



---

**БИБЛИОТЕКА  
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ  
ФИЗИКИ**

**Редактор серии  
Д. В. ШИРКОВ**



РИЧАРД ФЕЙНМАН

Р. П. ФЕЙНМАН

---

# ТЕОРИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Перевод с английского  
Д. В. ШИРКОВА

МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1978

530.1  
Ф 36  
УДК 530.1

# THE THEORY OF FUNDAMENTAL PROCESSES

R. P. FEYNMAN

CALIFORNIA INSTITUTE  
OF TECHNOLOGY  
W. A. BENJAMIN, INC.  
NEW YORK 1961

Теория фундаментальных процессов, Р. П. Фейнман (перев. с англ. под ред. Д. В. Ширкова), Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1978 г.

Перевод книги крупнейшего современного теоретика Р. П. Фейнмана, имя которого хорошо известно читателям, является первой из книг в серии «Библиотека теоретической физики».

Лекции, лежащие в основе этой книги, проникнуты духом научного и педагогического новаторства. Практические основы теории фундаментальных частиц излагаются на базе минимального объема сведений из квантовой механики, которые изложены в начале книги.

Редактор перевода добавил послесловие, освещающее наиболее существенные изменения в науке в последние годы. Добавлены также таблицы элементарных частиц по данным 1976 г.

Табл. 13, рис. 117, библи. 17.

Ф  $\frac{20402-044}{053(02)-78}$  114-78

© Перевод на русский язык  
Главная редакция физико-математической  
литературы издательства «Наука», 1978

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА СЕРИИ

Этой книгой открывается «Библиотека теоретической физики». Задача новой серии состоит в том, чтобы сделать доступными для студентов и начинающих научных работников лучшие книги по основным разделам курса современной теоретической физики. С этой целью в серию предполагается включать как книги учебного характера, неизвестные пока отечественной аудитории, так и повторные издания быстро разошедшихся книг. В самое ближайшее время в «Библиотеке» выйдет переиздание «Принципов квантовой механики» П. Дирака.

Предлагаемая читателю книга Ричарда Фейнмана как нельзя более подходит в качестве первого тома серии. Несмотря на то, что с момента создания курса прошло без малого двадцать лет, благодаря удачному отбору материала, произведенному в подходящий момент (сразу вслед за созданием основ теории слабых взаимодействий), материал книги в своей основе практически не устарел.

Данные лекции, подобно «Фейнмановским лекциям по физике», проникнуты духом педагогического новаторства. По сути дела поставлена и успешно решена задача изложения практических основ теории частиц (точнее, теории возмущений для квантованных релятивистских полей) на базе минимального объема сведений из квантовой механики (понятие о волновой функции, принцип суперпозиции), с изложения которых и начинается книга. Таким образом, «Теорию фундаментальных процессов»

в принципе может читать студент, еще не слушавший лекций по квантовой механике и знакомый лишь с классической электродинамикой. Разумеется, более полезно проработать эту книгу вслед за овладением основ квантовой механики в стандартном объеме.

Еще одно обстоятельство, существенно отражающееся на ценности книги, это атмосфера творческой лаборатории, отчетливо пронизывающая изложение, особенно в написанных по горячим следам разделах по нарушению четности и структуре слабых взаимодействий с изменением странности.

Переводчиком добавлено послесловие, кратко резюмирующее наиболее существенные изменения в экспериментальных данных и теоретических представлениях, происшедшие к настоящему моменту, а также Таблица частиц по данным на начало 1976 года. Ее сравнение с оригинальной таблицей 1959—1960 гг. дает наглядное представление о прогрессе наших знаний за истекший период.

Текст оригинала и некоторые формулы при необходимости подвергались незначительной правке.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Здесь собраны записи специального курса лекций, прочитанного во время визита в Корнельский университет в 1958 году. При чтении лекций для студенческой аудитории, отличной от аудитории своего собственного института, возникает непреодолимое искушение срезать углы, опускать сложные детали и экспериментировать с методами обучения. Ущерб развитию студентов, наносимый при этом, как бы перекладывается для последующего исправления на другие плечи.

Та часть физики, которую мы действительно понимаем сейчас (электродинамика,  $\beta$ -распад, изотопический спин, странность), обладает определенной простотой, которую часто теряют в сложных построениях, полагая, что они нужны для полного понимания динамики сильных взаимодействий. Наверное, детальное знание всех этих запутанных формулировок необходимо для физика-теоретика, который в один прекрасный день найдет ключ к теории сильных взаимодействий. Это может быть верно, однако может оказаться справедливой и совершенно обратная точка зрения: следует держаться подальше от острых углов, которые безуспешно пытались обработать другие. Во всяком случае, всегда небесполезно постараться представить, какая часть нашего теоретического багажа в действительности используется для анализа ситуаций, доступных экспериментальной проверке. Это необходимо для того, чтобы получить ясное представление о том, что в действительности существенно в наших теперешних представлениях и от чего можно отказаться,

не вступая в серьезное противоречие с экспериментом.

Здесь описана теория всех тех явлений, для которых существует более или менее полная количественная теория. Имеется одно исключение: в курсе не отражены частичные успехи дисперсионной теории пион-нуклонного рассеяния. Это связано в основном с недостатком времени: курс лекций был прочитан всего лишь за шесть месяцев. Более полный курс был дан в 1959—1960 гг. в Калифорнийском технологическом институте. В него вошел материал, освещенный в этих записях, а также такие лекции по дисперсионной теории и оценкам сечений в приближении доминирующих полюсных диаграмм, которые, к сожалению, не были записаны.

Данные записи были сделаны непосредственно во время лекций в Корнельском университете П. А. Кэррузерсом и М. Найенбергом. Материал лекций, с 6-й по 14-ю, составлял первоначально текст доклада на Второй Конференции по мирному использованию атомной энергии (Женева, 1958 год). Они были отредактированы и исправлены Х. Иурой.

*Р. П. Фейнман*

Пасадина, Калифорния  
Ноябрь 1961 г.



## 1. ОБЗОР ПРИНЦИПОВ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Содержание этих лекций относится ко всей физике. Поскольку мы полагаем, что поведение системы, состоящей из многих частиц, может быть описано с помощью взаимодействий малого числа частиц, то будем в первую очередь рассматривать последние. Имея в виду, что существующие теоретические схемы все еще недостаточно совершенны для того, чтобы объяснить наблюдаемые явления, мы собираемся ограничиться рассмотрением основных положений квантовой механики в их наиболее общей форме. Таким путем мы сможем получить представление о минимальных предположениях (и их характере), которые следует использовать при формулировке тех частей теории, которые необходимы для трактовки новых явлений, связанных со странными частицами.

Схема построения книги такова. Во-первых, мы обсуждаем идеи квантовой механики, особенно концепцию амплитуды, подчеркивая, что другие важные моменты, такие, как, например, закон сложения моментов, являются в значительной степени следствием этой концепции. Далее, кратко рассмотрены эффекты релятивизма и идея античастиц. Вслед за этим мы даем полное описание качественных характеристик всех известных частиц, а также всего того, что известно об их взаимодействиях. Затем мы обращаемся к детальному количественному изучению двух взаимодействий, для которых мы умеем сейчас проводить вычисления: взаимодействию, ответственному за  $\beta$ -распад, и электромагнитному взаимодействию. Раздел теории, отвечающий последнему, называется квантовой электродинамикой, и ему мы посвятим основную часть курса.

В соответствии с этим планом мы начнем с обзора принципов квантовой механики.

Было установлено, что все до сих пор наблюдаемые явления могут быть описаны с помощью следующего рецепта: каждому процессу соответствует амплитуда (комплексное число); при подходящей нормировке вероятность процесса равна квадрату абсолютного значения этой амплитуды. (Точный смысл введенных понятий станет более ясным из примеров, которые будут приведены. Позднее мы сформулируем правила для вычисления амплитуд.)

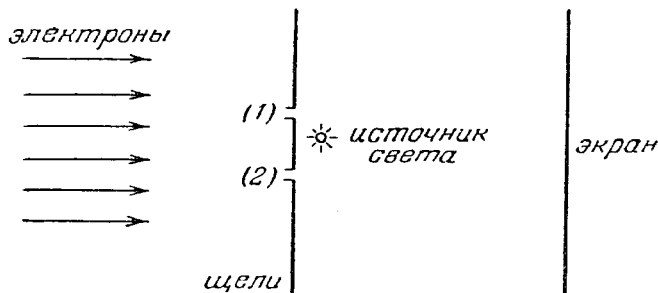


Рис. 1-1.

Рассмотрим, во-первых, эксперимент по рассеянию электронов на двойной щели. Однородный пучок электронов с импульсом  $\mathbf{p}$  падает на двойную щель. При этом мы рассматриваем последовательно падающие электроны (с импульсом  $p = p_x$ ,  $p_y = p_z = 0$ ), равномерно распределенные по вертикали, которые должны выходить с заданной энергией из некоторого отверстия.

Когда электрон ударяется об экран, мы отмечаем место удара. Рассматриваемый процесс таков: электрон с точно определенным импульсом каким-то образом проходит через систему щелей и достигает экрана (рис. 1-1). Нам не разрешается спрашивать, через какую щель прошел электрон, до тех пор, пока мы не установим устройство для фактического обнаружения этого. Но в последнем случае мы имели бы дело с другим процессом! Однако мы можем связать амплитуду рассматриваемого процесса с индивидуальными амплитудами процессов прохождения электронов через щель 1 —  $a_1$  и через щель 2 —  $a_2$ . (Так, например, когда щель 2 закрыта, амплитуда того, что электрон достигнет экрана, равна  $a_1$ , вероятность равна  $|a_1^2|$  и т. п.) В природе осуществляется следующее простое правило:  $a = a_1 + a_2$ . Этот факт представляет собой

частный случай принципа суперпозиции в квантовой механике (см. ссылку [1]). Таким образом, вероятность того, что электрон достигнет экрана, равна  $P_a = |a|^2 = |a_1 + a_2|^2$ . Ясно поэтому, что, вообще говоря,

$$P_a \neq P_{a_1} + P_{a_2} \quad (P_{a_1} = |a_1|^2, \quad P_{a_2} = |a_2|^2),$$

в чем и состоит отличие от классического случая. Мы можем говорить об «интерференции» вероятностей (см. ссылку [2]). Отметим еще, что явный вид  $P_a$  известен из оптики.

Теперь допустим, что мы поместили источник света между щелями 1 и 2 (см. рис. 1-1) для того, чтобы установить, через какую именно щель «в действительности» прошел электрон (мы наблюдаем рассеянный им фотон). В этом случае интерференционная картина совпадает с той, которая соответствует независимым прохождением через две щели. Один способ истолкования этого результата заключается в утверждении, что акт измерения положения электрона вносит некоторую неопределенность в значение импульса  $\Delta p_y$  и в то же время некоторое неконтролируемое изменение фазы амплитуды, так что усреднение по многим электронам обращает в нуль «интерференционные» члены. Это происходит в силу случайности распределения неконтролируемых фаз (см. детали в книге Боба [3]). Однако мы предпочитаем другую точку зрения: измеряя положение электрона, мы меняем изучаемый процесс. Нам следует теперь учесть фотон и его взаимодействие с электроном. Рассмотрим поэтому следующие амплитуды:

$a_{11}$  — амплитуда того, что электрон проходит через щель 1 и фотон рассеян за щелью 1;

$a_{21}$  — амплитуда того, что электрон проходит через щель 2 и фотон рассеян за щелью 1;

$a_{12}$  — амплитуда того, что электрон проходит через щель 1 и фотон рассеян за щелью 2;

$a_{22}$  — амплитуда того, что электрон проходит через щель 2 и фотон рассеян за щелью 2.

Поэтому амплитуда того, что электрон, зарегистрированный за щелью 1, дойдет до экрана, будет равна  $a' = a_{11} + a_{21}$ ; соответственно для электрона, зарегистрированного за щелью 2,  $a'' = a_{12} + a_{22}$ . Для достаточно

хорошо поставленного эксперимента  $a_{12} \approx 0 \approx a_{21}$ , так что  $a_{11} \approx a_1$ ,  $a_{22} \approx a_2$ , где  $a_1$  и  $a_2$  — амплитуды предыдущего эксперимента. Но теперь амплитуды  $a'$  и  $a''$  соответствуют различным процессам, поэтому вероятность того, что электрон попадет на экран, равна

$$P'_a = |a'|^2 + |a''|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2.$$

Другой пример дает рассеяние нейтрона на кристалле.

(1) Пренебрегаем спином: полная амплитуда в точке наблюдения равна сумме амплитуд, соответствующих

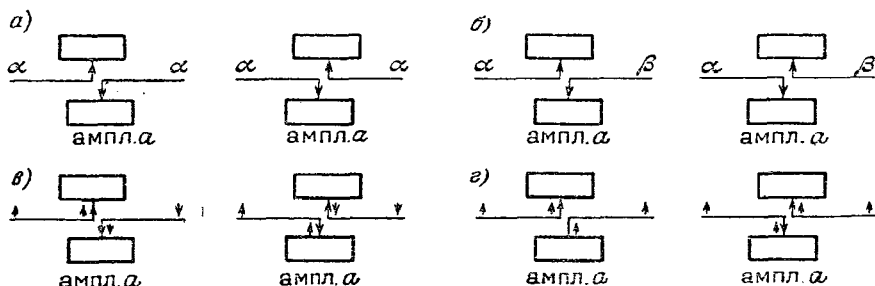


Рис. 1-2.

рассеянию на каждом из атомов. Этот результат приводит к обычной брэгговской интерференционной картине.

(2) Учитываем спиновые эффекты: предположим, что спины всех атомов направлены вверх, а всех нейтронов — вниз (допускается возможность локализации атомарных спинов). Возможны два случая: (а) спин нейтрона не меняется (не переворачивается) — результат совпадает с предыдущим, (б) спин переворачивается — нет никаких дифракционных явлений, даже когда энергия и длина волны рассеянных частиц те же самые, что и в случае (а). Причина состоит в том, что у атома, на котором произошло рассеяние, спин перевернулся; поэтому в принципе его можно отличить от других атомов. В этом случае рассеяние на  $i$ -м атоме *отличается* от рассеяния на атоме с номером  $j \neq i$ .

Если теперь вместо (локализованного) переворота спина атома мы возбудим в кристалле (нелокализованные) спиновые волны с волновым числом  $k = k_{in} - k_{scatt}$ , то опять можем рассчитывать на некоторые дифракционные явления.

Рассмотрим рассеяние на  $90^\circ$  в системе ц. м. (см. рис. 1-2 (от  $a$  до  $g$ )).

(а) Случай двух тождественных бесспиновых падающих частиц. Процесс рассеяния может идти двумя неразличимыми способами. Полная амплитуда  $=2a$  и  $P=4|a|^2$ , что вдвое больше классического результата.

(б) Два различные бесспиновые частицы. Процессы различимы, вследствие чего  $P=|a|^2+|a|^2=2|a|^2$ .

(в) Два электрона с противоположно направленными спинами. Здесь процессы рассеяния различимы, так что  $P=|a|^2+|a|^2=2|a|^2$ .

(г) Если, однако, спины обоих падающих электронов направлены вверх, процессы неразличимы. Полная амплитуда  $=a-a=0$ . Здесь мы встречаемся с новым качеством. Оно будет обсуждено в следующей лекции.

*Задача 1-1.* Допустим, что имеются два (удаленных) источника радиоволн (например, две радиозвезды), и мы хотим знать расстояние между ними. Мы одновременно измеряем интенсивности радиоизлучения с помощью двух приемников и откладываем на графике произведение интенсивностей как функцию их относительного положения. Такие корреляционные измерения позволяют вычислить искомое расстояние. При одном приемнике нет никакой интерференционной картины, поскольку относительные фазы источников  $A$  и  $B$  случайны и флуктуируют. Например, на рис. 1-3 мы удалили приемники друг от друга на

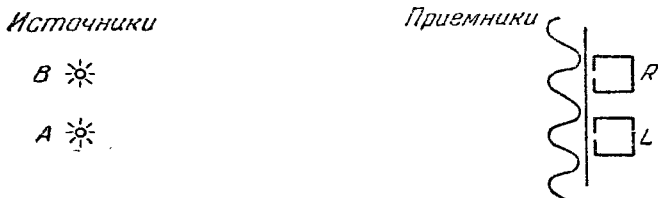


Рис. 1-3.

расстояние, соответствующее расстоянию между двумя соседними максимумами на графике в случае, когда относительная фаза равна 0 (табл. 1-1). Если же расстояние между приемниками  $R$  и  $L$  соответствует расстоянию между максимумом и минимумом, то мы получим данные таблицы 1-2. Таким путем можно определить вероятность

совпадений при регистрации фотонов в счетчиках (приемниках). Исследуйте теперь эффект изменения расстояния между приемниками, рассматривая процесс с точки зрения квантовой механики.

Таблица 1-1

Относительные фазы источников	L	R	Произведение
0°	2	2	4
180°	0	0	0
90°	1	1	1
270°	1	1	1
			Ср. = 1,5

Таблица 1-2

Относительные фазы источников	L	R	Произведение
0°	2	0	0
180°	0	2	0
90°	1	1	1
270°	1	1	1
			Ср. = 0,5

**Обсуждение задачи 1-1.** Существуют четыре пути, приводящие к одновременной регистрации фотонов:

- (1) Оба фотона приходят от  $A$ : амплитуда  $a_1$ .
- (2) Оба фотона приходят от  $B$ : амплитуда  $a_2$ .
- (3) Приемник  $L$  регистрирует фотон от  $A$ , а  $R$  от  $B$ : амплитуда  $a_3$ .
- (4) Приемник  $L$  регистрирует фотон от  $B$ , а  $R$  от  $A$ : амплитуда  $a_4$ .

Процессы (1) и (2) отличны друг от друга и от (3) и (4) (например, мы могли бы в принципе измерить энергии излучателей для того, чтобы выяснить, который из них излучил оба фотона).

Однако процессы (3) и (4) неразличимы. Поэтому  $P = |a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3 + a_4|^2$ . Член  $|a_3 + a_4|^2$  содержит эффекты интерференции. Заметим, что если вместо фотонов взять электроны, то последний член будет равен  $|a_3 - a_4|^2$ .

## 2. СПИН И СТАТИСТИКА

Нам следует научиться рассуждать непосредственно на языке квантовой механики. Наиболее важное, и в то же время отчасти таинственное, правило заключается в том, что следует складывать амплитуды, а вероятность

данного процесса затем вычислять по формуле

$$P = |\text{полная амплитуда}|^2.$$

Мы еще вернемся к правилам сложения амплитуд при рассмотрении процессов, которые могут идти разными способами, при каждом из которых происходит обмен двумя частицами.

Рассмотрим теперь процесс, который может идти двумя различными каналами. Один из каналов обозначим через  $P$ , а соответствующую амплитуду —  $a$ . Второй канал, «обменный» по отношению к первому (и *неотличимый* от него), назовем  $P_{\text{ex}}$ . Его амплитуду обозначим  $a_{\text{ex}}$ . В природе осуществляется следующее замечательное правило:

«Для одного класса частиц, называемых бозонами, полная амплитуда равна сумме  $a + a_{\text{ex}}$ ; для другого класса частиц — фермионов — полная амплитуда равна разности  $a - a_{\text{ex}}$ . При этом все частицы с полуцелым спином  $1/2, 3/2, \dots$  оказываются фермионами, а частицы с целым спином  $0, 1, 2, \dots$  — бозонами».

Последнее свойство является очень общим следствием законов квантовой механики, специальной теории относительности, а также некоторых других. Оно обсуждалось Паули [4] и, недавно, Людерсом и Зумино [5].

Здесь важно отметить, что для того, чтобы воспользоваться описываемой схемой, нужно знать все состояния, в которых может находиться частица (или система). Например, если мы не учтем существования состояний с различной поляризацией, то не сможем понять отсутствие интерференции для различных поляризаций. Общее правило заключается в том, что если мы обнаружим нарушение одного из наших правил (например, для какой-либо новой частицы), то следует искать новую степень свободы (новое квантовое число) для того, чтобы полностью характеризовать физическое состояние.

**Вырождение.** Рассмотрим пучок света, поляризованный в заданном направлении. Пусть мы располагаем ось анализатора (например, поляроида, призмы Николя) последовательно в двух перпендикулярных друг к другу и к направлению пучка направлениях  $x$  и  $y$  для того, чтобы измерить число фотонов соответствующей поляризации. Обозначим амплитуды состояния фотонов, поля-

ризованных по осям  $x$  и  $y$ , через  $a_x$  и  $a_y$  соответственно. Если теперь мы повернем анализатор на угол  $45^\circ$  (по биссектрисе между осями  $x$  и  $y$ ), то какова будет амплитуда для соответствующей поляризации? Мы найдем  $a_{45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x + a_y)$ ; для произвольного угла  $\theta$  (отсчитываемого от оси  $x$ ) получим

$$a(\theta) = \cos \theta \cdot a_x + \sin \theta \cdot a_y.$$

Таким образом, для того, чтобы полностью описать амплитуду состояния произвольной поляризации, нужно задать только два числа ( $a_x$  и  $a_y$ ). Можно показать, что этот результат тесно связан с тем фактом, что любой выбор осей одинаково хорош для описания фотона.

В самом деле, выберем оси координат ( $x'$ ,  $y'$ ) смещенными на угол  $-45^\circ$  по отношению к осям ( $x$ ,  $y$ ) (см. рис. 2-1). Для наблюдателя в этой системе отсчета

$$a'_{x'} = \frac{a_x - a_y}{\sqrt{2}}, \quad a'_{y'} = \frac{a_x + a_y}{\sqrt{2}},$$

$$a'(45^\circ \text{ по отношению к } x', y') = \frac{a'_{x'} + a'_{y'}}{\sqrt{2}} = \frac{a_x - a_y}{2} + \frac{a_x + a_y}{2} = a_x \text{ (как и должно быть!)}$$

Мы можем поэтому представить состояние фотона вектором  $e = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}$  в некотором двумерном пространстве. Тогда амплитуда фотона, поляризованного в направлении  $\mathbf{v} = \mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta$ , будет равна скалярному произведению  $e \cdot \mathbf{v}$ .

Предположение о том, что поведение системы не может зависеть от ее ориентации в пространстве, накладывает существенные ограничения на свойства возможных состояний. Рассмотрим (см. рис. 2-2) ядро или атом, который испускает  $\gamma$ -лучи преимущественно вдоль оси  $z$ . Повернем ядро вместе с прибором, регистрирующим излучение. Показания прибора не могут при этом измениться, т. е.  $\gamma$ -кванты будут теперь испускаться в новом направлении.

Если ядро характеризуется единственной характеристикой, например своей энергией, то  $\gamma$ -лучи должны ис-



пускаться во всех направлениях с равной вероятностью. Почему? Потому, что в противном случае можно было бы, например, так сориентировать систему, чтобы  $\gamma$ -лучи испускались преимущественно в направлении оси  $x$  (для этого достаточно повернуть всю систему; в то же время законы физики не зависят от выбора направления осей координат). Условие испускания вдоль оси  $x$  отличается от условия испускания вдоль оси  $z$ . Однако состояние

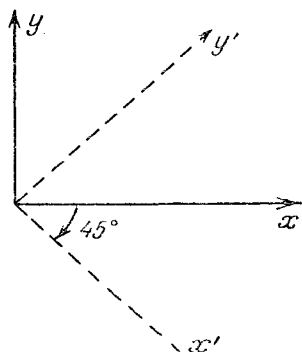


Рис. 2-1.

системы не изменилось. Ясно, что одна амплитуда не может дать два различных предсказания. Поэтому система, описы-

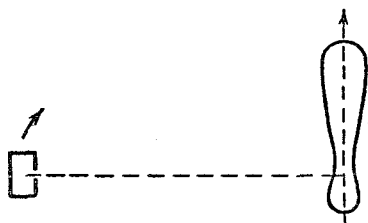


Рис. 2-2.

ваемая одной амплитудой, должна излучать одинаково (симметрично) во всех направлениях.

Для описания несимметричного распределения нужно иметь больше амплитуд. Если угловое распределение сильно неизотропно, то для описания состояния ядра потребуется большое число амплитуд.

Предположим, что состояние системы характеризуется в точности  $n$  амплитудами

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \equiv \text{столбец } (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Рассмотрим задачу: Пусть система находится в состоянии  $a_1=1, a_2=\dots=a_n=0$ . Каковы будут амплитуды, характеризующие систему в новых координатах после вращения  $R$ ?

Определим эти амплитуды следующим образом:

$$\text{столб. } (D_{11}(R), D_{21}(R), \dots, D_{n1}(R)).$$

Подобным образом, если мы начнем со случая  $a_2=1$ ,  $a_1=a_3=\dots=a_n=0$ , то получим

$$\text{столб. } (D_{12}(R), D_{22}(R), \dots, D_{n2}(R)).$$

Таким образом, нам нужна матрица  $D_{ij}(R)$ .

В общем случае система первоначально находится в состоянии

$$\text{столбец } (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Состояние после вращения описывается столбцом

$$\text{столбец } (a'_1, a'_2, \dots, a'_n),$$

причем

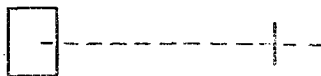
$$a'_i = \sum_j D_{ij}(R) a_j.$$

Поразмыслите-ка над этим.

### 3. ВРАЩЕНИЯ И МОМЕНТ

В последней лекции мы говорили об установке, которая создает объект в состоянии  $a$ :

$$a = \text{столбец } (a_1, \dots, a_n).$$



Это понятие требует дальнейшего разъяснения, так как до сих пор мы ввели лишь понятие амплитуды для полного события, состоящего из рождения и регистрации объекта. Эта амплитуда может быть получена следующим образом.

Допустим, что амплитуда  $b_i$  соответствует тому, что объект рождается в условиях, описываемых индексом  $i$ . Если он уже находится в этих условиях (в этом состоянии), то пусть  $a_i$  обозначает амплитуду того, что он будет зарегистрирован детектором. Тогда амплитуда полного события (рождения и регистрации) равна произведению  $a_i b_i$ , просуммированному по всем промежуточным условиям  $i$ .

Вернемся опять к опыту с электроном, проходящим через две щели (см. рис. 3-1). Если  $a_{1 \rightarrow 3}$  есть амплитуда

того, что электрон достигнет верхней щели, а  $a_{3 \rightarrow 2}$  — амплитуда электрона, прошедшего эту щель и достигшего экрана в точке 2, то амплитуда полного события равна произведению  $a_{1 \rightarrow 3} a_{3 \rightarrow 2}$ .

Пусть мы вращаем источник на  $\mathbf{R}$  ( $|\mathbf{R}|$  = угол вращения,  $\mathbf{R}/|\mathbf{R}|$  = ось вращения), так что объект (частица)

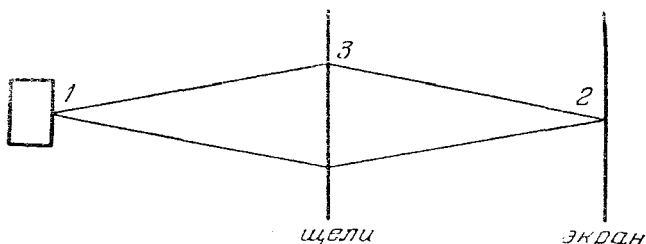
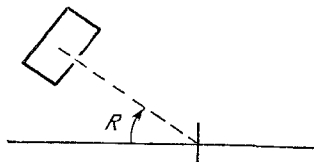


Рис. 3-1.

рождается в условиях  $a'$  по отношению к неподвижному детектору:

$$a' = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix}.$$



Как было установлено, столбец  $a'$  может быть получен из  $a$  соотношением  $a' = D(R) a$ , причем матрица  $D(R)$  не зависит от природы прибора. Пусть, например, в другом опыте (рис. 3-2) тот же самый объект рождается в условиях  $b$  и  $b'$ . Тогда  $b' = D(R) b$  при том же самом  $D(R)$ .



Рис. 3-2.

Почему связь величин  $a'$  и  $a$  линейна? Как раз потому, что должна быть интерференция. Допустим, что у нас есть два устройства, одно из которых создает объект в условиях  $a$ , а другое создает тот же самый объект в условиях  $b$ . Взятые вместе, они создают объект в условиях  $a+b$ . После вращения мы получим  $a'$ ,  $b'$ , а также

$a' + b'$ , для того, чтобы явления интерференции в повернутой системе выглядели по-старому. Тогда

$$a' = D(R)a, \quad b' = D(R)b, \quad (a + b)' = D(R)(a + b).$$

Поскольку  $(a + b)' = a' + b'$ , то

$$D(R)(a + b) = D(R)a + D(R)b.$$

Установим еще одно свойство матрицы  $D(R)$ . Пусть после вращения на угол  $R$  мы произведем еще одно вращение на угол  $S$ , как показано на рис. 3-3. Согласно нашему правилу объект теперь рождается в условиях  $a''$ ,

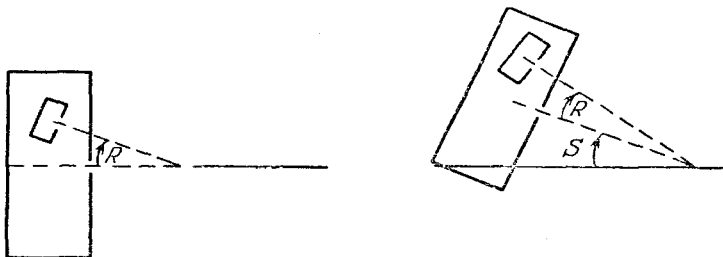


Рис. 3-3.

причем  $a'' = D(S)a'$ . Поскольку  $a' = D(R)a$ , мы получаем  $a'' = D(S)D(R)a$ , т. е.

$$D(SR) = D(S)D(R)^*.$$

Вращения образуют группу, а величины  $D$  суть матричные представления этой группы. Совсем не очевидно, как найти их.

*Примеры:*

(1) Объект представляется единственным комплексным числом.  $D$  суть  $1 \times 1$  матрицы, т. е. комплексное число может быть выбрано равным единице.

(2) Объект представляется вектором, т. е. тремя амплитудами, являющимися  $x$ -,  $y$ - и  $z$ -компонентами этого вектора. Тогда  $D$  суть знакомые всем матрицы поворотов координат трехмерного пространства.

\*) Строго говоря, невозможно показать, что амплитуды после вращения будут одинаковы в обоих случаях — только квадраты их будут равны. Амплитуды могут отличаться на фазовый множитель. Однако Вигнер показал, что такой множитель всегда можно исключить, переопределив матрицы  $D$ .

Перейдем к общему анализу. Предположим, что нам известна матрица для бесконечно малого вращения, скажем, на угол  $1^\circ$  вокруг оси  $z$ . Тогда вращение на  $n^\circ$  вокруг оси  $z$  представимо в виде

$$D(n^\circ; z) = [D(1^\circ; z)]^n.$$

Вообще, если известно  $D(\varepsilon; z)$ , то

$$D(\theta; z) = [D(\varepsilon; z)]^{\theta/\varepsilon}.$$

При отсутствии вращения  $D$  равно единице, поэтому в первом порядке по  $\varepsilon$

$$D(\varepsilon; z) = 1 + i\varepsilon M_z.$$

Также

$$D(\varepsilon; x) = 1 + i\varepsilon M_x, \quad D(\varepsilon; y) = 1 + i\varepsilon M_y.$$

Используя теперь в соотношении  $D(\theta; z) = (1 + i\varepsilon M_z)^{\theta/\varepsilon}$  биномиальное разложение и переходя к пределу  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем

$$D(\theta; z) = 1 + i\theta M_z - \frac{\theta^2}{2!} M_z^2 - i \frac{\theta^3}{3!} M_z^3 + \dots,$$

что может быть также представлено в виде  $e^{i\theta M_z}$ . Биномиальное разложение работает, поскольку  $M_z$  ведут себя как обычные числа при сложении и умножении (самих на себя).

Если мы хотим рассмотреть вращение на угол  $\varepsilon$  вокруг оси, направленной по единичному вектору  $\mathbf{v}$ , то найдем

$$D(\varepsilon; \mathbf{v}) = 1 + i\varepsilon (v_x M_x + v_y M_y + v_z M_z),$$

а для конечного угла  $\theta$

$$D(\theta; \mathbf{v}) = \exp [i\theta (v_x M_x + v_y M_y + v_z M_z)].$$

Здесь, однако, следует соблюдать осторожность при установлении относительного порядка  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$  в матричных произведениях, которые появляются в высших членах разложения. Дело в том, что эти матрицы не перестановочны, как следствие того факта, что конечные вращения не коммутируют между собой.

Для иллюстрации этого свойства рассмотрим вращения ластика, изображенные на рис. 3-4, а и 3-4, б.

(1) Сначала вращаем на  $90^\circ$  вокруг оси  $z$ , а затем на угол  $90^\circ$  вокруг оси  $x$  (рис. 3-4, а).

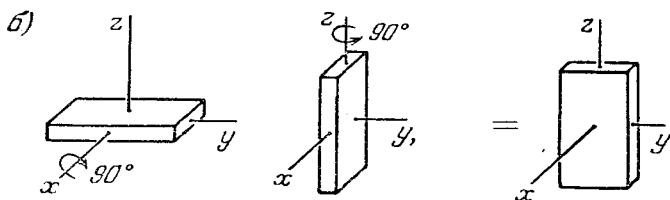
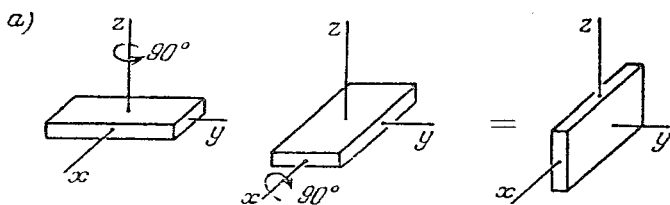


Рис. 3-4.

(2) Вращаем на  $90^\circ$  вокруг оси  $x$ , а затем на угол  $90^\circ$  вокруг оси  $z$  (рис. 3-4, б). Результаты двух вращений совершенно различны.

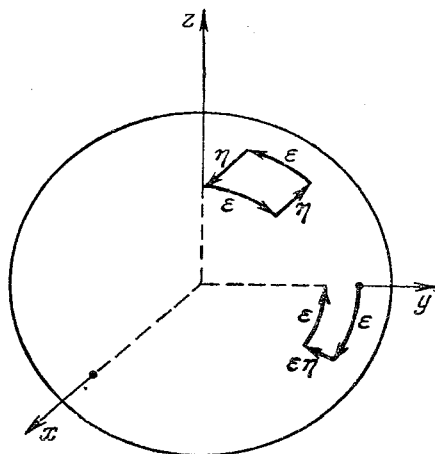


Рис. 3-5.

Попробуем получить перестановочные соотношения между  $M_x$  и  $M_y$ . Для этого рассмотрим последовательность вращений: вращение  $\epsilon$  вокруг оси  $x$ , вращение  $\eta$  вокруг оси  $y$ , затем вращение  $-\epsilon$  вокруг оси  $x$  и вращение  $-\eta$  вокруг оси  $y$ , как изображено на рис. 3-5.

Проследим за движением точки, расположенной вначале на оси  $y$ . Очевидно, что окончательный сдвиг есть величина второго порядка малости. Точка смещается на величину  $\epsilon\eta$  к оси  $x$ . Заметим

также, что точка, которая располагалась на оси  $z$ , вернулась в исходное положение. Поэтому чистое смещение

точки на сфере есть вращение на угол  $\varepsilon\eta$  вокруг оси  $z$ . Удерживая члены до второго порядка, получаем

$$\left[1 - i\eta M_y - \frac{\eta^2}{2} M_y^2\right] \left[1 - i\varepsilon M_x - \frac{\varepsilon^2}{2} M_x^2\right] \times \\ \times \left[1 + i\eta M_y - \frac{\eta^2}{2} M_y^2\right] \left[1 + i\varepsilon M_x - \frac{\varepsilon^2}{2} M_x^2\right] = 1 + i\varepsilon\eta M_x.$$

Приравнивая коэффициенты при произведении  $\varepsilon\eta$ , находим

$$M_x M_y - M_y M_x = i M_x.$$

Подобным образом

$$M_y M_z - M_z M_y = i M_x, \quad M_z M_x - M_x M_z = i M_y.$$

Таковы перестановочные правила для матриц  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$ . Все остальные необходимые соотношения могут быть получены из этих правил. Детали таких выкладок приведены во многих учебниках (см., например, книгу Шиффа \*)). Здесь мы приведем только схематический набросок.

Сначала следует убедиться, что величина

$$M^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$$

коммутирует со всеми  $M$ . Поэтому можно выбрать наши  $a$  так, чтобы  $M^2 a = ka$ , где  $k$  — некоторое число. Рассмотрим затем вспомогательную величину

$$M_- = M_x - i M_y$$

и заметим, что

$$M_z M_- = M_- (M_z - 1).$$

Допустим теперь, что столбец  $a^{(m)}$  удовлетворяет соотношению

$$M_z a^{(m)} = m a^{(m)},$$

где  $m$  — некоторое другое число. Обозначим  $M_- a^{(m)} = b$ . Тогда

$$M_z b = M_z M_- a^{(m)} = M_- (M_z - 1) a^{(m)} = \\ = (m - 1) M_- a^{(m)} = (m - 1) b.$$

\*) Имеется в виду учебник Шиффа по квантовой механике [15]. (Прим. перев.)

Поэтому  $b = ca^{(m-1)}$ . Нормируем  $a^{(m)}$  на единицу, т. е.

$$\sum_{1 \leq j \leq n} \check{a}_j^{(m)} a_j^{(m)} = 1 \quad \text{для всех } m.$$

Следовательно,

$$1 = [\check{c}c]^{-1} \sum_n (M_- a^{(m)})_n^* (M_- a^{(m)})_n = [\check{c}c]^{-1} \sum_n \check{a}_n^{(m)} (M_+ M_-) a_n^{(m)},$$

где  $M_+ = M_x + iM_y$ . Кроме того,

$$M_+ M_- = M_x^2 + M_y^2 + M_z = M^2 - M_z^2 + M_z$$

и  $M^2 a^{(m)} = ka^{(m)}$ . Поэтому

$$c = [k - m(m - 1)]^{1/2}.$$

Пусть теперь самым нижним, «последним», состоянием будет состояние с  $m = -j$ . Как можно не получить другое, еще более низкое, под действием  $M_-$ ? Только если  $M_- a^{(-j)} = 0$ . Поэтому  $c = 0$  для  $m = -j$  и, следовательно,  $k = -j(-j - 1) = j(j + 1)$ , т. е.

$$M^2 = j(j + 1).$$

Аналогичные рассуждения (использующие оператор  $M_+$ , «повышающий» значение  $m$  на единицу, вместо «понижающего» оператора  $M_-$ ) показывают, что если наибольшее значение  $m$  равно  $+j'$ , то  $k = j'(j' + 1)$ , так что  $j = j'$ . Поэтому число  $2j$  является целым. Полное число состояний равно  $2j + 1$ .

*Примеры:*

(1) 1 состояние:  $j = 0$ ;

(2) 3 состояния:  $j = 1$ ;

$m$	Преобразуется как
1	$(x + iy)(\sqrt{2})^{-1}$
0	$z$
-1	$(x - iy)(\sqrt{2})^{-1}$



(3) 2 состояния:  $j = 1/2$ . Это очень интересный случай. Пусть

$$a^{(1/2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a^{(-1/2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Используя общий результат, получаем

$$M_- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

так как

$$[j(j+1) - m(m-1)]^{1/2} = \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right]^{1/2} = 1,$$

а также

$$M_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Поэтому

$$M_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подобным образом

$$M_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M_z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$M_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично можно показать, что

$$M_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$M_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_x, \quad M_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_y,$$

$$M_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_z.$$

Полученные формулы являются определениями трех важных матриц второго ранга — матриц Паули  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ . Проверьте также, что

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1,$$

$$\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x = i \sigma_z.$$

Следует отметить, что все полученные результаты «возникли из ничего» — они основываются только на отсутствии в природе выделенного направления и на принципе суперпозиции.

Однако мы высказали очень важную гипотезу: Мы предположили, что процессы рождения и детектирования *достаточно отделены друг от друга* и что можно говорить об амплитуде, характеризующей объект, в промежутке между этими событиями. Эта гипотеза всегда делается (особенно в теории поля) вне зависимости от того, как мало расстояние между прибором и детектором. Может статься,

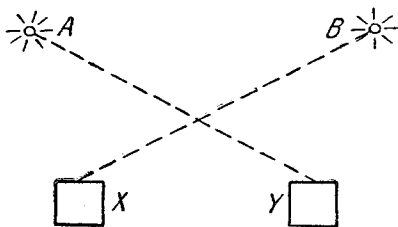


Рис. 3-6.

что она не справедлива, если они слишком близки друг к другу.

Другое важное предположение состоит в пренебрежении динамической интерференцией: нет сил, действующих между нашими приборами, рождающими частицы, и приборами, детектирующими частицы, во всяком случае, таких сил, которые не описывались бы переносом нашего объекта между ними. При этом условии амплитуда двух независимых событий равна произведению амплитуд для каждого отдельного события.

В качестве примера рассмотрим две звезды  $A$  и  $B$  и два счетчика  $X$ ,  $Y$  (см. рис. 3-6). Если  $a_{B \rightarrow X}$  — амплитуда того, что фотон, испущенный звездой  $B$ , достигнет счетчика  $X$ , а  $a_{A \rightarrow Y}$  — соответствующая амплитуда для фотона звезды  $A$ , зарегистрированного счетчиком  $Y$ , то

$$a = a_{B \rightarrow X} \times a_{A \rightarrow Y}$$

есть амплитуда для осуществления обоих событий.

## 4. ПРАВИЛА СЛОЖЕНИЯ МОМЕНТОВ

Состояние со спином  $1/2$  описывается двумя амплитудами. В общем случае

$$a = a_+ [1/2] + a_- [-1/2],$$

где  $[1/2]$  обозначает столбец  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $[-1/2]$  — столбец  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

а  $a$  равно  $\begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix}$ .

Например, решение уравнения

$$M_x a = 1/2 a,$$

соответствующее спину, направленному вверх по оси  $x$ , будет

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} [1/2] + \frac{1}{\sqrt{2}} [-1/2].$$

Соответственно, для спина, направленного:

$$\text{вниз по оси } x: \frac{1}{\sqrt{2}} [1/2] - \frac{1}{\sqrt{2}} [-1/2],$$

$$\text{вверх по } y: \frac{1}{\sqrt{2}} [1/2] + \frac{i}{\sqrt{2}} [-1/2],$$

$$\text{вниз по } y: \frac{1}{\sqrt{2}} [1/2] - \frac{i}{\sqrt{2}} [-1/2].$$

Более того, можно показать, что любое состояние (любая суперпозиция  $[1/2]$  и  $[-1/2]$ ) представляет спин, ориентированный в каком-либо направлении.

Любая система, описываемая двумя комплексными числами, аналогична системе со спином  $1/2$ . Рассмотрим, например, поляризацию света. Пусть  $x$ -поляризация направлена по, а  $y$ -поляризация против оси  $\zeta$  в искусственном трехмерном пространстве. Две другие оси этого пространства мы обозначим  $\xi$  и  $\eta$ . При этом спин по оси  $\xi$  соответствует поляризации  $+45^\circ$ , а спин против оси  $\xi$  — поляризации  $-45^\circ$ . Спин, направленный по оси  $\eta$ , есть правая круговая поляризация (ПКП), а направление против оси  $\eta$  соответствует левой круговой поляризации (ЛКП). Если мы нарисуем единичную сферу в этом

новом пространстве (рис. 4-1), то каждое состояние поляризации будет представляться точкой на этой сфере.

Произвольное направление соответствует эллиптической поляризации. Прохождение света через четвертьволновую пластину представляет собой некоторое вращение. Приведенная связь между поляризацией света и направлением в трехмерном пространстве была когда-то использована Стоксом. Она оказывается полезной для

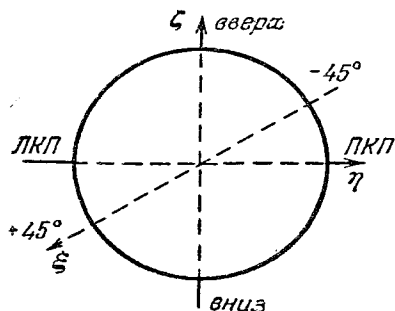


Рис. 4-1.

понимания некоторых процессов, например, протекающих в лазерах. (Лазер представляет собой устройство, использующее систему — молекулу аммиака, — которая может переходить из одного состояния в другое под воздействием электрического поля. Принцип действия может быть легко понят, если представить состояние молекулы аммиака в любой момент

времени через направление в некотором фиктивном трехмерном пространстве, аналогичном обычному пространству для электрона со спином  $1/2$ .)

**Правила сложения моментов.** Пусть некоторый прибор рождает две частицы  $A$  и  $B$ . Допустим, что частица  $A$  имеет спин 1 и может существовать в трех состояниях:  $m = +1, 0, -1$  и что частица  $B$  со спином  $1/2$  существует в двух состояниях с  $m = +1/2, -1/2$ . Для каждого из трех состояний  $A$  имеются два состояния  $B$ , поэтому система двух частиц может находиться в шести состояниях.

Такую систему можно представить, например, как электрон, вращающийся вокруг ядра. Каким способом следует описывать такую составную систему? Пусть матрицы момента импульса  $M_A$  и  $M_B$  действуют на состояния  $\psi_A$  и  $\psi_B$ . Тогда

$$\begin{aligned} (1 + i\varepsilon M_z) \psi_A \psi_B &= (1 + i\varepsilon M_{zA}) \psi_A (1 + i\varepsilon M_{zB}) \psi_B = \\ &= [1 + i\varepsilon (M_A + M_B)_z] \psi_A \psi_B, \end{aligned}$$

или \*)

$$M_x = M_{xA} + M_{xB}.$$

Состояния составной системы приведены в таблице 4-1. Поскольку их всего шесть, то может создаться впечатление, что  $j = 5/2$ . Там, однако, нет значений  $m = \pm 5/2$ , а состояния с  $m = \pm 1/2$  входят дважды.

Таблица 4-1

$m_A$	$m_B$	$m$	$m_A$	$m_B$	$m$
1	$1/2$	$3/2$	0	$-1/2$	$-1/2$
0	$1/2$	$1/2$	-1	$1/2$	$-1/2$
1	$-1/2$	$1/2$	-1	$-1/2$	$-3/2$

В действительности величина  $M^2 = (M_A + M_B)^2$  приводит к двум значениям для  $j$ :

$$j = 3/2, \quad m = 3/2, 1/2, -1/2, -3/2$$

и

$$j = 1/2, \quad m = 1/2, -1/2.$$

Ясно, что состояние  $j = 3/2, m = 3/2$  есть не что иное, как состояние (1) ( $1/2$ ) с параллельными спинами. Но какое же состояние соответствует  $j = 3/2, m = 1/2$ ? Напомним, что

$$M_-(m) = [j(j+1) - m(m-1)]^{1/2} (m-1).$$

Поэтому действие суммарного оператора

$$M_- = M_-^A + M_-^B$$

будет

$$M_-(1/2) = (-1/2), \quad M_-(-1/2) = 0,$$

$$M_-(1) = \sqrt{2}(0), \quad M_-(0) = \sqrt{2}(-1), \quad M_-(-1) = 0$$

и, следовательно,

$$M_-(1) (1/2) = \sqrt{2}(0) (1/2) + (1) (-1/2).$$

\*) Более точно,  $M_x = M_{xA}I_B + M_{xB}I_A$ , где  $I_A$  и  $I_B$  — единичные матрицы для состояний  $A$  и  $B$ .

Таблица 4-2

$m$	$j = 3/2$	$j = 1/2$
$3/2$	$(1) (1/2)$	
$1/2$	$(2/\sqrt{3}) (0) (1/2) +$ $+ (1/\sqrt{3}) (1) (-1/2)$	$(1/\sqrt{3}) (0) (1/2) -$ $- (2/\sqrt{3}) (1) (-1/2)$
$-1/2$	$(2/\sqrt{3}) (0) (-1/2) +$ $+ (-1) (1/2)$	$-(1/\sqrt{3}) (0) (-1/2) +$ $+ (2/\sqrt{3}) (-1) (1/2)$
$-3/2$	$(-1) (-1/2)$	

Таблица 4-3

$m$	$j = 1$ (симметрично)	$j = 0$ (антисимметрично)
1	$(1/2) (1/2)$	
0	$(1/\sqrt{2}) (1/2) (-1/2) +$ $+ (1/\sqrt{2}) (-1/2) (1/2)$	$\left\{ \begin{array}{l} (1/\sqrt{2}) (1/2) (-1/2) \\ - (1/\sqrt{2}) (-1/2) (1/2) \end{array} \right.$
-1	$(-1/2) (-1/2)$	

Таблица 4-4

$m$	$j = 2$ (симметрично)
2	$(+1) (+1)$
1	$(1/\sqrt{2}) [(+1) (0) + (0) (+1)]$
0	$(1/\sqrt{6}) [(+1) (-1) + (-1) (+1) + 2 (0) (0)]$
-1	$(1/\sqrt{2}) [(-1) (0) + (0) (-1)]$
-2	$(-1) (-1)$
$m$	$j = 1$ (антисимметрично)
2	
1	$(1/\sqrt{2}) [(+1) (0) - (0) (+1)]$
0	$(1/\sqrt{2}) [(+1) (-1) - (-1) (+1)]$
-1	$(1/\sqrt{2}) [(0) (-1) - (-1) (0)]$
-2	

Таблица 4-4 (продолжение)

$m$	$j = 0$ (симметрично)
2	$(1/\sqrt{3}) [(1)(-1) + (-1)(+1) - (0)(0)]$
1	
0	
-1	
-2	

С другой стороны,

$$M_-(^3/2, ^3/2) = \sqrt{3} (^3/2, ^1/2).$$

Таким образом,

$$(^3/2, ^1/2) = \sqrt{\frac{2}{3}} (0)(^1/2) + \frac{1}{\sqrt{3}} (1)(-^1/2).$$

Состояние  $(^1/2, ^1/2)$  образуется линейной комбинацией состояний  $(0)(^1/2)$  и  $(1)(-^1/2)$ , ортогональной к  $(^3/2, ^1/2)$ . Результаты приведены в таблице 4-2.

*Еще примеры:* Сложим два состояния со спином  $=1/2$  (табл. 4-3) при различных проекциях спина. Затем сложим два состояния со спинами  $=1$  (табл. 4-4). При сложении двух одинаковых моментов состояние с максимальным спином симметрично, следующее антисимметрично и т. д.

**Задача 4-1.** Рассмотрите сложение трех состояний со спинами  $=1$ . Найдите полностью симметричные состояния. Определите их момент.

## 5. РЕЛЯТИВИЗМ

Вы все знакомы с преобразованиями Лоренца. Для движения вдоль оси  $z$  формулы, связывающие две лоренцевы системы отсчета, имеют вид

$$z' = \frac{z - vt}{(1 - v^2)^{1/2}} = z \operatorname{ch} u - t \operatorname{sh} u,$$

$$t' = \frac{t - vz}{(1 - v^2)^{1/2}} = t \operatorname{ch} u - z \operatorname{sh} u,$$

$$x' = x, \quad y' = y,$$

где мы положили  $c=1$  и ввели величину  $u$  (которую специалисты именуют «быстротой»!):

$$\operatorname{th} u = \frac{v}{c}.$$

Отметим, что выписанные уравнения эквивалентны формулам вращения на мнимый угол  $\varphi = iu$ . При двух последовательных преобразованиях в одном и том же направлении быстроты складываются, т. е. если быстрота между системами отсчета 1 и 2 равна  $u$ , а между системами 2 и 3 она равна  $v$ , то преобразованию от системы 1 к системе 3 соответствует быстрота  $w = u + v$ . Преобразования в различных направлениях не коммутируют. Совокупность всех лоренцевых преобразований (включая повороты) образует группу.

*Задача 5.1.* Допустим, что имеется объект со спином  $1/2$  в пространстве трех измерений, или рассмотрим более общее состояние, описываемое амплитудой

$$a = \text{столбец } [a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Что случится с  $a$  при преобразовании Лоренца?

Подсказка: Мы уже рассматривали эту задачу для преобразования вращения. Если время позволяет, рассмотрите вопрос о нормировке.

Напомним, что величина  $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$  есть инвариант. Введем следующие обозначения:  $x_\mu$  есть вектор с компонентами  $x_4 = t$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z^*$ ). Если вектор  $a_\mu = (a_4, a_1, a_2, a_3)$  преобразуется как  $x_\mu$ , то мы будем называть  $a_\mu$  4-вектором. Так, например,  $p_\mu = (E, \mathbf{p})$  представляет собой 4-вектор, причем

$$E' = \frac{E - vp_2}{(1 - v^2)^{1/2}} \text{ и т. д.}$$

Четырехмерное инвариантное скалярное произведение двух 4-векторов  $a_\mu$  и  $b_\mu$  равно

$$a \cdot b \equiv a_\mu b_\mu = a_4 b_4 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3.$$

---

\*) В современной литературе более употребительно обозначение  $t = x_0$ . В этом случае символом  $x_4$  обозначают величину  $it$ . (Прим. перев.)



Введем величину

$$\begin{aligned} \delta_{\mu\nu} &= 1 & \mu = \nu = 4, \\ \delta_{\mu\nu} &= -1 & \mu = \nu = 1, 2, 3, \\ \delta_{\mu\nu} &= 0 & \mu \neq \nu. \end{aligned}$$

Заметим, что  $\delta_{\mu\nu} a_\nu = a_\mu$ . Введем еще 4-вектор

$$\nabla_\mu \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right).$$

Полезным инвариантом является также произведение  $p \cdot p = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$ . Искусное употребление инвариантов в вычислениях часто позволяет избежать прямого использования преобразований Лоренца. В качестве простого примера рассмотрим  $p$ — $p$ -рассеяние: какова минимальная энергия, необходимая для рождения протон-антипротонной пары?

$$\frac{(E, \mathbf{k})}{p} \rightarrow \frac{(M, 0)}{\dot{p}} \quad W = E + M, \quad E^2 - \mathbf{k}^2 = M^2$$

*до (в лаб. системе)*

$$p \cdot \cdot p \quad \varepsilon = 4M, \quad \kappa = 0$$

$$p \cdot \cdot \bar{p} \quad \text{после (в с. ц. м.)}$$

Имеем  $\varepsilon^2 - \kappa^2 = (4M)^2$ . Поэтому  $(E + M)^2 - \mathbf{k}^2 = 16M^2$ , откуда  $E = 7M$ . Таким образом, необходимая кинетическая энергия равна  $6M \approx 5,6$  ГэВ.

**Волны.** Как известно, частице с энергией-импульсом  $p_\mu$  сопоставляется волна

$$\varphi = u \exp(-ip_\mu x_\mu) = u \exp[-i(Et - \mathbf{p}\mathbf{x})].$$

Сразу очевидно, что фаза волны инвариантна при лоренцевых преобразованиях. В действительности именно из этих соображений де Бройль нашел соотношение между энергией, импульсом, длиной волны и частотой. Задача 5-1 тем самым сводится к тому, чтобы установить, как преобразуется  $u$ .

Заметим, что

$$\nabla_\mu \varphi = -ip_\mu \varphi.$$

**Положительные и отрицательные энергии.** Уравнение  $E^2 = m^2 + \mathbf{p}^2$  имеет два решения:

$$E = \pm \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}.$$

Замечательно то, что мы должны оба решения рассматривать серьезно. Оказывается, что существуют частицы, описываемые решениями как с положительной, так и с отрицательной частотами. При  $E > 0$  амплитуда  $\varphi \sim \exp(-iEt)$ , а при  $E = -W$ ,  $W > 0$ ,  $\varphi \sim \exp(iWt)$ . Эти два случая соответствуют частицам и античастицам.

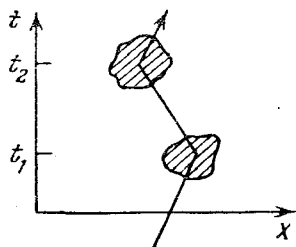


Рис. 5-1.

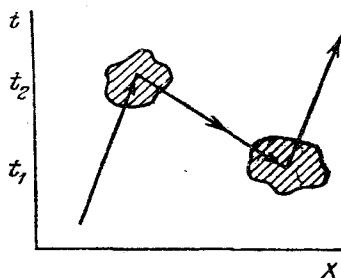


Рис. 5-2.

Изобразим рассеяние классической частицы на пространственно-временной диаграмме, приведенной на рис. 5-1. (Здесь заштрихованная область представляет внешний источник, рассеивающий частицы.)

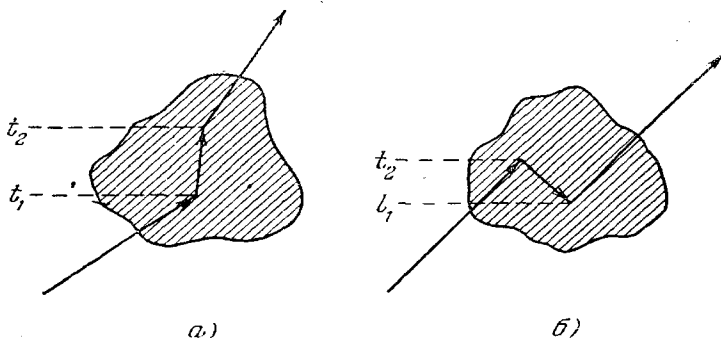


Рис. 5-3.

Теперь попытаемся представить, что случилось бы, если бы траектория (или, в рамках квантовомеханического рассмотрения, волна) могла быть направлена вспять во времени! Подобная ситуация изображена на рис. 5-2. Обычным способом такой процесс может быть описан следующим образом (см. рис. 5-3). При  $t < t_1$  имеется

только начальный электрон. В момент  $t_1$  внешний потенциал рождает электрон-позитронную пару. В момент  $t_2 > t_1$  позитрон аннигилирует с начальным электроном, так что при  $t > t_2$  остается только рассеянный электрон. Вместо такого рассуждения мы хотим обобщить идею рассеяния и считать, что электрон рассеивается назад во времени от  $t_2$  к  $t_1$ . Поэтому обычный позитрон проявляется как электрон, движущийся во времени вспять. Два процесса «двойного рассеяния», изображенные на рис. 5-3, теперь отличаются только порядком во времени последовательных актов рассеяния, если следовать за электроном вдоль его мировой линии. (Могло бы сложиться впечатление, что такая интерпретация подразумевает возможность получения информации из будущего, однако детальный анализ показывает, что причинность не нарушается.)

Теперь посмотрим, каким образом такая точка зрения решает проблему отрицательных энергий. Мы будем говорить о начальном (прошлое) и конечном (будущее) состояниях. Введем также понятие *входящего* и *выходящего* состояний (которые не имеют никакого отношения ко времени). В матричном элементе  $\bar{\psi} M \psi$   $\psi$  есть *входящее* состояние, а  $\bar{\psi}$  — *выходящее* состояние. Для того чтобы определить *входящие* и *выходящие* состояния, будем следовать вдоль мировой линии частицы, даже если придется идти вспять во времени. Применительно к позитрону на рис. 5-3, б мы видим, что *выходящее* состояние для рассеяния при  $t_2$  есть начальное состояние позитрона. Например, матричный элемент для рассеяния электрона равен

$$\int \bar{\psi}_{\text{кон}} M \psi_{\text{нач}} dV,$$

тогда как для рассеяния позитрона получим

$$\int \bar{\psi}_{\text{нач}} M \psi_{\text{кон}} dV.$$

Полное правило гласит:

Для электронов — *входящее* состояние в матричном элементе есть начальное состояние, а *выходящее* состояние в матричном элементе есть конечное состояние.

Для позитронов — *входящее* состояние в матричном элементе есть конечное состояние, а *выходящее* — начальное.

Рассмотрим пробный пример. Допустим, что электрон теряет некоторую энергию  $\omega$  в акте рассеяния:  $E_i = E_f + \omega > E_f$ . Тогда матричный элемент зависит от времени следующим образом:

$$\exp(iE_f t) \exp(i\omega t) \exp(-iE_i t)$$

(таким образом, видно, что  $M \sim \exp(i\omega t)$ , если оператор  $M$  «поглощает» энергию).

В случае позитрона  $\exp(-iEt) = \exp(iWt)$ . Если рассматривать позитрон по-старому (что неправильно!), то временная зависимость будет

$$\exp(-iW_f t) \exp(i\omega t) \exp(iW_i t),$$

т. е.  $W_f = W_i + \omega$  и в процессе рождается энергия!

Однако согласно нашему правильному рецепту мы должны написать

$$\exp(-iW_i t) \exp(i\omega t) \exp(iW_f t),$$

так что  $W_i = W_f + \omega$  и энергия, поглощаемая оператором  $M$ , соответствует потере энергии позитроном, как нам и нужно.

Можно взять более сложный случай. Так, например, амплитуда аннигиляции пары равна

$$(1) \quad \int \bar{\phi}_{\text{нач. поз}} M \phi_{\text{нач. эл}} dV,$$

тогда как амплитуда рождения пары будет

$$(2) \quad \int \bar{\phi}_{\text{кон. эл}} M \phi_{\text{кон. поз}} dV.$$

Как видно, если оператор  $M$  поглощает энергию, то в (1) он поглотит всю энергию пары, тогда как в (2) он даст нуль и т. п.

Первая интерпретация состояний с отрицательной энергией была дана Дираком, который использовал принцип исключения Паули для того, чтобы запретить электронам падать на уровни с отрицательной энергией (рис. 5-4). Согласно его идее все состояния с отрицательной энергией заполнены вплоть до  $-mc^2$ . Это бесконечное море является ненаблюдаемым. Но мы можем заметить пузырьки

в море, т. е. отсутствие электрона в каком-либо состоянии с отрицательной энергией. Такой пузырек и есть позитрон.

Рассмотрим, например, рассеяние позитронов. Каким образом позитрон может перейти в другое состояние? Электрон падает в первоначальную дырку, оставляя вакансию — дырку, т. е. позитрон, вместо себя (в состоянии

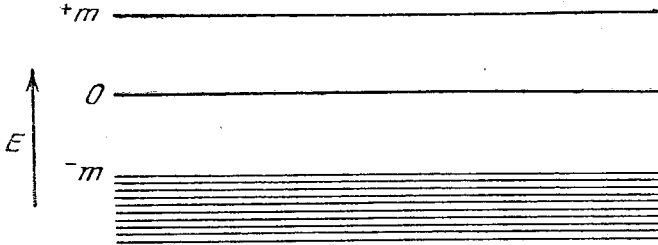


Рис. 5-4.

с энергией  $-E=W$  и импульсом  $-p$ ) (рис. 5-5). Матричный элемент для этого процесса

$$\int \phi_{\text{нач}} M \phi_{\text{кон}} dV$$

совпадает с выражением, к которому мы пришли с помощью аргументов, использующих обращение времени.

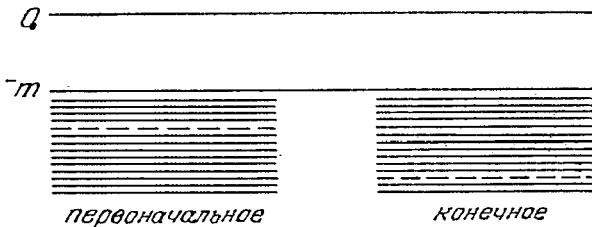


Рис. 5-5.

Наш подход имеет то преимущество, что вам не приходится вводить бесконечное море электронов. Но для бозе-частиц вы не смогли бы «заполнить море и в миллионы лет». После создания квантовой механики прошло восемь лет, прежде чем Паули и Вайскопф предложили должную

практику уравнения Клейна — Гордона. Интерпретация бозонных состояний с отрицательной энергией оказалась совершенно отличной от теории Дирака и использовала идеи метода вторичного квантования (Паули и Вайскопф [6]). Однако эта интерпретация совершенно эквивалентна нашему правилу, по которому для античастиц всего лишь меняется роль «входящих» и «выходящих» состояний.

(Лекции, с 6-й по 14-ю, представляют собой содержание неопубликованного обзора по странным частицам, написанного Р. Фейнманом и М. Гелл-Манном.)

## 6. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ И ФЕРМИЕВСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Теперь приступим к описанию того, до какой степени нам удастся продвинуться в решении основной задачи, задачи вековой давности: объяснить весь наблюдаемый мир через небольшое количество элементов, сочетающихся в бесконечно разнообразных комбинациях. Самый первый вопрос: каковы эти элементы? Многочисленные неожиданные результаты экспериментов в области высоких энергий выявили недостаточность наших представлений об этих элементах. Мы опишем ниже те теоретические идеи, которые оказались наиболее плодотворными при «наведении порядка» в экспериментальном материале. При этом мы уделим основное внимание самим идеям и не будем подробно обсуждать их происхождение или историю развития. Более того, мы сможем описать лишь современный взгляд на вещи. Почти каждое утверждение можно было бы начинать оговоркой типа: «Разумеется, на этот вопрос можно взглянуть с другой стороны, но...». Мы вполне отдаем себе отчет о фрагментарности и неполноте наших современных представлений и множестве мыслимых возможностей, однако наше изложение весьма усложнилось бы при постоянных упоминаниях о них. Наш текст содержит обзор достижений многих исследователей, а вовсе не отчет о новых результатах авторов.

Все наблюдаемое множество форм и разнообразие поведения материи, по всей видимости, может быть описано с помощью конечного числа фундаментальных частиц,

взаимодействующих определенным образом. Они подчиняются общим принципам квантовой механики и принципу относительности. Согласно этим принципам, составляющим основу квантовой теории поля, не существует ничего, кроме этих частиц. Частицы обладают рядом внутренних свойств, таких как масса покоя и спин, а связи между ними выражаются через взаимодействия.

**Электромагнитное взаимодействие.** Свет, например, представлен фотоном—частицей с массой покоя 0 и спином 1. Испускание света возбужденным атомом представляется как результат фундаментального взаимодействия или процесса

$$e \rightarrow e, \gamma \quad (e \text{ — электрон, } \gamma \text{ — фотон}),$$

означающего, что существует возможность (которая более точно описывается соответствующей величиной—амплитудой) того, что электрон может «стать» фотоном и электроном. Точная математическая форма этого взаимодействия (зависимость амплитуды от направления движения и спина участвующих частиц) известна с большой точностью (во всяком случае, до энергий, меньших 1 ГэВ). Когда этот акт происходит с электроном в атоме, атом испускает свет. Каждому процессу соответствует обратный (каждая медаль имеет две стороны), описываемый соответствующей амплитудой. В нашем случае обратный процесс — это процесс поглощения света:

$$e \leftrightarrow e, \gamma. \quad \begin{array}{c} \nearrow e \\ \longrightarrow e \\ \searrow \gamma \end{array} \quad (6-1)$$

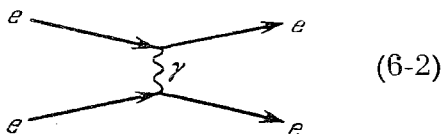
Подобные соотношения описываются либо двойной стрелкой, либо картинкой, на которой линии соответствуют входящим или выходящим частицам. Картинка изображена справа от формулы (6-1).

Единичный свободный электрон не может испустить один фотон из-за сохранения энергии и импульса, но когда два электрона оказываются рядом, то один из них может испустить фотон, который незамедлительно поглощается другим электроном. Квантовая механика допускает «временное» существование состояний, реальное осуществление которых запрещено законами сохранения. Прохождение через потенциальный барьер при распаде радиоактив-

ных элементов представляет собой хорошо известный пример такого рода. Результат такого обмена фотоном выступает как взаимодействие между электронами, т. е. как сила электрического отталкивания, обратно пропорциональная квадрату расстояния. Таким образом, все электрические и магнитные силы, действующие между электронами, так же как испускание, рассеяние и поглощение радиоволн, света и рентгеновских лучей электронами, достаточно точно описываются во всех деталях простым законом (6-1). Соответствующий раздел квантовой теории поля называется спинорной электродинамикой.

Процесс, который может возникнуть лишь в силу временного нарушения законов сохранения, называется виртуальным процессом. Диаграмма, изображающая электроны, взаимодействующие посредством обмена виртуальным фотоном, будет

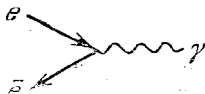
$e, e \leftrightarrow e, e$  не прямой.



Только реальные частицы изображаются линиями со свободными концами (два входящих электрона и два выходящих), тогда как оба конца линии виртуального фотона «упираются» в фундаментальные взаимодействия (6-1).

Важную роль играет еще один принцип, связанный с обратимостью во времени: каждой частице соответствует античастица. (Для некоторых нейтральных частиц, например для фотона, античастица совпадает с частицей.) Соотношения для процессов с участием античастиц получаются по простому правилу: переставьте частицу в противоположную часть уравнения, заменив ее при этом на античастицу. Антиэлектрон есть не что иное, как позитрон, поэтому (6-1) дает

$e, \bar{e} \leftrightarrow \gamma$



и процессы рождения и аннигиляции пар, таким образом также полностью описываются уравнением (6-1). Переставляя фотон в другую часть уравнения (6-1):  $e, \bar{\gamma} \leftrightarrow e$ , мы снова получаем уравнение (6-1), так как фотон не имеет анти-



частицы, или, более точно, античастица для фотона есть снова фотон ( $\bar{\gamma} = \gamma$ ).

Многие другие фундаментальные частицы также связаны с фотоном; так, если символом  $p$  обозначить протон, то можно записать

$$p \leftrightarrow p, \gamma. \quad \rho \longrightarrow \begin{array}{l} \nearrow \rho \\ \searrow \gamma \end{array} \quad (6-3)$$

Все подобные частицы называются «заряженными». Электрический заряд  $e$  фигурирует в двух замечательных законах, ни один из которых не получил хорошего объяснения. Первый сводится к тому, что все фундаментальные частицы имеют один и тот же заряд (который может отличаться знаком)\*). Второй закон гласит, что все другие взаимодействия таковы, что полный заряд всех частиц в любом процессе никогда не меняется. Наконец, численное значение электрического заряда представляется безразмерным отношением

$$\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137,039}.$$

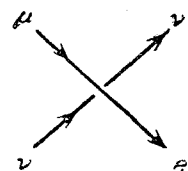
Значение и происхождение этой величины, которая является выражением силы взаимодействия (6-1), также остается загадочным. Численное значение определено экспериментально. Как раз в силу малости числа  $1/137$  мы и считаем электромагнитное взаимодействие довольно слабым.

**Взаимодействие Ферми.** Есть, однако, еще одно взаимодействие, даже более слабое, чем электромагнитное. Это — взаимодействие Ферми, ответственное, в частности, за  $\beta$ -распад нейтрона. Именно распад нейтрона  $n \rightarrow p, e, \bar{\nu}$  рассматривается как прямой результат взаимодействия

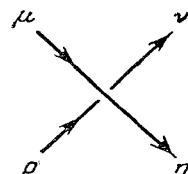
$$\bar{p}, n \leftrightarrow \bar{\nu}, e, \quad \begin{array}{l} n \nearrow \quad \searrow p \\ \swarrow \bar{\nu} \quad \searrow e \end{array} \quad (6-4)$$

\*) В настоящее время известен ряд резонансов, несущих заряд, кратный заряду электрона, например,  $\Delta$  (1232,  $3/2$  ( $3/2^+$ )). (Прим. перев.)

которое мы будем называть взаимодействием Ферми. Его также часто называют слабым взаимодействием. Другой пример фермиевского взаимодействия являет распад мюона  $\mu$  — заряженной частицы, подобной электрону, которая, однако, тяжелее его в  $208,8 \pm 1$  раз,  $\mu \rightarrow e + \nu + \bar{\nu}$

$$\bar{\nu}, \mu \leftrightarrow \bar{\nu}, e. \quad (6-5)$$


Наконец, третья форма фермиевского взаимодействия ответственна за захват мюона ядром  $\mu + p \rightarrow n + \nu$

$$\bar{\nu}, \mu \leftrightarrow \bar{p}, n. \quad (6-6)$$


Другие формы описывают медленные распады странных частиц, и мы коснемся их позднее.

## 7. ФЕРМИЕВСКИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И НИСПРОВЕРЖЕНИЕ ЧЕТНОСТИ

Замечательным образом интенсивности взаимодействий Ферми для каждого из трех приведенных примеров оказываются равными. Они определяются постоянной  $G$ , удовлетворяющей соотношению

$$\frac{GM^2}{\hbar c} = (1,01 \pm 0,01) 10^{-5},$$

где  $M$  — масса протона, введенная для того, чтобы получить безразмерное отношение. Это отношение очень мало — взаимодействие очень слабое. Единственное взаимодействие, известное для нейтрино (масса покоя 0, спин  $1/2$ ), — это фермиевское взаимодействие. Таким образом, взаимодействие нейтрино с материей очень слабо, и его прямая регистрация чрезвычайно затруднена.

Детальная форма взаимодействия Ферми была установлена в 1957 году. Оно является единственным взаимодействием, нарушающим принцип симметрии физических законов относительно отражения (известного также как закон сохранения четности).

В течение долгого времени казалось очевидным, что для каждого физического процесса существует (или может в принципе существовать) зеркально-сопряженный процесс. Вследствие этого различие между правым и левым казалось относительным, ни то ни другое не могло быть определено абсолютным образом. Разумеется, мы должны отвлекаться от некоторых исторических примеров (например, вращения нашей планеты), поскольку они соответствуют частному выбору начальных условий. Если бы мы передали по радио обитателю другой галактики инструкцию по конструированию какого-либо устройства, то он вполне бы мог построить вместо него зеркальное отображение такого устройства, так как мы не смогли бы сообщить наше определение понятий левого и правого. Все опыты, основанные на использовании электромагнитных и ядерных сил, полностью соответствовали такой точке зрения.

Эта идея в квантовой механике нашла свое отражение в свойстве четности состояния. Положим, что прибор рождает объект в состоянии  $\varphi$ , тогда как зеркально-отраженный прибор создает объект в состоянии  $\varphi'$ . Принцип суперпозиции требует теперь

$$\varphi' = P\varphi,$$

где  $P$  — линейный оператор. Но

$$P\varphi' = \varphi$$

с точностью до фазового множителя. Поэтому  $P^2 = 1$  и существуют только две возможности:

$$\begin{array}{l} \varphi \xrightarrow{\text{отражение}} +\varphi \quad \text{положительная четность} \\ \varphi \xrightarrow{\quad\quad\quad} -\varphi \quad \text{отрицательная четность} \end{array}$$

Принцип симметрии отражения требует, чтобы система всегда оставалась в состоянии с данной четностью.

Однако в начале 1957 года по предложению Янга и Ли была проведена серия экспериментов, результаты кото-

рых пришли в противоречие с этим принципом. Рассмотрим опыт с  $\text{Co}^{60}$ , изображенный на рис. 7-1. Спины ядер  $\text{Co}^{60}$  были упорядочены магнитным полем при очень низких температурах вдоль одного направления, и наблюдалось угловое распределение испущенных электронов. Оказалось, что электроны в основном вылетают назад по отношению к направлению спина  $\text{Co}^{60}$ . В (воображаемом) зеркальном эксперименте электроны должны испускаться преимущественно по направлению спина  $\text{Co}^{60}$ . Поэтому

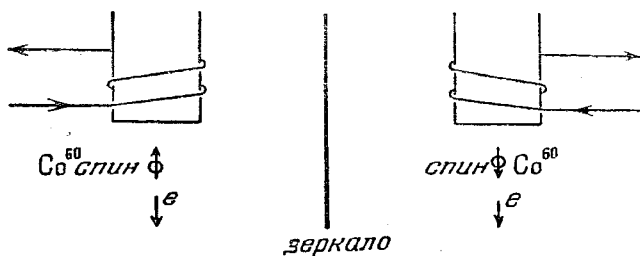


Рис. 7-1.

такой процесс не может иметь место в мире, симметричном относительно отражения.

Мы приходим к выводу, что в радиограмме нашему человеку в другой галактике мы можем дать определение левого и правого. Для этого он должен упорядочить спины ядер  $\text{Co}^{60}$  и определить направление магнитного поля, при котором электроны вылетают преимущественно назад. Но что если наш коллега состоит из антиматерии, использует анти- $\text{Co}^{60}$  и наблюдает позитроны? В настоящее время мы полагаем, что он получит правило левой руки. Иными словами, мы считаем, что зеркальный мир есть возможный мир, при условии, что материя заменена на антиматерию. Поэтому позитроны от анти- $\text{Co}^{60}$  будут испускаться параллельно магнитному полю.

**Гравитация.** В дополнение к этим взаимодействиям есть еще одно, еще более слабое, — гравитация. Законы гравитации, прекрасно известные в классическом макроскопическом пределе, до сих пор не были вполне удовлетворительно «переведены» на язык квантовой теории поля. Если это будет сделано, то появится частица (гравитон: масса покоя 0, спин 2), универсально связанная со всеми другими частицами такой малой константой связи, что

гравитационные силы между электронами оказываются в  $10^{-39}$  раз слабее электрических.

**Ядерные силы.** Однако, помимо этих довольно слабых взаимодействий: гравитационного, фермиевского и электромагнитного, должно существовать еще что-то гораздо более сильное. Силы, связывающие нуклоны в ядре, слишком велики, чтобы их можно было бы объяснить с помощью перечисленных трех взаимодействий. Как раз эти сильные взаимодействия и частицы, в которых они участвуют, мы и хотим сейчас обсудить. В сильных взаимодействиях не участвуют ни электроны, мюоны и нейтрино (называемые вместе лептонами, или слабо взаимодействующими частицами), ни фотоны и гравитоны. Частицы, подверженные сильным взаимодействиям, называются «сильно взаимодействующими частицами» и состоят из гиперонов (в число которых входят протон и нейтрон) и мезонов. (Мюон не считается мезоном.)

Силы, удерживающие электроны около ядер, разумеется, являются силами кулоновского притяжения, возникающими в результате обмена виртуальным фотоном между электроном и протоном ядра [т. е. комбинации взаимодействий (6-1) и (6-3)]. Но само ядро состоит из нейтронов и протонов, связанных сильным притяжением.

Эти ядерные силы очень тщательно изучались путем исследования ядер и реакций рассеяния нейтронов и протонов на протонах. Они оказались не только значительно более интенсивными, чем электрические силы, но также и гораздо более сложными. В действительности, за исключением одной неожиданной мелочи, они оказались почти настолько сложными, насколько это возможно. Вместо сил, обратно пропорциональных квадрату радиуса, это — силы очень большого отталкивания на малых расстояниях и притяжения на несколько больших расстояниях, быстро спадающие к нулю на расстояниях, больших  $10^{-13}$  см. Силы зависят от относительного направления спинов  $p$  и  $n$  и от ориентации этих спинов по отношению к линии, связывающей две частицы. Они даже зависят от скорости частиц и ее направления относительно спина (спин-орбитальное взаимодействие). Но — один неожиданный пустячок. Силы между  $p$  и  $p$ , между  $p$  и  $n$  и между  $n$  и  $n$  практически равны друг другу. Разумеется, между  $p$  и  $p$  имеются электрические силы, которым нет аналога в системе  $p$  и  $n$ ,

но если их учесть, положив, что полное взаимодействие есть сумма ядерного плюс электрическое, то, насколько известно, ядерные части  $p, p$ -сил,  $p, n$ -сил и  $n, n$ -сил равны, если частицы находятся в одинаковых состояниях.

**Изотопический спин.** Таким образом, структура сильных ядерных взаимодействий имеет определенную симметрию (именуемую симметрией изотопического спина), отражающую симметрию сил относительно замены протона на нейтрон. Даже малая разница масс покоя нейтрона и протона весьма вероятно представляет массу, связанную с электромагнитным полем, окружающим эти частицы.

Выучим наш первый урок. Он сводится к тому, что сильно взаимодействующие частицы образуют группы или наборы. Нуклоны — это набор из двух состояний — протона и нейтрона. Оба состояния имеют одну и ту же энергию. Они аналогичны двум спиновым состояниям электрона (спин «вверх» и спин «вниз» вдоль данной оси), которые имеют одинаковую энергию в отсутствие магнитного поля.

Благодаря тому, что квантовая механика системы с двумя состояниями была в деталях изучена на примере системы со спином  $1/2$ , физики-теоретики использовали эту аналогию в полной мере. Два состояния нуклона представляются как состояния «вверх» и «вниз» объекта со спином  $1/2$  в некотором воображаемом трехмерном пространстве. Оно называется пространством изотопического спина. Мы говорим, что нуклон имеет изотопический спин  $1/2$ . Равенству сил соответствует гипотеза о том, что любое направление может быть выбрано за направление изотопического спина. В обычном конфигурационном пространстве такая изотропия приводит к сохранению момента. Поэтому сильные взаимодействия обладают соответствующим свойством — законом сохранения полного изотопического спина.

Так как частицы со спином  $0, 1/2, 1, 3/2, \dots$  могут находиться в  $1, 2, 3, 4, \dots$  состояниях соответственно, то набору, скажем, трех состояний соответствует изотопический спин  $1$  и т. д. Поэтому мы можем использовать известные приемы комбинирования состояний с различными моментами для того, чтобы определить, как различные частицы могут взаимодействовать друг с другом симметрично отно-

нительно замены протона на нейтрон или, более общо, с сохранением симметрии изотопического спина.

Все это справедливо только в сильных взаимодействиях; изотопический спин не сохраняется в слабых взаимодействиях, как и в электродинамике. Протон и нейтрон, разумеется, совершенно различным образом связаны с фотоном.

**Пион-нуклонная связь.** Для иллюстрации этих идей предположим, как предложил Юкава, что ядерные силы являются результатом процесса типа (6-2), в котором вместо электрона стоит нуклон, а вместо фотона —какая-то другая частица. Попробуем реализовать такую возможность. Допустим, что фундаментальный процесс, аналогичный (6-1), имеет вид



где  $\pi^+$  обозначает положительный пион, новую частицу, которая в силу закона сохранения электрического заряда должна быть положительно заряжена. Как следствие, должны возникнуть силы между протоном и нейтроном,

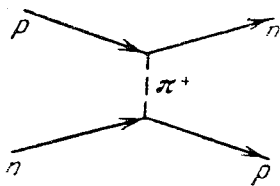


Рис. 7-2.

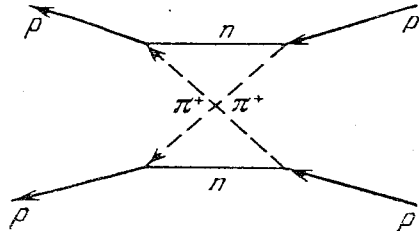


Рис. 7-3.

обусловленные обменом виртуальным  $\pi^+$  (см. рис. 7-2). (В данном случае  $p$  и  $n$  поменялись местами, поэтому это обменные силы.)

Взаимодействие (7-1) приводит к тому, что между двумя протонами возникает сила, отвечающая обмену двумя положительными пионами (рис. 7-3). Но силы двухпионного обмена не могут быть равны силам однопионного обмена. Поэтому должен существовать способ

однопионного обмена для двух протонов. Должен существовать нейтральный пион  $\pi^0$  и процесс



а также для нейтрона



Эти новые взаимодействия меняют силы между  $n$  и  $p$ , добавляя необходимую часть (рис. 7-4). В результате ряда

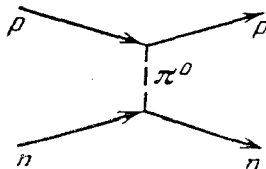


Рис. 7-4.

попыток было установлено, что если (7-1) имеет место, то (7-2), (7-3) и



также необходимы, но амплитуды или интенсивности (аналог. электрического заряда для пионного взаимодействия) для (7-1) и (7-4) должны быть в  $\sqrt{2}$  больше, чем для (7-2), а амплитуды для (7-3) и (7-2) равны и противоположны по знаку. При этих условиях можно показать, что симметрия ядерных сил  $(p, p) = (p, n) = (n, n)$  сохраняется при всех условиях независимо от того, какое число пионов участвует в обмене.

## 8. ПИОН-НУКЛОННАЯ СВЯЗЬ

Пусть существуют три фундаментальных взаимодействия, изображенные на рис. 8-1, где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — амплитуды процессов (1), (2) и (3). Определим константы связи



$a$ ,  $b$ ,  $c$  таким образом, чтобы они приводили к симметрии ядерных сил  $(p, p) = (n, n) = (p, n)$  для соответствующих состояний. В нижнем порядке мы приходим к процессам, изображенным на рис. 8-2. Поэтому должно быть  $bc + a^2 = b^2 = c^2$ . Если  $b = c$  и  $a = 0$ , то нет взаимодействия между заряженными  $\pi$ -мезонами и нуклонами, что противоречит опыту. Следовательно,

$$b = -c, \quad a = (2b^2)^{1/2} = b\sqrt{2}.$$

Возможный выбор  $a = -\sqrt{2}b$  отвечает иному определению фазы  $\pi$ -мезона, которая в любом случае является произвольной.

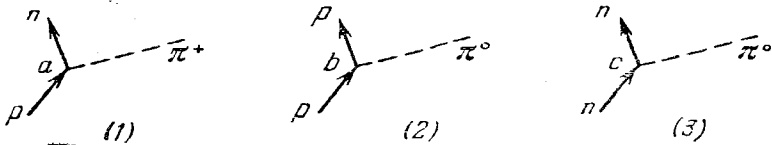


Рис. 8-1.

Этот результат может быть также легко получен другим путем. Триплет пионов ( $\pi^+$ ,  $\pi^0$ ,  $\pi^-$ ) имеет изотопический спин 1. В реакции  $N \leftrightarrow N + \pi$  (мы обозначили нуклон символом  $N$ ) левая часть, единичный нуклон, имеет изоспин  $1/2$ . Правая часть имеет шесть возможных состояний  $(p\pi^+)$ ,  $(p\pi^0)$ ,  $(p\pi^-)$ ,  $(n\pi^+)$ ,  $(n\pi^0)$ ,  $(n\pi^-)$ , которые могут быть разложены в дублет и квартет, так как путем сложения изотопического спина  $1/2$  и изоспина пиона 1 можно получить изоспины  $1/2$  и  $3/2$ . Если изотопический спин сохраняется в сильных взаимодействиях, то состояние справа должно иметь изоспин  $1/2$  и по аналогии с формулой сложения моментов мы приходим к соотношениям

$$p \leftrightarrow (p, \pi^0) + \sqrt{2}(n, \pi^+), \quad (8-1)$$

$$n \leftrightarrow (n, \pi^0) + \sqrt{2}(p, \pi^-), \quad (8-2)$$

коэффициенты которых дают амплитуды соответствующих состояний. Квадраты амплитуд приводят к вероятностям — поэтому если нуклон и пион находятся в состоянии с изоспином  $1/2$  и положительным зарядом, то шансы 2 : 1 получить  $n$ ,  $\pi^+$  скорее, чем  $p$ ,  $\pi^0$ .

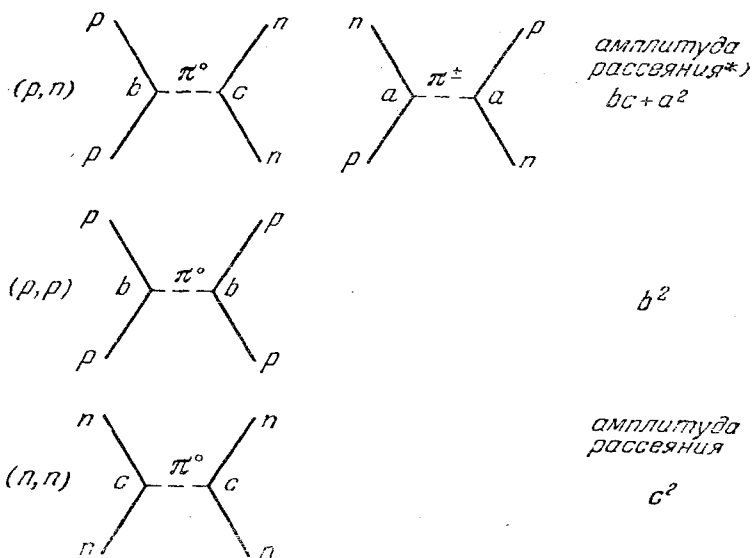


Рис. 8-2.

\*) Сложение амплитуд в первом процессе требует некоторой осторожности. Для того чтобы сопоставить  $(p, n)$  с  $(p, p)$  и  $(n, p)$ -системами, следует рассмотреть состояние  $(p, p)$ , симметричное от-

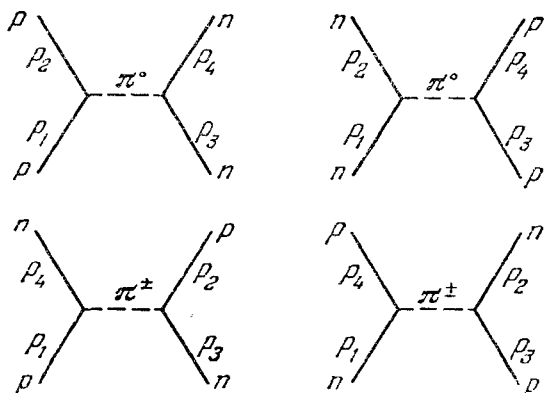


Рис. 8-3.

носительно перестановки аргументов. Здесь возникают четыре возможности, изображенные на рис. 8-3, соответствующие переходам между одинаковыми начальными и конечными состояниями, амплитуды которых согласно нашему правилу должны быть сложены.

Такие  $\pi$ -мезоны, или пионы, были в самом деле обнаружены. Они имеют спин 0. Заряженные мезоны  $\pi^+$  и  $\pi^-$  имеют равные массы  $=276$  массам электрона, тогда как незначительно отличающаяся масса  $\pi^0=268 m_e$ . Разность, видимо, есть просто дополнительная электромагнитная энергия заряженных пионов. Все следствия изотопической симметрии относительно коэффициентов связи (после должного учета электродинамических поправок) были подтверждены экспериментально.

Дает ли механизм пионного обмена правильное описание ядерных сил между нуклонами? Этот вопрос приводит нас к серьезному затруднению. Дело в том, что мы не умеем рассчитывать, с какой-либо степенью точности, следствия сильной связи! Поэтому мы не можем вычислить ядерные силы и заключить, соответствуют ли они связям (8-1) и (8-2).

Как мы видели, возникают силы, отвечающие обмену одним, двумя, тремя и более пионами. Нетрудно вычислить вклад от однопионного обмена, несколько сложнее — от обмена двумя пионами и т. д., но мы не знаем, как определить сумму всех членов. В электродинамике также есть вклады от обмена одним, двумя, тремя и т. д. фотонами, однако учет каждого последующего фотона приводит к появлению в амплитуде дополнительного множителя  $e^2/\hbar c$ , т. е.  $1/137$ . Поэтому там определяющим оказывается вклад однофотонного обмена, двухфотонный член добавляет поправку в несколько процентов и т. д. Таким образом, мы имеем дело с рядом быстро убывающих членов (который называется разложением теории возмущений). Однако константа связи  $g$  для мезонов, соответствующая  $e$  для фотонов, удовлетворяет соотношению

$$g^2/\hbar c \simeq 15.$$

Это — очень большая величина, которая оправдывает термин «сильная» связь и в то же время препятствует использованию теории возмущений.

Большие усилия были потрачены на то, чтобы найти обходные пути, использующие глобальные теоремы, изотопическую симметрию и дисперсионные соотношения (соотношения, возникающие из принципа причинности, утверждающего, что сигналы не могут распространяться быст-

рее света, соотношения, которые мы не можем рассматривать здесь). Достаточно сказать, что в настоящее время нет возможности рассчитывать большую часть эффектов, связанных с сильными взаимодействиями. Существенные трудности препятствуют анализу этих взаимодействий. Имеются даже серьезные сомнения в том, что сильная связь является логически непротиворечивой возможностью в квантовой теории поля.

**Непрямые взаимодействия.** Чтобы пояснить характер возникающих проблем, рассмотрим, для примера, взаимодействие нейтронов и фотонов. На опыте оно наблюдается: нейтрон имеет магнитный момент, определенный с точностью до миллионных долей. Однако мы все же можем считать, что прямой нейтрон-фотонной связи нет. Дело в том, что согласно (7-4) нейтрон может виртуально превращаться в заряженные частицы и таким непрямым образом взаимодействовать с фотоном. Одна из возможностей



Рис. 8-4.

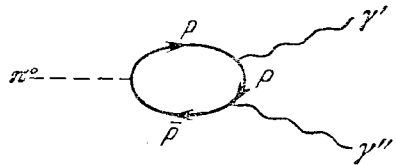
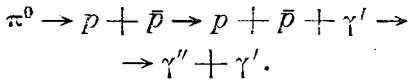
представлена на рис. 8-4, однако имеется много других диаграмм, содержащих больше виртуальных мезонов. Мы не можем вычислить с их помощью магнитный момент и поэтому не имеем возможности использовать эти прекрасные по точности опытные данные в качестве пробного камня для наших теорий. Все, что мы можем, это качественно объяснить электромагнитные и распадные свойства пионов и нуклонов с помощью таких промежуточных процессов.

Заряженные и нейтральные пионы значительно различаются по своим распадным свойствам.  $\pi^0$ -мезон очень быстро ( $< 10^{-15}$  сек) распадается на два фотона



Мы не можем привлечь изотопическую симметрию для утверждения о том, что аналогичная реакция имеет место для  $\pi^+$ . Она невозможна из-за сохранения заряда. Но распад (8-3) может быть обязан электромагнитному взаимодействию, для которого изотопическая симметрия места не имеет. Мы можем надеяться объяснить (8-3) как

результат перехода в виртуальную протон-антипротонную пару



Первое взаимодействие является сильным и соответствует (7-2), следующее, когда  $p$  испускает фотон  $\gamma'$ , соответствует (6-3); затем нуклоны аннигилируют, испуская второй фотон  $\gamma''$ , опять посредством (6-3). (Два фотона необходимы для одновременного выполнения законов сохранения энергии и импульса. Как обычно, энергии не обязательно сохраняться на переходных промежуточных этапах.)

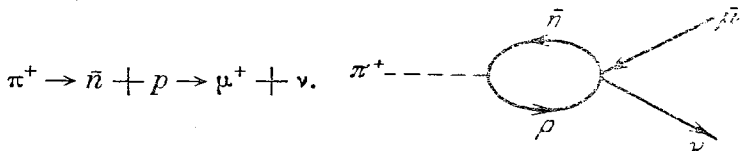
К сожалению, мы опять не можем рассчитать этот процесс, так как первый этап включает сильные взаимодействия.

Мезон  $\pi^+$  распадается более медленно. Со средним временем жизни  $2,6 \cdot 10^{-8}$  сек он переходит в  $\mu^+$  и  $\nu$ :

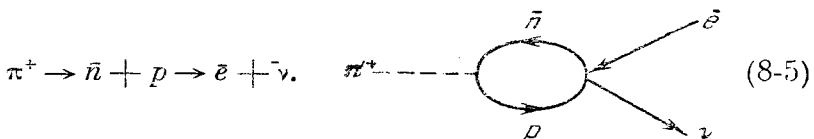


(Как и следовало ожидать, античастица  $\pi^-$  имеет то же самое время жизни относительно распада на  $\mu^-$  и  $\nu$ .)

Этот процесс может быть непрямым процессом, проходящим через виртуальные состояния



Мы должны также ожидать распада



Опять-таки из-за присутствия сильного взаимодействия мы не можем рассчитать скорость распада, однако можно

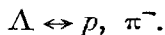
вычислить отношение скоростей для процессов (8-4) и (8-5). В результате мы ожидаем обнаружить один случай  $e\nu$ -распада на 7400 случаев  $\bar{\mu}\nu$ -распада. Это предсказание недавно было подтверждено экспериментально (с точностью около  $\pm 15\%$ ).

## 9. СТРАННЫЕ ЧАСТИЦЫ

Существует еще ряд частиц, сильно связанных с пионами и нуклонами. В начале 50-х годов некоторые такие частицы были открыты в космических лучах. Так, например, была обнаружена нейтральная частица (в современных обозначениях  $\Lambda$ -гиперон), которая распадалась на  $p$  и  $\pi^-$ :



Согласно современным данным ее масса  $= 2182 m_e$ , а время жизни  $= (2,6 \pm 0,2) \cdot 10^{-10}$  сек. Это очень большая величина по сравнению с характерным временем сильных взаимодействий ( $10^{-23}$  сек — время, за которое свет проходит расстояние между соседними нуклонами в ядре). Поэтому распад (9-1) представляет собой слабый процесс, вероятно, связанный с  $\beta$ -распадом. В рамках сильной связи нет фундаментального взаимодействия вида



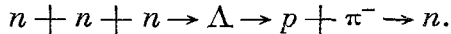
(Если бы он существовал, то распад (9-1) происходил бы очень быстро.)

Но каким же образом рождаются  $\Lambda$ -частицы? Космические лучи состоят из быстрых протонов, которые в атмосфере сталкиваются с ядрами, состоящими из протонов и нейтронов, а также виртуальных пионов, возникающих благодаря сильному взаимодействию (6-4). На опыте  $\Lambda$ -частицы рождаются так часто, что процесс должен идти через сильную связь. Она не может иметь вид  $p + \pi^- \rightarrow \Lambda$ , потому что, как мы видели, это не сильное взаимодействие. Не может быть также что-то вроде  $p + n \rightarrow \Lambda + p$ , так как отсюда вытекала бы возможность сильного распада  $\Lambda \rightarrow p + n + \bar{p}$ , и поскольку  $\bar{p} + n \rightarrow \pi^-$  —

сильный процесс в соответствии с (7-4), то распад (9-1) также был бы сильным. Невозможна также реакция



поскольку, хотя (9-1) — это слабый процесс, он все же существует и тогда существовала бы возможность для трех нейтронов в ядре превращаться в один посредством виртуального перехода



При этом выделялась бы большая энергия, равная массе покоя двух нейтронов, и ни одно из ядер, кроме водорода, не было бы стабильным. Обычное вещество вроде куска угля является поразительно стабильным: весьма тонкие опыты по обнаружению распада не принесли успеха, и мы теперь знаем, что так называемые стабильные ядра имеют время жизни не менее  $10^{17}$  лет.

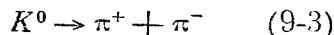
Это рассуждение приводит нас к новому принципу, который должно использовать при выборе взаимодействий. Не может существовать никакой комбинации сильных или слабых взаимодействий, приводящих к исчезновению или распаду нуклонов на более легкие частицы. Поэтому, поскольку один нуклон рождается при распаде  $\Lambda$ , в точности один нуклон должен быть израсходован при рождении  $\Lambda$ .

Простейший способ проследить за этим — приписать каждой частице некоторое число нуклонов, «спрятанных» в ней, или более точно — полное число нуклонов, содержащихся в конечных продуктах распада (антинуклоны входят со знаком минус). Это число все еще не имеет общепринятого названия; для него был предложен термин — нуклонный заряд. Таким образом, нуклонный заряд  $\Lambda$  равен  $+1$ , так же как для  $p$  и  $n$ . Электроны и пионы обладают нуклонным зарядом  $0$ , антипротоны и антинейтроны — зарядом минус  $1$ . Не было обнаружено фундаментальных частиц с нуклонным зарядом, большим  $1$ .

Итак, мы пришли к принципу: все взаимодействия должны удовлетворять правилу — *нуклонный заряд всегда сохраняется*.

**Совместное рождение. К-мезоны.** Из аргументов подобного типа становится ясным, что в сильных процессах одновременно должно рождаться несколько странных

частиц (например,  $n + n \rightarrow \Lambda + \Lambda$ ). И в самом деле, в космических лучах были обнаружены другие новые частицы, в частности, нейтральная частица, известная сейчас как  $K^0$ -мезон, или нейтральный каон, распадающийся на два пиона



с временем жизни порядка  $10^{-10}$  сек. Она имеет массу 966 и, очевидно, нуклонный заряд 0. Здесь мы снова имеем медленный распад, приводящий к той же самой трудности, связанной с механизмом образования, что и в предыдущем случае.

Пайс и Гелл-Манн предположили, что эти две частицы рождаются совместно и что истинная реакция рождения является результатом сильного взаимодействия



Эта гипотеза была затем подтверждена на опыте.

Однако сильное взаимодействие для нейтрона, подобное (9-4), должно влиять на ядерные силы (рис. 9-1). Баланс сил между  $n$ ,  $n$  и  $p$ ,  $p$  требует существования аналогичного взаимодействия для протона. Поскольку не было обнаружено какой-либо заряженной частицы, подобной (т. е. примерно с той же массой)  $\Lambda$ , то нам остается предположить существование взаимодействия

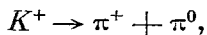


Такой заряженный аналог  $K^0$ -мезона действительно был обнаружен в космических лучах; масса  $K^+ = 967$ . Если записать реакцию (9-5) на изотопическом языке соотношений типа (8-1), (8-2), то нуклон в левой части имеет изоспин  $1/2$ . Из сохранения изотопического спина теперь следует, что полный изоспин правой части также равен  $1/2$ . Поскольку  $\Lambda$  есть синглет, изотопический спин которого



равен 0, то  $K$  должен иметь изоспин  $1/2$  и представлять собой дублет с двумя возможными состояниями.

Хотя его сильное взаимодействие (9-5) подобно взаимодействию (9-4) для  $K^0$  и распад



аналогичный (9-3), имеет место, время жизни  $K^+$ -мезона  $\simeq 1,2 \cdot 10^{-8}$  сек — много больше, чем у  $K^0$ -мезона, что напоминает нам об отсутствии изотопической симметрии у слабых взаимодействий.

В космических лучах были также открыты и другие частицы, рождающиеся в подозрительном изобилии. Весь этот экспериментальный материал удалось привести в порядок с помощью нового принципа, вследствие которого в сильных взаимодействиях такие частицы всегда входят парами.

**Странность.** Допустим, что частица  $K^0$  обладает некоторым новым видом заряда, отсутствующим у нуклонов и пионов, и предположим, что этот заряд не может рождаться и исчезать (т. е. сохраняется) в сильных взаимодействиях. Тогда отдельный  $K$ -мезон не может быть рожден в сильном взаимодействии, но если допустить, что  $\Lambda$  несет отрицательную единицу этого заряда, то образование  $\Lambda$  совместно с  $K$  допустимо. Этот заряд был назван «странностью». Мезоны  $K^0$  и  $K^+$  имеют странность 1,  $\Lambda$  — странность минус 1, нуклоны и мезоны — странность 0. Полная странность в сильных взаимодействиях должна сохраняться. Странность может меняться только в слабых взаимодействиях [как это следует из существования распада (9-3)].

Следуя этой идее, Гелл-Манн и Нишиджима, независимо друг от друга, предложили схему для упорядочивания наших знаний о странных частицах и предсказания различных соотношений между ними. С помощью этой схемы, напоминающей периодическую таблицу химических элементов, мы опишем сильно взаимодействующие частицы, известные в настоящее время.

**Барионы.** Рассмотрим сперва частицы с нуклонным зарядом 1. Вся группа таких частиц получила название барионов. Они приведены в таблице 9-1. Данной схемой было предсказано существование частицы  $\Sigma^0$ . Было также предсказано, что эта частица будет распадаться

с очень коротким временем жизни на  $\Lambda$  и  $\gamma$ -квант. Эта частица и ее ( $\Lambda$ ,  $\gamma$ )-распад действительно были обнаружены. Дублет ( $T=1/2$ ) частиц  $\Xi^-$ ,  $\Xi^0$  со странностью  $-2$  имеет массу около 2584. Частица  $\Xi^-$ , или каскадная

Т а б л и ц а 9-1

Изоспин $T$	Заряд			Странность
	-	0	+	
$1/2$	$\Xi^-$	$\Xi^0$		$-2$
1	$\Sigma^-$	$\Sigma^0$	$\Sigma^+$	$-1$
0		$\Lambda$		
$1/2$		$n$	$p$	0

В порядке возрастания масс:

Дублет ( $T=1/2$ ) нуклонов $n$ , $p$	с массой $\approx 1836$	0
Синглет ( $T=0$ ) — нейтральный $\Lambda$	с массой $\approx 2182$	$-1$
Триплет ( $T=1$ ) $\Sigma^-$ , $\Sigma^0$ , $\Sigma^+$	с массой $\approx 2330$	$-1$
Дублет ( $T=1/2$ ) $\Xi^-$ , $\Xi^0$	с массой $\approx 2584$	$-2$

частица, уже была известна из опытов с космическими лучами (и была также недавно получена в лаборатории в опытах на ускорителе). Она распадается довольно медленно ( $\sim 10^{-10}$  сек) на  $\Lambda$  и  $\pi^-$ . Это свойство получает естественное объяснение, только если ее странность равна  $-2$ . Было также наблюдеено, что одновременно с  $\Xi^-$  рождаются два  $K$ . То, что частица  $\Xi^-$  должна быть дублетом, вытекает из связи между странностью и изотопическим спином, предложенной Гелл-Манном и Нишиджимой: *Странность  $S$  равна удвоенному среднему электрическому заряду  $q$  каждого мультиплетта минус его нуклонный заряд  $N$* . Для барионов  $N=1$ , и поэтому  $S=2q-1$ . Поскольку для  $\Xi$  странность  $S=-2$ , то средний электрический заряд равен  $-1/2$  и  $\Xi$  должен составлять дублет. Предсказанная этим путем частица  $\Xi^0$  недавно была найдена.

**Антибарионы.** Каждому из этих гиперонов должна соответствовать античастица с нуклонным зарядом  $=-1$ . Поэтому перечень антибарионов имеет в точности тот же вид и состоит из частиц той же самой массы, но с противоположными по знаку значениями электрического заряда

и странности. Из этих частиц антинейтрон  $\bar{n}$ , антипротон  $\bar{p}$  и, совсем недавно, антилямбда  $\bar{\Lambda}$  были искусственно получены в лабораторных условиях.

**Мезоны.** Далее идут сильно взаимодействующие частицы с нуклонным зарядом 0 (общее название — мезоны).

Т а б л и ц а 9-2

Изоспин $T$	Заряд			Странность
	-	0	+	
$1/2$	$K^-$	$K^0$		-1
$1/2$		$K^0$	$K^+$	+1
1	$\pi^-$	$\pi^0$	$\pi^+$	0
В порядке возрастания масс:				
Триplet ( $T=1$ ) пионов $\pi^-, \pi^0, \pi^+$ с массой $\approx 276$ 0				
Дублет ( $T=1/2$ ) каонов $K^0, K^+$ с массой $\approx 965$ +1				
и их античастицы $\bar{K}^0, K^-$ -1				

Они приведены в таблице 9-2. Заряженные пионы  $\pi^+$  и  $\pi^-$  являются взаимными античастицами, а  $\pi^0$  совпадает со своей античастицей. Но, поскольку каоны  $K^+$  и  $K^0$  обладают странностью +1, их античастицы должны иметь странность -1 и, в частности, должны существовать два нейтральных каона со странностями +1 и -1 соответственно.

Мы перечислили все частицы, существование которых общепризнано в настоящее время. Имеется, однако,

Т а б л и ц а 9-3

Продукты реакции	Число наблюдаемых событий
$\Sigma^+ N \pi^-$	44
$\Sigma^- N \pi^+$	55
$\Sigma^- p \pi^0$	7
$\Lambda^0 p \pi^-$	48 (всего)
$\Sigma^0 p \pi^-$	
$\Lambda^0 N \pi^0$	72 (всего)
$\Sigma^0 N \pi^0$	

небольшое число событий, наблюдаемых в космических лучах, интерпретация которых остается загадочной и которые могут сигнализировать о существовании других частиц. Существование почти всех антибарионов было установлено на опыте.

*Задача 9-1.* Было произведено наблюдение  $K$ -захватов на дейтерии:  $K + D \rightarrow$  гиперон + пион + нуклон. Получены данные, приведенные в таблице 9-3. Нет способа отличать  $\Lambda^0$ -частицы от  $\Sigma^0$ .

Можете ли вы проверить принцип сохранения изотопического спина?

Сделайте любые предсказания, какие можете, в частности, для выходов  $\Lambda^0$  и  $\Sigma^0$  по отдельности.

## 10. НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ СТРАННОСТИ

Концепция странности, сохраняющейся в сильных взаимодействиях, привела к большому количеству предсказаний, ни одно из которых не было опровергнуто опытным путем. Она оказалась также вполне безотказным подспорьем при упорядочивании экспериментального материала. Так, например, было предсказано, что при образовании  $\Lambda$  или  $\Sigma$  в ядерных соударениях должны возникать также  $K^0$  или  $K^+$ . Реакции вида  $n + n \rightarrow \Lambda + \Lambda$  невозможны, поскольку полная странность двух  $\Lambda = -2$ , а у нейтронов она равна 0.

С другой стороны,  $K^-$ -мезон, налетающий на ядро, может родить  $\Lambda$ , а  $K^+$  не может.

Распад нейтрального каона. Одно из наиболее блестящих предсказаний теории со странностью было сделано Пайсом и Гелл-Манном. Оно связано с тем обстоятельством, что должны существовать две нейтральные  $K$ -частицы с противоположной странностью:  $K^0$  и ее античастица  $\bar{K}^0$ . Как оказалось,  $K^0$  может распадаться на два пиона. В частности, был найден распад



с временем жизни  $\sim 10^{-10}$  сек. В этом распаде, разумеется, нарушается странность, как это и происходит в слабых взаимодействиях. С той же вероятностью анти-

частица  $\bar{K}^0$  должна распадаться на соответствующие античастицы

$$\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- \quad (10-1)$$

Как видно, продукты распадов (9-3) и (10-1) идентичны. Следствием этого обстоятельства является очень любопытный эффект квантовомеханической интерференции. Существование распада (9-3) (протекающего, вероятно, через ряд сложных виртуальных процессов) означает, что имеется некоторая амплитуда, скажем  $x$ , того, что  $K^0$  превратится в  $\pi^+$ ,  $\pi^-$ :

$$K^0 \leftrightarrow \pi^+, \pi^- \text{ амплитуда } x. \quad (10-2)$$

Благодаря симметрии между частицами и античастицами амплитуда для античастицы должна быть такой же:

$$\bar{K}^0 \leftrightarrow \pi^+, \pi^- \text{ амплитуда } x. \quad (10-3)$$

(Строго говоря, она может иметь противоположный знак, но обе возможности ведут к одинаковому результату.)

Теперь предположим, что мы получили частицу в состоянии, не совпадающем ни с  $\bar{K}^0$ , ни с  $K^0$ , но описываемом амплитудой, состоящей из разности амплитуд для  $K^0$  и  $\bar{K}^0$

$$K_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} K^0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{K}^0. \quad (10-4)$$

(Мы назвали это состояние  $K_2^0$  и ввели множители  $1/\sqrt{2}$  из соображений нормировки: вероятность (квадрат амплитуды) для нового состояния быть  $K^0$ -мезоном равна  $1/2$  и быть  $\bar{K}^0$ -мезоном тоже равна  $1/2$ .) Частица, соответствующая состоянию  $K_2^0$ , не должна теперь распадаться на  $\pi^+$  и  $\pi^-$ , так как амплитуда такого события на основании (10-2) и (10-3) равна

$$\frac{1}{\sqrt{2}} x - \frac{1}{\sqrt{2}} x = 0 !$$

Состояние

$$K_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} K^0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{K}^0 \quad (10-5)$$

может, разумеется, распадаться на  $\pi^+$  и  $\pi^-$  с амплитудой  $\sqrt{2}x$ .

Таким образом, собственные состояния для описания распадов—это как раз  $K_1^0$  и  $K_2^0$ , поскольку первое может, а второе не может распадаться на два пиона. Эти два состояния должны иметь совершенно различные времена жизни и продукты распада. (Оказывается, в частности, что  $K_2^0$  может распадаться на три частицы и живет примерно в 100 раз дольше, чем  $K_1^0$ , распадающийся на два пиона.) Но когда каон рождается, скажем вместе с  $\Lambda$ , то он имеет определенную странность  $= -1$  и не является ни  $K_1^0$ , ни  $K_2^0$ , а

$$K^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} K_1^0 + \frac{1}{\sqrt{2}} K_2^0. \quad (10-6)$$

Соотношение (10-6) является следствием (10-4) и (10-5).

Итак,  $K^0$ -мезон с вероятностью  $1/2$  находится в одном из собственных распадных состояний  $K_1^0$  или  $K_2^0$ . Поэтому, когда вновь рожденные каоны распадаются, то только половина из них имеет время жизни  $\sim 10^{-10}$  сек и превращается в два пиона. Остальные должны иметь заметно большее время жизни,  $10^{-8}$  сек, и распадаться на три частицы. Таким образом, было сделано замечательное предсказание о том, что нейтральный каон должен проявлять два различных времени жизни с двумя различными наборами продуктов распада. Это было подтверждено на опыте. И еще одна черта была проверена экспериментально. Поскольку  $K^0$  имеет странность  $+1$ , он не может рождать  $\Lambda$  в столкновениях с ядрами. Однако, если отойти достаточно далеко вдоль пучка от источника  $K^0$ -частиц, туда, где  $K_1^0$  уже почти полностью распались (и где, однако, число  $K_2^0$  еще не уменьшилось заметным образом), то пучок должен почти полностью состоять из  $K_2^0$ . Здесь согласно (10-4) странность уже не определена и имеется амплитуда  $-1/\sqrt{2}$ , а следовательно, и вероятность  $1/2$  частицам быть в состоянии  $K_2^0$  со странностью  $-1$ . Теперь  $\Lambda$ -частицы могут быть рождены при соударении пучка каонов с ядрами. Такое рождение  $\Lambda$  было зарегистрировано экспериментально.

Может возникнуть вопрос: каким же образом странность изменила свое значение от  $+1$  до  $-1$  вдоль движения пучка? Ответ следует из виртуального процесса (10-2), за которым идет процесс, обратный (10-3). Хотя странность нарушается очень слабым образом и ампли-

туда  $x^2$  мала, однако равенство масс  $K^0$ - и  $\bar{K}^0$ -частиц приводит к резонансному усилению, вследствие чего даже малая амплитуда, постепенно нарастая, дает большой эффект.

Мы описали сейчас одно из величайших достижений теоретической физики. Оно не основано на элегантных математических трюках, подобных общей теории относительности, тем не менее полученные предсказания так же важны, как, например, предсказание позитрона. Особенно интересным является тот факт, что мы довели принцип суперпозиции до логического конца. Бом и его сотрудники полагали, что принципы квантовой механики не имеют фундаментального характера и в конечном счете не смогут объяснить новые явления. Однако эти принципы работают. Это еще не доказывает, что они верны, но я готов биться об заклад, что принцип суперпозиции будет стоять в веках!

## 11. СХЕМЫ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ

Пусть даны частицы — гипероны и мезоны, и мы знаем, что они участвуют в сильных взаимодействиях. Следующая задача состоит в том, чтобы установить, какие из них сильно связаны между собой и каким именно способом. Эти связи должны удовлетворять законам сохранения числа нуклонов, заряда, изотопического спина и странности, однако всех этих условий далеко недостаточно для того, чтобы определить связи полностью. В каких связях, например, участвует пион, кроме взаимодействий с нуклонами (8-1) и (8-2)? Есть ли это связь  $\Lambda \rightarrow \Sigma, \pi$  и какого типа и интенсивности, и т. д.? И наконец, какова количественная характеристика связи  $K$ -мезона (9-4) в реакциях, таких как  $N \leftrightarrow \Sigma, K$  или  $\Sigma \leftrightarrow \Xi, K$ ? Даже спины частиц нам пока неизвестны. Изучение распада  $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$  определенно указывает на то, что пионы не уносят угловой момент, вследствие чего спин каона, по всей вероятности, равен 0. Но экспериментальные данные о  $\Lambda, \Sigma$  и  $\Xi$  еще не полны, хотя и имеются указания на спин  $1/2$  у  $\Lambda$  и  $\Sigma$ . Вероятно, все гипероны имеют спин  $1/2$ , а мезоны — спин 0.

**Модель Ферми—Янга.** Как пример из соида моделей, предложенных для объяснения сильных взаимодействий, я рассмотрю предложение Ферми и Янга.

Допустим, что нейтрон и протон имеют заряд, аналогичный электрическому заряду, но одного и того же знака, что связывает их с векторным мезоном очень большой массы. Тогда  $n\bar{p}$ -система должна испытывать силу притяжения с коротким радиусом действия, подобную электрическому притяжению с большим радиусом действия

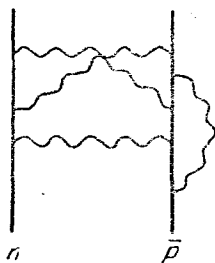


Рис. 11-1.

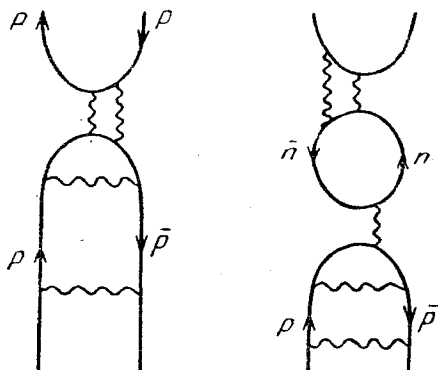


Рис. 11-2.

в системе  $e\bar{e}$ . Нейтрон  $n$  и антипротон  $\bar{p}$  имеют суммарную массу  $2 \times 938$  МэВ, и мы также допустим, что они связаны силами притяжения очень сильно, скажем, с энергией связи около 1600 МэВ. Если силы центральны, то полный момент будет равен 0, четность  $= -1$  и мы получим  $\pi^-$ -мезон, т. е.  $[n\bar{p}] = \pi^-$ . Аналогично  $[p\bar{n}] = \pi^+$ . Типичные диаграммы имеют вид, приведенный на рис. 11-1, где волнистой линией изображен обмен векторным мезоном. Мы также ожидаем, что должны существовать связанные системы  $p\bar{p}$  и  $n\bar{n}$ . Какая из них является  $\pi^0$ -мезоном?

Заметим, что для  $p\bar{p}$ - и  $n\bar{n}$ -систем возможны дополнительные диаграммы (рис. 11-2), которых нет в  $n\bar{p}$ - и  $p\bar{n}$ -случаях. Оказывается, что система  $*$ ), которая

\*) Поскольку состояния  $p\bar{p}$  и  $n\bar{n}$  имеют одинаковые амплитуды аннигиляции, комбинация  $(1/\sqrt{2}) ([p\bar{p}] - [n\bar{n}])$  не может анниги-



имеет ту же самую энергию, что и  $\pi^+$  и  $\pi^-$ , и не аннигилирует, это

$$\frac{1}{\sqrt{2}} ([p\bar{p}] - [n\bar{n}]) = \pi^0.$$

Мы получаем изотопический триплет. Другая комбинация

$$\frac{1}{\sqrt{2}} ([p\bar{p}] + [n\bar{n}]) = \Delta^0$$

может либо не быть связанной, либо иметь другую энергию, возможно, большую, и представлять новый мезон с изотопическим спином  $T=0$ , который еще не был открыт.

Для того чтобы получить остальные частицы, необходимо ввести по крайней мере еще одну «фундаментальную» частицу, несущую странность. Возьмем для этой цели  $\Lambda$ . Тогда

$$\begin{aligned} [\Lambda\bar{p}] &= K^-, & [\bar{\Lambda}p] &= K^+, & [\Lambda\pi^{+,0,-}] &= \Sigma^{+,0,-}, \\ [\Lambda\Lambda\bar{p}] &= \Xi^-, & [\Lambda\Lambda\bar{n}] &= \Xi^0. \end{aligned}$$

Странность есть как раз число  $\Lambda$ -гиперонов! Итак, вы видите, что можно представить себе все сильно взаимодействующие частицы составленными из  $n$ ,  $p$  и  $\Lambda$  и получить этим путем сохраняющиеся изотопический спин и странность.

Я раскрою вам мою тайную мысль: невозможно указать, является ли частица «элементарной», или состоит из «элементарных» частиц. Другими словами, все схемы составных частиц будут давать эквивалентные результаты (если мы смогли бы рассчитать их), и нет способа найти различие между ними.

Для системы, состоящей из частиц, массы которых велики по сравнению с полной энергией связи (ядра, атомы), имеет смысл говорить о составной системе и ее составных частях.<sup>6</sup> Но когда энергия связи сравнима с массой свободной частицы, неправильно делать различие между составной и элементарными частицами. Каким образом более ясно сформулировать эту идею и как извлечь из нее практические следствия? Я не знаю.

При рассмотрении вопроса о том, образует ли она изотопический триплет, следует вспомнить, что  $\bar{n}$  есть  $[-1/2]$  (в обозначениях § 4).

Детальные схемы сильных взаимодействий, предлагаемые на основе теоретических соображений, носят, как правило, спекулятивный характер. Мы опишем еще две из них. Одна, называемая глобальной симметрией, предложена Гелл-Манном [7]. Она исходит из того, что все гипероны имели бы одинаковую массу и были бы различными состояниями октета (мультиплета с восемью составляющими), если бы не было взаимодействий с  $K$ -мезонами. Два новых состояния образуются линейными комбинациями  $\Lambda$  и  $\Sigma^0$ , именно

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Lambda - \Sigma^0) \quad \text{и} \quad Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Lambda + \Sigma^0).$$

Затем предполагается, что структура и интенсивность пионных взаимодействий не изменятся, если в связях (8-1), (8-2) пионов с  $n$  и  $p$  парю нуклонов  $n$ ,  $p$  заменить на  $Y$ ,  $\Sigma^+$ , или на  $\Sigma^-$ ,  $Z$ , или на  $\Xi^-$ ,  $\Xi^0$ . Каонные связи, нарушающие эту симметрию, остаются неопределенными.

Согласно другой идее пионы непосредственно взаимодействуют с вектором изотопического спина и эта связь ответственна за расщепление масс  $\Lambda$  и  $\Sigma$ . Каоны связывают  $n$ ,  $p$  и квартет  $\Lambda$ ,  $\Sigma$ , а также  $\Xi^-$ ,  $\Xi^0$  и квартет  $\Lambda$ ,  $\Sigma$  таким образом, что это взаимодействие не расщепляет  $\Lambda$ ,  $\Sigma$ -квартет (при этом связи между  $n$ ,  $p$  и  $\Xi^-$ ,  $\Xi^0$  имеют различные коэффициенты). (В обозначениях Гелл-Манна [7] мы полагаем

$$g_{\Lambda\pi} = 0, \quad g_{N\pi} = 1/2; \quad g_{\Sigma\pi} = g_{\Xi\pi}, \quad g_{\Sigma K} = g_{\Lambda K}; \quad h_{\Sigma K} = h_{\Lambda K}.)$$

Относительные значения масс в этой схеме хорошо соответствуют наблюдаемым значениям. К сожалению, решающие опыты для проверки этой схемы еще не найдены.

Существует большая экспериментальная программа по исследованию рождения каонов в ядерных соударениях, с помощью фотонов, и изучению взаимодействий этих мезонов с ядрами, и т. д. Но, строго между нами — теоретиками: Что мы будем делать со всеми этими данными? Мы не можем сделать ничего существенного. Перед нами стоит очень сложная задача, и требуется революционная идея, что-то подобное теории Эйнштейна. Возможно, что результаты всех этих опытов приведут к каким-то идиотским неожиданностям и окажется

возможным вычислять все эффекты, исходя из одного простого правила. В этом случае то, что мы делаем сейчас, больше всего похоже на сложные модели, изобретенные в свое время для объяснения водородных спектров, которые, как оказалось позже, удовлетворяют очень простым закономерностям.

И еще одно замечание по поводу сильных связей. Имеется прямое свидетельство того, что  $\Lambda$ -частица сильно взаимодействует с нуклонами. Существуют гиперфрагменты (лучше было бы назвать их гиперядрами), в которых  $\Lambda$  связана с несколькими нуклонами. Например, гиперядро  ${}^{\Lambda}\text{He}^4$  было обнаружено как фрагмент, возникающий при захвате ядром  $K^-$ -мезона. Это гиперядро состоит из двух протонов, нейтрона и  $\Lambda$ -частицы, связанных вместе. Энергия связи  $\Lambda$  составляет несколько МэВ. Такая система нестабильна, так как слабая реакция (9-1)  $\Lambda$ -частицы создает возможность распада  $\Lambda$  с высвобождением пиона и 37 МэВ энергии (пион может быть виртуальным или быть вновь захвачен, а его энергия покоя перейдет в кинетическую энергию нуклонов в звезде). Изучение подобных гиперядер может дать в конечном счете сведения о силе взаимодействия между  $\Lambda$  и нуклонами. Во всяком случае, оно примерно так же велико, как и нуклон-нуклонное взаимодействие. За дальнейшими подробностями мы отсылаем к обзорной статье Далитца [8].

Дополнительные сведения о сильных связях могут быть извлечены из их сопоставления со слабыми взаимодействиями. Так, например, магнитные моменты и электромагнитные разности масс, так же как и относительные скорости различных процессов слабых распадов, могут дать информацию о структуре сильно взаимодействующих частиц. Однако теоретический анализ всех явлений, связанных с сильными взаимодействиями, чрезвычайно затруднен из-за нашей неспособности проводить количественные расчеты сильных связей.

## 12. РАСПАДЫ СТРАННЫХ ЧАСТИЦ

Рассмотрим теперь данные по слабым распадам этих частиц. Экспериментальные данные о массах и свойствах распадов всех частиц приведены в таблице 12-1.

Мы интересуемся сейчас только распадами гиперонов и мезонов. Два из известных распадов, очевидно, являются следствием электромагнитного взаимодействия (действующего совместно с сильной связью через виртуальные состояния). Это  $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$  и  $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$ . Совокупность требований сохранения электрического заряда и сохранения странности в электромагнитных взаимодействиях разрешает только эти распады.

Т а б л и ц а 12-1

Тип распада	Доля, %	Время жизни, сек
$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}$		1040
$\Lambda \rightarrow \begin{cases} p + \pi^- \\ n + \pi^0 \end{cases}$	$63 \pm 3$ $37 \pm 3$	$2,6 \times 10^{-10}$
$\Sigma^+ \rightarrow \begin{cases} p + \pi^0 \\ n + \pi^+$	$46 \pm 6$ $54 \pm 6$	$0,8 \times 10^{-10}$
$\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-$	100	$1,6 \times 10^{-10}$
$\Xi^- \rightarrow \Lambda + \pi^-$	?	$\sim 10^{-9}$
$\pi^+ \rightarrow \begin{cases} \mu^+ + \nu \\ e^+ + \nu \end{cases}$	100 0,013	$2,56 \times 10^{-8}$
$K^+ \rightarrow \begin{cases} \mu^+ + \nu \\ \pi^+ + \pi^0 \\ \pi^+ + \pi^+ + \pi^- \\ \pi^+ + \pi^0 + \pi^0 \\ \pi^0 + e^+ + \nu \\ \pi^0 + \mu^+ + \nu \end{cases}$	$59 \pm 2$	$1,22 \times 10^{-8}$
	$26 \pm 2$	
	$5,7 \pm 0,3$	
	$1,7 \pm 0,3$	
	$4,2 \pm 0,4$	
$K_S^0 \rightarrow \begin{cases} \pi^+ + \pi^- \\ \pi^0 + \pi^0 \end{cases}$	$4,0 \pm 0,8$	$1,00 \times 10^{-10}$
	$78 \pm 6$ $22 \pm 6$	

Все остальные распады имеют близкие, по порядку величины, времена жизни. Считается, что все они являются следствием связи фермиевского типа (действующей, как обычно, совместно с сильными взаимодействиями через виртуальные состояния). Эта гипотеза соответствует некоторым общим свойствам распадов, включая порядок времени жизни. Разумеется, рождение лептонов является важным аргументом. Но даже в случаях отсутствия лептонов несохранение четности (т. е. асимметрия от-

носителем пространственного отражения) свидетельствует в пользу связи типа Ферми. Способность одной и той же  $K$ -частицы распадаться как на два, так и на три пиона (с полным моментом, равным нулю) была первым толчком для предположения о том, что четность может не сохраняться в физических процессах. Асимметрия, свидетельствующая об отсутствии симметрии отражения, недавно была обнаружена в угловых распределениях продуктов распада  $\Lambda$  на  $p + \pi^-$ . Мы уже выписывали три фермиевские связи (6-4), (6-5) и (6-6), но в каждом из этих случаев странность сохраняется, при условии, что странность лептонов равна 0. Исходя из этих трех связей, мы можем надеяться объяснить лишь те распады, в которых  $\Delta S = 0$ , где  $S$  — полная странность. Это как раз распады нейтрона  $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}$  и пиона  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$ , которые, как уже упоминалось, можно считать косвенным следствием связи (6-6).

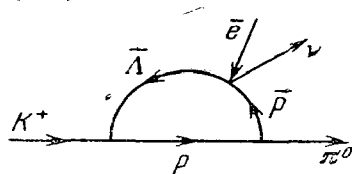


Рис. 12-1.

В остальных распадах происходит изменение странности на одну единицу:  $\Delta S = \pm 1$ . Ответственные за них фундаментальные взаимодействия еще не установлены окончательно, хотя довольно ясно, что они входят в класс фермиевских. Задача их полного определения является интересной, и мы рассмотрим ее довольно подробно.

**Схемы фермиевских связей.** Установим прежде всего минимально необходимое число новых связей. Прежде всего наличие распада, подобного  $K^+ \rightarrow e^+ + \nu + \pi^0$ , приводит к тому, что  $\bar{\nu}e$ -пара должна быть связана с парой, меняющей странность. Это не обязательно должна быть сама пара  $\bar{K}^+ \pi^0$ , поскольку сильные связи будут приводить к упомянутому распаду, если любая другая пара типа  $\bar{p} \Lambda$  связана с  $\bar{\nu}e$ . В данном случае (см. рис. 12-1)  $K^+$ -мезон сможет виртуально перейти в  $\Lambda$  и  $p$ ,  $\bar{\Lambda}$  распадётся на  $\bar{p} e \nu$ , а  $p$  и  $\bar{p}$  аннигилировать в  $\pi^0$ . Возьмем, например, ферми-связь

$$\bar{p} \Lambda \leftrightarrow \bar{\nu} e, \quad (12-1)$$

аналогичную (6-4). Поскольку мюоны также испускаются в распадах с  $\Delta S = -1$  (например,  $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$  или

$K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu + \pi^0$ ), то мы должны допустить еще взаимодействие

$$\bar{p}\Lambda \leftrightarrow \bar{\nu}\mu. \quad (12-2)$$

Наконец, существуют распады, совсем не содержащие нейтрино. Они могли бы происходить от фермиевской связи типа

$$\bar{p}\Lambda \leftrightarrow \bar{p}n \quad (12-3)$$

или ей эквивалентной, через сильные взаимодействия. Так, например, распад  $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$  мог бы идти через виртуальный процесс (см. рис. 12-2)

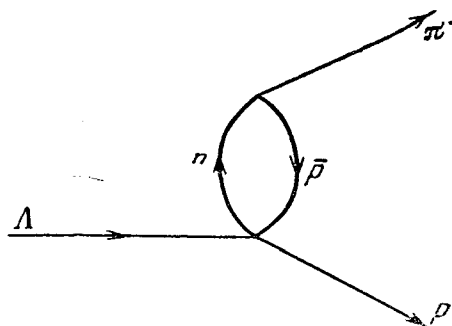


Рис. 12-2.

$$\Lambda \rightarrow p + \bar{p} + n \rightarrow p + \pi^- \quad \begin{matrix} (12=3) & (7=4) \end{matrix}$$

плюс более сложные последовательности. На основе этих трех связей все известные распады могут получить качественное объяснение.

Введение шести независимых фермиевских взаимодействий могло бы показаться излишне сложным, однако одновременное появление трех новых оказывается естественным следствием всего лишь одного предположения. Оно заключается в том, что связи Ферми по своей природе являются взаимодействием некоторого тока  $J$  с самой собой,

$$J \leftrightarrow J, \quad (12-4)$$

и задача сводится к определению структуры  $J$ , являющегося суммой нескольких слагаемых. Описанные выше связи (6-4), (6-5) и (6-6) возникнут, если положить

$$J = (\bar{\nu}e) + (\bar{\nu}\mu) + (\bar{p}n) + X. \quad (12-5)$$

Определенные на опыте, коэффициенты у первых трех членов оказываются равными. Все три новые связи получатся, если мы добавим к  $J$  всего лишь один член  $X$ , меняющий странность. Выше мы уже рассуждали о том,

каков может быть  $X$ . Теперь мы рассмотрим более серьезно, какими свойствами должен обладать член  $X$ .

Прямое следствие новой идеи состоит в том, что коэффициенты связей  $X$  с каждым из трех токов ( $\bar{\nu}e$ ), ( $\bar{\nu}\mu$ ) и ( $\bar{p}n$ ) равны друг другу. Иными словами, связи (12-1), (12-2) и (12-3) должны иметь одинаковую интенсивность [которая, однако, не должна совпадать с интенсивностями (6-4), (6-5) и (6-6)].

Если коэффициенты связи ( $\bar{\nu}e$ ) и ( $\bar{\nu}\mu$ ) с  $X$  равны, то можно показать вычислением, что число  $e^+\nu + \pi^0$ -распадов  $K^+$ -мезона должно быть равно числу  $\mu^+\nu + \pi^0$ -распадов. Это предсказание подтверждается экспериментально с точностью до 30%. Тот факт, что распад  $K^+ \rightarrow e^+\nu$  пока не наблюдался, также совместен с отсутствием спина у  $K^+$ , так как при этом скорость распада  $K^+ \rightarrow e^+\nu$  должна быть гораздо меньше, чем для  $K^+ \rightarrow \mu^+\nu$ .

Можем ли мы проверить предсказание о том, что связи ( $\bar{p}n$ ) и ( $\bar{\nu}\mu$ ) с  $X$  равны? К сожалению, из-за нашей неспособности анализировать сильные взаимодействия, такая возможность пока неизвестна.

**Предлагаемые правила симметрии для распадов, меняющих странность.** Что же можно сказать о токе  $X$ ? Попробуем сейчас сформулировать гипотезу настолько сильную, насколько это возможно. Этим путем мы получим максимум предсказаний, хотя некоторые из них могут в будущем оказаться неверными. Заметим прежде всего, что существование распада  $K^+ \rightarrow e^+\nu + \pi^0$  приводит к тому, что при уменьшении странности испускаются позитроны. Поэтому  $X$  должен содержать хотя бы один член вида ( $\bar{p}\Lambda$ ), состоящий из пары частиц с полной странностью  $-1$  (и, во всяком случае, с отрицательным зарядом). Может ли в  $X$  присутствовать член со странностью  $+1$ , подобный ( $\bar{\Sigma}^+n$ )? Этому нет свидетельств, и потому мы предположим:

1.  $X$  содержит только члены со странностью  $-1$ . Отсюда следует, что распад с  $\Delta S=2$  запрещен. Поэтому  $\Xi^-$  не может распадаться на  $n + \pi^0$ , как это и следует из наблюдений.

Далее, хотя  $K_2^0$  может распадаться равновероятно на  $\bar{e} + \pi^- + \nu$  и на  $e + \pi^- + \bar{\nu}$ , только первый распад разрешен для  $K^0$  и только второй для  $\bar{K}^0$ . Поэтому, если редкие

лептонные распады пучка  $K^0$ -мезонов наблюдать близко к источнику (там, где  $K_1^0$  еще не распались), то заряженные лептоны ( $e$  или  $\mu$ ) должны быть преимущественно положительными. Соответствующие эксперименты еще не были поставлены.

Далее, тогда как входящая в  $X$  пара ( $\bar{p}\Lambda$ ) имеет изоспин  $1/2$ , другие вклады, такие как ( $\bar{p}\Sigma^0$ ), могли бы содержать изоспин  $3/2$ . Если бы этот вклад полностью соответствовал состоянию с изоспином  $3/2$ , то в лептонных распадах существовало бы правило  $\Delta T=3/2$ . Но тогда распад  $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$  мезона  $K^+$  с изотопическим спином  $1/2$  был бы невозможен (поскольку для него  $\Delta T=1/2$ ). Таким образом,  $X$  должен содержать по меньшей мере какую-то часть с изоспином  $1/2$ . Мы предположим теперь, что  $X$  целиком состоит из членов с изотопическим спином  $1/2$  (так что, если ( $\bar{p}\Sigma^0$ ) и появляется, то непременно в комбинации  $-(\bar{p}\Sigma^0) + \sqrt{2}(\bar{n}\Sigma^-)$ ).

Итак, формулируем правило:

2. В лептонных распадах изоспин может меняться только на  $1/2$ . Мы можем проверить это правило, сравнивая распад

$$K^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu \quad (12-6)$$

с распадом

$$K^0 \rightarrow \pi^- + e^+ + \nu. \quad (12-7)$$

Из правила следует, что если перенести оба  $K$  в правые части, то пары ( $\bar{K}^+ \pi^0$ ) и ( $\bar{K}^0 \pi^-$ ) должны входить в амплитуду в пропорциях, соответствующих комбинации  $-(\bar{K}^+ \pi^0) + \sqrt{2}(\bar{K}^0 \pi^-)$ , обладающей изоспином  $1/2$  [и аналогичной выражению (8-2)]. Таким образом, амплитуда второй реакции (12-7) в  $-\sqrt{2}$  раза отличается от амплитуды процесса (12-6), и скорость распада  $K^0$  должна быть в два раза больше, чем у  $K^+$ . Распад  $\bar{K}^0$ -мезона

$$\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ + e^- + \bar{\nu} \quad (12-8)$$

является «антиреакцией» по отношению к (12-7) и должен идти с той же скоростью, что и (12-7) [т. е. в два раза быстрее (12-6)]. Частица  $K_2^0$ , амплитуда которой содержит  $(1/\sqrt{2})K^0$  и  $-(1/\sqrt{2})\bar{K}^0$ , будет поэтому распадаться на



$\pi^- + e^+ + \nu$ , как и на  $\pi^+ + e^- + \nu$ , со скоростью распада (12-8). Соответствующие рассуждения применимы к распадам, в которых мюон стоит вместо электрона. Все подобные предсказания подтверждены экспериментом.

### 13. ВОПРОС ОБ УНИВЕРСАЛЬНОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ

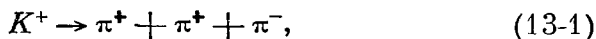
Нелептонные распады отвечают сочетанию члена  $X$  из одного тока с членом  $(\bar{p}n)$  из другого. Этот последний имеет изоспин=1, поэтому его комбинация с  $X$ , представляющим чистый изоспин  $1/2$ , образует изотопические спины  $1/2$  и  $3/2$  и мы приходим к правилу 3, управляющему нелептонными распадами с изменением странности:

3. В нелептонных распадах изменение изоспина может быть только

$$\Delta T = 1/2 \text{ или } \Delta T = 3/2.$$

Это правило не кажется очень ограничивающим, однако оно приводит к следствиям, которые можно проверить.

Прежде всего можно предсказать отношения числа заряженных пионов в трехпионных распадах каонов. Три пиона, возникающие в распаде



имеют полный момент, равный 0, как это следует из наблюдаемых на опыте данных. Поэтому волновая функция пионов полностью симметрична. Можно показать, что для трех частиц с изоспином 1 единственными симметричными состояниями будут состояния с изотопическим спином  $T=1$  и  $T=3$ . Если правило 3 верно, то состояние  $T=3$  не может возникнуть из первоначального каона с  $T=1/2$ , так как требуется изменение изоспина на  $5/2$ . Поэтому в конечном состоянии должно быть  $T=1$ , а из правил комбинирования состояний легко показать, что скорость распада  $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^0$  должна составлять  $1/2$  от скорости (13-1) (исключая увеличение скорости на 9% для каждого  $\pi^0$  из-за маленькой разности масс  $\pi^+$  и  $\pi^0$ ). Экспериментальное отношение равно  $0,30 \pm 0,06$ , что совместно с предсказанным  $0,25$  (1,2) = 0,30.

По точно таким же соображениям скорости трехпионных распадов  $K_2^0$ -мезона

$$K_2^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0, \quad (13-2)$$

$$K_2^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0 \quad (13-3)$$

должны находиться в отношении  $2/3$  [или, после учета разницы масс, в отношении  $2(1,1)/3(1,3)=0,561$ ], если в конечном состоянии  $T=1$ . Измерения  $K_2^0$ -распадов как раз начинаются, и пока что полученные данные согласуются с предсказанием.

Можно также получить следствия для двухпионных распадов каона. Опытные данные таковы:

$$\begin{array}{ll} K_1^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- & 78 \pm 6\%, \\ K_1^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0 & 22 \pm 6\%, \\ K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0 & 0,002 \text{ от скорости распада } K_1^0. \end{array}$$

Замечательный факт состоит в том, что распад  $K^+$ -мезона так сильно подавлен по сравнению с распадом  $K_1^0$ .

Если два пиона находятся в симметричном состоянии, то для полного изоспина имеем либо  $T=0$ , либо  $T=2$ . В случае распада  $K^+$  на  $\pi^+$  и  $\pi^0$  может быть реализовано только состояние с  $T=2$ . Оно может получиться из каона с  $T=1/2$  либо переходом  $\Delta T=3/2$ , либо переходом  $\Delta T=5/2$  (мы складываем изоспины как векторы). Согласно правилу 3 только  $\Delta T=3/2$  имеет место. Это означает, что скорость  $K$ -распада дает нам относительный вклад амплитуды  $T=2$  в распад  $K^0$ . В действительности она дает нам только квадрат, но мы знаем, что амплитуда того, что два пиона от распада  $K_1^0$  находятся в состоянии  $T=2$ , равна произведению числа 0,052 на некоторую комплексную фазу. Эта амплитуда так мала, что  $K_1^0$  должен почти целиком распадаться в состояние  $T=0$ . Если это так, то относительная доля  $\pi^+ + \pi^-$  к  $\pi^0 + \pi^0$  должна быть 2 : 1, т. е. 67% частиц должны быть заряжены. Если амплитуда состояния  $T=2$  имеет такую фазу, что интерференция максимальна или минимальна, то теория предсказывает отношение 72 или 62% соответственно. Поэтому теоретически, если правило 3 верно, доля  $\pi^+ + \pi^-$  распадов  $K_1^0$ -мезона должна составлять от 62 до 72%. Мы должны подождать, пока появятся более точные

опыты, чтобы узнать, верно ли это; современные данные как раз совместны с этими цифрами.

Итак, насколько мы знаем, ток  $X$  может быть ограничен выражением, в котором все члены имеют странность  $-1$  и изоспин  $1/2$ . Учитывая известные сейчас частицы, мы можем написать

$$X = \alpha (\bar{p}\Lambda) + \beta [-(\bar{p}\Sigma^0) + \sqrt{2}(\bar{n}\Sigma^-)] + \\ + \gamma [-(K^+\pi^0) + \sqrt{2}(K^0\pi^-)] + \\ + \delta [-(\bar{\Sigma}^0\Xi^-) + \sqrt{2}(\bar{\Sigma}^-\Xi^0)] + \varepsilon (\bar{\Lambda}\Xi^-),$$

где коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\varepsilon$  еще не определены. Это выражение и есть наш максимальный результат. Мы укажем сейчас препятствия на пути дальнейшего продвижения.

**Вопрос об универсальном коэффициенте связи.** Исходя из очевидного равенства коэффициентов у таких различных членов, входящих в  $J$ , как  $(\bar{\nu}e)$ ,  $(\bar{\nu}\mu)$  и  $(\bar{p}n)$ , было бы естественно заподозрить существование некой универсальности и предположить, что коэффициенты связи всех частиц равны друг другу (универсальны), так что все коэффициенты от  $\alpha$  до  $\varepsilon$  равны между собой и равны 1. [Или по крайней мере, если множители  $\sqrt{2}$  расставлены несколько произвольным образом, некоторые из них равны 1, а другие  $1/\sqrt{2}$ , для того, чтобы получить какие-либо специальные свойства симметрии. Например, если  $\alpha = 1/\sqrt{2} = -\beta$ , то первые два члена дают  $(\bar{p}Z) + (\bar{n}\Sigma^-)$  — комбинацию, особенно простую в рамках так называемой глобальной симметрии.]

Возможный вариант приведенной выше схемы сильной связи может быть основан на простом допущении, что (1) фермиевский ток, сохраняющий странность, связан с той же комбинацией частиц, что и  $\pi^+$ , т. е. с соответствующей компонентой изотопического спина; и (2) меняющий странность ток связан с той же комбинацией частиц, что и  $K^+$ . Это означает, что  $\alpha = -\beta$ ,  $\delta = \varepsilon$  и, возможно,  $\gamma = 0$ .

Однако существует прямое доказательство того, что это не так. Если  $\gamma = 1$ , то, независимо от остальных членов, процесс  $K^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu$  может идти прямо и его скорость вычисляется. Она оказывается в 170 раз больше

того, что нужно! Учет других диаграмм может несколько изменить этот результат, но заведомо не таким существенным образом. Можно заключить отсюда, что  $\gamma$  либо равна 0, либо имеет порядок 0,08 (т. е.  $\sqrt{1/170}$ , так как скорость  $\sim \gamma^2$ ). Если  $\gamma$  равняется нулю, то процесс является непрямым и мы не можем его рассчитать (хотя, если остальные константы порядка единицы, то трудно понять, почему скорость процесса так мала; во всяком случае, никаких надежных выводов о значениях других констант не может быть получено этим путем). С другой стороны, если  $\alpha=1$ , то мы можем вычислить скорость процесса  $\Lambda \rightarrow p + e + \bar{\nu}$ . Этот процесс, а также его аналог с заменой  $e$  на  $\mu$  не наблюдается на опыте, хотя мы предсказываем, что он должен составлять 16% от всех случаев распада  $\Lambda$ . Экспериментальная цифра меньше предсказанной по крайней мере в десять раз. Поскольку эффекты интерференции с другими диаграммами не могут быть ответственны за это, то остается заключить, что  $\alpha$ , по всей вероятности, меньше, чем 0,3. Кроме того, лептонные распады  $\Sigma^-$  наблюдаются в количестве, меньшем одной десятой от уровня, соответствующего  $\beta=1/\sqrt{2}$ , поэтому  $\sqrt{2}\beta$  должно быть также меньше, чем 0,3. Все эти факты приводят нас к выводу о том, что связь тока  $X$  с лептонами заметно слабее той, которая следовала бы из универсальной связи: в действительности коэффициент порядка 0,1 кажется наиболее вероятным. (Такое заключение нельзя опровергнуть на основе данных о распаде  $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$  из-за неопределенности всех количественных расчетов.)

Мы можем подвести итог этому обсуждению, заключив, что экспериментальные данные, вероятно, указывают на то, что:

4. *Лептонные распады с изменением странности являются относительно более медленными, чем распады без изменения странности (хотя  $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$ , возможно, этому противоречит).*

Если, однако, коэффициенты  $X$  имеют порядок 0,1 в лептонных связях, то следовало бы ожидать, что они точно такие же и в  $(\bar{p}n)$ -связи. А это не очень приятное предсказание, поскольку нелептонные распады идут слишком быстро. Скорее всего наблюдаемые времена

жизни требуют коэффициентов порядка единицы, однако уверенности в этом нет, поскольку для реального расчета этих процессов необходим учет виртуальных состояний сильно взаимодействующих частиц.

Добавим, что данные опыта указывают на существование еще одной приближенной симметрии, для которой отсутствует теоретическое объяснение:

5. *Нелептонные, меняющие странность распады с  $\Delta T = \frac{3}{2}$  относительно более медленны (более слабы), чем такие же распады с  $\Delta T = \frac{1}{2}$ .*

## 14. ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАСПАДОВ

### С ИЗМЕНЕНИЕМ СТРАННОСТИ: ДАННЫЕ ОПЫТОВ

Как уже было отмечено, в  $K \rightarrow \pi + \pi$ -распадах нейтральный каон ( $\Delta T = \frac{1}{2}$ ) распадается в 500 раз быстрее, чем заряженный ( $\Delta T = \frac{3}{2}$ ). Амплитуда  $\Delta T = \frac{3}{2}$  составляет лишь 0,052 от амплитуды  $\Delta T = \frac{1}{2}$ .

Поставим вопрос: нет ли подобных диспропорций в других случаях? Проще всего ответить на него, выяснив, до какой степени другие данные согласуются с правилом, что все нелептонные распады идут с  $\Delta T = \frac{1}{2}$ .

Во-первых, в  $\Lambda$ -распаде, идущем из начального состояния  $T=0$ , конечное состояние будет  $T = \frac{1}{2}$  и отношение  $p + \pi^-$  событий к  $n + \pi^0$  должно быть равно 2 : 1, т. е. заряженные частицы должны составлять 67% всех продуктов распада. Наблюдаемые данные дают  $63 \pm 3\%$ ; расхождение может быть обусловлено либо ошибками опытов либо незначительной интерференцией с  $\Delta T = \frac{3}{2}$ .

Во-вторых, имеются некоторые предсказания об асимметрии  $\Sigma$ -распада, но при существующих неполных опытных данных они представляются в виде неравенств, которым эти данные удовлетворяют.

В-третьих, мы можем определить отношение скорости трехпионных распадов  $K_2^0$  (13-2) и (13-3) к скорости подобного распада  $K^+$  (13-1), поскольку, если  $\Delta T = \frac{1}{2}$ , то конечное состояние  $T=1$  может быть получено единственным путем. Согласно соответствующему предсказанию суммарная скорость распада  $K_2^0$  на три пиона равна скорости распада  $K^+$  (следует, разумеется, учесть 9-про-

центные поправки на каждый  $\pi^0$ -мезон). Предварительные данные по распадам  $K_2^0$  не противоречат этому.

Мы могли бы еще предсказать, что скорость распада  $E^0 \rightarrow \Lambda + \pi^0$  должна быть вдвое меньше, чем у  $E^- \rightarrow \Lambda + \pi^-$ , но соответствующие данные по  $E^0$ -распаду отсутствуют.

Происхождение этого правила неизвестно, поскольку, если распады действительно идут через ток  $X$ , связанный с  $(\bar{p}n)$ , то не видно причин, по которым амплитуды  $\Delta T = 1/2$  и  $\Delta T = 3/2$  не могли бы иметь один и тот же порядок величины. Вторая тайна связана с происхождением малых коэффициентов у  $X$ .

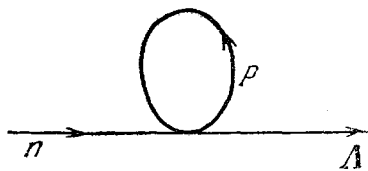


Рис. 14-1.

Одна из гипотез, принадлежащих авторам, заключается в том, что одна из диаграмм гораздо более важна, чем остальные, и ее амплитуда примерно в десять раз больше ожидаемой. Мы проиллюстрируем эту идею на примере, в котором положим, что  $X$  просто равно  $0,1 (p\Lambda)$ . Тогда  $\bar{p}$  может быть исключено из связи  $\bar{p}n \leftrightarrow \bar{p}\Lambda$  и мы получим амплитуду прямого перехода  $n \leftrightarrow \Lambda$ . Механизм такого исключения показан на диаграмме (рис. 14-1), где протон образует замкнутую петлю. Теперь представим, что вклад этой диаграммы численно гораздо больше, чем можно было бы ожидать, и существенно больше вклада всех остальных диаграмм. Большой численный фактор компенсирует малый коэффициент  $0,1$  в токе  $X$  и приводит к тому, что нелептонные распады идут с нормальной скоростью. Кроме того, поскольку теперь доминирует связь  $n \leftrightarrow \Lambda$ , для которой  $\Delta T = \pm 1/2$ , мы приходим к правилу 5. Переходы с  $\Delta T = 3/2$  могут произойти через более сложные диаграммы обычного типа, для которых малый коэффициент  $0,1$  не компенсирован.

Но мы объяснили две загадки (правила 4 и 5) с помощью двух произвольных гипотез (что коэффициент  $X$  мал и что какая-то определенная диаграмма велика). Поэтому совершенно неясно, продвинулись ли мы вперед. Верно, конечно, что все детали  $\Lambda$ - и  $\Sigma$ -распадов будут довольно близки друг к другу, если мы, исходя из глобальной симметрии, примем связи  $n \leftrightarrow Y$  и  $p \leftrightarrow \Sigma^+$  одинаковыми и будем опираться на вычисления по теории

возмущений, хотя использование теории возмущений не может быть оправдано.

**Итоги.** Будет уместно сейчас резюмировать наиболее существенные черты проблемы, стоящей перед нами.

Согласно принципам квантовой теории поля в природе существуют лишь частицы, обладающие массой и спином (целым или полуцелым), взаимоотношения которых определяются механизмом, именуемым взаимодействием (или связью). Все эти частицы распадаются на две группы: слабо и сильно взаимодействующие частицы. Слабо взаимодействующие частицы — это фотон, гравитон (который обычно не принимают во внимание) и лептоны ( $e$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ ). Сильно взаимодействующие частицы — это мезоны и барионы (см. выше табл. 9-1, 9-2).

Если известны частицы и связи, то все известно. Вот и вся физика, как на ладони! Взаимодействия обладают свойствами, перечисленными в таблице 14-1 (опущено гравитационное взаимодействие, которое или сохраняет все, или ничего в зависимости от точки зрения).

Таблица 14-1

Связь	Относительная интенсивность	Выполнение законов сохранения		
		изоспина	странности	четности
Ферми	$10^{-10}$	Нет	Нет	Нет
Электродинамическая	$10^{-2}$	Нет	Да	Да
Сильная	$10^1$	Да	Да	Да

Законы сохранения, выполняющиеся во всех взаимодействиях — это законы двух типов:

*Геометрические законы:*

Момент (вращение)

Энергия, импульс (параллельный перенос)

Четность  $\times$  зарядовое сопряжение

Обращение времени.

*Числовые законы:*

Число лептонов

Электрический заряд

Число барионов (сохранение нуклонного заряда).

Как мы видели, имеется 31 частица, следовательно, согласно стандартным правилам теории поля для их описания требуется 31 поле! Однако не исключено, что, исхитрившись, можно уменьшить число необходимых полей, если некоторые из частиц окажутся составными. Каково же минимально необходимое число? Прежде всего нужен барион. Также нужен объект с изоспином  $1/2$  (два состояния) и нужен носитель странности. Поэтому, например, можно обойтись тремя барионами:  $n$ ,  $p$ ,  $\Lambda$ . Но нет еще лептонов. Нам нужны  $\nu$ ,  $e$ ,  $\gamma$  и, возможно, гравитон. Никто не знает, для чего нужен мюон  $\mu$ . Если включить его, то нам придется объяснить не менее восьми полей и четырех связей.

Таковы пределы, до которых удалось пока продвинуться. Очевидно, что значительный прогресс был достигнут благодаря открытию симметрий, однако вычисления не дали большой информации. Мы испытываем чрезвычайную нужду в надежных методах количественного анализа наших задач.

Еще более глубокой и волнующей является проблема, которую мы молчаливо подразумевали, но ни разу ясно не формулировали в предыдущем изложении. Какова общая структура, лежащая в основе всех этих переплетающихся симметрий, нарушенных симметрий и асимметрий?

## 15. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И СЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Сейчас мы покажем, как делать количественные вычисления для тех процессов, которые мы можем рассчитывать! Я сформулирую результаты и приведу эвристические доводы в пользу их справедливости. У меня нет уверенности в том, что следует начинать с теории поля, так как она не является внутренне последовательной теорией. Во всяком случае, я хочу оставить место для новых идей.



У вас могут возникнуть большие методические трудности при изучении физики таким способом. Возможно, было бы легче учить ее в исторической последовательности, переходя от уравнения Шредингера к уравнению Дирака и от квантования гармонических осцилляторов к операторам рождения и уничтожения, и, наконец, к амплитудам различных процессов. Вместо всего этого мы сразу дадим правила для построения результирующей амплитуды — поскольку эти правила гораздо проще, чем шаги, ведущие к ним. Кроме того, концепции, с которых в этом случае нам пришлось бы начинать (например, уравнение Шредингера), являются приближенными и полезны только при выполнении некоторых условий. Здесь существенно для истинного физического понимания представлять, каким образом уравнение Шредингера вытекает из более фундаментальных законов. Разумеется, для лучшего исторического и педагогического восприятия было бы целесообразно начать с уравнения Шредингера и следовать описанным выше традиционным путем — хотя, конечно, полной дедукции здесь достичь бы не удалось, так как время от времени пришлось бы добавлять новые элементы типа матриц Дирака и т. п.

Этот путь — долгая и каменистая тропа к переднему краю физики.

Вместо этого давайте совместными усилиями произведем педагогический эксперимент. Я попытаюсь сразу поставить вас на этот передний край, так чтобы вы смогли сделать две вещи.

Во-первых, взглянуть вперед в неведомое, представить себе наиболее важные нерешенные проблемы, а также достигнутый в них прогресс, и, может быть, помочь в решении некоторых из них.

Во-вторых, оглянуться назад и постараться представить себе, что многие различные понятия, которые вы изучали, начиная от законов Ньютона и кончая уравнениями Максвелла и уравнением Шредингера, все являются следствиями тех закономерностей, которые вы узнаете теперь.

Эти последние не являются очевидными, и вам будет не очень легко принять правила, которые мне придется сформулировать откровенно искусственным путем. Однако именно таким правилам следует природа; она «по-

нимает» уравнение Шредингера как приближенное уравнение, описывающее большое количество взаимодействий между большим числом медленно движущихся частиц. Основными элементами здесь являются «ключевые» взаимодействия между небольшим числом частиц, движущихся с произвольной скоростью. К их изучению мы сейчас и обратимся.

Единственными взаимодействиями, для которых сейчас мы располагаем достаточно аккуратным количественным квантовомеханическим описанием, являются электромагнитное взаимодействие и взаимодействие Ферми (т. е. взаимодействие, ответственное за  $\beta$ -распад).

Будем рассматривать процессы, в которых участвует небольшое число частиц, способных взаимодействовать между собой, распадаться, порождать другие частицы и т. п. Каждый такой процесс описывается амплитудой; квадрат модуля амплитуды дает вероятность процесса. Начнем со случая, когда нет виртуальных частиц. Процессы с виртуальными частицами более сложны, и их мы рассмотрим позднее. Мы также ограничимся вначале частицами нулевого спина (скалярными частицами) для того, чтобы излишне не усложнять изложения одновременным введением спина и релятивизма.

Волновая функция скалярной частицы имеет лишь одну компоненту. При преобразованиях  $x_\mu \rightarrow x'_\mu$  (вращениях или преобразованиях Лоренца)

$$\varphi(x, y, z, t) \rightarrow \varphi(x', y', z', t').$$

Что происходит при пространственных отражениях

$$x \rightarrow -x, \quad t \rightarrow t?$$

Если  $\varphi(x, t) = \varphi(-x, t)$ , то мы говорим о «скалярной» частице;  $\varphi(x, t) = -\varphi(-x, t)$  соответствует «псевдоскалярной». Конечно  $\varphi$  может не удовлетворять ни тому, ни другому из этих уравнений. Мы предположим, что свободная частица представляется плоской волной

$$ue^{-i p x},$$

где  $p x \equiv p_\mu x_\mu = Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ . Это гипотеза восходит к де Бройлю. Множитель  $u$  не меняется при преобразованиях координат.

Затем нам нужно найти выражение для вероятности. Вероятность, отнесенная к единичному объему, должна быть четвертой компонентой 4-вектора  $S_\mu$ , поскольку полная вероятность

$$\int S_4 dx dy dz$$

должна быть инвариантом. Здесь  $S_4$  — вероятность нахождения частицы в одном кубическом сантиметре (также

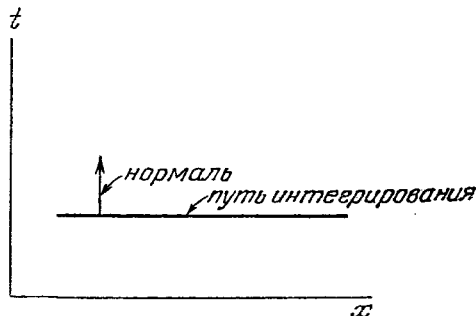


Рис. 15-1.

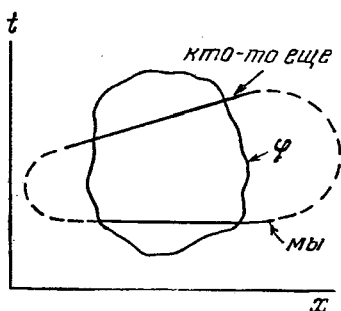


Рис. 15-2.

вероятность перехода частицы из прошлого в будущее), а  $S$  — вероятность прохождения через поверхность, перпендикулярную к  $S$ , отнесенная к  $\text{см}^2\text{сек}$ .

Произведение  $\oint \phi$  является скаляром и поэтому не может представлять  $S_4$ . Пространственный интеграл от  $S_4$  есть не что иное, как поверхностный интеграл в пространстве четырех измерений (см. рис. 15-1). Обобщение очевидно:

$$\text{Вероятность пройти через поверхность} = \int S_\mu N_\mu d\sigma,$$

где  $N_\mu$  — единичная нормаль к поверхности такая, что  $N_\mu N_\mu = -1$ , а  $d\sigma$  — элемент поверхности.

Предположим, что частица находится в некоторой конечной области пространства (так что  $u$  не есть плоская волна). Возможно ли, находясь в другой лоренцевой системе отсчета, вычислить интеграл вероятности в этой системе и получить такой же результат? Напоминаю, что на пространственно-временной диаграмме «движущаяся»

система вращается, мы рассмотрим схематическую картину, изображенную на рис. 15-2.

Поскольку частица локализована в заштрихованной области,  $S_\mu$  равны нулю на некотором расстоянии от ее границы и мы можем замкнуть путь интегрирования, как указано пунктирными линиями на рисунке.

Оба наблюдателя получают тот же самый ответ при условии, что

$$\int S_\mu N_\mu d\sigma = 0.$$

На основании теоремы Гаусса это можно получить, если выполняется уравнение

$$\frac{\partial S_\mu}{\partial x_\mu} = 0,$$

которое выражает закон сохранения вероятности.

Мы видели, что для плоской волны произведение  $\bar{u}u$  не может служить плотностью вероятности. Поскольку в нашем распоряжении есть только один 4-вектор,  $p_\mu$ , то

$$S_\mu = 2p_\mu \bar{u}u$$

(множитель 2 введен согласно традиции). Это дает

$$S_4 = 2E\bar{u}u.$$

Имеет ли это смысл? Отметим, что плотность в движущейся системе увеличивается как раз пропорционально  $E$ . Благодаря этому можно положить  $\bar{u}u = 1$  в любой системе, релятивистская нормировка равна тогда  $2E$  на  $\text{см}^3$ . Это несколько дикая нормировка, но она очень употребительна. Мы всегда будем ее использовать.

Что можно сказать о более общем выражении для  $S_\mu$ ? Для плоской волны

$$S_\mu = 2\bar{\varphi}i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi.$$

В общем случае следует использовать более симметричное выражение

$$S_\mu = \bar{\varphi}i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi - i \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \varphi.$$

Теперь мы все определили и можем переходить к вычислениям. Напомним знаменитую формулу для вероятности перехода в единицу времени

$$\frac{\text{Вер.}}{\text{сек}} = 2\pi |\mathfrak{M}_{f_i}|^2 \frac{(\text{плотность конечных состояний})}{(\text{единичный интервал энергии})},$$

вычисляемую для  $E_f = E_i$ .

Такая форма записи, однако, неудобна для наших целей. Я перепису ее так, что ее трудно будет узнать. Во-первых, для того чтобы использовать нашу нормировку, мы должны ввести множители  $(2E)^{-1}$  для каждой из частиц, участвующих в процессе. Учитывая, кроме того, что мы будем всегда работать с континуумом состояний, получаем

$$\frac{\text{Вер.}}{\text{сек}} = 2\pi \frac{|\mathfrak{M}|^2}{\prod_{\text{in}} (2E) \prod_{\text{out}} (2E)} \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3 p_{N-1}}{(2\pi)^3} \frac{1}{dE}.$$

Здесь нужно отметить, что, из-за закона сохранения импульса в конечном состоянии, отсутствует множитель  $d^3 p_N / (2\pi)^3$ . Для того чтобы симметризовать формулу относительно всех частиц в конечном состоянии, можно ввести фактор

$$\frac{d^3 p_N^2}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^{(3)} \left( \sum_{\text{in}} \mathbf{p} - \sum_{\text{out}} \mathbf{p} \right).$$

Множитель  $1/dE$  также можно заменить  $\delta$ -функцией  $\delta \left( \sum_{\text{in}} E - \sum_{\text{out}} E \right)$  или, что эквивалентно, можно было начать с формулы

$$\frac{\text{Вер.}}{\text{сек}} = 2\pi |\mathfrak{M}_{f_i}|^2 \delta(E_f - E_i) \quad (\text{плотность конечных состояний}),$$

справедливой для перехода между двумя любыми состояниями  $i$  и  $f$ .

Напомним далее, что

$$\delta(ax) = \frac{1}{a} \delta(x), \quad a > 0,$$

$$\delta[f(x)] = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0), \quad \text{если } f(x_0) = 0.$$

Теперь мы можем избавиться от асимметрии между  $p$  и  $E$  в нашей формуле, так как

$$\int \delta(p_4^2 - p^2 - m^2) dp_4 = \frac{1}{2p_4} \Big|_{p_4 = \sqrt{p^2 + m^2}} = \frac{1}{2E}.$$

Поэтому

$$\frac{d^3 p_i}{2E_i (2\pi)^3} \rightarrow \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} dp_{i4} \delta(p_i^2 - m^2) = \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} [2\pi \delta(p_i^2 - m^2)],$$

где  $p_i = (E_i, \mathbf{p}_i)$ .

Собирая результаты, имеем окончательно

$$\frac{\text{Вер.}}{\text{сек}} =$$

$$= \left[ \frac{|\mathfrak{M}|^2}{\prod_{\text{in}} (2E)} \right] (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( \sum_{\text{in}} p - \sum_{\text{out}} p \right) \prod_{\text{out}} \left\{ (2\pi) \delta(p_i^2 - m_i^2) \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} \right\}.$$

Множитель  $\delta^4 \left( \sum_{\text{in}} p - \sum_{\text{out}} p \right)$  соответствует глобальному сохранению энергии и импульса.

Мы часто будем переходить из конфигурационного пространства в импульсное и обратно. Условимся о следующих обозначениях:

$$\varphi(x) = \int u(p) \exp(-ipx) \frac{d^4 p}{(2\pi)^4},$$

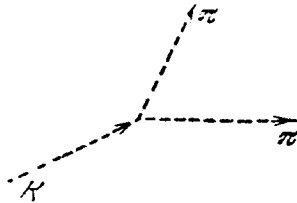
$$\varphi(p) = \int \exp(ipx) \varphi(x) d^4 x.$$

При таком соглашении дифференциал  $dp$  всегда сопровождается множителем  $(2\pi)^{-1}$ , а импульсная  $\delta$ -функция — множителем  $2\pi$ .

Следует сделать еще одно более важное замечание. Большое удобство нашей формулы состоит в том, что амплитуда  $\mathfrak{M}$  оказывается лоренцевым инвариантом. Поэтому мы можем выбирать систему отсчета для вычисления по своему усмотрению.

Для примера рассмотрим распад частицы. Вероятность распада в движении уменьшается пропорционально  $M/E$ , что, разумеется, соответствует релятивистскому замедлению времени. Я предлагаю вам попробовать разобрать следующий пример, который я детально рассмотрю позд-

нее. Рассмотрим распад каона на два пиона (отвлекаясь от электрического заряда)



$K$ - и  $\pi$ -мезоны имеют нулевой спин и амплитуды  $u_K$ ,  $u_\pi$ . Допустим, что амплитуда процесса имеет вид

$$\mathfrak{M} = (4\pi)^{1/2} f M_{K\pi} \check{u}_K \check{u}_\pi.$$

Здесь множитель  $(4\pi)^{1/2}$  соответствует традиции (рационализованная система единиц),  $f$  характеризует интенсивность взаимодействия, а масса  $M_K$  введена для того, чтобы сделать  $f$  безразмерной. Множители  $u$  введены лишь для того, чтобы напоминать о процессе ( $\check{u}$  соответствует рождению частиц, а  $u$  — уничтожению частиц), и в вычислениях приравниваются единице. Определите значение  $f$ , соответствующее экспериментальному времени жизни  $K$ -мезона.

## 16. ПЛОТНОСТЬ КОНЕЧНЫХ СОСТОЯНИЙ

Как правило, приходится рассматривать начальные состояния только двух типов:

(1) распад частицы:

$$\text{Вер. пер./сек} = 1/\text{среднее время жизни};$$

(2) столкновение двух частиц:

$$\text{Вер. пер./сек} = \sigma v,$$

где  $\sigma$  — эффективное поперечное сечение, а  $v$  — относительная скорость.

Запишем вероятность перехода в секунду в виде

$$\frac{\text{Вер. пер.}}{\text{сек}} = 2\pi \frac{|\mathfrak{M}|^2}{\prod_{\text{in}} (2E) \prod_{\text{out}} (2E)} D,$$

где

$$D = \frac{1}{2\pi} \prod_{\text{out}} \left\{ 2E_2 2\pi\delta(p^2 - m^2) \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \right\} (2\pi)^{4\delta^4} \left( \sum_{\text{in}} p - \sum_{\text{out}} p \right)$$

— плотность состояний на единичный интервал.

Имеются и другие полезные выражения для  $D$ :

(1) Две частицы в конечном состоянии:

$$D = \frac{E_1 E_2}{(2\pi)^3} \frac{p_1^3 d\Omega_1}{E_T p_1^2 - E_1 (\mathbf{p}_T \mathbf{p}_1)},$$

$$E_T = E_1 + E_2, \quad \mathbf{p}_T = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad E_i = (\mathbf{p}_i^2 + m_i^2)^{1/2}.$$

В пределе  $m_2 \rightarrow \infty$ :

$$D = \frac{E_1 p_1}{(2\pi)^3} d\Omega_1.$$

В системе центра масс:

$$D = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} p_1 d\Omega_1.$$

(2) Три частицы в конечном состоянии:

$$D = \frac{E_2 E_3}{(2\pi)^6} \frac{p_1^3 p_2^2 d p_1 d\Omega_1 d\Omega_2}{p_2^2 (E_T - E_1) - E_2 \mathbf{p}_2 (\mathbf{p}_T - \mathbf{p}_1)},$$

$$E_T = E_1 + E_2 + E_3, \quad \mathbf{p}_T = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3.$$

При  $m_3 \rightarrow \infty$ :

$$D = \frac{1}{(2\pi)^6} E_2 p_2 p_1^2 d p_1 d\Omega_1 d\Omega_2.$$

Рассмотрим теперь задачу распада каона на два пиона, которую я предложил на прошлой лекции. Для того чтобы продемонстрировать технику вычислений, я предположу, что имеется прямая связь  $K \leftrightarrow \pi$ ,  $\pi$  (в действительности мы не считаем, что в природе существует такое фундаментальное взаимодействие).

Несколько слов о системе единиц. Мы положим  $\hbar = c = 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} m = \text{масса} = \text{энергия} &= 1/\text{длина} = 1/\text{время} = mc^2 = \\ &= 1/(\hbar/mc) = 1/(\hbar/mc^2). \end{aligned}$$



Для электрона

$$m_e = 9,1 \times 10^{-28} \text{ г} = 0,511 \text{ МэВ} = 1/3,86 \times 10^{-11} \text{ см} = \\ = 1/1,288 \times 10^{-21} \text{ сек.}$$

Эти числа следует запомнить. Для протона все числа следует умножить на 1836, а для любой частицы массы  $m$  на  $m/m_e$ .

В конце вычислений всегда оказывается ясным, какие именно единицы представляет  $m$ . Бывает нелишне проверить размерности, например, время жизни должно быть обратно пропорционально  $m$ . Однако удержание в вычислениях констант  $\hbar$  и  $c$  является пустой тратой времени!

На первый раз мы проведем выкладки детально. Имеем

$$\mathfrak{M} = (4\pi)^{1/2} f M_K \dot{u}_{\pi_1} \dot{u}_{\pi_2} u_K, \quad m_1 = m_2 = m_\pi,$$

$$\frac{\text{Вер.}}{\text{сек}} = \frac{1}{\tau} = \frac{4\pi f^2 M_K^2}{2M_K} (2\pi)^4 \delta^4(p_K - p_1 - p_2) 2\pi \delta(p_1^2 - m_\pi^2) \times \\ \times \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(p_2^2 - m_\pi^2) \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4}.$$

Полагая  $p_2 = p_K - p_1$ , мы можем вычеркнуть факторы  $(2\pi)^4 \delta^4(p_K - p_1 - p_2)$  и  $d^4 p_2 / (2\pi)^4$ . Пусть  $p_1 = (E, \mathbf{p})$ ,  $p_K = (M_K, 0)$  (в системе покоя  $K$ -мезона). Тогда

$$(p_K - p_1)^2 = p_K^2 - 2p_K p_1 + p_1^2 = M_K^2 - 2M_K E + m_\pi^2$$

и

$$\text{скорость распада} = \frac{1}{\tau} = (2\pi) f^2 M_K (2\pi) \delta(E^2 - \mathbf{p}^2 - m_\pi^2) \times \\ \times (2\pi) \delta(M_K^2 - 2M_K E) p^2 dp \frac{dE}{(2\pi)^4} d\Omega.$$

Далее

$$2\pi \int \delta(M_K^2 - 2M_K E) dE = \frac{2\pi}{2M_K}, \quad E = \frac{M_K}{2},$$

$$2\pi \int \delta\left[\frac{M_K^2}{4} - p^2 - m_\pi^2\right] p^2 dp = \frac{2\pi}{2} p, \quad p = \left[\frac{M_K^2}{4} - m_\pi^2\right]^{1/2},$$

так что

$$\frac{1}{\tau} = 2\pi f^2 M_K \pi \left[ \frac{M_K^2}{4} - m_\pi^2 \right]^{1/2} \frac{\pi}{M_K} \frac{4\pi}{(2\pi)^4} = \frac{f^2}{4} M_K \left[ 1 - \left( \frac{2m_\pi}{M_K} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Главная цель физических теорий — найти число и притом с достаточной точностью! В противном случае вы ничего не добились. Находим

$$\frac{1}{\tau} = f^2 \left[ \frac{966 \times 0,84}{4 \times 1288 \times 10^{-21} \text{ сек}} \right].$$

Экспериментальное время жизни  $K$ -мезона  $\tau = 0,99 \times 10^{-10}$  сек. Лишь 78% распадов идет на два пиона. Поэтому

$$\frac{1}{\tau_{\text{exp}}} = \frac{0,78}{0,99 \times 10^{-10} \text{ сек}},$$

и  $f = 2,38 \times 10^{-7}$ . Это очень маленькая безразмерная константа, и поэтому мы имеем здесь дело со слабой связью. Я хочу еще раз подчеркнуть, что это несколько искусственный пример; в действительности мы не думаем, что механизм этого распада является фундаментальным, скорее всего он представляет косвенное следствие некоторых других механизмов. Однако давайте на время примем эту идею.

*Задача 16-1.*  $K$ -мезон также распадается на три пиона. Предположив взаимодействие

$$(4\pi)^{1/2} g u_{\pi_1} u_{\pi_2} u_{\pi_3} u_K,$$

получите спектральное распределение, сравните его с экспериментальными данными и определите  $g$ .

Рассмотрим теперь немного более сложную задачу  $\pi$ - $K$ -рассеяния. Отвлекаясь от электрического заряда  $K$ - и  $\pi$ -мезонов, можно изобразить процесс рассеяния диаграммой рис. 16-1. Это — непрямой процесс, содержащий виртуальный  $\pi$ -мезон. Я дам вам сейчас правила для построения амплитуды этого процесса (позднее я объясню их более подробно).

Следуйте вдоль линии частицы и пишите (справа налево):

(1) для каждой вершины амплитуду  $(4\pi)^{1/2} f M_K$ ;

(2) для распространения  $\pi$ -мезона между двумя вершинами амплитуду  $1/(p^2 - m_\pi^2)$ , где  $p$  — 4-импульс, а  $m_\pi$  — масса  $\pi$ -мезона (это и есть уравнение движения).

(3) Энергия и импульс должны сохраняться в каждой вершине.

Произведение всех этих амплитуд дает  $\mathfrak{M}$  — амплитуду процесса.

Для рис. 16-1 получаем

$$(4\pi)^{1/2} f M_K \frac{1}{(p_1 + q_1)^2 - m_\pi^2} (4\pi)^{1/2} f M_K.$$

Однако имеется другой способ осуществления того же самого перехода, показанный на рис. 16-2, топологически

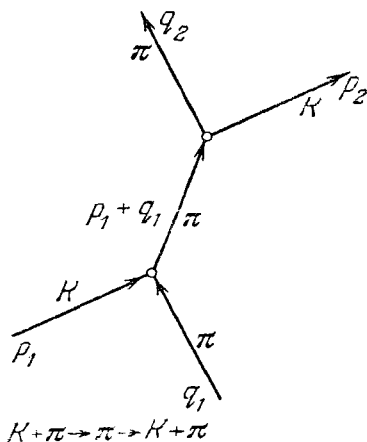


Рис. 16-1.

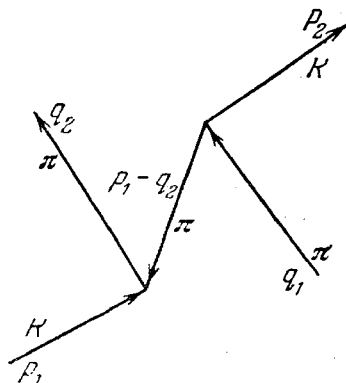


Рис. 16-2.

отличный от первой диаграммы (вершины этой диаграммы невозможно расположить в пространстве-времени так, чтобы свести ее к первой).

Амплитуда этого процесса будет

$$(4\pi)^{1/2} f M_K \frac{1}{(p_1 - q_2)^2 - m_\pi^2} (4\pi)^{1/2} f M_K,$$

а полная амплитуда  $\mathfrak{M}$  для данного перехода является суммой двух слагаемых

$$\mathfrak{M} = 4\pi f^2 M_K^2 \left[ \frac{1}{(p_1 + q_1)^2 - m_\pi^2} + \frac{1}{(p_1 - q_2)^2 - m_\pi^2} \right].$$

## 17. ПРОПАГАТОР СКАЛЯРНОЙ ЧАСТИЦЫ

Я постараюсь представить правило для написания пропагатора менее искусственным, связав его с вещами, вам уже известными. Рассмотрим еще раз пример  $\pi$ - $K$ -рассеяния (рис. 17-1).

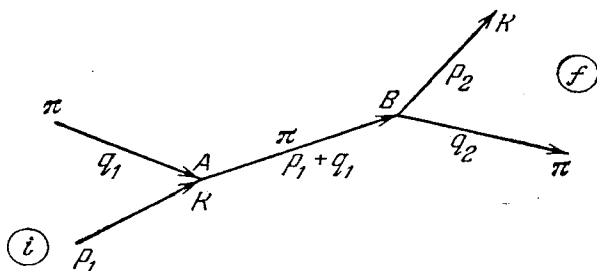


Рис. 17-1.

Мы уже говорили, что амплитуда имеет вид

$$\mathfrak{M} = B_{fp} \frac{1}{p^2 - m^2} A_{pi}.$$

Теперь рассмотрим член низшего порядка в обычной квантовомеханической теории возмущений

$$\sum_n H_{fn} \frac{1}{E_i - E_n} H_{ni},$$

в котором сумма берется по промежуточным состояниям  $n$ . Вклад диаграммы рис. 17-1 в эту сумму равен

$$B_{fp} \frac{1}{E_i - E_p} A_{pi},$$

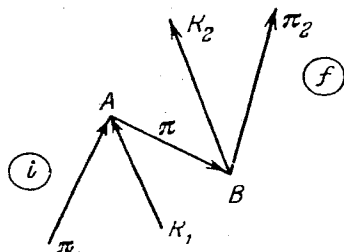


Рис. 17-2.

где

$$E_p = (p^2 + m^2)^{1/2}, \quad p = p_1 + q_1.$$

Теперь примем во внимание, что в обычной теории возмущений процесс с обратным во времени порядком событий (т. е. вершин) рассматривается отдельно как рождение пары, за которым следует аннигиляция позитрона с начальным электроном.

Энергия промежуточного состояния поэтому равна  $2E_i + E_p$  (рис. 17-2 \*).

Вспоминая наши правила для начальных и конечных частиц, видим, что  $f_a(i)$  есть конечное (начальное) состояние. Поэтому мы имеем

$$A_{p_i} \frac{1}{E_i - (2E_i + E_p)} B_{fp} = -B_{fp} \frac{1}{E_i + E_p} A_{p_i}.$$

Сумма двух матричных элементов оказывается разной

$$B_{fp} \frac{2E_p}{E_i^2 - E_p^2} A_{p_i}.$$

Заметим еще, что

$$p^2 - m^2 = (p_1 + q_1)^2 - m^2 = (\epsilon_1 + K_1)^2 - p^2 - m^2 = E_i^2 - E_p^2$$

и что множитель  $2E_p$  есть как раз фактор нормировки. Таким образом, идея попятного движения во времени упрощает получение окончательного результата. Каждый из двух членов по отдельности не является инвариантным. Однако, комбинируя их, мы приходим к явно инвариантному выражению. Этот пассаж не является доказательством нашего правила для пропагатора, он скорее разъясняет его физическое содержание.

Вот другой способ получения того же правила для пропагатора.

На основе частного решения для свободной частицы

$$u \exp(-ip \cdot x), \quad p^2 = m^2$$

можно записать общее решение для свободной частицы в виде

$$\varphi(x, t) = \sum_p u(p) \exp(-ip \cdot x).$$

\*) В данном случае автор подразумевает аналогию между рассматриваемым процессом и процессом комптоновского рассеяния. В рамках этой параллели  $K$ -мезон соответствует фотону, а  $\pi$ -мезон — электрону. На диаграмме рис. 17-2 виртуальный пион следует заменить на позитрон, движущийся из точки  $B$  в точку  $A$ . Тогда сначала в точке  $B$  происходит акт рождения из вакуума пары пионов и каона  $K_2$ , а затем — в точке  $A$  аннигиляция  $\pi_1$ ,  $K_1$  и  $\pi$ .

Энергия промежуточного состояния складывается из энергий всех четырех реальных частиц  $2E_i$  и энергии виртуальной частицы  $E_p$ . (Прим. перев.)

Заметим теперь, что

$$\sum_{\mathbf{p}} (p^2 - m^2) u(\mathbf{p}) \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) = 0.$$

Поэтому

$$\sum_{\mathbf{p}} \left\{ \left( i \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - (-i\nabla)^2 - m^2 \right\} u(\mathbf{p}) \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) = \\ = [(i\nabla_{\mu})^2 - m^2] \varphi = 0,$$

или

$$(\square - m^2) \varphi = 0,$$

где

$$\square = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Предположим теперь, что  $S(\mathbf{x}, t)$  есть источник частиц. Мы постулируем тогда, что

$$(\square - m^2) \varphi(\mathbf{x}, t) = S(\mathbf{x}, t).$$

Это уравнение можно решить с помощью преобразования Фурье

$$S(\mathbf{x}, t) = \int \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) S(p) \frac{d^4 p}{(2\pi)^4},$$

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \varphi(p) \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}.$$

(Заметьте, что  $p_4 \neq (p^2 + m^2)^{1/2}$ , так как мы более не имеем дела со свободной частицей.)

Преобразованное уравнение имеет вид

$$(p^2 - m^2) \varphi(p) = S(p).$$

Поэтому, если нам известен источник, то

$$\varphi(p) = \frac{S(p)}{p^2 - m^2}.$$

Последнее выражение и поясняет происхождение пропагатора.

Возвращаясь к  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ , получаем

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \frac{1}{p^2 - m^2} \int e^{+i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}'} S(\mathbf{x}') d^4 x' \frac{d^4 p}{(2\pi)^4},$$

или

$$\varphi(x) = \int D_+(x - x') S(x') d^4 x',$$

где

$$D_+(x - x') = \int \frac{e^{-ip(x-x')}}{p^2 - m^2} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$$

есть пропагатор в пространстве-времени.

Для того чтобы придать смысл этому выражению, необходимо задать правила обхода полюсов в подынтегральном



Рис. 17-3.

выражении. С этой целью добавим к массе (инварианту) бесконечно малую отрицательную мнимую часть и проинтегрируем сначала по  $d\omega = dp_4$ :

$$\int \frac{\exp[ip \cdot (x - x')] \exp[-i\omega(t - t')]}{\omega^2 - p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}.$$

Здесь подразумевается переход к пределу  $\epsilon \rightarrow 0$  в конце выкладки.

Такой рецепт смещает полюсы из  $\omega = \pm E_p = \pm(p^2 + m^2)^{1/2}$  в точки  $\omega = \pm E_p \mp i\epsilon$ , что эквивалентно интегрированию по контуру, изображенному на рис. 17-3. При  $t > t'$  мы замыкаем контур в нижней полуплоскости. Поэтому

$$\begin{aligned} D_+(t > t') &= -2\pi i \text{Res}(E_p) = \\ &= i \int \frac{\exp[iE_p(t' - t)]}{E_p} \exp[ip \cdot (x - x')] \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}. \end{aligned}$$

Как видно, при  $t > t'$  дают вклад только положительные энергии. При  $t < t'$  мы должны замкнуть контур в верхней полуплоскости. В этом случае в

$$D_+(t < t') = i \int \frac{\exp[iE_p(t - t')]}{E_p} \exp[ip \cdot (x - x')] \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}$$

дают вклад только отрицательные энергии. Тем самым мы убедились, что правило  $m \rightarrow m - i\epsilon$  эквивалентно

ранее введенным правилам прямого и обратного движения во времени.

Таким образом, правильная формула для пропагатора частицы со спином 0 такова:

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}.$$

## 18. ПРОПАГАТОР В КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Как мы убедились на примере  $\pi$ - $K$ -рассеяния, в обычной теории возмущений второго порядка отдельные вклады в амплитуду не инварианты, тогда как их сумма инвариантна. Рассмотрим две лоренцевы системы отсчета  $A$  и  $B$ , связанные лоренцевым вращением пространства-времени. Может статься, что порядок во времени двух событий в системах  $A$  и  $B$  различен, как это изображено на рис. 18-1. Для этого

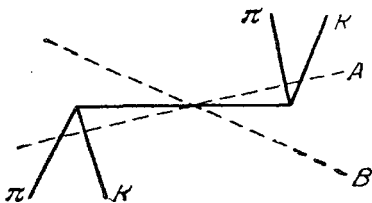


Рис. 18-1.

нужно, чтобы ни одна из вершин [не] лежала в световом конусе другой (в противном случае порядок времени не может быть изменен преобразованием Лоренца).

Можно было бы подумать, что если два события разделены в пространстве, но не во времени, то амплитуда равна нулю. Однако это не так. Все относительные положения дают вклады.

Для того чтобы уяснить смысл этого, рассмотрим некоторые свойства пропагатора в конфигурационном пространстве:

$$D_+(x) = \int \frac{\exp[-ip \cdot x]}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}.$$

Как ведет себя  $D_+(x)$  в окрестности светового конуса? В конфигурационном пространстве пропагатор оказывается гораздо более сложной функцией, чем в импульсном.



В явном виде

$$D_+(x) = -\frac{\delta(s^2)}{4\pi} + \frac{m}{8\pi s} H_1^{(2)}(ms),$$

где

$$\begin{aligned} s &= (t^2 - x^2)^{1/2} && \text{при } t^2 > x^2, \\ s &= -i(x^2 - t^2)^{1/2} && \text{при } t^2 < x^2, \end{aligned}$$

а  $H_1^{(2)}$  — функция Ганкеля второго рода [9]. При больших  $s$

$$D_+ \simeq \left(\frac{2}{\pi s}\right)^{1/2} \exp(-ims).$$

В то же время при малых скоростях, используя разложение  $s \simeq t - x^2/2t$ , получаем

$$D_+ \sim \exp(-imt) \exp\left[\frac{imx^2}{2t}\right] \frac{1}{t^{3/2}} = \exp(-imt) \psi_s,$$

где  $\psi_s$  удовлетворяет уравнению Шредингера.

Вне светового конуса, при  $x^2 > t^2$ ,  $D_+$  экспоненциально убывает:

$$\begin{aligned} D_+ &\sim \exp(-m\sigma), \quad \sigma = (x^2 - t^2)^{1/2}, \\ D_+ &\rightarrow \exp(-mr) \quad \text{при } t^2 \ll x^2. \end{aligned}$$

В качестве физической иллюстрации представим себе, что мы измеряем положение электрона, например, с

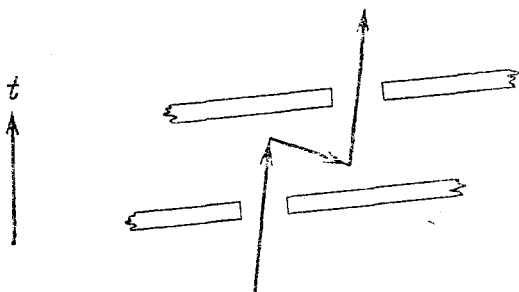


Рис. 18-2.

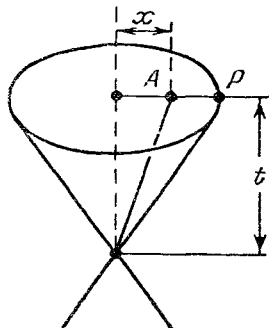


Рис. 18-3.

помощью затвора. В одно и то же время, но в различных местах, мы делаем измерения с целью обнаружить местоположение электрона (см. рис. 18-2). Вероятность *не равна нулю*, поскольку в акте измерения может быть

рождена пара, а затем позитрон может аннигилировать с первоначальным электроном. Этот мысленный эксперимент был предложен Паули, который считал всю идею ошибочной.

Возьмем далее частицу с большой скоростью (см. рис. 18-3). Исследуем поведение амплитуды (рис. 18-4)

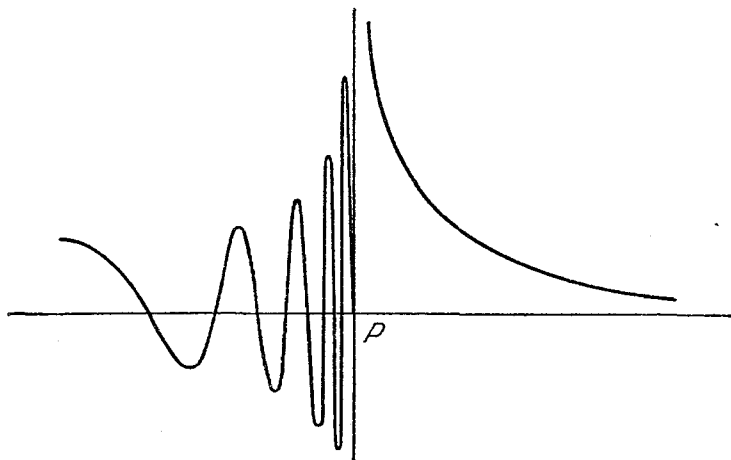


Рис. 18-4.

при движении поперек светового конуса вдоль линии  $AP$ . Соответствует ли, например, длина волны в точке  $A$  на рис. 18-3 классической скорости  $x/t$ ? Рассмотрим фазу выражения

$$\exp[-im(t^2 - x^2)^{1/2}].$$

Когда  $x$  меняется на  $\lambda$ , фаза должна измениться на  $2\pi$ :

$$m[t^2 - (x + \lambda)^2]^{1/2} - m(t^2 - x^2)^{1/2} = 2\pi,$$

или

$$m\lambda \frac{\partial}{\partial x} (t^2 - x^2)^{1/2} = 2\pi.$$

Поэтому

$$\frac{2\pi}{\lambda} = k = m \frac{x}{t} \left[ 1 - \left( \frac{x}{t} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{mv_{кл}}{(1 - v_{кл}^2)^{1/2}}.$$

При  $x \rightarrow t$  ( $v \rightarrow c$ ) мы приближаемся к  $\delta$ -сингулярности на световом конусе. Возможная физическая причина

заключается в том, что все импульсы дают вклад, но для подавляющего числа импульсов  $\nu$  близко к  $c$ , вследствие чего происходит значительное усиление амплитуды около светового конуса.

Мы записывали уравнение движения для бозонного поля со спином 0 в виде

$$(\square - m^2)\varphi = S.$$

Изучим теперь  $S$ , т. е. рассмотрим вопрос о природе источника частиц  $\varphi$ . Вернемся снова к примеру  $\pi - K$  со связью

$$(4\pi)^{1/2} f \varphi_\pi \varphi_\pi \varphi_K.$$

Полагая  $f' = (4\pi)^{1/2} f$ , запишем уравнения для  $\varphi_\pi$  и  $\varphi_K$ :

$$(\square - m_\pi^2)\varphi_\pi = 2f'\varphi_\pi\varphi_K, \quad (\square - m_K^2)\varphi_K = f'\varphi_\pi^2.$$

Эти уравнения можно получить из принципа наименьшего действия.

Рассмотрим для этого действие

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int [(\nabla_\mu \varphi_\pi)^2 - m_\pi^2 \varphi_\pi^2] d\tau, \quad d\tau \equiv dx dy dz dt.$$

Варьируя по  $\varphi_\pi$ , интегрируя по частям (с отбрасыванием поверхностного члена) и полагая  $\delta\mathcal{A} = 0$ , приходим к уравнению

$$-\nabla_\mu^2 \varphi_\pi - m_\pi^2 \varphi_\pi = 0.$$

Это есть уравнение движения свободного пиона.

В  $\pi - K$ -примере мы должны добавить к  $\mathcal{A}$  подобный член для свободного поля и член взаимодействия:

$$\mathcal{A} = \int \left\{ \frac{(\nabla_\mu \varphi_\pi)^2 - m_\pi^2 \varphi_\pi^2}{2} + \frac{(\nabla_\mu \varphi_K)^2 - m_K^2 \varphi_K^2}{2} + f' \varphi_\pi^2 \varphi_K \right\} d\tau.$$

Вариации относительно  $\varphi_\pi$  и  $\varphi_K$  приводят к выписанным выше уравнениям движения. (Здесь мы молчаливо предположили, что поля действительны и описывают нейтральные частицы — обобщение не составляет труда.)

Более общее выражение имеет вид

$$\mathcal{A} = \int \mathcal{L} d\tau,$$

причем лагранжева плотность  $\mathcal{L}$  должна быть релятивистским инвариантом. Это требование существенно ограничивает количество допустимых выражений для  $\mathcal{L}$ . Отметим еще связь с обычной классической функцией Лагранжа

$$\mathcal{A} = \int L dt, \quad \text{где } L = \int \mathcal{L} d^3x.$$

Мы рассматриваем действие как более фундаментальную величину. Из нее мы можем непосредственно получить правила для пропагаторов, связей и уравнений движения. Однако мы все еще не знаем происхождения правил для диаграмм и не понимаем, почему мы можем получать пропагаторы из  $\mathcal{A}$ .

## 19. ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1

В общем случае нас интересуют амплитуды, которые линейно преобразуются при преобразованиях Лоренца

$$u' = \vartheta(L)u \quad (L — \text{лоренцево преобразование}),$$

где

$$\vartheta(L_1 L_2) = \vartheta(L_1) \vartheta(L_2).$$

Одним из решений является скаляр. Можно без труда указать другое — 4-векторы преобразуются линейно, поэтому, несомненно, 4-вектор также возможное решение. Напомним, что для обычных вращений 3-вектор, представляющий момент 1, был допустимым объектом. Поэтому частица может быть представлена амплитудой, являющейся 4-вектором. Мы ожидаем, что такая частица будет иметь спин 1. Здесь, однако, имеется одно осложнение: при вращениях пространственные компоненты преобразуются как вектор, тогда как временная — как скаляр. Дело выглядит так, как будто бы имеем дело с двумя частицами. Данную трудность можно обойти с помощью условия

$$p_\mu u_\mu = 0,$$

которое в системе покоя частицы ( $\mathbf{p}=0$ ) имеет вид

$$m u_4 = 0, \quad \text{или} \quad u_4 = 0.$$

**Фотоны.** Фотон является единственной известной экспериментально частицей со спином  $1^*$ ). Он имеет нулевую массу. Если нам известны законы распространения фотонов и их взаимодействия с другими частицами, то мы будем знать законы электродинамики. Очень полезным подспорьем при формулировании этих законов представляется требование соответствия теории в классическом пределе уравнениям Максвелла.

Амплитуда фотонов в квантовой электродинамике выбирается в виде 4-векторного потенциала  $A_\mu(x, y, z, t)$ , который в отсутствие источников удовлетворяет уравнениям

$$\square A_\mu = 0, \quad (19-1)$$

$$\nabla_\mu A_\mu = 0. \quad (19-2)$$

Свободный фотон представляется плоской волной

$$\epsilon_\mu \exp(-iKx),$$

где  $\epsilon_\mu$  есть вектор поляризации. Подставляя плоскую волну в (19-1), мы получаем  $K^2=0$ , т. е.  $m=0$ , а из (19-2) находим  $K_\mu \epsilon_\mu = 0$  — вектор поляризации перпендикулярен к  $K_\mu$ .

Теория должна быть также градиентно инвариантна. Если кто-то нашел решение  $A_\mu$ , а другой — решение  $A'_\mu = A_\mu + \nabla_\mu f$ , причем  $\square f = 0$ , то оба должны получить тот же самый физический результат. Для плоских волн это утверждение выглядит следующим образом. Пусть  $A_\mu = \epsilon_\mu \exp(-iKx)$  представляет фотон с 4-импульсом  $K$  и поляризацией  $\epsilon$ , и пусть

$$f = iz \exp(-iKx), \quad \alpha = \text{const.}$$

Тогда

$$A'_\mu = \epsilon'_\mu \exp(-iKx), \quad \epsilon'_\mu = \epsilon_\mu + \alpha K_\mu.$$

---

\*) Сейчас следовало бы сказать: «единственной стабильной частицей»; см. раздел «Мезонные резонансы» в «Частицах 1976», (Прим. перев.)

Поэтому, если два вектора поляризации отличаются на слагаемое, пропорциональное 4-импульсу, то они должны представлять один и тот же фотон.

Подходящим градиентным преобразованием мы всегда можем добиться того, чтобы  $\varepsilon_4 = 0$ . В самом деле, пусть  $\varepsilon_4 \neq 0$ . Положим

$$\alpha = -\frac{\varepsilon_4}{K_4}.$$

Тогда

$$\varepsilon'_4 = \varepsilon_4 - \left(\frac{\varepsilon_4}{K_4}\right) K_4 = 0$$

и

$$K_\mu \varepsilon'_\mu = \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}' = 0.$$

Поэтому свободный фотон представляется только двумя состояниями поляризации. Мы можем выбрать для них два любых направления, перпендикулярных к импульсу, или разложить их в правые и левые (по часовой стрелке и против) круговые поляризации (см. лекцию 2). Правая (левая) круговая поляризация соответствует спину 1, направленному вдоль (навстречу) импульса фотона. В этом легко убедиться. Положим для этого

$$u_{\text{ПКП}} = \frac{\varepsilon_x + i\varepsilon_y}{\sqrt{2}},$$

где  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$  — два единичных вектора, нормальных к импульсу. Произведем поворот на угол  $\theta$  вокруг оси  $z$ :

$$u'_{\text{ПКП}} = \frac{\varepsilon'_x + i\varepsilon'_y}{\sqrt{2}},$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon'_x &= \varepsilon_x \cos \theta - \varepsilon_y \sin \theta, \\ \varepsilon'_y &= \varepsilon_x \sin \theta + \varepsilon_y \cos \theta. \end{aligned}$$

Подставляя в  $u'_{\text{ПКП}}$ , находим  $u'_{\text{ПКП}} = e^{i\theta} u_{\text{ПКП}}$ .

Подобным образом

$$u'_{\text{ЛКП}} = e^{-i\theta} u_{\text{ЛКП}}, \quad u_{\text{ЛКП}} = \frac{\varepsilon_x - i\varepsilon_y}{\sqrt{2}}.$$

Вспомним теперь, что матрица вращения есть  $\exp(i\theta J_x)$ . Поэтому

$$J_x u_{икп} = u_{икп}, \quad J_x u_{лкп} = -u_{лкп},$$

что и требовалось доказать.

Займемся теперь законами взаимодействия и распространения фотонов.

**Принцип минимального электромагнитного взаимодействия.** Существует замечательный принцип, с помощью которого можно получить связь (т. е. взаимодействие) фотона с заряженной частицей в случае, если уравнение движения для этой частицы известно. Пусть, например, уравнение для свободной скалярной частицы будет

$$(i\nabla_\mu i\nabla_\mu - m^2)\varphi = 0.$$

Тогда правило сводится к тому, чтобы заменить  $i\nabla_\mu$  на  $i\nabla_\mu - eA_\mu$ . Мы получаем уравнение, в котором содержатся эффекты электромагнитного поля:

$$[(i\nabla_\mu - eA_\mu)(i\nabla_\mu - eA_\mu) - m^2]\varphi = 0.$$

Важно то, что этот принцип обеспечивает градиентную инвариантность уравнения. Пусть

$$\varphi = \exp(ief)\varphi'.$$

Тогда  $\varphi'$  удовлетворяет тому же самому уравнению, что и  $\varphi$ , с заменой  $A_\mu$  на  $A_\mu + \nabla_\mu f$ . Но  $\varphi$  и  $\varphi'$  отличаются только на фазовый множитель (который, однако, может зависеть от пространства и времени) и, следовательно, представляют одно и то же физическое состояние.

Уравнение для  $\varphi$  можно переписать следующим образом:

$$(i\nabla_\mu i\nabla_\mu - m^2)\varphi = e [i\nabla_\mu (A_\mu \varphi) + A_\mu (i\nabla_\mu \varphi)] - e^2 A_\mu A_\mu \varphi.$$

Правая часть представляет источник скалярного поля. Мы можем получить отсюда правила построения амплитуд фундаментальных процессов в следующем виде. Амплитуда того, что частица с импульсом  $p_1$  [ $\varphi_1 = \exp(-ip_1 x)$ ] испустит фотон с импульсом  $q$  и поляризацией  $\varepsilon$

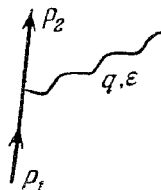
$[A_\mu = \varepsilon_\mu \exp(iqx)]$  и продолжит движение с импульсом  $p_2 [\varphi_2 = \exp(ip_2x)]$ , пропорциональна выражению

$$\begin{aligned} e \int \Phi_2 [i\nabla_\mu (A_\mu \varphi_1) + A_\mu (i\nabla_\mu \varphi_1)] d\tau = \\ = e \int \exp(ip_2x) \{i\nabla_\mu [\varepsilon_\mu \exp(iqx - ip_1x)] + \\ + \varepsilon_\mu \exp(iqx) i\nabla_\mu \exp(-ip_1x)\} d^4x = \\ = e(p_1 - q + p_1) \cdot \varepsilon \int \exp[i(p_2 + q - p_1)x] d^4x. \end{aligned}$$

В окончательном выражении последний множитель обеспечивает сохранение энергии и импульса в акте взаимодействия:  $p_2 + q = p_1$ . Если фотон не испускается, а поглощается, то следует заменить  $q$  на  $-q$ .

В любом случае амплитуда равна

$$\text{Амп.} = -i\sqrt{4\pi} e(p_2 + p_1) \cdot \varepsilon.$$



Множитель  $(4\pi)^{1/2}$  введен для того, чтобы  $e^2 = 1/137$  в системе единиц, где  $\hbar = c = 1$ . Множитель  $-i$  существует только для того, чтобы обеспечить правильное фазовое соотношение с вкладками высших порядков по константе связи  $e$ , в противном случае он может быть отброшен.

Член в источнике, квадратичный по  $e$ , дает амплитуду одновременного испускания (поглощения) двух фотонов. Эта амплитуда пропорциональна выражению

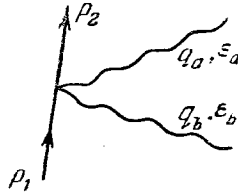
$$\begin{aligned} e^2 \int \Phi_2 A_\mu A_\mu \varphi_1 d\tau = e^2 \int e^{ip_2x} [\varepsilon_\mu^a \exp(iq_a x) \varepsilon_\mu^b \exp(iq_b x) + \\ + \varepsilon_\mu^b \exp(iq_b x) \varepsilon_\mu^a \exp(iq_a x)] e^{-ip_1x} d^4x = \\ = e^2 (\varepsilon_a \varepsilon_b + \varepsilon_b \varepsilon_a) \int \exp[i(p_2 + q_a + q_b - p_1)x] d^4x. \end{aligned}$$

Множитель  $\varepsilon_a \varepsilon_b$  появился два раза, поскольку любой из  $A_\mu$  может представлять испущенный фотон  $a$  или  $b$ . Как и выше, последний множитель выражает закон сохра-



нения 4-импульса:  $p_2 + q_a + q_b = p_1$ . Амплитуда оказывается равной

$$\text{Амп.} = -4\pi e^2 (\varepsilon_a \varepsilon_b + \varepsilon_b \varepsilon_a).$$



Подчеркнем еще раз, что связь между правилами построения амплитуд и уравнениями движения носит чисто эвристический характер. Невозможно «вывести» квантовую электродинамику из уравнений Максвелла; последние могут служить лишь источником наводящих соображений.

Равным образом мы могли бы взять за исходный пункт рассуждений лагранжеву плотность свободного скалярного поля  $\varphi$

$$\mathcal{L}_F = -(i\nabla_\mu \varphi)^* (i\nabla_\mu \varphi) + m^2 \bar{\varphi} \varphi.$$

Производя замену  $i\nabla_\mu \rightarrow i\nabla_\mu - eA_\mu$ , получаем

$$\mathcal{L} = -(-i\nabla_\mu - eA_\mu) \bar{\varphi} (i\nabla_\mu - eA_\mu) \varphi + m^2 \bar{\varphi} \varphi$$

или, после перегруппировки членов,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_C,$$

где

$$\mathcal{L}_C = eA_\mu [(i\nabla_\mu \varphi)^* \varphi + \bar{\varphi} (i\nabla_\mu \varphi)] - e^2 A_\mu A_\mu \bar{\varphi} \varphi$$

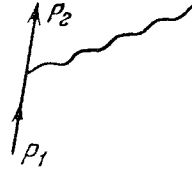
— вклад, отвечающий взаимодействию между частицами и фотонами. Правила получения амплитуд фундаментальных процессов могут быть теперь получены из  $\mathcal{L}_C$ .

Так, например, коэффициент при  $e$  говорит нам, что осуществляется процесс, в котором частица с импульсом  $p_1$  [ $\varphi = \exp(-ip_1 x)$ ] испускает реальный или виртуальный фотон с импульсом  $q$  и поляризацией  $\varepsilon$  [ $A_\mu = \varepsilon_\mu \exp(iqx)$ ] и движется дальше с импульсом  $p_2$  [ $\varphi = \exp(-ip_2 x)$ ]. Подстановка в  $\mathcal{L}_C$  дает

$$\begin{aligned} e \int \varepsilon_\mu \exp(iqx) [p_{2\mu} \exp(ip_2 x) \exp(-ip_1 x) + \\ + \exp(ip_2 x) p_{1\mu} \exp(-ip_1 x)] d^4 x = \\ = e(p_1 + p_2) \cdot \varepsilon \int \exp[i(q + p_2 - p_1)] d^4 x. \end{aligned}$$

Последний множитель говорит нам, что  $p_2 + q = p_1$ . Амплитуда процесса оказывается равной

$$\text{Амп.} = -i(4\pi)^{1/2} e(p_2 + p_1) \cdot \varepsilon.$$



Значение множителей  $(4\pi)^{1/2}$  и  $-i$  обсуждалось ранее.

Коэффициент при  $e^2$  соответствует одновременному испусканию двух фотонов. Один из  $A_\mu$  равен

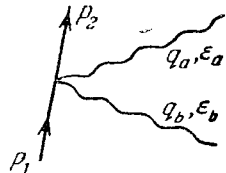
$$\varepsilon_\mu^a \exp(iq_a x) \quad \text{или} \quad \varepsilon_\mu^b \exp(iq_b x),$$

а второй соответственно

$$\varepsilon_\mu^b \exp(iq_b x) \quad \text{или} \quad \varepsilon_\mu^a \exp(iq_a x).$$

Амплитуда процесса поэтому равна

$$\text{Амп.} = -4\pi e^2 2\varepsilon_a \cdot \varepsilon_b.$$



**Фотонный пропагатор.** Пропагатор фотона также может быть получен из уравнений движения. Амплитуда фотона  $A_\mu(x, y, z, t)$  удовлетворяет уравнению Максвелла

$$\nabla_\mu \nabla_\mu A_\nu = j_\nu \quad (j_\nu \text{ — источник фотонов}).$$

Поскольку  $\nabla_\mu A_\mu = 0$ , то из уравнения движения следует  $\nabla_\nu j_\nu = 0$ ; мы поговорим об этом соотношении позднее. Следуя процедуре, описанной в лекции 17, положим

$$A_\mu(x) = \int \varepsilon_\mu(k) \exp(-ikx) \frac{d^4k}{(2\pi)^4},$$

$$j_\mu(x) = \int j_\mu(k) \exp(-ikx) \frac{d^4k}{(2\pi)^4}.$$

Подстановка в дифференциальное уравнение дает

$$-k^2 \varepsilon_\mu(k) = j_\mu(k).$$

Следовательно, пропагатор виртуального фотона равен

$$-\frac{i}{k^2} \delta_{\mu\nu}.$$

Множитель  $\delta_{\mu\nu}$  напоминает нам о природе источника, ответственного за данную поляризацию, множитель  $i$  соответствует множителю  $-i$  во взаимодействии.

Для примера рассмотрим  $\pi$ - $K$ -рассеяние через обмен фотоном, изображенное на рис. 19-1. (Забудьте о прямом взаимодействии, которое мы вводили ранее.)

Полная амплитуда  $\mathcal{M}$  составляется из трех множителей:

(1) амплитуда того, что  $K$ -мезон с импульсом  $p$  испускает виртуальный фотон с импульсом  $p_1 - p_2$  и поляризацией  $\varepsilon$ :

$$(4\pi)^{1/2} e (p_1 + p_2)_\mu \varepsilon_\mu;$$

(2) амплитуда распространения фотона  $-\frac{\delta_{\mu\nu}}{(p_1 - p_2)^2}$ ;

(3) амплитуда того, что  $\pi$ -мезон с импульсом  $p_3$  поглощает виртуальный фотон:

$$(4\pi)^{1/2} e (p_3 + p_4)_\nu \varepsilon_\nu.$$

Суммируя по всем четырем направлениям поляризации виртуальных фотонов, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= 4\pi e^2 \sum_{\text{поляризация}} (p_1 + p_2)_\mu \varepsilon_\mu (p_3 + p_4)_\nu \varepsilon_\nu \frac{\delta_{\mu\nu}}{(p_1 - p_2)^2} = \\ &= 4\pi e^2 \frac{(p_1 + p_2) \cdot (p_3 + p_4)}{(p_1 - p_2)^2}. \end{aligned}$$

Позднее мы вернемся к вопросу о том, почему для реальных фотонов следует рассматривать только два состояния поляризации.

**Задачи:**

19-1. Получите матрицу  $\pi^- - \pi^-$ -рассеяния в с. ц. м.

19-2. То же самое для  $\pi^- - \pi^+$ .

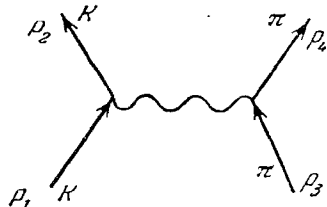


Рис. 19-1.

19-3. Рассчитайте эффект Комптона для  $\pi^+$  в системе отсчета, где начальный  $\pi^+$  покоится.

19-4. Вычислите аннигиляцию пары  $\pi^- - \pi^+$  при покоящемся  $\pi^+$ .

## 20. ВИРТУАЛЬНЫЕ И РЕАЛЬНЫЕ ФОТОНЫ

Обсудим соответствие между реальным и виртуальным испусканием фотонов. Почему, в частности, для реального фотона достаточно рассмотреть только два поперечных состояния поляризации, тогда как в виртуальном процессе мы суммируем по всем четырем возможным состояниям?

Допустим, мы «послали» фотон на Луну. После того как процесс завершился, мы можем описать его диаграммой, изображенной на рис. 20-1.

В некотором смысле каждый реальный фотон в действительности оказывается виртуальным, если следить за ним

в течение достаточно большого времени. В конце концов он всегда где-нибудь во Вселенной поглотится. Для реального фотона характерно условие  $k^2 \rightarrow 0$  (поскольку он не является реальным во все времена, то по принципу неопределенности  $k^2$  не может тождественно равняться нулю), и поэтому пропагатор  $1/k^2 \rightarrow \infty$ . Однако, прежде чем продолжить это обсуждение, нам следует рассмотреть закон сохранения заряда.

**Сохранение заряда.** Действие  $\mathcal{A}$  для системы, состоящей из частицы плюс поле фотонов, согласно гипотезе минимального электромагнитного взаимодействия равно

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int d\tau \left[ -\bar{\psi} (i\nabla_{\mu} - eA_{\mu})^2 \psi + M^2 \bar{\psi} \psi + \frac{(\nabla_{\nu} A_{\mu} - \nabla_{\mu} A_{\nu})^2}{4} \right] = \\ &= \int d\tau \left\{ \left[ -\bar{\psi} (i\nabla_{\mu})^2 \psi + M^2 \bar{\psi} \psi + \frac{(\nabla_{\nu} A_{\mu} - \nabla_{\mu} A_{\nu})^2}{4} \right] + \right. \\ &\quad \left. + eA_{\mu} \left( \bar{\psi} \left[ i\nabla_{\mu} - \frac{e}{2} A_{\mu} \right] \psi + \left[ \left( i\nabla_{\mu} - \frac{e}{2} A_{\mu} \right) \psi \right]^* \psi \right) \right\}. \end{aligned}$$

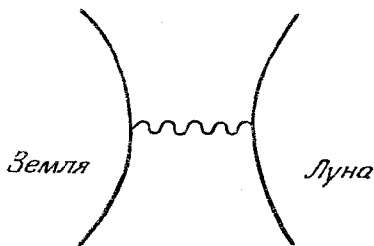


Рис. 20-1.

Из требования исчезновения первых вариаций по  $\varphi$  и  $A_\mu$  мы получаем уравнения движения для частицы

$$(i\nabla_\mu)^2 \varphi - M^2 \varphi = e [i\nabla_\mu (A_\mu \varphi) + A_\mu (i\nabla_\mu \varphi)] - e^2 A_\mu A_\mu \varphi$$

и для фотона

$$\nabla_\nu^2 A_\mu = e \{ \dot{\phi} (i\nabla_\mu - eA_\mu) \varphi + [(i\nabla_\mu - eA_\mu) \varphi]^* \varphi \}$$

(мы использовали условие  $\nabla_\mu A_\mu = 0$ ). Вектор тока заряда поэтому равен

$$j_\mu = e \{ \dot{\phi} (i\nabla_\mu - eA_\mu) \varphi + [(i\nabla_\mu - eA_\mu) \varphi]^* \varphi \}.$$

При любом изменении  $A$  вариация действия первого порядка должна обращаться в нуль. При специальном выборе  $\delta A_\mu = \nabla_\mu \chi$  и произвольном  $\chi$  поля не меняются, поэтому изменение действия могло бы возникнуть только из члена взаимодействия:

$$\int j_\mu \nabla_\mu \chi d^4x = \int \chi \nabla_\mu j_\mu d^4x.$$

Из-за произвольности  $\chi$  и обращения в нуль этой вариации, мы получаем

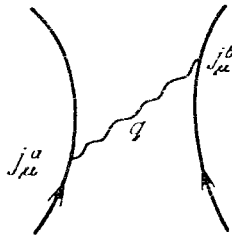
$$\nabla_\mu j_\mu = 0.$$

Это и есть закон сохранения тока. Он является следствием калибровочной инвариантности и имеет место, даже если гипотеза минимального электромагнитного взаимодействия не выполняется.

Вернемся к соответствию между виртуальными и реальными фотонами. Рассмотрим рассеяние двух заряженных частиц  $a$  и  $b$ , токи которых соответственно равны  $j_\mu^a$  и  $j_\mu^b$ .

Амплитуда испускания фотона с импульсом  $q$  и поляризацией  $\varepsilon$  равна  $j_\mu(q) \varepsilon_\mu$ , где  $j_\mu(q)$  — фурье-образ  $j_\mu(x)$ . Вклад в амплитуду рассеяния, обязанный обмену одним фотоном с импульсом  $q = (\omega, \mathbf{Q})$  и поляризацией  $\varepsilon$ , согласно нашим правилам равен

$$\mathfrak{M} = j_\mu^a(q) \varepsilon_\mu \frac{1}{q^2} j_\nu^b(q) \varepsilon_\nu,$$



Для четырех возможных направлений поляризации фотона мы возьмем пространственно-временные оси таким образом, чтобы третья ось совпадала с направлением распространения фотона. Суммируя по поляризациям, получаем

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{\omega^2 - Q^2} [j_4^a j_4^b - j_3^a j_3^b - j_2^a j_2^b - j_1^a j_1^b].$$

Два последних члена дают вклады поперечно поляризованных фотонов. Каков же смысл двух первых членов? Закон сохранения тока дает

$$q_{\mu} j_{\mu} (q) = 0$$

или, с учетом выбора третьей оси,

$$\omega j_4 - Q j_3 = 0.$$

Подставляя  $j_3 = (\omega/Q) j_4$  в  $\mathfrak{M}$ , находим

$$\mathfrak{M} = - \frac{j_4^a j_4^b}{Q^2} - \sum_{\text{попер.}} \frac{(j^a \varepsilon) (j^b \varepsilon)}{\omega^2 - Q^2}.$$

Если фотон близок к реальному,  $\omega \simeq Q$ , то суммарный вклад продольных и временных фотонов в  $\mathfrak{M}$  (первый член) мал по сравнению с вкладом поперечных фотонов. Однако в общем случае виртуальными продольными и временными фотонами пренебрегать нельзя, так как они играют очень важную роль. Для того чтобы понять ее, выразим суммарный вклад первого члена в  $\mathfrak{M}$  для всех импульсов  $Q$  и частот  $\omega$  в терминах конфигурационного представления.

Подставляя

$$j_4(\mathbf{Q}, \omega) = \int \rho(\mathbf{x}, t) \exp[-i(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] d^3\mathbf{x} dt,$$

где  $\rho$  — плотность заряда, находим

$$\int j_4^a(\mathbf{Q}, \omega) j_4^b(\mathbf{Q}, \omega) \frac{d^3Q}{Q^2} \frac{d\omega}{(2\pi)^4} = \int \rho^a(\mathbf{x}_1, t_1) \rho^b(\mathbf{x}_2, t_2) \times \\ \times \exp\{-i[\mathbf{Q}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) - \omega(t_1 - t_2)]\} \frac{d^3Q}{Q^2} \frac{d\omega}{(2\pi)^4} d^3x_1 dt_1 d^3x_2 dt_2.$$

Интеграл по  $\omega$  дает  $2\pi\delta(t_1 - t_2)$ , а по  $\mathbf{Q} - 4\pi/|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$  (так как  $\int \exp[-i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}] d^3Q/Q^2 = 4\pi/R$ ), так что мы получаем

$$\int \rho^a(\mathbf{x}_1, t) \rho^b(\mathbf{x}_2, t) \frac{d^3x_1 d^3x_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} dt.$$

Это есть не что иное, как мгновенное кулоновское взаимодействие между двумя заряженными частицами. Полное выражение, включающее обмен поперечными фотонами, приводит к запаздывающему взаимодействию.

**Тормозное излучение.** Допустим, что  $\pi$ -мезон рассеивается на тяжелой частице спина 0, например на  $K$ -мезоне. При этом возможно испускание света (ниже мы рассмотрим более важный с практической точки зрения случай спина  $1/2$ ). Существует несколько диаграмм низшего порядка (рис. 20-2) и аналогичных диаграмм, в которых

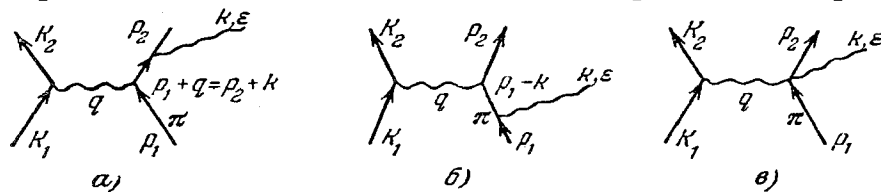


Рис. 20-2.

фотон испускается  $K$ -мезоном. Однако мы рассмотрим случай очень тяжелого  $K$ , а тогда можно показать, что всеми этими последними диаграммами следует пренебречь.

Амплитуды процессов  $a$ ,  $b$  и  $c$  имеют вид

$$a = [(4\pi)^{1/2} e]^3 [(K_1 + K_2)(2p_1 + q)] \times \\ \times [(2p_2 + k) \cdot \varepsilon] \frac{1}{(p_2 + k)^2 - M^2} \left(-\frac{1}{q^2}\right),$$

$$b = [(4\pi)^{1/2} e]^3 [(K_1 + K_2)(2p_2 - q)] \times \\ \times [(2p_1 - k) \cdot \varepsilon] \frac{1}{(p_1 - k)^2 - M^2} \left(-\frac{1}{q^2}\right),$$

$$c = (-4\pi e^2) [(4\pi)^{1/2} e] [(K_1 + K_2) \cdot 2\varepsilon] \left(-\frac{1}{q^2}\right).$$

Некоторые упрощения являются очевидными:

$$k \cdot \varepsilon = 0, \quad (p + k)^2 - M^2 = 2p \cdot k.$$

Рассмотрим теперь случай, когда  $K$ -мезон в начале покоится, а его масса  $M \rightarrow \infty$ . Сохранение энергии в фотон-каонной вершине приводит к тому, что энергия виртуального фотона

$$\omega_q \simeq \frac{Q^2}{2M} \simeq 0.$$

Далее, 4-импульс частиц  $K_1$  и  $K_2$  практически состоит только из временной компоненты, равной  $M$ . Получаем

$$a = [(4\pi)^{1/2} e]^3 4ME_1 \frac{(p_2 \cdot \varepsilon)}{(p_2 \cdot k)} \left( -\frac{1}{Q^2} \right),$$

$$b = [(4\pi)^{1/2} e]^3 4ME_2 \frac{(p_1 \cdot \varepsilon)}{(p_1 \cdot k)} \left( -\frac{1}{Q^2} \right),$$

$$c = [(4\pi)^{1/2} e]^3 4M\varepsilon_4 \left( -\frac{1}{Q^2} \right).$$

Таким образом, тяжелый  $K$ -мезон и пион обмениваются только временноподобными виртуальными фотонами нулевой энергии.

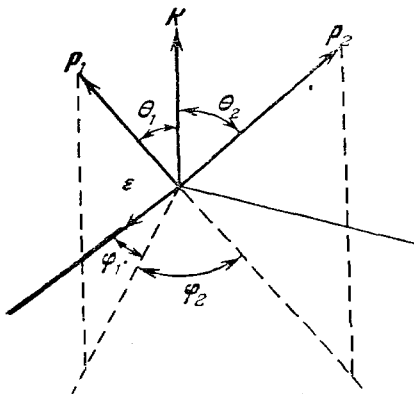


Рис. 20-3.

Пропагатор фотона  $1/q^2$  сводится к  $1/Q^2$ , что соответствует статическому кулоновскому взаимодействию. Покажите, что сумма  $a+b+c$  градиентно инвариантна, установив, что она исчезает, если вектор  $\varepsilon$  направлен по  $k$ , т. е.  $\varepsilon = \alpha k$ . Если мы выберем  $\varepsilon$  пространственно-подобным, то амплитуда  $c$  обратится в нуль.

Дифференциальное поперечное сечение рассеяния  $\pi$ -мезона в телесный угол  $d\Omega_2$

с испусканием фотона энергии  $\omega$  в  $d\Omega_\omega$  равна (при  $\varepsilon$  пространственно-подобном)

$$d\sigma v_1 = \frac{2\pi |a+b|^2 D}{2E_1 2M^2 E_2 2M^2 \omega},$$

где  $D$  — плотность конечных состояний (см. лекцию 16), равная

$$D = \frac{1}{(2\pi)^6} E_2 P_2 \omega^2 d\Omega d\Omega_\omega d\omega.$$

Подставляя полученные выражения для  $a$ ,  $b$  и  $D$  в  $d\sigma$ , получаем

$$d\sigma = \frac{4e^6}{(2\pi)^2} \frac{P_2}{P_1} \frac{\omega}{Q^4} \left| E_1 \frac{(p_2 \cdot \varepsilon)}{(p_2 \cdot k)} - E_2 \frac{(p_1 \cdot \varepsilon)}{(p_1 \cdot k)} \right|^2 d\omega d\Omega_2 d\Omega_\omega.$$



Сохранение полной энергии и импульса требует, чтобы

$$E_1 = E_2 + \omega, \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{K} - \mathbf{Q}$$

(см. рис. 20-3). Суммируя по поляризациям испущенных фотонов, находим

$$d\sigma = \frac{4e^6}{(2\pi)^2} \frac{P_2}{P_1} \frac{1}{Q^4} \frac{d\omega}{\omega} d\Omega_1 d\Omega_2 \left\{ E_1^2 \left[ \frac{v_2 \sin \theta_2}{1 - v_2 \cos \theta_2} \right]^2 + \right. \\ \left. + E_2^2 \left[ \frac{v_1 \sin \theta_1}{1 - v_1 \cos \theta_1} \right]^2 - \frac{2E_1 E_2 v_1 v_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi}{(1 - v_1 \cos \theta_1)(1 - v_2 \cos \theta_2)} \right\}.$$

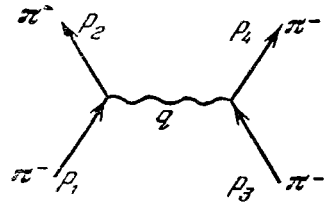
Это выражение является эквивалентом для частиц со спином 0 знаменитой формулы Бете—Гайтлера для частиц спина 1/2.

## 21. ЗАДАЧИ

*Задача 21-1:*  $\pi^- - \pi^-$ -рассеяние в с. ц. м. Есть две диаграммы:

$$\text{Амп.} = [(4\pi)^{1/2} e]^2 \frac{(p_1 + p_2)(p_3 + p_4)}{q^2},$$

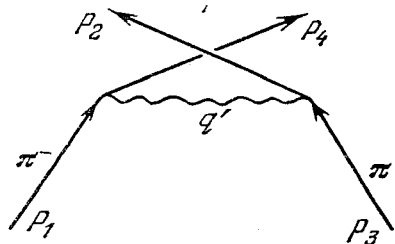
$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4, \quad q = p_1 - p_2$$



и «обменная» диаграмма  $p_2 \leftrightarrow p_4$ :

$$\text{Амп.} = [(4\pi)^{1/2} e]^2 \frac{(p_1 + p_4)(p_2 + p_3)}{(q')^2},$$

$$q' = p_1 - p_4.$$



В системе центра масс  $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_3 = \mathbf{P}$ ,  $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_4 = \mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{P}^2 = = \mathbf{Q}^2$ ,  $E_i = E = (\mathbf{P}^2 + M^2)^{1/2}$ . Поэтому

$$\frac{(p_1 + p_2) \cdot (p_3 + p_4)}{(p_1 - p_2)^2} = \frac{4E^2 + (\mathbf{P} + \mathbf{Q})^2}{(\mathbf{P} - \mathbf{Q})^2} = \frac{E^2}{\mathbf{P}^2} \frac{1 + v^2 \cos^2(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)},$$

где  $\theta$  есть угол между  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$ , как показано на рис. 21-1, и  $\mathbf{v} = \mathbf{P}/E$ .

Подобным образом

$$\frac{(p_1 + p_4) \cdot (p_2 + p_3)}{(p_1 - p_4)^2} = \frac{4E^2 + (\mathbf{P} - \mathbf{Q})^2}{(\mathbf{P} + \mathbf{Q})^2} = \frac{E^2}{\mathbf{P}^2} \frac{1 + v^2 \sin^2(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)}.$$

Складывая, получаем

$$\mathfrak{M} = 4\pi e^2 \frac{E^2}{\mathbf{P}^2} \left\{ \frac{1 + v^2 \cos^2(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} + \frac{1 + v^2 \sin^2(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)} \right\}.$$

*Задача 21-2:*  $\pi^+ - \pi^-$ -рассеяние (очень интересный случай). Процесс описывается диаграммой рис. 21-2. Как упоминалось в лекции: 5,  $\pi^+$ -мезон (античастица по

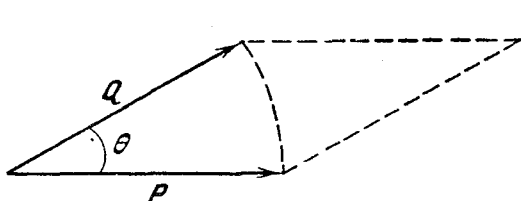


Рис. 21-1.

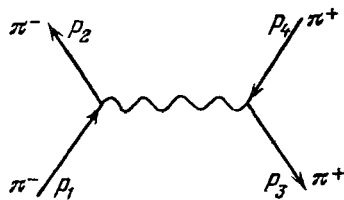
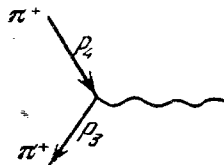


Рис. 21-2.

отношению к  $\pi^-$ ) с энергией-импульсом  $P$  представляется  $\pi^-$ -мезоном с 4-импульсом  $p = -P$ , движущимся вспять во времени. Амплитуда элементарного процесса

$$\begin{aligned} (4\pi)^{1/2} e (p_3 + p_4) \cdot \varepsilon &= \\ &= - (4\pi)^{1/2} e (P_3 + P_4) \cdot \varepsilon \end{aligned}$$



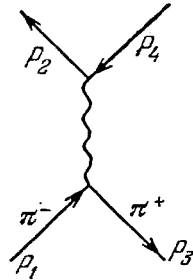
учитывает, что  $\pi^+$  имеет электрический заряд, противоположный заряду  $\pi^-$ . Подобное соответствие всегда верно для заряженных частиц и их античастиц. Амплитуда процесса рассеяния равна поэтому

$$\text{Амп.} = - [(4\pi)^{1/2} e]^2 \frac{(p_1 + p_2) \cdot (P_3 + P_4)}{(p_1 - p_2)^2}.$$

Поскольку  $\pi^+$  и  $\pi^-$  различны, то обменной диаграммы нет. Однако имеется аналог такой диаграммы. Посмотрите на диаграмму, которую мы получаем, «меняя соединения»

между внешними пионными линиями так, чтобы  $p_1$  соединялось с  $p_3$ , а не с  $p_2$ , а  $p_4$  соединялось с  $p_2$  вместо  $p_3$ :

$$\text{Амп.} = [(4\pi)^{1/2} e]^2 \frac{(p_1 - p_3) \cdot (p_2 - p_4)}{(p_1 + p_3)^2},$$



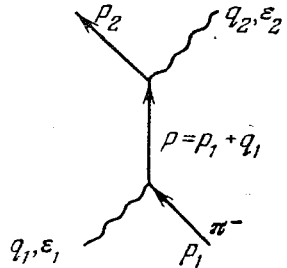
и в которой начальные  $\pi^+$  и  $\pi^-$  аннигилируют, а виртуальный фотон воссоздает пионную пару в конечном состоянии.

Матричный элемент в с. ц. м. будет

$$\mathfrak{M} = 4\pi e^2 \left\{ -\frac{E^2}{p^2} \frac{1 + v^2 \cos^2(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} + \frac{p^2}{E^2} \cos \theta \right\}.$$

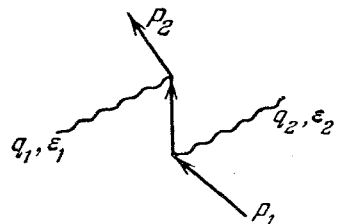
**Задача 21-3:** комптон-эффект на  $\pi^-$ -мезоне. Рассмотрим процесс  $\gamma + \pi^- \rightarrow \pi^- + \gamma$ . Он может идти тремя способами:

$$\begin{aligned} a &= [(4\pi)^{1/2} e]^2 \times \\ &\times \frac{[(2p_2 + q_2) \cdot \varepsilon_2] [(2p_1 + q_1) \cdot \varepsilon_1]}{(p_1 + q_1)^2 - m^2} = \\ &= 4\pi e^2 \frac{(2p_2 \cdot \varepsilon_2)(2p_1 \cdot \varepsilon_1)}{2p_1 \cdot q_1}, \end{aligned}$$

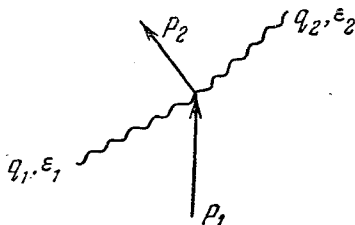


так как  $q \cdot \varepsilon = 0$  и  $(p + q)^2 - m^2 = 2pq$ ;

$$\begin{aligned} b &= [(4\pi)^{1/2} e]^2 [(2p_2 - q_1) \cdot \varepsilon_1] \times \\ &\times \frac{1}{(p_1 - q_2)^2 - m^2} [(2p_1 - q_1) \cdot \varepsilon_2] = \\ &= \frac{4\pi e^2 (2p_2 \cdot \varepsilon_1)(2p_1 \cdot \varepsilon_2)}{2p_1 \cdot q_2}; \end{aligned}$$



$$c = -4\pi e^2 2(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2).$$



Рассмотрим систему отсчета, в которой начальный пион покоится:  $\mathbf{P}_1 = 0$ . Положим  $\varepsilon_4 = 0$ . Тогда

$$p_1 \cdot \varepsilon_1 = m(\varepsilon_1)_4 = 0, \quad p_1 \cdot \varepsilon_2 = 0$$

и единственный вклад в матричный элемент идет из  $c$ . Этот результат следует из нашего частного выбора калибровки  $\varepsilon_4 = 0$ . Заметьте, что амплитуда для каждой из диаграмм не градиентно инвариантна. В литературе часто

встречаются бессмысленные утверждения об относительной величине вкладов различных диаграмм. Только сумма диаграмм градиентно инвариантна. Покажите это, продемонстрировав, что подстановка  $\varepsilon'_\mu = \varepsilon_\mu + \alpha q_\mu$  не дает вклада в поперечное сечение, т. е. что подстановки  $\varepsilon_1 = \alpha_1 q_1$  или  $\varepsilon_2 = \alpha_2 q_2$  дают нуль.

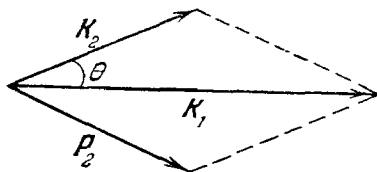


Рис. 21-3.

Рассмотрим систему, в которой начальный пион покоится:  $\mathbf{P}_1 = 0$  (см. рис. 21-3). Если регистрируется фотон, а не пион  $p_2$ , мы можем получить удобную формулу, исключая  $p_2$  подстановкой  $p_2 = p_1 + k_1 - k_2$ . Возводя в квадрат, получаем

$$m^2 = m^2 + 2p_1 k_1 - 2p_2 k_2 - 2k_1 k_2,$$

или, в нашей системе,

$$m(\omega_1 - \omega_2) - \omega_1 \omega_2 (1 - \cos \theta) = 0,$$

что эквивалентно знаменитой формуле Комптона

$$\frac{1}{\omega_2} = \frac{1}{\omega_1} + \frac{1 - \cos \theta}{m}$$

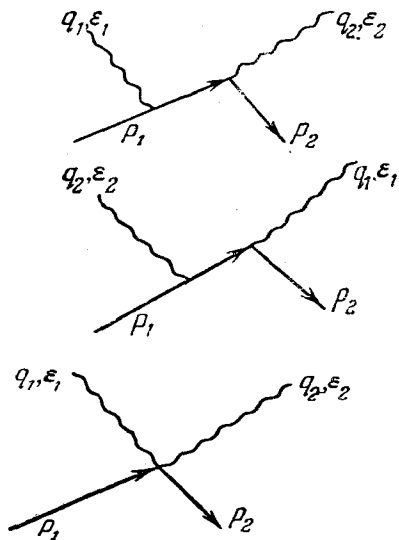
для изменения частоты света, рассеянного на покоящейся частице.

**Задача 21-4:** аннигиляция  $\pi^+$ — $\pi^-$ -пары в полете. Этот процесс полностью аналогичен эффекту Комптона, за исключением того, что один из пионов теперь движется вспять во времени.

$$a = 8\pi e^2 \frac{(p_2 \cdot \varepsilon_2)(p_1 \cdot \varepsilon_1)}{p_1 \cdot q_1},$$

$$b = 8\pi e^2 \frac{(p_2 \cdot \varepsilon_1)(p_1 \cdot \varepsilon_2)}{p_1 \cdot q_2},$$

$$c = -8\pi e^2 (\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2).$$



Как и ранее, рассмотрим систему отсчета, где  $\mathbf{P}_1 = 0$

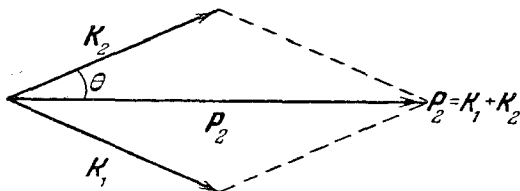


Рис. 21-4.

(см. рис. 21-4). Покажите, квадратуя уравнение  $k_1 = p_1 - p_2 - k_2$ , что

$$m + E_2 = \omega_2(m + E_2 - P_2 \cos \theta).$$

Тогда

$$\mathfrak{M} = -8\pi e^2 (\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2)$$

и

$$v d\sigma = \frac{e^4 \omega_2^2}{E_2 (m + E_2)} |\epsilon_1 \cdot \epsilon_2|^2 d\Omega.$$

Мы видим, что полное поперечное сечение пропорционально  $1/v$  и неограниченно растет при  $v \rightarrow 0$ . Что это означает? Пусть имеется газ, содержащий  $n$  пионов на единицу объема. Вероятность на единицу времени того, что  $\pi^+$ , движущийся сквозь этот газ со скоростью  $v$ , аннигилирует, равна

$$\frac{1}{\tau} = n\sigma v,$$

т. е. является конечной величиной.

Для связанной  $\pi^+ - \pi^-$ -системы (аналогичной позитронию)  $n$  должно быть равно квадрату волновой функции в начале координат, а  $\tau$  есть время жизни системы.

## 22. ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ $\frac{1}{2}$

Вернемся к двухкомпонентному спинору, поведение которого при пространственном вращении на угол  $\theta$  вокруг единичного вектора  $\mathbf{n}$ , как было установлено, описывается оператором  $\exp(i\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{M})$ , где  $\mathbf{M} = \boldsymbol{\sigma}/2$ . Обратимся теперь к изучению вопроса о поведении такого спинора при лоренцевых преобразованиях. Как и в случае пространственных вращений, достаточно рассмотреть бесконечно малое преобразование. Запишем соответствующий оператор в виде

$$1 + i \frac{v}{c} \mathbf{N},$$

где  $v$  — бесконечно малая скорость (и положим  $c=1$ ). Действуя как и ранее, получим для конечной скорости  $v$  в направлении  $z$  оператор  $\exp(iw N_z)$ , где  $\text{th } w = v/c$ .

Поэтому нам нужны шесть операторов, для того чтобы представить произвольное преобразование Лоренца,

$$\begin{matrix} M_x & M_y & M_z \\ N_x & N_y & N_z \end{matrix},$$

соответствующие шести вращениям в четырехмерном пространстве. Эти величины образуют антисимметричный тензор с компонентами

$$M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} M_{yz} & M_{zx} & M_{xy} \\ M_{xt} & M_{yt} & M_{zt} \end{pmatrix},$$

причем  $M_x = M_{yz}$ ,  $N_x = M_{xt}$  и т. д.

Либо с помощью алгебраических выкладок (рассматривая последовательные преобразования Лоренца), либо с помощью рисунков находим коммутационные соотношения

$$\begin{aligned} M_x M_z - M_y M_x &= i M_z, \\ N_x M_y - M_y N_x &= i N_z, \\ N_x N_y - N_y N_x &= -M_z \end{aligned}$$

и циклические перестановки.

Все остальные пары коммутируют, т. е., например,

$$N_x M_x - M_x N_x = 0.$$

Эти правила объединяются в следующую формулу:

$$M_{\mu\nu} M_{\sigma\tau} - M_{\sigma\tau} M_{\mu\nu} = i(\delta_{\nu\sigma} M_{\mu\tau} - \delta_{\nu\tau} M_{\mu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} M_{\nu\tau} + \delta_{\mu\tau} M_{\nu\sigma}).$$

Теперь найдем представление операторов  $N$ , действующих на двухкомпонентный спинор  $u$ . Ясно, что  $N$  должна быть матрицей  $2 \times 2$ ,

$$N_x = \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}.$$

Мы могли бы заменить вопросительные знаки некоторыми неизвестными и получить для них уравнения, используя коммутационные соотношения и равенство  $M = \sigma/2$ . Более простой путь основан на том, что любая матрица  $2 \times 2$  может быть представлена линейной комбинацией матриц  $I$ ,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ . Запишем поэтому

$$N_x = \alpha I + a\sigma_x + g\sigma_y + h\sigma_z.$$

Заметим, что  $N_x$  и  $\sigma_x$  коммутируют. Поэтому  $g = h = 0$ . Итак,

$$N_x = \alpha I + a\sigma_x, \quad N_y = \beta I + b\sigma_y, \quad N_z = \gamma I + c\sigma_z.$$

Подставим эти выражения в коммутационное соотношение

$$N_x M_y - M_y N_x = i N_x.$$

Имеем

$$\begin{aligned} (\alpha I + a\sigma_x)(\sigma_y/2) - (\sigma_y/2)(\alpha I + a\sigma_x) &= i(\gamma I + c\sigma_x), \\ ia\sigma_x &= i(\gamma I + c\sigma_x). \end{aligned}$$

Поэтому

$$a = c, \quad \gamma = 0.$$

С помощью циклической перестановки находим также

$$b = a, \quad \alpha = \beta = 0.$$

Итак,

$$N = a\sigma.$$

Для того чтобы определить  $a$ , подставим эту формулу в коммутационное соотношение  $N_x N_y - N_y N_x = i M_x$ . Получим

$$a^2 = -\frac{1}{4}, \quad a = \pm \frac{i}{2}.$$

Мы можем выбрать здесь любой знак. Допустим, что мы выбрали «+». Тогда

$$N = i \frac{\sigma}{2}, \quad M = \frac{\sigma}{2}.$$

Рассмотрим, однако, трансформационные свойства спинора, полученного отсюда с помощью зеркального отражения. При отражении  $N \rightarrow -N$ , поскольку  $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$  и  $N \cdot \mathbf{v}$  есть скаляр; также  $M \rightarrow M$ . Таким образом, двухкомпонентный спинор и его зеркальное изображение не преобразуются одинаково при лоренцевых преобразованиях. Для того чтобы получить инвариантность относительно отражений, нужен четырехкомпонентный спинор.

Вводя обозначение  $\sigma_v = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v})/|\mathbf{v}|$ , запишем оператор, преобразующий спинор  $u$  при преобразовании Лоренца, в виде

$$\exp\left(-\sigma_v \frac{w}{2}\right),$$

где  $w$  — быстрота.



Рассмотрим, например, состояние плоской волны  $u \exp(-ip \cdot x)$ . Для преобразования Лоренца вдоль оси  $z$

$$\sigma_z = \sigma_z \quad \text{и} \quad u' = \exp\left(-\sigma_z \frac{w}{2}\right)u.$$

Мы можем построить формулу для общего случая, рассмотрев преобразования для  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Получаем

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u' = \exp\left(-\frac{w}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u' = \exp\left(\frac{w}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку оператор  $N$  не эрмитов, то произведение  $\hat{u}u$  не является скаляром. Рассмотрим преобразование  $\hat{u}u$ :

$$\hat{u}'u' = \hat{u} \exp\left(-\sigma_z \frac{w}{2}\right) \exp\left(-\sigma_z \frac{w}{2}\right)u = \hat{u} \exp(-\sigma_z w)u.$$

Так как

$$\begin{aligned} \exp(-\sigma_z w) &= 1 - \sigma_z w + \frac{w^2}{2!} - \sigma_z \left(\frac{w^3}{3!}\right) + \dots = \\ &= \left[1 + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^4}{4!} + \dots\right] - \sigma_z \left[w + \frac{w^3}{3!} + \dots\right], \end{aligned}$$

то

$$\exp(-\sigma_z w) = \text{ch } w - \sigma_z \text{sh } w$$

и, следовательно,

$$\hat{u}'u = \text{ch } w (\hat{u}u) - \text{sh } w (\hat{u}\sigma_z u),$$

а также

$$\hat{u}'\sigma_z u' = \text{ch } w (\hat{u}\sigma_z u) - \text{sh } w (\hat{u}u).$$

Сразу видно, что пара  $\hat{u}u$  и  $\hat{u}\sigma_z u$  преобразуется при преобразовании Лоренца в точности как  $t, z$ :

$$\left. \begin{aligned} t' &= \gamma(t - vz) \\ z' &= \gamma(z - vt) \end{aligned} \right\} \quad \gamma = (1 - v^2)^{-1/2}.$$

Для того чтобы заключить, что набор величин  $\hat{u}u, \hat{u}\sigma_z u$  образует 4-вектор, следует проверить аналогию для  $x' = x, y' = y$ :

$$\begin{aligned} \hat{u}'\sigma_x u' &= \hat{u} \exp\left(-\sigma_z \frac{w}{2}\right) \sigma_x \exp\left(-\sigma_z \frac{w}{2}\right)u = \\ &= \hat{u} \exp\left(-\sigma_z \frac{w}{2}\right) \exp\left(\sigma_x \frac{w}{2}\right) \sigma_x u = \hat{u}\sigma_x u. \end{aligned}$$

Таким образом, мы обнаружили новый 4-вектор, который обозначим символом  $S_\mu$ :

$$S_\mu = \dot{u}\sigma_\mu u, \quad \sigma_\mu \equiv (1, \sigma).$$

Оказывается, что  $S_\mu$  может служить удовлетворительным выражением для тока вероятности. Как и ранее, используем нормировку  $u\dot{u} = 2E$ . Имеем тогда

$$\dot{u}\sigma_\mu u = 2p_\mu, \quad S_\mu = 2p_\mu.$$

Пусть спин частицы направлен вверх по оси  $z$ ,

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{u}u = 1, \quad \dot{u}\sigma_x u = 1, \quad \dot{u}\sigma_y u = \dot{u}\sigma_z u = 0.$$

Здесь возникает трудность, поскольку ток вероятности  $\dot{u}\sigma_z u$  всегда устремляется по оси  $z$ . Это означает, что такой ток вероятности не может представлять покоящуюся частицу.

Заметим, что для данного случая имеет место соотношение  $(\dot{u}u)^2 = (\dot{u}\sigma u)^2$ , инвариантное относительно вращений. Поскольку спинор представляет частицу со спином, направленным вдоль некоторой оси, скажем  $z$ , заключаем, что это соотношение верно в общем случае. Таким образом, всегда

$$S_\mu S_\mu = 0,$$

и если  $S_\mu = 2p_\mu$ , то должно быть

$$p_\mu p_\mu = 0, \quad \text{а также} \quad m = 0.$$

Следовательно, данное рассмотрение справедливо лишь для частиц с массой 0 (и спином  $\frac{1}{2}$ ). Нам известна только одна такая частица — нейтрино. Можно доказать в общем случае соотношение

$$S_\mu \sigma_\mu u = 0.$$

(Докажите его сначала для  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , а затем найдите аргументы в пользу того, что оно верно для любого  $u$ .) Если мы положим  $S_\mu = 2p_\mu$ , то должны иметь

$$p_\mu \sigma_\mu u = 0,$$

или

$$(E - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})u = 0.$$

Последнее соотношение можно взять в качестве закона, описывающего нейтрино. Оно справедливо для каждой плоской волны и, следовательно, для суперпозиции таких волн,

$$\int (E - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) c_p u_p \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} = 0,$$

где  $c_p$  — некоторая функция импульса. Мы можем также превратить его в уравнение в координатном пространстве. Такое уравнение есть просто

$$\int i\nabla_\mu \sigma_\mu \left[ c_p u_p \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \right] = 0,$$

или

$$i\nabla_\mu \sigma_\mu \varphi(x) = 0,$$

где

$$\varphi(x) = \int c_p u_p \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}.$$

Расписанное в полном виде общее уравнение будет

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \right] \varphi(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Обозначим  $\sigma_p \equiv (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})/|\mathbf{p}|$ . Поскольку  $p = E$ , то уравнение  $(E - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) u = 0$  эквивалентно соотношению

$$\sigma_p u = u,$$

означающему, что частица всегда вращается по часовой стрелке относительно направления движения. В действительности из эксперимента мы знаем, что нейтрино вращается против часовой стрелки. Напомним, однако, что для этого есть вторая возможность в выборе знака для  $N$ .

Для  $N = -i\boldsymbol{\sigma}/2$  мы получим, что величина

$$S'_\mu \equiv (i\dot{u}, -i\dot{\sigma}u)$$

преобразуется подобно 4-вектору.

В этом случае получаем уравнение

$$(E + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) v = 0.$$

Частица, описываемая спинором  $v$ , вращается против часовой стрелки,

$$\sigma_p v = -v.$$

Существенно отметить, что  $u$  и  $v$  преобразуются разными способами:

$$u' = \exp\left(-\sigma_v \frac{w}{2}\right)u, \quad v' = \exp\left(+\sigma_v \frac{w}{2}\right)v.$$

Мы будем называть  $u$  и  $v$  коспинором и контраспинором. Соответствующие преобразования называются ковариантными и контрвариантными.

### 23. ОБОБЩЕНИЕ НА КОНЕЧНУЮ МАССУ

В лекции 22 мы убедились, что  $S_\mu = (\dot{u}\sigma_\mu u)$  преобразуется как 4-вектор. Это означает, что для произвольного  $B_\mu$  выражение

$$B_\mu (\dot{u}\sigma_\mu u)$$

есть инвариант.

Поэтому

$$B_\mu \sigma_\mu u$$

при лоренцевых преобразованиях преобразуется отлично от  $u$ .

Поскольку  $\dot{u}' = \dot{u} \exp\left(-\sigma_v \frac{w}{2}\right)$ , то

$$(B_\mu \sigma_\mu u)' = \exp\left(\sigma_v \frac{w}{2}\right)(B_\mu \sigma_\mu u).$$

Таким образом,  $B_\mu \sigma_\mu u$  преобразуется как контрвариантный спинор (если  $u$  — коспинор); если же  $v$  — контраспинор, то  $B_\mu \sigma_\mu v$  — ковариантный спинор.

**Обобщение на конечную массу.** Мы установили, что для частиц спина  $1/2$  массы 0 уравнения движения суть

$$(E - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})u = 0 \quad \text{правовинтовое,}$$

$$(E + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})u = 0 \quad \text{левовинтовое.}$$

Заметим, что подобные уравнения не инвариантны относительно пространственных отражений, поскольку  $\mathbf{p}$  есть полярный вектор, а  $\boldsymbol{\sigma}$  — аксиальный. (Несколько лет назад такой причины было достаточно для того, чтобы отвергнуть эти уравнения — как и поступил Паули 25 лет назад в книге «Общие принципы волновой механики», стр. 254 \*) — но теперь мы знаем, что четность не сохра-

\*) Цитируется по русскому переводу 1957 г. (Прим. перев.)

няется, поэтому нам не представится возможности отделаться от этих уравнений.)

Записывая первое уравнение в виде

$$p_{\mu} \sigma_{\mu} u = 0,$$

заметим, что в левой части стоит контравариантная величина. Поэтому, если мы хотим добавить какой-либо член, описывающий массу или взаимодействие частицы, то следует позаботиться о том, чтобы он имел соответствующие трансформационные свойства. Например, выражение  $tu$  не годится, поскольку  $u$  есть ковариантный спинор.

С учетом этого простейший подходящий член типа источника (линейный по  $u$ ) имеет вид

$$A_{\mu} \sigma_{\mu} u.$$

Так, например, как недавно установлено, связь, описывающая  $\beta$ -распад, имеет как раз такой вид; взаимодействие равно

$$(\tilde{u}_1 \sigma_{\mu} u_2) (\tilde{u}_3 \sigma_{\mu} u_4).$$

Для  $\beta$ -распада  $u_1$  представляет нейтрино,  $u_2$  — мюон,  $u_3$  — электрон и  $u_4$  — антинейтрино. Чтобы определить вклад в уравнение движения для  $u_1$ , мы должны проварьировать по  $\tilde{u}_1$ . Замечая, что  $\tilde{u}_3 \sigma_{\mu} u_4$  есть 4-вектор ( $A_{\mu}$ ), мы убеждаемся, что вклад в уравнение имеет нужную структуру:  $A_{\mu} \sigma_{\mu} u_2$ .

Вернемся, однако, к массе. Уравнение

$$(E^2 - p^2) u = m^2 u$$

ведет себя правильно при преобразованиях, но поскольку  $u$  имеет две компоненты, оно описывает две независимые частицы со спином 0. Реальная трудность проявляется при включении электромагнитного взаимодействия. Выписанное уравнение принимает вид

$$[(E - \varphi)^2 - (\mathbf{p} - \mathbf{A})^2] u = m^2 u.$$

Член  $\sigma \cdot \mathbf{H}$ , характерный для частиц со спином  $1/2$ , не следует из этого уравнения.

Заметим также, что в отсутствие взаимодействия нет способа отличить

$$(E + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})(E - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) u = m^2 u$$

от

$$(E^2 - \mathbf{p}^2)u = m^2u,$$

однако при наличии взаимодействия подстановки

$$E \rightarrow E - \varphi, \quad \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \mathbf{A}$$

приводят к различным следствиям в этих двух уравнениях.

Заметим, что  $u$  есть ковариантный спинор, оператор  $(E - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})$  превращает его в контравариантный, а  $(E + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})$  снова приводит к ковариантному спинору. Введем контравариантный спинор  $v$  соотношением

$$(E - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})u = mv. \quad (23-1)$$

Тогда получим

$$(E + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})v = mu. \quad (23-2)$$

Эти связанные уравнения преобразуются правильно. При  $m=0$  они переходят в рассмотренные ранее (не связанные между собой) уравнения. Вместе они эквивалентны уравнению

$$(E + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})(E - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})u = m^2u. \quad (23-3)$$

Можно скомбинировать (23-1) и (23-2) в единое уравнение, введя четырехкомпонентный спинор

$$\Psi = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Определим матрицы

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}.$$

Действие  $\gamma_i$  на  $\Psi$  сводится к перестановке  $u$  и  $v$ :

$$\gamma_i \Psi = \gamma_i \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}.$$

Подобным образом получаем

$$\gamma \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\sigma} v \\ \boldsymbol{\sigma} u \end{pmatrix}.$$

Уравнения (23-1) и (23-2) теперь складываются в одно:

$$m\Psi = (E\gamma_t - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})\Psi,$$

или

$$m\Psi = p_\mu \gamma_\mu \Psi. \quad (23-4)$$

Уравнение (23-4) (или сумма уравнений (23-1) и (23-2)) известно как уравнение Дирака. Оно содержит массу и обладает правильными трансформационными свойствами. Можно считать, что  $\gamma_\mu$  ведет себя как 4-вектор.

(Уравнение Дирака иногда записывают в виде

$$(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\alpha} + m\beta)\Psi = E\Psi.$$

При условии

$$\gamma_t = \beta, \quad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\gamma}_i \boldsymbol{\gamma}_i,$$

это эквивалентно (23-4).)

Полезно знать свойства  $\gamma$ -матриц. Нетрудно видеть, что

$$\gamma_t^2 = 1, \quad \gamma_x^2 = -1, \quad \gamma_i \gamma_x + \gamma_x \gamma_i = 0.$$

Полное правило имеет вид

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (23-5)$$

В большей части задач нет нужды обращаться к явному виду матриц  $\gamma$ , достаточно использовать перестановочные соотношения (23-5).

**Ток.** Используя смесь состояний  $u$  и  $v$ , можно найти поток вероятности, который может также соответствовать покоящейся частице. Напомним, что выражения

$$(\dot{u}, \dot{u}\sigma_i), \quad (\dot{v}, -\dot{v}\sigma_i)$$

являются 4-векторами.

Пусть имеется частица со спином, направленным вверх в покоящейся системе отсчета,

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v, \quad \mathbf{p} = 0, \quad mv = Eu,$$

$$(\dot{u}, \dot{u}\sigma_i) = (1, 0, 0, +1), \quad (\dot{v}, -\dot{v}\sigma_i) = (1, 0, 0, -1).$$

Мы можем обратить в нуль пространственную часть, определив новый 4-вектор как сумму двух рассмотренных:

$$S_\mu = (\dot{u} + \dot{v}, \dot{u}\sigma_i - \dot{v}\sigma_i).$$

Новый ток имеет то определяющее свойство, что его пространственные компоненты обращаются в нуль в системе покоя частицы. Выражая  $S_\mu$  через  $\Psi$ , получаем дальнейшие упрощения. Легко видеть, что

$$S_\mu = (\dot{\Psi}\Psi, \dot{\Psi}\gamma_i\gamma\Psi),$$

где  $\dot{\Psi}$  есть величина, эрмитово-сопряженная к  $\Psi$ . Для того чтобы привести это выражение к более удобному виду, введем по определению

$$\bar{\Psi} = \dot{\Psi}\gamma_4.$$

Тогда  $S_\mu = (\bar{\Psi}\gamma_4\Psi, \bar{\Psi}\gamma_i\Psi)$  принимает вид

$$S_\mu = \bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi. \quad (23-6)$$

Нетрудно проверить, что (23-6) удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\nabla_\mu S_\mu = 0. \quad (23-7)$$

Для этого рассмотрим уравнение Дирака

$$i\nabla_\mu\gamma_\mu\Psi - m\Psi = 0$$

и сопряженное ему уравнение

$$i\nabla_\mu\bar{\Psi}\gamma_\mu + m\bar{\Psi} = 0.$$

Умножая первое из них слева на  $\bar{\Psi}$ , а второе — справа на  $\Psi$  и складывая, получаем

$$i\bar{\Psi}(\nabla_\mu\gamma_\mu\Psi) + i(\nabla_\mu\bar{\Psi}\gamma_\mu)\Psi = 0,$$

т. е. (23-7).

Однако из спиноров  $u$  и  $v$  по отдельности нельзя построить сохраняющегося тока. Так, например,

$$\nabla_\mu(\bar{u}\sigma_\mu u) = 2m \operatorname{Im}(\bar{u}v) \neq 0.$$

(Это следует из уравнения (23-1) для  $u$ .)

Заметим, наконец, что уравнения (23-1) и (23-2) переходят друг в друга при преобразовании

$$u \leftrightarrow v, \quad p \rightarrow -p,$$

не меняющем  $S_\mu$ . Поэтому уравнения инвариантны относительно отражений (за исключением члена  $\beta$ -связи).



**Принцип действия.** Уравнения Дирака (23-4) и, следовательно, уравнения (23-1) и (23-2) могут быть получены из действия

$$\mathcal{A} = \int (\bar{\Psi} p_{\mu} \gamma_{\mu} \Psi - m \bar{\Psi} \Psi) d^4\tau.$$

Вводя полезное обозначение

$$\hat{a} = \gamma_{\mu} a_{\mu}$$

( $a_{\mu}$  — 4-вектор), запишем действие для частицы со спином  $1/2$  в электромагнитном поле

$$\mathcal{A}' = \int [\bar{\Psi} (\hat{p} - \hat{A}) \Psi - m \bar{\Psi} \Psi + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}] d^4\tau.$$

Варьируя  $\mathcal{A}'$  по  $\bar{\Psi}$ , получаем уравнение движения

$$(\hat{p} - m) \Psi = \hat{A} \Psi.$$

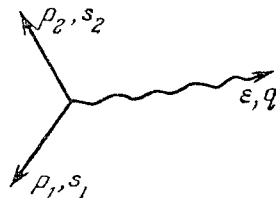
Из этого уравнения мы видим, что пропагатор для частицы со спином  $1/2$  равен  $1/(\hat{p} - m)$ . В практических вычислениях мы часто будем использовать соотношение

$$\frac{1}{\hat{p} - m} = \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2},$$

следующее из  $(\hat{p} - m)(\hat{p} + m) = p^2 - m^2$ .

Из члена взаимодействия  $e' \bar{\Psi} \hat{A} \Psi$  в лагранжиане получаем фундаментальную амплитуду для взаимодействия спиноров и фотонов

$$\text{Амп.} = (4\pi)^{1/2} e \bar{U}_{s_2}(p_2) \hat{\varepsilon} U_{s_1}(p_1).$$



## 24. СВОЙСТВА ЧЕТЫРЕХКОМПОНЕНТНОГО СПИНОРА

Рассмотрим теперь свойства четырехкомпонентного спинора

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

удовлетворяющего уравнению Дирака

$$\hat{p}U = mU,$$

или, в двухкомпонентной форме,

$$(E - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})u = mv, \quad (E + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})v = mv.$$

Отметим прежде всего, что имеются лишь два линейно независимых решения этого уравнения. Следовательно, оно представляет частицу со спином  $1/2$ . Как преобразуется  $U$ ? Как было показано, при лоренцевом преобразовании вдоль оси  $z$

$$u' = \exp\left(-\sigma_z \frac{w}{2}\right)u, \quad v' = \exp\left(\sigma_z \frac{w}{2}\right)v.$$

Поэтому

$$U' = \begin{pmatrix} \exp\left(-\sigma_z \frac{w}{2}\right)u \\ \exp\left(+\sigma_z \frac{w}{2}\right)v \end{pmatrix} = \left[ \text{ch} \frac{w}{2} - \text{sh} \frac{w}{2} \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & -\sigma_z \end{pmatrix} \right] U.$$

Используя матрицы Дирака  $4 \times 4$

$$\gamma_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_z = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix},$$

введенные ранее, можно записать это преобразование в более компактном виде. С учетом того, что

$$\gamma_t \gamma_z = \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & -\sigma_z \end{pmatrix},$$

получаем

$$U' = \exp\left(-\gamma_t \gamma_z \frac{w}{2}\right) U,$$

а также

$$N_z = \frac{i}{2} \gamma_t \gamma_z.$$

Так как рассмотренное преобразование соответствует вращению в  $(tx)$ -плоскости, мы вправе ожидать, что матрица  $M_z = (i/2) \gamma_t \gamma_z$  описывает вращение в плоскости  $(xy)$ .

Проверим это. Используя введенное выше представление матриц  $\gamma$ , находим

$$M_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix}$$

и

$$U' = \exp\left(-\gamma_x \gamma_y \frac{\theta_z}{2}\right) U = \begin{pmatrix} \exp\left(i\sigma_z \frac{\theta}{2}\right) u \\ \exp\left(i\sigma_z \frac{\theta}{2}\right) v \end{pmatrix}.$$

Вернемся теперь к вопросу об описании спиновых состояний. Для покоящейся частицы уравнение Дирака будет просто

$$m\gamma_t U = mU.$$

Поэтому

$$u = v.$$

Отсюда ясно, что есть только лишь два решения, которые можно выбрать соответствующими спину вдоль и против какой-либо оси. Например, для спина вдоль оси  $z$  имеем

$$\sigma_z u = u, \quad \sigma_z v = v,$$

или

$$\sigma_z U = U.$$

Однако, если частица движется,  $u \neq v$  (поскольку  $u$  и  $v$  ведут себя различным образом при преобразованиях Лоренца). Следует соблюдать осторожность при описании направления спина движущейся частицы. Если мы выберем  $\sigma$  вдоль направления движения, то можно описать решения как соответствующие спину вверх (правая спиральность) и спину вниз (левая спиральность) уравнениями

$$\hat{p}U_{\pm} = mU_{\pm}, \quad \sigma_p U_{\pm} = \pm U_{\pm}.$$

Однако понятие « $\sigma$  вдоль направления движения» не является лоренц-инвариантным.

Если  $\sigma$  направлен произвольным образом, то нельзя найти решение уравнения Дирака, которое также является собственной функцией оператора  $\sigma$  (поскольку  $\sigma$  и  $\hat{p}$  не коммутируют). Постараемся найти другой способ описания спиновых состояний. Возвращаясь к системе покоя, имеем

$$\gamma_t U = U, \quad \sigma_z U = i\gamma_x \gamma_y U = U.$$

Тогда также

$$\sigma_z \gamma_t U = U.$$

Введем теперь новую лоренц-инвариантную матрицу

$$\gamma_5 = \gamma_t \gamma_x \gamma_y \gamma_z$$

и запишем

$$\sigma_z \gamma_t = i \gamma_x \gamma_y \gamma_z = i \gamma_x \gamma_5.$$

Пусть также  $W$  будет 4-вектором, удовлетворяющим соотношениям  $W_u p_u = 0$ ,  $W_\mu W_\mu = -1$ . В системе покоя  $W_t = 0$  и  $W$  есть единичный вектор, направленный в произвольном направлении. В частности, если  $W$  расположен вдоль оси  $z$ , мы имеем  $\sigma_z \gamma_t = i \hat{W} \gamma_5$ . Поэтому  $U$  удовлетворяет соотношению  $i \hat{W} \gamma_5 U = U$ .

Хотя мы и начинали с системы покоя, но полученные уравнения в силу лоренц-инвариантности справедливы в любой лоренцевой системе. Следовательно, для движущейся частицы два спиновых состояния являются собственными состояниями оператора  $i \hat{W} \gamma_5$ , причем  $(W \cdot p) = 0$ ,  $W^2 = -1$ . Физически они представляют состояния со спином вверх и вниз относительно некоторой оси в системе покоя частицы.

При решении конкретных задач мы, как правило, будем иметь дело с амплитудами, имеющими структуру  $\mathfrak{M} = \bar{U}_2 M U_1$ , где  $M$  есть некоторая комбинация матриц Дирака, а  $U_1$  и  $U_2$  — начальное и конечное спиновые состояния.

Задача обычно состоит в вычислении вероятности перехода, которая пропорциональна

$$\mathfrak{M}^* \mathfrak{M} = (\bar{U}_2 M U_1)^* (\bar{U}_2 M U_1) = (\bar{U}_1 \bar{M} U_2) (\bar{U}_2 M U_1),$$

где  $\bar{M}$  отличается от  $M$  изменением порядка следования всех матриц  $\gamma$  и заменой  $i$  на  $-i$ . (Из определения  $\bar{U} = \dot{U} \gamma_t$  мы получаем  $\bar{M} = \gamma_t (\gamma_t M)^*$ , где  $(\dots)^*$  означает эрмитово сопряжение. Это правило для нахождения  $\bar{M}$  не выявляет инвариантности. Правило, данное выше, более просто. Проверьте сами, что оба правила согласуются. Например,

$$\bar{\gamma}_x = \gamma_x, \quad \overline{i \gamma_x \gamma_y} = -i \gamma_y \gamma_x,$$

а также соотношение

$$\tilde{\gamma}_5 = \gamma_5,$$

являющееся весьма полезным.)

Имеются два способа вычисления таких произведений.

Первый из них наиболее прямолинеен. Решите пару уравнений

$$\hat{p}U = mU, \quad i\tilde{W}\gamma_5 U = U$$

для  $U_1$  и  $U_2$ , а затем вычислите

$$\mathfrak{M} = (\bar{U}_2 M U_1).$$

Однако гораздо более эффективный способ, который обычно и используется на практике, основан на следующем ухищрении. Допустим, что мы не интересуемся спинами в копечном состоянии. Иными словами, нам нужно вычислить величину

$$\sum_{\substack{2 \text{ спиновых} \\ \text{состояния } U_2}} (\bar{U}_1 M U_2) (\bar{U}_2 M U_1).$$

Она может быть записана в виде

$$(\bar{U}_1 M X M U_1),$$

где символом  $X$  обозначена  $4 \times 4$  матрица

$$X = \sum_{2 \text{ спин.}} U_2 \bar{U}_2$$

(обратите внимание на «неправильный» порядок  $U$  и  $\bar{U}$ ). Что же это за матрица? Возьмем координатную систему, в которой частица покоится:  $\hat{p} = m\gamma_t$ . Решения имеют вид (мы опускаем нижний индекс «2» и нормируем  $\bar{U}U$  на  $2m$ )

$$\text{Спин вверх} = (m)^{1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{спин вниз} = (m)^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$U_{\uparrow} \bar{U}_{\uparrow} = m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_{\downarrow} \bar{U}_{\downarrow} = m \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$X = m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = m(\gamma_t + 1),$$

или, в инвариантном виде,

$$X = \hat{p} + m,$$

что справедливо в любой системе отсчета.

Другой способ, которым можно прийти к этому результату, основан на том, что закон матричного умножения дает формулу

$$\sum_{\substack{\text{все 4 со-} \\ \text{стояния } \bar{U}}} (\bar{U}_1 A U) (\bar{U} B U_1) = 2m (\bar{U}_1 A B U_1),$$

суммирование в которой проводится не только по интересующим нас состояниям  $\bar{U}$  с собственным значением  $m$  ( $\hat{p}U = mU$ ), но также и по состояниям с собственным значением  $-m$  ( $\hat{p}U' = -mU'$ ). Но если мы возьмем  $A = M(\hat{p} + m)$ , то обратим в нуль члены, соответствующие лишним состояниям  $AU' = 0$ , и получим  $AU = 2mMU$  для интересующих нас состояний. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{2 \text{ сост.}} (\bar{U}_1 M U_2) (\bar{U}_2 M U_1) &= \\ &= \sum_{4 \text{ сост.}} (\bar{U}_1 M \left[ \frac{\hat{p}_2 + m}{2m} \right] U_2) (\bar{U}_2 M U_1) = U_1 M (\hat{p}_2 + m) M U_1. \end{aligned}$$

Если, кроме того, начальные состояния не поляризованы, то следует усреднить по обоим спинорам  $U_1$ . Если теперь использовать тот факт, что

$$\sum_{4 \text{ сост.}} (\bar{U}_i A U_i) = 2m \text{Sp } A,$$

то мы получим

$$\sum_{\text{спин 1}} \sum_{\text{спин 2}} (\bar{U}_1 M U_2) (\bar{U}_2 M U_1) = \text{Sp} [M (\hat{p}_2 + m) M (\hat{p}_1 + m)].$$

Позднее мы обсудим, как следует поступать, если нас интересуют поляризации.

Таким образом, наша общая задача сведена к вычислению шпура комбинации  $\gamma$ -матриц. Как же следует вычислять эти шпуры? Заметим прежде всего (взгляните на сумму диагональных элементов матриц  $\gamma_t, \gamma_x, \dots$ , определенных в лекции 23), что

$$\text{Sp } \gamma_t = 0, \quad \text{Sp } \gamma_x = 0, \quad \text{Sp } \gamma_y = 0, \quad \text{Sp } \gamma_z = 0.$$

Для любых двух матриц  $A$  и  $B$

$$\text{Sp } AB = \text{Sp } BA, \quad \text{Sp } (\alpha A + \beta B) = \alpha \text{Sp } A + \beta \text{Sp } B,$$

где  $\alpha, \beta$  — комплексные числа.

Используя эти правила, находим

$$\text{Sp } \gamma_x \gamma_y = \text{Sp } \gamma_y \gamma_x,$$

но

$$\gamma_x \gamma_y = -\gamma_y \gamma_x,$$

поэтому

$$\text{Sp } \gamma_x \gamma_y = 0.$$

Только один из шпуров отличен от нуля — это шпур единичной матрицы

$$\text{Sp } 1 = 4.$$

Этот факт чрезвычайно упрощает нашу задачу: для того чтобы найти шпур любого сложного произведения матриц  $\gamma$ , следует лишь найти проекцию этого произведения на единичную матрицу. (Существуют шестнадцать линейно независимых произведений матриц  $\gamma$ , и любая  $4 \times 4$  матрица может быть представлена их линейной комбинацией подобно тому, как любая матрица  $2 \times 2$  представима линейной комбинацией трех матриц Паули и единичной матрицы.)

Шпуры любых произведений нечетного числа матриц  $\gamma$  равны нулю. Для того чтобы упростить произведение четного числа  $\gamma$ -матриц, поступим следующим образом:

$$\text{Sp } (\hat{a}\hat{b}) = \text{Sp } (\hat{b}\hat{a}) = \frac{1}{2} \text{Sp } (\hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a}) = 4(a \cdot b),$$

$$\text{Sp } (\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}) = -\text{Sp } (\hat{b}\hat{a}\hat{c}\hat{d}) + 2(a \cdot b) \text{Sp } (\hat{c}\hat{d}),$$

$$\text{Sp } (\hat{b}\hat{a}\hat{c}\hat{d}) = -\text{Sp } (\hat{b}\hat{c}\hat{a}\hat{d}) + 2(a \cdot c) \text{Sp } (\hat{b}\hat{d}),$$

$$\text{Sp } (\hat{b}\hat{c}\hat{a}\hat{d}) = -\text{Sp } (\hat{b}\hat{c}\hat{d}\hat{a}) + 2(a \cdot d) \text{Sp } (\hat{b}\hat{c}),$$

но

$$\text{Sp}(\hat{b}\hat{c}\hat{d}\hat{a}) = \text{Sp}(\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}),$$

поэтому

$$\text{Sp}(\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}) = 4 \{(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)\}.$$

Метод заключается в том, чтобы передвигать крайнюю левую линейную комбинацию  $\gamma$ -матриц направо на каждом этапе, пользуясь тождеством

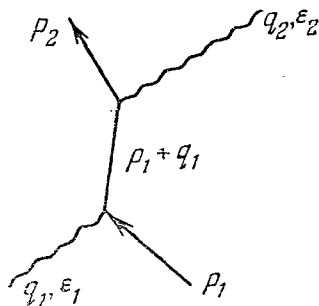
$$\hat{a}\hat{b} = -\hat{b}\hat{a} + 2(a \cdot b).$$

Когда  $\hat{a}$  достигнет крайнего правого положения, мы получим исходный шпур, но, в силу нечетного числа перестановок, с обратным знаком. Остальные шпуры теперь содержат произведения матриц  $\gamma$ , на две единицы меньшие. Всю процедуру следует повторять до тех пор, пока мы не сведем ответ к единичной матрице.

## 25. ЭФФЕКТ КОМПТОНА

Для того чтобы познакомиться с техникой вычисления шпуров, мы проведем детальное вычисление сечения эффекта Комптона, т. е. процесса рассеяния фотона на свободном электроне. В этот процесс дают вклад две диаграммы. Амплитуда первой из них имеет вид

$$\begin{aligned} \text{Амп.} &= U_2 (4\pi)^{1/2} e \hat{\epsilon}_2 \times \\ &\times \left[ \frac{1}{\hat{p}_1 + \hat{q}_1 - m} \right] (4\pi)^{1/2} e \hat{\epsilon}_1 U_1. \end{aligned}$$



Когда поляризации  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  комплексны, то уходящая волна связана с  $\hat{\epsilon}_2$  (подобно волновой функции уходящей



частицы). Двигаясь вдоль диаграммы слева направо, мы имеем:

$$\begin{aligned} (4\pi)^{1/2} e \hat{\epsilon}_1 &= \text{амплитуда поглощения падающего фотона,} \\ \frac{1}{\hat{p}_1 + \hat{q}_1 - m} &= \text{амплитуда распространения виртуального} \\ &\quad \text{электрона,} \\ (4\pi)^{1/2} e \hat{\epsilon}_2 &= \text{амплитуда испускания фотона в конечном} \\ &\quad \text{состоянии.} \end{aligned}$$

В каждой вершине энергия и импульс должны сохраняться. Полная амплитуда есть их произведение, умноженное на спинорные амплитуды электронов в начальном и конечном состояниях. Добавляя к рассмотренной диаграмму с обратным порядком испускания и поглощения фотонов, мы получаем

$$\mathfrak{M} = 4\pi e^2 \bar{U}_2 M U_1,$$

где

$$M = \hat{\epsilon}_2 \frac{1}{\hat{p}_1 + \hat{q}_1 - m} \hat{\epsilon}_1 + \hat{\epsilon}_1 \frac{1}{\hat{p}_1 - \hat{q}_2 - m} \hat{\epsilon}_2.$$

В этом выражении сконцентрирована вся физика задачи — все остальное есть чистая алгебра. Прежде всего преобразуем матричные знаменатели

$$\frac{1}{\hat{p} - m} = \frac{1}{\hat{p} - m} \frac{\hat{p} + m}{\hat{p} + m} = \frac{\hat{p} + m}{\hat{p}^2 - m^2}.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} (p_1 + q_1)^2 - m^2 &= p_1^2 + 2p_1 \cdot q_1 + q_1^2 - m^2 = 2p_1 \cdot q_1, \\ (p_1 - q_2)^2 - m^2 &= -2p_1 \cdot q_2, \end{aligned}$$

вследствие чего

$$M = \hat{\epsilon}_2 \frac{\hat{p}_1 + \hat{q}_1 + m}{2p_1 \cdot q_1} \hat{\epsilon}_1 - \hat{\epsilon}_1 \frac{\hat{p}_1 - \hat{q}_2 + m}{2p_1 \cdot q_2} \hat{\epsilon}_2.$$

Поскольку  $M$  стоит между  $\bar{U}_2$  и  $U_1$  и

$$\hat{p}_i U_i = m U_i,$$

можно получить дальнейшие упрощения, двигая  $\hat{p}_1$  направо. С учетом того, что

$$\hat{p}_1 \hat{\epsilon}_1 = -\hat{\epsilon}_1 \hat{p}_1 + 2p_1 \cdot \epsilon_1, \quad \hat{p}_1 \hat{\epsilon}_2 = -\hat{\epsilon}_2 \hat{p}_1 + 2p_1 \cdot \epsilon_2,$$

получаем

$$M = \frac{\hat{\epsilon}_1 \hat{q}_1 \hat{\epsilon}_1 + 2\hat{\epsilon}_2 (p_1 \cdot \epsilon_1)}{2p_1 \cdot q_1} + \frac{\hat{\epsilon}_1 \hat{q} \hat{\epsilon}_2 - 2\hat{\epsilon}_1 (p_1 \cdot \epsilon_2)}{2p_1 \cdot q_2}.$$

Наконец, выберем систему отсчета, в которой начальный электрон покоится. Тогда

$$(p_1 \cdot q_1) = m\omega_1, \quad (p_1 \cdot q_2) = m\omega_2, \quad (p_1 \cdot \epsilon_1) = (p_1 \cdot \epsilon_2) = 0,$$

поскольку векторы  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  пространственно-подобны, и

$$M = \frac{1}{2m} \left[ \frac{\hat{\epsilon}_2 \hat{q}_1 \hat{\epsilon}_1}{\omega_1} + \frac{\hat{\epsilon}_1 \hat{q}_2 \hat{\epsilon}_2}{\omega_2} \right].$$

Для вычисления эффективного поперечного сечения рассеяния нам нужна величина (см. лекцию 24)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\text{спин 1}} \sum_{\text{спин 2}} (\bar{U}_1 M U_2) (\bar{U}_2 M U_1) &= \\ &= \frac{1}{2} \text{Sp} [M (\hat{p}_2 + m) M (\hat{p}_1 + m)]. \end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned} A &= \text{Sp} [\hat{\epsilon}_1 \hat{q}_1 \hat{\epsilon}_2 (\hat{p}_2 + m) \hat{\epsilon}_2 \hat{q}_1 \hat{\epsilon}_1 (\hat{p}_1 + m)], \\ B &= \text{Sp} [\hat{\epsilon}_1 \hat{q}_1 \hat{\epsilon}_2 (\hat{p}_2 + m) \hat{\epsilon}_1 \hat{q}_2 \hat{\epsilon}_2 (\hat{p}_1 + m)], \\ C &= \text{Sp} [\hat{\epsilon}_2 \hat{q}_2 \hat{\epsilon}_1 (\hat{p}_2 + m) \hat{\epsilon}_2 \hat{q}_1 \hat{\epsilon}_1 (\hat{p}_1 + m)], \\ D &= \text{Sp} [\hat{\epsilon}_2 \hat{q}_2 \hat{\epsilon}_1 (\hat{p}_2 + m) \hat{\epsilon}_1 \hat{q}_2 \hat{\epsilon}_2 (\hat{p}_1 + m)]. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Sp} [M (\hat{p}_2 + m) M (\hat{p}_1 + m)] &= \\ &= \frac{1}{8m^2} \left[ \frac{1}{\omega_1^2} A + \frac{1}{\omega_1 \omega_2} (B + C) + \frac{1}{\omega_2^2} D \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим выражение  $A$ . Поскольку  $\hat{\epsilon}_1 \hat{\epsilon}_1 = -1$ , следует стремиться к тому, чтобы  $\epsilon_1$  и  $\hat{\epsilon}_1$  оказались рядом. С учетом того, что  $\hat{p}_1 \hat{\epsilon}_1 = -\hat{\epsilon}_1 \hat{p}_1$ , находим

$$\begin{aligned} A &= \text{Sp} [\hat{\epsilon}_1 \hat{q}_1 \hat{\epsilon}_2 (\hat{p}_2 + m) \hat{\epsilon}_2 \hat{q}_1 \hat{\epsilon}_1 (\hat{p}_1 + m)] = \\ &= \text{Sp} [\hat{q}_1 \hat{\epsilon}_2 (\hat{p}_2 + m) \hat{\epsilon}_2 \hat{q}_1 (\hat{p}_1 - m)] = \\ &= 2(p_2 \cdot \hat{\epsilon}_2) \text{Sp} [\hat{q}_1 \hat{\epsilon}_2 \hat{q}_1 (\hat{p}_1 - m)] + \text{Sp} [\hat{q}_1 (\hat{p}_2 - m) \hat{q}_1 (\hat{p}_1 - m)]. \end{aligned}$$

Используя формулы

$$\text{Sp} \hat{a} \hat{b} = 4(a \cdot b),$$

$$\text{Sp} \hat{a} \hat{b} \hat{c} \hat{d} = 4[(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)],$$

получаем окончательно

$$A = 8 [2(p_2 \cdot \hat{\epsilon}_2)(q_1 \cdot \epsilon_2) + (q_1 \cdot p_2)](q_1 \cdot p_1).$$

Переставляя в этом выражении  $\epsilon_1 \leftrightarrow \epsilon_2$  и  $q_1 \leftrightarrow q_2$ , имеем также

$$D = 8 [2(p_2 \cdot \hat{\epsilon}_1)(q_2 \cdot \epsilon_1) + (q_2 \cdot p_2)](q_2 \cdot p_1).$$

В нашей системе  $p_1 = (m, 0)$ , где

$$\begin{aligned} p_2 \cdot \epsilon_2 &= q_1 \cdot \epsilon_2, & p_2 \cdot \epsilon_1 &= -q_2 \cdot \epsilon_1, \\ q_1 \cdot p_2 &= m\omega_2, & q_2 \cdot p_2 &= m\omega_1, \end{aligned}$$

выражения упрощаются:

$$\begin{aligned} A &= 8m\omega_1 [2|(q_1 \cdot \epsilon_2)|^2 + m\omega_2], \\ D &= 8m\omega_2 [-2|(q_2 \cdot \epsilon_1)|^2 + m\omega_1]. \end{aligned}$$

Далее рассмотрим член  $B$ . Передвинем сначала  $\hat{\epsilon}_1$  направо,

$$\begin{aligned} B &= \text{Sp} [\hat{\epsilon}_1 \hat{q}_1 \hat{\epsilon}_2 (\hat{p}_2 + m) \hat{\epsilon}_1 \hat{q}_2 \hat{\epsilon}_2 (\hat{p}_1 + m)] = \\ &= 2(\epsilon_1 \cdot q_2) \{ \text{Sp} [\hat{\epsilon}_1 \hat{q}_1 \hat{\epsilon}_2 (\hat{p}_2 + m) \hat{\epsilon}_2 (\hat{p}_1 + m)] = \alpha \} - \\ &- 2(\epsilon_1 \cdot \hat{\epsilon}_2) \{ \text{Sp} [\hat{\epsilon}_1 \hat{q}_1 \hat{\epsilon}_2 (\hat{p}_2 + m) \hat{q}_2 (\hat{p}_1 + m)] = \beta \} + \\ &+ \{ \text{Sp} [\hat{q}_1 \hat{\epsilon}_2 (\hat{p}_2 + m) \hat{q}_2 \hat{\epsilon}_2 (\hat{p}_1 - m)] = \gamma \}. \end{aligned}$$

Двигая в  $\alpha$  и  $\gamma$  множитель  $\hat{\epsilon}_2$  направо и подставляя  $\hat{p}_2 = \hat{p}_1 + \hat{q}_1 - \hat{q}_2$  в  $\beta$ , находим

$$\begin{aligned} \alpha &= 2(p_2 \cdot \hat{\epsilon}_2) \text{Sp} [\hat{\epsilon}_1 \hat{q}_1 \hat{\epsilon}_2 (\hat{p}_1 + m)] - \text{Sp} [\hat{\epsilon}_1 \hat{q}_1 (\hat{p}_2 - m) (\hat{p}_1 + m)], \\ \beta &= \text{Sp} [\hat{\epsilon}_1 \hat{q}_1 \hat{\epsilon}_2 (\hat{p}_1 + m) \hat{q}_2 (\hat{p}_1 + m)] + \text{Sp} [\hat{\epsilon}_1 \hat{q}_1 \hat{\epsilon}_2 \hat{q}_1 \hat{q}_2 (\hat{p}_1 + m)] = \\ &= 2(p_1 \cdot q_2) \text{Sp} [\hat{\epsilon}_1 \hat{q}_1 \hat{\epsilon}_2 (\hat{p}_1 + m)] + 2(q_1 \cdot \epsilon_2) \text{Sp} [\hat{\epsilon}_1 \hat{q}_1 \hat{q}_2 (\hat{p}_1 + m)], \\ \gamma &= 2(p_2 \cdot \epsilon_2) \text{Sp} [\hat{q}_1 \hat{q}_2 \hat{\epsilon}_2 (\hat{p}_1 - m)] - \text{Sp} [\hat{q}_1 (\hat{p}_2 - m) \hat{q}_2 (\hat{p}_1 - m)]. \end{aligned}$$

Вычисляя шпурь, получаем

$$\begin{aligned} \alpha &= 4 \{ 2(\hat{\epsilon}_2 \cdot p_2) [-(\hat{\epsilon}_1 \cdot \epsilon_2)(q_1 \cdot p_1) + (\hat{\epsilon}_1 \cdot p_1)(q_1 \cdot \epsilon_2)] - \\ &- (\hat{\epsilon}_1 \cdot p_2)(q_1 \cdot p_1) + (\hat{\epsilon}_1 \cdot p_1)(q_1 \cdot p_2) \} = \\ &= 4 \{ 2(\hat{\epsilon}_2 \cdot q_1) [-(\hat{\epsilon}_1 \cdot \epsilon_2)] + (\hat{\epsilon}_1 \cdot q_2) \} m\omega_1, \\ \beta &= 4 \{ 2(p_1 \cdot q_2) [-(\hat{\epsilon}_1 \cdot \epsilon_2)(q_1 \cdot p_1) + (\hat{\epsilon}_1 \cdot p_1)(q_1 \cdot \epsilon_2)] + \\ &+ 2(q_1 \cdot \epsilon_2) [-(\hat{\epsilon}_1 \cdot q_2)(q_1 \cdot p_1) + (\hat{\epsilon}_1 \cdot p_1)(q_1 \cdot q_2)] \} = \\ &= 4 \{ 2m\omega_2(-\epsilon_1 \cdot \hat{\epsilon}_2) + 2(q_1 \cdot \epsilon_2) [-(\hat{\epsilon}_1 \cdot q_2)] \} m\omega_1, \\ \gamma &= 4 \{ 2(p_2 \cdot \epsilon_2) [(q_1 \cdot q_2)(\hat{\epsilon}_2 \cdot p_1) - (q_1 \cdot \hat{\epsilon}_2)(q_2 \cdot p_1)] - \\ &- (q_1 \cdot p_2)(q_2 \cdot p_1) + (q_1 \cdot q_2)(p_1 \cdot p_2) - (q_1 \cdot p_1)(p_2 \cdot q_2) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-m^2(q_1 \cdot q_2) &= 4 \{ 2(q_1 \cdot \hat{\varepsilon}_2)(-q_1 \cdot \varepsilon_2)\omega_2 m - (q_1 \cdot p_2)\omega_2 m + \\
&+ (q_1 \cdot q_2)(p_1 \cdot p_2) - \omega_1 m(p_2 \cdot q_2) - m^2(q_1 \cdot q_2) \} = \\
&= 4 \{ 2(q_1 \cdot \hat{\varepsilon}_2)(-q_1 \cdot \varepsilon_2)\omega_2 m - (\omega_1^2 + \omega_2^2)m + \\
&+ (q_1 \cdot q_2)(p_1 \cdot p_2 - m^2) \}.
\end{aligned}$$

Последний член можно упростить с помощью подстановки:

$$\begin{aligned}
q_1 \cdot q_2 &= \frac{(q_1 - q_2)^2}{2} = -\frac{(p_1 - p_2)^2}{2} + (p_1 \cdot p_2) - m^2 = m(\omega_1 - \omega_2), \\
\gamma &= 4 \{ 2(q_1 \cdot \hat{\varepsilon}_2)(-q_1 \cdot \varepsilon_2)\omega_2 - 2\omega_1\omega_2 \} m.
\end{aligned}$$

Получаем окончательно

$$\begin{aligned}
B &= 8 \{ |\varepsilon_1 \cdot q_2|^2 m\omega - |q_1 \cdot \varepsilon_2|^2 m\omega_2 + m^2\omega_1\omega_2 [2|\varepsilon_1 \cdot \hat{\varepsilon}_2|^2 - 1] + \\
&+ [2(\hat{\varepsilon}_1 \cdot \varepsilon_2)(\hat{\varepsilon}_2 \cdot q_1)(\varepsilon_1 \cdot q_2) - 2(\varepsilon_1 \cdot \hat{\varepsilon}_2)(\varepsilon_2 \cdot q_1)(\hat{\varepsilon}_1 \cdot q_2)] m\omega_1 \}.
\end{aligned}$$

Аналогичные вычисления для  $C$  дают  $\hat{B} = C$  (так что два последних члена из  $B$  в сумму  $B + C$  вклада не дают). Заметим, что этот результат не может быть получен простой перестановкой  $\varepsilon_1 \leftrightarrow \varepsilon_2$  и  $q_1 \leftrightarrow q_2$  в окончательном выражении для  $B$ , поскольку он получен в частной системе отсчета  $p_1 = (m, 0)$ . (Можно получить его, обращая порядок всех сомножителей в  $B$ .)

Собирая результаты, получаем

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \text{Sp} [M(\hat{p}_2 + m)M(\hat{p}_1 + m)] &= \\
&= \frac{1}{m^2} \left[ \left( \frac{m}{\omega_1} \right) (2|q_1 \cdot \varepsilon_2|^2 + m\omega_2) + \left( \frac{m}{\omega_2} \right) (-2|q_2 \cdot \varepsilon_1|^2 + m\omega_1) \right] + \\
&+ \frac{2}{\omega_1\omega_2} [|\varepsilon_1 \cdot q_2|^2 m\omega_1 - |q_1 \cdot \varepsilon_2|^2 m\omega_2 + m^2\omega_1\omega_2 (2|\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2|^2 - 1)] = \\
&= \left[ \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} - 2 + 4(\varepsilon_1 \cdot \hat{\varepsilon}_2)(\hat{\varepsilon}_1 \cdot \varepsilon_2) \right].
\end{aligned}$$

Эффективное поперечное сечение рассеяния будет равно (см. лекцию 16)

$$d\sigma = \frac{(4\pi)^2 e^4}{2^4 m\omega_1 E_2 \omega_2} \left[ \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} - 2 + 4|\varepsilon_1 \cdot \hat{\varepsilon}_2|^2 \right] \cdot 2\pi D,$$

где  $D$  — плотность конечных состояний,

$$D = \frac{E_2 \omega_2^3 d\Omega}{(2\pi)^3 m\omega_1}.$$

Заметим, что

$$E_2 = m + \omega_1 - \omega_2$$

и

$$\frac{1}{\omega_2} = \frac{1}{\omega_1} + \frac{1 - \cos \theta}{m}.$$

где  $\theta$  — угол между направлениями движения начального и конечного фотонов. Подставляя в  $d\sigma$ , получаем окончательно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{4} \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \left[ \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} - 2 + 4 |\boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2|^2 \right].$$

В нерелятивистском пределе ( $\omega_1 \ll m$ ), когда  $\omega_1 \simeq \omega_2$ , полученное выражение сводится к поперечному сечению для скалярной частицы

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 |\boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2|^2,$$

тогда как в крайнем релятивистском случае  $\omega_1 \gg m$ , когда  $\omega_2 \simeq m \ll \omega_1$  (исключая окрестность  $\theta = 0$ ),

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{4} \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Физически это означает, что в нерелятивистском пределе взаимодействие в основном идет через электрический заряд, тогда как в ультрафиолетовом случае за него ответствен магнитный момент электрона.

## 26. ПРЯМОЕ РОЖДЕНИЕ ПАР МЮОНАМИ

В качестве другого примера рассмотрим прямое рождение ( $e^+e^-$ )-пары мюоном, падающим на очень тяжелое ядро массы  $M$ , со спином 0 и зарядом  $Ze$ . В лаборатор-

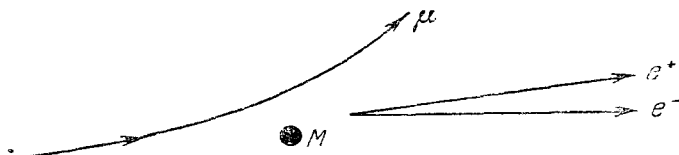


Рис. 26-1.

ных условиях процесс выглядит примерно так, как это изображено на рис. 26-1. Наиболее существенные диаграммы, дающие вклад в этот процесс, изображены на

рис. 26-2, *а* и *б*. Заметим, что истинный 4-импульс позитрона равен  $-q_1$ . Из законов сохранения следует

$$k_1 = P_1 - P_2, \quad k_2 = p_1 - P_2, \quad q_1 + p_1 + P_1 = q_2 + P_2 + p_2.$$

Есть также два других способа рождения пар, изображенные на рис. 26-2, *в* и *г*. Мы отметим лишь, что

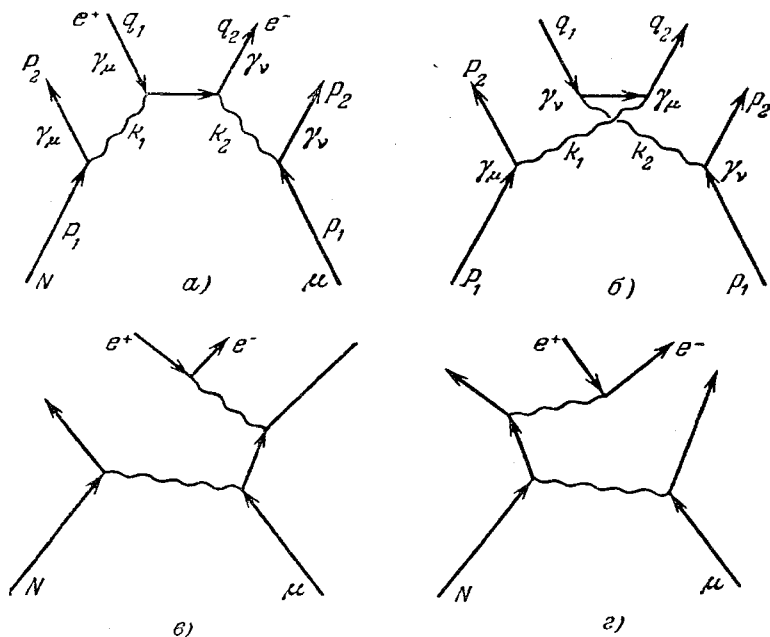


Рис. 26-2.

соответствующие вклады пренебрежимо малы. Существенная причина того, что вклады диаграмм *в* и *г* малы, состоит в том, что тяжелой частице «трудно» испустить фотон. Для процесса прямого рождения пары электронами этот аргумент силы не имеет и диаграмма *в* становится важной.

Амплитуда диаграммы *а* равна

$$4\pi e^2 Z \left\{ \bar{U}(q_2) \gamma_\nu \frac{1}{q_1 + k_1 - m} \gamma_\mu U(q_1) \right\} \frac{1}{k_1^2 k_2^2} \times \\ \times [\bar{U}(p_2) \gamma_\nu U(p_1)] (P_1 + P_2)_\mu.$$

Порядок сомножителей в этой формуле соответствует следованию вдоль мировой линии каждой из частиц. Спиноры  $U(p_1)$ ,  $U(p_2)$  относятся к мюону,  $U(q_1)$ ,  $U(q_2)$  — к электронным состояниям,  $m$  — масса электрона. Диаграмме  $b$  соответствует несколько другая амплитуда. Она равна

$$4\pi e^2 Z \left\{ \bar{U}(q_2) \gamma_\mu \frac{1}{q_1 + k_1 - m} \gamma_\nu U(q_1) \right\} \frac{1}{k_1^2 k_2^2} \times \\ \times [\bar{U}(p_2) \gamma_\nu U(p_1)] (P_1 + P_2)_\mu.$$

Если  $M$  очень велико, то

$$(P_1)_\mu = (P_2)_\mu = M \delta_{\mu 4}.$$

Такое приближение соответствует пренебрежению отдачей ядра. Мы покажем теперь, что пренебрежение отдачей эквивалентно учету лишь кулоновского взаимодействия с ядром. Пусть ядро первоначально покоится. Поскольку  $P_2 = P_1 + k_1$ , то мы имеем

$$2P_1 \cdot k_1 + k_1^2 = 0,$$

или

$$2M\omega_1 + \omega_1^2 + \mathbf{K}_1^2 = 0,$$

так что

$$\omega_1 \simeq -\frac{\mathbf{K}_1^2}{2M} \simeq 0.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{k_1^2} \simeq -\frac{1}{\mathbf{K}_1^2}.$$

Последнее выражение соответствует кулоновскому потенциалу в импульсном представлении.

Можно учесть эффект экранировки ядра окружающими его электронами, заменив  $1/\mathbf{K}_1^2$  фурье-представлением эффективного потенциала. Так, например, если

$$V(r) = \frac{Ze^2}{r} \exp(-ar),$$

то соответствующее выражение будет

$$\frac{1}{\mathbf{K}_1^2 + a^2}.$$

Мы предположили, что спин ядра равен 0 (амплитуда испускания фотона равна  $(4\pi)^{1/2} Ze (P_1 + P_2) \cdot \epsilon$ ). Допустим,

что спин ядра равен  $1/2$ . Тогда амплитуда испускания фотона будет равна  $(4\pi)^{1/2} Ze\bar{U}(P_2) \hat{\epsilon} U(P_1)$ . Имеем

$$\bar{U}(P_2)\gamma_\mu U(P_1) = \frac{1}{2M}\bar{U}(P_2)(\hat{P}_2\gamma_\mu + \gamma_\mu\hat{P}_1)U(P_1).$$

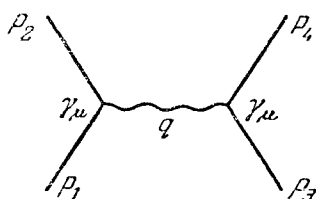
Подставляя сюда  $k_1 = P_2 - P_1$ , получаем

$$\begin{aligned} \bar{U}(P_2)\gamma_\mu U(P_1) &= \\ &= \frac{(P_1 + P_2)_\mu}{2M}\bar{U}(P_2)U(P_1) + \frac{\bar{U}(P_2)(\hat{k}_1\gamma_\mu - \gamma_\mu\hat{k}_1)U(P_1)}{4M}. \end{aligned}$$

Первый член есть вклад электрического заряда. В пределе  $M \rightarrow \infty$   $\bar{U}(P_2)U(P_1) = 2M$  (нет переверота спина), и мы приходим к тому же самому результату, что и в бесспиновом случае. Второй член представляет вклад магнитного момента. Он пропорционален импульсу отдачи, который в данном случае пренебрежимо мал.

## 27. ПРОЦЕССЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Рассмотрим рассеяние двух электронов. Член низшего порядка соответствует диаграмме

$$\begin{aligned} \text{Амп.} &= \\ &= [(4\pi)^{1/2}e]^2 (\bar{U}_4\gamma_\mu U_3)(\bar{U}_2\gamma_\mu U_1) \frac{1}{q^2}, \\ & \quad q = P_2 - P_1, \end{aligned}$$


а также «обменной» диаграмме.

Допустим теперь, что мы хотим знать результат более точно. Тогда следует рассмотреть две диаграммы, изображенные на рис. 27-1.

Амплитуда для диаграммы *a* равна

$$\begin{aligned} & [(4\pi)^{1/2}e]^4 \int \left\{ \bar{U}_4\gamma_\nu \frac{1}{\hat{p}_3 + \hat{k} - m} \gamma_\mu U_3 \right\} \times \\ & \quad \times \left\{ \bar{U}_2\gamma_\nu \frac{1}{\hat{p}_1 - \hat{k} - m} \gamma_\mu U_1 \right\} \frac{1}{k^2} \frac{1}{(q-k)^2} \frac{d^4k}{(2\pi)^4}. \end{aligned}$$



Отметим, что мы интегрируем амплитуду по всем возможным 4-импульсам фотонов в промежуточных состояниях. Множители  $1/k^2$ ,  $1/(q-k)^2$  соответствуют распространению фотонов. Соглашение, использованное при написании выражений, стоящих в фигурных скобках, состоит в том, что движение справа налево в матричном элементе соответствует следованию вдоль стрелок по

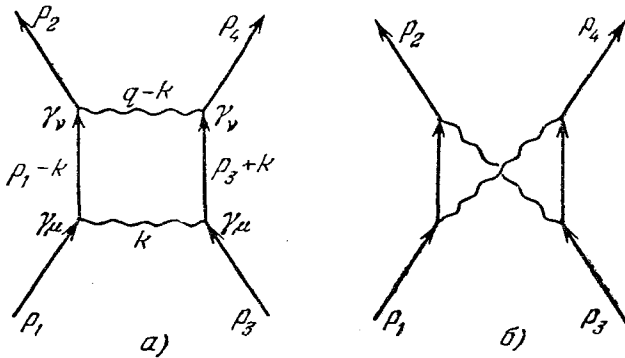


Рис. 27-1.

линиям частиц со спином  $1/2$ . При этом каждая из таких линий независима от других. Поэтому выражение

$$\bar{U}_2 \gamma_\nu \frac{1}{\hat{p}_1 - \hat{k} - m} \gamma_\mu U_1$$

говорит, что частица в состоянии  $U_1$  испускает фотон с поляризацией  $\mu$  (множитель  $\gamma_\mu$ ), импульсом  $k$ ; после движения, соответствующего фактору  $1/(\hat{p}_1 - \hat{k} - m)$ , она переходит в состояние  $U_2$  в результате взаимодействия с другим виртуальным фотоном ( $\gamma_\nu$ ).

Интеграл в выражении для амплитуды можно вычислить. При больших  $k$  он ведет себя как  $\int_0^\infty (k^3 dk/k^6)$  и является сходящимся. В нем, однако, содержится трудность, связанная с малыми  $k$ , но она имеет хорошее физическое объяснение. Оказывается, что мы неправильно ставим вопрос, когда ищем амплитуду процесса рассеяния, в котором не испускается ни одного фотона, как это подразумевается диаграммой на стр. 144. В действительности мы не можем рассеять два электрона без

того, чтобы не был испущен какой-либо низкоэнергетический фотон. Вместо этого следует определить вероятность того, что в излучение не перешло энергии, большей некоторой величины  $\Delta E$ . Она равна вероятности того, что не было испущено фотона, плюс вероятность того, что был испущен фотон энергии  $E_1 < \Delta E$ , плюс вероятность испускания двух фотонов с суммарной энергией  $E_2 < \Delta E$  и т. д. Первые два члена в порядке  $e^6$  по отдельности расходятся, но если мы сложим их вместе, то получим конечный ответ.

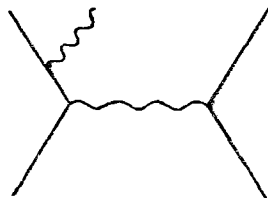


Рис. 27-2.

Так, например, амплитуда для процесса с испусканием фотона малой энергии  $\omega$  дает вклад вида  $\int (\dot{a}\omega/\omega)$ .

Если мы обрежем нижний предел на некотором  $x$  и проведем аналогичные манипуляции с диаграммами  $a$  и  $b$ , то  $x$  выпадает из суммарного выражения, так что можно будет перейти к пределу  $x \rightarrow 0$ . Однако такой прямой процедуре нелегко придать релятивистски-инвариантную форму, вследствие чего она сопряжена с трудностями.

Вместо этого предположим, что фотон имеет очень маленькую массу (масса инвариантна)  $\lambda$ . Поэтому в фотонном пропагаторе заменим  $k^2$  на  $k^2 - \lambda^2$ . Тогда амплитуда для суммы диаграмм  $a$  и  $b$  содержит член  $\ln(m/\lambda)$ . Вклад низшего порядка от этих диаграмм в вероятность пропорционален  $e^6$  и является эффектом интерференции диаграмм рис. 27-1 и диаграммы низшего порядка  $e^2$ .

Вероятность процесса без испускания фотона пропорциональна выражению

$$e^4 + ae^6 \ln \frac{m}{\lambda},$$

где  $a$  есть число, большее нуля.

Теперь следует учесть диаграмму, изображенную на рис. 27-2. Мы найдем, что вероятность испускания одного фотона с энергией  $E < \Delta E$  будет

$$-ae^6 \ln \frac{\Delta E}{\lambda}.$$

Остальные численные множители совпадают.

Поэтому после сложения амплитуд вспомогательная масса  $\lambda$  исчезает из члена порядка  $e^6$ . Все подобные расходимости (именуемые инфракрасной катастрофой) исчезают при правильной постановке вопроса. Блох и Нордсик первыми нашли решение этой проблемы.

Можно было бы возразить, что когда  $\lambda \rightarrow 0$ , то  $e^2 \ln(m/\lambda) \rightarrow \infty$  и теория возмущений больше не верна. Однако тут достаточно свободного места для того, чтобы действовать последовательно. Выясним для этого, насколько малой может стать  $\lambda$ , прежде чем поправка перестанет быть малой. Потребуем, чтобы

$$e^2 \ln \frac{m}{\lambda} \ll 1,$$

или

$$\frac{\lambda}{m} \gg e^{-137} \simeq 10^{-60},$$

т. е.

$$\lambda \gg 10^{-60} m.$$

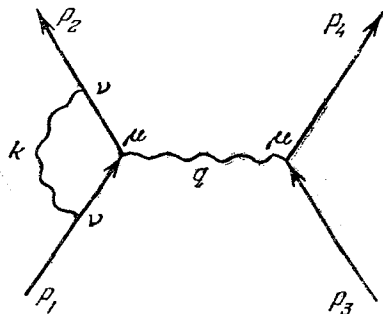


Рис. 27-3.

Таким образом, так называемая инфракрасная катастрофа в действительности вовсе не является катастрофой.

Обратимся далее к совершенно новому типу диаграмм. Фотон, испущенный электроном, может быть поглощен *тем же самым* электроном. Пример такого процесса дает рис. 27-3.

Соответствующая амплитуда равна

$$\begin{aligned} & [(4\pi)^{1/2} e]^4 \int (U_4 \gamma_\mu U_3) \left\{ U_2 \gamma_\nu \frac{1}{\hat{p}_2 - \hat{k} - m} \gamma_\mu \frac{1}{\hat{p}_1 - \hat{k} - m} \gamma_\nu U_1 \right\} \times \\ & \times \frac{1}{q^2} \frac{1}{k^2} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}. \end{aligned}$$

Здесь мы встречаемся с настоящей трудностью. При больших  $k$  интеграл ведет себя как

$$\int \frac{k^3 dk}{k^4}$$

и, поскольку, строго говоря, мы должны интегрировать

по всем  $k$ , интеграл логарифмически расходится в области больших  $k$ .

Этот факт именуется ультрафиолетовой катастрофой и, в отличие от предыдущего случая, это действительно катастрофа. Она *не решена*. Однако на самом деле у нас имеется способ замести мусор под ковер: во-первых, рассмотрим все диаграммы четвертого порядка (см. рис. 27-4);

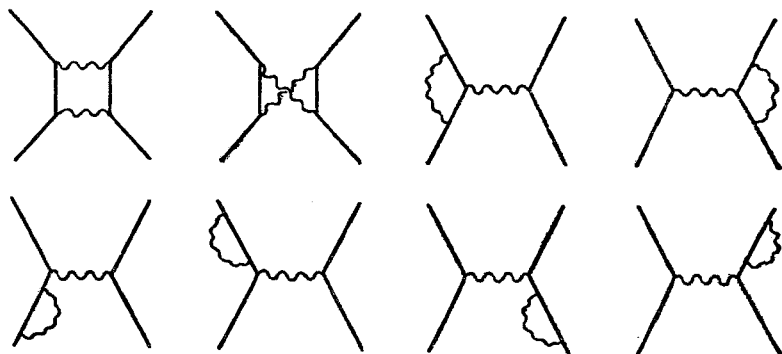


Рис. 27-4.

кроме них, имеется еще одна, пораженная другой болезнью, именуемой вакуумной поляризацией (рис. 27-5).

Прежде чем приступить к этим проблемам, рассмотрим простой случай. Во втором порядке имеется диаграмма,

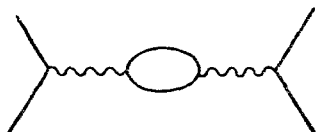


Рис. 27-5.

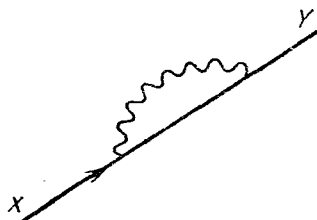


Рис. 27-6.

изображенная на рис. 27-6, соответствующая виртуальному поглощению и испусканию фотона электроном.

В этой диаграмме в действительности нет совсем свободных частиц. Для электрона, движущегося из  $X$

в  $Y$ , полюс пропагатора *свободной частицы* находится в  $p^2 = m^2$ . Однако, проводя измерения в  $X$  и  $Y$ , мы не можем определить, испускал и поглощал ли электрон какое-либо число фотонов. Такие процессы, простейший из которых приведен на рисунке, приводят к сдвигу положения полюса. Физически это означает, что та масса, которую мы измеряем («экспериментальная» масса  $m_{\text{эсп}}$ ), не есть «голая» масса, но что-то другое, включающее эффекты упомянутых виртуальных процессов. Математически мы определяем экспериментальную массу как положение полюса пропагатора с учетом указанных выше процессов. Это обсуждение показывает, что «голая» масса (которую мы теперь обозначим  $m_0$ ) фактически не является непосредственно наблюдаемой. Используя этот факт, мы можем изобрести рецепт, который обходит (но не «решает») трудности с расходимостями в электродинамике. Однако это процедура отказывается служить для произвольных моделей взаимодействия, например, в псевдовекторной теории мезон-нуклонного взаимодействия.

## 28. СОБСТВЕННАЯ ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОНА

Проблема собственной энергии электрона не является новой: она появилась в классической физике. Если предположить, что электрон является шариком радиуса  $a$ , причем весь его заряд расположен на поверхности, то полная электростатическая энергия равна  $E_0 = e^2/2a$ . Возможно, что масса электрона  $m$  соответствует этой энергии. Однако, если вы сосчитаете импульс  $P$  поля, когда электрон движется со скоростью  $v$  (с учетом лоренцева сокращения шарика), то получите  $P = (4/3) E_0 v / (1 - v^2)^{1/2}$ . Эта величина соответствует частице с массой  $m = (2/3)(e^2/a)$ . Пуанкаре предположил, что какие-то силы должны удерживать части шарика и что эти силы должны давать добавки в энергию. Однако не существует надежной теории таких сил.

Эта собственная энергия происходит от энергии, необходимой для того, чтобы «собрать» заряд. Можно считать, что это есть энергия взаимодействия одной части заряда электрона с другой. Казалось бы, что возможный

способ избавиться от подобных эффектов состоит в том, чтобы запретить электрону воздействовать на самого себя — т. е. предположить, что электроны действуют только друг на друга. (Тогда электрон мог бы быть точечным зарядом.) Однако действие электрона самого на себя необходимо для объяснения реального явления, явления радиационного трения. Ускоряемый заряд излучает, теряя энергию, поэтому ускоряющая сила должна производить работу. Против каких сил? Согласно классической физике — против силы, создаваемой действием одной части заряда на другую.

Вы можете рассчитать силу  $F$ , действующую на движущийся заряженный шарик, благодаря действию электромагнитного поля одной части шарика на его другие части. Эта сила равна

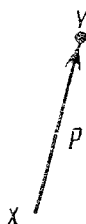
$$F = \frac{2}{3} \frac{e^2}{a} \ddot{x} + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\ddot{x}} + O(a).$$

Первый член согласуется с массой, вычисленной из импульса поля. Второй член есть сила реакции излучения, испущенного электроном, и не зависит от  $a$ . Однако было бы непоследовательным устремить  $a$  к нулю. Распределенный заряд никогда не был тщательно проанализирован. Возникают вопросы, связанные с внутренними движениями и т. п.

В действительности эти вопросы в классической физике решались различными путями, но ни один из них не был успешно перенесен в квантовую механику (ссылки см. в работе Фейнмана [10]).

**Перенормировка массы.** Обсудим теперь аналог этой задачи в квантовой механике — перенормировку массы. Рассмотрим амплитуду электрона, движущегося между точками  $X$  и  $Y$ . Диаграмма низшего порядка дает

$$\text{Амп.} = Y \frac{1}{\hat{p} - m} X.$$



Возможно также, что при движении от  $X$  к  $Y$  электрон испустит и поглотит виртуальный фотон. В этом случае

$$\begin{aligned} \text{Амп.} &= Y 4\pi e^2 \int \frac{1}{\hat{p}-m} \gamma_\mu \frac{1}{\hat{p}-\hat{k}-m} \times \\ &\times \gamma_\mu \frac{1}{k^2} \frac{1}{\hat{p}-m} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} X = Y \frac{1}{\hat{p}-m} C \frac{1}{\hat{p}-m} X, \end{aligned}$$



где величина

$$C = 4\pi e^2 \int \gamma_\mu \frac{1}{\hat{p}-\hat{k}-m} \gamma_\mu \frac{1}{k^2} \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$$

является инвариантной функцией вида  $C = A(p^2) \hat{p} + B(p^2)$ . Каков ее физический смысл? Допустим, что  $C$  мала. Тогда первые два члена могут быть записаны в виде

$$Y \frac{1}{\hat{p}-m} X + Y \frac{1}{\hat{p}-m} C \frac{1}{\hat{p}-m} X = Y \frac{1}{\hat{p}-m-C} X$$

благодаря тому, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hat{p}-m-C} &= \frac{1}{\hat{p}-m} + \frac{1}{\hat{p}-m} C \frac{1}{\hat{p}-m} + \\ &+ \frac{1}{\hat{p}-m} C \frac{1}{\hat{p}-m} C \frac{1}{\hat{p}-m} + \dots \end{aligned}$$

(Последняя формула является частным случаем более общего операторного соотношения

$$\frac{1}{A-B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \dots)$$

Если бы  $C$  была числом, мы могли бы рассматривать ее как поправку к массе. Первый и второй члены этого ряда суть амплитуды движения электрона без и с одним

виртуальным фотоном соответственно. Легко проверить, что третий член соответствует вкладу с двумя фотонами

$$\text{Амп.} = Y \frac{1}{\hat{p} - m} C \frac{1}{\hat{p} - m} C \frac{1}{\hat{p} - m} X,$$



четвертый член — вкладу с тремя фотонами и т. д. Однако такие диаграммы содержат лишь процессы, в которых в каждый данный момент содержится не более одного

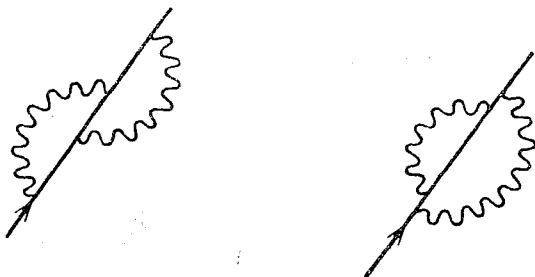


Рис. 28-1.

фотона. Примеры диаграмм другого типа с двумя виртуальными фотонами приведены на рис. 28-1. Мы не будем сейчас принимать во внимание такие диаграммы, так как они добавляют в  $C$  члены порядка  $e^4$ , когда мы записываем полную амплитуду распространения электрона между  $X$  и  $Y$  в виде

$$\frac{1}{\hat{p} - m - C} = \frac{1}{\hat{p} - m - A\hat{p} - B},$$

где  $A$  и  $B$  — функции от  $p^2$ . Полюс этого пропагатора дает соотношение между энергией и импульсом свободной частицы и поэтому определяет экспериментально наблюдаемую массу  $m_{\text{эсп}}$ .



Избавляясь от матриц в знаменателе

$$\frac{1}{(1-A)\hat{p} - (m+B)} = \frac{(1-A)\hat{p} + (m+B)}{(1-A)^2 p^2 - (m+B)^2},$$

мы получаем, что положение полюса определяется решением уравнения

$$[1 - A(p^2)]^2 p^2 - [m + B(p^2)]^2 = 0.$$

Заметим здесь, что наличие второго полюса может быть истолковано как существование другой частицы (вероятно,  $\mu$ -мезона). Предполагая, что  $A \ll 1$  и  $B \ll m$ , мы можем положить  $A(p^2) = A(m^2)$  и  $B(p^2) = B(m^2)$ . Тогда

$$p^2 = \left[ \frac{m + B(m^2)}{1 - A(m^2)} \right]^2 = m_{\text{эксн}}^2,$$

или

$$m_{\text{эксн}} = \frac{m + B}{1 - A} = m + \delta m,$$

где

$$\delta m = B(m^2) + mA(m^2).$$

Таким образом, пропагатор имеет полюс при  $\hat{p} = m_{\text{эксн}}$  и для  $p^2$ , близких к  $m_{\text{эксн}}^2$ , ведет себя как некоторая константа (вычет в полюсе), умноженная на  $(\hat{p} - m_{\text{эксн}})^{-1}$ . Обозначим вычет при  $p^2 = m_{\text{эксн}}^2$  через  $1 + r$ . Можно теперь переписать пропагатор следующим образом:

$$\frac{1 + r}{\hat{p} - m_{\text{эксн}}}$$

( $r$  может быть выражено через  $A$ ,  $B$  и их производные  $A'(p^2)$ ,  $B'(p^2)$  в точке  $p^2 = m_{\text{эксн}}^2$ ). Отклонение от обычной формы  $(\hat{p} - m_{\text{эксн}})^{-1}$  можно интерпретировать как поправку к константе связи фотона [11] (поскольку множитель  $1 + r$  в пропагаторе можно получить, умножая каждую фотонную вершину на  $(1 + r)^{1/2}$ ). Следующий шаг заключается в том, чтобы вычислить функции  $A$  и  $B$ . Для этой цели следует вычислить интеграл

$$\int \gamma_{\mu} \frac{\hat{p} - \hat{k} + m}{p^2 - 2p \cdot k + k^2 - m^2} \gamma_{\mu} \frac{d^4 k}{k^2}.$$

Используя соотношения

$$\gamma_{\mu} \gamma_{\mu} = 4, \quad \gamma_{\mu} \hat{a} \gamma_{\mu} = -2\hat{a},$$

избавляемся от  $\gamma_{\mu}$ . При вычислении  $\delta m$  можно положить  $p^2 = m^2$ , тогда получаем

$$\int \frac{-2(p - \hat{k}) + 4m}{-2p \cdot k + k^2} \frac{d^4 k}{k^2}.$$

Этот интеграл расходится. При больших значениях  $k$  первый знаменатель может быть заменен на  $k^2$ . Тогда член, содержащий  $\hat{k}$ , исчезает в силу соображений симметрии. Остальная часть подынтегрального выражения ведет себя при больших  $k$  как  $k^3 dk/k^4$ , и поэтому интеграл логарифмически расходится. Квантовая электродинамика ударила лицом в грязь!

Бете заметил, что данная бесконечность является естественно существующей в электродинамике (за исключением еще одной, которую мы обсудим позднее). Пусть у нас есть способ сделать этот интеграл «на время» сходящимся. Допустим, например, что пропагатор  $1/k^2$  всегда следует умножать на релятивистски-инвариантный множитель  $C(k^2)$ , обеспечивающий сходимость.

Если положить

$$C(k^2) = -\frac{\lambda^2}{k^2 - \lambda^2}$$

(такой  $C(k^2)$  обрезает интеграл при больших  $k^2$  и  $C(0) = 1$ ), то интеграл может быть вычислен. Получаем (методы вычисления см. в ссылке [11])

$$\delta m = m \frac{3e^2}{2\pi} \left[ 3 \ln \frac{\lambda}{m} + \frac{3}{4} \right],$$

пренебрегая членами, исчезающими вместе с  $m/\lambda$ .

Если вам придется вычислять любой процесс в высшем порядке, то вы встретите член, пропорциональный  $\ln(\lambda/m)$  (для частиц со спином  $1/2$  — электронов, взаимодействующих лишь с фотонами, не встретится ничего более плохого, чем логарифмические расходимости). Затем, где бы вы ни встретили  $m$ , подставьте вместо него  $m_{\text{эсп}} - \delta m$  и разложите до первой степени по  $\delta m$ . Чудо заключается в том, что полный коэффициент при  $\ln(\lambda/m)$  обратится в нуль. Остальные члены имеют определенный предел при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Другими словами, значение параметра обрезания не появляется в окончательном выражении, если мы всегда выражаем ответ через экспе-

риментальную массу и устремляем  $\lambda \rightarrow \infty$  при фиксированном  $m_{\text{эксп}}$ .

Используя подобные идеи, Бете попробовал вычислить смещение энергетических уровней в атоме водорода, обусловленное собственной энергией связанного электрона. Толчок был дан экспериментом Резерфорда и Лэмба, которые обнаружили, используя микроволновую технику, расщепление примерно в 1000 МГц между уровнями  $2S_{1/2}$  и  $2P_{1/2}$  в водороде. Если пренебречь взаимодействием с полем излучения, то эти уровни должны быть полностью вырождены. Бете произвел неполное вычисление, используя нерелятивистское приближение. Быстрое развитие квантовой электродинамики в 1948—1949 гг. последовало в результате усилий сформулировать его и Вайскопфа идеи в релятивистски-инвариантной форме и закончить его вычисления.

Итак, мы нашли еще одно правило, которое должно быть включено в квантовую электродинамику: (1) введите произвольный фактор обрезания

$$C(k^2) = \lambda^2 / (\lambda^2 - k^2)$$

к каждому пропагатору  $1/k^2$ ; (2) выразите ответ через  $m_{\text{эксп}} = m - \delta m$ ; (3) перейдите к пределу  $\lambda \rightarrow \infty$  при фиксированном  $m_{\text{эксп}}$ .

Швингер вычитал бесконечности из подынтегрального выражения, но его метод чрезвычайно сложен с практической точки зрения. Оказывается также, что он совершенно эквивалентен сформулированному правилу.

Все ли в порядке в описанной процедуре? Это, разумеется, весьма сомнительный рецепт. Вайскопф заметил однажды, что только, если бы Господь снабдил нас и заряженными, и нейтральными электронами, введение  $\delta m$  было бы оправдано.

В действительности в природе встречаются примеры, в которых техника обрезания не работает; например,  $\pi^+$ ,  $\pi^0$  и  $\pi^-$ . Массы  $\pi^+$  и  $\pi^0$  отличаются, но вычисления приводят к квадратичным расходимостям. При проведении подобных расчетов частицы считаются точечными. В действительности следует учитывать облако нуклонных пар, и некоторые считают, что такой учет приведет к устранению расходимостей. Однако подобные утверждения никогда не были доказаны.

## 29. КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Возможно ли проводить вычисления в квантовой электродинамике, заменив пропагатор  $1/k^2$  на

$$-\frac{1}{k^2} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - k^2}$$

и считая  $\lambda$  конечной величиной? Тогда нам не встретилось бы расходимостей, а параметр обрезания  $\lambda$  можно было бы считать новой константой теории. К сожалению, такое построение не является внутренне последовательным.

Пусть, например, у нас есть атом в возбужденном состоянии. Вычислим две вероятности: (1) вероятность того, что он распадется (т. е. излучит фотон); (2) вероятность того, что он останется в возбужденном состоянии. Сумма этих двух вероятностей отличается от единицы на множитель, пропорциональный  $m^2/\lambda^2$ . Вероятность не сохраняется! Вы можете также увидеть это, записав исправленный пропагатор в форме

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - \lambda^2}.$$

Такое представление отвечает введению пропагатора  $-(k^2 - \lambda^2)^{-1}$  для лишнего «фотона» или частицы массы  $\lambda$ . Знак минус означает, что его взаимодействие пропорционально  $-e^2$ , а не  $+e^2$ , т. е. такой фотон должен иметь мнимую константу связи  $ie$ . Гамильтониан оказывается не эрмитовым, вероятность не сохраняется, возникает хаос.

Никому не удалось решить такую задачу: построить теорию, которая была бы совместной с общими принципами квантовой механики (суперпозиция амплитуд) и теорией относительности и содержала бы произвольную функцию. Невозможно модифицировать пропагатор  $1/k^2$ , не разрушив всю теорию. Обратите внимание на то, что такая трудность не возникает в нерелятивистской квантовой механике, где имеется произвольная функция — потенциал  $V(r)$ , который можно выбирать из широкого класса. Относительность плюс квантовая механика, по-видимому, приводят к очень сильным ограничениям, но мы, кроме того, несомненно, добавляем

некоторые неизвестные неявные предположения (такие, как существование бесконечно малых расстояний в пространстве).

Мы вычислили суммарный вклад в собственную энергию от диаграмм, изображенных на рис. 29-1, и обнаружили, что он расходится логарифмически. Однако есть

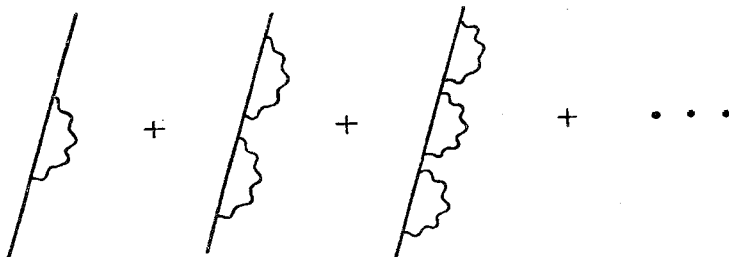


Рис. 29-1.

еще диаграммы типа, показанного на рис. 29-2. Соответствующий член дает вклад порядка  $e^4$  в  $C$  и, следовательно, в  $\delta m$ . Он пропорционален  $e^4 [\ln(\lambda/m)]^2$ . Могло бы оказаться, что при учете всех таких диаграмм собственная



Рис. 29-2.

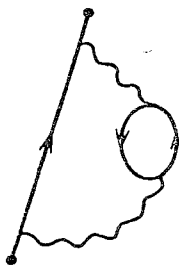


Рис. 29-3.

энергия стала бы конечной. Гелл-Манн и Лоу просуммировали подобные члены, содержащие высшие степени  $\ln(\lambda/m)$ , и показали, что результат все еще расходится. Оказывается, что  $C$  имеет вид

$$\frac{\lambda^2}{p^2} a e^2 + b e^2 + \dots,$$

где  $a, b, \dots$  — численные коэффициенты. Имеется еще

один новый тип диаграмм, который следовало бы обсудить. В таких диаграммах рождается пара, которая затем аннигилирует. Примеры подобных диаграмм приведены на рис. 29-3.

Обратимся к некоторым эффектам от виртуальных фотонов (радиационным поправкам). Рассмотрим, например, рассеяние электрона на потенциале  $V(r)$  (см. обсуждение смысла потенциала в лекции 30). Диаграммы

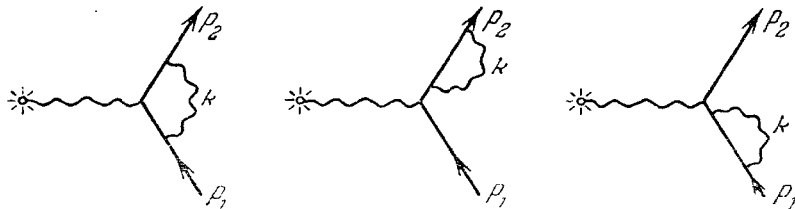


Рис. 29-4.

низшего порядка, содержащие виртуальные фотоны, показаны на рис. 29-4. Поправка к константе связи (множитель  $(1+r)$  в пропагаторе) сокращается, когда мы добавляем вклады от трех приведенных диаграмм. Чистый эффект, при достаточно малых энергиях, состоит в сглаживании потенциала на расстояниях порядка комптоновской длины волны. Очень грубо:

$$V(r) \rightarrow V(r) + \text{const} \frac{e^2}{m^2} \nabla^2 V(r).$$

В атоме такое изменение потенциала приводит к смещению энергетических уровней. Рассмотрим атом водорода.

Для чисто кулоновского потенциала между электроном и протоном теория Дирака предсказывает, что  $2S_{1/2}$ - и  $2P_{1/2}$ -состояния имеют в точности одинаковую энергию. Однако мы видели, что эффективный протон-электронный потенциал содержит член, пропорциональный

$$\nabla^2 V(r) = -4\pi\rho \quad (\rho \text{ — плотность заряда протона}).$$

Поскольку  $\rho$  исчезает везде, кроме окрестности начала координат, этот член влияет только на энергию  $S$ -уровня, который сдвигается примерно на 1000 МГц. Если учесть

также поправку от диаграммы рис. 29-5 (вакуумная поляризация), то теория предсказывает сдвиг  $1057,3 \pm \pm 0,1$  МГц. Эта цифра слегка противоречит эксперименту

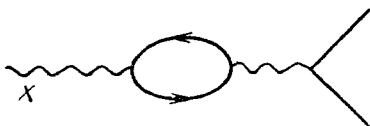


Рис. 29-5.

и, вероятно, следует провести вычисления в следующем порядке теории возмущений.

Если внешний потенциал соответствует магнитному полю, то эффект виртуальных фотонов приводит к изменению магнитного момента электрона. Этот магнитный момент  $\mu_e$  был вычислен до порядка  $e^4$ , и результат имеет вид

$$\mu_e = \mu_0 \left[ 1 + \frac{e^2}{2\pi} - 0,328 \frac{e^4}{\pi^4} \right] = \mu_0 \cdot 1,0011596,$$

где  $\mu_0 = e/2m$ . (Правильный коэффициент при  $e^4$  был лишь недавно получен Питерманом и Зоммерфилдом. Первое вычисление Карплуса и Кролла дало 2,973.) Магнитный

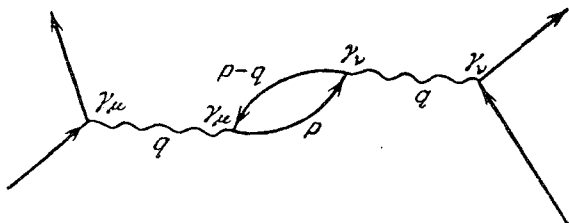


Рис. 29-6.

момент измеряется по отношению  $\mu_e/\mu_p$  ( $\mu_p$  — магнитный момент протона). Измерения  $\mu_e/\mu_p$  весьма точны. Однако сейчас имеются два экспериментальных значения, противоречащих друг другу: одно дает  $\mu_e/\mu_0 = 1,001146 \pm \pm 0,000012$ , а другое —  $1,001165 \pm 0,000011$  (ссылка [12]).

**Перенормировка заряда.** Как я уже говорил, в электродинамике есть еще одна бесконечность. Она соответствует диаграммам типа рис. 29-6, в которых содержатся виртуальные электрон-позитронные пары. Мы снова можем

просуммировать диаграммы, приведенные на рис. 29-7. Соответствующий ряд имеет вид

$$\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^2} X \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^2} X \frac{1}{q^2} X \frac{1}{q^2} + \dots = \frac{1}{q^2 - X},$$

где  $X$  — вклад электрон-позитронной петли.

Оказывается, что при малых  $q^2$  вклад  $X = q^2 Y$ , где  $Y$  стремится к постоянной (в действительности это верно во всех порядках по  $e^2$ ).

Поэтому

$$\frac{1}{q^2 - X} = \frac{1}{1 - Y} \frac{1}{q^2}.$$

Полюс пропагатора по-прежнему находится в  $q^2 = 0$ . Поэтому масса покоя электрона остается равной нулю.

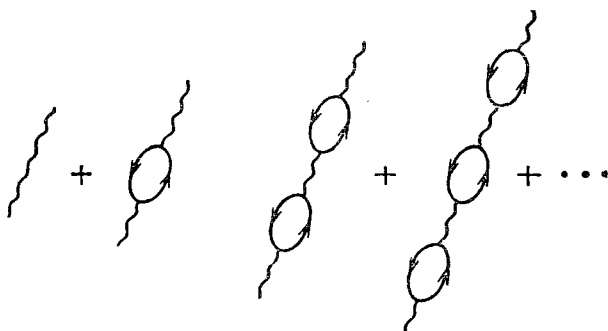


Рис. 29-7.

Однако множитель  $(1 - Y)^{-1}$  всегда будет умножаться на  $e^2$ . Поэтому экспериментально измеряемый заряд  $e_{\text{эксп}}$  равен

$$e_{\text{эксп}} = \frac{e}{(1 - Y)^{1/2}}.$$

Этот эффект называется перенормировкой заряда. Однако при вычислении  $Y$  вы опять получите бесконечность. Можно, конечно, поправить эту логарифмическую расходимость так же, как это было сделано с массой. Как мы видели, можно привести физический пример перенормировки массы: разность масс заряженной и нейтральной частиц (см. лекцию 28). В то же время нет



способа придать физический смысл перенормировке заряда. Однако мы знаем, что

$$e_{\text{эксп}}^2 = \frac{1}{137,0369}.$$

Допустим, что будущая теория даст какую-либо простую формулу для теоретического значения заряда. Например, корень функции Бесселя или что-нибудь вроде

$$e_{\text{теор}}^2 = \frac{1}{141}.$$

Но для сравнения с экспериментом необходимо провести перенормировку заряда, в результате которой вы получите  $e_{\text{эксп}}^2 = 1/137$ . Все это, разумеется, чистая фантазия!

Посмотрим теперь, что же такое есть  $X$ . Нам следует вычислить вклад диаграммы рис. 29-8.

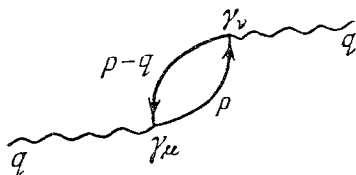


Рис. 29-8.

Следуя электронной линии вдоль замкнутой петли, мы получаем

$(4\pi)^{1/2} e \gamma_\mu$  = амплитуда аннигиляции фотона,

$(\hat{p} - m)^{-1}$  = амплитуда распространения электрона между двумя фотонными вершинами,

$(4\pi)^{1/2} e \gamma_\nu$  = амплитуда испускания фотона с поляризацией  $\nu$ ,

$(\hat{p} - \hat{q} - m)^{-1}$  = амплитуда распространения электрона назад к исходной точке.

Полная амплитуда есть поэтому

$$4\pi e^2 \bar{U}_i \frac{1}{\hat{p} - \hat{q} - m} \gamma_\nu \frac{1}{\hat{p} - m} \gamma_\mu U_s,$$

где  $U_i$  — начальное состояние электрона (которое не должно удовлетворять уравнению Дирака, поскольку оно представляет виртуальный электрон). Однако все возможные импульсы  $p$  и начальные состояния  $U_i$  могут возникнуть. Поэтому

$$X_{\nu\mu} = 4\pi e^2 \int \text{Sp} \left\{ \frac{1}{\hat{p} - \hat{q} - m} \gamma_\nu \frac{1}{\hat{p} - m} \gamma_\mu \right\} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}.$$

Детали вычисления интеграла содержатся в ссылке [11]. Предложение о том, как избавиться от



Рис. 29-9.

бесконечности, было впервые дано Паули и Бете. Оказывается невозможным модифицировать электронный пропагатор введением обрезającego множителя, поскольку при этом нарушается градиентная инвариантность результата. Вместо этого следует построить подынтегральное выражение, используя массу электрона  $m$ , а затем вычесть из него такое же выражение, соответствующее некоторой другой массе  $M$ . Результат все еще логарифмически расходится, но может быть сделан сходящимся заменой  $e$  на  $e_{\text{эксп}}$ .

Перенормировка заряда связана не только с виртуальными парами электрон-позитронов, но также с парами

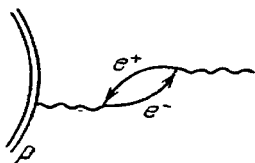


Рис. 29-10.

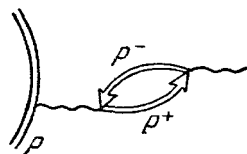


Рис. 29-11.

любых заряженных частиц-античастиц. Отличается ли в результате перенормированный заряд электрона от, скажем, заряда протона? Ответ отрицателен. Если элект-

рон-фотонное взаимодействие модифицируется диаграммами типа рис. 29-9, то в протон-фотонное взаимодействие дают вклад подобные диаграммы (см. рис. 29-10). (В действительности, если мы учитываем мезоны, то есть еще дополнительные диаграммы, изображенные на рис. 29-11. Они дают вклад в аномальный магнитный момент, но не меняют полного заряда нуклонов.)

### 30. МЕЗОННАЯ ТЕОРИЯ

Вам уже приходилось видеть уравнение Дирака (или уравнение Шредингера), записанное в форме

$$(i\hat{V} - \hat{A} - m)\Psi = 0,$$

где  $A$  есть *внешний* потенциал. Важно установить, что этот результат представляет собой приближение к правилам, которые мы установили, и может быть получен из них. Зададим поэтому вопрос: при каких условиях часть взаимодействия может быть описана внешним потенциалом?

Рассмотрим взаимодействие электрона с некоторым объектом (детали которого не существенны), рождающим

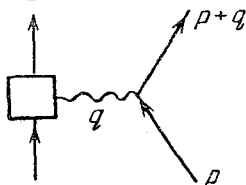


Рис. 30-1.

виртуальные фотоны, причем амплитуда рождения виртуального фотона с импульсом  $q$  и поляризацией  $\mu$  равна  $A_\mu(q)$ . Тогда матрица, описывающая взаимодействие, изображенное на рис. 30-1, равна

$$\int \frac{1}{\hat{p} + \hat{q} - m} \gamma_\mu \frac{1}{\hat{p} - m} A_\mu(q) \frac{d^4q}{(2\pi)^4}.$$

Здесь  $p+q$  — «истинный» 4-импульс электрона, поглотившего фотон.

Источник может испустить два, три или четыре фотона. Пропагатор, соответствующий поглощению двух фотонов, имеет вид

$$\iint \frac{1}{\hat{p} + \hat{q}_1 + \hat{q}_2 - m} \gamma_\nu \frac{1}{\hat{p} + \hat{q}_1 - m} \gamma_\mu \frac{1}{\hat{p} - m} \times \\ \times f_{\mu\nu}(q_1, q_2) \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4},$$

где  $f_{\mu\nu}(q_1, q_2)$  — амплитуда испускания двух фотонов, и т. д.

Важную роль играют источники, состояние которых не изменяется в результате испускания первого фотона. Это означает, что

$$f_{\mu\nu}(q_1, q_2) = A_\mu(q_1) A_\nu(q_2).$$

Для подобных источников амплитуда излучения второго фотона не зависит от того, был ли испущен первый фотон или нет.

Очевидно, что одно из требований сводится к тому, что источник остается в прежнем состоянии после эмиссии первого фотона. Так, например, у тяжелой частицы отдача при излучении фотона оказывается пренебрежимой.

В качестве другого, более тонкого, примера рассмотрим большой магнит, содержащий много электронов. Отдельный электрон не может быть источником обычного внешнего магнитного поля, поскольку примерно в половине случаев спин электрона переворачивается при испускании виртуального фотона. Но для куска железа дело обстоит иначе. Определим для единичного электрона две амплитуды  $x$  и  $y$ :

$x$  — амплитуда того, что он остается в том же состоянии, после того как магнитом испущен один фотон ( $x^2 \sim 1/2$ ),

$y$  — амплитуда перехода в другое состояние.

Пусть число электронов в образце железа равно  $N$ . Тогда амплитуда того, что электроны останутся в том же состоянии, равна  $Nx$ , а амплитуда изменения состояния электрона равна  $y$ , поскольку переворот спина дает возможность идентифицировать отдельный («виновный») электрон. Соответствующие вероятности равны  $(xN)^2$  и  $Ny^2$ , так что амплитуда того, что образец остается в том же состоянии, эффективно оказывается в  $\sqrt{N}$  раз больше.

Только при этих условиях мы можем сказать, что источник рождает внешний потенциал. (Строго говоря, мы предполагаем, что амплитуда рождения трех фотонов равна  $A_\mu(q_1) A_\nu(q_2) A_\rho(q_3)$  и т. д. для произвольного числа.)

Полный пропагатор для электрона во внешнем поле оказывается равным

$$\frac{1}{\hat{p} - m} + \frac{1}{\hat{p} + \hat{q} - m} \hat{A}(q) \frac{1}{\hat{p} - m} +$$

$$+ \frac{1}{\hat{p} + \hat{q}_1 + \hat{q}_2 - m} \hat{A}(q_2) \frac{1}{\hat{p} + \hat{q} - m} \hat{A}(q_1) \frac{1}{\hat{p} - m}$$

плюс аналогичные члены высших порядков (подразумевается интегрирование), поскольку электрон может поглотить любое число фотонов.

Этот ряд можно просуммировать. Мы покажем два способа.

Во-первых, «действительный» импульс

$$\hat{p} + \hat{q}_1 + \dots = \hat{P}$$

будем считать оператором, меняющим свое значение после действия  $\hat{a}$ , где

$$\hat{a} \equiv \hat{A}(q) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}.$$

Тогда вместо исходного получаем ряд

$$\frac{1}{\hat{P} - m} + \frac{1}{\hat{P} - m} \hat{a} \frac{1}{\hat{P} - m} + \dots,$$

являющийся разложением  $1/(\hat{P} - m - \hat{a})$ .

Другой путь таков. Рассмотрим диаграммы рис. 30-2. В каждой диаграмме есть «последний» фотон. Какова

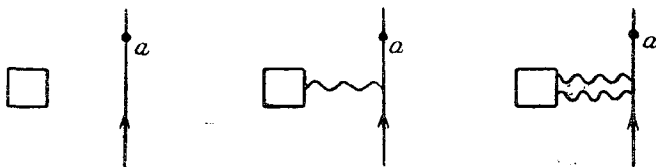


Рис. 30-2.

амплитуда  $\Psi$  того, что электрон находится в состоянии  $a$  после поглощения последнего фотона? Здесь  $\Psi$  также есть амплитуда состояния, возникающего в результате поглощения всех фотонов, за исключением данного

конечного числа. Поэтому выражение  $[1/(\hat{p}-m)] \hat{a}\Psi$  (где  $\Psi$  — амплитуда состояния перед поглощением «последнего» фотона,  $\hat{a}$  — амплитуда поглощения конечного фотона,  $1/(\hat{p}-m)$  — пропагатор между двумя поглощениями) плюс амплитуда  $\varphi$  того, что электрон движется без поглощения фотона, снова равна

$$\Psi = \frac{1}{\hat{p}-m} \hat{a}\Psi + \varphi,$$

где

$$(\hat{p}-m)\varphi = 0.$$

Поэтому

$$(\hat{p}-m-\hat{a})\Psi = 0.$$

Иными словами, если  $\varphi_n$  есть амплитуда электрона после поглощения  $n$  фотонов, то

$$\varphi_{n+1} = \frac{1}{\hat{p}-m} \hat{a}\varphi_n$$

и

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n = \varphi_0 + \frac{1}{\hat{p}-m} \hat{a}\Psi.$$

**Мезонная теория.** В настоящее время нет количественной мезонной теории. Современная модель основана на аналогии с электродинамикой (табл. 30-1). Эта теория, несомненно, является порождением человеческого ума! Она неверна, поскольку природа более изобретательна.

При наличии желания можно нарисовать диаграммы, соблюдая правильную бухгалтерию для учета сохранения заряда. Однако диаграммы соответствуют теории возмущений, и, поскольку  $g^2 \simeq 15$  (а не  $1/137$ ), каждый последующий член оказывается более важным, чем ему предшествующий!

Взаимодействие  $\gamma_5$  называется псевдоскалярным (ПС). Также возможна связь  $(\gamma_5 \hat{q})$  — псевдовекторная (ПВ). Однако против ПВ-взаимодействия существует предубеждение — оно не может быть перенормировано, так как каждый последующий порядок теории возмущений рас-

Т а б л и ц а 30-1

	Мезонная теория	Электродинамика
Пропагатор	нуклон $\frac{1}{\hat{p} - m_N}$	электрон $\frac{1}{\hat{p} - m_e}$
	пион (спин 0) $\frac{1}{q^2 - m_\pi^2}$	фотон (спин 1) $-\frac{1}{q^2}$
Связь	$\sqrt{4\pi}g\bar{\Psi}_N\gamma_5\varphi_\pi\Psi_N$	$\sqrt{4\pi}e\bar{\Psi}_e\gamma_\mu A_\mu\Psi_e$

ходится сильнее предыдущего из-за лишней степени импульса в числителе.

Возникает впечатление, что если бы теория была в основных чертах верной, то эксперимент уже дал бы нам некоторые намеки на структуру правильных приближений.

### 31. ТЕОРИЯ $\beta$ -РАСПАДА

Мы рассмотрели электродинамику. Кроме нее, количественные вычисления могут быть произведены только для  $\beta$ -распада. Он впервые был наблюден в виде реакции  $N \rightarrow P + e + \bar{\nu}$  ( $\bar{\nu}$  обозначает антинейтрино), протекающей в ядре. Вы уже слышали о нейтрино. Его существование было постулировано для того, чтобы обеспечить сохранение энергии, импульса и спина. Нейтрино имеет массу 0 и спин  $1/2$ .

Примерно в 1934 году Ферми предположил, что амплитуда такого перехода может быть написана в виде

$$g(\Psi_N\Psi_P\Psi_e\Psi_\nu),$$

где  $\Psi$  есть волновая функция соответствующей частицы. Поскольку в этом выражении нет производных от  $\Psi$ , то для определения энергетического спектра электрона достаточно вычислить плотность конечных состояний. (Сначала казалось, что этот рецепт не соответствует эксперименту. Поэтому Конопинский и Уленбек пред-

положили, что для описания опытных данных следует ввести производные от волновых функций. Однако все эксперименты были ошибочны, поскольку не было принято во внимание рассеяние электронов назад в фольге, образующей источник. Впоследствии мисс Ву использовала для опытов все более тонкие фольги и исключила этот эффект. Оказалось, что Ферми был прав. Так кончилась история с Конопинским и Уленбеком.)

Возникает следующий очевидный вопрос: поскольку каждый спинор имеет четыре компоненты, то какую из них использовать во взаимодействии? Всего имеется 256 возможностей. С физической точки зрения вопрос сводится к зависимости от спина частиц. Прежде всего следует найти комбинации, инвариантные относительно вращений и лоренцевых преобразований.

Одна из возможностей

$$G_S (\bar{\Psi}_P \Psi_N) (\bar{\Psi}_e \Psi_\nu)$$

известна как скалярная связь. Другую возможность дает векторная связь

$$G_V (\bar{\Psi}_P \gamma_\mu \Psi_N) (\bar{\Psi}_e \gamma_\mu \Psi_\nu),$$

также являющаяся инвариантной. (Именно ее предложил Ферми в качестве примера.)

Можно продолжить этот ряд дальше. Используя антисимметричный тензор второго ранга

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu),$$

мы можем построить тензорную связь

$$G_T (\bar{\Psi}_P \sigma_{\mu\nu} \Psi_N) (\bar{\Psi}_e \sigma_{\mu\nu} \Psi_\nu).$$

Кроме того, имеются:

$$G_A (\bar{\Psi}_P \gamma_\mu \gamma_5 \Psi_N) (\bar{\Psi}_e \gamma_\mu \gamma_5 \Psi_\nu)$$

— аксиальная векторная связь и

$$G_P (\bar{\Psi}_P \gamma_5 \Psi_N) (\bar{\Psi}_e \gamma_5 \Psi_\nu)$$

— псевдоскалярная связь.



Истинная связь может быть представлена произвольной комбинацией этих пяти выражений. При этом мы предположили свойство инвариантности относительно отражений (сохранение четности).

Например, выражение

$$G'_S(\bar{\Psi}_P \gamma_5 \Psi_N)(\bar{\Psi}_e \Psi_\nu)$$

инвариантно относительно вращений и лоренцевых преобразований, но меняет знак при отражениях. То же самое справедливо для остальных взаимодействий, если в одну из скобок ввести лишнюю  $\gamma_5$ . Если использовать комбинацию связей, меняющих и не меняющих знак при отражениях, то четность будет нарушаться. Вследствие этого такие связи не рассматривались до тех пор, пока не возникли трудности с распадом  $K^+$ -мезонов (загадка  $\tau-\theta$ ).  $K^+$ -мезоны распадаются на  $2\pi$  и  $3\pi$ , причем четности конечных состояний отличаются друг от друга. Ли и Янг предложили несколько экспериментов для того, чтобы выяснить, является ли это очевидное отсутствие сохранения четности типичным для слабых распадов. Согласно опыту Ву с  $\text{Co}^{60}$  (см. лекцию 7) электроны вылетают преимущественно назад по отношению к направлению спина ядер. Это означает, что можно связать вращение с определенным направлением в пространстве, вследствие чего симметрия отражения оказывается нарушенной. Математически отсутствие сохранения четности в  $\beta$ -распаде означает, что к обычным взаимодействиям следует добавить связи, меняющие знак при отражениях. Если коэффициенты  $G$  действительны, то теория инвариантна относительно отражения времени. Однако сразу после ниспровержения четности возникли сомнения в справедливости инвариантности временного отражения. Поэтому рассматривались десять комплексных  $G$ , т. е. двадцать независимых констант.

Следующее предложение было сделано Ли и Янгом, а также, независимо, Ландау и Саламом. Идея состоит в том, что эффект несохранения четности обусловлен нейтрино, которое должно всегда вращаться налево, т. е. против часовой стрелки. (Первоначально они предположили вращение направо, что оказалось неверным.) Напомним теперь, что при обсуждении релятивистских частиц со спином  $1/2$  мы установили, что простейшее представле-

ние приводит к двухкомпонентной амплитуде, удовлетворяющей уравнению

$$(E - \sigma \cdot \mathbf{P})u = 0,$$

или

$$(E + \sigma \cdot \mathbf{P})u = 0.$$

Ли и Янг предположили, что нейтрино может существовать только в одном из этих состояний. Уравнение для нейтрино оказалось таким:

$$(E + \sigma \cdot \mathbf{P})u = 0.$$

Напомним, что для электрона

$$(E - \sigma \cdot \mathbf{P})u = mv,$$

$$(E + \sigma \cdot \mathbf{P})v = mi,$$

если настаивать на уравнении первого порядка. Ясно, однако, что  $v$  удовлетворяет также уравнению второго порядка

$$(E - \sigma \cdot \mathbf{P})(E + \sigma \cdot \mathbf{P})v = m^2v.$$

Гелл-Манн и я предположили, что электрон также следует представлять двухкомпонентным спинором  $v$ . Тогда взаимодействие  $\beta$ -распада состоит только из двухкомпонентных волновых функций  $v$ . Единственная релятивистски-инвариантная комбинация, не включающая градиентов, имеет вид

$$G (\bar{v}_p \sigma_\mu v_N) (\bar{v}_e \sigma_\mu v_\nu) \quad \sigma_4 = 1, \quad \sigma_{1,2,3} = \text{матрицы Паули.}$$

Та же самая идея была высказана, вероятно, несколько раньше, Маршаком и Сударшаном.

Таким образом, мы приходим к единственной теории  $\beta$ -распада с одной лишь константой взаимодействия  $G$ . В то время, когда она была предложена, эта теория противоречила установленным результатам по крайней мере трех опытов, которые впоследствии оказались неверными.

У меня был соблазн изложить квантовую электродинамику на основе двухкомпонентных волновых функций. Основная трудность заключается в том, что вы не смогли бы тогда использовать современную литературу. По этой причине мы также запишем  $\beta$ -взаимодействие в четырех-

компонентном представлении. В принятом нами представлении  $\gamma$ -матриц

$$i\gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$a = \frac{1 + i\gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда, если

$$\Psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

где  $u$  и  $v$  — двухкомпонентные волновые функции, то

$$a\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}.$$

Подобным образом

$$\bar{a} = \frac{1 - i\gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\bar{a}\Psi = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Операторы  $a$  и  $\bar{a}$  являются проекционными. Вы можете проверить, что

$$a^2 = a, \quad \bar{a}^2 = \bar{a}, \quad a\bar{a} = \bar{a}a = 0, \quad a + \bar{a} = 1,$$

причем  $a$  проектирует на  $v$  компоненту  $\Psi$ . Поэтому в четырехкомпонентной записи взаимодействие принимает вид

$$G(\bar{a}\bar{\Psi}_P\gamma_\mu a\Psi_N)(\bar{a}\bar{\Psi}_e\gamma_\mu a\Psi_\nu).$$

Поскольку  $\bar{a}\gamma_\mu = \gamma_\mu a$  и  $aa = a$ , то это выражение упрощается:

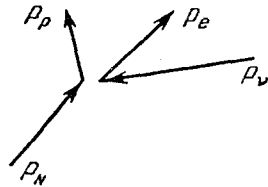
$$G(\bar{\Psi}_P\gamma_\mu a\Psi_N)(\bar{\Psi}_e\gamma_\mu a\Psi_\nu).$$

Спустя 23 года мы вернулись назад к Ферми!

Правило Ферми модифицировано заменой каждого  $\Psi$  на  $a\Psi$ . Потребовалось 23 года для того, чтобы найти  $a$ . Легко проверить, что если произвести эту подстановку во всех возможных  $\beta$ -связях, то скалярное, тензорное и псевдоскалярное взаимодействия обращаются в нуль, а векторное и аксиальное приводят к написанному выражению. В историческом плане следует сказать, что Салам, Ландау, Ли и Янг предположили, что волновую функцию нейтрино следует всегда умножать на  $a$ . Затем я предположил то же самое для электрона и мюона, но сомневался относительно нейтрона и протона, поскольку считал, что некоторые эксперименты неправильны. Наконец, Маршак и Сударшан и мы с Гелл-Манном предложили общее правило замены каждого  $\Psi$  на  $a\Psi$ .

Выясним теперь физическое содержание такой теории. С этой целью рассмотрим распад поляризованного нейтрона. Для простоты пренебрежем движением нуклонов (устремим массу нуклона  $M \rightarrow \infty$ ) и спином протона. Амплитуда  $\mathfrak{M}$  этого процесса равна

$$\mathfrak{M} = G (\bar{U}_p \gamma_\mu a U_N) (\bar{U}_e \gamma_\mu a U_\nu).$$



Нам нужно вычислить произведение  $\mathfrak{M}^* \mathfrak{M}$ , просуммированное по двум спиновым состояниям протона. Используя проекционные операторы (см. лекцию 24)

$$\frac{1 + i\hat{W}_N \gamma_5}{2} \quad \text{и} \quad \frac{1 + i\hat{W}_e \gamma_5}{2}$$

для спинов нейтрона и электрона, получаем

$$\sum_{\text{спин протона}} \mathfrak{M}^* \mathfrak{M} = G^2 \text{Sp} \left\{ \gamma_\rho a (\hat{p}_\rho + M) \gamma_\mu a (\hat{p}_N + M) \frac{1 + i\hat{W}_N \gamma_5}{2} \right\} \times \\ \times \text{Sp} \left\{ \gamma_\rho a (\hat{p}_e + m) \frac{1 + i\hat{W}_e \gamma_5}{2} \gamma_\mu a \hat{p}_\nu \right\}.$$

Рассмотрим сначала шпур, содержащий нуклонные переменные \*). Избавимся от одной из  $a$ , пользуясь тем, что  $a^2 = a$  и  $\bar{a}a = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \text{Sp} \left\{ \gamma_\rho a (\hat{p}_\rho + M) \gamma_\mu a (\hat{p}_N + M) \frac{1 + i\hat{W}_N \gamma_5}{2} \right\} = \\ = \frac{1}{2} \text{Sp}_i [\gamma_\rho \hat{p}_\rho \gamma_\mu (\hat{p}_N + M) (1 + i\hat{W}_N \gamma_5) \bar{a}]. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$(1 + i\hat{W}_N \gamma_5) \bar{a} = (1 - W_N) \bar{a}.$$

Поскольку шпур нечетного числа  $\gamma$ -матриц обращается в нуль, у нас остается

$$\frac{1}{2} \text{Sp} [\gamma_\rho \hat{p}_\rho \gamma_\mu (\hat{p}_N - M \hat{W}_N) (1 - i\gamma_5)].$$

Выберем за ось  $z$  направление поляризации нейтрона. В пределе  $M \rightarrow \infty$  получаем

$$\frac{M^2}{2} \text{Sp} [\gamma_\rho \gamma_z \gamma_\mu (\gamma_z + \gamma_x) (1 - i\gamma_5)].$$

Используя формулу

$$\frac{1}{4} \text{Sp} \hat{a} \hat{b} \hat{c} \hat{d} = (a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c),$$

получаем

$$\frac{1}{4} \text{Sp} \gamma_\rho \gamma_z \gamma_\mu \gamma_z = 2\delta_{\rho z} \delta_{\mu z} - \delta_{\rho\rho},$$

$$\frac{1}{4} \text{Sp} \gamma_\rho \gamma_z \gamma_\mu \gamma_x = \delta_{\rho z} \delta_{\mu x} + \delta_{\rho x} \delta_{\mu z}.$$

(Легко проверить эти формулы в каждом частном случае для  $\mu$  и  $\rho = t, x, y, z$ .) Кроме этого,

$$\text{Sp} \gamma_\rho \gamma_z \gamma_\mu \gamma_z \gamma_5 = 0,$$

$$\frac{1}{4} \text{Sp} \gamma_\rho \gamma_z \gamma_\mu \gamma_x \gamma_5 = -\delta_{\rho x} \delta_{\mu y} + \delta_{\rho y} \delta_{\mu x}.$$

\*) Заметим, что обычная нормировка  $UU = 2m$  не может быть использована для нейтрино. Однако нас интересует шпур. Здесь существенно лишь то, что в пределе  $m \rightarrow 0$  проекционный оператор переходит в  $\hat{p}$ .

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \text{Sp} [\gamma_p \gamma_t \gamma_\mu (\gamma_t + \gamma_x) (1 - i\gamma_5)] = \\ = 2\delta_{\mu t} \delta_{pt} - \delta_{\mu p} + \delta_{\mu t} \delta_{px} + \delta_{\mu x} \delta_{pt} - i(\delta_{\mu x} \delta_{py} - \delta_{\mu y} \delta_{px}). \end{aligned}$$

Шпур, содержащий электрон и нейтрино, может быть также приведен к виду

$$\frac{1}{2} \text{Sp} [\gamma_\mu \hat{p}_\nu \gamma_p (\hat{p}_e - m\hat{W}_e) (1 - i\gamma_5)].$$

Таким образом, нам нужно вычислить выражение

$$\text{Sp} [\gamma_p \gamma_t \gamma_\mu (\gamma_t + \gamma_x) (1 - i\gamma_5)] \text{Sp} [\gamma_\mu \hat{p}_\nu \gamma_p (\hat{p}_e - m\hat{W}_e) (1 - i\gamma_5)].$$

Подставляя полученное выше выражение для левого шпура, находим

$$\begin{aligned} 4 \text{Sp} [(2\gamma_t \hat{p}_\nu \gamma_t - \gamma_\mu \hat{p}_\nu \gamma_\mu + \gamma_t \hat{p}_\nu \gamma_x + \gamma_x \hat{p}_\nu \gamma_t - \\ - i\gamma_x \hat{p}_\nu \gamma_y + i\gamma_y \hat{p}_\nu \gamma_x) (\hat{p}_e - m\hat{W}_e) (1 - i\gamma_5)]. \end{aligned}$$

После вычисления шпура это выражение сводится к

$$16 (E_\nu + P_\nu) (E_e - MW_{e\nu}).$$

В системе покоя электрона

$$W_{e\nu} = 0, \quad W_e = \varepsilon (\mathbf{P}_e / P_e),$$

где  $\varepsilon = +1$  для электрона, вращающегося направо, и  $\varepsilon = -1$  для электрона, вращающегося налево. Поскольку  $W_e$  преобразуется как 4-вектор, мы получаем в лабораторной системе

$$W_{e\nu} = \gamma (0 + v_e \varepsilon) = \varepsilon \frac{E_e}{m} v_e.$$

Наконец, если обозначить через  $\theta$ , угол между спином нейтрона и направлением вылета антинейтрино, то мы получим

$$\sum \mathfrak{M} \mathfrak{M} = 4G^2 M^2 E_e E_\nu (1 + \cos \theta) (1 - \varepsilon v_e).$$

Эта формула говорит нам, что:

вероятность вылета электронов, вращающихся налево, =  

$$= \frac{1 + v_e/c}{2} \simeq 1 \quad \text{при } v \simeq c,$$

вероятность вылета электронов, вращающихся направо, =  

$$= \frac{1 - v_e/c}{2} \simeq 0 \quad \text{при } v \simeq c.$$

Следовательно, электроны  $\beta$ -распада должны иметь левую поляризацию. Нейтрино должны всегда вращаться налево (антинейтрино — направо). Обратите внимание на то, что релятивистские электроны ведут себя подобно нейтрино, поскольку их массой покоя можно пренебречь.

В то время как электроны испускаются изотропно, антинейтрино вылетают преимущественно вдоль направления спина нейтрона с законом углового распределения  $(1 + \cos \theta)$ .

Как можно видеть, эти результаты находятся в согласии с опытом  $\text{Co}^{60} \rightarrow \text{Ni}^{60}$ . Спины ядер соответственно равны 5 и 4, так, что полный момент меняется на 1. Антинейтрино вылетает преимущественно вдоль спина ядра  $\text{Co}^{60}$ , унося  $1/2$  единицы момента, ориентированного вдоль его направления движения. Для сохранения полного момента электрон должен поэтому вылетать назад (рис. 31-1).

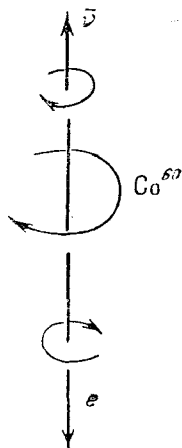


Рис. 31-1.

Энергетический спектр электронов  $dN$  зависит лишь от плотности конечных состояний (лекция 16):

$$dN \simeq (E_e - E_0)^2 P_e E_e dE_e,$$

где

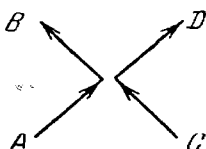
$$E_0 = M_N - M_P.$$

Скорость распада нейтрона равна

$$\frac{1}{\tau} = \frac{G^2}{(2\pi)^3} \int_0^{E_0} (E_e - E_0)^2 P_e E_e dE_e.$$

32. СВОЙСТВА  $\beta$ -ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Рассмотрим процесс  $A + C \rightarrow B + D$ ,

$$\begin{aligned} \text{Амп.} &= (BA)(\bar{D}C) = \\ &= (\bar{v}_B \sigma_\mu v_A)(\bar{v}_D \sigma_\mu v_C), \end{aligned}$$


где  $v$  — двухкомпонентные волновые функции,  $\sigma_i = 1$ ,  $\sigma_{x,y,z}$  — матрицы Паули. Распад нейтрона  $N \rightarrow P + e + \bar{\nu}$  описывается выражением типа  $N + \nu \rightarrow P + e$ . Если разложить амплитуду по компонентам  $v$ , то получим

$$(BA)(\bar{D}C) = 2(B_1 D_2 - B_2 D_1)^*(A_1 C_2 - A_2 C_1),$$

где

$$v_A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \text{ и т. д.}$$

Перестановка  $A \leftrightarrow C$  или  $B \leftrightarrow D$  меняет знак всего выражения. Поэтому

$$(\bar{v}_B \sigma_\mu v_A)(\bar{v}_D \sigma_\mu v_C) = -(\bar{v}_D \sigma_\mu v_A)(\bar{v}_B \sigma_\mu v_C).$$

Это выражение равно также  $2(\bar{v}_B v_A)(\bar{v}_D v_B)$ , где  $v_B = \sigma_y \bar{v}_B$ . Нетрудно проверить, что  $v_B$  есть волновая функция античастицы  $\bar{B}$ . В четырехкомпонентном представлении получаем

$$\begin{aligned} (BA)(\bar{D}C) &= (\bar{\Psi}_B \gamma_\mu a \Psi_A)(\bar{\Psi}_D \gamma_\mu a \Psi_C) = \\ &= (\bar{\Psi}_D \gamma_\mu a \Psi_A)(\bar{\Psi}_B \gamma_\mu a \Psi_C) = 2(\bar{\Psi}_C a \Psi_A)(\bar{\Psi}_D \bar{a} \Psi_B), \end{aligned}$$

где

$$a = \frac{1 + i\gamma_5}{2}.$$

Последнее выражение является наиболее простым для вычислений. В него  $B$  и  $C$  входят как античастицы. Так, например, амплитуда  $\beta$ -распада нейтрона равна

$$\mathfrak{M} = 2G(\bar{U}_p a U_N)(\bar{U}_e \bar{a} U_P).$$



Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{\text{спин протона}} \mathfrak{M} \mathfrak{M}^* &= 4G^2 \text{Sp} \left\{ \bar{a}(-\hat{p}_e) a(\hat{p}_N + M) \frac{1 + i\hat{W}_N \gamma_5}{2} \right\} \times \\ &\times \text{Sp} \left\{ a(\hat{p}_e + m) \frac{1 + i\hat{W}_e \gamma_5}{2} \bar{a}(-\hat{p}_p + M) \right\} = \\ &= \frac{G^2}{4} \text{Sp} [\hat{p}_e (\hat{p}_N - M \hat{W}_N)] \text{Sp} [(\hat{p}_e - m_e \hat{W}_e) \hat{p}_p] = \\ &= 4G^2 [p_e (p_N - MW_N)] [(p_e - m_e W_e) p_p]. \end{aligned}$$

В пределе  $M \rightarrow \infty$  это сводится к

$$4G^2 M^2 E_e E_p (1 + \cos \theta_e) (1 - \varepsilon \nu_e).$$

Сравните эту выкладку с количеством усилий, необходимых при вычислении, исходя из выражения (лекция 28)

$$\mathfrak{M} = G (\bar{U}_p \gamma_\mu a U_N) (\bar{U}_e \gamma_\mu a U_\nu).$$

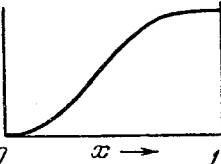
Мы предположили, используя соглашение о том, что электрон есть частица (движущаяся во времени вперед), что протон и нейтрон также являются частицами. При этом распределение нейтрино по углу имеет вид  $1 + \cos \theta$  по отношению к спине нейтрона, тогда как электроны вылетают изотропно. Если бы мы предположили, что протон и нейтрон выступают как античастицы (т. е. использовали связь  $(\bar{N}P)(\bar{\nu}\nu)$ ), то обнаружили бы, что нейтрино вылетают изотропно, а электроны — по закону  $1 + \cos \theta_e$ . В опытах Телегди и др. [13] были измерены угловые распределения электронов  $(1 + A \cos \theta_e)$  и нейтрино  $(1 + B \cos \theta_e)$  от поляризованных нейтронов. Результат

$$A = -0,09 \pm 0,03, \quad B = +0,88 \pm 0,15$$

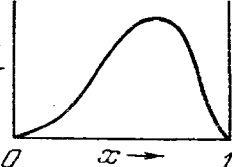
соответствует обычному соглашению о том, что  $N$  и  $P$  являются частицами.

Для описания  $\mu$ -распада следует ввести связь вида  $(\bar{\nu}_\mu)(\bar{\nu}\nu)$ , считая, что  $\mu^-$  есть частица, подобная электрону. Вычисляя энергетический спектр электронов, мы нахо-

дим (пренебрегая массой электрона по сравнению с его импульсом и массой мюона)

$$dN = 2x^2(3 - 2x)dx, \quad \frac{dN}{dx}$$


где  $x = P_e/P_m$ , а  $P_m = m_\mu/2$  есть максимальная энергия электрона. Если же считать  $\mu^-$  античастицей, то связь имеет вид  $(\bar{\mu}\nu)(\bar{e}\nu)$  и спектр электронов оказывается равным

$$dN = 12x^2(1 - x). \quad \frac{dN}{dx}$$


Данные опыта согласуются со спектром, соответствующим допущению, что  $\mu^-$  есть частица. Все частицы, вылетающие при  $\beta$ -распаде, — левовинтовые.

Оказывается, что константа связи для распадов нейтрона и мюона — одна и та же. Если мы запишем ее в виде  $\sqrt{8}G$  (для того, чтобы получить «старое»  $G$ ), то

$$GM_p^2 = (1,01 \pm 0,01) \cdot 10^{-5}.$$

(Масса протона введена для того, чтобы получить безразмерное выражение для  $G$ .) Мы говорим, что амплитуда перехода для  $\beta$ -распадных процессов пропорциональна  $\bar{J}J$ , где  $J$  есть сумма членов вида

$$J = \sum (BA), \quad \bar{B}A = \bar{\Psi}_B \gamma_\mu a \Psi_A$$

по различным комбинациям частиц  $A$ ,  $B$ . Какие же частицы сюда входят? До сих пор нам удалось определить часть этой суммы, которая не содержит странных частиц,

$$J = (\bar{e}\nu) + (\bar{N}P) + (\bar{\mu}\nu) + (\text{странные частицы}).$$

Перекрестный член  $(\bar{P}N)(\bar{e}\nu)$  соответствует распаду нейтрона,  $(\bar{\nu}\mu)(\bar{e}\nu)$  дает  $\mu$ -распад, а  $(\bar{\nu}\mu)(\bar{N}P)$  приводит к  $\mu$ -захвату. (Заметьте, что  $(\bar{A}B)^* = (BA)$ .)

Следует сказать еще одну вещь про  $\beta$ -распад. Рассмотрим снова распад нейтрона,

$$\mathfrak{M} = \sqrt{8} G \left\{ \bar{\Psi}_P \gamma_\mu \frac{1 + i\gamma_5}{2} \Psi_N \right\} (\bar{\Psi}_e \gamma_\mu a \Psi_\nu).$$

Обычно нейтрон и протон движутся очень медленно. Поэтому весьма полезно использовать нерелятивистское приближение. Запишем прежде всего

$$\bar{\Psi}_P \gamma_\mu \Psi_N = \frac{1}{2M} \bar{\Psi}_P (\hat{p}_P \gamma_\mu + \gamma_\mu \hat{p}_N) \Psi_N.$$

Если протон и нейтрон покоятся, то

$$\hat{p}_P = \hat{p}_N = M \gamma_4$$

и

$$\bar{\Psi}_P \gamma_\mu \Psi_N = \bar{\Psi}_P \Psi_N \delta_{\mu 4} = \begin{cases} 2M \delta_{\mu 4} & \text{спины } P \text{ и } N \text{ параллельны,} \\ 0 & \text{спины } P \text{ и } N \text{ антипараллельны.} \end{cases}$$

Эта часть взаимодействия носит имя Ферми.

Аналогично можно показать, что

$$\bar{\Psi}_P i \gamma_\mu \gamma_5 \Psi_N = \begin{cases} \bar{\Psi}_P \sigma_\mu \Psi_N & \mu = 1, 2, 3, \\ 0 & \mu = 4. \end{cases}$$

Соответствующий вклад связан с именами Гамова и Теллера. Довольно быстро было установлено, что взаимодействия Ферми недостаточно, поскольку оно не может изменить полный момент ядра. Поэтому Гамов и Теллер предложили добавить член, пропорциональный  $\sigma$ , который может уносить единицу момента.

Мы предположили, что три слагаемых тока, не содержащих странных частиц, имеют одинаковую амплитуду. Однако взаимодействие с  $\pi$ -мезонами изменит эффективную связь. Оказывается возможным добиться того, что вклад Ферми не меняется. Однако при этом член Гамова — Теллера следует умножить на 1,25 (ссылка [14]). Распад ядра  $O^{14}$  является  $0 \rightarrow 0$ -переходом, поэтому гамов-теллеровский вклад исчезает. Константа связи согласуется с полученной из времени жизни  $\mu$ -мезона с точностью до 5%. Недавно удивительное подтверждение теории было получено путем наблюдения  $\pi$ - $e$ -распада. Абсолютная скорость  $\pi$ - $\mu$ - и  $\pi$ - $e$ -распадов не может быть рассчитана. Однако можно вычислить их отношение. Распад  $\pi$ - $e$  был впервые обнаружен этим летом.

### 33. ИТОГИ КУРСА

Мы сформулировали правила для процессов, которые включают малое число частиц. Поскольку процессы, содержащие большое число частиц, могут быть поняты через фундаментальные процессы, мы, в определенном смысле, описали всю физику, сведя ее к правилам, приведенным в таблице 33-1.

Т а б л и ц а 33-1

	Частица	Множитель в амплитуде
Пропагатор	спин 0	$\frac{i}{p^2 - m^2}$
	спин $1/2$	$\frac{i}{\hat{p} - m}$
	фотон	$-\frac{i}{k^2}$
Электромагнитная связь	спин $1/2$	$-i (4\pi)^{1/2} e \bar{v} \hat{\epsilon} u$
	спин 0	$-i (4\pi)^{1/2} e (p_1 + p_2) \cdot \epsilon + i 4\pi e^2 \epsilon_1 \epsilon_2$
$\beta$ -связь		$\int J$

Эти правила следует дополнить интегрированием с весом  $d^4p/(2\pi)^4$  по всем промежуточным 4-импульсам, которые однозначно не определены кинематикой.

Замкнутым петлям соответствует шпур со знаком минус. Если есть тождественные частицы, то обменная амплитуда входит со знаком «+» для частиц целого спина и со знаком «-» для полуцелого спина. Замечание: Это последнее правило не является независимым от других правил. Оно необходимо для получения самосогласованных вероятностей. Если я употреблю знак «+» для спина  $1/2$ , то получу бессмысленные результаты. Однако у меня нет полного доказательства.

Для того чтобы овладеть этим материалом, вам следует попрактиковаться. Вы можете теперь самостоятельно рассчитывать многие физические задачи. Конечно, есть задачи, не входящие в круг ваших возможностей, как,

например, многоэлектронный атом. Все ответы содержатся в приведенных правилах, но вам следует научиться использовать их в нерелятивистской форме, соответствующей уравнению Шредингера. Вы также встретите трудности при чтении статей, основанных на формальной теории. Старайтесь, однако, сперва разобраться, в чем состоит физическая задача, а потом уже пытайтесь решить ее. Наконец, есть еще один раздел физики, не содержащийся в этих лекциях, — теория Чу—Лоу и дисперсионные соотношения. Это подход к тому, что, может быть, следует считать теорией поля сильных взаимодействий. В результате изучения процессов пион-нуклонного рассеяния и фоторождения пионов они нашли приближенную формулу для описания взаимодействия  $\pi$ -мезонов с нуклонами. Формула имеет вид

$$\frac{f}{\mu} \gamma_5 \hat{q}, \quad f^2 = 0,08$$

и работает в области не слишком больших энергий.

## ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ЧАСТИЦЫ \*)

Частица		Спин $J$	Странность $S$	$I$	$I_3$	Масса, МэВ
Гравитон	$g$	2				0
Фотон	$\gamma$	1				0
Лептоны	$e^-$	$1/2$				$0,510976 \pm 0,00007$
	$\mu^-$	$1/2$				$105,70 \pm 0,06$
	$\nu$	$1/2$				0
Мезоны	$\pi^\pm$	0	0	1	$\pm 1$	$139,63 \pm 0,06$
	$\pi^0$	0	0	1	0	$135,04 \pm 0,16$
	$K^+$	0	1	$1/2$	$1/2$	$494,0 \pm 0,2$
	$K^0$	0	1	$1/2$	$-1/2$	$497,9 \pm 0,6$

\*) В переводе опущены ссылки на источники оригинальных Любопытствующий читатель может обратиться к публикации [16],

Время жизни, сек	Канал распада	Относительная доля канала
стабилен		
стабилен		
стабилен $2,212 \pm 0,001 \times 10^{-8}$  стабильно	$e^- + \nu + \bar{\nu}$ $e^- + \gamma$ $e^- + e^+ + e^-$ $e^- + \nu + \bar{\nu} + e^+ + e^-$	$\sim 1$ $< 0,7 \times 10^{-6}$ $1 \times 10^{-5}$ $1,5 \pm 1,0 \times 10^{-5}$
$(2,56 \pm 0,005) \times 10^{-8}$  $< 4 \times 10^{-16}$ $(1,224 \pm 0,013) \times 10^{-8}$  $K_1^0: (1,00 \pm 0,038) \times 10^{-10}$  $K_2^0: 6,1 \begin{matrix} +1,6 \\ -1,1 \end{matrix} \times 10^{-8}$	$\mu^\pm + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \bar{\nu} \end{matrix} \right\}$ $e^\pm + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \bar{\nu} \end{matrix} \right\}$ $2\gamma$ $\pi^+ + \pi^- + \pi^+$ $\pi^+ + \pi^0 + \pi^0$ $\pi^+ + \pi^0$ $\mu^+ + \nu + \pi^0$ $e^+ + \nu + \pi^0$ $\mu^+ + \nu$ $\pi^0 + \pi^0$ $\pi^+ + \pi^-$ $\pi^0 + \pi^0 + \pi^0$ $\pi^0 + \pi^+ + \pi^-$ $\mu^\pm + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \bar{\nu} \end{matrix} \right\} + \pi^\mp$ $e^\pm + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \bar{\nu} \end{matrix} \right\} + \pi^\mp$	$\sim 1$  $(1,1 \pm 0,3) \times 10^{-4}$  $1$ $0,062 \pm 0,003$ $0,0215 \pm 0,003$ $0,25 \pm 0,02$ $0,039 \pm 0,005$ $0,051 \pm 0,008$ $0,58 \pm 0,02$ $\pm 0,08$ $0,37$ } $0,49 \pm 0,05$  $\sim 0,05$  $\sim 0,22$ } $0,45$ $\sim 0,22$ }
данных, помещенных в таблице «Фундаментальные частицы». содержащей обзор соответствующих работ.		

Частица		Спин $J$	Стран- ность $S$	$I$	$I_z$	Масса, МэВ
Барионы {	$p$	$1/2$	0	$1/2$	$1/2$	$938,213 \pm 0,01$
	$n$	$1/2$	0	$1/2$	$-1/2$	$939,506 \pm 0,01$
	$\Delta$	$1/2$	-1	0	0	$1115,36 \pm 0,14$
{	$\Sigma^+$	$1/2$	-1	1	1	$1189,40 \pm 0,20$
	$\Sigma^0$	$1/2$	-1	1	0	$1191,5 \pm 0,5$
	$\Sigma^-$	$1/2$	-1	1	-1	$1196,0 \pm 0,3$
{	$\Xi^0$	Фер- мион	-2	$1/2$	$1/2$	$1311 \pm 8,0$
	$\Xi^-$	Фер- мион	-2	$1/2$	$-1/2$	$1318,4 \pm 1,2$



*Продолжение*

Время жизни, сек	Канал распада	Относительная доля канала
стабилен		
$(1,04 \pm 0,13) \times 10^3$	$p + e^- + \nu$	1
$(2,505 \pm 0,086) \times 10^{-10}$	$p + \pi^-$	$0,60 \pm 0,03$
	$n + \pi^0$	$0,40 \pm 0,03$
	$p + e^- + \bar{\nu}$	$\sim 0,002$
	$p + \mu^- + \bar{\nu}$	$\sim 0,001$
$(0,81 \pm 0,06) \times 10^{-10}$	$n + \pi^+$	$0,46 \pm 0,05$
	$p + \pi^0$	$0,54 \pm 0,06$
	$n + e^+ + \nu$	$\sim 0,004$
	$n + \mu^+ + \nu$	$\sim 0,003$
	$\Delta + \text{лептоны}$	$< 0,002$
$< 0,1 \times 10^{-10}$	$\Delta + \gamma$	1
$(1,6 \pm 0,1) \times 10^{-10}$	$n + \pi^-$	99,6
	$p + e^- + \bar{\nu}$	$\sim 0,002$
	$p + \mu^- + \bar{\nu}$	$\sim 0,002$
	$\Delta + \text{лептоны}$	$< 0,001$
$1,5 \times 10^{-10}$ (1 событие)	$\Delta + \pi^0$	1 событие
$(1,28 \pm 0,35) \times 10^{-10}$	$\Delta + \pi^-$	$\sim 40$ событий

## ЛИТЕРАТУРА

1. *П. А. М. Дирак*, «Принципы квантовой механики», Физматгиз, М., 1960, глава I.
2. *R. P. Feynman*, Rev. Mod. Phys. **20**, 367 (1948). (Перевод в сб.: «Вопросы причинности в квантовой механике», ИЛ, 1955, стр. 167—207.)
3. *Д. Бом*, «Квантовая теория», «Наука», М., 1965.
4. *W. Pauli*, Phys. Rev. **58**, 716 (1940). (Перевод в книге: *В. Паули*, «Релятивистская теория элементарных частиц», ИЛ, 1947, стр. 72.)
5. *G. Luders, V. Zumino*, Phys. Rev. **110**, 1450 (1958).
6. *W. Pauli, V. Weisskopf*, Helv. Phys. Acta **7**, 709 (1934).
7. *M. Gell-Mann*, Phys. Rev. **106**, 1296 (1957).
8. *R. H. Dalitz*, Physical Soc. (London), Reports on Progress in Physics **20**, 163 (1957).
9. *R. P. Feynman*, Phys. Rev. **76**, 749 (1949). (Перевод в сб.: «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954, стр. 138.)
10. *R. P. Feynman*, Phys. Rev. **74**, 939 (1948).
11. *R. P. Feynman*, Phys. Rev. **76**, 769 (1949). (Перевод в НРКЭ, стр. 161.)
12. *C. M. Sommerfield*, Phys. Rev. **107**, 328 (1957).
13. *V. L. Telegdi et al.*, Phys. Rev. **110**, 1214 (1958).
14. *R. P. Feynman and M. Gell-Mann*, Phys. Rev. **109**, 193 (1958).
15. *Л. Шифф*, «Квантовая механика», ИЛ, 1957.
16. *A. H. Rosenfeld, W. H. Barkas*, В «Proc. of 1960 Annual Intern. Conference on High Energy Physics at Rochester», Rochester, 1960, стр. 878.
17. *N. Barash-Schmidt et al.*, Rev. Mod. Phys. **48**, № 2, part II, April (1976), S21—S35.

## ПОСЛЕСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

За 15 лет, прошедших со времени написания этой книги, физика элементарных частиц обогатилась большим объемом опытных данных, а также рядом новых теоретических концепций. Некоторое представление о современном состоянии наблюдаемых фактов дает приводимая ниже таблица «Частицы 1976». Ее первый раздел «Стабильные частицы» может быть непосредственно сравнен с фейнмановской таблицей «Фундаментальные частицы», основанной на данных 1959—1960 гг. Как видно из подобного сравнения, разница здесь в основном количественная. Качественное отличие сводится всего лишь к трем «пунктам»:  $\eta$ -мезону,  $\Omega^-$ -гиперону, а также наличию двух нейтрино ( $\nu_\mu, \nu_e$ ) вместо одного.

Хотя каждый из этих пунктов представляет собой существенное продвижение вперед, а описание соответствующего открытия — увлекательную историю, в которой тесно переплетаются теоретические находки и тонкие эксперименты, тем не менее более серьезный прогресс связан с наличием второго раздела в «Частицах 1976» — перечня ядерно-нестабильных частиц или резонансов, не имевшего аналога в «Фундаментальных частицах» 1958—1960 гг.

Раздел резонансов составлен нами также на основании тех же «Таблиц свойств частиц» [17], которые послужили основой для раздела «Стабильные частицы». Однако здесь мы опустили не только каналы распада, доля которых составляет менее 1%, но и некоторые не очень хорошо уста-

новленные объекты с большими массами. Таким образом, этот раздел наших таблиц носит в основном иллюстративный характер.

Однако даже беглого взгляда на «Частицы 1976» достаточно для того, чтобы представить, что в современной физике частиц резонансы играют очень важную, если не сказать — определяющую — роль. Число резонансных состояний (изотопических мультиплетов) почти в десять раз превышает число ядерно-стабильных адронных состояний.

То, что 15 лет назад представлялось экзотическим исключением (к 1960 году был известен пион-нуклонный резонанс  $I=3/2$ ,  $J=3/2$  — в современных обозначениях  $\Delta(1232)$ ) и не включалось в таблицы частиц, в наши дни составляет основной объект экспериментального исследования и является источником новых идей и глубоких качественных закономерностей. Достаточно напомнить здесь, что на основе первых, обнаруженных в начале 60-х годов, резонансов возникла модель унитарной  $SU(3)$  (или трехкварковой) симметрии, приведшая к предсказанию и открытию  $\Omega^-$ -гиперона со странностью  $S=-3$ , а также концепция полюсов и траекторий Редже, связавшая в семейства стабильные адроны и резонансы, отличающиеся лишь моментом и имеющие одинаковыми все остальные квантовые числа.

В наши дни обнаружение мезонных резонансных состояний  $J/\psi(3100)$  и  $\psi(3700)$  (см. конец раздела «Мезонная таблица» в «Частицах 1976») тесно связано с установлением нового квантового числа «очарования» (или «чарма») и соответствующей модификации симметричных схем  $[SU(3) \rightarrow SU(4)]$  для адронов.

Однако, несмотря на существенный прогресс в понимании качественных и симметричных закономерностей мира частиц, основа его количественного описания — квантовая теория поля — за истекший период не подверг-

лась каким-либо глубоким трансформациям. Во всяком случае, не изменились существенно способы анализа электромагнитных и слабых взаимодействий, которым на 90% посвящена книга Фейнмана. Здесь и поныне основным методом является теория возмущений с ее главным атрибутом и символом — диаграммой Фейнмана. Изложение основ метода фейнмановских диаграмм, метода широко используемого сейчас не только в теории частиц, но и в нерелятивистской квантовой задаче многих тел, устами его создателя представляет поэтому не только исторический интерес, но, как мы уже упоминали в предисловии, имеет актуальную педагогическую ценность.

## ЧАСТИЦЫ 1976

Использованы данные из «Таблицы свойств частиц» [17], опубликованной в апреле 1976 года. Приведены основные каналы (моды) распадов, относительный вклад которых превышает 1%. В скобках указаны ошибки, выраженные в единицах последней значащей цифры основного числа. Например, масса электрона в МэВ:  $0,5110034 (14) \equiv 0,5110034 \pm 0,0000014$ .

В таблицах приняты обозначения:  $M$  — масса,  $I$  — изоспин,  $J$  — спин,  $\tau$  — время жизни,  $S$  — странность,  $P$  — четность,  $\Gamma$  — полная ширина.

### 1. Стабильные частицы.

[Под «стабильными» здесь подразумеваются частицы, стабильные относительно сильных взаимодействий. Их времена жизни много больше характерного ядерного времени

$$\tau_{\text{яд}} = \frac{\hbar}{m_{\pi}} \approx 0,5 \cdot 10^{-23} \text{ сек.}$$

### ЛЕПТОНЫ

Частица	$J$	$M$ , МэВ	$\tau$ , сек	Распады	
				канал	доля, %
$\gamma$	1	0	$\infty$	—	—
$\nu_e, \nu_{\mu}$	$1/2$	0	$\infty$	—	—
$e$	$1/2$	$0,5110034 (14)$	$\infty$	—	—
$\mu$	$1/2$	$105,65948 (35)$	$2,197134 (77) \cdot 10^{-6}$	$e\nu$	100

МЕЗОНЫ

Частица	$I (J^P)$	$S$	$M$ , МэВ	$\tau$ , сек	Распады	
					канал	доля, %
$\pi^\pm$ $\pi^0$	1 (0 <sup>-</sup> )	0	139,5688 (64)	$2,6030 (23) \cdot 10^{-8}$	$\mu\nu$	100
	1 (0 <sup>-</sup> )	0	134,9645 (74)	$0,828 (57) \cdot 10^{-16}$	$\gamma\gamma$	98,85
					$\gamma e^+e^-$	1,15
$K^\pm$	$1/2 (0^-)$	$\pm 1$	493,707 (37)	$1,2371 (26) \cdot 10^{-8}$	$\mu\nu$	63,61
					$\pi\pi^0$	21,05
					$\pi\pi^-\pi^+$	5,59
					$\pi\pi^0\pi^0$	1,73
					$\mu\pi^0\nu$	3,20
					$e\pi^0\nu$	4,82
$K^0$ $K_S^0$ $K_L^0$	$1/2 (0^-)$	1	497,70 (13)	$=50\%K_S+50\%K_L$ $0,8930 (23) \cdot 10^{-10}$ $5,181 (40) \cdot 10^{-8}$	$\pi^+\pi^-$	68,67
	$1/2 (0^-)$				$\pi^0\pi^0$	31,33
	$1/2 (0^-)$				$\pi^0\pi^0\pi^0$	21,4
					$\pi^+\pi^-\pi^0$	12,25
					$\pi\mu\nu$	27,1
					$\pi e\nu$	39,0
					$\pi e\nu\gamma$	1,3
$\eta$	0 (0 <sup>-</sup> )	0	548,8 (6)	$0,79 (11) \cdot 10^{-18}$	$\gamma\gamma$	38,0
					$\pi^0\gamma\gamma$	3,1
					$3\pi^0$	29,9
					$\pi^+\pi^-\pi^0$	23,6
					$\pi^+\pi^-\gamma$	4,89

## БАРИОНЫ

Частица	$I (J^P)$	$S$	$M$ , МэВ	$\tau$ , сек	Распады	
					канал	доля, %
$p$	$1/2 (1/2^+)$	0	938,2796 (27)	$\infty$		
$n$	$1/2 (1/2^+)$	0	939,5731 (27)	918 (14)	$p\pi^-$	100
$\Lambda$	$0 (1/2^+)$	-1	1115,60 (5)	$2,578 (21) \cdot 10^{-10}$	$n\pi^-$	64,2
					$n\pi^0$	35,8
$\Sigma^+$	$1 (1/2^+)$	-1	1189,37 (6)	$0,800 (6) \cdot 10^{-10}$	$p\pi^0$	51,6
					$n\pi^+$	48,4
$\Sigma^0$	$1 (1/2^+)$	-1	1192,47 (8)	$< 1,0 \cdot 10^{-14}$	$\Delta\gamma$	100
$\Sigma^-$	$1 (1/2^+)$	-1	1197,35 (6)	$1,482 (17) \cdot 10^{-10}$	$n\pi^-$	100
$\Xi^0$	$1/2 (1/2^+)$	-2	1314,9 (6)	$2,96 (12) \cdot 10^{-10}$	$\Delta\pi^0$	100
$\Xi^-$	$1/2 (1/2^+)$	-2	1321,29 (14)	$1,652 (23) \cdot 10^{-10}$	$\Delta\pi^-$	100
$\Omega^-$	$0 (3/2^+)$	-3	1672,2 (4)	$1,3^{+0,3}_{-0,2} \cdot 10^{-10}$	$\Xi^0\pi^-$	} Всего 43 события
					$\Xi^-\pi^0$	
					$\Delta K^-$	

## 2. Резонансные состояния.

Таблицы резонансных состояний упорядочены по семействам с одинаковыми барионными числами и странностями. Вначале идут мезонные нейтронные резонансы, затем мезонные резонансы со странностью, отличной от нуля, и, наконец, новые тяжелые резонансы. Барионные резонансы, кроме того, разделены по изотопическому спину.

Вместо времени жизни  $\tau$  указана полная ширина в энергетической шкале  $\Gamma$ , связанная с  $\tau$  соотношением  $\Gamma = \hbar/\tau$ .

Характерные времена жизни для резонансных состояний заключаются в интервале  $10^{-22}$ — $10^{-24}$  сек. Например,

$$\tau_{p(770)} = \hbar/\Gamma_p = 6,58 \cdot 10^{-22} \text{ МэВ} \cdot \text{сек} / 152 \text{ МэВ} = 4,5 \cdot 10^{-24} \text{ сек},$$

$$\tau_{\omega(783)} = \hbar/\Gamma_\omega = \hbar/10 \text{ МэВ} = 6,6 \cdot 10^{-23} \text{ сек}.$$

Исключение составляют новые тяжелые мезонные состояния  $J/\psi$  (3100),  $\psi$  (3700), времена жизни которых имеют порядок  $10^{-20}$ — $10^{-21}$  сек.



МЕЗОННЫЕ РЕЗОНАНСЫ

Частица	$I (J^P)$	M, МэВ	$\Gamma$ , МэВ	Основные распады	
				канал	доля, %
<i>(a) нестранные</i>					
$\rho$ (770)	1 (1 <sup>-</sup> )	773 (3)	152 (3)	$\pi\pi$	100
$\omega$ (783)	0 (1 <sup>-</sup> )	782,7 (3)	10,0 (4)	$\pi^+\pi^-\pi^0$	90
				$\pi^+\pi^-$	1
				$\pi^0\gamma$	9
$\eta'$ (958)	0 (0 <sup>-</sup> )	957,6 (3)	< 1	$\eta\pi\pi$	68
				$\rho^0\gamma$	30
				$\gamma\gamma$	2
$\delta$ (970)	1 (0 <sup>+</sup> )	976 (10)	50 (20)	$\eta\pi$	?
$\Phi$ (1020)	0 (1 <sup>-</sup> )	1019,7 (3)	4,1 (2)	$K^+K^-$	46
				$K_L K_S$	35
				$\pi^+\pi^-\pi^0$	16
				$\eta\gamma$	2
$B$ (1235)	1 (1 <sup>+</sup> )	1228 (10)	125 (10)	$\omega\pi$	?
$f$ (1270)	0 (2 <sup>+</sup> )	1271 (5)	180 (20)	$\pi\pi$	81
				$2\pi^+2\pi^-$	3
				$K\bar{K}$	3
$D$ (1285)	0 (A) $A=0^-, 1^+, 2^-$	1286 (10)	30 (20)	$K\bar{K}\pi$	?
				$\eta\pi\pi$	?
$A_2$ (1310)	1 (2 <sup>+</sup> )	1310 (5)	102 (5)	$\rho\pi$	71
				$\eta\pi$	15
				$\omega\pi\pi$	9
				$K\bar{K}$	5
$E$ (1420)	0 (A)	1416 (10)	60 (20)	$K\bar{K}\pi$	~40
				$\eta\pi\pi$	~60
$\omega$ (1675)	0 (3 <sup>-</sup> )	1667 (10)	150 (20)	$\rho\pi$	?
$g$ (1680)	1 (3 <sup>-</sup> )	1690 (20)	180 (30)	$2\pi$	24
				$4\pi$	доминирует
$h$ (2040)	0 (4 <sup>+</sup> )	2040 (20)	193 (50)	$\pi\pi$	?
				$K\bar{K}$	?

Продолжение

Частица	$I (J^P)$	M, МэВ	$\Gamma$ , МэВ	Основные распады	
				канал	доля, %
<i>(б) странные</i>					
$K^*$ (892)	$1/2 (1^-)$	892,2 (5)	49,4 (1,8)	$K\pi$	100
$K^*$ (1420)	$1/2 (2^+)$	1421 (3)	108 (10)	$K\pi$	56
				$K_{892}^*\pi$	31
				$K\rho$	7
				$K\omega$	4
				$K\eta$	2
<i>(в) новые тяжелые</i>					
$J/\psi$ (3100)	$0 (1^-)$	3098 (3)	0,067 (12)	$e^+e^-$	7
				$\mu^+\mu^-$	7
				адроны	86
$\psi$ (3700)	$0 (1^-)$	3684 (4)	0,228 (56)	$e^+e^-$	1
				$\mu^+\mu^-$	1
				адроны	98
$\psi$ (4400)	$P (1^-)$	4414 (7)	33 (10)	$e^+e^-$	0,0013
				адроны	$\sim 100$

## БАРИОННЫЕ РЕЗОНАНСЫ

Частица	$I (J^P)$	M, МэВ	$\Gamma$ , МэВ	Основные распады	
				канал	доля, %
<i>(а) нестранные, <math>I = 1/2</math></i>					
$N$ (1470)	$1/2 (1/2^+)$	1390—1470	180—220	$N\pi$	$\sim 60$
				$N\eta$	$\sim 18$
				$N\pi\pi$	$\sim 25$
$N$ (1520)	$1/2 (3/2^-)$	1510—1530	110—150	$N\pi$	$\sim 55$
				$N\pi\pi$	$\sim 45$
$N$ (1535)	$1/2 (1/2^-)$	1500—1530	50—120	$N\pi$	$\sim 30$
				$N\eta$	$\sim 65$
				$N\pi\pi$	$\sim 5$

Продолжение

Частица	$I (J^P)$	M, МэВ	$\Gamma$ , МэВ	Основные распады	
				канал	доля, %
$N (1670)$	$1/2 (5/2^-)$	1660—1685	145—165	$N\pi$	~45
				$N\pi\pi$	~55
$N (1688)$	$1/2 (5/2^+)$	1670—1690	120—145	$N\pi$	~60
				$N\pi\pi$	~40
$N (1700)$	$1/2 (1/2^-)$	1660—1690	100—200	$N\pi$	~55
				$N\pi\pi$	~30
				$\Delta K$	~4
				$\Sigma K$	~2
$N (1780)$	$1/2 (1/2^+)$	1700—1800	100—250	$N\pi$	~20
				$N\pi\pi$	>40
				$\Sigma K$	~10
				$\Delta K$	~7
$N (1810)$	$1/2 (3/2^+)$	1700—1850	100—300	$N\pi$	~20
				$N\pi\pi$	~70
				$\Delta K$	~5
				$\Sigma K$	~2
$N (2190)$	$1/2 (7/2^-)$	2100—2250	150—300	$N\pi$	15—35
$N (2220)$	$1/2 (9/2^+)$	2200—2250	250—350	$N\pi$	~20
$N (2650)$	$1/2 (P^-)$	~2650	~350	$N\pi$	?
$N (3030)$	$1/2 (?)$	~3030	~400	$N\pi$	?
(б) нестранные, $I = 3/2$					
$\Delta (1232)$	$3/2 (3/2^+)$	1230—1234	110—120	$N\pi$	99,4
				$P\gamma$	0,6
$\Delta (1650)$	$3/2 (1/2^-)$	1615—1695	140—200	$N\pi$	~35
				$N\pi\pi$	~65
$\Delta (1670)$	$3/2 (3/2^-)$	1650—1720	190—260	$N\pi$	~15
				$N\pi\pi$	~85
$\Delta (1890)$	$3/2 (5/2^+)$	1860—1900	150—300	$N\pi$	~15
				$N\pi\pi$	~80
$\Delta (1910)$	$3/2 (1/2^+)$	1780—1950	160—230	$N\pi$	15—35
				$N\pi\pi$	?
				$\Sigma K$	?

Продолжение

Частица	$I (J^P)$	M, МэВ	$\Gamma$ , МэВ	Основные распады	
				канал	доля, %
$\Delta (1950)$	$3/2 (7/2^+)$	1910—1940	200—240	$N\pi$ $N\pi\pi$	$\sim 40$ $>25$
$\Delta (2420)$	$3/2 (11/2^+)$	2380—2450	300—500	$N\pi$	10—15
$\Delta (2850)$	$3/2 (2^+)$	2800—2900	$\sim 400$	$N\pi$	?
$\Delta (3230)$	$3/2 (2^-)$	3200—3350	$\sim 440$	$N\pi$	?
(в) странность $S = -1$ , изоспин $I = 0$					
$\Lambda (1405)$	$0 (1/2^-)$	1405 (5)	40 (10)	$\Sigma\pi$	100
$\Lambda (1520)$	$0 (3/2^-)$	1519 (2)	15 (2)	$N\bar{K}$	46
				$\Sigma\pi$	42
				$\Delta\pi\pi$	10
				$\Sigma\pi\pi$	1
$\Lambda (1670)$	$0 (1/2^-)$	1660—1680	20—60	$N\bar{K}$	15—35
				$\Delta\eta$	15—35
				$\Sigma\pi$	20—60
$\Lambda (1690)$	$0 (3/2^-)$	1690 (10)	30—80	$N\bar{K}$	20—30
				$\Sigma\pi$	15—40
				$\Delta\pi\pi$	$\sim 25$
$\Lambda (1815)$	$0 (5/2^+)$	1820 (5)	70—100	$\Sigma\pi\pi$	$\sim 20$
				$N\bar{K}$	$\sim 60$
				$\Sigma\pi$	$\sim 12$
$\Lambda (1830)$	$0 (5/2^-)$	1810—1840	60—100	$\Sigma_{1385}\pi$	15—20
				$N\bar{K}$	$< 10$
$\Lambda (1860)$	$0 (1/2^+)$	1860—1910	40—110	$\Sigma\pi$	35—75
				$N\bar{K}$	15—35
$\Lambda (2100)$	$0 (7/2^-)$	2100—2120	150—300	$\Sigma\pi$	5—10
				$N\bar{K}$	$\sim 30$
$\Lambda (2350)$	$0 (2^-)$	2340—2360	100—200	$\Sigma\pi$	$\sim 5$
				$N\bar{K}$	?
$\Lambda (2585)$	$0 (2^-)$	$\sim 2585$	$\sim 300$	$\Sigma\pi$	?
				$\{N\bar{K}$	?
(г) странность $S = -1$ , изоспин $I = 1$					
$\Sigma (1385)$	$1 (3/2^+)$	1382,5 (5)	35 (2)	$\Delta\pi$ $\Sigma\pi$	88 12

Продолжение

Частица	$I (J^P)$	M, МэВ	$\Gamma$ , МэВ	Основные распады	
				канал	доля, %
$\Sigma (1670)$	$1 (3/2^-)$	1670 (10)	35—70	$N\bar{K}$ $\Sigma\pi$ $\Lambda\pi$	10—25 20—60 < 20
$\Sigma (1750)$	$1 (1/2^-)$	1700—1790	50—120	$N\bar{K}$ $\Lambda\pi$ $\Sigma\eta$ $\Sigma\pi$	10—40 5—20 15—55 < 8
$\Sigma (1765)$	$1 (5/2^-)$	1723 (7)	110—150	$N\bar{K}$ $\Lambda\pi$ $\Lambda_{1520}\pi$ $\Sigma_{1385}\pi$ $\Sigma\pi$	~41 ~14 ~16 ~10 ~1
$\Sigma (1915)$	$1 (5/2^+)$	1905—1930	70—140	$N\bar{K}$ $\Lambda\pi$ $\Sigma\pi$	5—15 20 ?
$\Sigma (1940)$	$1 (3/2^-)$	1900—1960	110—280	$N\bar{K}$ $\Lambda\pi$ $\Sigma\pi$	< 20 ~4 ~7
$\Sigma (2030)$	$1 (7/2^+)$	2020—2040	120—200	$N\bar{K}$ $\Lambda\pi$ $\Sigma\pi$	~20 ~20 5—10
$\Sigma (2250)$	$1 (?)$	2200—2300	50—200	$N\bar{K}$	?
$\Sigma (2455)$	$1 (?)$	~2455	~120	$N\bar{K}$	?
$\Sigma (2620)$	$1 (?)$	~2600	~200	$N\bar{K}$	?
(в) странность $S = -2$ , изоспин $I = 1/2$					
$\Xi (1530)$	$1/2 (3/2^+)$	1531,8 (3)	9,1 (5)	$\Xi\pi$	100
$\Xi (1820)$	$1/2 (?)$	1800—1850	12—100	$\Lambda\bar{K}$ $\Sigma\bar{K}$ $\Xi\pi$ $\Xi_{1530}\pi$	? ? ? ?
$\Xi (1940)$	$1/2 (?)$	1900—1970	30—140	$\Xi\pi$ $\Xi_{1530}\pi$	? ?

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора серии . . . . .	5
Предисловие . . . . .	7
1. Обзор принципов квантовой механики . . . . .	9
2. Спин и статистика . . . . .	14
3. Вращения и момент . . . . .	18
4. Правила сложения моментов . . . . .	27
5. Релятивизм . . . . .	31
6. Электромагнитное и фермиевское взаимодействия . . . . .	38
7. Фермиевские взаимодействия и ниспровержение четности . . . . .	42
8. Пион-нуклонная связь . . . . .	48
9. Странные частицы . . . . .	54
10. Некоторые следствия странности . . . . .	60
11. Схемы сильной связи . . . . .	63
12. Распады странных частиц . . . . .	67
13. Вопрос об универсальном коэффициенте . . . . .	73
14. Закономерности распадов с изменением странности: данные опытов . . . . .	77
15. Основные законы электромагнитных и слабых взаимодействий . . . . .	80
16. Плотность конечных состояний . . . . .	87
17. Пропагатор скалярной частицы . . . . .	92
18. Пропагатор в конфигурационном пространстве . . . . .	96
19. Частицы со спином 1 . . . . .	100
20. Виртуальные и реальные фотоны . . . . .	108
21. Задачи . . . . .	113
22. Частицы со спином $1/2$ . . . . .	118
23. Обобщение на конечную массу . . . . .	124
24. Свойства четырехкомпонентного спинора . . . . .	129
25. Эффект Комптона . . . . .	136
26. Прямое рождение пар мюонами . . . . .	141
27. Процессы высших порядков . . . . .	144
28. Собственная энергия электрона . . . . .	149
29. Квантовая электродинамика . . . . .	156

30. Мезонная теория . . . . .	163
31. Теория $\beta$ -распада . . . . .	167
32. Свойства $\beta$ -взаимодействий . . . . .	176
33. Итоги курса . . . . .	180
<b>Фундаментальные частицы . . . . .</b>	<b>182</b>
<b>Литература . . . . .</b>	<b>186</b>
<b>Послесловие переводчика . . . . .</b>	<b>187</b>
<b>Частицы 1976 . . . . .</b>	<b>190</b>