектора Пойнтинга $\dot{\Pi}_{dr}$ по поверхности сферы, в центре которой расположен вибратор:

$$P_{из} = \oint_{S_1} \dot{\Pi}_{dr} dS. \quad (29.37)$$

В соответствии с рис. 29.4 элемент поверхности в сферической системе коор-

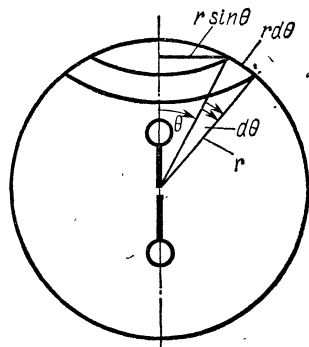


Рис. 29.4

динат записывается в виде

$$dS = 1,2\pi r^2 \sin \theta d\theta. \quad (29.38)$$

Подставляя выражения (29.36) и (29.38) в формулу (29.37), получаем соотношение для излучаемой мощности:

$$\begin{aligned} P_{\text{из}} &= \int_0^\pi \frac{|i_a|^2 l^2 \sin^2 \theta \beta^3}{\omega \epsilon_a 32\pi^2 r^2} 2\pi r^2 \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{|i_a|^2 l^2 \beta^3}{16\pi \omega \epsilon_a} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{|i_a|^2 l^2 \beta^3}{16\pi \omega \epsilon_a} \cdot \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

или окончательно

$$P_{\text{из}} = \frac{|i_a|^2 l^2 \beta^3}{12\pi \omega \epsilon_a}. \quad (29.39)$$

Как всякую активную мощность, мощность излучения можно представить в виде

$$P_{\text{из}} = \frac{|i_a|^2 R_{\text{из}}}{2}. \quad (29.40)$$

Назовем сопротивление $R_{\text{из}}$ сопротивлением излучения. Приравнявая выражения (29.39) и (29.40), получаем следующие соотношения:

$$\frac{|i_a|^2 R_{\text{из}}}{2} = \frac{|i_a|^2 l^2 \beta^3}{12\pi \omega \epsilon_a}, \quad R_{\text{из}} = \frac{l^2 \beta^3}{6\pi \omega \epsilon_a}.$$

С помощью выражений (29.18) и (29.19) сопротивление излучения можно записать в виде

$$R_{\text{из}} = \frac{l^2 \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a} 4\pi^2}{6\pi \omega \epsilon_a \lambda^2} = \frac{l^2 2\pi}{3\lambda^2} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}},$$

или

$$R_{\text{из}} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \quad (29.41)$$

Если среда представляет собой вакуум, то

$$\sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \rightarrow \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \text{ Ом} \text{ и } R_{\text{из}} = 789,59 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \quad (29.42)$$

При расчете сопротивления излучения не следует забывать, что все выводы, сделанные для элементарного электрического вибратора, справедливы, если $l \ll \lambda$.

§ 29.6. Диаграмма направленности поля излучения элементарного электрического вибратора в дальней зоне

Диаграммой направленности называют график зависимости составляющих поля антенны от угловых координат. В сферической системе координат существуют две угловые координаты: φ и θ .

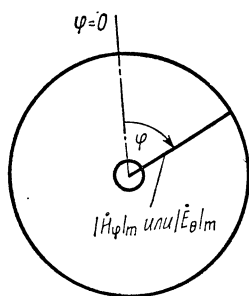


Рис. 29.5

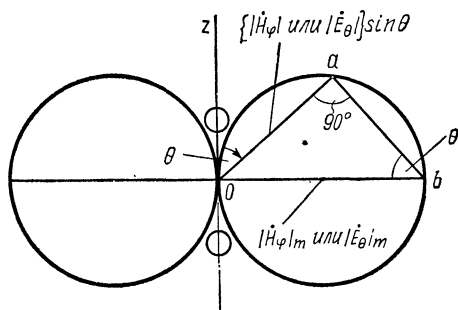


Рис. 29.6

В дальней зоне фактически существуют две составляющие поля \dot{H}_φ и \dot{E}_θ , определяемые выражениями (29.28), (29.30). Обе составляющие не зависят от координаты φ , и диаграмму излучения в плоскости, перпендикулярной полярной оси, можно изобразить в виде окружности, радиус которой в определенном масштабе представляет собой модуль $|\dot{H}_\varphi|$ или $|\dot{E}_\theta|$, вычисленный при фиксированных значениях радиуса-вектора r и угла θ . Подобная диаграмма показана на рис. 29.5.

В меридиональной плоскости \dot{H}_φ и \dot{E}_θ пропорциональны $\sin \theta$. Обозначим максимальные значения модуля составляющих поля, соответствующие $\theta = 90^\circ$, $|\dot{H}_\varphi|_m$ и $|\dot{E}_\theta|_m$.

Тогда зависимость модуля составляющих поля от координаты θ можно выразить формулами:

$$|\dot{H}_\varphi| = |\dot{H}_\varphi|_m \sin \theta, \quad (29.43)$$

$$|\dot{E}_\theta| = |\dot{E}_\theta|_m \sin \theta. \quad (29.44)$$

Построим две окружности диаметром, в масштабе соответствующем $|\dot{H}_\varphi|_m$ или $|\dot{E}_\theta|_m$, так, как показано на рис. 29.6.

Хорда oa определяется соотношением (29.43) или (29.44) и дает в масштабе картину изменения модулей $|\dot{H}_\varphi|$ и $|\dot{E}_\theta|$ в зависимости от угла θ . Таким образом, элементарный вибратор создает максимум излучения в экваториальной плоскости, соответствующей $\theta = 90^\circ$, и не излучает в направлении полярной оси z . В пространстве диаграмма направленности представляет собой тороид, приведенный на рис. 29.7:

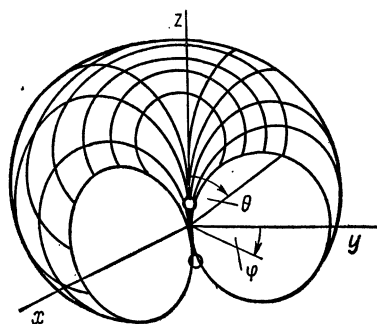


Рис. 29.7

§ 30.1. Постановка вопроса

Элементарный магнитный вибратор отличается от элементарного электрического только тем, что в проводах с шарами на конце (см. рис. 29.1) вместо плотности стороннего электрического тока \dot{J}_a существует плотность стороннего магнитного тока \dot{J}_m .

Поле, создаваемое магнитным вибратором, определяют так же, как и в случае электрического вибратора. В основу следует положить решение уравнения Гельмгольца для векторного магнитного потенциала, представленное в виде выражения (28.48). После определения векторного магнитного потенциала \dot{A}_m с помощью формулы (27.26) можно найти поле \dot{E} и далее отыскать вектор напряженности магнитного поля \dot{H} , используя формулу (27.25), либо второе уравнение Максвелла вида (29.8).

Как указывалось в гл. 27, переход от составляющих поля, возникающих при действии стороннего электрического тока и определяемых через векторный электрический потенциал, к составляющим поля, возникающим при действии стороннего магнитного тока и определяемым через векторный магнитный потенциал, можно осуществить, применяя принцип перестановочной двойственности. Следовательно, нет надобности в подробном выводе поля элементарного магнитного вибратора. Можно сразу по конечным выражениям для составляющих поля электрического вибратора с помощью необходимых перестановок найти конечные выражения для составляющих поля магнитного вибратора. Этот путь решения задачи и выбран в настоящей главе.

§ 30.2. Определение составляющих поля элементарного магнитного вибратора

В основу анализа положим окончательные выражения для составляющих поля элементарного электрического вибратора (29.15)—(29.17). В соответствии с принципом перестановочной двойственности осуществим в этих выражениях следующие перестановки:

$$\dot{H} \leftrightarrow \dot{E}, \quad \tilde{\epsilon}_a \leftrightarrow -\tilde{\mu}_a, \quad \dot{J}_a \rightarrow -\dot{J}_m. \quad (30.1)$$

В силу справедливости соотношения (29.4)

$$\dot{J}_a S = \dot{I}_a$$

и аналогичного соотношения при действии стороннего магнитного тока

$$\dot{J}_m S = \dot{I}_m \quad (30.2)$$

перестановки (30.1) можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{H}} \leftrightarrow \dot{\mathbf{E}}, \quad \tilde{\varepsilon}_a \leftrightarrow -\tilde{\mu}_a, \quad \dot{I}_a \rightarrow -\dot{I}_m \quad (30.3)$$

Осуществляя эти перестановки в соотношениях (29.15)—(29.17), получаем окончательные выражения для составляющих поля элементарного магнитного вибратора:

$$\dot{E}_\varphi = \frac{j_m e^{-j\gamma r} l \sin \theta}{4\pi r^2} (1 + j\gamma r), \quad (30.4)$$

$$\dot{H}_r = \frac{j_m e^{-j\gamma r} l \cos \theta}{j\omega \mu_a 2\pi r^3} (1 + j\gamma r), \quad (30.5)$$

$$\dot{H}_\theta = \frac{j_m e^{-j\gamma r} l \sin \theta}{j\omega \mu_a 4\pi r^3} (1 + j\gamma r - \gamma^2 r^2). \quad (30.6)$$

В дальней зоне практически остаются составляющие поля:

$$\dot{E}_\varphi = j \frac{j_m e^{-j\gamma r} l \sin \theta \gamma}{4\pi r}, \quad (30.7)$$

$$\dot{H}_\theta = \frac{j_m e^{-j\gamma r} l \sin \theta \gamma^2}{j\omega \mu_a 4\pi r}, \quad (30.8)$$

которые и являются полем излучения магнитного вибратора.

§ 30.3. Физический аналог элементарного магнитного вибратора. Элементарный щелевой вибратор

Сторонний магнитный ток был введен в уравнение Максвелла формально по аналогии со сторонним электрическим током. До настоящего времени не определялся его физический аналог. Поэтому неясно, какой реальной физической системе соответствует поле, определяемое выражениями (30.4)—(30.6).

Для выяснения этого вопроса рассмотрим подробно физический смысл перестановок вида (30.3), а также граничные условия электродинамической задачи, соответствующей определению поля элементарного электрического вибратора. Для наглядности предположим, что элементарный электрический вибратор представляет собой тонкую пластину шириной d и длиной l из идеального металла с бесконечно большой проводимостью. Допустим, что вдоль этой пластины, по обе ее стороны протекает сторонний электрический ток, поверхностная плотность которого постоянна вдоль длины пластины и равна \dot{j}_s . Пренебрежем долей поверхностного тока, протекающего вдоль тонких кромок пластины. Подобная система показана на рис. 30.1.

Электрический ток, протекающий по двум сторонам пластины и создающий электромагнитное поле, определяется соотношением

$$\dot{I}_s = 2d\dot{j}_s. \quad (30.9)$$

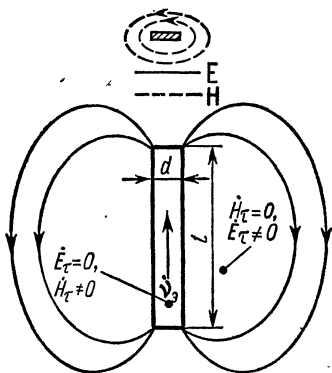


Рис. 30.1

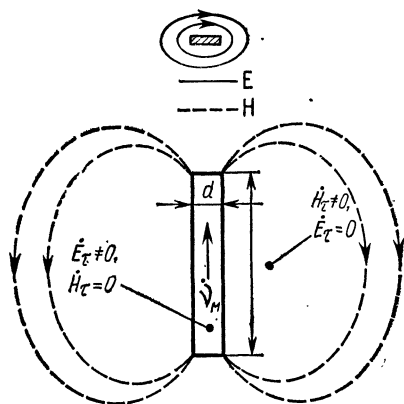


Рис. 30.2

Подставляя это значение тока \dot{I}_s в выражения (29.15) — (29.17), можно определить составляющие поля:

$$\dot{H}_\varphi = -\frac{2d\dot{v}_s e^{-j\gamma r} l \sin \theta}{4\pi r^2} (1 + j\gamma r), \quad (30.10)$$

$$\dot{E}_r = \frac{2d\dot{v}_s e^{-j\gamma r} l \cos \theta}{j\omega \epsilon_a 2\pi r^3} (1 + j\gamma r), \quad (30.11)$$

$$\dot{E}_\theta = \frac{2d\dot{v}_s e^{-j\gamma r} l \sin \theta}{j\omega \epsilon_a 4\pi r^3} (1 + j\gamma r - \gamma^2 r^2). \quad (30.12)$$

Рассмотрим, какие граничные условия соответствуют этой задаче. В пределах пластины, выполненной из идеального металла, справедливы условия $\dot{H}_\tau = \dot{v}_s$, $\dot{E}_\tau = 0$. За пределами пластины, в плоскости рис. 30.1, существует тангенциальное к этой плоскости поле \mathbf{E} . Поле \mathbf{H} подходит к плоскости рисунка нормально, и за пределами пластины $\dot{H}_\tau = 0$.

Допустим, что по пластине протекает не электрический сторонний ток с поверхностной плотностью \dot{v}_s , а магнитный сторонний ток с поверхностной плотностью \dot{v}_m (рис. 30.2). Поле, создаваемое таким током, может быть получено, если в выражениях (30.10) — (30.12) осуществить перестановки вида

$$\dot{\mathbf{H}} \leftrightarrow \dot{\mathbf{E}}, \quad \vec{\epsilon}_a \rightarrow -\mu_a, \quad \dot{v}_s \rightarrow -\dot{v}_m.$$

В результате возникают соотношения

$$\dot{E}_\varphi = \frac{2d\dot{v}_m e^{-j\gamma r} l \sin \theta}{4\pi r^2} (1 + j\gamma r), \quad (30.13)$$

$$\dot{H}_r = \frac{2d\dot{v}_m e^{-j\gamma r} l \cos \theta}{j\omega \mu_a 2\pi r^3} (1 + j\gamma r), \quad (30.14)$$

$$\dot{H}_\theta = \frac{2d\dot{v}_m e^{-j\gamma r} l \sin \theta}{j\omega \mu_a 4\pi r^3} (1 + j\gamma r - \gamma^2 r^2), \quad (30.15)$$

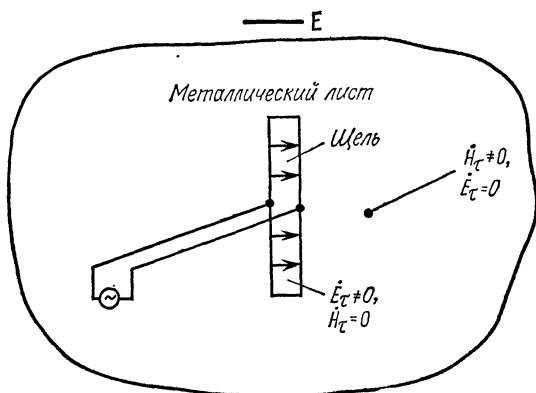


Рис. 30.3

Поле, соответствующее приведенным выражениям, показано на рис. 30.2. Этому случаю соответствуют следующие граничные условия: в пределах пластины $\dot{E}_\tau \neq 0$, $\dot{H}_\tau = 0$, за пределами пластины, в плоскости рисунка, $\dot{H}_\tau \neq 0$, $\dot{E}_\tau = 0$.

В соответствии с граничными условиями у поверхности идеального металла (8.18) $\dot{E}_{1\tau} = -\dot{v}_m$ выражения (30.13) — (30.15) записываются в иной форме:

$$\dot{E}_\varphi = -\frac{2d\dot{E}_{1\tau} e^{-j\gamma r} l \sin \theta}{4\pi r^2} (1 + j\gamma r), \quad (30.16)$$

$$\dot{H}_r = -\frac{2d\dot{E}_{1\tau} e^{-j\gamma r} l \cos \theta}{j\omega\mu_a 2\pi r^3} (1 + j\gamma r), \quad (30.17)$$

$$\dot{H}_\theta = -\frac{2d\dot{E}_{1\tau} e^{-j\gamma r} l \sin \theta}{j\omega\mu_a 4\pi r^3} (1 + j\gamma r - \gamma^2 r^2). \quad (30.18)$$

Как указывалось в § 8.3, $\dot{E}_{1\tau}$ и \dot{v}_m связаны правилом левостороннего винта; другими словами, если комплексная амплитуда плотности поверхностного магнитного тока \dot{v}_m ориентирована вдоль пластины, то составляющая $\dot{E}_{1\tau}$ — поперек пластины.

Далее попытаемся найти физическую систему, отвечающую граничным условиям, показанным на рис. 30.2.

За пределами пластины, в плоскости рисунка, $\dot{E}_\tau = 0$ и $\dot{H}_\tau \neq 0$. Подобные условия справедливы у поверхности идеального металла. Если за пределами пластины, в плоскости рисунка, поместить лист идеального металла, то эти граничные условия будут выполнены. В пределах пластины справедливы условия $\dot{E}_\tau \neq 0$, $\dot{H}_\tau = 0$. Эти условия будут выполнены, если в листе идеального металла сделать отверстие (щель), совпадающее по форме с пластиной, и к краям отверстия подвести напряжение от генератора (рис. 30.3).

При этом произведение

$$\dot{E}_{1\tau} d = \dot{U}_{щ}, \quad (30.19)$$

где $\dot{U}_{\text{ш}}$ — разность потенциалов между краями щели, создаваемая генератором.

Соответственно выражения (30.16) — (30.18) приобретут окончательный вид

$$\dot{E}_{\varphi} = -\frac{2\dot{U}_{\text{ш}} e^{-j\gamma r} l \sin \theta}{4\pi r^2} (1 + j\gamma r), \quad (30.20)$$

$$\dot{H}_r = -\frac{2\dot{U}_{\text{ш}} e^{-j\gamma r} l \cos \theta}{j\omega\mu_a 2\pi r^3} (1 + j\gamma r), \quad (30.21)$$

$$H_{\theta} = -\frac{2\dot{U}_{\text{ш}} e^{-j\gamma r} l \sin \theta}{j\omega\mu_a 4\pi r^3} (1 + j\gamma r - \gamma^2 r^2). \quad (30.22)$$

В результате сравнения этих выражений и формул (30.4) — (30.6) можно написать соотношение

$$\dot{I}_m = -2\dot{U}_{\text{ш}}. \quad (30.23)$$

Таким образом, физическим аналогом магнитного тока в случае так называемого щелевого вибратора является двойная разность потенциалов между краями щели. Как показывают многочисленные исследования, концепция магнитного тока оказывается удобной при анализе антенн щелевого типа, показанного на рис. 30.3, и антенн рамочного типа.

§ 30.4. Мощность, излучаемая элементарным магнитным вибратором в окружающее пространство. Сопротивление излучения. Диаграмма направленности

Определение мощности излучения магнитного вибратора проводят так же, как и в § 29.5. Можно легко показать, как и в случае электрического вибратора, что вектор Пойнтинга, построенный на составляющих поля \dot{E}_{φ} , \dot{H}_r , ориентированный вдоль координаты θ , не обладает действительной частью.

Действительная часть вектора Пойнтинга, построенного на составляющих поля \dot{E}_{φ} , \dot{H}_{θ} , ориентированного вдоль координаты r , определяется следующим образом (среда без потерь, $\gamma \rightarrow \beta$):

$$\dot{P}_{dr} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}_{\varphi} \mathbf{H}_{\theta}^*] = \mathbf{1}_r \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ -\frac{2\dot{U}_{\text{ш}} e^{-j\beta r} l \sin \theta}{4\pi r^2} (1 + j\beta r) \frac{2\dot{U}_{\text{ш}}^* e^{j\beta r} l \sin \theta}{j\omega\mu_a 4\pi r^3} (1 - j\beta r - \beta^2 r^2) \right\} = \mathbf{1}_r \frac{|\dot{U}_{\text{ш}}|^2 l^2 \sin^2 \theta \beta^3}{8\pi^2 \omega\mu_a r^2}. \quad (30.24)$$

Мощность излучения находят с помощью выражения (29.37). В результате интегрирования, аналогичного проведенному в § 29.5, получают

$$P_{\text{из}} = \frac{|\dot{U}_{\text{ш}}|^2 l^2 \beta^3}{8\pi^2 \omega\mu_a} 2\pi \frac{4}{3} = \frac{|\dot{U}_{\text{ш}}|^2 l^2 \beta^3}{3\pi \omega\mu_a}. \quad (30.25)$$

Мощность излучения, как всякую активную мощность, можно представить в виде

$$P_{\text{из}} = \frac{|\dot{U}_{\text{ш}}|^2}{2R_{\text{из}}}. \quad (30.26)$$

Приравнивая выражения (30.25) и (30.26), получаем

$$\frac{|\dot{U}_{\text{ш}}|^2 l^2 \beta^3}{3\pi\omega\mu_a} = \frac{|\dot{U}_{\text{ш}}|^2}{2R_{\text{из}}},$$

откуда

$$R_{\text{из}} = \frac{3\pi\omega\mu_a}{2l^2\beta^3}.$$

Используя выражения (29.18) и (29.19), можно определить сопротивление излучения

$$R_{\text{из}} = \frac{3\pi\omega\mu_a\lambda^2}{2l^2\omega\sqrt{\mu_a\epsilon_a}4\pi^2} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \cdot \frac{3}{8\pi} \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2. \quad (30.27)$$

Если среда представляет собой вакуум, то

$$\sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \rightarrow \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \text{ Ом} \text{ и } R_{\text{из}} = 45 \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2. \quad (30.28)$$

Сравнивая формулы (30.20)—(30.22) для составляющих поля магнитного вибратора с формулами (29.15)—(29.17) для составляющих поля электрического вибратора, можно заметить аналогичную зависимость составляющих поля от угловых координат. В силу этого диаграммы направленности в плоскости, перпендикулярной полярной оси и меридиональной плоскости, будут аналогичны диаграммам, показанным на рис. 29.5 и 29.6.

ГЛАВА 31 ЛЕММА ЛОРЕНЦА

§ 31.1. Постановка вопроса

Лемму Лоренца часто используют в электродинамике при решении задач о возбуждении полей заданными системами электрических или магнитных токов. С помощью этой леммы устанавливают математическую связь между первой группой сторонних электрических и магнитных токов и задаваемым ими полем,—с одной стороны, и второй группой сторонних электрических и магнитных токов и создаваемым ими полем, с другой стороны. На базе леммы Лоренца может быть проведен анализ различных электродинамических процессов; эта лемма и будет использована при дальнейшем изложении.

§ 31.2. Вывод леммы Лоренца для ограниченного и неограниченного объемов

Допустим, что существует первая группа сторонних токов $\mathbf{J}_{\text{э}1}$, $\mathbf{J}_{\text{м}1}$, создающая поля \mathbf{H}_1 и \mathbf{E}_1 . Запишем уравнения Максвелла, соответствующие этому случаю:

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}}_1 = j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}_1 + \mathbf{J}_{\text{э}1}, \quad (31.1)$$

$$\text{rot } \dot{\mathbf{E}}_1 = -j\omega \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}_1 - \mathbf{J}_{\text{м}1}. \quad (31.2)$$

Предположим также, что существует вторая группа сторонних токов $\mathbf{J}_{\text{э}2}$, $\mathbf{J}_{\text{м}2}$, создающая поля \mathbf{H}_2 и \mathbf{E}_2 . Уравнения Максвелла, соответствующие данному случаю, записываются в виде

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}}_2 = j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}_2 + \mathbf{J}_{\text{э}2}, \quad (31.3)$$

$$\text{rot } \dot{\mathbf{E}}_2 = -j\omega \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}_2 - \mathbf{J}_{\text{м}2}. \quad (31.4)$$

Умножим скалярно уравнение (31.1) на $\dot{\mathbf{E}}_2$, уравнение (31.4) — на $\dot{\mathbf{H}}_1$ и вычтем из второго произведения первое:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_1 \text{rot } \dot{\mathbf{E}}_2 - \dot{\mathbf{E}}_2 \text{rot } \dot{\mathbf{H}}_1 &= -j\omega \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1 - \mathbf{J}_{\text{м}2} \dot{\mathbf{H}}_1 - \\ &- j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{E}}_2 - \mathbf{J}_{\text{э}1} \dot{\mathbf{E}}_2. \end{aligned} \quad (31.5)$$

Далее умножим уравнение (31.2) скалярно на $\dot{\mathbf{H}}_2$, уравнение (31.3) — скалярно на $\dot{\mathbf{E}}_1$ и вычтем из первого произведения второе:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_2 \text{rot } \dot{\mathbf{E}}_1 - \dot{\mathbf{E}}_1 \text{rot } \dot{\mathbf{H}}_2 &= -j\omega \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2 - \mathbf{J}_{\text{м}1} \dot{\mathbf{H}}_2 - \\ &- j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{E}}_1 - \mathbf{J}_{\text{э}2} \dot{\mathbf{E}}_1. \end{aligned} \quad (31.6)$$

Используя векторное тождество, приведенное в приложении I, получаем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_1 \text{rot } \dot{\mathbf{E}}_2 - \dot{\mathbf{E}}_2 \text{rot } \dot{\mathbf{H}}_1 &= \text{div} [\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1], \\ \dot{\mathbf{H}}_2 \text{rot } \dot{\mathbf{E}}_1 - \dot{\mathbf{E}}_1 \text{rot } \dot{\mathbf{H}}_2 &= \text{div} [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2]. \end{aligned}$$

С помощью этих выражений соотношения (31.5) и (31.6) можно представить в форме

$$\text{div} [\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1] = -j\omega \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1 - \mathbf{J}_{\text{м}2} \dot{\mathbf{H}}_1 - j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{E}}_2 - \mathbf{J}_{\text{э}1} \dot{\mathbf{E}}_2, \quad (31.7)$$

$$\text{div} [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2] = -j\omega \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2 - \mathbf{J}_{\text{м}1} \dot{\mathbf{H}}_2 - j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{E}}_1 - \mathbf{J}_{\text{э}2} \dot{\mathbf{E}}_1. \quad (31.8)$$

Вычтем из выражения (31.7) выражение (31.8):

$$\text{div} [\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1] - \text{div} [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2] = -\mathbf{J}_{\text{м}2} \dot{\mathbf{H}}_1 - \mathbf{J}_{\text{э}1} \dot{\mathbf{E}}_2 + \mathbf{J}_{\text{м}1} \dot{\mathbf{H}}_2 + \mathbf{J}_{\text{э}2} \dot{\mathbf{E}}_1. \quad (31.9)$$

Полученное соотношение называют *леммой Лоренца в дифференциальной форме*. Проинтегрируем это соотношение по объему V_1 ,

включающему в себя все сторонние токи:

$$\int_{V_1} \{ \operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1] - \operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2] \} dV = \int_{V_1} (\mathbf{J}_{m1} \dot{\mathbf{H}}_2 - \mathbf{J}_{m2} \dot{\mathbf{H}}_1 + \mathbf{J}_{e2} \dot{\mathbf{E}}_1 - \mathbf{J}_{e1} \dot{\mathbf{E}}_2) dV. \quad (31.10)$$

Используя теорему Остроградского—Гаусса, можно написать

$$\int_{V_1} \{ \operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1] - \operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2] \} dV = \oint_{S_1} \{ [\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2] \} dS,$$

где S_1 —замкнутая поверхность, окружающая объем V_1 .

Тогда соотношение (31.10) можно представить в иной форме:

$$\oint_{S_1} \{ [\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2] \} dS = \int_{V_1} (\mathbf{J}_{m1} \dot{\mathbf{H}}_2 - \mathbf{J}_{m2} \dot{\mathbf{H}}_1 + \mathbf{J}_{e2} \dot{\mathbf{E}}_1 - \mathbf{J}_{e1} \dot{\mathbf{E}}_2) dV. \quad (31.11)$$

Полученное соотношение называют *леммой Лоренца в интегральной форме для ограниченного объема V_1* .

При неограниченном расширении объема левый интеграл обращается в нуль. Основанием для подобного заключения могут служить два соображения:

1) при неограниченном расширении объема V_1 ограничивающая его поверхность S_1 находится на бесконечно большом удалении от источников поля. В силу конечной скорости распространения поле не может дойти до поверхности S_1 за конечное время наблюдения и, следовательно, на ограничивающей поверхности поля $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ равны нулю;

2) как было установлено при анализе полей в дальней зоне, поля $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ убывают пропорционально первой степени расстояния. При этом не учитывалось дополнительное уменьшение амплитуды поля за счет потерь в среде, которые всегда существуют, даже в космическом пространстве. Вследствие этого подынтегральное выражение $\{ [\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2] \}$ фактически убывает быстрее, чем по закону второй степени расстояния. Сферическая поверхность возрастает пропорционально второй степени расстояния. В результате

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{S_1} \{ [\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2] \} dS = 0.$$

Таким образом, лемму Лоренца для бесконечно большого (неограниченного) объема следует записать таким образом:

$$\int_{V_1} (\mathbf{J}_{m1} \dot{\mathbf{H}}_2 - \mathbf{J}_{m2} \dot{\mathbf{H}}_1 + \mathbf{J}_{e2} \dot{\mathbf{E}}_1 - \mathbf{J}_{e1} \dot{\mathbf{E}}_2) dV = 0. \quad (31.12)$$

§ 31.3. Теорема взаимности для элементарных вибраторов как пример применения леммы Лоренца

Предположим, что в пространстве имеется два элементарных электрических вибратора. Допустим, что в первом вибраторе длиной l_1 протекает сторонний электрический ток с плотностью \mathbf{J}_{e1} , а

во втором вибраторе длиной l_2 — сторонний электрический ток с плотностью $\mathbf{j}_{\text{э}2}$.

Пусть \mathbf{E}_{12} — электрическое поле, создаваемое первым вибратором в месте расположения второго вибратора, и \mathbf{E}_{21} — электрическое поле, создаваемое вторым вибратором в месте расположения первого вибратора. Тогда лемма Лоренца для неограниченного объема в соответствии с формулой (31.12) запишется в виде

$$\int_{V_1} (\mathbf{j}_{\text{э}2} \dot{\mathbf{E}}_1 - \mathbf{j}_{\text{э}1} \dot{\mathbf{E}}_2) dV = 0, \text{ или } \int_{V_1} \mathbf{j}_{\text{э}2} \dot{\mathbf{E}}_1 dV = \int_{V_1} \mathbf{j}_{\text{э}1} \dot{\mathbf{E}}_2 dV.$$

Каждый из интегралов будет отличен от нуля только в части объема V_1 , в которой существуют плотности токов $\mathbf{j}_{\text{э}2}$ и $\mathbf{j}_{\text{э}1}$, т. е. в пределах объемов $V_{\text{в}1}$ и $V_{\text{в}2}$, занимаемых первым и вторым вибраторами. Тогда для леммы Лоренца будет справедливо равенство

$$\int_{V_{\text{в}2}} \mathbf{j}_{\text{э}2} \dot{\mathbf{E}}_1 dV = \int_{V_{\text{в}1}} \mathbf{j}_{\text{э}1} \dot{\mathbf{E}}_2 dV.$$

Ввиду малости вибраторов можно считать, что в процессе интегрирования по их объемам поля $\dot{\mathbf{E}}_1$ и $\dot{\mathbf{E}}_2$ будут изменяться незначительно и их можно считать постоянными и соответственно равными:

$$\dot{\mathbf{E}}_1 = \dot{\mathbf{E}}_{12}, \quad \dot{\mathbf{E}}_2 = \dot{\mathbf{E}}_{21},$$

где \mathbf{E}_{12} — напряженность поля, создаваемая первым вибратором в месте расположения второго вибратора; \mathbf{E}_{21} — напряженность поля, создаваемая вторым вибратором в месте расположения первого вибратора.

Лемма Лоренца при этом приобретает вид

$$\dot{\mathbf{E}}_{12} \int_{V_{\text{в}2}} \mathbf{j}_{\text{э}2} dV = \dot{\mathbf{E}}_{21} \int_{V_{\text{в}1}} \mathbf{j}_{\text{э}1} dV.$$

Представив элементы объема dV в левом и правом интегралах соответственно в виде

$$dV = S_2 dl,$$

$$dV = S_1 dl,$$

где S_1 , S_2 — площади поперечного сечения проводов первого и второго вибраторов, получаем

$$\dot{\mathbf{E}}_{12} \int_{l_2} \mathbf{j}_{\text{э}2} S_2 dl = \dot{\mathbf{E}}_{21} \int_{l_1} \mathbf{j}_{\text{э}1} S_1 dl.$$

Далее можно написать, что

$$\mathbf{j}_{\text{э}2} S_2 = \dot{I}_{\text{э}2}, \quad \mathbf{j}_{\text{э}1} S_1 = \dot{I}_{\text{э}1},$$

где $\dot{I}_{\text{э}2}$ и $\dot{I}_{\text{э}1}$ — электрические токи во втором и первом вибраторах.

Так как в элементарных вибраторах токи $\dot{I}_{\alpha 2}$ и $\dot{I}_{\alpha 1}$ полагают неизменными по длине вибраторов, лемма Лоренца записывается в виде

$$\dot{\mathbf{E}}_{12} \dot{I}_{\alpha 2} \int_{l_2} d\mathbf{l} = \dot{\mathbf{E}}_{21} \dot{I}_{\alpha 1} \int_{l_1} d\mathbf{l},$$

или

$$\dot{\mathbf{E}}_{12} \dot{I}_{\alpha 2} \mathbf{l}_2 = \dot{\mathbf{E}}_{21} \dot{I}_{\alpha 1} \mathbf{l}_1. \quad (31.13)$$

Это соотношение называется *теоремой взаимности для элементарных электрических вибраторов*. Теорема позволяет найти любую из входящих в нее шести величин, если известны пять оставшихся.

Аналогичное соотношение (теорема взаимности) получается для элементарных магнитных вибраторов:

$$\dot{\mathbf{H}}_{12} \dot{I}_{\text{м}2} \mathbf{l}_2 = \dot{\mathbf{H}}_{21} \dot{I}_{\text{м}1} \mathbf{l}_1. \quad (13.14)$$

Может быть найдена теорема взаимности для элементарных электрического и магнитного вибраторов. Лемма Лоренца при этом записывается в форме

$$\int_{V_1} (\mathbf{j}_{\text{м}1} \dot{\mathbf{H}}_2 + \mathbf{j}_{\alpha 2} \dot{\mathbf{E}}_1) \cdot dV = 0.$$

Последующая аналогичная математическая обработка этого выражения приводит к искомой теореме:

$$\dot{\mathbf{H}}_{21} \dot{I}_{\text{м}1} \mathbf{l}_1 = -\dot{\mathbf{E}}_{12} \dot{I}_{\alpha 2} \mathbf{l}_2. \quad (31.15)$$

ГЛАВА 32

ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВОЛНОВОДАХ

§ 32.1. Постановка вопроса

Возможны различные способы возбуждения поля заданного типа в волноводах. В настоящей главе будут схематично даны некоторые из этих способов и с помощью леммы Лоренца определены общие выражения, позволяющие рассчитать амплитуду поля в волноводе в результате воздействия заданной системы сторонних токов.

§ 32.2. Общие принципы возбуждения в волноводах поля заданного типа

Поля в волноводах могут возбуждаться с помощью антенных или возбуждающих устройств следующих типов:

- а) штыревого;
- б) рамочного или петлевого;
- в) щелевого.

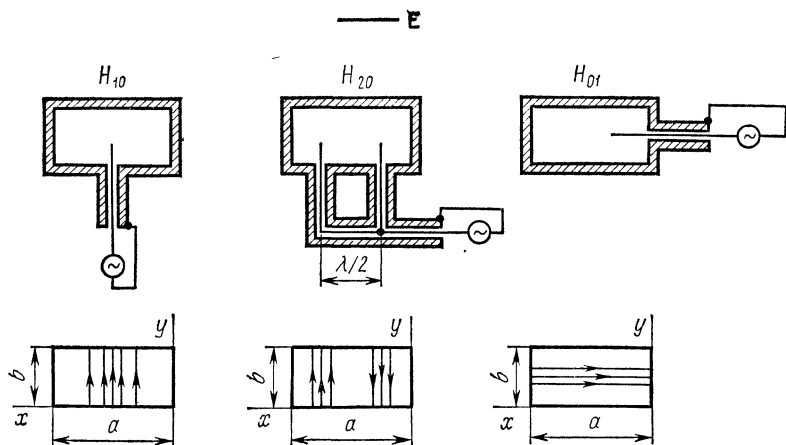


Рис. 32.1

Общие принципы размещения возбуждающих устройств состоят в следующем:

1) при возбуждении поля устройством штыревого типа штырь (или штыри) следует располагать в месте, где напряженность электрического поля в волноводе максимальна. Ось штыря должна совпадать с полем \vec{E} ;

2) при возбуждении поля устройством рамочного или петлевого типа петлю необходимо располагать в месте, где напряженность магнитного поля в волноводе максимальна. Плоскость петли должна быть перпендикулярна полю \vec{H} ;

3) при возбуждении поля антенной щелевого типа щель следует располагать так, чтобы она пересекала линии тока в стенках волновода.

На рис. 32.1 показаны схематично способы возбуждения штыревыми антеннами полей различного типа в прямоугольном волноводе.

На рис. 32.2 приведен пример возбуждения штыревой антенной волны типа H_{11} в круглом волноводе, а на рис. 32.3—примеры возбуждения волны типа H_{10} в прямоугольном волноводе и волны типа H_{11} в круглом волноводе с помощью петлевой или рамочной антенны.

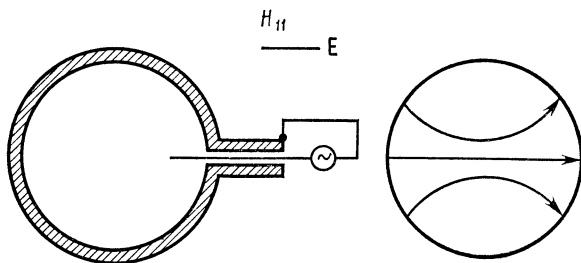


Рис. 32.2

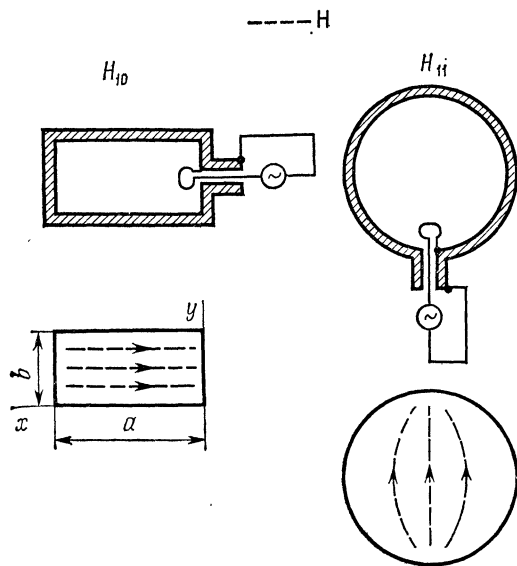


Рис. 32.3

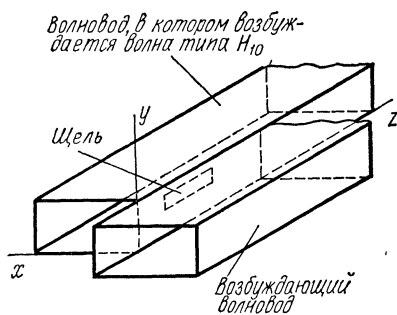


Рис. 32.4

На рис. 32.4 схематично показано возбуждение волны типа H_{10} в прямоугольном волноводе с помощью щели и второго волновода, в котором распространяется эта волна.

§ 32.3. Условия ортогональности волн в волноводах

При отсутствии сторонних токов \mathbf{J}_s и \mathbf{J}_m лемма Лоренца для ограниченного объема в соответствии с формулой (31.11) будет иметь вид

$$\oint_{S_1} \{[\dot{\mathbf{E}}_2 \mathbf{H}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1 \mathbf{H}_2]\} dS = 0. \quad (32.1)$$

Рассмотрим металлический волновод, объем которого ограничен воображаемыми плоскостями, проведенными в сечениях z_a и z_b так, как показано на рис. 32.5.

В качестве поля $\dot{\mathbf{E}}_1, \mathbf{H}_1$ в выражении (32.1) выберем волну какого-либо одного типа, в качестве поля $\dot{\mathbf{E}}_2, \mathbf{H}_2$ — волну какого-либо другого типа. Запишем лемму Лоренца для замкнутой поверхности S_1 , состоящей из двух поперечных сечений волновода в точках z_a, z_b , площадь которых обозначим соответственно S_a, S_b , и боковой поверхности волновода, заключенной между этими сечениями. Считая металлические стенки волновода идеальными и используя граничные условия у поверхности идеального металла, можно сказать, что у стенок волновода поля \mathbf{H}_1 и \mathbf{H}_2 ориентированы тангенциально, а поля $\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{E}}_2$ — нормально к стенкам. Тогда векторные произведения $[\dot{\mathbf{E}}_2 \mathbf{H}_1], [\dot{\mathbf{E}}_1 \mathbf{H}_2]$ будут ориентированы тангенциально к стенкам волновода и скалярное произведение этих векторов на элемент площади dS в лемме Ло-

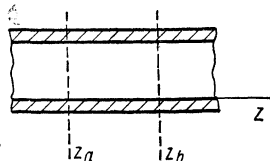


Рис. 32.5

ренца окажется равным нулю, так как элемент площади ориентирован нормально к стенкам. При этом интеграл по замкнутой поверхности S_1 в лемме Лоренца (32.1) сведется к интегралам по площадям поперечных сечений S_a и S_b :

$$\oint_{S_1} \{[\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2]\} dS = \int_{S_a} \{[\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2]\} dS_a + \\ + \int_{S_b} \{[\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2]\} dS_b = \int_{S_a} \{[\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2]\} (-\mathbf{1}_z) dS + \\ + \int_{S_b} \{[\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2]\} \mathbf{1}_z dS = 0,$$

откуда

$$\int_{S_a} \{[\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2]\} dS = \int_{S_b} \{[\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2]\} dS. \quad (32.2)$$

Полученное выражение позволяет сделать вывод о независимости входящих в него интегралов от координаты z , в силу того что значение этих интегралов в различных сечениях волновода остается неизменным.

Предположим, что волна $\dot{\mathbf{E}}_2, \dot{\mathbf{H}}_2$ распространяется в положительном направлении оси z , а волна $\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_1$ — в отрицательном направлении. Фазовая скорость волны $\dot{\mathbf{E}}_2, \dot{\mathbf{H}}_2$ при этом будет положительной, а фазовая скорость волны $\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_1$ — отрицательной. Для этого случая оказываются справедливыми выражения:

$$\dot{\mathbf{E}}_2 = \dot{\mathbf{E}}_{20} e^{-jh_2 z}, \\ \dot{\mathbf{H}}_2 = \dot{\mathbf{H}}_{20} e^{-jh_2 z}, \quad (32.3)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_1 = \dot{\mathbf{E}}_{10} e^{jh_1 z}, \\ \dot{\mathbf{H}}_1 = \dot{\mathbf{H}}_{10} e^{jh_1 z}. \quad (32.4)$$

Подставляя эти выражения в интегралы соотношения (32.2), опуская индексы a и b у площадей при S , получаем

$$\int_S \{[\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2]\} dS = \\ = \int_S \{[\dot{\mathbf{E}}_{20} \dot{\mathbf{H}}_{10}] - [\dot{\mathbf{E}}_{10} \dot{\mathbf{H}}_{20}]\} dS e^{-j(h_2 - h_1)z}. \quad (32.5)$$

Как было отмечено, интеграл этого вида не зависит от координаты z , что выполнимо при соблюдении условий:

$$\int_S \{[\dot{\mathbf{E}}_{20} \dot{\mathbf{H}}_{10}] - [\dot{\mathbf{E}}_{10} \dot{\mathbf{H}}_{20}]\} dS = 0, \quad (32.6)$$

или

$$h_2 - h_1 = 0, \quad h_2 = h_1. \quad (32.7)$$

При

$$h_2 \neq h_1 \quad (32.8)$$

должно выполняться равенство (32.6), которое в силу справедливости выражения (32.5) приводит к формуле

$$\int_S \{[\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2]\} dS = 0. \quad (32.9)$$

Рассмотрим теперь случай, когда поля $\dot{\mathbf{E}}_2$, $\dot{\mathbf{H}}_2$ и $\dot{\mathbf{E}}_1$, $\dot{\mathbf{H}}_1$ распространяются в одном направлении, например в положительном направлении оси z . Тогда справедливы выражения (32.3) и соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_1 &= \dot{\mathbf{E}}_{10} e^{-i h_1 z}, \\ \dot{\mathbf{H}}_1 &= \dot{\mathbf{H}}_{10} e^{-i h_1 z}. \end{aligned} \quad (32.10)$$

Подставляя эти выражения в интегралы (32.2), опуская индексы a и b у площадей S , получаем

$$\begin{aligned} &\int_S \{[\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2]\} dS = \\ &= \int_S \{[\dot{\mathbf{E}}_{20} \dot{\mathbf{H}}_{10}] - [\dot{\mathbf{E}}_{10} \dot{\mathbf{H}}_{20}]\} dS e^{-i(h_2 + h_1)z}. \end{aligned} \quad (32.11)$$

Независимость этого интеграла от координаты z выполняется только при соблюдении равенства (32.6), которое приводит к формуле (32.9).

Таким образом, если волны в волноводе распространяются в разные стороны и продольные волновые числа этих волн не равны друг другу или если волны распространяются в одну сторону независимо от соотношения волновых чисел, то соблюдается соотношение (32.9).

Интеграл вида $\int_S \{[\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2]\} dS$ может быть отличным от нуля только при равенстве продольных волновых чисел двух волн и распространении их в разные стороны. Эти условия называются *условиями ортогональности волн в волноводах*.

§ 32.4. Определение амплитудных коэффициентов поля, возбужденного в волноводах заданной системой сторонних токов

Условия ортогональности волн и лемма Лоренца могут быть использованы при определении амплитуды поля, возбужденного в волноводах заданной системой сторонних токов.

Пусть существует система сторонних токов в объеме V_1 , находящемся между поверхностями S_a и S_b , расположенными в сечениях $z = z_a$, $z = z_b$, как показано на рис. 32.6.

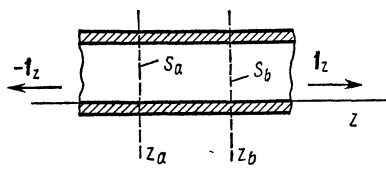


Рис. 32.6

Для решения задачи используем лемму Лоренца (31.11). Предположим для простоты, что возбуждение поля осуществляется системой сторонних токов \mathbf{j}_{a2} , остальные же токи равны нулю:

$$\mathbf{j}_{m1} = \mathbf{j}_{m2} = \mathbf{j}_{a1} = 0. \quad (32.12)$$

При этих условиях лемма Лоренца запишется в виде

$$\oint_{S_1} \{[\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2]\} dS = \int_{V_1} \mathbf{j}_{a2} \dot{\mathbf{E}}_1 dV. \quad (32.13)$$

Векторы $\dot{\mathbf{E}}_2$ и $\dot{\mathbf{E}}_1$ должны подходить к стенкам волновода, выполненным из идеального металла, нормально. В силу этого векторные произведения $[\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1]$ и $[\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2]$ будут ориентированы тангенциально к стенкам волновода. Скалярные произведения этих векторов на элемент площади dS стенок волновода в поверхностном интеграле выражения (32.13) будут равны нулю, и этот интеграл следует брать только по площадям поперечных сечений S_a и S_b . Лемма Лоренца (32.13) при этом приобретает вид

$$\int_{S_a} \{[\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2]\} (-\mathbf{1}_z) dS + \int_{S_b} \{[\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2]\} \mathbf{1}_z dS = \int_{V_1} \mathbf{j}_{a2} \dot{\mathbf{E}}_1 dV. \quad (32.14)$$

Поле $\dot{\mathbf{E}}_2$, $\dot{\mathbf{H}}_2$, возбуждаемое сторонними токами с плотностями \mathbf{j}_{a2} , в общем случае может представлять собой суперпозицию волн различных типов.

Как известно, конкретный тип волны обозначают E_{mn} или H_{mn} . Для упрощения записи суммарный вектор электрического или магнитного поля волны конкретного типа будем обозначать одним индексом k . Тогда для области волновода, соответствующей значениям $z \geq z_b$, поле, распространяющееся в сторону положительных значений оси z , может быть представлено в форме

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_k \dot{\mathbf{E}}_k, \\ \dot{\mathbf{H}}_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_k \dot{\mathbf{H}}_k. \end{aligned} \quad (32.15)$$

Здесь \dot{A}_k — амплитудные коэффициенты волны определенного типа с индексом k .

Для области волновода, соответствующей значениям $z \leq z_a$, поле, распространяющееся в сторону отрицательных значений оси z ,

выражают аналогично:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_{-k} \dot{\mathbf{E}}_{-k}, \\ \dot{\mathbf{H}}_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_{-k} \dot{\mathbf{H}}_{-k},\end{aligned}\quad (32.16)$$

где \dot{A}_{-k} — амплитудные коэффициенты волны конкретного типа.

Наличие двух полей, распространяющихся в разные стороны, обусловлено тем, что излучающие устройства, в которых действуют сторонние токи с плотностями $\mathbf{J}_{\alpha 2}$, расположены в области, ограниченной сечениями z_a и z_b , и создают электромагнитные волны, распространяющиеся от этой области в обе стороны.

Под полем $\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_1$ в выражении (32.14) будем понимать волну конкретного типа \mathbf{E}_{mn} или \mathbf{H}_{mn} , амплитудный коэффициент которой необходимо определить. Это поле считают вспомогательным при дальнейших операциях с леммой Лоренца. Предполагается, что вспомогательное поле создается своей системой сторонних токов, находящейся за пределами рассматриваемой области волновода и не связанной с плотностями токов $\mathbf{J}_{\alpha 2}$.

Если система вспомогательных токов расположена в части волновода, для которой справедливо неравенство $z < z_a$, то электромагнитная волна, созданная этими токами, в интересующей области волновода будет распространяться в сторону положительных значений оси z . Такое поле будем записывать в форме $\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_1$. Если система вспомогательных токов расположена в части волновода, для которой справедливо неравенство $z > z_b$, то электромагнитная волна, созданная этими токами, в интересующей области волновода будет распространяться в сторону отрицательных значений оси z . При этом вспомогательное поле будем записывать в форме $\dot{\mathbf{E}}_{-1}, \dot{\mathbf{H}}_{-1}$.

Рассмотрим первый случай, когда вспомогательное поле распространяется в сторону положительных значений оси z и записывается в виде $\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_1$. Подставим выражения (32.15), (32.16), а также вспомогательное поле $\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_1$ в лемму Лоренца (32.14):

$$\begin{aligned}& \int_{S_a} \left\{ \left[\sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_{-k} \dot{\mathbf{E}}_{-k} \dot{\mathbf{H}}_1 \right] - \left[\dot{\mathbf{E}}_1 \sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_{-k} \dot{\mathbf{H}}_{-k} \right] \right\} (-\mathbf{1}_z) dS + \\ & + \int_{S_b} \left\{ \left[\sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_k \dot{\mathbf{E}}_k \dot{\mathbf{H}}_1 \right] - \left[\dot{\mathbf{E}}_1 \sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_k \dot{\mathbf{H}}_k \right] \right\} \mathbf{1}_z dS = \int_{V_1} \mathbf{J}_{\alpha 2} \dot{\mathbf{E}}_1 dV.\end{aligned}\quad (32.17)$$

На основании условий ортогональности волн в волноводах (см. § 32.3) интеграл вида $\int_S \{ [\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2] \} dS$ отличен от нуля только тогда, когда поля $\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_2$ и $\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_1$ распространяются в разные стороны и продольные волновые числа этих полей равны друг другу.

В выражении (32.17) волны $\dot{\mathbf{E}}_{-k}\dot{\mathbf{H}}_{-k}$ и $\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_1$ распространяются в разные стороны. Следовательно, интеграл

$$\int_{S_a} \left\{ \left[\sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_{-k}\dot{\mathbf{E}}_{-k}\dot{\mathbf{H}}_1 \right] - \left[\dot{\mathbf{E}}_1 \sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_{-k}\dot{\mathbf{H}}_{-k} \right] \right\} (-1_z) dS \neq 0$$

в случае, когда продольное волновое число волны $\dot{\mathbf{E}}_{-k}\dot{\mathbf{H}}_{-k}$ равно продольному волновому числу волны $\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_1$. Другими словами, интеграл не равен нулю, когда тип волны $\dot{\mathbf{E}}_{-k}$, $\dot{\mathbf{H}}_{-k}$ аналогичен типу волны $\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_1$ ($k=1$) с той лишь разницей, что эти волны распространяются в разные стороны. При этом в рядах $\sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_{-k}\dot{\mathbf{E}}_{-k}$ и $\sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_{-k}\dot{\mathbf{H}}_{-k}$ сохраняются лишь члены $\dot{A}_{-1}\dot{\mathbf{E}}_{-1}$ и $\dot{A}_{-1}\dot{\mathbf{H}}_{-1}$. Второй интеграл по поверхности S_b в выражении (32.17) равен нулю в силу условий ортогональности волн, так как волны $\dot{\mathbf{E}}_k$, $\dot{\mathbf{H}}_k$ и $\dot{\mathbf{E}}_1$, $\dot{\mathbf{H}}_1$ распространяются в одну сторону. С учетом сказанного выражение (32.17) можно записать в виде

$$\int_{S_a} \{ [\dot{A}_{-1}\dot{\mathbf{E}}_{-1}\dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1\dot{A}_{-1}\dot{\mathbf{H}}_{-1}] \} (-1_z) dS = \int_{V_1} \mathbf{j}_{\text{э2}}\dot{\mathbf{E}}_1 dV,$$

или

$$\dot{A}_{-1} \int_{S_a} \{ [\dot{\mathbf{E}}_{-1}\dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_{-1}] \} 1_z dS = - \int_{V_1} \mathbf{j}_{\text{э2}}\dot{\mathbf{E}}_1 dV. \quad (32.18)$$

Это выражение позволяет найти амплитудный коэффициент \dot{A}_{-1} волны заданного типа, распространяющейся в сторону отрицательных значений оси z :

$$\dot{A}_{-1} = - \frac{\int_{V_1} \mathbf{j}_{\text{э2}}\dot{\mathbf{E}}_1 dV}{\int_{S_a} \{ [\dot{\mathbf{E}}_{-1}\dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_{-1}] \} 1_z dS}. \quad (32.19)$$

Далее рассмотрим второй случай, когда вспомогательное поле распространяется в сторону отрицательных значений оси z и записывается в виде $\dot{\mathbf{E}}_{-1}$, $\dot{\mathbf{H}}_{-1}$. Подставим выражения (32.15), (32.16) в качестве поля $\dot{\mathbf{E}}_2$, $\dot{\mathbf{H}}_2$ и вспомогательное поле в качестве поля $\dot{\mathbf{E}}_1$, $\dot{\mathbf{H}}_1$ в лемму Лоренца (32.14):

$$\int_{S_a} \left\{ \left[\sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_{-k}\dot{\mathbf{E}}_{-k}\dot{\mathbf{H}}_{-1} \right] - \left[\dot{\mathbf{E}}_{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_{-k}\dot{\mathbf{H}}_{-k} \right] \right\} (-1_z) dS + \\ + \int_{S_b} \left\{ \left[\sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_k\dot{\mathbf{E}}_k\dot{\mathbf{H}}_{-1} \right] - \left[\dot{\mathbf{E}}_{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_k\dot{\mathbf{H}}_k \right] \right\} 1_z dS = \int_{V_1} \mathbf{j}_{\text{э2}}\dot{\mathbf{E}}_1 dV. \quad (32.20)$$

На основании условий ортогональности волн в волноводах

$$\int_{S_a} \left\{ \left[\sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_{-k} \dot{\mathbf{E}}_{-k} \dot{\mathbf{H}}_{-1} \right] - \left[\dot{\mathbf{E}}_{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_{-k} \dot{\mathbf{H}}_{-k} \right] \right\} (-1_z) dS = 0.$$

Путем рассуждений, аналогичных проведенным ранее, выражение (32.20) можно представить в виде

$$\dot{A}_1 \int_{S_b} \{ [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_{-1}] - [\dot{\mathbf{E}}_{-1} \dot{\mathbf{H}}_1] \} 1_z dS = \int_{V_1} \mathbf{j}_{\text{э2}} \dot{\mathbf{E}}_1 dV.$$

Эта формула позволяет определить амплитудный коэффициент \dot{A}_1 волны искомого типа, распространяющейся в сторону положительных значений оси z :

$$\dot{A}_1 = \frac{\int_{V_1} \mathbf{j}_{\text{э2}} \dot{\mathbf{E}}_1 dV}{\int_{S_b} \{ [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_{-1}] - [\dot{\mathbf{E}}_{-1} \dot{\mathbf{H}}_1] \} 1_z dS}. \quad (32.21)$$

Аналогичен ход рассуждений и в случае волн магнитного типа. При этом в лемме Лоренца (31.11) полагают

$$\mathbf{j}_{\text{м1}} = \mathbf{j}_{\text{э1}} = \mathbf{j}_{\text{э2}} = 0, \quad (32.22)$$

и она приобретает вид

$$\oint_{S_1} \{ [\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2] \} dS = - \int_{V_1} \mathbf{j}_{\text{м2}} \dot{\mathbf{H}}_1 dV. \quad (32.23)$$

Обозначив амплитудный коэффициент искомого поля, распространяющегося в сторону отрицательных значений оси z , \dot{B}_{-1} и амплитудный коэффициент искомого поля, распространяющегося в сторону положительных значений оси z , \dot{B}_1 , получим следующие выражения для этих коэффициентов:

$$\dot{B}_{-1} = \frac{\int_{V_1} \mathbf{j}_{\text{м2}} \dot{\mathbf{H}}_1 dV}{\int_{S_a} \{ [\dot{\mathbf{E}}_{-1} \dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_{-1}] \} 1_z dS}, \quad (32.24)$$

$$\dot{B}_1 = - \frac{\int_{V_1} \mathbf{j}_{\text{м2}} \dot{\mathbf{H}}_1 dV}{\int_{S_b} \{ [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_{-1}] - [\dot{\mathbf{E}}_{-1} \dot{\mathbf{H}}_1] \} 1_z dS}. \quad (32.25)$$

В приложении IV дан пример расчета амплитудного коэффициента волны типа \dot{H}_{10} в прямоугольном волноводе.

ГЛАВА 33
ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В
ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРАХ

§ 33.1. Постановка вопроса

Так же как и возбуждение поля заданного типа в волноводах, создание волн заданного типа в объемных резонаторах может осуществляться различными способами, описанными в § 32.2.

При возбуждении поля устройством штыревого типа штырь следует располагать в месте наибольшего электрического поля волны заданного типа в резонаторе и ориентировать параллельно электрическим силовым линиям.

При возбуждении поля устройством петлевого типа петля должна быть расположена в месте наибольшего магнитного поля волны заданного типа в резонаторе и ориентирована так, чтобы плоскость петли пересекалась магнитными силовыми линиями.

Если для возбуждения используют щель, то последняя должна пересекать линии тока, создаваемые в стенках резонатора волной заданного типа.

В настоящей главе будут рассмотрены вопросы возбуждения электромагнитного поля в объемных резонаторах заданной системой сторонних токов и определены общие выражения для амплитудных коэффициентов волны заданного типа.

§ 33.2. Условия ортогональности волн в объемных резонаторах

Допустим, что в объемном резонаторе, лишенном потерь, существуют собственные колебания типов k и q :

Под индексами k и q будем понимать определенные совокупности индексов m, n, p , определяющих поле в резонаторе. Тогда для каждого из колебаний будут справедливы следующие уравнения Максвелла, записанные без сторонних токов:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_k = j\omega_k \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}_k, \quad (33.1)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_k = -j\omega_k \mu_a \dot{\mathbf{H}}_k, \quad (33.2)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_q = j\omega_q \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}_q, \quad (33.3)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_q = -j\omega_q \mu_a \dot{\mathbf{H}}_q. \quad (33.4)$$

Запишем уравнения (33.3), (33.4) для сопряженных значений векторов $\dot{\mathbf{E}}_q^*$ и $\dot{\mathbf{H}}_q^*$:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_q^* = -j\omega_q \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}_q^*, \quad (33.5)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_q^* = j\omega_q \mu_a \dot{\mathbf{H}}_q^*. \quad (33.6)$$

Умножим уравнение (33.6) скалярно на $\dot{\mathbf{H}}_k$, уравнение (33.1) — на $\dot{\mathbf{E}}_q^*$ и вычтем почленно из первого произведения второе:

$$\dot{\mathbf{H}}_k \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_q^* - \dot{\mathbf{E}}_q^* \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_k = j\omega_q \mu_a \dot{\mathbf{H}}_q^* \dot{\mathbf{H}}_k - j\omega_k \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}_k \dot{\mathbf{E}}_q^*. \quad (33.7)$$

Умножим уравнение (33.2) скалярно на $\dot{\mathbf{H}}_q^*$, уравнение (33.3) — на $\dot{\mathbf{E}}_k$ и вычтем почленно из первого произведения второе:

$$\dot{\mathbf{H}}_q^* \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_k - \dot{\mathbf{E}}_k \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_q^* = -j\omega_k \mu_a \dot{\mathbf{H}}_k \dot{\mathbf{H}}_q^* + j\omega_q \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{E}}_k. \quad (33.8)$$

Далее используем векторное тождество $\mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b} = \operatorname{div} [\mathbf{ab}]$. В результате соотношения (33.7) и (33.8) запишутся в виде

$$\operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{H}}_k] = j\omega_q \mu_a \dot{\mathbf{H}}_q^* \dot{\mathbf{H}}_k - j\omega_k \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}_k \dot{\mathbf{E}}_q^*, \quad (33.9)$$

$$\operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}}_k \dot{\mathbf{H}}_q^*] = -j\omega_k \mu_a \dot{\mathbf{H}}_k \dot{\mathbf{H}}_q^* + j\omega_q \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{E}}_k. \quad (33.10)$$

Проинтегрируем выражения (33.9), (33.10) по объему V_1 и используем теорему Остроградского—Гаусса (2.1):

$$\oint_{S_1} [\dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{H}}_k] dS = j\omega_q \mu_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{H}}_q^* \dot{\mathbf{H}}_k dV - j\omega_k \varepsilon_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{E}}_k \dot{\mathbf{E}}_q^* dV, \quad (33.11)$$

$$\oint_{S_1} [\dot{\mathbf{E}}_k \dot{\mathbf{H}}_q^*] dS = -j\omega_k \mu_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{H}}_k \dot{\mathbf{H}}_q^* dV + j\omega_q \varepsilon_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{E}}_k dV. \quad (33.12)$$

В случае идеального металла поля $\dot{\mathbf{E}}_q^*$ и $\dot{\mathbf{E}}_k$ подходят нормально к стенкам резонатора и векторы, возникающие в результате векторных произведений $[\dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{H}}_k]$, $[\dot{\mathbf{E}}_k \dot{\mathbf{H}}_q^*]$, будут ориентированы к стенкам тангенциально. Тогда скалярные произведения этих векторов на элемент площади dS , ориентированный нормально к стенкам резонатора, будут равны нулю. Нулю будут равны и поверхностные интегралы в выражениях (33.11), (33.12). При этом возникают соотношения:

$$\omega_q \mu_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{H}}_q^* \dot{\mathbf{H}}_k dV = \omega_k \varepsilon_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{E}}_k \dot{\mathbf{E}}_q^* dV, \quad (33.13)$$

$$\omega_k \mu_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{H}}_k \dot{\mathbf{H}}_q^* dV = \omega_q \varepsilon_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{E}}_k dV. \quad (33.14)$$

Умножим выражение (33.13) на ω_k , выражение (33.14) — на ω_q и вычтем из первого произведения второе:

$$(\omega_k^2 - \omega_q^2) \varepsilon_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{E}}_k \dot{\mathbf{E}}_q^* dV = 0. \quad (33.15)$$

Умножим выражение (33.13) на ω_q , выражение (33.14) — на ω_k и вычтем из первого произведения второе:

$$(\omega_q^2 - \omega_k^2) \mu_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{H}}_k \dot{\mathbf{H}}_q^* dV = 0. \quad (33.16)$$

Из соотношений (33.15) и (33.16) следует:

при $\omega_q \neq \omega_k, q \neq k$

$$\int_{V_1} \dot{\mathbf{E}}_k \dot{\mathbf{E}}_q^* dV = \int_{V_1} \dot{\mathbf{H}}_k \dot{\mathbf{H}}_q^* dV = 0, \quad (33.17)$$

при $\omega_q = \omega_k, q = k$

$$\int_{V_1} \dot{\mathbf{E}}_k \dot{\mathbf{E}}_q^* dV \neq 0, \quad \int_{V_1} \dot{\mathbf{H}}_k \dot{\mathbf{H}}_q^* dV \neq 0. \quad (33.18)$$

Из соотношений (33.13), (33.14) можно сделать вывод, что при $q = k$

$$\mu_a \int_{V_1} |\dot{\mathbf{H}}_q|^2 dV = \varepsilon_a \int_{V_1} |\dot{\mathbf{E}}_q|^2 dV. \quad (33.19)$$

Формулы (33.17), (33.18) называют *условиями ортогональности волн в объемных резонаторах*.

§ 33.3. Определение амплитудных коэффициентов поля, возбужденного в объемных резонаторах заданной системой сторонних токов

Допустим, что возбуждение поля в объемном резонаторе осуществляется заданной системой сторонних электрических токов с плотностью \mathbf{J}_s . При этом возбужденное поле $\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}$ подчиняется следующим уравнениям Максвелла:

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = j\omega\varepsilon_a \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{J}_s, \quad (33.20)$$

$$\text{rot } \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu_a \dot{\mathbf{H}}. \quad (33.21)$$

При отсутствии стороннего тока решением однородных уравнений Максвелла явились бы собственные колебания, число типов которых, как было установлено в гл. 21, бесконечно велико. В общем случае поля $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ представляли бы собой суперпозицию бесконечного числа волн различных типов:

$$\dot{\mathbf{E}} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \dot{\mathbf{E}}_k, \quad (33.22)$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \dot{\mathbf{H}}_k. \quad (33.23)$$

Введение возбуждающего устройства с плотностью тока \mathbf{J}_s приводит к некоторому искажению картины поля в резонаторе по сравнению с собственными колебаниями, которое более заметно в непосредственной близости от возбуждающего устройства. Тем не менее в силу высокой добротности резонаторов картина электрического и магнитного полей, возникающих в результате действия стороннего тока, мало отличается от вида собственных колебаний. Задачей проводимого исследования является отыскание амплитудных коэффициентов волн заданного типа.

Обозначим индекс, соответствующий искомой волне, буквой q . Положим с некоторой погрешностью, что эта волна будет близка к одному из собственных колебаний рядов (33.22), (33.23). Как собственные резонансные колебания поля $\dot{\mathbf{E}}_q$, $\dot{\mathbf{H}}_q$ должны удовлетворять однородным уравнениям Максвелла:

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}}_q = j\omega_p \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}_q, \quad (33.24)$$

$$\text{rot } \dot{\mathbf{E}}_q = -j\omega_p \mu_a \dot{\mathbf{H}}_q, \quad (33.25)$$

где ω_p — резонансная частота.

Далее осуществим математические операции, сходные с теми, которые были проведены в предыдущем параграфе. Запишем уравнения (33.24), (33.25) для сопряженных значений векторов $\dot{\mathbf{E}}_q^*$, $\dot{\mathbf{H}}_q^*$:

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}}_q^* = -j\omega_p \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}_q^*, \quad (33.26)$$

$$\text{rot } \dot{\mathbf{E}}_q^* = j\omega_p \mu_a \dot{\mathbf{H}}_q^*. \quad (33.27)$$

Умножим уравнение (33.27) скалярно на $\dot{\mathbf{H}}$, уравнение (33.20) — на \mathbf{E}_q^* и вычтем почленно из первого произведения второе:

$$\dot{\mathbf{H}} \text{ rot } \dot{\mathbf{E}}_q^* - \dot{\mathbf{E}}_q^* \text{ rot } \dot{\mathbf{H}} = j\omega_p \mu_a \dot{\mathbf{H}}_q^* \dot{\mathbf{H}} - j\omega \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{E}}_q^* - \mathbf{J}_s \dot{\mathbf{E}}_q^*. \quad (33.28)$$

Затем умножим уравнение (33.21) скалярно на \mathbf{H}_q^* , уравнение (33.26) — на $\dot{\mathbf{E}}$ и вычтем из первого произведения второе:

$$\dot{\mathbf{H}}_q^* \text{ rot } \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}} \text{ rot } \dot{\mathbf{H}}_q^* = -j\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{H}}_q^* + j\omega_p \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{E}}. \quad (33.29)$$

В соответствии с векторными тождествами можно написать соотношения

$$\dot{\mathbf{H}} \text{ rot } \dot{\mathbf{E}}_q^* - \dot{\mathbf{E}}_q^* \text{ rot } \dot{\mathbf{H}} = \text{div} [\dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{H}}], \quad (33.30)$$

$$\dot{\mathbf{H}}_q^* \text{ rot } \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}} \text{ rot } \dot{\mathbf{H}}_q^* = \text{div} [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}_q^*]. \quad (33.31)$$

Используя эти тождества, уравнения (33.28), (33.29) можно записать в виде

$$\text{div} [\dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{H}}] = j\omega_p \mu_a \dot{\mathbf{H}}_q^* \dot{\mathbf{H}} - j\omega \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{E}}_q^* - \mathbf{J}_s \dot{\mathbf{E}}_q^*,$$

$$\text{div} [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}_q^*] = -j\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{H}}_q^* + j\omega_p \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{E}}.$$

Проинтегрируем полученные выражения по объему V_1 и используем теорему Остроградского—Гаусса, в силу которой

$$\int_{V_1} \text{div} [\dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{H}}] dV = \oint_{S_1} [\dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{H}}] dS,$$

$$\int_{V_1} \text{div} [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}_q^*] dV = \oint_{S_1} [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}_q^*] dS,$$

$$\oint_{S_1} [\dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{H}}] dS = j\omega_p \mu_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{H}}_q^* \dot{\mathbf{H}} dV - j\omega \varepsilon_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{E}}_q^* dV - \int_{V_1} \mathbf{J}_s \dot{\mathbf{E}}_q^* dV, \quad (33.32)$$

$$\oint_{S_1} [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}_q^*] dS = -j\omega \mu_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{H}}_q^* dV + j\omega_p \varepsilon_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{E}} dV. \quad (33.33)$$

В соответствии с граничными условиями у поверхности идеального металла поля $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{E}}_q^*$ подходят нормально к стенкам резонатора. При этом векторные произведения $[\dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{H}}]$, $[\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}_q^*]$ будут ориентированы к стенкам резонатора тангенциально. Скалярные произведения этих векторов на элемент площади $d\mathbf{S}$, ориентированный нормально к стенкам резонатора, равны нулю, и выражения (33.32), (33.33) записываются в форме

$$j\omega_p \mu_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{H}}_q^* \dot{\mathbf{H}} dV - j\omega \varepsilon_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{E}}_q^* dV - \int_{V_1} \mathbf{j}_s \dot{\mathbf{E}}_q^* dV = 0, \quad (33.34)$$

$$-j\omega \mu_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{H}}_q^* dV + j\omega_p \varepsilon_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{E}} dV = 0. \quad (33.35)$$

Как указывалось, поля $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ с некоторой погрешностью можно рассматривать как собственные колебания резонатора. В этом случае поля $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ по общей структуре близки к рядам (33.22), (33.23). К собственным колебаниям применимы условия ортогональности (33.17), (33.18), в силу которых интегралы $\int_{V_1} \dot{\mathbf{H}}_q^* \dot{\mathbf{H}} dV$, $\int_{V_1} \dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{E}} dV$ отличны от нуля только тогда, когда индекс q равен индексу k в рядах (33.22), (33.23). При этом выражения (33.34), (33.35) приобретают следующий вид

$$j\omega_p \mu_a \dot{A}_q \int_{V_1} \dot{\mathbf{H}}_q^* \dot{\mathbf{H}}_q dV - j\omega \varepsilon_a \dot{A}_q \int_{V_1} \dot{\mathbf{E}}_q \dot{\mathbf{E}}_q^* dV - \int_{V_1} \mathbf{j}_s \dot{\mathbf{E}}_q^* dV = 0, \\ -j\omega \mu_a \dot{A}_q \int_{V_1} \dot{\mathbf{H}}_q \dot{\mathbf{H}}_q^* dV + j\omega_p \varepsilon_a \dot{A}_q \int_{V_1} \dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{E}}_q dV = 0,$$

или

$$j\omega_p \mu_a \dot{A}_q \int_{V_1} |\dot{\mathbf{H}}_q|^2 dV - j\omega \varepsilon_a \dot{A}_q \int_{V_1} |\dot{\mathbf{E}}_q|^2 dV = \int_{V_1} \mathbf{j}_s \dot{\mathbf{E}}_q^* dV, \quad (33.36)$$

$$-j\omega \mu_a \dot{A}_q \int_{V_1} |\dot{\mathbf{H}}_q|^2 dV + j\omega_p \varepsilon_a \dot{A}_q \int_{V_1} |\dot{\mathbf{E}}_q|^2 dV. \quad (33.37)$$

Умножим выражение (33.36) на ω , выражение (33.37) — на ω_p и сложим почленно первое произведение со вторым:

$$j(\omega_p^2 - \omega^2) \varepsilon_a \dot{A}_q \int_{V_1} |\dot{\mathbf{E}}_q|^2 dV = \omega \int_{V_1} \mathbf{j}_s \dot{\mathbf{E}}_q^* dV,$$

откуда

$$\dot{A}_q = \frac{\omega \int_{V_1} \mathbf{j}_s \dot{\mathbf{E}}_q^* dV}{j(\omega_p^2 - \omega^2) \varepsilon_a \int_{V_1} |\dot{\mathbf{E}}_q|^2 dV}. \quad (33.38)$$

Когда частота ω колебаний стороннего тока с плотностью \mathbf{j}_s стремится к резонансной частоте ω_p собственных колебаний резонатора, амплитудный коэффициент \dot{A}_q , как следует из выражения

(33.38), стремится к бесконечности, что эквивалентно процессам в идеальном колебательном контуре. Для определения амплитуды колебаний в реальном резонаторе целесообразно исходить из следующих рассуждений.

Для заданного типа волн, как отмечалось в гл. 26, объемный резонатор может быть заменен эквивалентным колебательным контуром, обладающим определенными параметрами L_3 , C_3 , r_3 и добротностью Q . В таком эквивалентном колебательном контуре колебания затухают по закону $e^{-\alpha_3 t}$, где эквивалентный коэффициент затухания α_3 определяется одной из следующих формул:

$$\alpha_3 = \frac{r_3}{2L_3} = \frac{\omega_p r_3}{2\omega_p L_3} = \frac{\omega_p}{2Q}. \quad (33.39)$$

Колебания в таком контуре могут быть записаны в виде соотношений

$$u(t) = U_0 e^{-\alpha_3 t} \cos(\omega_p t + \varphi) = \operatorname{Re} \{ U_0 e^{-\alpha_3 t} \times e^{j(\omega_p t + \varphi)} \},$$

или

$$\dot{u}(t) = \operatorname{Re} \{ \dot{U}_0 e^{j(\omega_p + j\alpha_3)t} \}, \quad (33.40)$$

где $\dot{U}_0 = U_0 e^{j\varphi}$.

При такой форме записи выражение

$$\omega_p + j\alpha_3 = \omega_p + j \frac{\omega_p}{2Q} \quad (33.41)$$

можно рассматривать как комплексную частоту собственных колебаний в резонаторе, возникающую при наличии потерь. Подставив вместо квадрата частоты ω_p^2 в знаменателе выражения (33.38) квадрат комплексной частоты собственных колебаний $(\omega_p + j\alpha_3)^2$, можно учесть влияние потерь на процессы в объемном резонаторе:

$$(\omega_p + j\alpha_3)^2 = \left(\omega_p + j \frac{\omega_p}{2Q} \right)^2 = \omega_p^2 + j \frac{\omega_p^2}{Q} - \frac{\omega_p^2}{4Q^2}.$$

Объемные резонаторы обладают большой добротностью, поэтому

$$\omega_p^2/4Q^2 \ll \omega_p^2/Q$$

и

$$(\omega_p + j\alpha_3)^2 \approx \omega_p^2 + j \frac{\omega_p^2}{Q}. \quad (33.42)$$

Подставляя это выражение вместо ω_p^2 в знаменатель формулы (33.38), получаем соотношение для амплитудного коэффициента \dot{A}_{qr} поля в реальном объемном резонаторе:

$$\dot{A}_{qr} = \frac{\omega \int_{V_1} \mathbf{j}_3 \dot{\mathbf{E}}_q^* dV}{j \left(\omega_p^2 + j \frac{\omega_p^2}{Q} - \omega^2 \right) \varepsilon_a \int_{V_1} |\dot{\mathbf{E}}_q|^2 dV}. \quad (33.43)$$

При резонансе $\omega = \omega_p$ и

$$\dot{A}_{grp} = - \frac{Q \int_{V_1} \mathbf{j}_3 \dot{\mathbf{E}}_q^* dV}{\omega_p \epsilon_a \int_{V_1} |\dot{\mathbf{E}}_q|^2 dV}. \quad (33.44)$$

При возбуждении резонатора заданной системой сторонних магнитных токов с плотностью \mathbf{j}_m выражения для амплитудных коэффициентов можно легко получить путем использования принципа перестановочной двойственности. Для этого в выражении (33.44) следует осуществить обычные перестановки:

$$\dot{\mathbf{H}} \leftrightarrow \dot{\mathbf{E}}, \quad \epsilon_a \leftrightarrow -\mu_a, \quad \mathbf{j}_3 \rightarrow -\mathbf{j}_m.$$

В результате возникает следующая формула для амплитудного коэффициента при резонансе:

$$\dot{A}_{grp} = - \frac{Q \int_{V_1} \mathbf{j}_m \dot{\mathbf{H}}_q^* dV}{\omega_p \mu_a \int_{V_1} |\dot{\mathbf{H}}_q|^2 dV}. \quad (33.45)$$

В приложении IV дан пример расчета амплитудного коэффициента волны типа H_{101} в прямоугольном резонаторе.

ГЛАВА 34

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

§ 34.1. Постановка вопроса

В анизотропных средах, как указывалось в § 1.3, 1.5, возникают более сложные связи между векторами $\dot{\mathbf{D}}$ и $\dot{\mathbf{E}}$ или $\dot{\mathbf{B}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$, в зависимости от того, в каком из параметров среды (ϵ_a или μ_a) проявляется анизотропия. В случае анизотропии тензорный характер ϵ_a или μ_a приводит к возникновению новых физических процессов в среде, математическое исследование которых существенно усложняется вследствие усложнения исходной системы электродинамических уравнений. Анализ электродинамических задач с тензорной диэлектрической проницаемостью не отличается от анализа явлений с тензорной магнитной проницаемостью среды. Плазма и ферриты, находящиеся в магнитном поле, являются анизотропными средами. В плазме диэлектрическая проницаемость является тензором, в ферритах тензорный характер имеет магнитная проницаемость.

В настоящей главе будут рассмотрены некоторые основные вопросы распространения электромагнитных волн в однородной анизотропной ферритовой среде. Метод анализа пригоден при замене ферритовой среды намагниченной плазмой.

§ 34.2. Вид тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей намагниченной плазмы и феррита

Плазма, представляющая собой газ, в котором некоторая часть атомов или молекул ионизована, обладает параметрами, зависящими от степени ионизации, частоты распространяющихся в ней электромагнитных волн и воздействующего на нее постоянного магнитного поля. В отсутствие магнитного поля плазма изотропна. При воздействии на плазму постоянного магнитного поля диэлектрическая проницаемость плазмы становится тензором. В зависимости от характера ионизации и мощности электромагнитных волн плазму следует рассматривать как однородную или неоднородную, линейную или нелинейную среду. Не вдаваясь в суть физических процессов, происходящих в плазме [6], [7], можно сказать, что в намагниченной вдоль оси z плазме ее абсолютная диэлектрическая проницаемость ϵ_a может быть представлена в виде тензора:

$$(\epsilon_a) = \begin{pmatrix} \epsilon_a & -ja & 0 \\ ja & \epsilon_a & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{a33} \end{pmatrix}. \quad (34.1)$$

Компоненты тензора зависят от концентрации электронов в плазме, частоты соударений электронов с ионами и молекулами, величины постоянного магнитного поля и частоты распространяющихся в плазме электромагнитных волн. Сравнивая тензор (ϵ_a) с тензором диэлектрической проницаемости общего вида (1.25), можно сделать заключение об относительной простоте тензора (34.1). В соответствии с выражением общего вида (1.23) связь составляющих комплексной амплитуды вектора электрического смещения \mathbf{D} с составляющими комплексной амплитуды вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} в декартовой системе координат в случае тензора (34.1) выражается следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \dot{D}_x &= \epsilon_a \dot{E}_x - ja \dot{E}_y, \\ \dot{D}_y &= ja \dot{E}_x + \epsilon_a \dot{E}_y, \\ \dot{D}_z &= \epsilon_{a33} \dot{E}_z. \end{aligned} \right\} \quad (34.2)$$

Эту связь необходимо учитывать при записи в скалярной форме первого уравнения Максвелла. В отсутствие потерь и сторонних токов, при обычном (скалярном) виде диэлектрической проницаемости первое уравнение Максвелла записывают в виде

$$\text{rot } \mathbf{H} = j\omega \epsilon_a \mathbf{E}. \quad (34.3)$$

Если $\epsilon_a = (\epsilon_a)$ — тензор, то вид этого уравнения будет следующим:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega (\epsilon_a) \dot{\mathbf{E}}. \quad (34.4)$$

Поскольку магнитная проницаемость плазмы при воздействии постоянного магнитного поля остается скалярной величиной, равной μ_a , второе уравнение Максвелла записывают в обычной форме:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}. \quad (34.5)$$

Запись этих уравнений в форме

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega \dot{\mathbf{D}}, \quad (34.6)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega \dot{\mathbf{B}} \quad (34.7)$$

остается в силе независимо от того, скалярными или тензорными являются величины ϵ_a и μ_a . Записывая ротор в декартовой системе координат, уравнение (34.6) можно представить системой скалярных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} &= j\omega \dot{D}_x, \\ \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} &= j\omega \dot{D}_y, \\ \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} &= j\omega \dot{D}_z. \end{aligned} \right\} \quad (34.8)$$

Подставляя выражения для \dot{D}_x , \dot{D}_y , \dot{D}_z из формул (34.2), запишем систему (34.8) таким образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} &= j\omega \epsilon_a \dot{E}_x + \omega a \dot{E}_y, \\ \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} &= -\omega a \dot{E}_x + j\omega \epsilon_a \dot{E}_y, \\ \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} &= j\omega \epsilon_{a33} \dot{E}_z. \end{aligned} \right\} \quad (34.9)$$

Если анизотропии нет, то $a=0$, $\epsilon_{a33} = \epsilon_a$ и система уравнений (34.9) существенно упрощается:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} &= j\omega \epsilon_a \dot{E}_x, \\ \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} &= j\omega \epsilon_a \dot{E}_y, \\ \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} &= j\omega \epsilon_a \dot{E}_z. \end{aligned} \right\} \quad (34.10)$$

Сравнение систем уравнений (34.9) и (34.10) позволяет сделать вывод о том, что в основе анализа явлений в анизотропной среде лежат уравнения более сложные, чем в случае изотропной среды.

Ферриты представляют собой вещества, обладающие магнитными свойствами ферромагнетиков и электрическими свойствами диэлектриков. Относительная магнитная проницаемость ферритов может достигать тысяч и относительная диэлектрическая проницаемость — десятков. Поскольку их электрическая и магнитная удельные проводимости относительно малы, затухание электромагнитных волн в ферритах невелико и при исследовании фундаментальных процессов в ферритах электрической и магнитной проводимостями в ряде случаев можно пренебречь.

Различают обычные ферриты, в которых внутреннее магнитное поле отсутствует, и монокристаллы ферритов (гексаферриты), в которых существует значительное собственное магнитное поле. Магнитная проницаемость обычных ферритов, не находящихся во внешнем магнитном поле, представляет собой скалярную величину. При воздействии внешнего магнитного поля магнитная проницаемость становится тензором.

Магнитная проницаемость монокристаллов является тензорной величиной. При воздействии на ферритовую среду внешнего магнитного поля, ориентированного вдоль оси z , тензор магнитной проницаемости феррита по форме сходен с тензором диэлектрической проницаемости плазмы:

$$(\mu_a) = \begin{pmatrix} \mu_a - jb & 0 & 0 \\ jb & \mu_a & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{a33} \end{pmatrix}. \quad (34.11)$$

Диэлектрическая проницаемость ферритов является величиной скалярной. Поэтому первое уравнение Максвелла следует записать в виде (34.3), а второе уравнение Максвелла — в форме (34.7). Связь векторов $\dot{\mathbf{B}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ определяется соотношением

$$\dot{\mathbf{B}} = (\mu_a) \dot{\mathbf{H}}, \quad (34.12)$$

или в развернутой форме с учетом тензора (34.11):

$$\left. \begin{aligned} \dot{B}_x &= \mu_a \dot{H}_x - jb \dot{H}_y, \\ \dot{B}_y &= jb \dot{H}_x + \mu_a \dot{H}_y, \\ \dot{B}_z &= \mu_{a33} \dot{H}_z. \end{aligned} \right\} \quad (34.13)$$

Соответственно второе уравнение Максвелла (34.7) можно представить системой скалярных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} &= -j\omega \mu_a \dot{H}_x - \omega b \dot{H}_y, \\ \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} &= \omega b \dot{H}_x - j\omega \mu_a \dot{H}_y, \\ \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} &= -j\omega \mu_{a33} \dot{H}_z. \end{aligned} \right\} \quad (34.14)$$

При исчезновении подмагничивающего поля обычный феррит становится изотропным материалом. При этом $b=0$, $\mu_{\text{азз}}=\mu_a$, уравнения (34.14) превращаются в обычную систему скалярных уравнений Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} &= -j\omega\mu_a \dot{H}_x, \\ \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} &= -j\omega\mu_a \dot{H}_y, \\ \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} &= -j\omega\mu_a \dot{H}_z. \end{aligned} \right\} \quad (34.15)$$

§ 34.3. Продольное распространение плоских волн в намагниченной ферритовой среде. Эффект Фарадея

Пусть однородная ферритовая среда без потерь намагничена постоянным магнитным полем, ориентированным вдоль оси z . При этом тензор магнитной проницаемости среды определяется выражением (34.11). Уравнения (34.10) и (34.14) дают систему скалярных уравнений, соответствующих первому и второму уравнениям Максвелла в данном случае.

Рассмотрим распространение в такой среде плоской волны, вектор Пойнтинга которой ориентирован вдоль оси z . При этом справедливы следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x, \dot{E}_y, \dot{H}_x, \dot{H}_y &\neq 0, \\ \dot{E}_z = \dot{H}_z &= 0, \\ \partial/\partial z \neq 0, \quad \partial/\partial x = \partial/\partial y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (34.16)$$

Используя эти выражения в уравнениях (34.10), (34.14), получим систему уравнений, описывающих рассматриваемый процесс:

$$\left. \begin{aligned} d\dot{H}_y/dz &= j\omega\epsilon_a \dot{E}_x, \\ d\dot{H}_x/dz &= j\omega\epsilon_a \dot{E}_y, \\ d\dot{E}_y/dz &= j\omega\mu_a \dot{H}_x + \omega b \dot{H}_y, \\ d\dot{E}_x/dz &= \omega b \dot{H}_x - j\omega\mu_a \dot{H}_y. \end{aligned} \right\} \quad (34.17)$$

Запишем решения системы (34.17) в форме падающих волн:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_x &= \dot{H}_{x0} e^{-j\beta_{\Phi} z}, \\ \dot{H}_y &= \dot{H}_{y0} e^{-j\beta_{\Phi} z}, \\ \dot{E}_x &= \dot{E}_{x0} e^{-j\beta_{\Phi} z}, \\ \dot{E}_y &= \dot{E}_{y0} e^{-j\beta_{\Phi} z}, \end{aligned} \right\} \quad (34.18)$$

где β_{Φ} — фазовая постоянная плоской волны в феррите.

Подставляя решения (34.18) в систему уравнений (34.17), получаем соотношения:

$$\beta_{\Phi} \dot{H}_{y0} = \omega \varepsilon_a \dot{E}_{x0}, \quad (34.19)$$

$$\beta_{\Phi} \dot{H}_{x0} = -\omega \varepsilon_a \dot{E}_{y0}, \quad (34.20)$$

$$-\beta_{\Phi} \dot{E}_{y0} = \omega (\mu_a \dot{H}_{x0} - j b \dot{H}_{y0}), \quad (34.21)$$

$$\beta_{\Phi} \dot{E}_{x0} = \omega (j b \dot{H}_{x0} + \mu_a \dot{H}_{y0}). \quad (34.22)$$

Из выражения (34.22) найдем \dot{E}_{x0} и подставим его значение в формулу (34.19):

$$\beta_{\Phi} \dot{H}_{y0} = \frac{\omega^2 \varepsilon_a}{\beta_{\Phi}} (j b \dot{H}_{x0} + \mu_a \dot{H}_{y0}). \quad (34.23)$$

Из выражения (34.21) найдем \dot{E}_{y0} и подставим его значение в формулу (34.20)

$$\beta_{\Phi} \dot{H}_{x0} = \frac{\omega^2 \varepsilon_a}{\beta_{\Phi}} (\mu_a \dot{H}_{x0} - j b \dot{H}_{y0}). \quad (34.24)$$

Далее выразим с помощью соотношения (34.24) \dot{H}_{x0} через \dot{H}_{y0} :

$$H_{x0} (\beta_{\Phi}^2 - \omega^2 \mu_a \varepsilon_a) = -j b \omega^2 \varepsilon_a \dot{H}_{y0},$$

откуда

$$\dot{H}_{x0} = -\frac{j b \omega^2 \varepsilon_a}{\beta_{\Phi}^2 - \omega^2 \mu_a \varepsilon_a} \dot{H}_{y0}. \quad (34.25)$$

Умножим выражение (34.23) на β_{Φ} и подставим в него значение \dot{H}_{x0} из формулы (34.25):

$$\beta_{\Phi}^2 \dot{H}_{y0} = -j b \omega^2 \varepsilon_a \frac{j b \omega^2 \varepsilon_a}{\beta_{\Phi}^2 - \omega^2 \mu_a \varepsilon_a} \dot{H}_{y0} + \omega^2 \mu_a \varepsilon_a \dot{H}_{y0}.$$

Сокращая это выражение на \dot{H}_{y0} и выполняя некоторые преобразования, найдем уравнение для фазовой постоянной плоской волны в ферритовой среде β_{Φ} :

$$\beta_{\Phi}^4 - 2\omega^2 \mu_a \varepsilon_a \beta_{\Phi}^2 + \omega^4 \mu_a^2 \varepsilon_a^2 - \omega^4 b^2 \varepsilon_a^2 = 0, \quad (34.26)$$

имеющее простое решение:

$$\beta_{\Phi} = \pm \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a \pm \sqrt{\omega^4 \mu_a^2 \varepsilon_a^2 - \omega^4 \mu_a^2 \varepsilon_a^2 + \omega^4 b^2 \varepsilon_a^2}},$$

$$\beta_{\Phi} = \pm \omega \sqrt{\varepsilon_a (\mu_a \pm b)}. \quad (34.27)$$

Знак «плюс» перед корнем в соответствии с решениями (34.18) следует использовать для волны, распространяющейся в сторону положительных значений оси z . Знак «минус» соответствует отраженной волне, распространяющейся в сторону отрицательных значений оси z . Так как в рассматриваемом случае среда однородна и безгранична, отраженной волны не может возникнуть и выраже-

ние (34.27) записывают в форме

$$\beta_{\Phi} = \omega \sqrt{\varepsilon_a (\mu_a \pm b)}. \quad (34.28)$$

Таким образом, имеется два значения фазовой постоянной плоской волны в феррите:

$$\beta_{\Phi_1} = \omega \sqrt{\varepsilon_a (\mu_a + b)}, \quad (34.29)$$

$$\beta_{\Phi_2} = \omega \sqrt{\varepsilon_a (\mu_a - b)}. \quad (34.30)$$

Каждой фазовой постоянной соответствует своя фазовая скорость:

$$v_{\Phi_1} = \omega / \beta_{\Phi_1}, \quad (34.31)$$

$$v_{\Phi_2} = \omega / \beta_{\Phi_2}. \quad (34.32)$$

Проанализируем, какому физическому процессу соответствует появление двух фазовых скоростей. Вернемся к выражению (34.25). Подставим в него значение β_{Φ} из формулы (34.28):

$$\dot{H}_{x0} = - \frac{j b \omega^2 \varepsilon_a}{\omega^2 \varepsilon_a \mu_a \pm \omega^2 \varepsilon_a b - \omega^2 \mu_a \varepsilon_a} \dot{H}_{y0}.$$

Проведя необходимые сокращения, получаем следующую связь между составляющими \dot{H}_{x0} и \dot{H}_{y0} :

$$\dot{H}_{x0} = \mp j \dot{H}_{y0}. \quad (34.33)$$

В силу существования двух равноправных фазовых постоянных β_{Φ_1} и β_{Φ_2} , соответствующим двум полям, распространяющимся с фазовыми скоростями v_{Φ_1} и v_{Φ_2} , с учетом решений (34.18) суммарное поле $\dot{H}_{x\Sigma}$ записывают в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{x\Sigma} &= \dot{H}_{x0} e^{-j\beta_{\Phi_1} z} + \dot{H}_{x0} e^{-j\beta_{\Phi_2} z} = \dot{H}_{x0} (e^{-j\beta_{\Phi_1} z} + e^{-j\beta_{\Phi_2} z}), \\ \dot{H}_{x0} &= H_{x0} e^{j\Phi_H}, \end{aligned} \right\} \quad (34.34)$$

где Φ_H — начальная фаза, которую для простоты записи можно положить равной нулю.

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{x0} &= H_{x0}, \\ \dot{H}_{x\Sigma} &= H_{x0} (e^{-j\beta_{\Phi_1} z} + e^{-j\beta_{\Phi_2} z}). \end{aligned} \right\} \quad (34.35)$$

Мгновенное значение $H_{x\Sigma}(t)$ находят с помощью обычного перехода от комплексных амплитуд к мгновенным значениям:

$$\begin{aligned} H_{x\Sigma}(t) &= \text{Re}(\dot{H}_{x\Sigma} e^{j\omega t}) = \text{Re}\{H_{x0} (e^{-j\beta_{\Phi_1} z} + e^{-j\beta_{\Phi_2} z}) e^{j\omega t}\}, \\ H_{x\Sigma}(t) &= H_{x0} \{\cos(\omega t - \beta_{\Phi_1} z) + \cos(\omega t - \beta_{\Phi_2} z)\}. \end{aligned} \quad (34.36)$$

На основании тригонометрического соотношения $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ выражение (34.36) можно представить в форме

$$H_{x\Sigma}(t) = 2H_{x0} \cos\left(\omega t - \frac{\beta_{\Phi_1} + \beta_{\Phi_2}}{2} z\right) \cos\left(\frac{\beta_{\Phi_2} - \beta_{\Phi_1}}{2} z\right),$$

или ввиду четности косинуса

$$H_{x\Sigma}(t) = 2H_{x_0} \cos\left(\omega t - \frac{\beta_{\Phi_1} + \beta_{\Phi_2}}{2} z\right) \cos\left(\frac{\beta_{\Phi_1} - \beta_{\Phi_2}}{2} z\right). \quad (34.37)$$

Из формулы (34.33) следует, что

$$\dot{H}_{y_0} = \pm j\dot{H}_{x_0}. \quad (34.38)$$

Знак «плюс» соответствует фазовой постоянной β_{Φ_1} , знак «минус» — фазовой постоянной β_{Φ_2} . По аналогии с формулами (34.34) суммарное поле $\dot{H}_{y\Sigma}$ записывают в виде

$$\dot{H}_{y\Sigma} = \dot{H}_{y_0} e^{-j\beta_{\Phi_1} z} + \dot{H}_{y_0} e^{-j\beta_{\Phi_2} z},$$

или с учетом соотношения (34.38), а также первой формулы (34.35) ($\dot{H}_{x_0} = H_{x_0}$):

$$\dot{H}_{y\Sigma} = jH_{x_0} e^{-j\beta_{\Phi_1} z} - jH_{x_0} e^{-j\beta_{\Phi_2} z} = jH_{x_0} (e^{-j\beta_{\Phi_1} z} - e^{-j\beta_{\Phi_2} z}).$$

Перейдем от комплексных амплитуд к мгновенным значениям поля $H_{y\Sigma}(t)$:

$$\begin{aligned} H_{y\Sigma}(t) &= \operatorname{Re} \{ jH_{x_0} (e^{-j\beta_{\Phi_1} z} - e^{-j\beta_{\Phi_2} z}) e^{j\omega t} \}, \\ H_{y\Sigma}(t) &= -H_{x_0} \{ \sin(\omega t - \beta_{\Phi_1} z) - \sin(\omega t - \beta_{\Phi_2} z) \}. \end{aligned} \quad (34.39)$$

На основании тригонометрического соотношения $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ выражение (34.39) можно представить в форме

$$H_{y\Sigma}(t) = -2H_{x_0} \cos\left(\omega t - \frac{\beta_{\Phi_1} + \beta_{\Phi_2}}{2} z\right) \sin\left(\frac{\beta_{\Phi_2} - \beta_{\Phi_1}}{2} z\right),$$

или ввиду нечетности синуса

$$H_{y\Sigma}(t) = 2H_{x_0} \cos\left(\omega t - \frac{\beta_{\Phi_1} + \beta_{\Phi_2}}{2} z\right) \sin\left(\frac{\beta_{\Phi_1} - \beta_{\Phi_2}}{2} z\right). \quad (34.40)$$

Суммарное магнитное поле представляет собой суперпозицию полей $H_{x\Sigma}(t)$ и $H_{y\Sigma}(t)$. Сложение полей осуществляют графически так, как показано на рис. 34.1.

Тангенс угла наклона α суммарного вектора магнитного поля к оси абсцисс выражается соотношением

$$\operatorname{tg} \alpha = H_{y\Sigma}(t) / H_{x\Sigma}(t).$$

Подставляя значения $H_{y\Sigma}(t)$ и $H_{x\Sigma}(t)$ из формул (34.40) и (34.37), получаем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin\left(\frac{\beta_{\Phi_1} - \beta_{\Phi_2}}{2} z\right)}{\cos\left(\frac{\beta_{\Phi_1} - \beta_{\Phi_2}}{2} z\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\beta_{\Phi_1} - \beta_{\Phi_2}}{2} z\right),$$

откуда угол наклона

$$\alpha = \frac{\beta_{\Phi_1} - \beta_{\Phi_2}}{2} z. \quad (34.41)$$

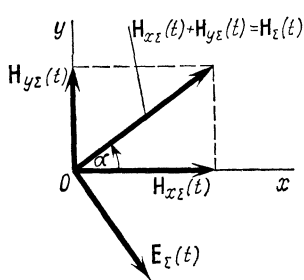


Рис. 34.1

Угол возрастает по мере продвижения плоской волны в положительном направлении оси z . Суммарный вектор $\mathbf{H}_{\Sigma}(t)$ не остается постоянно ориентированным в пространстве, а вращается по мере продвижения волны. Из рис. 34.1 видно, что вращение суммарного вектора происходит по направлению стрелки часов, если смотреть в сторону положительных значений оси z .

Аналогичную картину имеет вектор суммарного электрического поля $\mathbf{E}_{\Sigma}(t)$, ортогональный к вектору $\mathbf{H}_{\Sigma}(t)$. Таким образом, намагниченная ферритовая среда является не только анизотропной, но также гиротропной средой, в которой происходит поворот векторов поля в пространстве. Вращение векторов поля в гиротропной среде называют *эффектом Фарадея*.

Постоянная

$$\frac{\beta_{\phi 1} - \beta_{\phi 2}}{2}, \quad (34.42)$$

определяющая угол поворота векторов на единицу длины пути в гиротропной среде, называется *постоянной Фарадея*.

Был рассмотрен случай, когда плоская волна распространяется в ферритовой среде в положительном направлении оси z . Ориентация вектора Пойнтинга определяется расположением суммарных векторов $\mathbf{E}_{\Sigma}(t)$ и $\mathbf{H}_{\Sigma}(t)$, показанным на рис. 34.1. При распространении плоской волны в обратном направлении, в сторону отрицательных значений оси z , следует изменить на обратные знаки перед фазовыми постоянными $\beta_{\phi 1}$ и $\beta_{\phi 2}$. В результате вместо выражения (34.14) получим

$$\alpha = - \frac{\beta_{\phi 1} - \beta_{\phi 2}}{2} z. \quad (34.43)$$

Угол α становится отрицательным, возрастающим в направлении отрицательных углов с увеличением абсолютного значения координаты z . Вращение суммарного вектора $\mathbf{H}_{\Sigma}(t)$ происходит в обратную сторону по сравнению со случаем распространения плоской волны в сторону положительных значений z .

Таким образом, влияние ферритовой среды на электромагнитную волну зависит от направления распространения этой волны. Подобные среды носят название *невзаимных сред*.

§ 34.4. Поперечное распространение плоских волн в намагниченной ферритовой среде. Эффект Коттона — Мутона

В § 34.3 было рассмотрено распространение плоской волны вдоль постоянного поля, подмагничивающего феррит. Представляет интерес случай, когда вектор Пойнтинга, распространяющийся в ферритовой среде, ориентирован перпендикулярно подмагничивающему полю.

Допустим, что подмагничивающее поле ориентировано вдоль оси z , а вектор Пойнтинга плоской волны направлен вдоль оси x . Тогда для поля волны, падающей на ферритовую среду, должны быть справедливы соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_y, \dot{E}_z, \dot{H}_y, \dot{H}_z &\neq 0, \\ \dot{E}_x = \dot{H}_x &= 0, \\ \partial/\partial y = \partial/\partial z &= 0, \quad \partial/\partial x \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (34.44)$$

Для ферритовой среды, намагниченной вдоль оси z , справедливы системы скалярных уравнений Максвелла (34.10) и (34.14). В силу справедливости соотношений (34.44) системы этих уравнений существенно упрощаются:

$$-d\dot{H}_z/dx = j\omega\epsilon_a\dot{E}_y, \quad (34.45)$$

$$d\dot{H}_y/dx = j\omega\epsilon_a\dot{E}_z, \quad (34.46)$$

$$0 = -j\omega\mu_a\dot{H}_x - \omega b\dot{H}_y, \quad (34.47)$$

$$-d\dot{E}_z/dx = \omega b\dot{H}_x - j\omega\mu_a\dot{H}_y, \quad (34.48)$$

$$d\dot{E}_y/dx = -j\omega\mu_{a33}\dot{H}_z. \quad (34.49)$$

Поскольку в падающей волне существует составляющая \dot{H}_y , она должна присутствовать в ферритовой среде. Следовательно, эта составляющая не может быть приравнена нулю в соотношении (34.47). Для его выполнения необходимо предположить, что в результате анизотропии (наличие коэффициента b) в ферритовой среде возникает дополнительно составляющая \dot{H}_x , которой не было в падающей волне. Из соотношения (34.47) следует, что

$$\dot{H}_x = j \frac{b}{\mu_a} \dot{H}_y. \quad (34.50)$$

Составляющая \dot{H}_x связана с составляющей \dot{H}_y множителем j , что означает сдвиг фазы во времени между этими составляющими на угол, равный $\pi/2$. Сходное соотношение было получено в § 34.3 [см. формулу (34.38)]. Было показано, что сдвиг фаз приводит к вращению плоскости поляризации. Таким образом, при поперечном распространении плоской волны в феррите возникает дополнительная составляющая магнитного поля и происходит вращение векторов поля по мере продвижения его вдоль направления распространения, т. е. вдоль оси x . Система уравнений (34.45), (34.49) не зависит от системы уравнений (34.46), (34.48) и может быть решена самостоятельно. Дифференцируя уравнение (34.49) по x и используя уравнение (34.45), получаем

$$d^2\dot{E}_y/dx^2 + \omega^2\mu_{a33}\epsilon_a\dot{E}_y = 0. \quad (34.51)$$

Решение этого уравнения можно представить в обычной форме:

$$\dot{E}_y = A_1 e^{-j\beta_{\Phi 3} x} + A_2 e^{j\beta_{\Phi 3} x}, \quad (34.52)$$

где

$$\beta_{\Phi 3} = \omega \sqrt{\mu_{a33} \epsilon_a}. \quad (34.53)$$

Поскольку ферритовая среда предполагается однородной и безграничной, отраженная волна отсутствует и можно положить

$$A_2 = 0. \quad (34.54)$$

Тогда

$$\dot{E}_y = A_1 e^{-i\beta_{\Phi 3} x}. \quad (34.55)$$

Полученное решение называют *обыкновенной волной*. Вторая система формируется из уравнений (34.46) и (34.48). В последнем уравнении составляющую \dot{H}_x можно исключить с помощью выражения (34.50). При этом уравнение (34.48) переходит в соотношение

$$\frac{d\dot{E}_z}{dx} = j\omega \left(\mu_a - \frac{b^2}{\mu_a} \right) \dot{H}_y. \quad (34.56)$$

Дифференцируя это соотношение по x и используя выражение (34.46), находим уравнение для составляющей поля \dot{E}_z :

$$\frac{d^2 \dot{E}_z}{dx^2} + \omega^2 \epsilon_a \left(\mu_a - \frac{b^2}{\mu_a} \right) \dot{E}_z = 0 \quad (34.57)$$

с решением вида

$$\dot{E}_z = B_1 e^{-i\beta_{\Phi 4} x} + B_2 e^{i\beta_{\Phi 4} x}, \quad (34.58)$$

где

$$\beta_{\Phi 4} = \omega \sqrt{\epsilon_a \left(\mu_a - \frac{b^2}{\mu_a} \right)}. \quad (34.59)$$

В случае безграничной ферритовой среды отраженная волна отсутствует и $B_2 = 0$. При этом

$$\dot{E}_z = B_1 e^{-i\beta_{\Phi 4} x}. \quad (34.60)$$

Полученное решение носит название *необыкновенной волны*.

Таким образом, найдены решения электродинамических уравнений для составляющих электрического поля \dot{E}_y и \dot{E}_z . Решение для составляющей магнитного поля \dot{H}_z записывают аналогично решению для \dot{E}_y . Магнитное поле в случае «необыкновенной волны» имеет две составляющих. Решение для составляющей поля \dot{H}_y будет выглядеть аналогично решению для \dot{E}_z . Кроме того, в поле «необыкновенной волны» существует составляющая \dot{H}_x , определяемая соотношением (34.50), сдвинутая по фазе во времени относительно составляющей \dot{H}_y на угол, равный $\pi/2$. В результате этого сдвига в «необыкновенной волне» происходит поворот векторов поля по мере продвижения его вдоль оси x .

Возникновение «необыкновенной волны» при поперечном распространении плоского электромагнитного поля в намагниченной ферритовой среде называют *эффектом Коттона—Мутона*.

В настоящее время ферриты нашли широкое распространение в различных радиотехнических устройствах, описание которых выходит за рамки этой книги.

ГЛАВА 35

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 35.1. Постановка вопроса

До сих пор рассматривались электродинамические процессы, происходящие в различных бесконечно протяженных средах, а также волноводах и объемных резонаторах. Нередко возникает необходимость отыскания электромагнитного поля в задачах, когда в безграничном пространстве находится какое-либо тело или группа тел, с которыми взаимодействует электромагнитная волна, распространяющаяся в пространстве. В результате этого взаимодействия первичное поле претерпевает изменения, которые и необходимо учесть при анализе процесса.

Под дифракцией электромагнитного поля условимся понимать процесс взаимодействия этого поля с телом или группой тел, находящихся в зоне распространяющейся электромагнитной волны.

Дифракция относится к числу труднейших задач электродинамики и в книге, посвященной ее основам, можно лишь наметить пути решения подобных задач. В качестве примеров возможных подходов к проблеме рассмотрим два случая: 1) дифракцию плоской волны на бесконечном идеально проводящем металлическом цилиндре—задачу, которая может быть решена аналитически точно; 2) дифракцию плоской волны на отверстии, сделанном в бесконечно протяженном, идеально проводящем плоском экране—задачу, которая может быть решена приближенным методом, требующим вывода вспомогательных соотношений—теоремы эквивалентности и формул Гюйгенса—Кирхгофа. Разумеется, эти случаи далеко не исчерпывают возможных методов решения дифракционных задач, и их можно рассматривать лишь как некоторое введение в теорию дифракции.

§ 35.2. Дифракция плоской волны на бесконечном идеально проводящем металлическом цилиндре

Пусть плоская волна встречается на своем пути бесконечный, идеально проводящий металлический цилиндр радиуса r_0 . Пусть вектор Пойнтинга плоской волны перпендикулярен оси цилиндра и поляризация поля такова, что вектор \vec{E} падающей волны парал-

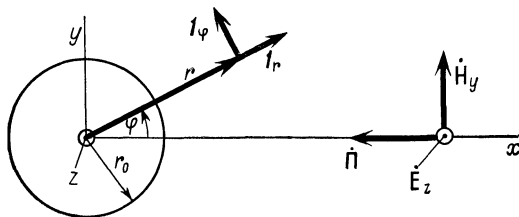


Рис. 35.1

делен оси цилиндра (рис. 35.1). Для поля падающей волны будут справедливы такие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Pi} &= \dot{\Pi}_x, \\ \dot{E}_z, \dot{H}_y &\neq 0, \\ \dot{E}_x = \dot{E}_y = \dot{H}_x = \dot{H}_z &= 0, \\ \partial/\partial y = \partial/\partial z &= 0, \\ \partial/\partial x &\neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (35.1)$$

Присутствие цилиндра изменяет поле не только вдоль направления распространения падающей волны, т.е. вдоль оси x , но и вдоль оси y . Рассмотрим, какие составляющие поля должны содержаться в дифракционном поле. Для этого используем систему уравнений Максвелла, записанную в форме соотношений (34.10), (34.14).

Допустим, что в дифракционном поле так же, как и в поле падающей волны, не будет составляющих \dot{E}_x и \dot{E}_y :

$$\dot{E}_x = \dot{E}_y = 0. \quad (35.2)$$

Как было отмечено, наличие цилиндра вызывает появление производных:

$$\partial/\partial y, \quad \partial/\partial x \neq 0. \quad (35.3)$$

На основании последнего уравнения системы (34.14) можно заключить, что составляющая поля \dot{H}_z , отсутствующая в падающей волне, не возникнет и в дифракционном поле:

$$\dot{H}_z = 0. \quad (35.4)$$

На основании первого уравнения системы (34.14) и соотношений (35.3) можно сделать вывод, что существование производной $\partial \dot{E}_z / \partial y$ приведет к появлению составляющей поля \dot{H}_x , которой в падающей волне не было.

При сделанных допущениях будут удовлетворены все оставшиеся уравнения систем (34.10) и (34.14). В результате возникнет система

скалярных уравнений Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} &= j\omega \epsilon_a \dot{E}_z, \\ \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} &= -j\omega \mu_a \dot{H}_x, \\ \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} &= j\omega \mu_a \dot{H}_y. \end{aligned} \right\} \quad (35.5)$$

Эти уравнения связывают три составляющие поля: \dot{H}_x , \dot{H}_y и \dot{E}_z . Поскольку рассматривается дифракция плоской волны на цилиндре, для применения граничных условий целесообразно перейти к цилиндрической системе координат. Этот переход может быть осуществлен путем следующих рассуждений.

Полученное дифракционное поле содержит три составляющие \dot{H}_x , \dot{H}_y и \dot{E}_z , и его можно рассматривать как поле электрического типа по отношению к координате z . Действительно, это поле содержит одну продольную электрическую составляющую и две поперечные по отношению к координате z магнитные составляющие \dot{H}_x и \dot{H}_y . В таком поле, как было показано в гл. 11, поперечные составляющие можно выразить через продольную составляющую, определяемую соотношением (11.35):

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial \xi^2} + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(h_\eta \cdot \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(h_\xi \cdot \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \eta} \right) \right\} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_z = 0.$$

Рассматривая задачу в цилиндрической системе координат, выберем следующее соответствие криволинейных и цилиндрических координат:

$$\begin{aligned} \xi &\rightarrow r, \quad \eta \rightarrow \varphi, \quad \zeta \rightarrow z, \\ h_\xi &= h_r = 1, \quad h_\eta = h_\varphi = r, \quad h_\zeta = h_z = 1. \end{aligned} \quad (35.6)$$

При этом уравнение (11.35) может быть представлено в форме

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \varphi} \right) \right\} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_z = 0.$$

Рассматриваемое поле не зависит от координаты z . Допустим также, что среда лишена потерь:

$$\tilde{\mu}_a \rightarrow \mu_a, \quad \tilde{\epsilon}_a \rightarrow \epsilon_a, \quad \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \rightarrow \omega^2 \mu_a \epsilon_a = \beta^2.$$

Тогда уравнение для продольной составляющей поля \dot{E}_z следует записать в виде

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \varphi} \right) \right\} + \beta^2 \dot{E}_z = 0. \quad (35.7)$$

Раскрывая скобки, получаем

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial \varphi^2} + \beta^2 \dot{E}_z = 0, \quad (35.8)$$

или иначе

$$r \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial r^2} + \frac{r^2}{r} \cdot \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} + \beta^2 r^2 \dot{E}_z + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (35.9)$$

Уравнение решают с помощью метода Фурье путем подстановки вида

$$\dot{E}_z = R_1 \Phi. \quad (35.10)$$

Функция R_1 является функцией только координаты r , а функция Φ — функцией только координаты φ .

Подставляя выражение (35.10) в уравнение (35.9), получаем

$$r^2 \Phi \frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} + \frac{r^2}{r} \Phi \frac{\partial R_1}{\partial r} + \beta^2 r^2 R_1 \Phi + R_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Разделим это уравнение на $R\Phi$:

$$r^2 \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} + \frac{r^2}{r} \cdot \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial R_1}{\partial r} + \beta^2 r^2 + \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Первые три члена уравнения являются функциями только координаты r , последний член — функцией только координаты φ . Равенство возможно, если члены, являющиеся функцией r , и член, являющийся функцией φ , по отдельности равны одному и тому же числу m^2 , взятому с различными знаками. В силу этого положим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} &= -m^2, \\ r^2 \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} + \frac{r^2}{r} \cdot \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial R_1}{\partial r} + \beta^2 r^2 &= m^2. \end{aligned}$$

Каждое из полученных соотношений является функцией только одной координаты. Следовательно, частные производные можно заменить обычными и уравнения записать таким образом:

$$d^2 \Phi / d\varphi^2 + m^2 \Phi = 0, \quad (35.11)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dr} + \left(\beta^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0. \quad (35.12)$$

Начало цилиндрических координат расположено на оси цилиндра, и угол φ отсчитывается вокруг цилиндра. Дифракционное поле должно быть периодически по φ , следовательно, коэффициент m должен быть целым числом.

Решение уравнения (35.11) можно представить в форме

$$\Phi = A_{1m} \cos(m\varphi) + A_{2m} \sin(m\varphi). \quad (35.13)$$

Уравнение (35.12) является уравнением Бесселя. В гл. 14 были определены различные функции Бесселя, удовлетворяющие этому уравнению. В данном случае плоская волна соприкасается с проводящим цилиндром, отражается от его поверхности и уходит в бесконечность. Другими словами, возникает вторичное поле, распро-

страняющееся от поверхности цилиндра в бесконечность. Как было отмечено в § 14.1, такому полю соответствуют функции Ханкеля второго рода порядка m .

В § 14.1 эти функции обозначались $H_m^{(2)}(gr)$ [см. формулу (14.18)]. Сравнивая уравнение Бесселя (14.8) с уравнением (35.12), видим, что роль коэффициента g в анализируемом случае выполняет коэффициент β . Следовательно, по аналогии с формулой (14.18) решение уравнения (35.12) можно записать в виде

$$R_1 = B_{1m} H_m^{(2)}(\beta r). \quad (35.14)$$

С учетом формулы (35.10) продольная составляющая поля

$$\dot{E}_z = \{A_{1m} \cos(m\varphi) + A_{2m} \sin(m\varphi)\} B_{1m} \dot{H}^{(2)}(\beta r). \quad (35.15)$$

Суммарное поле, существующее в пространстве, складывается из поля падающей плоской волны и вторичного поля \dot{E}_z , возникшего в результате существования металлического цилиндра.

Поле падающей плоской волны $\dot{E}_{zп}$, распространяющейся в сторону отрицательных значений оси x , можно выразить в обычной форме:

$$\dot{E}_{zп} = \dot{E}_{zп0} e^{j\beta x}. \quad (35.16)$$

В цилиндрической системе координат $x = r \cos \varphi$. Следовательно,

$$\dot{E}_{zп} = \dot{E}_{zп0} e^{j\beta r \cos \varphi}. \quad (35.17)$$

В такой записи зависимость от угла φ в падающей волне выражается четным законом ($\cos \varphi$). Сохраняя тот же характер зависимости во вторичном поле \dot{E}_z , положим $A_{2m} = 0$. Тогда вторичное поле следует записать следующим образом:

$$\dot{E}_z = C_m H_m^{(2)}(\beta r) \cos(m\varphi), \quad (35.18)$$

где

$$C_m = A_{1m} B_{1m}.$$

Выражение (35.18) представляет собой одну гармонику вторичного поля. Суммарное вторичное поле $\dot{E}_{z\Sigma}$ получается путем сложения всех гармоник:

$$\dot{E}_{z\Sigma} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m H_m^{(2)}(\beta r) \cos(m\varphi). \quad (35.19)$$

Таким образом, в пространстве существуют поле падающей волны, определяемое выражением (35.17), и суммарное вторичное поле $\dot{E}_{z\Sigma}$.

Складывая эти поля, найдем общее поле, существующее в пространстве с учетом влияния металлического цилиндра:

$$\dot{E}_{z\text{ обш}} = \dot{E}_{zп0} e^{j\beta r \cos \varphi} + \sum_{m=0}^{\infty} C_m H_m^{(2)}(\beta r) \cos(m\varphi). \quad (35.20)$$

В соответствии с граничными условиями у поверхности идеального металла при $r=r_0$ выполняется равенство

$$\dot{E}_{z\pi 0} e^{j\beta r_0 \cos \varphi} + \sum_{m=0}^{\infty} C_m H_m^{(2)}(\beta r_0) \cos(m\varphi) = 0. \quad (35.21)$$

В теории функций Бесселя [8] доказывается справедливость соотношения

$$e^{j\beta r_0 \cos \varphi} = J_0(\beta r_0) + \sum_{m=1}^{\infty} 2(j)^m J_m(\beta r_0) \cos(m\varphi). \quad (35.22)$$

Здесь $J_0(\beta r_0)$ —функция Бесселя первого рода нулевого порядка; $J_m(\beta r_0)$ —функция Бесселя первого рода порядка m .

Подставляя выражение (35.22) в равенство (35.21), получаем

$$\begin{aligned} \dot{E}_{z\pi 0} J_0(\beta r_0) + \dot{E}_{z\pi 0} \sum_{m=1}^{\infty} 2(j)^m J_m(\beta r_0) \cos(m\varphi) + \\ + \sum_{m=0}^{\infty} C_m H_m^{(2)}(\beta r_0) \cos(m\varphi) = 0. \end{aligned} \quad (35.23)$$

Используем условия ортогональности тригонометрических функций:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi = \begin{cases} 0 & (\text{при } m \neq n), \\ \pi & (\text{при } m = n). \end{cases}$$

Умножая выражение (35.23) на $\cos(n\varphi) d\varphi$ ($n=0, 1, 2, \dots$), интегрируя в пределах от $-\pi$ до π и используя условия ортогональности функций, получаем соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{z\pi 0} J_0(\beta r_0) + C_0 H_0^{(2)}(\beta r_0) &= 0, \\ \dot{E}_{z\pi 0} 2(j)^m J_m(\beta r_0) + C_m H_m^{(2)}(\beta r_0) &= 0, \end{aligned}$$

из которых можно определить амплитудные коэффициенты:

$$\begin{aligned} C_0 &= -\dot{E}_{z\pi 0} \frac{J_0(\beta r_0)}{H_0^{(2)}(\beta r_0)}, \\ C_m &= -2(j)^m \dot{E}_{z\pi 0} \frac{J_m(\beta r_0)}{H_m^{(2)}(\beta r_0)}. \end{aligned} \quad (35.24)$$

Знание амплитудных коэффициентов позволяет определить с помощью формул (35.19), (35.24) суммарное вторичное поле $\dot{E}_{z\Sigma}$:

$$\dot{E}_{z\Sigma} = -\dot{E}_{z\pi 0} \left\{ \frac{J_0(\beta r_0)}{H_0^{(2)}(\beta r_0)} H_0^{(2)}(\beta r) + \sum_{m=1}^{\infty} 2(j)^m \frac{J_m(\beta r_0)}{H_m^{(2)}(\beta r_0)} H_m^{(2)}(\beta r) \cos(m\varphi) \right\}. \quad (35.25)$$

На основании полученного выражения можно построить диаграмму направленности суммарного вторичного поля $\dot{E}_{z\Sigma}$ в зависимости от угла φ и значений $\beta r_0 = \frac{2\pi}{\lambda} r_0$.

Знание суммарного электрического поля позволяет определить с помощью уравнений Максвелла суммарное магнитное поле. Граничные условия у поверхности идеального металла дают возможность отыскать токи на поверхности цилиндра, вызванные падающей плоской волной.

§ 35.3. Первая и вторая граничные задачи электродинамики и соответствующие им теоремы. Теорема эквивалентности

В ряде электродинамических задач возникает следующая ситуация: известны плотности сторонних электрического и магнитного токов \mathbf{J}_e и \mathbf{J}_m , которые создают электромагнитное поле. Это поле распространяется среди каких-либо граничных поверхностей, которые приводят к изменению поля, созданного сторонними токами. Требуется определить суммарное поле с учетом влияния граничных поверхностей.

Задача может быть решена, если каким-либо образом удалось определить тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей у граничных поверхностей. Отыскание суммарного поля базируется при этом на так называемой теореме эквивалентности. Эта теорема суммирует результаты двух теорем: 1) теоремы, соответствующей первой внешней граничной задаче электродинамики; 2) теоремы, соответствующей второй внешней граничной задаче электродинамики.

Первая внешняя граничная задача электродинамики сводится к определению поля \mathbf{E} , \mathbf{H} в объеме V_2 , ограниченном изнутри некоторой замкнутой поверхностью S_1 , окружающей объем V_1 (рис. 35.2), по заданным значениям тангенциальной составляющей электрического поля $\mathbf{E}_{1\tau}$ на поверхности S_1 . При этом предполагается, что все сторонние источники поля сосредоточены внутри объема V_1 или на поверхности S_1 , являющейся частью объема V_1 . Сторонние источники поля в объеме V_2 отсутствуют.

Теорему, соответствующую этой задаче, можно сформулировать следующим образом. Поле \mathbf{E} , \mathbf{H} , существующее в объеме V_2 , эквивалентно полю, возбужденному поверхностными магнитными токами, протекающими по поверхности S_1 , при условии, что связь плотности этих токов $\dot{\mathbf{v}}_m$ с заданной на S_1 тангенциальной составляющей поля $\mathbf{E}_{1\tau}$ определяется граничным условием у поверхности идеального металла (8.21):

$$\mathbf{E}_{1\tau} = [\mathbf{1}_{n1} \dot{\mathbf{v}}_m],$$

или иначе

$$\dot{\mathbf{v}}_m = [\mathbf{E}_{1\tau} \mathbf{1}_{n1}]. \quad (35.26)$$

Здесь $\mathbf{E}_{1\tau}$ — тангенциальная составляющая вектора напряженности электрического поля у по-

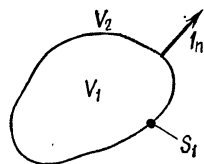


Рис. 35.2

верхности S_1 ; $\mathbf{1}_{n1}$ — единичный нормальный вектор к поверхности S_1 , направленный в сторону объема V_2 .

Доказательство этой теоремы довольно простое. Оно основано на теореме единственности. Решение уравнений Максвелла единственно, если оно удовлетворяет условиям излучения на бесконечности и задана тангенциальная составляющая электрического или магнитного поля на поверхности S_1 .

Так как в объеме V_2 нет сторонних источников тока, то условия излучения удовлетворяются. Поскольку заданная тангенциальная составляющая $\dot{\mathbf{E}}_{1\tau}$ совпадает по условиям теоремы с тангенциальной составляющей, созданной током с плотностью $\dot{\mathbf{v}}_m$, поле в объеме V_2 , созданное сторонними токами, находящимися в объеме V_1 , будет совпадать на основании теоремы единственности с полем, созданным магнитным током с плотностью $\dot{\mathbf{v}}_m$. Таким образом, первую теорему можно считать доказанной.

Вторая внешняя граничная задача электродинамики сводится к определению поля $\dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\mathbf{H}}$ в объеме V_2 , ограниченном изнутри замкнутой поверхностью S_1 , окружающей объем V_1 , по заданным значениям тангенциальной составляющей магнитного поля $\dot{\mathbf{H}}_{1\tau}$ на поверхности S_1 . При этом предполагается, что все сторонние источники поля сосредоточены внутри объема V_1 или на поверхности S_1 , являющейся частью объема V_1 . Сторонние источники поля в объеме V_2 отсутствуют.

Этой задаче соответствует вторая теорема, формулируемая таким образом. Поле $\dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\mathbf{H}}$, существующее в объеме V_2 , эквивалентно полю, возбужденному поверхностными электрическими токами, протекающими по поверхности S_1 , при условии, что связь плотности этих токов $\dot{\mathbf{v}}_s$ с заданной тангенциальной составляющей поля $\dot{\mathbf{H}}_{1\tau}$ определяется граничным условием у поверхности идеального металла $\dot{\mathbf{H}}_{1\tau} = [\dot{\mathbf{v}}_s \mathbf{1}_{n1}]$.

Определяя из этого условия плотность поверхностного электрического тока $\dot{\mathbf{v}}_s$, получим формулу

$$\dot{\mathbf{v}}_s = [\mathbf{1}_{n1} \dot{\mathbf{H}}_{1\tau}], \quad (35.27)$$

где $\dot{\mathbf{H}}_{1\tau}$ — тангенциальная составляющая вектора напряженности магнитного поля у поверхности S_1 .

Нетрудно видеть, что вторую теорему можно получить из первой путем применения принципа перестановочной двойственности. Надобность в ее доказательстве отпадает, поскольку оно проводится аналогично.

Теорема эквивалентности, представляющая собой суперпозицию первой и второй теорем, формулируется следующим образом. Поле $\dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\mathbf{H}}$, существующее в объеме V_2 , ограниченном изнутри замкнутой поверхностью S_1 с заданными на этой поверхности тангенциальными составляющими электрического и магнитного полей $\dot{\mathbf{E}}_{1\tau}$, $\dot{\mathbf{H}}_{1\tau}$, совпадает с полем, возбужденным поверхностными магнитным и электри-

ческим токами, протекающими по идеально проводящей поверхности S_1 , при условии, что эти токи связаны с заданными значениями тангенциальных составляющих полей граничными условиями (35.26), (35.27) у поверхности идеального металла.

Теорема эквивалентности позволяет решить задачу об определении суммарного поля, возникающего в результате существования сторонних токов и поверхностей S_1 в рассматриваемой части пространства.

Это суммарное поле представляет собой суперпозицию полей, созданных сторонними токами $\mathbf{J}_a, \mathbf{J}_m$, и полей, возникающих под действием поверхностных токов \mathbf{v}_a и \mathbf{v}_m на поверхностях S_1 . Принципиальная трудность решения задачи заключается в определении векторов \mathbf{E}_1 и \mathbf{H}_1 у граничных поверхностей.

**§ 35.4. Определение суммарного поля, создаваемого сторонними токами в случае присутствия в рассматриваемой части пространства дополнительных поверхностей.
Формулы типа Гюйгенса — Кирхгофа**

Как указывалось в § 35.3, суммарное поле является суперпозицией полей, созданных сторонними токами $\mathbf{J}_a, \mathbf{J}_m$, и полей, возникающих под действием поверхностных токов \mathbf{v}_a и \mathbf{v}_m , протекающих в соответствии с теоремой эквивалентности по идеально проводящим поверхностям S_1 , совпадающим с реальными поверхностями в пространстве. Векторные потенциалы, создаваемые токами \mathbf{J}_a и \mathbf{J}_m , определяют с помощью формул (28.46), (28.48):

$$\dot{\mathbf{A}}_a = \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} \int_{V_1} \mathbf{J}_a \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV,$$

$$\dot{\mathbf{A}}_m = \frac{\tilde{\epsilon}_a}{4\pi} \int_{V_1} \mathbf{J}_m \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV.$$

Суммарные векторные потенциалы выражаются соотношениями:

$$\dot{\mathbf{A}}_{a\Sigma} = \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} \left(\int_{V_1} \mathbf{J}_a \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV + \int_{S_1} \dot{\mathbf{v}}_a \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dS \right), \quad (35.28)$$

$$\dot{\mathbf{A}}_{m\Sigma} = \frac{\tilde{\epsilon}_a}{4\pi} \left(\int_{V_1} \mathbf{J}_m \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV + \int_{S_1} \dot{\mathbf{v}}_m \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dS \right). \quad (35.29)$$

Плотности токов \mathbf{J}_a , \mathbf{J}_m являются заданными. В соответствии с формулами (35.26), (35.27) для определения плотностей поверхностных токов $\dot{\mathbf{v}}_a$ и $\dot{\mathbf{v}}_m$ необходимо знать электромагнитное поле у поверхностей S_1 , что возможно, если поставленная задача решена и распределение поля в пространстве известно. В этом и заключается главная сложность задачи.

Если удалось определить суммарные векторные потенциалы $\dot{\mathbf{A}}_{a\Sigma}$ и $\dot{\mathbf{A}}_{m\Sigma}$, то значения векторов поля $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ можно найти из ранее выведенных соотношений (27.11), (27.21), (27.25), (27.26).

Поля, возникающие в результате совместного действия электрических и магнитных токов, можно получить с помощью принципа суперпозиции. В итоге получаются соотношения вида (27.28), (27.29).

Представляет интерес отыскание соотношений, непосредственно связывающих поля $\dot{\mathbf{H}}_\Sigma$, $\dot{\mathbf{E}}_\Sigma$ со сторонними токами. Для этой цели в выражения (27.28), (27.29) необходимо подставить значения векторных потенциалов из формул (35.28), (35.29). При осуществлении дифференциальных операций следует помнить, что дифференцирование осуществляется в координатах точки наблюдения, от которых не зависят векторы \mathbf{J}_a , \mathbf{J}_m , $\dot{\mathbf{v}}_a$, $\dot{\mathbf{v}}_m$. В результате получаются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_\Sigma = & \frac{1}{4\pi} \int_{V_1} \text{rot} \left(\mathbf{J}_a \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) dV + \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \text{rot} \left(\dot{\mathbf{v}}_a \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) dS + \\ & + \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a 4\pi} \int_{V_1} \text{grad div} \left(\mathbf{J}_m \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) dV + \\ & + \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a 4\pi} \int_{S_1} \text{grad div} \left(\dot{\mathbf{v}}_m \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) dS - \\ & - j\omega \frac{\tilde{\epsilon}_a}{4\pi} \int_{V_1} \mathbf{J}_m \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV - j\omega \frac{\tilde{\epsilon}_a}{4\pi} \int_{S_1} \dot{\mathbf{v}}_m \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dS. \end{aligned} \quad (35.30)$$

Аналогично можно получить формулу для $\dot{\mathbf{E}}_\Sigma$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_\Sigma = & - \frac{1}{4\pi} \int_{V_1} \text{rot} \left(\mathbf{J}_m \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) dV - \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \text{rot} \left(\dot{\mathbf{v}}_m \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) dS + \\ & + \frac{1}{j\omega\tilde{\epsilon}_a 4\pi} \int_{V_1} \text{grad div} \left(\mathbf{J}_a \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) dV + \\ & + \frac{1}{j\omega\tilde{\epsilon}_a 4\pi} \int_{S_1} \text{grad div} \left(\dot{\mathbf{v}}_a \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) dS - \\ & - \frac{j\omega\tilde{\mu}_a}{4\pi} \int_{V_1} \mathbf{J}_a \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV - \frac{j\omega\tilde{\mu}_a}{4\pi} \int_{S_1} \dot{\mathbf{v}}_a \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dS. \end{aligned} \quad (35.31)$$

Умножая и деля два первых и последних члена правой части выражения (35.30) на $j\omega\tilde{\mu}_a$, используя обозначение $\omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\epsilon}_a = \gamma^2$ и группируя члены, находим выражение для поля \mathbf{H}_Σ :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\Sigma = & \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a4\pi} \int_{V_1} \left\{ j\omega\tilde{\mu}_a \operatorname{rot} \left(\mathbf{J}_a \frac{e^{-i\gamma r}}{r} \right) + \right. \\ & \left. + \operatorname{grad} \operatorname{div} \left(\mathbf{J}_m \frac{e^{-i\gamma r}}{r} \right) + \gamma^2 \mathbf{J}_m \frac{e^{-i\gamma r}}{r} \right\} dV + \\ & + \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a4\pi} \int_{S_1} \left\{ j\omega\tilde{\mu}_a \operatorname{rot} \left(\dot{\mathbf{v}}_a \frac{e^{-i\gamma r}}{r} \right) + \operatorname{grad} \operatorname{div} \left(\dot{\mathbf{v}}_m \frac{e^{-i\gamma r}}{r} \right) + \right. \\ & \left. + \gamma^2 \dot{\mathbf{v}}_m \frac{e^{-i\gamma r}}{r} \right\} dS. \end{aligned} \quad (35.32)$$

Формула (35.31) для электрического поля $\dot{\mathbf{E}}_\Sigma$ может быть получена из формулы (35.30) для магнитного поля \mathbf{H}_Σ путем применения принципа перестановочной двойственности. В силу этого $\dot{\mathbf{E}}_\Sigma$ можно определить из формулы (35.32) с помощью перестановок вида

$$\tilde{\mu}_a \rightarrow -\tilde{\epsilon}_a, \quad \mathbf{H}_\Sigma \rightarrow \dot{\mathbf{E}}_\Sigma, \quad \mathbf{J}_a \leftrightarrow -\mathbf{J}_m, \quad \dot{\mathbf{v}}_a \leftrightarrow -\dot{\mathbf{v}}_m.$$

После осуществления перестановок получаем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_\Sigma = & -\frac{1}{j\omega\tilde{\epsilon}_a4\pi} \int_{V_1} \left\{ j\omega\tilde{\epsilon}_a \operatorname{rot} \left(\mathbf{J}_m \frac{e^{-i\gamma r}}{r} \right) - \operatorname{grad} \operatorname{div} \left(\mathbf{J}_a \frac{e^{-i\gamma r}}{r} \right) - \right. \\ & \left. - \gamma^2 \mathbf{J}_a \frac{e^{-i\gamma r}}{r} \right\} dV - \frac{1}{j\omega\tilde{\epsilon}_a4\pi} \int_{S_1} \left\{ j\omega\tilde{\epsilon}_a \operatorname{rot} \left(\dot{\mathbf{v}}_m \frac{e^{-i\gamma r}}{r} \right) - \right. \\ & \left. - \operatorname{grad} \operatorname{div} \left(\dot{\mathbf{v}}_a \frac{e^{-i\gamma r}}{r} \right) - \gamma^2 \dot{\mathbf{v}}_a \frac{e^{-i\gamma r}}{r} \right\} dS. \end{aligned} \quad (35.33)$$

Таким образом, если известны плотности сторонних токов и плотности поверхностных токов на поверхностях, существующих в рассматриваемой части пространства, то задача определения векторов поля в любой точке этого пространства может быть принципиально решена с помощью выражений (35.32), (35.33). Основная сложность заключается в определении плотностей поверхностных токов.

Как указывалось, плотности токов $\dot{\mathbf{v}}_a$, $\dot{\mathbf{v}}_m$ связаны с векторами поля у поверхностей $\dot{\mathbf{E}}_{1\tau}$, $\dot{\mathbf{H}}_{1\tau}$ соотношениями (35.27) и (35.26).

Подставим эти соотношения в формулы (35.32), (35.33):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_{\Sigma} = & \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a 4\pi} \int_{V_1} \left\{ j\omega\tilde{\mu}_a \operatorname{rot} \left(\mathbf{J}_a \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) + \right. \\ & + \operatorname{grad} \operatorname{div} \left(\mathbf{J}_m \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) + \gamma^2 \mathbf{J}_m \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \left. \right\} dV + \\ & + \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a 4\pi} \int_{S_1} \left\langle j\omega\tilde{\mu}_a \operatorname{rot} \left\{ [\mathbf{I}_{1\tau} \dot{\mathbf{H}}_{1\tau}] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right\} + \right. \\ & + \operatorname{grad} \operatorname{div} \left\{ [\dot{\mathbf{E}}_{1\tau} \mathbf{I}_{n1}] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right\} + \gamma^2 [\dot{\mathbf{E}}_{1\tau} \mathbf{I}_{n1}] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \left. \right\rangle dS, \quad (35.34) \\ \dot{\mathbf{E}}_{\Sigma} = & - \frac{1}{j\omega\tilde{\epsilon}_a 4\pi} \int_{V_1} \left\{ j\omega\tilde{\epsilon}_a \operatorname{rot} \left(\mathbf{J}_m \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) - \right. \\ & - \operatorname{grad} \operatorname{div} \left(\mathbf{J}_a \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) - \gamma^2 \mathbf{J}_a \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \left. \right\} dV - \\ & - \frac{1}{j\omega\tilde{\epsilon}_a 4\pi} \int_{S_1} \left\langle j\omega\tilde{\epsilon}_a \operatorname{rot} \left\{ [\dot{\mathbf{E}}_{1\tau} \mathbf{I}_{n1}] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right\} - \right. \\ & - \operatorname{grad} \operatorname{div} \left\{ [\mathbf{I}_{n1} \dot{\mathbf{H}}_{1\tau}] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right\} - \gamma^2 [\mathbf{I}_{n1} \dot{\mathbf{H}}_{1\tau}] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \left. \right\rangle dS. \quad (35.35) \end{aligned}$$

Полученные выражения позволяют определить электромагнитное поле в любой точке пространства в случае, если известно его значение у поверхностей S_1 . В § 35.5 дается пример возможного применения выведенных формул.

§ 35.5. Дифракция плоских волн на отверстии в бесконечно протяженном идеально проводящем экране

Допустим, что плоская волна падает на бесконечно протяженный плоский металлический экран, в котором сделано прямоугольное отверстие. Пусть вектор Пойнтинга плоской волны перпендикулярен плоскости экрана, как показано на рис. 35.3.

Так как экран предполагается идеально проводящим, тангенциальная составляющая электрического поля у его поверхности должна быть равна нулю. Поэтому по всей поверхности экрана, за исключением отверстия, векторное произведение $[\dot{\mathbf{E}}_{1\tau} \mathbf{I}_{n1}]$ в формулах (35.34) и (35.35) следует принять равным нулю.

Плоская волна, падающая на отверстие в экране, вызывает появление тангенциальной составляющей магнитного поля у поверхности экрана, со стороны объема V_2 . Однако, как показывает более строгое рассмотрение вопроса, эта составляющая магнитного поля за пределами отверстия будет малой. Вслед-

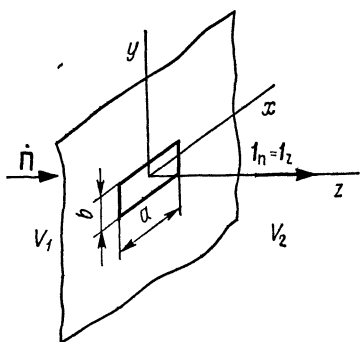


Рис. 35.3

ствие этого можно сделать допущение, что и векторное произведение $[1_{n1} \dot{\mathbf{H}}_{1\tau}]$ за пределами отверстия у поверхности экрана можно считать равным нулю.

Далее предположим, что поле в отверстии такое же, как у падающей плоской волны. Примем поляризацию падающего поля такой, при которой оно содержит составляющие $\dot{\mathbf{E}}_x$ и $\dot{\mathbf{H}}_y$. Тогда решаемую дифракционную задачу можно сформулировать таким образом.

Все источники поля находятся в объеме V_1 . В объеме V_2 источников поля нет. В пределах площади отверстия в экране заданы тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей $\dot{\mathbf{E}}_x$ и $\dot{\mathbf{H}}_y$. За пределами отверстия тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей равны нулю. Требуется определить электромагнитное поле в объеме V_2 .

Решая задачу для объема V_2 с помощью формул (35.32), (35.33), плотности токов $\dot{\mathbf{J}}_e$ и $\dot{\mathbf{J}}_m$ следует положить в этом объеме равными нулю, в силу чего объемные интегралы в указанных выражениях исчезнут.

Поверхностные интегралы сохраняются. Плотности поверхностных токов необходимо найти с помощью соотношений (35.26), (35.27):

$$\dot{\mathbf{v}}_m = [\dot{\mathbf{E}}_x 1_{n1}] = [\dot{\mathbf{E}}_x 1_z] = -1_y \dot{\mathbf{E}}_x, \quad (35.36)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_e = [1_{n1} \dot{\mathbf{H}}_y] = [1_z \dot{\mathbf{H}}_y] = -1_x \dot{\mathbf{H}}_y. \quad (35.37)$$

Интегрирование в поверхностных интегралах следует проводить в пределах площади отверстия, так как за его пределами поверхностных токов нет.

С учетом сказанного формулы (35.32), (35.33) приобретают такой вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_\Sigma = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left\{ \text{rot} \left\{ [1_z \dot{\mathbf{H}}_y] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right\} + \right. \\ \left. + \frac{1}{j\omega \tilde{\mu}_a} \text{grad div} \left\{ [\dot{\mathbf{E}}_x 1_z] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right\} - j\omega \tilde{\epsilon}_a [\dot{\mathbf{E}}_x 1_z] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right\} dS, \quad (35.38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_\Sigma = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left\{ \text{rot} \left\{ [1_z \dot{\mathbf{E}}_x] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right\} - \right. \\ \left. - \frac{1}{j\omega \tilde{\epsilon}_a} \text{grad div} \left\{ [\dot{\mathbf{H}}_y 1_z] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right\} + j\omega \tilde{\mu}_a [\dot{\mathbf{H}}_y 1_z] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right\} dS. \quad (35.39) \end{aligned}$$

В этих выражениях S_0 — площадь отверстия. Заданным является поле падающей плоской волны $\dot{\mathbf{E}}_x$, $\dot{\mathbf{H}}_y$.

Поверхностные интегралы в выражениях (35.38), (35.39) можно вычислить с требуемой степенью точности, однако решение будет

приближенным, поскольку оно не учитывает «затекание» поверхностных токов за пределы площади отверстия.

Подобный подход к задачам дифракции в электродинамике используют довольно часто. Таким образом, можно, например, найти поле, излучаемое открытым концом прямоугольного или круглого волновода, или поле рупорной антенны. Задача сводится к вычислению поверхностных интегралов по площади поперечного сечения волноводов или рупоров. При этом полагают, что поле в волноводах или рупорах такое же, и в волноводах или рупорах бесконечной протяженности. «Затекание» поверхностных токов на внешние стенки волноводов и рупоров при этом не учитывается, так же как не учитывается изменение поля в раскрыве волноводов или рупоров по сравнению с полем, существующем в этих системах в случае их бесконечной протяженности.

Поскольку в формулах (35.34), (35.35) искомое поле входит в левую и правую интегральную части, в ряде случаев задачу можно свести к решению интегральных уравнений [9]. При этом теоретически задача решается точно, однако практически решение точных интегральных уравнений возможно выполнить только приближенными, численными методами.

ГЛАВА 36

ПРИНЦИП ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОДОБИЯ

§ 36.1. Постановка вопроса

В электродинамике так же, как и в других отраслях науки и техники, широко используют моделирование. Задача создания антенного устройства, работающего в длинноволновом диапазоне и имеющего огромные размеры, может быть значительно облегчена путем проведения экспериментов на модели, работающей в диапазоне высоких частот и обладающей в силу этого малыми габаритами. При исследовании миллиметровых и субмиллиметровых волн возникает обратная проблема. При этом эксперимент целесообразно перенести в область более длинных волн, чтобы увеличить размеры устройства, с помощью которого проводится эксперимент.

Бывают случаи, когда реальная система должна работать в среде с параметрами, которые трудно воспроизвести в лабораторных условиях. Возникает вопрос, нельзя ли поставить эксперимент в лаборатории таким образом, чтобы он правильно отображал работу системы в реальных условиях.

Задачей настоящей главы является установление принципа, при соблюдении которого эксперимент, проведенный в одних условиях, правильно отображает работу системы в других условиях. Этот принцип называют *принципом электродинамического подобия*.

§ 36.2. Математические условия электродинамического подобия

Запишем уравнения Максвелла для мгновенных значений и векторов поля [см. уравнения (2.5), (2.6)]:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J}_a + \gamma_a \mathbf{E} + \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mathbf{J}_m - \gamma_m \mathbf{H} - \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Для записи этих уравнений в безразмерной форме необходимо выделить безразмерные величины единичной амплитуды, определяющие функциональную зависимость от координат и времени, а также величины, несущие в себе размерность и масштаб.

Представим величины, входящие в уравнения Максвелла, в форме:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H} &= \beta_1 \mathbf{a}_1, & \mathbf{E} &= \beta_2 \mathbf{a}_2, & \mathbf{J}_a &= \beta_3 \mathbf{a}_3, & \mathbf{J}_m &= \beta_4 \mathbf{a}_4, \\ \gamma_a &= \beta_5 a_5, & \epsilon_a &= \beta_6 a_6, & \gamma_m &= \beta_7 a_7, & \mu_a &= \beta_8 a_8, \\ l &= \beta_9 a_9, & t &= \beta_{10} a_{10}. \end{aligned} \right\} \quad (36.1)$$

Здесь $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ — безразмерные векторы единичной амплитуды, определяющие функциональную зависимость векторов поля и сторонних токов от безразмерных координат и времени; a_5, a_6, a_7, a_8 — безразмерные скаляры единичной амплитуды, определяющие функциональную зависимость удельных электрической и магнитной проводимостей, а также абсолютных диэлектрической и магнитной проницаемостей от безразмерных координат (в случае неоднородной среды) и векторов поля (в случае нелинейной среды); a_9, a_{10} — безразмерные скаляры единичной амплитуды, определяющие длину и время в дифференциальных операторах уравнений (2.5), (2.6); β_1 — β_{10} — масштабные коэффициенты, имеющие следующие единицы измерения:

β_1 — А/м; β_2 — В/м; β_3 — А/м²; β_4 — В/м²; β_5 — См·м; β_6 — Ф/м; β_7 — Ом/м; β_8 — Гн/м; β_9 — м; β_{10} — с.

Подставим выражения (36.1) в уравнения (2.5), (2.6):

$$\frac{\beta_1}{\beta_9} \operatorname{rot} \mathbf{a}_1 = \beta_3 \mathbf{a}_3 + \beta_5 \beta_3 a_5 \mathbf{a}_2 + \frac{\beta_6 \beta_2}{\beta_{10}} a_6 \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial a_{10}}, \quad (36.2)$$

$$\frac{\beta_2}{\beta_9} \operatorname{rot} \mathbf{a}_2 = -\beta_4 \mathbf{a}_4 - \beta_7 \beta_1 a_7 \mathbf{a}_1 - \frac{\beta_8 \beta_1}{\beta_{10}} a_8 \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial a_{10}}. \quad (36.3)$$

Разделим уравнение (36.2) на β_1 , уравнение (36.3) — на β_2 и умножим оба уравнения на β_9 :

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}_1 = \frac{\beta_3 \beta_9}{\beta_1} \mathbf{a}_3 + \frac{\beta_3 \beta_2 \beta_9 a_5}{\beta_1} \mathbf{a}_2 + \frac{\beta_6 \beta_2 \beta_9 a_6}{\beta_{10} \beta_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial a_{10}}, \quad (36.4)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}_2 = -\frac{\beta_4 \beta_9}{\beta_2} \mathbf{a}_4 - \frac{\beta_7 \beta_1 \beta_9 a_7}{\beta_2} \mathbf{a}_1 - \frac{\beta_8 \beta_1 \beta_9 a_8}{\beta_{10} \beta_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial a_{10}}. \quad (36.5)$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\beta_3 \beta_9}{\beta_1}, \quad C_2 = \frac{\beta_5 \beta_2 \beta_9 a_5}{\beta_1}, \quad C_3 = \frac{\beta_6 \beta_2 \beta_9 a_8}{\beta_{10} \beta_1}, \\ C_4 &= \frac{\beta_1 \beta_9}{\beta_2}, \quad C_5 = \frac{\beta_7 \beta_1 \beta_9 a_7}{\beta_2}, \quad C_6 = \frac{\beta_8 \beta_1 \beta_9 a_8}{\beta_{10} \beta_2} \end{aligned} \quad (36.6)$$

и подставляя их в уравнения (36.4), (36.5), получаем

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}_1 = C_1 \mathbf{a}_3 + C_2 \mathbf{a}_2 + C_3 \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial a_{10}}, \quad (36.7)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}_2 = -C_4 \mathbf{a}_4 - C_5 \mathbf{a}_1 - C_6 \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial a_{10}}. \quad (36.8)$$

Уравнения (36.7) и (36.8) являются безразмерными. С их помощью можно описать различные электродинамические задачи.

Допустим, что имеются две электродинамические задачи и соответственно две группы уравнений, описывающих эти задачи. Если коэффициенты C с одинаковыми индексами в двух группах уравнений одинаковы, то уравнения будут идентичными. Однако идентичность уравнений не означает идентичность электродинамических задач. Идентичность задач возникает в том случае, когда коэффициенты β с одинаковыми индексами, а также коэффициенты a_5, a_6, a_7, a_8 двух задач равны друг другу. Идентичность уравнений требует равенства коэффициентов C , что может быть достигнуто при различных значениях коэффициентов β и a в первой и второй задачах. Если созданы условия, при которых коэффициенты C двух задач одинаковы при различных значениях коэффициентов β и a , то говорят, что электродинамические задачи подобны, т. е. описываются одними и теми же безразмерными уравнениями Максвелла. Обозначая коэффициенты, относящиеся к первой задаче, одним штрихом, а коэффициенты, относящиеся ко второй задаче, — двумя штрихами, можно записать требование идентичности двух электродинамических задач

$$\beta'_n = \beta''_n, \quad a'_5 = a''_5, \quad a'_6 = a''_6, \quad a'_7 = a''_7, \quad a'_8 = a''_8, \quad (36.9)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots, 10$.

Требование же подобия двух электродинамических задач следует записать в виде равенств

$$C'_m = C''_m, \quad (36.10)$$

где $m = 1, 2, 3, \dots, 6$.

Равенства (36.10) представляют собой математическое выражение принципа электродинамического подобия.

В приложении V даны примеры использования принципа электродинамического подобия.

ГЛАВА 37
НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОНОВ
С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

§ 37.1. Постановка вопроса

Процессы взаимодействия электронов и электронных пучков с электромагнитным полем занимают особое место в теории электромагнитного поля. На законах такого взаимодействия основана работа современных электронных устройств. Круг вопросов, подлежащих рассмотрению при изучении процессов взаимодействия, может составить содержание нескольких специальных курсов. В рамках курса «Основы электродинамики» невозможно достаточно осветить эти вопросы. Поэтому в настоящей главе ограничимся изложением основных положений взаимодействия электронов с электромагнитным полем, что можно рассматривать как введение в специальные курсы.

§ 37.2. Движение электрона в электромагнитном поле

В соответствии с законом Кулона (1.1) и определением вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} силу, которая действует на электрон со стороны электрического поля, можно выразить соотношением

$$\mathbf{F}_э = e\mathbf{E}, \quad (37.1)$$

где $\mathbf{F}_э$ — вектор силы, действующей на электрон со стороны электрического поля; e — заряд электрона, равный $1,60 \cdot 10^{-19}$ Кл; \mathbf{E} — вектор напряженности электрического поля.

Действие магнитного поля характеризуется соотношением (1.56), которое применительно к рассматриваемому случаю, записывается в виде

$$\mathbf{F}_м = e[\mathbf{v}\mathbf{B}], \quad (37.2)$$

где $\mathbf{F}_м$ — вектор силы, действующей на электрон со стороны магнитного поля; \mathbf{v} — вектор скорости движения электрона; \mathbf{B} — вектор магнитной индукции.

Суммарная сила \mathbf{F}_e , действующая на электрон, равна произведению массы на ускорение:

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{1}_F m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \quad (37.3)$$

где m — масса электрона, равная $9,108 \cdot 10^{-31}$ кг; $d^2\mathbf{r}/dt^2$ — вторая производная пути \mathbf{r} по времени t , или ускорение.

Можно написать, что

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_э + \mathbf{F}_м = e\mathbf{E} + e[\mathbf{v}\mathbf{B}]. \quad (37.4)$$

Сравнивая выражения (37.3) и (37.4), получаем

$$\mathbf{1}_F \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{e}{m} \mathbf{E} + \frac{e}{m} [\mathbf{v}\mathbf{B}]. \quad (37.5)$$

Выражение (37.5) позволяет определить характер движения электрона в различных случаях. Рассмотрим некоторые из них.

Движение электрона в электрическом поле. В отсутствие магнитного поля на основании соотношений (27.13), (27.11)

$$\mathbf{E} = -\text{grad } U_{\text{э}}. \quad (37.6)$$

Следовательно, выражение (37.5) можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{1}_F \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{e}{m} \text{grad } U_{\text{э}} = -\frac{e}{m} \mathbf{1}_F \frac{dU_{\text{э}}}{dr}. \quad (37.7)$$

Так как

$$dr/dt = v \quad \text{и} \quad dr = v dt,$$

уравнение (37.7) может быть записано в виде

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -\frac{e}{m} \cdot \frac{1}{v} \cdot \frac{dU_{\text{э}}}{dr}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\int_{v_0}^v v dv = -\frac{e}{m} \int_{U_{\text{э}0}}^{U_{\text{э}}} dU_{\text{э}}$$

или, учитывая, что электрон несет отрицательный заряд,—

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = e(U_{\text{э}} - U_{\text{э}0}). \quad (37.8)$$

Если начальные значения v_0 и $U_{\text{э}0}$ равны нулю, то выражение (37.8) приводит к известному соотношению

$$v = \sqrt{2 \frac{e}{m} U_{\text{э}}}. \quad (37.9)$$

Движение электрона в магнитном поле. В отсутствие электрического поля на основании выражения (37.2)

$$F_{\text{м}} = evB \sin \alpha, \quad (37.10)$$

где α — угол между направлениями векторов \mathbf{v} и \mathbf{B} .

Пусть магнитное поле ориентировано вдоль оси z . Тогда $B_x = B_y = 0$ и уравнение (37.5) записывается в виде

$$\mathbf{1}_F \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{e}{m} [\mathbf{v} \mathbf{B}_z]. \quad (37.11)$$

Развернем выражения для $\mathbf{1}_F \frac{d^2 r}{dt^2}$ и \mathbf{v} :

$$\mathbf{1}_F \frac{d^2 r}{dt^2} = \mathbf{1}_x \frac{d^2 x}{dt^2} + \mathbf{1}_y \frac{d^2 y}{dt^2} + \mathbf{1}_z \frac{d^2 z}{dt^2},$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{1}_x \frac{dx}{dt} + \mathbf{1}_y \frac{dy}{dt} + \mathbf{1}_z \frac{dz}{dt}.$$

Подставим полученные выражения в уравнение (37.11):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{e}{m} \cdot \frac{dy}{dt} B_z, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{e}{m} \cdot \frac{dx}{dt} B_z, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (37.12)$$

Решение этих уравнений не представляет затруднений. Положив начальную скорость движения электрона v_0 и приняв ее направление таким, при котором угол с осью z равен α и угол проекции этой скорости на плоскость x, y с осью x равен β , напомним решение системы уравнений (37.12):

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{m}{eB_z} v_0 \sin \alpha \sin \left(\frac{eB_z}{m} t - \beta \right), \\ y &= \frac{m}{eB_z} v_0 \sin \alpha \cos \left(\frac{eB_z}{m} t - \beta \right), \\ z &= v_0 t \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (37.13)$$

Правильность написанных решений легко подтвердить подстановкой их в систему уравнений (37.12). В плоскости x, y электрон движется по окружности, что может быть показано путем сложения возведенных в квадрат выражений для x и y :

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{m}{eB_z} v_0 \sin \alpha \right)^2. \quad (37.14)$$

Движение по оси z в соответствии с последним уравнением системы (37.13) является поступательным, происходящим со скоростью $v_0 \cos \alpha$. В целом электрон под действием магнитного поля движется по винтовой линии, вращаясь вокруг оси z и двигаясь поступательно вдоль нее. Из выражений (37.13) следует, что угловая частота ω_z вращения электрона вокруг оси z

$$\omega_z = \frac{eB_z}{m}. \quad (37.15)$$

Движение электрона в однородном электромагнитном поле. Разберем простейший случай, когда электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны. Допустим, что $\mathbf{B} = \mathbf{B}_z$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_x$ и $\mathbf{E}_y = \mathbf{E}_z = \mathbf{V}_x = \mathbf{V}_y = 0$. Пусть в начальный момент времени электрон пересекает начало координат со скоростью v_0 , направленной нормально к полю \mathbf{B}_z . Уравнения, определяющие движение электрона, на основании выражения (37.5) записывают в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{e}{m} E_x + \frac{e}{m} B_z \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{e}{m} B_z \frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (37.16)$$

В результате интегрирования уравнений (37.16) получаем

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{\omega_z} v_{0x} \sin(\omega_z t) + \left(\frac{e}{m} \frac{1}{\omega_z^2} E_x + \frac{1}{\omega_z} v_{0y} \right) \{1 - \cos(\omega_z t)\}, \\ y &= \left(\frac{1}{\omega_z^2} \frac{e}{m} E_x + \frac{1}{\omega_z} v_{0y} \right) \sin(\omega_z t) - \frac{1}{\omega_z} v_{0x} \{1 - \cos(\omega_z t)\} - \frac{E_x t}{B_z}, \\ z &= 0, \end{aligned} \right\} (37.17)$$

где v_{0x} , v_{0y} — проекции скорости v_0 соответственно на оси x и y .

Исключая тригонометрические функции из выражений (37.17), получаем уравнение траектории электрона:

$$(x - A)^2 + (y - B)^2 = R^2, \quad (37.18)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{\omega_z} \left(v_{0y} + \frac{E_x}{B_z} \right), \\ B &= -\frac{1}{\omega_z} \left(v_{0x} + \frac{e}{m} E_x t \right), \\ R^2 &= \frac{2}{m} \cdot \frac{1}{\omega_z^2} \left(\frac{mv_0^2}{2} + \frac{mv_{0y}}{B_z} E_x + \frac{m}{2B_z^2} E_x^2 \right). \end{aligned} \right\} (37.19)$$

Таким образом, воздействие на электрон взаимно перпендикулярных электрического и магнитного полей приводит к уравнению траектории (37.18), которая описывается точкой на окружности радиуса R . Центр этой окружности перемещается прямолинейно и равномерно по прямой, находящейся на расстоянии A от оси y и ориентированной параллельно этой оси. Скорость перемещения центра равна E_x/B_z .

§ 37.3. Фиктивный угол пролета электронов

Во многих электронных устройствах электрон, излученный катодом, направляется под действием поля ко второму электроду. Очень важно знать время пролета электрона между электродами. Обычно существенно не абсолютное значение этого времени, а его отношение к периоду колебаний. В связи с этим вводят понятие угла пролета электронов θ :

$$\theta = 2\pi \frac{t_{\text{пр}}}{T},$$

где $t_{\text{пр}}$ — время пролета электрона между электродами; T — период колебаний напряжения между электродами.

Поскольку электроны обладают различными скоростями, время пролета каждого электрона различно. Чтобы внести некоторую определенность в понятие угла пролета, его заменяют фиктивным углом пролета, который определяют так же, как и угол пролета, но напряжение между электродами принимают постоянным, равным амплитудному значению переменного напряжения. Определим величину фиктивного угла пролета. Полагая в выражении (37.5) вектор \mathbf{B}

равным нулю, получаем следующее уравнение движения электрона:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{e}{m} E.$$

Если поле однородное и расстояние между электродами равно d , то

$$E = U_0/d$$

и уравнение движения электрона записывается в виде

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{e}{md} U_0. \quad (37.20)$$

Считая скорость электрона в начальный момент времени равной нулю и располагая начало координат в плоскости катода, получаем

$$r = \frac{eU_0}{md} \cdot \frac{t^2}{2},$$

откуда фиктивное время пролета при $r = d$

$$t_\Phi = d \sqrt{\frac{2m}{eU_0}}. \quad (37.21)$$

Фиктивный угол пролета

$$\theta_\Phi = 2\pi \frac{t_\Phi}{T} = \frac{2\pi}{T} d \sqrt{\frac{2m}{eU_0}}. \quad (37.22)$$

Подставляя значение массы и заряда электрона, имеем

$$\theta_\Phi = \frac{12fd}{\sqrt{U_0}}. \quad (37.23)$$

Здесь θ_Φ — фиктивный угол пролета электрона, град.; f — частота колебаний напряжения, приложенного между электродами, МГц; d — расстояние между электродами, см; U_0 — напряжение между электродами, В.

Выражение (37.23) является расчетным для определения фиктивного угла пролета.

§ 37.4. Полный ток, возникающий между электродами

При расчете электронных устройств необходимо знать величину полного тока, возникающего между электродами в случае пролета электронов между ними. Этот ток можно найти из следующих соображений. Перемещение заряда между электродами сопровождается затратой мощности, равной произведению силы, приложенной к заряду, на скорость перемещения заряда:

$$P = F_0 v. \quad (37.24)$$

С другой стороны, эта мощность равна произведению напряжения, приложенного к электродам, на величину тока в цепи элект-

родов:

$$P = U_0 I_0. \quad (37.25)$$

Приравнивая значения мощностей, находим

$$F_0 v = U_0 I_0. \quad (37.26)$$

Подставляя в последнее выражение значение силы F_0 из (37.1) и полагая поле между электродами однородным, при котором

$$E = U_0/d,$$

где U_0 — напряжение на электродах; d — расстояние между электродами, можно написать уравнение (37.26) в виде

$$I_0 = \frac{ev}{d}. \quad (37.27)$$

Полученное значение тока, возникающего в цепи двух электродов при пролете между ними заряда e , представляет собой ток, который летящий заряд наводит в этих электродах. В силу этого этот ток называют наведенным. Так обстоит дело в случае, если частота мала и можно пренебречь током смещения между электродами. Если же частота велика, то к наведенному току следует прибавить ток смещения, плотность которого

$$J_c = \frac{dD}{dt} = \epsilon_0 \frac{dE}{dt}.$$

Чтобы получить плотность наведенного тока, следует разделить ток, найденный из выражения (37.27), на площадь электродов

$$J_0 = I_0 \frac{l_0}{S} = I_0 \frac{ev}{Sd}.$$

Произведение $S \cdot d$ представляет собой объем, заключенный между электродами, а частное от деления заряда на этот объем — объемную плотность зарядов ρ_0 . Тогда плотность наведенного тока

$$J_0 = I_0 \rho_0 v. \quad (37.28)$$

Плотность суммарного тока J_Σ равна сумме плотностей наведенного тока и тока смещения:

$$J_\Sigma = J_0 + J_c = I_0 \rho_0 v + \epsilon_0 \frac{dE}{dt}. \quad (37.29)$$

Этот суммарный ток и следует принимать в расчет при анализе электронных приборов на сверхвысоких частотах.

§ 37.5. Взаимодействие между электронным потоком и электрическим полем

Работа ряда электронных устройств, например ламп бегущей волны, основана на принципе взаимодействия электронных пучков с электромагнитными полями. Для понимания работы подобных устройств необходимо представлять характер этого взаимодействия.

Прежде всего рассмотрим случай, когда на электронный поток в виде некоторого пучка конечного сечения действует внешнее поле E_z ; ориентированное вдоль этого пучка. Пусть ось пучка электронов совпадает с осью z декартовой системы координат. Допустим, что скорость электронов в пучке складывается из некоторой постоянной составляющей v_0 и некоторой переменной составляющей $v(z, t)$, являющейся функцией координаты z и времени t :

$$v = v_0 + v(z, t). \quad (37.30)$$

На основании уравнения движения (37.3) можно написать уравнение движения электронов в пучке для данного случая:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = eE_z,$$

где m — масса электрона; $d^2 z/dt^2$ — ускорение; e — заряд электрона; E_z — продольная составляющая напряженности электрического поля, действующего на пучок в соответствии с условиями анализируемой задачи.

Учитывая, что ускорение является первой производной скорости по времени, можно записать это уравнение в виде

$$m \frac{d}{dt} \{v_0 + v(z, t)\} = eE_z. \quad (37.31)$$

Пока неизвестно, как будет изменяться плотность объемных зарядов в электронном пучке под действием внешнего электрического поля. В силу этого запишем плотность объемных зарядов в виде некоторой постоянной составляющей ρ_0 и некоторой переменной составляющей $\rho(z, t)$, являющейся функцией координаты z и времени t :

$$\rho_{\text{эн}} = \rho_0 + \rho(z, t). \quad (37.32)$$

Плотность тока в пучке $J_{\text{эн}}$ равна произведению плотности объемных зарядов ρ на вектор скорости движения этих зарядов \mathbf{v} :

$$J_{\text{эн}} = \rho_{\text{эн}} \mathbf{v}.$$

Подставляя в последнее выражение значение скорости и плотности из формул (37.30) и (37.32), получим плотность тока, которая также будет состоять из некоторой постоянной составляющей J_0 и переменной составляющей $J_n(z, t)$:

$$J_{\text{эн}} = J_0 + J_n(z, t) = \{\rho_0 + \rho(z, t)\} \{v_0 + v(z, t)\}, \quad (37.33)$$

где

$$J_0 = \rho_0 v_0. \quad (37.34)$$

Далее используем еще одну зависимость, связывающую плотность тока в пучке с плотностью объемных зарядов. Эта зависимость, называемая уравнением непрерывности, была установлена соотношением (2.10). Применительно к рассматриваемому случаю

это соотношение следует записать в форме

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_{\text{ан}} = -d\rho_{\text{ан}}/dt. \quad (37.35)$$

Уравнение непрерывности может быть записано в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_{\text{ан}} = \operatorname{div} \{ \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_n(z, t) \} = -\frac{d}{dt} \{ \rho_0 + \rho(z, t) \}. \quad (37.36)$$

Уравнения (37.31), (37.33) и (37.36) являются системой уравнений, связывающих между собой поле, скорость, плотность объемных зарядов и плотность тока в пучке. С помощью этой системы можно связать одним уравнением любые две функции из указанных четырех. С этой целью запишем эти уравнения для комплексных амплитуд, что значительно облегчит решение. Начнем с уравнения (37.31). Проводя дифференцирование скорости по времени, следует учесть, что производная от постоянной составляющей скорости v_0 равна нулю. Переменную составляющую скорости следует дифференцировать как сложную функцию:

$$\frac{dv(z, t)}{dt} = \frac{dv(z, t)}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{dv(z, t)}{dt}.$$

Так как производная $dz/dt = v = v_0 + v(z, t)$ и дифференцирование по времени в случае комплексных амплитуд эквивалентно умножению на $j\omega$, из уравнения (37.31) получаем

$$(\dot{v}_0 + \dot{v}) \frac{d\dot{v}}{dz} + j\omega \dot{v} = \frac{e}{m} \dot{E}_z. \quad (37.37)$$

Здесь \dot{v} — комплексная амплитуда переменной составляющей скорости; \dot{E}_z — комплексная амплитуда продольной составляющей напряженности электрического поля.

Используя уравнение (37.33), получим соотношение для комплексной амплитуды переменной составляющей плотности тока:

$$\dot{J}_n = \dot{\rho} \dot{v}_0 + \dot{\rho}_0 \dot{v} + \dot{\rho} \dot{v}, \quad (37.38)$$

где \dot{J}_n — комплексная амплитуда переменной составляющей плотности тока.

Далее перейдем к последнему уравнению (37.36). Как известно, в декартовой системе координат

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_n = \frac{\partial \dot{J}_{nx}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{J}_{ny}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{J}_{nz}}{\partial z}.$$

В рассматриваемой задаче пучок ориентирован вдоль оси z , поэтому в приведенном выражении необходимо учитывать только составляющую \dot{J}_{nz} . Производная по времени от постоянной составляющей плотности объемного заряда $\dot{\rho}_0$ равна нулю. Тогда уравнение (37.36) для комплексных амплитуд запишется в виде

$$d\dot{J}_{nz}/dz = -j\omega \dot{\rho}, \quad (37.39)$$

где $\dot{\rho}$ — комплексная амплитуда переменной составляющей плотности объемного заряда в пучке.

Уравнения для комплексных амплитуд (37.37), (37.38) и (37.39) представляют собой систему нелинейных уравнений, решение которых довольно сложно. Для упрощения задачи положим, что имеются малые изменения скорости и плотности объемного заряда по сравнению с их постоянными составляющими. Это может быть выражено неравенствами

$$|\dot{v}| \ll |\dot{v}_0| \text{ и } |\dot{\rho}| \ll |\dot{\rho}_0|.$$

В этом случае система нелинейных уравнений (37.37), (37.38) переходит в систему линейных уравнений:

$$\dot{v}_0 \frac{d\dot{v}}{dz} + j\omega\dot{v} = \frac{e}{m} \dot{E}_z, \quad (37.40)$$

$$\dot{J}_{nz} = \dot{J}_{nz} = \dot{\rho}\dot{v}_0 + \dot{\rho}_0\dot{v}. \quad (37.41)$$

Уравнение (37.39) записывается без изменений.

Выведем из этой системы уравнений одно уравнение, связывающее между собой напряженность электрического поля \dot{E}_z и плотность тока в пучке \dot{J}_{nz} . Для этого прежде всего найдем из уравнения (37.39) комплексную амплитуду плотности объемного заряда:

$$\dot{\rho} = -\frac{1}{j\omega} \cdot \frac{d\dot{J}_{nz}}{dz}. \quad (37.42)$$

Подставим найденное значение $\dot{\rho}$ в уравнение (37.41):

$$\dot{J}_{nz} = -\frac{\dot{v}_0}{j\omega} \cdot \frac{d\dot{J}_{nz}}{dz} + \dot{\rho}_0\dot{v}.$$

Далее определим из последнего уравнения комплексную амплитуду скорости \dot{v} :

$$\dot{v} = \frac{1}{\dot{\rho}_0} \left(\dot{J}_{nz} + \frac{\dot{v}_0}{j\omega} \cdot \frac{d\dot{J}_{nz}}{dz} \right).$$

Подставим найденное значение \dot{v} в уравнение (37.40):

$$\frac{\dot{v}_0}{\dot{\rho}_0} \left(\frac{d\dot{J}_{nz}}{dz} + \frac{\dot{v}_0}{j\omega} \cdot \frac{d^2\dot{J}_{nz}}{dz^2} \right) + \frac{j\omega}{\dot{\rho}_0} \left(\dot{J}_{nz} + \frac{\dot{v}_0}{j\omega} \cdot \frac{d\dot{J}_{nz}}{dz} \right) = \frac{e}{m} \dot{E}_z.$$

Сгруппировав члены, получим

$$\frac{\dot{v}_0^2}{j\omega\dot{\rho}_0} \cdot \frac{d^2\dot{J}_{nz}}{dz^2} + 2\frac{\dot{v}_0}{\dot{\rho}_0} \cdot \frac{d\dot{J}_{nz}}{dz} + \frac{j\omega}{\dot{\rho}_0} \dot{J}_{nz} = \frac{e}{m} \dot{E}_z. \quad (37.43)$$

Это уравнение связывает плотность тока в электронном пучке с напряженностью электрического поля, действующего на пучок. Для дальнейшего анализа процесса необходимо задаться электрическим полем, действующим на пучок, или установить еще одну

связь между полем и пучком, с тем чтобы, получив еще одно уравнение, решить его совместно с уравнением (37.43). Допустим, что в некоторой электродинамической системе, пока не определяемой конкретно, действует пучок электронов, который будем рассматривать как некоторый сторонний возбуждающий ток.

§ 37.6. Возбуждение поля электронным пучком

Пусть электронный пучок, ориентированный вдоль оси z в декартовой системе координат, проходит в среде, лишенной проводимости. В основу расчета положим уравнения Максвелла для комплексных амплитуд (2.12) и (2.13), приняв $\dot{J}_m = 0$:

$$\begin{aligned} \text{rot } \dot{\mathbf{H}} &= \mathbf{J}_a + j\omega\epsilon_a \dot{\mathbf{E}}, \\ \text{rot } \dot{\mathbf{E}} &= -j\omega\mu_a \dot{\mathbf{H}} \end{aligned}$$

(среда непроводящая, поэтому вместо $\tilde{\epsilon}_a \tilde{\mu}_a$ взяты ϵ_a и μ_a).

Из этих уравнений получаются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \dot{\mathbf{E}} &= -j\omega\mu_a \text{rot } \dot{\mathbf{H}}, \\ \text{rot rot } \dot{\mathbf{E}} &= \omega^2\mu_a\epsilon_a \dot{\mathbf{E}} - j\omega\mu_a \mathbf{J}_a. \end{aligned}$$

Поскольку $\omega^2\mu_a\epsilon_a = \beta^2$,

$$\text{rot rot } \dot{\mathbf{E}} = \beta^2 \dot{\mathbf{E}} - j\omega\mu_a \mathbf{J}_a.$$

Используя векторное тождество

$$\text{rot rot } \dot{\mathbf{E}} = \text{grad div } \dot{\mathbf{E}} - \nabla^2 \dot{\mathbf{E}},$$

получаем

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + \beta^2 \dot{\mathbf{E}} = \text{grad div } \dot{\mathbf{E}} + j\omega\mu_a \mathbf{J}_a. \quad (37.44)$$

В исследуемой задаче роль плотности стороннего электрического тока играет плотность тока в электронном пучке \mathbf{J}_{pz} . С учетом этого уравнение (37.44) следует записать в виде

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + \beta^2 \dot{\mathbf{E}} = \text{grad div } \dot{\mathbf{E}} + j\omega\mu_a \mathbf{J}_{pz}. \quad (37.45)$$

Для определения дивергенции вектора $\dot{\mathbf{E}}$ используем уравнение (2.14):

$$\text{div}(\tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}) = \dot{\rho}_a,$$

которое в рассматриваемом случае может быть записано в виде

$$\text{div } \dot{\mathbf{E}} = \dot{\rho}_a / \epsilon_a.$$

Роль $\dot{\rho}_a$ играет плотность объемного заряда в пучке, в силу чего формулу можно записать следующим образом:

$$\text{div } \dot{\mathbf{E}} = \dot{\rho} / \epsilon_a. \quad (37.46)$$

Значение ρ определяется формулой (37.42).

Тогда выражение (37.46) можно записать таким образом:

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{E}} = -\frac{1}{j\omega\epsilon_a} \cdot \frac{d\dot{J}_{nz}}{dz}. \quad (37.47)$$

Подставляя выражение (37.47) в формулу (37.45), получаем

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + \beta^2 \dot{\mathbf{E}} = -\frac{1}{j\omega\epsilon_a} \operatorname{grad} \frac{d\dot{J}_{nz}}{dz} + j\omega\mu_a \mathbf{J}_{nz}. \quad (37.48)$$

Уравнение (37.48) является исходным уравнением, связывающим плотность тока в электронном пучке с электрическим полем, возбуждаемым этим пучком. В предыдущем параграфе была установлена связь между плотностью тока в пучке и полем \dot{E}_z [см. уравнение (37.43)]. Преобразуем уравнение (37.48) так, чтобы получить из него связь между плотностью тока в пучке и продольной составляющей электрического поля E_z . Для этого перейдем от векторного уравнения к скалярному, составленному для составляющей поля \dot{E}_z . В декартовой системе координат лапласиан равен

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\mathbf{1}_x \dot{E}^x + \mathbf{1}_y \dot{E}^y + \mathbf{1}_z \dot{E}^z),$$

где \dot{E}^x , \dot{E}^y , \dot{E}^z — составляющие поля $\dot{\mathbf{E}}$ по координатным осям.

Для продольной составляющей поля, ориентированной вдоль оси z , из этого выражения следует сохранить только члены

$$\frac{\partial^2 \dot{E}^z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}^z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}^z}{\partial z^2}.$$

В декартовой системе координат градиент равен

$$\operatorname{grad} \frac{d\dot{J}_{nz}}{dz} = \mathbf{1}_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\dot{J}_{nz}}{dz} \right) + \mathbf{1}_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{d\dot{J}_{nz}}{dz} \right) + \mathbf{1}_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{d\dot{J}_{nz}}{dz} \right).$$

Ограничиваясь составляющей градиента, ориентированной вдоль оси z , в этом выражении следует сохранить член

$$\mathbf{1}_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{d\dot{J}_{nz}}{dz} \right) = \mathbf{1}_z \frac{d^2 \dot{J}_{nz}}{dz^2}.$$

Тогда скалярное уравнение для составляющей электрического поля, ориентированной вдоль оси z , полученное из уравнения (37.48), будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}^z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}^z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}^z}{\partial z^2} + \beta^2 \dot{E}^z = -\frac{1}{j\omega\epsilon_a} \cdot \frac{d^2 \dot{J}_{nz}}{dz^2} + j\omega\mu_a \dot{J}_{nz}. \quad (37.49)$$

Далее, следуя методу Фурье, предположим, что составляющая поля \dot{E}^z в общем случае является функцией трех координат: x , y , z . Запишем это поле в виде произведения трех функций:

$$\dot{E}^z = XY \dot{E}_z,$$

где X — функция только координаты x , не зависящая от двух других координат; Y — функция только координаты y , не зависящая от двух других координат; \dot{E}_z — функция, определяющая зависимость поля только от координаты z и не зависящая от координат x и y .

Подставляя последнее выражение в уравнение (37.49) и осуществляя дифференцирование, получаем

$$\begin{aligned} Y \dot{E}_z \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \dot{E}_z \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + XY \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} + \beta^2 XY \dot{E}_z &= \\ &= -\frac{1}{j\omega\epsilon_a} \cdot \frac{d^2 j_{nz}}{dz^2} + j\omega\mu_a j_{nz}. \end{aligned}$$

Разделив полученное уравнение на произведение трех функций $XY\dot{E}_z$ и сгруппировав члены, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \beta^2 &= -\frac{1}{\dot{E}_z} \cdot \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} + \\ + \frac{1}{XY\dot{E}_z} \left(-\frac{1}{j\omega\epsilon_a} \cdot \frac{d^2 j_{nz}}{dz^2} + j\omega\mu_a j_{nz} \right). \end{aligned}$$

В левой части этого уравнения первое слагаемое является функцией только координаты x , второе слагаемое функцией только координаты y , а третье слагаемое представляет собой постоянное число. В правой части первое слагаемое является функцией только координаты z , а второе и третье слагаемые в общем случае могут являться функцией всех трех координат. В соответствии с методом Фурье равенство возможно при условии, что первые два слагаемых в левой части являются постоянными числами и сумма их также является постоянным числом. Таким образом, можно написать

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -g^2,$$

где g — некоторое постоянное число, эквивалентное поперечному волновому числу.

Положив $\beta^2 - g^2 = h^2$, где h — продольное волновое число, получим

$$h^2 = -\frac{1}{\dot{E}_z} \cdot \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} + \frac{1}{XY\dot{E}_z} \left(\frac{1}{j\omega\epsilon_a} \cdot \frac{d^2 j_{nz}}{dz^2} + j\omega\mu_a j_{nz} \right).$$

Заменяя частную производную на обыкновенную, умножая все члены этого уравнения на \dot{E}_z и группируя их, можно записать искомое уравнение в окончательном виде:

$$\frac{d^2 \dot{E}_z}{dz^2} + h^2 \dot{E}_z = \frac{1}{XY} \left(-\frac{1}{j\omega\epsilon_a} \cdot \frac{d^2 j_{nz}}{dz^2} + j\omega\mu_a j_{nz} \right). \quad (37.50)$$

Из последнего уравнения следует, что сгруппированный по оси z электронный пучок, т. е. пучок, обладающий второй производной плотности тока по координате z , приводит к появлению сгруппированного осевого электрического поля, т. е. поля, обладающего

второй производной по координате z . Наоборот, сгруппированное осевое электрическое поле приводит к группированию по оси z электронов в пучке. Исследуя поведение электрического поля вдоль оси z при неизменных значениях координат x и y , следует учесть, что функции X и Y при этом являются постоянными величинами и, следовательно, произведение XY в знаменателе правой части уравнения (37.50) превращается в постоянный множитель. Положив $1/(XY) = A_{xy}$, получим, вынося за скобки множитель $1/(j\omega\epsilon_a)$, следующее уравнение, справедливое при заданных, неизменных значениях x и y :

$$\frac{d^2 \dot{E}_z}{dz^2} + h^2 E_z = - \frac{A_{xy}}{j\omega\epsilon_a} \left(\frac{d^2 J_{nz}}{dz^2} + \beta^2 J_{nz} \right). \quad (37.51)$$

Совместное решение уравнений (37.43) и (37.51) в конкретном случае может дать закон изменения электрического поля и плотности тока в пучке вдоль оси z . Наметим в общих чертах это решение.

Составление уравнения для плотности тока в пучке не представляет трудностей. С этой целью определим E_z из уравнения (37.43):

$$\dot{E}_z = \frac{m\dot{v}_0}{j\omega\rho_0 e} \cdot \frac{d^2 \dot{J}_{nz}}{dz^2} + 2 \frac{\dot{v}_0 m}{\rho_0 e} \cdot \frac{dJ_{nz}}{dz} + \frac{j\omega m}{\rho_0 e} J_{nz}. \quad (37.52)$$

Найдем вторую производную напряженности электрического поля

$$\frac{d^2 \dot{E}_z}{dz^2} = \frac{m\ddot{v}_0}{j\omega\rho_0 e} \cdot \frac{d^4 \dot{J}_{nz}}{dz^4} + 2 \frac{\dot{v}_0 m}{\rho_0 e} \cdot \frac{d^3 \dot{J}_{nz}}{dz^3} + \frac{j\omega m}{\rho_0 e} \cdot \frac{d^2 \dot{J}_{nz}}{dz^2}. \quad (37.53)$$

Подставим \dot{E}_z из (37.52) и $\frac{d^2 \dot{E}_z}{dz^2}$ из выражения (37.53) в уравнение (37.51):

$$\begin{aligned} & \frac{m\ddot{v}_0^2}{j\omega\rho_0 e} \cdot \frac{d^4 \dot{J}_{nz}}{dz^4} + 2 \frac{\dot{v}_0 m}{\rho_0 e} \cdot \frac{d^3 \dot{J}_{nz}}{dz^3} + \frac{j\omega m}{\rho_0 e} \cdot \frac{d^2 \dot{J}_{nz}}{dz^2} + \\ & + h^2 \frac{m\ddot{v}_0^2}{j\omega\rho_0 e} \cdot \frac{d^2 \dot{J}_{nz}}{dz^2} + 2h^2 \frac{\dot{v}_0 m}{\rho_0 e} \cdot \frac{dJ_{nz}}{dz} + h^2 \frac{j\omega m}{\rho_0 e} J_{nz} + \\ & + \frac{A_{xy}}{j\omega\epsilon_a} \cdot \frac{d^2 \dot{J}_{nz}}{dz^2} + \frac{A_{xy}}{j\omega\epsilon_a} \beta^2 J_{nz} = 0. \end{aligned}$$

Сгруппируем члены в полученном уравнении:

$$\begin{aligned} & \frac{m\ddot{v}_0^2}{j\omega\rho_0 e} \cdot \frac{d^4 \dot{J}_{nz}}{dz^4} + 2 \frac{\dot{v}_0 m}{\rho_0 e} \frac{d^3 \dot{J}_{nz}}{dz^3} + \left(\frac{j\omega m}{\rho_0 e} + \frac{h^2 m\ddot{v}_0^2}{j\omega\rho_0 e} + \frac{A_{xy}}{j\omega\epsilon_a} \right) \frac{d^2 \dot{J}_{nz}}{dz^2} + \\ & + 2h^2 \frac{\dot{v}_0 m}{\rho_0 e} \cdot \frac{dJ_{nz}}{dz} + \left(\frac{h^2 j\omega m}{\rho_0 e} + \frac{A_{xy}}{j\omega\epsilon_a} \beta^2 \right) J_{nz} = 0. \end{aligned} \quad (37.54)$$

Уравнение (37.54) представляет собой дифференциальное уравнение четвертого порядка с решением вида

$$\dot{J}_{nz} = A_1 e^{\alpha_1 z} + A_2 e^{\alpha_2 z} + A_3 e^{\alpha_3 z} + A_4 e^{\alpha_4 z}. \quad (37.55)$$

Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ находят путем решения характеристического уравнения, соответствующего уравнению (37.54). Их отыскание в конкретных случаях не представляет трудностей. Зная решение уравнения (37.54) для плотности тока, можно подставить это решение в уравнение (37.52) и получить выражение для напряженности электрического поля \vec{E}_z . В общем случае это поле содержит четыре самостоятельные волны, причем некоторые волны могут быть возрастающими по амплитуде.

Электронный пучок взаимодействует с полем таким образом, что вызывает увеличение его амплитуды. Происходит процесс усиления.

Дальнейшее рассмотрение процессов взаимодействия электронного пучка с полем связано с исследованием конкретных электронных приборов, что выходит за рамки настоящей книги.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ I ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

§ 1.1. Понятие о дивергенции и роторе векторной функции

При рассмотрении задач векторного анализа вводят понятие об источнике, создающем поле, и о стоке, его поглощающем. В качестве источника поля в электродинамике можно рассматривать передающую антенну, в качестве стока — приемную антенну. Интенсивность источника или стока поля принято характеризовать математической операцией, называемой *дивергенцией*. Формально дивергенцию поля вектора \mathbf{a} обозначают $\operatorname{div} \mathbf{a}$ и определяют выражением

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \mathbf{a} \, d\mathbf{S}}{\Delta V}. \quad (\text{I.1})$$

Здесь $\oint_{\Delta S}$ — интеграл по замкнутой малой поверхности ΔS , окружающей точку, в которой определяется дивергенция; \mathbf{a} — вектор, характеризующий поле; $d\mathbf{S} = dS \mathbf{1}_n$ — бесконечно малый элемент поверхности, окружающей точку, умноженный на единичный нормальный вектор $\mathbf{1}_n$, направленный изнутри замкнутой поверхности наружу; ΔV — малый объем, охватываемый замкнутой поверхностью ΔS .

Путем предельного перехода замкнутая поверхность стягивается в точку. Таким образом, дивергенция характеризует интенсивность источника или стока поля в точке. В числителе выражения (I.1) находится поток вектора \mathbf{a} через замкнутую поверхность ΔS .

Если вектор \mathbf{a} составляет острый угол с единичной нормалью $\mathbf{1}_n$, то скалярное подынтегральное произведение

$$\mathbf{a} \, d\mathbf{S} = a \, dS \cos(\mathbf{a}, \mathbf{1}_n)$$

будет положительным. Векторное поле будет выходить из точки, в которой определяется дивергенция, и точка явится источником поля. Дивергенция в этом случае будет положительной скалярной величиной.

Если вектор \mathbf{a} составляет тупой угол с единичной нормалью $\mathbf{1}_n$, то скалярное подынтегральное выражение будет отрицательным. Векторное поле будет входить в точку, в которой определяется дивер-

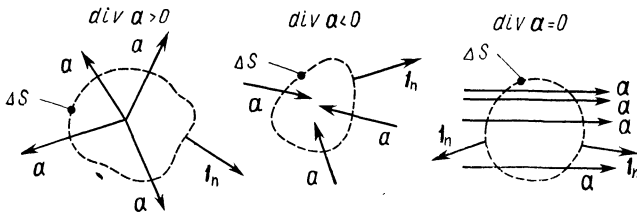


Рис. 1.1

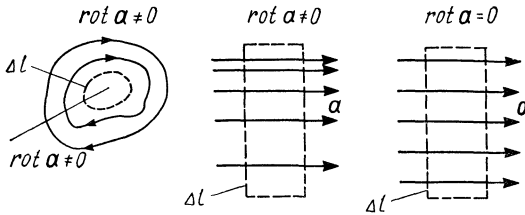


Рис. 1.2

генция, и точка явится стоком поля. Дивергенция при этом будет отрицательной скалярной величиной.

Если поле отсутствует или суммарный поток вектора \mathbf{a} через замкнутую поверхность ΔS равен нулю, то дивергенция в данной точке равна нулю. В точке нет ни источника, ни стока поля.

На рис. 1.1 даны примеры полей, обладающих положительной, отрицательной и нулевой дивергенцией.

Помимо дивергенции в векторном анализе для характеристики поля используют математическую операцию, называемую *ротором*. Ротор поля вектора \mathbf{a} обозначают $\text{rot } \mathbf{a}$ и определяют выражением

$$\text{rot}_n \mathbf{a} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta l} \mathbf{a} \, dl}{\Delta S} \mathbf{1}_n, \quad (1.2)$$

где $\text{rot}_n \mathbf{a}$ — составляющая ротора, ориентированная по направлению единичной нормали $\mathbf{1}_n$ к поверхности ΔS ; $\oint_{\Delta l} \mathbf{a} \, dl$ — интеграл по малому замкнутому контуру Δl , охватывающему малую поверхность ΔS .

Путем предельного перехода эта поверхность стягивается в точку.

На рис. 1.2 даны примеры полей, когда в двух случаях ротор поля отличен от нуля, в третьем случае — равен нулю.

§ 1.2. Понятие о градиенте скалярной функции

Поле скалярной функции характеризуется математической операцией, называемой *градиентом*. Градиент представляет собой вектор, направленный по нормали к поверхности равного уровня скалярной функции в сторону возрастания функции и численно

равный скорости изменения функции по этому направлению. На рис. 1.3 показаны поверхности равного уровня в поле скалярной функции U , а также единичный нормальный вектор $\mathbf{1}_n$, ориентированный в сторону возрастания функции U . "Скорость изменения функции по направлению $\mathbf{1}_n$ характеризуется производной dU/dn , где dn — бесконечно малое приращение пути по направлению $\mathbf{1}_n$. Градиент функции U обозначают $\text{grad } U$ и записывают в виде общего математического соотношения

$$\text{grad } U = \frac{dU}{dn} \mathbf{1}_n. \quad (1.3)$$

Таким образом, градиент является математической операцией, осуществляемой над скалярной функцией, в результате которой возникает векторная функция.

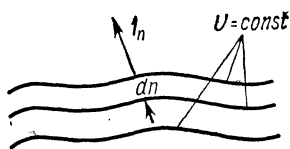


Рис. 1.3

§ 1.3. Криволинейная ортогональная обобщенная система координат

При решении электродинамических задач приходится использовать различные координатные системы. При выводе общих соотношений целесообразно записывать их в такой математической форме, которая была бы пригодна для любой конкретной системы координат. При этом необходимым условием является достаточно простой переход от общих выражений к выражениям, предназначенным для использования в конкретной системе координат. Этим целям хорошо служит криволинейная ортогональная обобщенная система координат ξ, η, ζ , условно изображенная на рис. 1.4.

Построим на базе этих координат бесконечно малый параллелепипед со сторонами $dl_\xi, dl_\eta, dl_\zeta$. Обозначим площади сторон параллелепипеда: построенную на осях η, ζ — dS_ξ , построенную на осях ξ, ζ — dS_η и построенную на осях ξ, η — dS_ζ . Бесконечно малый объем параллелепипеда обозначим dV .

Под расстояниями $dl_\xi, dl_\eta, dl_\zeta$ будем понимать путь, пройденный точкой, заданной в системе координат ξ, η, ζ при изменении координат соответственно на $d\xi, d\eta, d\zeta$. Покажем на примере нескольких координатных систем, что этот путь далеко не всегда будет совпадать с приращением координат.

На рис. 1.5 даны три системы координат: декартова, цилиндрическая и сферическая. Условимся о порядке изображения координатных осей или направлений. Если координаты записаны в последовательности x, y, z , то это означает справедливость соотношения

$$[\mathbf{1}_x \mathbf{1}_y] = \mathbf{1}_z.$$

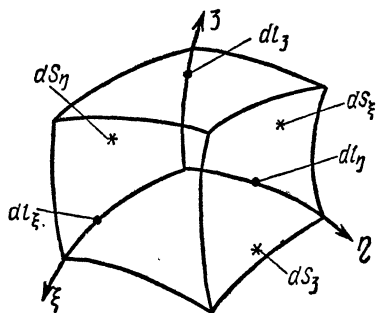


Рис. 1.4

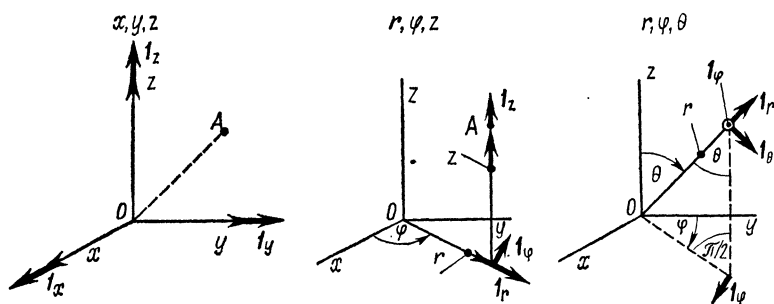


Рис. 1.5

Векторное произведение единичного вектора, ориентированного вдоль оси x , и единичного вектора, ориентированного вдоль оси y , должно дать единичный вектор, ориентированный вдоль оси z . Другими словами, правоходовой винт, перемещаемый по кратчайшему направлению от оси x к оси y , должен ввинчиваться по направлению оси z . В силу этого ось z на рис. 1.5 должна быть направлена вверх, а не вниз.

В случае цилиндрических координат, записанных в последовательности r, φ, z , аналогично должно соблюдаться соотношение

$$[1_r 1_\varphi] = 1_z.$$

В случае сферических координат, записанных в последовательности r, φ, θ , справедливо соотношение

$$[1_r 1_\varphi] = 1_\theta.$$

Вследствие этого угол φ необходимо отсчитывать не от оси x , а от оси y . Если бы координаты были записаны в последовательности r, θ, φ , то потребовалось бы выполнение соотношения

$$[1_r 1_\theta] = 1_\varphi,$$

и угол φ следовало бы откладывать от оси x . Если в декартовой системе координат будут даны приращения координатам dx, dy, dz , то точка A , заданная в этих координатах, соответственно пройдет путь

$$dl_x = 1dx, \quad dl_y = 1dy, \quad dl_z = 1dz. \quad (1.4)$$

Путь, проходимый точкой, окажется равным приращению соответствующей координаты. Если в цилиндрической системе координат будут даны приращения координатам $dr, d\varphi, dz$, то точка A , заданная в этих координатах, переместится на расстояние

$$dl_r = 1dr, \quad dl_\varphi = r d\varphi, \quad dl_z = 1dz. \quad (1.5)$$

При этом путь dl_φ не равен приращению криволинейной координаты φ . Существует коэффициент r , связывающий эти приращения. Если в сферической системе координат будут даны приращения координатам $dr, d\varphi, d\theta$, то точка A , заданная в этих координатах, переместится на расстояние

$$dl_r = 1dr, \quad dl_\varphi = r \sin \theta d\varphi, \quad dl_\theta = r d\theta. \quad (I.6)$$

Опять-таки в случае приращения криволинейных координат φ и θ путь, проходимый точкой A , не равен приращениям этих координат. Таким образом, в общем случае криволинейных ортогональных обобщенных координат целесообразно ввести коэффициенты между их приращениями и отрезками пути, проходимыми точкой, заданной в этих координатах при указанных приращениях. При этом возникают следующие формулы:

$$dl_\xi = h_\xi d\xi, \quad dl_\eta = h_\eta d\eta, \quad dl_\zeta = h_\zeta d\zeta. \quad (I.7)$$

Коэффициенты h_ξ, h_η, h_ζ называют *коэффициентами Лямэ*.

В декартовой системе координат при координатном соответствии

$$\begin{aligned} \xi \rightarrow x, \quad \eta \rightarrow y, \quad \zeta \rightarrow z, \\ h_\xi = h_x = 1, \quad h_\eta = h_y = 1, \quad h_\zeta = h_z = 1. \end{aligned} \quad (I.8)$$

В цилиндрической системе координат при координатном соответствии

$$\begin{aligned} \xi \rightarrow r, \quad \eta \rightarrow \varphi, \quad \zeta \rightarrow z, \\ h_\xi = h_r = 1, \quad h_\eta = h_\varphi = r, \quad h_\zeta = h_z = 1. \end{aligned} \quad (I.9)$$

В сферической системе координат при координатном соответствии

$$\begin{aligned} \xi \rightarrow r, \quad \eta \rightarrow \varphi, \quad \zeta \rightarrow \theta, \\ h_\xi = h_r = 1, \quad h_\eta = h_\varphi = r \sin \theta, \quad h_\zeta = h_\theta = r. \end{aligned} \quad (I.10)$$

Как следует из приведенных примеров, коэффициенты Лямэ могут быть равны единице или являться функциями координат. Используя выражения (I.7), получим формулы для бесконечно малых площадей и объема в криволинейной системе координат:

$$\left. \begin{aligned} dS_\xi &= dl_\eta dl_\zeta = h_\eta h_\zeta d\eta d\zeta, \\ dS_\eta &= dl_\xi dl_\zeta = h_\xi h_\zeta d\xi d\zeta, \\ dS_\zeta &= dl_\xi dl_\eta = h_\xi h_\eta d\xi d\eta, \\ dV &= dl_\xi dl_\eta dl_\zeta = h_\xi h_\eta h_\zeta d\xi d\eta d\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (I.11)$$

Зная коэффициенты Лямэ, нетрудно найти аналогичные выражения в любой конкретной системе координат. Так, например, элемент объема в сферической системе координат записывается в виде

$$dV = 1r \sin \theta r dr d\varphi d\theta = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta.$$

§ 1.4. Выражения для дивергенции, ротора и градиента в криволинейной ортогональной обобщенной системе координат

В случае бесконечно малого объема dV вместо выражения для дивергенции (1.1) можно записать

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\sum a_{\xi} dS_{\xi}}{dV}. \quad (1.12)$$

Суммирование, заменившее интеграл, осуществляется по всем сторонам криволинейного параллелепипеда. Представим вектор суммой составляющих вектора по координатным направлениям:

$$\mathbf{a} = \mathbf{1}_{\xi} a_{\xi} + \mathbf{1}_{\eta} a_{\eta} + \mathbf{1}_{\zeta} a_{\zeta}. \quad (1.13)$$

Доля потока вектора \mathbf{a} , протекающего через элемент поверхности dS_{ξ} (см. рис. 1.4), составляет $-dS_{\xi} a_{\xi}$. Поток образован составляющей вектора a_{ξ} . Нормаль к поверхности dS_{ξ} направлена изнутри объема dV наружу, т. е. в сторону $-\xi$, в силу чего скалярное произведение

$$-dS_{\xi} \mathbf{1}_{\xi} \mathbf{1}_{\xi} a_{\xi} = -dS_{\xi} a_{\xi}.$$

Другие составляющие вектора \mathbf{a} ориентированы под прямым углом к нормали $-\mathbf{1}_{\xi}$ и их скалярные произведения на элемент площади будут равны нулю.

Далее рассмотрим долю потока вектора \mathbf{a} , пронизывающего переднюю грань объема dV . В силу криволинейности координат при переходе от задней грани к передней может измениться на бесконечно малую величину поверхность передней грани по сравнению с задней гранью. Кроме того, возможно бесконечно малое изменение составляющей вектора a_{ξ} , создающей поток вектора \mathbf{a} через переднюю грань. Поэтому долю потока через переднюю грань можно представить в виде суммы старого значения потока, протекавшего через заднюю грань, и бесконечно малого приращения. Поскольку нормаль к передней грани ориентирована в сторону $\mathbf{1}_{\xi}$, поток, проходящий через эту грань, положителен. В результате этот поток можно записать в форме

$$dS_{\xi} a_{\xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} (dS_{\xi} a_{\xi}) d\xi.$$

Второе слагаемое представляет собой бесконечно малую добавку к старому значению потока. Как каждый дифференциал его можно получить умножением производной на дифференциал аргумента.

Суммарный поток через заднюю и переднюю грани записывают в виде

$$-dS_{\xi} a_{\xi} + dS_{\xi} a_{\xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} (dS_{\xi} a_{\xi}) d\xi = \frac{\partial}{\partial \xi} (dS_{\xi} a_{\xi}) d\xi.$$

Рассуждая аналогично, найдем суммарный поток вектора \mathbf{a} , входящий в числитель выражения (I.12):

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{a} dS &= -dS_{\xi} a_{\xi} + dS_{\xi} a_{\xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} (dS_{\xi} a_{\xi}) d\xi - \\ &- dS_{\eta} a_{\eta} + dS_{\eta} a_{\eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} (dS_{\eta} a_{\eta}) d\eta - dS_{\zeta} a_{\zeta} + dS_{\zeta} a_{\zeta} + \frac{\partial}{\partial \zeta} (dS_{\zeta} a_{\zeta}) d\zeta = \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} (dS_{\xi} a_{\xi}) d\xi + \frac{\partial}{\partial \eta} (dS_{\eta} a_{\eta}) d\eta + \frac{\partial}{\partial \zeta} (dS_{\zeta} a_{\zeta}) d\zeta. \end{aligned}$$

Подставим в это выражение значения элементарных площадей из формул (I.11):

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{a} dS &= \frac{\partial}{\partial \xi} (h_{\eta} h_{\zeta} d\eta d\zeta a_{\xi}) d\xi + \frac{\partial}{\partial \eta} \times \\ &\times (h_{\xi} h_{\zeta} d\xi d\zeta a_{\eta}) d\eta + \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_{\xi} h_{\eta} d\xi d\eta a_{\zeta}) d\zeta. \end{aligned}$$

Бесконечно малые приращения координат $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ являются независимыми величинами, которые можно вынести за знак производной. В результате получается формула

$$\sum \mathbf{a} dS = d\xi d\eta d\zeta \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (h_{\eta} h_{\zeta} a_{\xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_{\xi} h_{\zeta} a_{\eta}) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_{\xi} h_{\eta} a_{\zeta}) \right\}.$$

Подставляя ее в соотношение (I.12) и используя выражение для элементарного объема (I.11), получаем окончательную формулу для дивергенции вектора \mathbf{a} в криволинейной ортогональной обобщенной системе координат:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{h_{\xi} h_{\eta} h_{\zeta}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (h_{\eta} h_{\zeta} a_{\xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_{\xi} h_{\zeta} a_{\eta}) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_{\xi} h_{\eta} a_{\zeta}) \right\}. \quad (\text{I.14})$$

Далее рассмотрим ротор вектора \mathbf{a} в криволинейной системе координат. В качестве исходного используем выражение (I.2).

Рассмотрим три бесконечно малые поверхности dS_{ξ} , dS_{η} , dS_{ζ} , (рис. I.6). Положим, что нормальными к этим поверхностям являются единичные векторы $\mathbf{1}_{\xi}$, $\mathbf{1}_{\eta}$, $\mathbf{1}_{\zeta}$.

При выборе направления обхода поверхности будем руководствоваться правилом правоходового винта, ввинчиваемого по направлению нормали к поверхности. Движение винта показывает направление обхода. В случае бесконечно малых поверхностей и соответственно бесконечно малых контуров обхода выражение (I.2) записывают в виде

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{a} = \frac{\sum \mathbf{a} dl}{dS} \mathbf{1}_n. \quad (\text{I.15})$$

Определим сумму в числителе выражения (I.15) в случае обхода поверхности dS_{ξ} . Представим вектор \mathbf{a} в форме

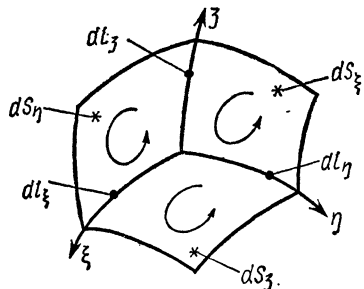


Рис. I.6

выражения (1.13). Начиная обход поверхности из начала координат в сторону оси η , запишем долю суммы на пути ob :

$$\mathbf{1}_\eta a_\eta dl_\eta \mathbf{1}_\eta = a_\eta dl_\eta.$$

Далее запишем долю суммы на пути cd . Движение осуществляется в сторону отрицательных значений оси η . При переходе от участка ob к участку cd в силу криволинейности координат может измениться длина пути dl_η на бесконечно малую величину. Кроме того, возможно бесконечно малое изменение составляющей вектора a_η . В силу этого долю суммы на пути cd можно представить в виде старого значения $a_\eta dl_\eta$ и бесконечно малой добавки, которая по правилу вычисления дифференциала является произведением производной на дифференциал аргумента. В результате доля суммы на пути cd

$$- \left\{ a_\eta dl_\eta + \frac{\partial}{\partial \xi} (a_\eta dl_\eta) d\xi \right\}.$$

В целом сумма $\sum \mathbf{a} d\mathbf{l}$ на путях ob и cd записывается в виде соотношения

$$a_\eta dl_\eta - a_\eta dl_\eta - \frac{\partial}{\partial \xi} (a_\eta dl_\eta) d\xi = - \frac{\partial}{\partial \xi} (a_\eta dl_\eta) d\xi.$$

Аналогично доля суммы на путях do и bc

$$- a_\xi dl_\xi + a_\xi dl_\xi + \frac{\partial}{\partial \eta} (a_\xi dl_\xi) d\eta = \frac{\partial}{\partial \eta} (a_\xi dl_\xi) d\eta.$$

В целом сумма $\sum \mathbf{a} d\mathbf{l}$ на замкнутом пути обхода $obcdo$ выражается формулой

$$\sum \mathbf{a} d\mathbf{l} = \frac{\partial}{\partial \eta} (a_\xi dl_\xi) d\eta - \frac{\partial}{\partial \xi} (a_\eta dl_\eta) d\xi.$$

Подставляя значения dl_ξ и dl_η из формул (I.7) и вынося за знак производной независимые приращения $d\xi$ и $d\eta$, получаем

$$\sum \mathbf{a} d\mathbf{l} = \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} (a_\xi h_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (a_\eta h_\eta) \right\} d\eta d\xi.$$

Это выражение подставляют в числитель формулы (I.15). В знаменатель следует подставить значение площади $dS_{\xi\eta}$, охватываемой контуром обхода. В качестве единичной нормали $\mathbf{1}_n$ используют вектор $\mathbf{1}_\xi$. В результате получают выражение для составляющей ротора вектора \mathbf{a} , ориентированной вдоль координаты ξ :

$$\text{rot}_\xi \mathbf{a} = \frac{\left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} (a_\xi h_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (a_\eta h_\eta) \right\} d\eta d\xi}{h_\eta h_\xi d\eta d\xi} \mathbf{1}_\xi,$$

или окончательно после сокращений

$$\text{rot}_\xi \mathbf{a} = \mathbf{1}_\xi \frac{1}{h_\eta h_\xi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} (a_\xi h_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (a_\eta h_\eta) \right\}. \quad (\text{I.16})$$

Аналогично находят составляющие ротора вектора \mathbf{a} , ориентированные вдоль координат η и ζ :

$$\operatorname{rot}_{\eta} \mathbf{a} = \mathbf{1}_{\eta} \frac{1}{h_{\xi} h_{\zeta}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} (a_{\xi} h_{\xi}) - \frac{\partial}{\partial \xi} (a_{\zeta} h_{\zeta}) \right\}, \quad (\text{I.17})$$

$$\operatorname{rot}_{\zeta} \mathbf{a} = \mathbf{1}_{\zeta} \frac{1}{h_{\xi} h_{\eta}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (a_{\eta} h_{\eta}) - \frac{\partial}{\partial \eta} (a_{\xi} h_{\xi}) \right\}. \quad (\text{I.18})$$

Полное выражение для ротора вектора \mathbf{a} имеет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{1}_{\xi} \frac{1}{h_{\eta} h_{\zeta}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} (a_{\zeta} h_{\zeta}) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (a_{\eta} h_{\eta}) \right\} + \\ + \mathbf{1}_{\eta} \frac{1}{h_{\xi} h_{\zeta}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} (a_{\xi} h_{\xi}) - \frac{\partial}{\partial \xi} (a_{\zeta} h_{\zeta}) \right\} + \mathbf{1}_{\zeta} \frac{1}{h_{\xi} h_{\eta}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (a_{\eta} h_{\eta}) - \frac{\partial}{\partial \eta} (a_{\xi} h_{\xi}) \right\}, \quad (\text{I.19})$$

а выражение для градиента скалярной функции в криволинейной системе координат

$$\operatorname{grad} U = \frac{dU}{dn} \mathbf{1}_n.$$

Взятие производной по нормали к поверхности равного уровня функции U , по сути дела, означает следующую процедуру. Точку наблюдения перемещают на бесконечно малый отрезок dn вдоль направления нормали, фиксируют приращение функции ∂U , берут отношение приращений ∂U к dn и приписывают ему направление нормали путем умножения на единичный нормальный вектор $\mathbf{1}_n$. Эта операция может быть разложена в криволинейных координатах. При перемещении точки наблюдения на расстояние dn проекции точки на оси ξ , η , ζ соответственно перемещаются на бесконечно малые отрезки dl_{ξ} , dl_{η} , dl_{ζ} . Вектор $(\partial U / \partial n) \mathbf{1}_n$ при этом записывают в виде суммы составляющих по координатным направлениям:

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial n} \mathbf{1}_n = \mathbf{1}_{\xi} \frac{\partial U}{\partial l_{\xi}} + \mathbf{1}_{\eta} \frac{\partial U}{\partial l_{\eta}} + \mathbf{1}_{\zeta} \frac{\partial U}{\partial l_{\zeta}}. \quad (\text{I.20})$$

Приращения ∂l_{ξ} , ∂l_{η} , ∂l_{ζ} можно получить из формул (I.7):

$$\partial l_{\xi} = h_{\xi} \partial \xi, \quad \partial l_{\eta} = h_{\eta} \partial \eta, \quad \partial l_{\zeta} = h_{\zeta} \partial \zeta.$$

Подставляя эти выражения в формулу (I.20), получаем окончательное соотношение для градиента скалярной функции U в криволинейной ортогональной обобщенной системе координат:

$$\operatorname{grad} U = \mathbf{1}_{\xi} \frac{1}{h_{\xi}} \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mathbf{1}_{\eta} \frac{1}{h_{\eta}} \cdot \frac{\partial U}{\partial \eta} + \mathbf{1}_{\zeta} \frac{1}{h_{\zeta}} \cdot \frac{\partial U}{\partial \zeta}. \quad (\text{I.21})$$

§ 1.5. Выражения для дивергенции, ротора и градиента в конкретных системах координат

Приведем выражения для дивергенции, ротора и градиента в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат с учетом формул (I.14), (I.19), (I.20) для соответствия координат и коэффициентов Лямэ, приведенных в формулах (I.8), (I.9), (I.10):

1. Декартова система координат

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \quad (\text{I.22})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{1}_x \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \mathbf{1}_y \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \mathbf{1}_z \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right), \quad (\text{I.23})$$

$$\operatorname{grad} U = \mathbf{1}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{1}_y \frac{\partial U}{\partial y} + \mathbf{1}_z \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (\text{I.24})$$

2. Цилиндрическая система координат

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r a_r) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial z} (r a_z) \right\}, \quad (\text{I.25})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{1}_r \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z} (a_\varphi r) \right\} + \mathbf{1}_\varphi \left\{ \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right\} + \\ + \mathbf{1}_z \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (a_\varphi r) - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right\}, \quad (\text{I.26})$$

$$\operatorname{grad} U = \mathbf{1}_r \frac{\partial U}{\partial r} + \mathbf{1}_\varphi \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \mathbf{1}_z \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (\text{I.27})$$

3. Сферическая система координат

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta a_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r a_\varphi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta a_\theta) \right\}, \quad (\text{I.28})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{1}_r \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} (r a_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta a_\varphi) \right\} + \mathbf{1}_\varphi \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) \right\} + \\ + \mathbf{1}_\theta \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta a_\varphi) - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right\}, \quad (\text{I.29})$$

$$\operatorname{grad} U = \mathbf{1}_r \frac{\partial U}{\partial r} + \mathbf{1}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \mathbf{1}_\theta \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta}. \quad (\text{I.30})$$

§ 1.6. Некоторые векторные тождества

Используя выведенные выражения для дивергенции, ротора и градиента, можно доказать следующие векторные тождества, справедливые для всех криволинейных ортогональных обобщенных координатных систем:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} U \equiv 0, \quad (\text{I.31})$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} \equiv 0, \quad (\text{I.32})$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U \equiv \nabla^2 U, \quad (\text{I.33})$$

где ∇^2 — оператор Лапласа;

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} \equiv \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \nabla^2 \mathbf{a}. \quad (\text{I.34})$$

Из выражения (I.34) можно определить результат воздействия оператора Лапласа на вектор \mathbf{a} :

$$\nabla^2 \mathbf{a} \equiv \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a}, \quad (\text{I.35})$$

$$\operatorname{div} [\mathbf{a} \mathbf{b}] \equiv \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}, \quad (\text{I.36})$$

$$\operatorname{div} (\Psi \operatorname{grad} U) \equiv \operatorname{grad} \Psi \operatorname{grad} U + \Psi \nabla^2 U. \quad (\text{I.37})$$

Здесь Ψ и U — скалярные функции:

$$\text{rot}(\Psi \mathbf{a}) \equiv [\text{grad} \Psi \mathbf{a}] + \Psi \text{rot} \mathbf{a}. \quad (\text{I.38})$$

§ 1.7. Выражения для $\nabla^2 U$ и $\nabla^2 \mathbf{a}$ в криволинейной ортогональной обобщенной системе координат

Приведем запись выражений для $\nabla^2 U$ и $\nabla^2 \mathbf{a}$ в криволинейной ортогональной обобщенной системе координат:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_\eta h_\zeta}{h_\xi} \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_\xi h_\zeta}{h_\eta} \cdot \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{h_\xi h_\eta}{h_\zeta} \cdot \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) \right\}, \quad (\text{I.39})$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{a} = & \mathbf{1}_\xi \left[\frac{1}{h_\xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (a_\xi h_\eta h_\zeta) + \frac{\partial}{\partial \eta} (a_\eta h_\xi h_\zeta) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \zeta} (a_\zeta h_\xi h_\eta) \right\} \right\rangle - \frac{1}{h_\eta h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left\langle \frac{h_\zeta}{h_\xi h_\eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (a_\eta h_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (a_\xi h_\xi) \right\} \right\rangle - \right. \\ & \left. - \frac{1}{h_\eta h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\langle \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (a_\xi h_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (a_\zeta h_\zeta) \right\} \right\rangle \right] + \\ & + \mathbf{1}_\eta \left[\frac{1}{h_\eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left\langle \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (a_\xi h_\eta h_\zeta) + \frac{\partial}{\partial \eta} (a_\eta h_\xi h_\zeta) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \zeta} (a_\zeta h_\xi h_\eta) \right\} \right\rangle - \frac{1}{h_\xi h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} (a_\zeta h_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \xi} (a_\eta h_\eta) \right\} \right\rangle - \right. \\ & \left. - \frac{1}{h_\xi h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{h_\zeta}{h_\xi h_\eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (a_\eta h_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (a_\xi h_\xi) \right\} \right\rangle \right] + \mathbf{1}_\zeta \left[\frac{1}{h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\langle \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta} \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (a_\xi h_\eta h_\zeta) + \frac{\partial}{\partial \eta} (a_\eta h_\xi h_\zeta) + \frac{\partial}{\partial \xi} (a_\zeta h_\xi h_\eta) \right\} \right\rangle - \right. \\ & \left. - \frac{1}{h_\xi h_\eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (a_\xi h_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (a_\zeta h_\zeta) \right\} \right\rangle - \right. \\ & \left. - \frac{1}{h_\xi h_\eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left\langle \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} (a_\zeta h_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \xi} (a_\eta h_\eta) \right\} \right\rangle \right]. \quad (\text{I.40}) \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ II

РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЗАТУХАНИЯ ПОЛЯ h' В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ВОЛНОВОДАХ

§ II.1. Расчет коэффициентов затухания поля h' в прямоугольных волноводах в случае волн магнитного типа

В основе расчета лежит выражение (20.6):

$$h' = \frac{\sqrt{\frac{\mu_{a2}\omega}{2\gamma_{a2}} \left(\int_{\xi} |\dot{H}_{0\tau}|^2 h_\xi d\xi + \int_{\eta} |\dot{H}_{0\tau}|^2 h_\eta d\eta \right)}{2 \int_{S_B} \text{Re} [\dot{E}_0 \dot{H}_0^*] dS}.$$

Вводя для упрощения обозначение

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_{a2}\omega}{2\gamma_{a2}}} = \alpha_1, \quad (\text{II.1})$$

получают

$$h' = \alpha_1 \frac{\int_{\pi/2}^{\pi} |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 h_{\xi} d\xi + \int_{\eta} |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 h_{\eta} d\eta}{\int_{S_B} \operatorname{Re} [\mathbf{E}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*] dS}. \quad (\text{II.2})$$

Волны магнитного типа обладают составляющими поля, определяемыми формулами (13.52)—(13.57).

Прежде всего найдем интегралы в числителе выражения (II.2).

Квадрат напряженности магнитного поля у нижней стенки при $y=0$ и у верхней стенки при $y=b$ будет одинаков. В силу этого можно сразу определить суммарный интеграл у нижней и верхней стенок волновода:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^a |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 dx &= 2 \int_0^a \{ |\dot{H}_x|^2 + |\dot{H}_z|^2 \} dx = \\ &= 2 \int_0^a \left\{ \frac{h^2}{g_{mn}^4} C_2^2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) + C_2^2 \cos^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \right\} dx = \\ &= 2 \frac{a}{2} \left\{ \frac{h^2}{g_{mn}^4} \left(\frac{m\pi}{2} \right)^2 + 1 \right\} C_2^2 = a \left\{ \frac{h}{g_{mn}^4} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + 1 \right\} C_2^2. \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Аналогично определяют суммарный интеграл у правой и левой стенок волновода:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^b |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 dy &= 2 \int_0^b \{ |\dot{H}_y|^2 + |\dot{H}_z|^2 \} dy = \\ &= 2 \int_0^b \left\{ \frac{h}{g_{mn}^4} C_2^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) + C_2^2 \cos^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \right\} dy = \\ &= b \left\{ \frac{h^2}{g_{mn}^4} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + 1 \right\} C_2^2. \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Интеграл в знаменателе выражения (II.2) представляет собой удвоенную проекцию вектора Пойнтинга на ось z волновода. Эта проекция образуется составляющими поля E_x и \dot{H}_y , E_y и \dot{H}_x . Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{S_B} \operatorname{Re} [\mathbf{E}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*] dS &= \int_0^a \int_0^b (\dot{E}_x \dot{H}_y^* - \dot{E}_y \dot{H}_x^*) dy dx = \\ &= \int_0^a \int_0^b \left\{ \frac{\omega \mu_a h}{g_{mn}^4} C_2^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \sin^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\omega \mu_a h}{g_{mn}^4} C_2^2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \right\} dy dx = \\ &= \frac{\omega \mu_a h}{g_{mn}^4} C_2^2 \frac{ab}{4} \left\{ \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Учитывая, что в соответствии с формулой (13.22)

$$g_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2,$$

выражение (II.5) можно переписать в иной форме:

$$\int_{S_B} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*] dS = \frac{\omega \mu_a h}{g_{mn}^2} C_2^2 \frac{ab}{4}. \quad (\text{II.6})$$

Используя формулы (II.2), (II.3), (II.4) и (II.6), запишем следующее соотношение для h' :

$$\begin{aligned} h' &= \alpha_1 \frac{a \left\{ \frac{h^2}{g_{mn}^4} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + 1 \right\} C_2^2 + b \left\{ \frac{h^2}{g_{mn}^4} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + 1 \right\} C_2^2}{\frac{\omega \mu_a h}{g_{mn}^2} C_2^2 \frac{ab}{4}} = \\ &= \alpha_1 \frac{a \left\{ \frac{h^2}{g_{mn}^4} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + 1 \right\} + b \left\{ \frac{h^2}{g_{mn}^4} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + 1 \right\}}{\frac{\omega \mu_a h}{g_{mn}^2} \frac{ab}{4}}. \end{aligned}$$

Умножим числитель и знаменатель полученного выражения на g_{mn}^2 и раскроем значение h с помощью формулы (13.35)

$$h = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - g_{mn}^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} h' &= \alpha_1 \frac{a \left\{ \frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - g_{mn}^2}{g_{mn}^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + g_{mn}^2 \right\} + b \left\{ \frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - g_{mn}^2}{g_{mn}^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + g_{mn}^2 \right\}}{\omega \mu_a \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - g_{mn}^2} \frac{ab}{4}} = \\ &= \alpha_1 \omega^2 \mu_a \varepsilon_a \left(\frac{\left\{ 1 - \frac{g_{mn}^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \frac{g_{mn}^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a} \right\}}{\omega^2 \mu_a \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{1 - \frac{g_{mn}^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a} \frac{b}{4}}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{b}{a} \frac{\left\{ 1 - \frac{g_{mn}^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \frac{g_{mn}^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a} \right\}}{\omega^2 \mu_a \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{1 - \frac{g_{mn}^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a} \frac{b}{4}}} \right). \end{aligned}$$

Далее используем соотношение (13.59)

$$\frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кп}}} \right)^2$$

и произведем необходимые сокращения:

$$h' = \alpha_1 \left\{ \frac{\left\{ 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2 \right\}}{g_{mn}^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2 \right\} \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2} \frac{b}{4}} + \frac{b}{a} \left\{ \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2}{g_{mn}^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2 \right\} \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2} \frac{b}{4}} \right\}.$$

Группируя члены, получаем

$$h' = \alpha_1 \frac{\left(1 + \frac{b}{a} \right) \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2 + \left\{ 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2 \right\} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \frac{b}{a} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}{\sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2} \frac{b}{4}}.$$

Рассмотрим отдельно дробь

$$\frac{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \frac{b}{a} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}{g_{mn}^2} = \frac{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \frac{b}{a} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}.$$

Сокращая на π и умножая на b^2 , получаем

$$\frac{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \frac{b}{a} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2} = \frac{\frac{b}{a} \left(\frac{b}{a} m^2 + n^2 \right)}{\frac{b^2 m^2}{a^2} + n^2}.$$

Подставим полученное равенство в выражение для h' :

$$h' = \alpha_1 \frac{\left(1 + \frac{b}{a} \right) \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2 + \left\{ 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2 \right\} \frac{\frac{b}{a} \left(\frac{b}{a} m^2 + n^2 \right)}{\frac{b^2 m^2}{a^2} + n^2}}{\sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2} \frac{b}{4}}. \quad (\text{II.7})$$

Для упрощения записи используем обозначения:

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2 = \alpha_2, \quad 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2 = 1 - \alpha_2 = \alpha_3, \quad \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = Z_c, \quad (\text{II.8})$$

где Z_c — характеристическое сопротивление среды.

При этом коэффициент затухания поля волн магнитного типа

записывается в виде

$$h' = h'_{H_{mn}} = 4\alpha_1 \frac{\left(1 + \frac{b}{a}\right) \alpha_2 + \alpha_3 \frac{\frac{b}{a} \left(\frac{b}{a} m^2 + n^2\right)}{b^2 m^2 + n^2}}{Z_c \sqrt{\alpha_3} b}. \quad (\text{II.9})$$

Определим коэффициенты затухания h' поля в случае волн магнитного типа с нулевыми индексами. Пусть $m=0$ и исследуется затухание поля волны типа H_{0n} , обладающего составляющими

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_y &= j \frac{h}{g_{0n}^2} C_2 \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}, \\ \dot{H}_z &= C_2 \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}, \\ E_x &= j \frac{\omega\mu_a}{g_{0n}^2} C_2 \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.10})$$

Найдем интегралы в числителе выражения (II.2):

$$2 \int_0^a |\dot{H}_{0\tau}|^2 dx = 2 \int_0^a |\dot{H}_z|^2 dx = 2 \int_0^a C_2^2 dx = 2aC_2^2. \quad (\text{II.11})$$

Определим суммарный интеграл у правой и левой стенок волновода:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^b |\dot{H}_{0\tau}|^2 dy &= 2 \int_0^b \{|\dot{H}_y|^2 + |\dot{H}_z|^2\} dy = \\ &= 2 \int_0^b \left\{ \frac{h^2}{g_{0n}^4} C_2^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right) + C_2^2 \cos^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \right\} dy = \\ &= 2 \frac{b}{2} \left\{ \frac{h^2}{g_{0n}^4} C_2^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + C_2^2 \right\} = b \left\{ \frac{h^2}{g_{0n}^4} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + 1 \right\} C_2^2, \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

а также интеграл в знаменателе выражения (II.2):

$$\begin{aligned} \int_{S_B} \text{Re} [\dot{E}_0 \dot{H}_0^*] dS &= \int_0^a \int_0^b \dot{E}_x \dot{H}_y^* dy dx = \\ &= \int_0^a \int_0^b \frac{\omega\mu_a h}{g_{0n}^4} C_2^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right) dy dx = \\ &= \frac{ab}{2} \cdot \frac{\omega\mu_a h}{g_{0n}^4} C_2^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2. \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

Подставляя выражения (II.11), (II.12), (II.13) в формулу (II.2), получаем

$$h' = \alpha_1 \frac{2aC_2^2 + b \left\{ \frac{h^2}{g_{0n}^4} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + 1 \right\} C_2^2}{\frac{ab}{2} \frac{\omega\mu_a h}{g_{0n}^4} C_2^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}. \quad (\text{II.14})$$

Из выражения (13.22) следует, что

$$g_{0n}^2 = \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2. \quad (\text{II.15})$$

Подставляя g_{0n}^2 в формулу (II.14) и проводя необходимые сокращения, находим

$$h' = \alpha_1 \frac{2a+b \left(\frac{h^2}{g_{0n}^2} + 1 \right)}{\frac{ab}{2} \frac{\omega \mu_a h}{g_{0n}^2}} = 2\alpha_1 \frac{2 \frac{a}{b} g_{0n}^2 + h^2 + g_{0n}^2}{a\omega \mu_a h},$$

или с учетом соотношения (13.35)

$$\begin{aligned} h' &= 2\alpha_1 \frac{2 \frac{a}{b} g_{0n}^2 + \omega^2 \mu_a \varepsilon_a}{a\omega \mu_a \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - g_{0n}^2}} = \\ &= 2\alpha_1 \omega^2 \mu_a \varepsilon_a \frac{2 \frac{a}{b} \frac{g_{0n}^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a} + 1}{a\omega^2 \mu_a \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{1 - \frac{g_{0n}^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}}}. \end{aligned}$$

С помощью соотношения (13.59) эту формулу можно записать таким образом:

$$h' = 2\alpha_1 \frac{1 + 2 \frac{a}{b} \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2}{a \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2}}.$$

Вводя обозначения (II.8), получают

$$h' = h'_{H_{0n}} = 2\alpha_1 \frac{1 + 2 \frac{a}{b} \alpha_2}{aZ_c \sqrt{\alpha_3}}. \quad (\text{II.16})$$

Пусть $n=0$. Исследуем затухание поля волн типа H_{m0} с составляющими, которые на основании формул (13.52)–(13.57) записываются в виде соотношений

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_x &= j \frac{h}{g_{m0}} C_2 \frac{m\pi}{a} \sin \left(\frac{m\pi}{a} x \right) e^{-jhz}, \\ H_z &= C_2 \cos \left(\frac{m\pi}{a} x \right) e^{-jhz}, \\ \dot{E}_y &= -j \frac{\omega \mu_a}{g_{m0}} C_2 \frac{m\pi}{a} \sin \left(\frac{m\pi}{a} x \right) e^{-jhz}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.17})$$

Определим интегралы:

$$\begin{aligned}
 & 2 \int_0^a |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 dx = 2 \int_0^a \{ |\dot{H}_x|^2 + |\dot{H}_z|^2 \} dx = \\
 & = 2 \int_0^a \left\{ \frac{h^2}{g_{m0}^4} C_2^2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) + C_2 \cos^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \right\} dx = \\
 & = a \left\{ \frac{h^2}{g_{m0}^4} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + 1 \right\} C_2^2, \quad (\text{II.18})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2 \int_0^b |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 dy = 2 \int_0^b |\dot{H}_z|^2 dy = 2 \int_0^b C_2^2 dy = 2bC_2^2, \\
 & \int_{S_b} \text{Re} [\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*] dS = - \int_0^a \int_0^b \dot{E}_y \dot{H}_x^* dy dx = \\
 & = \int_0^a \int_0^b \frac{\omega \mu_a h}{g_{m0}^4} C_2^2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) dy dx = \frac{ab}{2} \frac{\omega \mu_a h}{g_{m0}^4} C_2^2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2. \quad (\text{II.19})
 \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в формулу (II.2):

$$h' = h'_{H_{m0}} = \alpha_1 \frac{2bC_2^2 + a \left\{ \frac{h^2}{g_{m0}^4} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + 1 \right\} C_2^2}{\frac{ab}{2} \frac{\omega \mu_a h}{g_{m0}^4} C_2^2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2}.$$

Далее, осуществляя преобразования, аналогичные сделанным ранее с помощью соотношений (13.22), (13.35), (13.59), находим

$$\begin{aligned}
 h'_{H_{m0}} & = 2\alpha_1 \frac{2 \frac{b}{a} + \left(\frac{h^2}{g_{m0}^2} + 1 \right)}{b \frac{\omega \mu_a h}{g_{m0}^2}} = 2\alpha_1 \frac{2 \frac{b}{a} g_{m0}^2 + (h^2 + g_{m0}^2)}{b \omega \mu_a \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - g_{m0}^2}} = \\
 & = 2\alpha_1 \frac{2 \frac{b}{a} g_{m0}^2 + \omega^2 \mu_a \varepsilon_a}{b \omega^2 \mu_a \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{1 - \frac{g_{m0}^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}}} = 2\alpha_1 \frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a \left(1 + 2 \frac{b}{a} \cdot \frac{g_{m0}^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a} \right)}{b \omega^2 \mu_a \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{1 - \frac{g_{m0}^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}}} = \\
 & = 2\alpha_1 \frac{1 + 2 \frac{b}{a} \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}} \right)^2}{b \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}} \right)^2}},
 \end{aligned}$$

или с учетом обозначения (II.8)

$$h'_{H_{m0}} = 2\alpha_1 \frac{1 + 2 \frac{b}{a} \alpha_2}{b Z_c \sqrt{\alpha_3}}. \quad (\text{II.20})$$

§ II.2. Расчет коэффициентов затухания поля h' в прямоугольных волноводах в случае волн электрического типа

Волны электрического типа обладают составляющими поля, определяемыми формулами (13.29)—(13.34).

Найдем интегралы в числителе выражения (II.2). Интеграл у верхней и нижней стенок волновода:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^a |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 dx &= 2 \int_0^a |\dot{H}_x|^2 dx = 2 \int_0^a \frac{(\omega \varepsilon_a)^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin^2\left(\frac{m\pi}{a} x\right) dx = \\ &= \frac{(\omega \varepsilon_a)^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 a. \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

Интеграл у правой и левой стенок волновода:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^b |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 dy &= 2 \int_0^b |\dot{H}_y|^2 dy = 2 \int_0^b \frac{(\omega \varepsilon_a)^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right) dy = \\ &= \frac{(\omega \varepsilon_a)^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 b. \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

Интеграл в знаменателе выражения (II.2) вычисляются таким образом:

$$\begin{aligned} \int_{S_z} \text{Re} [\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*] dS &= \int_0^a \int_0^b (\dot{E}_x \dot{H}_y^* - \dot{E}_y \dot{H}_x^*) dy dx = \\ &= \int_0^a \int_0^b \left\{ \frac{\omega \varepsilon_a h}{g_{mn}^4} C_1^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \cos^2\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\omega \varepsilon_a h}{g_{mn}^4} C_1^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin^2\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \right\} dy dx = \\ &= \frac{\omega \varepsilon_a h}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{ab}{4} \left\{ \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right\} = \frac{\omega \varepsilon_a h}{g_{mn}^2} C_1^2 \frac{ab}{4}. \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

Используя формулы (II.2), (II.21), (II.22), (II.23), можно написать следующее выражение для h' :

$$\begin{aligned} h' &= \alpha_1 \frac{\frac{(\omega \varepsilon_a)^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 a + \frac{(\omega \varepsilon_a)^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 b}{\frac{\omega \varepsilon_a h}{g_{mn}^2} C_1^2 \frac{ab}{4}} = \\ &= 4\alpha_1 \frac{\frac{\omega \varepsilon_a}{g_{mn}^2} \left(\frac{nm}{b}\right)^2 a + \frac{\omega \varepsilon_a}{g_{mn}^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 b}{hab}. \end{aligned}$$

Раскроем значения g_{mn}^2 и h с помощью формул (13.22) и (13.35):

$$\begin{aligned}
 h' &= 4\alpha_1 \frac{\omega \varepsilon_a \left\{ \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 a + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 b \right\}}{\left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\} \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - g_{mn}^2 ab}} = \\
 &= 4\alpha_1 \frac{\omega \varepsilon_a \left\{ \left(\frac{n}{b} \right)^2 a + \left(\frac{m}{a} \right)^2 b \right\}}{\left\{ \left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right\} \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{1 - \frac{g_{mn}^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a} ab}} = \\
 &= \frac{4\alpha_1}{\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{1 - \frac{g_{mn}^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a} ab}} \cdot \frac{\frac{a}{b^2} \left\{ m^2 \left(\frac{b}{a} \right)^3 + n^2 \right\}}{\frac{1}{b^2} \left\{ m^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + n^2 \right\}} = \\
 &= \frac{4\alpha_1}{\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a} b}} \cdot \frac{m^2 \left(\frac{b}{a} \right)^3 + n^2}{m^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + n^2}.
 \end{aligned}$$

Далее, используя формулу (13.59) и обозначения (II.8), найдем

$$h' = h'_{E_{mn}} = \frac{4\alpha_1}{Z_c \sqrt{\alpha_3 b}} \cdot \frac{m^2 \left(\frac{b}{a} \right)^3 + n^2}{m^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + n^2}. \quad (\text{II.24})$$

§ II.3. Расчет коэффициентов затухания поля h' в круглых волноводах в случае волн магнитного типа

Волны магнитного типа в круглом волноводе обладают составляющими поля, определяемыми формулами (14.51)—(14.56).

Найдем интегралы в числителе выражения (II.2):

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} |\dot{H}_{0\tau}| r d\varphi &= \int_0^{2\pi} \{ |\dot{H}_{0\varphi}|^2 + |\dot{H}_{0z}|^2 \} r d\varphi = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{h^2 r_0^3}{\mu_{mn}^4} C_2^2 m^2 J_m^2(\mu_{mn}) \sin^2(m\varphi) + \right. \\
 &\quad \left. + C_2^2 J_m^2(\mu_{mn}) \cos^2(m\varphi) \right\} r_0 d\varphi = \\
 &= C_2^2 J_m^2(\mu_{mn}) \pi \left(\frac{h^2 r_0^3}{\mu_{mn}^4} m^2 + r_0 \right). \quad (\text{II.25})
 \end{aligned}$$

Интеграл по площади поперечного сечения волновода

$$\begin{aligned}
 \int_{S_B} \operatorname{Re} [\dot{E}_0 \dot{H}_0^*] dS &= \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} (\dot{E}_r \dot{H}_\varphi^* - \dot{E}_\varphi \dot{H}_r^*) r d\varphi dr = \\
 &= \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\omega \mu_a h r_0^4}{r^2 \mu_{mn}^4} C_2^2 m^2 J_m^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \sin^2(m\varphi) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\omega \mu_a h r_0^2}{\mu_{mn}^2} C_2^2 J_m'^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \cos^2(m\varphi) \right\} r d\varphi dr = \\
 &= \int_0^{r_0} \left\{ \frac{\omega \mu_a h r_0^4}{r^2 \mu_{mn}^4} C_2^2 m^2 J_m^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \pi + \frac{\omega \mu_a h r_0^2}{\mu_{mn}^2} C_2^2 J_m'^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \pi \right\} r dr = \\
 &= \frac{\omega \mu_a h r_0^2}{\mu_{mn}^2} C_2^2 \pi \int_0^{r_0} \left\{ \frac{r_0^2}{\mu_{mn}^2 r^2} m^2 J_m^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) + \right. \\
 &\quad \left. + J_m'^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \right\} r dr = \frac{\omega \mu_a h r_0^2}{\mu_{mn}^2} C_2^2 \pi u, \quad (II.26)
 \end{aligned}$$

где

$$u = \int_0^r \left\{ \frac{r_0^2 m^2}{\mu_{mn}^2 r^2} J_m^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) + J_m'^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \right\} r dr. \quad (II.27)$$

Осуществим замену переменных, положив

$$r = r_0 x. \quad (II.28)$$

Тогда

$$u = r_0^2 \int_0^1 \left\{ \frac{m^2}{\mu_{mn}^2 x^2} J_m^2(\mu_{mn} x) + J_m'^2(\mu_{mn} x) \right\} x dx. \quad (II.29)$$

Используя рекуррентное соотношение для функций Бесселя:

$$J_m(z) = \frac{z}{2m} \{ J_{m-1}(z) + J_{m+1}(z) \}, \quad (II.30)$$

получим

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{r_0^2}{4} \int_0^1 \left\{ \frac{m^2}{\mu_{mn}^2 x^2} \frac{\mu_{mn}^2 x^2}{m^2} \{ J_{m-1}^2(\mu_{mn} x) + J_{m+1}^2(\mu_{mn} x) + \right. \\
 &\quad \left. + 2J_{m-1}(\mu_{mn} x) J_{m+1}(\mu_{mn} x) \} + \{ J_{m-1}^2(\mu_{mn} x) + J_{m+1}^2(\mu_{mn} x) - \right. \\
 &\quad \left. - 2J_{m-1}(\mu_{mn} x) J_{m+1}(\mu_{mn} x) \} \right\} x dx,
 \end{aligned}$$

или

$$u = \frac{r_0^2}{2} \int_0^1 \{ J_{m-1}^2(\mu_{mn} x) + J_{m+1}^2(\mu_{mn} x) \} x dx. \quad (II.31)$$

Для цилиндрических функций справедливо соотношение

$$\int Z_p^2(ax) x dx = \frac{x^2}{2} \{Z_p^2(ax) - Z_{p-1}(ax) Z_{p+1}(ax)\}, \quad (\text{II.32})$$

где Z_p — любая цилиндрическая функция.

Следовательно,

$$\begin{aligned} u = \frac{r_0^2}{2} \frac{x^2}{2} \{J_{m-1}^2(\mu_{mn}x) - J_{m-2}(\mu_{mn}x) J_m(\mu_{mn}x) + J_{m+1}^2(\mu_{mn}x) - \\ - J_m(\mu_{mn}x) J_{m+2}(\mu_{mn}x)\} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{r_0^2}{4} \langle J_{m-1}^2(\mu_{mn}) - J_m(\mu_{mn}) \times \\ \times \{J_{m-2}(\mu_{mn}) + J_{m+2}(\mu_{mn})\} + J_{m+1}^2(\mu_{mn}) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

С помощью рекуррентного соотношения (II.30) найдем

$$J_{m-2}(\mu_{mn}) = \frac{2(m-1)}{\mu_{mn}} J_{m-1}(\mu_{mn}) - J_m(\mu_{mn}),$$

$$J_{m+2}(\mu_{mn}) = \frac{2(m+1)}{\mu_{mn}} J_{m+1}(\mu_{mn}) - J_m(\mu_{mn}).$$

Таким образом,

$$J_{m-2}(\mu_{mn}) J_m(\mu_{mn}) = \frac{2(m-1)}{\mu_{mn}} J_{m-1}(\mu_{mn}) J_m(\mu_{mn}) - J_m^2(\mu_{mn}), \quad (\text{II.34})$$

$$J_{m+2}(\mu_{mn}) J_m(\mu_{mn}) = \frac{2(m+1)}{\mu_{mn}} J_{m+1}(\mu_{mn}) J_m(\mu_{mn}) - J_m^2(\mu_{mn}). \quad (\text{II.35})$$

Далее используем следующие рекуррентные соотношения:

$$J_{m-1}(z) = J'_m(z) + \frac{m}{z} J_m(z), \quad (\text{II.36})$$

$$J_{m+1}(z) = \frac{m}{z} J_m(z) - J'_m(z), \quad (\text{II.37})$$

$$\begin{aligned} J_{m-2}(\mu_{mn}) J_m(\mu_{mn}) = \frac{2(m-1)}{\mu_{mn}} J'_m(\mu_{mn}) J_m(\mu_{mn}) + \\ + \frac{2(m-1)m}{\mu_{mn}^2} J_m^2(\mu_{mn}) - J_m^2(\mu_{mn}). \end{aligned}$$

Поскольку μ_{mn} является корнем производной функций Бесселя, можно написать

$$J'_m(\mu_{mn}) = 0, \quad (\text{II.38})$$

$$J_{m-2}(\mu_{mn}) J_m(\mu_{mn}) = \frac{2(m-1)m}{\mu_{mn}^2} J_m^2(\mu_{mn}) - J_m^2(\mu_{mn}). \quad (\text{II.39})$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} J_{m+2}(\mu_{mn}) J_m(\mu_{mn}) = \frac{2(m+1)m}{\mu_{mn}^2} J_m^2(\mu_{mn}) - \\ - \frac{2(m+1)m}{\mu_{mn}^2} J'_m(\mu_{mn}) J_m(\mu_{mn}) - J_m^2(\mu_{mn}) = \\ = \frac{2(m+1)m}{\mu_{mn}^2} J_m^2(\mu_{mn}) - J_m^2(\mu_{mn}). \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

Подставляя выражения (II.39), (II.40) в формулу (II.33), получаем

$$u = \frac{r_0^2}{4} \left\langle J_{m-1}^2(\mu_{mn}) + J_m^2(\mu_{mn}) \left\{ 1 - \frac{2(m-1)m}{\mu_{mn}^2} + 1 - \frac{2(m+1)m}{\mu_{mn}^2} \right\} + \right. \\ \left. + J_{m+1}^2(\mu_{mn}) \right\rangle = \frac{r_0^2}{4} \left\{ J_{m-1}^2(\mu_{mn}) + J_{m+1}^2(\mu_{mn}) + 2J_m^2(\mu_{mn}) - \right. \\ \left. - \frac{4m^2}{\mu_{mn}^2} J_m^2(\mu_{mn}) \right\}. \quad (\text{II.41})$$

С помощью соотношений (II.36), (II.37), (II.38) можно вывести следующие выражения:

$$J_{m-1}^2(\mu_{mn}) = \left\{ J'_m(\mu_{mn}) + \frac{m}{\mu_{mn}} J_m(\mu_{mn}) \right\}^2 = \frac{m^2}{\mu_{mn}^2} J_m^2(\mu_{mn}), \\ J_{m+1}^2(\mu_{mn}) = \left\{ \frac{m}{\mu_{mn}} J_m(\mu_{mn}) - J'_m(\mu_{mn}) \right\}^2 = \frac{m^2}{\mu_{mn}^2} J_m^2(\mu_{mn}).$$

Подставим эти выражения в формулу (II.41):

$$u = \frac{r_0^2}{4} \left\{ \frac{2m^2}{\mu_{mn}^2} J_m^2(\mu_{mn}) + 2J_m^2(\mu_{mn}) - \frac{4m^2}{\mu_{mn}^2} J_m^2(\mu_{mn}) \right\} = \\ = \frac{r_0^2}{2} \left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2} \right) J_m^2(\mu_{mn}). \quad (\text{II.42})$$

Подставим выражение (II.42) в формулу (II.26):

$$\int_{\tilde{S}_b} \text{Re} [\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*] dS = \frac{\omega \mu_a h r_0^2}{\mu_{mn}^2} C_2^2 \pi \frac{r_0^2}{2} \left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2} \right) J_m^2(\mu_{mn}). \quad (\text{II.43})$$

Подставим выражения (II.25), (II.43) в формулу (II.2):

$$h'_{Hmn} = \alpha_1 \frac{\frac{h^2 r_0^3}{\mu_{mn}^4} m^2 + r_0}{\frac{\omega \mu_a h r_0^2}{\mu_{mn}^2} \cdot \frac{r_0^2}{2} \left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2} \right)}. \quad (\text{II.44})$$

Далее используем выражения (14.57), (14.59):

$$h = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} \right)^2}, \\ \lambda = \frac{2\pi r_0}{\mu_{mn}},$$

с помощью которых получается соотношение

$$h = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{1 - \frac{\mu_{mn}^2}{r_0^2 \omega^2 \mu_a \varepsilon_a}} = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{1 - \frac{\mu_{mn}^2}{r_0^2 4\pi^2 f^2 \mu_a \varepsilon_a}} = \\ = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{1 - \frac{c^2}{\lambda_{\text{кп}}^2 f^2}} = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кп}}} \right)^2}. \quad (\text{II.45})$$

Используя формулы (14.59), (II.45), выражение (II.44) можно представить в форме

$$\begin{aligned} h'_{Hmn} &= 2\alpha_1 r_0 \frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a \left\{ 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2 \right\} m^2 r_0^2 + \mu_{mn}^4}{\mu_{mn}^4 \omega^2 \mu_a \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2} \frac{r_0^4}{\mu_{mn}^2} \left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2} \right)} = \\ &= 2\alpha_1 \frac{m^2 \left(\frac{\lambda_{кр}}{\lambda} \right)^2 - m^2 + \mu_{mn}^2}{r_0 \left(\frac{\lambda_{кр}}{\lambda} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2} (\mu_{mn}^2 - m^2)} = \\ &= 2\alpha_1 \frac{1 + \frac{m^2}{\mu_{mn}^2 - m^2} \left(\frac{\lambda_{кр}}{\lambda} \right)^2}{r_0 \left(\frac{\lambda_{кр}}{\lambda} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2}}, \end{aligned}$$

или окончательно

$$h'_{Hmn} = 2\alpha_1 \frac{\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2 + \frac{m^2}{\mu_{mn}^2 - m^2}}{r_0 \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2}}. \quad (\text{II.46})$$

Для упрощения записи воспользуемся обозначениями (II.8). Тогда

$$h'_{Hmn} = 2\alpha_1 \frac{\alpha_2 + \frac{m^2}{\mu_{mn}^2 - m^2}}{r_0 Z_c \sqrt{\alpha_3}}. \quad (\text{II.47})$$

Рассмотрим вывод выражения для коэффициента затухания поля в случае волн типа H_{0n} , обладающего составляющими

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_r &= -j \frac{hr_0}{\mu_{0n}} C_2 J'_0 \left(\frac{\mu_{0n}}{r_0} r \right) e^{-jhz}, \\ \dot{H}_z &= C_2 J_0 \left(\frac{\mu_{0n}}{r_0} r \right) e^{-jhz}, \\ \dot{E}_\varphi &= j \frac{\omega \mu_a r_0}{\mu_{0n}} C_2 J'_0 \left(\frac{\mu_{0n}}{r_0} r \right) e^{-jhz}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.48})$$

Залишем выражения для интегралов:

интеграл у металлической поверхности волновода

$$\int_0^{2\pi} \left| \dot{\mathbf{H}}_{0\tau} \right|^2 \cdot r d\varphi = \int_0^{2\pi} \left| \dot{H}_z \right|^2 r_0 d\varphi = C_2^2 J_0^2 (\mu_{0n}) r_0 2\pi; \quad (\text{II.49})$$

интеграл по площади поперечного сечения волновода

$$\begin{aligned} u &= \int_{S_B} \text{Re} [\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*] dS = - \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \dot{E}_\varphi \dot{H}_r^* r d\varphi dr = \\ &= \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \frac{h C_2^2 \omega \mu_a r_0^2}{\mu_{0n}^2} J_0'^2 \left(\frac{\mu_{0n}}{r_0} r \right) r d\varphi dr = \frac{h C_2^2 \omega \mu_a r_0^2 2\pi}{\mu_{0n}^2} \int_0^{r_0} J_0'^2 \left(\frac{\mu_{0n}}{r_0} r \right) r dr. \end{aligned}$$

На основании рекуррентного соотношения (II.37) при $m=0$ справедливы формулы

$$J_1(z) = -J_0'(z) \text{ и } J_0''(z) = J_1^2(z).$$

Тогда

$$u = \int_{S_B} \operatorname{Re} [\dot{E}_0 \dot{H}_0^*] dS = \frac{\hbar C_2^2 \omega \mu_a r_0^2 2\pi}{\mu_{0n}^2} \int_0^{r_0} J_1^2 \left(\frac{\mu_{0n}}{r_0} r \right) r dr.$$

Осуществим замену переменных, положив $r = r_0 x$:

$$u = \frac{\hbar C_2^2 \omega \mu_a r_0^4 2\pi}{\mu_{0n}^2} \int_0^1 J_1^2(\mu_{0n} x) x dx.$$

Полученный интеграл является интегралом вида (II.32), поэтому можно записать

$$\begin{aligned} u &= \frac{\hbar C_2^2 \omega \mu_a r_0^4 2\pi}{\mu_{0n}^2} \frac{x^2}{2} J_1^2(\mu_{0n} x) - J_0(\mu_{0n} x) J_2(\mu_{0n} x) \Big|_{x=1} = \\ &= \frac{\hbar C_2^2 \omega \mu_a r_0^4 2\pi}{\mu_{0n}^2} \left\{ \frac{1}{2} J_1^2(\mu_{0n}) - J_0(\mu_{0n}) J_2(\mu_{0n}) \right\}. \end{aligned}$$

Из рекуррентных соотношений (II.36), (II.37) следует формула

$$J_{m-1}(z) J_{m+1}(z) = \frac{m^2}{z^2} J_m^2(z) - J_m'^2(z), \quad (\text{II.50})$$

на основании которой можно написать

$$J_0(\mu_{0n}) J_2(\mu_{0n}) = \frac{1}{\mu_{0n}^2} J_1^2(\mu_{0n}) - J_1'^2(\mu_{0n}).$$

Из рекуррентного соотношения (II.36) следует также, что

$$J_1(z) = -J_0'(z), \quad J_1^2(z) = J_0'^2(z), \quad (\text{II.51})$$

откуда

$$\frac{1}{2} J_1^2(\mu_{0n}) - J_0(\mu_{0n}) J_2(\mu_{0n}) = \frac{1}{2} J_0'^2(\mu_{0n}) - \frac{1}{\mu_{0n}^2} J_0'^2(\mu_{0n}) + J_1'^2(\mu_{0n}) = J_1'^2(\mu_{0n}). \quad (\text{II.52})$$

С учетом выведенных соотношений, формул (II.36), (II.50) получаем

$$J_0(z) = J_1'(z) + \frac{1}{z} J_1(z) = J_1'(z) - \frac{1}{z} J_0'(z).$$

При $z = \mu_{0n}$

$$\begin{aligned} J_0(\mu_{0n}) &= J_1'(\mu_{0n}) - \frac{1}{\mu_{0n}} J_0'(\mu_{0n}), \quad J_0(\mu_{0n}) = J_1'(\mu_{0n}), \\ u &= \frac{\hbar C_2^2 \omega \mu_a r_0^4 2\pi}{\mu_{0n}^2} J_1'^2(\mu_{0n}) = \frac{\hbar C_2^2 \omega \mu_a r_0^4 2\pi}{\mu_{0n}^2} J_0^2(\mu_{0n}). \end{aligned} \quad (\text{II.53})$$

Подставим выражения (II.49), (II.53) в формулу (II.2):

$$h'_{H_{0n}} = \alpha_1 \frac{\mu_{0n}^2 C_2 J_0^2(\mu_{0n}) r_0 2\pi}{h C_2^2 \omega \mu_a r_0^4 2\pi J_0^2(\mu_{0n})} = \frac{\alpha_1 4\pi^2}{r_0 \frac{4\pi^2 r_0^2}{\mu_{0n}^2} h \omega \mu_a} =$$

$$= \frac{\alpha_1 4\pi^2 \varepsilon_a}{r_0 \frac{4\pi^2 r_0^2}{\mu_{0n}^2} \omega^2 \mu_a \varepsilon_a \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}.$$

С учетом соотношения (14.59) это выражение может быть записано в форме

$$h'_{H_{0n}} = \alpha_1 \frac{1}{r_0 \left(\frac{\lambda_{кр}}{\lambda}\right)^2 \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}, \quad (II.54)$$

или в обозначениях (II.8)

$$h'_{H_{0n}} = \alpha_1 \frac{\alpha_2}{r_0 Z_c \sqrt{\alpha_3}}. \quad (II.55)$$

§ II.4. Расчет коэффициентов затухания поля h' в круглых волноводах в случае волн электрического типа

Волны электрического типа в круглом волноводе обладают составляющими поля, определяемыми формулами (14.33) — (14.38).

Найдем выражения для интегралов:

интеграл у металлической поверхности волновода, стоящий в числителе выражения (II.2):

$$\int_0^{2\pi} |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 r d\varphi = \int_0^{2\pi} |\dot{H}_\varphi|^2 r_0 d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\omega^2 \varepsilon_a^2 r_0^3}{\eta_{mn}^2} C_1^2 J_m'^2(\eta_{mn}) \cos^2(m\varphi) d\varphi = \frac{\omega^2 \varepsilon_a^2 r_0^3}{\eta_{mn}^2} C_1^2 J_m'^2(\eta_{mn}) \pi; \quad (II.56)$$

интеграл по площади поперечного сечения волновода:

$$\int_{S_B} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*] dS = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} (\dot{E}_r \dot{H}_\varphi^* - \dot{E}_\varphi \dot{H}_r^*) r d\varphi dr =$$

$$= \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\omega \varepsilon_a r_0^2 h C_1^2}{\eta_{mn}^2} J_m'^2\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r\right) \cos^2(m\varphi) + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega \varepsilon_a r_0^4 h C_1^2 m^2}{\eta_{mn}^4} \cdot \frac{1}{r^2} J_m^2\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r\right) \sin^2(m\varphi) \right\} r d\varphi dr =$$

$$= \frac{\omega \varepsilon_a r_0^2 h C_1^2 \pi}{\eta_{mn}^2} \int_0^{r_0} \left\{ J_m'^2\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r\right) + \frac{r_0^2 m^2}{\eta_{mn}^2 r^2} J_m^2\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r\right) \right\} r dr. \quad (II.57)$$

Введем обозначение

$$u_1 = \int_0^{r_0} \left\{ J_m'^2 \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r \right) + \frac{r_0^2 m^2}{\eta_{mn}^2 r^2} J_m^2 \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r \right) \right\} r dr.$$

Осуществим замену переменных, положив $r = r_0 x$:

$$u_1 = r_0^2 \int_0^1 \left\{ \frac{m^2}{\eta_{mn}^2 x^2} J_m^2(\eta_{mn} x) + J_m'^2(\eta_{mn} x) \right\} x dx. \quad (\text{II.58})$$

Интеграл u_1 по математической форме совпадает с интегралом (II.29). Решение его может быть представлено в форме, сходной с выражением (II.33):

$$u_1 = \frac{r_0^2}{4} \langle J_{m-1}^2(\eta_{mn}) - J_m(\eta_{mn}) \{ J_{m-2}(\eta_{mn}) + J_{m+2}(\eta_{mn}) \} + J_{m+1}^2(\eta_{mn}) \rangle. \quad (\text{II.59})$$

Поскольку η_{mn} — корни функций Бесселя J_m , справедливо соотношение

$$J_m(\eta_{mn}) = 0 \quad (\text{II.60})$$

и

$$u_1 = \frac{r_0^2}{4} \{ J_{m-1}^2(\eta_{mn}) + J_{m+1}^2(\eta_{mn}) \}. \quad (\text{II.61})$$

Из рекуррентных соотношений (II.36), (II.37) следуют формулы

$$J_{m-1}^2(\eta_{mn}) = \left\{ J_m'(\eta_{mn}) + \frac{m}{\eta_{mn}} J_m(\eta_{mn}) \right\}^2,$$

$$J_{m+1}^2(\eta_{mn}) = \left\{ \frac{m}{\eta_{mn}} J_m(\eta_{mn}) - J_m'(\eta_{mn}) \right\}^2,$$

или с учетом равенства (II.60)

$$J_{m-1}^2(\eta_{mn}) = J_m'^2(\eta_{mn}),$$

$$J_{m+1}^2(\eta_{mn}) = J_m'^2(\eta_{mn}).$$

Подставим полученные соотношения в формулу (II.61):

$$u_1 = \frac{r_0^2}{2} J_m'^2(\eta_{mn}). \quad (\text{II.62})$$

Далее интеграл u_1 подставим в выражение (II.57):

$$\int_{S_B} \text{Re}[\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*] dS = \frac{\omega \varepsilon_a r_0^2 C_{1\tau}^2}{\eta_{mn}^2} \cdot \frac{r_0^2}{2} J_m'^2(\eta_{mn}). \quad (\text{II.63})$$

Соотношения (II.56), (II.63), (II.2) дают возможность определить коэффициент затухания $h'_{E_{mn}}$ в случае волн электрического типа:

$$h'_{E_{mn}} = \alpha_1 \frac{\frac{\omega^2 \varepsilon_a r_0^3}{\eta_{mn}^2}}{\frac{\omega r_0^2 \eta}{\eta_{mn}^2} \cdot \frac{r_0^2}{2}} = 2\alpha_1 \frac{\varepsilon_a}{r_0 \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2}},$$

или

$$h'_{E_{mn}} = \frac{2\alpha_1}{r_0 \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}. \quad (II.64)$$

Используя обозначения (II.8), получаем окончательное выражение для $h'_{E_{mn}}$:

$$h'_{E_{mn}} = 2\alpha_1 \frac{1}{r_0 Z_c \sqrt{\alpha_3}}. \quad (II.65)$$

Далее рассмотрим вывод коэффициента затухания для волн типа E_{0n} , когда $m=0$. Выражения для составляющих поля при этом приобретают вид

$$\dot{E}_r = -j \frac{hr_0}{\eta_{0n}} C_1 J'_0 \left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r \right) e^{-jhz}, \quad (II.66)$$

$$\dot{E}_z = C_1 J_0 \left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r \right) e^{-jhz}, \quad (II.67)$$

$$\dot{H}_\varphi = -j \frac{\omega \varepsilon_a r_0}{\eta_{0n}} C_1 J'_0 \left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r \right) e^{-jhz}. \quad (II.68)$$

Найдем выражения для интегралов: интеграл в числителе выражения (II.2)

$$\int_0^{2\pi} |\dot{H}_{0\tau}|^2 r_0 d\varphi = \int_0^{2\pi} |H_\varphi|^2 r_0 d\varphi = \frac{\omega^2 \varepsilon_a^2 r_0^3}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2(\eta_{0n}) 2\pi; \quad (II.69)$$

интеграл в знаменателе выражения (II.2)

$$\begin{aligned} \int_{S_B} \operatorname{Re}[\dot{E}_0 \dot{H}_0^*] dS &= \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \dot{E}_r \dot{H}_\varphi^* r d\varphi dr = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \frac{\omega \varepsilon_a h r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2 \left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r \right) r d\varphi dr = \\ &= \int_0^{r_0} \frac{\omega \varepsilon_a h r_0^2 2\pi}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2 \left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r \right) r dr = \\ &= \frac{\omega \varepsilon_a h r_0^2 2\pi C_1^2}{\eta_{0n}^2} \int_0^{r_0} J_0'^2 \left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r \right) r dr = \frac{\omega \varepsilon_a h r_0^2 2\pi C_1^2}{\eta_{0n}^2} u_2. \end{aligned} \quad (II.70)$$

Здесь

$$u_2 = \int_0^{r_0} J_0'^2 \left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r \right) r dr. \quad (II.71)$$

Осуществим замену переменных, положив $r = r_0 x$:

$$u_2 = r_0^2 \int_0^1 J_0'^2(\eta_{0n} x) x dx. \quad (II.72)$$

В силу справедливости равенства $J_0'^2(z) = J_1(z)$ можно написать

$$u_2 = r_0^2 \int_0^1 J_1^2(\eta_{0n}x) x dx.$$

Полученный интеграл является интегралом вида (II.32), на основании чего

$$u_2 = r_0^2 \left\{ \frac{x^2}{2} J_1^2(\eta_{0n}x) - J_0(\eta_{0n}x) J_2(\eta_{0n}x) \right\} \Big|_{x=1},$$

или с учетом равенства (II.60)

$$u_2 = \frac{r_0^2}{2} J_1^2(\eta_{0n}).$$

Заменяя $J_1^2(\eta_{0n}) = J_0'^2(\eta_{0n})$, получаем соотношение

$$u_2 = \frac{r_0^2}{2} J_0'^2(\eta_{0n}). \quad (\text{II.73})$$

Подставим полученную формулу в выражение (II.70):

$$\int_{S_B} \text{Re}[\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*] dS = \frac{\omega \varepsilon_a h r_0^2 2\pi C_1^2}{\eta_{0n}^2} \cdot \frac{r_0^2}{2} J_0'^2(\eta_{0n}). \quad (\text{II.74})$$

Подставляя выражения (II.69), (II.74) в формулу (II.2), найдем коэффициент затухания $h'_{E_{0n}}$:

$$h'_{E_{0n}} = \alpha_1 \frac{\frac{\omega^2 \varepsilon_a^2 r_0^3}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2(\eta_{0n}) 2\pi}{\frac{\omega \varepsilon_a h r_0^2 2\pi C_1^2}{\eta_{0n}^2} \cdot \frac{r_0^2}{2} J_0'^2(\eta_{0n})},$$

или

$$h'_{E_{0n}} = \frac{2\alpha_1}{r_0 \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}. \quad (\text{II.75})$$

Полученное выражение не отличается от формулы (II.64), справедливой при $m \neq 0$. Окончательное выражение для коэффициента затухания в рассматриваемом случае совпадает с формулой (II.65).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОБРОТНОСТЕЙ ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

§ III.1. Определение добротностей прямоугольных объемных резонаторов в случае волн магнитного типа

Добротность объемных резонаторов вычисляют с помощью общего соотношения (25.8)

$$Q = \frac{V \overline{\omega_p \mu_a} \int_V |\dot{H}|^2 dV}{\sqrt{\frac{\mu_{a2}}{2\gamma_{a2}}} \oint_{S_1} |\dot{H}_\tau|^2 dS}.$$

Для упрощения записи введем обозначение

$$\frac{\sqrt{\overline{\omega_p \mu_a}}}{\sqrt{\frac{\mu_{a2}}{2\gamma_{a2}}}} = \alpha_4. \quad (III.1)$$

Тогда

$$Q = \alpha_4 \frac{\int_V |\dot{H}|^2 dV}{\oint_{S_1} |\dot{H}_\tau|^2 dS} = \alpha_4 \frac{u_1}{u_2}, \quad (III.2)$$

где

$$u_1 = \int_V |\dot{H}|^2 dV, \quad u_2 = \oint_{S_1} |\dot{H}_\tau|^2 dS. \quad (III.3)$$

В случае волн магнитного типа составляющие поля в объемном резонаторе определяются выражениями (21.29) — (21.31).

Найдем интеграл u_1 :

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^l \int_0^b \int_0^a (|\dot{H}_{xp}|^2 + |\dot{H}_{yp}|^2 + |H_{zp}|^2) dx dy dz = \\ &= \int_0^l \int_0^b \int_0^a \left\{ 4 \frac{p^2 \pi^2}{g_{mn}^4 l^2} C_2^2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \cos^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) + \right. \\ &\quad + 4 \frac{p^2 \pi^2}{g_{mn}^4 l^2} C_2^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \sin^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \cos^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) + \\ &\quad \left. + 4 C_2^2 \cos^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \sin^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) \right\} dx dy dz = \\ &= 4 C_2^2 \frac{abl}{8} \left\{ \frac{p^2 \pi^2}{g_{mn}^4 l^2} \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) + 1 \right\}. \end{aligned}$$

С учетом соотношения (13.23)

$$g_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}$$

интеграл u_1 можно записать в форме

$$u_1 = C_2^2 \frac{abl}{2} \left(\frac{p^2 \pi^2}{g_{mn}^4 l^2} + 1 \right). \quad (\text{III.4})$$

Определим интеграл u_2 :

$$\begin{aligned} u_2 &= 2 \int_0^l \int_0^a \{ |\dot{H}_{xp}|^2 + |\dot{H}_{zp}|^2 \} dx dz |_{y=0} + \\ &+ 2 \int_0^l \int_0^b \{ |\dot{H}_{yp}|^2 + |\dot{H}_{zp}|^2 \} dy dz |_{x=0} + \\ &+ 2 \int_0^b \int_0^a \{ |\dot{H}_{xp}|^2 + |\dot{H}_{yp}|^2 \} dx dy |_{z=0} = \\ &= 2 \int_0^l \int_0^a \left\{ 4 \frac{p^2 \pi^2}{g_{mn}^4 l^2} C_2^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sin^2 \left(\frac{m \pi}{a} x \right) \cos^2 \left(\frac{p \pi}{l} z \right) + \right. \\ &\quad \left. + 4 C_2^2 \cos^2 \left(\frac{m \pi}{a} x \right) \sin^2 \left(\frac{p \pi}{l} z \right) \right\} dx dz + \\ &+ 2 \int_0^l \int_0^b \left\{ 4 \frac{p^2 \pi^2}{g_{mn}^4 l^2} C_2^2 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \sin^2 \left(\frac{n \pi}{b} y \right) \cos^2 \left(\frac{p \pi}{l} z \right) + \right. \\ &\quad \left. + 4 C_2^2 \cos^2 \left(\frac{n \pi}{b} y \right) \sin^2 \left(\frac{p \pi}{l} z \right) \right\} dy dz + \\ &+ 2 \int_0^b \int_0^a \left\{ 4 \frac{p^2 \pi^2}{g_{mn}^4 l^2} C_2^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sin^2 \left(\frac{m \pi}{a} x \right) \cos^2 \left(\frac{n \pi}{b} y \right) + \right. \\ &\quad \left. + 4 \frac{p^2 \pi^2}{g_{mn}^4 l^2} C_2^2 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \cos^2 \left(\frac{m \pi}{a} x \right) \sin^2 \left(\frac{n \pi}{b} y \right) \right\} dx dy = \\ &= 8 \frac{al}{4} C_2^2 \left(\frac{p^2 \pi^2}{g_{mn}^4 l^2} \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + 1 \right) + 8 \frac{bl}{4} C_2^2 \left(\frac{p^2 \pi^2}{g_{mn}^4 l^2} \cdot \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + 1 \right) + \\ &\quad + 8 \frac{ab}{4} C_2^2 \left\{ \frac{p^2 \pi^2}{g_{mn}^4 l^2} \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Используя выражение (13.23), получаем

$$\begin{aligned} u_2 &= 2 C_2^2 al \left(\frac{p^2 \pi^2}{g_{mn}^4 l^2} \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + 1 \right) + \\ &+ 2 C_2^2 bl \left(\frac{p^2 \pi^2}{g_{mn}^4 l^2} \cdot \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + 1 \right) + 2 C_2^2 ab \frac{p^2 \pi^2}{g_{mn}^4 l^2}. \quad (\text{III.5}) \end{aligned}$$

Подставим выражения (III.4), (III.5) в формулу (III.2):

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{\alpha_4 \cdot C_2 \frac{abl}{2} \left(\frac{p^2 \pi^2}{g_{mn}^2 l^2} + 1 \right)}{2C_2^2 \left\{ al \left(\frac{p^2 \pi^2}{g_{mn}^4 l^2} \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + 1 \right) + bl \left(\frac{p^2 \pi^2}{g_{mn}^4 l^2} \cdot \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + 1 \right) + ab \frac{p^2 \pi^2}{g_{mn}^2 l^2} \right\}} = \\
 &= \frac{\alpha_4}{4} \cdot \frac{abl \left(\frac{p^2 \pi^2}{g_{mn}^2 l^2} + 1 \right)}{al \left(\frac{p^2 \pi^2}{g_{mn}^4 l^2} \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + 1 \right) + bl \left(\frac{p^2 \pi^2}{g_{mn}^4 l^2} \cdot \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + 1 \right) + ab \frac{p^2 \pi^2}{g_{mn}^2 l^2}} = \\
 &= \frac{\alpha_4}{4} \cdot \frac{abl \left(\frac{p^2 \pi^2}{l^2} + g_{mn}^2 \right) g_{mn}^2}{al \left\{ \left(\frac{p \pi^2 m}{la} \right)^2 + g_{mn}^4 \right\} + bl \left\{ \left(\frac{p \pi^2 n}{lb} \right)^2 + g_{mn}^4 \right\} + ab \left(\frac{p \pi g_{mn}}{l} \right)^2}.
 \end{aligned}$$

Используя выражение (13.23) и формулу (21.37)

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}} \sqrt{\left(\frac{m \pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n \pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{p \pi}{l} \right)^2},$$

запишем окончательное выражение для добротности прямоугольного объемного резонатора в случае волн типа H_{mnp} :

$$Q_{H_{mnp}} = \frac{\alpha_4}{4} \cdot \frac{abl \omega_p^2 g_{mn}^2 \mu_a \epsilon_a}{al \left\{ \left(\frac{p \pi^2 m}{la} \right)^2 + g_{mn}^4 \right\} + bl \left\{ \left(\frac{p \pi^2 n}{lb} \right)^2 + g_{mn}^4 \right\} + ab \left(\frac{l \pi g_{mn}}{l} \right)^2}. \quad (\text{III.6})$$

Далее определим добротность прямоугольного объемного резонатора в случае волн типа H_{m0p} . При $n=0$ из выражений (21.29)—(21.31) найдем составляющие магнитного поля:

$$\dot{H}_{x_p} = j2 \frac{p \pi}{g_{m0} l} C_2 \frac{m \pi}{a} \sin \left(\frac{m \pi}{a} x \right) \cos \left(\frac{p \pi}{l} z \right), \quad (\text{III.7})$$

$$\dot{H}_{z_p} = -j2C_2 \cos \left(\frac{m \pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{p \pi}{l} z \right). \quad (\text{III.8})$$

Определим интеграл u_i :

$$\begin{aligned}
 u_i &= \int_0^l \int_0^b \int_0^a (|\dot{H}_{x_p}|^2 + |\dot{H}_{z_p}|^2) dx dy dz = \\
 &= \int_0^l \int_0^b \int_0^a \left\{ 4 \frac{p^2 \pi^2}{g_{m0}^4 l^2} C_2^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sin^2 \left(\frac{m \pi}{a} x \right) \cos^2 \left(\frac{p \pi}{l} z \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 4C_2^2 \cos^2 \left(\frac{m \pi}{a} x \right) \sin^2 \left(\frac{p \pi}{l} z \right) \right\} dx dy dz = \\
 &= 4C_2^2 \frac{abl}{4} \left(\frac{p^2 \pi^2}{g_{m0}^4 l^2} \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + 1 \right) = C_2^2 abl \left(\frac{p^2 \pi^4 m^2}{g_{m0}^4 l^2 a^2} + 1 \right). \quad (\text{III.9})
 \end{aligned}$$

Найдем интеграл u_2 :

$$\begin{aligned}
 u_2 &= 2 \int_0^l \int_0^a (|\dot{H}_{x\bar{p}}|^2 + |\dot{H}_{z\bar{p}}|^2) dx dz |_{y=0} + \\
 &+ 2 \int_0^l \int_0^b |\dot{H}_{z\bar{p}}|^2 dy dz |_{x=0} + 2 \int_0^b \int_0^a |\dot{H}_{x\bar{p}}|^2 dx dy |_{z=0} = \\
 &= 2 \int_0^l \int_0^a \left\{ 4 \frac{p^2 \pi^2}{g_{m0}^4 l^2} C_2^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sin^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 4 C_2^2 \cos^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \sin^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) \right\} dx dz + \\
 &+ 2 \int_0^l \int_0^b 4 C_2^2 \sin^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) dy dz + 2 \int_0^b \int_0^a 4 \frac{p^2 \pi^2}{g_{m0}^4 l^2} C_2^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sin^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) dx dy = \\
 &= 2 C_2^2 \frac{al}{4} \left(4 \frac{p^2 \pi^2}{g_{m0}^2 l^2} + 4 \right) + 8 C_2^2 \frac{bl}{2} + 8 C_2^2 \frac{ab}{2} \cdot \frac{p^2 \pi^2}{g_{m0}^2 l^2}.
 \end{aligned}$$

При выводе этого соотношения была использована формула

$$g_{m0}^2 = \frac{m^2 \pi^2}{a^2}. \quad (\text{III.10})$$

Преобразуем выражение для u_2 :

$$u_2 = 2 C_2^2 al \left(\frac{p^2 \pi^2}{g_{m0}^2 l^2} + 1 \right) + 4 C_2^2 bl + 4 C_2^2 ab \frac{p^2 \pi^2}{g_{m0}^2 l^2}. \quad (\text{III.11})$$

Подставим выражения (III.9), (III.11) в формулу (III.2):

$$Q = \alpha_4 \frac{C_2^2 abl \left(\frac{p^2 \pi^2}{g_{m0}^2 l^2} + 1 \right)}{2 C_2^2 al \left(\frac{p^2 \pi^2}{g_{m0}^2 l^2} + 1 \right) + 4 C_2^2 bl + 4 C_2^2 ab \frac{p^2 \pi^2}{g_{m0}^2 l^2}}.$$

Окончательное выражение для добротности резонатора в случае волн типа H_{m0p} имеет вид

$$Q_{H_{m0p}} = \frac{\alpha_4}{2} \cdot \frac{abl \omega_p^2 \mu_a \varepsilon_a}{al \omega_p^2 \mu_a \varepsilon_a + 2bl g_{m0}^2 + 2ab \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2}. \quad (\text{III.12})$$

Выведем выражение для добротности в случае волн типа H_{0np} . Из выражений (21.29)–(21.31) найдем составляющие магнитного поля:

$$\dot{H}_{y\bar{p}} = j 2 \frac{p\pi}{g_{0nl}^2} C_2 \frac{n\pi}{b} \sin \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \cos \left(\frac{p\pi}{l} z \right), \quad (\text{III.13})$$

$$\dot{H}_{z\bar{p}} = -j 2 C_2 \cos \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \sin \left(\frac{p\pi}{l} z \right). \quad (\text{III.14})$$

Определим интеграл u_1 :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \int_0^l \int_0^b \int_0^a (|\dot{H}_{yp}|^2 + |\dot{H}_{zp}|^2) dx dy dz = \\
 &= \int_0^l \int_0^b \int_0^a \left\{ 4 \frac{p^2 \pi^2}{g_{0n}^2 l^2} C_2^2 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \sin^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \cos^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 4C_2^2 \cos^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \sin^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) \right\} dx dy dz = \\
 &= 4C_2^2 \frac{abl}{4} \left(\frac{p^2 \pi^2}{g_{0n}^2 l^2} \cdot \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + 1 \right) = C_2^2 abl \left(\frac{p^2 \pi^2}{g_{0n}^2 l^2} + 1 \right). \quad (III.15)
 \end{aligned}$$

Определим интеграл u_2 :

$$\begin{aligned}
 u_2 &= 2 \int_0^l \int_0^a |\dot{H}_{zp}|^2 dx dz |_{y=0} + 2 \int_0^l \int_0^b (|\dot{H}_{yp}|^2 + |\dot{H}_{zp}|^2) dy dz |_{x=0} + \\
 &\quad + 2 \int_0^b \int_0^a |\dot{H}_{yp}|^2 dx dy |_{z=0} = 2 \int_0^l \int_0^a 4C_2^2 \sin^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) dx dz + \\
 &\quad + 2 \int_0^l \int_0^b \left\{ 4 \frac{p^2 \pi^2}{g_{0n}^2 l^2} C_2^2 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \sin^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \cos^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 4C_2^2 \cos^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \sin^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) \right\} dy dz + \\
 &\quad + 2 \int_0^b \int_0^a 4 \frac{p^2 \pi^2}{g_{0n}^2 l^2} C_2^2 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \sin^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) dx dy = \\
 &= 8C_2^2 \frac{al}{2} + 8C_2^2 \frac{p^2 \pi^2}{g_{0n}^2 l^2} \cdot \frac{bl}{4} + 8C_2^2 \frac{bl}{4} + 8C_2^2 \frac{p^2 \pi^2}{g_{0n}^2 l^2} \cdot \frac{ab}{2} = \\
 &= 4C_2^2 al + 2C_2^2 bl \left(\frac{p^2 \pi^2}{g_{0n}^2 l^2} + 1 \right) + 4C_2^2 ab \frac{p^2 \pi^2}{g_{0n}^2 l^2}. \quad (III.16)
 \end{aligned}$$

Подставляя выражения (III.15), (III.16) в формулу (III.2), найдем добротность прямоугольного объемного резонатора в случае волн типа H_{0np} :

$$Q_{H_{0np}} = \alpha_4 \frac{C_2^2 abl \left(\frac{p^2 \pi^2}{g_{0n}^2 l^2} + 1 \right)}{4C_2^2 al + 2C_2^2 bl \left(\frac{p^2 \pi^2}{g_{0n}^2 l^2} + 1 \right) + 4C_2^2 ab \frac{p^2 \pi^2}{g_{0n}^2 l^2}},$$

или в окончательном виде

$$Q_{H_{0np}} = \frac{\alpha_4}{2} \cdot \frac{abl\omega_p^2 \mu_a \varepsilon_a}{2alg_{0n}^2 + bl\omega_p^2 \mu_a \varepsilon_a + 2ab \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2}. \quad (III.17)$$

§ III.2. Определение добротностей прямоугольных объемных резонаторов в случае волн электрического типа

В случае волн электрического типа составляющие поля в объемном резонаторе определяются выражениями (21.18)—(21.20).

Введем выражение для добротности резонатора в случае волн типа E_{mnp} .

Найдем интеграл u_1 :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \int_0^l \int_0^b \int_0^a (|\dot{H}_{xp}|^2 + |\dot{H}_{yp}|^2) dx dy dz = \\
 &= \int_0^l \int_0^b \int_0^a \left\{ 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \sin^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \cos^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) + \right. \\
 &+ 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cos^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \sin^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \cos^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) \left. \right\} dx dy dz = \\
 &= 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{abl}{8} \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) = \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{2g_{mn}^2} C_1^2 abc. \quad (\text{III.18})
 \end{aligned}$$

Определим интеграл u_2 :

$$\begin{aligned}
 u_2 &= 2 \int_0^l \int_0^a |\dot{H}_{xp}|^2 dx dz |_{y=0} + 2 \int_0^l \int_0^b |\dot{H}_{yp}|^2 dy dz |_{x=0} + \\
 &+ 2 \int_0^b \int_0^a (|H_{xp}|^2 + |H_{yp}|^2) dx dy |_{z=0} = \\
 &= 2 \int_0^l \int_0^a 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \sin^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) dx dz + \\
 &+ 2 \int_0^l \int_0^b 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sin^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \cos^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) dy dz + \\
 &+ 2 \int_0^b \int_0^a \left\{ 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \sin^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) + \right. \\
 &+ 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cos^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \sin^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \left. \right\} dx dy = \\
 &= 8 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{al}{4} \cdot \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + 8 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{bl}{4} \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \\
 &+ 8 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{ab}{4} \left(\frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right) = \\
 &= 2 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \left(al \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + bl \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + ab g_{mn}^2 \right). \quad (\text{III.19})
 \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения u_1 и u_2 в формулу (III.2), определим добротность резонатора в случае волн типа E_{mnp} :

$$Q_{E_{mnp}} = \alpha_4 \frac{\frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 abl}{2 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \left(al \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + bl \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + ab g_{mn}^2 \right)},$$

$$Q_{E_{mnp}} = \frac{\alpha_4}{4} \cdot \frac{g_{mn}^2 abl}{al \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + bl \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + ab g_{mn}^2}. \quad (\text{III.20})$$

Найдем выражение для добротности резонатора в случае волн типа E_{mno} . При $p=0$ составляющие магнитного поля записываются в виде

$$\dot{H}_{xp} = -j2 \frac{\omega_p \varepsilon_a}{g_{mn}^2} C_1 \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right), \quad (\text{III.21})$$

$$\dot{H}_{yp} = j2 \frac{\omega_p \varepsilon_a}{g_{mn}^2} C_1 \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right). \quad (\text{III.22})$$

Определим интеграл u_1 :

$$u_1 = \int_0^l \int_0^b \int_0^a (|\dot{H}_{xp}|^2 + |\dot{H}_{yp}|^2) dx dy dz =$$

$$= \int_0^l \int_0^b \int_0^a \left\{ \frac{4\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \sin^2\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{4\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cos^2\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \right\} dx dy dz =$$

$$= \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 abl \left(\frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right) = \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^2} C_1^2 abl. \quad (\text{III.23})$$

Найдем интеграл u_2 :

$$u_2 = 2 \int_0^l \int_0^a |\dot{H}_{xp}|^2 dx dz |_{y=0} + 2 \int_0^l \int_0^b |\dot{H}_{yp}|^2 dy dz |_{x=0} +$$

$$+ 2 \int_0^b \int_0^a (|\dot{H}_{xp}|^2 + |\dot{H}_{yp}|^2) dx dy |_{z=0} =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^l \int_0^a 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \sin^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) dx dz + \\
&+ 2 \int_0^l \int_0^b 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sin^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) dy dz + \\
&+ 2 \int_0^b \int_0^a \left\{ 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \sin^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) + \right. \\
&+ \left. 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cos^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \sin^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \right\} dx dy = \\
&= 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} al + 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} bl + \\
&+ 2 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \left(\frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right) ab = 2 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \times \\
&\quad \times \left(2al \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + 2bl \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + g_{mn}^2 ab \right). \tag{III.24}
\end{aligned}$$

Подставим найденные значения u_1 и u_2 в формулу (III.2):

$$Q_{E_{mn0}} = \alpha_4 \frac{\frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^2} C_1^2 abl}{2 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \left(2al \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + 2bl \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + g_{mn}^2 ab \right)}.$$

Проводя необходимые сокращения, получаем следующее выражение для добротности объемного резонатора, работающего на волнах типа E_{mn0} :

$$Q_{E_{mn0}} = \frac{\alpha_4}{4} \cdot \frac{g_{mn}^2 abl}{al \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + bl \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{g_{mn}^2}{2} ab}. \tag{III.25}$$

§ III.3. Определение добротностей цилиндрических объемных резонаторов в случае волн магнитного типа

В случае волн магнитного типа составляющие магнитного поля в цилиндрическом объемном резонаторе определяются с помощью выражений (22.23) — (22.25).

Выведем выражение для добротности резонатора в случае волн типа H_{mnp} .

Найдем интеграл u_1 :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} (|\dot{H}_{r\varphi}|^2 + |\dot{H}_{\varphi p}|^2 + |\dot{H}_{z\varphi}|^2) r dr d\varphi dz = \\
 &= \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \left\{ 4 \frac{p^2 \pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{mn}^2} C_2^2 J_m'^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \cos^2(m\varphi) \cos^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) + \right. \\
 &\quad + 4 \frac{p^2 \pi^2 r_0^4}{l^2 r^2 \mu_{mn}^4} C_2^2 m^2 J_m^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \sin^2(m\varphi) \cos^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) + \\
 &\quad \left. + 4 C_2^2 J_m^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \cos^2(m\varphi) \sin^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \right\} r dr d\varphi dz = \\
 &= 4 C_2^2 \frac{l\pi}{2} \int_0^{r_0} \left\{ \frac{p^2 \pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{mn}^2} J_m'^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) + \frac{p^2 \pi^2 r_0^4}{l^2 r^2 \mu_{mn}^4} m^2 J_m^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) + J_m^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \right\} r dr.
 \end{aligned}$$

Осуществим замену переменных, положив $r = r_0 x$:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= 2 C_2^2 l \pi r_0^2 \int_0^1 \left\{ \frac{p^2 \pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{mn}^2} J_m'^2(\mu_{mn} x) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{p^2 \pi^2 r_0^4}{l^2 x^2 \mu_{mn}^4} m^2 J_m^2(\mu_{mn} x) + J_m^2(\mu_{mn} x) \right\} x dx = \\
 &= 2 C_2^2 l \pi r_0^2 \frac{p^2 \pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{mn}^2} \int_0^1 \left\{ \frac{m^2}{x^2 \mu_{mn}^2} J_m^2(\mu_{mn} x) + \right. \\
 &\quad \left. + J_m'^2(\mu_{mn} x) \right\} x dx + 2 C_2^2 l \pi r_0^2 \int_0^1 J_m^2(\mu_{mn} x) x dx. \quad (III.26)
 \end{aligned}$$

Первый из написанных интегралов аналогичен интегралу (II.29). Его решение дается выражением (II.42). Второй интеграл находят с помощью формулы (II.32). Следовательно,

$$\begin{aligned}
 u_1 &= 2 C_2^2 l \pi \frac{p^2 \pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{mn}^2} \cdot \frac{r_0^2}{2} \left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2} \right) J_m^2(\mu_{mn}) + \\
 &\quad + 2 C_2^2 l \pi r_0^2 \frac{1}{2} \left\{ J_m^2(\mu_{mn}) - J_{m-1}(\mu_{mn}) J_{m+1}(\mu_{mn}) \right\}.
 \end{aligned}$$

С учетом соотношений (II.50), (II.38) второе слагаемое видоизменяется, в результате чего выражение для u_1 приобретает вид

$$\begin{aligned}
 u_1 &= C_2^2 l \pi \frac{p^2 \pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{mn}^2} r_0^2 \left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2} \right) J_m^2(\mu_{mn}) + \\
 &\quad + C_2^2 l \pi r_0^2 \left\{ J_m^2(\mu_{mn}) - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2} J_m^2(\mu_{mn}) \right\},
 \end{aligned}$$

или иначе

$$u_1 = C_2^2 l \pi r_0^2 J_m^2(\mu_{mn}) \left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2}\right) \left(1 + \frac{p^2 \pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{mn}^2}\right). \quad (\text{III.27})$$

Далее определим интеграл u_2 :

$$\begin{aligned} u_2 &= \int_0^l \int_0^{2\pi} (|\dot{H}_{\varphi p}|^2 + |\dot{H}_{z p}|^2) r_0 d\varphi dz |_{r=r_0} + \\ &+ 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} (|\dot{H}_{r p}|^2 + |\dot{H}_{\varphi p}|^2) r d\varphi dr |_{z=0} = \\ &= \int_0^l \int_0^{2\pi} \left\{ 4 \frac{p^2 \pi^2 r_0^4}{l^2 r_0^2 \mu_{mn}^4} C_2^2 m^2 J_m^2(\mu_{mn}) \sin^2(m\varphi) \cos^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) + \right. \\ &+ 4 C_2^2 J_m^2(\mu_{mn}) \cos^2(m\varphi) \sin^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \left. \right\} r_0 d\varphi dz + \\ &+ 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \left\{ 4 \frac{p^2 \pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{mn}^2} C_2^2 J_m^2\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) \cos^2(m\varphi) + \right. \\ &+ 4 \frac{p^2 \pi^2 r_0^4}{l^2 r_0^2 \mu_{mn}^4} C_2^2 m^2 J_m^2\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) \sin^2(m\varphi) \left. \right\} r d\varphi dr = \\ &= 4 \frac{p^2 \pi^2 r_0^3}{l^2 \mu_{mn}^4} C_2^2 m^2 J_m^2(\mu_{mn}) \frac{\pi l}{2} + 4 C_2^2 J_m^2(\mu_{mn}) r_0 \frac{\pi l}{2} + \\ &+ 8\pi \frac{p^2 \pi^2 r_0^3}{l^2 \mu_{mn}^4} C_2^2 \int_0^{r_0} \left\{ \frac{r_0^2 m^2}{r^2 \mu_{mn}^2} J_m^2\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) + J_m^2\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) \right\} r dr. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных в соответствии с выражением (II.28) и осуществим некоторые преобразования:

$$\begin{aligned} u_2 &= 2C_2^2 r_0 \pi l J_m^2(\mu_{mn}) \left(1 + \frac{p^2 \pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{mn}^4} m^2\right) + \\ &+ 8\pi \frac{p^2 \pi^2 r_0^3}{l^2 \mu_{mn}^4} C_2^2 r_0^2 \int_0^1 \left\{ \frac{m^2}{x^2 \mu_{mn}^2} J_m^2(\mu_{mn} x) + J_m^2(\mu_{mn} x) \right\} x dx. \end{aligned}$$

Полученный интеграл аналогичен интегралу (II.29), решение которого соответствует формуле (II.42). В результате выражение для u_2 приобретает вид

$$\begin{aligned} u_2 &= 2C_2^2 r_0 \pi l J_m^2(\mu_{mn}) \left(1 + \frac{p^2 \pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{mn}^4} m^2\right) + \\ &+ 8\pi \frac{p^2 \pi^2 r_0^3}{l^2 \mu_{mn}^4} C_2^2 \frac{r_0^2}{2} \left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2}\right) J_m^2(\mu_{mn}), \end{aligned}$$

или иначе

$$u_2 = 2C_2^2 r_0 \pi J_m^2(\mu_{mn}) \left\{ l \left(1 + \frac{p^2 \pi^2 r_0^2 m^2}{l^2 \mu_{mn}^4} \right) + \right. \\ \left. + 2 \frac{p^2 \pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{mn}^2} r_0 \left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2} \right) \right\}. \quad (\text{III.28})$$

Подставляя значения интегралов (III.27), (III.28) в формулу (III.2), получаем

$$Q_{H_{mnp}} = \alpha_4 \frac{l r_0 \left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2} \right) \left(1 + \frac{p^2 \pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{mn}^2} \right)}{2 \left\{ l \left(1 + \frac{p^2 \pi^2 r_0^2 m^2}{l^2 \mu_{mn}^4} \right) + 2 \frac{p^2 \pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{mn}^2} r_0 \left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2} \right) \right\}}. \quad (\text{III.29})$$

Определим добротность цилиндрического объемного резонатора в случае волн типа H_{0np} . При $m=0$ составляющие магнитного поля в резонаторе могут быть представлены в виде

$$\dot{H}_{rp} = -2j \frac{p \pi r_0}{l \mu_{0n}} C_2^2 J_0' \left(\frac{\mu_{0n}}{r_0} r \right) \cos \left(\frac{p \pi}{l} z \right), \quad (\text{III.30})$$

$$\dot{H}_{zp} = -2j C_2^2 J_0 \left(\frac{\mu_{0n}}{r_0} r \right) \sin \left(\frac{p \pi}{l} z \right). \quad (\text{III.31})$$

Найдем интеграл u_1 :

$$u_1 = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} (|\dot{H}_{rp}|^2 + |\dot{H}_{zp}|^2) r dr d\varphi dz = \\ = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \left\{ 4 \frac{p^2 \pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{0n}^2} C_2^2 J_0'^2 \left(\frac{\mu_{0n}}{r_0} r \right) \cos^2 \left(\frac{p \pi}{l} z \right) + \right. \\ \left. + 4 C_2^2 J_0^2 \left(\frac{\mu_{0n}}{r_0} r \right) \sin^2 \left(\frac{p \pi}{l} z \right) \right\} r dr d\varphi dz.$$

Проводя интегрирование и осуществляя замену переменных в соответствии с формулой (II.28), получаем

$$u_1 = \pi l 4 C_2^2 r_0^2 \int_0^1 \left\{ \frac{p^2 \pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{0n}^2} J_0'^2(\mu_{0n} x) + J_0^2(\mu_{0n} x) \right\} x dx.$$

В соответствии с рекуррентным соотношением $J_0'^2(z) = J_1^2(z)$ выражение для u_1 можно несколько видоизменить:

$$u_1 = 4 \pi l C_2^2 r_0^2 \int_0^1 \left\{ \frac{p^2 \pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{0n}^2} J_1^2(\mu_{0n} x) + J_0^2(\mu_{0n} x) \right\} x dx.$$

Интеграл u_1 можно вычислить с помощью формулы (II.32):

$$u_1 = 4\pi l C_2^2 r_0^2 \left\{ \frac{p^2 \pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{0n}^2} \cdot \frac{1}{2} \{ J_1^2(\mu_{0n}) - J_0(\mu_{0n}) J_2(\mu_{0n}) \} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \{ J_0^2(\mu_{0n}) - J_{-1}(\mu_{0n}) J_1(\mu_{0n}) \} \right\}. \quad (\text{III.32})$$

Для функций Бесселя справедливо рекуррентное соотношение

$$z \frac{d}{dz} J_m(z) - m J_m(z) = -z J_{m+1}(z). \quad (\text{III.33})$$

При $m=0$ из него следует, что

$$J_0'(z) = -J_1(z), \\ J_0'(\mu_{0n}) = -J_1(\mu_{0n}) = 0. \quad (\text{III.34})$$

Далее воспользуемся соотношением

$$J_{m+2}(\mu_{mn}) J_m(\mu_{mn}) = \frac{2(m+1)}{\mu_{mn}} J_{m+1}(\mu_{mn}) J_m(\mu_{mn}) - J_m^2(\mu_{mn}), \quad (\text{II.35})$$

которое при $m=0$ записывается в виде

$$J_2(\mu_{0n}) J_0(\mu_{0n}) = \frac{2}{\mu_{0n}} J_1(\mu_{0n}) J_0(\mu_{0n}) - J_0^2(\mu_{0n}),$$

или в силу справедливости равенства (III.34)

$$J_2(\mu_{0n}) J_0(\mu_{0n}) = -J_0^2(\mu_{0n}). \quad (\text{III.35})$$

С учетом формул (III.34) и (III.35) в выражении (III.32), получаем

$$u_1 = 4\pi l C_2^2 r_0^2 \left\{ \frac{p^2 \pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{0n}^2} \cdot \frac{1}{2} J_0^2(\mu_{0n}) + \frac{1}{2} J_0^2(\mu_{0n}) \right\} = \\ = 2\pi l C_2^2 r_0^2 J_0^2(\mu_{0n}) \left(\frac{p^2 \pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{0n}^2} + 1 \right). \quad (\text{III.36})$$

Найдем интеграл u_2 :

$$u_2 = \int_0^l \int_0^{2\pi} |\dot{H}_{z\varphi}|^2 r_0 d\varphi dz |_{r=r_0} + 2 \int_0^{2\pi} \int_0^0 |\dot{H}_{z\varphi}|^2 r d\varphi dr |_{z=0} = \\ = \int_0^l \int_0^{2\pi} 4C_2^2 J_0^2(\mu_{0n}) \sin^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) r_0 d\varphi dz + \\ + 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} 4 \frac{p^2 \pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{0n}^2} C_2^2 J_0'^2\left(\frac{\mu_{0n}}{r_0} r\right) r d\varphi dr = \\ = 4\pi l C_2^2 J_0^2(\mu_{0n}) r_0 + 16\pi \frac{p^2 \pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{0n}^2} C_2^2 \int_0^{r_0} J_0'^2\left(\frac{\mu_{0n}}{r_0} r\right) r dr.$$

Осуществляя замену переменных и производной функций Бесселя, получаем

$$\begin{aligned}
 u_2 &= 4\pi l C_2^2 J_0^2(\mu_{0n}) r_0 + 16\pi \frac{\rho^2 \pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{0n}^2} C_2^2 r_0^2 \times \\
 &\quad \times \int_0^1 J_1^2(\mu_{0n} x) x dx = 4\pi l C_2^2 J_0^2(\mu_{0n}) r_0 + \\
 &+ 16\pi \frac{\rho^2 \pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{0n}^2} C_2^2 r_0^2 \frac{1}{2} \{J_1^2(\mu_{0n}) - J_0(\mu_{0n}) J_2(\mu_{0n})\} = \\
 &= 4\pi l C_2^2 J_0^2(\mu_{0n}) r_0 + 8\pi \frac{\rho^2 \pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{0n}^2} C_2^2 r_0^2 J_0^2(\mu_{0n}), \\
 u_2 &= 4\pi C_2^2 r_0 J_0^2(\mu_{0n}) \left(l + 2 \frac{\rho^2 \pi^2 r_0^3}{l^2 \mu_{0n}^2} \right). \quad (\text{III.37})
 \end{aligned}$$

Подставим значения интегралов (III.36) и (III.37) в формулу (III.2). Тогда

$$Q_{H_{onp}} = \frac{\alpha_4}{2} \cdot \frac{l r_0 \left(\frac{\rho^2 \pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{0n}^2} + 1 \right)}{l + 2 \frac{\rho^2 \pi^2 r_0^3}{l^2 \mu_{0n}^2}}. \quad (\text{III.38})$$

§ III.4. Определение добротностей цилиндрических объемных резонаторов в случае волн электрического типа

В случае волн электрического типа составляющие магнитного поля в цилиндрическом объемном резонаторе определяются с помощью выражений (22.12) — (22.14).

Выведем выражение для добротности резонатора в случае волн типа E_{mnp} .

Найдем интеграл

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} (|\dot{H}_{r\varphi}|^2 + |\dot{H}_{\varphi z}|^2) r dr d\varphi dz = \\
 &= \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \left\{ 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^4}{r^2 \eta_{mn}^4} C_1^2 m^2 J_m^2 \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r \right) \sin^2(m\varphi) \cos^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) + \right. \\
 &+ 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{mn}^2} C_1^2 J_m'^2 \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r \right) \cos^2(m\varphi) \cos^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) \left. \right\} r dr d\varphi dz = \\
 &= 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{mn}^2} C_1^2 \frac{\pi l}{2} r_0^2 \int_0^1 \left\{ \frac{m^2}{x^2 \eta_{mn}^2} J_m^2(\eta_{mn} x) + J_m'^2(\eta_{mn} x) \right\} x dx.
 \end{aligned}$$

Полученный интеграл аналогичен по математической форме интегралу (II.58). Решение этого интеграла дается формулой (II.62),

с учетом которой можно написать

$$u_1 = 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{mn}^2} C_1^2 \frac{\pi l}{2} \cdot \frac{r_0^2}{2} J_m'^2(\eta_{mn}) = \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^4}{\eta_{mn}^2} C_1^2 \pi l J_m'^2(\eta_{mn}). \quad (\text{III.39})$$

Определим интеграл u_2 :

$$\begin{aligned} u_2 &= \int_0^l \int_0^{2\pi} |\dot{H}_{\text{ФП}}|^2 r_0 d\varphi dz \Big|_{r=r_0} + 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} (|\dot{H}_{\text{ГР}}|^2 + |\dot{H}_{\text{ФП}}|^2) r dr d\varphi dz \Big|_{z=0} = \\ &= \int_0^l \int_0^{2\pi} 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{mn}^2} C_1^2 J_m'^2(\eta_{mn}) \cos^2(m\varphi) \cos^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) r_0 d\varphi dz + \\ &\quad + 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \left\{ 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^4}{r^2 \eta_{mn}^4} C_1^2 m^2 J_m^2\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r\right) \sin^2(m\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a r_0^2}{\eta_{mn}^2} C_1^2 J_m'^2\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r\right) \cos^2(m\varphi) \right\} r dr d\varphi = \\ &= 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{mn}^2} C_1^2 J_m'^2(\eta_{mn}) \frac{l\pi}{2} r_0 + 8 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{mn}^2} C_1^2 \pi r_0^2 \int_0^1 \left\{ \frac{m^2}{x^2 \eta_{mn}^2} J_m^2(\eta_{mn} x) + \right. \\ &\quad \left. + J_m'^2(\eta_{mn} x) \right\} x dx = 2 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{mn}^2} C_1^2 J_m'^2(\eta_{mn}) l\pi r_0 + 8 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{mn}^2} C_1^2 \pi \frac{r_0^2}{2} J_m'^2(\eta_{mn}), \end{aligned}$$

или окончательно

$$u_2 = 2 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^3}{\eta_{mn}^2} C_1^2 \pi J_m'^2(\eta_{mn}) (l + 2r_0). \quad (\text{III.40})$$

После подстановки выражений (III.39), (III.40) в формулу (III.2) получается соотношение

$$Q_{\text{Э}_{mn\text{Р}}} = \frac{\alpha_4}{2} \cdot \frac{r_0 l}{l + 2r_0}. \quad (\text{III.41})$$

Найдем добротность резонаторов в случае волн типа $\text{E}_{on\text{Р}}$. При $m=0$ существует только одна составляющая магнитного поля в резонаторе:

$$\dot{H}_{\text{ФП}} = -2j \frac{\omega_p \varepsilon_a r_0}{\eta_{0n}} C_1 J_0' \left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r \right) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right). \quad (\text{III.42})$$

Определим интеграл u_1 :

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} |\dot{H}_{\text{ФП}}|^2 r dr d\varphi dz = \\ &= \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2 \left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r \right) \cos^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) r dr d\varphi dz = \\ &= 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 \pi l r_0^2 \int_0^1 J_0'^2(\eta_{0n} x) x dx. \end{aligned}$$

Этот интеграл аналогичен по форме интегралу (II.72), решение которого дается формулой (II.73). В результате использования указанной формулы получаем

$$u_1 = 2 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^4}{\eta_{0z}^2} C_1^2 \pi l J_0'^2(\eta_{0n}). \quad (\text{III.43})$$

Найдем интеграл u_2 :

$$\begin{aligned} u_2 &= \int_0^l \int_0^{2\pi} |\dot{H}_{\Phi p}|^2 r_0 d\varphi dz \Big|_{r=r_0} + 2 \int_0^l \int_0^{2\pi} |\dot{H}_{\Phi p}|^2 r d\varphi dr \Big|_{z=0} = \\ &= \int_0^l \int_0^{2\pi} 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0z}^2} C_1^2 J_0'^2(\eta_{0n}) \cos^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) r_0 d\varphi dz + \\ &\quad + 2 \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0z}^2} C_1^2 J_0'^2\left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r\right) r d\varphi dr = \\ &= 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0z}^2} C_1^2 J_0'^2(\eta_{0n}) \pi l r_0 + 8 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0z}^2} C_1^2 2\pi r_0^2 \int_0^1 J_0'^2(\eta_{0n} x) x dx = \\ &= 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^3}{\eta_{0z}^2} C_1^2 J_0'^2(\eta_{0n}) \pi l + 16 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0z}^2} C_1^2 \pi \frac{r_0^2}{2} J_0'^2(\eta_{0n}), \end{aligned}$$

или окончательно

$$u_2 = 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^3}{\eta_{0z}^2} C_1^2 \pi J_0'^2(\eta_{0n}) (l + 2r_0). \quad (\text{III.44})$$

Подставляя выражения (III.43), (III.44) в формулу (III.2), получаем соотношение для добротности в случае волн типа E_{onp} :

$$Q_{E_{onp}} = \frac{\alpha_4}{2} \cdot \frac{r_0 l}{l + 2r_0}. \quad (\text{III.45})$$

Определим добротность цилиндрических объемных резонаторов в случае волн типа E_{on0} . При этом существует только одна составляющая магнитного поля в резонаторе:

$$\dot{H}_{\Phi p} = -2j \frac{\omega_p \varepsilon_a r_0}{\eta_{0z}} C_1 J_0'\left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r\right). \quad (\text{III.46})$$

Найдем интеграл u_1 :

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0z}^2} C_1^2 J_0'^2\left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r\right) r dr d\varphi dz = \\ &= 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0z}^2} C_1^2 2\pi l r_0^2 \int_0^1 J_0'^2(\eta_{0n} x) x dx = 8 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0z}^2} C_1^2 \pi l \frac{r_0^2}{2} J_0'^2(\eta_{0n}), \end{aligned}$$

или окончательно

$$u_1 = 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^4}{\eta_{0n}^2} C_1^2 \pi l J_0'^2(\eta_{0n}). \quad (\text{III.47})$$

Вычислим интеграл u_2 :

$$\begin{aligned} u_2 &= \int_0^l \int_0^{2\pi} 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2(\eta_{0n}) r_0 d\varphi dz |_{r=r_0} + \\ &+ 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2\left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r\right) r d\varphi dr = \\ &= 4 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^3}{\eta_{0n}^2} C_1^2 2\pi l J_0'^2(\eta_{0n}) + \\ &+ 16 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^3}{\eta_{0n}^2} C_1^2 \pi r_0^2 \int_0^1 J_0'^2(\eta_{0n} x) x dx = \\ &= 8 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^3}{\eta_{0n}^2} C_1^2 \pi l J_0'^2(\eta_{0n}) + \\ &+ 16 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^3}{\eta_{0n}^2} C_1^2 \pi \frac{r_0^2}{2} J_0'^2(\eta_{0n}), \end{aligned}$$

или окончательно

$$u_2 = 8 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^3}{\eta_{0n}^2} C_1^2 \pi J_0'^2(\eta_{0n}) (l + r_0). \quad (\text{III.48})$$

Подставим выражения (III.47), (III.48) в формулу (III.2):

$$Q_{E_{0n0}} = \frac{\alpha_4}{2} \cdot \frac{r_0 l}{l + r_0}. \quad (\text{III.49})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА АМПЛИТУДНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ВОЛНОВОДАХ И ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРАХ

§ IV.1. Пример расчета амплитудного коэффициента волны типа H_{10} в прямоугольном волноводе

Допустим, что возбуждение волновода осуществляется сторонним электрическим током, плотность которого равна \mathbf{j}_{e2} . Требуется найти амплитудный коэффициент A_1 электромагнитного поля в волноводе.

Основным для расчета является соотношение (32.21)

$$\dot{A}_1 = \frac{\int_{V_1} \mathbf{j}_{\text{в2}} \dot{\mathbf{E}}_1 dV}{\int_{S_B} \{[\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_{-1}] - [\dot{\mathbf{E}}_{-1} \dot{\mathbf{H}}_1]\} \mathbf{1}_z dS}.$$

В этом выражении $\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_1$ представляет собой электромагнитное поле, распространяющееся в сторону положительных значений оси z волновода, в то время как поле $\dot{\mathbf{E}}_{-1}, \dot{\mathbf{H}}_{-1}$ распространяется в обратном направлении. Составляющие поля волны типа H_{10} можно определить из общих выражений (13.52) — (13.57).

При использовании выражений для составляющих поля в формуле (32.21) следует помнить, что амплитудный коэффициент C_2 должен быть равен единице. В соответствии со сказанным можно написать следующие выражения для составляющих поля волны типа H_{10} :

$$\dot{H}_x = j \frac{h}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-jhz}, \quad (\text{IV.1})$$

$$\dot{H}_z = \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-jhz}, \quad (\text{IV.2})$$

$$\dot{\mathbf{E}} = -j \frac{\omega \mu_a}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-jhz}. \quad (\text{IV.3})$$

Под интегралом, стоящим в знаменателе выражения (32.21), векторные произведения умножают скалярно на $\mathbf{1}_z$. Скалярное произведение будет отлично от нуля, если в векторных произведениях участвуют составляющие поля \dot{H}_x и \dot{E}_y . В силу этого следует записать

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_1 = \mathbf{E}_y &= -\mathbf{1}_y j \frac{\omega \mu_a}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-jhz}, \\ \dot{\mathbf{H}}_1 = \dot{H}_x &= \mathbf{1}_x j \frac{h}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-jhz}, \\ \dot{\mathbf{E}}_{-1} &= -\mathbf{1}_y j \frac{\omega \mu_a}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{jhz}, \\ \dot{\mathbf{H}}_{-1} &= -\mathbf{1}_x j \frac{h}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{jhz}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.4})$$

При записи поля $\dot{\mathbf{E}}_{-1}, \dot{\mathbf{H}}_{-1}$ был изменен знак у продольного волнового числа в волноводе h , как у волны, распространяющейся в сторону отрицательных значений оси z .

Интеграл в знаменателе выражения (32.21) записывают в виде

$$\begin{aligned} & \int_{S_B} \{[\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_{-1}] - [\dot{\mathbf{E}}_{-1} \dot{\mathbf{H}}_1]\} \mathbf{1}_z dS = \\ & = \int_0^b \int_0^a 2 \frac{\omega \mu_a h}{g_{10}^4} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) dx dy = \frac{\omega \mu_a h}{g_{10}^4} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 ab. \end{aligned} \quad (\text{IV.5})$$

Для вычисления интеграла в числителе выражения (32.21) следует задаться распределением плотности тока $\mathbf{J}_{\text{э}2}$. Допустим, что возбуждение волновода осуществляется коротким штырем длиной l , помещенным в середине широкой части волновода, в сечении $x = a/2$, $z = 0$ (рис. IV.1).

Далее предположим, что плотность тока $\mathbf{J}_{\text{э}2}$ неизменна вдоль длины штыря. При этих условиях интеграл в числителе выражения (32.21) можно записать таким образом:

$$\int_{V_1} \mathbf{J}_{\text{э}2} \dot{\mathbf{E}}_1 dV = \int_0^l \int_{S_1} \mathbf{J}_{\text{э}2} \dot{\mathbf{E}}_1 dS dl,$$

где S_1 — площадь поперечного сечения штыря, или с учетом постоянства плотности тока

$$\begin{aligned} \int_{V_1} \mathbf{J}_{\text{э}2} \dot{\mathbf{E}}_1 dV &= \int_0^l i_{\text{э}2} \dot{\mathbf{E}}_1 |_{x=a/2} dy = \\ &= -I_{\text{э}2} \int_0^l j \frac{\omega \mu_a}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} dy = -I_{\text{э}2} j \frac{\omega \mu_a}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} l. \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

Подставляя выражения (IV.5), (IV.6) в формулу (32.21), получаем соотношение для амплитудного коэффициента поля в прямоугольном волноводе:

$$\dot{A}_1 = \frac{-i_{\text{э}2} j \frac{\omega \mu_a}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} l}{\frac{\omega \mu_a h}{g_{10}^4} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 ab},$$

или

$$\dot{A}_1 = -j \frac{i_{\text{э}2} l g_{10}^2}{\pi b h}. \quad (\text{IV.7})$$

§ IV.2. Пример расчета амплитудного коэффициента волны типа H_{101} в прямоугольном объемном резонаторе

При расчете в качестве основного используют выражение (33.44):

$$\dot{A}_{qrp} = - \frac{Q \int_{V_1} \mathbf{J}_a \dot{\mathbf{E}}_q^* dV}{\omega_p \epsilon_a \int_{V_1} |\dot{\mathbf{E}}_q|^2 dV},$$

которое дает значение амплитудного коэффициента поля при резонансе.

С помощью формул (21.29) — (21.34) выведем выражение для напряженности электрического поля в резонаторе в случае волны

типа H_{101} :

$$\dot{E}_{yp} = -\frac{\omega_p \mu_a}{g_{10}^2} C_2 \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{l} z\right). \quad (\text{IV.8})$$

Допустим, что возбуждение резонатора осуществляется коротким штырем длиной l , плотность тока \mathbf{j}_a в котором неизменна вдоль длины штыря. Штырь расположен в сечении $x=a/2$, $z=l/2$.

Рассчитаем интеграл в числителе выражения (33.44), положив $C_2=1$:

$$\int_{V_1} \mathbf{j}_a \dot{E}_q^* dV = - \int_0^l \int_{S_1} \mathbf{j}_a \frac{\omega_p \mu_a}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} dS dl = -j_a \frac{\omega_p \mu_a}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} l. \quad (\text{IV.9})$$

Найдем интеграл в знаменателе выражения (33.44):

$$\begin{aligned} \int_{V_1} |\dot{E}_q|^2 dV &= \int_0^l \int_0^b \int_0^a \frac{\omega_p^2 \mu_a^2}{g_{10}^4} \cdot \frac{\pi^2}{a^2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) \times \\ &\times \sin^2\left(\frac{\pi}{l} z\right) dx dy dz = \frac{\omega_p^2 \mu_a^2}{g_{10}^4} \cdot \frac{\pi^2}{a^2} \cdot \frac{abl}{4}. \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

Подставим выражения (IV.9), (IV.10) в формулу (33.44):

$$\dot{A}_{grp} = \frac{Q j_a \frac{\omega_p \mu_a}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} l}{\omega_p \varepsilon_a \frac{\omega_p^2 \mu_a^2}{g_{10}^4} \cdot \frac{\pi^2}{a^2} \cdot \frac{abl}{4}},$$

или окончательно

$$\dot{A}_{grp} = \frac{Q j_a}{\frac{\omega_p^2 \mu_a \varepsilon_a}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} \cdot \frac{ab}{4}}. \quad (\text{IV.11})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ V

КОНКРЕТНЫЕ ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИНЦИПА ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОДОБИЯ

Пример 1. Рассмотрим простой случай, когда электродинамическая задача моделируется в отсутствие сторонних электрического и магнитного токов. Допустим, что при моделировании желательнее получить значения электрического и магнитного полей, совпадающие с натурной задачей. Далее предположим, что электрическая и магнитная проводимости сред в натурной и модельной задачах равны нулю, а диэлектрическая и магнитная проницаемости натурной задачи—соответственно диэлектрической и магнитной проницаемостям модельной задачи. При этих условиях в соответствии

с равенствами (36.1) должны соблюдаться следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \beta_1' = \beta_1'', \quad \beta_2' = \beta_2'', \quad \beta_3' = \beta_3'' = \beta_4' = \beta_4'' = \beta_5' = \beta_5'' = \beta_7' = \beta_7'' = 0, \\ \beta_6' = \beta_6'', \quad \beta_8' = \beta_8'', \quad a_6' = a_6'', \quad a_8' = a_8''. \end{aligned} \quad (V.1)$$

На основании выражений (36.6) будут справедливы равенства

$$C_1' = C_1'' = C_2' = C_2'' = C_4' = C_4'' = C_5' = C_5'' = 0. \quad (V.2)$$

Тогда условия подобия (36.10) запишутся в форме

$$C_3' = C_3'', \quad C_6' = C_6'', \quad (V.3)$$

или иначе

$$\frac{\beta_6' \beta_2' \beta_9' a_6'}{\beta_{10}' \beta_1'} = \frac{\beta_6'' \beta_2'' \beta_9'' a_6''}{\beta_{10}'' \beta_1''}, \quad \frac{\beta_8' \beta_1' \beta_9' a_8'}{\beta_{10}' \beta_2'} = \frac{\beta_8'' \beta_1'' \beta_9'' a_8''}{\beta_{10}'' \beta_2''}. \quad (V.4)$$

С учетом равенств (V.1) эти выражения можно записать в упрощенном виде:

$$\beta_9' / \beta_{10}' = \beta_9'' / \beta_{10}'', \quad \beta_9' / \beta_{10}' = \beta_9'' / \beta_{10}''. \quad (V.5)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае два условия подобия (V.4) сводятся к одному. Коэффициенты β_9' и β_9'' согласно выражениям (36.1) определяют линейные размеры натурной и модельной задач, коэффициенты β_{10}' и β_{10}'' — масштабы времени. Если этим коэффициентам приписать значения периодов колебаний T' и T'' в натурной и модельной задачах, то условия подобия следует записать таким образом:

$$\beta_9' / T' = \beta_9'' / T'',$$

или

$$T'' / T' = \beta_9'' / \beta_9'. \quad (V.6)$$

Так как $T' = 1/f'$, $T'' = 1/f''$, где f' , f'' — частоты колебаний в натурной и модельной задачах, то условия подобия (V.6) можно представить в форме

$$f' / f'' = \beta_9'' / \beta_9'. \quad (V.7)$$

Следовательно, если частота f'' в модельной задаче в n раз выше частоты f' в натурной задаче, то линейные размеры электродинамической системы в модельной задаче, определяемые коэффициентом β_9'' , должны быть в n раз меньше соответствующих линейных размеров в натурной задаче.

Пример 2. Рассмотрим более сложный случай, когда среда в натурной задаче обладает электрической проводимостью. Все остальные условия аналогичны условиям, данным в примере 1.

При определении условий подобия исходными являются равенства

$$\begin{aligned} \beta_1' = \beta_1'', \quad \beta_2' = \beta_2'', \quad \beta_3' = \beta_3'' = \beta_4' = \beta_4'' = \beta_7' = \beta_7'' = 0, \quad \beta_8' = \beta_8'', \\ a_5' = a_5'', \quad a_6' = a_6'', \quad \beta_8' = \beta_8'', \quad a_8' = a_8''. \end{aligned} \quad (V.8)$$

При этом

$$C_1' = C_1'' = C_4' = C_4'' = C_5' = C_5'' = 0 \quad (V.9)$$

и условия подобия записываются в виде

$$C'_2 = C''_2, C'_3 = C''_3, C'_6 = C''_6, \quad (V.10)$$

или иначе

$$\begin{aligned} \frac{\beta'_5 \beta'_2 \beta'_9 a'_5}{\beta'_1} &= \frac{\beta''_5 \beta''_2 \beta''_9 a''_5}{\beta''_1}, \\ \frac{\beta'_6 \beta'_2 \beta'_9 a'_6}{\beta'_{10} \beta'_1} &= \frac{\beta''_6 \beta''_2 \beta''_9 a''_6}{\beta''_{10} \beta''_1}, \\ \frac{\beta'_8 \beta'_1 \beta'_0 a'_8}{\beta'_{10} \beta'_2} &= \frac{\beta''_8 \beta''_1 \beta''_0 a''_8}{\beta''_{10} \beta''_2}. \end{aligned} \quad (V.11)$$

Используя соотношения (V.8), можно записать эти условия в виде

$$\beta'_5 \beta'_9 = \beta''_5 \beta''_9, \beta'_9 / \beta'_{10} = \beta''_9 / \beta''_{10}, \beta'_9 / \beta'_0 = \beta''_9 / \beta''_0. \quad (V.12)$$

Таким образом, в данном случае к прежним условиям (V.5) добавились новые условия, определяемые первым равенством (V.12). Если, как и раньше, приписать коэффициентам β'_{10} значение периода колебаний, то к прежним условиям подобия добавляются новые условия:

$$\beta'_5 / \beta''_5 = \beta''_9 / \beta'_9 = \beta''_{10} / \beta'_{10},$$

которые можно записать в виде

$$\beta'_5 / \beta''_5 = T'' / T' = f' / f''. \quad (V.13)$$

Тогда полными условиями электродинамического подобия будут

$$\beta'_5 / \beta''_5 = f'' / f', \beta'_9 / \beta''_9 = f' / f''. \quad (V.14)$$

В случае проводящей среды в модельной задаче должны быть изменены не только линейные размеры электродинамической системы, но и проводимость модельной среды. Аналогично можно рассмотреть условия подобия и в более сложных задачах.

ПРИЛОЖЕНИЕ VI

РАСЧЕТ СОПРОТИВЛЕНИЙ ИЗЛУЧЕНИЯ ВОЗБУЖДАЮЩИХ УСТРОЙСТВ В ВОЛНОВОДАХ. РАСЧЕТ ВХОДНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

§ VI.1. Расчет сопротивлений излучения возбуждающих устройств в волноводах

В § 32.4 была описана методика определения амплитудных коэффициентов поля, возбужденного в волноводах заданной системой сторонних токов. Были получены выражения (32.19), (32.21), позволяющие определить амплитудные коэффициенты волн заданного типа, распространяющихся в сторону отрицательных и положительных значений оси z . Найдем усредненное за период колебаний зна-

чение мощности электромагнитного поля $P_{\text{ср}}$, проходящей через поперечное сечение волновода S_B :

$$P_{\text{ср}} = \int_{S_B} \dot{\mathbf{H}}_d dS: \quad (\text{VI.1})$$

Используя выражение (4.29) для $\dot{\mathbf{H}}_d$, получаем

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \int_{S_B} \text{Re} [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}^*] dS.$$

Волна распространяется от возбуждающего устройства в сторону положительных и отрицательных значений оси z . Следовательно, полная мощность излучения $P_{\text{из}}$, созданная возбуждающим устройством, равна удвоенному значению $P_{\text{ср}}$:

$$P_{\text{из}} = \int_{S_B} \text{Re} [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}^*] dS. \quad (\text{VI.2})$$

Эта мощность может быть определена путем подстановки в выражение для составляющих поля амплитудных коэффициентов, определяемых формулами (32.19), (32.21). Эта же мощность может быть выражена через сопротивление излучения возбуждающего устройства $R_{\text{из}}$ и ток \dot{I}_a , протекающий в возбуждающем устройстве (штыре или петле):

$$|P_{\text{из}}| = \frac{|\dot{I}_a|^2 R_{\text{из}}}{2}. \quad (\text{VI.3})$$

Приравнивая выражения (VI.2) и (VI.3), определяем $R_{\text{из}}$:

$$R_{\text{из}} = \left| \frac{2 \int_{S_B} \text{Re} [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}^*] dS}{\dot{I}_a^2} \right|. \quad (\text{VI.4})$$

Покажем применение полученной формулы на примере возбуждения волны типа H_{10} в прямоугольном волноводе коротким штырем длиной l , помещенным в сечении $z = 0$; $x = a/2$:

$$\begin{aligned} P_{\text{из}} &= \int_{S_B} \text{Re} [\dot{\mathbf{E}}_y \dot{\mathbf{H}}_x^*] \mathbf{1}_z dS = \\ &= \int_0^b \int_0^a \text{Re} [\mathbf{1}_y E_y \mathbf{1}_x \dot{H}_x^*] \mathbf{1}_z dx dy = - \int_0^b \int_0^a \text{Re} (\dot{E}_y \dot{H}_x^*) dx dy. \end{aligned}$$

Используя выражения (13.83) — (13.88) для составляющих поля волны типа H_{10} , можно написать

$$\dot{E}_y = -j \frac{\omega \mu_a}{g_{10}^2} C_2 \frac{\pi}{a} \sin \left(\frac{\pi}{a} x \right) e^{-jhz}, \quad (\text{VI.5})$$

$$\dot{H}_x^* = -j \frac{h}{g_{10}^2} C_2 \frac{\pi}{a} \sin \left(\frac{\pi}{a} x \right) e^{+jhz}. \quad (\text{VI.6})$$

Амплитудный коэффициент C_2 был найден в § IV.1. Он был обозначен A_1 :

$$C_2 = A_1 \quad (\text{VI.7})$$

и определен формулой (IV.7).

Подставим выражение для амплитудного коэффициента в формулы (VI.5), (VI.6):

$$\begin{aligned} \dot{E}_y &= -\frac{\omega \mu_a}{abh} \dot{I}_a l \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-jhz}, \\ \dot{H}_x^* &= -\frac{\dot{I}_a^* l}{ab} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{jhz}, \\ |P_{\text{вз}}| &= \frac{\omega \mu_a |\dot{I}_a|^2 l^2}{a^2 b^2 h} \int_0^b \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) dx dy = \frac{\omega \mu_a |\dot{I}_a|^2 l^2}{2abh}. \end{aligned} \quad (\text{VI.8})$$

Используя формулу (VI.3), получаем выражение для $R_{\text{вз}}$:

$$R_{\text{вз}} = \frac{\omega \mu_a l^2}{abh}. \quad (\text{VI.9})$$

§ VI.2. Расчет входных сопротивлений объемных резонаторов

Допустим, что в качестве возбуждающего устройства используется короткий штырь длиной l . В § 33.3 была дана методика определения амплитудных коэффициентов волн различных типов. Следовательно, известно поле \mathbf{E} как на резонансной частоте, так и на частотах, отличных от резонансной. Пренебрегая активным сопротивлением, можно определить разность потенциалов \dot{U} на входе возбуждающего устройства с помощью соотношения

$$\dot{U} = \int_0^l \dot{E} dl. \quad (\text{VI.10})$$

В коротком штыре протекает ток \dot{I}_a . Входное сопротивление возбуждающего устройства

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}_a} = \frac{\int_0^l \dot{E} dl}{\dot{I}_a}. \quad (\text{VI.11})$$

Поясним изложенное на примере расчета входного сопротивления прямоугольного объемного резонатора, в котором возбуждена волна типа H_{101} . Допустим, что возбуждение резонатора осуществляется коротким штырем длиной l , плотность тока в котором неизменна вдоль длины штыря. Штырь расположен в сечении $x = a/2$; $z = l/2$ и ориентирован вдоль оси y . В случае волны типа H_{101} в резонаторе существует только одна составляющая электрического поля, определяемая формулой (21.33):

$$\dot{E}_{yp} = -2 \frac{\omega_p \mu_a}{g_{10}^2} C_2 \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{l} z\right). \quad (\text{VI.12})$$

В сечении $x = a/2$; $z = l/2$ эта формула может быть представлена следующим образом:

$$\dot{E}_{yp} = -2 \frac{\omega_p \mu_a}{g_{10}^2} C_2 \frac{\pi}{a}. \quad (\text{VI.13})$$

Разность потенциалов

$$\dot{U} = - \int_0^l \dot{E}_{yp} dy = 2 \frac{\omega_p \mu_a}{g_{10}^2} C_2 \frac{\pi}{a} l. \quad (\text{VI.14})$$

В § IV.2 был дан расчет амплитудного коэффициента волны типа H_{101} в прямоугольном объемном резонаторе, который был обозначен \dot{A}_{grp} :

$$\dot{A}_{grp} = C_2.$$

Подставив выражение для \dot{A}_{grp} из формулы (IV.11) в выражение (VI.14), получим.

$$\begin{aligned} \dot{U} &= 2 \frac{\omega_p \mu_a}{g_{10}^2} \frac{\pi}{a} l \frac{Q \dot{I}_3 g_{10}^2 4a}{\omega_p \mu_a \varepsilon_a \pi a b}, \\ \dot{U} &= 8 \frac{Q \dot{I}_3}{\omega_p \varepsilon_a a b}. \end{aligned} \quad (\text{VI.15})$$

Входное сопротивление

$$Z_{вх} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}_3} = 8 \frac{Q l}{\omega_p \varepsilon_a a b}. \quad (\text{VI.16})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ VII

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОБРОТНОСТИ НАГРУЖЕННЫХ РЕЗОНАТОРОВ

В § 25.2 формула (25.3) определяет общее выражение для добротности Q ненагруженного резонатора:

$$Q = 2\pi f_p \frac{W}{P_{п\Sigma}}.$$

Если резонатор нагружен, то к средней мощности потерь в резонаторе $P_{п\Sigma}$ следует прибавить среднюю мощность, отдаваемую резонатором в нагрузку P_n . При этом выражение для добротности нагруженного резонатора запишется в виде

$$Q_n = \omega_p \frac{W}{P_{п\Sigma} + P_n} = \omega_p \frac{W}{P_{п\Sigma}} \frac{1}{1 + P_n/P_{п\Sigma}} = Q \frac{1}{1 + P_n/P_{п\Sigma}}. \quad (\text{VII.1})$$

Положим, что объемный резонатор соединен с источником высокочастотных колебаний, обладающих внутренним сопротивлением R_n . Далее допустим, что разность потенциалов на входе нагруженного резонатора равна \dot{U} .

При частоте колебаний источника, равной резонансной частоте объемного резонатора, его входное сопротивление активно и в част-

ном случае прямоугольного резонатора с волной типа H_{101} определяется формулой (VI.16). При этом мощность потерь в резонаторе

$$P_{\text{п}\Sigma} = \frac{|\dot{U}|^2}{2R_{\text{вх}}}. \quad (\text{VII.2})$$

Мощность, теряемая на внутреннем сопротивлении источника,

$$P_{\text{н}} = \frac{|\dot{U}|^2}{2R_{\text{н}}}. \quad (\text{VII.3})$$

Отношение этих мощностей

$$P_{\text{н}}/P_{\text{п}\Sigma} = R_{\text{вх}}/R_{\text{н}}. \quad (\text{VII.4})$$

Добротность нагруженного резонатора в соответствии с формулой (VII.1) определяется выражением

$$Q_{\text{н}} = Q \frac{1}{1 + R_{\text{вх}}/R_{\text{н}}}. \quad (\text{VII.5})$$

При бесконечно большом сопротивлении нагрузки $Q_{\text{н}} = Q$, где Q — добротность ненагруженного резонатора. При сопротивлении нагрузки, равном нулю, $Q_{\text{н}} = 0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ VIII

РАСЧЕТ ДИФРАКЦИОННОГО ПОЛЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ПРЯМОУГОЛЬНОМ ОТВЕРСТИИ В ИДЕАЛЬНОМ МЕТАЛЛИЧЕСКОМ ЭКРАНЕ

Допустим, что рассматривается случай нормального падения плоской волны на бесконечный идеально проводящий плоский экран, в котором имеется прямоугольное отверстие со сторонами a (вдоль оси x) и b (вдоль оси y). Пусть площадь отверстия $ab = S_0$. Постановка подобной задачи рассматривалась § 35.5, где были найдены формулы, определяющие дифракционные поля $\dot{\mathbf{H}}_{\Sigma}$ и $\dot{\mathbf{E}}_{\Sigma}$:

$$\dot{\mathbf{H}}_{\Sigma} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \langle \text{rot} \left\{ [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{H}}_y] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right\} + \frac{1}{j\omega \tilde{\mu}_a} \text{grad div} \left\{ [\dot{\mathbf{E}}_x \mathbf{1}_z] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right\} - j\omega \tilde{\epsilon}_a [\dot{\mathbf{E}}_x \mathbf{1}_z] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \rangle dS,$$

$$\dot{\mathbf{E}}_{\Sigma} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \langle \text{rot} \left\{ [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{E}}_x] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right\} - \frac{1}{i\omega \tilde{\epsilon}_a} \text{grad div} \left\{ [\dot{\mathbf{H}}_y \mathbf{S}_z] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right\} + j\omega \tilde{\mu}_a [\dot{\mathbf{H}}_y \mathbf{1}_z] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \rangle dS.$$

Введем сферическую систему координат, начало координат которой совместим с началом декартовых координат на рис. 35.3. Обозначим буквой R радиус-вектор точки наблюдения, в которой определяются поля $\dot{\mathbf{H}}_{\Sigma}$ и $\dot{\mathbf{E}}_{\Sigma}$. Обозначим буквой ρ радиус-вектор точки интегрирования, под которым будем понимать расстояние от начала координат до текущей точки интегрирования, находящейся на плоскости x, y в пределах отверстия в экране. Радиус-вектор r , входящий в формулы для $\dot{\mathbf{H}}_{\Sigma}$ и $\dot{\mathbf{E}}_{\Sigma}$, представляет собой расстояние между текущей точкой интегрирования на плоскости x, y и точкой

наблюдения. В соответствии с известными тригонометрическими формулами

$$r = \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \chi}, \quad (\text{VIII.1})$$

где χ — угол между радиусами-векторами R и ρ .

Разложим выражение (VIII.1) по степеням ρ/R — малой дроби при больших значениях R :

$$r = R \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{R^2} - 2 \frac{\rho}{R} \cos \chi} = R \left(1 - \frac{\rho}{R} \cos \chi + \frac{\rho^2}{2R^2} - \frac{\rho^2}{2R^2} \cos^2 \chi + \frac{\rho^3}{2R^3} \cos \chi - \frac{\rho^4}{8R^4} + \dots \right). \quad (\text{VIII.2})$$

Назовем дальней зоной область таких расстояний R , при которых становится справедливым неравенство

$$\frac{\rho^2}{2R^2} \ll \frac{\rho}{R}. \quad (\text{VIII.3})$$

Тогда в дальней зоне формула (VIII.2) может быть представлена в виде

$$r \approx R \left(1 - \frac{\rho}{R} \cos \chi \right) = R - \rho \cos \chi. \quad (\text{VIII.4})$$

Соответственно в дальней зоне функция $\frac{e^{-i\gamma r}}{r}$ может быть записана в виде

$$\frac{e^{-i\gamma r}}{r} \approx \frac{e^{-i\gamma R}}{R} e^{i\gamma \rho \cos \chi}. \quad (\text{VIII.5})$$

Запишем формулы (35.38), (35.39) с учетом выражения (VIII.5), помня, что интегрирование по поверхности S_0 осуществляется в координатах источника поля, а дифференцирование — в координатах точки наблюдения:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_{\Sigma} = & \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \langle \text{rot} \left\{ [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{H}}_y] \frac{e^{-i\gamma R}}{R} e^{i\gamma \rho \cos \chi} \right\} + \\ & + \frac{j}{\omega \tilde{\mu}_a} \text{grad div} \left\{ [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{E}}_x] \frac{e^{-i\gamma R}}{R} e^{i\gamma \rho \cos \chi} \right\} + \\ & + j\omega \tilde{\mathbf{E}}_a [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{E}}_x] \frac{e^{-i\gamma R}}{R} e^{i\gamma \rho \cos \chi} \rangle dS = \\ = & \frac{1}{4\pi} \langle \text{rot} \left\{ \frac{e^{-i\gamma R}}{R} \int_{S_0} [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{H}}_y] e^{i\gamma \rho \cos \chi} dS \right\} \rangle + \\ + & \frac{j}{4\pi \omega \tilde{\mu}_a} \langle \text{grad div} \left\{ \frac{e^{-i\gamma R}}{R} \int_{S_0} [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{E}}_x] e^{i\gamma \rho \cos \chi} dS \right\} \rangle + \\ & + \frac{j\omega \tilde{\mathbf{E}}_a}{4\pi} \cdot \frac{e^{-i\gamma R}}{R} \int_{S_0} [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{E}}_x] e^{i\gamma \rho \cos \chi} dS, \quad (\text{VIII.6}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{E}}_{\Sigma} = & \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left\langle \text{rot} \left\{ [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{E}}_x] \frac{e^{-j\gamma R}}{R} e^{j\gamma\rho \cos \chi} \right\} - \right. \\
& - \frac{j}{\omega \tilde{\epsilon}_a} \text{grad div} \left\{ [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{H}}_y] \frac{e^{-j\gamma R}}{R} e^{j\gamma\rho \cos \chi} \right\} - \\
& \left. - j\omega \tilde{\mu}_a [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{H}}_y] \frac{e^{-j\gamma R}}{R} e^{j\gamma\rho \cos \chi} \right\rangle dS = \frac{1}{4\pi} \left\langle \text{rot} \left\{ \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \int_{S_0} [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{E}}_x] e^{j\gamma\rho \cos \chi} dS \right\} \right\rangle - \\
& - \frac{j}{4\pi\omega \tilde{\epsilon}_a} \left\langle \text{grad div} \left\{ \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \int_{S_0} [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{H}}_y] e^{j\gamma\rho \cos \chi} dS \right\} \right\rangle - \\
& - \frac{j\omega \tilde{\mu}_a}{4\pi} \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \int_{S_0} [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{H}}_y] e^{j\gamma\rho \cos \chi} dS. \tag{VIII.7}
\end{aligned}$$

Для упрощения записи введем обозначения:

$$\int_{S_0} [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{E}}_x] e^{j\gamma\rho \cos \chi} dS = \dot{\mathbf{F}}_E, \tag{VIII.8}$$

$$\int_{S_0} [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{H}}_y] e^{j\gamma\rho \cos \chi} dS = \dot{\mathbf{F}}_H. \tag{VIII.9}$$

Заметим, что в рассматриваемом случае векторные произведения, стоящие под интегралами, являются постоянными величинами и их можно было бы вынести за знак интеграла, т. е. написать в виде

$$\dot{\mathbf{F}}_E = [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{E}}_x] \int_{S_0} e^{j\gamma\rho \cos \chi} dS, \tag{VIII.10}$$

$$\dot{\mathbf{F}}_H = [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{H}}_y] \int_{S_0} e^{j\gamma\rho \cos \chi} dS. \tag{VIII.11}$$

Подставив введенные обозначения в формулы (VIII.6), (VIII.7), получим

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{H}}_{\Sigma} = & \frac{1}{4\pi} \text{rot} \left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{\mathbf{F}}_H \right) + \frac{j}{4\pi\omega \tilde{\mu}_a} \text{grad div} \left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{\mathbf{F}}_E \right) + \\
& + \frac{j\omega \tilde{\epsilon}_a}{4\pi} \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{\mathbf{F}}_E, \tag{VIII.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{E}}_{\Sigma} = & \frac{1}{4\pi} \text{rot} \left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{\mathbf{F}}_E \right) - \frac{j}{4\pi\omega \tilde{\epsilon}_a} \text{grad div} \left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{\mathbf{F}}_H \right) - \\
& - \frac{j\omega \tilde{\mu}_a}{4\pi} \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{\mathbf{F}}_H. \tag{VIII.13}
\end{aligned}$$

Осуществим дифференциальные операции в сферических координатах, используем формулы (I.28), (I.29), (I.30), приведенные в приложении I. При этом, рассчитывая поля в дальней зоне, сохраним члены не менее порядка $1/R$:

$$\begin{aligned}
\text{rot} \left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{\mathbf{F}}_H \right) \approx & -\mathbf{1}_{\varphi} \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{F}_{H\theta} \right) + \\
+\mathbf{1}_{\theta} \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{F}_{H\varphi} \right) \approx & \mathbf{1}_{\varphi} j\gamma \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{F}_{H\theta} - \mathbf{1}_{\theta} j\gamma \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{F}_{H\varphi}. \tag{VIII.14}
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\text{rot} \left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{\mathbf{F}}_E \right) \approx \mathbf{1}_\varphi j\gamma \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{F}_{E\theta} - \mathbf{1}_\theta j\gamma \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{F}_{E\varphi}, \quad (\text{VIII.15})$$

$$\text{div} \left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{\mathbf{F}}_E \right) \approx \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{F}_{ER} \right) \approx -j\gamma \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{F}_{ER}, \quad (\text{VIII.16})$$

$$\begin{aligned} \text{grad div} \left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{\mathbf{F}}_E \right) &\approx \mathbf{1}_R \frac{\partial}{\partial R} \left(-j\gamma \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{F}_{ER} \right) \approx \\ &\approx -\mathbf{1}_R j\gamma (-j\gamma) \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{F}_{ER} = -\mathbf{1}_R \gamma^2 \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{F}_{ER}, \end{aligned} \quad (\text{VIII.17})$$

$$\text{grad div} \left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{\mathbf{F}}_H \right) = -\mathbf{1}_R \gamma^2 \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{F}_{HR}. \quad (\text{VIII.18})$$

При проведении этих операций векторы $\dot{\mathbf{F}}_E$ и $\dot{\mathbf{F}}_H$ были представлены в виде суммы составляющих в сферической системе координат:

$$\mathbf{F}_E = \mathbf{1}_R \dot{F}_{ER} + \mathbf{1}_\varphi \dot{F}_{E\varphi} + \mathbf{1}_\theta \dot{F}_{E\theta}, \quad (\text{VIII.19})$$

$$\dot{\mathbf{F}}_H = \mathbf{1}_R \dot{F}_{HR} + \mathbf{1}_\varphi \dot{F}_{H\varphi} + \mathbf{1}_\theta \dot{F}_{H\theta}. \quad (\text{VIII.20})$$

Подставим выражения (VIII.14), (VIII.15), (VIII.17), (VIII.18), (VIII.19), (VIII.20) в формулы (VIII.12), (VIII.13):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_\Sigma &= \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{1}_\varphi j\gamma \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{F}_{H\theta} - \mathbf{1}_\theta j\gamma \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{F}_{H\varphi} \right) + \\ &+ \frac{j}{4\pi \omega \tilde{\mu}_a} \left(-\mathbf{1}_R \gamma^2 \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{F}_{ER} \right) + \\ &+ \frac{j\omega \tilde{\epsilon}_a}{4\pi} \cdot \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \left(\mathbf{1}_R \dot{F}_{ER} + \mathbf{1}_\varphi \dot{F}_{E\varphi} + \mathbf{1}_\theta \dot{F}_{E\theta} \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что $\gamma^2 = \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a$, получим

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_\Sigma &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \left(\mathbf{1}_\varphi j\gamma \dot{F}_{H\theta} - \mathbf{1}_\theta j\gamma \dot{F}_{H\varphi} \right) + \\ &+ \left(-\frac{j\omega \tilde{\epsilon}_a}{4\pi} \mathbf{1}_R \dot{F}_{ER} + \frac{j\omega \tilde{\epsilon}_a}{4\pi} \mathbf{1}_R \dot{F}_{ER} \right) \frac{e^{-j\gamma R}}{R} + \\ &+ \left(\frac{j\omega \tilde{\epsilon}_a}{4\pi} \mathbf{1}_\varphi \dot{F}_{E\varphi} + \frac{j\omega \tilde{\epsilon}_a}{4\pi} \mathbf{1}_\theta \dot{F}_{E\theta} \right) \frac{e^{-j\gamma R}}{R}. \end{aligned}$$

Сокращая подобные члены и группируя орты, можно получить следующую формулу:

$$\dot{\mathbf{H}}_\Sigma = \frac{j}{4\pi} \cdot \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \{ \mathbf{1}_\varphi (\gamma \dot{F}_{H\theta} + \omega \tilde{\epsilon}_a \dot{F}_{E\varphi}) + \mathbf{1}_\theta (\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{F}_{E\theta} - \gamma \dot{F}_{H\varphi}) \}. \quad (\text{VIII.21})$$

Аналогично,

$$\dot{\mathbf{E}}_\Sigma = \frac{j}{4\pi} \cdot \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \{ \mathbf{1}_\varphi (\gamma \dot{F}_{E\theta} - \omega \tilde{\mu}_a \dot{F}_{H\varphi}) + \mathbf{1}_\theta (-\omega \tilde{\mu}_a \dot{F}_{H\theta} - \gamma \dot{F}_{E\varphi}) \}. \quad (\text{VIII.22})$$

Как следует из полученных соотношений, в дальней зоне отсутствуют радиальные составляющие поля. Поле является поперечным. Интегралы $\dot{\mathbf{F}}_E$ и $\dot{\mathbf{F}}_H$ рассчитывают в декартовой системе координат. Учитывая, что

$$\begin{aligned} [\mathbf{1}_z \dot{E}_x] &= \mathbf{1}_y \dot{E}_x, \\ [\mathbf{1}_z \dot{H}_y] &= -\mathbf{1}_x \dot{H}_y, \end{aligned}$$

эти интегралы можно записать в виде

$$\dot{F}_E = \dot{I}_y \dot{E}_x \int_{S_0} e^{j\gamma\rho \cos \chi} dS = \dot{I}_y \dot{E}_x \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} e^{j\gamma\rho \cos \chi} dx dy, \quad (\text{VIII.23})$$

$$\dot{F}_H = -\dot{I}_x \dot{H}_y \int_{S_0} e^{j\gamma\rho \cos \chi} dS = -\dot{I}_x \dot{H}_y \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} e^{j\gamma\rho \cos \chi} dx dy. \quad (\text{VIII.24})$$

В формулы (VIII.21), (VIII.22) функции \dot{F}_E и \dot{F}_H входят в виде координатных составляющих в сферических координатах. Переход от декартовой к сферической системе координат осуществляется с помощью обычных формул:

$$\begin{aligned} \dot{F}_\varphi &= -\dot{F}_x \sin \varphi + \dot{F}_y \cos \varphi, \\ \dot{F}_\theta &= \dot{F}_x \cos \theta \cos \varphi + \dot{F}_y \cos \theta \sin \varphi. \end{aligned} \quad (\text{VIII.25})$$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ленин В. И. Материализм и эмпириокритицизм. Полн. собр. соч., 5-е изд., т. 18, с. 149, 290.
2. Бурдун Г. Д. Справочник по международной системе единиц. М., 1963.
3. Зиновьев А. Л., Филиппов Л. И. Введение в теорию сигналов и цепей. М., 1975.
4. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., 1951.
5. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 5. Электричество и магнетизм. Вып. 6. Электродинамика. М., 1966.
6. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., 1960.
7. Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М., 1961.
8. Кузнецов Д. С. Специальные функции. М., 1965.
9. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Ч. 2. М., 1963.
10. Купрадзе В. Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. М., 1950.
11. Васильев Е. Н. Известия вузов. Радиофизика 2.588 (1959).
12. Васильев Е. Н., Серегина А. Р., Каменев В. Г. Радиотехника и электроника. 1964, № 4.
13. Poynting T. On the transfer of Energie in the Electromagnetic Field. Trans. of Roy. soc. Part II. 1884 p. 343.
14. Умов Н. А. Уравнения движения энергии в телах (1874). Избр. соч. М., 1950.
15. Леонтович М. А. О приближенных граничных условиях для электромагнитного поля на поверхности хорошо проводящих тел. Исследования по распространению радиоволн.—Сб. II. М., 1948.
16. Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В. Электромагнитные поля и волны. М., 1971.
17. Баскаков С. И. Основы электродинамики. М., 1973.
18. Красюк Н. П., Дымович Н. Д. Электродинамика и распространение радиоволн. М., 1974.
19. Айзенберг Г. З. Антенны ультракоротких волн. М., 1957.
20. Поливанов К. М. Теоретические основы электротехники. Теория электромагнитного поля. Т. 3. М., 1969, 1975.
21. Поливанов К. М. К 100-летию «Трактата об электричестве и магнетизме». Дж. К. Максвелла. Электричество. Т. 1, 2, 3, 1974.
22. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.—Л., 1967.
23. Нетушил А. В., Поливанов К. М. Основы электротехники. Ч. III, 1956.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Список основных обозначений величин, использованных в книге	4
Глава 1. Интегральные уравнения электродинамики	8
§ 1.1. Место электродинамики среди технических дисциплин. Назначение электродинамики и основные этапы ее развития	8
§ 1.2. Система единиц. Закон Кулона. Вектор напряженности электрического поля \mathbf{E} . Разность потенциалов U . Теорема Гаусса для вакуума	10
§ 1.3. Теорема Гаусса для вещества. Вектор электрического смещения \mathbf{D} . Первое материальное уравнение среды. Первое уравнение непрерывности	12
§ 1.4. Вектор магнитной индукции \mathbf{B} . Связь вектора \mathbf{B} с током	19
§ 1.5. Воздействие внешнего магнитного поля на вещество. Вектор напряженности магнитного поля \mathbf{H} . Закон полного тока. Второе материальное уравнение среды. Второе уравнение непрерывности	23
§ 1.6. Электрическая проводимость среды. Закон Ома в дифференциальной и интегральной формах. Сторонний электрический ток. Ток смещения. Обобщенный закон полного тока	30
§ 1.7. Теорема Гаусса для вещества в случае проводящей среды	34
§ 1.8. Закон электромагнитной индукции Фарадея. Сторонний магнитный ток. Магнитная проводимость среды. Закон электромагнитной индукции в расширенной форме. Перестановочная двойственность интегральных уравнений электродинамики	35
§ 1.9. Вид интегрального соотношения $\oint_{S_i} \mathbf{B} d\mathbf{S} = Q_m$ в случае среды, обладающей магнитной проводимостью	39
§ 1.10. Комплексные амплитуды векторов поля, зарядов и токов. Уравнения электродинамики для комплексных амплитуд в интегральной форме. Интегральные уравнения электродинамики в случае спектральных сигналов	40
Глава 2. Дифференциальные уравнения электродинамики	45
§ 2.1. Теорема Остроградского—Гаусса. Теорема Стокса	45
§ 2.2. Переход от интегральных уравнений электродинамики к дифференциальным. Применение принципа перестановочной двойственности к дифференциальным уравнениям электродинамики	46
§ 2.3. Дифференциальные уравнения электродинамики в случае квазистатических и статических полей	48
§ 2.4. Несамостоятельность некоторых уравнений электродинамики	49
Глава 3. Основные законы электротехники как следствие уравнений электродинамики	50
§ 3.1. Вывод первого закона Кирхгофа на основании уравнений электродинамики	50
§ 3.2. Вывод второго закона Кирхгофа на основании уравнений электродинамики	51
Глава 4. Энергетические соотношения в электродинамике	55
§ 4.1. Теорема Пойнтинга для мгновенных значений векторов поля	55
§ 4.2. Теорема Пойнтинга для комплексных амплитуд векторов поля	59

Глава 5. Теорема единственности решения уравнений Максвелла	63
§ 5.1. Постановка вопроса	63
§ 5.2. Теорема единственности решения уравнений Максвелла для ограниченного объема	63
§ 5.3. Теорема единственности решения уравнений Максвелла для неограниченного объема	66
Глава 6. Волновые уравнения и уравнения Гельмгольца для векторов поля	67
§ 6.1. Постановка вопроса	67
§ 6.2. Волновые уравнения для векторов поля	67
§ 6.3. Уравнения Гельмгольца для векторов поля	70
Глава 7. Решение однородных уравнений Гельмгольца в простейшем случае однородной изотропной среды. Плоские волны	71
§ 7.1. Постановка вопроса	71
§ 7.2. Определение вида скалярных уравнений, соответствующих уравнениям Гельмгольца в декартовой системе координат	71
§ 7.3. Плоские волны	72
§ 7.4. Групповая скорость	78
§ 7.5. Распространение плоских волн в различных средах	82
§ 7.6. Поляризация плоских волн	86
§ 7.7. Ортогональность векторов $\mathbf{E}(t)$ и $\mathbf{H}(t)$	89
Глава 8. Граничные условия для векторов поля	91
§ 8.1. Постановка вопроса	91
§ 8.2. Граничные условия для нормальных составляющих векторов поля	91
§ 8.3. Граничные условия для тангенциальных составляющих векторов поля	93
Глава 9. Падение плоской волны на плоскую границу раздела двух сред как пример применения граничных условий при решении простейшей краевой задачи	96
§ 9.1. Постановка вопроса	96
§ 9.2. Вывод основных уравнений. Законы Снеллиуса. Коэффициенты отражения и преломления	97
§ 9.3. Угол полного преломления (угол Брюстера)	103
§ 9.4. Полное внутреннее отражение	104
§ 9.5. Падение плоской волны на плоскую границу раздела с идеальным металлом	109
§ 9.6. Падение плоской волны на границу раздела с реальным металлом	109
§ 9.7. Мощность потерь в реальном металле	112
Глава 10. Картины поля, возникающие у идеальной металлической плоскости при падении на нее плоской волны. Двухплоскостной волновод	114
§ 10.1. Постановка вопроса	114
§ 10.2. Случай первый. Вектор \mathbf{E} лежит в плоскости падения. Волны электрического типа	115
§ 10.3. Случай второй. Вектор \mathbf{E} перпендикулярен плоскости падения. Волны магнитного типа	117
§ 10.4. Двухплоскостной волновод	118
Глава 11. Общие сведения о волнах электрического и магнитного типов	120
§ 11.1. Постановка вопроса	120
§ 11.2. Система скалярных уравнений Максвелла в собщенной ортогональной криволинейной системе координат	121
§ 11.3. Волны электрического и магнитного типов	122
Глава 12. Общие сведения о процессах в волноводах — реальных системах, канализирующих электромагнитное поле	127
§ 12.1. Постановка вопроса	127
§ 12.2. Основные сведения о процессах в волноводах быстрых волн	128
§ 12.3. Упрощение уравнений, связывающих поперечные составляющие поля с продольными, при использовании волноводов быстрых волн	134

§ 12.4. Основные сведения о процессах в волноводах медленных волн . . .	136
§ 12.5. Основные сведения о процессах в волноводах, канализирующих волны типа T	138
Глава 13. Прямоугольный волновод	139
§ 13.1. Решение основного уравнения для продольных составляющих поля в прямоугольном волноводе	139
§ 13.2. Волны электрического типа	141
§ 13.3. Волны магнитного типа	144
§ 13.4. Фазовая скорость, длина волны в волноводе, критическая длина волны, критическая частота. Волны основных типов в прямоугольном волноводе	146
§ 13.5. Условия существования волн различных типов в прямоугольном волноводе	149
§ 13.6. Определение картин поля в прямоугольном волноводе с помощью граничных условий у поверхности идеального металла	150
§ 13.7. Аналитический метод построения картин поля в прямоугольном волноводе	156
Глава 14. Круглый волновод	159
§ 14.1. Решение основного уравнения для продольных составляющих поля в круглом волноводе	159
§ 14.2. Волны электрического типа	163
§ 14.3. Волны магнитного типа	165
§ 14.4. Фазовая скорость, длина волны в волноводе, критическая длина волны. Волны основных типов в круглом волноводе	167
§ 14.5. Условия существования волн различных типов в круглом волноводе	167
§ 14.6. Картинки поля в круглом волноводе	169
Глава 15. Круглый коаксиальный волновод	170
§ 15.1. Возможные типы волн в круглом коаксиальном волноводе	170
§ 15.2. Волны типа T	170
§ 15.3. Волны электрического и магнитного типов	173
Глава 16. Бесконечно протяженная диэлектрическая пластина как пример волновода медленных волн	175
§ 16.1. Постановка вопроса	175
§ 16.2. Вывод основных соотношений	176
§ 16.3. Четные и нечетные волны. Определение трансцендентных уравнений для поперечных волновых чисел	178
§ 16.4. Решение трансцендентных уравнений и определение поперечных волновых чисел. Критические частоты в случае электрических волн различных типов	179
§ 16.5. Коэффициент замедления поверхностных волн	182
§ 16.6. Групповая скорость поверхностных волн	183
§ 16.7. Картинки поля при использовании диэлектрической пластины в качестве замедляющей системы	184
Глава 17. Круглый диэлектрический волновод	184
§ 17.1. Постановка вопроса	185
§ 17.2. Вывод основного уравнения для продольных составляющих поля быстрой волны внутри круглого диэлектрического стержня и его решение	185
§ 17.3. Вывод основного уравнения для продольных составляющих поля медленной волны вне диэлектрического стержня и его решение	186
§ 17.4. Определение поперечных составляющих поля быстрой и медленной волн	188
§ 17.5. Определение поперечных волновых чисел g , p и продольного волнового числа h . Возможность раздельного существования волн электрического и магнитного типов	189

Глава 18. Круглый спиральный волновод	195
§ 18.1. Постановка вопроса	195
§ 18.2. Вывод основного уравнения для продольных составляющих поля медленной волны и его решение. Составляющие поля в спиральном волноводе	196
§ 18.3. Определение поперечного и продольного волновых чисел	198
Глава 19. Гребенчатый металлический волновод	200
§ 19.1. Постановка вопроса	200
§ 19.2. Вывод основного уравнения для продольной составляющей электрического поля в гребенчатом волноводе и его решение	202
§ 19.3. Определение поперечного и продольного волновых чисел	205
Глава 20. Затухание поля в реальных волноводах	208
§ 20.1. Постановка вопроса	208
§ 20.2. Вывод уравнений для мощностей, теряемых в металле и диэлектрике волновода. Определение коэффициентов затухания	208
Глава 21. Общие сведения об объемных резонаторах. Объемный резонатор, созданный на базе прямоугольного волновода быстрых волн	213
§ 21.1. Общие сведения об объемных резонаторах	213
§ 21.2. Вывод выражений для составляющих поля электрического типа в резонаторе, созданном на базе прямоугольного волновода быстрых волн	215
§ 21.3. Вывод выражений для составляющих поля магнитного типа в резонаторе, созданном на базе прямоугольного волновода быстрых волн	218
§ 21.4. Определение резонансной частоты и основных типов волн в случае волн электрического и магнитного типов в резонаторе, созданном на базе прямоугольного волновода быстрых волн	219
§ 21.5. Условия существования в резонаторе волн заданного типа	221
§ 21.6. Картины поля в прямоугольном резонаторе	222
Глава 22. Объемный резонатор, созданный на базе круглого волновода быстрых волн	224
§ 22.1. Вывод выражений для составляющих поля электрического типа в резонаторе, созданном на базе круглого волновода быстрых волн	224
§ 22.2. Вывод выражений для составляющих поля магнитного типа в резонаторе, созданном на базе круглого волновода быстрых волн	226
§ 22.3. Определение резонансной частоты и основных типов волн в случае волн электрического и магнитного типов в резонаторе, созданном на базе круглого волновода быстрых волн	227
§ 22.4. Условия существования в резонаторе волн заданного типа	228
§ 22.5. Картины поля в круглом резонаторе	229
Глава 23. Объемный резонатор, созданный на базе круглого коаксиального волновода	229
§ 23.1. Постановка вопроса	229
§ 23.2. Вывод выражений для составляющих поля в коаксиальном объемном резонаторе, работающем на волнах типа Т	230
Глава 24. Объемный резонатор, созданный на базе Н-образного металлodieлектрического волновода медленных волн	233
§ 24.1. Постановка вопроса	233
§ 24.2. Вывод соотношений для составляющих поля магнитного типа в Н-образном металлodieлектрическом волноводе медленных волн	233
§ 24.3. Определение составляющих поля в объемном резонаторе, созданном на базе Н-образного металлodieлектрического волновода, в случае четных волн магнитного типа	234
§ 24.4. Определение поперечных волновых чисел g , p и резонансной частоты Н-образного металлodieлектрического резонатора	236

Глава 25. Добротность объемных резонаторов	238
§ 25.1. Постановка вопроса	238
§ 25.2. Вывод общего выражения для добротности объемных резонаторов	239
Глава 26. Эквивалентные параметры объемных резонаторов	241
§ 26.1. Постановка вопроса	241
§ 26.2. Определение эквивалентных параметров объемных резонаторов . . .	242
Глава 27. Потенциалы поля	244
§ 27.1. Постановка вопроса	244
§ 27.2. Исходные уравнения электродинамики для векторов поля с участием сторонних токов. Векторный электрический потенциал	245
§ 27.3. Векторный магнитный потенциал	249
Глава 28. Решение неоднородных уравнений Гельмгольца	250
§ 28.1. Постановка вопроса	250
§ 28.2. Разложение векторного уравнения Гельмгольца на скалярные. Ре- шение однородного скалярного уравнения Гельмгольца в сфериче- ской системе координат	250
§ 28.3. Первая и вторая теоремы Грина	253
§ 28.4. Использование второй теоремы Грина с целью получения решения уравнения Гельмгольца для векторного электрического потенциала. Условия излучения	254
§ 28.5. Отыскание решения уравнения Гельмгольца для векторного магнит- ного потенциала	259
Глава 29. Элементарный электрический вибратор	260
§ 29.1. Постановка вопроса	260
§ 29.2. Определение векторного электрического потенциала в поле элемен- тарного электрического вибратора	261
§ 29.3. Определение составляющих поля элементарного электрического вибратора	262
§ 29.4. Ближняя, промежуточная и дальняя зоны поля элементарного электрического вибратора	264
§ 29.5. Мощность, излучаемая элементарным электрическим вибратором в окружающее пространство. Сопротивление излучения	266
§ 29.6. Диаграмма направленности поля излучения элементарного электри- ческого вибратора в дальней зоне	268
Глава 30. Элементарный магнитный вибратор	270
§ 30.1. Постановка вопроса	270
§ 30.2. Определение составляющих поля элементарного магнитного vibra- тора	270
§ 30.3. Физический аналог элементарного магнитного вибратора. Эlemen- тарный щелевой вибратор	271
§ 30.4. Мощность, излучаемая элементарным магнитным вибратором в окру- жающее пространство. Сопротивление излучения. Диаграмма направ- ленности	274
Глава 31. Лемма Лоренца	275
§ 31.1. Постановка вопроса	275
§ 31.2. Вывод леммы Лоренца для ограниченного и неограниченного объемов	276
§ 31.3. Теорема взаимности для элементарных вибраторов как пример при- менения леммы Лоренца	277
Глава 32. Возбуждение электромагнитного поля в волноводах	279
§ 32.1. Постановка вопроса	279
§ 32.2. Общие принципы возбуждения в волноводах поля заданного типа	279
§ 32.3. Условия ортогональности волн в волноводах	281
§ 32.4. Определение амплитудных коэффициентов поля, возбужденного в волноводах заданной системой сторонних токов	283

Глава 33. Возбуждение электромагнитного поля в объемных резонаторах	288
§ 33.1. Постановка вопроса	288
§ 33.2. Условия ортогональности волн в объемных резонаторах	288
§ 33.3. Определение амплитудных коэффициентов поля, возбужденного в объемных резонаторах заданной системой сторонних токов	290
Глава 34. Распространение электромагнитных волн в анизотропных средах	294
§ 34.1. Постановка вопроса	294
§ 34.2. Вид тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей намагниченных плазмы и феррита	295
§ 34.3. Продольное распространение плоских волн в намагниченной ферритовой среде. Эффект Фарадея	298
§ 34.4. Поперечное распространение плоских волн в намагниченной ферритовой среде. Эффект Коттона — Мутона	302
Глава 35. Элементы теории дифракции электромагнитного поля	305
§ 35.1. Постановка вопроса	305
§ 35.2. Дифракция плоской волны на бесконечном идеально проводящем металлическом цилиндре	305
§ 35.3. Первая и вторая граничные задачи электродинамики и соответствующие им теоремы. Теорема эквивалентности	311
§ 35.4. Определение суммарного поля, создаваемого сторонними токами в случае присутствия в рассматриваемой части пространства дополнительных поверхностей. Формулы типа Гюйгенса — Кирхгофа	313
§ 35.5. Дифракция плоских волн на отверстии в бесконечно протяженном идеально проводящем экране	316
Глава 36. Принцип электродинамического подобия	318
§ 36.1. Постановка вопроса	318
§ 36.2. Математические условия электродинамического подобия	319
Глава 37. Некоторые вопросы взаимодействия электронов с электромагнитным полем	321
§ 37.1. Постановка вопроса	321
§ 37.2. Движение электрона в электромагнитном поле	321
§ 37.3. Фиктивный угол пролета электронов	324
§ 37.4. Полный ток, возникающий между электродами	325
§ 37.5. Взаимодействие между электронным потоком и электрическим полем	326
§ 37.6. Возбуждение поля электронным пучком	330
Приложения	335
Приложение I. Элементы векторного анализа	335
§ I.1. Понятие о дивергенции и роторе векторной функции	335
§ I.2. Понятие о градиенте скалярной функции	336
§ I.3. Криволинейная ортогональная обобщенная система координат	337
§ I.4. Выражения для дивергенции, ротора и градиента в криволинейной ортогональной обобщенной системе координат	340
§ I.5. Выражения для дивергенции, ротора и градиента в конкретных системах координат	343
§ I.6. Некоторые векторные тождества	344
§ I.7. Выражения для $\nabla^2 U$ и $\nabla^2 \mathbf{a}$ в криволинейной ортогональной обобщенной системе координат	345
Приложение II. Расчет коэффициентов затухания поля h' в прямоугольных волноводах	345
§ II.1. Расчет коэффициентов затухания поля h' в прямоугольных волноводах в случае волн магнитного типа	345
§ II.2. Расчет коэффициентов затухания поля h' в прямоугольных волноводах в случае волн электрического типа	352

§ II.3. Расчет коэффициентов затухания поля h' в круглых волноводах в случае волн магнитного типа	353
§ II.4. Расчет коэффициентов затухания поля h' в круглых волноводах в случае волн электрического типа	359
Приложение III. Определение добротностей объемных резонаторов	363
§ III.1. Определение добротностей прямоугольных объемных резонаторов в случае волн магнитного типа	363
§ III.2. Определение добротностей прямоугольных объемных резонаторов в случае волн электрического типа	368
§ III.3. Определение добротностей цилиндрических объемных резонаторов в случае волн магнитного типа	370
§ III.4. Определение добротностей цилиндрических объемных резонаторов в случае волн электрического типа	375
Приложение IV. Примеры расчета амплитудных коэффициентов электромагнитных полей в волноводах и объемных резонаторах	378
§ IV.1. Пример расчета амплитудного коэффициента волны типа H_{10} в прямоугольном волноводе	378
§ IV.2. Пример расчета амплитудного коэффициента волны типа H_{101} в прямоугольном объемном резонаторе	380
Приложение V. Конкретные примеры применения принципа электродинамического подобия	381
Приложение VI. Расчет сопротивлений излучения возбуждающих устройств в волноводах. Расчет входных сопротивлений объемных резонаторов	383
§ VI.1. Расчет сопротивлений излучения возбуждающих устройств в волноводах	383
§ VI.2. Расчет входных сопротивлений объемных резонаторов	385
Приложение VII. Определение добротности нагруженных резонаторов	386
Приложение VIII. Расчет дифракционного поля плоской волны на прямоугольном отверстии в идеальном металлическом экране	387
Список рекомендуемой литературы	391

Николай Николаевич Федоров

Основы электродинамики

Редактор Т. И. Артемова
Художественный редактор В. П. Бабикова
Технический редактор Т. Д. Гарина
Корректор Г. А. Четкина

ИБ № 2080

Изд. № ЭР-262. Сдано в набор 27.08.79. Подп. к печати 30.01.80. Т-03856.
Формат 60×90^{1/16}. Бум. тип. № 3, Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем
25 усл. печ. л. 25,07 уч. изд. л. Тираж 24.000 экз. Заказ № 644. Цена 1 р. 10 к.

Издательство «Высшая школа»,
Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли. Москва, М-54, Валовая, 28