

*Р.Фейнман, Р.Лейтон, М.Сэндс*  
**ФЕЙНМАНОВСКИЕ ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ**  
**5. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ**

Оглавление

От редактора	5
Предисловие	6
<b>Глава 1. Электромагнетизм</b>	<b>9</b>
§ 1. Электрические силы	9
§ 2. Электрические и магнитные поля	13
§ 3. Характеристики векторных полей	15
§ 4. Законы электромагнетизма	18
§ 5. Что это такое—«поля»?	24
§ 6. Электромагнетизм в науке и технике	27
<b>Глава 2. Дифференциальное исчисление векторных полей</b>	<b>28</b>
§ 1. Понимание физики	28
§ 2. Скалярные и векторные поля — $T$ и $\mathbf{h}$	30
§ 3. Производные полей — градиент	33
§ 4. Оператор $\nabla$	37
§ 5. Операция с $\nabla$	38
§ 6. Дифференциальное уравнение потока тепла	40
§ 7. Вторые производные векторных полей	42
§ 8. Подвохи	45
<b>Глава 3. Интегральное исчисление векторов</b>	<b>47</b>
§ 1. Векторные интегралы; криволинейный интеграл от $\nabla\psi$	47
§ 2. Поток векторного поля	50
§ 3. Поток из куба; теорема Гаусса	53
§ 4. Теплопроводность; уравнение диффузии	55
§ 5. Циркуляция векторного поля	59
§ 6. Циркуляция по квадрату; теорема Стокса	61
§ 7. Поля без роторов и поля без дивергенций	64
§ 8. Итоги	66
<b>Глава 4. Электростатика</b>	<b>68</b>
§ 1. Статика	68
§ 2. Закон Кулона; наложение сил	70
§ 3. Электрический потенциал	73
§ 4. $\mathbf{E} = -\nabla\phi$	77
§ 5. Поток поля $\mathbf{E}$	79
§ 6. Закон Гаусса; дивергенция поля $\mathbf{E}$	83
§ 7. Поле заряженного шара	85
§ 8. Линии поля; эквипотенциальные поверхности	86
<b>Глава 5. Применения закона Гаусса</b>	<b>90</b>
§ 1. Электростатика — это есть закон Гаусса плюс	90
§ 2. Равновесие в электростатическом поле	90
§ 3. Равновесие с проводниками	93

§ 4. Устойчивость атомов	93
§ 5. Поле заряженной прямой линии	95
§ 6. Заряженная плоскость; пара плоскостей	96
§ 7. Однородно заряженный шар; заряженная сфера	98
§ 8. Точен ли закон Кулона?	99
§ 9. Поля проводника	104
§ 10. Поле внутри полости проводника	106
<b>Глава 6. Электрическое поле в разных физических условиях</b>	<b>108</b>
§ 1. Уравнения электростатического потенциала	108
§ 2. Электрический диполь	109
§ 3. Замечания о векторных уравнениях	113
§ 4. Дипольный потенциал как градиент	114
§ 5. Дипольное приближение для произвольного распределения	117
§ 6. Поля заряженных проводников	119
§ 7. Метод изображений	120
§ 8. Точечный заряд у проводящей плоскости	122
§ 9. Точечный заряд у проводящей сферы	124
§ 10. Конденсаторы; параллельные пластины	126
§ 11. Пробой при высоком напряжении	129
§ 12. Ионный микроскоп	131
<b>Глава 7. Электрическое поле в разных физических условиях (продолжение)</b>	<b>134</b>
§ 1. Методы определения электростатического поля	134
§ 2. Двумерные поля; функции комплексного переменного	136
§ 3. Колебания плазмы	141
§ 4. Коллоидные частицы в электролите	145
§ 5. Электростатическое поле сетки	148
<b>Глава 8. Электростатическая энергия</b>	<b>151</b>
§ 1. Электростатическая энергия зарядов. Однородный шар	151
§ 2. Энергия конденсатора. Силы, действующие на заряженные проводники	153
§ 3. Электростатическая энергия ионного кристалла	158
§ 4. Электростатическая энергия ядра	161
§ 5. Энергия в электростатическом поле	166
§ 6. Энергия точечного заряда	170
<b>Глава 9. Электричество в атмосфере</b>	<b>172</b>
§ 1. Градиент электрического потенциала в атмосфере	172
§ 2. Электрические токи в атмосфере	174
§ 3. Происхождение токов в атмосфере	173
§ 4. Грозы	179
§ 5. Механизм распределения зарядов	186
§ 6. Молния	192
<b>Глава 10. Диэлектрики</b>	<b>196</b>
§ 1. Диэлектрическая проницаемость	196
§ 2. Вектор поляризации $P$	199

§ 3. Поляризационные заряды	201
§ 4. Уравнения электростатики для диэлектриков	205
§ 5. Поля и силы в присутствии диэлектриков	207
<b>Глава 11. Внутреннее устройство диэлектриков</b>	<b>212</b>
§ 1. Молекулярные диполи	212
§ 2. Электронная поляризация	213
§ 3. Полярные молекулы; ориентационная поляризация	216
§ 4. Электрические поля в пустотах диэлектрика	220
§ 5. Диэлектрическая проницаемость жидкостей; формула Клаузиуса — Моссотти	223
§ 6. Твердые диэлектрики	225
§ 7. Сегнетоэлектричество; титанат бария	227
<b>Глава 12. Электростатические аналогии</b>	<b>233</b>
§ 1. Одинаковые уравнения—одинаковые решения	233
§ 2. Поток тепла; точечный источник вблизи бесконечной плоской границы	234
§ 3. Натянутая мембрана	240
§ 4. Диффузия нейтронов; сферически-симметричный источник в однородной среде	243
§ 5. Безвихревое течение жидкости; обтекание шара	246
§ 6. Освещение; равномерное освещение плоскости	250
§ 7. «Фундаментальное единство» природы	253
<b>Глава 13. Магнитостатика</b>	<b>255</b>
§ 1. Магнитное поле	255
§ 2. Электрический ток; сохранение заряда	256
§ 3. Магнитная сила, действующая на ток	258
§ 4. Магнитное поле постоянного тока; закон Ампера	260
§ 5. Магнитное поле прямого провода и соленоида; атомные токи	263
§ 6. Относительность магнитных и электрических полей	266
§ 7. Преобразование токов и зарядов	274
§ 8. Суперпозиция; правило правой руки	275
<b>Глава 14. Магнитное поле в разных случаях</b>	<b>277</b>
§ 1. Векторный потенциал	277
§ 2. Векторный потенциал заданных токов	281
§ 3. Прямой провод	283
§ 4. Длинный соленоид	284
§ 5. Поле маленькой петли; магнитный диполь	287
§ 6. Векторный потенциал цепи	290
§ 7. Закон Био — Савара	291

## *От редактора*

Этим выпуском мы начинаем печатание перевода второго тома лекций, прочитанных Р. Фейнманом студентам второго курса. Весь материал второго тома составляет 42 главы и займет три выпуска русского издания (5—7). Основное содержание этих глав-лекций — электричество, магнетизм, физика сплошных сред. Остальные лекции, в которых рассказывалось о квантовой механике, составили третий том и войдут в русском издании в вып. 8 и 9. Кроме того, вышли три тетради задач по курсу (по тетради к каждому тому). В нашем издании они составят дополнительный выпуск: «Задачи и упражнения».

О втором томе хотелось бы сделать два замечания. Первое относится к гл. 19 (вып. 6). Это не обычная лекция, а скорее доклад на научном семинаре; понять его смогут, по-видимому, лишь самые сильные студенты (и то, если хорошо поработают!). Фейнман рассказывает о том, как можно, посмотрев иначе на совсем разные разделы физики, увидеть между ними много общего. Это рассказ о принципе наименьшего действия, как его понимает Фейнман, а также замечания об близких по духу задачах, которые, как признает сам автор, не понимает даже он сам. Смотреть на все своими глазами — замечательное качество. Именно это и надо понять, читая гл. 19.

Второе замечание относится к гл. 30 (вып. 7). В американском издании в эту главу в качестве § 19 включена самая настоящая научная статья из журнала Английской Академии наук (или, как ее называют с давних пор, Королевского общества). Эта статья имеет непосредственное отношение к содержанию главы, она посвящена моделированию явлений в кристалле. Но рассказ о методе ведет не лектор, а сами авторы метода — английские физики Брэгг и Най. При этом создатели курса добивались еще одной цели — познакомить читателя с оригинальной научной работой из серьезного журнала. В русском издании перевод ее (немного сокращенный) помещен в конце вып. 7 в виде приложения.

Так, читая «Фейнмановские лекции по физике», вы будете понемногу приобщаться к живой, развивающейся науке.

*Я. Смородинский*

Декабрь 1965 г.

Р.-С. В ноябре 1965 г. Ричард Фейнман вместе с двумя другими физиками-теоретиками (Швингером и Томонага) за работы по квантовой электродинамике получил Нобелевскую премию.

**ПРЕДИСЛОВИЕ ►**

Много лет Ричард П. Фейнман размышляет о таинственных механизмах физического мира и упорно стремится найти порядок в кажущемся хаосе. Последние два года он отдавал свою энергию еще и лекциям для начинающих студентов. Для этих лекций он отобрал самое важное из того, что знал сам, и нарисовал физическую картину Вселенной так, что студенты могли надеяться в ней разобраться. В эти лекции он вложил блеск и ясность мысли, оригинальность и живость метода, заразительный энтузиазм рассказчика. Его рассказ доставлял истинную радость слушателям.

В основу первого тома легли лекции, прочитанные для студентов первого курса. Во второй том мы включили запись части лекций для второго курса \*. Они были прочитаны в течение 1962/63 учебного года. Оставшиеся лекции для второкурсников войдут в третий том \*\*.

Лекции для второго курса на две трети были посвящены весьма обстоятельному изучению физики электричества и магнетизма. При этом преследовалась двоякая цель. Во-первых, мы хотели дать студентам полную картину одного из самых больших разделов физики — от первых, сделанных ощупью шагов Франклина, через великий синтез Максвелла, до лоренцевой электронной теории свойств вещества, включая еще не решенные дилеммы электромагнитной собственной энергии. Во-вторых, мы надеялись ввести с самого начала исчисление векторных полей и дать таким образом солидное введение в математику полевых теорий. Чтоб подчеркнуть общую полезность математических методов, порой родственные вопросы из других областей физики анализировались одновременно с их электрическими двойниками. Мы

---

\* Выпуски 5—7.— *Прим. ред.*

\*\* Выпуски 8 и 9, в них вошли и восемь дополнительных лекций.— *Прим. ред.*

пытались все время внедрять в сознание общность математики («одинаковые уравнения имеют одинаковые решения»). Это подчеркивалось характером упражнений, а потом и экзаменов.

После электромагнетизма две главы посвящены упругости, а две — течению жидкости. В первой главе каждой из этих тем обоснуются лишь элементарные и практические вопросы, вторые главы посвящены попытке обзора всего сложного круга явлений, к которым ведет рассматриваемая задача. Эти четыре главы, впрочем, можно без особого ущерба опустить, поскольку они вовсе не обязательны для понимания материала.

Примерно вся последняя четверть второго курса была посвящена введению в квантовую механику. Она вошла в третий том.

Публикуя запись лекций Фейнмана, мы хотели осуществить нечто большее, нежели просто переложить на бумагу то, что было им сказано устно. Мы хотели, чтобы на бумагу как можно более ясно легли те идеи, на которых основывались лекции. Для некоторых лекций этого удалось добиться, пришлось внести лишь небольшую правку в стенографические записи, другие же потребовали значительной работы и довольно серьезного редактирования. Иногда мы чувствовали, что для большей ясности нужно включить добавочный материал. При этом мы прибегали постоянно к помощи и советам самого Фейнмана.

«Перевод» в столь сжатые сроки свыше миллиона устных слов в связный текст — работа громадная, особенно если к этому еще добавляются другие обязанности, сопровождающие обычно чтение нового курса, — подготовка к опросу, семинары, упражнения, экзамены и т. д. Потребовалось множество рук и голов. Я все же надеюсь, что в ряде случаев нам удалось верно отразить фейнмановский оригинал. В других же мы оказались очень далеки от идеала. Нашими успехами мы обязаны всем, кто помогал нам. Мы очень сожалеем о неудачах.

Как мы подробно объясняли в предисловии к первому тому, эти лекции были всего частью программы, которую наметил и за выполнением которой следил Комитет по пересмотру курса (Р. Лейтон — председатель, Г. Неер и М. Сэндс) КАЛТЕХа при финансовой поддержке Фонда Форда. Кроме того, в подготовке текста лекций второго тома участвовали Т. Кохи, М. Клейтон, Д. Курцио, Д. Хартл, Т. Харвей, М. Израэль, В. Карзас, Р. Каванах, Д. Мэтьюс, М. Плессет, Ф. Уоррен, В. Уэйлинг, С. Уилте и Б. Циммерман. В работе над лекциями помогали Дж. Блю, Дж. Чаплин, М. Клаузер, Р. Доллен, Г. Хилл и А. Тайтл. Мне хотелось бы особо сказать здесь о постоянной помощи профессора Нойгебауера. И все же если бы не выдающееся дарование и активность самого Фейнмана, то этот рассказ о физике, который вы сейчас читаете, никогда бы не прозвучал.

*Мэтью Сэндс*

Март 1964 г.

# Глава 1

## ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

### § 1. Электрические силы

Рассмотрим силу, которая, подобно тяготению, меняется обратно квадрату расстояния, но только в миллион миллиардов миллиардов раз более сильную. И которая отличается еще в одном. Пусть существуют два сорта «вещества», которые можно назвать положительным и отрицательным. Пусть одинаковые сорта отталкиваются, а разные — притягиваются в отличие от тяготения, при котором происходит только притяжение. Что же тогда случится?

Все положительное оттолкнется со страшной силой и разлетится в разные стороны. Все отрицательное — тоже. Но совсем другое произойдет, если положительное и отрицательное перемешать поровну. Тогда они с огромной силой притянутся друг к другу, и в итоге эти невероятные силы почти нацело сбалансируются, образуя плотные «мелкозернистые» смеси положительного и отрицательного; между двумя грудками таких смесей практически не будет ощущаться ни притяжения, ни отталкивания.

Такая сила существует: это электрическая сила. И все вещество является смесью положительных протонов и отрицательных электронов, притягивающихся и отталкивающихся с неимоверной силой. Однако баланс между ними столь совершенен, что, когда вы стоите возле когонибудь, вы не ощущаете никакого действия этой силы. А если бы баланс нарушился хоть немножко, вы бы это сразу почувствовали. Если бы в вашем теле или в теле вашего соседа (стоящего от вас на расстоянии вытянутой руки) электронов оказалось бы всего на 1% больше, чем протонов, то сила вашего отталкивания

§1. Электрические силы

§2. Электрические и магнитные поля

§3. Характеристика векторных полей

§4. Законы электростатического взаимодействия

§5. Что это такое — «поле»?

§6. Электромагнетизм в науке и технике

Примечание к гл. 12 (табл. 11 «Характеристики сил»)



была бы невообразимо большой. Насколько большой? Достаточной, чтобы поднять небоскреб? Больше! Достаточной, чтобы поднять гору Эверест? Больше! Силы отталкивания хватило бы, чтобы поднять «вес», равный весу нашей Земли!

Раз такие огромные силы в этих тонких смесях столь совершенно сбалансированы, то нетрудно понять, что вещество, стремясь удержать свои положительные и отрицательные заряды в тончайшем равновесии, должно обладать большой жесткостью и прочностью. Верхушка небоскреба, скажем, отклоняется при порывах ветра лишь на пару метров, потому что электрические силы удерживают каждый электрон и каждый протон более или менее на своих местах. А с другой стороны, если рассмотреть достаточно малое количество вещества так, чтобы в нем насчитывалось лишь немного атомов, то там необязательно будет равное число положительных и отрицательных зарядов, и могут проявиться большие остаточные электрические силы. Даже если числа тех и других зарядов одинаковы, все равно между соседними областями может действовать значительная электрическая сила. Потому что силы, действующие между отдельными зарядами, изменяются обратно пропорционально квадратам расстояний между ними и может оказаться, что отрицательные заряды одной части вещества ближе к положительным зарядам (другой части), чем к отрицательным. Силы притяжения тогда превзойдут силы отталкивания, и в итоге возникнет притяжение между двумя частями вещества, в которых нет избыточного заряда. Сила, удерживающая атомы, и химические силы, скрепляющие между собой молекулы, — все это силы электрические, действующие там, где число зарядов неодинаково или где промежутки между ними малы.

Вы знаете, конечно, что в атоме имеются положительные протоны в ядре и электроны вне ядра. Вы можете спросить: «Если эти электрические силы так велики, то почему же протоны и электроны не налезают друг на друга? Если они стремятся образовать тесную компанию, почему бы ей не стать еще теснее?» Ответ связан с квантовыми эффектами. Если попытаться заключить наши электроны в малый объем, окружающий протон, то, согласно принципу неопределенности, у них должен возникнуть средний квадратичный импульс, тем больший, чем сильнее мы их ограничим. Именно это движение (требуемое законами квантовой механики) мешает электрическому притяжению еще больше сблизить заряды.

Тут возникает другой вопрос: «Что скрепляет ядро?» В ядре имеется несколько протонов, и все они положительно заряжены. Почему же они не разлетаются? Оказывается, что в ядре, помимо электрических сил, еще действуют и неэлектрические силы, называемые *ядерными*. Эти силы более мощные, чем электрические, и они способны, несмотря на электрическое отталкивание,

удержать протоны вместе. Действие ядерных сил, однако, простирается недалеко; оно падает гораздо быстрее, чем  $1/r^2$ . И это приводит к важному результату. Если в ядре имеется слишком много протонов, то ядро становится чересчур большим и оно уже не может удержаться. Примером может служить уран с его 92 протонами. Ядерные силы действуют в основном между протоном (или нейтроном) и его ближайшим соседом, а электрические силы действуют на большие расстояния и вызывают отталкивание каждого протона в ядре от всех остальных. Чем больше в ядре протонов, тем сильнее электрическое отталкивание, пока (как у урана) равновесие не станет столь шатким, что ядру почти ничего не стоит разлететься от действия электрического отталкивания. Стоит его чуть-чуть «толкнуть» (например, послать внутрь медленный нейтрон) — и оно разваливается надвое, на две положительно заряженные части, разлетающиеся врозь в результате электрического отталкивания. Энергия, которая при этом высвобождается, — это энергия атомной бомбы. Ее обычно именуют «ядерной» энергией, хотя на самом деле это «электрическая» энергия, высвобождаемая как только электрические силы превзойдут ядерные силы притяжения.

Наконец, можно спросить, чем скрепляется отрицательно заряженный электрон (ведь в нем нет ядерных сил)? Если электрон весь состоит из вещества одного сорта, то каждая его часть должна отталкивать остальные. Тогда почему же они не разлетаются в разные стороны? А точно ли существуют у электрона «части»? Может быть, следует считать электрон просто точкой и говорить, что электрические силы действуют только между *разными* точечными зарядами, так что электрон не действует сам на себя? Возможно. Единственно, что можно сейчас сказать, — что вопрос о том, чем скреплен электрон, вызвал много трудностей при попытке создать полную теорию электромагнетизма. И ответа на этот вопрос так и не получили. Мы займемся обсуждением его немного позже.

Как мы видели, можно надеяться, что сочетание электрических сил и квантовомеханических эффектов определит структуру больших количеств вещества и, следовательно, их свойства. Одни материалы — твердые, другие — мягкие. Некоторые из них — электрические «проводники», потому что их электроны свободны и могут двигаться; другие — «изоляторы», их электроны привязаны каждый к своему атому. Позже мы выясним, откуда появляются такие свойства, но вопрос этот очень сложен, поэтому рассмотрим сначала электрические силы в самых простых ситуациях. Начнем с изучения одних только законов электричества, включив сюда и магнетизм, так как и то и другое в действительности суть явления одной и той же природы.

Мы сказали, что электрические силы, как и силы тяготения, уменьшаются обратно пропорционально квадрату расстояния

между зарядами. Это соотношение называется законом Кулона. Однако этот закон перестает выполняться точно, если заряды движутся. Электрические силы зависят также сложным образом и от движения зарядов. Одну из частей силы, действующей между движущимися зарядами, мы называем *магнитной силой*. На самом же деле это только одно из проявлений электрического действия. Потому мы и говорим об «электромагнетизме».

Существует важный общий принцип, позволяющий относительно просто изучать электромагнитные силы. Мы обнаруживаем экспериментально, что сила, действующая на отдельный заряд (независимо от того, сколько там еще есть зарядов или как они движутся), зависит только от положения этого отдельного заряда, от его скорости и величины. Силу  $\mathbf{F}$ , действующую на заряд  $q$ , движущийся со скоростью  $\mathbf{v}$ , мы можем написать в виде

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}); \quad (1.1)$$

здесь  $\mathbf{E}$  — *электрическое поле* в точке расположения заряда, а  $\mathbf{B}$  — *магнитное поле*. Существенно, что электрические силы, действующие со стороны всех прочих зарядов Вселенной, складываются и дают как раз эти два вектора. Значения их зависят от того, *где* находится заряд, и могут меняться со *временем*. Если мы заменим этот заряд другим, то сила, действующая на новый заряд, изменяется точно пропорционально величине заряда, если только все прочие заряды мира не меняют своего движения или положения. (В реальных условиях, конечно, каждый заряд действует на все прочие расположенные по соседству заряды и может заставить их двигаться, так что иногда при замене одного данного заряда другим поля *могут* измениться.)

Из материала, изложенного в первом томе, мы знаем, как определить движение частицы, если сила, действующая на нее, известна. Уравнение (1.1) в сочетании с уравнением движения дает

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{m\mathbf{v}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \right] = \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.2)$$

Значит, если  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  известны, то можно определить движение зарядов. Остается только узнать, как получаются  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ .

Один из самых важных принципов, упрощающих получение величины полей, состоит в следующем. Пусть некоторое количество движущихся каким-то образом зарядов создает поле  $\mathbf{E}_1$ , а другая совокупность зарядов — поле  $\mathbf{E}_2$ . Если действуют оба набора зарядов одновременно (сохраняя те же свои положения и движения, какими они обладали, когда рассматривались

порознь), то возникающее поле равно в точности сумме

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2. \quad (1.3)$$

Этот факт называется *принципом наложения полей* (или *принципом суперпозиции*). Он выполняется и для магнитных полей.

Принцип этот означает, что если нам известен закон для электрического и магнитного полей, образуемых *одиночным* зарядом, движущимся произвольным образом, то, значит, нам известны все законы электродинамики. Если мы хотим знать силу, действующую на заряд  $A$ , нам нужно только рассчитать величину полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , созданных каждым из зарядов  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и т. д., и сложить все эти  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ ; тем самым мы найдем поля, а из них — силы, действующие на  $A$ . Если бы оказалось, что поле, создаваемое одиночным зарядом, отличается простотой, то это стало бы самым изящным способом описания законов электродинамики. Но мы уже описывали этот закон (см. вып. 3, гл. 28), и, к сожалению, он довольно сложен.

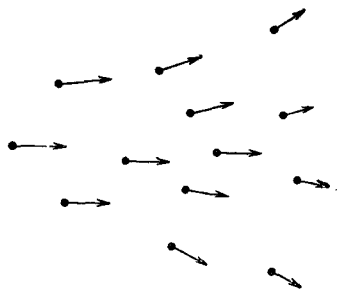
Оказывается, что форма, в которой законы электродинамики становятся простыми, совсем не такая, какой можно было бы ожидать. Она *не* проста, если мы захотим иметь формулу для силы, с которой один заряд действует на другой. Правда, когда заряды покоятся, закон силы — закон Кулона — прост, но когда заряды движутся, соотношения усложняются из-за запаздывания во времени, влияния ускорения и т. п. В итоге лучше не пытаться строить электродинамику с помощью одних лишь законов сил, действующих между зарядами; гораздо более приемлема другая точка зрения, при которой с законами электродинамики легче управляться.

## § 2. Электрические и магнитные поля

Первым делом нужно несколько расширить наши представления об электрическом и магнитном векторах  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Мы определили их через силы, действующие на заряд. Теперь мы намереваемся говорить об электрическом и магнитном полях *в точке*,

### НАИБОЛЕЕ ЧАСТО УПОТРЕБЛЯЕМЫЕ ГРЕЧЕСКИЕ БУКВЫ

$\alpha$	— альфа
$\beta$	— бета
$\Gamma\gamma$	— гамма
$\Delta\delta$	— дельта
$\varepsilon$	— эпсилон
$\zeta$	— дзета
$\eta$	— эта
$\Theta\theta$	— тэта
$\iota$	— йота
$\kappa$	— каппа
$\Lambda\lambda$	— ламбда
$\mu$	— мю
$\nu$	— ню
$\Xi\xi$	— кси
$\omicron$	— омикрон
$\Pi\pi$	— пи
$\rho$	— ро
$\Sigma\sigma$	— сигма
$\tau$	— тау
$\Upsilon\upsilon$	— ипсилон
$\Phi\phi$	— фи
$\chi$	— хи
$\Psi\psi$	— пси
$\Omega\omega$	— омега



Ф и г. 1.1. Векторное поле, представленное множеством стрелок, длина и направление которых отмечают величину векторного поля в тех точках, откуда выходят стрелки.

даже если там нет никакого заряда. Следовательно, мы утверждаем, что раз на заряд «действуют» силы, то в том месте, где он стоял, остается «нечто» и тогда, когда заряд оттуда убрали. Если заряд, расположенный в точке  $(x, y, z)$ , в момент  $t$  ощущает действие силы  $\mathbf{F}$ , согласно уравнению (1.1), то мы связываем векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  с точкой  $(x, y, z)$  в пространстве. Можно считать, что  $\mathbf{E}(x, y, z, t)$  и  $\mathbf{B}(x, y, z, t)$  дают силы, действие которых ощутит в момент  $t$  заряд, расположенный в  $(x, y, z)$ , при условии, что помещение заряда в этой точке не потревожит ни расположения, ни движения всех прочих зарядов, ответственных за поля.

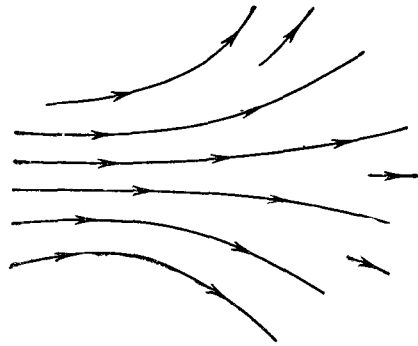
Следуя этому представлению, мы связываем с каждой точкой  $(x, y, z)$  пространства два вектора  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , способных меняться со временем. Электрические и магнитные поля тогда рассматриваются как *векторные функции* от  $x, y, z$  и  $t$ . Поскольку вектор определяется своими компонентами, то каждое из полей  $\mathbf{E}(x, y, z, t)$  и  $\mathbf{B}(x, y, z, t)$  представляет собой три математические функции от  $x, y, z$  и  $t$ .

Именно потому, что  $\mathbf{E}$  (или  $\mathbf{B}$ ) может быть определено для каждой точки пространства, его и называют «полем». Поле — это любая физическая величина, которая в разных точках пространства принимает различные значения. Скажем, температура — это поле (в этом случае скалярное), которое можно записать в виде  $T(x, y, z)$ . Кроме того, температура может меняться и во времени, тогда мы скажем, что температурное поле зависит от времени, и напишем  $T(x, y, z, t)$ . Другим примером поля может служить «поле скоростей» текущей жидкости. Мы записываем скорость жидкости в любой точке пространства в момент  $t$  в виде  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ . Поле это векторное.

Вернемся к электромагнитным полям. Хотя формулы, по которым они создаются зарядами, и сложны, у них есть следующее важное свойство: связь между значениями полей в *некоторой точке* и значениями их в *соседней точке* очень проста. Нескольких таких соотношений (в форме дифференциальных уравнений) достаточно, чтобы полностью описать поля. Именно

**Ф и г. 1.2.** Векторное поле, представленное линиями, касательными к направлению векторного поля в каждой точке.

Плотность линий указывает величину вектора поля.

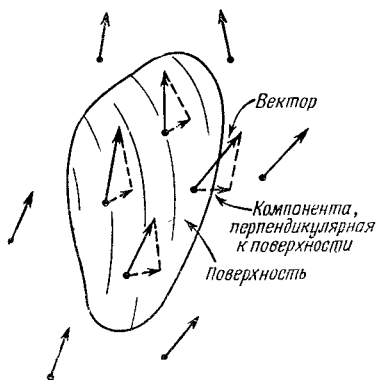


в такой форме законы электродинамики и выглядят особенно просто.

Немало изобретательности было потрачено на то, чтобы помочь людям мысленно представить поведение полей. И самая правильная точка зрения — это самая отвлеченная: надо просто рассматривать поля как математические функции координат и времени. Можно также попытаться получить мысленную картину поля, начертив во многих точках пространства по вектору так, чтобы каждый из них показывал напряженность и направление поля в этой точке. Такое представление приводится на фиг. 1.1. Можно пойти и дальше: начертить линии, которые в любой точке будут касательными к этим векторам. Они как бы следуют за стрелками и сохраняют направление поля. Если это сделать, то сведения о *длинах* векторов будут утеряны, но их можно сохранить, если в тех местах, где напряженность поля мала, провести линии пореже, а где велика — погуще. Договоримся, что *число линий на единицу площади*, расположенной поперек линий, будет пропорционально *напряженности поля*. Это, конечно, всего лишь приближение; иногда нам придется добавлять новые линии, чтобы их количество отвечало напряженности поля. Поле, изображенное на фиг. 1.1, представлено линиями поля на фиг. 1.2.

### **§ 3. Характеристики векторных полей**

Векторные поля обладают двумя математически важными свойствами, которыми мы будем пользоваться при описании законов электричества с полевой точки зрения. Представим себе замкнутую поверхность и зададим вопрос, вытекает ли из нее «нечто», т. е. обладает ли поле свойством «истечения»? Скажем, для поля скоростей мы можем поинтересоваться, всегда ли скорость направлена от поверхности, или, в более общем случае, вытекает ли из поверхности больше жидкости (в единицу

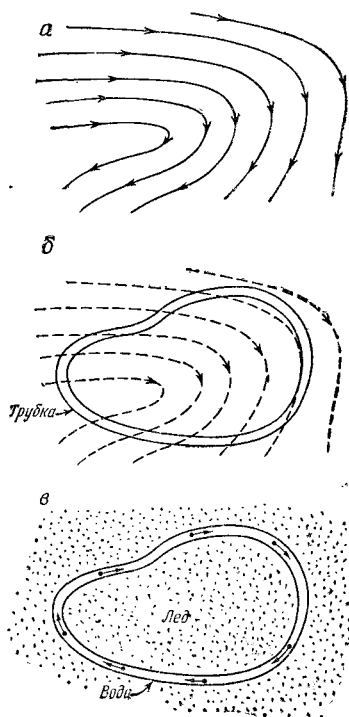


Ф и г. 1.3. Поток векторного поля через поверхность, определяемый как произведение среднего значения перпендикулярной составляющей вектора на площадь этой поверхности.

времени), нежели втекает. Общее количество жидкости, вытекающее через поверхность, мы назовем «потокм скорости» через поверхность за единицу времени. Поток через элемент поверхности равен составляющей скорости, перпендикулярной к элементу, умноженной на его площадь. Для произвольной замкнутой поверхности *суммарный поток* равен среднему значению нормальной компоненты скорости (отсчитываемой наружу), умноженному на площадь поверхности:

$$\text{Поток} = (\text{Средняя нормальная компонента}) \cdot (\text{Площадь поверхности}). \quad (1.4)$$

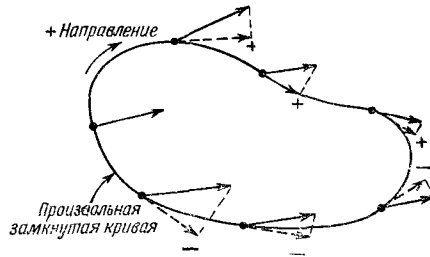
В случае электрического поля можно математически определить понятие, сходное с потоком жидкости; мы тоже



Ф и г. 1.4. Поле скоростей в жидкости (а).

Представьте себе трубку постоянного сечения, уложенную вдоль произвольной замкнутой кривой (б). Если жидкость внезапно заморозит повсюду, кроме трубки, то жидкость в трубке начнет циркулировать (в).

Ф и г. 1.5. Циркуляция векторного поля, равная произведению средней касательной составляющей вектора (с учетом ее знака по отношению к направлению обхода) на длину контура.



называем его потоком, но, конечно, это уже не течение какой-то жидкости, потому что электрическое поле нельзя считать скоростью чего-то. Оказывается все же, что математическая величина, определяемая как средняя нормальная компонента поля, по-прежнему имеет полезное значение. Тогда мы говорим о *потоке электричества*, также определяемом уравнением (1.4). Наконец, полезно говорить и о потоке не только сквозь замкнутую, но и сквозь любую ограниченную поверхность. Как и прежде, поток сквозь такую поверхность определяется как средняя нормальная компонента вектора, умноженная на площадь поверхности. Эти представления иллюстрируются фиг.1.3.

Другое свойство векторных полей касается не столько поверхностей, сколько линий. Представим опять поле скоростей, описывающее поток жидкости. Можно задать интересный вопрос: циркулирует ли жидкость? Это значит: существует ли вращательное ее движение вдоль некоторого замкнутого контура (петли)? Вообразите себе, что мы мгновенно заморозили жидкость повсюду, за исключением внутренней части замкнутой в виде петли трубки постоянного сечения (фиг. 1.4). Снаружи трубки жидкость остановится, но внутри она может продолжать двигаться, если в ней (в жидкости) сохранился импульс, т. е. если импульс, который гонит ее в одном направлении, больше импульса в обратном. Мы определяем величину, называемую *циркуляцией*, как скорость жидкости в трубке, умноженную на длину трубки. Опять-таки мы можем расширить наши представления и определить «циркуляцию» для любого векторного поля (даже если там нет ничего движущегося). У всякого векторного поля *циркуляция по любому воображаемому замкнутому контуру* определяется как средняя касательная компонента вектора (с учетом направления обхода), умноженная на протяженность контура (фиг. 1.5):

$$\text{Циркуляция} = (\text{Средняя касательная компонента}) \cdot (\text{Длина пути обхода}). \quad (1.5)$$

Вы видите, что это определение действительно дает число, пропорциональное циркуляции скорости в трубке, просверленной в быстрозамороженной жидкости.



Пользуясь только этими двумя понятиями — понятием о потоке и понятием о циркуляции, — мы способны описать все законы электричества и магнетизма. Вам, быть может, трудно будет отчетливо понять значение законов, но они дадут вам некоторое представление о том, каким способом в конечном счете может быть описана физика электромагнитных явлений.

#### § 4. Законы электромагнетизма

Первый закон электромагнетизма описывает поток электрического поля:

$$\text{Поток напряженности } \mathbf{E} \text{ сквозь любую замкнутую поверхность} = \frac{\text{Заряд внутри нее}}{\epsilon_0}, \quad (1.6)$$

где  $\epsilon_0$  — некоторая постоянная (читается эпсилон-нуль). Если внутри поверхности нет зарядов, а вне ее (даже совсем рядом) есть, то все равно *средняя* нормальная компонента  $\mathbf{E}$  равна нулю, так что никакого потока через поверхность нет. Чтобы показать пользу от такого типа утверждений, мы докажем, что уравнение (1.6) совпадает с законом Кулона, если только учесть, что поле отдельного заряда обязано быть сферически симметричным. Проведем вокруг точечного заряда сферу. Тогда средняя нормальная компонента в точности равна значению  $\mathbf{E}$  в любой точке, потому что поле должно быть направлено по радиусу и иметь одну и ту же величину во всех точках сферы. Тогда наше правило утверждает, что поле на поверхности сферы, умноженное на площадь сферы (т. е. вытекающий из сферы поток), пропорционально заряду внутри нее. Если увеличивать радиус сферы, то ее площадь растет, как квадрат радиуса. Произведение средней нормальной компоненты электрического поля на эту площадь должно по-прежнему быть равно внутреннему заряду, значит, поле должно убывать, как квадрат расстояния; так получается поле «обратных квадратов».

Если взять в пространстве произвольную кривую и измерить циркуляцию электрического поля вдоль этой кривой, то окажется, что она в общем случае не равна нулю (хотя в кулоновом поле это так). Вместо этого для электричества справедлив второй закон, утверждающий, что

$$\text{Циркуляция вектора } \mathbf{E} \text{ по контуру } C = \frac{d}{dt} (\text{поток вектора } \mathbf{B} \text{ сквозь замкнутую поверхность } S). \quad (1.7)$$

И, наконец, формулировка законов электромагнитного поля будет закончена, если написать два соответствующих уравнения для магнитного поля  $\mathbf{B}$ :

$$\text{Поток вектора } \mathbf{B} \text{ сквозь любую замкнутую поверхность} = 0. \quad (1.8)$$

А для поверхности  $S$ , ограниченной кривой  $C$ :

$$c^2 \left( \text{циркуляция вектора } \mathbf{B} \text{ по контуру } C \right) = \frac{d}{dt} \left( \text{поток вектора } \mathbf{E} \text{ сквозь } S \right) + \frac{\text{Электрический ток сквозь } S}{\epsilon_0}. \quad (1.9)$$

Появившаяся в уравнении (1.9) постоянная  $c^2$  — это квадрат скорости света. Ее появление оправдано тем, что магнетизм по существу есть релятивистское проявление электричества. А константа  $\epsilon_0$  поставлена для того, чтобы возникли привычные единицы силы электрического тока.

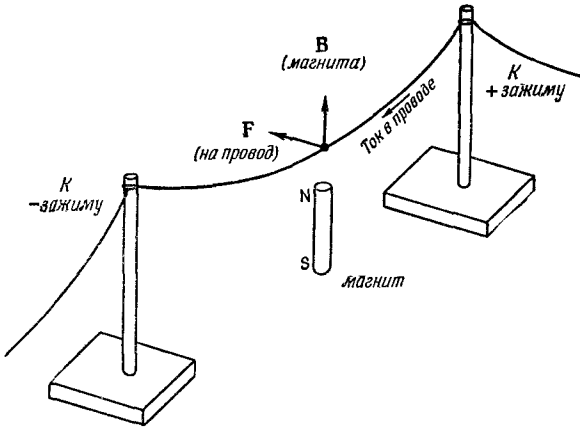
Уравнения (1.6) — (1.9), а также уравнение (1.1) — это все законы электродинамики \*. Как вы помните, законы Ньютона написать было очень просто, но из них зато вытекало множество сложных следствий, так что понадобилось немало времени, чтобы изучить их все. Законы электромагнетизма написать несравненно трудней, и мы должны ожидать, что следствия из них будут намного более запутаны, и теперь нам придется очень долго в них разбираться.

Мы можем проиллюстрировать некоторые законы электродинамики серией несложных опытов, которые смогут нам показать хотя бы качественно взаимоотношения электрического и магнитного полей. С первым членом в уравнении (1.1) вы знакомитесь, расчесывая себе волосы, так что о нем мы говорить не будем. Второй член в уравнении (1.1) можно продемонстрировать, пропустив ток по проволоке, висящей над магнитным бруском, как показано на фиг. 1.6. При включении тока проволока сдвигается из-за того, что на нее действует сила  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . Когда по проводу идет ток, заряды внутри него движутся, т. е. имеют скорость  $\mathbf{v}$ , и на них действует магнитное поле магнита, в результате чего провод отходит в сторону.

Когда провод сдвигается влево, можно ожидать, что сам магнит испытает толчок вправо. (Иначе все это устройство можно было бы водрузить на платформу и получить реактивную систему, в которой импульс не сохранялся бы!) Хотя сила чересчур мала, чтобы можно было заметить движение магнитной палочки, однако движение более чувствительного устройства, скажем стрелки компаса, вполне заметно.

Каким же образом ток в проводе толкает магнит? Ток, текущий по проводу, создает вокруг него свое собственное магнитное поле, которое и действует на магнит. В соответствии с последним членом в уравнении (1.9) ток должен приводить к циркуляции вектора  $\mathbf{B}$ ; в нашем случае линии поля  $\mathbf{B}$  замкнуты вокруг провода, как показано на фиг. 1.7. Именно это поле  $\mathbf{B}$  и ответственно за силу, действующую на магнит.

\* Нужно только договориться о выборе знака циркуляции.

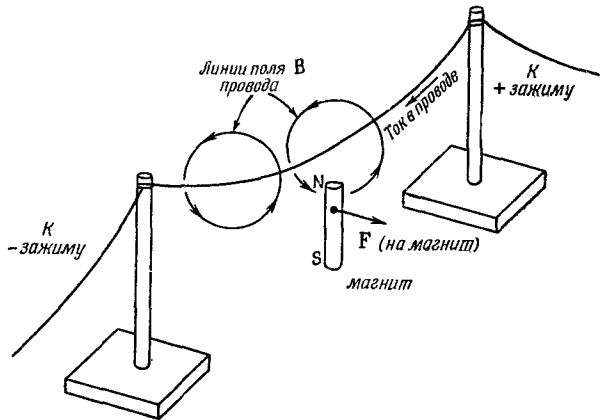


Ф и г. 1.6. Магнитная палочка, создающая возле провода поле  $\mathbf{B}$ .

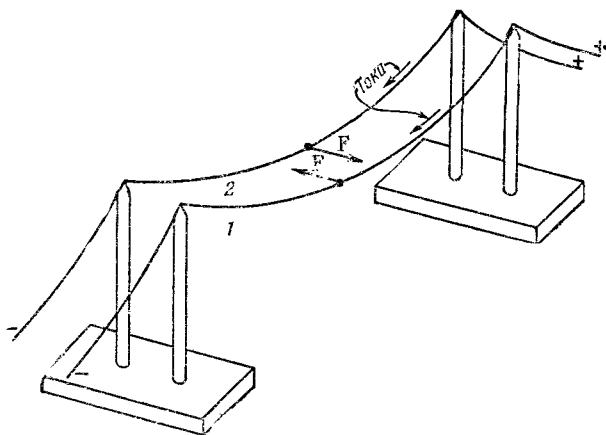
Когда по проводу идет ток, провод смещается из-за действия силы  $\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ .

Уравнение (1.9) сообщает нам, что при данной величине тока, текущего по проводу, циркуляция поля  $\mathbf{B}$  одинакова для любой кривой, окружающей провод. У тех кривых (окружностей, например), которые лежат далеко от провода, длина оказывается больше, так что касательная компонента  $\mathbf{B}$  должна убывать. Вы видите, что следует ожидать линейного убывания  $\mathbf{B}$  с удалением от длинного прямого провода.

Мы сказали, что ток, текущий по проводу, образует вокруг него магнитное поле и что если имеется магнитное поле, то оно



Ф и г. 1.7. Магнитное поле тока, текущего по проводу, действует на магнит с некоторой силой.



*Фиг. 1.8. Два провода, по которым течет ток, тоже действуют друг на друга с определенной силой.*

действует с некоторой силой на провод, по которому идет ток. Значит, следует думать, что если магнитное поле будет создано током, текущим в одном проводе, то оно будет действовать с некоторой силой и на другой провод, по которому тоже идет ток. Это можно показать, применив два свободно подвешенных провода (фиг. 1.8). Когда направления токов одинаково, провода притягиваются, а когда направления противоположны — отталкиваются.

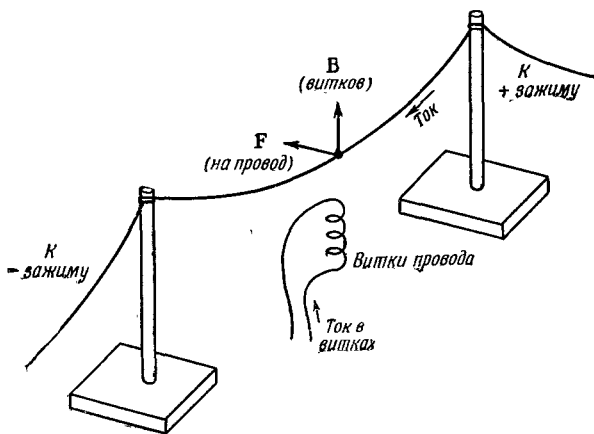
Короче говоря, электрические токи, как и магниты, создают магнитные поля. Но тогда что же такое магнит? Раз магнитные поля создаются движущимися зарядами, то не может ли оказаться, что магнитное поле, созданное куском железа, на самом деле есть результат действия токов? Видимо, так оно и есть. В наших опытах можно заменить магнитную палочку катушкой с навитой проволокой, как показано на фиг. 1.9. Когда ток проходит по катушке (как и по прямому проводу над ней), наблюдается точно такое же движение проводника, как и прежде, когда вместо катушки стоял магнит. Все выглядит так, как если бы внутри куска железа непрерывно циркулировал ток. Действительно, свойства магнитов можно понять как непрерывный ток внутри атомов железа. Сила, действующая на магнит на фиг. 1.7, объясняется вторым членом в уравнении (1.1).

Откуда же берутся эти токи? Один источник — это движение электронов по атомным орбитам. У железа это не так, но у некоторых материалов происхождение магнетизма именно таково. Кроме вращения вокруг ядра атома, электрон вращается

еще вокруг своей собственной оси (что-то похожее на вращение Земли); вот от этого-то вращения и возникает ток, создающий магнитное поле железа. (Мы сказали «что-то похожее на вращение Земли», потому что на самом деле в квантовой механике вопрос столь же глубокий, что не укладывается достаточно хорошо в классические представления.) В большинстве веществ часть электронов вертится в одну сторону, другая — в другую, так что магнетизм исчезает, а в железе (по таинственной причине, о которой мы поговорим позже) многие электроны вращаются так, что их оси смотрят в одну сторону и это служит источником магнетизма.

Поскольку поля магнитов порождаются токами, то в уравнения (1.8) и (1.9) нет нужды вставлять добавочные члены, учитывающие существование магнитов. В этих уравнениях речь идет о *всех* токах, включая круговые токи от вращающихся электронов, и закон оказывается правильным. Надо еще отметить, что, согласно уравнению (1.8), магнитных зарядов, подобных электрическим зарядам, стоящим в правой части уравнения (1.6), не существует. Они никогда не были обнаружены.

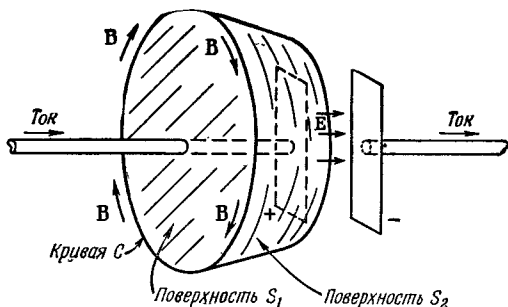
Первый член в правой части уравнения (1.9) был открыт Максвеллом теоретически; он очень важен. Он говорит, что изменение *электрических* полей вызывает магнитные явления. На самом деле без этого члена уравнение утеряло бы смысл, ведь без него исчезли бы токи в незамкнутых контурах. А на деле такие токи существуют; об этом говорит следующий пример. Представьте конденсатор, составленный из двух плоских



Ф и г. 1.9. Магнитная палочка, показанная на фиг. 1.6, может быть заменена катушкой, по которой течет ток.

На провод по-прежнему будет действовать сила.

Ф и г. 1.10. Циркуляция поля  $\mathbf{V}$  по кривой  $C$  определяется либо током, текущим сквозь поверхность  $S_1$ , либо быстрой изменением потока поля  $\mathbf{E}$  сквозь поверхность  $S_2$ .



пластин. Он заряжается током, притекающим к одной из пластин и оттекающим от другой, как показано на фиг. 1.10. Проведем вокруг одного из проводов кривую  $C$  и натянем на нее поверхность (поверхность  $S_1$ ), которая пересечет провод. В соответствии с уравнением (1.9) циркуляция поля  $\mathbf{V}$  по кривой  $C$  дается величиной тока в проводе (умноженной на  $c^2$ ). Но что будет, если мы натянем на кривую *другую* поверхность  $S_2$  в форме чашки, доньшко которой расположено между пластинами конденсатора и не касается провода? Через такую поверхность никакой ток, конечно, не проходит. Но ведь простое изменение положения и формы воображаемой поверхности не должно изменять реального магнитного поля! Циркуляция поля  $\mathbf{V}$  должна остаться прежней. И действительно, первый член в правой части уравнения (1.9) так комбинируется со вторым членом, что для обеих поверхностей  $S_1$  и  $S_2$  возникает одинаковый эффект. Для  $S_2$  циркуляция вектора  $\mathbf{V}$  выражается через степень изменения потока вектора  $\mathbf{E}$  от одной пластины к другой. И получается, что изменение  $\mathbf{E}$  связано с током как раз так, что уравнение (1.9) оказывается выполненным. Максвелл видел необходимость этого и был первым, кто написал полное уравнение.

С помощью устройства, изображенного на фиг. 1.6, можно продемонстрировать другой закон электромагнетизма. Отсоединим концы висящей проволоочки от батарейки и присоединим их к гальванометру — прибору, регистрирующему прохождение тока по проводу. Стоит лишь в поле магнита *качнуть* проволоку, как по ней сразу пойдет ток. Это новое следствие уравнения (1.1): электроны в проводе почувствуют действие силы  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . Скорость их сейчас направлена в сторону, потому что они отклоняются вместе с проволоочкой. Это  $\mathbf{v}$  вместе с вертикальным направленным полем  $\mathbf{B}$  магнита приводит к силе, действующей на электроны *вдоль* провода, и электроны отправляются к гальванометру.

Положим, однако, что мы оставили проволочку в покое и принялись перемещать магнит. Мы чувствуем, что никакой

разницы быть не должно, ведь относительное движение то же самое, и впрямь ток по гальванометру идет. Но как же магнитное поле действует на покоящиеся заряды? В соответствии с уравнением (1.4) должно возникнуть электрическое поле. Двигающийся магнит должен создавать электрическое поле. На вопрос — как это происходит, отвечает количественно уравнение (1.7). Это уравнение описывает множество практически очень важных явлений, происходящих в электрических генераторах и трансформаторах.

Наиболее замечательное следствие наших уравнений — это то, что, сочетая уравнения (1.7) и (1.9), можно понять, отчего электромагнитные явления распространяются на дальние расстояния. Причина этого, грубо говоря, примерно такова: предположим, что где-то имеется магнитное поле, которое возрастает по величине, скажем, оттого, что внезапно пустили ток по проводу. Тогда из уравнения (1.7) следует, что должна возникнуть циркуляция электрического поля. Когда электрическое поле начинает постепенно возрастать для возникновения циркуляции, тогда, согласно уравнению (1.9), должна возникнуть и магнитная циркуляция. Но возрастание *этого* магнитного поля создаст новую циркуляцию электрического поля и т. д. Таким способом поля распространяются сквозь пространство, не нуждаясь ни в зарядах, ни в токах нигде, кроме источника полей. Именно таким способом мы *видим* друг друга! Все это спрятано в уравнениях электромагнитного поля.

## § 5. Что это такое — «поля»?

Сделаем теперь несколько замечаний о принятом нами способе рассмотрения этого вопроса. Вы можете сказать: «Все эти потоки и циркуляции чересчур абстрактны. Пусть в каждой точке пространства есть электрическое поле, кроме того, имеются эти самые „законы“. Но что же там *на самом деле* происходит? Почему вы не можете объяснять все это, скажем, тем, что что-то, что бы это ни было, протекает между зарядами?» Все зависит от ваших предрассудков. Многие физики часто говорят, что прямое действие сквозь пустоту, сквозь ничто, немислимо. (Как они могут называть идею немислимой, если она уже вымыслена?) Они говорят: «Посмотрите, ведь единственные силы, которые нам известны, — это прямое действие одной части вещества на другую. Невозможно, чтобы существовала сила без чего-то, передающего ее». Но что в действительности происходит, когда мы изучаем «прямое действие» одного куска вещества на другой? Мы обнаруживаем, что первый из них вовсе не «уширается» во второй; они слегка отстоят друг от друга, и между ними существуют электрические силы, действующие в малом

масштабе. Иначе говоря, мы обнаруживаем, что собрались объяснить так называемое «действие посредством прямого контакта» — при помощи картины электрических сил. Конечно, неразумно пытаться стоять на том, что электрическая сила должна выглядеть так же, как старый привычный мышечный тяни-толкай, если все равно оказывается, что все наши попытки тянуть или толкать приводят к электрическим силам! Единственно разумная постановка вопроса — спросить, какой путь рассмотрения электрических эффектов *наиболее удобен*. Одни предпочитают представлять их как взаимодействие зарядов на расстоянии и пользоваться сложным законом. Другим по душе силовые линии. Они их все время чертят, и им кажется, что писать разные  $E$  и  $V$  слишком абстрактно. Но линии поля — это всего лишь грубый способ описания поля, и очень трудно сформулировать строгие, количественные законы непосредственно в терминах линий поля. К тому же понятие о линиях поля не содержит глубочайшего из принципов электродинамики — принципа суперпозиции. Даже если мы знаем, как выглядят силовые линии одной совокупности зарядов, затем другой совокупности, мы все равно не получим никакого представления о картине силовых линий, когда обе совокупности зарядов действуют вместе. А с математических позиций наложение проделать легко, надо просто сложить два вектора. У силовых линий есть свои достоинства, они дают наглядную картину, но есть у них и свои недостатки. Способ рассуждений, основанный на понятии о непосредственном взаимодействии (близкодействии), тоже обладает большими преимуществами, пока речь идет о покоящихся электрических зарядах, но обладает и большими недостатками, если иметь дело с быстрым движением зарядов.

Лучше всего пользоваться абстрактным представлением о поле. Жаль, конечно, что оно абстрактно, но ничего не поделаешь. Попытки представить электрическое поле как движение каких-то зубчатых колесиков или с помощью силовых линий или как напряжения в каких-то материалах потребовали от физиков больше усилий, чем понадобилось бы для того, чтобы просто получить правильные ответы на задачи электродинамики. Интересно, что правильные уравнения поведения света в кристаллах были выведены Мак-Куллохом еще в 1843 г. Но все ему говорили: «Позвольте, ведь нет же ни одного реального материала, механические свойства которого могли бы удовлетворять этим уравнениям, а поскольку свет — это колебания, которые должны происходить в *чем-то*, постольку мы не можем поверить этим абстрактным уравнениям». Если бы у его современников не было этой предвзятости, они бы поверили в правильные уравнения поведения света в кристаллах намного раньше того, чем это на самом деле случилось.



А что касается магнитных полей, то можно высказать следующее замечание. Предположим, что вам в конце концов удалось нарисовать картину магнитного поля при помощи каких-то линий или каких-то шестеренок, катящихся сквозь пространство. Тогда вы попытаетесь объяснить, что происходит с двумя зарядами, движущимися в пространстве параллельно друг другу и с одинаковыми скоростями. Раз они движутся, то они ведут себя как два тока и обладают связанным с ними магнитным полем (как токи в проводах на фиг. 1.8). Но наблюдатель, который мчится вровень с этими двумя зарядами, будет считать их неподвижными и скажет, что *никакого* магнитного поля там нет. И «шестеренки», и «линии» пропадают, когда вы мчитесь рядом с предметом! Все, чего вы добились, — это изобрели *новую* проблему. Куда могли деваться эти шестерни?! Если вы чертили силовые линии — у вас появится та же забота. Не только нельзя определить, движутся ли эти линии вместе с зарядами или не движутся, но и вообще они могут полностью исчезнуть в какой-то системе координат.

Мы бы еще хотели подчеркнуть, что явление магнетизма — это на самом деле чисто релятивистский эффект. В только что рассмотренном случае двух зарядов, движущихся параллельно друг другу, можно было бы ожидать, что понадобится сделать релятивистские поправки к их движению порядка  $v^2/c^2$ . Эти поправки должны отвечать магнитной силе. Но как быть с силой взаимодействия двух проводников в нашем опыте (фиг. 1.8)? Ведь там магнитная сила — это *вся* действующая сила. Она не очень-то смахивает на «релятивистскую поправку». Кроме того, если оценить скорости электронов в проводе (вы сами можете это проделать), то вы получите, что их средняя скорость вдоль провода составляет около  $0,01$  см/сек. Итак,  $v^2/c^2$  равно примерно  $10^{-25}$ . Вполне пренебрежимая «поправка». Но нет! Хотя в этом случае магнитная сила и составляет  $10^{-25}$  от «нормальной» электрической силы, действующей между движущимися электронами, вспомните, что «нормальные» электрические силы исчезли в результате почти идеального баланса из-за того, что количества протонов и электронов в проводах одинаковы. Этот баланс намного более точен, чем  $1/10^{25}$ , и тот малый релятивистский член, который мы называем магнитной силой, — это единственный остающийся член. Он становится преобладающим.

Почти полное взаимное уничтожение электрических эффектов и позволило физикам изучить релятивистские эффекты (т. е. магнетизм) и открыть правильные уравнения (с точностью до  $v^2/c^2$ ), даже не зная, что в них происходит. И по этой-то причине после открытия принципа относительности законы электромагнетизма не пришлось менять. В отличие от механики они уже были правильны с точностью до  $v^2/c^2$ .

## § 6. Электромагнетизм в науке и технике

В заключение мне хочется закончить эту главу следующим рассказом. Среди многих явлений, изучавшихся древними греками, были два очень странных. Первое: натертый кусочек янтаря мог поднять маленькие клочки папируса, и второе: близ города Магнезия были удивительные камни, которые притягивали железо. Странно думать, что это были единственные известные грекам явления, в которых проявлялись электричество и магнетизм. А почему только это и было им известно, объясняется прежде всего сказочной точностью, с которой сбалансированы в телах заряды (о чем мы уже упоминали). Ученые, жившие в позднейшие времена, раскрыли одно за другим новые явления, в которых выражались некоторые стороны тех же эффектов, связанных с янтарем и с магнитным камнем. Сейчас нам ясно, что и явления химического взаимодействия и в конечном счете саму жизнь нужно объяснять с помощью понятий электромагнетизма.

И по мере того как развивалось понимание предмета электромагнетизма, появлялись такие технические возможности, о которых древние не могли даже мечтать: стало возможным посылать сигналы по телеграфу на большие расстояния, беседовать с человеком, который находится за много километров от вас, без помощи какой-либо линии связи, включать огромные энергетические системы — большие водяные турбины, соединенные многосоткилометровыми линиями проводов с другой машиной, которую пускает в ход один рабочий простым поворотом колеса; многие тысячи разветвляющихся проводов и десятки тысяч машин в тысячах мест приводят в движение различные механизмы на фабриках и в квартирах. Все это вращается, двигается, работает благодаря нашему знанию законов электромагнетизма.

Сегодня мы используем и еще более тонкие эффекты. Гигантские электрические силы можно сделать очень точными, их можно контролировать и использовать на всякий лад. Наши приборы так чувствительны, что мы способны узнать, что сейчас делает человек только по тому, как он воздействует на электроны, заключенные в тонком металлическом прутике за сотни километров от него. Для этого только нужно приспособить этот прутик в качестве телевизионной антенны!

В истории человечества (если посмотреть на нее, скажем, через десять тысяч лет) самым значительным событием XIX столетия, несомненно, будет открытие Максвеллом законов электродинамики. На фоне этого важного научного открытия гражданская война в Америке в том же десятилетии будет выглядеть мелким провинциальным происшествием.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ  
ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

## § 1. Понимание физики

Физик должен обладать умением подходить к задаче с разных точек зрения. Точный анализ реальных физических проблем обычно крайне сложен, и любое конкретное физическое явление может оказаться слишком запутанным и неподдающимся анализу путем решения дифференциальных уравнений. Но можно все же получить хорошее представление о поведении системы, выработав в себе особую способность чувствовать характер решения в различных обстоятельствах. Этой цели хорошо служат представления о линиях поля, о емкостном, индуктивном и активном сопротивлениях. Мы потратим достаточно много времени на их изучение. Это поможет нам приобрести способность ощущать, что происходит в тех или иных электромагнитных явлениях. С другой стороны, ни одна из вспомогательных, эвристических моделей (например, картина силовых линий) на самом деле не может вместить в себя адекватно и точно все события. Имеется лишь один точный способ представления законов — способ дифференциальных уравнений. Уравнения обладают тем преимуществом, что, во-первых, они фундаментальны, а во-вторых (насколько нам известно), точны. Если вы их выучили, вы всегда можете к ним вернуться. В них нет ничего, что следовало бы потом забыть.

Чтобы начать понимать, что должно произойти в тех или иных условиях, вам понадобится какое-то время. Вам придется порешать уравнения, и всякий раз, когда вы решите их, вы тем самым узнаете что-то новое о характере решений. Чтобы запомнить эти решения, по-

§1. Понимание физики

§2. Скалярные и векторные поля —  $T$  и  $h$ 

§3. Производные полей — градиент

§4. Оператор  $\nabla$ §5. Операции с  $\nabla$ 

§6. Дифференциальное уравнение потока тепла

§7. Вторые производные векторных полей

§8. Подвохи

*Повторить:* гл. 11 (вып. 1) «Векторы»

лезно также сформулировать их смысл на языке линий поля и иных подобных понятий. Таков путь, на котором приходит истинное «понимание» уравнений. В этом и заключается разница между физикой и математикой. Математики или люди с математическим складом ума часто при «изучении» физики теряют физику из виду и впадают в заблуждение. Они говорят: «Послушайте, эти дифференциальные уравнения — уравнения Максвелла — ведь это все, что есть в электродинамике; ведь сами физики признают, что нет ничего, что бы не содержалось в этих уравнениях. Уравнения эти сложны; ладно, но это всего лишь математические уравнения, и если я разберусь в них математически, я разберусь и в физике». Но ничего из этого не выходит. Математики, которые подходят к физике с этой точки зрения (а таких очень много), обычно не делают большого вклада в физику, да, кстати, и в математику. Их постигает неудача оттого, что настоящие физические ситуации реального мира так запутаны, что нужно обладать гораздо более широким пониманием уравнений.

Дирак объяснил, что значит действительно понять уравнение — понять, не ограничиваясь его строгим математическим смыслом. Он сказал: «Я считаю, что понял смысл уравнения, если в состоянии представить себе общий вид его решения, не решая его непосредственно». Значит, если у нас есть способ узнать, что случится в данных условиях, не решая уравнения непосредственно, мы «понимаем» уравнения в применении к этим условиям. Физическое понимание — это нечто неточное, неопределенное и абсолютно нематематическое, но для физика оно совершенно необходимо.

Обычно курс физики подобного рода строится так, что физические представления развиваются постепенно: начиная с самых простейших явлений, переходят ко все более и более сложным. Кое-что из изученного при этом неминуемо забывается (то, что верно лишь в определенных условиях, а не всегда). К примеру, «закон» обратных квадратов для электрической силы верен *не всегда*. Нам больше по душе обратный подход. Лучше начать с *полных, самых общих* законов, а затем повернуть вспять и применять их к простым задачам, развивая физические представления по мере продвижения вперед. Так мы и собираемся сделать.

Наш подход совершенно противоположен подходу историческому, когда изложение слепо следует за экспериментами, в которых впервые была получена нужная информация. Но ведь физику развивают множество очень умных людей уже свыше 200 лет, а у нас времени мало и нам нужно овладеть знаниями побыстрее. Поэтому мы не можем охватить все, что они сделали. Так что в этих лекциях мы будем вынуждены пренебречь историей предмета и не будем рассказывать об опытах. Мы

Как писать векторы от руки

Некоторые пишут так:

$\vec{E}$  или  $\hat{E}$  или просто  $\bar{E}$ .

надеемся, что вы восполните пропущенное на лабораторных занятиях; и, конечно, очень полезно почитать статьи и книги по истории физики.

## § 2. Скалярные и векторные поля — $T$ и $h$

Мы начинаем сейчас рассмотрение абстрактного, математического подхода к теории электричества и магнетизма. Наша цель — объяснить смысл законов, написанных в гл. 1. Но для этого надо сперва объяснить новые особенные обозначения, которые мы хотим использовать. Давайте поэтому на время позабудем электромагнетизм и разберемся в математике векторных полей. Она очень важна не только в электромагнетизме, но и во многих физических обстоятельствах, подобно тому как обычное дифференциальное и интегральное исчисление важно во всех областях физики. Мы переходим к дифференциальному исчислению векторов.

Ниже перечислены некоторые сведения из алгебры векторов. Считается, что вы с ними уже знакомы

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{Скаляр} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \text{Вектор}, \quad (2.2)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_z = A_x B_y - A_y B_x,$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_x = A_y B_z - A_z B_y,$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_y = A_z B_x - A_x B_z,$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}). \quad (2.6)$$

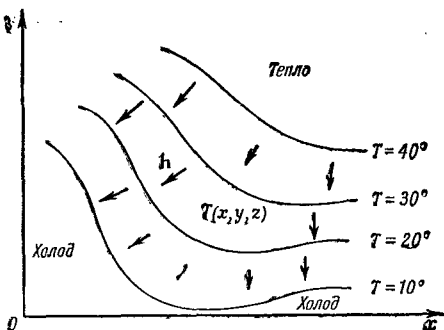
Мы будем также пользоваться следующими двумя равенствами:

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}. \quad (2.8)$$

**Ф и г. 2.1.** Температура  $T$  — пример скалярного поля.

С каждой точкой  $(x, y, z)$  в пространстве связывается число  $T(x, y, z)$ . Все точки на поверхности с пометкой  $T=20^\circ$  (изображенной в виде кривой при  $z=0$ ) имеют одну и ту же температуру. Стрелки — это примеры вектора потока тепла  $h$ .

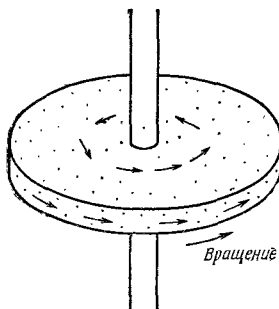


Уравнение (2.7) справедливо, конечно, только при  $\Delta x, \Delta y$  и  $\Delta z \rightarrow 0$ .

Простейшее из физических полей — скалярное. Поле, как вы помните, называется величина, зависящая от положения в пространстве. *Скалярное поле* — это просто такое поле, которое в каждой точке характеризуется одним-единственным числом — скаляром. Это число, конечно, может меняться во времени, но пока мы на это не будем обращать внимания. (Речь будет идти о том, как поле выглядит в данное мгновение.) В качестве примера скалярного поля рассмотрим брусок из какого-то материала. В одних местах брусок нагрет, в других — остужен, так что его температура меняется от точки к точке каким-то сложным образом. Температура тогда будет функцией  $x, y$  и  $z$  — положения в пространстве, измеренного в прямоугольной системе координат. Температура — это скалярное поле.

Один способ представить себе скалярное поле — это вообразить «контуры», т. е. мысленные поверхности, проведенные через точки с одинаковыми значениями поля, подобно горизонталям на картах, соединяющим точки на одной высоте над уровнем моря. Для температурного поля контуры носят название «изотермические поверхности», или изотермы. На фиг. 2.1 показано температурное поле и зависимость  $T$  от  $x$  и  $y$  при  $z=0$ . Проведено несколько изотерм.

Поля бывают также векторными. Идея их очень проста. В каждой точке пространства задается вектор. Он меняется от точки к точке. Рассмотрим в виде примера вращающееся тело. Скорость материала тела во всякой точке — это вектор, который является функцией ее положения (фиг. 2.2). Другой пример — поток тепла в бруске из некоторого материала. Если в одной части бруска температура выше, а в другой — ниже, то от горячей части к холодной будет идти поток тепла. Тепло в разных частях бруска будет растекаться в различных направлениях. Поток тепла — это величина, имеющая направление;



Ф и г. 2.2. Скорости атомов во вращающемся теле — пример векторного поля.

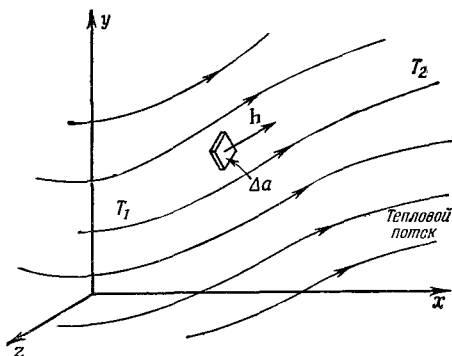
обозначим ее  $\mathbf{h}$ ; длина этого вектора пусть измеряет количество протекающего тепла. Векторы потока тепла также изображены на фиг. 2.1.

Определим теперь  $\mathbf{h}$  более точно. Длина вектора потока тепла в данной точке — это количество тепловой энергии, проходящее за единицу времени и в пересчете на единицу площади сквозь бесконечно малый элемент поверхности, перпендикулярный к направлению потока. Вектор указывает направление потока (фиг. 2.3). В буквенных обозначениях: если  $\Delta J$  — тепловая энергия, протекающая за единицу времени сквозь элемент поверхности  $\Delta a$ , то

$$\mathbf{h} = \frac{\Delta J}{\Delta a} \mathbf{e}_f, \quad (2.9)$$

где  $\mathbf{e}_f$  — единичный вектор направления потока.

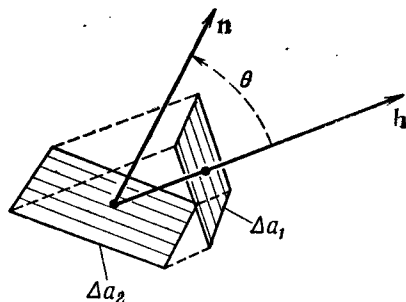
Вектор  $\mathbf{h}$  можно определить и иначе — через его компоненты. Зададим себе вопрос, сколько тепла протекает через малую поверхность под произвольным углом к направлению потока. На фиг. 2.4 мы изобразили малую поверхность  $\Delta a_2$  под некоторым углом к поверхности  $\Delta a_1$ , которая перпендикулярна к потоку. Единичный вектор  $\mathbf{n}$  перпендикулярен к поверхности



Ф и г. 2.3. Тепловой поток — векторное поле.

Вектор  $\mathbf{h}$  указывает направление потока. Абсолютная величина его выражает энергию, переносимую за единицу времени через элемент поверхности, ориентированный поперек потока, деленную на площадь элемента поверхности.

Ф и г. 2.4. Тепловые потоки сквозь  $\Delta a_2$  и сквозь  $\Delta a_1$  одинаковы.



$\Delta a_2$ . Угол  $\theta$  между  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{h}$  равен углу между поверхностями (так как  $\mathbf{h}$  — нормаль к  $\Delta a_1$ ). Чему теперь равен поток тепла через  $\Delta a_2$  на единицу площади? Потоки сквозь  $\Delta a_2$  и  $\Delta a_1$  равны между собой, отличаются только площади. Действительно,  $\Delta a_1 = \Delta a_2 \cos \theta$ . Поток тепла через  $\Delta a_2$  равен

$$\frac{\Delta J}{\Delta a_2} = \frac{\Delta J}{\Delta a_1} \cos \theta = \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}. \quad (2.10)$$

Поясним это уравнение: поток тепла (в единицу времени и на единицу площади) через произвольный элемент поверхности с единичной нормалью  $\mathbf{n}$  равен  $\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}$ . Можно еще сказать так: компонента потока тепла, перпендикулярная к элементу поверхности  $\Delta a_2$ , равна  $\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}$ . Можно, если мы хотим, считать эти утверждения *определением*  $\mathbf{h}$ . Сходные идеи мы применим и к другим векторным полям.

### § 3. Производные полей — градиент

Когда поля меняются со временем, то их изменение можно описать, задав их производные по  $t$ . Мы хотим также описать и их изменение в пространстве, потому что мы интересуемся связью, скажем, между температурой в некоторой точке и в точке с ней рядом. Как же задать производную температуры по координате? Дифференцировать температуру по  $x$ ? Или по  $y$ , или по  $z$ ?

Осмысленные физические законы не зависят от ориентации системы координат. Поэтому их нужно писать так, чтобы по обе стороны знака равенства стояли скаляры или векторы. Что же такое производная скалярного поля, скажем,  $\partial T / \partial x$ ? Скаляр ли это, или вектор, или еще что? Это, как легко понять, ни то ни другое, потому что если взять другую ось  $x$ , то  $\partial T / \partial x$  изменится. Но заметьте: у нас есть три возможных производных:  $\partial T / \partial x$ ,  $\partial T / \partial y$  и  $\partial T / \partial z$ . Три сорта производных, а ведь мы знаем, что нужно как раз три числа, чтобы образовать вектор.



Может быть, эти три производные и представляют собой компоненты вектора:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \text{Вектор ли это?} \quad (2.11)$$

Ясно, конечно, что, вообще говоря, не из *любых* трех чисел можно составить вектор. О векторе можно говорить только тогда, когда при повороте системы координат компоненты преобразуются по правильному закону. Так что следует проследить, как меняются эти производные при повороте системы координат. Мы покажем, что (2.11) — действительно вектор. Производные действительно преобразуются при вращении системы координат так, как полагается.

В этом можно убедиться по-разному. Можно, например, задать себе вопрос, ответ на который не должен зависеть от системы координат, и попытаться выразить ответ в «инвариантной» форме. К примеру, если  $S = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  и если  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  — векторы, то мы знаем (это доказано в вып. 1, гл. 11), что  $S$  — скаляр. Мы *знаем*, что  $S$  — скаляр, не проверяя, меняется ли он при изменении системы координат. Ему *ничего иного не остается*, раз он является скалярным произведением двух векторов. Подобным же образом, если мы *знаем*, что  $\mathbf{A}$  — вектор, и у нас есть три числа  $B_1, B_2, B_3$ , и мы обнаруживаем, что

$$A_x B_1 + A_y B_2 + A_z B_3 = S \quad (2.12)$$

(где  $S$  в любой системе координат одно и то же), то три числа  $B_1, B_2, B_3$  *обязаны* быть компонентами  $B_x, B_y, B_z$  некоторого вектора  $\mathbf{B}$ .

Рассмотрим теперь температурное поле. Возьмем две точки  $P_1$  и  $P_2$ , разделенные маленьким расстоянием  $\Delta \mathbf{R}$ . Температура в  $P_1$  есть  $T_1$ , а в  $P_2$  она равна  $T_2$ , и их разница  $\Delta T = T_2 - T_1$ . Температура в этих реальных физических точках, конечно, не зависит от того, какие оси мы выбрали для измерения координат. В частности,  $\Delta T$  — тоже число, не зависящее от системы координат. Это скаляр.

Выбрав удобную систему координат, мы можем написать

$$T_1 = T(x, y, z) \quad \text{и} \quad T_2 = T(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z),$$

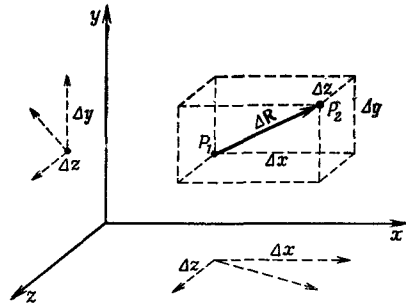
где  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  — компоненты вектора  $\Delta \mathbf{R}$  (фиг. 2.5). Вспомнив (2.7), напомним

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \Delta z. \quad (2.13)$$

Слева в (2.13) стоит скаляр, а справа — сумма трех произведений каких-то чисел на  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ , которые являются компонентами вектора. Значит, три числа

$$\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$$

Фиг. 2.5. Вектор  $\Delta R$  с компонентами  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ .



— тоже  $x$ -,  $y$ - и  $z$ -компоненты вектора. Мы напомним этот новый вектор при помощи символа  $\nabla T$ . Символ  $\nabla$  (называемый набла) — это  $\Delta$  вверх ногами; он напоминает нам о дифференцировании. Читают  $\nabla T$  по-разному: «набла  $T$ », или «градиент  $T$ », или «grad  $T$ »:

$$\text{grad } T = \nabla T = \left( \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)^* \quad (2.14)$$

С этим обозначением (2.13) переписывается в более компактной форме

$$\Delta T = \nabla T \cdot \Delta R. \quad (2.15)$$

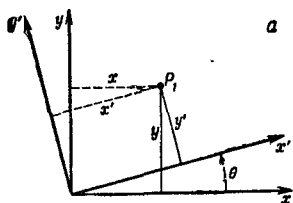
Или, выражая словами: разница температур в двух близких точках есть скалярное произведение градиента  $T$  на вектор смещения второй точки относительно первой. Форма (2.15) также служит иллюстрацией к нашему утверждению, что  $\nabla T$  — действительно вектор.

Быть может, вы еще не убеждены? Тогда докажем иначе. (Хотя, взглядевшись внимательно, вы увидите, что это на самом деле то же самое доказательство, только подлиннее!) Мы покажем, что компоненты  $\nabla T$  преобразуются абсолютно так же, как и компоненты  $R$ , а значит,  $\nabla T$  — тоже вектор в соответствии с первоначальным определением вектора в вып. 1, гл. 11. Мы выберем новую систему координат  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  и в ней вычислим  $\partial T/\partial x'$ ,  $\partial T/\partial y'$ ,  $\partial T/\partial z'$ . Для простоты положим  $z = z'$ , так что о третьей координате мы можем позабыть. (Можете сами заняться проверкой более общего случая.)

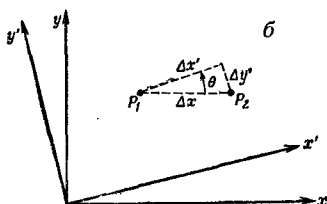
Выберем систему  $x'$ ,  $y'$ , повернутую относительно  $x$ ,  $y$ -системы на угол  $\theta$  (фиг. 2.6, а). Координаты точки  $(x, y)$  в штри-

\* В наших обозначениях выражение  $(a, b, c)$  представляет вектор с компонентами  $a, b, c$ . Если вам нравится пользоваться единичными векторами  $i, j$  и  $k$ , то можно написать

$$\nabla T = i \frac{\partial T}{\partial x} + j \frac{\partial T}{\partial y} + k \frac{\partial T}{\partial z}.$$



Фиг. 2.6. Переход к повернутой системе координат (а) и частный случай интервала  $\Delta R$ , параллельного к оси  $x$  (б).



хованной системе имеют вид

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad (2.16)$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta, \quad (2.17)$$

или, решая относительно  $x$  и  $y$ ,

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta, \quad (2.18)$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta. \quad (2.19)$$

Если всякая пара чисел преобразуется так же, как  $x$  и  $y$ , то она является компонентами вектора.

Рассмотрим теперь разницу в температурах двух соседних точек  $P_1$  и  $P_2$  (фиг. 2.6, б). В координатах  $x$ ,  $y$  запишем

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x, \quad (2.20)$$

так как  $\Delta y = 0$ .

А в штрихованной системе? Там мы бы написали

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x'} \Delta x' + \frac{\partial T}{\partial y'} \Delta y'. \quad (2.21)$$

Глядя на фиг. 2.6, б, мы видим, что

$$\Delta x' = \Delta x \cos \theta \quad (2.22)$$

и

$$\Delta y' = -\Delta x \sin \theta, \quad (2.23)$$

так как  $\Delta y$  отрицательно при положительном  $\Delta x$ . Подставляя в (2.21), получаем

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x'} \Delta x \cos \theta - \frac{\partial T}{\partial y'} \Delta x \sin \theta = \quad (2.24)$$

$$= \left( \frac{\partial T}{\partial x'} \cos \theta - \frac{\partial T}{\partial y'} \sin \theta \right) \Delta x. \quad (2.25)$$

Сравнивая (2.25) с (2.20), мы видим, что

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x'} \cos \theta - \frac{\partial T}{\partial y'} \sin \theta. \quad (2.26)$$

Это уравнение говорит нам, что  $\partial T/\partial x$  получается из  $\partial T/\partial x'$  и  $\partial T/\partial y'$  в точности так же, как  $x$  из  $x'$  и  $y'$  в (2.18). Значит,  $\partial T/\partial x$  — это  $x$ -компонента вектора. Сходные же рассуждения показывают, что  $\partial T/\partial y$  и  $\partial T/\partial z$  суть  $y$ - и  $z$ -компоненты. Стало быть,  $\nabla T$  есть на самом деле вектор. Это векторное поле, образованное из скалярного поля  $T$ .

#### § 4. Оператор $\nabla$

А сейчас мы сделаем крайне занятную и остроумную вещь — одну из тех, которые так украшают математику. Доказательство того, что  $\text{grad } T$ , или  $\nabla T$ , является вектором, не зависит от того, какое скалярное поле мы дифференцируем. Все доводы остались бы в силе, если бы  $T$  было заменено *любым скалярным полем*. А поскольку уравнения преобразований одинаковы независимо от того, что дифференцируется, то можно  $T$  убрать и уравнение (2.26) заменить операторным уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \cos \theta - \frac{\partial}{\partial y'} \sin \theta. \quad (2.27)$$

Как выразился Джинс, мы оставляем операторы «жаждущими продифференцировать что угодно».

Так как сами дифференциальные операторы преобразуются как компоненты векторного поля, то можно назвать их компонентами *векторного оператора*. Можно написать

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right); \quad (2.28)$$

это означает, конечно,

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.29)$$

Мы абстрагировали градиент от  $T$  — в этом и есть остроумие.

Конечно, вы должны все время помнить, что  $\nabla$  — это оператор. Сам по себе он ничего не означает. А если  $\nabla$  сам по себе ничего не означает, то что выйдет, если мы *градиент* помножим на скаляр, например на  $T$ , чтобы получилось произведение  $T\nabla$ ? (Ведь вектор всегда можно умножить на скаляр.) Это опять ничего не означает. Компонента  $x$  этого выражения равна

$$T \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2.30)$$

а это не число, а все еще какой-то оператор. Однако в согласии с алгеброй векторов  $T\nabla$  по-прежнему можно называть вектором.

А сейчас помножим  $\nabla$  на скаляр с другой стороны. Получится произведение  $\nabla T$ . В обычной алгебре

$$TA = AT, \quad (2.31)$$

но нужно помнить, что операторная алгебра немного отличается от обычной векторной. Надо всегда выдерживать правильный порядок операторов, чтобы их операции имели смысл. Тогда у вас трудностей не возникнет, если вы припомните, что оператор  $\nabla$  подчиняется тем же условиям, что и производные. То, что вы дифференцируете, должно быть поставлено справа от  $\nabla$ . Порядок здесь существен.

Если помнить о порядке, то сразу ясно, что  $T\nabla$  — это оператор, а произведение  $\nabla T$  — это уже не «жаждущий» оператор, его жажда утолена. Это физическая величина, имеющая смысл. Он представляет собой скорость пространственного изменения  $T$ :  $x$ -компонента  $\nabla T$  показывает, насколько быстро  $T$  изменяется в  $x$ -направлении. А куда направлен вектор  $\nabla T$ ? Мы знаем, что скорость изменения  $T$  в каком-то направлении — это компонента  $\nabla T$  в этом направлении [см. (2.15)]. Отсюда следует, что направление  $\nabla T$  — это то, по которому  $\nabla T$  обладает самой длинной проекцией; иными словами, то, по которому  $\nabla T$  меняется быстрее всего. Направление градиента  $T$  — это направление быстрого подъема величины  $T$ .

## § 5. Операции с $\nabla$

Можно ли с векторным оператором  $\nabla$  производить другие алгебраические действия? Попробуем скомбинировать его с вектором. Из двух векторов можно составить скалярное произведение, причем двоякого рода:

$$(\text{Вектор}) \cdot \nabla \quad \text{или} \quad \nabla \cdot (\text{Вектор}).$$

Первое выражение пока что ничего не означает — это все еще оператор. Окончательный смысл его зависит от того, на что он будет действовать. А второе произведение — это некое скалярное поле (потому что  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  — всегда скаляр).

Попробуем составить скалярное произведение  $\nabla$  на известное поле, скажем на  $\mathbf{h}$ . Распишем покомпонентно

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \nabla_x h_x + \nabla_y h_y + \nabla_z h_z, \quad (2.32)$$

или

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z}. \quad (2.33)$$

Эта сумма инвариантна относительно преобразования координат

нат. Если выбрать другую систему (отмеченную штрихами), то получилось бы \*

$$\nabla' \cdot \mathbf{h} = \frac{\partial h_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial h_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial h_{z'}}{\partial z'}, \quad (2.34)$$

а это — *то же самое* число, которое получилось бы и из (2.33), хотя с виду оно выглядит иначе, т. е.

$$\nabla' \cdot \mathbf{h} = \nabla \cdot \mathbf{h} \quad (2.35)$$

в любой точке пространства. Итак,  $\nabla \cdot \mathbf{h}$  — это скалярное поле, и оно должно представить собой некоторую физическую величину. Вы должны понимать, что комбинация производных в  $\nabla \cdot \mathbf{h}$  имеет довольно специальный вид. Могут быть и другие комбинации всяческого вида, скажем  $\partial h_y / \partial x$ , которые не являются ни скалярами, ни компонентами векторов.

Скалярная величина  $\nabla \cdot \mathbf{h}$  (Вектор) очень широко применяется в физике. Ей присвоили имя «дивергенция», или «расходимость». Например,

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \text{div } \mathbf{h} = \text{«Дивергенция } \mathbf{h}\text{»}. \quad (2.36)$$

Можно было бы, как и для  $\nabla T$ , описать физический смысл  $\nabla \cdot \mathbf{h}$ . Но мы отложим это до лучших времен.

Посмотрим сначала, что еще можно испечь из векторного оператора  $\nabla$ . Как насчет векторного произведения? Можно надеяться, что

$$\nabla \times \mathbf{h} = \text{Вектор}. \quad (2.37)$$

Компоненты этого вектора можно написать, пользуясь обычным правилом для векторного произведения [см. (2.2)]:

$$(\nabla \times \mathbf{h})_z = \nabla_x h_y - \nabla_y h_x = \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y}. \quad (2.38)$$

Подобно этому,

$$(\nabla \times \mathbf{h})_x = \nabla_y h_z - \nabla_z h_y = \frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} \quad (2.39)$$

и

$$(\nabla \times \mathbf{h})_y = \nabla_z h_x - \nabla_x h_z = \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x}. \quad (2.40)$$

Комбинацию  $\nabla \times \mathbf{h}$  называют «ротор» (пишут  $\text{rot } \mathbf{h}$ ), или (редко) «вихрь  $\mathbf{h}$ » (пишут  $\text{curl } \mathbf{h}$ ). Происхождение этого названия и физический смысл комбинации мы обсудим позже.

\* Мы рассматриваем  $\mathbf{h}$  как физическую величину, зависящую от положения в пространстве, а не как заданную математически функцию трех переменных. Когда  $\mathbf{h}$  «дифференцируется» по  $x$ ,  $y$  и  $z$  или по  $x'$ ,  $y'$  и  $z'$ , то математическое выражение для  $\mathbf{h}$  должно быть предварительно выражено в виде функции соответствующих переменных. Поэтому в новой системе координат мы не отмечаем  $\mathbf{h}$  штрихом.

В итоге мы получили три сорта комбинаций, куда входит  $\nabla$ :

$$\begin{aligned}\nabla T &= \text{grad } T = \text{Вектор,} \\ \nabla \cdot \mathbf{h} &= \text{div } \mathbf{h} = \text{Скаляр,} \\ \nabla \times \mathbf{h} &= \text{rot } \mathbf{h} = \text{Вектор.}\end{aligned}$$

Используя эти комбинации, можно пространственные вариации полей записывать в удобном виде, т. е. в виде, не зависящем от той или иной совокупности осей координат.

В качестве примера применения нашего векторного дифференциального оператора  $\nabla$  выпишем совокупность векторных уравнений, в которой содержатся те самые законы электромагнетизма, которые мы словесно высказали в гл. 1. Их называют уравнениями Максвелла.

#### *Уравнения Максвелла*

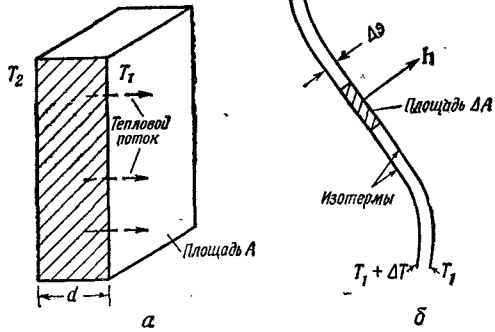
$$\begin{aligned}(1) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ (2) \quad \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ (3) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ (4) \quad c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0},\end{aligned} \tag{2.41}$$

где  $\rho$  ( $\rho_0$ ) — «плотность электрического заряда» (количество заряда в единице объема), а  $\mathbf{j}$  — «плотность электрического тока» (скорость протекания заряда сквозь единицу площади). Эти четыре уравнения содержат в себе законченную классическую теорию электромагнитного поля. Видите, какой элегантно и простой записи мы добились с помощью наших новых обозначений!

### **§ 6. Дифференциальное уравнение потока тепла**

Приведем другой пример векторной записи физического закона. Этот закон не из точных, но во многих металлах и других материалах, проводящих тепло, он проявляется совершенно четко. Известно, что если взять плиту из какого-то материала и нагреть одну ее сторону до температуры  $T_2$ , а другую охладить до  $T_1$ , то тепло потечет от  $T_2$  к  $T_1$  (фиг. 2.7, а). Поток тепла пропорционален площади торцов  $A$  и разнице температур. Кроме того, он обратно пропорционален расстоянию между торцами. (Для заданной разницы температур чем тоньше плита, тем мощнее поток тепла.) Обозначая через  $J$

Фиг. 2.7. Тепловой поток через плиту (а) и бесконечно малая плита, параллельная изотермической поверхности в большом блоке вещества (б).



тепловую энергию, проходящую сквозь плиту за единицу времени, мы напишем

$$J = \kappa (T_2 - T_1) \frac{A}{d}. \quad (2.42)$$

Коэффициент пропорциональности  $\kappa$  (каша) называется *теплопроводностью*.

Что произойдет в более сложных случаях, скажем, в блоке материала необычной формы, в котором температура как-то прихотливо меняется? Рассмотрим тонкий слой материала и представим себе плиту наподобие изображенной на фиг. 2.7, а, но в миниатюре. Ориентируем ее торцы параллельно изотермическим поверхностям (фиг. 2.7, б), так что для этой малой плиты выполняется уравнение (2.42).

Если площадь этой плиты  $\Delta A$ , то поток тепла за единицу времени равен

$$\Delta J = \kappa \Delta T \frac{\Delta A}{\Delta s}, \quad (2.43)$$

где  $\Delta s$  — толщина плиты. Но  $\Delta J / \Delta A$  мы раньше определили как абсолютную величину  $h$  — вектора, направленного туда, куда течет тепло. Тепло течет от  $T_1 + \Delta T$  к  $T_1$ , так что вектор  $h$  перпендикулярен изотермам (фиг. 2.7, б). Далее,  $\Delta T / \Delta s$  как раз равно быстроте изменения  $T$  с изменением положения. А поскольку изменения положения перпендикулярны изотермам, то наше  $\Delta T / \Delta s$  — это максимальная скорость изменения. Она равна поэтому величине  $\nabla T$ . И, наконец, раз направления  $\nabla T$  и  $h$  противоположны, то (2.43) можно записать в виде векторного уравнения

$$h = -\kappa \nabla T. \quad (2.44)$$

(Знак минус написан потому, что тепло течет в сторону понижения температуры.) Уравнение (2.44) — это дифференциальное уравнение теплопроводности в массиве вещества. Вы видите,



что это чисто векторное уравнение. С обеих сторон стоят векторы (если  $\chi$  число). Это обобщение на произвольный случай частного соотношения (2.42), верного для прямоугольной плиты.

Мы с вами должны будем научиться выписывать все соотношения элементарной физики [наподобие (2.42)] в этих хитроумных векторных обозначениях. Они полезны не только потому, что уравнения начинают от этого *выглядеть* проще. В них намного яснее проступает *физическое содержание* уравнений безотносительно к выбору системы координат.

## § 7. Вторые производные векторных полей

Пока мы имели дело только с первыми производными. А почему не со вторыми? Из вторых производных можно составить несколько комбинаций:

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad & \nabla \cdot (\nabla T), \\ \text{(б)} \quad & \nabla \times (\nabla T), \\ \text{(в)} \quad & \nabla (\nabla \cdot \mathbf{h}), \\ \text{(г)} \quad & \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h}), \\ \text{(д)} \quad & \nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}). \end{aligned} \tag{2.45}$$

Вы можете убедиться, что никаких иных комбинаций быть не может.

Посмотрим сперва на вторую комбинацию (б). Она имеет ту же форму, что и

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{A} T) = (\mathbf{A} \times \mathbf{A}) T = 0,$$

потому что  $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$  всегда нуль. Значит,

$$\text{rot}(\text{grad } T) = \nabla \times (\nabla T) = 0. \tag{2.46}$$

Можно понять, как это получается, если расписать одну из компонент:

$$[\nabla \times (\nabla T)]_z = \nabla_x (\nabla T)_y - \nabla_y (\nabla T)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right), \tag{2.47}$$

что равно нулю [по уравнению (2.8)]. Это же верно и для других компонент. Стало быть,  $\nabla \times (\nabla T) = 0$  для любого распределения температур, да и для *всякой* скалярной функции.

Возьмем второй пример. Посмотрим, нельзя ли получить нуль другим путем. Скалярное произведение вектора на векторное произведение, содержащее этот вектор, равно нулю

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0, \tag{2.48}$$

потому что  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  перпендикулярно к  $\mathbf{A}$  и не имеет тем самым составляющих вдоль  $\mathbf{A}$ . Сходная комбинация стоит в списке

(2.45) под номером (г):

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h}) = \operatorname{div} (\operatorname{rot} \mathbf{h}) = 0. \quad (2.49)$$

В справедливости этого равенства опять-таки легко убедиться, проделав выкладки на компонентах.

Теперь сформулируем без доказательства две теоремы. Они очень интересны и весьма полезны для физиков.

В физических задачах часто оказывается, что ротор какой-то величины (скажем, векторного поля  $\mathbf{A}$ ) равен нулю. Мы видели в уравнении (2.46), что ротор градиента равен нулю. (Это легко запоминается по свойствам векторов.) Далее, может оказаться, что  $\mathbf{A}$  будет градиентом какой-то величины, потому что тогда ротор  $\mathbf{A}$  с необходимостью обратится в нуль. Имеется интересная теорема, утверждающая, что если ротор  $\mathbf{A}$  есть нуль, то тогда  $\mathbf{A}$  непременно окажется *чьим-то* градиентом; существует некоторое скалярное поле  $\psi$  (пси), такое, что  $\mathbf{A} = \operatorname{grad} \psi$ . Иными словами, справедлива

ТЕОРЕМА

$$\begin{aligned} \text{Если} \quad & \nabla \times \mathbf{A} = 0, \\ \text{то имеется} \quad & \psi, \\ \text{такое, что} \quad & \mathbf{A} = \nabla \psi. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Сходная теорема формулируется и для случая, когда дивергенция  $\mathbf{A}$  есть нуль. Из уравнения (2.49) видно, что дивергенция ротора любой величины равна всегда нулю. Если вам случайно встретилось векторное поле  $\mathbf{D}$ , для которого  $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$ , то вы имеете право заключить, что  $\mathbf{D}$  это ротор некоторого векторного поля  $\mathbf{C}$ .

ТЕОРЕМА

$$\begin{aligned} \text{Если} \quad & \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \\ \text{то имеется} \quad & \mathbf{C}, \\ \text{такое, что} \quad & \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Перебирая всевозможные сочетания двух операторов  $\nabla$ , мы обнаружили, что два из них всегда дают нуль. Займемся теперь теми, которые *не равны* нулю. Возьмем комбинацию  $\nabla \cdot (\nabla T)$ , первую в нашем списке. В общем случае это не нуль. Выпишем компоненты

$$\nabla T = \nabla_x T + \nabla_y T + \nabla_z T.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla T) &= \nabla_x (\nabla_x T) + \nabla_y (\nabla_y T) + \nabla_z (\nabla_z T) = \\ &= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

что может, вообще говоря, быть любым числом. Это скалярное поле.

Вы видите, что скобок можно не ставить, а вместо этого писать, не рискуя ошибиться:

$$\nabla \cdot (\nabla T) = \nabla \cdot \nabla T = (\nabla \cdot \nabla) T = \nabla^2 T. \quad (2.53)$$

Можно рассматривать  $\nabla^2$  как новый оператор. Это скалярный оператор. Так как он в физике встречается часто, ему дали особое имя — *лапласиан*.

$$\text{Лапласиан} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.54)$$

Раз оператор лапласиана — оператор скалярный, он может действовать и на вектор. Под этим мы подразумеваем, что он применяется к каждой компоненте вектора

$$\nabla^2 \mathbf{h} = (\nabla^2 h_x, \quad \nabla^2 h_y, \quad \nabla^2 h_z).$$

Рассмотрим еще одну возможность:  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h})$  [(д) в списке (2.45)]. Ротор от ротора можно написать иначе, если использовать векторное равенство (2.6)

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}). \quad (2.55)$$

Заменяем в этой формуле  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  оператором  $\nabla$  и положим  $\mathbf{C} = \mathbf{h}$ . Получится

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{h}) - \mathbf{h} (\nabla \cdot \nabla) \dots ???$$

Погодите-ка! Здесь что-то не так. Как и положено, первые два члена — векторы (операторы утопили свою жажду), но последний член совсем не такой. Он все еще оператор. Ошибка в том, что мы не были осторожны и не выдержали нужного порядка членов. Вернувшись обратно, вы увидите, что (2.55) можно с равным успехом записать в виде

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}. \quad (2.56)$$

Такой порядок членов выглядит уже лучше. Сделаем нашу подстановку в (2.56). Получится

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{h}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{h}. \quad (2.57)$$

С этой формулой уже все в порядке. Она действительно правильна, в чем вы можете убедиться, расписав компоненты. Последний член — это лапласиан, так что с равным успехом можно написать

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{h}) - \nabla^2 \mathbf{h}. \quad (2.58)$$

Из нашего списка (2.45) двойных  $\nabla$  мы разобрали все комбинации, кроме (в),  $\nabla (\nabla \cdot \mathbf{h})$ . В ней есть смысл, это — векторное поле, но больше сказать о ней нечего. Это просто векторное

поле, которое может случайно возникнуть в каком-нибудь расчете.

Удобно будет все наши рассуждения свести теперь в таблицу:

$$\begin{aligned}
 & \text{(а) } \nabla \cdot (\nabla T) = \nabla^2 T = \text{Скалярное поле,} \\
 & \text{(б) } \nabla \times (\nabla T) = 0, \\
 & \text{(в) } \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) = \text{Векторное поле,} \\
 & \text{(г) } \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h}) = 0, \\
 & \text{(д) } \nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) - \nabla^2 \mathbf{h}, \\
 & \text{(е) } (\nabla \cdot \nabla) \cdot \mathbf{h} = \nabla^2 \mathbf{h} = \text{Векторное поле.}
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

Вы могли заметить, что мы не пытались изобрести новый векторный оператор  $\nabla \times \nabla$ . Понимаете, почему?

### § 8. Подвохи

Мы применили наши знания обычной векторной алгебры к алгебре оператора  $\nabla$ . Здесь нужно быть осторожным, иначе легко напутать. Нужно упомянуть о двух подвохах (впрочем, в нашем курсе они не встретятся). Что можете вы сказать о следующем выражении, куда входят две скалярные функции  $\psi$  и  $\phi$  (фи):

$$(\nabla\psi) \times (\nabla\phi)?$$

Вы можете подумать, что это нуль, потому что оно похоже на

$$(Aa) \times (Ab),$$

а это всегда равно нулю (векторное произведение двух *одинаковых* векторов  $A \times A$  всегда нуль). Но в нашем примере два оператора  $\nabla$  отнюдь не одинаковы! Первый действует на одну функцию,  $\psi$ , а второй — на другую,  $\phi$ . И хотя мы изображаем их одним и тем же значком  $\nabla$ , они все же должны рассматриваться как разные операторы. Направление  $\nabla\psi$  зависит от функции  $\psi$ , а направление  $\nabla\phi$  — от функции  $\phi$ , так что они не обязаны быть параллельными:

$$(\nabla\psi) \times (\nabla\phi) \neq 0 \text{ (в общем случае).}$$

К счастью, к таким выражениям мы прибегать не будем. (Но сказанное нами не меняет того факта, что  $\nabla\phi \times \nabla\psi = 0$  в любом скалярном поле: здесь обе  $\nabla$  действуют на одну и ту же функцию.)

Подвох номер два (он тоже в нашем курсе не встретится): правила, которые мы здесь наметили, выглядят просто и красиво только в прямоугольных координатах. Например, если мы хотим написать  $x$ -компоненту выражения  $\nabla^2 \mathbf{h}$ , то сразу пишем

$$(\nabla^2 \mathbf{h})_x = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) h_x = \nabla^2 h_x. \tag{2.60}$$

Но это выражение *не годится*, если мы ищем *радиальную* компоненту  $\nabla^2 h$ . Она не равна  $\nabla^2 h_r$ . Дело в том, что в алгебре векторов все их направления полностью определены. А когда мы имеем дело с векторными полями, то их направления в разных местах различны. Когда мы пробуем описать векторное поле, например, в полярных координатах, то «радиальное» направление меняется от точки к точке. И начав дифференцировать компоненты, вы запросто можете попасть в беду. Даже в *постоянном* векторном поле радиальная компонента от точки к точке меняется.

Обычно безопаснее и проще всего держаться прямоугольных координат. Но стоит упомянуть и одно исключение: поскольку лапласиан  $\nabla^2$  есть скаляр, то можно писать его в любой системе координат (скажем, в полярных координатах). Но так как это дифференциальный оператор, то применять его надо только к векторам с фиксированным направлением компонент, т. е. к заданным в прямоугольных координатах. Итак, расписывая наши векторные дифференциальные уравнения покомпонентно, мы будем предварительно выражать все наши векторные поля через их  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -компоненты.

**ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ  
ВЕКТОРОВ**

**§ 1. Векторные интегралы;  
криволинейный интеграл от  $\nabla\psi$**

В предыдущей главе мы видели, что брать производные от поля можно по-разному. Одни приводят к векторным полям; другие — к скалярным. Хотя формул было выведено довольно много, все их можно подытожить одним правилом: операторы  $\partial/\partial x$ ,  $\partial/\partial y$  и  $\partial/\partial z$  суть три компоненты векторного оператора  $\nabla$ . Сейчас нам хотелось бы лучше разобраться в значении производных поля. Тогда мы легче почувствуем смысл векторных уравнений поля.

Мы уже говорили о смысле операции градиента ( $\nabla$  на скаляр). Обратимся теперь к смыслу операций вычисления дивергенции (расходимости) и ротора (вихря). Толкование этих величин лучше всего сделать на языке векторных интегралов и уравнений, связывающих эти интегралы. Но уравнения эти, к несчастью, нельзя вывести из векторной алгебры при помощи каких-либо легких подстановок, так что вам придется учить их как что-то новое. Одна из этих интегральных формул практически тривиальна, а другие две — нет. Мы выведем их и поясним их смысл. Эти формулы фактически являются математическими теоремами. Они полезны не только для толкования смысла и содержания понятий дивергенции и ротора, но и при разработке общих физических теорий. Для теории полей эти математические теоремы — все равно что теорема о сохранении энергии для механики частиц. Подобные теоремы общего характера очень важны для более глубокого понимания физики. Но вы увидите, что, за немногими простыми исключениями, они мало что дают для решения задач. К счастью, как раз в начале нашего курса многие простые

**§1. Векторные интегралы; криволинейный интеграл от  $\nabla\psi$**

**§2. Поток векторного поля**

**§3. Поток из куба; теорема Гаусса**

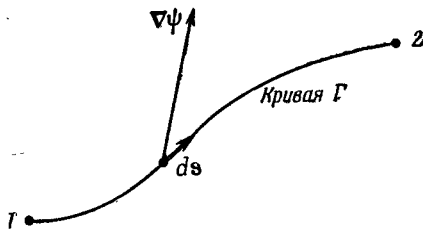
**§4. Теплопроводность; уравнение диффузии**

**§5. Циркуляция векторного поля**

**§6. Циркуляция по квадрату; теорема Стокса**

**§7. Поля без роторов и поля без дивергенций**

**§8. Итоги**



Ф и г. 3.1. Иллюстрация уравнения (3.1).

Вектор  $\nabla\psi$  вычисляется на линейном элементе  $ds$ .

задачи будут решаться именно этими тремя интегральными формулами. Позже, однако, когда задачи станут потруднее, этими простыми методами мы больше обойтись не сможем.

Мы начнем с той интегральной формулы, куда входит градиент. Мысль, которая содержится в ней, очень проста: раз градиент есть быстрота изменения величины поля, то интеграл от этой быстроты даст нам общее изменение поля. Пусть у нас есть скалярное поле  $\psi(x, y, z)$ . В двух произвольных точках (1) и (2) функция  $\psi$  имеет соответственно значения  $\psi(1)$  и  $\psi(2)$ . [Используется такое удобное обозначение: (2) означает точку  $(x_2, y_2, z_2)$ , а  $\psi(2)$  это то же самое, что  $\psi(x_2, y_2, z_2)$ .] Если  $\Gamma$  (гамма) — произвольная кривая, соединяющая (1) и (2) (фиг. 3.1), то справедлива

ТЕОРЕМА 1

$$\psi(2) - \psi(1) = \int_{(1)}^{(2)} (\nabla\psi) \cdot ds. \quad (3.1)$$

Вдоль  $\Gamma$

Интеграл, стоящий здесь, это *криволинейный интеграл* от (1) до (2) вдоль кривой  $\Gamma$  от скалярного произведения вектора  $\nabla\psi$  на другой вектор,  $ds$ , являющийся бесконечно малым элементом дуги кривой  $\Gamma$  [направленной от (1) к (2)].

Напомним, что мы понимаем под криволинейным интегралом. Рассмотрим скалярную функцию  $f(x, y, z)$  и кривую  $\Gamma$ , соединяющую две точки (1) и (2). Отметим на кривой множество точек и соединим их хордами, как на фиг. 3.2. Длина  $i$ -й хорды равна  $\Delta s_i$ , где  $i$  пробегает значения 1, 2, 3, ... . Под криволинейным интегралом

$$\int_{(1)}^{(2)} f ds$$

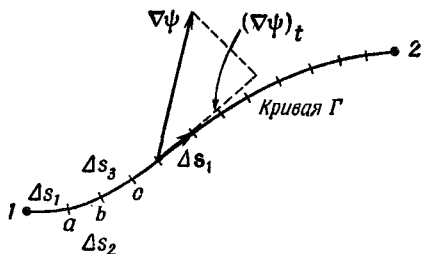
Вдоль  $\Gamma$

подразумевается предел суммы

$$\sum f_i \Delta s_i,$$

где  $f_i$  — значение функции где-то на  $i$ -й хорде. Предел — это то,

Ф и г. 3.2. Криволинейный интеграл есть предел суммы.



к чему стремится сумма, когда растет число хорд (разумным образом, чтобы даже наибольшее  $\Delta s_i \rightarrow 0$ ).

В нашей теореме (3.1) интеграл означает то же самое, хоть и выглядит чуть по-иному. Вместо  $f$  стоит другой скаляр — составляющая  $\nabla\psi$  в направлении  $\Delta s$ . Если обозначить эту составляющую через  $(\nabla\psi)_t$ , то ясно, что

$$(\nabla\psi)_t \Delta s = (\nabla\psi) \cdot \Delta s. \quad (3.2)$$

Интеграл в (3.1) и подразумевает сумму таких членов.

А теперь посмотрим; почему уравнение (3.1) правильно. В гл. 1 мы показали, что составляющая  $\nabla\psi$  вдоль малого смещения  $\Delta R$  равна скорости изменения  $\psi$  в направлении  $\Delta R$ . Рассмотрим хорду кривой  $\Delta s$  от точки (1) до точки  $a$  на фиг. 3.2. По нашему определению

$$\Delta\psi_1 = \psi(a) - \psi(1) = (\nabla\psi)_1 \cdot \Delta s_1. \quad (3.3)$$

Точно так же мы имеем

$$\psi(b) - \psi(a) = (\nabla\psi)_2 \cdot \Delta s_2, \quad (3.4)$$

где, конечно,  $(\nabla\psi)_1$  означает градиент, вычисленный на хорде  $\Delta s_1$ , а  $(\nabla\psi)_2$  — градиент, вычисленный на  $\Delta s_2$ . Сложив (3.3) и (3.4), получим

$$\psi(b) - \psi(1) = (\nabla\psi)_1 \cdot \Delta s_1 + (\nabla\psi)_2 \cdot \Delta s_2. \quad (3.5)$$

Вы видите, что, продолжая прибавлять такие члены, мы получаем в итоге

$$\psi(2) - \psi(1) = \sum (\nabla\psi)_i \cdot \Delta s_i. \quad (3.6)$$

Левая часть не зависит от того, как выбирать интервалы — лишь бы точки (1) и (2) были теми же самыми, так что справа можно перейти к пределу. Так доказывается уравнение (3.1).

Из нашего доказательства видно, что, подобно тому как равенство не зависит и от выбора точек  $a, b, c, \dots$ , точно так же оно не зависит от выбора самой кривой  $\Gamma$ . Теорема верна для *любой* кривой, соединяющей точки (1) и (2).



Два слова об обозначениях. Не будет путаницы, если писать для удобства

$$(\nabla\psi) \cdot ds = \nabla\psi \cdot ds. \quad (3.7)$$

Тогда наша теорема примет такой вид:

ТЕОРЕМА 1

$$\psi(2) - \psi(1) = \int_{(1)}^{(2)} \nabla\psi \cdot ds. \quad (3.8)$$

Любая кривая,  
соединяющая точки  
(1) и (2)

## § 2. Поток векторного поля

Прежде чем рассматривать следующую интегральную теорему — теорему о дивергенции, — хотелось бы разобраться в одной идее, смысл которой в случае теплового потока легко усваивается. Мы уже определили вектор  $\mathbf{h}$ , представляющий количество тепла, протекающего сквозь единицу площади в единицу времени. Положим, что внутри тела имеется замкнутая поверхность  $S$ , ограничивающая объем  $V$  (фиг. 3.3). Нам хочется узнать, сколько тепла вытекает из этого объема. Мы это можем, конечно, определить, рассчитав общий тепловой поток через поверхность  $S$ .

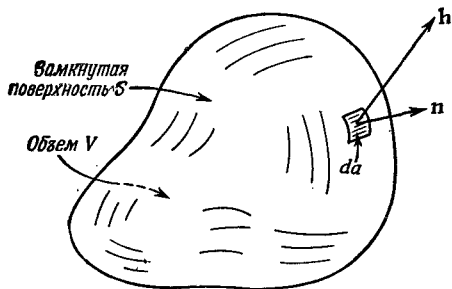
Обозначим через  $da$  площадь элемента поверхности. Этот символ заменяет двумерный дифференциал. Если, например, элемент окажется в плоскости  $xy$ , то

$$da = dx dy.$$

Позже мы будем иметь дело с интегралами по объему, и тогда будет удобно рассматривать элемент объема в виде малого кубика и обозначать его  $dV$ , подразумевая, что

$$dV = dx dy dz.$$

Кое-кто пишет и  $d^2a$  вместо  $da$ , чтобы напомнить самому себе, что это выражение второй степени; вместо  $dV$  пишут также  $d^3V$ . Мы будем пользоваться более простыми обозначениями,



Фиг. 3.3. Замкнутая поверхность  $S$ , ограничивающая объем  $V$ .

Единичный вектор  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к элементу поверхности  $da$ , а  $\mathbf{h}$  — вектор теплового потока сквозь элемент поверхности.

а вы уж постарайтесь не забывать, что у площадей бывают два измерения, у объемов — три.

Поток тепла через элемент поверхности  $da$  равен произведению площади на составляющую  $h$ , перпендикулярную к  $da$ . Мы уже определяли  $n$  — единичный вектор, направленный наружу перпендикулярно к поверхности (см. фиг. 3.3). Искомая составляющая  $h$  равна

$$h_n = \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}, \quad (3.9)$$

и тогда поток тепла сквозь  $da$  равен

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{n} da. \quad (3.10)$$

А весь поток тепла через произвольную поверхность получается суммированием вкладов от всех элементов поверхности. Иными словами, (3.10) интегрируется по всей поверхности

$$\text{Полный тепловой поток} = \int_S \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} da. \quad (3.11)$$

через  $S$  наружу

Этот интеграл мы будем называть «поток  $h$  через поверхность». Мы рассматриваем  $h$  как «плотность потока» тепла, а поверхностный интеграл от  $h$  — это общий поток тепла наружу через поверхность, т. е. тепловая энергия за единицу времени (джоули в секунду).

Мы хотим эту идею обобщить на случай, когда вектор не представляет собой потока какой-то величины, а, скажем, является электрическим полем. Конечно, если это будет нужно, то и в этом случае все равно можно проинтегрировать нормальную составляющую электрического поля по площади. Хотя теперь она уже не будет ничьим потоком, мы все еще будем употреблять слово «поток». Мы будем говорить, что

$$\text{Поток } E \text{ сквозь поверхность } S = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da. \quad (3.12)$$

Слову «поток» мы придаем смысл «поверхностного интеграла от нормальной составляющей» некоторого вектора. То же определение будет применяться и тогда, когда поверхность незамкнута.

А возвращаясь к частному случаю потока тепла, обратим внимание на те случаи, когда *количество тепла сохраняется*. Представьте себе, к примеру, материал, в котором после первоначального подогрева не происходит ни дальнейшего подвода, ни поглощения тепла. Тогда, если из какой-то замкнутой поверхности наружу поступает тепло, содержание тепла во внутреннем объеме должно падать. Так что в условиях, когда

количество тепла сохраняется, мы говорим, что

$$\int_S \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} da = -\frac{dQ}{dt}, \quad (3.13)$$

где  $Q$  — запас тепла внутри  $S$ . Поток тепла из  $S$  наружу равен со знаком минус быстрое изменение со временем общего запаса тепла  $Q$  внутри  $S$ . Это толкование возможно оттого, что речь идет о потоке тепла, и оттого, что мы предположили, что количество тепла сохраняется. Конечно, если бы внутри объема создавалось тепло, нельзя было бы говорить о полном запасе тепла в нем.

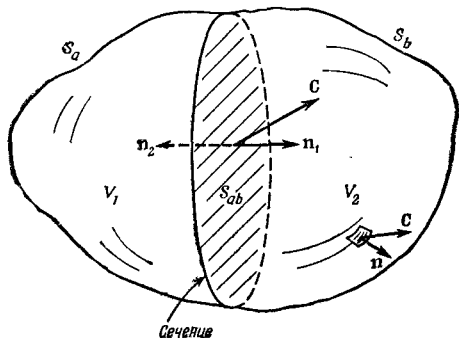
Укажем теперь на интересное свойство потока любого вектора. Можете при этом представлять себе вектор потока тепла, но верно это будет и для произвольного векторного поля  $\mathbf{C}$ . Представьте себе замкнутую поверхность  $S$ , окружающую объем  $V$ . Разобьем теперь объем на две части каким-то «сечением» (фиг. 3.4). Получились два объема и две замкнутые поверхности. Объем  $V_1$  окружен поверхностью  $S_1$ , составленной частью из прежней поверхности  $S_a$  и частью из «сечения»  $S_{ab}$ . Объем  $V_2$  окружен поверхностью  $S_2$ , составленной из остатка прежней поверхности ( $S_b$ ) и замкнутой сечением  $S_{ab}$ . Зададим вопрос: если мы рассчитаем поток через поверхность  $S_1$  и прибавим к нему поток сквозь поверхность  $S_2$ , будет ли их сумма равна потоку через первоначальную поверхность? Ответ гласит: «Да». Потоки через часть  $S_{ab}$ , общую обоим поверхностям  $S_1$  и  $S_2$ , в точности сократятся. Для потока вектора  $\mathbf{C}$  из  $V_1$  можно написать

$$\text{Поток сквозь } S_1 = \int_{S_a} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} da + \int_{S_{ab}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_1 da, \quad (3.14)$$

а для потока из  $V_2$ :

$$\text{Поток сквозь } S_2 = \int_{S_b} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} da + \int_{S_{ab}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_2 da. \quad (3.15)$$

Заметьте, что во втором интеграле мы обозначили внешнюю



Фиг. 3.4. Объем  $V$ , заключенный внутри поверхности  $S$ , делится на две части «сечением» (поверхностью  $S_{ab}$ ).

Получается объем  $V_1$ , окруженный поверхностью  $S_1 = S_a + S_{ab}$ , и объем  $V_2$ , окруженный поверхностью  $S_2 = S_b + S_{ab}$ .

нормаль к  $S_{ab}$  буквой  $\mathbf{n}_1$ , если она относится к  $S_1$ , и буквой  $\mathbf{n}_2$ , если она относится к  $S_2$  (см. фиг. 3.4). Ясно, что  $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ , и тем самым

$$\int_{S_{ab}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_1 da = - \int_{S_{ab}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_2 da. \quad (3.16)$$

Складывая теперь уравнения (3.14) и (3.15), мы убеждаемся, что сумма потоков сквозь  $S_1$  и  $S_2$  как раз равна сумме двух интегралов, которые, взятые вместе, дают поток через первоначальную поверхность  $S = S_a + S_b$ .

Мы видим, что поток через всю внешнюю поверхность  $S$  можно рассматривать как сумму потоков из тех двух частей, на которые разрезан объем. Эти части можно еще разрезать: скажем,  $V_1$  разбить пополам. Опять придется прибегнуть к тем же доводам. Так что для *любого* способа разбиения первоначального объема всегда остается справедливым то свойство, что поток через внешнюю поверхность (первоначальный интеграл) равен сумме потоков из всех внутренних частей.

### § 3. Поток из куба; теорема Гаусса

Рассмотрим теперь частный случай потока из маленького кубика \* и получим интересную формулу. Ребра куба пусть направлены вдоль осей координат (фиг. 3.5), координаты вершины, ближайшей к началу, суть  $x, y, z$ , ребро куба в направлении  $x$  равно  $\Delta x$ , ребро куба (а точнее, бруска) в направлении  $y$  равно  $\Delta y$ , а в направлении  $z$  равно  $\Delta z$ . Мы хотим найти поток векторного поля  $\mathbf{C}$  через поверхность куба. Для этого вычислим сумму потоков через все шесть граней. Начнем с грани 1 (см. фиг. 3.5). Поток *наружу* сквозь нее равен  $x$ -компоненте  $\mathbf{C}$  с минусом, проинтегрированной по площади грани. Он равен

$$- \int C_x dy dz.$$

Так как куб считается *малым*, этот интеграл можно заменить значением  $C_x$  в центре грани [эту точку мы обозначили (1)], умноженным на площадь грани  $\Delta y \Delta z$ :

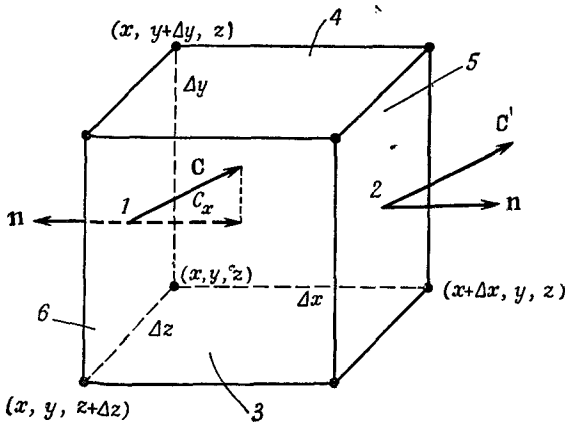
$$\text{Поток сквозь 1 наружу} = -C_x(1) \Delta y \Delta z.$$

Подобным же образом поток наружу через грань 2 равен

$$\text{Поток сквозь 2 наружу} = C_x(2) \Delta y \Delta z.$$

---

\* Конечно, последующие выкладки в равной мере относятся и к любому прямоугольному параллелепипеду.



Фиг. 3.5. Вычисление потока вектора  $C$  из маленького кубика.

Величины  $C_x(1)$  и  $C_x(2)$ , вообще говоря, слегка отличаются. Если  $\Delta x$  достаточно мало, то можно написать

$$C_x(2) = C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x.$$

Существуют, конечно, и другие члены, но в них входит  $(\Delta x)^2$  и высшие степени  $\Delta x$ , и в пределе малых  $\Delta x$  ими запросто можно пренебречь. Значит, поток сквозь грань 2 равен

$$\text{Поток сквозь } 2 = \left[ C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y \Delta z.$$

Складывая потоки через грани 1 и 2, получаем

$$\text{Поток сквозь 1 и 2 наружу} = \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Производную нужно вычислять в центре грани 1, т. е. в точке  $[x, y + (\Delta y/2), z + (\Delta z/2)]$ . Но если куб очень маленький, мы сделаем пренебрежимую ошибку, если вычислим ее в вершине  $(x, y, z)$ .

Повторяя те же рассуждения с каждой парой граней, мы получаем

$$\text{Поток сквозь 3 и 4 наружу} = \frac{\partial C_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

а

$$\text{Поток сквозь 5 и 6 наружу} = \frac{\partial C_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

А общий поток через все грани равен сумме этих членов. Мы обнаруживаем, что

$$\int_{\text{Поверхность куба}} C \cdot nda = \left( \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Сумма производных в скобках как раз есть  $\nabla \cdot \mathbf{C}$ , а  $\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta V$  (объем куба). Таким образом, мы можем утверждать, что для бесконечно малого куба

$$\int_{\text{Поверхность}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} da = (\nabla \cdot \mathbf{C}) \Delta V. \quad (3.17)$$

Мы показали, что поток наружу с поверхности бесконечно малого куба равен произведению дивергенции вектора на объем куба. Теперь мы понимаем «смысл» понятия дивергенции вектора. Дивергенция вектора в точке  $P$  — это поток  $\mathbf{C}$  («истечение»  $\mathbf{C}$  наружу) на единицу объема, взятого в окрестности  $P$ .

Мы связали дивергенцию  $\mathbf{C}$  с потоком  $\mathbf{C}$  из бесконечно малого объема. Для любого конечного объема можно теперь использовать факт, доказанный выше, что суммарный поток из объема есть сумма потоков из отдельных его частей. Иначе говоря, мы можем проинтегрировать дивергенцию по всему объему. Это приводит нас к теореме, согласно которой интеграл от нормальной составляющей произвольного вектора по замкнутой поверхности может быть представлен также в виде интеграла от дивергенции вектора по объему, заключенному внутри поверхности. Теорему эту называют теоремой Гаусса.

#### ТЕОРЕМА ГАУССА

$$\int_S \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{C} dV, \quad (3.18)$$

где  $S$  — произвольная замкнутая поверхность,  $V$  — объем внутри нее.

### § 4. Теплопроводность; уравнение диффузии

Чтобы привыкнуть к теореме, разберем на примере, как ее применяют. Обратимся опять к распространению тепла, скажем в металле. Рассмотрим совсем простой случай: все тепло было подведено к телу заранее, а теперь тело остывает. Источников тепла нет, так что количество тепла сохраняется. Сколько же тогда тепла должно оказаться внутри некоего определенного объема в какой-то момент времени? Оно должно *уменьшаться* как раз на то количество, которое уходит с поверхности объема. Если этот объем — маленький кубик, то, следуя формуле (3.17), можно написать

$$\text{Поток тепла наружу} = \int_{\text{Куб}} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} da = \nabla \cdot \mathbf{h} \Delta V. \quad (3.19)$$

Но это должно быть равно скорости потери тепла внутренностью куба. Если  $q$  — количество тепла в единице объема, то весь

запас тепла в кубе  $q \Delta V$ , а скорость *потерь* равна

$$-\frac{d}{dt}(q \Delta V) = -\frac{dq}{dt} \Delta V. \quad (3.20)$$

Сравнивая (3.19) с (3.20), мы видим, что

$$-\frac{dq}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{h}. \quad (3.21)$$

Внимательно взгляните в форму этого уравнения; эта форма часто встречается в физике. Она выражает закон сохранения, в данном случае закон сохранения тепла. В уравнении (3.13) тот же физический факт был выражен иначе. Там была *интегральная* форма уравнения сохранения, а здесь у нас — *дифференциальная* форма.

Уравнение (3.21) мы получили, применив формулу (3.13) к бесконечно малому кубу. Можно пойти и по другому пути. Для большого объема  $V$ , ограниченного поверхностью  $S$ , закон Гаусса утверждает, что

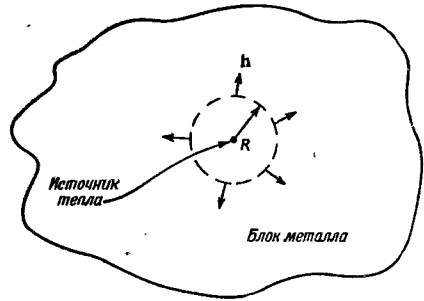
$$\int_S \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} da = \int V \nabla \cdot \mathbf{h} dV. \quad (3.22)$$

Интеграл в правой части можно, используя (3.21), преобразовать как раз к виду  $-dQ/dt$ , и тогда получится формула (3.13).

Теперь рассмотрим другой случай. Представим, что в блоке вещества имеется маленькая дырочка, а в ней идет химическая реакция, генерирующая тепло. Можно еще представить себе, что к маленькому сопротивлению внутри блока подведены проводочки, нагревающие его электрическим током. Предположим, что тепло создается практически в одной точке, а  $W$  представляет собой энергию, возникающую в этой точке за секунду. В остальной же части объема пусть тепло сохраняется и, кроме того, пусть генерация тепла началась так давно, что сейчас температура уже нигде больше не изменяется. Вопрос состоит в следующем: как выглядит вектор потока тепла  $\mathbf{h}$  в разных точках металла? Сколько тепла перетекает через каждую точку?

Мы знаем, что если мы будем интегрировать нормальную составляющую  $\mathbf{h}$  по замкнутой поверхности, окружающей источник, то всегда получится  $W$ . Все тепло, которое генерируется в точечном источнике, должно протечь через поверхность, ибо предполагается, что поток постоянен. Перед нами трудная задача отыскания такого векторного поля, которое после интегрирования по произвольной поверхности всегда давало бы  $W$ . Но мы сравнительно легко можем найти это поле, выбрав поверхность специального вида. Возьмем сферу радиусом  $R$  с центром в источнике и предположим, что поток тепла радиален (фиг. 3.6). Интуиция нам подсказывает, что  $\mathbf{h}$  должен быть направлен по радиусу, если блок вещества велик и мы не при-

Ф и г. 3.6. В области близ точечного источника поток тепла направлен по радиусу наружу.



ближаемся слишком близко к его границам; кроме того, величина  $h$  во всех точках сферы должна быть одинакова. Вы видите, что для получения ответа к нашим выкладкам мы вынуждены добавить известное количество домыслов (обычно это именуют «физической интуицией»).

Когда  $h$  радиально и сферически симметрично, интеграл от нормальной компоненты  $h$  по площади поверхности вычисляется очень просто, потому что нормальная компонента в точности равна  $h$  и постоянна. Площадь, по которой интегрируется, равна  $4\pi R^2$ . Тогда мы получаем

$$\int_S \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} da = h 4\pi R^2, \quad (3.23)$$

где  $h$  — абсолютная величина  $h$ . Этот интеграл должен быть равен  $W$  — скорости, с которой источник генерирует тепло. Получается

$$h = \frac{W}{4\pi R^2},$$

или

$$\mathbf{h} = \frac{W}{4\pi R^2} \mathbf{e}_r, \quad (3.24)$$

где, как всегда,  $\mathbf{e}_r$  обозначает единичный вектор в радиальном направлении. Этот результат говорит нам, что  $h$  пропорционален  $W$  и меняется обратно квадрату расстояния от источника.

Только что полученный результат применим к потоку тепла вблизи точечного источника тепла. Теперь попытаемся найти уравнения, которые справедливы для теплового потока самого общего вида (придерживаясь единственного условия, что количество тепла должно сохраняться). Нас будет интересовать только то, что происходит в местах вне каких-либо источников или поглотителей тепла.

Дифференциальное уравнение распространения тепла было получено в гл. 2. В соответствии с уравнением (2.44),

$$\mathbf{h} = -\kappa \nabla T. \quad (3.25)$$



(Помните, что это соотношение приближенное, но для некоторых веществ вроде металлов выдерживается неплохо.) Применимо оно, конечно, только в тех частях тела, где нет ни выделения, ни поглощения тепла. Выше мы вывели другое соотношение (3.21), которое выполняется тогда, когда количество тепла сохраняется. Если мы это уравнение скомбинируем с (3.25), то получим

$$-\frac{dq}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{h} = -\nabla \cdot (\kappa \nabla T),$$

или

$$\frac{dq}{dt} = \kappa \nabla \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T, \quad (3.26)$$

если  $\kappa$  — величина постоянная. Напоминаю, что  $q$  — это количество тепла в единичном объеме, а  $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$  — лапласиан, т. е. оператор

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Если мы теперь сделаем еще одно допущение, сразу возникнет одно очень интересное уравнение. Допустим, что температура материала пропорциональна содержанию тепла в единице объема, т. е. что у материала есть определенная удельная теплоемкость. Когда это допущение верно (а так бывает часто), мы можем писать

$$\Delta q = c_v \Delta T$$

или

$$\frac{dq}{dt} = c_v \frac{dT}{dt}. \quad (3.27)$$

Скорость изменения количества тепла пропорциональна скорости изменения температуры. Коэффициент пропорциональности  $c_v$  здесь — удельная теплоемкость на единицу объема материала. Подставляя (3.27) в (3.26), получаем

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\kappa}{c_v} \nabla^2 T. \quad (3.28)$$

Мы обнаружили, что *быстрота изменения со временем* температуры  $T$  в каждой точке пропорциональна лапласиану от  $T$ , т. е. вторым производным от пространственного распределения температур. Мы имеем дифференциальное уравнение — в переменных  $x, y, z$  и  $t$  — для температуры  $T$ .

Дифференциальное уравнение (3.28) называется *уравнением диффузии тепла*, или *уравнением теплопроводности*. Часто его пишут в виде

$$\frac{dT}{dt} = D \nabla^2 T, \quad (3.29)$$

где  $D$  — постоянная. Она равна  $\kappa/c_v$ .

Уравнение диффузии появляется во многих физических задачах: о диффузии газов, диффузии нейтронов и других. Мы уже обсуждали физику некоторых таких явлений в вып. 4, гл. 43. Теперь перед вами полное уравнение, описывающее диффузию в самом общем виде. Немного позже мы займемся решением уравнения диффузии, чтобы посмотреть, как распределяется температура в некоторых случаях. А сейчас вернемся к рассмотрению других теорем о векторных полях.

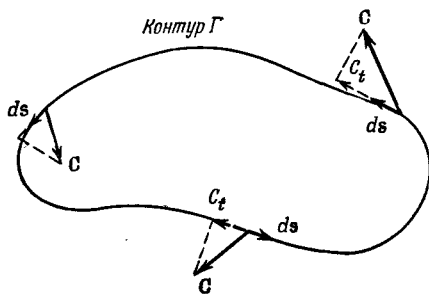
## § 5. Циркуляция векторного поля

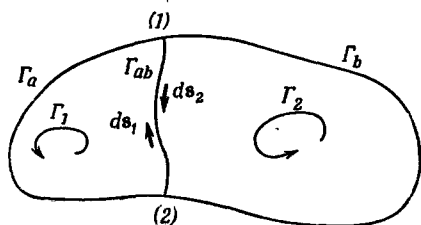
Мы хотим теперь рассмотреть ротор поля примерно так же, как рассматривали дивергенцию. Мы вывели теорему Гаусса, вычисляя интеграл по поверхности, хотя с самого начала отнюдь не было ясно, что мы будем иметь дело с дивергенцией. Откуда же можно было знать, что для ее получения надо интегрировать по поверхности? Этот результат вовсе не был очевиден. И столь же неоправданно мы сейчас вычислим другую характеристику поля и покажем, что она связана с ротором. На этот раз мы подсчитаем так называемую циркуляцию векторного поля. Если  $\mathbf{C}$  — произвольное векторное поле, мы возьмем его составляющую вдоль кривой линии и проинтегрируем эту составляющую по замкнутому контуру. Интеграл называется *циркуляцией* векторного поля по контуру. Мы уже раньше в этой главе рассматривали криволинейный интеграл от  $\nabla\psi$ . Сейчас мы то же самое проделаем с *произвольным* векторным полем  $\mathbf{C}$ .

Пусть  $\Gamma$  — произвольный замкнутый контур в пространстве (воображаемый, разумеется). Пример мы видим на фиг. 3.7. Криволинейный интеграл от касательной составляющей  $\mathbf{C}$  по контуру записывается в виде

$$\oint_{\Gamma} C_t ds = \oint_{\Gamma} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s}. \quad (3.30)$$

Фиг. 3.7. Циркуляция вектора  $\mathbf{C}$  по кривой  $\Gamma$  есть криволинейный интеграл от  $C_t$  (касательной составляющей  $\mathbf{C}$ ).





Фиг. 3.8. Циркуляция по всему контуру есть сумма циркуляций по двум контурам:  $\Gamma_1 = \Gamma_a + \Gamma_{ab}$  и  $\Gamma_2 = \Gamma_b + \Gamma_{ab}$ .

Заметьте, что интеграл берется по всему замкнутому пути, а не от одной точки до другой, как это делалось раньше. Кружочек на знаке интеграла должен нам напоминать об этом. Такой интеграл называется циркуляцией векторного поля по кривой  $\Gamma$ . Название связано с тем, что первоначально так рассчитывали циркуляцию жидкости. Но название это, как и поток, было распространено на любые поля, даже такие, в которых «циркулировать» нечему.

Забавляясь той же игрой, как с потоком, мы можем показать, что циркуляция вдоль контура есть сумма циркуляций вдоль двух меньших контуров. Положим, что, соединив две точки (1) и (2) первоначальной кривой с помощью некоторой линии, мы разбили кривую на два контура  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  (фиг. 3.8). Контур  $\Gamma_1$  состоит из  $\Gamma_a$  — части первоначальной кривой слева от (1) и (2) и «соединения»  $\Gamma_{ab}$ . Контур  $\Gamma_2$  состоит из остатка первоначальной кривой плюс то же соединение.

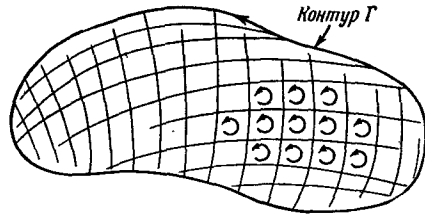
Циркуляция вдоль  $\Gamma_1$  есть сумма интеграла вдоль  $\Gamma_a$  и вдоль  $\Gamma_{ab}$ . Точно так же и циркуляция вдоль  $\Gamma_2$  есть сумма двух частей, одной вдоль  $\Gamma_b$ , другой — вдоль  $\Gamma_{ab}$ . Интеграл вдоль  $\Gamma_{ab}$  для кривой  $\Gamma_2$  имеет знак, противоположный тому знаку, который он имел для кривой  $\Gamma_1$ , потому что направления обхода противоположны (в обоих криволинейных интегралах направления поворота нужно брать одни и те же).

Повторяя прежние аргументы, мы можем убедиться, что сумма двух циркуляций даст как раз криволинейный интеграл вдоль первоначальной кривой  $\Gamma$ . Интегралы по  $\Gamma_{ab}$  сократятся. Циркуляция по одной части плюс циркуляция вдоль другой равняется циркуляции вдоль внешней линии. Этот процесс разрезания большого контура на меньшие можно продолжить. При сложении циркуляций по меньшим контурам смежные части будут сокращаться, так что сумма их сведется к циркуляции вдоль единственного первоначального контура.

Теперь предположим, что первоначальный контур — это граница некоторой поверхности. Существует бесконечное множество поверхностей, границей которых служит все тот же первоначальный замкнутый контур. Наши результаты не зависят, однако, от выбора этих поверхностей. Сперва мы разобьем наш первоначальный контур на множество малых контуров,

**Ф и г. 3.9.** Некоторая поверхность, ограниченная контуром  $\Gamma$ .

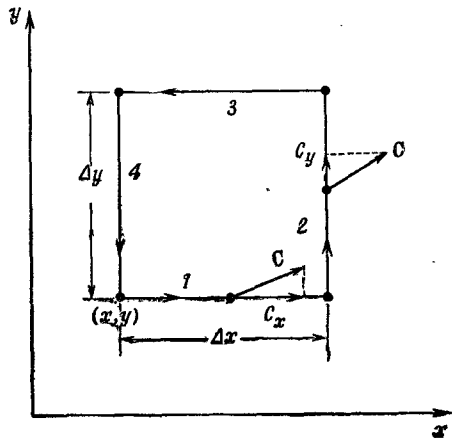
Поверхность разделена на множество маленьких участков, каждый примерно в форме квадрата. Циркуляция по  $\Gamma$  есть сумма циркуляций по всем маленьким контурам.



лежащих на выбранной поверхности (фиг. 3.9). Какой бы ни была форма поверхности, но если малые контуры сделать достаточно малыми, всегда можно будет считать каждый из них замыкающим достаточно плоскую поверхность. Кроме того, каждый из них можно сделать очень похожим на квадрат. И циркуляцию вокруг большого контура  $\Gamma$  можно найти, подсчитав циркуляции по всем квадратикам и сложив их.

### § 6. Циркуляция по квадрату; теорема Стокса

Как нам найти циркуляцию по каждому квадратiku? Все зависит от того, как квадрат ориентирован в пространстве. Если ориентация его подобрана удачно (к примеру, он расположен в одной из координатных плоскостей), то расчет сделать легко. Так как пока мы не делали никаких предположений об ориентации осей координат, мы вправе выбрать их так, чтобы тот квадратик, на котором мы сосредоточили свое внимание, оказался в плоскости  $xy$  (фиг. 3.10). Если результат расчета будет выражен в векторной записи, то можно говорить, что он не зависит от специальной ориентации плоскости.



**Ф и г. 3.10.** Вычисление циркуляции вектора  $C$  по маленькому квадратику.

Мы хотим теперь найти циркуляцию поля  $\mathbf{C}$  по нашему квадратику. Криволинейное интегрирование легко проделать, если квадратик сделать таким маленьким, чтобы вектор  $\mathbf{C}$  на протяжении одной стороны квадрата менялся очень мало. (Это предположение выполняется тем лучше, чем меньше квадратик, так что на самом деле речь идет о бесконечно малых квадратиках.) Отправившись от точки  $(x, y)$  — в левом нижнем углу фигуры, — мы обойдем весь квадрат в направлении, указанном стрелками. Вдоль первой стороны, отмеченной цифрой 1, касательная составляющая равна  $C_x(1)$ , а расстояние равно  $\Delta x$ . Первая часть интеграла равна  $C_x(1) \Delta x$ . Вдоль второй стороны получится  $C_y(2) \Delta y$ . Вдоль третьей мы получим  $-C_x(3) \Delta x$ , а вдоль четвертой  $-C_y(4) \Delta y$ . Знаки минус стоят потому, что нас интересует касательная составляющая в направлении обхода. Весь криволинейный интеграл тогда равен

$$\oint \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} = C_x(1) \Delta x + C_y(2) \Delta y - C_x(3) \Delta x - C_y(4) \Delta y. \quad (3.31)$$

Посмотрим теперь на первый и третий члены. В сумме они дают

$$[C_x(1) - C_x(3)] \Delta x. \quad (3.32)$$

Вам может показаться, что в принятом приближении эта разность равна нулю. Но это только в первом приближении. Мы можем быть более точными и учесть скорость изменения  $C_x$ , тогда можно написать

$$C_x(3) = C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial y} \Delta y. \quad (3.33)$$

В следующем приближении пойдут члены с  $(\Delta y)^2$ , но ввиду того, что нас интересует в конечном счете только предел при  $\Delta y \rightarrow 0$ , то этими членами можно пренебречь. Подставляя (3.33) в (3.32), мы получаем

$$[C_x(1) - C_x(3)] \Delta y = -\frac{\partial C_x}{\partial y} \Delta x \Delta y. \quad (3.34)$$

Производную при нашей точности можно брать в точке  $(x, y)$ .

Подобным же образом оставшиеся два члена можно написать в виде

$$C_y(2) \Delta y - C_y(4) \Delta y = \frac{\partial C_y}{\partial x} \Delta x \Delta y, \quad (3.35)$$

и циркуляция по квадрату тогда равна

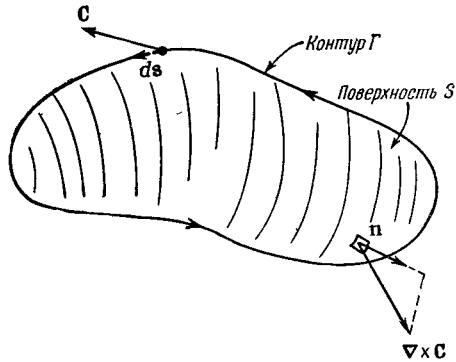
$$\left( \frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y. \quad (3.36)$$

Интересно, что в скобках получилась как раз  $z$ -компонента ротора  $\mathbf{C}$ . Множитель  $\Delta x \Delta y$  — это площадь нашего квадрата. Так что циркуляцию (3.36) можно записать как

$$(\nabla \times \mathbf{C})_z \Delta a.$$

Но  $z$ -компонента это на самом деле компонента, *нормальная*

Ф и г. 3.11. Циркуляция вектора  $\mathbf{C}$  по  $\Gamma$  равна поверхностному интегралу от нормальной компоненты вектора  $\nabla \times \mathbf{C}$ .



к элементу поверхности. Поэтому циркуляцию вокруг квадрата можно задать и в инвариантной векторной записи:

$$\oint \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} = (\nabla \times \mathbf{C})_n \Delta a = (\nabla \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n} \Delta a. \quad (3.37)$$

В результате имеем: циркуляция произвольного вектора  $\mathbf{C}$  по бесконечно малому квадрату равна произведению составляющей ротора  $\mathbf{C}$ , нормальной к поверхности, на площадь квадрата.

Циркуляция по произвольному контуру  $\Gamma$  легко теперь может быть увязана с ротором векторного поля. Натянем на контур любую подходящую поверхность  $S$  (как на фиг. 3.11) и сложим между собой циркуляции по всем бесконечно малым квадратикам на этой поверхности. Сумма может быть записана в виде интеграла. В итоге получится очень полезная теорема, называемая теоремой Стокса [по имени физика Стокса].

#### ТЕОРЕМА СТОКСА

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{C})_n da, \quad (3.38)$$

где  $S$  — произвольная поверхность, ограниченная контуром  $\Gamma$ .

Теперь мы должны ввести соглашение о знаках. На приведенной ранее фиг. 3.10 ось  $z$  показывает на вас, если система координат «обычная», т. е. «правая». Когда в криволинейном интеграле мы брали «положительное» направление обхода, то циркуляция получилась равной  $z$ -компоненте вектора  $\nabla \times \mathbf{C}$ . Обойди мы контур в другую сторону, мы бы получили противоположный знак. Как вообще узнавать, какое направление надо выбирать для положительного направления «нормальной» компоненты вектора  $\nabla \times \mathbf{C}$ ? «Положительную» нормаль надо всегда связывать с направлением так, как это сделано было на фиг. 3.10. Общий случай показан на фиг. 3.11.

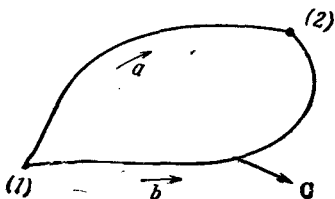
Для запоминания годится «правило правой руки». Если вы расположите пальцы вашей *правой* руки вдоль контура  $\Gamma$ , чтобы кончики пальцев показывали положительное направление обхода  $ds$ , то ваш большой палец укажет направление *положительной* нормали к поверхности  $S$ .

## § 7. Поля без роторов и поля без дивергенций

Теперь перейдем к некоторым следствиям из наших новых теорем. Возьмем сперва случай вектора, у которого ротор (или вихрь) *повсюду* равен нулю. Тогда, согласно теореме Стокса, циркуляция по любому контуру — нуль. Если мы теперь возьмем две точки (1) и (2) на замкнутой кривой (фиг. 3.12), то криволинейный интеграл от касательной составляющей от (1) до (2) не должен зависеть от того, какой из двух возможных путей мы выбрали. Можно заключить, что интеграл от (1) до (2) может зависеть только от расположения этих точек, т. е. что он есть функция только от координат точек. Той же логикой мы пользовались в вып. 1, гл. 14, когда доказывали, что если интеграл от некоторой величины по произвольному замкнутому контуру всегда равен нулю, то этот интеграл может быть представлен в виде разности функций от координат двух концов. Это позволило нам изобрести понятие потенциала. Мы доказали далее, что векторное поле является градиентом этой потенциальной функции [см. вып. 1, уравнение (14.13)].

Отсюда следует, что любое векторное поле, у которого ротор равен нулю, может быть представлено в виде градиента некоторой скалярной функции, т. е. если  $\nabla \times \mathbf{C} = 0$  всюду, то существует некоторая функция  $\psi$  (пси), для которой  $\mathbf{C} = \nabla \psi$  (полезное представление). Значит, мы можем, если захотим, описывать этот род векторных полей при помощи скалярных полей.

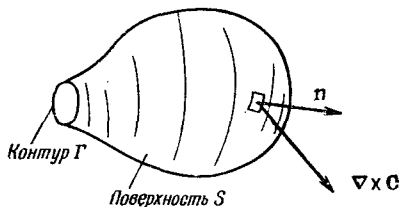
Теперь докажем еще одну формулу. Пусть у нас есть *произвольное* скалярное поле  $\phi$  (фи). Если взять градиент  $\nabla \phi$ , то интеграл от этого вектора по любому замкнутому контуру должен быть равен нулю. Криволинейный интеграл от точки (1) до точки (2) равен  $[\phi(2) - \phi(1)]$ . Если точки (1) и (2) совпадают, то наша теорема 1 [уравнение (3.8)] сообщает нам, что криво-



Ф и г. 3.12. Если  $\nabla \times \mathbf{C}$  равно нулю, то циркуляция по замкнутой кривой  $\Gamma$  тоже нуль.

Криволинейный интеграл от  $\mathbf{C} \cdot d\mathbf{s}$  на участке от (1) до (2) вдоль  $a$  должен быть равен интегралу вдоль  $b$ .

Фиг. 3.13. При переходе к пределу замкнутой поверхности поверхностный интеграл от  $(\nabla \times \mathbf{C})_n$  должен обратиться в нуль.



линейный интеграл равен нулю:

$$\oint_{\text{Контур}} \nabla \varphi \cdot ds = 0.$$

Применяя теорему Стокса, можно заключить, что

$$\int \nabla \times (\nabla \varphi) da = 0$$

по любой поверхности. Но раз интеграл по любой поверхности равен нулю, то подынтегральное выражение обязано быть равно нулю. Значит,

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0 \text{ всегда.}$$

Тот же результат был доказан в гл. 2, § 7 при помощи векторной алгебры.

Рассмотрим теперь частный случай, когда на *маленький* контур  $\Gamma$  натягивается *большая* поверхность  $S$  (фиг. 3.13). Мы хотим посмотреть, что случится, когда контур стянется в точку. Тогда граница поверхности исчезнет, а сама поверхность превратится в замкнутую. Если вектор  $\mathbf{C}$  повсюду конечен, то криволинейный интеграл по  $\Gamma$  должен стремиться к нулю по мере стягивания контура (интеграл в общем-то пропорционален длине контура  $\Gamma$ , а она убывает). Согласно теореме Стокса, поверхностный интеграл от  $(\nabla \times \mathbf{C})_n$  тоже должен убывать до нуля. Когда поверхность замыкается, то при этом каким-то образом в интеграл привносится вклад, который взаимно уничтожается с накопленным ранее. Получается новая теорема:

$$\int_{\text{Любая замкнутая поверхность}} (\nabla \times \mathbf{C})_n da = 0. \quad (3.39)$$

Это нас должно заинтересовать, потому что у нас уже есть одна теорема о поверхностном интеграле векторного поля. Такой поверхностный интеграл равен объемному интегралу от дивергенции вектора, как это следует из теоремы Гаусса [уравнение (3.18)]. Теорема Гаусса в применении к  $\nabla \times \mathbf{C}$  утвер-



ждает, что

$$\int_{\substack{\text{Замкнутая} \\ \text{поверхность}}} (\nabla \times \mathbf{C})_n da = \int_{\substack{\text{Объем} \\ \text{внутри}}} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{C}) dV. \quad (3.40)$$

Мы заключаем, что интеграл в правой части должен обращаться в нуль

$$\int_{\substack{\text{Произволь-} \\ \text{ный объем}}} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{C}) dV = 0 \quad (3.41)$$

и что это должно быть справедливо для любого векторного поля  $\mathbf{C}$ , каким бы оно ни было. Раз уравнение (3.41) выполнено для произвольного объема, то в каждой точке пространства подынтегральное выражение должно быть равно нулю. Получается, что

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{C}) = 0 \quad \text{всегда.}$$

Тот же результат был выведен с помощью векторной алгебры в гл. 2, § 7. Теперь мы начинаем понимать, как все здесь приложено одно к другому.

## § 8. Итоги

Подытожим теперь все, что мы узнали о векторном исчислении. Вот самые существенные моменты гл. 2 и 3.

1. Операторы  $\partial/\partial x$ ,  $\partial/\partial y$  и  $\partial/\partial z$  можно рассматривать как три составляющих векторного оператора  $\nabla$ ; формулы, следующие из векторной алгебры, остаются правильными, если этот оператор считать вектором

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

2. Разность значений скалярного поля в двух точках равна криволинейному интегралу от касательной составляющей градиента этого скаляра вдоль любой кривой, соединяющей первую точку со второй:

$$\psi(2) - \psi(1) = \int_{\substack{(1) \\ \text{Любая} \\ \text{кривая}}}^{(2)} \nabla \psi \cdot ds. \quad (3.42)$$

3. Поверхностный интеграл от нормальной составляющей произвольного вектора по замкнутой поверхности равен интегралу от дивергенции вектора по объему, лежащему внутри этой поверхности:

$$\int_{\substack{\text{Замкнутая} \\ \text{поверхность}}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} da = \int_{\substack{\text{Объем} \\ \text{внутри}}} \nabla \cdot \mathbf{C} dV. \quad (3.43)$$

4. Криволинейный интеграл от касательной составляющей произвольного вектора по замкнутому контуру равен поверхностному интегралу от нормальной составляющей ротора этого вектора по произвольной поверхности, ограниченной этим контуром

$$\int_{\text{Граница}} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{Поверхность}} (\nabla \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n} da. \quad (3.44)$$

**От редактора.** Начиная изучать уравнения Максвелла, обратите внимание, что в этих лекциях используется рационализированная система единиц, в которой уравнения Максвелла не содержат коэффициентов.

Более привычно вместо  $\epsilon_0$  писать  $\epsilon_0/4\pi$ ; тогда коэффициент  $4\pi$  исчезает из знаменателя закона Кулона (4.9), но появляется в правых частях уравнений (4.1) и (4.3). [Улучшение системы единиц всегда похоже на Тришкин кафтан.]

Кроме того, вместо квадрата скорости света вводят новую постоянную  $\mu_0 = \epsilon_0/c^2$ , называют ее (довольно неудачно) магнитной проницаемостью пустоты (так же, как  $\epsilon_0$  называют диэлектрической проницаемостью пустоты) и обозначают  $\epsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{D}$ ,  $\mathbf{V} = \mu_0 \mathbf{H}$ .

Будьте осторожны! Проверьте систему единиц, когда открываете новую книгу об электричестве!

# Глава 4

## ЭЛЕКТРОСТАТИКА

### §1. Статика

### §2. Закон Кулона; наложение сил

### § 1. Статика

### §3. Электрический потенциал

Начнем теперь подробное изучение теории электромагнетизма. Она вся (весь электромагнетизм целиком) запрятана в *уравнениях Максвелла*:

### §4. $E = -\nabla\phi$

### §5. Поток поля E

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (4.1)$$

### §6. Закон Гаусса; дивергенция поля E

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad (4.2)$$

### §7. Поле заряженного шара

$$c^2 \nabla \times B = \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{j}{\epsilon_0}, \quad (4.3)$$

### §8. Линии поля; эквипотенциальные поверхности

$$\nabla \cdot B = 0.$$

Явления, описываемые этими уравнениями, могут быть очень сложными. Но прежде чем перейти к более сложным, мы начнем со сравнительно простых и сначала научимся обращаться с ними. Самым легким для изучения является случай, который называют *статическим*. Это случай, когда от времени ничего не зависит, когда все заряды либо намертво закреплены на своих местах, либо если уж движутся, то их ток постоянен (т. е.  $\rho$  и  $j$  постоянны во времени). В этих условиях в уравнениях Максвелла все члены, являющиеся производными по времени, обращаются в нуль, и уравнения приобретают следующий вид:

*Посмотреть:* гл. 13 и 14 (вып. 1)  
«Работа и потенциальная энергия»

### Электростатика

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (4.5)$$

$$\nabla \times E = 0. \quad (4.6)$$

$$\epsilon_0 c^2 = \frac{10^7}{4\pi}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9$$

$$[\epsilon_0] = \text{кулон}^2 / \text{ньютон} \cdot \text{м}^2$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}, \quad (4.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.8)$$

Обратите внимание на интересное свойство этой системы четырех уравнений. Она распалась на две части. Электрическое поле  $\mathbf{E}$  появляется только в первой паре уравнений, а магнитное поле  $\mathbf{B}$  — только во второй. Между собой эти два поля совсем не связаны. Это означает, что *коль скоро заряды и токи постоянны, то электричество и магнетизм — явления разные*. Нельзя обнаружить никакой зависимости полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  друг от друга, пока не возникнут изменения в зарядах или токах, скажем, пока конденсатор не начнет заряжаться или магнит двигаться. Только когда возникают сравнительно быстрые изменения, так что временные производные в уравнениях Максвелла достигают заметной величины,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  начинают влиять друг на друга.

Если вы всмотритесь в уравнения статики, то обнаружите, что для изучения математических свойств векторных полей эти два предмета — электростатика и магнитостатика — являются идеальным объектом. Электростатика — это чистый пример векторного поля с *нулевым ротором и заданной дивергенцией*, а магнитостатика — *чистейший пример поля с нулевой дивергенцией и заданным ротором*. Более общепринятый (и, быть может, с чьей-то точки зрения более удовлетворительный) путь изложения теории электромагнетизма состоит в том, чтобы начать с электростатики и выучить тем самым все про дивергенцию. Магнитостатику и ротор оставляют на потом. И лишь в конце объединяют и электричество, и магнетизм. Мы же с вами начали с полной теории векторного исчисления. Применим теперь ее к частному случаю электростатики, к полю  $\mathbf{E}$ , задаваемому первой парой уравнений.

Начнем с самых простых задач, в которых положения всех зарядов фиксированы. Если бы нам нужно было изучить электростатику только на этом уровне (а этим мы и будем заниматься в ближайших двух главах), то жизнь наша была бы очень проста. Все было бы почти тривиальным и нам понадобился бы, как вы в этом сейчас убедитесь, только закон Кулона да несколько интегрирований. Однако во многих реальных электростатических задачах мы *вначале не знаем*, где находятся заряды. Мы знаем только, что они в зависимости от свойств вещества распределились как-то и где-то. Положение, которое примут заряды, зависит от поля  $\mathbf{E}$ , а оно в свою очередь зависит от расположения зарядов. И тогда все сразу усложняется. Если, например, заряженное тело поднесено к проводнику или к изолятору, то электроны и протоны в проводнике или изоляторе начнут перетекать на новое место. Одна часть плотности заряда  $\rho$  в урав-

нении (4.5) будет нам известна — это тот заряд, который мы подносим; но в  $\rho$  войдут и другие части от тех зарядов, которые перетекают. Мы обязаны будем учесть движение всех зарядов. Возникнут довольно тонкие и интересные задачи.

Однако настоящая глава, хоть она и посвящена электростатике, не будет касаться самых красивых и тонких вопросов этой науки. В ней будут рассмотрены лишь такие ситуации, в которых можно предположить, что расположение всех зарядов известно. Но и в этом случае, прежде чем научиться справляться со сложными случаями, естественно сначала освоиться с простыми.

## § 2. Закон Кулона; наложение сил

Логично было бы принять за отправную точку уравнения (4.5) и (4.6). Но легче начать с другого, а потом вернуться к этим уравнениям. Результат получится одинаковый. Мы начнем с закона, о котором говорилось раньше, — с закона Кулона, утверждающего, что между двумя покоящимися зарядами действует сила, прямо пропорциональная произведению зарядов и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними. Сила направлена по прямой от одного заряда к другому.

### Закон Кулона

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{12} = -\mathbf{F}_2; \quad (4.9)$$

здесь  $\mathbf{F}_1$  — сила, действующая на заряд  $q_1$ ;  $\mathbf{e}_{12}$  — единичный вектор, направленный от  $q_2$  к  $q_1$ , а  $r_{12}$  — расстояние между  $q_1$  и  $q_2$ . Сила  $\mathbf{F}_2$ , действующая на  $q_2$ , равна и противоположна силе  $\mathbf{F}_1$ .

Множитель пропорциональности по историческим причинам пишется в виде  $1/4\pi\epsilon_0$ . В системе единиц СИ, которой мы пользуемся, он определяется как  $10^{-7}$  от квадрата скорости света. Так как скорость света примерно  $3 \cdot 10^8$  м/сек, то множитель приблизительно равен  $9 \cdot 10^9$ , и единица оказывается равной ньютон·м<sup>2</sup>/кулон<sup>2</sup>, или вольт·м/кулон

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} &= 10^{-7} c^2 \text{ (по определению),} \\ &= 9,0 \cdot 10^9 \text{ (из опыта).} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Если зарядов больше двух (а именно такие случаи наиболее интересны), то закон Кулона нужно дополнить другим существующим в природе фактом: сила, действующая на заряд, есть векторная сумма кулоновских сил, действующих со стороны всех прочих зарядов. Этот экспериментальный факт называется «принципом наложения», или «принципом суперпози-

Величина	Единица
$F$	ньютон
$Q$	кулон
$L$	метр (м)
$W$	джоуль
$\rho \sim Q/L^3$	кулон/м <sup>3</sup>
$1/\epsilon_0 \sim FL^2/Q^2$	ньютон·м <sup>2</sup> /кулон <sup>2</sup>
$E \sim F/Q$	ньютон/кулон
$\varphi \sim W/Q$	джоуль/кулон·вольт
$E \sim \varphi/L$	вольт/м
$1/\epsilon_0 \sim EL^2/Q$	вольт·м/кулон

ции». Это и есть все, что имеется в электростатике. Если добавить к закону Кулона принцип наложения, то больше ничего в ней не останется. Точно к таким же выводам, ни больше, ни меньше, приведут уравнения электростатики, уравнения (4.5) и (4.6).

Применяя закон Кулона, удобно ввести понятие об электрическом поле. Мы говорим, что поле  $E(1)$  — это сила, действующая со стороны прочих зарядов на единицу заряда  $q_1$ . Деля (4.9) на  $q_1$ , мы получаем для действия всех зарядов, кроме  $q_1$ ,

$$E(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{12}^2} e_{12}. \quad (4.11)$$

Кроме того, мы считаем, что  $E(1)$  описывает нечто, существующее в точке (1), даже если в ней нет заряда  $q_1$  (в предположении, что все прочие заряды сохранили свои позиции). Мы говорим:  $E(1)$  — это электрическое поле в точке (1).

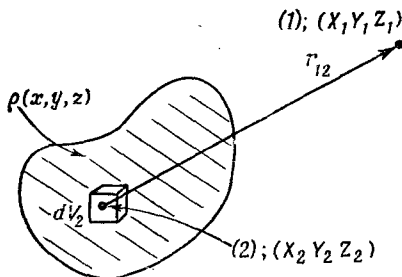
Электрическое поле  $E$  — это вектор, так что в (4.11) на самом деле написаны три уравнения, по одному для каждой компоненты. Расписывая  $x$ -компоненту в явном виде, получаем

$$E_x(x_1, y_1, z_1) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_1 - x_2}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}}, \quad (4.12)$$

и точно так же для остальных компонент.

Если зарядов много, то поле  $E$  в любой точке (1) равно сумме вкладов от всех зарядов. Каждый член в сумме будет выглядеть как (4.11) или (4.12). Пусть  $q_j$  — величина  $j$ -го заряда, а  $r_{1j}$  — смещение  $q_j$  от точки (1); тогда мы напишем

$$E(1) = \sum_{j \neq 1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{1j}^2} e_{1j}, \quad (4.13)$$



Ф и г. 4.1. В точке (1) электрическое поле  $E$  от некоторого распределения зарядов получается из интеграла по распределению.

Точка (1) может находиться также внутри распределения.

что означает, конечно,

$$E_x(x_1, y_1, z_1) = \sum_{j \neq 1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j(x_1 - x_j)}{[(x_1 - x_j)^2 + (y_1 - y_j)^2 + (z_1 - z_j)^2]^{3/2}} \quad (4.14)$$

и т. д.

Часто бывает удобно игнорировать тот факт, что заряды всегда существуют в виде отдельных кусочков, таких, как электроны или протоны, а считать, что они размазаны сплошным пятном, или, как говорят, описываются «распределением». До тех пор пока нам все равно, что происходит в малых масштабах, такое описание вполне законно. Распределение заряда описывается «плотностью заряда»  $\rho(x, y, z)$ . Если количество заряда в небольшом объеме  $\Delta V_2$  близ точки (2) есть  $\Delta q_2$ , то  $\rho$  определяется равенством

$$\Delta q_2 = \rho(2) \Delta V_2. \quad (4.15)$$

Пользуясь теперь законом Кулона при непрерывном распределении заряда, мы заменяем в уравнениях (4.13) или (4.14) суммы интегралами по всему объему, содержащему заряды. Получается

$$E(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Все пространство}} \frac{\rho(2) e_{12} dV_2}{r_{12}^3}. \quad (4.16)$$

Некоторые предпочитают писать

$$e_{12} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}},$$

где  $\mathbf{r}_{12}$  — вектор смещения от (2) к (1) (фиг. 4.1). Интеграл для  $E$  тогда запишется в виде

$$E(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Все пространство}} \frac{\rho(2) \mathbf{r}_{12} dV_2}{r_{12}^3}. \quad (4.17)$$

Если мы хотим действительно провести интегрирование до конца, то обычно приходится интегралы расписывать подроб-

нее. Для  $x$ -компоненты уравнений (4.16) или (4.17) получается

$$E_x(x_1, y_1, z_1) = \int_{\text{Все пространство}} \frac{(x_1 - x_2) \rho(x_2, y_2, z_2) dx_2 dy_2 dz_2}{4\pi\epsilon_0 [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}}. \quad (4.18)$$

Мы не собираемся вычислять что-либо по этой формуле. Написали мы ее здесь только для того, чтобы подчеркнуть, что мы полностью решили те электростатические задачи, в которых известно расположение всех зарядов.

*Дано:* Заряды.

*Определить:* Поля.

*Решение:* Возьми этот интеграл.

Так что по существу все сделано; остается только проделать сложные интегрирования по трем переменным. Эта работа в самый раз для счетной машины!

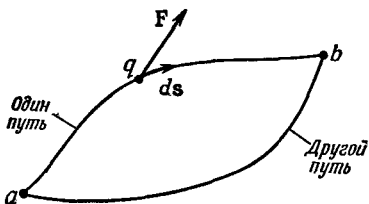
Пользуясь этими интегралами, мы можем найти поле заряженной плоскости, заряженной линии, заряженной сферы и любого выбранного распределения. Хотя мы сейчас начнем чертить силовые линии, говорить о потенциалах и вычислять дивергенции, важно понимать, что ответ на все решаемые задачи в принципе уже готов. Просто порой бывает легче взять интеграл, придумав фокус, чем проделывать все выкладки честно. Но чтобы догадываться, нужно научиться разным ухищрениям. Быть может, лучше было бы вычислять интегралы непосредственно, а не тратить силы на остроумные способы решения да демонстрировать свою сообразительность. Но все-таки мы пойдем по пути развития сообразительности. Переходим, таким образом, к обсуждению некоторых других особенностей электрического поля.

### § 3. Электрический потенциал

Для начала усвоим понятие электрического потенциала, связанное с работой переноса заряда из одной точки в другую. Пусть имеется какое-то распределение зарядов. Оно создает электрическое поле. Спрашивается, какую работу надо затратить, чтобы перенести небольшой заряд из одной точки в другую? Работа, произведенная *против* действия электрических сил при переносе заряда по некоторому пути, равна *минус* компоненте электрической силы в направлении движения, проинтегрированной по этому пути. Если заряд переносится от точки  $a$  к точке  $b$ , то

$$W = - \int_a^b \mathbf{F} \cdot ds,$$





Ф и г. 4.2. Работа переноса заряда от  $a$  к  $b$  равна минус интегралу от  $F \cdot ds$  по выбранному пути.

где  $F$  — электрическая сила, действующая на заряд в каждой точке, а  $ds$  — дифференциал вектора перемещения вдоль траектории (фиг. 4.2).

Для наших целей интереснее рассмотреть работу переноса единицы заряда. Тогда сила, действующая на такой заряд, численно совпадает с электрическим полем. Обозначая в этом случае работу против действия электрических сил буквой  $W_{\text{един}}$ , напишем

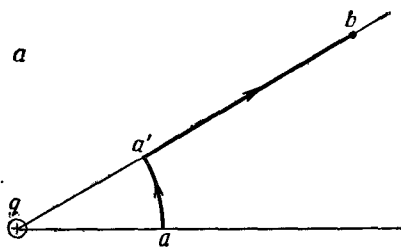
$$W_{\text{един}} = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (4.19)$$

Вообще говоря, то, что получается при интегрировании такого сорта, зависит от выбранного пути интегрирования. Но если бы интеграл в (4.19) зависел от пути, мы бы могли извлечь из поля работу, поднеся заряд к  $b$  по одному пути и унеся обратно к  $a$  по другому. Можно было бы подойти к  $b$  по тому пути, где  $W$  меньше, а удалиться по тому пути, где оно больше, получив работы больше, чем было вложено.

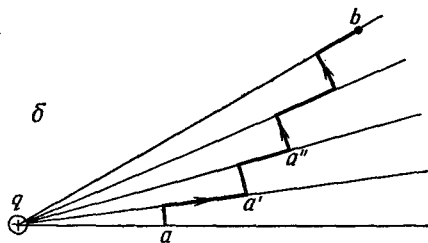
В принципе нет ничего невозможного в том, чтобы получать работу из поля. Мы еще познакомимся с полями, в которых это возможно. Может оказаться, что, двигая заряды, вы действуете на остальную часть всего «механизма» с какой-то силой. Если «механизм» сам движется против этой силы, он будет терять энергию, и полная энергия будет тем самым оставаться постоянной. В электростатике, однако, никакого «механизма» нет. Мы знаем, каковы те силы отдачи, которые действуют на источники поля. Это кулоновские силы, действующие на заряды, ответственные за создание поля. Если положения всех прочих зарядов зафиксированы (а это допущение делается в одной только электростатике), то силы отдачи на них не смогут действовать. И тогда нет способа извлечь из них энергию, разумеется, при условии, что принцип сохранения энергии в электростатике справедлив. Мы, конечно, верим, что это так, однако попробуем все же показать, как это следует из закона силы Кулона.

Посмотрим сначала, что происходит в поле, созданном единичным зарядом  $q$ . Пусть точка  $a$  удалена от  $q$  на расстояние

Фиг. 4.3. При переносе пробного заряда от  $a$  к  $b$  по любому пути тратится одна и та же работа.



$r_1$ , а точка  $b$  — на расстоянии  $r_2$ . Перенесем теперь другой заряд, называемый «пробным» и равный единице, от  $a$  до  $b$ . Изберем сперва самый легкий для расчета путь. Перенесем наш пробный заряд сначала по дуге круга, а после — по радиусу (фиг. 4.3, а).

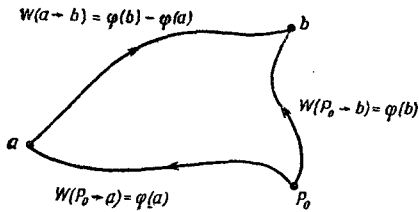


Рассчитать работу переноса по такому пути — детская забава (а иначе бы мы его и не выбрали). Во-первых, на участке  $aa'$  работа не производится. Поле по закону Кулона радиально, т. е. направлено поперек направления движения. Во-вторых, на участке  $a'b$  поле меняется как  $1/r^2$  и направлено по движению. Так что работа переноса пробного заряда от  $a$  к  $b$  равна

$$-\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{a'}^b \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right). \quad (4.20)$$

Выберем теперь другой легкий путь, скажем тот, который изображен на фиг. 4.3, б. Он идет попеременно то по дуге окружности, то по радиусу. Каждый раз, когда путь пролегает по дуге, никакой работы не затрачивается. Каждый раз, когда путь идет по радиусу, интегрируется  $1/r^2$ . По первому радиальному участку интеграл берется от  $r_a$  до  $r_{a'}$ , по следующему — от  $r_{a'}$  до  $r_{a''}$  и т. д. Сумма всех таких интегралов как раз равна одному интегралу, но в пределах от  $r_a$  до  $r_b$ . В общем получится тот же ответ, что и в первом испробованном нами пути. Ясно, что и для *любого* пути, составленного из произвольного числа участков такого вида, получится тот же результат.

Ну а как насчет плавных траекторий? Получим ли мы тот же ответ? Этот вопрос мы обсудили в вып. 1, гл. 13. Пользуясь теми же доводами, что и тогда, мы можем заключить, что



Фиг. 4.4. Работа, затраченная на движение вдоль любого пути от  $a$  до  $b$ , равна минус работе от некоторой точки  $P_0$  до  $a$  плюс работа от  $P_0$  до  $b$ .

работа переноса единичного заряда от  $a$  до  $b$  от пути не зависит:

$$W_{\text{един}}(a \rightarrow b) = - \int_a^b \underset{\substack{\text{Любой} \\ \text{путь}}}{E} \cdot ds.$$

А раз выполняемая работа зависит только от концов пути, то она может быть представлена в виде разности двух чисел. В этом можно убедиться следующим образом. Выберем отправную точку  $P_0$  и договоримся оценивать наш интеграл, пользуясь только теми траекториями, которые проходят через точку  $P_0$ . Обозначим работу, выполненную при движении против поля от  $P_0$  до точки  $a$ , через  $\varphi(a)$ , а работу на участке от  $P_0$  до точки  $b$  — через  $\varphi(b)$  (фиг. 4.4). Работа перехода от  $a$  к  $P_0$  (по дороге к  $b$ ) равна  $\varphi(a)$  с минусом, так что

$$- \int_a^b E \cdot ds = \varphi(b) - \varphi(a). \quad (4.21)$$

Так как повсюду будет встречаться только разность значений функции  $\varphi$  в двух точках, то положение точки  $P_0$  в сущности безразлично. Однако как только отправная точка выбрана, число  $\varphi$  тем самым определяется в *любой* точке пространства; значит,  $\varphi$  является *скалярным полем*, функцией от  $x, y, z$ . Эту скалярную функцию мы называем *электростатическим потенциалом* в произвольной точке.

*Электростатический потенциал*

$$\varphi(P) = - \int_{P_0}^P E \cdot ds. \quad (4.22)$$

Часто очень удобно брать отправную точку на бесконечности. Тогда потенциал  $\varphi$  одиночного заряда в начале координат, взятый в произвольной точке  $(x, y, z)$ , равен [см. уравнение (4.20)]

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}. \quad (4.23)$$

Электрическое поле нескольких зарядов можно записать в виде суммы электрических полей от первого заряда, от второго, от третьего и т. д. Интегрируя сумму для того, чтобы определить потенциал, мы приходим к сумме интегралов. Каждый из них — это потенциал соответствующего заряда. Значит, потенциал  $\varphi$  множества зарядов есть сумма потенциалов каждого из зарядов по отдельности. Таким образом, и для потенциалов существует принцип наложения. Пользуясь такими же аргументами, как и тогда, когда мы искали электрическое поле группы зарядов или распределения зарядов, мы можем получить окончательные формулы для потенциала  $\varphi$  в точке, обозначенной как (1):

$$\varphi(1) = \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{1j}}, \quad (4.24)$$

или

$$\varphi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2) dV_2}{r_{12}}. \quad (4.25)$$

Не забывайте, что потенциал  $\varphi$  имеет физический смысл: это потенциальная энергия, которую имел бы единичный заряд, если его перенести в указанную точку пространства из некоторой отправной точки.

### § 4. $E = -\nabla\varphi$

С какой стати нас заинтересовал потенциал  $\varphi$ ? Силы, действующие на заряды, даются величиной  $E$  — электрическим полем. Вся соль в том, что  $E$  из  $\varphi$  очень легко получить, не труднее, чем вычислить производную. Рассмотрим две точки с одинаковыми  $y$  и  $z$ , но с разными  $x$ : у одной  $x$ , у другой  $x + \Delta x$ ; поинтересуемся, какую работу надо совершить, чтобы перенести единичный заряд из одной точки в другую. Путь переноса — горизонтальная линия от  $x$  до  $x + \Delta x$ . Работа равна разности потенциалов в двух точках

$$\Delta W = \varphi(x + \Delta x, y, z) - \varphi(x, y, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta x.$$

Но работа против действия силы на том же отрезке равна

$$\Delta W = - \int E \cdot ds = - E_x \Delta x.$$

Мы видим, что

$$E_x = - \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (4.26)$$

Равным образом,  $E_y = -\partial\varphi/\partial y$ ,  $E_z = -\partial\varphi/\partial z$ ; все это в обозначениях векторного анализа можно подытожить так:

$$E = -\nabla\varphi. \quad (4.27)$$

Это дифференциальная форма уравнения (4.22). Любую задачу, в которой заряды заданы, можно решить, вычислив по (4.24) или (4.25) потенциал и рассчитав по (4.27) поле. Уравнение (4.27) согласуется также с тем, что получается в векторном анализе: с тем, что для любого скалярного поля

$$\int_a^b \nabla\varphi \cdot ds = \varphi(b) - \varphi(a). \quad (4.28)$$

Согласно уравнению (4.25), скалярный потенциал  $\varphi$  представляется трехмерным интегралом, подобным тому, который мы писали для  $E$ . Есть ли какая-либо выгода в том, что вместо  $E$  вычисляется  $\varphi$ ? Да. Для вычисления  $\varphi$  нужно взять один интеграл, а для вычисления  $E$  — три (ведь это вектор). Кроме того, обычно  $1/r$  интегрировать легче, чем  $x/r^3$ . Во многих практических случаях оказывается, что для получения электрического поля легче сперва подсчитать  $\varphi$ , а после взять градиент, чем вычислять три интеграла для  $E$ . Это просто вопрос удобства.

Но потенциал  $\varphi$  имеет и глубокий физический смысл. Мы показали, что  $E$  закона Кулона получается из  $E = -\text{grad } \varphi$ , где  $\varphi$  дается уравнением (4.22). Но если  $E$  — это градиент скалярного поля, то, как известно из векторного исчисления, ротор  $E$  должен обратиться в нуль:

$$\nabla \times E = 0. \quad (4.29)$$

Но это и есть наше второе основное уравнение электростатики — уравнение (4.6). Таким образом, мы показали, что закон Кулона дает поле  $E$ , удовлетворяющее этому условию. Так что до сих пор все в порядке.

На самом деле то, что  $\nabla \times E$  равно нулю, было доказано еще до того, как мы определили потенциал. Мы показали, что работа обхода по замкнутому пути равна нулю, т. е.

$$\oint E \cdot ds = 0$$

по *любому* пути. Мы видели в гл. 3, что в таком поле  $\nabla \times E$  должно быть всюду равно нулю. Электрическое поле электростатики — это поле без роторов.

Вы можете потренироваться в векторном исчислении, доказав равенство нулю вектора  $\nabla \times E$  другим способом, т. е. вычислив компоненты вектора  $\nabla \times E$  для поля точечного заряда по формулам (4.11). Если получится нуль, то принцип наложения обеспечит нам обращение  $\nabla \times E$  в нуль для любого распределения зарядов.

Следует подчеркнуть важный факт. Для любой *радиальной* силы выполняемая работа не зависит от пути и существует потенциал. Если вы вдумаетесь в это, то увидите, что все наши доказательства того, что интеграл работы не зависит от пути,

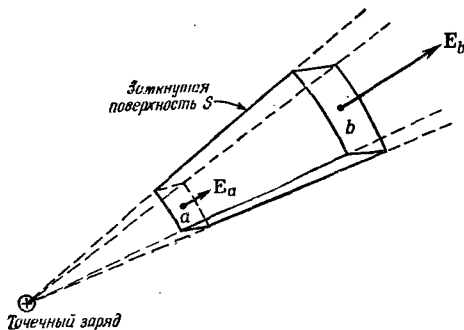
сами определялись только тем, что сила от отдельного заряда была радиальна и сферически симметрична. То, что зависимость силы от расстояния имела вид  $1/r^2$ , не имело никакого значения, при любой зависимости от  $r$  получилось бы то же самое. Существование потенциала и обращение в нуль ротора  $\mathbf{E}$  вытекают на самом деле только из *симметрии* и *направленности* электростатических сил. По этой причине уравнение (4.28) или (4.29) может содержать в себе только часть законов электричества.

## § 5. Поток поля $\mathbf{E}$

Теперь мы хотим вывести уравнение, которое непосредственно и в лоб учитывает тот факт, что закон силы — это закон обратных квадратов. Кое-кому кажется «вполне естественным», что поле меняется обратно пропорционально квадрату расстояния, потому что «именно так, мол, все распространяется». Возьмите световой источник, из которого льется поток света; количество света, проходящее через основание конуса с вершиной в источнике, одно и то же независимо от того, насколько основание удалено от вершины. Это с необходимостью следует из сохранения световой энергии. Количество света на единицу площади — интенсивность — должно быть обратно пропорционально площади, вырезанной конусом, т. е. квадрату расстояния от источника. Ясно, что по той же причине и электрическое поле должно изменяться обратно квадрату расстояния!

Но здесь ведь нет ничего похожего на «ту же причину». Ведь никто не может сказать, что электрическое поле есть мера чего-то такого, что похоже на свет и что поэтому должно сохраняться. *Если бы у нас была такая «модель» электрического поля, в которой вектор поля представлял бы направление и скорость (ну, например, был бы током) каких-то вылетающих маленьких «дробинок», и если бы эта модель требовала, чтобы число дробинок сохранялось и ни одна не могла пропасть после вылета из заряда, вот тогда мы могли бы говорить, что «чувствуем» неизбежность закона обратных квадратов.* С другой стороны, непременно должен был бы существовать математический способ выражения этой физической идеи. Если бы электрическое поле было подобно сохраняющимся дробинкам, то оно менялось бы обратно пропорционально квадрату расстояния и мы могли бы описать такое поведение некоторым уравнением, т. е. чисто математическим путем. Если мы не утверждаем, что электрическое поле *сделано* из дробинок, а понимаем, что это просто модель, помогающая нам прийти к правильной математической теории, то ничего плохого в таком способе рассуждений нет.

Предположим, что мы на мгновение представили себе электрическое поле в виде потока чего-то сохраняющегося и текущего



Ф и г. 4.5. Поток  $E$  из поверхности  $S$  равен нулю.

повсюду, за исключением того места, где расположен сам заряд (должен же этот поток откуда-то начинаться!). Представим что-то (что именно — неважно), вытекающее из заряда в окружающее пространство. Если бы  $E$  было вектором такого потока (как  $h$  — вектор теплового потока), то вблизи от точечного источника оно обладало бы зависимостью  $1/r^2$ . Теперь мы желаем использовать эту модель для того, чтобы глубже сформулировать закон обратных квадратов, а не просто говорить об «обратных квадратах». (Вам может показаться удивительным, почему вместо того, чтобы сходу, прямо и открыто сформулировать столь простой закон, мы хотим трусливо протачить то же самое, но с заднего хода. Немного терпения! Это окажется небесполезным.)

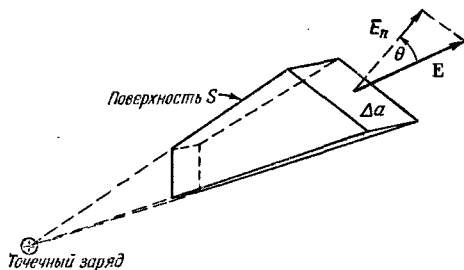
Спросим себя: чему равно «вытекание»  $E$  из произвольной замкнутой поверхности в окрестности точечного заряда? Для начала возьмем простенькую поверхность — такую, как показано на фиг. 4.5. Если поле  $E$  похоже на поток, то суммарное вытекание из этого ящика должно быть равно нулю. Это и получается, если под «вытеканием» из этой поверхности мы понимаем поверхностный интеграл от нормальной составляющей  $E$ , т. е. поток  $E$  в том смысле, который был установлен в гл. 3. На боковых гранях нормальная составляющая  $E$  равна нулю. На сферических гранях нормальная составляющая  $E$  равна самой величине  $E$ , с минусом на меньшей грани и с плюсом на большей. Величина  $E$  убывает как  $1/r^2$ , а площадь грани растет как  $r^2$ , так что их произведение от  $r$  не зависит. Приток  $E$  через грань  $a$  в точности гасится оттоком через грань  $b$ . Суммарный поток через  $S$  равен нулю, а это все равно, что сказать, что

$$\int_S E_n da = 0 \quad (4.30)$$

на этой поверхности.

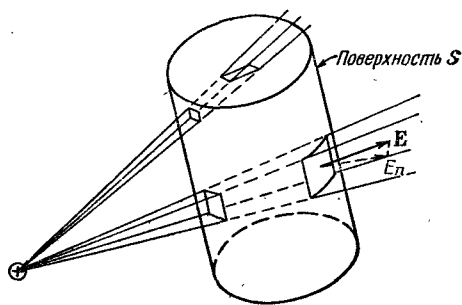
Теперь покажем, что две «торцевые» поверхности могут быть без ущерба для величины интеграла (4.30) перекошены относительно радиуса. Хотя это верно всегда, но для наших целей

Ф и г. 4.6. Поток  $E$  из поверхности  $S$  равен нулю.



достаточно только показать, что это справедливо тогда, когда «торцы» малы и стягивают малый угол с вершиной в источнике, т. е. в действительности бесконечно малый угол. На фиг. 4.6 показана поверхность  $S$ , «боковые грани» которой радиальны, а «торцы» перекошены. На рисунке они не малы, но надо представить себе, что на самом деле они очень малы. Тогда поле  $E$  над поверхностью будет достаточно однородным, так что можно взять его значение в центре. Если торец наклонен на угол  $\theta$ , то его площадь возрастает в  $1/\cos \theta$  раз, а  $E_n$  — компонента  $E$ , нормальная к поверхности торца, убывает в  $\cos \theta$  раз, так что произведение  $E_n \Delta a$  не меняется. Поток из всей поверхности  $S$  по-прежнему равен нулю.

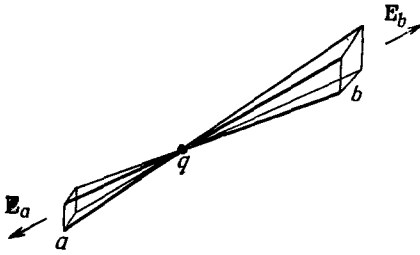
Теперь уже легко разглядеть, что и поток из объема, окруженного произвольной поверхностью  $S$ , обязан быть равным нулю. Ведь любой объем можно представить себе составленным из таких частей, как на фиг. 4.6. Вся поверхность разделится на пары торцевых участков, а поскольку потоки через каждую из них внутрь и наружу объема попарно уничтожаются, то и суммарный поток через поверхность обратится в нуль. Идея эта иллюстрируется фиг. 4.7. Мы получаем совершенно общий результат: суммарный поток  $E$  через любую поверхность  $S$  в поле точечного заряда равен нулю.



Ф и г. 4.7. Всякий объем можно представлять себе состоящим из бесконечно малых усеченных конусов.

Поток  $E$  сквозь один конец каждого конического сегмента равен и противоположен потоку сквозь другой конец. Общий поток из поверхности  $S$  поэтому равен нулю.





Ф и г. 4.8. Если заряд находится внутри поверхности, поток наружу не равен нулю.

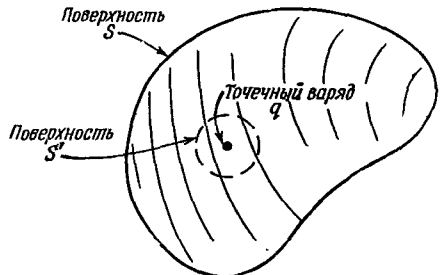
Будьте, однако, внимательны! Наше доказательство работает только тогда, когда поверхность  $S$  не окружает заряд. А что случилось бы, если бы точечный заряд оказался *внутри* поверхности? Как и раньше, поверхность можно было бы разделить на пары площадок, связанные радиальными прямыми, проходящими через заряд (фиг. 4.8). Потоки через эти участки по той же причине, что и раньше, по-прежнему попарно равны, но только теперь их знаки *одинаковы*. Поток из поверхности, *окружающей* заряд, не равен нулю. Тогда чему же он равен? Это можно определить с помощью фокуса. Допустим, что мы «убрали» заряд «изнутри», окружив его маленькой поверхностью  $S'$  так, чтобы она лежала целиком внутри первоначальной поверхности  $S$  (фиг. 4.9). Теперь в объеме, заключенном *между* двумя поверхностями  $S$  и  $S'$ , никакого заряда нет. Общий поток из этого объема (включая поток через  $S'$ ) равен нулю, в чем можно убедиться при помощи прежних аргументов. Они говорят нам, что поток через  $S'$  *внутри объема* такой же, как поток через  $S$  наружу.

Для  $S'$  мы можем выбрать любую, какую угодно форму, поэтому давайте сделаем ее сферой с зарядом в центре (фиг. 4.10). Тогда поток через нее подсчитать легко. Если радиус малой сферы равен  $r$ , то значение  $E$  повсюду на ее поверхности равно

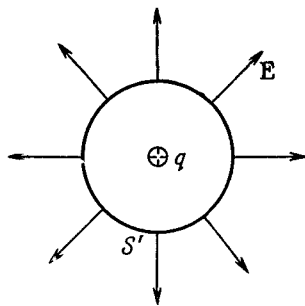
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

и направлено всегда по нормали к поверхности. Весь поток

Ф и г. 4.9. Поток через  $S$  равен потоку через  $S'$ .



Ф и г. 4.10. Поток через сферическую поверхность, охватывающую точечный заряд  $q$ , равен  $q/\epsilon_0$ .



через  $S'$  получится, если эту нормальную составляющую  $E$  умножить на площадь поверхности:

$$\text{Поток через поверхность } S' = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \right) (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (4.31)$$

т. е. равен числу, не зависящему от радиуса сферы! Значит, и поток наружу через  $S$  тоже равен  $q/\epsilon_0$ ; это значение не зависит от формы  $S$  до тех пор, пока заряд  $q$  находится внутри.

Наши выводы мы можем записать так:

$$\int_{\text{Произвольная поверхность } S} E_n da = \begin{cases} 0; & q \text{ снаружи } S, \\ \frac{q}{\epsilon_0}; & q \text{ внутри } S. \end{cases} \quad (4.32)$$

Давайте вернемся к нашей аналогии с «дробинками» и посмотрим, есть ли в ней смысл. Наша теорема утверждает, что суммарный поток дробинок через поверхность равен нулю, если поверхность не окружает собой ружье, стреляющее дробью. А если ружье окружено поверхностью, то какого бы размера или формы она ни была, количество проходящих через нее дробинок всегда одно и то же — оно дается скоростью, с которой дробинки вылетают из ружья. Все это выглядит вполне разумно для сохраняющихся дробинок. Но сообщает ли эта модель нам хоть что-то сверх того, что получается просто из уравнения (4.32)? Никому не удалось добиться того, чтобы «дробинки» произвели на свет что-нибудь сверх этого закона. Кроме него, они порождают только ошибки. Поэтому-то мы сегодня предпочитаем чисто абстрактное представление об электромагнитном поле.

## § 6. Закон Гаусса; дивергенция поля $E$

Наш изящный результат — уравнение (4.32) — был доказан для отдельного точечного заряда. А теперь допустим, что имеются два заряда: заряд  $q_1$  — в одной точке и заряд  $q_2$  — в другой. Задача выглядит уже потруднее. Теперь электрическое

поле, нормальную составляющую которого мы интегрируем, это уже поле, созданное обоими зарядами. Иначе говоря, если  $E_1$  — то электрическое поле, которое создал бы один только заряд  $q_1$ , а  $E_2$  — электрическое поле, создаваемое одним зарядом  $q_2$ , то суммарное электрическое поле равно  $E = E_1 + E_2$ . Поток через произвольную замкнутую по поверхность  $S$  равен

$$\int_S (E_{1n} + E_{2n}) da = \int_S E_{1n} da + \int_S E_{2n} da. \quad (4.33)$$

Поток при наличии двух зарядов — это поток, вызванный одним зарядом, плюс поток, вызванный другим. Если оба находятся снаружи  $S$ , то поток сквозь  $S$  равен нулю. Если  $q_1$  находится внутри  $S$ , а  $q_2$  — снаружи, то первый интеграл даст  $q_1/\epsilon_0$ , а второй — нуль. Если поверхность окружает оба заряда, то каждый внесет вклад в интеграл и поток окажется равным  $(q_1 + q_2)/\epsilon_0$ . Общее правило очевидно: суммарный поток из замкнутой поверхности равен суммарному заряду *внутри* нее, деленному на  $\epsilon_0$ .

Этот результат представляет собой важный общий закон электростатического поля, и называется он теоремой Гаусса, или законом Гаусса:

*Закон Гаусса:*

$$\int_{\substack{\text{Любая} \\ \text{замкнутая} \\ \text{поверхность } S}} E_n da = \frac{\text{Сумма зарядов внутри}}{\epsilon_0}, \quad (4.34)$$

или

$$\int_{\substack{\text{Любая} \\ \text{замкнутая} \\ \text{поверхность } S}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{Q_{\text{внутр}}}{\epsilon_0}, \quad (4.35)$$

где

$$Q_{\text{внутр}} = \sum_{\text{Внутри } S} q_i. \quad (4.36)$$

Если мы описываем расположение зарядов на языке плотности зарядов  $\rho$ , то мы можем считать, что каждый бесконечно малый объем  $dV$  содержит «точечный» заряд  $\rho dV$ . Тогда сумма по всем зарядам есть интеграл

$$Q_{\text{внутр}} = \int_{\substack{\text{Объем} \\ \text{внутри } S}} \rho dV. \quad (4.37)$$

Из нашего вывода видно, что закон Гаусса вытекает из того факта, что показатель степени в законе Кулона в точности равен двум. Поле с законом  $1/r^3$ , да и любое поле  $1/r^n$  с  $n \neq 2$ , не привело бы к закону Гаусса. Значит, закон Гаусса как раз

выражает (только в другой форме) закон сил Кулона, действующих между двумя зарядами. Действительно, отправляясь от закона Гаусса, можно вывести закон Кулона. Оба они совершенно равноценны до того момента, пока силы между зарядами действуют радиально.

Теперь мы хотим записать закон Гаусса на языке производных. Чтобы это сделать, применим его к поверхности бесконечно малого куба. В гл. 3 мы показали, что поток  $\mathbf{E}$  из такого куба равен дивергенции  $\nabla \cdot \mathbf{E}$ , помноженной на объем  $dV$  куба. Заряд внутри  $dV$  по определению  $\rho$  равен  $\rho dV$ , так что закон Гаусса дает

$$\nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{\rho dV}{\epsilon_0},$$

или

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (4.38)$$

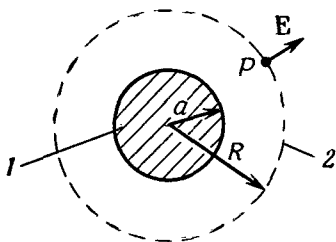
Дифференциальная форма закона Гаусса — это первое из наших фундаментальных уравнений поля в электростатике, уравнение (4.5). Мы теперь показали, что два уравнения электростатики (4.5) и (4.6) эквивалентны закону силы Кулона. Разберем один пример применения закона Гаусса (другие примеры будут рассмотрены позже).

### § 7. Поле заряженного шара

Одной из самых трудных задач, которую пришлось нам решать, когда мы изучали теорию гравитационного притяжения, было доказать, что сила, создаваемая твердым шаром на его поверхности, такая же, как если бы все вещество шара было сконцентрировано в его центре. Много лет Ньютон не решался обнародовать свою теорию тяготения, так как не был уверен в правильности этой теоремы. Мы доказали ее в вып. 1, гл. 13, взяв интеграл для потенциала и вычислив силу тяготения по градиенту. Теперь эту теорему мы можем доказать очень просто. Но на этот раз мы докажем не совсем ее, а сходную теорему для однородно заряженного электричеством шара. (Поскольку законы электростатики и тяготения совпадают, то то же доказательство может быть проведено и для поля тяготения.)

Зададим вопрос: каково электрическое поле  $\mathbf{E}$  в точке  $P$  где-то снаружи сферы, наполненной однородно распределенным зарядом? Так как здесь нет «выделенного» направления, то законно допустить, что  $\mathbf{E}$  всюду направлено прямо от центра сферы. Рассмотрим воображаемую сферическую поверхность, concentрическую со сферой зарядов и проходящую через точку  $P$  (фиг. 4.11). Для этой сферы поток наружу равен

$$\int E_n da = E \cdot 4\pi R^2.$$



Ф и г. 4.11. Применение закона Гаусса для определения поля однородно заряженного шара.

1 — распределение заряда  $Q$ ; 2 — гауссова поверхность  $S$ .

Закон Гаусса утверждает, что этот поток равен суммарному заряду сферы  $Q$  (деленному на  $\epsilon_0$ ):

$$E \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

или

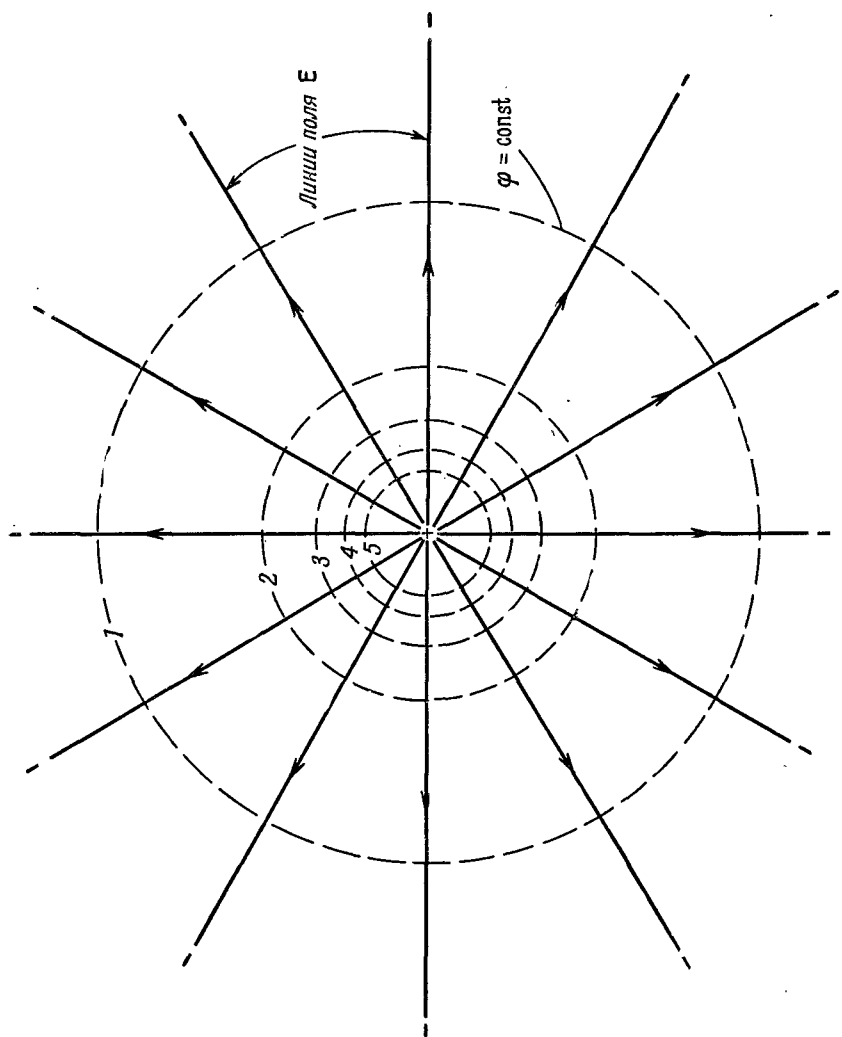
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad (4.39)$$

а это как раз та формула, которая получилась бы для точечного заряда  $Q$ . Мы решили проблему Ньютона проще, без интеграла. Конечно, это кажущаяся простота; вам пришлось затратить какое-то время на то, чтобы разобратся в законе Гаусса, и вы можете думать, что на самом деле время несколько не сэкономлено. Но когда вам придется часто применять эту теорему, то она практически окупится. Все дело в привычке.

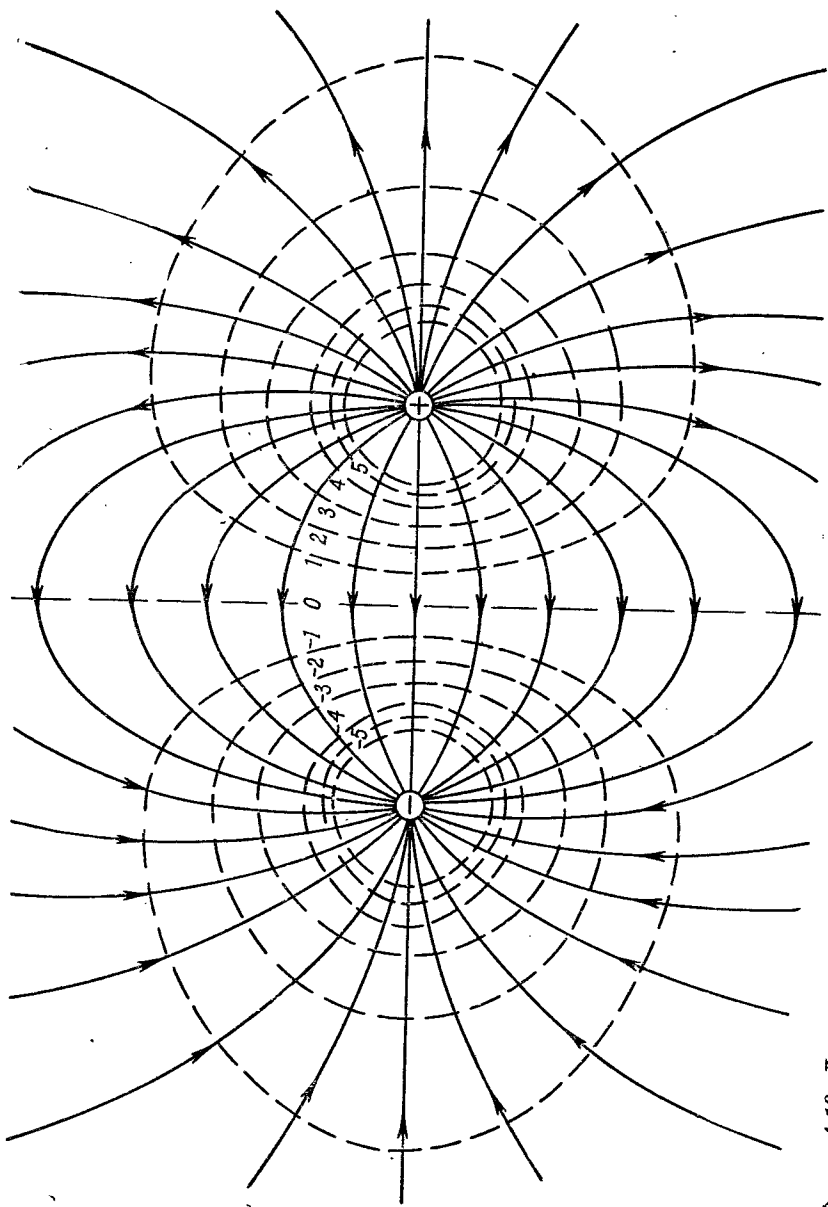
### § 8. Линии поля; эквипотенциальные поверхности

Теперь мы собираемся дать геометрическое описание электростатического поля. Два закона электростатики: один — о пропорциональности потока и внутреннего заряда и другой — о том, что электрическое поле есть градиент потенциала, могут также быть изображены геометрически. Мы проиллюстрируем это двумя примерами.

Первый пример: возьмем поле точечного заряда. Проведем линии в направлении поля, которые повсюду касательны к векторам поля (фиг. 4.12). Их называют *линиями поля*. Линии поля всюду показывают направление электрического вектора. Но, кроме этого, мы хотим изобразить и абсолютную величину вектора. Можно ввести такое правило: пусть напряженность электрического поля представляется «плотностью» линий. Под этим мы подразумеваем число линий на единицу площади, перпендикулярной линиям. С помощью этих двух правил мы можем начертить картину электрического поля. Для точечного заряда плотность линий должна убывать как  $1/r^2$ . Но площадь сферической поверхности, перпендикулярной к линиям на всех радиусах  $r$ , *возрастает* как  $r^2$ , так что если мы сохраним всюду, на *всех*



Ф и г. 4.12. Линии поля и эквипотенциальные поверхности для положительного точечного заряда.



Ф и г. 4.13. Линии поля и эквипотенциальные поверхности для двух равных, но разноименных точечных зарядов.

расстояниях от центра, *одно и то же число* линий, то их *плотность* останется пропорциональной величине поля. Мы можем гарантировать неизменность числа линий на всех расстояниях, если обеспечим *непрерывность* линий, т. е. если уж линия вышла из заряда, то она никогда не кончится. На языке линий поля закон Гаусса утверждает, что линии могут начинаться только в плюс-зарядах и кончаться только в минус-зарядах. А число линий, *покидающих* заряд  $q$ , должно быть равно  $q/\epsilon_0$ .

Сходную геометрическую картину можно отыскать и для потенциала  $\phi$ . Проще всего изображать его, рисуя поверхности, на которых  $\phi$  постоянно. Их называют *эквипотенциальными*, т. е. поверхностями одинакового потенциала. Какова геометрическая связь эквипотенциальных поверхностей и линий поля? Электрическое поле является градиентом потенциала. Градиент направлен по самому быстрому изменению потенциала, поэтому он перпендикулярен к эквипотенциальной поверхности. Если бы  $\mathbf{E}$  не было перпендикулярно к поверхности, у него существовала бы составляющая *вдоль* поверхности и потенциал изменялся бы вдоль поверхности и тогда нельзя было бы считать ее эквипотенциальной. Эквипотенциальные поверхности должны поэтому непременно всюду проходить поперек линий электрического поля.

У отдельно взятого точечного заряда эквипотенциальные поверхности — это сферы с зарядом в центре. На фиг. 4.12 показано пересечение этих сфер с плоскостью, проведенной через заряд.

В качестве второго примера рассмотрим поле близ двух одинаковых зарядов, одного положительного, а другого отрицательного. Это поле получить легко. Это суперпозиция (наложение) полей каждого из зарядов. Значит, мы можем взять две картинки, похожие на фиг. 4.12, и наложить их... нет, это невозможно! Тогда получились бы пересекающиеся линии поля, а этого быть не может, потому что  $\mathbf{E}$  не может иметь в одной точке *двух* направлений. Неудобство картины линий поля теперь становится очевидным. С помощью геометрических рассуждений невозможно в простой форме проанализировать, куда пойдут новые линии. Из двух независимых картин нельзя получить их сочетание. Принцип наложения, столь простой и глубокий принцип теории электрических полей, в картине полевых линий не имеет простого соответствия.

Картина полевых линий все же имеет свою область применимости, так что мы можем все же захотеть начертить эту картину для пары равных (и противоположных) зарядов. Если мы вычислим поля из уравнения (4.13), а потенциалы из (4.23), то сумеем начертить и линии поля и эквипотенциали. Фиг. 4.13 демонстрирует этот результат. Но сперва пришлось решить задачу аналитически!



## ПРИМЕНЕНИЯ ЗАКОНА ГАУССА

## § 1. Электростатика—это есть закон Гаусса плюс...

Существуют два закона электростатики: поток электрического поля из объема пропорционален заряду внутри него — закон Гаусса, и циркуляция электрического поля равна нулю —  $E$  есть градиент. Из этих двух законов следуют все предсказания электростатики. Но одно дело высказать эти вещи математически, и совсем другое — применять их с легкостью и с нужной долей остроумия. В этой главе мы будем заниматься только такими расчетами, которые могут быть проделаны непосредственно на основе закона Гаусса. Мы докажем некоторые теоремы и опишем некоторые эффекты (в частности, в проводниках), которые на основе закона Гаусса очень легко понять. Сам по себе закон Гаусса не может дать решения ни одной задачи, потому что должны быть выполнены и какие-то другие законы. Значит, применяя закон Гаусса к решению частных задач, нужно всегда к нему что-то добавлять. Мы должны, например, заранее делать какие-то предположения о том, как выглядит поле, основываясь, скажем, на соображениях симметрии. Или должны будем особо вводить представление о том, что поле есть градиент потенциала.

## § 2. Равновесие в электростатическом поле

Рассмотрим сначала следующий вопрос: в каких условиях точечный заряд может пребывать в механическом равновесии в электрическом поле других зарядов? В качестве примера представим себе три отрицательных заряда в вершинах равностороннего треугольника, рас-

§1. Электростатика — это есть закон Гаусса плюс...

§2. Равновесие в электростатическом поле

§3. Равновесие с проводниками

§4. Устойчивость атомов

§5. Поле заряженной прямой линии

§6. Заряженная плоскость; пара плоскостей

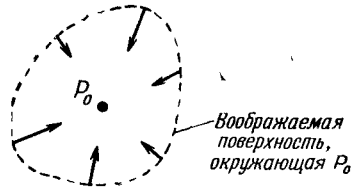
§7. Однородно заряженный шар; заряженная сфера

§8. Точен ли закон Кулона?

§9. Поля проводника

§10. Поле внутри полости проводника

Ф и г. 5.1. Если бы точка  $P_0$  отмечала положение устойчивого равновесия положительного заряда, то электрическое поле повсюду в ее окрестности было бы направлено к  $P_0$ .

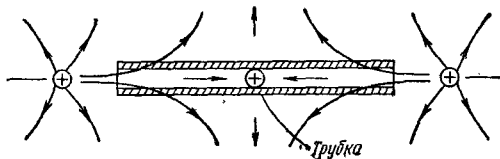


положенного в горизонтальной плоскости. Останется ли на своем месте положительный заряд, помещенный в центр треугольника? (Для простоты тяжестью пренебрежем; но и учет ее влияния не изменит выводов.) Сила, действующая на положительный заряд, равна нулю, но устойчиво ли это равновесие? Вернется ли заряд в положение равновесия, если его чуть сдвинуть с этого места? Ответ гласит: нет.

Ни в каком электростатическом поле не существует никаких точек устойчивого равновесия, за исключением случая, когда заряды сидят друг на друге. Применяя закон Гаусса, легко понять почему. Во-первых, чтобы заряд пребывал в равновесии в некоторой точке  $P_0$ , поле в ней должно быть равно нулю. Во-вторых, чтобы равновесие было устойчивым, требуется, чтобы смещение заряда из  $P_0$  в *любую сторону* вызывало восстанавливающую силу, направленную против смещения. Векторы электрического поля во *всех* окрестных точках должны показывать внутрь — на точку  $P_0$ . Но как легко видеть, это нарушает закон Гаусса, если в  $P_0$  нет заряда.

Возьмем небольшую воображаемую поверхность, окружающую точку  $P_0$  (фиг. 5.1). Если повсюду вблизи  $P_0$  электрическое поле направлено к  $P_0$ , то поверхностный интеграл от нормальной составляющей определенно не равен нулю. В случае, изображенном на фигуре, поток через поверхность должен быть отрицательным числом. Но, согласно закону Гаусса, поток электрического поля сквозь любую поверхность пропорционален количеству заряда внутри нее. Если в  $P_0$  нет заряда, то изображенное нами поле нарушит закон Гаусса. Уравновесить положительный заряд в пустом пространстве, в точке, в которой нет какого-нибудь отрицательного заряда, невозможно. Но если положительный заряд размещен *в центре* распределенного отрицательного заряда, то он *может* находиться в равновесии. Конечно, распределение отрицательного заряда должно само удерживаться на своем месте посторонними, неэлектрическими силами!

Этот вывод мы проделали для точечного заряда. Соблюдается ли он для сложной расстановки зарядов, относительное расположение которых чем-то фиксировано (скажем, стержнями)? Разберем этот вопрос на примере двух одинаковых зарядов, закрепленных на стержне. Может ли эта комбинация



Ф и г. 5.2. Заряд может быть в равновесии, если имеются механические ограничения.

в каком-то электрическом поле застыть в равновесии? И опять ответ гласит: нет. Суммарная сила, действующая на стержень, не способна возвращать его к положению равновесия при любых направлениях смещения.

Обозначим суммарную силу, действующую на стержень в любом положении, буквой  $F$ . Тогда  $F$  — это векторное поле. Повторяя те же рассуждения, что и выше, мы приходим к заключению, что в положении устойчивого равновесия дивергенция  $F$  должна быть числом отрицательным. Но суммарная сила, действующая на стержень, равна произведению первого заряда на поле в том месте, где он находится, плюс произведение второго заряда на поле в том месте, где он находится:

$$F = q_1 E_1 + q_2 E_2. \quad (5.1)$$

Дивергенция  $F$  дается выражением

$$\nabla \cdot F = q_1 (\nabla \cdot E_1) + q_2 (\nabla \cdot E_2).$$

Если каждый из двух зарядов  $q_1$  и  $q_2$  находится в свободном пространстве, то и  $\nabla \cdot E_1$ , и  $\nabla \cdot E_2$  равны нулю, и  $\nabla \cdot F$  тоже нуль, а не отрицательное число, как должно было бы быть при равновесии. Дальнейшее расширение этого доказательства покажет, что никакая жесткая комбинация любого числа зарядов не способна замереть в положении устойчивого равновесия в электростатическом поле в пустом пространстве.

Но мы не собираемся доказывать, что если заряд может скользить по стержням или опираться на другие механические связи, то равновесие все равно невозможно. Это не так. Возьмем для примера трубку, в которой заряд может свободно двигаться вперед и назад (но не в сторону). Теперь легко устроить электрическое поле, которое на концах трубки направлено внутрь нее (при этом близ центра трубки ему разрешается быть направленным наружу, в сторону). Для этого надо просто поместить по положительному заряду на каждом конце трубки (фиг. 5.2). Теперь точка равновесия существует даже в том случае, когда дивергенция  $E$  равна нулю. Конечно, заряд не оказался бы в устойчивом равновесии, если бы не «неэлектрические» силы от стенок трубки.

### § 3. *Равновесие с проводниками*

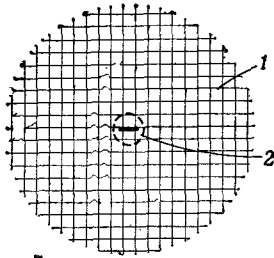
В системе закрепленных зарядов устойчивого места для пробного заряда нет. А как обстоит дело с системой заряженных проводников? Может ли система заряженных проводников создать поле, в котором для точечного заряда хоть где-нибудь найдется устойчивое местечко? (Конечно, имеется в виду не место на поверхности проводника.) Вы знаете, что проводники характерны тем, что заряды по ним могут двигаться свободно. Может быть, если чуть сдвинуть точечный заряд, то прочие заряды на проводниках так сместятся, что на точечный заряд начнет действовать восстанавливающая сила? Ответ по-прежнему отрицательный, хотя из приведенного нами доказательства этого вовсе не следует. В этом случае доказательство сложнее, и мы только наметим его ход.

Во-первых, мы замечаем, что когда заряды перераспределяются по проводникам, то это возможно только тогда, когда от их движения их суммарная потенциальная энергия сокращается. (Часть их энергии, когда они движутся по проводнику, переходит в тепло.) А мы уже показали, что когда заряды, создающие поле, *стационарны*, то вблизи любой точки  $P_0$ , в которой поле равно нулю, существует направление, в котором смещение точечного заряда из  $P_0$  *уменьшит* энергию системы (так как сила направлена от  $P_0$ ). Любое перемещение зарядов по проводникам может только еще больше снизить их потенциальную энергию, так что (по принципу виртуальной работы) их движение только *увеличит* силу в этом указанном направлении, но никак не обратит ее знак.

Наши слова не означают, что заряд невозможно уравновесить электрическими силами. Это можно сделать, если специальными устройствами контролировать расположение или размер поддерживаемых зарядов. Вы же знаете, что стержень, стоящий в гравитационном поле на своем нижнем конце, неустойчив, но отсюда не следует, что его нельзя уравновесить на кончике пальца. Точно так же и заряд можно удержать на одном месте с помощью одних только электрических сил, если вовремя изменять эти силы. Но этого нельзя сделать с помощью пассивной, т. е. *статической*, системы сил.

### § 4. *Устойчивость атомов*

Раз заряды не могут иметь устойчивого положения, то, разумеется, неправильно представлять вещество построенным из статических *точечных* зарядов (электронов и протонов), управляемых только законами электростатики. Такая статическая конфигурация немислима, она обвалится!

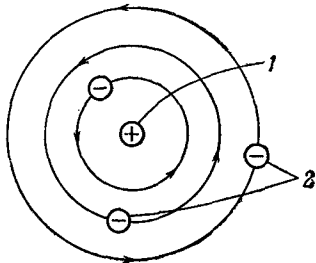


Ф и г. 5.3. Томсоновская модель атома.

1 — однородно распределенный положительный заряд; 2 — отрицательный заряд, сконцентрированный в центре.

В свое время предлагалось считать положительный заряд атома распределенным однородно по шару, а отрицательные заряды (электроны) покоящимися внутри положительного заряда (фиг. 5.3). Это была первая атомная модель, предложенная Томсоном. Но Резерфорд из опыта, проделанного Гейгером и Марсденом, сделал вывод, что положительные заряды очень сильно сконцентрированы и образуют то, что мы называем ядром. И статическую модель Томсона пришлось отставить. Затем Резерфорд и Бор предположили, что равновесие может быть динамическим — электроны обращаются по орбитам (фиг. 5.4). Орбитальное движение в этом случае удерживало бы электроны от падения на ядро. Но мы с вами знакомы по крайней мере с одной трудностью, возникающей и при таком представлении об атоме. При движении по орбитам электроны ускоряются (из-за вращательного движения), и поэтому они излучали бы энергию. При этом они потеряют кинетическую энергию, необходимую для того, чтобы остаться на орбитах, и они должны будут падать, двигаясь по спирали, на ядро. Опять неустойчивость!

Сейчас стабильность атома объясняется с помощью квантовой механики. Электростатические силы притягивают электрон к ядру настолько это возможно, но электрон вынужден оставаться размазанным в пространстве на расстоянии, диктуемом принципом неопределенности. Если бы он держался в очень узком пространстве близ ядра, у него была бы большая неопределенность в импульсе. Но это означало бы, что его ожидаемая



Ф и г. 5.4. Модель атома Резерфорда—Бора.

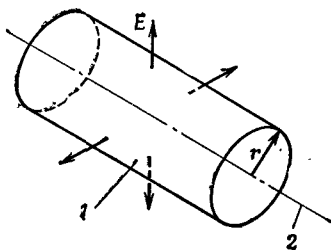
1 — положительные ядра в центре; 2 — отрицательные электроны на планетных орбитах.

энергия высока и может быть использована для того, чтобы разорвать электрическое притяжение ядра. Выходит, что в итоге электрическое равновесие не слишком отличается от идеи Томсона, но только на этот раз размазан *отрицательный* заряд (потому что масса электрона несравненно меньше массы протона).

### § 5. Поле заряженной прямой линии

Закон Гаусса может быть применен для решения множества задач, связанных с электрическим полем, обладающим специальной симметрией (чаще всего сферической, цилиндрической или плоской). В оставшейся части этой главы мы займемся применением закона Гаусса к некоторым задачам подобного рода. Легкость, с которой будут решаться эти задачи, может создать ошибочное впечатление о мощи метода и о возможности с его помощью перейти к решению многих других задач. К сожалению, это не так. Список задач, легко решаемых по закону Гаусса, быстро исчерпывается. В дальнейших главах мы разовьем куда более мощные методы исследования электростатических полей.

В качестве первого примера рассмотрим систему с цилиндрической симметрией. Пусть у нас имеется длинная-длинная равномерно заряженная спица. Под этим мы понимаем электрические заряды, равномерно распределенные по длине бесконечно длинной прямой, так что на единицу длины приходится заряд  $\lambda$ . Мы хотим определить электрическое поле. Конечно, задачу можно решить интегрированием вкладов в поле от всех частей прямой. Но мы собираемся решить ее без интегрирования, только с помощью закона Гаусса и некоторых догадок. Во-первых, легко догадаться, что электрическое поле будет направлено по радиусу. Любой осевой составляющей от зарядов, лежащих с одной стороны от некоторой плоскости, должна отвечать такая же осевая составляющая от зарядов, лежащих с другой стороны. В итоге должно остаться только радиальное поле. Кроме того, резонно полагать, что во всех точках, равноотстоящих от прямой, поле имеет одинаковую величину. Это



Ф и г. 5.5. Цилиндрическая гауссова поверхность, коаксиальная заряженной прямой.

1 — гауссова поверхность; 2 — заряженная прямая.

очевидно. (Может быть, это нелегко доказать, но это верно, если пространство симметрично, а мы считаем, что это так.)

Применить закон Гаусса можно следующим образом. *Вообразим* себе поверхность, имеющую форму цилиндра, ось которого совпадает с нашей прямой (фиг. 5.5). Согласно закону Гаусса, весь поток  $E$  из этой поверхности равен заряду внутри нее, деленному на  $\epsilon_0$ . Раз поле считается нормальным к поверхности, то его нормальная составляющая — это величина вектора поля. Обозначим ее  $E$ . Пусть радиус цилиндра будет  $r$ , а длина его для удобства выбрана равной единице. Поток сквозь цилиндрическую поверхность равен произведению  $E$  на площадь поверхности, т. е. на  $2\pi r$ . Поток через торцы равен нулю, потому что поле касательно к ним. Весь заряд внутри нашей поверхности равен как раз  $\lambda$ , потому что длина оси цилиндра равна единице. Тогда закон Гаусса дает

$$E \cdot 2\pi r = \frac{\lambda}{\epsilon_0},$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (5.2)$$

Электрическое поле заряженной прямой обратно пропорционально *первой* степени расстояния от прямой.

### § 6. Заряженная плоскость; пара плоскостей

В качестве другого примера рассчитаем поле однородно заряженного плоского листа. Предположим, что лист имеет бесконечную протяженность и заряд на единицу площади равен  $\sigma$ . Сразу приходит в голову следующее соображение: из симметрии следует, что поле направлено всюду поперек плоскости, и *если не существует поля от всех прочих зарядов в мире*, то поля по обе стороны плоскости должны совпадать (по величине). На этот раз за гауссову поверхность мы примем прямоугольный ящик, пересекающий нашу плоскость (фиг. 5.6). Каждая из граней, параллельных плоскости, имеет площадь  $A$ . Поле нормально к этим двум граням и параллельно остальным четырем. Суммарный поток равен  $E$ , умноженному на площадь первой грани, плюс  $E$ , умноженному на площадь противоположной грани; от остальных граней никаких слагаемых не войдет. Заряд внутри ящика равен  $\sigma A$ . Уравнивая поток с зарядом, найдем

$$EA + EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0},$$

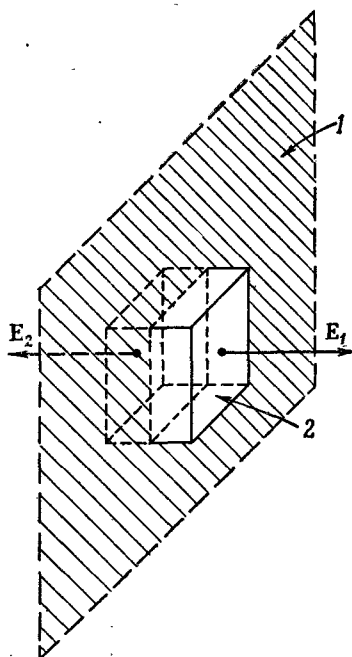
откуда

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (5.3)$$

Простой, но важный результат.

Ф и г. 5.6. Электрическое поле возле однородно заряженной плоскости, найденное с помощью теоремы Гаусса, применяемой к воображаемому ящику.

1 — однородно заряженная плоскость;  
2 — гауссова поверхность.



Вы помните, может быть, что тот же результат был получен в первых главах интегрированием по всей плоскости. Закон Гаусса дает ответ намного быстрее (хотя он не так широко применим, как прежний метод).

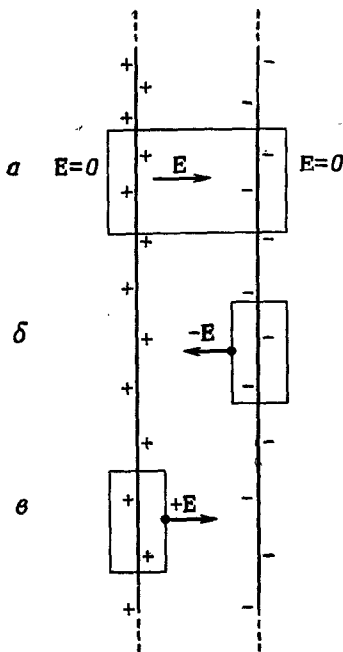
Подчеркнем, что этот результат относится *только* к полю, созданному зарядами, размещенными на плоскости. Если по соседству есть другие заряды, общее поле близ плоскости было бы суммой (5.3) и поля прочих зарядов. Закон Гаусса тогда только гарантировал бы, что

$$E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (5.4)$$

где  $E_1$  и  $E_2$  — поля, направленные на каждой стороне плоскости наружу от нее.

Задача о двух параллельных плоскостях с равными и противоположными плотностями зарядов  $+\sigma$  и  $-\sigma$  решается тоже просто, если только снова предположить, что внешний мир абсолютно симметричен. Составьте ли вы суперпозицию двух решений для отдельных плоскостей или постройте гауссов ящик, охватывающий обе плоскости, в обоих случаях легко видеть, что поле *снаружи* плоскостей равно нулю (фиг. 5.7, а). Но, заключив в ящик только одну или только другую поверхность, как показано на фиг. 5.7, б или в, мы легко обнаружим, что поле





Ф и г. 5.7. Поле между двумя заряженными листами равно  $\sigma/\epsilon_0$ .

между плоскостями должно быть вдвое больше поля отдельной плоскости. Итог таков:

$$E \text{ (между плоскостями)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (5.5)$$

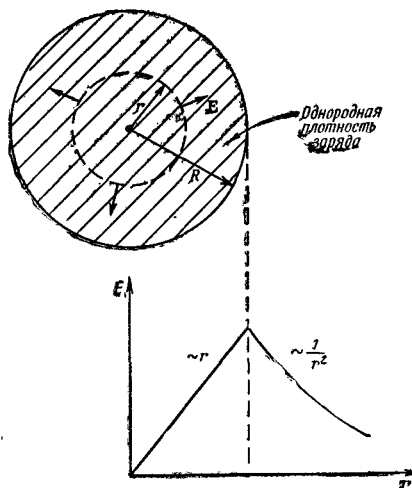
$$E \text{ (снаружи)} = 0. \quad (5.6)$$

### § 7. Однородно заряженный шар; заряженная сфера

В гл. 4 мы уже применяли закон Гаусса, когда должны были найти поле вне однородно заряженной шаровой области. Тот же метод может дать нам и поле в точках *внутри* шара. Этот расчет, например, может быть использован для получения хорошего приближения к полю внутри атомного ядра. Вопреки тому, что протоны в ядре взаимно отталкиваются, они из-за сильного ядерного притяжения распределены по всему ядру почти однородно.

Пусть у нас имеется сфера радиуса  $R$ , однородно наполненная зарядами. Пусть заряд в единице объема равен  $\rho$ . Снова, используя соображения симметрии, можно предположить, что поле радиально и в точках, равноудаленных от центра, по величине одинаково. Чтоб определить поле в точке на расстоя-

Фиг. 5.8. Закон Гаусса можно применить для определения поля внутри однородно заряженного шара.



нии  $r$  от центра, представим сферическую гауссову поверхность радиуса  $r$  ( $r < R$ ), как показано на фиг. 5.8. Поток из нее равен

$$4\pi r^2 E.$$

Заряд внутри нее равен внутреннему объему, умноженному на  $\rho$ , т. е.

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho.$$

Применяя закон Гаусса, получаем величину поля

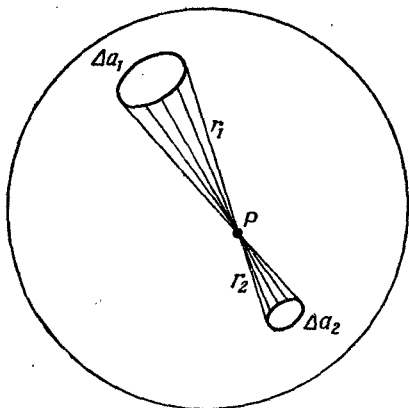
$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad (r < R). \quad (5.7)$$

Вы видите, что при  $r=R$  эта формула дает правильный результат. Электрическое поле пропорционально расстоянию от центра и направлено по радиусу наружу.

Аргументы, которые мы только что приводили для однородно заряженного шара, можно применить и к заряженной сфере. Опять предполагая радиальность и сферическую симметрию поля, из закона Гаусса немедленно получаем, что поле вне сферы во всем подобно полю точечного заряда, поле же внутри сферы — нуль (если мы проведем гауссову поверхность внутри сферы, то внутри нее зарядов не окажется).

### § 8. Точен ли закон Кулона?

Если мы взглянем чуть пристальнее в то, как поле внутри сферы оказывается нулевым, то лучше поймем, почему закон Гаусса обязан своим происхождением закону Кулона, т. е. точной зависимости силы от второй степени расстояния. Возьмем



Фиг. 5.9. Во всякой точке  $P$  внутри заряженной сферической оболочки поле равно нулю.

произвольную точку  $P$  внутри однородно заряженной сферической поверхности. Представим узкий конус, который начинается в точке  $P$  и тянется до поверхности сферы, вырезая там небольшой сферический участок  $\Delta a_1$  (фиг. 5.9). В точности симметричный конус по другую сторону вершины вырежет на поверхности площадь  $\Delta a_2$ . Если расстояния от  $P$  до этих двух элементов площади равны  $r_1$  и  $r_2$ , то площади находятся в отношении

$$\frac{\Delta a_2}{\Delta a_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

(Вы можете доказать это для любой точки шара с помощью геометрии.)

Если поверхность сферы заряжена равномерно, то заряд  $\Delta q$  на каждом элементе поверхности пропорционален его площади

$$\frac{\Delta q_2}{\Delta q_1} = \frac{\Delta a_2}{\Delta a_1}.$$

Тогда закон Кулона утверждает, что величины полей, создаваемых в  $P$  этими двумя элементами поверхности, находятся в отношении

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{q_2/r_2^2}{q_1/r_1^2} = 1.$$

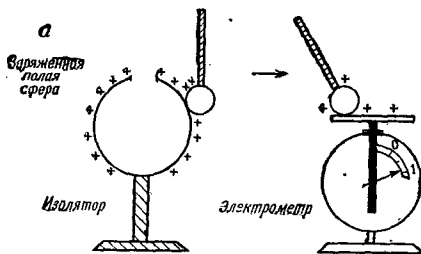
Поля в точности взаимно уничтожаются. Таким способом можно разбить на пары всю сферу. Значит, все поле в точке  $P$  равно нулю. Но вы видите, что этого не было бы, окажись показатель степени  $r$  в законе Кулона не равным в точности двойке.

Справедливость закона Гаусса зависит от закона обратных квадратов Кулона. Если бы закон силы не подчинялся в точности зависимости  $1/r^2$ , то поле внутри однородно заряженной сферы не было бы в точности равно нулю. Например, если бы поле менялось быстрее (скажем, как  $1/r^3$ ), то часть сферы, которая ближе к точке  $P$ , создала бы в точке  $P$  более сильное поле, чем дальняя часть. Получилось бы (для положительного поверхностного заряда) радиальное поле, направленное к центру. Эти заключения подсказывают нам элегантный путь проверки точности выполнения закона обратных квадратов. Для этого нужно только узнать, в точности ли поле внутри однородно заряженной сферы равно нулю.

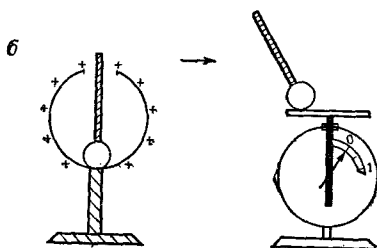
Наше счастье, что такой способ существует. Ведь обычно трудно измерить физическую величину с высокой точностью. Добиться однопроцентной точности было бы нетрудно, но как быть, если нам понадобится измерить закон Кулона с точностью, скажем, до одной миллиардной? Можно почти ручаться, что измерить с такой точностью *силу*, действующую между двумя заряженными телами, не способны даже лучшие приборы. Но если только нужно убедиться в том, что поле внутри сферы *меньше* некоторого значения, то можно провести довольно точное измерение справедливости закона Гаусса и тем самым проверить обратную квадратичную зависимость в законе Кулона. В сущности происходит *сравнение* закона силы с идеальным законом обратных квадратов. Именно такие сравнения одинаковых, или почти одинаковых, вещей обычно становятся основой самых точных физических измерений.

Как же наблюдать поле внутри заряженной сферы? Один из способов — это попытаться зарядить тело, дотронувшись им до внутренней части сферического проводника. Вы знаете, что если коснуться металлическим шариком заряженного тела, затем электрометра, то прибор зарядится и стрелка отклонится от нуля (фиг. 5.10, *a*). Шар собирает на себя заряды, потому что снаружи заряженной сферы имеются электрические поля, заставляющие заряды переходить на шарик (или с него). А если вы проделаете тот же опыт, коснувшись шариком *внутренности* заряженной сферы, то увидите, что к электрометру заряд не подводится. Из такого опыта сразу видно, что внутреннее поле составляет в лучшем случае несколько процентов от внешнего и что закон Гаусса верен, по крайней мере, приближенно.

Кажется, первым, заметившим, что поле внутри заряженной сферы равно нулю, был Бенджамин Франклин. Это показалось ему странным. Когда он сообщил об этом Пристли, тот заподозрил, что это связано с законом обратных квадратов, потому что было известно, что сферический слой вещества не создает внутри себя поля тяготения. Но Кулон измерил обратную квадратичную зависимость только через 18 лет, а закон Гаусса



Ф и г. 5.10. Внутри замкнутой проводящей оболочки электрическое поле равно нулю.



появился на свет и того позже.

Закон Гаусса был проверен очень тщательно; для этого электрометр помещали внутри большой сферы и наблюдали, отклонится ли стрелка, когда сферу зарядят до высокого напряжения. Результат всегда получался отрицательным. Если знать геометрию аппарата и чувствительность прибора, мож-

но рассчитать наименьшее поле, которое еще доступно наблюдению. Из этого числа можно установить верхний предел отклонения показателя степени от двух. Если записать зависимость электростатической силы от расстояния в виде  $r^{-2+\epsilon}$ , то можно определить верхнюю границу  $\epsilon$ . Этим способом Максвелл узнал, что  $\epsilon$  меньше  $1/10000$ . Опыт был повторен и усовершенствован в 1936 г. Плимптоном и Лафтоном. Они обнаружили, что кулонов показатель отличается от 2 меньше чем на одну миллиардную.

Это подводит нас к интересному вопросу: как точно выполняется закон Кулона в различных обстоятельствах? В только что описанных опытах измерялась зависимость поля от расстояния на расстояниях порядка десятков сантиметров. А что можно сказать о внутриатомных расстояниях, скажем внутри атома водорода, где, как мы считаем, электрон притягивается к ядру по тому же закону обратных квадратов? Конечно, для описания механической части поведения электрона нужна квантовая механика, но сила здесь — по-прежнему привычная электростатическая сила. В постановке задачи об атоме водорода известна потенциальная энергия электрона как функция расстояния от ядра, и тогда закон Кулона приводит к потенциалу, обратно пропорциональному первой степени расстояния. С какой точностью этот показатель известен на таких малых расстояниях? В итоге очень тщательных измерений относительного расположения уровней энергии водорода, проведенных в 1947 г.

Лэмбом и Ризерфордом, нам теперь известно, что и на расстояниях порядка атомных, т. е. порядка ангстрема ( $10^{-8}$  см), показатель выдерживается с точностью до одной миллиардной.

Такая точность измерений Лэмба и Ризерфорда оказалась возможной опять благодаря одной физической «случайности». Среди состояний атома водорода есть два таких, у которых энергии должны быть почти одинаковыми *лишь* в том случае, если потенциал меняется точно по закону  $1/r$ . Измерялась очень малая *разница* в энергиях по частоте  $\omega$  фотонов, испускаемых или поглощаемых при переходах из одного состояния в другое (согласно формуле  $\Delta E = \hbar\omega$ ). Расчеты показали, что  $\Delta E$  заметно отличалась бы от наблюдавшегося значения, если бы показатель степени в законе силы  $1/r^2$  отличался бы от 2 только на одну миллиардную.

А верен ли этот закон и на еще меньших расстояниях? В ядерной физике измерения показали, что на типично ядерных расстояниях (порядка  $10^{-13}$  см) существуют электростатические силы и что меняются они все еще как обратные квадраты расстояний. Одно из свидетельств в пользу этого мы разберем в следующих главах. Мы уверены, таким образом, что закон Кулона еще выполняется и на расстояниях около  $10^{-13}$  см.

А что можно сказать о расстоянии  $10^{-14}$  см? Этот интервал исследовали, бомбардируя протоны очень энергичными электронами и следя за тем, как они рассеиваются. Сегодняшние данные указывают на то, что на этих расстояниях закон терпит крах. Электрические силы на расстояниях меньше  $10^{-14}$  см оказываются чуть ли не в 10 раз слабее. Этому есть два объяснения. То ли закон Кулона на таких маленьких расстояниях не действует, то ли эти тела (электроны и протоны) не являются точечными зарядами. Возможно, что один из них как-то размазан (а может, и оба). Большинство физиков предпочитают думать, что размазан заряд протона. Мы знаем, что протоны сильно взаимодействуют с мезонами. Это означает, что протон время от времени существует в виде нейтрона с  $\pi^+$ -мезоном вокруг. Такое расположение в среднем выглядело бы как небольшой шарик положительного заряда. А мы знаем, что нельзя считать поле шара зарядов меняющимся вплоть до самого центра по закону  $1/r^2$ . Вполне вероятно, что заряд протона размазан, но теория пионов еще очень несовершенна, и не исключено, что и закон Кулона на малых расстояниях отказывается. Вопрос пока остается открытым.

Еще один каверзный вопрос: если закон обратных квадратов верен и на расстояниях порядка 1 м и на расстояниях порядка  $10^{-10}$  м, то остается ли тем же коэффициент  $1/4\pi\epsilon_0$ ? Да, — гласит ответ, — по крайней мере с точностью до 15 миллионов.

Вернемся теперь к важному вопросу, от которого мы отмахнулись, когда говорили об опытах подтверждения закона Гаусса.

Вас могло удивить, как в опыте Максвелла и Плимптона — Лафтона удалось достичь такой точности. Ведь вряд ли сферический проводник мог быть идеальной сферой. Достичь точности в одну миллиардную — это прекрасно; но резонно спросить: как могли они столь точно изготовить сферу? Наверняка на сфере были небольшие неправильности, как на всякой реальной сфере, и не могли ли эти нерегулярности создать какое-то поле внутри? Мы хотим показать теперь, что в идеальной сфере вовсе нет необходимости. Оказывается можно доказать, что внутри замкнутой проводящей оболочки *любой* формы поля не бывает. Иными словами, опыты зависели от  $1/r^2$ , но никак не были связаны со сферической формой поверхности (разве что со сферой легче было бы рассчитать поле, *если бы* закон Кулона оказался ошибочным). Итак, мы снова возвращаемся к этому вопросу. Для решения его нам нужно знать кое-какие свойства проводников электричества.

### § 9. Поля проводника

Проводник электричества — это твердое тело, в котором есть много «свободных» электронов. Электроны могут двигаться *в веществе* свободно, но не могут покидать поверхности. В металле бывает так много свободных электронов, что всякое электрическое поле приводит многие из них в движение. И либо возникший таким образом ток электронов должен непрерывно поддерживать свое существование за счет внешних источников энергии, либо движение электронов прекращается, как только они разрядят источники, вызвавшие поле вначале. В условиях «электростатики» мы не рассматриваем непрерывных источников тока (о них мы будем говорить в магнитостатике), так что электроны движутся только до тех пор, пока не расположатся так, что повсюду внутри проводника создается нулевое электрическое поле. (Как правило, это происходит в малые доли секунды.) Если бы осталось внутри хоть какое-нибудь поле, оно бы вынудило двигаться еще какие-то электроны; возможно только такое электростатическое решение, когда поле всюду внутри равно нулю.

Теперь рассмотрим *внутренность* заряженного проводящего тела. (Мы имеем в виду внутреннюю часть самого *металла*.) Так как металл — проводник, то внутреннее поле должно быть нулем, а значит, и градиент потенциала  $\phi$  равен нулю. Это значит, что  $\phi$  от точки к точке не меняется. Любой проводник — это эквипотенциальная *область*, и его поверхность — эквипотенциальна. Раз в проводящем материале электрическое поле повсюду равно нулю, то и дивергенция  $E$  тоже равна нулю, и по закону Гаусса плотность заряда во *внутренней* части проводника обращается в нуль.

Но если внутри проводника не может быть зарядов, как же он вообще может быть заряжен? Что мы имеем в виду, когда говорим, что проводник «заряжен»? Где эти заряды? Они находятся на поверхности проводника, где существуют большие силы, не дающие им покинуть ее, так что они не вполне «свободны». Когда мы будем изучать физику твердого тела, мы увидим, что избыточный заряд в любом проводнике находится только в узком слое у поверхности, толщиной в среднем в один-два атома. Для наших нынешних целей достаточно правильно будет говорить, что любой заряд, попавший на (или в) проводник, собирается на его поверхности; внутри проводника никаких зарядов нет.

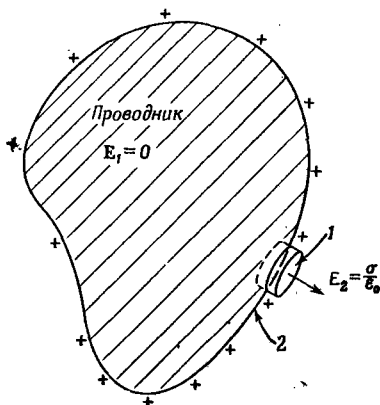
Мы замечаем также, что электрическое поле *возле самой поверхности* проводника должно быть нормально к поверхности. Касательной составляющей у него быть не может. Если бы она появилась, электроны двигались бы *вдоль* поверхности; нет сил, которые способны помешать этому. Это можно выразить и иначе: мы знаем, что линии электрического поля должны всегда быть направлены поперек эквипотенциальной поверхности.

Применяя закон Гаусса, мы можем связать напряженность поля у самой поверхности проводника с локальной плотностью заряда на поверхности. За гауссову поверхность мы примем небольшой цилиндрический стакан, наполовину погруженный в проводник, а наполовину выдвинутый из него (фиг. 5.11). Вклад в общий поток  $E$  дает только та часть стакана, которая находится вне проводника. Тогда поле у наружной поверхности проводника равно

*Вне проводника:*

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (5.8)$$

где  $\sigma$  — локальная поверхностная плотность заряда.



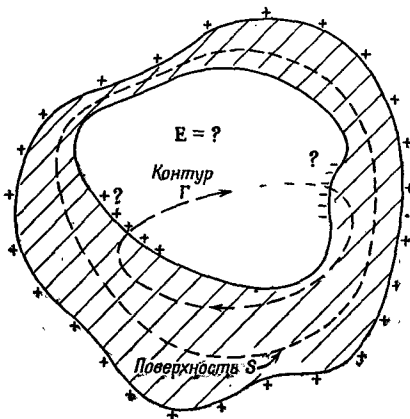
Ф и г. 5.11. Электрическое поле у самой внешней поверхности проводника пропорционально локальной поверхностной плотности заряда. 1 — гауссова поверхность; 2 — локальная плотность поверхностного заряда  $\sigma$ .



Почему слой зарядов на проводнике создает не такое поле, как слой зарядов *сам по себе*? Иначе говоря, почему (5.8) вдвое больше (5.3)? Но ведь мы *не утверждали*, будто в проводнике нет больше никаких «других» зарядов. В действительности для того, чтобы в проводнике  $E$  было равно 0, в нем обязательно должны присутствовать какие-то заряды. В непосредственной близости от точки  $P$  на поверхности заряды действительно создают поле  $E_{\text{лок}} = \sigma_{\text{лок}}/2\epsilon_0$  как внутри, так и снаружи поверхности. Но все прочие заряды проводника сообща «устраивают заговор», чтобы создать в точке  $P$  добавочное поле, равное по величине  $E_{\text{лок}}$ . Суммарное внутреннее поле обращается в нуль, а наружное удваивается:  $2E_{\text{лок}} = \sigma/\epsilon_0$ .

### § 10. Поле внутри полости проводника

Вернемся теперь к проблеме пустотелого резервуара — проводника, имеющего внутри полость. В *металле* поля нет, а вот есть ли оно в *полости*? Покажем, что если полость *пуста*, то поля в ней быть не может, *какова бы ни была форма* проводника или полости (фиг. 5.12). Рассмотрим гауссову поверхность, подобную  $S$  на фиг. 5.12, которая окружает собой полость, но остается всюду в веществе проводника. Всюду на поверхности  $S$  поле равно нулю, так что потока сквозь  $S$  быть не может, и *суммарный* заряд внутри  $S$  должен быть равен нулю. Затем можно вывести из симметрии, что на внутренней поверхности сферической оболочки нет *никакого* заряда. Но в более общем случае мы только можем сказать, что на внутренней поверхности проводника имеется равное количество положительного и отрицательного зарядов. Может быть, окажется, что на одной части имеется положительный заряд, а где-то в другом месте — отрицательный (см. фиг. 5.12)? Такие вещи законом Гаусса не исключаются.



Ф и г. 5.12. Чему равно поле в пустой полости проводника произвольной формы?

На самом деле, конечно, получается, что равные, но противоположные заряды на внутренней поверхности должны были бы соскользнуть навстречу друг другу и уничтожить друг друга. Мы можем убедиться в том, что они уничтожат друг друга, применив закон о равенстве нулю циркуляции  $E$  (электростатику). Пусть на каких-то частях внутренней поверхности оказались заряды. Мы знаем, что еще где-то должно присутствовать равное количество противоположных зарядов. Но любые линии поля  $E$  начинаются на положительных зарядах и кончаются на отрицательных (мы рассматриваем случай, когда свободных зарядов в полости нет). Представим себе теперь контур  $\Gamma$ , пересекающий полость вдоль линии силы от какого-то положительного заряда к какому-то отрицательному и возвращающийся к исходной точке по телу проводника (см. фиг. 5.12). Интеграл вдоль такой линии сил в пределах от положительного до отрицательного заряда не был бы равен нулю, а интеграл по пути через металл равен нулю, так как там  $E = 0$ . Так что мы бы имели

$$\oint E \cdot ds \neq 0 ???$$

Но криволинейный интеграл от  $E$  по любому замкнутому контуру в электростатическом поле всегда равен нулю. Значит, внутри пустой полости не может быть никаких полей, равно как не может быть никаких зарядов на внутренней поверхности.

Заметьте, что мы все время подчеркивали, что полость *пуста*. Если *поместить* какие-то заряды в фиксированных местах полости (скажем, на изоляторе или на небольшом проводнике, изолированном от основного), то внутри полости *могут* быть поля. Но тогда она уже не будет «пустой».

Мы показали, что если полость целиком окружена проводником, то никакое статическое распределение зарядов *снаружи* никогда не создаст поля внутри. Это объясняет принцип «защиты» электрического оборудования, которое помещается в металлическую коробку. К тем же рассуждениям можно прибегнуть, если нужно показать, что никакое статическое распределение зарядов *внутри* замкнутого сплошного проводника не может создать поля *вне* его. Защита действует в обе стороны! В электростатике (но не в изменяющихся полях) поля по обе стороны сплошной проводящей оболочки полностью не зависят одно от другого.

Теперь вы понимаете, почему удалось проверить закон Кулона с такой точностью. Форма полой оболочки не имела значения. Она вовсе не должна была быть круглой, она могла быть и кубом! Если закон Гаусса точен, то поле внутри всегда равно нулю. Вы понимаете теперь, почему вполне безопасно сидеть внутри высоковольтного генератора Ван-де-Граафа в миллион вольт, не боясь, что вас ударит ток, — Вас охраняет сам Гаусс!

**ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В РАЗНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ**

**§ 1. Уравнения электростатического потенциала**

В этой главе мы расскажем о поведении электрического поля в тех или иных обстоятельствах. Вы познакомитесь с тем, как ведет себя электрическое поле, и с некоторыми математическими методами, используемыми для определения поля.

Отметим для начала, что математически вся задача состоит в решении двух уравнений — максвелловских уравнений электростатики:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (6.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (6.2)$$

Фактически оба эти уравнения можно объединить в одно. Из второго уравнения сразу же следует, что поле может считаться градиентом некоего скаляра (см. гл. 3, § 7):

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi. \quad (6.3)$$

Электрическое поле каждого частного вида можно, если нужно, полностью описать с помощью потенциала поля  $\phi$ . Дифференциальное уравнение, которому должно удовлетворять  $\phi$ , получится, если (6.3) подставить в (6.1):

$$\nabla \cdot \nabla\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (6.4)$$

Расходимость градиента  $\phi$  — это то же, что  $\nabla^2$ , действующее на  $\phi$ :

$$\nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}, \quad (6.5)$$

так что уравнение (6.4) мы запишем в виде

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (6.6)$$

§1. Уравнения электростатического потенциала

§2. Электрический диполь

§3. Замечания о векторных уравнениях

§4. Дипольный потенциал как градиент

§5. Дипольное приближение для произвольного распределения

§6. Поля заряженных проводников

§7. Метод изображений

§8. Точечный заряд у проводящей плоскости

§9. Точечный заряд у проводящей сферы

§10. Конденсаторы; параллельные пластины

§11. Пробой при высоком напряжении

§12. Ионный микроскоп

**Повторить:** гл. 23 (вып. 2) «Резонанс»

Оператор  $\nabla^2$  называется лапласианом, а уравнение (6.6) — уравнением Пуассона. Весь предмет электростатики с математической точки зрения заключается просто в изучении решений одного-единственного уравнения (6.6). Как только из (6.6) вы найдете  $\varphi$ , поле  $E$  немедленно получается из (6.3).

Обратимся сперва к особому классу задач, в которых  $\rho$  задано как функция  $x, y, z$ . Такая задача почти тривиальна, потому что решать уравнение (6.6) в общем случае мы уже умеем. Мы ведь показали, что если  $\rho$  в каждой точке известно, то потенциал в точке (1) равен

$$\varphi(1) = \int \frac{\rho(2) dV_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2}, \quad (6.7)$$

где  $\rho(2)$  — плотность заряда,  $dV_2$  — элемент объема в точке (2), а  $r_{12}$  — расстояние между точками (1) и (2). Решение дифференциального уравнения (6.6) свелось к интегрированию по пространству. Решение (6.7) нужно отметить особо, потому что в физике часто встречаются ситуации, приводящие к уравнениям, которые выглядят так:

$$\nabla^2 (\text{от чего-то}) = (\text{чему-то еще}),$$

и (6.7) является прототипом решения любой такой задачи.

Проблема расчета электростатического поля, таким образом, решается совершенно честно, если только положения всех зарядов известны. Давайте посмотрим на нескольких примерах, как действует эта формула.

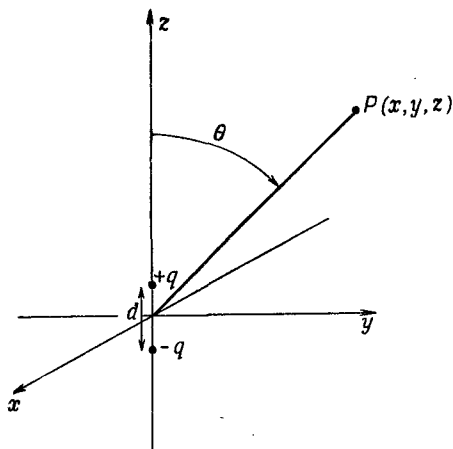
## § 2. Электрический диполь

Сначала возьмем два точечных заряда  $+q$  и  $-q$ , разделенных промежутком  $d$ . Проведем ось  $z$  через заряды, а начало координат поместим посредине между ними (фиг. 6.4). Тогда по формуле (4.24) потенциал системы двух зарядов дается выражением

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{\sqrt{\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 + x^2 + y^2}} + \frac{-q}{\sqrt{\left(z + \frac{d}{2}\right)^2 + x^2 + y^2}} \right]. \quad (6.8)$$

Мы не собираемся выписывать формулу для электрического поля, но всегда при желании можем это сделать, раз мы знаем потенциал. Так что задача двух зарядов решена.

Существует важный частный случай этой задачи, когда заряды расположены близко друг к другу, иными словами, когда нас интересует поле на таких расстояниях от зарядов, что по сравнению с ними промежуток между зарядами кажется незначительным. Такую тесную пару зарядов называют *диполем*. Диполи встречаются очень часто.



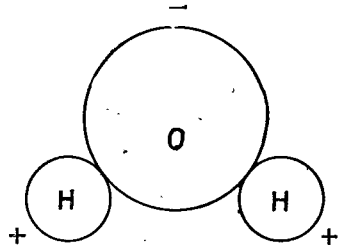
Ф и г. 6.1. Диполь: два заряда  $+q$  и  $-q$ , удаленные друг от друга на расстояние  $d$ .

«Дипольную» антенну можно часто приближенно рассматривать как два заряда, разделенные небольшим расстоянием (если нас не интересует поле у самой антенны). (Обычно интерес представляют антенны с движущимися зарядами; уравнения статики тогда неприменимы, но для некоторых целей они все же представляют весьма сносное приближение.)

Важнее, пожалуй, диполи атомные. Если в каком-то веществе есть электрическое поле, то электроны и протоны испытывают влияние противоположных сил и смещаются друг относительно друга. Вы помните, что в проводнике некоторые электроны сдвигаются к поверхности, так что внутреннее поле обращается в нуль. В изоляторе электроны не могут сильно разойтись; им мешает притяжение ядра. И все же они как-то смещаются. Так что хотя атом (или молекула) и остается нейтральным, во внешнем электрическом поле все же возникает еле заметное разделение положительных и отрицательных зарядов, и атом становится микроскопическим диполем. Если нам нужно знать поле этих атомных диполей поблизости от предмета обычных размеров, то мы имеем дело с расстояниями, большими по сравнению с промежутками между зарядами.

В некоторых молекулах из-за самой их формы заряды несколько разделены даже в отсутствие внешних полей. В молекуле воды, например, имеется отрицательный заряд на атоме кислорода и положительный заряд на обоих атомах водорода, которые расположены несимметрично (фиг. 6.2). Хоть заряд всей молекулы равен нулю, все же имеется распределение заряда с небольшим преобладанием отрицательного заряда на одной стороне и положительного на другой. Это расположение, конечно, не такое простое, как у двух точечных зарядов, но если смотреть на него издалека, оно действует как диполь. Как мы увидим чуть позже, поле на больших расстояниях нечувствительно к мелким деталям расположения.

Ф и г. 6.2. Молекула воды  $\text{H}_2\text{O}$ .



Взглянем теперь на поле двух зарядов противоположных знаков, расстояние  $d$  между которыми мало. Если  $d$  станет нулем, два заряда сойдутся в одном месте, два потенциала сократятся, поле исчезнет. Но если они не совсем слились, то можно получить хорошее приближение к потенциалу, разложив слагаемые в (6.8) в ряд по степеням малой величины  $d$  (по формуле бинома Ньютона). Оставляя только первые степени  $d$ , мы напишем

$$\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 \approx z^2 - zd.$$

Удобно обозначить

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Тогда

$$\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 + x^2 + y^2 \approx r^2 - zd = r^2 \left(1 - \frac{zd}{r^2}\right)$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 + x^2 + y^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{r^2 \left(1 - \frac{zd}{r^2}\right)}} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{zd}{r^2}\right)^{-1/2}.$$

Разлагая в биномиальный ряд  $\left[1 - (zd/r^2)\right]^{-1/2}$  и отбрасывая члены с высшими степенями  $d$ , мы получаем

$$\frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{zd}{r^2}\right).$$

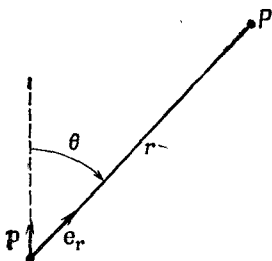
Подобно этому, и

$$\frac{1}{\sqrt{\left(z + \frac{d}{2}\right)^2 + x^2 + y^2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{zd}{r^2}\right).$$

Вычитая эти два члена, имеем для потенциала

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} qd. \quad (6.9)$$

Потенциал, а значит, и поле, являющееся его производной,



Ф и г. 6.3. Векторные обозначения для диполя.

пропорциональны  $qd$  — произведению заряда на расстояния между зарядами. Это произведение называется *дипольным моментом* пары зарядов, и мы обозначим его символом  $p$  (не путайте с импульсом!):

$$p = qd. \quad (6.10)$$

Уравнение (6.9) можно также записать в виде

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}, \quad (6.11)$$

так как  $z/r = \cos \theta$ , где  $\theta$  — угол между осью диполя и радиус-вектором к точке  $(x, y, z)$  (см. фиг. 6.1). Потенциал диполя убывает как  $1/r^2$  при фиксированном направлении (а у точечного заряда он убывает как  $1/r$ ). Электрическое поле  $E$  диполя поэтому убывает как  $1/r^3$ .

Мы можем записать нашу формулу и в векторном виде, если определим  $p$ , как вектор, абсолютная величина которого равна  $p$ , а направление выбрано вдоль оси диполя от  $q_-$  к  $q_+$ . Тогда

$$\cos \theta = p \cdot e_r, \quad (6.12)$$

где  $e_r$  — единичный радиальный вектор (фиг. 6.3). Кроме того, точку  $(x, y, z)$  можно обозначить буквой  $r$ . Итак,

*Дипольный потенциал:*

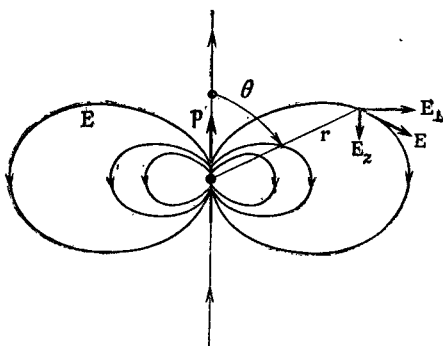
$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot e_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot r}{r^3}. \quad (6.13)$$

Эта формула справедлива для диполя произвольной ориентации и положения, если  $r$  — вектор, направленный от диполя к интересующей нас точке.

Если нас интересует электрическое поле диполя, то нужно взять градиент  $\varphi$ . Например,  $z$ -компонента поля есть  $-\partial\varphi/\partial z$ . Для диполя, ориентированного вдоль оси  $z$ , мы можем использовать (6.9):

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{r^3} \right) = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right),$$

Фиг. 6.4. Электрическое поле диполя.



или

$$E_z = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{r^3}. \quad (6.14)$$

А  $x$ - и  $y$ -компоненты равны

$$E_x = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zx}{r^5}, \quad E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zy}{r^5}.$$

Из этих двух компонент можно составить компоненту, перпендикулярную к оси  $z$ , которая называется поперечной компонентой  $E_{\perp}$ :

$$E_{\perp} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3z}{r^5} \sqrt{x^2 + y^2},$$

или

$$E_{\perp} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \cos \theta \sin \theta}{r^3}. \quad (6.15)$$

Поперечная компонента  $E_{\perp}$  лежит в плоскости  $xu$  и направлена прямо от оси диполя. Полное поле, конечно, равно

$$E = \sqrt{E_z^2 + E_{\perp}^2}.$$

Поле диполя меняется обратно пропорционально кубу расстояния от диполя. На оси при  $\theta = 0$  оно вдвое сильнее, чем при  $\theta = 90^\circ$ . При обоих этих углах электрическое поле обладает только  $z$ -компонентой. Знаки ее при  $z = 0$  и при  $z = 90^\circ$  противоположны (фиг. 6.4).

### § 3. Замечания о векторных уравнениях

Здесь, пожалуй, уместно сделать общее замечание, касающееся векторного анализа. Хотя его теоремы и доказаны в общем виде, однако, приступая к расчетам и анализу какой-либо задачи, следует с толком выбирать направление осей координат. Вспомните, что когда мы вычисляли потенциал диполя, то ось выбиралась не как попало, а мы направили ее по оси диполя.



Это намного облегчило нашу задачу. Потом уже уравнения были переписаны в векторной форме и сразу перестали зависеть от выбора системы координат. Теперь стало возможным выбрать какую угодно систему координат, зная, что формула отныне всегда будет справедлива. Вообще нет смысла вводить произвольную систему координат, где оси направлены под каким-то сложным углом, если можно в данной задаче выбрать систему получше, а уже в самом конце выразить результат в виде векторного уравнения. Так что старайтесь использовать то преимущество векторных уравнений, что они не зависят ни от какой системы координат.

С другой стороны, если вы хотите подсчитать дивергенцию какого-то вектора, то вместо того, чтобы смотреть на  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  и вспоминать, что это такое, лучше расписать это в виде

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Если вы затем вычислите по отдельности  $x$ -,  $y$ - и  $z$ -компоненты электрического поля и продифференцируете, то получите искомую дивергенцию. Часто при этом испытывают такое чувство, как будто произошло что-то некрасивое — словно, расписав вектор покомпонентно, потерпели неудачу; все время кажется, будто все действия надо проделывать только с векторными операторами  $\nabla$ . Но часто от них нет никакого проку. Когда вы впервые сталкиваетесь с какой-то новой задачей, то, как правило, полезно расписать все в компонентах, чтобы удостовериться, что вы правильно представляете себе, что происходит. Нет ничего некрасивого в том, что в уравнения подставляются числа, и нет ничего неприличного в том, чтобы подставлять производные на место причудливых символов. Наоборот, в этом-то и проявляется ваша мудрость. Конечно, в специальном журнале статья будет выглядеть гораздо приятнее (да и понятнее), если все записано в векторном виде. Но там надо экономить еще и место.

#### § 4. Дипольный потенциал как градиент

Мы хотели бы теперь отметить любопытное свойство формулы диполя (6.13). Потенциал можно записать также в виде

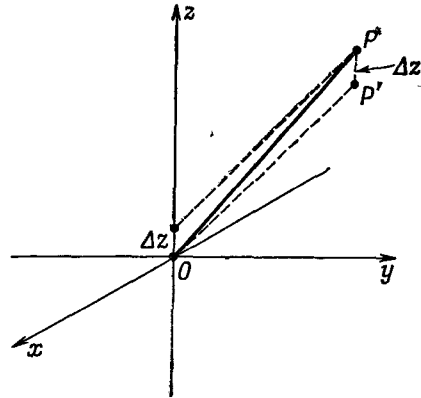
$$\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right). \quad (6.16)$$

Действительно, вычислив градиент  $1/r$ , вы получите

$$\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mathbf{e}_r}{r^2},$$

и (6.16) совпадает с (6.13).

Фиг. 6.5. Потенциал в точке  $P$  от точечного заряда, поднятого на  $\Delta z$  над началом координат, равен потенциалу в точке  $P'$  (на  $\Delta z$  ниже  $P$ ) того же заряда, но помещенного в начале координат.



Как мы догадались об этом? Мы просто вспомнили, что  $e_r/r^2$  уже появлялось в формуле для поля точечного заряда и что поле — это градиент потенциала, изменяющегося как  $1/r$ .

Существует и физическая причина того, что дипольный потенциал может быть записан в форме (6.16). Пусть в начало координат помещен точечный заряд  $q$ . Потенциал в точке  $P(x, y, z)$  равен

$$\Phi_0 = \frac{q}{r}.$$

(Множитель  $1/4\pi\epsilon_0$  опустим, а в конце мы его можем снова вставить.) Если заряд  $+q$  мы сдвинем на расстояние  $\Delta z$ , то потенциал в точке  $P$  чуть изменится, скажем на  $\Delta\Phi_+$ . На сколько же именно? Как раз на столько, на сколько изменился бы потенциал, если б заряд оставили в покое, а  $P$  сместили на столько же вниз (фиг. 6.5). Иначе говоря,

$$\Delta\Phi_+ = -\frac{\partial\Phi_0}{\partial z} \Delta z,$$

где  $\Delta z$  означает то же, что и  $d/2$ . Беря  $\Phi_0 = q/r$ , мы получаем для потенциала положительного заряда

$$\Phi_+ = \frac{q}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{q}{r} \right) \frac{d}{2}. \quad (6.17)$$

Повторяя те же рассуждения с потенциалом отрицательного заряда, можно написать

$$\Phi_- = \frac{-q}{r} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{-q}{r} \right) \frac{d}{2}. \quad (6.18)$$

А общий потенциал — просто сумма (6.17) и (6.18):

$$\Phi = \Phi_+ + \Phi_- = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{q}{r} \right) d = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) qd. \quad (6.19)$$

При других расположениях диполя смещение положительного заряда можно изобразить вектором  $\Delta \mathbf{r}_+$ , а уравнение (6.17) представить в виде

$$\Delta \varphi_+ = -\nabla \varphi_0 \cdot \Delta \mathbf{r}_+,$$

где  $\Delta \mathbf{r}$  впоследствии надо будет заменить на  $d/2$ . Завершая доказательство так, как это было сделано выше, мы приведем уравнение (6.19) к виду

$$\varphi = -\nabla \cdot \left( \frac{1}{r} \right) qd.$$

Это то же уравнение, что и (6.16). Надо только заменить  $qd$  на  $p$  и вставить потерянный по дороге множитель  $1/4\pi\epsilon_0$ . Взглянув на это уравнение по-иному, видим, что дипольный потенциал (6.13) можно толковать как

$$\varphi = -\mathbf{p} \cdot \nabla \Phi_0, \quad (6.20)$$

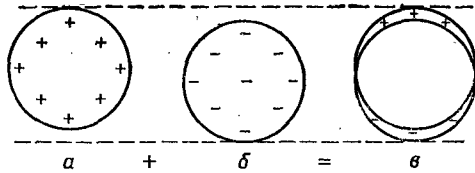
где  $\Phi_0 = 1/4\pi\epsilon_0 r$  — потенциал *единичного* точечного заряда.

Хотя потенциал данного распределения зарядов всегда может быть найден при помощи интегрирования, иногда можно сберечь время, применив какой-нибудь хитроумный прием. Например, на помощь часто приходит принцип наложения. Если нам дано распределение зарядов, которое можно составить из двух распределений с уже известными потенциалами, то искомый потенциал легко получить, просто сложив уже известные между собой. Наш вывод формулы (6.20) — один из примеров применения этого приема.

А вот и другой. Пусть имеется сферическая поверхность, на которой поверхностный заряд распределен пропорционально косинусу полярного угла. Интегрировать такое распределение — задача, откровенно говоря, не из приятных. Но как ни странно, на помощь приходит принцип наложения. Представьте себе шар с однородной *объемной* плотностью положительных зарядов и другой шар с такой же однородной *объемной* плотностью зарядов, но противоположного знака. Первоначально они вложены друг в друга, образуя нейтральный, т. е. незаряженный шар. Если затем положительный шар чуть сместить по отношению к отрицательному, то нутро незаряженного шара так и останется незаряженным, но на одной стороне возникнет небольшой положительный заряд, а на противоположной — такой же отрицательный (фиг. 6.6). И если относительное смещение двух шаров мало, то эти заряды эквивалентны существованию поверхностного заряда (на сферической поверхности) с плотностью, пропорциональной косинусу полярного угла.

Когда же нам понадобится потенциал этого распределения, то брать интегралы не нужно. Мы знаем, что потенциал каждого заряженного шара — в точках вне его — совпадает с потенциалом точечного заряда. А два смещенных шара — все равно, что

Ф и г. 6.6. Две равномерно заряженные сферы, вложенные друг в друга и слегка смещенные, эквивалентны неоднородному распределению поверхностного заряда.



два точечных заряда; значит, искомый потенциал и есть как раз потенциал диполя.

Таким путем можно показать, что распределение зарядов на сфере радиуса  $a$  с поверхностной плотностью

$$\sigma = \sigma_0 \cos \theta$$

создает снаружи сферы такое же поле, как и диполь с моментом

$$p = \frac{4\pi\sigma_0 a^3}{3}.$$

Можно также показать, что внутри сферы поле постоянно и равно

$$E = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}.$$

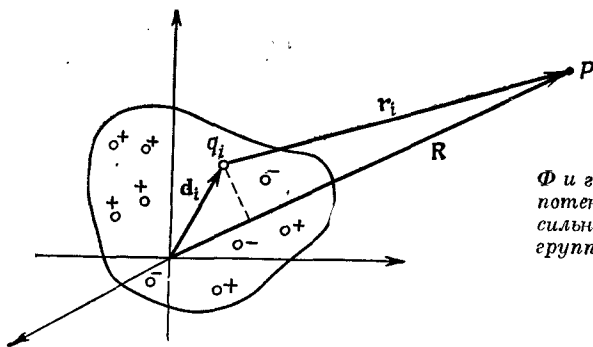
Если  $\theta$  — угол с положительной осью  $z$ , то электрическое поле внутри сферы направлено по отрицательной оси  $z$ . Рассмотренный нами пример отнюдь не досужая выдумка составителя задач; он нам встретится еще в теории диэлектриков.

### § 5. Дипольное приближение для произвольного распределения

Столь же интересно и не менее важно поле диполя, возникающее при других обстоятельствах. Пусть у нас есть тело со сложным распределением заряда, скажем, как у молекулы воды (см. фиг. 6.2), а нас интересует только поле вдали от него. Мы покажем, что можно получить сравнительно простое выражение для полей, пригодное для расстояний, много больших, чем размеры тела.

Мы можем смотреть на это тело, как на скопление точечных зарядов  $q_i$  в некоторой ограниченной области (фиг. 6.7). (Позже, если понадобится, мы  $q_i$  заменим на  $\rho dV$ .) Пускай заряд  $q_i$  удален от начала координат, выбранного где-то внутри группы зарядов, на расстояние  $d_i$ . Чему равен потенциал в точке  $P$ , расположенной где-то на отлете, на расстоянии  $R$ , много больше, чем самое большое из  $d_i$ ? Потенциал всего нашего скопления выражается формулой

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad (6.21)$$



Фиг. 6.7. Вычисление потенциала в точке  $P$ , сильно удаленной от группы зарядов.

где  $r_i$  — расстояние от  $P$  до заряда  $q_i$  (длина вектора  $\mathbf{R} - \mathbf{d}_i$ ). Если расстояние от зарядов до  $P$  (до точки наблюдения) чрезвычайно велико, то каждое из  $r_i$  можно принять за  $R$ . Каждый член в сумме станет равным  $q_i/R$ , и  $1/R$  можно будет вынести из-под знака суммы. Получится простой результат

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \sum q_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad (6.22)$$

где  $Q$  — суммарный заряд тела. Таким образом, мы убедились, что из точек, достаточно удаленных от скопления зарядов, оно кажется просто точечным зарядом. Этот результат в общем не очень удивителен.

Но что, если положительных и отрицательных зарядов в группе окажется поровну? Суммарный заряд  $Q$  тогда будет равен нулю. Это не такой уж редкий случай; мы знаем, что большинство тел нейтрально. Нейтральна молекула воды, но заряды в ней размещаются отнюдь не в одной точке, так что, приблизившись вплотную, мы должны будем заметить какие-то признаки того, что заряды разделены. Для потенциала произвольного распределения зарядов в нейтральном теле мы нуждаемся в приближении, лучше, чем даваемое формулой (6.22). Уравнение (6.21) по-прежнему годится, но полагать  $r_i = R$  больше нельзя. Для  $r_i$  нужно выражение поточнее. В хорошем приближении  $r_i$  можно считать отличающимся от  $R$  (если точка  $P$  сильно удалена) на проекцию вектора  $\mathbf{d}$  на вектор  $\mathbf{R}$  (см. фиг. 6.7, но вы должны только представлять себе, что  $P$  намного дальше, чем показано). Иными словами, если  $\mathbf{e}_r$  — единичный вектор в направлении  $\mathbf{R}$ , то за следующее приближение к  $r_i$  нужно принять

$$r_i \approx R - \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_r. \quad (6.23)$$

Но нам ведь нужно не  $r_i$ , а  $1/r_i$ ; оно в нашем приближении (с учетом  $d_i \ll R$ ) равно

$$\frac{1}{r_i} \approx \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_r}{R} \right). \quad (6.24)$$

Подставив это в (6.21), мы увидим, что потенциал равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{R} + \sum_i q_i \frac{d_i \cdot e_r}{R^2} + \dots \right). \quad (6.25)$$

Многоточие указывает члены высшего порядка по  $d/R$ , которыми мы пренебрегли. Как и те члены, которые мы выписали, это последующие члены разложения  $1/r_i$  в ряд Тэйлора в окрестности  $1/R$  по степеням  $d_i/R$ .

Первый член в (6.25) мы уже получили; в нейтральных телах он пропадает. Второй член, как и у диполя, зависит от  $1/R^2$ . Действительно, если мы *определим*

$$\mathbf{p} = \sum q_i \mathbf{d}_i \quad (6.26)$$

как величину, описывающую распределения зарядов, то второй член потенциала (6.25) обратится в

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r}{R^2}, \quad (6.27)$$

т. е. как раз в дипольный потенциал. Величина  $\mathbf{p}$  называется *дипольным моментом распределения*. Это обобщение нашего прежнего определения; оно сводится к нему в частном случае точечных зарядов.

В итоге мы выяснили, что достаточно далеко от *любого* набора зарядов потенциал оказывается дипольным, лишь бы этот набор был в целом нейтральным. Он убывает, как  $1/R^2$ , и меняется, как  $\cos \theta$ , а величина его зависит от дипольного момента распределения зарядов. Именно по этой причине поля диполей и важны; сами же по себе пары точечных зарядов встречаются крайне редко.

У молекулы воды, например, дипольный момент довольно велик. Электрическое поле, создаваемое этим моментом, ответственно за некоторые важные свойства воды. А у многих молекул, скажем у  $\text{CO}_2$ , дипольный момент исчезает благодаря их симметрии. Для таких молекул разложение нужно проводить еще точнее, до следующих членов потенциала, убывающих как  $1/R^3$  и называемых квадрупольным потенциалом. Эти случаи мы рассмотрим позже.

## § 6. Поля заряженных проводников

Мы покончим на этом с примерами таких физических задач, в которых распределение зарядов известно с самого начала. Такие задачи решаются без особых затруднений, в худшем случае требуя нескольких интегрирований. Теперь мы обратимся

к совершенно новому типу задач — определению полей вблизи заряженных проводников.

Представим себе, что какие-то заряды, произвольные по величине  $Q$ , помещены на проводнике. Теперь уже мы не можем точно сказать, где они расположатся. Они как-то растекутся по поверхности. Как же узнать, как они на ней распределятся? Распределиться они должны так, чтобы потенциал вдоль всей поверхности был одним и тем же. Если бы поверхность не была эквипотенциальной, то внутри проводника существовало бы электрическое поле и заряды вынуждены были бы двигаться до тех пор, пока поле не исчезло бы. Общую задачу такого рода можно было бы решать так. Предположим, что распределение зарядов такое-то, и рассчитаем потенциал. Если он оказывается на поверхности повсюду одинаковым, то задача решена. Если же поверхность не эквипотенциальна, то значит, мы сделали неправильное предположение о распределении зарядов; сделаем новое предположение и постараемся, чтобы оно было удачнее! Так может продолжаться без конца, разве что вы здорово набьете руку на таких пробах.

Вопрос о том, как догадываться о распределениях, математически труден. Конечно, у природы есть время решать его; заряды притягиваются и отталкиваются до тех пор, пока не уравниваются взаимно. А когда мы пробуем решить задачу, то каждая проба занимает так много времени, что этот метод оказывается очень громоздким. Когда имеется произвольный сложный набор проводников и зарядов, задача весьма усложняется, и в общем случае не может быть решена без специально разработанных численных методов. Такие численные расчеты в наши дни выполняются на счетных машинах, которые могут все посчитать за нас, если мы им объясним, как это сделать.

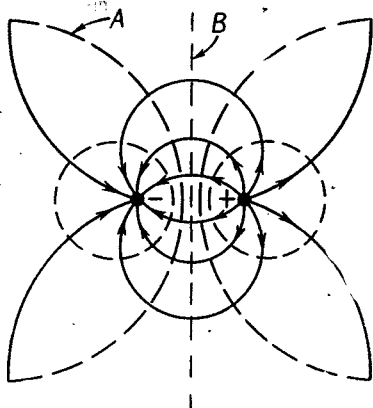
С другой стороны, имеется множество мелких практических случаев, в которых, к нашему удовольствию, удастся добиться решения каким-то прямым методом, не составляя программы для машины. На наше счастье, во многих случаях с помощью того или иного фокуса можно выжать ответ из природы.

Первый такой фокус, который мы хотим вам показать, состоит в использовании уже известных решений задач с фиксированным расположением зарядов.

## **§ 7. Метод изображений**

Мы определили поле двух точечных зарядов. На фиг. 6.8 показаны некоторые линии поля и эквипотенциальные поверхности, полученные из расчетов, приведенных в гл. 5. Рассмотрим теперь эквипотенциальную поверхность  $A$ . Предположим, что мы изогнули тонкий лист металла так, что он в точности

Ф и г. 6.8. Линии поля и эквипотенциальные поверхности двух точечных зарядов.



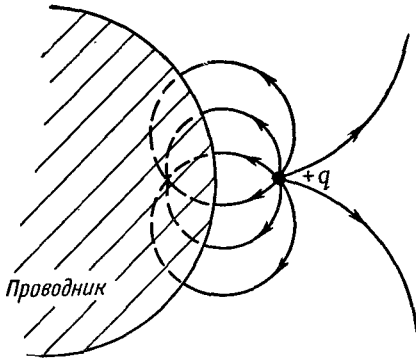
накладывается на эту поверхность. Если его действительно наложить и установить на нем правильное значение потенциала, то никто не будет даже знать, что он там лежит, потому что ничего от его появления не изменилось.

А теперь взгляните внимательнее! На самом-то деле мы решили задачу уже с новым условием: поверхность изогнутого проводника с заданным потенциалом помещена близ точечного заряда. Если наш металлический лист, уложенный на эквипотенциальную поверхность, замыкается сам на себя (или тянется очень далеко), то получается картина, рассмотренная в гл. 5, § 10, когда пространство делится на две области: одна внутри, другая снаружи замкнутой проводящей поверхности. Там мы пришли к выводу, что поля в этих двух областях совершенно не зависят друг от друга. Так что независимо от того, каково поле внутри замкнутого проводника, снаружи поле всегда одно и то же. Можно даже заполнить всю сердцевину проводника проводящим материалом. Выходит, нам удалось найти поле при конфигурации проводников и зарядов, изображенной на фиг. 6.9. В пространстве вне проводника поле как раз такое, как у двух точечных зарядов (см. фиг. 6.8). Внутри проводника оно нуль. И, кроме того, электрическое поле, как и следовало ожидать, у самой поверхности проводника нормально к ней.

Итак, мы можем рассчитать поля на фиг. 6.9, вычисляя поле, созданное зарядом  $q$  и воображаемым точечным зарядом  $-q$ , помещенным в подходящем месте. А точечный заряд, который мы представили себе существующим за проводящей поверхностью, так и называется *зарядом-изображением*.

В книгах можно найти длинные перечни решений задачи электростатики для гиперболических поверхностей и других сложных штук. Вас могло бы удивить, как это удалось рассчитать поля близ поверхностей столь ужасной формы. Но они были рассчитаны задом наперед! Кто-то решил простую задачу





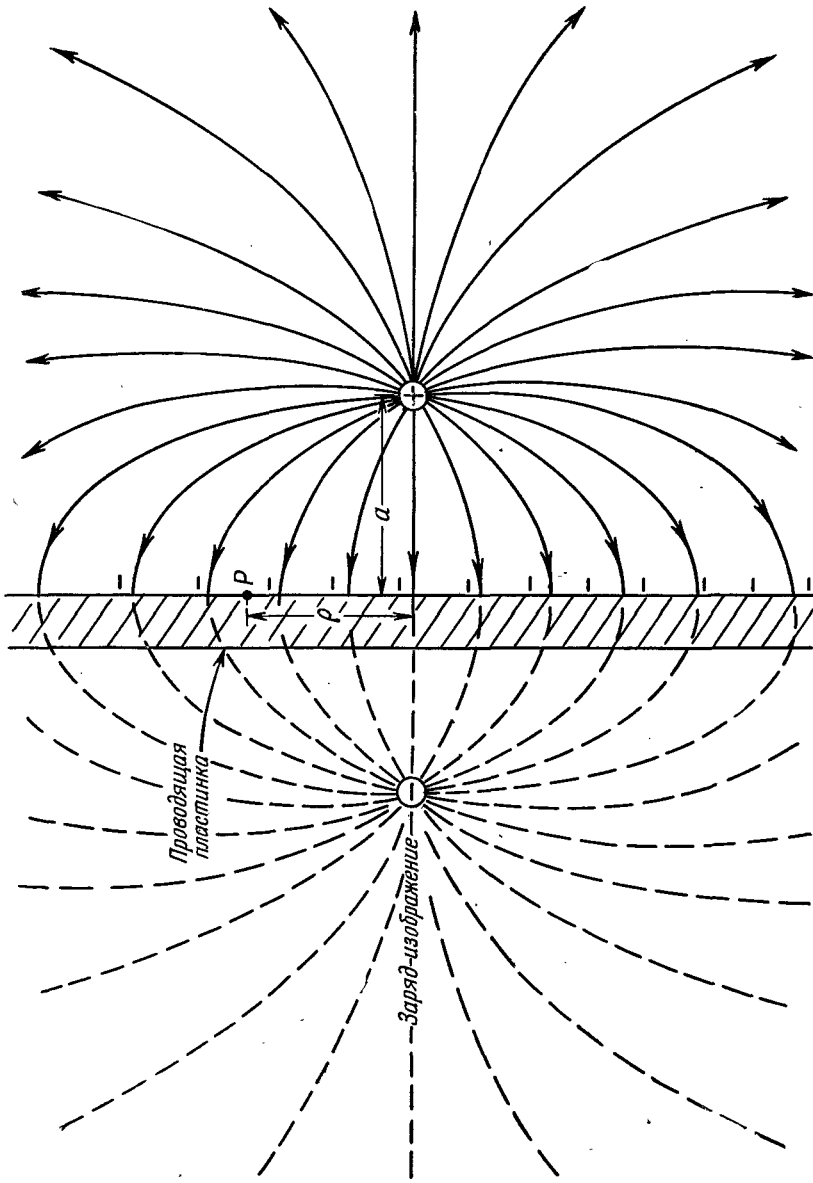
Фиг. 6.9. Поле вне проводника, изогнутого вдоль эквипотенциальной поверхности  $A$  на предыдущем рисунке.

с фиксированными зарядами. А затем обнаружил, что появляются некоторые эквипотенциальные поверхности новой формы, ну и написал работу, в которой указал, что поля снаружи проводника такой формы могут быть изображены так-то и так-то.

### § 8. Точечный заряд у проводящей плоскости

В качестве простейшего применения этого метода используем плоскую эквипотенциальную поверхность  $B$  (см. фиг. 6.8). Она поможет нам решить задачу о заряде вблизи проводящей плоскости. Для этого зачеркнем просто левую часть фигуры. Линии поля нашего решения показаны на фиг. 6.10. Заметьте, что плоскость обладает нулевым потенциалом, потому что она находится как раз на полпути между зарядами. Мы решили задачу о положительном заряде вблизи заземленной проводящей плоскости.

Так мы узнали суммарное поле, но что можно сказать о том, каковы те *реальные* заряды, которые создали его? Кроме нашего положительного точечного заряда, ими являются какие-то отрицательные заряды, наведенные на проводящей плоскости и притянутые положительным зарядом (с каких-то далеких расстояний). Но теперь пусть вам захотелось узнать (то ли для технических целей, то ли просто из любопытства), как распределены эти отрицательные заряды по поверхности. Поверхностную плотность заряда вы сможете узнать, использовав результат, полученный в гл. 5, § 6 при помощи теоремы Гаусса. Нормальная составляющая электрического поля возле самого проводника равна плотности поверхностного заряда  $\sigma$ , деленной на  $\epsilon_0$ . Мы можем узнать плотность заряда в каждой точке поверхности, отправляясь назад от нормальной составляющей электрического поля на поверхности. А ее мы знаем, потому что вообще нам известно поле в любой точке.



Ф и г. 6.10. Поле заряда, помещенного близ плоской проводящей поверхности, найденное методом изображений.

Рассмотрим точку поверхности на расстоянии  $\rho$  от той точки, которая расположена прямо против положительного заряда (см. фиг. 6.10). Электрическое поле в этой точке нормально к поверхности и направлено внутрь нее. Составляющая поля *положительного* точечного заряда, нормальная к поверхности, равна

$$E_{n+} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{aq}{(a^2 + \rho^2)^{3/2}}. \quad (6.28)$$

К ней мы должны добавить электрическое поле, созданное отрицательным зеркальным зарядом. Это удвоит нормальную составляющую (и уничтожит все прочие), так что плотность заряда  $\sigma$  в произвольной точке поверхности будет равна

$$\sigma(\rho) = \epsilon_0 E(\rho) = - \frac{2aq}{4\pi(a^2 + \rho^2)^{3/2}}. \quad (6.29)$$

Проинтегрировав  $\sigma$  по всей поверхности, мы сможем проверить наши расчеты. Мы должны получить весь наведенный заряд, т. е.  $-q$ .

Еще один вопрос: действует ли на точечный заряд сила? Да, потому что наведенные на плоскости отрицательные заряды должны его притягивать. А раз мы знаем, каковы эти поверхностные заряды [по формуле (6.29)], то можем с помощью интегрирования подсчитать силу, действующую на наш положительный заряд. Но мы ведь знаем также, что сила, действующая на него, в точности такая, какой она была бы, если бы вместо плоскости был один только отрицательный зеркальный заряд, потому что поля поблизости от них в обоих случаях одинаковы. Точечный заряд тем самым испытывает силу притяжения к плоскости, равную

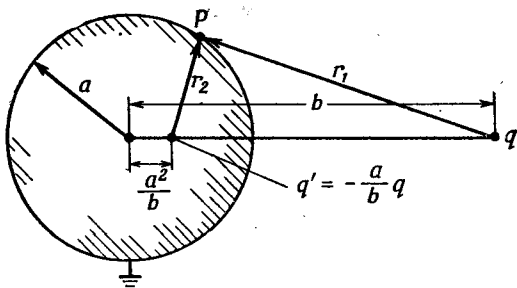
$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2a)^2}. \quad (6.30)$$

Мы определили эту силу очень легко, без интегрирования по отрицательным зарядам.

### § 9. Точечный заряд у проводящей сферы

А какие еще поверхности, кроме плоскости, имеют простое решение? Самая простая из них — сфера. Попробуем определить поля вокруг металлической сферы с точечным зарядом  $q$  вблизи нее (фиг. 6.11). Придется поискать простую физическую задачу, для которой сфера есть эквипотенциальная поверхность. Если мы просмотрим те задачи, которые уже решены, то увидим, что у поля двух *неравных* точечных зарядов одна из эквипотенциальных поверхностей как раз и есть сфера. Отметим себе это! Если мы как следует подберем положение заряда-изображения

Фиг. 6.11. Точечный заряд  $q$  наводит на заземленной проводящей сфере заряды, которые создают поле, такое же, как у заряда-изображения, помещенного в указанной точке.



и нужную его величину, может быть, тогда мы и сможем подогнать эквипотенциальную поверхность к нашей сфере. Это и впрямь может быть сделано, если действовать по следующему рецепту.

Положим, что вы хотите, чтобы эквипотенциальная поверхность была сферой радиуса  $a$  с центром, отстоящим от заряда  $q$  на расстояние  $b$ . Поместите изображение заряда величины  $q' = -q(a/b)$  на радиусе, проходящем через заряд на расстоянии  $a^2/b$  от центра. Потенциал сферы пусть будет нуль.

Математически причина состоит в том, что сфера есть геометрическое место точек, отношение расстояний которых от двух данных точек постоянно. Как следует из фиг. 6.11, потенциал в точке  $P$  от зарядов  $q$  и  $q'$  пропорционален сумме

$$\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2}$$

и будет равен нулю во всех точках, для которых

$$\frac{q'}{r_2} = -\frac{q}{r_1} \quad \text{или} \quad \frac{r_2}{r_1} = -\frac{q'}{q}.$$

Если мы помещаем  $q'$  на расстоянии  $a^2/b$  от центра, то отношение  $r_2/r_1$  равно постоянной величине  $a/b$ . Тогда если

$$\frac{q'}{q} = -\frac{a}{b}, \quad (6.31)$$

то сфера станет эквипотенциалью. Потенциал ее на самом деле будет равен нулю.

А что, если нам понадобится сфера с ненулевым потенциалом? Ведь он равен нулю только тогда, когда ее суммарный заряд случайно окажется равным  $q'$ ! Конечно, если ее заземлить, то наведенные на ней заряды окажутся в точности такими, как надо. Ну, а если она заизолирована и мы не снабдили ее никаким зарядом? Или снабдили ее зарядом  $Q \neq q'$ ? Или она находится под напряжением, *не равным* нулю? Такие вопросы разрешаются сходу. Всегда ведь можно добавить в центр сферы точечный

заряд  $q''$ . По принципу наложения сфера всегда останется эквипотенциальной, а изменится только величина потенциала.

Если у нас, скажем, есть проводящая сфера, предварительно разряженная и изолированная от всего, и мы поднесли к ней положительный заряд  $q$ , то суммарный заряд сферы останется равным нулю. Решение можно найти, взяв тот же, что и прежде, заряд-изображение  $q'$  и вдобавок к нему заряд в центре сферы, такой, что

$$q'' = -q' = \frac{a}{b} q. \quad (6.32)$$

Поля повсюду вне сферы будут получаться наложением полей от  $q$ ,  $q'$  и  $q''$ . Задача решена.

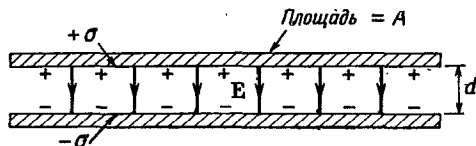
Теперь ясно, что между сферой и точечным зарядом  $q$  должна существовать сила притяжения. Она не пропадает, даже если сфера нейтральна, на ней нет никакого заряда. Откуда же берется притяжение? Когда вы подносите к проводящей сфере положительный заряд, то он притягивает отрицательные заряды на ближний конец сферы, положительные же оставляет на дальнем. А притяжение отрицательными зарядами перевешивает отталкивание положительными; в итоге остается притяжение. Силу его можно прикинуть, подсчитав силу, действующую на  $q$  в поле, созданном  $q'$  и  $q''$ . Суммарная сила равна силе притяжения между зарядами  $q$  и  $q' = -(a/b)q$  на расстоянии  $b - (a^2/b)$  плюс сила отталкивания  $q$  и заряда  $q'' = + (a/b)q$  на расстоянии  $b$ .

Если вы в детстве любили разглядывать журнал, на обложке которого был показан мальчик, разглядывающий журнал, на обложке которого показан мальчик, разглядывающий журнал, на обложке которого..., то вас заинтересует и следующая задача. Две одинаковые сферы, одна с зарядом  $+Q$ , а другая с зарядом  $-Q$ , расположены на некотором расстоянии друг от друга. Какова сила притяжения между ними? Задача решается при помощи бесконечного количества изображений. Первое приближает каждую сферу зарядом в ее центре. Эти заряды создают свои изображения на другой сфере. У изображений в свою очередь есть свои изображения и т. д., и т. д., и т. д. Решение здесь — все равно что картинка на обложке. Сходится оно очень быстро.

## § 10. Конденсаторы; параллельные пластины

Теперь обратимся к другому роду задач, связанных с проводниками. Рассмотрим две широкие металлические пластины, параллельные между собой и разделенные узким (по сравнению с их размерами) промежутком. Предположим, что пластины наэлектризованы равными, но противоположными зарядами.

Фиг. 6.12. Плоский конденсатор.



Заряды одной пластины будут притягивать к себе заряды другой и потом равномерно распределятся на внутренней поверхности пластин. Пусть поверхностная плотность зарядов на пластинах будет  $+\sigma$  и  $-\sigma$  соответственно (фиг. 6.12). Из гл. 5 мы знаем, что поле между пластинами равно  $\sigma/\epsilon_0$ , а поле снаружи пластин равно нулю. Пластины обладают неравными потенциалами  $\phi_1$  и  $\phi_2$ . Их разности  $V$  удобно дать особое имя, ее часто называют «напряжением»

$$\phi_1 - \phi_2 = V$$

[некоторые обозначают буквой  $V$  потенциал, мы же его обозначили буквой  $\phi$ ].

Разность потенциалов  $V$  — это работа (на единицу заряда), требуемая для переноса небольшого заряда с одной пластины на другую, так что

$$V = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{d}{\epsilon_0 A} Q, \quad (6.33)$$

где  $\pm Q$  — суммарный заряд каждой пластины,  $A$  — ее площадь,  $d$  — щель между пластинами.

Мы видим, что напряжение пропорционально заряду. Эта пропорциональность между  $V$  и  $Q$  соблюдается для любых двух проводников в пространстве, если на одном из них имеется плюс-заряд, а на другом равный ему минус-заряд. Разность потенциалов между ними, т. е. напряжение, оказывается пропорциональной заряду. (Мы предполагаем, что вокруг нет никаких других зарядов.)

Почему возникает эта пропорциональность? Просто из-за принципа наложения. Пусть нам известно решение для одной совокупности зарядов, а потом мы наложим на него другое такое же решение. Заряды удвоятся, поля удвоятся, работа переноса заряда от точки к точке тоже удвоится. По этой причине разность потенциалов двух точек пропорциональна заряду. В частности, разность потенциалов двух проводников пропорциональна их зарядам. Эту пропорциональность когда-то решили записывать иначе. И стали писать

$$Q = CV,$$

где  $C$  — постоянное число. Этот коэффициент пропорциональности назвали емкостью, а систему двух проводников —

конденсатором. Для нашего конденсатора из параллельных пластин

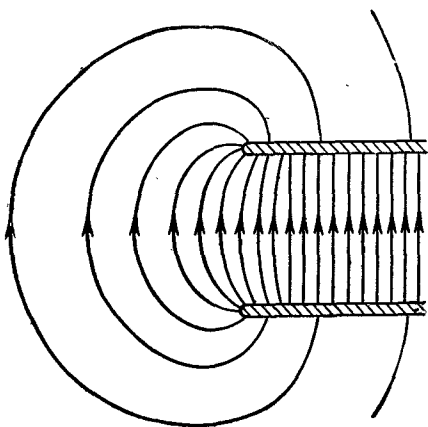
$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \text{ (параллельные обкладки).} \quad (6.34)$$

Эта формула неточна, потому что поле в противоречии с нашим предположением на самом деле не всюду однородно. Поле не кончается сразу на ребрах пластин, а похоже скорее на то, что изображено на фиг. 6.13. Суммарный заряд тоже равен не  $\sigma A$ , как мы предположили; существует маленькая поправка на краевой эффект. Чтобы знать, какова она, надо точнее рассчитать поле и посмотреть, что происходит на краях. Это очень сложная математическая задача, однако ее можно решить при помощи техники, о которой мы, впрочем, говорить здесь не будем. Расчеты показывают, что плотность зарядов возле края пластин слегка возрастает. Это значит, что емкость пластин чуть выше, чем мы думали. [Хорошее приближение для емкости можно получить, если в уравнении (6.34) принять за  $A$  площадь, которую имели бы пластины, если бы их расширили на  $\frac{3}{8}$  расстояния между ними.]

Мы говорили пока только о емкости двух проводников. Иногда люди говорят о емкости предмета самого по себе. Так, говорят, что емкость сферы радиусом  $a$  есть  $4\pi\epsilon_0 a$ . При этом подразумевается, что вторым полюсом является сфера бесконечного радиуса, т. е. что если на сфере помещен заряд  $+Q$ , то противоположным зарядом  $-Q$  обладает бесконечно большая сфера. Можно говорить также о емкостях и тогда, когда проводников три или больше трех, но обсуждение этого вопроса мы отложим до лучших времен.

Пусть нам необходимо иметь конденсатор очень большой емкости. Большую емкость можно получить, взяв очень большую

площадь и очень малый промежуток. Можно проложить алюминиевые ленты провожденной бумагой и смотать их в трубку. (Поместив ее в пластмассовую упаковку, мы получим типичный радиокон-



Фиг. 6.13. Электрическое поле у краев двух параллельных пластин.

денсатор.) Зачем они нужны? Они пригодны для того, чтобы накапливать заряд. Если бы мы захотели, например, собрать заряд на каком-то шаре, то его потенциал быстро подскочил бы, а вскоре так поднялся бы, что заряды стали бы стекать в воздух, и от шара посыпались бы искры. Но если тот же заряд поместить внутрь конденсатора большой емкости, то напряжение близ конденсатора будет очень малым.

Во многих электронных схемах полезно иметь устройство, способное поглощать или выделять большие количества зарядов, заметно не изменяя потенциал. Вот конденсатор (или «емкость») — как раз такое устройство. Он имеет множество применений и в электронных приборах и в счетных машинах. Там он используется для получения определенного изменения в напряжении в ответ на то или иное изменение заряда. С подобным применением мы уже познакомились в вып. 2, гл. 23, когда описывали свойства резонансных контуров.

Из определения  $C$  мы получаем, что единица емкости есть *кулон/вольт*. Эту единицу называют также *фарадой* ( $\phi$ ). А взглядевшись в уравнение (6.34), мы видим, что  $\epsilon_0$  можно выразить в *фарадах/метр* ( $\phi/м$ ); эта единица обычно и применяется.

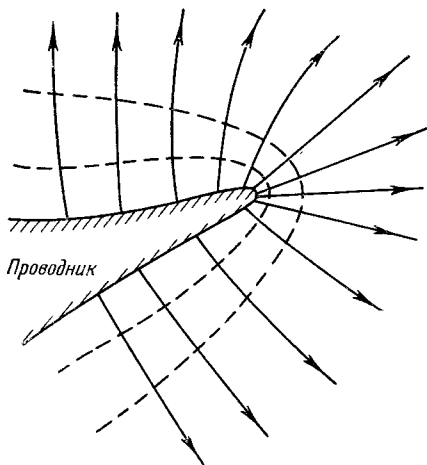
$$\epsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \phi/м$$

Типичные емкости конденсаторов лежат в интервале от 1 микрофарады (*мкмкф*) [или, что то же самое, 1 пикофарады (*1 пф*)] до миллифарад. Небольшие конденсаторы на несколько пикофарад используются в высокочастотных контурах настольки, а емкости порядка сотен или тысяч микрофарад мы находим в силовых фильтрах. Пара обкладок с площадью  $1 \text{ см}^2$  с промежутком  $1 \text{ мм}$  имеет емкость примерно  $1 \text{ пф}$ .

## § 11. Пробой при высоком напряжении

Сейчас мы качественным образом рассмотрим некоторые характеристики полей вокруг проводников. Зарядим электричеством проводник, но на сей раз не сферический, а такой, у которого есть острие или ребро (например, в форме, изображенной на фиг. 6.14). Тогда поле в этом месте окажется намного сильнее, чем в других местах. Причина в общих чертах состоит в том, что заряды стремятся как можно шире растечься по поверхности проводника, а кончик острия всегда отстоит дальше всего от остальной поверхности. Поэтому часть зарядов на пластине течет к острию. Относительно малое количество заряда на нем может создать большую поверхностную плотность, а высокая плотность означает сильное поле близ проводника в этом месте.





Ф и г. 6.14. Электрическое поле у острого края проводника очень велико.

Вообще в тех местах проводника, в которых радиус кривизны меньше, поле оказывается сильнее. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим комбинацию из большой и маленькой сфер, соединенных проводом, как показано на фиг. 6.15. Сам провод не будет сильно влиять на внешние поля; его дело — уравнивать потенциалы сфер. Возле какого шара поле окажется более напряженным? Если радиус левого шара  $a$ , а заряд  $Q$ , то его потенциал примерно равен

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a}.$$

(Конечно, наличие одного шара скажется на распределении зарядов на другом, так что на самом деле ни на одном из них заряды не будут распределены симметрично. Но если нас интересует лишь примерная величина поля, то можно пользоваться формулой для потенциала сферического заряда.) Если меньший шар радиусом  $b$  обладает зарядом  $q$ , то его потенциал примерно равен

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{b}.$$

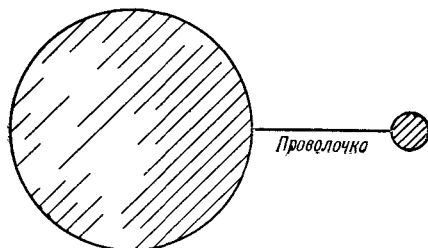
Но  $\varphi_1 = \varphi_2$ , так что

$$\frac{Q}{a} = \frac{q}{b}.$$

С другой стороны, поле у поверхности [см. уравнение (5.8)] пропорционально поверхностной плотности заряда, которая в свою очередь пропорциональна суммарному заряду, деленному на квадрат радиуса. Получается, что

$$\frac{E_a}{E_b} = \frac{Q/a^2}{q/b^2} = \frac{b}{a}. \quad (6.35)$$

Ф и г. 6.15. Поле остроконечного предмета можно приближенно считать полем двух сфер одинакового потенциала.



Значит, у поверхности меньшей сферы поле больше. Поля обратно пропорциональны радиусам.

Этот результат с технической точки зрения очень важен, потому что в воздухе возникает пробой, если поле чересчур велико. Какой-нибудь свободный заряд в воздухе (электрон или ион) ускоряется этим полем, и если оно очень сильное, то заряд может набрать до столкновения с атомом такую скорость, что вышибет из атома новый электрон. В итоге появляется все больше и больше ионов. Их движение и составляет искру, или разряд. Если вам требуется зарядить тело до высокого потенциала так, чтобы оно не разрядилось в воздух, вы должны быть уверены, что поверхность тела гладкая, что на нем нет мест, где поле чересчур велико.

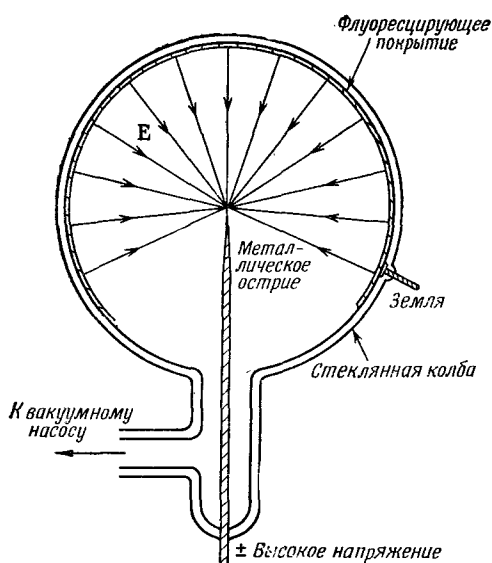
## § 12. Ионный микроскоп

Сверхвысокое электрическое поле, окружающее всякий острый выступ заряженного проводника, получило интересное применение в одном приборе. Работа *ионного микроскопа* обусловлена мощными полями, возникающими вокруг металлического острия\*. Устроен этот прибор так. Очень тонкая игла, диаметр кончика которой не более  $1000 \text{ \AA}$ , помещена в центре стеклянной сферы, из которой выкачан воздух (фиг. 6.16). Внутренняя поверхность сферы покрыта тонким проводящим слоем флуоресцирующего вещества, и между иглой и флуоресцирующим покрытием создана очень высокая разность потенциалов.

Посмотрим сперва, что будет, если игла по отношению к флуоресцирующему экрану заряжена отрицательно. Линии поля у кончика иглы сконцентрированы очень сильно. Электрическое поле может достигать  $40 \cdot 10^6 \text{ в}$  на  $1 \text{ см}$ . В таких сильных полях электроны отрываются от поверхности иглы и ускоряются на участке от иглы до экрана за счет разности потенциалов. Достиг-

---

\* См. статью Мюллера [E. W. Mueller, The field-ion microscope, *Advances in Electronics and Electron Physics*, 13, 83 (1960)].



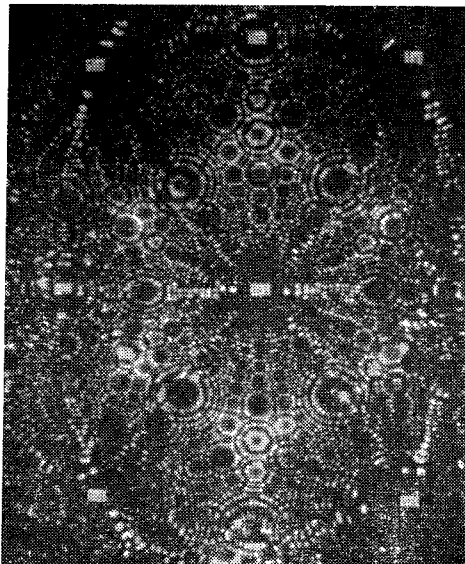
Ф и г. 6.16. Ионный микроскоп.

нув экрана, они вызывают в этом месте свечение (в точности, как на экране телевизионной трубки).

Электроны, пришедшие в данную точку флуоресцирующей поверхности, — это, в очень хорошем приближении, те самые электроны, которые покинули другой конец радиальной линии поля, потому что электроны движутся вдоль линий поля, соединяющих кончик иглы с поверхностью сферы. Так что на поверхности мы видим своего рода изображение кончика иглы. А точнее, мы видим картину *испускательной способности* поверхности иглы, т. е. легкости, с которой электроны могут оставить поверхность металлического острия. Если сила разрешения достаточно высока, то можно рассчитывать разрешить положения отдельных атомов на кончике иглы. Но с электронами такого разрешения достичь нельзя по следующим причинам. Во-первых, возникает квантовомеханическая дифракция электронных волн, и изображение затуманится. Во-вторых, в результате внутреннего движения в металле электроны имеют небольшую поперечную начальную скорость в момент вырывания из иглы и эта случайная поперечная составляющая скорости приведет к размазыванию изображения. В общей сложности эти эффекты ограничивают разрешимость деталей величиной порядка 25 Å.

Если, однако, мы переменим знак напряжения и впусим в колбу немного гелия, то детали разрешены будут лучше. Когда атом гелия сталкивается с кончиком острия, мощное поле

Ф и г. 6.17. Изображение, полученное ионным микроскопом.



срывает с атома электрон, и атом заряжается положительно. Затем ион гелия ускоряется вдоль силовой линии, пока не попадет в экран. Поскольку ион гелия несравненно тяжелее электрона, то и квантовомеханические длины волн у него намного меньше. А если к тому же температура не очень высока, то и влияние тепловых скоростей также значительно слабее, чем у электрона. Изображение размазывается меньше и получается куда более резкое изображение кончика иглы. С микроскопом, работающим на принципе ионной эмиссии, удалось добиться увеличения вплоть до 2 000 000 раз, т. е. в десять раз лучше, чем на лучших электронных микроскопах.

На фиг. 6.17 показано, что удалось получить на таком микроскопе, применив вольфрамовую иглу. Центры атомов вольфрама ионизуют атомы гелия чуть иначе, чем промежутки между атомами вольфрама. Расположение пятен на флуоресцирующем экране демонстрирует расстановку отдельных атомов на вольфрамовом острие. Почему пятна имеют вид колец, можно понять, если представить себе большой ящик, набитый шарами, уложенными в прямоугольную сетку и образующими таким образом кубическую решетку. Эти шары — как бы атомы в металле. Если вы из этого ящика вырежете примерно сферическую часть, то увидите картину колец, характерную для атомной структуры. Ионный микроскоп впервые снабдил человечество средством видеть атомы. Замечательное достижение, да еще полученное с таким простым прибором.

## ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В РАЗНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ (продолжение)

### § 1. Методы определения электростатического поля

В этой главе мы продолжим рассмотрение характеристик электрических полей в различных условиях. Сперва мы опишем один из наиболее разработанных методов расчета полей в присутствии проводников. Мы не рассчитываем, конечно, что эти усовершенствованные методы будут вами тотчас усвоены. Но вам должно быть интересно получить какое-то представление о характере задач, которые удается решать при помощи техники, излагаемой в специальных, более глубоких курсах. Затем мы приведем два примера, в которых нет ни заранее фиксированных распределений зарядов, ни растекания зарядов по проводнику, а вместо этого распределение определяют другие физические законы.

Как мы выяснили в гл. 6, задача об электростатическом поле решается очень просто, когда распределение зарядов оговорено заранее; остается только взять интеграл. Когда же имеются проводники, то возникают осложнения, потому что распределение зарядов на проводниках с самого начала неизвестно; заряды вынуждены сами распределять себя по поверхности проводника так, чтобы весь проводник приобрел одинаковый потенциал. Эти задачи так просто не решаются.

Мы рассмотрели обходный путь решения таких задач, при котором сначала отыскивают эквипотенциальные поверхности некоторого заданного распределения зарядов и потом одну из них заменяют проводящей поверхностью. Таким манером можно составить каталог частных решений для проводников любой формы, плоской, сферической и т. п. Исполни-

§1. Методы определения электростатического поля

§2. Двумерные по функции комплексного переменного

§3. Колебания плазмы

§4. Коллоидные частицы в электролите

§5. Электростатическое поле сетки

зование изображений, описанное в гл. 6, является примером косвенного способа решения. Другой такой способ мы опишем в этой главе.

Если наша задача не относится к тем, для которых годен обходный путь, приходится решать ее в лоб. Математической основой такого способа решения задач является решение уравнения Лапласа

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad (7.1)$$

при условии, что потенциал  $\varphi$  на некоторой границе (поверхностях проводников) равен условленной константе. Задачи, связанные с решением дифференциального уравнения поля, удовлетворяющего некоторым *граничным условиям*, называются задачами *о граничных значениях*. Они явились предметом интенсивного математического изучения. Для сложных проводников общих аналитических методов решения нет. Даже такая простая задача, как поле заряженного металлического цилиндра с запаянными торцами — консервной банки, представляет огромные математические трудности. Ее можно решить лишь приближенно, численным методом. *Единственный* общий метод решения — численный.

Имеется несколько задач, в которых уравнение (7.1) все же решается. К примеру, задача о заряженном проводнике, имеющем форму эллипсоида вращения, может быть решена с помощью некоторых специальных функций. Решение для тонкого диска тогда можно получить, бесконечно сплющив эллипсоид. А бесконечно вытянув тот же эллипсоид, получим поле заряженной иглы. Но надо подчеркнуть, что единственный прямой способ, применимый всюду и всегда, это путь численных расчетов.

Задачу о граничных значениях можно также решать на ее физическом аналоге. Уравнение Лапласа возникает во многих физических ситуациях: при изучении установившегося потока тепла, безвихревого течения жидкости, отклонений упругой мембраны. Часто можно соорудить физическую модель, являющуюся аналогом решаемой нами электрической задачи. Измерив в модели величину, аналогичную интересующей нас, можно узнать решение задачи. Примером аналоговой техники является применение электролитической ванны для решения двумерных задач электростатики. Решение удается потому, что дифференциальное уравнение для потенциала в однородной проводящей среде такое же, как и в вакууме.

Имеется много физических задач, в которых физические поля в каком-то одном направлении не изменяются или этим изменением можно пренебречь по сравнению с изменениями в двух других направлениях. Такие задачи называют *двумерными*; поле зависит только от двух координат. Скажем, если вдоль оси  $z$  протянуть длинную заряженную проволоку, то в точках неподалеку

от нее электрическое поле зависит от  $x$  и  $y$ , а не от  $z$ ; задача двумерная. Так как в двумерных задачах  $\partial\varphi/\partial z=0$ , то уравнение для  $\varphi$  в свободном пространстве имеет вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (7.2)$$

Поскольку двумерное уравнение сравнительно простое, то существует широкий класс условий, в которых оно решается аналитически. Действительно, существует могучая математическая техника, связанная с теоремами теории функций комплексного переменного. К изложению ее мы сейчас и перейдем.

## § 2. Двумерные поля; функции комплексного переменного

Комплексная величина  $z$  определяется так:

$$z = x + iy.$$

(Не перепутайте  $z$  с координатой  $z$ ; координата  $z$  не встретится в дальнейшем, потому что зависимости полей от  $z$  не будет.) Тогда каждой точке на плоскости  $(x, y)$  отвечает комплексное число  $z$ . Мы можем считать  $z$  особой (комплексной) переменной величиной и с ее помощью записывать обычные математические функции  $F(z)$ . Например,

$$F(z) = z^2,$$

или

$$F(z) = \frac{1}{z^3},$$

или

$$F(z) = z \log z$$

и т. д.

Если дана некоторая определенная функция  $F(z)$ , то можно подставить  $z=x+iy$ ; получится функция от  $x$  и  $y$  с действительной и мнимой частями. Например,

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy. \quad (7.3)$$

Любую функцию  $F(z)$  можно записать в виде суммы чисто действительной и чисто мнимой частей, и каждая из частей будет функцией от  $x$  и  $y$ :

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y), \quad (7.4)$$

где  $U(x, y)$  и  $V(x, y)$  — действительные функции. Значит, из любой комплексной функции  $F(z)$  можно произвести две новые функции  $U(x, y)$  и  $V(x, y)$ . К примеру,  $F(z) = z^2$  дает две функции:

$$U(x, y) = x^2 - y^2 \quad (7.5)$$

и

$$V(x, y) = 2xy. \quad (7.6)$$

Мы подошли сейчас к удивительной математической теореме, столь прекрасной, что доказательство ее придется отложить до соответствующего математического курса. (Если мы начнем заранее приоткрывать все тайны математики, она покажется вам потом скучной.) Теорема эта состоит вот в чем. Для любой «нормальной» функции (что это такое, математики вам объяснят лучше) функции  $U$  и  $V$  *автоматически* удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad (7.7)$$

и

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}. \quad (7.8)$$

Отсюда немедленно следует, что каждая из функций  $U$  и  $V$  удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \quad (7.10)$$

Сразу видно, что для функций (7.5) и (7.6) эти уравнения выполняются.

Значит, всегда, отправившись от какой угодно обычной функции, можно прийти к двум функциям  $U(x, y)$  и  $V(x, y)$ , которые обе есть решения двумерного уравнения Лапласа. Каждая функция представляет некоторый электростатический потенциал. Любая выбранная нами функция  $F(z)$  обязана снабдить нас решением какой-то задачи из электростатики, вернее даже *двух* задач, потому что решением является как  $U$ , так и  $V$ . Так можно выписать сколько угодно решений: просто напридумывать множество функций и останется только найти задачи с такими решениями. Такой подход к задачам вполне допустим, хоть он и производится задом наперед.

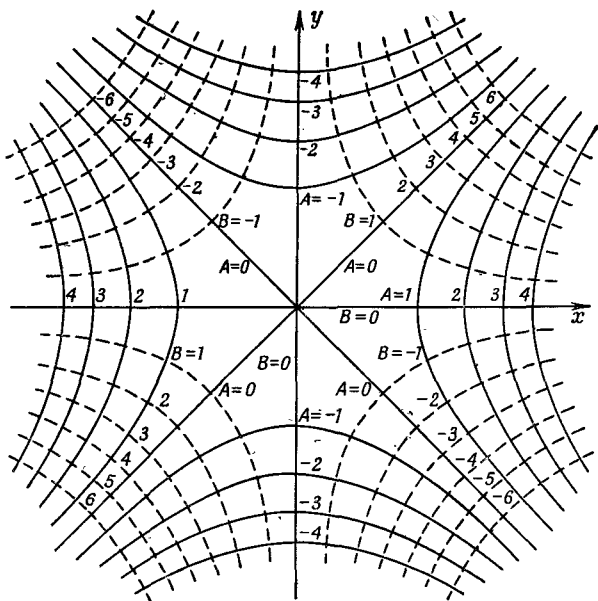
Для примера посмотрим, к какой физической задаче приведет нас функция  $F(z) = z^2$ . Из нее мы получаем две потенциальные функции (7.5) и (7.6). Чтобы увидеть, какую задачу решает функция  $U$ , мы найдем эквипотенциальные поверхности, полагая  $U$  равным постоянному числу  $A$ :

$$x^2 - y^2 = A.$$

Это уравнение прямоугольной гиперболы. Перебирая разные значения  $A$ , мы получаем семейство гипербол, начерченное на фиг. 7.1. Когда  $A=0$ , то гиперболы вырождаются в пару диагоналей, проходящих через начало.

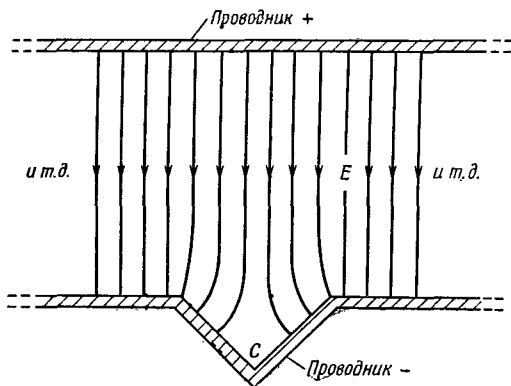
Такое семейство эквипотенциальных поверхностей встречается в нескольких физических задачах. В одной из них оно





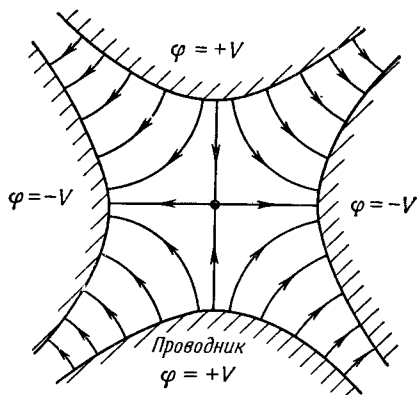
Ф и г. 7.1. Два семейства ортогональных кривых, которые могут представлять собой эквипотенциальные линии двумерного электростатического поля.

изображает детали структуры поля возле точки между двумя одинаковыми точечными зарядами. В другой оно изображает поле внутри прямого угла, образованного двумя проводящими плоскостями. Если есть два электрода, изогнутых так, как показано на фиг. 7.2, и имеющих разные потенциалы, то поле внутри угла  $C$  будет выглядеть в точности так же, как поле



Ф и г. 7.2. Поле возле точки  $C$  такое же, как на фиг. 7.1.

Ф и г. 7.3. Поле квадрупольной линзы.



около начала координат на фиг. 7.1. Сплошные линии — это эквипотенциальные поверхности, а пересекающие их штриховые — это линии поля  $E$ . Вблизи острия или выступа электрическое поле повышается, а возле впадины или отверстия оно слабеет.

Найденное нами решение отвечает также гиперболическому электроду, помещенному около прямого угла, или двум гиперболам при соответствующих потенциалах. Заметьте, что поле фиг. 7.1 имеет интересное свойство. Составляющая  $x$  электрического поля  $E$  дается выражением

$$E_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -2x,$$

т. е. электрическое поле пропорционально расстоянию от оси координат. Этот факт был использован, чтобы создать устройство (называемое квадрупольной линзой), необходимое для фокусирования пучков частиц (см. вып. 6, гл. 29, § 9). Фокусирующее поле обычно получают с помощью четырех гиперболических электродов, изображенных на фиг. 7.3. Проводя здесь линии электрического поля, мы просто перечертили с фиг. 7.1 семейство штриховых кривых  $V = \text{const}$ . Эти линии достались нам совершенно бесплатно! Кривые  $V = \text{const}$  перпендикулярны к кривым  $U = \text{const}$ , как это следует из уравнений (7.7) и (7.8). Как только мы выбираем функцию  $F(\beta)$ , то получаем из  $U$  и  $V$  сразу же эквипотенциальные линии и линии поля. Мы давно знаем, что можно решить на выбор любую из двух задач, смотря по тому, какое семейство кривых мы примем за эквипотенциальное.

Другим примером послужит функция

$$F(\beta) = \sqrt{\beta}. \quad (7.11)$$

Если мы напишем

$$z = x + iy = \rho e^{i\theta},$$

где

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

и

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x},$$

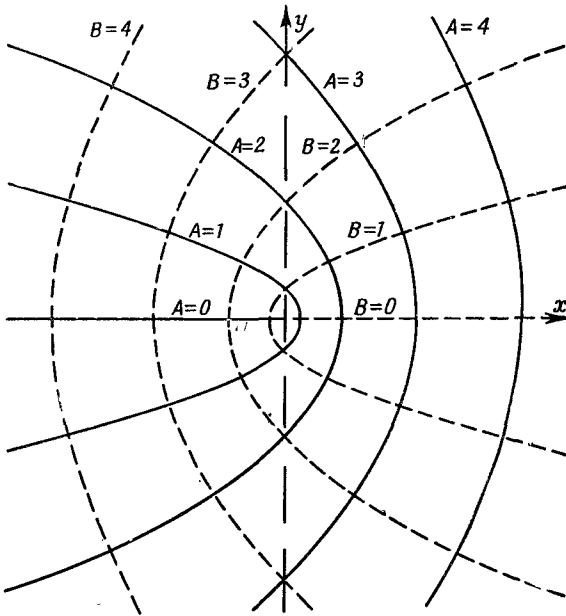
то

$$F(z) = \rho^{1/2} e^{i\theta/2} = \rho^{1/2} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right),$$

откуда следует

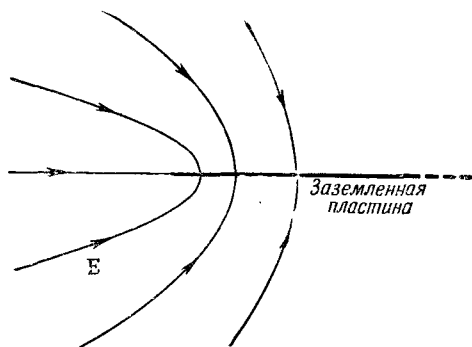
$$F(z) = \left[ \frac{(x^2 + y^2)^{1/2} + x}{2} \right]^{1/2} + i \left[ \frac{(x^2 + y^2)^{1/2} - x}{2} \right]^{1/2}. \quad (7.12)$$

Кривые  $U(x, y) = A$  и  $V(x, y) = B$ , где  $U$  и  $V$  взяты из уравнения (7.12), проведены на фиг. 7.4. И здесь тоже можно назвать немало случаев, описываемых этими полями. Один из самых интересных — это поле у края тонкой пластинки. Если линия  $B=0$  направо от оси  $y$  изображает тонкую заряженную пластину, то линии поля близ нее даются кривыми с различ-



Фиг. 7.4. Кривые постоянных  $U(x, y)$  и  $V(x, y)$  из уравнения (7.12).

Ф и г. 7.5. Электрическое поле возле края тонкой заземленной пластины.



пыми *A*. Физическая картина показана на фиг. 7.5.

Дальнейшие примеры — это функция

$$F(\zeta) = \zeta^{3/2}, \quad (7.13)$$

дающая нам поле *снаружи* прямого угла, функция

$$F(\zeta) = \log \zeta, \quad (7.14)$$

дающая поле заряженной нити, и функция

$$F(\zeta) = \frac{1}{\zeta}, \quad (7.15)$$

изображающая поле двумерного аналога электрического диполя, т. е. двух параллельных прямых, заряженных противоположным знаком и помещенных вплотную друг к другу.

Больше этим вопросом в нашем курсе мы заниматься не будем; мы должны только подчеркнуть, что, хотя техника комплексных переменных часто оказывается очень мощной, она ограничена все же только двумерными задачами; к тому же это все-таки косвенный метод.

### § 3. Колебания плазмы

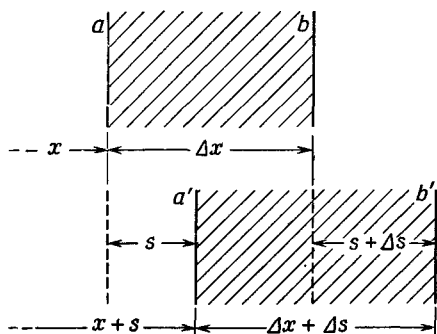
Займемся теперь такими физическими задачами, в которых поле создается не закрепленными зарядами и не зарядами на проводящих поверхностях, а сочетанием обоих факторов. Иными словами, полем управляют одновременно две системы уравнений: 1) уравнения электростатики, связывающие электрическое поле с распределением зарядов; 2) уравнения из другой области физики, определяющие положение или движения зарядов в поле.

Сперва мы разберем один динамический пример. В нем движение зарядов контролируется законами Ньютона. Простой пример такого положения вещей наблюдается в плазме, в ионизованном газе, состоящем из ионов и свободных электронов,

распределенных в какой-то области пространства. Ионосфера (верхний слой атмосферы) служит примером такой плазмы. Ультрафиолетовые лучи Солнца отрывают от молекул воздуха электроны и создают свободные электроны и ионы. В плазме положительные ионы намного тяжелее электронов, так что можно пренебречь движением в ней ионов по сравнению с движением электронов.

Пусть  $n_0$  будет плотностью электронов в невозмущенном равновесном состоянии. Такой же должна быть и плотность положительных ионов, потому что в невозмущенном состоянии плазма нейтральна. Теперь допустим, что электроны каким-то образом выведены из равновесия. Что тогда получится? Если плотность электронов в какой-то области возросла, они начнут отталкиваться и стремиться вернуться в прежнее положение равновесия. Двигаясь к своим первоначальным положениям, они наберут кинетическую энергию и вместо того, чтобы замереть в равновесной конфигурации, проскочат мимо. Начнутся колебания. Нечто похожее наблюдается в звуковых волнах, но там возвращающей силой было давление газа. В плазме возвращающая сила — это действующее на электроны электрическое притяжение.

Чтобы упростить рассуждения, мы будем заниматься только одномерным движением электронов — скажем, в направлении  $x$ . Предположим, что электроны, первоначально находившиеся в точке  $x$ , к моменту  $t$  сместились из положения равновесия на расстояние  $s(x, t)$ . Раз они сместились, то плотность их, вообще говоря, изменилась. Это изменение подсчитать легко. Если посмотреть на фиг. 7.6, то видно, что электроны, вначале находившиеся между плоскостями  $a$  и  $b$ , сдвинулись и теперь находятся между плоскостями  $a'$  и  $b'$ . Количество электронов между  $a$  и  $b$  прежде было пропорционально  $n_0 \Delta x$ ; теперь *то же* их количество находится в промежутке шириной  $\Delta x + \Delta s$ . Плотность



Фиг. 7.6. Движение волны в плазме. Электроны от плоскости  $a$  сдвигаются к  $a'$ , а от  $b$  — к  $b'$ .

теперь стала

$$n = \frac{n_0 \Delta x}{\Delta x + \Delta s} = \frac{n_0}{1 + (\Delta s / \Delta x)}. \quad (7.16)$$

Если изменение плотности мало, то можно написать [заменяя с помощью биномиального разложения  $(1 + \epsilon)^{-1}$  на  $(1 - \epsilon)$ ]

$$n = n_0 \left( 1 - \frac{\Delta s}{\Delta x} \right). \quad (7.17)$$

Что касается ионов, то предположим, что они не сдвинулись заметно с места (инерция-то у них куда больше), так что плотность их осталась прежней,  $n_0$ . Заряд каждого электрона  $-q_e$ , и средняя плотность заряда в любой точке равна

$$\rho = -(n - n_0) q_e,$$

или

$$\rho = n_0 q_e \frac{ds}{dx} \quad (7.18)$$

(здесь  $\Delta s / \Delta x$  записано через дифференциалы).

Далее, уравнения Максвелла связывают с плотностью зарядов электрическое поле. В частности,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (7.19)$$

Если задача действительно одномерна (и никаких полей, кроме вызываемых смещением электронов, нет), то у электрического поля  $\mathbf{E}$  есть одна-единственная составляющая  $E_x$ . Уравнение (7.19) вместе с (7.18) приведет к

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{n_0 q_e}{\epsilon_0} \frac{\partial s}{\partial x}. \quad (7.20)$$

Интегрируя (7.20), получаем

$$E_x = \frac{n_0 q_e}{\epsilon_0} s + K. \quad (7.21)$$

Постоянная интегрирования  $K$  равна нулю, потому что  $E_x = 0$  при  $s = 0$ .

Сила, действующая на смещенный электрон, равна

$$F_x = - \frac{n_0 q_e^2}{\epsilon_0} s, \quad (7.22)$$

т. е. возвращающая сила пропорциональна смещению  $s$  электрона. Это приведет к гармоническим колебаниям электронов. Уравнение движения смещенного электрона имеет вид

$$m_e \frac{d^2 s}{dt^2} = - \frac{n_0 q_e^2}{\epsilon_0} s. \quad (7.23)$$

Отсюда следует, что  $z$  меняется по гармоническому закону. Во времени  $z$  меняется как  $\cos \omega t$  или, если использовать экспоненту (см. вып. 3), как

$$e^{i\omega_p t}. \quad (7.24)$$

Частота колебаний  $\omega_p$  определяется из (7.23):

$$\omega_p^2 = \frac{n_0 q_e^2}{\epsilon_0 m_e}. \quad (7.25)$$

Это число, характеризующее плазму, называют *собственной частотой колебаний плазмы*, или *плазменной частотой*.

Оперируя с электронами, многие предпочитают получать ответы в единицах  $e^2$ , определяемых как

$$e^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0} = 2,3068 \cdot 10^{-28} \text{ ньютон} \cdot \text{м}^2. \quad (7.26)$$

При этом условии (7.25) превращается в

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e}. \quad (7.27)$$

В таком виде эту формулу можно встретить во многих книгах.

Итак, мы обнаружили, что возмущения плазмы приводят к свободным колебаниям электронов вблизи положения равновесия с собственной частотой  $\omega_p$ , пропорциональной корню квадратному из плотности электронов. Плазменные электроны ведут себя как резонансная система, подобная описанным в вып. 2, гл. 23.

Этот собственный резонанс плазмы приводит к интересным эффектам. Например, при прохождении радиоволн сквозь ионосферу обнаруживается, что они могут пройти только в том случае, если их частота выше плазменной частоты. А иначе они отражаются обратно. Для связи с искусственным спутником мы используем высокие частоты. Если же мы хотим связаться с радиостанцией, расположенной где-то за горизонтом, то необходимы частоты меньшие, чем плазменная частота, иначе сигнал не отразится обратно к Земле.

Другой интересный пример колебаний плазмы наблюдается в металлах. В них содержится плазма из положительных ионов и свободных электронов. Плотность  $n_0$  там очень высока, значит, велика и  $\omega_p$ . Но колебания электронов все же можно обнаружить. Ведь, согласно квантовой механике, гармонический осциллятор с собственной частотой  $\omega_p$  обладает уровнями энергии, отличающимися друг от друга на величину  $\hbar\omega_p$ . Значит, если, скажем, обстреливать электронами алюминиевую фольгу и очень точно измерять их энергию по ту сторону фольги, то можно ожидать, что временами электроны будут из-за колебаний плазмы терять как раз энергию  $\hbar\omega_p$ . Так это и происходит. Впервые это явление наблюдалось экспериментально

в 1936 г. Электроны с энергиями от нескольких сот до нескольких тысяч электронвольт, рассеиваясь от тонкой металлической фольги или проходя сквозь нее, теряли энергию порциями. Эффект оставался непонятым до 1953 г., пока Бом и Пайнс\* не показали, что все это можно объяснить квантовым возбуждением плазмы в металле.

#### § 4. Коллоидные частицы в электролите

Обратимся к другому явлению, когда местоположение зарядов определяется потенциалом, создаваемым в какой-то степени самими зарядами. Такой эффект существен для поведения коллоидов. Коллоид — это взвесь маленьких заряженных частичек в воде. Хотя эти частички и микроскопические, но по сравнению с атомом они все же очень велики. Если бы коллоидные частицы не были заряжены, они бы стремились коагулировать (слиться) в большие комки; но, будучи заряженными, они отталкиваются друг от друга и остаются во взвешенном состоянии. Если в воде растворена еще соль, то она диссоциирует (расползается) на положительные и отрицательные ионы. (Такой раствор ионов называется электролитом.) Отрицательные ионы притягиваются к коллоидным частицам (будем считать, что их заряды положительны), а положительные — отталкиваются. Нам нужно узнать, как ионы, окружающие каждую частицу коллоида, распределены в пространстве.

Чтобы мысль была янее, рассмотрим только одномерный случай. Представим себе коллоидную частицу в виде очень большого (по сравнению с атомом!) шара; тогда мы можем малую часть ее поверхности считать плоскостью. (Вообще, пытаясь понять новое явление, лучше разобратся в нем на чрезвычайно упрощенной модели; и только потом, поняв суть проблемы, стоит браться за более точные расчеты.)

Предположим, что распределение ионов создает плотность зарядов  $\rho(x)$  и электрический потенциал  $\phi$ , связанные электростатическим законом  $\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$ , или в одномерном случае законом

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (7.28)$$

Как бы распределились ионы в таком поле, если бы потенциал подчинялся этому уравнению? Узнать это можно при помощи принципов статистической механики. Вопрос в том, как определить  $\phi$ , чтобы вытекающая из статистической механики плотность заряда *тоже* удовлетворяла бы условию (7.28)?

---

\* О новых работах по этому вопросу и библиографию см. в статье C. J. Powell, J. B. Swan, Phys. Rev., 115, 869 (1959).



Согласно статистической механике (см. вып. 4, гл. 40), частицы, пребывая в тепловом равновесии в поле сил, распределяются так, что плотность  $n$  частиц с координатой  $x$  дается формулой

$$n(x) = n_0 e^{-U(x)/kT}, \quad (7.29)$$

где  $U(x)$  — потенциальная энергия,  $k$  — постоянная Больцмана, а  $T$  — абсолютная температура.

Предположим, что у всех ионов один и тот же электрический заряд, положительный или отрицательный. На расстоянии  $x$  от поверхности коллоидной частицы положительный ион будет обладать потенциальной энергией

$$U(x) = q_e \Phi(x).$$

Плотность положительных ионов тогда равна

$$n_+(x) = n_0 e^{-q_e \Phi(x)/kT},$$

а плотность отрицательных

$$n_-(x) = n_0 e^{+q_e \Phi(x)/kT}.$$

Суммарная плотность заряда

$$\rho = q_e n_+ - q_e n_-,$$

или

$$\rho = q_e n_0 (e^{-q_e \Phi/kT} - e^{+q_e \Phi/kT}). \quad (7.30)$$

Подставляя в (7.28), увидим, что потенциал  $\Phi$  должен удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} = -\frac{q_e n_0}{\epsilon_0} (e^{-q_e \Phi/kT} - e^{+q_e \Phi/kT}). \quad (7.31)$$

Это уравнение решается в общем виде [помножьте обе его части на  $2(d\Phi/dx)$  и проинтегрируйте по  $x$ ], но, продолжая упрощать задачу, мы ограничимся здесь только предельным случаем малых потенциалов или высоких температур  $T$ . Малость  $\Phi$  отвечает разбавленному раствору. Показатель экспоненты тогда мал, и можно взять

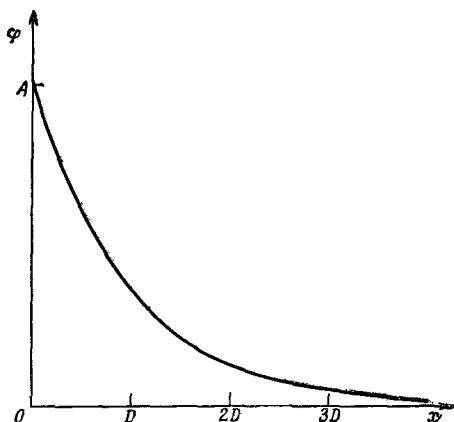
$$e^{\pm q_e \Phi/kT} = 1 \pm \frac{q_e \Phi}{kT}. \quad (7.32)$$

Уравнение (7.31) дает

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} = +\frac{2n_0 q_e^2}{\epsilon_0 kT} \Phi(x). \quad (7.33)$$

Заметьте, что теперь в правой части стоит знак плюс (решение не колебательное, а экспоненциальное).

Фиг. 7.7. Изменение потенциала у поверхности коллоидной частицы.  
 $D$  — дебаевская длина.



Общее решение (7.33) имеет вид

$$\varphi = Ae^{-x/D} + Be^{+x/D}, \quad (7.34)$$

где

$$D^2 = \frac{\varepsilon_0 kT}{2n_0 q_e^2}. \quad (7.35)$$

Постоянные  $A$  и  $B$  определяются из добавочных условий. В нашем случае  $B$  должно быть нулем, иначе потенциал для больших  $x$  обратится в бесконечность. Итак,

$$\varphi = Ae^{-x/D}, \quad (7.36)$$

где  $A$  — потенциал при  $x=0$  на поверхности коллоидной частицы.

Потенциал убывает в  $e$  раз при удалении на  $D$  (фиг. 7.7). Число  $D$  называется *дебаевской длиной*; это мера толщины ионной оболочки, окружающей в электролите каждую большую заряженную частицу. Уравнение (7.36) утверждает, что оболочка становится тоньше по мере увеличения концентрации ионов ( $n_0$ ) или уменьшения температуры.

Постоянную  $A$  в (7.36) легко получить, если известен поверхностный заряд  $\sigma$  на поверхности заряженной частицы. Мы знаем, что

$$E_n = E_x(0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (7.37)$$

Но  $E$  это также градиент  $\varphi$

$$E_x(0) = -\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_0 = +\frac{A}{D}, \quad (7.38)$$

откуда получается

$$A = \frac{\sigma D}{\varepsilon_0}. \quad (7.39)$$

Подставив этот результат в (7.36), мы получим (положив  $x=0$ ), что потенциал коллоидной частицы равен

$$\varphi(0) = \frac{\sigma D}{\epsilon_0}. \quad (7.40)$$

Заметьте, что этот потенциал совпадает с разностью потенциалов в конденсаторе с промежутком  $D$  и поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ .

Мы сказали, что коллоидные частицы не слипаются вследствие электрического отталкивания. Но теперь мы видим, что недалеко от поверхности частицы из-за возникающей вокруг нее ионной оболочки поле спадает. Если бы оболочка стала достаточно тонкой, у частиц появился бы шанс столкнуться друг с другом. Тогда они бы слиплись, коллоид бы осадился и выпал из жидкости. Из нашего анализа ясно, что после добавления в коллоид подходящего количества соли начнется выпадение осадка. Этот процесс называется «высаливанием коллоида».

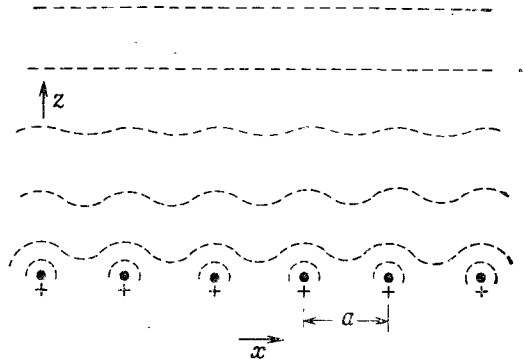
Другой интересный пример — это влияние растворения соли на осаждение белка. Молекула белка — это длинная, сложная и гибкая цепь аминокислот. На ней там и сям имеются заряды, и временами заряд какого-то одного знака, скажем отрицательного, распределяется вдоль всей цепи. В результате взаимного отталкивания отрицательных зарядов белковая цепь распрямляется. Если в растворе имеются еще другие такие же молекулы-цепочки, то они не слипаются между собой вследствие того же отталкивания. Так возникает в жидкости взвесь молекул-цепочек. Но стоит добавить туда соли, как свойства взвеси изменяются. Уменьшится дебаевская длина, молекулы начнут сближаться и свертываться в спирали. А если соли много, то молекулы белка начнут выпадать в осадок. Существует множество других химических явлений, которые можно понять на основе анализа электрических сил.

## § 5. Электростатическое поле сетки

Напоследок мы хотим изложить еще одно интересное свойство электрических полей. Оно используется в электрических приборах, электронных лампах и для других целей. Речь идет о поведении электрического поля близ сетки, составленной из заряженных проволочек. Чтоб упростить задачу, возьмем плоскую систему параллельных проволочек бесконечной длины, промежутки между которыми одинаковы.

Если мы посмотрим на поле где-то высоко над плоскостью проволочек, перед нами предстанет однородное электрическое поле, такое, словно заряд распределен на плоскости равномерно. По мере приближения к сетке начнутся отклонения от прежней однородности. Мы хотим оценить, насколько близко от сетки

Ф и г. 7.8. Эквипотенциальные поверхности над однородной сеткой из заряженных проволок.



появятся заметные изменения в потенциале. На фиг. 7.8 показано примерное расположение эквипотенциальных поверхностей на разных расстояниях от сетки. Чем ближе к сетке, тем сильнее колебания. Двигаясь параллельно сетке, мы заметим, что поле изменяется периодически.

Мы уже знаем (см. вып. 4, гл. 50), что любая периодическая величина может быть представлена в виде суммы синусных волн (теорема Фурье). Посмотрим, нельзя ли найти подходящую колебательную функцию, которая удовлетворяет нашим уравнениям поля.

Если проволоочки лежат в плоскости  $xu$  параллельно оси  $y$ , то можно попробовать испытать члены вида

$$\varphi(x, z) = F_n(z) \cos \frac{2\pi nx}{a}, \quad (7.41)$$

где  $a$  — расстояние между нитями, а  $n$  — число колебаний. (Мы предположили, что нити эти очень длинные, так что никаких изменений по  $y$  не заметно.) Полное решение должно состоять из суммы таких членов при  $n=1, 2, 3\dots$  Чтoб получился правильный потенциал, оно должно в области над сеткой (где зарядов нет) подчиняться уравнению Лапласа, т. е.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Испытывая этим уравнением функцию  $\varphi$  из (7.41), мы получаем

$$-\frac{4\pi^2 n^2}{a^2} F_n(z) \cos \frac{2\pi nx}{a} + \frac{d^2 F_n}{dz^2} \cos \frac{2\pi nx}{a} = 0, \quad (7.42)$$

т. е.  $F_n(z)$  должно удовлетворять условию

$$\frac{d^2 F_n}{dz^2} = \frac{4\pi^2 n^2}{a^2} F_n. \quad (7.43)$$

Итак, должно быть

$$F_n = A_n e^{-z/z_0}, \quad (7.44)$$

$$z_0 = \frac{a}{2\pi n}. \quad (7.45)$$

Мы обнаружили, что если имеется компонента Фурье  $n$ -й гармоники поля, то *эта* компонента должна убывать по экспоненте с высотой, причем характерным расстоянием является  $z_0 = a/2\pi n$ . Амплитуда у первой гармоники ( $n=1$ ) уменьшается в  $e^{2\pi}$  раз (очень резкое падение) каждый раз, когда мы удаляемся от сетки на величину одного промежутка  $a$ . Другие гармоники убывают еще быстрее. Мы видим, что уже на расстоянии в несколько  $a$  сетка кажется почти однородной, т. е. колебания поля очень малы. Конечно, всегда остается «нулевая гармоника» поля

$$\varphi_0 = -E_0 z,$$

которая и дает однородное поле при больших  $z$ . Для полного решения нужно добавить этот член к сумме членов вида (7.41) с  $F_n$  из (7.44), причем каждый член надо взять с коэффициентом  $A_n$ . Эти коэффициенты выбираются так, чтобы после дифференцирования получилось поле, согласующееся с плотностью зарядов  $\lambda$  на проволочках сетки.

Развитым нами методом можно объяснить, почему электростатическая защита с помощью сетки ничуть не хуже сплошных листов металла. Поле за сеткой равно нулю всюду, за исключением промежутка у самой сетки, не превышающего по размерам нескольких ее ячеек. Мы видим, что медная сетка, которая намного легче и дешевле сплошной медной обшивки, вполне пригодна для защиты чувствительного электрического оборудования от возмущающих внешних полей.

**ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ**

§1. Электростатическая энергия зарядов. Однородный шар

**§ 1. Электростатическая энергия зарядов. Однородный шар**

§2. Энергия конденсатора. Силы, действующие на заряженные проводники

Одно из самых интересных и полезных открытий в механике — это закон сохранения энергии. Зная формулы для кинетической и потенциальной энергий механической системы, мы способны обнаруживать связь между состояниями системы в два разных момента времени, не вникая в подробности того, что происходит между этими моментами. Мы хотим определить теперь энергию электростатических систем. В электричестве сохранение энергии окажется столь же полезным для обнаружения многих любопытных фактов.

§3. Электростатическая энергия ионного кристалла

§4. Электростатическая энергия ядра

§5. Энергия в электростатическом поле

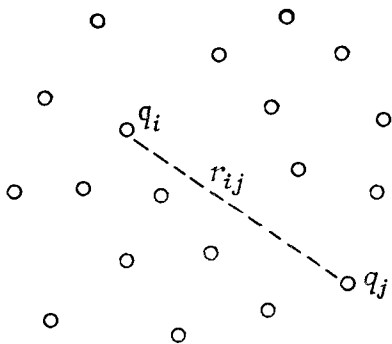
§6. Энергия точечного заряда

Закон, по которому меняется энергия при электростатическом взаимодействии, очень прост; на самом деле мы его уже обсуждали. Пусть имеются заряды  $q_1$  и  $q_2$ , разделенные промежутком  $r_{12}$ . У этой системы есть какая-то энергия, потому что понадобилась какая-то работа, чтобы сблизить заряды. Мы подсчитывали работу, производимую при сближении двух зарядов с большого расстояния; она равна

*Повторить:* гл. 4 (вып. 1) «Сохранение энергии»; гл. 13 и 14 (вып. 1) «Работа и потенциальная энергия»

$$= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \quad (8.1)$$

Мы знаем из принципа наложения, что если зарядов много, то общая сила, действующая на любой из зарядов, равна сумме сил, действующих со стороны всех прочих зарядов. Отсюда следует, что полная энергия системы нескольких зарядов есть сумма членов, выражающих взаимодействие каждой пары зарядов по отдельности. Если  $q_i$  и  $q_j$  — какие-то два из зарядов, а расстояние между ними  $r_{ij}$  (фиг. 8.1),



Ф и г. 8.1. Электростатическая энергия системы частиц есть сумма электростатических энергий каждой пары.

то энергия именно этой пары равна

$$\frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}. \quad (8.2)$$

Полная электростатическая энергия  $U$  есть сумма энергий всевозможных пар зарядов:

$$U = \sum_{\substack{\text{Все} \\ \text{пары}}} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}. \quad (8.3)$$

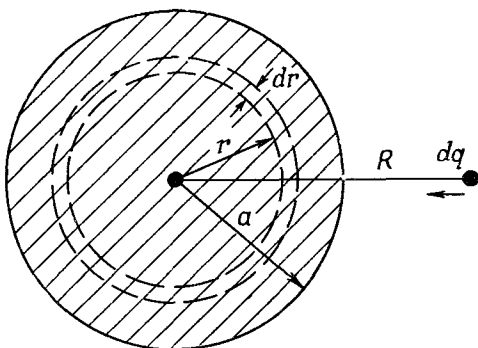
Если распределение задается плотностью заряда  $\rho$ , то сумму в (8.3) нужно, конечно, заменить интегралом.

Мы расскажем здесь об энергии с двух точек зрения. Первая — *применение* понятия энергии к электростатическим задачам; вторая — разные способы *оценки* величины энергии. Порой легче бывает подсчитать выполненную в каком-то случае работу, чем оценить величину суммы в (8.3) или величину соответствующего интеграла. Для образца подсчитаем энергию, необходимую для того, чтобы собрать из зарядов однородно заряженный шар. Энергия здесь есть не что иное, как работа, которая затрачивается на собиране зарядов из бесконечности.

Представьте, что мы сооружаем шар, наслаивая последовательно друг на друга сферические слои бесконечно малой толщины. На каждой стадии процесса мы собираем небольшое количество электричества и размещаем его тонким слоем от  $r$  до  $r+dr$ . Мы продолжаем процесс этот до тех пор, пока не доберемся до заданного радиуса  $a$  (фиг. 8.2). Если  $Q_r$  — это заряд шара в тот момент, когда шар доведен до радиуса  $r$ , то работа, требуемая для доставки на шар заряда  $dQ$ , равна

$$dU = \frac{Q_r dQ}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (8.4)$$

Фиг. 8.2. Энергию однородно заряженного шара можно рассчитать, вообразив, что его слепили, последовательно наслаивая друг на друга сферические слои.



Если плотность заряда внутри шара есть  $\rho$ , то заряд  $Q_r$  равен

$$Q_r = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3,$$

а заряд  $dQ$  равен

$$dQ = \rho \cdot 4\pi r^2 dr.$$

Уравнение (8.4) превращается в

$$dU = \frac{4\pi\rho^2 r^4 dr}{3\epsilon_0}. \quad (8.5)$$

Полная энергия, требуемая на то, чтобы накопить полный шар зарядов, равна интегралу по  $dU$  от  $r=0$  до  $r=a$ , т. е.

$$U = \frac{4\pi\rho^2 a^5}{15\epsilon_0}, \quad (8.6)$$

а если мы желаем выразить результат через полный заряд  $Q$  шара, то

$$U = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}. \quad (8.7)$$

Энергия пропорциональна квадрату полного заряда и обратно пропорциональна радиусу. Можно представить (8.7) и так: среднее значение  $(1/r_{ij})$  по всем парам точек внутри шара равно  $\frac{6}{5a}$ .

## § 2. Энергия конденсатора. Силы, действующие на заряженные проводники

Рассмотрим теперь энергию, требуемую на то, чтоб зарядить конденсатор. Если заряд  $Q$  был снят с одной обкладки конденсатора и перенесен на другую, то между обкладками возникает



разность потенциалов, равная

$$V = \frac{Q}{C}, \quad (8.8)$$

где  $C$  — емкость конденсатора. Сколько работы затрачено на зарядку конденсатора? Поступая точно так же, как мы поступали с шаром, вообразим, что конденсатор уже заряжен переносом заряда с одной обкладки на другую маленькими порциями  $dQ$ . Работа, требуемая для переноса заряда  $dQ$ , равна

$$dU = VdQ.$$

Взяв  $V$  из (8.8), найдем

$$dU = \frac{QdQ}{C}.$$

Или, интегрируя от  $Q=0$  до конечного заряда  $Q$ , получаем

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \quad (8.9)$$

Эту энергию можно также записать в виде

$$U = \frac{1}{2} CV^2. \quad (8.10)$$

Вспоминая, что емкость проводящей сферы (по отношению к бесконечности) равна

$$C_{\text{сфера}} = 4\pi\epsilon_0 a,$$

мы немедленно получим из уравнения (8.9) энергию заряженной сферы

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}. \quad (8.11)$$

Это выражение, конечно, относится также и к энергии тонкого сферического слоя с полным зарядом  $Q$ ; получается  $5/6$  энергии однородно заряженного шара [уравнение (8.7)].

Посмотрим, как применяется понятие электростатической энергии. Рассмотрим два вопроса. Какова сила, действующая между обкладками конденсатора? Какой вращательный (крутящий) момент вокруг некоторой оси испытывает заряженный проводник в присутствии другого проводника с противоположным зарядом? На такие вопросы легко ответить, пользуясь нашим выражением (8.9) для электростатической энергии конденсатора и принципом виртуальной работы (см. вып. 1, гл. 4, 13 и 14).

Применим этот метод для определения силы, действующей между двумя обкладками плоского конденсатора. Если мы представим, что промежуток между пластинами расширился на небольшую величину  $\Delta z$ , то тогда механическая работа, производимая извне для того, чтобы раздвинуть обкладки, была бы равна

$$\Delta W = F \Delta z, \quad (8.12)$$

где  $F$  — сила, действующая между обкладками. Эта работа обязана быть равной изменению электростатической энергии конденсатора, если только заряд конденсатора не изменился.

Согласно уравнению (8.9), энергия конденсатора первоначально была равна

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$$

Изменение в энергии (если мы не допускаем изменения величины заряда) тогда равно

$$\Delta U = \frac{1}{2} Q^2 \Delta \left( \frac{1}{C} \right). \quad (8.13)$$

Приравнивая (8.12) и (8.13), получаем

$$F \Delta z = \frac{Q^2}{2} \Delta \left( \frac{1}{C} \right), \quad (8.14)$$

что может также быть записано в виде

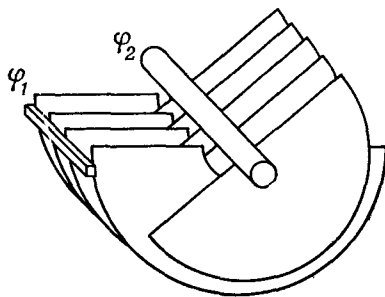
$$F \Delta z = - \frac{Q^2}{2C^2} \Delta C. \quad (8.15)$$

Ясно, эта сила здесь возникает от притяжения зарядов на обкладках; мы видим, однако, что заботиться о том, как там они распределены, нам нечего; единственное, что нам нужно, — это учесть емкость  $C$ .

Легко понять, как обобщить эту идею на проводники произвольной формы и на прочие составляющие силы. Заменим в уравнении (8.14)  $F$  той составляющей, которая нас интересует, а  $\Delta z$  — малым смещением в соответствующем направлении. Или если у нас есть электрод, насаженный на какую-то ось, и мы хотим знать вращательный момент  $\tau$ , то запишем виртуальную работу в виде

$$\Delta W = \tau \Delta \theta,$$

где  $\Delta \theta$  — небольшой угловой поворот. Конечно, теперь  $\Delta(1/C)$  должно быть изменением  $1/C$ , отвечающим повороту на  $\Delta \theta$ .



Ф и г. 8.3. Чему равен вращательный момент, действующий на переменный конденсатор?

Таким способом мы можем определить вращательный момент, действующий на подвижные пластины переменного конденсатора, показанного на фиг. 8.3.

Вернемся к частному случаю плоского конденсатора; мы можем взять формулу для емкости, выведенную в гл. 6:

$$\frac{1}{C} = \frac{d}{\epsilon_0 A}, \quad (8.16)$$

где  $A$  — площадь каждой обкладки. Если промежуток увеличится на  $\Delta z$ , то

$$\Delta \left( \frac{1}{C} \right) = \frac{\Delta z}{\epsilon_0 A}.$$

Из (8.14) тогда следует, что сила притяжения между двумя обкладками равна

$$F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A}. \quad (8.17)$$

Взглянем на уравнение (8.17) повнимательнее и подумаем, нельзя ли сказать, как возникает эта сила. Если заряд на одной из обкладок мы запишем в виде

$$Q = \sigma A,$$

то (8.17) можно будет переписать так:

$$F = \frac{1}{2} Q \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Или поскольку поле между пластинами равно

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

то

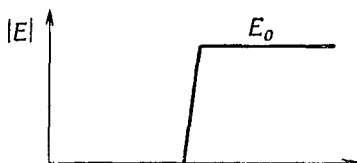
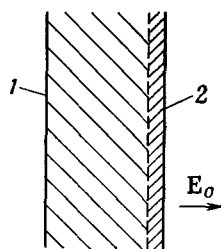
$$F = \frac{1}{2} Q E_0. \quad (8.18)$$

Можно было сразу догадаться, что сила, действующая на одну из пластин, будет равна заряду  $Q$  этой пластины, умноженному на поле, действующее на заряд. Но что удивляет, так это множитель  $1/2$ . Дело в том, что  $E_0$  — это не то поле, которое действует на заряды. Если вообразить, что заряд на поверхности пластины занимает какой-то тонкий слой (фиг. 8.4), то поле будет меняться от нуля на внутренней границе слоя до  $E_0$  в пространстве снаружи пластин. Среднее поле, действующее на поверхностные заряды, равно  $E_0/2$ . Вот отчего в (8.18) стоит множитель  $1/2$ .

Вы должны обратить внимание на то, что, рассчитывая виртуальную работу, мы предположили, что заряд конденсатора постоянен, что конденсатор не был электрически связан с другими предметами и полный заряд не мог изменяться.

Ф и г. 8.4. Поле у поверхности проводника меняется от нуля до  $E_0 = \sigma/\epsilon_0$ , когда пересечен слой поверхностного заряда.

1 — проводящая пластина; 2 — слой поверхностного заряда.



А теперь пусть мы предположили, что при виртуальных перемещениях конденсатор поддерживается при постоянной разности потенциалов. Тогда мы должны были бы взять

$$U = \frac{1}{2} CV^2,$$

и вместо (8.15) мы бы имели

$$F \Delta z = \frac{1}{2} V^2 \Delta C,$$

что приводит к силе, равной по величине той, что была получена в уравнении (8.15) (так как  $V = Q/C$ ), но с противоположным знаком!

Конечно, сила, действующая между пластинами конденсатора, не меняет свой знак, когда мы отсоединяем конденсатор от источника электричества. Кроме того, мы знаем, что две пластины с разноименными электрическими зарядами должны притягиваться. Принцип виртуальной работы во втором случае был применен неправильно, мы не приняли во внимание виртуальную работу, производимую источником, заряжающим конденсатор. Это значит, что для того, чтобы удержать потенциал при постоянном значении  $V$ , когда меняется емкость, источник электричества должен снабдить конденсатор зарядом  $V \Delta C$ . Но этот заряд поступает при потенциале  $V$ , так что работа, выполняемая электрической системой, удерживающей заряд постоянным, равна  $V^2 \Delta C$ . Механическая работа  $F \Delta z$  плюс эта электрическая работа  $V^2 \Delta C$  вместе приводят к изменению полной энергии конденсатора на  $\frac{1}{2} V^2 \Delta C$ . Поэтому на механическую работу, как и прежде, приходится  $F \Delta z = -\frac{1}{2} V^2 \Delta C$ .

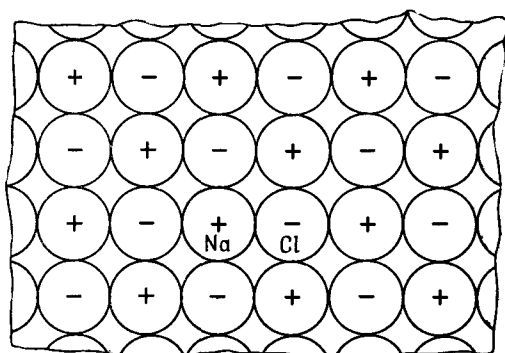
### § 3. Электростатическая энергия ионного кристалла

Рассмотрим теперь применение понятия электростатической энергии в атомной физике. Мы не можем запросто измерять силы, действующие между атомами, но часто нас интересует разница в энергиях двух расстановок атомов (к примеру, энергия химических изменений). Так как атомные силы в основе своей — это силы электрические, то и химическая энергия в главной своей части — это просто электростатическая энергия.

Рассмотрим, например, электростатическую энергию ионной решетки. Ионный кристалл, такой, как NaCl, состоит из положительных и отрицательных ионов, которые можно считать жесткими сферами. Они электрически притягиваются, пока не соприкоснутся; затем вступает в дело сила отталкивания, которая быстро возрастает, если мы попытаемся сблизить их теснее.

Для первоначального приближения вообразим себе совокупность жестких сфер, представляющих атомы в кристалле соли. Строение такой решетки было определено с помощью дифракции рентгеновских лучей. Эта решетка кубическая — что-то вроде трехмерной шахматной доски. Сечение ее изображено на фиг. 8.5. Промежуток между ионами  $2,81 \text{ \AA}$  (или  $2,81 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ ).

Если наше представление о системе правильно, мы должны уметь проверить его, задав следующий вопрос: сколько понадобится энергии, чтобы разбросать эти ионы, т. е. полностью разделить кристалл на ионы? Эта энергия должна быть равна теплоте испарения соли плюс энергия, требуемая для диссоциации молекул на ионы. Полная энергия разделения NaCl на ионы, как следует из опыта, равна  $7,92 \text{ эв}$  на молекулу. Пользуясь



$\longleftrightarrow$   
 $2,81 \text{ \AA}$

Ф и г. 8.5. Поперечный разрез кристалла соли в масштабе нескольких атомов.

В двух перпендикулярных к плоскости рисунка сечениях будет такое же шахматное расположение ионов Na и Cl (см. вып. 1, фиг. 1.7).

коэффициентом перевода

$$1 \text{ эв} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ дж}$$

и числом Авогадро (количество молекул в грамм-молекуле)

$$N_0 = 6,02 \cdot 10^{23},$$

можно представить энергию испарения в виде

$$W = 7,64 \cdot 10^9 \text{ дж/моль.}$$

Излюбленная единица энергии, которой пользуются физико-химики, — килокалория, равная 4190 дж; так что 1 эв на молекулу — это все равно что 23 ккал/моль. Химик сказал бы поэтому, что энергия диссоциации NaCl равна

$$W = 183 \text{ ккал/моль.}$$

Можем ли мы получить эту химическую энергию теоретически, подсчитывая, сколько работы понадобится для того, чтобы распорошить кристалл? По нашей теории она равна сумме потенциальных энергий всех пар ионов. Проще всего составить себе представление об этой энергии, выбрав какой-то один ион и подсчитав его потенциальную энергию по отношению ко всем прочим ионам. Это даст *удвоенную* энергию на один ион, потому что энергия принадлежит *парам* зарядов. Если нам нужна энергия, связанная с одним каким-то ионом, то мы должны взять полусумму. Но на самом деле нам нужна энергия *на молекулу*, содержащую два иона, так что вычисляемая нами сумма прямо даст нам энергию на молекулу.

Энергия иона по отношению к его ближайшему соседу равна  $-e^2/a$ , где  $e^2 = q_e^2/4\pi\epsilon_0$ , а  $a$  — промежуток между центрами ионов. (Мы рассматриваем одновалентные ионы.) Эта энергия равна  $-5,12$  эв; мы уже видим, что ответ получается правильного порядка величины. Но нам еще предстоит подсчитать бесконечный ряд членов.

Начнем со сложения энергий всех ионов, лежащих по прямой. Считая ион, отмеченный на фиг. 8.5 значком Na, нашим выделенным ионом, сперва рассмотрим те ионы, которые лежат на одной с ним горизонтали. Там есть два ближайших к нему иона хлора с отрицательными зарядами, на расстоянии  $a$  от Na каждый. Затем идут два положительных иона на расстояниях  $2a$  и т. д. Обозначая эту сумму энергий  $U_1$ , напишем

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{e^2}{a} \left( -\frac{2}{1} + \frac{2}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \dots \right) = \\ &= -\frac{2e^2}{a} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right). \end{aligned} \quad (8.19)$$

Ряд сходится медленно, так что численно его оценить трудно,

но известно, что он равен  $\ln 2$ . Значит,

$$U_1 = -\frac{2e^2}{a} \ln 2 = -1,386 \frac{e^2}{a}. \quad (8.20)$$

Теперь перейдем к ближайшей линии, примыкающей сверху. Ближайший ион отрицателен и находится на расстоянии  $a$ . Затем стоят два положительных на расстояниях  $\sqrt{2}a$ . Следующая пара — на расстоянии  $\sqrt{5}a$ , следующая — на  $\sqrt{10}a$  и т. д. Для всей линии получается ряд

$$\frac{e^2}{a} \left( -\frac{1}{1} + \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{10}} \dots \right). \quad (8.21)$$

Таких линий *четыре*: выше, ниже, спереди и сзади. Затем имеются четыре линии, которые являются ближайшими по диагонали, и т. д. и т. д.

Если вы терпеливо произведете подсчеты для всех линий и затем все сложите, то увидите, что итог таков:

$$U = -1,747 \frac{e^2}{a}.$$

Это число немного больше того, что было получено в (8.20) для первой линии. Учитывая, что  $e^2/a = -5,12$  эв, мы получим

$$U = -8,94 \text{ эв.}$$

Наш ответ приблизительно на 10% больше экспериментальной наблюдаемой энергии. Он показывает, что наше представление о том, что вся решетка скрепляется электрическими кулоновскими силами, в основе своей правильно. Мы впервые получили специфическое свойство макроскопического вещества из наших познаний в атомной физике. Со временем мы добьемся гораздо большего. Область науки, пробующая понять поведение больших масс вещества на языке законов атомного поведения, называется *физикой твердого тела*.

А как же с ошибкой в наших расчетах? Почему они не до конца верны? Мы не учли отталкивание между ионами на близких расстояниях. Это ведь не совершенно жесткие сферы, так что, сблизясь, они немного сплющиваются. Но они не очень мягкие и сплющиваются самую чуточку. Все же какая-то энергия уходит на эту деформацию, и вот, когда ионы разлетаются эта энергия высвобождается. Энергия, которая на самом деле нужна для того, чтобы развести все ионы врозь, чуть меньше той, которую мы вычислили; отталкивание помогает преодолеть электростатическое притяжение.

А есть ли возможность как-то прикинуть долю этого отталкивания? Да, если мы знаем закон силы отталкивания. Мы еще

не умеем пока анализировать детали механизма отталкивания, но некоторое представление о его характеристиках мы можем получить из макроскопических измерений. Измеряя *сжимаемость* кристалла как целого, можно получить количественное представление о законе отталкивания между ионами, а отсюда — о его вкладе в энергию. Таким путем было обнаружено, что вклад этот должен составлять  $1/9,4$  часть вклада от электростатического притяжения и иметь, естественно, противоположный знак. Если этот вклад мы вычтем из чисто электростатической энергии, то получим для энергии диссоциации на молекулу число  $7,99 \text{ эв}$ . Это намного ближе к наблюдаемому результату  $7,92 \text{ эв}$ , но все еще не находится в совершенном согласии. Есть еще одна вещь, которую мы не учли: мы не сделали никаких допущений о кинетической энергии колебаний кристалла. Если сделать поправку на этот эффект, то сразу возникнет очень хорошее согласие с экспериментальной величиной. Значит, наши представления правильны: главный вклад в энергию кристалла, такого, как NaCl, является электростатическим.

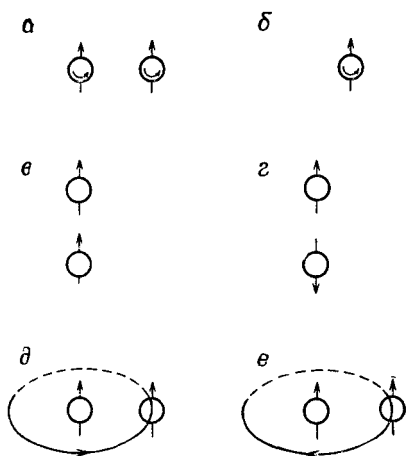
#### § 4. Электростатическая энергия ядра

Обратимся теперь к другому примеру электростатической энергии в атомной физике — к электростатической энергии атомного ядра. Прежде чем заняться этим вопросом, мы должны рассмотреть некоторые свойства тех основных сил (называемых ядерными силами), которые скрепляют между собой протоны и нейтроны в ядре. Первое время после открытия ядер — и протонов с нейтронами, которые их составляют, — надеялись, что закон сильной, неэлектрической части силы, действующей, например, между одним протоном и другим, будет иметь какой-нибудь простой вид, подобный, скажем, закону обратных квадратов в электричестве. Если бы удалось определить этот закон сил и, кроме того, сил, действующих между протоном и нейтроном и между нейтроном и нейтроном, то тогда можно было бы теоретически описать все поведение этих частиц в ядрах. Поэтому начала разворачиваться большая программа изучения рассеяния протонов в надежде отыскать закон сил, действующих между ними; но после тридцатилетних усилий ничего простого не возникло. Накопился заметный багаж знаний о силах, действующих между протоном и протоном, но при этом обнаружилось, что эти силы сложны настолько, насколько возможно себе представить.

Под словами «сложны настолько, насколько возможно» мы понимаем, что силы зависят от всех величин, от каких они могли бы зависеть.

Во-первых, сила не простая функция расстояния между протонами. На больших расстояниях существует притяжение,





Ф и г. 8.6. Сила взаимодействия двух протонов зависит от всех мыслимых параметров.

на меньших — отталкивание. Зависимость от расстояния — это некоторая сложная функция, все еще не очень хорошо известная. Во-вторых, сила зависит от ориентаций спина протонов. У протонов есть спин, а два взаимодействующих протона могут вращаться либо в одном и том же, либо в противоположных направлениях. И сила, когда спины параллельны, отличается от того, что бывает, когда спины антипараллельны (фиг. 8.6, а и б). Разница велика; пренебречь ею нельзя.

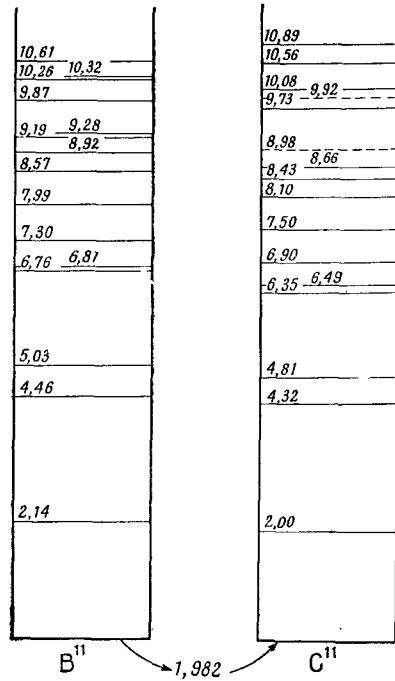
В-третьих, сила заметно изменяется, смотря по тому, параллелен или нет промежуток между протонами их спинам (фиг. 8.6, в и г) или же он им перпендикулярен (фиг. 8.6, а и б).

В-четвертых, сила, как и в магнетизме, зависит (и даже значительно сильнее) от скорости протонов. И эта скоростная зависимость силы отнюдь не релятивистский эффект; она велика даже тогда, когда скорости намного меньше скорости света. Более того, эта часть силы зависит, кроме величины скорости, и от других вещей. Скажем, когда протон движется недалеко от другого протона, сила меняется от того, совпадает ли орбитальное движение по направлению со спиновым вращением (фиг. 8.6, д), или эти два направления противоположны (фиг. 8.6. е). Это то, что называется «спин-орбитальной» частью силы.

Не в меньшей степени сложный характер имеют силы взаимодействия протона с нейтроном и нейтрона с нейтроном. До сего дня мы не знаем механизма, определяющего эти силы, не знаем никакого простого способа их понять.

Впрочем, в одном важном отношении ядерные силы все же проще, чем могли бы быть. Ядерные силы, действующие между двумя нейтронами, совпадают с силами, действующими между протоном и нейтроном, и с силами, действующими между двумя протонами! Если в некоторой системе, в которой имеются ядра, мы заменим нейтрон протоном (и наоборот), то ядерные взаимодействия не изменятся! «Фундаментальная причина» этого

Ф и г. 8.7. Энергетические уровни ядер  $B^{11}$  и  $C^{11}$  (энергии в Мэв). Основное состояние  $C^{11}$  на 1,982 Мэв выше, чем то же состояние  $B^{11}$ .



равенства нам не известна, но это проявление важного принципа, который может быть расширен на законы взаимодействия других сильно взаимодействующих частиц, таких, как  $\pi$ -мезоны и «странные» частицы.

Этот факт прекрасно иллюстрируется расположением уровней энергии в похожих ядрах. Рассмотрим такое ядро, как  $B^{11}$  (бор-одиннадцать), состоящее из пяти протонов и шести нейтронов. В ядре эти одиннадцать частиц взаимодействуют друг с другом, совершая какой-то замысловатый танец. Но существует такое сочетание всех возможных взаимодействий, которое обладает энергией, наименьшей из возможных; это нормальное состояние ядра, и его называют *основным*. Если ядро возмутить (скажем, стукнув по нему высокоэнергичным протоном или еще какой-то частицей), то оно может перейти в любое число других конфигураций, называемых *возбужденными состояниями*, каждое из которых будет обладать своей характеристической энергией, которая выше энергии основного состояния. В исследованиях по ядерной физике, скажем проводимых с генератором Ван-де-Граафа, энергии и другие свойства этих возбужденных состояний определяются экспериментально. Энергии пятнадцати наименьших из известных возбужденных состояний  $B^{11}$  показаны на одномерной схеме в левой половине фиг. 8.7. Горизонталь внизу представляет основное состояние. Первое возбужденное состояние имеет энергию на 2,14 Мэв выше, чем основное, следующее — на 4,46 Мэв выше, чем основное, и т. д. Исследователи пытаются найти объяснение этой довольно запутанной картины уровней энергии; пока, однако, нет еще полной общей теории таких ядерных уровней энергии.

Если в  $B^{11}$  заменить один из нейтронов протоном, получится ядро изотопа углерода  $C^{11}$ . Энергии шестнадцати низших возбужденных состояний ядра  $C^{11}$  тоже были измерены; они показаны на фиг. 8.7 справа. (Штрихами проведены уровни, для которых экспериментальная информация находится под вопросом.)

Глядя на фиг. 8.7, мы замечаем поразительное подобие между картинками уровней энергии обоих ядер. Первые возбужденные состояния находятся примерно на  $2 \text{ Мэв}$  выше основного. Затем имеется широкая щель шириной  $2,3 \text{ Мэв}$ , отделяющая второе возбужденное состояние от первого, затем небольшой скачок на  $0,5 \text{ Мэв}$  до третьего уровня. Потом опять большой скачок от четвертого до пятого уровня, но между пятым и шестым узкий промежуток в  $0,1 \text{ Мэв}$ . И так далее. Примерно на десятом уровне соответствие, видимо, пропадает, но его все еще можно обнаружить, если пометить уровни другими характеристиками, скажем их моментами количества движения, и тем, каким способом они теряют свой избыток энергии.

Впечатляющее подобие картины уровней энергии ядер  $B^{11}$  и  $C^{11}$  — отнюдь не просто совпадение. Оно скрывает за собой некоторый физический закон. И действительно, оно показывает, что даже в сложных условиях ядра замена нейтрона протоном мало что изменит. Это может значить лишь то, что нейтрон-нейтронные и протон-протонные силы должны быть почти одинаковыми. Только тогда мы могли бы ожидать, что ядерные конфигурации из пяти протонов и шести нейтронов совпадут с комбинацией «пять нейтронов — шесть протонов».

Заметьте, что свойства этих ядер ничего не говорят нам о нейтрон-протонных силах; число нейтрон-протонных комбинаций в обоих ядрах одинаково. Но если мы сравним два других ядра, таких, как  $C^{14}$  с его шестью протонами и восемью нейтронами и  $N^{14}$ , в котором и тех, и других по семи штук, то выявим в энергетических уровнях такое же соответствие. Можно вывести заключение, что  $p-p$ -,  $n-n$ - и  $p-n$ -силы совпадают между собой во всех деталях. В законах ядерных сил возник неожиданный принцип. Хотя силы, действующие между каждой парой ядерных частиц, очень запутаны, но силы взаимодействия для любой из трех мыслимых пар одни и те же.

Однако есть и какие-то слабые отличия. Точного соответствия уровней нет; кроме того, основное состояние  $C^{11}$  обладает абсолютной энергией (массой), которая на  $1,982 \text{ Мэв}$  выше основного состояния  $B^{11}$ . Все прочие уровни тоже по абсолютной величине энергии выше на такое же число. Так что силы не совсем точно равны. Но мы и так хорошо знаем, что *полная* величина сил не совсем одинакова; между двумя протонами действуют *электрические* силы, ведь каждый из них заряжен положительно, а между нейтронами таких сил нет. Может быть, различие между  $B^{11}$  и  $C^{11}$  объясняется тем фактом, что в этих двух случаях различны элек-

трические взаимодействия протонов? А может, и остающаяся минимальная разница в уровнях вызывается электрическими эффектами? Раз уж ядерные силы так сильны по сравнению с электрическими, то электрические эффекты могли бы только слегка возмутить энергии уровней.

Чтобы проверить это представление или, лучше сказать, чтобы выяснить, к каким следствиям оно приведет, мы сперва рассмотрим разницу в энергиях основных состояний обоих ядер. Чтобы модель была совсем простой, положим, что ядра — это шары радиуса  $r$  (который нужно определить), содержащие  $Z$  протонов. Если считать ядро шаром с равномерно распределенным зарядом, то можно ожидать, что электростатическая энергия [из уравнения (8.7)] окажется равной

$$U = \frac{3}{5} \frac{(Zq_e)^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (8.22)$$

где  $q_e$  — элементарный заряд протона. Из-за того, что  $Z$  равно для  $V^{11}$  пяти, а для  $C^{11}$  шести, электростатические энергии будут различаться.

Но при таком малом количестве протонов уравнение (8.22) не совсем правильно. Если мы подсчитаем электрическую энергию взаимодействия всех пар протонов, рассматриваемых как точки, примерно однородно распределенные по шару, то увидим, что величину  $Z^2$  в (8.22) придется заменить на  $Z(Z-1)$ , так что энергия будет равна

$$U = \frac{3}{5} \frac{Z(Z-1)q_e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{3}{5} \frac{Z(Z-1)e^2}{r}. \quad (8.23)$$

Если известен радиус ядра  $r$ , мы можем воспользоваться выражением (8.23), чтобы определить разницу электростатических энергий ядер  $V^{11}$  и  $C^{11}$ . Но проделаем обратное: из наблюдаемой разницы в энергиях вычислим радиус, считая, что вся существующая разница по происхождению — электростатическая.

В общем это не совсем верно. Разность энергий  $1,982 \text{ Мэв}$  двух основных состояний  $V^{11}$  и  $C^{11}$  включает энергии покоя, т. е. энергии  $mc^2$  всех частиц. Переходя от  $V^{11}$  к  $C^{11}$ , мы замещаем нейтрон протоном, масса которого чуть меньше. Так что часть разности энергий — это разница в массах покоя нейтрона и протона, составляющая  $0,784 \text{ Мэв}$ . Та разность, которую надо сравнивать с электростатической энергией, тем самым больше  $1,982 \text{ Мэв}$ ; она равна

$$1,982 + 0,784 = 2,766 \text{ Мэв}.$$

Подставив эту энергию в (8.23), для радиуса  $V^{11}$  или  $C^{11}$  получим

$$r = 3,12 \cdot 10^{-13} \text{ см}. \quad (8.24)$$

Имеет ли это число какой-нибудь смысл? Чтобы это проверить, сравним его с другими определениями радиусов этих ядер.

Например, можно определить радиус ядра иначе, наблюдая, как рассеивает оно быстрые частицы. В ходе этих измерений выяснилось, что *плотность* вещества во всех ядрах примерно одинакова, т. е. их объемы пропорциональны числу содержащихся в них частиц. Если через  $A$  обозначить число протонов и нейтронов в ядре (число, очень близко пропорциональное его массе), то оказывается, что радиус ядра дается выражением

$$r = A^{1/3} r_0, \quad (8.25)$$

где

$$r_0 = 1,2 \cdot 10^{-13} \text{ см.} \quad (8.26)$$

Из этих измерений мы получим, что радиус ядра  $B^{11}$  (или  $C^{11}$ ) должен быть примерно равен

$$r = (1,2 \cdot 10^{-13}) (11)^{1/3} = 2,7 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

Сравнив это с выражением (8.24), мы увидим, что наши предположения об электростатическом происхождении разницы в энергиях  $B^{11}$  и  $C^{11}$  не столь неверны; расхождение едва ли достигает 15% (а это не так уж скверно для первого расчета по теории ядра!).

Причина расхождения, по всей вероятности, состоит в следующем. Согласно нашему нынешнему пониманию ядер, четное количество ядерных частиц (в случае  $B^{11}$  пять нейтронов с пятью протонами) образует своего рода *оболочку*; когда к этой оболочке добавляется еще одна частица, то вместо того, чтобы поглотиться, она начинает обращаться вокруг оболочки. Если это так, то для добавочного протона нужно взять другое значение электростатической энергии. Нужно считать, что избыток энергии  $C^{11}$  над  $B^{11}$  как раз равен

$$\frac{Z-1}{4\pi\epsilon_0 a} q_e^2,$$

т. е. равен энергии, необходимой для того, чтобы снаружи оболочки появился еще один протон. Это число составляет  $5/6$  величины, предсказываемой уравнением (8.23), так что новое значение радиуса будет равно  $5/6$  от (8.24). Оно намного лучше согласуется с прямыми измерениями.

Согласие в цифрах приводит к двум выводам. *Первый*: законы электричества, видимо, действуют и на столь малых расстояниях, как  $10^{-13}$  см. *Второй*: мы убедились в замечательном совпадении — неэлектрическая часть сил взаимодействия протона с протоном, нейтрона с нейтроном и протона с нейтроном одинакова.

## § 5. Энергия в электростатическом поле

Рассмотрим теперь другие способы подсчета электростатической энергии. Все они могут быть получены из основного соотношения (8.3) суммированием (по всем парам) взаимных энергий

каждой пары зарядов. Прежде всего мы хотим написать выражение для энергии распределения зарядов. Как обычно, считаем, что каждый элемент объема  $dV$  содержит в себе элемент заряда  $\rho dV$ . Тогда уравнение (8.3) запишется так:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{Все прост-ранство}} \frac{\rho(1)\rho(2)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} dV_1 dV_2. \quad (8.27)$$

Обратите внимание на появление множителя  $1/2$ . Он возник из-за того, что в двойном интеграле по  $dV_1$  и по  $dV_2$  каждая пара элементов заряда считалась дважды. (Не существует удобной записи интеграла, в которой каждая пара считалась бы только по одному разу.) Затем заметьте, что интеграл по  $dV_2$  в (8.27) — это просто потенциал в точке (1), т. е.

$$\int dV_2 \frac{\rho(2)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} = \varphi(1),$$

так что (8.27) можно записать в виде

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(1) \varphi(1) dV_1.$$

А так как точка (2) при этом вышла, то можно написать просто

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV. \quad (8.28)$$

Это уравнение можно истолковать так. Потенциальная энергия заряда  $\rho dV$  равна произведению этого заряда на потенциал в той же точке. Вся энергия поэтому равна интегралу от  $\rho \varphi dV$ . Но, кроме этого, есть множитель  $1/2$ . Он все еще необходим, потому что энергии считаются дважды. Взаимная энергия двух зарядов равна заряду одного из них на потенциал другого в этой точке. Или заряду другого на потенциал от первого во второй точке. Так что для двух точечных зарядов можно написать

$$U = q_1 \varphi(1) = q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}},$$

или

$$U = q_2 \varphi(2) = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}.$$

Обратите внимание, что это же можно написать и так:

$$U = \frac{1}{2} [q_1 \varphi(1) + q_2 \varphi(2)]. \quad (8.29)$$

Интеграл в (8.28) отвечает сложению обоих слагаемых в скобках выражения (8.29). Вот зачем нужен множитель  $1/2$ .

Интересен и такой вопрос: где размещается электростатическая энергия? Правда, можно в ответ спросить: а не все ли равно?

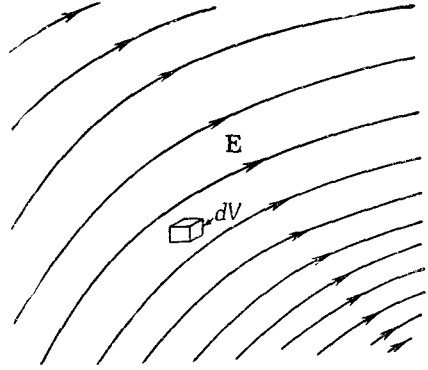
Есть ли смысл у такого вопроса? Если имеется пара взаимодействующих зарядов, то их сочетание обладает некоторой энергией. Неужели нужно непременно уточнять, что энергия сосредоточена на этом заряде, или на том, или на обоих сразу, или между ними? Все эти вопросы лишены смысла, потому что мы знаем, что на самом деле сохраняется только полная, суммарная энергия. Представление о том, что энергия сосредоточена *где-то*, не так уж необходимо.

Ну а все же предположим, что в том, что энергия всегда сосредоточена в каком-то определенном месте (подобно тепловой энергии), действительно *смысл есть*. Тогда мы могли бы наш принцип сохранения энергии *расширить*, соединив его с идеей о том, что если в каком-то объеме энергия меняется, то это изменение можно учесть, наблюдая приток или отток энергии из объема. Вы ведь понимаете, что наше первоначальное утверждение о сохранении энергии по-прежнему будет превосходно выполняться, если какая-то энергия пропадет в одном месте и возникнет где-то далеко в другом, а в промежутке между этими местами ничего не случится (ничего — это значит не случится каких-либо явлений особого рода). Поэтому мы можем перейти теперь к расширению наших идей о сохранении энергии. Назовем это расширение принципом *локального* (местного) сохранения энергии. Такой принцип провозглашал бы, что энергия внутри любого данного объема изменяется лишь на количество, равное притоку (или убыли) энергии в объем (или из него). И действительно, такое локальное сохранение энергии вполне возможно. Если это так, то в нашем распоряжении будет куда более детальный закон, чем простое утверждение о сохранении полной энергии. И, как оказывается, в природе *энергия действительно сохраняется локально, в каждом месте порознь*, и можно написать формулы, показывающие, где энергия сосредоточена и как она перетекает с места на место.

Имеется и *физический* резон в требовании, чтобы мы были в состоянии указать, где именно заключена энергия. По теории тяготения всякая масса есть источник гравитационного притяжения. А по закону  $E=mc^2$  мы также знаем, что масса и энергия вполне равноценны друг другу. Стало быть, всякая энергия является источником силы тяготения. И если б мы не могли узнать, где находится энергия, мы бы не могли знать, где расположена масса. Мы не могли бы сказать, где размещаются источники поля тяготения. И теория тяготения стала бы неполной.

Конечно, если мы ограничимся электростатикой, то способа узнать, где сосредоточена энергия, у нас нет. Но полная система максвелловских уравнений электродинамики снабдит нас несравненно более полной информацией (хотя и тогда, строго говоря, ответ до конца определенным не станет). Подробнее мы этот вопрос рассмотрим позже. А сейчас приведем лишь результат,

Фиг. 8.8. Каждый элемент объема  $dV = dx dy dz$  в электрическом поле содержит в себе энергию  $(\epsilon_0/2) E^2 dV$ .



касающийся частного случая электростатики. Энергия заключена в том пространстве, где имеется электрическое поле. Это, видимо, вполне разумно, потому что известно, что, ускоряясь, заряды излучают электрические поля. И когда свет или радиоволны распространяются от точки к точке, они переносят с собой свою энергию. Но в этих волнах нет зарядов. Так что энергию хотелось бы размещать там, где есть электромагнитное поле, а не там, где есть заряды, создающие это поле. Таким образом, мы описываем энергию не на языке зарядов, а на языке создаваемых ими полей. Действительно, мы можем показать, что уравнение (8.28) численно совпадает с

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (8.30)$$

Эту формулу можно толковать, говоря, что в том месте пространства, где присутствует электрическое поле, сосредоточена и энергия; *плотность* ее (количество энергии в единице объема) равна

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}. \quad (8.31)$$

Эта идея иллюстрируется фиг. 8.8.

Чтобы показать, что уравнение (8.30) согласуется с нашими законами электростатики, начнем с того, что введем в уравнение (8.28) соотношение между  $\rho$  и  $\phi$ , полученное в гл. 6:

$$\rho = -\epsilon_0 \nabla^2 \phi.$$

Получим

$$U = -\frac{\epsilon_0}{2} \int \phi \nabla^2 \phi dV. \quad (8.32)$$

Расписав покомпонентно подынтегральное выражение, мы



увидим, что

$$\begin{aligned} \varphi \nabla^2 \varphi = \varphi \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - \\ &- \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left( \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 = \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) - (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \varphi). \end{aligned} \quad (8.33)$$

А наш интеграл энергий тогда равен

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \varphi) dV - \frac{\varepsilon_0}{2} \int \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) dV.$$

С помощью теоремы Гаусса второй интеграл можно превратить в интеграл по поверхности:

$$\int_{\text{Объем}} \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) dV = \int_{\text{Поверхность}} (\varphi \nabla \varphi) \cdot \mathbf{n} da. \quad (8.34)$$

Этот интеграл мы подсчитаем для того случая, когда поверхность простирается до бесконечности (так что интеграл по объему обращается в интеграл по всему пространству), а все заряды расположены на конечном расстоянии друг от друга. Проще всего это сделать, взяв поверхность сферы огромного радиуса с центром в начале координат. Мы знаем, что вдали от всех зарядов  $\varphi$  изменяется как  $1/R$ , а  $\nabla \varphi$  как  $1/R^2$ . (И даже быстрее, если суммарный заряд нуль.) Площадь же поверхности большой сферы растет только как  $R^2$ , так что интеграл по поверхности убывает по мере возрастания радиуса сферы как  $(1/R)(1/R^2)R^2 = (1/R)$ . Итак, если наше интегрирование захватит собой все пространство ( $R \rightarrow \infty$ ), то поверхностный интеграл обратится в нуль, и мы обнаружим

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\text{Всё пространство}} (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \varphi) dV = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\text{Всё пространство}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (8.35)$$

Мы видим, что существует возможность представить энергию произвольного распределения зарядов в виде интеграла от плотности энергии, сосредоточенной в поле.

## § 6. Энергия точечного заряда

Новое соотношение (8.35) говорит нам, что даже у отдельного точечного заряда  $q$  имеется какая-то электростатическая энергия. Поле в этом случае дается выражением

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

так что плотность энергии на расстоянии  $r$  от заряда равна

$$\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^4}.$$

За элемент объема можно принять сферический слой толщиной  $dr$ , по площади равный  $4\pi r^2$ . Полная энергия будет

$$U = \int_{r=0}^{\infty} \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr = - \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_{r=0}^{r=\infty}. \quad (8.36)$$

Верхний предел  $r=\infty$  не приводит к затруднениям. Но раз заряд точечный, то мы намерены интегрировать до самого нуля ( $r=0$ ), а это означает бесконечность в интеграле. Уравнение (8.35) утверждает, что в поле одного точечного заряда содержится бесконечно много энергии, хотя начали мы с представления о том, что энергия имеется только *между* точечными зарядами. В нашу первоначальную форму для энергии совокупности точечных зарядов (8.3) мы не включили никакой энергии взаимодействия заряда с самим собой. Что же потом случилось? А то, что, переходя в уравнении (8.27) к непрерывному распределению зарядов, мы засчитывали в общую сумму взаимодействия всякого *бесконечно малого* заряда со всеми прочими *бесконечно малыми* зарядами. Тот же учет велся и в уравнении (8.35), так что, когда мы применяем его к *конечному* точечному заряду, мы включаем в интеграл энергию, которая понадобилась бы, чтобы накопить этот заряд из бесконечно малых частей. И действительно, вы могли заметить, что результат, следующий из уравнения (8.36), мы могли бы получить также из выражения (8.11) для энергии заряженного шара, устремив его радиус к нулю.

Мы вынуждены прийти к заключению, что представление о том, будто энергия сосредоточена в поле, не согласуется с предположением о существовании точечных зарядов. Один путь преодоления этой трудности — это говорить, что элементарные заряды (такие, как электрон) на самом деле вовсе не точки, а небольшие зарядовые распределения. Но можно говорить и обратное: неправильность коренится в нашей теории электричества на очень малых расстояниях или в нашем представлении о сохранении энергии в каждом месте порознь. Но каждая такая точка зрения все равно встречается с затруднениями. И их никогда еще не удавалось преодолеть; существуют они и по сей день. Немного позже, когда мы познакомимся с некоторыми дополнительными представлениями, такими, как импульс электромагнитного поля, мы более подробно поговорим об этих основных трудностях в нашем понимании природы.

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО В АТМОСФЕРЕ

§ 1. Градиент электрического потенциала в атмосфере

В обычный день над пустынной равниной или над морем электрический потенциал по мере подъема возрастает с каждым метром примерно на 100 в. В воздухе имеется вертикальное электрическое поле  $E$  величиной 100 в/м. Знак поля отвечает отрицательному заряду земной поверхности. Это означает, что на улице потенциал на уровне вашего носа на 200 в выше, чем потенциал на уровне пятки! Можно, конечно, спросить: «Почему бы не поставить пару электродов на воздухе в метре друг от друга и не использовать эти 100 в для электрического освещения?» А можно и удивиться: «Если действительно между моим носом и моей пяткой имеется напряжение 200 в, то почему же меня не ударяет током, как только я выхожу на улицу?»

Сперва ответим на второй вопрос. Ваше тело — довольно хороший проводник. Когда вы стоите на земле, вы вместе с нею образуете эквипотенциальную поверхность. Обычно эквипотенциальные поверхности параллельны земле (фиг. 9.1, а), но когда на земле оказываетесь вы, то они смещаются, и поле начинает выглядеть примерно так, как показано на фиг. 9.1, б. Так что разность потенциалов между вашей макушкой и пятками почти равна нулю. С земли на вашу голову переходят заряды и изменяют поле вокруг вас. Часть из них разряжается ионами воздуха, но ионный ток очень мал, ведь воздух плохой проводник.

Как же измерить такое поле, раз оно искажается от всего, что в него попадает? Имеется несколько способов. Один способ — расположить изолированный проводник на какой-то высоте над землей и не трогать его до тех пор,

§1. Градиент электрического потенциала в атмосфере

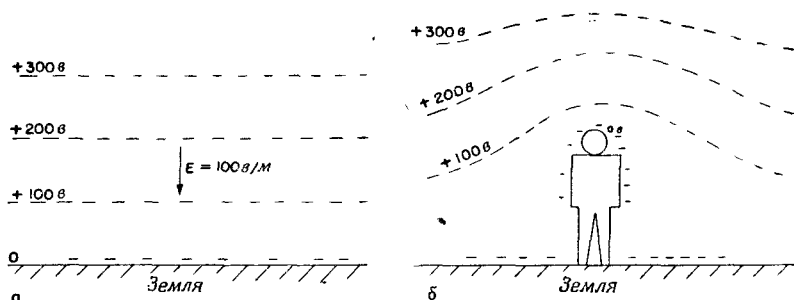
§2. Электрические токи в атмосфере

§3. Происхождение токов в атмосфере

§4. Грозы

§5. Механизм разделения зарядов

§6. Молния



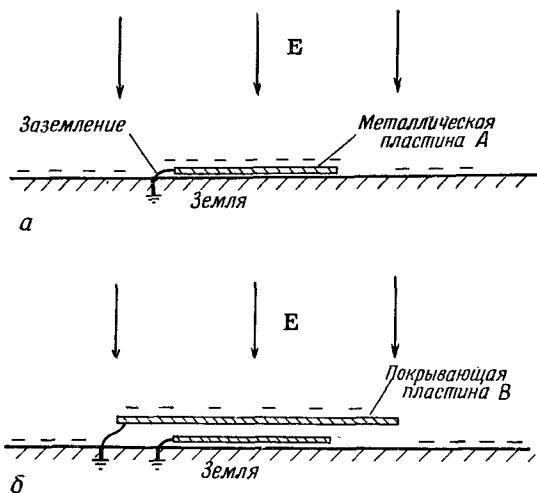
Ф и г. 9.1. Распределение потенциала.

а — над землей; б — около человека, стоящего на ровном месте.

пока он не приобретет потенциал воздуха. Если подождать довольно долго, то даже при очень малой проводимости воздуха заряды стечут с проводника (или натекут на него), уравнив его потенциал с потенциалом воздуха на этом уровне. Тогда мы можем опустить его к земле и измерить изменение его потенциала. Другой более быстрый способ — в качестве проводника взять ведро воды, в котором имеется небольшая течь. Вытекая, вода уносит излишек заряда, и ведро быстро приобретает потенциал воздуха. (Заряды, как вы знаете, растекаются по поверхности, а капли воды — это уходящие «куски поверхности».) Потенциал ведра можно измерить электрометром.

Имеется еще способ прямого измерения *градиента* потенциала. Раз существует электрическое поле, то должен быть и поверхностный заряд на земле ( $\sigma = \epsilon_0 E$ ). Если мы поместим у поверхности земли плоскую металлическую пластинку *A* и заземлим ее, то на ней появятся отрицательные заряды (фиг. 9.2, а). Если затем прикрыть пластинку другой заземленной проводящей крышкой *B*, то заряды появятся уже на крышке *B*, а на пластинке *A* исчезнут. Если мы измерим заряд, перетекающий с пластинки *A* на землю (скажем, с помощью гальванометра в цепи заземляющего провода) в тот момент, когда *A* закрывают крышкой, то мы найдем плотность поверхностного заряда, бывшего на *A*, а значит, и электрическое поле.

Рассмотрев способы измерения электрического поля в атмосфере, продолжим теперь его описание. Измерения прежде всего показывают, что с увеличением высоты поле продолжает существовать, только становится слабее. На высоте примерно 50 км поле уже еле-еле заметно, так что большая часть изменения потенциала (интеграла от *E*) приходится на малые высоты. Вся разность потенциалов между поверхностью земли и верхом атмосферы равна почти 400 000 в.



Ф и г. 9.2. Заземленная металлическая пластинка обладает тем же поверхностным зарядом, что и земля (а); если пластинка прикрыта сверху заземленным проводником, на ней заряда нет (б).

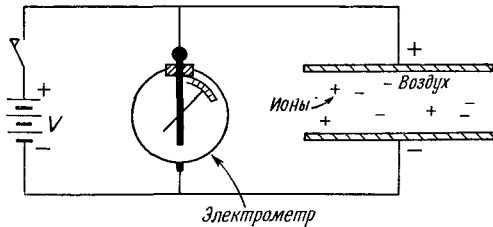
## § 2. Электрические токи в атмосфере

Помимо градиента потенциала, можно измерять и другую величину — ток в атмосфере. Плотность его мала: через каждый квадратный метр, параллельный земной поверхности, проходит около  $10^{-6}$  мка. Воздух, по-видимому, не идеальный изолятор; из-за этой проводимости от неба к земле все время течет слабый ток, вызываемый описанным нами электрическим полем.

Почему атмосфера имеет проводимость? Потому что в ней среди молекул воздуха попадают ионы, например, молекулы кислорода, порой снабженные лишним электроном, а порой лишенные одного из своих. Эти ионы не остаются одиночками; благодаря своему электрическому полю они обычно собирают близ себя другие молекулы. Каждый ион тогда становится маленьким комочком, который вместе с другими такими же комочками дрейфует в поле, медленно двигаясь вверх или вниз, создавая ток, о котором мы говорили.

Откуда же берутся ионы? Сперва думали, что ионы создает радиоактивность Земли. (Было известно, что излучение радиоактивных веществ делает воздух проводящим, ионизуя молекулы воздуха.) Частицы, выходящие из атомного ядра, скажем  $\beta$ -лучи, движутся так быстро, что они вырывают электроны у

Ф и г. 9.3. Измерение проводимости воздуха, вызываемой движением ионов.



атомов, оставляя за собой дорожку из ионов. Такой взгляд, конечно, предполагает, что на больших высотах ионизация должна была бы становиться меньше, потому что вся радиоактивность — все следы радия, урана, натрия и т. д. — находится в земной пыли.

Чтобы проверить эту теорию, физики поднимались на воздушных шарах и измеряли ионизацию (Гесс, в 1912 г.). Выяснилось, что все происходит как раз наоборот — ионизация на единицу объема с высотой *растет*! (Прибор был похож на изображенный на фиг. 9.3. Две пластины периодически заряжались до потенциала  $V$ . Вследствие проводимости воздуха они медленно разряжались; быстрота разрядки измерялась электрометром.) Этот непонятный результат был самым потрясающим открытием во всей истории атмосферного электричества. Открытие было столь важно, что потребовало выделения новой отрасли науки — физики космических лучей. А само атмосферное электричество осталось среди явлений менее удивительных. Ионизация, видимо, порождалась чем-то вне Земли; поиски этого неземного источника привели к открытию космических лучей. Мы не будем сейчас говорить о них и только скажем, что именно они поддерживают снабжение воздуха ионами. Хотя ионы постоянно уносятся, космические частицы, врываясь из мирового пространства, то и дело сотворяют новые ионы.

Чтобы быть точными, мы должны отметить, что, кроме ионов, составленных из молекул, бывают и другие сорта ионов. Мельчайшие комочки почвы, подобно чрезвычайно тонким частичкам пыли, плавают в воздухе и заряжаются. Их иногда называют «ядрами». Скажем, когда в море плещутся волны, мелкие брызги взлетают в воздух. Когда такая капелька испарится, в воздухе остается плавать маленький кристаллик  $\text{NaCl}$ . Затем эти кристаллики могут привлечь к себе заряды и стать ионами; их называют «большими ионами».

Малые ионы, т. е. те, которые создаются космическими лучами, самые подвижные. Из-за того, что они очень малы, они быстро проносятся по воздуху, со скоростью около  $1 \text{ см/сек}$  в поле  $100 \text{ в/м}$ , или  $1 \text{ в/см}$ . Большие и тяжелые ионы движутся куда медленнее. Оказывается, что если «ядер» много, то они перехватывают заряды от малых ионов. Тогда, поскольку «большие

ноны» движутся в поле очень медленно. общая проводимость уменьшается. Поэтому проводимость воздуха весьма переменчива — она очень чувствительна к его «засоренности». Над сушей этого «сора» много больше, чем над морем, ветер подымает с земли пыль, да и человек тоже всячески загрязняет воздух. Нет ничего удивительного в том, что день ото дня, от момента к моменту, от одного места к другому проводимость близ земной поверхности значительно меняется. Электрическое поле в каждой точке над земной поверхностью тоже меняется, потому что ток, текущий сверху вниз, в разных местах примерно одинаков, а изменения проводимости у земной поверхности приводят к вариациям поля.

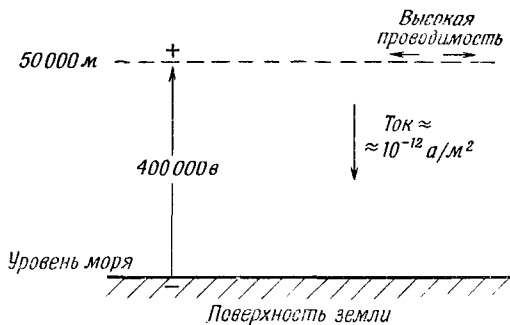
Проводимость воздуха, возникающая в результате дрейфа ионов, также быстро увеличивается с высотой. Происходит это по двум причинам. Во-первых, с высотой растет ионизация воздуха космическими лучами. Во-вторых, по мере падения плотности воздуха увеличивается свободный пробег ионов, так что до столкновения им удается дальше пройти в электрическом поле. В итоге на высоте проводимость резко подскакивает.

Сама плотность электрического тока в воздухе равна всего нескольким микроамперам на квадратный метр, но ведь на Земле очень много таких квадратных метров. Весь электрический ток, достигающий земной поверхности, равен примерно 1800 *a*. Этот ток, конечно, «положителен» — он переносит к Земле положительный заряд. Так что получается ток в 1800 *a* при напряжении 400 000 *v*. Мощность 700 *Мвт*!

При таком сильном токе отрицательный заряд Земли должен был бы вскоре исчезнуть. Фактически понадобилось бы только около получаса, чтобы разрядить всю Землю. Но с момента открытия в атмосфере электрического поля прошло куда больше получаса. Как же оно держится? Чем поддерживается напряжение? И между чем и чем оно? На одном электроде Земля, а что на другом? Таких вопросов множество.

Земля заряжена отрицательно, а потенциал в воздухе положителен. На достаточно большой высоте проводимость так велика, что вероятность изменений напряжения по горизонтали становится равной нулю. Воздух при том масштабе времени, о котором сейчас идет речь, фактически превращается в проводник. Это происходит на высоте около 50 км. Это еще не так высоко, как то, что называют «ионосферой», где имеется очень большое количество ионов, образуемых за счет фотоэффекта от солнечных лучей. Для наших целей можно, обсуждая свойства атмосферного электричества, считать, что на высоте примерно 50 км воздух становится достаточно проводящим и там существует практически проводящая сфера, из которой вытекают вниз токи. Положение дел изображено на фиг. 9.4. Вопрос в том, как держится там положительный заряд. Как он накачи-

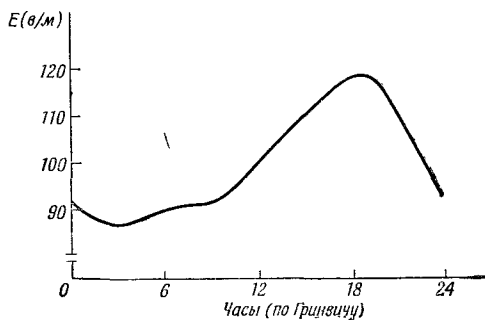
Ф и г. 9.4. Типичные характеристики электрических свойств чистой атмосферы.



вается обратно? Раз он стекает на Землю, то должен же он как-то перекачиваться обратно? Долгое время это было одной из главных загадок атмосферного электричества.

Любая информация на этот счет может дать ключ к загадке или по крайней мере хоть что-то сообщить о ней. Вот одно интересное явление: если мы измеряем ток (а он, как мы знаем, устойчивее, чем градиент потенциала), скажем над морем, и при тщательном наблюдении предосторожностей, очень аккуратно все усредняем и избегаемся от всяких ошибок, то мы обнаруживаем, что остаются все же какие-то суточные вариации. Среднее по многим измерениям над океанами обладает временной вариацией примерно такой, какая показана на фиг. 9.5. Ток меняется приблизительно на  $\pm 15\%$  и достигает наибольшего значения в 7 часов вечера по лондонскому времени. Самое странное здесь то, что, где бы вы ни измеряли ток — в Атлантическом ли океане, в Тихом ли или в Ледовитом, — его часы пик бывают тогда, когда часы в Лондоне показывают 7 вечера! Повсюду во всем мире ток достигает максимума в 19.00 по лондонскому времени, а минимума — в 4.00 по тому же времени. Иными словами, ток зависит от абсолютного земного времени, а не от местного времени в точке наблюдения. В одном отношении

Ф и г. 9.5. Средняя суточная вариация градиента потенциала атмосферы в ясную погоду над океанами.





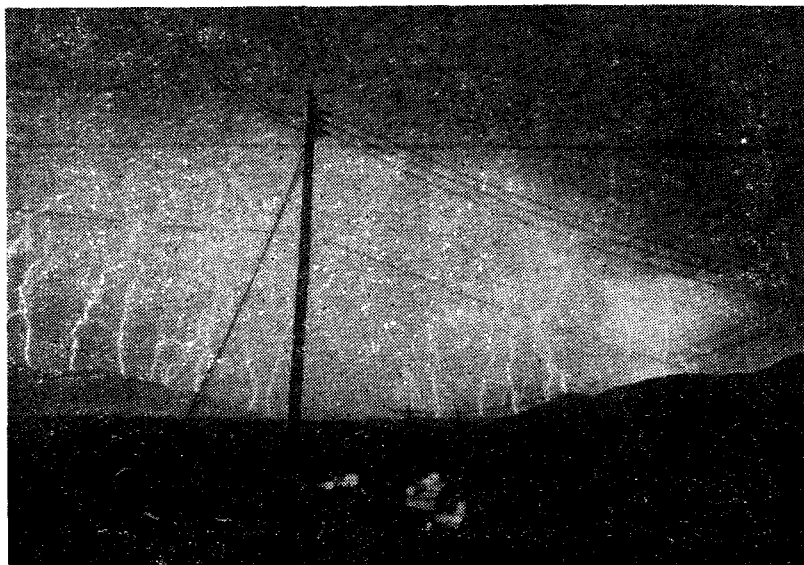
это все же не так уж странно; это вполне сходится с нашим представлением о том, что на самом верху имеется очень большая горизонтальная проводимость, которая и исключает местные изменения разности потенциалов между Землей и верхом. Любые изменения потенциала должны быть всемирными, и так оно и есть. Итак, теперь мы знаем, что напряжение «вверх» с изменением абсолютного земного времени то подымается, то падает на 15%.

### § 3. Происхождение токов в атмосфере

Теперь нужно ответить на вопрос об источнике больших отрицательных токов, которые должны течь от «верха» к земной поверхности, чтобы поддержать ее отрицательный заряд. Где же те батареи, которые это делают? «Батарея» показана на фиг. 9.6. Это гроза или вернее молнии. Оказывается, вспышки молний не «разряжают» той разности потенциалов, о которой мы говорили (и как могло бы на первый взгляд показаться). Молнии *снабжают* Землю *отрицательным* зарядом. Если мы увидели молнию, то можно поспорить на десять против одного, что она привела на Землю большое количество отрицательных зарядов. Именно грозы заряжают Землю в среднем током в 1800 а электричества, которое затем разряжается в районах с хорошей погодой.

На Земле каждые сутки гремит около 300 гроз. Их-то и можно считать теми батареями, которые накачивают электричество в верхние слои атмосферы и сохраняют разность потенциалов. А теперь учтите географию — полуденные грозы в Бразилии, тропические — в Африке и т. д. Ученые сделали оценки того, сколько молний ежесекундно бьет в Землю; нужно ли говорить, что их оценки более или менее согласуются с измерениями разности потенциалов: общая степень грозовой деятельности достигает на всей Земле максимума в 19.00 по лондонскому времени. Однако оценки грозовой деятельности делать очень трудно; сделаны они были только *после* того, как стало известно, что такие вариации должны существовать. Трудность заключается в том, что в океанах, да и повсюду в мире не хватает наблюдений, их мало, чтобы точно установить число гроз. Но те ученые, которые думают, что они «все учли правильно», уверяют, что максимум деятельности приходится на 19.00 по гринвичскому среднему времени.

Чтобы понять, как работают эти батареи, попробуем разобраться в грозе поглубже. Что происходит внутри грозы? Опишем грозу так, как ее сейчас представляют. Когда мы вникаем в необыкновенное явление природы (а не в эти столь изящно нами разобранные идеальные сферы из идеальных проводников, помещенных внутри других сфер), мы открываем, что не так уж

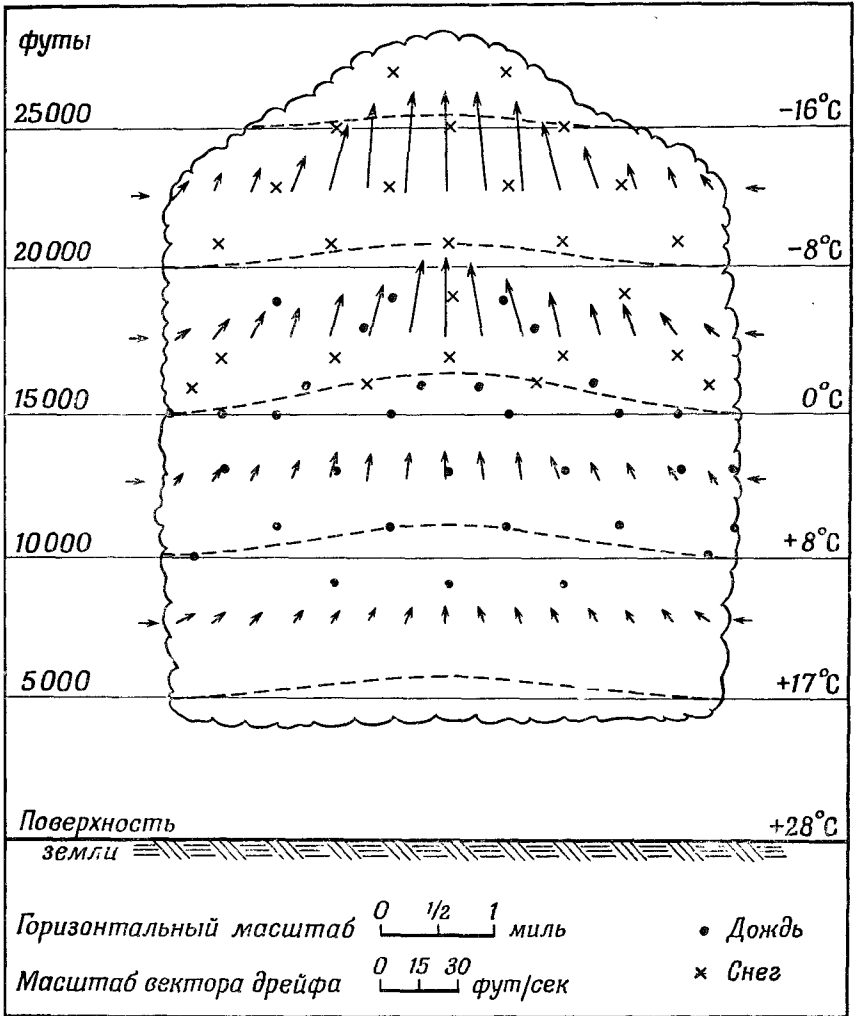


*Ф и г. 9.6. Механизм, создающий электрическое поле атмосферы.*

много знаем. А это все очень интересно. Гроза не оставляет человека равнодушным: она пугает его или восхищает; в общем возбуждает в нем какие-то чувства. А там, где в природе появляются чувства, обычно сразу всплывает и сложность природы и ее таинственность. Нет никакой возможности точно описать, как происходит гроза, мы пока мало об этом знаем. Но мы все же попробуем немножко рассказать о том, что происходит.

#### **§ 4. Грозы**

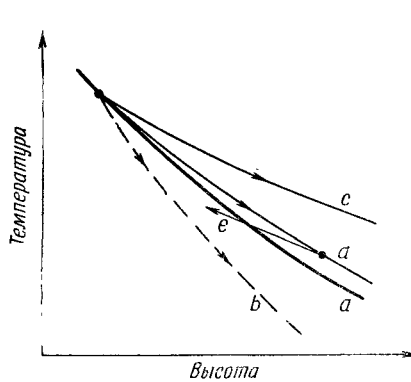
Прежде всего следует сказать, что обычная гроза состоит из множества «ячеек», тесно примыкающих друг к другу, но почти независимых. Поэтому достаточно проанализировать одну из них. Под «ячейкой» мы подразумеваем область (имеющую в горизонтальном направлении ограниченную протяженность), в которой происходят все основные процессы. Обычно имеется несколько ячеек, расположенных одна возле другой, а в каждой из них творится примерно одно и то же, разве что с некоторым сдвигом во времени. На фиг. 9.7 в идеализированном виде представлена ячейка в начальный период грозы. Оказывается, что в воздухе в некотором месте и при некоторых условиях (мы их вскоре опишем) существует восходящий ток, все более убыстряющийся по мере подъема. Теплый и влажный воздух снизу



Ф и г. 9.7. Грозовая ячейка в ранней стадии развития.

Фиг. 9.8. Температура атмосферы.

*a* — статическая атмосфера; *b* — адиабатическое охлаждение сухого воздуха; *c* — адиабатическое охлаждение влажного воздуха; *d* — влажный воздух с какой-то примесью окружающего воздуха.



подымается, остывает и конденсирует влагу. На рисунке крестики означают снег, а точки — дождь, но поскольку восходящий ток довольно велик, а капельки очень малы, то на этой стадии ни снег, ни дождь не выпадают. Это начальная стадия, и пока это еще не настоящая гроза, в том смысле, что внизу вообще не видно, чтобы что-нибудь происходило. По мере того как теплый воздух подымается вверх, в ячейку прибывает воздух со всех сторон (весьма важное обстоятельство, которым долго пренебрегали). Так что подымается не только тот воздух, который был внизу, но и какое-то количество другого воздуха — с разных сторон.

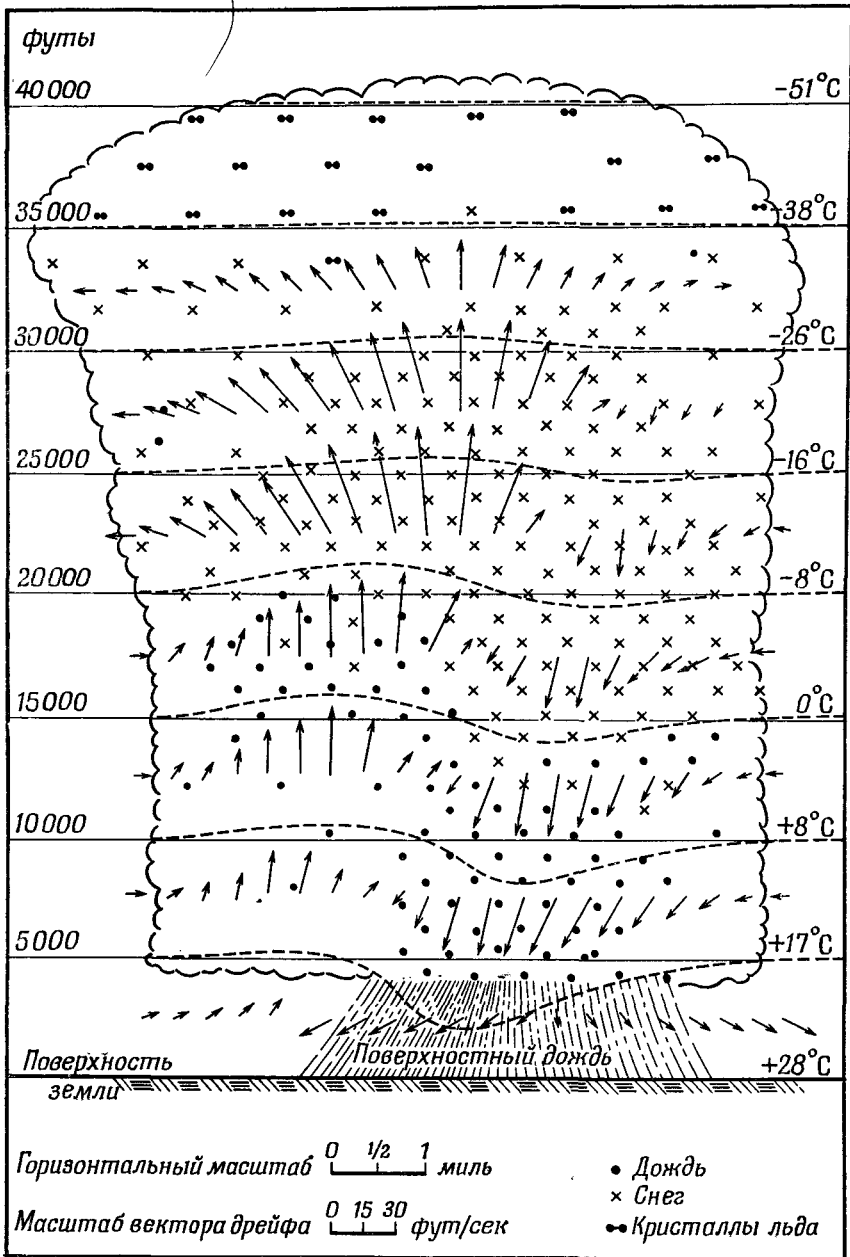
Отчего воздух вот так подымается? Как вы знаете, наверху воздух прохладнее. Солнце нагревает *почву*, а водяной пар в верхних слоях атмосферы излучает тепло вверх; поэтому на больших высотах воздух холодный, а внизу теплый. Вы можете сказать: «Тогда все очень просто. Теплый воздух легче холодного; поэтому вся эта комбинация механически неустойчива, и теплый воздух подымается». Конечно, если температура на разных высотах разная, то воздух *действительно термодинамически* неустойчив. Предоставленный самому себе надолго, весь воздух примет одинаковую температуру. Но он не предоставлен самому себе; весь день светит солнце. Так что проблема касается не только термодинамического, но и *механического* равновесия. Пусть мы начертили, как на фиг. 9.8, кривую зависимости температуры воздуха от высоты. В обычных условиях получается убывание по кривой типа *a*; по мере подъема температура падает. Как же атмосфера может быть устойчивой? Почему бы теплому воздуху просто не подняться к холодному? Ответ состоит в том, что если бы воздух начал подыматься, то давление в нем упало бы, и, рассматривая определенную порцию поднимающегося воздуха, мы бы увидели, что она адиабатически расширяется. (Тепло не уходило бы из нее и не приходило

бы, потому что из-за огромных размеров не хватило бы времени для больших передач тепла.) Итак, порция воздуха при подъеме охладится. Такой адиабатический процесс привел бы к такой зависимости температура — высота, как показано кривой *b* на фиг. 9.8. Любопытно, что воздух, поднимающийся снизу, оказался бы *холоднее*, чем то место, куда он направляется. Так что теплом воздуха снизу нет резона идти вверх; если бы он всплыл, то остыл бы и стал холоднее того воздуха, который уже там есть; он оказался бы тяжелее этого воздуха, и ему бы захотелось сразу обратно вниз. В хороший, ясный денек, когда влажность невелика, устанавливается какая-то быстрота падения температуры с высотой, и эта быстрота, вообще говоря, ниже «максимального устойчивого перепада», представляемого кривой *b*. Воздух находится в устойчивом механическом равновесии.

Но, с другой стороны, если мы возьмем воздушную ячейку, содержащую много водяных паров, то кривая ее адиабатического охлаждения будет совсем другой. При расширении и охлаждении этой ячейки водяной пар начнет конденсироваться, а при конденсации выделяется тепло. Поэтому влажный воздух остывает не так сильно, как сухой. Значит, когда воздух, влажность которого выше средней, начнет подниматься, его температура будет следовать кривой *c* на фиг. 9.8. Слегка охлаждаясь при подъеме, он все же окажется теплее окружающего его на этой высоте воздуха. Если имеется область теплого влажного воздуха и он почему-то начинает подниматься, то он все время будет оставаться легче и теплее окружающего воздуха и по-прежнему будет всплывать, пока не достигнет огромных высот. Вот тот механизм, который заставляет воздух в грозовой ячейке подниматься.

В течение многих лет именно так объясняли грозовую ячейку. А затем измерения показали, что температура облака на различных уровнях над Землей не так высока, как это следует из кривой *c*. Причина в том, что, когда «пузырь» влажного воздуха всплывает, он уносит с собой воздух из окружающей среды и охлаждается им. Кривая «температура — высота» похожа больше на кривую *d*, которая гораздо ближе к первоначальной кривой *a*, нежели к *c*.

После того как описанная конвекция началась, поперечный разрез грозовой ячейки выглядит уже так, как показано на фиг. 9.9. Это так называемая «зрелая» гроза. В ней действует очень сильная тяга вверх, достигающая на этой стадии высот в 10—15 км, а иногда и выше. Грозовой купол с происходящей в нем конденсацией громоздится над всей облачной грядой с быстротой, достигающей обычно 60 км/час. По мере того как водяной пар поднимается и конденсируется, возникают крохотные капельки, которые быстро охлаждаются до температуры ниже нуля. Они должны замерзнуть, но делают это не сразу — они



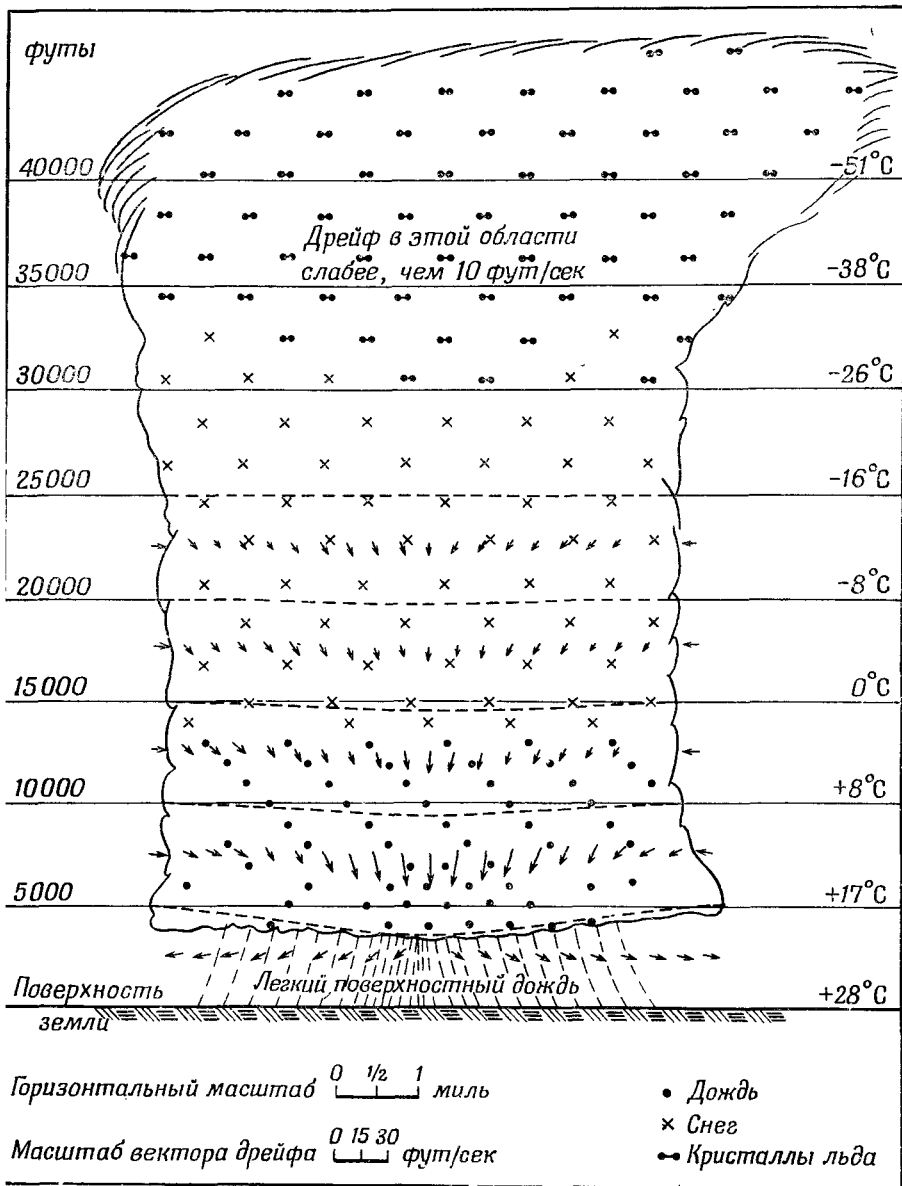
Ф и г. 9.9. Созревшая грозовая ячейка.

«переохлаждаются». Вода, да и другие жидкости обычно легко охлаждаются ниже своей точки замерзания, не кристаллизуясь, если только вокруг нет «ядер», которые необходимы, чтобы началась кристаллизация. Только если имеются мелкие крошки вещества, например кристалликов  $\text{NaCl}$ , капельки воды превратятся в льдинки. Тогда равновесие будет приводить к испарению капель и росту кристаллов льда. Итак, в какой-то момент начинается внезапное исчезновение воды и быстрое образование льда. Кроме того, могут происходить прямые соударения водяных капелек и льдинок — столкновения, в которых переохлажденная вода, прикоснувшись к кристаллику льда, мгновенно сама кристаллизуется. Стало быть, в какой-то момент развития облака в нем происходит быстрое накопление крупных частиц льда.

И когда они станут достаточно тяжелыми, они начнут падать сквозь восходящий воздух, ибо они стали слишком грузными, чтобы тяга могла их нести. Падая, они увлекут за собой немного воздуха. Начинается противоток воздуха — вниз. И легко понять, что, как это ни странно, раз уж противоток начался, то прекратиться он не сможет. Воздух теперь полным ходом помчится вниз!

Посмотрите: кривая  $d$  на фиг. 9.8 (истинное распределение температур по высоте облака) не так крута, как кривая  $c$  (относящаяся к влажному воздуху). Значит, когда начнет падать влажный воздух, его температура будет повышаться по кривой, соответствующей кривизне линии  $c$ , т. е. при достаточно сильном падении окажется *ниже* температуры окружающего воздуха (как это видно из кривой  $e$ ). И в момент, когда это случится, он окажется плотнее окружающего воздуха, падение станет неотвратимым.

Но вы скажете: «Уж не вечное ли это движение? Сперва говорилось, что воздух должен подниматься, а когда вы его подняли, то одинаково убедительно принимаетесь доказывать, что ему положено падать». Нет, это не вечное движение. Когда положение неустойчиво и теплый воздух вынужден подниматься, тогда, естественно, что-то должно его заместить. Не менее верно и то, что спускающийся холодный воздух был бы в состоянии энергетически заместить теплый воздух. Но поймите, что то, что спустилось вниз, — это уже не тот воздух, который был вначале. Давние рассуждения, в которых шла речь об изолированном облаке, сперва подымавшемся, а затем спускающемся, держали в себе какую-то загадку. Нужен был дождь, чтобы обеспечить спуск, а этот способ был мало правдоподобен. Но как только вы поняли, что к восходящему потоку воздуха примешан воздух, бывший вначале на той высоте, откуда началась тяга, термодинамические соображения покажут вам, что падение холодного воздуха, первоначально плававшего на больших



Ф и г. 9.10. Поздняя фаза грозовой ячейки.



высотах, тоже возможно. Это и объясняет картину активной грозы, представленную схематически на фиг. 9.9.

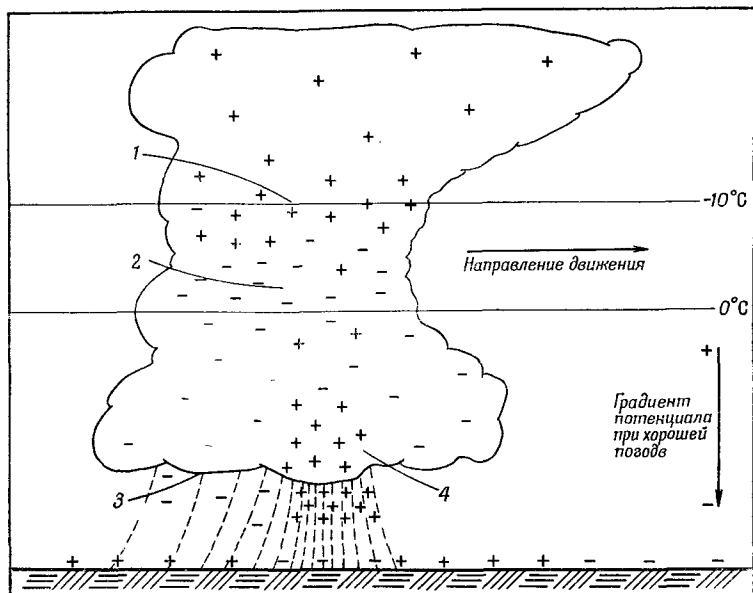
Когда воздух доходит донизу, из нижней части тучи начинает идти дождь. Вдобавок, достигнув земной поверхности, относительно холодный воздух растекается во все стороны. Значит, перед самой грозой начинается холодный ветер, предупреждающий нас о предстоящей буре. Во время самой бури наблюдаются резкие и внезапные порывы ветра, облака клубятся и т. д. Но в основном сперва существует ток, текущий вверх, потом противоток вниз — картина, вообще говоря, очень сложная.

В то же мгновение, когда начинаются осадки, возникает и противоток. И в тот же самый момент обнаруживаются электрические явления. Но прежде чем описать молнию, мы закончим рассказом о том, что творится в грозовой ячейке через полчаса или, скажем, через час. Она выглядит так, как показано на фиг. 9.10. Тяга вверх прекратилась — больше нет теплого воздуха, и поддерживать ее нечем. Какое-то время еще продолжают осадки, последние капельки воды падают на землю, все становится спокойнее, хотя часть льдинок еще осталась в воздухе. На больших высотах ветры дуют в разные стороны, поэтому верх грозовой тучи обычно начинает принимать вид наковальни. Ячейке пришел конец.

### **§ 5. Механизм распределения зарядов**

Теперь мы хотим обратиться к обсуждению самой важной для нас стороны дела — к возникновению электрических зарядов. Разного рода эксперименты, включая полеты сквозь грозовой фронт (пилоты, совершающие их — истинные храбрецы!), выяснили, что распределение зарядов в грозовой ячейке напоминает изображенное на фиг. 9.11. Верхушка грозы заряжена положительно, а низ — отрицательно, за исключением небольшого участка положительных зарядов в нижней части тучи, причиншего немало забот исследователям. Никто не знает, почему он там появляется и насколько он важен, то ли это всего лишь вторичный эффект положительного дождя, то ли существенная часть всего механизма. Если б этого не было, все выглядело бы значительно проще. Во всяком случае преимущественно отрицательный заряд внизу и положительный наверху — это как раз такое расположение полюсов батареи, которое может зарядить Землю отрицательно. Положительные заряды находятся в 6—7 км над Землей, где температура достигает  $-20^{\circ}\text{C}$ , а отрицательные — на высоте 3—4 км, и температура там от 0 до  $-10^{\circ}\text{C}$ .

Заряда нижней части тучи хватает на то, чтобы создать между ней и землей разность потенциалов в 20, 30 и даже 100 млн. в — несравненно больше, чем те 0,4 млн. в перепада, которые

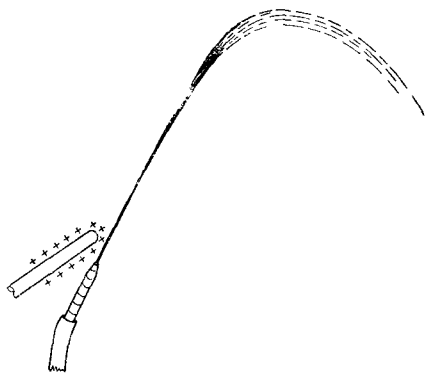


Ф и г. 9.11. Распределение электричества в созревшей грозовой ячейке.

1 — центр положительных разрядов; 2 — центр отрицательных зарядов; 3 — область отрицательного дождя; 4 — небольшой центр положительного заряда в области сильного дождя.

бывают между «небом» и Землей при ясном небе. Эти огромные напряжения пробивают воздух и создают гигантский грозовой разряд. При пробое отрицательный заряд с нижней части тучи переносится зигзагами молнии на Землю.

А теперь мы в нескольких словах опишем строение молнии. Прежде всего имеется настолько большой перепад потенциалов, что воздух пробивается. Молния бьет между одной частью тучи и другой, или между одной тучей и другой, или между тучей и Землей. С каждой независимой вспышкой — с каждым ударом молнии, который вы видите, с небес низвергается 20—30 кулон электричества. Интересно, сколько же времени тратит туча на восстановление этих 20—30 кулон, уходящих с молнией? Это можно выяснить, измеряя вдали от тучи электрическое поле, вызываемое дипольным моментом тучи. При таких измерениях вы видите внезапный спад поля при ударе молнии, а затем экспоненциальный возврат к первоначальному его значению с характерной временной постоянной порядка 5 сек, немного меняющейся от случая к случаю. Значит, грозе достаточно 5 сек, чтобы восстановить весь свой заряд. Но это, конечно, не означает, что очередная молния ударит точно через 5 сек, потому что



Ф и г. 9.12. Струя воды с электрическим полем, созданным вблизи насадки шланга.

К водопроводу

меняется и геометрия туч и другие факторы. Вспышки следуют друг за другом нерегулярно, но существенно то, что возвращение к начальным условиям всегда происходит примерно за 5 сек. Следовательно, в грозовой динамомашине течет ток примерно в 4 а. А это означает, что любая модель, придуманная для объяснения того, как грозовой вихрь генерирует электричество, должна быть очень мощной — это должна быть огромная быстродействующая машина.

Прежде чем двинуться дальше, рассмотрим кое-что, почти наверняка не имеющее никакого отношения к излагаемому предмету, но тем не менее само по себе любопытное, так как это демонстрирует влияние электрического поля на водяные капли. Мы говорим, что это может и не иметь отношения, потому что связано с опытом, который можно проделать в лаборатории со струйкой воды и который показывает довольно сильное действие электричества на капельки. В грозе же нет никаких водяных струй; там просто имеется туча сконденсированного льда и капель воды. Так что вопрос о механизмах, действующих в грозе, по всей вероятности, никак не связан со всем тем, что вы увидите в том простом опыте, который мы хотим описать. Насадите на водопроводный кран шланг с суженным концом и направьте струю воды из него под крутым углом (фиг. 9.12). Вода забьет тонкой струйкой и, вероятно, начнет разбрызгиваться мелкими капельками. Если поперек струи навести электрическое поле (скажем, заряженной палочкой), то форма струи изменится. При слабом электрическом поле вы увидите, что струя разбивается на несколько больших капель, а при сильном поле струя разбрызгивается на много-много мельчайших капелек, гораздо более мелких, чем прежде\*. У слабого электрического поля есть

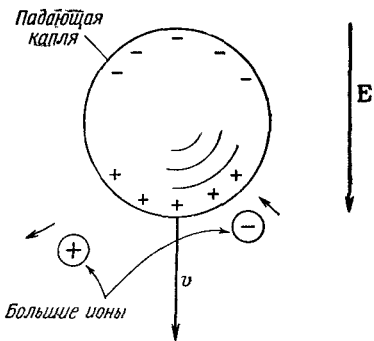
\* Удобный способ наблюдать размер капель — дать воде падать на большой противень. От крупных капель дробь будет громче.

тенденция воспрепятствовать дроблению струи на капли, а сильное, напротив, стремится раздробить поток.

Эти эффекты, по всей видимости, можно объяснить следующим образом. Когда из шланга бьет вода и мы приложили поперек небольшое поле, то одна сторона струи может зарядиться чуть-чуть более положительно, а другая — чуть-чуть более отрицательно. И потом, когда струя дробится, капли с одной стороны струи могут стать положительно заряженными, а с другой — отрицательно заряженными. Они начнут притягиваться и захотят сливаться в более крупные, чем прежде, капли. Струя не будет сильно дробиться. Если же поле увеличить, то заряд на каждой отдельной капле станет очень большим, и *сам* заряд будет стремиться измельчать капли (из-за их отталкивания). Каждая капелька разделится на более мелкие (и тоже заряженные), они начнут отталкиваться, и посыплются брызги. Итак, при нарастании поля струйка дробится все мельче. Единственное, что нам хотелось бы подчеркнуть, — это что при некоторых обстоятельствах электрическое поле может сильно сказываться на каплях. Точный механизм того, что происходит в грозе, неизвестен, и совсем не обязательно связывать его с только что описанным. Мы включили это описание лишь для того, чтобы вы оценили сложность явлений, которые могут играть роль. На самом деле ни у кого из ученых нет теории, основанной на таком представлении.

Мы хотели бы привести две теории, изобретенные для объяснения разделения зарядов в грозе. Обе они основаны на представлении о том, что на падающей частице должен существовать один заряд, а в воздухе — противоположный. Тогда при движении падающей частицы (воды или льда) сквозь воздух возникает разделение электрических зарядов. Вопрос только в том, отчего начинается электризация? Одна из старейших теорий — это теория «дробления капель». Кто-то когда-то обнаружил, что если в потоке воздуха капли дробятся на части, то сами они заряжаются положительно, а воздух — отрицательно. У этой теории есть несколько недостатков, самый серьезный из которых — что *знак* получается не тот. Кроме того, в большей части гроз умеренного пояса, сопровождаемых молниями, осадки на больших высотах бывают *не в виде* воды, а в виде льда.

Из только что сказанного следует, что если б мы могли представить себе способ сделать так, чтобы верх и низ капли были наэлектризованы по-разному, и если б мы усмотрели какой-то резон для капель разбиваться в быстром потоке воздуха на неравные части — большую впереди, а меньшую позади (ну, скажем, из-за движения сквозь воздух или из-за чего-то подобного), то и у нас появилась бы своя теория (отличная от всех известных!). Тогда из-за сопротивления воздуха крупные капли при падении отставали бы от мелких и вышло бы разделение



Ф и г. 9.13. Теория Ч. Вильсона о разделении зарядов в грозовой туче.

зарядов. Как видите, можно измышлять любые возможности.

Одна из самых остроумных теорий, во многом более удовлетворительная, чем теория дробящихся капель, принадлежит Вильсону. Описывая ее, мы, как и сам Вильсон, будем говорить о каплях, хотя все это относится в равной мере и ко льду. Пусть у нас имеется водяная капелька, падающая в электрическом поле напряженностью 100 в/м к отрицательно заряженной земле. У капли появится наведенный дипольный момент — положительный заряд внизу, отрицательный наверху (фиг. 9.13). Кроме этого, в воздухе имеются «ядра», о которых мы уже говорили, — большие неторопливо движущиеся ионы. (Быстрые ионы не окажут здесь заметного влияния.) Предположим, что на своем пути вниз капля приблизилась к большому иону. Если он сам положителен, то положительный заряд низа капли оттолкнет его, и он отойдет в сторону. Так что, собственно, капля даже не соприкоснется с ним. Если же ион приблизится к капле сверху, он может притянуться к ней. Но капля падает сквозь воздух, и воздух проносится мимо нее вверх, унося с собой ионы (если только они движутся достаточно медленно). Так что положительные ионы не успевают коснуться верхушки капли. Все это относится, как видите, только к крупным, малоподвижным ионам. Положительные ионы такого сорта не смогут соприкоснуться ни с нижней, ни с верхней поверхностью летящей капельки. Но когда крупные, медленные, отрицательные ионы входят в соприкосновение с каплей, она их притягивает к себе и захватывает. На капле накапливается отрицательный заряд (знак заряда определяется исходной разностью потенциалов всей Земли и получается как раз тот, какой нам нужен). Отрицательный заряд будет перенесен каплями в нижнюю часть тучи, а положительные ионы, брошенные по дороге, будут сдуты к ее верхушке различными восходящими потоками. Теория выглядит довольно мило и, во всяком случае, дает правильные знаки.

К тому же она не зависит от того, град ли у нас или капли дождя. Мы увидим, когда будем изучать поляризацию диэлектриков, что со льдинками должно происходить то же самое. У них тоже в электрическом поле будут появляться на концах положительные и отрицательные заряды.

Однако и эта теория оставляет какие-то неясности. Во-первых, суммарный заряд грозы очень велик. Довольно быстро весь запас больших ионов израсходуется. Вильсон и другие вынуждены были предположить, что существуют добавочные источники больших ионов. Как только начинается разделение зарядов, развиваются очень сильные электрические поля, и в этих полях могут быть места, где воздух ионизируется. Если там имеется сильно заряженная точка или любой небольшой объект наподобие капли, то они могут сконцентрировать вокруг себя поле, достаточно большое для того, чтобы возник «кистевой разряд». Когда имеется достаточно сильное поле, скажем положительное, то электроны будут попадать в это поле и успевают набирать между столкновениями большую скорость. Она будет такой высокой, что, попадая в атомы, электроны будут срывать атомные электроны с их оболочки, оставляя позади себя положительные ионы. Эти новые электроны тоже наберут скорость и, столкнувшись, породят еще больше новых электронов. Произойдет своего рода цепная реакция, или лавина, вызывающая быстрое накопление ионов. Положительные заряды останутся недалеко от своих прежних мест, так что чистый эффект состоит в распределении положительных зарядов в области вокруг исходной точки. При этом, конечно, сильное поле исчезнет и процесс замрет. Таков характер кистевого разряда. Не исключено, что поля в грозовой туче могут достичь такой величины, что сколько-то там кистевых разрядов действительно возникнет; могут также быть и другие механизмы ионизации, включаемые, едва начнется гроза. Но никто точно не знает, как они действуют. Так что по-настоящему до конца происхождения молнии не понято. Мы знаем только, что молнии бывают от грозы (и знаем, конечно, что гром бывает от молнии — от тепловой энергии, высвобождаемой при вспышке молнии).

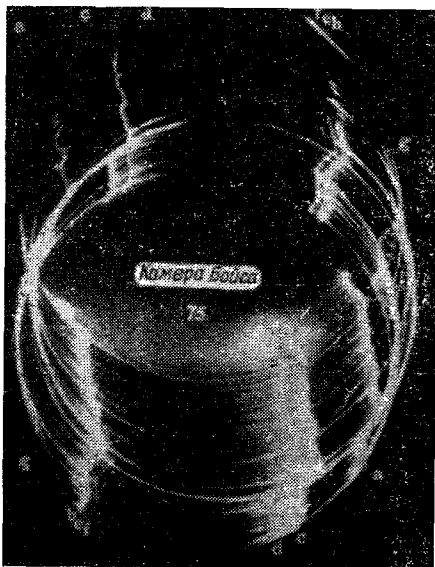
Но по крайней мере мы можем хоть отчасти понять происхождение атмосферного электричества. Из-за того, что во время грозы существуют воздушные течения, ионы и капли воды на льдинках — положительные и отрицательные заряды — разделяются. Положительные заряды уносятся вверх, к облачному куполу (см. фиг. 9.11), а отрицательные при ударах молнии скатываются на Землю. Положительные так и остаются на верхушке облака, входят в высокие слои хорошо проводящего воздуха и расходятся над всей Землей. В районах, где держится ясная погода положительные заряды в этом слое медленно переводятся к земной поверхности ионами в воздухе — ионами, образованными то ли

космическими лучами, то ли всплесками волн и деятельностью человека. Атмосфера — это непрерывно действующая электрическая машина!

## § 6. Молния

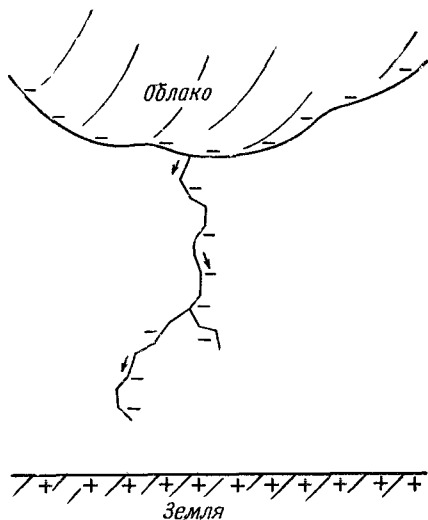
Первое свидетельство о том, что происходит при вспышке молнии, было получено в фотоснимках, сделанных камерой, которую держали руками и перемещали при закрытом затворе, нацеливаясь туда, где ожидалась вспышка молнии. Первые полученные таким способом фотографии явственно показали, что обычно удары молнии — это повторные разряды по одному и тому же пути. Позже была изобретена камера «Бойс», в которой две линзы смонтированы на быстро вращающемся диске под углом  $180^\circ$  друг к другу. Изображение, даваемое каждой линзой, движется поперек пленки, картина разворачивается во времени. Если, скажем, удар повторился, то на снимке появятся бок о бок два изображения. Сравнивая изображения от обеих линз, можно выяснить различные детали временной последовательности вспышек. На фиг. 9.14 показан снимок, сделанный такой камерой.

Расскажем о молнии подробнее, хотя мы и не понимаем точно, как она действует. Мы хотим дать качественное описание того, на что это похоже, но мы не будем входить в детали того, почему происходит то, что, по-видимому, происходит. Опишем



Ф и г. 9.14. Снимок вспышки молнии, сделанный камерой «Бойс».

Ф и г. 9.15. Образование ступенчатого лидера.



обычный случай тучи с отрицательным дном, висящей над равниной. Ее потенциал намного более отрицателен, чем земная поверхность под нею, так что отрицательные электроны будут ускоряться по направлению к Земле. А происходит здесь вот что. Все начинается со светящегося комка, называемого «ступенчатым лидером». Он не такой яркий, как сама вспышка молнии. На снимках можно видеть вначале небольшое светлое пятнышко, выходящее из тучи и очень быстро катящееся вниз со скоростью  $1/6$  скорости света! Но оно проходит всего около 50 м и останавливается. Следует пауза около 50 мксек, а затем происходит следующий шаг. И за ним снова пауза, а после новый шаг и т. д. Так, шаг за шагом, пятно движется к Земле, по пути, похожему на то, что изображено на фиг. 9.15. В лидере имеются отрицательные заряды из тучи; весь столб полон отрицательного электричества. Кроме того, воздух начинает ионизоваться быстро движущимися зарядами, образующими лидер, так что воздух вдоль отмеченного пути становится проводящим. В момент, когда лидер коснется грунта, получается проводящая «провоолока», которая тянется до самой тучи и полна отрицательного электричества. Теперь, наконец, отрицательный заряд может запросто ударить из тучи. Первыми замечают это электроны, находящиеся в самом низу лидера; они соскакивают наземь, оставив позади себя положительный заряд, который притягивает новые отрицательные заряды из высших частей лидера; они тоже вываливаются наземь и т. д. В конце концов весь отрицательный заряд этой части тучи быстро и энергично сбежит по этому каналу вниз. Так что молния, которую вы видите, бьет от земли вверх

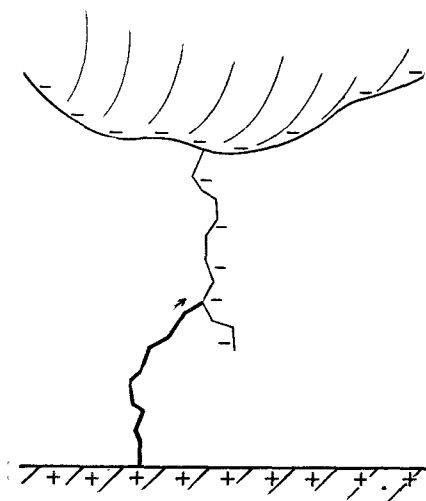


(фиг. 9.16). И, действительно, этот основной разряд — самая яркая часть разряда — называется *обратной вспышкой*. Она и вызывает яркое свечение и выделение тепла, которое, приводит к быстрому расширению воздуха, производит громовой удар.

Ток в пике молнии достигает 10 000 а и уносит около 20 кулон электричества.

Но мы еще не кончили. Спустя небольшой промежуток времени, может быть, в несколько сотых секунды, когда обратная молния уже исчезла, вниз пикирует новый лидер. Но на этот раз уже без пауз, без остановок. Теперь его именуют «темным лидером», и весь путь сверху донизу он проходит одним броском. Он мчится на всех парах в точности по прежнему следу, потому что вдоль следа хватает осколков атомов для того, чтобы этот путь оказался самым легким из всех путей. Новый лидер снова полон отрицательного электричества. И в мгновение, когда он касается почвы, — трах! — появляется обратная молния, катящаяся по тому же пути. И вы видите, как молния бьет еще раз, и еще раз, и еще. Порой бывает только один-два удара, временами пять или десять (однажды видели 42 разряда по одному и тому же каналу), но всегда быстро следующих один за другим.

Временами все еще более усложняется. Скажем, после одной из остановок лидер может начать ветвиться, образовав две ступеньки — обе идут вниз, но не совсем в одном направлении (см. фиг. 9.15). Что затем случится, зависит от того, коснется ли одна из ветвей земли намного раньше другой. Если да, то яркая



Ф и г. 9.16. Обратная молния мчится по следу, проложенному лидером.

обратная молния (вспышка отрицательных зарядов, разгружаемых наземь) прокладывает себе путь *вверх* вдоль ветви, которая коснулась земли, а когда на своем пути вверх достигает и проскакивает начало другой ветви, то кажется, что яркая молния бьет ~~вниз~~ по этой другой ветви. Почему? Потому что отрицательное электричество сыпается на землю, и это вызывает вспышку молнии. Этот заряд начинает двигаться в начале вторичной ветви, последовательно опорожняая ее дальнейшие участки, так что кажется, что яркая молния прокладывает себе путь вниз по этой ветви в то же самое время, как она движется вверх. Если, однако, одна из этих добавочных ветвей лидера достигнет почвы почти вместе с самим лидером, то порой может случиться, что *темный* лидер повторной вспышки изберет себе путь по второй ветви. Тогда вы увидите первую главную вспышку в одном месте, а вторую — в другом. Это — вариант первоначальных представлений.

Кроме того, наше описание чересчур упрощает явления у самой земной поверхности. Когда ступенчатый лидер оказывается примерно в 100 м от почвы, то оттуда поднимается ему навстречу разряд. По-видимому, поле становится таким сильным, что может начаться разряд кистевого типа. Если, к примеру, в этом месте есть какой-то вытянутый предмет (дом с острием на крыше), то при приближении лидера поля так нарастают, что начинается разряд с этого острия, который достигает лидера. Молния стремится бить как раз в такие острия.

То, что молния бьет в высокие предметы, по-видимому, было известно давным-давно. Известно высказывание Артабана, советника Ксеркса. Артабан дает своему господину совет относительно предполагавшегося похода на греков, имевшего целью бросить весь известный тогда мир к ногам персов. Он говорит: «Взгляни, как Бог молниями своими всегда поражает крупных животных и не позволяет им становиться дерзкими, а существа меньших размеров не раздражают Его. И как молнии Его падают всегда на самые большие дома и самые высокие деревья». И затем он объясняет причину: «Так, очевидно, Он любит унижать все, что возносит себя».

Как вы думаете — сейчас, когда у вас есть правильный взгляд на молнию, поражающую высокие деревья, смогли ли бы вы давать королям советы по военным вопросам с большей мудростью, чем делал это Артабан 2300 лет назад? Скажите им, чтоб они не возносили себя! У вас только это выйдет не столь поэтично.

ДИЭЛЕКТРИКИ

§ 1. Диэлектрическая проницаемость

Сейчас мы разберем еще одно характерное свойство материи, возникающее под влиянием электрического поля. В одной из предыдущих глав мы рассмотрели поведение *проводников*, в которых заряды под влиянием электрического поля свободно текут в такие участки, что поле внутри проводника обращается в нуль. Теперь мы будем говорить об *изоляторах*, т. е. таких материалах, которые не проводят электричества. Сначала можно было бы подумать, что в них вообще ничего не происходит. Но Фарадей с помощью простого электроскопа и конденсатора, состоящего из двух параллельных пластин, обнаружил, что это не так. Его опыт показал, что если между пластинами поместить изолятор, то емкость такого конденсатора *увеличится*. Когда изолятор целиком заполняет пространство между пластинами, емкость возрастает в  $\epsilon$  раз, причем  $\epsilon$  зависит только от свойств изолирующего материала. Изолирующие материалы называют также *диэлектриками*; тогда множитель  $\epsilon$  характеризует свойства диэлектрика и называется *диэлектрической проницаемостью*. Диэлектрическая проницаемость вакуума, конечно, равна единице.

Наша задача теперь состоит в том, чтобы объяснить, почему вообще возникает электрический эффект, раз изоляторы фактически являются изоляторами и не проводят электричества. Начнем с экспериментального факта, что емкость увеличивается, и попытаемся разобраться, что же там может происходить. Рассмотрим плоский конденсатор, на проводящих пластинах которого имеются заряды, скажем,

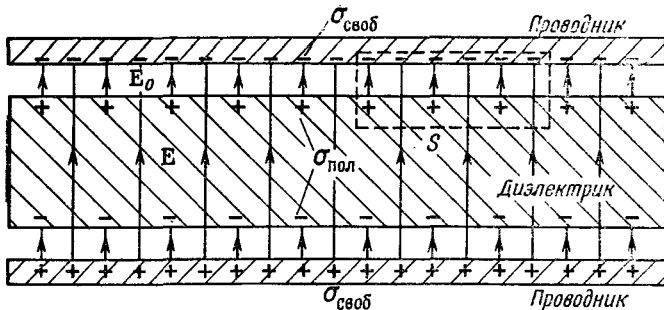
§1. Диэлектрическая проницаемость

§2. Вектор поляризации  $P$

§3. Поляризационные заряды

§4. Уравнения электростатики для диэлектрика

§5. Поля и силы в присутствии диэлектриков



Ф и г. 10.1. Плоский конденсатор с диэлектриком.  
Показаны линии поля  $E$ .

на верхней пластине отрицательные, а на нижней — положительные. Пусть расстояние между пластинами равно  $d$ , а площадь каждой пластины  $A$ . Как мы показали раньше, емкость равна

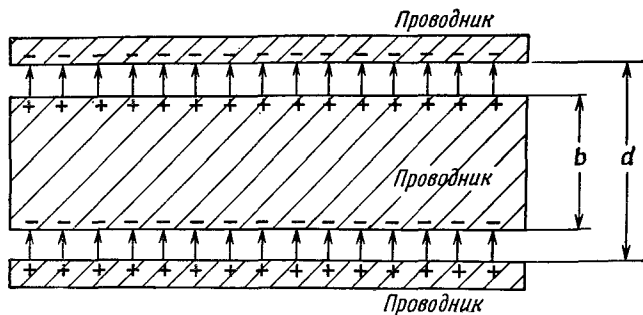
$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}, \quad (10.1)$$

а заряд и потенциал конденсатора связаны соотношением

$$Q = CV. \quad (10.2)$$

Далее, экспериментальный факт состоит в том, что если мы положим между пластинами кусок изолирующего материала, например стекла или плексигласа, то емкость возрастет. Это, разумеется, означает, что при том же заряде потенциал стал меньше. Но разность потенциалов есть интеграл от электрического поля, взятый поперек конденсатора; отсюда мы должны заключить, что электрическое поле внутри конденсатора стало меньше, хотя заряды пластин и не изменились.

Но как может это быть? Нам известна теорема Гаусса, которая утверждает, что полный поток электрического поля прямо связан с находящимся внутри объема электрическим зарядом. Рассмотрим входящую в теорему Гаусса поверхность  $S$ , изображенную пунктиром на фиг. 10.1. Поскольку электрическое поле в присутствии диэлектрика уменьшается, мы заключаем, что полный заряд внутри поверхности должен теперь быть меньше, чем до внесения изолятора. Остается сделать единственный вывод, что на поверхности диэлектрика должны находиться положительные заряды. Раз поле уменьшилось, но все же не обратилось в нуль, значит, этот положительный заряд меньше отрицательного заряда в проводнике. Итак, явление это можно объяснить, если мы поймем, почему на одной поверхности диэлектрика, помещенного в электрическое поле, индуцируется положительный заряд, а на другой — отрицательный.



Ф и г. 10.2. Если поместить пластинку проводника внутрь плоского конденсатора, наведенные заряды обратят поле в проводнике в нуль.

Все было бы понятно, если бы речь шла о проводнике. Пусть у нас был бы, например, конденсатор, расстояние между пластинами которого равно  $d$ , и мы вставили бы между этими пластинами незаряженный проводник толщиной  $b$  (фиг. 10.2). Электрическое поле индуцирует положительный заряд на верхней поверхности и отрицательный заряд на нижней поверхности, так что в результате поле внутри проводника погашается. Во всех остальных местах поле такое же, какое было без проводника, поэтому оно равно поверхностной плотности зарядов, деленной на  $\epsilon_0$ ; но расстояние, по которому мы должны интегрировать, чтобы получить напряжение (разность потенциалов), стало меньше.

Напряжение равно

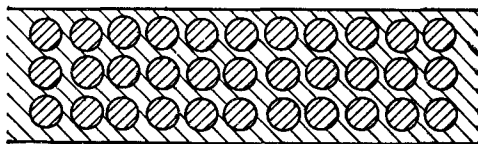
$$V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (d - b).$$

Окончательное выражение для емкости похоже на (10.1), где  $d$  нужно заменить разностью  $(d - b)$ :

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d [1 - (b/d)]}. \quad (10.3)$$

Емкость увеличилась в некоторое число раз, зависящее от  $b/d$ , доли объема, занятого проводником.

Отсюда мы получаем модель того, что происходит в диэлектриках: внутри материала имеется множество мелких проводящих слоев. Беда такой модели состоит в том, что в ней должна



Ф и г. 10.3. Модель диэлектрика; маленькие проводящие шарики, вставленные внутрь идеального изолятора.

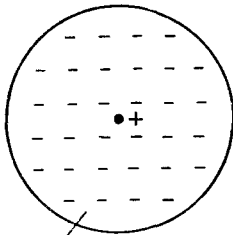
иметься выделенная ось — перпендикуляр ко всем слоям, а у большинства диэлектриков такой оси нет. Эту трудность, однако, можно устранить, предположив, что все изолирующие материалы содержат маленькие проводящие шарики, отделенные одна от другой изолятором (фиг. 10.3). Появление диэлектрической проницаемости тогда объясняется действием зарядов, индуцируемых в каждом шарике. В этом и состоит одна из самых первых физических моделей диэлектриков, предложенная для объяснения явления, которое наблюдал Фарадей. Точнее, предполагалось, что каждый атом материала есть идеальный проводник, изолированный от остальных атомов. Диэлектрическая проницаемость  $\kappa$  тогда должна была определяться долей того объема, который занимают проводящие шарики. Теперь, однако, пользуются другой моделью.

## § 2. Вектор поляризации $P$

Продолжив наш анализ, мы обнаружим, что идея о проводящих и непроводящих участках не так уж существенна. Любой из маленьких шариков действует как диполь, момент которого создается внешним полем. Для понимания диэлектриков существенной является идея о том, что в материале возбуждается множество маленьких диполей. Почему они возбуждаются — то ли потому, что в материале есть проводящие шарики, то ли по каким-либо другим причинам — абсолютно несущественно.

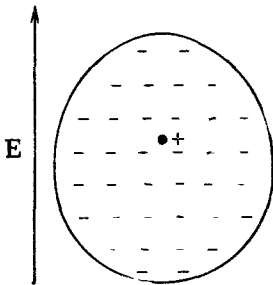
Почему поле должно индуцировать дипольный момент у атома, хотя атом не является проводящим шариком? Мы обсудим этот вопрос гораздо подробнее в следующей главе, которая будет посвящена внутреннему механизму диэлектрических материалов. А сейчас мы дадим лишь один пример, только чтобы проиллюстрировать возможный механизм. Атом имеет ядро с положительным зарядом, окруженное отрицательными электронами. В электрическом поле ядро притягивается в одну сторону, а электроны в другую. Орбиты или плотности вероятности электронов (или какая-либо другая картина, используемая в квантовой механике) несколько искажаются (фиг. 10.4); центр тяжести отрицательных зарядов сместится и больше не будет совпадать с положительным зарядом ядра. Мы уже обсуждали такое распределение заряда. Если взглянуть на него издалека, то подобная нейтральная конфигурация в первом приближении эквивалентна маленькому диполю.

Если поле не чересчур велико, естественно считать величину индуцированного дипольного момента пропорциональной полю. Иначе говоря, небольшое поле сместит заряды чуть-чуть, а более сильное поле раздвинет их дальше — пропорционально величине



Распределение электронов

Ф и г. 10.4. Распределение электронов атома в электрическом поле сдвигается относительно ядра.



не поля, пока смещение не станет чересчур большим. До конца этой главы мы будем считать, что дипольный момент в точности пропорционален полю.

Предположим теперь, что в каждом атоме заряды  $q$  разделены промежутком  $\delta$ , так что  $q\delta$  есть дипольный момент одного атома. (Мы пишем  $\delta$ , потому что  $d$  уже использовано для обозначения расстояния между пластинами.) Если в единице объема имеется  $N$  атомов, то *дипольный момент в единице объема* равен  $Nq\delta$ . Этот дипольный момент в единице объема мы запишем в виде вектора  $\mathbf{P}$ . Нет необходимости подчеркивать, что он лежит в направлении всех отдельных дипольных моментов, т. е. в направлении смещения зарядов  $\delta$ :

$$\mathbf{P} = Nq\delta. \quad (10.4)$$

Вообще говоря,  $\mathbf{P}$  будет меняться в диэлектрике от точки к точке. Но в каждой точке  $\mathbf{P}$  пропорционален электрическому полю  $\mathbf{E}$ . Константа пропорциональности, которая определяется тем, насколько легко можно сместить электрон, зависит от сорта атомов в материале.

О том, что действительно определяет поведение этой константы и степень ее постоянства для больших полей, а также о том, что происходит внутри разных материалов, мы поговорим позже. А пока мы просто предположим, что существует какой-то механизм, благодаря которому индуцируется дипольный момент, пропорциональный электрическому полю.

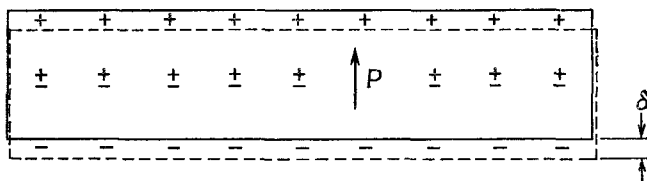
### § 3. Поляризационные заряды

Посмотрим теперь, что дает эта модель для конденсатора с диэлектриком. Рассмотрим сначала лист материала, в котором на единицу объема приходится дипольный момент  $\mathbf{P}$ . Получится ли в результате в среднем какая-нибудь плотность зарядов? Нет, если  $\mathbf{P}$  постоянен.

Если положительные и отрицательные заряды, смещенные относительно друг друга, имеют одну и ту же среднюю плотность, то сам факт их смещения не приводит к появлению суммарного заряда внутри объема. С другой стороны, если бы  $\mathbf{P}$  в одном месте был больше, а в другом меньше, то это означало бы, что в некоторые области попало больше зарядов, чем оттуда вышло; тогда мы бы могли получить объемную плотность заряда. В случае плоского конденсатора предположим, что  $\mathbf{P}$  — величина постоянная, поэтому достаточно будет только посмотреть, что происходит на поверхностях. На одной поверхности отрицательные заряды (электроны) эффективно выдвинулись на расстояние  $\delta$ , а на другой поверхности они сдвинулись внутрь, оставив положительные заряды снаружи на эффективном расстоянии  $\delta$ . Возникает, как показано на фиг. 10.5, поверхностная плотность зарядов, которую мы будем называть *поляризационным зарядом*.

Этот заряд можно подсчитать следующим образом. Если площадь пластинки равна  $A$ , то число электронов, которое окажется на поверхности, есть произведение  $A$  и  $N$  (числа электронов на единицу объема), а также смещения  $\delta$ , которое, как мы предполагаем, направлено перпендикулярно к поверхности. Полный заряд получится умножением на заряд электрона  $q_e$ . Чтобы найти поверхностную плотность поляризационных зарядов, индуцируемую на поверхности, разделим на  $A$ . Величина поверхностной плотности зарядов равна

$$\sigma_{\text{пол}} = Nq_e\delta.$$



Фиг. 10.5. Диэлектрик в однородном поле. Положительные заряды сместились на расстояние  $\delta$  относительно отрицательных.



Но она равна как раз длине  $P$  вектора поляризации  $\mathbf{P}$  [формула (10.4)]:

$$\sigma_{\text{пол}} = P. \quad (10.5)$$

Поверхностная плотность зарядов равна поляризации внутри материала. Поверхностный заряд, конечно, на одной поверхности положителен, а на другой отрицателен.

Предположим теперь, что наша пластинка служит диэлектриком в плоском конденсаторе. *Пластины* конденсатора также имеют поверхностный заряд (который мы обозначим  $\sigma_{\text{своб}}$ , потому что заряды в проводнике могут двигаться «свободно» куда угодно). Конечно, это тот самый заряд, который мы сообщили конденсатору при его зарядке. Следует подчеркнуть, что  $\sigma_{\text{пол}}$  существует только благодаря  $\sigma_{\text{своб}}$ . Если, разрядив конденсатор, удалить  $\sigma_{\text{своб}}$ , то  $\sigma_{\text{пол}}$  также исчезнет, но он не стечет по проволоке, которой разряжают конденсатор, а уйдет назад внутрь материала, за счет релаксации поляризации в диэлектрике.

Теперь мы можем применить теорему Гаусса к поверхности  $S$ , изображенной на фиг. 10.1. Электрическое поле  $E$  в диэлектрике равно *полной* поверхностной плотности зарядов, деленной на  $\epsilon_0$ . Очевидно, что  $\sigma_{\text{пол}}$  и  $\sigma_{\text{своб}}$  имеют разные знаки, так что

$$E = \frac{\sigma_{\text{своб}} - \sigma_{\text{пол}}}{\epsilon_0}. \quad (10.6)$$

Заметьте, что поле  $E_0$  между металлической пластиной и поверхностью диэлектрика больше поля  $E$ ; оно соответствует только  $\sigma_{\text{своб}}$ . Но нас здесь интересует поле внутри диэлектрика, которое занимает почти весь объем, если диэлектрик заполняет почти весь промежуток между пластинами. Используя формулу (10.5), можно написать

$$E = \frac{\sigma_{\text{своб}} - P}{\epsilon_0}. \quad (10.7)$$

Из этого уравнения мы не можем определить электрическое поле, пока не узнаем, чему равно  $P$ . Здесь мы, однако, предполагаем, что  $P$  зависит от  $E$  и, более того, пропорционально  $E$ . Эта пропорциональность обычно записывается в виде

$$P = \chi \epsilon_0 E. \quad (10.8)$$

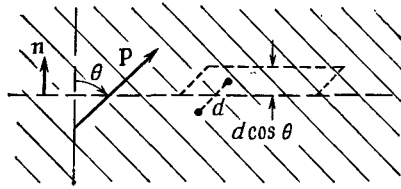
Постоянная  $\chi$  (греческое «хи») называется *диэлектрической восприимчивостью* диэлектрика.

Тогда выражение (10.7) приобретает вид

$$E = \frac{\sigma_{\text{своб}}}{\epsilon_0} \frac{1}{1 + \chi}, \quad (10.9)$$

откуда мы получаем множитель  $1/(1 + \chi)$ , показывающий, во сколько раз уменьшилось поле.

Фиг. 10.6. Количество заряда, прошедшее через элемент воображаемой поверхности в диэлектрике, пропорционально компоненте  $\mathbf{P}$ , нормальной к поверхности.



Напряжение между пластинами есть интеграл от электрического поля. Раз поле однородно, интеграл сводится просто к произведению  $E$  и расстояния между пластинами  $d$ . Мы получаем

$$V = Ed = \frac{\sigma_{\text{своб}} d}{\epsilon_0 (1 + \chi)}.$$

Полный заряд конденсатора есть  $\sigma_{\text{своб}} A$ , так что емкость, определяемая формулой (10.2), оказывается равной

$$C = \frac{\epsilon_0 A (1 + \chi)}{d} = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d}. \quad (10.10)$$

Мы объяснили явление, наблюдавшееся на опыте. Если заполнить плоский конденсатор диэлектриком, емкость возрастает на множитель

$$\kappa = 1 + \chi, \quad (10.11)$$

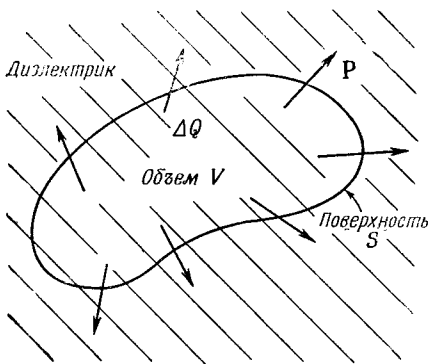
который характеризует свойства данного материала. Наше объяснение останется, конечно, неполным, пока мы не объясним (а это мы сделаем позже), как возникает атомная поляризация.

Обратимся теперь к чуть более сложному случаю — когда поляризация  $\mathbf{P}$  не всюду одинакова. Мы уже говорили, что если поляризация непостоянна, то вообще может возникнуть объемная плотность заряда, потому что с одной стороны в маленький элемент объема может войти больше зарядов, чем выйдет с другой. Как определить, сколько зарядов теряется или приобретает в маленьком объеме?

Подсчитаем сначала, сколько зарядов проходит через воображаемую плоскость, когда материал поляризуется. Количество заряда, проходящее через поверхность, есть просто  $P$ , умноженное на площадь поверхности, если поляризация направлена по нормали к поверхности. Разумеется, если поляризация касательна к поверхности, то через нее не пройдет ни одного заряда.

Продолжая прежние рассуждения, легко понять, что количество заряда, прошедшее через любой элемент поверхности, пропорционально компоненте  $\mathbf{P}$ , перпендикулярной к поверхности. Сравним фиг. 10.6 и 10.5. Мы видим, что уравнение (10.5) в общем случае должно быть записано так:

$$\sigma_{\text{пол}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}. \quad (10.12)$$



Ф и г. 10.7. Неоднородная поляризация  $\mathbf{P}$  может привести к появлению результирующего заряда внутри диэлектрика.

Если мы имеем в виду воображаемый элемент поверхности *внутри* диэлектрика, то формула (10.12) дает заряд, который прошел через поверхность, но не приводит к результирующему поверхностному заряду, потому что возникают равные и противоположно направленные вклады от диэлектрика по обе стороны поверхности.

Однако смещение зарядов может привести к появлению *объемной* плотности зарядов. Полный заряд, выдвинутый из объема  $V$  за счет поляризации, есть интеграл от внешней нормальной составляющей  $\mathbf{P}$  по поверхности  $S$ , охватывающей объем (фиг. 10.7). Такой же излишек зарядов противоположного знака остается внутри. Обозначая суммарный заряд внутри  $V$  через  $\Delta Q_{\text{пол}}$ , запишем

$$\Delta Q_{\text{пол}} = - \int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da. \quad (10.13)$$

Мы можем отнести  $\Delta Q_{\text{пол}}$  за счет объемного распределения заряда с плотностью  $\rho_{\text{пол}}$ , так что

$$\Delta Q_{\text{пол}} = \int_V \rho_{\text{пол}} dV. \quad (10.14)$$

Комбинируя оба уравнения, получаем

$$\int_V \rho_{\text{пол}} dV = - \int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da. \quad (10.15)$$

Мы получили разновидность теоремы Гаусса, связывающую плотность заряда поляризованного материала с вектором поляризации  $\mathbf{P}$ . Мы видим, что она согласуется с результатом, полученным для поверхностного поляризационного заряда или же для диэлектрика в плоском конденсаторе. Уравнение (10.15) с гауссовой поверхностью  $S$ , изображенной на фиг. 10.1, дает в правой части интеграл по поверхности, равный  $P \Delta A$ , а в левой части заряд внутри объема оказывается  $\sigma_{\text{пол}} \Delta A$ , так что мы снова получаем  $\sigma = P$ .

Точно так же, как мы делали в случае закона Гаусса для электростатики, мы можем перейти в уравнении (10.15) к дифференциальной форме, пользуясь математической теоремой Гаусса:

$$\int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{P} dV.$$

Мы получаем

$$\rho_{\text{пол}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (10.16)$$

Если поляризация неоднородна, ее дивергенция определяет появляющуюся в материале результирующую плотность зарядов. Подчеркнем, что это совсем *настоющая* плотность зарядов; мы называем ее «поляризационным зарядом», только чтобы помнить, откуда она взялась.

#### § 4. Уравнения электростатики для диэлектриков

Давайте теперь свяжем полученные нами результаты с тем, что мы уже узнали в электростатике. Основное уравнение имеет вид

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (10.17)$$

где  $\rho$  — плотность *всех* электрических зарядов. Поскольку уследить за поляризационными зарядами непросто, удобно разбить  $\rho$  на две части. Обозначим снова через  $\rho_{\text{пол}}$  заряды, появляющиеся за счет неоднородной поляризации, а остальную часть назовем  $\rho_{\text{своб}}$ . Обычно  $\rho_{\text{своб}}$  означает заряд, сообщаемый проводникам или распределенный известным образом в пространстве. В этом случае уравнение (10.17) приобретает вид

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{своб}} + \rho_{\text{пол}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{своб}} - \nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0},$$

или

$$\nabla \cdot \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right) = \frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_0}. \quad (10.18)$$

Уравнение для ротора от  $\mathbf{E}$ , конечно, не меняется:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (10.19)$$

Подставляя  $\mathbf{P}$  из уравнения (10.8), получаем более простое уравнение:

$$\nabla \cdot [(1 + \chi)\mathbf{E}] = \nabla \cdot (\chi\mathbf{E}) = \frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_0}. \quad (10.20)$$

Это и есть уравнения электростатики в присутствии диэлектриков. Они, конечно, не дают ничего нового, но имеют вид, более удобный для расчетов в тех случаях, когда  $\rho_{\text{своб}}$  известно, а поляризация  $\mathbf{P}$  пропорциональна  $\mathbf{E}$ .

Заметьте, что мы не вытащили «константу» диэлектрической проницаемости  $\kappa$  за знак дивергенции. Это потому, что она может не быть всюду одинаковой. Если она повсюду одинакова, то ее можно выделить в качестве множителя и уравнения станут в точности обычными уравнениями электростатики, где только  $\rho_{\text{своб}}$  нужно поделить на  $\kappa$ . В написанной нами форме уравнения годятся в общем случае, когда в разных местах поля расположены разные диэлектрики. В таких случаях решить уравнения иногда бывает очень трудно.

Здесь следует отметить один момент, имеющий историческое значение. На заре рождения электричества атомный механизм поляризации не был еще известен и о существовании  $\rho_{\text{пол}}$  не знали. Заряд  $\rho_{\text{своб}}$  считался равным всей плотности зарядов. Чтобы придать уравнениям Максвелла простой вид, вводили новый вектор  $\mathbf{D}$  как линейную комбинацию  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (10.21)$$

В результате уравнения (10.18) и (10.19) записывались в очень простом виде:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{своб}}, \quad \mathbf{V} \times \mathbf{E} = 0. \quad (10.22)$$

Можно ли их решить? Только когда задано третье уравнение, связывающее  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ . Если справедливо уравнение (10.8), то эта связь есть

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} = \kappa \varepsilon_0 \mathbf{E}. \quad (10.23)$$

Последнее уравнение обычно записывается так:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (10.24)$$

где  $\varepsilon$  — еще одна постоянная, описывающая диэлектрические свойства материалов. Она также называется «проницаемостью». (Теперь вы понимаете, почему в наших уравнениях появилось  $\varepsilon_0$ , это «проницаемость пустого пространства».)

Очевидно,

$$\varepsilon = \kappa \varepsilon_0 = (1 + \chi) \varepsilon_0. \quad (10.25)$$

Сейчас мы рассматриваем эти вещи уже с другой точки зрения, а именно что в вакууме всегда имеются самые простые уравнения, и если в каждом случае учесть все заряды, какова бы ни была причина их возникновения, то они всегда справедливы. Выделяя часть зарядов либо из соображений удобства, либо потому, что мы не хотим вникать в детали процесса, мы всегда можем при желании написать уравнения в любой удобной для нас форме.

Сделаем еще одно замечание. Уравнение  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$  представляет собой попытку описать свойства вещества. Но вещество исключительно сложно по своей природе, и подобное уравнение на самом деле неправильно. Так, если  $\mathbf{E}$  стано-

вится очень большим,  $\mathbf{D}$  перестает быть пропорциональным  $\mathbf{E}$ . В некоторых веществах пропорциональность нарушается уже при достаточно слабых полях. Кроме того, «константа» пропорциональности может зависеть от того, насколько быстро  $\mathbf{E}$  меняется со временем. Следовательно, уравнение такого типа есть нечто вроде приближенного уравнения типа закона Гука. Оно не может быть глубоким, фундаментальным уравнением. С другой стороны, наши основные уравнения для  $\mathbf{E}$  (10.17) и (10.19) выражают наиболее полное и глубокое понимание электростатики.

## § 5. Поля и силы в присутствии диэлектриков

Мы докажем сейчас ряд довольно общих теорем электростатики для тех случаев, когда имеются диэлектрики. Мы уже видели, что емкость плоского конденсатора при заполнении его диэлектриком увеличивается в определенное число раз. Сейчас можно показать, что это верно для емкости *любой* формы, если вся область вокруг двух проводников заполнена однородным линейным диэлектриком. В отсутствие диэлектрика уравнения, которые требуется решить, такие:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_0 = \frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_0} \quad \text{и} \quad \nabla \times \mathbf{E}_0 = 0.$$

Когда имеется диэлектрик, первое из этих уравнений изменяется, и мы получаем

$$\nabla \cdot (\kappa \mathbf{E}) = \frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_0} \quad \text{и} \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (10.26)$$

Далее, поскольку мы считаем  $\kappa$  всюду одинаковой, последние два уравнения можно записать в виде

$$\nabla \cdot (\kappa \mathbf{E}) = \frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_0} \quad \text{и} \quad \nabla \times (\kappa \mathbf{E}) = 0. \quad (10.27)$$

Следовательно, для  $\kappa \mathbf{E}$  получаются такие же уравнения, как для  $\mathbf{E}_0$ , и тогда они имеют решение  $\kappa \mathbf{E} = \mathbf{E}_0$ . Другими словами, поле всюду в  $\kappa$  раз меньше, чем в отсутствие диэлектрика. Поскольку разность потенциалов есть линейный интеграл от поля, она уменьшится во столько же раз. А так как заряд на электродах конденсатора в обоих случаях тот же самый, то уравнение (10.2) говорит, что емкость в присутствии всюду однородного диэлектрика увеличивается в  $\kappa$  раз.

Зададимся теперь вопросом, как взаимодействуют два заряженных проводника в диэлектрике. Рассмотрим жидкий диэлектрик, повсюду однородный. Мы уже видели раньше, что один из способов найти силу — это продифференцировать энергию по соответствующему расстоянию. Если заряды на проводниках равны и противоположны по знаку, то энергия

$U = Q^2/2C$ , где  $C$  — их емкость. С помощью принципа виртуальной работы любая компонента силы получается некоторым дифференцированием; например,

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{Q^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{C} \right). \quad (10.28)$$

Поскольку диэлектрик увеличивает емкость в  $n$  раз, все силы *уменьшатся* в такое же число раз.

Однако все это не так просто. Сказанное справедливо, только если диэлектрик жидкий. Любое перемещение проводников, окруженных твердым диэлектриком, изменяет условия механических напряжений в диэлектрике и его электрические свойства, а также несколько меняет механическую энергию диэлектрика. Движение проводников в жидкости не меняет свойств жидкости. Жидкость перетекает в другое место, но ее электрические свойства остаются неизменными.

Во многих старых книгах по электричеству изложение начинается с «основного» закона, по которому сила, действующая между двумя зарядами, есть

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 n r^2}, \quad (10.29)$$

а эта точка зрения абсолютно неприемлема. Во-первых, это не всегда верно; это справедливо только в мире, заполненном жидкостью; во-вторых, так получается лишь для постоянного значения  $n$ , что для большинства реальных материалов выполняется приближенно.

Гораздо легче начинать со всегда справедливого (для неподвижных зарядов) закона Кулона для зарядов в *вакууме*.

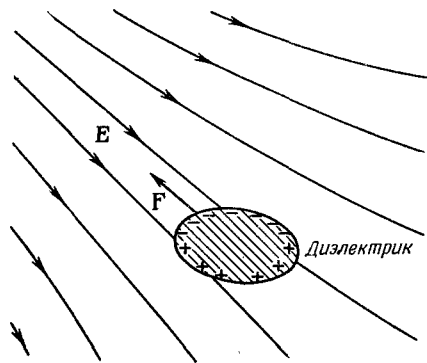
Что же происходит с зарядами в твердом теле? На это трудно ответить, потому что даже не вполне ясно, о чем идет речь. Если вы вносите заряды внутрь твердого диэлектрика, то возникают всякого рода давления и напряжения. Вы не можете считать работу виртуальной, не включив сюда также механическую энергию, необходимую для сжатия тела, а отличить однозначным образом электрические силы от механических, возникающих за счет самого материала, вообще говоря, очень трудно. К счастью, никому на самом деле не бывает нужно знать ответ на предложенный вопрос. Иногда нужно знать величину натяжений, которые могут возникнуть в твердом теле, а это можно вычислить. Но результаты здесь оказываются гораздо сложнее, чем простой ответ, полученный нами для жидкостей.

Неожиданно сложной оказывается следующая проблема в теории диэлектриков: почему заряженное тело подбирает маленькие кусочки диэлектрика? Если вы в сухой день причешетесь, то ваша расческа потом легко будет подбирать малень-

кие кусочки бумаги. Если вы не вдумались в этот вопрос, то, вероятно, сочтете, что на расческе заряды одного знака, а на бумаге противоположного. Но бумага ведь была сначала электрически нейтральной. У нее нет суммарного заряда, а она все же притягивается. Правда, иногда бумажки подскакивают к расческе, а затем отлетают, сразу же отталкиваясь от нее. Причина, конечно, заключается в том, что, коснувшись расчески, бумага сняла с нее немного отрицательных зарядов, а одноименные заряды отталкиваются. Но это все еще не дает ответа на первоначальный вопрос. Прежде всего, почему бумажки вообще притягиваются к расческе?

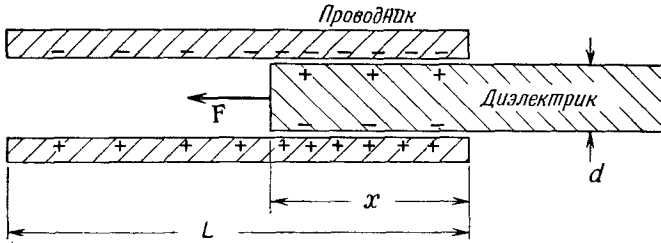
Ответ заключается в поляризации диэлектрика, помещенного в электрическое поле. Возникают поляризационные заряды обоих знаков, притягиваемые и отталкиваемые расческой. Однако в результате получается притяжение, потому что поле поблизости от расчески сильнее, чем вдали от нее, ведь расческа не бесконечна. Ее заряд локализован. Нейтральный кусочек бумаги не притянется ни к одной из параллельных пластин конденсатора. Изменение поля составляет существенную часть механизма притяжения.

Как показано на фиг. 10.8, диэлектрик всегда стремится из области слабого поля в область, где поле сильнее. В действительности можно показать, что сила, действующая на малые объекты, пропорциональна градиенту *квадрата* электрического поля. Почему она зависит от квадрата поля? Потому что индуцированные поляризационные заряды пропорциональны полям, а для данных зарядов силы пропорциональны полю. Однако, как мы уже указывали, *результатирующая* сила возникает, только если квадрат поля меняется от точки к точке. Следовательно, сила пропорциональна градиенту квадрата поля. Константа пропорциональности включает помимо всего прочего еще диэлектрическую проницаемость данного тела и зависит также от размеров и формы тела.



Ф и г. 10.8. На диэлектрик в неоднородном поле действует сила, направленная в сторону областей с большей напряженностью поля.





Ф и г. 10.9. Сила, действующая на диэлектрик в плоском конденсаторе, может быть вычислена с помощью закона сохранения энергии.

Есть еще одна близкая задача, в которой сила, действующая на диэлектрик, может быть найдена точно. Если мы возьмем плоский конденсатор, в котором плитка диэлектрика задвинута лишь частично (фиг. 10.9), то возникнет сила, вдвигающая диэлектрик внутрь. Провести детальное исследование силы очень трудно; оно связано с неоднородностями поля вблизи концов диэлектрика и пластин. Однако если мы не интересуемся деталями, а просто используем закон сохранения энергии, то силу легко вычислить. Мы можем определить силу с помощью ранее выведенной формулы. Уравнение (10.28) эквивалентно такому:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = +\frac{V^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x}. \quad (10.30)$$

Нам осталось только найти, как меняется емкость в зависимости от положения плитки диэлектрика.

Пусть полная длина пластин есть  $L$ , ширина их равна  $W$ , расстояние между пластинами и толщина диэлектрика равна  $d$ , а расстояние, на которое вдвинут диэлектрик, есть  $x$ . Емкость есть отношение полного свободного заряда на пластинах к разности потенциалов между пластинами. Выше мы видели, что при данном потенциале  $V$  поверхностная плотность свободных зарядов равна  $\kappa \epsilon_0 V/d$ . Следовательно, полный заряд пластин равен

$$Q = \frac{\kappa \epsilon_0 V}{d} xW + \frac{\epsilon_0 V}{d} (L-x)W,$$

откуда мы находим емкость

$$C = \frac{\epsilon_0 W}{d} (\kappa x + L-x). \quad (10.31)$$

С помощью (10.30) получаем

$$F_x = \frac{V^2}{2} \frac{\epsilon_0 W}{d} (\kappa - 1). \quad (10.32)$$

Но пользы от этого выражения не очень много, разве только вам понадобится определить силу именно в таких условиях. Мы хотели лишь показать, что можно подчас избежать страшных осложнений при определении сил, действующих на диэлектрики, если пользоваться энергией, как это было в настоящем случае.

В нашем изложении теории диэлектриков мы имели дело только с электрическими явлениями, принимая как факт, что поляризация вещества пропорциональна электрическому полю. Почему возникает такая пропорциональность — вопрос, представляющий, пожалуй, еще больший интерес для физики. Стоит нам понять механизм возникновения диэлектрической проницаемости с атомной точки зрения, как мы сможем использовать измерения диэлектрической проницаемости в изменяющихся условиях для получения подробных сведений о строении атомов и молекул. Эти вопросы будут частично изложены в следующей главе.

**ВНУТРЕННЕЕ УСТРОЙСТВО  
ДИЭЛЕКТРИКОВ**

**§ 1. Молекулярные диполи**

В этой главе мы поговорим о том, почему вещество бывает диэлектриком. В предыдущей главе мы указывали, что свойства электрических систем с диэлектриками можно было бы понять, предположив, что электрическое поле, действуя на диэлектрик, индуцирует в атомах дипольный момент. Именно, если электрическое поле  $E$  индуцирует средний дипольный момент в единице объема  $P$ , то диэлектрическая проницаемость  $\kappa$  дается выражением

$$\kappa - 1 = \frac{P}{\epsilon_0 E}. \quad (11.1)$$

О применениях этого выражения мы уже говорили; сейчас же нам нужно обсудить механизм возникновения поляризации внутри материала под действием электрического поля. Начнем с самого простого примера — поляризации газов. Но даже в газах возникают сложности: существуют два типа газов. Молекулы некоторых газов, например кислорода, в каждой молекуле которого имеются два симметричных атома, лишены собственного дипольного момента. Зато молекулы других газов, вроде водяного пара (у которого атомы водорода и кислорода образуют несимметричную молекулу), обладают постоянным электрическим дипольным моментом. Как мы отмечали в гл. 6 и 7, в молекуле водяного пара атомы водорода в среднем имеют положительный заряд, а атом кислорода — отрицательный. Поскольку центры тяжести положительного и отрицательного зарядов не совпадают, то распределение всего заряда в молекуле обладает дипольным момен-

§1. Молекулярные диполи

§2. Электронная поляризация

§3. Полярные молекулы; ориентационная поляризация

§4. Электрические поля в пустотах диэлектрика

§5. Диэлектрическая проницаемость жидкостей; формула Клаузиуса — Моссотти

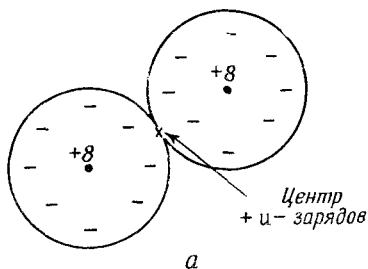
§6. Твердые диэлектрики

§7. Сегнетоэлектричество; титанат бария

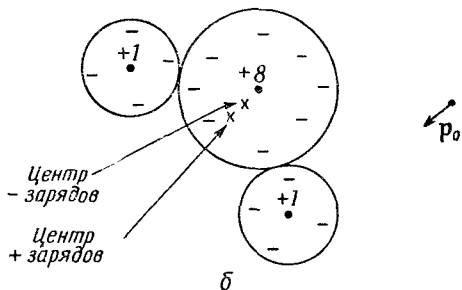
**Повторить:** гл. 31 (вып. 3)

«Как возникает показатель преломления», гл. 40 (вып. 4)  
«Принципы статистической механики»

Ф и г. 11.1. Молекула кислорода с нулевым дипольным моментом (а) и молекула воды с постоянным дипольным моментом  $P_0$  (б).



том. Такая молекула называется *полярной* молекулой. А у кислорода вследствие симметрии молекулы центр тяжести и положительных, и отрицательных зарядов один и тот же, так что это *неполярная* молекула. Она, правда,



может стать диполем, если ее поместить в электрическое поле. Формы этих двух типов молекул нарисованы на фиг. 11.1.

## § 2. Электронная поляризация

Займемся сначала поляризацией неполярных молекул. Начнем с простейшего случая одноатомного газа (например, гелия). Когда атом такого газа находится в электрическом поле, электроны его тянутся в одну сторону, а ядро — в другую, как показано на рис. 10.4 (стр. 200). Хотя атомы имеют очень большую жесткость по отношению к электрическим силам, которые мы можем приложить к ним на опыте, центры зарядов чуть-чуть смещаются относительно друг друга и индуцируется дипольный момент. В слабых полях величина смещения, а следовательно, и дипольного момента пропорциональна напряженности электрического поля. Смещение электронного распределения, которое приводит к этому типу индуцированного дипольного момента, называется *электронной поляризацией*.

Мы уже обсуждали воздействие электрического поля на атом в гл. 31 (вып. 3), когда занимались теорией показателя преломления. Подумав немного, вы сообразите, что теперь нужно сделать то же, что и тогда. Только теперь нас заботят поля, не меняющиеся со временем, тогда как показатель преломления был связан с полями, зависящими от времени.

В гл. 31 (вып. 3) мы предполагали, что центр электронного заряда атома, помещенного в осциллирующее электрическое поле, подчиняется уравнению

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + m\omega_0^2 x = q_e E. \quad (11.2)$$

Первый член — это произведение массы электрона на его ускорение, а второй — возвращающая сила; справа стоит сила, действующая со стороны внешнего электрического поля. Если электрическое поле меняется с частотой  $\omega$ , то уравнение (11.2) допускает решение

$$x = \frac{q_e E}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (11.3)$$

имеющее резонанс при  $\omega = \omega_0$ . Когда раньше мы нашли это решение, то интерпретировали  $\omega_0$  как частоту, при которой атом поглощает свет (она лежит либо в оптической, либо в ультрафиолетовой области, в зависимости от атома). Для нашей цели, однако, достаточно случая постоянных полей, т.е.  $\omega = 0$ ; поэтому мы можем пренебречь членом с ускорением в (11.2) и получаем смещение

$$x = \frac{q_e E}{m\omega_0^2}. \quad (11.4)$$

Отсюда находим дипольный момент  $p$  одного атома

$$p = q_e x = \frac{q_e^2 E}{m\omega_0^2}. \quad (11.5)$$

В таком подходе дипольный момент  $p$  действительно пропорционален электрическому полю.

Обычно пишут

$$p = \alpha \epsilon_0 E. \quad (11.6)$$

(Снова  $\epsilon_0$  вошло по историческим причинам.) Постоянная  $\alpha$  называется *поляризуемостью* атома и имеет размерность  $L^3$ . Это мера того, насколько легко индуцировать электрическим полем дипольный момент у атома. Сравнивая (11.5) и (11.6), получаем, что в нашей простой теории

$$\alpha = \frac{q_e^2}{\epsilon_0 m \omega_0^2} = \frac{4\pi e^2}{m \omega_0^2}. \quad (11.7)$$

Если в единице объема содержится  $N$  атомов, то поляризация (дипольный момент единицы объема) дается формулой

$$P = Np = N\alpha \epsilon_0 E. \quad (11.8)$$

Объединяя (11.1) и (11.8), получаем

$$\kappa - 1 = \frac{P}{\epsilon_0 E} = N\alpha, \quad (11.9)$$

или в силу (11.7)

$$\kappa - 1 = \frac{4\pi N e^2}{m \omega_0^2}. \quad (11.10)$$

С помощью уравнения (11.9) можно предсказать, что диэлектрическая проницаемость  $\kappa$  различных газов должна зависеть от плотности газа и от резонансной частоты  $\omega_0$ .

Наша формула, конечно, лишь очень грубое приближение, потому что в уравнении (11.2) мы воспользовались моделью, игнорирующей тонкости квантовой механики. Например, мы считали, что атом имеет только одну резонансную частоту, тогда как на самом деле их много. Чтобы по-настоящему вычислить поляризуемость атомов, нужно воспользоваться последовательной квантовомеханической теорией, однако и классический подход, изложенный выше, дает вполне разумную оценку.

Посмотрим, сможем ли мы получить правильный порядок величины диэлектрической проницаемости какого-нибудь вещества. Возьмем, к примеру, водород. Мы уже оценивали (вып. 4, гл. 38) энергию, необходимую для ионизации атома водорода, и получили приближенно

$$E \approx \frac{1}{2} \frac{m e^4}{\hbar^2}. \quad (11.11)$$

Для оценки собственной частоты  $\omega_0$  можно положить эту энергию равной  $\hbar \omega_0$  — энергии атомного осциллятора с собственной частотой  $\omega_0$ . Получаем

$$\omega_0 \approx \frac{1}{2} \frac{m e^4}{\hbar^3}.$$

Пользуясь этой величиной в уравнении (11.7), находим электронную поляризуемость

$$\alpha \approx 16\pi \left[ \frac{\hbar^2}{m e^2} \right]^3. \quad (11.12)$$

Величина  $(\hbar^2/m e^2)$  есть радиус основной орбиты атома Бора (см. вып. 4, гл. 38), равный 0,528 Å. При нормальном давлении и температуре (1 атм, 0°C) в газе на 1 см<sup>3</sup> приходится 2,69 · 10<sup>19</sup> атомов, и уравнение (11.9) дает

$$\kappa = 1 + (2,69 \cdot 10^{19}) 16\pi (0,528 \cdot 10^{-8})^3 = 1,00020. \quad (11.13)$$

Измеренная на опыте диэлектрическая проницаемость равна

$$\kappa_{\text{эксп}} = 1,00026.$$

Видите, наша теория почти правильна. Лучшего нельзя было и ожидать, потому что измерения проводились, конечно, с обычным водородом, обладающим двухатомными молекулами, а не одиночными атомами. Не следует удивляться тому, что поляризация атомов в молекуле не совсем такая, как поляризация отдельных атомов. На самом деле молекулярный эффект не столь велик. Точное квантовомеханическое вычисление величины  $\alpha$  для атомов водорода дает результат, превышающий (11.12) примерно на 12% (вместо 16л получается 18л), поэтому он предсказывает для диэлектрической проницаемости значение, более близкое к наблюдаемому. Во всяком случае, совершенно очевидно, что наша модель диэлектрика вполне хороша.

Еще одна проверка нашей теории. Попробуем применить уравнение (11.12) к атомам с большей частотой возбуждения. Например, чтобы отобрать электрон у гелия, требуется 24,5 в, тогда как для ионизации водорода необходимы 13,5 в. Поэтому мы предположим, что частота поглощения  $\omega_0$  для гелия должна быть примерно в два раза больше, чем для водорода, а  $\alpha$  должна быть меньше в четыре раза. Мы ожидаем, что

$$\kappa_{\text{гелий}} \approx 1,000050,$$

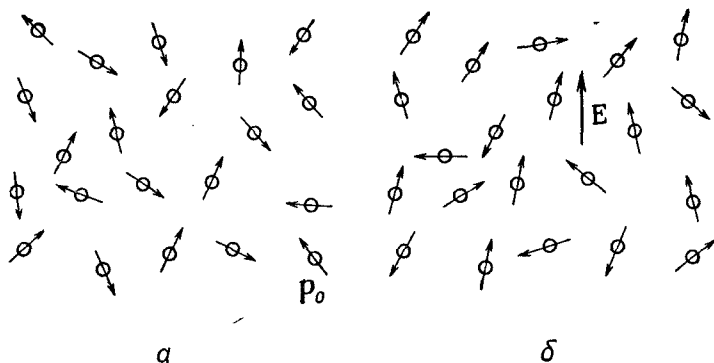
а экспериментально получено

$$\kappa_{\text{гелий}} = 1,000068,$$

так что наши грубые оценки показывают, что мы на верном пути. Итак, мы поняли диэлектрическую проницаемость неполярного газа, но только качественно, потому что пока мы еще не использовали правильную атомную теорию движения атомных электронов.

### **§ 3. Полярные молекулы; ориентационная поляризация**

Теперь рассмотрим молекулу, обладающую постоянным дипольным моментом  $p_0$ , например молекулу воды. В отсутствие электрического поля отдельные диполи смотрят в разных направлениях, так что суммарный момент в единице объема равен нулю. Но если приложить электрическое поле, то сразу же происходят две вещи: во-первых, индуцируется добавочный дипольный момент из-за сил, действующих на электроны; эта часть приводит к той же самой электронной поляризуемости, которую мы нашли для неполярной молекулы. При очень точном исследовании этот эффект, конечно, нужно учитывать, но мы пока пренебрежем им. (Его всегда можно добавить в конце.) Во-вторых, электрическое поле стремится выстроить отдельные



Фиг. 11.2. В газе полярных молекул отдельные моменты ориентированы случайным образом, средний момент в небольшом объеме равен нулю (а); под действием электрического поля в среднем возникает некоторое выстраивание молекул (б).

диполи, создавая результирующий момент в единице объема. Если бы в газе выстроились все диполи, поляризация была бы очень большой, но этого не происходит. При обычных температурах и напряженностях поля столкновения молекул при их тепловом движении не позволяют им как следует выстроиться. Но некоторое выстраивание все же происходит, а отсюда и небольшая поляризация (фиг. 11.2). Возникающая поляризация может быть подсчитана методами статистической механики, описанными в гл. 40 (вып. 4).

Чтобы использовать этот метод, нужно знать энергию диполя в электрическом поле. Рассмотрим диполь с моментом  $p_0$  в электрическом поле (фиг. 11.3). Энергия положительного заряда равна  $q\phi$  (1), а энергия отрицательного есть  $-q\phi$  (2). Отсюда получаем энергию диполя

$$U = q\phi(1) - q\phi(2) = qd \cdot \nabla\phi,$$

или

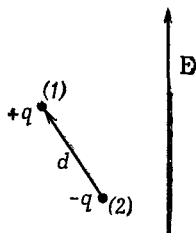
$$U = -p_0 \cdot E = -p_0 E \cos \theta, \quad (11.14)$$

где  $\theta$  — угол между  $p_0$  и  $E$ . Как и следовало ожидать, энергия становится меньше, когда диполи выстраиваются вдоль поля.

Теперь с помощью методов статистической механики мы выясним, насколько сильно диполи выстраиваются. В гл. 40 (вып. 4) мы нашли, что в состоянии теплового равновесия относительное число молекул с потенциальной энергией  $U$  пропорционально

$$e^{-U/kT}, \quad (11.15)$$





*Ф и г. 11.3. Энергия диполя  $p_0$  в поле  $E$  равна  $-p_0 \cdot E$ .*

где  $U(x, y, z)$  — потенциальная энергия как функция положения. Опираясь теми же аргументами, можно сказать, что если потенциальная энергия как функция угла имеет вид (11.14), то число молекул под углом  $\theta$ , приходящееся на *единичный телесный угол*, пропорционально  $\exp(-U/kT)$ .

Полагая число молекул на *единичный телесный угол*, направленных под углом  $\theta$ , равным  $n(\theta)$ , имеем

$$n(\theta) = n_0 e^{+p_0 E \cos \theta / kT}. \quad (11.16)$$

Для обычных температур и полей показатель экспоненты мал, и, разлагая экспоненту, можно воспользоваться приближенным выражением

$$n(\theta) = n_0 \left( 1 + \frac{p_0 E \cos \theta}{kT} \right). \quad (11.17)$$

Найдем  $n$ , проинтегрировав (11.17) по всем углам; результат должен быть равен  $N$ , т.е. числу молекул в единице объема. Среднее значение  $\cos \theta$  при интегрировании по всем углам есть нуль, так что интеграл равен просто  $n_0$ , умноженному на полный телесный угол  $4\pi$ . Получаем

$$n_0 = \frac{N}{4\pi}. \quad (11.18)$$

Из (11.17) видно, что вдоль поля ( $\cos \theta = 1$ ) будет ориентировано больше молекул, чем против поля ( $\cos \theta = -1$ ). Поэтому в любом малом объеме, содержащем много молекул, возникнет суммарный дипольный момент на единицу объема, т.е. поляризация  $P$ . Чтобы вычислить  $P$ , нужно знать векторную сумму всех молекулярных моментов в единице объема. Мы знаем, что результат будет направлен вдоль  $E$ , поэтому нужно только просуммировать компоненты в этом направлении (компоненты, перпендикулярные  $E$ , при суммировании дадут нуль):

$$P = \sum_{\text{По единичному объему}} p_0 \cos \theta_i.$$

Мы можем оценить сумму, проинтегрировав по угловому рас-

пределению. Телесный угол, отвечающий  $\theta$ , есть  $2\pi \sin \theta d\theta$ ; отсюда

$$P = \int_0^\pi n(\theta) p_0 \cos \theta 2\pi \sin \theta d\theta. \quad (11.19)$$

Подставляя вместо  $n(\theta)$  его выражение из (11.17), имеем

$$P = -\frac{N}{2} \int_0^\pi \left(1 + \frac{p_0 E}{kT} \cos \theta\right) p_0 \cos \theta d(\cos \theta),$$

что легко интегрируется и приводит к следующему результату:

$$P = \frac{N p_0^2 E}{3kT}. \quad (11.20)$$

Поляризация пропорциональна полю  $E$ , поэтому диэлектрические свойства будут обычные. Кроме того, как мы и ожидаем, поляризация обратно пропорциональна температуре, потому что при более высоких температурах столкновения больше разрушают выстроенность. Эта зависимость вида  $1/T$  называется *законом Кюри*. Квадрат постоянного момента  $p_0$  появляется по следующей причине: в данном электрическом поле выстраивающая сила зависит от  $p_0$ , а средний момент, возникающий при выстраивании, снова пропорционален  $p_0$ . Средний индуцируемый момент пропорционален  $p_0^2$ .

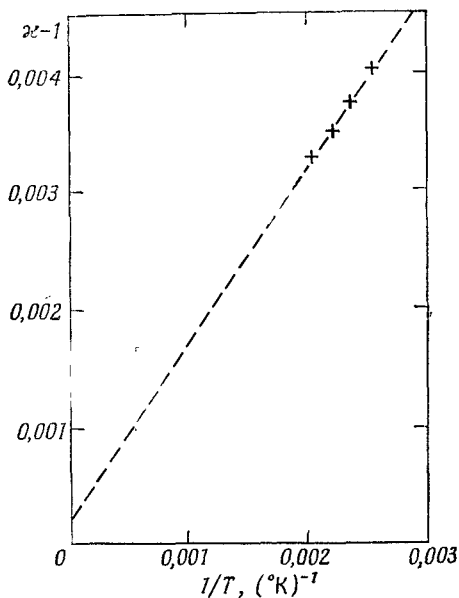
Теперь посмотрим, насколько хорошо уравнение (11.20) согласуется с экспериментом. Возьмем водяной пар. Поскольку мы не знаем, чему равно  $p_0$ , то не можем прямо вычислить и  $P$ , но уравнение (11.20) предсказывает, что  $\kappa - 1$  должна меняться обратно пропорционально температуре, и это нам следует проверить.

Из (11.20) получаем

$$\kappa - 1 = \frac{P}{\epsilon_0 E} = \frac{N p_0^2}{3\epsilon_0 kT}, \quad (11.21)$$

так что  $\kappa - 1$  должна меняться прямо пропорционально плотности  $N$  и обратно пропорционально абсолютной температуре. Диэлектрическая проницаемость была измерена при нескольких значениях давления и температуры, выбранных таким образом, чтобы число молекул в единице объема оставалось постоянным\*. (Заметим, что, если бы все измерения выполнялись при постоянном давлении, число молекул в единице объема уменьшалось бы линейно с повышением температуры, а  $\kappa - 1$

\* S ä n g e r, S t e i g e r, G ä c h t e r, Helvetica Physica Acta, 5, 200 (1932).



Ф и г. 11.4. Измеренные значения диэлектрической проницаемости водяного пара при нескольких температурах.

изменялась бы как  $T^{-2}$ , а не как  $T^{-1}$ .) На фиг. 11.4 мы отложили измеренные значения  $\epsilon - 1$  как функцию  $1/T$ . Зависимость, предсказываемая формулой (11.21), выполняется хорошо.

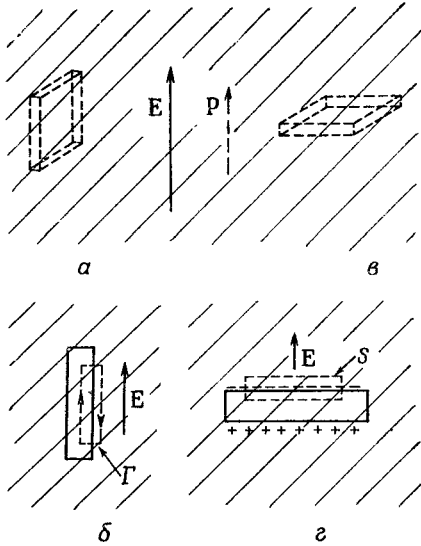
Есть еще одна особенность диэлектрической проницаемости полярных молекул — ее изменение в

зависимости от частоты внешнего поля. Благодаря тому что молекулы имеют момент инерции, тяжелым молекулам требуется определенное время, чтобы повернуться в направлении поля. Поэтому, если использовать частоты из верхней микроволновой зоны или из еще более высокой, полярный вклад в диэлектрическую проницаемость начинает спадать, так как молекулы не успевают следовать за полем. В противоположность этому электронная поляризуемость все еще остается неизменной вплоть до оптических частот, поскольку инерция электронов меньше.

#### § 4. Электрические поля в пустотах диэлектрика

Теперь мы переходим к интересному, но сложному вопросу о диэлектрической проницаемости плотных веществ. Возьмем, например, жидкий гелий, или жидкий аргон, или еще какое-нибудь неполярное вещество. Мы по-прежнему ожидаем, что у них есть электронная поляризуемость. Но в плотных средах значение  $P$  может быть велико, поэтому в поле, действующее на отдельный атом, вклад будет давать поляризация атомов, находящихся по соседству. Возникает вопрос, чему равно электрическое поле, действующее на отдельный атом?

Фиг. 11.5. Поле внутри щели, вырезанной в диэлектрике, зависит от ее формы и ориентации.



Вообразите, что между пластинами конденсатора находится жидкость. Если пластины заряжены, они создадут в жидкости электрическое поле. Но каждый атом имеет заряды, и полное поле  $E$  есть сумма обоих этих вкладов. Это истинное электрическое поле в жидкости меняется очень-очень быстро от точки к точке. Оно чрезвычайно велико внутри атомов, особенно вблизи ядра, и сравнительно мало между атомами. Разность потенциалов между пластинами есть интеграл от этого полного поля. Если мы пренебрежем всеми быстрыми изменениями, то можем представить себе некое *среднее* электрическое поле  $E$ , равное как раз  $V/d$ . (Именно это поле мы использовали в предыдущей главе.) Это поле мы должны себе представлять как среднее по пространству, содержащему много атомов.

Вы можете подумать, что «средний» атом в «среднем» положении почувствует именно это среднее поле. Но все не так просто, и в этом можно убедиться, представив, что в диэлектрике имеются отверстия разной формы. Предположим, что мы вырезали в поляризованном диэлектрике щель, ориентированную параллельно полю (фиг. 11.5, а). Поскольку мы знаем, что  $\nabla \times E = 0$ , то линейный интеграл от  $E$  вдоль кривой  $\Gamma$ , направленной так, как показано на фиг. 11.5, б, должен быть равен нулю. Поле внутри щели должно давать такой вклад, который в точности погасит вклад от поля вне щели. Поэтому поле  $E_0$  в центре длинной тонкой щели равно  $E$ , т.е. среднему электрическому полю, найденному в диэлектрике.

Рассмотрим теперь другую щель, повернутую своей широкой стороной перпендикулярно  $E$  (фиг. 11.5, в). В этом случае поле  $E_0$  в щели не совпадает с  $E$ , потому что на стенках щели возникают поляризационные заряды. Применяв закон Гаусса

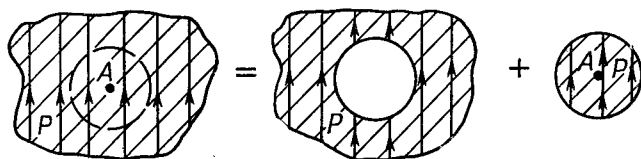
к поверхности  $S$ , изображенной на фиг. 11.5,  $z$ , мы находим, что поле  $E_0$  *внутри щели* дается выражением

$$E_0 = E + \frac{P}{\epsilon_0}, \quad (11.22)$$

где  $E$ , как и раньше, — электрическое поле в диэлектрике. (Гауссова поверхность охватывает поверхностный поляризационный заряд  $\sigma_{\text{пол}} = P$ .) Мы отмечали в гл. 10, что  $\epsilon_0 E + P$  часто обозначают через  $D$ , поэтому  $\epsilon_0 E_0 = D_0$  равно величине  $D$  в диэлектрике.

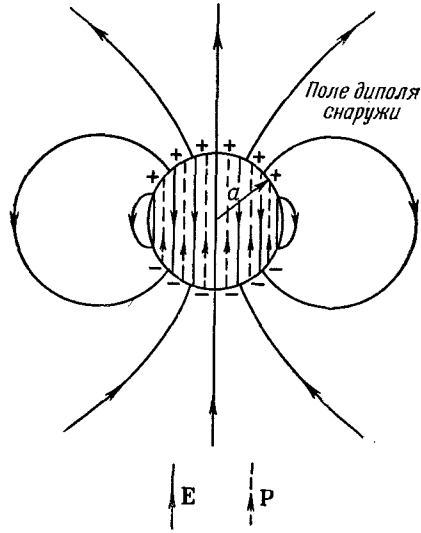
В ранний период истории физики, когда считалось очень важным определять каждую величину прямым экспериментом, физики были очень довольны, обнаружив, что они могут определить то, что понимают под  $E$  и  $D$  в диэлектрике, не ползая в промежутках между атомами. Среднее поле  $E$  численно равно полю  $E_0$ , измеренному в щели, параллельной полю. А поле  $D$  могло быть измерено с помощью  $E_0$ , найденной в щели, перпендикулярной полю. Но никто эти поля никогда не измерял (таким способом во всяком случае), так что это одна из многих бесплодных проблем.

В большинстве жидкостей, не слишком сложных по своему строению, каждый атом в среднем так окружен другими атомами, что можно с хорошей точностью считать его находящимся в *сферической полости*. И тогда мы спросим: «Чему равно поле в сферической полости?» Мы замечаем, что вырезание сферической дырки в однородном поляризованном диэлектрике равносильно отбрасыванию шарика из поляризованного материала, так что мы можем ответить на этот вопрос. (Мы должны представить себе, что поляризация была «заморожена» до того, как мы вырезали дырку.) Однако в силу принципа суперпозиции поле внутри диэлектрика, до того как оттуда был вынут шарик, есть сумма полей от всех зарядов вне объема шарика плюс полей от зарядов внутри поляризованного шарика. Следовательно, если поле внутри однородного диэлектрика мы назовем



Фиг. 11.6. Поле в любой точке  $A$  диэлектрика можно представить в виде суммы поля сферической дырки и поля сферического вкладыша.

Фиг. 11.7. Электрическое поле однородно поляризованного шарика.



$E$ , то можно записать

$$E = E_{\text{дырка}} + E_{\text{шарик}}, \quad (11.23)$$

где  $E_{\text{дырка}}$  — поле в дырке, а  $E_{\text{шарик}}$  — поле в однородно поляризованном шарике (фиг. 11.6). Поле однородно поляризованного шарика показано на фиг. 11.7. Электрическое поле внутри шарика однородно и равно

$$E_{\text{шарик}} = -\frac{P}{3\epsilon_0}. \quad (11.24)$$

С помощью (11.23) получаем

$$E_{\text{дырка}} = E + \frac{P}{3\epsilon_0}. \quad (11.25)$$

Поле в сферической полости больше среднего поля на величину  $P/3\epsilon_0$ . (Сферическая дырка дает поле, находящееся на  $1/3$  пути от поля параллельной щели к полю перпендикулярной щели.)

### § 5. Диэлектрическая проницаемость жидкостей; формула Клаузиуса — Моссотти

В жидкости мы ожидаем, что поле, поляризующее отдельный атом, скорее похоже на  $E_{\text{дырка}}$ , чем просто на  $E$ . Если взять  $E_{\text{дырка}}$  из (11.25) в качестве поляризирующего поля, входящего в (11.6), то уравнение (11.8) приобретет вид

$$P = N\alpha\epsilon_0 \left( E + \frac{P}{3\epsilon_0} \right), \quad (11.26)$$

или

$$P = \frac{N\alpha}{1 - (N\alpha/3)} \epsilon_0 E. \quad (11.27)$$

Вспоминая, что  $\kappa - 1$  как раз равна  $P/\epsilon_0 E$ , получаем

$$\kappa - 1 = \frac{N\alpha}{1 - (N\alpha/3)}, \quad (11.28)$$

что определяет диэлектрическую проницаемость жидкости  $\kappa$  через атомную поляризуемость  $\alpha$ . Это формула Клаузиуса — Москотти.

Если  $N\alpha$  очень мало, как, например, для газа (потому что там мала плотность  $N$ ), то членом  $N\alpha/3$  можно пренебречь по сравнению с 1, и мы получаем наш старый результат — уравнение (11.9), т.е.

$$\kappa - 1 = N\alpha. \quad (11.29)$$

Давайте сравним уравнение (11.28) с некоторыми экспериментальными данными. Сначала стоит обратиться к газам, для которых из измерений  $\kappa$  можно с помощью уравнения (11.29) найти значение  $\alpha$ . Так, для дисульфида углерода при нулевой температуре по Цельсию диэлектрическая проницаемость равна 1,0029, так что  $N\alpha = 0,0029$ . Плотность газа легко вычислить, а плотность жидкостей можно найти в справочниках. При  $20^\circ\text{C}$  плотность жидкого  $\text{CS}_2$  в 381 раз выше плотности газа при  $0^\circ\text{C}$ . Это значит, что  $N$  в 381 раз больше в жидкости, чем в газе, а отсюда (если сделать допущение, что исходная атомная поляризуемость дисульфида углерода не меняется при его конденсации в жидкое состояние)  $N\alpha$  в жидкости в 381 раз больше 0,0029, или равно 1,11. Заметьте, что  $N\alpha/3$  составляет почти 0,4. С помощью этих чисел мы предсказываем, что величина диэлектрической проницаемости равна 2,76, что достаточно хорошо согласуется с наблюдаемым значением 2,64.

В табл. 11.1 мы приводим ряд экспериментальных данных по разным веществам, а также значения диэлектрической

Таблица 11.1 ● ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ЖИДКОСТЕЙ ИЗ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ГАЗА

Вещество	Газ			Жидкость				
	$\kappa_{\text{газ}}$	$N\alpha$	Плотность	Плотность	Отношение*	$N\alpha$	$\kappa_{\text{предсказ}}$	$\kappa_{\text{набл}}$
$\text{CS}_2$	1,0029	0,0029	0,00339	1,293	381	1,11	2,76	2,64
$\text{O}_2$	1,000523	0,000523	0,00143	1,19	832	0,435	1,509	1,507
$\text{CCl}_4$	1,0030	0,0030	0,00489	1,59	325	0,977	2,45	2,24
Ar	1,000545	0,000545	0,00178	1,44	810	0,441	1,517	1,54

\* Плотность жидкости/Плотность газа.

проницаемости, вычисленной, как только что было описано, по формуле (11.28). Согласие между опытом и теорией для аргона и кислорода даже лучше, чем для  $CS_2$ , и не столь хорошее для четыреххлористого углерода. В целом результаты показывают, что уравнение (11.28) работает с хорошей точностью.

Наш вывод уравнения (11.28) справедлив только для *электронной* поляризации в жидкостях. Для полярных молекул вроде  $H_2O$  он неверен. Если провести такие же вычисления для воды, то для  $N\alpha$  получим значение 13,2, что означает, что диэлектрическая проницаемость этой жидкости *отрицательна*, тогда как опытное значение  $\epsilon$  равно 80. Дело здесь связано с неправильной трактовкой постоянных диполей, и Онзагер указал правильный способ решения. Мы не можем сейчас останавливаться на этом вопросе, но если он вас интересует, то подробно это обсуждается в книге Киттеля «Введение в физику твердого тела»\*.

## § 6. Твердые диэлектрики

Обратимся теперь к твердым телам. Первый интересный факт относительно твердых тел заключается в том, что у них бывает постоянная поляризация, которая существует даже и без приложения внешнего электрического поля. Примеры можно найти у веществ типа воска, который содержит длинные молекулы с постоянным дипольным моментом. Если растопить немного воску и, пока он еще не затвердел, наложить на него сильное электрическое поле, чтобы дипольные моменты частично выстроились, то они останутся в таком положении и после того, как воск затвердеет. Твердое вещество будет обладать постоянной поляризацией, которая остается и в отсутствие поля. Такое вещество называется *электретом*.

На поверхности электрета расположены постоянные поляризационные заряды. Электрет представляет собой электрический аналог магнита, однако пользы от него гораздо меньше, потому что свободные заряды воздуха притягиваются к его поверхности и в конце концов нейтрализуют поляризационные заряды. Электрет «разряжается» и заметного внешнего поля не создает.

Постоянная внутренняя поляризация  $P$  встречается и у некоторых кристаллических веществ. В таких кристаллах каждая элементарная ячейка решетки обладает одним и тем же постоянным дипольным моментом (фиг. 11.8). Все диполи направлены в одну сторону даже в отсутствие электрического поля. Многие

---

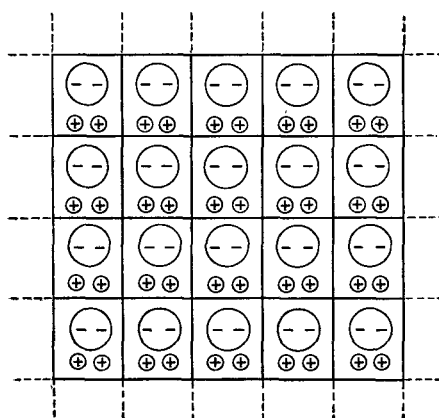
\* Имеется перевод: Ч. К и т е л ь, «Введение в физику твердого тела», М., 1962.— *Прим. ред.*



сложные кристаллы обладают такой поляризацией; обычно мы этого не замечаем, потому что создаваемое ими внешнее поле, как и у электретов, разряжается.

Если, однако, внутренние дипольные моменты кристалла меняются, то внешнее поле становится заметным, потому что поляризующие заряды не успевают собраться и нейтрализовать поляризационные заряды. Если диэлектрик находится в конденсаторе, свободные заряды индуцируются на электродах. Моменты могут, например, измениться вследствие теплового расширения, если нагреть диэлектрик. Такой эффект называется *пироэлектричеством*. Аналогично, если менять напряжения в кристалле, скажем, сгибая его, то момент может снова немного измениться, и тогда обнаружится слабый электрический эффект, называемый *пьезоэлектричеством*.

Для кристаллов, не обладающих постоянным моментом, можно развить теорию диэлектрической проницаемости, куда включается электронная поляризуемость атомов. Делается это почти так же, как для жидкостей. Некоторые кристаллы имеют внутренние моменты, и вращение их также вносит вклад в  $\kappa$ . В ионных кристаллах, таких, как NaCl, возникает также *ионная поляризуемость*. Кристалл состоит из положительных и отрицательных ионов, расположенных в шахматном порядке, и в электрическом поле положительные ионы тянутся в одну сторону, а отрицательные — в другую; возникает результирующее смещение положительных и отрицательных зарядов, а следовательно, и объемная поляризация. Мы могли бы оценить величину ионной поляризуемости, зная жесткость кристаллов соли, но мы не будем сейчас останавливаться на этом вопросе.



Ф и г. 11.8. Сложная кристаллическая решетка может иметь постоянную внутреннюю поляризацию  $P$ .

## § 7. Сегнетоэлектричество; титанат бария

Мы опишем здесь особый класс кристаллов, которые, можно сказать, почти случайно обладают «встроенным» постоянным электрическим моментом. Ситуация здесь настолько критична, что, если слегка увеличить температуру выше некоторой, кристалл этого класса совсем потеряет постоянный момент. С другой стороны, если структура кристалла близка к кубической, так что электрические моменты могут располагаться в разных направлениях, можно обнаружить большие изменения полного момента при изменении приложенного электрического поля. Все моменты переворачиваются в направлении поля, и мы получаем большой эффект. Вещества, обладающие такого рода постоянным моментом, называются *сегнетоэлектриками* \*.

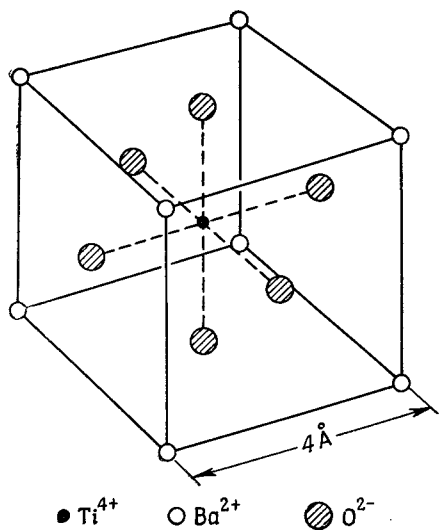
Мы хотели бы объяснить механизм сегнетоэлектричества на частном примере какого-нибудь сегнетоэлектрического материала. Сегнетоэлектрические свойства могут возникать несколькими путями; однако мы разберем только один из них на примере таинственного титаната бария ( $\text{BaTiO}_3$ ). Это вещество обладает кристаллической решеткой, основная ячейка которого изображена на фиг. 11.9. Оказывается, что выше некоторой температуры (а именно  $118^\circ\text{C}$ ) титанат бария — обычный диэлектрик с огромной диэлектрической проницаемостью, а ниже этой температуры он неожиданно приобретает постоянный момент.

При вычислении поляризации твердых тел мы должны сначала найти локальные поля в каждой элементарной ячейке. Причем для этого нужно ввести поля самой поляризации, как это делалось в случае жидкости. Но кристалл — не однородная жидкость, так что мы не можем взять в качестве локального поля то, что мы нашли в сферической дыре. Если мы сделаем это для кристалла, то окажется, что множитель  $1/3$  в уравнении (11.24) слегка изменится, но ненамного. (Для простого кубического кристалла он равен в точности  $1/3$ .) Поэтому предположим в нашем предварительном обсуждении, что этот множитель для  $\text{BaTiO}_3$  действительно равен  $1/3$ .

Далее, когда мы писали уравнение (11.28), вам, наверное, было интересно знать, что случится, если  $N\alpha$  станет больше 3. На первый взгляд величина  $\chi$  должна бы стать отрицательной. Но такого наверняка не может быть. Посмотрим, что произой-

---

\* По-английски сегнетоэлектричество называется ferroelectricity (ферроэлектричество); этот термин возник по аналогии с ферромагнетизмом: наличие спонтанного момента (электрического в сегнетоэлектриках, магнитного в ферромагнетиках), точки Кюри, гистерезиса и т. п. Однако физическая природа этих групп явлений совершенно различна. — *Прим. ред.*



Фиг. 11.9. Элементарная ячейка  $\text{BaTiO}_3$ .

Атомы в действительности заполняют большую часть пространства; показаны только положения их центров.

дет, если в каком-нибудь определенном кристалле постепенно увеличивать значение  $\alpha$ . По мере роста  $\alpha$  растет и поляризация, создавая большее локальное поле. Но увеличившееся локальное поле запо-

ляризует атом еще больше, дополнительно усиливая само локальное поле. Если атомы достаточно «податливы», процесс продолжается; возникает своего рода обратная связь, приводящая к безудержному росту поляризации (если предположить, что поляризация каждого атома увеличивается пропорционально полю). Условие «разгона» возникает при  $N\alpha = 3$ . Поляризация, конечно, не обращается в бесконечность, потому что при сильных полях пропорциональность между индуцированным моментом и электрическим полем нарушается, так что наши формулы становятся неправильными. А получается то, что в решетку, оказывается, «встроена» большая внутренняя самопроизвольная поляризация.

В случае  $\text{BaTiO}_3$  вдобавок к электронной поляризации имеется довольно большая ионная поляризация, обусловленная, как предполагают, ионами титана, которые могут слегка сдвигаться внутри кубической решетки. Решетка сопротивляется большим смещениям, так что ион титана, переместившись на небольшое расстояние, затормаживается и останавливается. Но тогда у кристаллической решетки образуется постоянный дипольный момент.

У большинства сегнетоэлектрических кристаллов такая ситуация действительно возникает при всех достижимых температурах. Однако титанат бария представляет особый интерес: он так деликатно устроен, что при малейшем уменьшении  $N\alpha$  момент «высвобождается». Поскольку  $N$  с повышением температуры уменьшается (вследствие теплового расширения), то можно изменять  $N\alpha$ , меняя температуру. Ниже критической

температуры момент сразу образуется, и тогда, накладывая внешнее поле, поляризацию легко повернуть и закрепить в нужном направлении.

Попробуем разобраться в происходящем более подробно. Назовем критической температуру  $T_c$ , при которой  $N\alpha$  равно в точности 3. При увеличении температуры значение  $N$  немного уменьшается вследствие расширения решетки. Поскольку расширение мало, мы можем сказать, что вблизи критической температуры

$$N\alpha = 3 - \beta(T - T_c), \quad (11.30)$$

где  $\beta$  — малая константа, того же порядка величины, что и коэффициент теплового расширения, т. е. около  $10^{-5} - 10^{-6} \text{град}^{-1}$ . Подставляя это в выражение (11.28), получаем

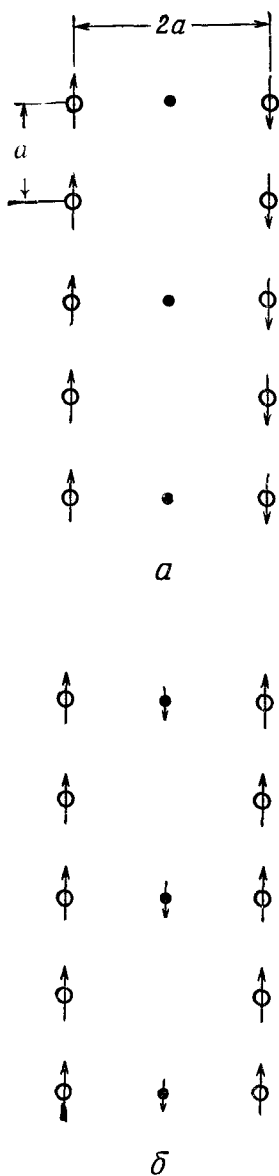
$$\kappa - 1 = \frac{3 - \beta(T - T_c)}{\beta(T - T_c)/3}.$$

Поскольку мы считаем величину  $\beta(T - T_c)$  малой по сравнению с единицей, можно записать приближенно

$$\kappa - 1 \approx \frac{9}{\beta(T - T_c)}. \quad (11.31)$$

Это, конечно, справедливо только для  $T > T_c$ . Мы видим, что если температура чуть выше критической, то величина  $\kappa$  огромна. Из-за того, что  $N\alpha$  так близко к 3, возникает громадный эффект усиления и диэлектрическая проницаемость легко достигает величины от 50 000 до 100 000. Она тоже весьма чувствительна к температуре. При увеличении температуры диэлектрическая проницаемость уменьшается обратно пропорционально температуре, но в отличие от дипольного газа, где разность  $\kappa - 1$  обратно пропорциональна абсолютной температуре, у сегнетоэлектриков она меняется обратно пропорционально разности между абсолютной и критической температурами (этот закон называется *законом Кюри — Вейсса*).

Что получается, когда мы понижаем температуру до критического значения? Если кристаллическая решетка состоит из элементарных ячеек вида, изображенного на фиг. 11.9, то, очевидно, можно выбрать цепочки ионов вдоль вертикальных линий. Одна из них состоит попеременно из ионов кислорода и титана. Имеются и другие цепочки, состоящие либо из ионов бария, либо из ионов кислорода, но расстояния между ионами вдоль таких линий оказываются больше. Используем простую модель, вообразив ряд ионных цепочек (фиг. 11.10, а). Вдоль цепочки, которую мы назовем главной, расстояние между ионами равно  $a$ , что составляет *половину* постоянной решетки;



Ф и г. 11.10. Модели сегнетоэлектрика.

*a* — антисегнетоэлектрик;  
*б* — нормальный сегнетоэлектрик.

поперечное расстояние между одинаковыми цепочками равно  $2a$ . В промежутке имеются менее плотные цепочки, которые мы пока не будем рассматривать. Чтобы немного упростить наш анализ, предположим еще, что все ионы главной цепочки одинаковы. (Упрощение не очень значительное, потому что все важные эффекты еще останутся. Это просто одна из хитростей теоретической физики. Сначала решают видоизмененную задачу, потому что так в первый раз ее легче понять, а затем, разобравшись, как все происходит, вносят все усложнения.)

Попробуем теперь выяснить, что будет происходить в нашей модели. Предположим, что дипольный момент каждого иона равен  $p$ , и пусть мы хотим вычислить поле вблизи одного из ионов в цепочке. Мы должны найти сумму полей от всех остальных ионов. Сначала вычислим поле от диполей только в одной вертикальной цепочке; об остальных цепочках поговорим позже. Поле на расстоянии  $r$  от диполя в направлении вдоль его оси дается формулой

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3}. \quad (11.32)$$

Для точки вблизи любого иона прочие диполи, расположенные на одинаковом расстоянии кверху и книзу от него, дают поля в одном и том же направлении, поэтому для всей цепочки получаем

$$E_{\text{цепочка}} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 a^3} \left( 2 + \frac{2}{8} + \frac{2}{27} + \frac{2}{64} + \dots \right) = \frac{p}{\epsilon_0} \frac{0,383}{a^3}. \quad (11.33)$$

Не представляет большого труда показать, что если бы наша модель была подобна кубическому кристаллу, т. е. если бы следующая идентичная линия проходила на расстоянии  $a$ , число

0,383 превратилось бы в  $1/3$  ( $\sim 0,333$ ). Другими словами, если бы соседние линии проходили на расстоянии  $a$ , они вносили бы в нашу сумму всего лишь  $-0,050$ . Однако следующая главная цепочка, которую мы рассмотрим, находится на расстоянии  $2a$ , и, как вы помните из гл. 7, поле, создаваемое периодической структурой, спадает с расстоянием экспоненциально. Поэтому эти линии вносят в сумму гораздо меньше  $-0,050$ , и мы можем просто пренебречь всеми остальными цепочками.

Теперь нужно выяснить, какова должна быть поляризуемость  $\alpha$ , чтобы привести в действие механизм разгона. Предположим, что индуцированный момент  $p$  каждого атома цепочки в соответствии с уравнением (11.6) пропорционален действующему на него полю. Поляризуемое поле, действующее на атом, мы получаем из  $E_{\text{цепочка}}$  с помощью формулы (11.32). Итак, мы имеем два уравнения:

$$p = \alpha \epsilon_0 E_{\text{цепочка}}$$

и

$$E_{\text{цепочка}} = \frac{0,383}{a^3} \frac{p}{\epsilon_0}.$$

Имеются два решения: когда  $E$  и  $p$  оба равны нулю и когда  $E$  и  $p$  не равны нулю, но при условии, что

$$\alpha = \frac{a^3}{0,383}.$$

Таким образом, если  $\alpha$  достигает величины  $a^3/0,383$ , устанавливается постоянная поляризация, поддерживаемая своим собственным полем. Это критическое равенство должно достигаться для титаната бария как раз при температуре  $T_c$ . (Заметьте, что если бы поляризуемость  $\alpha$  была больше критического значения для слабых полей, то она уменьшилась при больших полях и в точке равновесия установится полученное нами равенство.)

Для  $\text{BaTiO}_3$  промежуток  $a$  равен  $2 \cdot 10^{-8}$  см, поэтому мы должны ожидать значения  $\alpha = 21,8 \cdot 10^{-24}$  см<sup>3</sup>. Мы можем сравнить эту величину с известными величинами поляризуемости отдельных атомов. Для кислорода  $\alpha = 30,2 \cdot 10^{-24}$  см<sup>3</sup>. (Мы на верном пути!) Но для титана  $\alpha = 2,4 \cdot 10^{-24}$  см<sup>3</sup>. (Слишком мало.) В нашей модели нам, видимо, следует взять среднее. (Мы могли бы рассчитать снова цепочку для перемежающихся атомов, но результат был бы почти такой же.) Итак,  $\alpha_{\text{средн}} = 16,3 \cdot 10^{-24}$  см<sup>3</sup>, что недостаточно велико для установления постоянной поляризации.

Но подождите! Мы ведь до сих пор складывали только электронные поляризуемости. А есть еще и ионная поляризация, возникающая из-за смещения иона титана. Однако требуется ионная поляризуемость величиной  $9,2 \cdot 10^{-24}$  см<sup>3</sup>.

(Более точное вычисление с учетом перемежающихся атомов показывает, что на самом деле требуется даже  $11,9 \cdot 10^{-24} \text{ см}^3$ .) Чтобы понять свойства  $\text{BaTiO}_3$ , мы должны предположить, что возникает именно такая ионная поляризуемость.

Почему ион титана в титанате бария имеет столь большую ионную поляризуемость, неизвестно. Более того, непонятно, почему при меньших температурах он поляризуется одинаково хорошо и в направлении диагонали куба и в направлении диагонали грани. Если мы вычислим действительные размеры шариков на фиг. 11.9 и попробуем найти, достаточно ли свободно титан держится в коробке, образованной соседними атомами кислорода (а этого хотелось бы, потому что тогда его было бы легко сдвинуть), то получится совсем противоположный ответ. Он сидит очень плотно. Атомы *бария* держатся намного свободнее, но если считать, что это они движутся, то ничего не получится. Так что, как видите, вопрос совсем не ясен; остаются еще загадки, которые очень хотелось бы разгадать.

Возвращаясь к нашей простой модели (см. фиг. 11.10, а), мы видим, что поле от одной цепочки будет вызывать поляризацию соседней цепочки в *противоположном* направлении. Это значит, что, хотя каждая цепочка будет заморожена, постоянная поляризация в единице объема будет равна нулю! (Внешние электрические проявления тут не возникли бы, но можно было бы наблюдать определенные термодинамические эффекты.) Такие системы существуют и называются они *анти сегнетоэлектриками*. Поэтому наше объяснение фактически относилось к анти сегнетоэлектрикам. Однако в действительности титанат бария устроен очень похоже на то, что изображено на фиг. 11.10, б. Все кислородо-титановые цепочки поляризованы в одном направлении, потому что между ними помещаются промежуточные цепочки атомов. Хотя атомы в этих цепочках поляризованы не очень сильно и не очень тесно расположены, они все-таки будут немного поляризованы в направлении, антипараллельном кислородо-титановым цепочкам. Небольшие поля, создаваемые у следующей кислородо-титановой цепочки, заставят ее поляризоваться параллельно первой. Поэтому  $\text{BaTiO}_3$  на самом деле сегнетоэлектрик, и произошло это благодаря атомам, находящимся в промежутке. Вы можете спросить: «А что же получается с прямым взаимодействием между двумя цепочками  $\text{O} - \text{Ti}$ ?» Вспомним, однако, что прямое взаимодействие убывает с расстоянием экспоненциально; действие цепочки из *сильных* диполей на расстоянии  $2a$  может быть меньше действия цепочки слабых диполей на расстоянии  $a$ .

На этом мы закончим довольно подробное изложение наших сегодняшних познаний о диэлектрических свойствах газов, жидкостей и твердых тел.

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ

§ 1. *Одинаковые уравнения — одинаковые решения*

Вся информация о физическом мире, приобретенная со времени зарождения научного прогресса, поистине огромна, и кажется почти невероятным, чтобы кто-то овладел заметной частью ее. Но фактически физик вполне может постигнуть общие свойства физического мира, не становясь специалистом в какой-то узкой области. Тому есть три причины. *Первая.* Существуют великие принципы, применимые к любым явлениям, такие, как закон сохранения энергии и момента количества движения. Глубокое понимание этих принципов позволяет сразу постигнуть очень многие вещи. *Вторая.* Оказывается, что многие сложные явления, как, например, сжатие твердых тел, в основном обуславливаются электрическими и квантово-механическими силами, так что, поняв основные законы электричества и квантовой механики, имеется возможность понять многие явления, возникающие в сложных условиях. *Третья.* Имеется замечательнейшее совпадение: *Уравнения для самых разных физических условий часто имеют в точности одинаковый вид.* Используемые символы, конечно, могут быть разными — вместо одной буквы стоит другая, но математическая форма уравнений одна и та же. Это значит, что, изучив одну область, мы сразу получаем множество прямых и точных сведений о решениях уравнений для другой области.

Мы закончили электростатику и скоро перейдем к изучению магнетизма и электродинамики. Но прежде хотелось бы показать, что, изучив электростатику, мы одновременно узнали о многих других явлениях. Мы увидим, что

§1. *Одинаковые уравнения — одинаковые решения*

§2. *Поток тепла; точечный источник вблизи бесконечной плоской границы*

§3. *Натянутая мембрана*

§4. *Диффузия нейтронов; сферически-симметричный источник в однородной среде*

§5. *Безвихревое течение жидкости; обтекание шара*

§6. *Освещение; равномерное освещение плоскости*

§7. *«Фундаментальное единство» природы*



уравнения электростатики фигурируют и в ряде других областей физики. Путем прямого переноса решений (одинаковые математические уравнения должны, конечно, иметь одинаковые решения) можно решать задачи из других областей с той же легкостью (или с таким же трудом), как и в электростатике.

Уравнения электростатики, как мы знаем, такие:

$$\nabla \cdot (\kappa \mathbf{E}) = \frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_0}, \quad (12.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (12.2)$$

(Мы пишем уравнения электростатики в присутствии диэлектриков, чтобы учесть общий случай.) То же физическое содержание может быть выражено в другой математической форме:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi, \quad (12.3)$$

$$\nabla \cdot (\kappa \nabla\phi) = -\frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_0}. \quad (12.4)$$

И вот суть дела заключается в том, что существует множество физических проблем, для которых математические уравнения имеют точно такой же вид. Сюда входит потенциал ( $\phi$ ), градиент которого, умноженный на скалярную функцию ( $\kappa$ ), имеет дивергенцию, равную другой скалярной функции ( $-\rho/\epsilon_0$ ).

Все, что нам известно из электростатики, можно немедленно перенести на другой объект, и наоборот. (Принцип, конечно, работает в обе стороны: если известны какие-то характеристики другого объекта, то можно использовать эти сведения в соответствующей задаче по электростатике.) Мы рассмотрим ряд примеров из разных областей, когда имеются уравнения такого вида.

## § 2. Поток тепла; точечный источник вблизи бесконечной плоской границы

Ранее мы уже обсуждали (гл. 3, § 4) поток тепла. Вообразите кусок какого-то материала, необязательно однородного (в разных местах может быть разное вещество), в котором температура меняется от точки к точке. Как следствие этих температурных изменений возникает поток тепла, который можно обозначить вектором  $\mathbf{h}$ . Он представляет собой количество тепловой энергии, которое проходит в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную потоку. Дивергенция  $\mathbf{h}$  есть скорость ухода тепла из данного места в расчете на единицу объема:

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \text{Скорость ухода тепла на единицу объема.}$$

(Мы могли, конечно, записать уравнение в интегральном виде, как мы поступали в электродинамике с законом Гаусса, тогда

оно выражало бы тот факт, что поток через поверхность равен скорости изменения тепловой энергии внутри материала. Мы не будем больше переводить уравнения из дифференциальной формы в интегральную и обратно, это делается точно так же, как в электростатике.)

Скорость, с которой тепло поглощается или рождается в разных местах, конечно, зависит от условий задачи. Предположим, например, что источник тепла находится внутри материала (возможно, радиоактивный источник или сопротивление, через которое пропускают ток). Обозначим через  $s$  тепловую энергию, производимую этим источником в единице объема за 1 сек. Кроме того, могут возникнуть потери (или, наоборот, дополнительное рождение) тепловой энергии за счет перехода в другие виды внутренней энергии в данном объеме. Если  $u$  — внутренняя энергия в единице объема, то  $-du/dt$  будет тоже играть роль «источника» тепловой энергии. Итак, имеем

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = s - \frac{du}{dt}. \quad (12.5)$$

Мы не собираемся здесь обсуждать полное уравнение, величины в котором изменяются со временем, потому что мы проводим аналогию с электростатикой, где ничто не зависит от времени. Мы рассмотрим только задачи с *постоянным потоком тепла*, в которых постоянные источники создают состояние равновесия. В таких случаях

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = s. \quad (12.6)$$

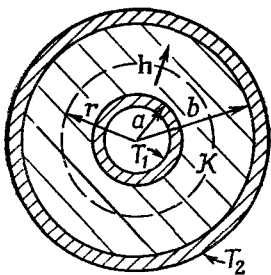
Нужно иметь, конечно, еще одно уравнение, которое описывает, как поток течет в разных местах. Во многих веществах поток тепла примерно пропорционален скорости изменения температуры с положением: чем больше разность температур, тем больше поток тепла. Мы знаем, что *вектор* потока тепла пропорционален градиенту температуры. Константа пропорциональности  $K$ , зависящая от свойств материала, называется *коэффициентом теплопроводности*

$$\mathbf{h} = -K \nabla T. \quad (12.7)$$

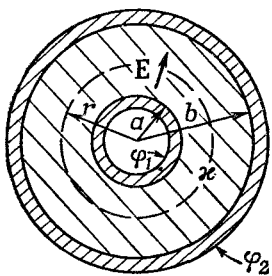
Если свойства материала меняются от точки к точке, то  $K = K(x, y, z)$  и есть функция положения. [Уравнение (12.7) не столь фундаментально, как (12.5), выражающее сохранение тепловой энергии, потому что оно зависит от характерных свойств вещества.] Подставляя теперь уравнение (12.7) в (12.6), получаем

$$\nabla \cdot (K \nabla T) = -s, \quad (12.8)$$

что в точности совпадает по форме с (12.4). *Задачи с постоянным потоком тепла и задачи электростатики одинаковы.* Вектор



а



б

Ф и г. 12.1. Поток тепла в случае цилиндрической симметрии (а) и соответствующая задача из электростатика (б).

потока тепла  $h$  соответствует  $E$ , а температура  $T$  соответствует  $\phi$ . Мы уже отмечали, что точечный тепловой источник создает поле температур, меняющееся, как  $1/r$ , и поток тепла, меняющийся, как  $1/r^2$ . Это есть не более чем простой перенос утверждений электростатики, что точечный заряд дает потенциал, меняющийся, как  $1/r$ , и электрическое поле, меняющееся, как  $1/r^2$ . Вообще мы можем решать статистические тепловые задачи с той же степенью легкости, как и задачи электростатики.

Рассмотрим простой пример. Пусть имеется цилиндр с радиусом  $a$  при температуре  $T_1$ , поддерживаемой за счет генерации тепла в цилиндре. (Это может быть, скажем, проволока, по которой течет ток, или трубка с конденсацией пара внутри цилиндра.) Цилиндр покрыт concentрической обшивкой из изолирующего материала с теплопроводностью  $K$ . Пусть внешний радиус изоляции равен  $b$ , а в наружном пространстве поддерживается температура  $T_2$  (фиг. 12. 1, а). Нам нужно определить скорость потери тепла проволокой или паропроводом (все равно чем), проходящим по центру цилиндра. Пусть полное количество тепла, теряемого на длине трубы  $L$ , равно  $G$ , его-то мы и хотим найти.

Как надо решать такую задачу? У нас есть дифференциальные уравнения, но поскольку они такие же, как в электростатике, то математическое решение их нам уже известно. Аналогичная задача электростатики относится к проводнику радиусом  $a$  при потенциале  $\phi_1$ , отделенном от другого проводника радиусом  $b$  при потенциале  $\phi_2$ , с concentрическим слоем диэлектрика между ними (фиг. 12.1, б). Далее, поскольку поток тепла  $h$  соответствует электрическому полю  $E$ , то наша искомая величина  $G$  соответствует потоку электрического поля от единичной длины (другими словами, электрическому заряду на

единице длины, деленному на  $\epsilon_0$ ). Мы решали электростатическую задачу с помощью закона Гаусса. Нашу задачу о потоке тепла будем решать таким же способом.

Из симметрии задачи мы видим, что  $h$  зависит только от расстояния до центра. Поэтому мы окружим трубку гауссовой поверхностью — цилиндром длиной  $L$  и радиусом  $r$ . С помощью закона Гаусса мы выводим, что поток тепла  $h$ , умноженный на площадь поверхности  $2\pi rL$ , должен быть равен полному количеству тепла, рождаемому внутри, т. е. тому, что мы назвали  $G$ :

$$2\pi rLh = G, \quad \text{или} \quad h = \frac{G}{2\pi rL}. \quad (12.9)$$

Поток тепла пропорционален градиенту температуры

$$h = -K\nabla T,$$

или в данном случае величина  $h$  равна

$$h = -K \frac{dT}{dr}.$$

Вместе с (12.9) это дает

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{G}{2\pi KLr}. \quad (12.10)$$

Интегрируя от  $r=a$  до  $r=b$ , получаем

$$T_2 - T_1 = -\frac{G}{2\pi KL} \ln \frac{b}{a}. \quad (12.11)$$

Разрешая относительно  $G$ , находим

$$G = \frac{2\pi KL (T_1 - T_2)}{\ln(b/a)}. \quad (12.12)$$

Этот результат в точности соответствует формуле для заряда цилиндрического конденсатора:

$$Q = \frac{2\pi\epsilon_0 L (\varphi_1 - \varphi_2)}{\ln(b/a)}.$$

Задачи одинаковые и имеют одинаковые решения. Зная электростатику, мы тем самым знаем, сколько тепла теряет изолированная труба.

Рассмотрим еще один пример. Пусть мы хотим узнать поток тепла в окрестности точечного источника, расположенного неглубоко под поверхностью земли или же вблизи поверхности

большого металлического предмета. В качестве локализованного источника тепла может быть и атомная бомба, которая взорвалась под землей и представляет собой мощный источник тепла, или же небольшой источник радиоактивности внутри железного блока — возможностей очень много.

Рассмотрим идеализированную задачу о точечном источнике тепла, мощность которого  $G$ , на расстоянии  $a$  под поверхностью бесконечной однородной среды с коэффициентом теплопроводности  $K$ . Теплопроводностью воздуха над поверхностью среды мы пренебрежем. Мы хотим определить распределение температуры на поверхности среды. Насколько горячо будет прямо над источником и в разных местах на поверхности?

Как же решить эту задачу? Она похожа на задачу по электростатике, в которой имеются два материала с разной диэлектрической проницаемостью  $\kappa$  по обе стороны от разделяющей их границы. Здесь что-то есть! Возможно, это похоже на точечный заряд вблизи границы между диэлектриком и проводником или что-нибудь вроде этого. Посмотрим, что происходит вблизи границы. Физическое условие состоит в том, что нормальная составляющая  $h$  на поверхности равна нулю, поскольку мы предположили, что потока из блока нет. Мы должны задать вопрос: в какой электростатической задаче возникает условие, что нормальная компонента электрического поля  $E$  (представляющая собой аналог  $h$ ) равна нулю у поверхности? Нет такой!

Это один из тех случаев, к которым следует относиться с осторожностью. По физическим причинам могут быть определенные ограничения тех математических условий, которые возникают в каком-либо случае. Поэтому если мы проанализировали дифференциальное уравнение только для некоторых ограниченных примеров, то вполне можем упустить ряд решений, возникающих в других физических условиях. Например, нет материала, обладающего диэлектрической проницаемостью, равной нулю, а теплопроводность вакуума равна нулю. Поэтому нет электростатического аналога идеального теплоизолятора. Мы можем, однако, попытаться использовать те же *методы*. Попробуем *вообразить*, что произошло бы, если бы диэлектрическая проницаемость *была* равна нулю. (Разумеется, в реальных условиях диэлектрическая проницаемость никогда не обращается в нуль. Но может представиться случай, когда вещество имеет очень *большую* диэлектрическую проницаемость, так что диэлектрической проницаемостью воздуха вне среды можно пренебречь.)

Как же найти электрическое поле, у которого нет составляющей, перпендикулярной к поверхности? Иначе говоря, такое поле, которое всюду *касательно* к поверхности? Вы заметите, что эта задача обратна задаче о точечном заряде вблизи проводящей плоскости. Там нам нужно было поле, *перпендикулярное*

к поверхности, потому что проводник всюду находился при одном и том же значении потенциала.

В задаче об электрическом поле мы придумали решение, вообразив за проводящей плоскостью точечный заряд. Можно воспользоваться снова этой же идеей. Попытаемся выбрать такое «изображение» источника, которое автоматически обращало бы в нуль нормальную компоненту поля вблизи поверхности. Решение показано на фиг. 12.2. Электрическое изображение источника с *тем же знаком* и той же величины, находящееся на расстоянии  $a$  над поверхностью, дает поле, горизонтальное повсюду у поверхности. Нормальные компоненты от обоих источников взаимно уничтожаются.

Итак, наша задача о потоке тепла решена. Температура во всем пространстве одинакова по непосредственной аналогии с потенциалом от двух одинаковых точечных зарядов. Температура  $T$  на расстоянии  $r$  от одного точечного источника  $G$  в бесконечной среде равна

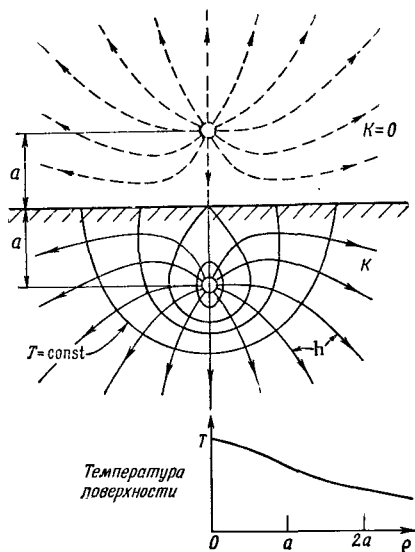
$$T = \frac{G}{4\pi Kr} . \quad (12.13)$$

(Это, конечно, полностью аналогично  $\varphi = q/4\pi\epsilon_0 r$ .) Температура точечного источника и, кроме того, его изображения равна

$$T = \frac{G}{4\pi Kr_1} + \frac{G}{4\pi Kr_2} . \quad (12.14)$$

Эта формула дает нам температуру всюду внутри блока. Несколько изотермических поверхностей приведено на фиг. 12.2. Показаны также линии  $h$ , которые можно получить из выражения  $h = -K\nabla T$ .

В самом начале мы интересовались распределением температуры на поверхности. Для точки на поверхности,



Ф и г. 12.2. Поток тепла и изотермы у точечного источника тепла, расположенного на расстоянии  $a$  под поверхностью тела с хорошей теплопроводностью. Вне тела показано мнимое изображение источника.

находящейся на расстоянии  $\rho$  от оси,  $r_1 = r_2 = \sqrt{\rho^2 + a^2}$ , следовательно,

$$T_{\text{на поверхности}} = \frac{1}{4\pi K} \frac{2G}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}. \quad (12.15)$$

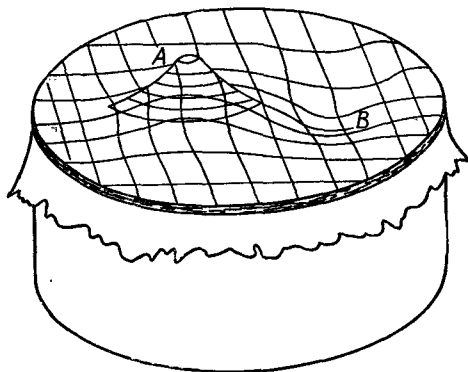
Эта функция также изображена на фиг. 12.2. Естественно, что температура прямо над источником выше, чем вдали от него. Такого рода задачи часто приходится решать геофизикам. Теперь мы видим, что это те же самые задачи, которые мы решали в электричестве.

### § 3. Натянутая мембрана

Рассмотрим теперь совсем другую область физики, в которой тем не менее мы придем снова к точно таким же уравнениям. Возьмем тонкую резиновую пленку — мембрану, натянутую на большую горизонтальную раму (наподобие кожи на барабане). Нажмем на мембрану в одном месте вверх, а в другом — вниз (фиг. 12.3). Сможем ли мы описать форму поверхности? Покажем, как можно решить эту задачу, когда отклонения мембраны не очень велики.

В пленке действуют силы, потому что она натянута. Если сделать в каком-нибудь месте пленки небольшой разрез, то два края разреза разойдутся (фиг. 12.4). Следовательно, в пленке имеется *поверхностное натяжение*, аналогичное одномерному натяжению растянутой веревки. Определим величину поверхностного натяжения  $\tau$  как силу на единицу длины, которая как раз удержала бы вместе две стороны разреза (см. фиг. 12.4).

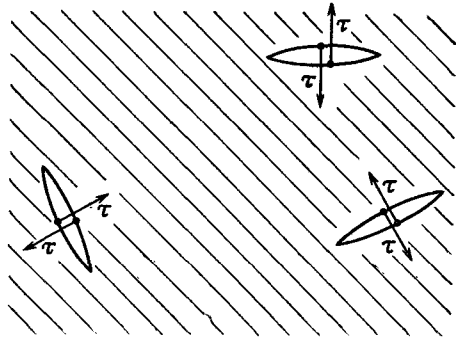
Предположим теперь, что мы смотрим на вертикальное поперечное сечение мембраны. Оно будет иметь вид некоторой кривой, похожей на изображенную на фиг. 12.5. Пусть  $u$  — вертикальное смещение мембраны от ее нормального положе-



Ф и г. 12.3. Тонкая резиновая пленка, натянутая на цилиндр (нечто вроде барабана).

Какой формы будет поверхность, если пленку приподнять в точке А и опустить в точке В?

Ф и г. 12.4. Поверхностное натяжение  $\tau$  натянутой, резиновой пленки есть сила, отнесенная к единице длины и направленная перпендикулярно линии разреза.



ния, а  $x$  и  $y$  — координаты в горизонтальной плоскости. (Приведенное сечение параллельно оси  $x$ .)

Возьмем небольшой кусочек поверхности длиной  $\Delta x$  и шириной  $\Delta y$ . На него действуют силы вследствие поверхностного натяжения вдоль каждого края. Сила на стороне 1 (см. фиг. 12.5) будет равна  $\tau_1 \Delta y$  и направлена по касательной к поверхности, т. е. под углом  $\theta_1$  к горизонтали. Вдоль стороны 2 сила будет равна  $\tau_2 \Delta y$  и направлена к поверхности под углом  $\theta_2$ . (Подобные силы будут и на двух других сторонах кусочка, но мы пока забудем о них.) Результирующая сила от сторон 1 и 2, действующая на кусочек *вверх*, равна

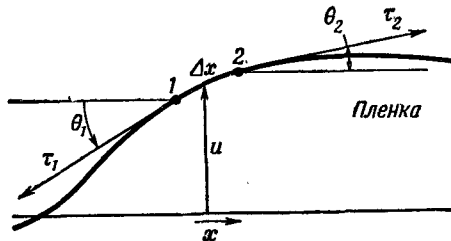
$$\Delta F = \tau_2 \Delta y \sin \theta_2 - \tau_1 \Delta y \sin \theta_1.$$

Мы ограничимся рассмотрением малых искажений мембраны, т. е. *малых изгибов и наклонов*: тогда мы сможем заменить  $\sin \theta$  на  $\text{tg } \theta$  и записать как  $du/dx$ . Сила при этих условиях дается выражением

$$\Delta F = \left[ \tau_2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_2 - \tau_1 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 \right] \Delta y.$$

Величина в скобках может быть с тем же успехом записана (для малых  $\Delta x$ ) как

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x;$$



Ф и г. 12.5. Поперечное сечение изогнутой пленки.



тогда

$$\Delta F = \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x \Delta y.$$

Имеется и другой вклад в  $\Delta F$  от сил на двух других сторонах; полный вклад, очевидно, равен

$$\Delta F = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \tau \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \Delta x \Delta y. \quad (12.16)$$

Искривления диафрагмы вызваны внешними силами. Пусть  $f$  означает направленную *вверх* силу на *единичную площадку* пленки (своего рода «давление»), возникающую *от внешних сил*. Если мембрана находится в равновесии (*статический* случай), то сила эта должна уравниваться только что вычисленной внутренней силой [уравнение (12.16)]. Иначе говоря,

$$f = - \frac{\Delta F}{\Delta x \Delta y}.$$

Уравнение (12.16) тогда может быть записано в виде

$$f = - \nabla \cdot (\tau \nabla u), \quad (12.17)$$

где под знаком  $\nabla$  мы теперь подразумеваем, конечно, двухмерный оператор градиента ( $\partial/\partial x$ ,  $\partial/\partial y$ ). У нас есть дифференциальное уравнение, связывающее  $u(x, y)$  с приложенными силами  $f(x, y)$  и поверхностным натяжением пленки  $\tau(x, y)$ , которое, вообще говоря, может меняться от места к месту. (Деформации трехмерного упругого тела тоже подчиняются таким уравнениям, но мы ограничимся двухмерным случаем.) Нас будет интересовать только случай, когда натяжение  $\tau$  постоянно по всей пленке. Тогда вместо (12.17) мы можем записать

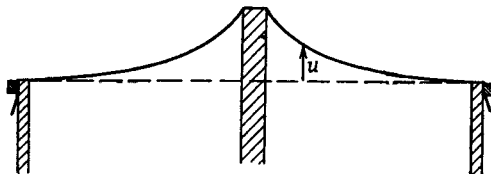
$$\nabla^2 u = - \frac{f}{\tau}. \quad (12.18)$$

Снова мы получили такое же уравнение, как в электростатике! Но на сей раз оно относится к двум измерениям. Смещение  $u$  соответствует  $\phi$ , а  $f/\tau$  соответствует  $\rho/\epsilon_0$ . Поэтому тот труд, который мы потратили на бесконечные заряженные плоскости, или параллельные провода большой длины, или заряженные цилиндры, пригодится для натянутой мембраны.

Предположим, мы подтягиваем мембрану в каких-то точках на определенную *высоту*, т. е. фиксируем величину  $u$  в ряде точек. В электрическом случае это аналогично заданию определенного *потенциала* в соответствующих местах. Например, мы можем устроить положительный «потенциал», если подопрем мембрану предметом, который имеет такое же сечение, как и соответствующий цилиндрический проводник. Если, скажем, мы подопрем мембрану круглым стержнем, по-

**Ф и г. 12.6.** Поперечное сечение натянутой резиновой пленки, подпертой круглым стержнем.

Функция  $u(x, y)$  та же, что и потенциал  $\phi(x, y)$  от очень длинного заряженного стержня.

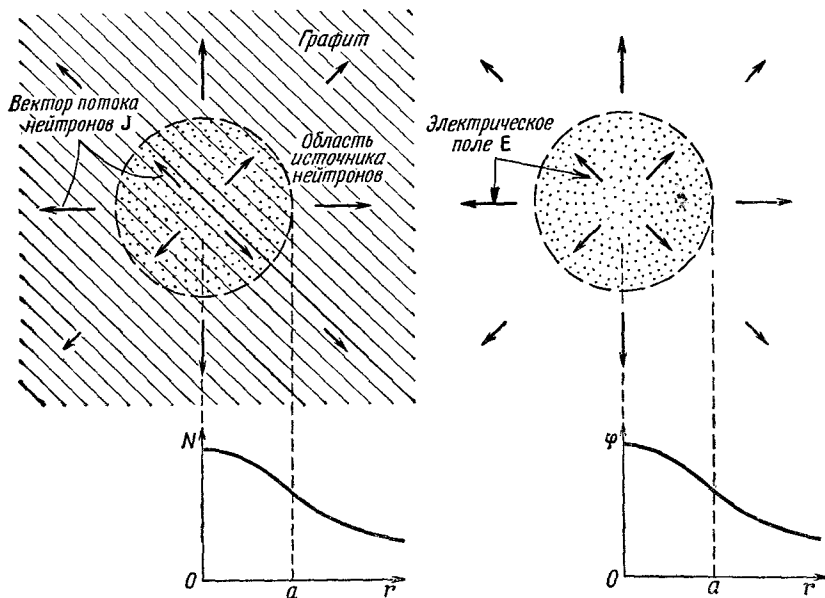


верхность примет форму, изображенную на фиг. 12.6. Высота  $u$  имеет такой же вид, как электростатический потенциал  $\phi$  заряженного цилиндрического стержня. Она спадает, как  $\ln(1/r)$ . (Наклон поверхности, который соответствует электрическому полю  $E$ , спадает, как  $1/r$ .)

Натянутую резиновую пленку часто использовали для решения сложных *электрических* задач экспериментальным путем. Аналогия используется в обратную сторону! Для подъема мембраны на высоту, соответствующую потенциалам всего набора электродов, подставляют разные стержни и полоски. Затем измерения высоты дают электрический потенциал в электростатической задаче. Аналогия проводится даже еще дальше. Если на мембране поместить маленькие шарики, то их движение примерно схоже с движением электронов в соответствующем электрическом поле. Таким способом можно воочию проследить за движением «электронов» по их траекториям. Этот метод был использован для проектирования сложной системы многих фотоумножительных трубок (таких, например, какие используются в сцинтилляционном счетчике или для управления передними фарами в автомашине кадиллак). Метод используется и до сих пор, но его точность не очень велика. Для более точных расчетов лучше находить поле численным путем с помощью больших электронных вычислительных машин.

#### **§ 4. Диффузия нейтронов; сферически-симметричный источник в однородной среде**

Приведем еще один пример, дающий уравнение того же вида, но на сей раз относящееся к диффузии. В гл. 43 (вып. 4) мы рассмотрели диффузию ионов в однородном газе и диффузию одного газа сквозь другой. Теперь возьмем другой пример — диффузию нейтронов в материале типа графита. Мы выбрали графит (разновидность чистого углерода), потому что углерод не поглощает медленных нейтронов. Нейтроны путешествуют в нем свободно. Они проходят по прямой в среднем несколько сантиметров, прежде чем рассеются ядром и отклонятся в сторону. Так что если у нас есть большой кусок графита толщиной в несколько метров, то нейтроны, находившиеся сначала



Ф и г. 12.7. Нейтроны рождаются однородно внутри сферы радиуса  $a$  в большом графитовом блоке и диффундируют наружу. Плотность нейтронов  $N$  получена как функция  $r$ , расстояния от центра источника.

Справа показана электростатическая аналогия: однородно заряженная сфера, причем  $N$  соответствует  $\varphi$ , а  $J$  соответствует  $E$ .

в одном месте, будут переходить в другие места. Мы опишем их усредненное поведение, т. е. их *средний поток*.

Пусть  $N(x, y, z)\Delta V$  — число нейтронов в элементе объема  $\Delta V$  в точке  $(x, y, z)$ . Движение нейтронов приводит к тому, что одни покидают  $\Delta V$ , а другие попадают в него. Если в одной области оказывается нейтронов больше, чем в соседней, то от туда их будет переходить во вторую область больше, чем наоборот; в результате возникнет поток. Повторяя доказательства, приведенные в гл. 43 (вып. 4), можно описать поток вектором потока  $\mathbf{J}$ . Его компонента  $J_x$  есть результирующее число нейтронов, проходящих в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси  $x$ . Мы получим тогда

$$J_x = -D \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (12.19)$$

где коэффициент диффузии  $D$  дается в терминах средней скорости  $v$  и средней длины свободного пробега  $l$  между столкновениями:

$$D = \frac{1}{3} lv.$$

Векторное уравнение для  $\mathbf{J}$  имеет вид

$$\mathbf{J} = -D\nabla N. \quad (12.20)$$

Скорость, с которой нейтроны проходят через некоторый элемент поверхности  $da$ , равна  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da$  (где  $\mathbf{n}$ , как обычно, — единичный вектор нормали). Результирующий поток из элемента объема тогда равен (пользуясь обычным гауссовым доказательством)  $\nabla \cdot \mathbf{J} dV$ . Этот поток приводил бы к уменьшению числа нейтронов в  $\Delta V$ , если нейтроны не генерируются внутри  $\Delta V$  (с помощью какой-нибудь ядерной реакции). Если в объеме присутствуют источники, производящие  $S$  нейтронов в единицу времени в единице объема, то результирующий поток из  $\Delta V$  будет равен  $[S - (\partial N / \partial t)] \Delta V$ . Тогда получаем

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = S - \frac{\partial N}{\partial t}. \quad (12.21)$$

Комбинируя (12.21) и (12.20), получаем уравнение диффузии нейтронов

$$\nabla \cdot (-D\nabla N) = S - \frac{\partial N}{\partial t}. \quad (12.22)$$

В статическом случае, когда  $\partial N / \partial t = 0$ , мы снова имеем уравнение (12.4)! Мы можем воспользоваться нашими знаниями в электростатике для решения задач по диффузии нейтронов. Давайте же решим какую-нибудь задачу. (Пожалуй, вы недоумеваете: зачем решать новую задачу, если мы уже решили все задачи в электростатике? На этот раз мы можем решить *быстрее* именно потому, что электростатические задачи *действительно уже решены!*)

Пусть имеется блок материала, в котором нейтроны (скажем, за счет деления урана) рождаются равномерно в сферической области радиусом  $a$  (фиг. 12.7). Мы хотели бы узнать, чему равна плотность нейтронов повсюду? Насколько однородна плотность нейтронов в области, где они рождаются? Чему равно отношение нейтронной плотности в центре к нейтронной плотности на поверхности области рождения? Ответы найти легко. Плотность нейтронов в источнике  $S_0$  стоит вместо плотности зарядов  $\rho$ , поэтому наша задача такая же, как задача об однородно заряженной сфере. Найти  $N$  — все равно что найти потенциал  $\phi$ . Мы уже нашли поля внутри и вне однородно заряженной сферы; для получения потенциала мы можем их проинтегрировать. Вне сферы потенциал равен  $Q/4\pi\epsilon_0 r$ , где полный заряд  $Q$  дается отношением  $4\pi a^3 \rho/3$ . Следовательно,

$$\phi_{\text{внешн}} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r}. \quad (12.23)$$

Для внутренних точек вклад в поле дают только заряды  $Q(r)$ , находящиеся внутри сферы радиусом  $r$ ;  $Q(r) = 4\pi r^3 \rho/3$ , следо-

вательно,

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}. \quad (12.24)$$

Поле растет линейно с  $r$ . Интегрируя  $E$ , получаем  $\varphi$ :

$$\varphi_{\text{внутр}} = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \text{Константа.}$$

На расстоянии радиуса  $a$   $\varphi_{\text{внешн}}$  должен совпадать с  $\varphi_{\text{внутр}}$ , поэтому постоянная должна быть равна  $\rho a^2/2\epsilon_0$ . (Мы предполагаем, что потенциал  $\varphi$  равен нулю на больших расстояниях от источника, а это для нейтронов будет отвечать обращению  $N$  в нуль.) Следовательно,

$$\varphi_{\text{внутр}} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left( \frac{3a^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right). \quad (12.25)$$

Теперь мы сразу же найдем плотность нейтронов в нашей диффузионной задаче

$$N_{\text{внешн}} = \frac{Sa^3}{3Dr} \quad (12.26)$$

и

$$N_{\text{внутр}} = \frac{S}{3D} \left( \frac{3a^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right). \quad (12.27)$$

На фиг 12.7 представлена зависимость  $N$  от  $r$ .

Чему же теперь равно отношение плотности в центре к плотности на краю? В центре ( $r=0$ ) оно пропорционально  $3a^2/2$ , а на краю ( $r=a$ ) пропорционально  $2a^2/2$ ; поэтому отношение плотностей равно  $3/2$ . Однородный источник не дает однородной плотности нейтронов. Как видите, наши познания в электростатике дают хорошую затравку для изучения физики ядерных реакторов.

Диффузия играет большую роль во многих физических обстоятельствах. Движение ионов через жидкость или электронов через полупроводник подчиняется все тому же уравнению. Мы снова и снова приходим к одним и тем же уравнениям.

### § 5. Безвихревое течение жидкости; обтекание шара

Рассмотрим теперь пример, по существу, не такой уж хороший, потому что уравнения, которые мы будем использовать, на самом деле не описывают новый объект полностью, а отвечают лишь некоторым идеализированным условиям. Это задача о *течении воды*. Когда мы разбирали случай натянутой пленки, то наши уравнения представляли приближение, справедливое лишь для *малых отклонений*. При рассмотрении течения воды мы прибегнем к приближению другого рода; мы должны принять ограничения, которые, вообще говоря, к обычной воде

неприменимы. Мы разберем только случай постоянного течения *несжимаемой, невязкой, лишенной завихрений* жидкости. Потом мы опишем течение, задав ему скорость  $v(r)$  как функцию положения  $r$ . Если движение постоянно (единственный случай, для которого имеется электростатическая аналогия),  $v$  не зависит от времени. Если  $\rho$  — плотность жидкости, то  $\rho v$  — масса жидкости, проходящая в единицу времени через единичную площадку. Из закона сохранения вещества дивергенция  $\rho v$ , вообще говоря, равна изменению со временем массы вещества в единице объема. Мы предположим, что процессы непрерывного рождения или уничтожения вещества отсутствуют. Сохранение вещества требует тогда, чтобы  $\nabla \cdot \rho v = 0$ . (В правой части должно было бы стоять, вообще говоря,  $-\partial \rho / \partial t$ , но поскольку наша жидкость несжимаема, то  $\rho$  меняться не может.) Так как  $\rho$  повсюду одинаково, то его можно вынести, и наше уравнение запишется просто

$$\nabla \cdot v = 0.$$

Чудесно! Снова получилась электростатика (без зарядов); уравнение совсем похоже на  $\nabla \cdot E = 0$ . Ну не совсем! В электростатике *не просто*  $\nabla \cdot E = 0$ . Есть *два* уравнения. Одно уравнение еще не дает нам всего; нужно дополнительное уравнение. Чтобы получилось совпадение с электростатикой, у нас *got* от  $v$  должен был бы равняться нулю. Но для настоящих жидкостей это вообще не так. В большинстве их обычно возникают вихри. Следовательно, мы ограничиваемся случаем, когда циркуляция жидкости отсутствует. Такое течение часто называют *безвихревым*. Как бы то ни было, принимая наши предположения, можно *представить* себе течение жидкости, аналогичное электростатике. Итак, мы берем

$$\nabla \cdot v = 0 \tag{12.28}$$

и

$$\nabla \times v = 0. \tag{12.29}$$

Мы хотим подчеркнуть, что условия, при которых течение жидкости подчиняется этим уравнениям, встречаются весьма нечасто, но все-таки бывают. Это должны быть случаи, когда поверхностным натяжением, сжимаемостью и вязкостью можно пренебречь и когда течение можно считать безвихревым. Эти условия выполняются столь редко для обычной воды, что математик Джон фон Нейман сказал по поводу тех, кто анализирует уравнения (12.28) и (12.29), что они изучают «сухую воду!» (Мы возвратимся к задаче о течении жидкости более подробно в вып. 7, гл. 40 и 41.)

Поскольку  $\nabla \times v = 0$ , то скорость «сухой воды» можно написать в виде градиента от некоторого потенциала

$$v = -\nabla \psi. \tag{12.30}$$

Каков физический смысл  $\psi$ ? Особо полезного смысла нет. Скорость можно записать в виде градиента потенциала просто потому, что течение безвихревое. По аналогии с электростатикой  $\psi$  называется *потенциалом скоростей*, но он не связан с потенциальной энергией так, как это получается для  $\phi$ . Поскольку дивергенция  $v$  равна нулю, то

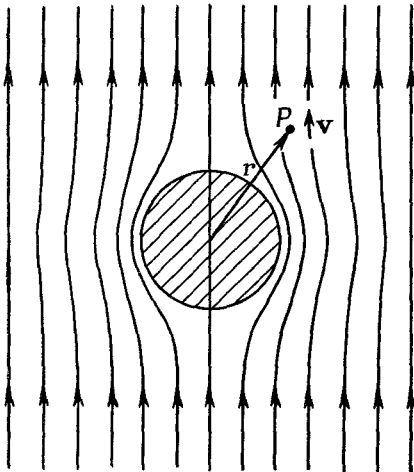
$$\nabla \cdot (\nabla \psi) = \nabla^2 \psi = 0. \quad (12.31)$$

Потенциал скоростей  $\psi$  подчиняется тому же дифференциальному уравнению, что и электростатический потенциал в пустом пространстве ( $\rho=0$ ).

Давайте выберем какую-нибудь задачу о безвихревом течении и посмотрим, сможем ли мы решить ее изученными методами. Рассмотрим задачу о шаре, падающем в жидкости. Если он движется слишком медленно, то силы вязкости, которыми мы пренебрегали, будут существенны. Если он движется слишком быстро, то следом за ним будут идти маленькие вихри (турбулентность) и возникнет некоторая циркуляция воды. Но если шар движется и не чересчур быстро, и не чересчур медленно, то течение воды будет более или менее отвечать нашим предположениям, и мы сможем описать движение воды нашими простыми уравнениями.

Удобно описывать процесс в системе координат, *скрепленной с шаром*. В этой системе координат мы задаем вопрос: как течет вода около неподвижного шара, если на больших расстояниях течение однородно? Иначе говоря, если вдали от шара течение всюду одинаково? Течение вблизи шара

будет иметь вид, показанный линиями потока на фиг. 12.8. Эти линии, всегда параллельные  $v$ , соответствуют линиям напряженностей электрического поля.



Фиг. 12.8. Поле скоростей безвихревого обтекания сферы жидкостью.

Мы хотим получить количественное описание поля скоростей, т. е. выражение для скорости в любой точке  $P$ .

Можно найти скорость как градиент от  $\psi$ , поэтому сначала определим потенциал. Мы хотим найти потенциал, который удовлетворял бы всюду (12.31) при следующих двух условиях: 1) течение отсутствует в сферической области за поверхностью шара; 2) течение постоянно на больших расстояниях. Чтобы выполнялось первое ограничение, компонента  $v$ , перпендикулярная поверхности шара, должна обращаться в нуль. Это значит, что  $\partial\psi/\partial r=0$  при  $r=a$ . Для выполнения второго ограничения нужно иметь  $\partial\psi/\partial z=v_0$  всюду, где  $r \gg a$ . Строго говоря, нет ни одной электростатической задачи, которая в точности соответствовала бы нашей задаче. Она фактически соответствует сфере с нулевой диэлектрической проницаемостью, помещенной в однородное электрическое поле. Если бы мы имели решение задачи для сферы с диэлектрической проницаемостью  $\kappa$ , то, положив  $\kappa=0$ , немедленно решили бы нашу задачу.

Мы раньше не разобрали такую электростатическую задачу во всех подробностях; давайте сделаем это сейчас. (Мы могли бы сразу решить задачу о жидкости с  $v$  и  $\psi$ , но будем пользоваться  $E$  и  $\phi$ , потому что привыкли к ним.)

Задача ставится так: найти такое решение уравнения  $\nabla^2\phi=0$ , чтобы  $E=-\nabla\phi$  равнялось постоянной, скажем  $E_0$ , для больших  $r$  и, кроме того, чтобы радиальная компонента  $E$  была равна нулю при  $r=a$ . Иначе говоря,

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial r} \right|_{r=a} = 0. \quad (12.32)$$

Наша задача включает новый тип граничных условий — когда  $\partial\phi/\partial r$  постоянно, а не тот, когда потенциал  $\phi$  постоянен на поверхности. Это немножко другое условие. Получить ответ сразу нелегко. Прежде всего без шара  $\phi$  был бы равен  $-E_0z$ . Тогда  $E$  было бы направлено по  $z$  и имело бы всюду постоянную величину  $E_0$ . Мы уже исследовали случай диэлектрического шара, поляризация внутри которого однородна, и нашли, что поле внутри поляризованного шара однородно, а вне его оно совпадает с полем точечного диполя, расположенного в центре шара. Давайте напишем, что искомое решение есть суперпозиция однородного поля плюс поле диполя. Потенциал диполя (см. гл. 6) есть  $pz/4\pi\epsilon_0 r^3$ . Итак, мы предполагаем, что

$$\phi = -E_0z + \frac{pz}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (12.33)$$

Поскольку поле диполя спадает, как  $1/r^3$ , то на больших расстояниях мы как раз имеем поле  $E_0$ . Наше предположение ав-



томатически удовлетворяет сформулированному выше второму условию (стр. 249). Но что нам взять в качестве силы диполя  $p$ ? Для ответа мы должны использовать другое условие [уравнение (12.32)]. Мы должны продифференцировать  $\varphi$  по  $r$ , но, разумеется, это нужно сделать при постоянном угле  $\theta$ , поэтому удобнее выразить сначала  $\varphi$  через  $r$  и  $\theta$ , а не через  $z$  и  $r$ . Поскольку  $z = r \cos \theta$ , то

$$\varphi = -E_0 r \cos \theta + \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (12.34)$$

Радиальная составляющая  $E$  есть

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r} = +E_0 \cos \theta + \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (12.35)$$

Она должна быть равна нулю при  $r=a$  для всех  $\theta$ . Это будет выполнено, если

$$p = -2\pi\epsilon_0 a^3 E_0. \quad (12.36)$$

Заметьте хорошенько, что если бы оба члена в уравнении (12.35) зависели бы от  $\theta$  по-разному, то мы не смогли бы выбрать  $p$  так, чтобы (12.35) обращалось в нуль при  $r=a$  для всех углов. Тот факт, что это получилось, означает, что мы были мудры, написав уравнение (12.33). Конечно, когда мы догадывались, мы заглядывали вперед; мы знали, что понадобится еще один член, который бы, во-первых, удовлетворял  $\nabla^2 \varphi = 0$  (любое действительное поле удовлетворяет этому), во-вторых, зависел от  $\cos \theta$  и, в-третьих, спадал бы к нулю при больших  $r$ . Поле диполя — единственное, которое удовлетворяет всем трем требованиям.

С помощью (12.36) наш потенциал приобретает вид

$$\varphi = -E_0 \cos \theta \left( r + \frac{a^3}{2r^2} \right). \quad (12.37)$$

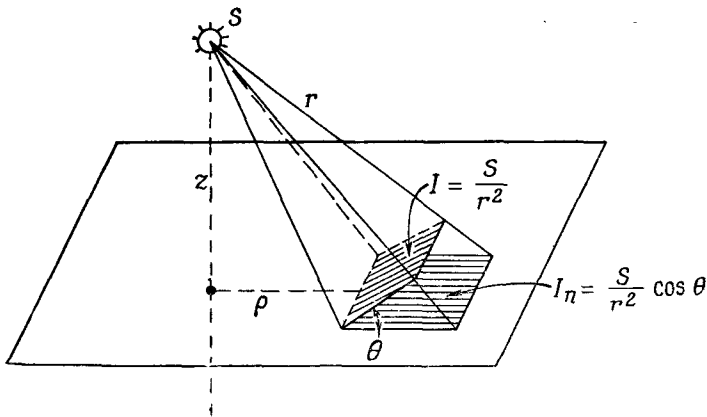
Решение задачи о течении жидкости может быть записано просто:

$$\psi = -v_0 \cos \theta \left( r + \frac{a^3}{2r^2} \right). \quad (12.38)$$

Отсюда прямо находится  $v$ . Больше мы не будем заниматься этим вопросом.

## § 6. Освещение; равномерное освещение плоскости

В этом параграфе мы обратимся к совсем другой физической проблеме — мы ведь хотим показать большое разнообразие возможностей. На этот раз мы сделаем кое-что, что приведет нас к *интегралу* того же сорта, что мы нашли в электростатике.



Ф и г. 12.9. Освещенность  $I_n$  поверхности равна энергии излучения, падающей в единицу времени на единичную площадку поверхности.

(Если перед нами стоит математическая задача, приводящая к некоторому интегралу, а интеграл этот уже знаком нам по другой задаче, то кое-что о его свойствах нам известно.) Возьмем пример из техники освещения. Пусть на расстоянии  $a$  над плоскостью имеется какой-то источник света. Как будет освещаться поверхность? Чему равна энергия излучения, падающая на единичную площадку поверхности за единицу времени (фиг. 12.9)? Мы предполагаем, что источник сферически-симметричный, так что свет излучается одинаково во всех направлениях. Тогда количество излученной энергии, проходящее через единичную площадку, перпендикулярную потоку света, меняется обратно пропорционально квадрату расстояния. Очевидно, что интенсивность света в направлении нормали дается такой же формулой, что и электрическое поле от точечного источника. Если световые лучи падают на поверхность под углом  $\theta$  к нормали, то  $I$ , энергия, падающая на единичную площадку поверхности, уменьшается в  $\cos \theta$  раз, потому что та же энергия падает на площадку в  $1/\cos \theta$  раз большую. Если мы назовем силу нашего источника  $S$ , тогда  $I_n$ , освещенность поверхности, равна

$$I_n = \frac{S}{r^2} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}, \quad (12.39)$$

где  $\mathbf{e}_r$  — единичный вектор в направлении от источника, а  $\mathbf{n}$  — единичная нормаль к поверхности. Освещенность  $I_n$  соответствует нормальной компоненте электрического поля от точечного источника с зарядом  $4\pi\epsilon_0 S$ . Учитывая это, мы видим, что для любого распределения источников света можно найти

ответ, решая соответствующую задачу электростатики. Мы вычисляем вертикальную компоненту электрического поля на плоскости от распределения зарядов точно таким же образом, как для источников света \*.

Рассмотрим такой пример. Нам необходимо для какого-то эксперимента устроить так, чтобы стол освещался равномерно. Мы располагаем длинными трубками флуоресцентных ламп, излучающих равномерно по всей своей длине. Наш стол можно осветить, разместив флуоресцентные трубки правильными рядами на потолке, который находится на высоте  $z$  над столом. Чему должно быть равно наибольшее расстояние  $b$  от трубки до трубки, если мы хотим, чтобы поверхностное освещение было равномерным с точностью до одной тысячной? *Ответ:* 1) найдите электрическое поле от набора равномерно заряженных проводов с промежутком между ними, равным  $b$ ; 2) подсчитайте вертикальную компоненту электрического поля; 3) определите, чему должно быть равно  $b$ , чтобы волнистость поля была не больше одной тысячной.

В гл. 7 мы видели, что электрическое поле от ряда заряженных проводов может быть представлено в виде суммы членов, каждый из которых дает синусоидальное изменение поля с периодом  $b/n$ , где  $n$  — целое число. Амплитуда любого из этих членов дается уравнением (7.44):

$$F_n = A_n e^{-2\pi n z/b}.$$

Нам нужно взять только случай  $n=1$ , раз мы хотим получить поле в точках, не слишком близких к проводам. Чтобы получить полное решение, нам еще нужно определить коэффициенты  $A_n$ , которые мы пока не нашли (хотя они находятся прямым вычислением). Поскольку нам нужно знать только  $A_1$ , то можно оценить его величину, считая ее равной средней величине поля. Экспоненциальный множитель тогда дает нам сразу *относительную* амплитуду изменений. Если мы хотим, чтобы этот множитель был равен  $10^{-3}$ , то  $b$  оказывается равным  $0,91 z$ .

Если промежуток между лампами сделать равным  $3/4$  расстояния до потолка, экспоненциальный множитель тогда будет равен  $1/4000$ , и мы имеем фактор надежности 4, так что мы можем быть вполне уверены, что освещение будет постоянным с точностью до одной тысячной. (Точное вычисление показывает, что  $A_1$  в действительности в два раза больше среднего

---

\* Поскольку мы говорим о *некогерентных* источниках, *интенсивности* которых всегда складываются линейно, то электрические заряды в аналогичной задаче всегда будут иметь одинаковые знаки. Следует учесть, что наша аналогия применяется только к световой энергии, падающей на поверхность непрозрачной плоскости, поэтому мы должны включить в интеграл лишь источники, излучающие над поверхностью (конечно, не те, которые расположены под поверхностью!).

поля, так что точный ответ будет  $b=0,8 z$ .) Немного неожиданно, что для столь равномерного освещения допустимый промежуток между трубками оказался таким большим.

## § 7. «Фундаментальное единство» природы

В этой главе мы хотели показать, что, изучая электростатику, вы одновременно учитесь ориентироваться во многих вопросах физики и что, помня об этом, можно выучить почти всю физику за несколько лет.

Но в конце, естественно, напрашивается вопрос: *почему уравнения для разных явлений столь похожи?* Мы могли бы сказать: «В этом проявляется фундаментальное единство природы». Но что это значит? Что *могло бы означать* такое заявление? Это могло бы просто означать, что уравнения для разных явлений похожи; но тогда, конечно, мы не дали никакого объяснения. «Фундаментальное единство» могло бы означать, что все сделано из одного и того же материала, а потому подчиняется одним и тем же уравнениям. Звучит как неплохое объяснение, но давайте поразмыслим. Электростатический потенциал, диффузия нейтронов, поток тепла — неужели мы действительно имеем дело с одним и тем же материалом? Можем ли мы в самом деле представить себе, что электростатический потенциал *физически* идентичен температуре или плотности частиц? Наверняка  $\phi$  *не совсем то же самое*, что тепловая энергия частиц. Смещение мембраны явно *не похоже* на температуру. С какой же стати тогда здесь проявляется «фундаментальное единство»?

Более пристальный взгляд на физику разных вопросов показывает, что уравнения на самом деле не идентичны. Уравнение, найденное нами для диффузии нейтронов, всего лишь приближение, которое оказывается хорошим, если интересующее нас расстояние велико по сравнению с длиной свободного пробега. Если бы мы пригляделись повнимательнее, то увидели бы, как движутся отдельные нейтроны. Разумеется, движение одного нейтрона и гладкие изменения, которые мы получаем при решении дифференциального уравнения, вещи разные. Дифференциальное уравнение — это приближение, потому что мы сочли, что нейтроны гладко распределены в *пространстве*.

Может быть, *в этом* и состоит загадка? Может быть, общее всем явлениям есть *пространство*, те рамки, в которые вложена физика? Пока все меняется в пространстве достаточно плавно, важными факторами, входящими в рассмотрение, будут скорости изменения величин в зависимости от положения в пространстве. Вот почему у нас всегда получается уравнение с градиентом. Производные *должны* появляться в виде градиента или дивергенции; законы физики *не зависят от направления*,

поэтому они должны выражаться в виде векторов. Уравнения электростатики — это простейшие векторные уравнения, включающие только пространственные производные величин, которые можно вообще записать. Любая другая *простая* проблема — или упрощение сложной проблемы — должна быть похожа на электростатику. Общим для всех наших задач является то, что они связаны с *пространством*, и то, что мы *имитируем* по-настоящему сложные явления простым дифференциальным уравнением.

Отсюда возникает еще один интересный вопрос. А не справедливо ли это утверждение и для уравнений *электростатики*? Может быть, и они годятся только как сглаженная имитация на самом деле гораздо более сложного микромира? И реальный мир состоит из маленьких  $X$ -онов, которые можно различить только на *чрезвычайно* малых расстояниях? А проводя наши измерения, мы всегда наблюдаем все в таком грубом масштабе, что не можем увидеть эти маленькие  $X$ -оны, вот почему мы и приходим к дифференциальным уравнениям?

Наша современная наиболее полная теория электродинамики действительно обнаруживает трудности на очень малых расстояниях. Поэтому в принципе возможно, что эти уравнения представляют собой сглаженные версии чего-то. Они оказываются правильными на расстояниях вплоть до  $10^{-14}$  см, но затем они начинают выглядеть неправильными. Возможно, что существует пока еще не открытый «механизм» и что детали внутреннего сложного устройства скрыты в уравнениях, имеющих гладкий вид, как это получается в «гладкой» диффузии нейтронов. Но никто еще не сумел сформулировать успешной теории, которая бы работала таким образом.

Как это ни странно, оказывается (по причинам, в которых мы еще не разобрались), что комбинация релятивизма и квантовой механики, насколько мы их знаем, по-видимому, *запрещает* придумывание уравнений, фундаментально отличных от уравнения (12.4) и в то же время свободных от противоречий. Заметьте: не из-за расхождений с экспериментом, а от *внутренних противоречий*. Таких, как, скажем, предсказание, что сумма вероятностей всех возможных исходов станет не равной единице или что энергии оказываются комплексными числами, или еще какой-нибудь чепухи. Никто еще не создал теории электричества, в которой  $\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0$  понималось бы как сглаженное приближение к более глубокому механизму и которая не приводила бы в конечном счете к какому-либо абсурду. Но надо сказать, что правильно также и то, что предположение о справедливости  $\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0$  для любых как угодно малых расстояний тоже приводит к дикому абсурду (электрическая энергия электрона бесконечна) — абсурду, от которого никто еще не сумел избавиться.

# Глава 13

## МАГНИТОСТАТИКА

### § 1. Магнитное поле

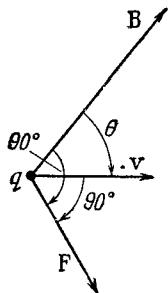
Сила, действующая на электрический заряд, зависит не только от того, где он находится, но и от того, с какой скоростью он движется. Каждая точка в пространстве характеризуется двумя векторными величинами, которые определяют силу, действующую на любой заряд. Во-первых, имеется *электрическая сила*, дающая ту часть силы, которая не зависит от движения заряда. Мы описываем ее с помощью электрического поля  $E$ . Во-вторых, есть еще добавочная компонента силы, называемая *магнитной силой*, которая зависит от скорости заряда. Эта магнитная сила имеет удивительное свойство: в любой данной точке пространства как *направление*, так и *величина* силы зависят от направления движения частицы; в каждый момент сила всегда перпендикулярна вектору скорости; кроме того, в любом месте сила всегда перпендикулярна *определенному направлению в пространстве* (фиг. 13.1), и, наконец, величина силы пропорциональна *компоненте* скорости, перпендикулярной этому выделенному направлению. Все эти свойства можно описать, если ввести вектор магнитного поля  $B$ , который определяет выделенное направление в пространстве и одновременно служит константой пропорциональности между силой и скоростью, и записать магнитную силу в виде  $qv \times B$ . Полная электромагнитная сила, действующая на заряд, может тогда быть записана так:

$$F = q(E + v \times B), \quad (13.1)$$

Она называется *силой Лоренца*.

- §1. Магнитное поле
- §2. Электрический ток;  
сохранение заряда
- §3. Магнитная сила,  
действующая на ток
- §4. Магнитное поле постоянных токов;  
закон Ампера
- §5. Магнитное поле прямого провода и соленоида;  
атомные токи
- §6. Относительность магнитных и электрических полей
- §7. Преобразование токов и зарядов
- §8. Суперпозиция;  
правило правой руки

*Повторить:* гл. 15 (вып. 2)  
«Специальная теория относительности»



Ф и г. 13.1. Зависящая от скорости компонента силы на движущийся заряд направлена перпендикулярно  $\mathbf{v}$  и вектору  $\mathbf{B}$ .

Она пропорциональна также компоненте  $\mathbf{v}$ , перпендикулярной  $\mathbf{B}$ , т. е.  $v \sin \theta$ .

Мagnitude силы можно легко продемонстрировать, если поднести магнит вплотную к катодной трубке. Отклонение электронного луча указывает на то, что магнит возбуждает силы, действующие на электроны перпендикулярно направлению их движения (мы уже об этом говорили в вып. 1, гл. 12).

Единицей магнитного поля  $\mathbf{B}$ , очевидно, является 1 ньютон-секунда, деленная на кулон-метр. Та же единица может быть написана как вольт-секунда на квадратный метр. Ее называют еще *вебер на квадратный метр*\*.

## § 2. Электрический ток; сохранение заряда

Подумаем теперь о том, почему магнитные силы действуют на провода, по которым течет электрический ток. Для этого определим, что понимается под плотностью тока. Электрический ток состоит из движущихся электронов или других зарядов, которые образуют результирующее течение, или поток. Мы можем представить поток зарядов вектором, определяющим количество зарядов, которое проходит в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную потоку (точь-в-точь как мы это делали, определяя поток тепла). Назовем эту величину *плотностью тока* и обозначим ее вектором  $\mathbf{j}$ . Он направлен вдоль движения зарядов. Если взять маленькую площадку  $\Delta a$  в данном месте материала, то количество зарядов, текущее через площадку в единицу времени, равно

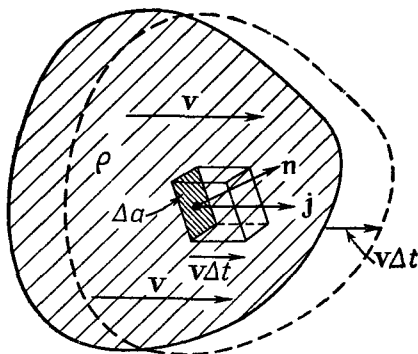
$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \Delta a, \quad (13.2)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к  $\Delta a$ .

Плотность тока связана со средней скоростью течения зарядов. Предположим, что имеется распределение зарядов, в среднем дрейфующих со скоростью  $\mathbf{v}$ . Когда это распределение проходит через элемент поверхности  $\Delta a$ , то заряд  $\Delta q$ ,

\* Или, короче, — *тесла*. — Прим. ред.

Ф и г. 13.2. Если распределение зарядов с плотностью  $\rho$  движется со скоростью  $v$ , то количество заряда, проходящее в единицу времени через площадь  $\Delta a$ , есть  $\rho v \cdot n \Delta a$ .



проходящий через  $\Delta a$  за время  $\Delta t$ , равен заряду, содержащемуся в параллелепипеде с основанием  $\Delta a$  и высотой  $v \Delta t$  (фиг. 13.2). Объем параллелепипеда есть произведение проекции  $\Delta a$ , перпендикулярной к  $v$ , на  $v \Delta t$ , а умножая его на плотность зарядов  $\rho$ , получаем  $\Delta q$ . Таким образом,

$$\Delta q = \rho v \cdot n \Delta a \Delta t.$$

Заряд, проходящий в единицу времени, тогда равен  $\rho v \cdot n \Delta a$ , откуда получаем

$$j = \rho v. \quad (13.3)$$

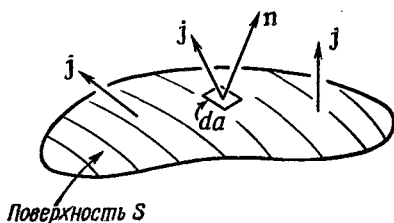
Если распределение зарядов состоит из отдельных зарядов, скажем электронов с зарядом  $q$ , движущихся со средней скоростью  $v$ , то плотность тока равна

$$j = N q v, \quad (13.4)$$

где  $N$  — число зарядов в единице объема.

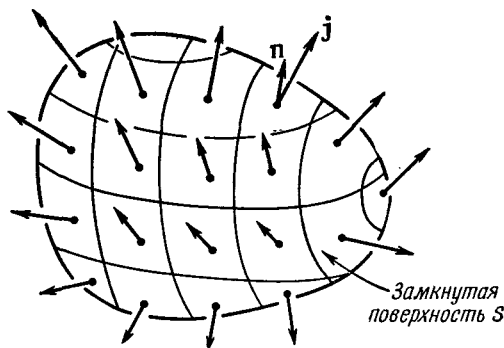
Полное количество заряда, проходящее в единицу времени через какую-то поверхность  $S$ , называется *электрическим током*  $I$ . Он равен интегралу от нормальной составляющей потока по всем элементам поверхности (фиг. 13.3):

$$I = \int_S j \cdot n da. \quad (13.5)$$



Ф и г. 13.3. Ток  $I$  через поверхность  $S$  равен  $\int j \cdot n da$ .





Ф и г . 13.4. Интеграл от  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}$  по замкнутой поверхности равен скорости изменения полного заряда  $Q$  внутри.

Ток  $I$  из замкнутой поверхности  $S$  представляет собой скорость, с которой заряды покидают объем  $V$ , окруженный поверхностью  $S$ . Один из основных законов физики говорит, что *электрический заряд неуничтожаем*; он никогда не теряется и не создается. Электрические заряды могут перемещаться с места на место, но никогда не возникают из ничего. Мы говорим, что *заряд сохраняется*. Если из замкнутой поверхности возникает результирующий ток, то количество заряда внутри должно соответственно уменьшаться (фиг. 13.4). Поэтому мы можем записать закон сохранения заряда в таком виде:

$$\int_{\text{Любая замкнутая поверхность}} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} da = -\frac{d}{dt} (Q_{\text{внутри}}). \quad (13.6)$$

Заряд внутри можно записать как объемный интеграл от плотности заряда

$$Q_{\text{внутри}} = \int_{\text{Внутри } S} \rho dV. \quad (13.7)$$

Применяя (13.6) к малому объему  $\Delta V$ , можно учесть, что интеграл слева есть  $\nabla \cdot \mathbf{j} \Delta V$ . Заряд внутри равен  $\rho \Delta V$ , поэтому сохранение заряда можно еще записать и так:

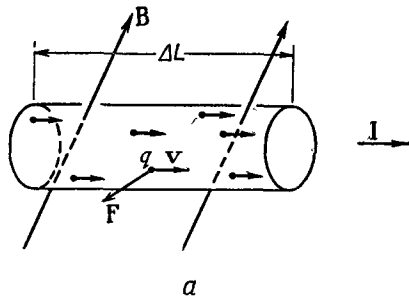
$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (13.8)$$

(опять теорема Гаусса из математики!).

### § 3. Магнитная сила, действующая на ток

Теперь мы достаточно подготовлены, чтобы определить силу, действующую на находящуюся в магнитном поле проволоку, по которой идет ток. Ток состоит из заряженных частиц, движущихся по проволоке со скоростью  $v$ . Каждый заряд чув-

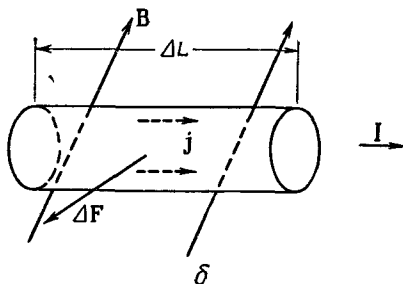
Фиг. 13.5. Магнитная сила на проволоку с током равна сумме сил на отдельные движущиеся заряды.



ствует поперечную силу

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

(фиг. 13.5, а). Если в единичном объеме таких зарядов имеется  $N$ , то их число в малом объеме внутри проволоки  $\Delta V$  равно  $N\Delta V$ . Полная магнитная сила  $\Delta\mathbf{F}$ , действующая на объем  $\Delta V$ , есть сумма сил на отдельные заряды



$$\Delta\mathbf{F} = (N\Delta V)(q\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Но  $Nq\mathbf{v}$  ведь как раз равно  $\mathbf{j}$ , так что

$$\Delta\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}\Delta V \tag{13.9}$$

(фиг. 13.5, б). Сила, действующая на единицу объема, равна  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ .

Если по проволоке с поперечным сечением  $A$  равномерно по сечению течет ток, то можно в качестве элемента объема взять цилиндр с основанием  $A$  и длиной  $\Delta L$ . Тогда

$$\Delta\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}A\Delta L. \tag{13.10}$$

Теперь можно  $\mathbf{j}A$  назвать вектором тока  $\mathbf{I}$  в проволоке. (Его величина есть электрический ток в проволоке, а его направление совпадает с направлением проволоки.) Тогда

$$\Delta\mathbf{F} = \mathbf{I} \times \mathbf{B}\Delta L. \tag{13.11}$$

Сила, действующая на единицу длины проволоки, есть  $\mathbf{I} \times \mathbf{B}$ .

Это уравнение содержит важный результат — магнитная сила, действующая на проволоку и возникающая от движения в

ней зарядов, зависит только от полного тока, а не от величины заряда, переносимого каждой частицей (и даже не зависит от его знака!). Магнитная сила, действующая на проволоку вблизи магнита, легко обнаруживается по отклонению проволоки при включении тока, как было нами описано в гл. 1 (см. фиг. 1.6, стр. 20).

#### § 4. Магнитное поле постоянного тока; закон Ампера

Мы видели, что на проволоку в магнитном поле, создаваемом, скажем, магнитом, действует сила. Из закона о том, что действие равно противодействию, можно ожидать, что, когда по проволоке протекает ток \*, возникает сила, действующая на источник магнитного поля, т. е. на магнит. Такие силы действительно существуют; в этом можно убедиться по отклонению стрелки компаса вблизи проволоки с током. Далее, мы знаем, что магниты испытывают действие сил со стороны других магнитов, а отсюда вытекает, что когда по проволоке течет ток, то он создает собственное магнитное поле. Значит, движущиеся заряды *создают* магнитное поле. Попытаемся понять законы, которым подчиняются такие магнитные поля. Вопрос ставится так: дан ток, какое магнитное поле он создаст? Ответ на этот вопрос был получен экспериментально тремя опытами и подтвержден блестящим теоретическим доказательством Ампера. Мы не будем останавливаться на этой интересной истории, а просто скажем, что большое число экспериментов наглядно показало справедливость уравнений Максвелла. Их мы и возьмем в качестве отправной точки. Опуская в уравнениях члены с производными по времени, мы получаем уравнения *магнито-статике*

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (13.12)$$

и

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}. \quad (13.13)$$

Эти уравнения справедливы только при условии, что все плотности электрических зарядов и все токи постоянны, так что электрические и магнитные поля не меняются со временем — все поля «статические».

Можно тут заметить, что верить в существование статического магнитного поля довольно опасно, потому что вообще-то для получения магнитного поля нужны токи, а токи возникают только от движущихся зарядов. Следовательно, «магнито-

---

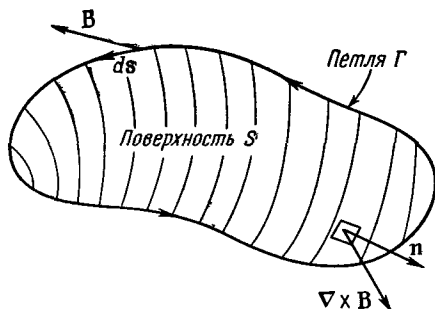
\* Потом мы увидим, что такие предположения, вообще говоря, не правильны для электромагнитных сил!

статика» — только приближение. Она связана с особым случаем динамики, когда движется *большое число* зарядов, которые можно приближенно описывать как *постоянный* поток зарядов. Только в этом случае можно говорить о плотности тока  $\mathbf{j}$ , которая не меняется со временем. Более точно эту область следовало бы назвать изучением постоянных токов. Предполагая, что все поля постоянны, мы отбрасываем члены с  $\partial\mathbf{E}/\partial t$  и  $\partial\mathbf{V}/\partial t$  в полных уравнениях Максвелла [уравнения (2.41)] и получаем два написанных выше уравнения (13.12) и (13.13). Заметьте также, что поскольку дивергенция ротора любого вектора всегда нуль, то уравнение (13.13) требует, чтобы  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ . В силу уравнения (13.8) это верно, только если  $\partial\rho/\partial t = 0$ . Но такое может быть, если  $\mathbf{E}$  не меняется со временем, следовательно, наши предположения внутренне согласованы.

Условие, что  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ , означает, что у нас могут быть только заряды, текущие по замкнутым путям. Они могут, например, течь по проводам, образующим замкнутые петли, которые называются *цепями*. Цепи могут, конечно, содержать генераторы или батареи, поддерживающие ток зарядов. Но в них не должно быть конденсаторов, которые заряжаются или разряжаются. (Мы, конечно, расширим теорию, включив переменные поля, но сначала мы хотим взять более простой случай постоянных токов.)

Обратимся теперь к уравнениям (13.12) и (13.13) и посмотрим, что они означают. Первое говорит, что дивергенция  $\mathbf{V}$  равна нулю. Сравнивая его с аналогичным уравнением электростатики, по которому  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ , можно заключить, что магнитного аналога электрического заряда не существует. Не бывает *магнитных зарядов*, из которых могли бы исходить линии  $\mathbf{V}$ . Если говорить о «линиях» векторного поля  $\mathbf{V}$ , то они нигде не начинаются и нигде не оканчиваются. Но тогда откуда же они берутся? Магнитные поля «появляются» *в присутствии* токов; *ротор*, взятый от них, пропорционален плотности тока. Когда есть токи, есть и линии магнитного поля, образующие петли вокруг токов. Поскольку линии  $\mathbf{V}$  не имеют ни конца, ни начала, они часто возвращаются в исходную точку, образуя замкнутые петли. Но могут возникнуть и более сложные случаи, когда линии не представляют собой простых петель. Однако как бы они ни шли, они никогда не исходят из точек. Никаких магнитных зарядов никто никогда не находил, поэтому  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ . Это же утверждение справедливо не только для магнитостатики, но справедливо *всегда* — даже для динамических полей.

Связь между полем  $\mathbf{V}$  и токами дается уравнением (13.13). Положение здесь совсем другое, в корне отличное от электростатики, где у нас было  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ . Это уравнение означало,



Ф и г. 13.6. Контурный интеграл от тангенциальной составляющей  $\mathbf{B}$  равен поверхностному интегралу от нормальной составляющей вектора  $(\nabla \times \mathbf{B})$ .

что линейный интеграл от  $\mathbf{E}$  по любому замкнутому пути равен нулю:

$$\oint_{\text{По петле}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Мы получили этот результат с помощью теоремы Стокса, согласно которой интеграл по любому замкнутому пути от любого векторного поля равен поверхностному интегралу от нормальной компоненты ротора этого вектора (интеграл берется по любой поверхности, натянутой на данный контур). Применяя эту же теорему к вектору магнитного поля и используя обозначения, показанные на фиг. 13.6, получаем

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} da. \quad (13.14)$$

Найдя  $\text{rot } \mathbf{B}$  из уравнения (13.13), имеем

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} da. \quad (13.15)$$

Интеграл от  $\mathbf{j}$  по  $S$ , согласно (13.5), есть полный ток  $I$  через поверхность  $S$ . Поскольку для постоянных токов ток через  $S$  не зависит от формы  $S$ , если она ограничена кривой  $\Gamma$ , то обычно говорят о «токе через замкнутую петлю  $\Gamma$ ». Мы имеем, таким образом, общий закон: циркуляция  $\mathbf{B}$  по любой замкнутой кривой равна току  $I$  сквозь петлю, деленному на  $\epsilon_0 c^2$ :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{I_{\text{сквозь } \Gamma}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (13.16)$$

Этот закон, называемый *законом Ампера*, играет такую же роль в магнитостатике, как закон Гаусса в электростатике. Один лишь закон Ампера не определяет  $\mathbf{B}$  через токи; мы должны, вообще говоря, использовать также  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . Но, как мы увидим в следующем параграфе, он может быть использован для нахождения поля в тех особых случаях, которые обладают некоторой простой симметрией.

## § 5. Магнитное поле прямого провода и соленоида; атомные токи

Можно показать, как пользоваться законом Ампера, определив магнитное поле вблизи провода. Зададим вопрос: чему равно поле вне длинного прямолинейного провода цилиндрического сечения? Мы сделаем одно предположение, может быть, не столь уж очевидное, но тем не менее правильное: линии поля  $\mathbf{B}$  идут вокруг провода по окружности. Если мы сделаем такое предположение, то закон Ампера [уравнение (13.16)] говорит нам, какова величина поля. В силу симметрии задачи поле  $\mathbf{B}$  имеет одинаковую величину во всех точках окружности, концентрической с проводом (фиг. 13.7). Тогда можно легко взять линейный интеграл от  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ . Он равен просто величине  $B$ , умноженной на длину окружности. Если радиус окружности равен  $r$ , то

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B \cdot 2\pi r.$$

Полный ток через петлю есть просто ток  $I$  в проводе, поэтому

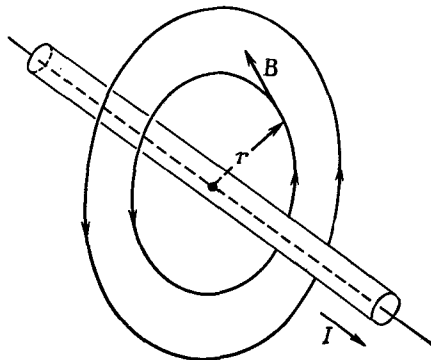
$$B \cdot 2\pi r = \frac{I}{\epsilon_0 c^2},$$

или

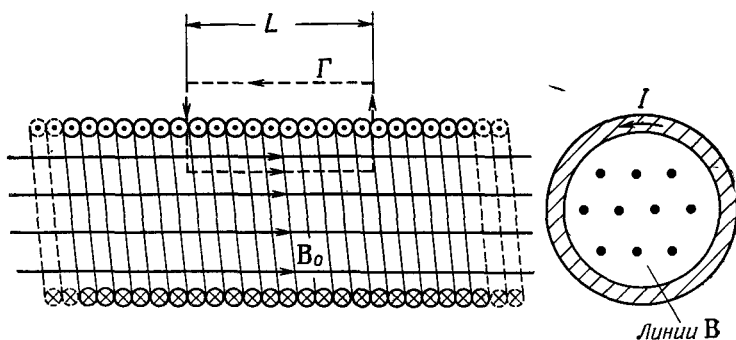
$$B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2I}{r}. \quad (13.17)$$

Напряженность магнитного поля спадает обратно пропорционально  $r$ , расстоянию от оси провода. При желании уравнение (13.17) можно записать в векторной форме. Вспоминая, что  $\mathbf{B}$  направлено перпендикулярно как  $\mathbf{I}$ , так и  $\mathbf{r}$ , имеем

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2\mathbf{I} \times \mathbf{e}_r}{r}. \quad (13.18)$$



Фиг. 13.7. Магнитное поле вне длинного провода с током  $I$ .



Ф и г. 13.8. Магнитное поле длинного соленоида.

Мы выделили множитель  $1/4\pi\epsilon_0 c^2$ , потому что он часто появляется. Стоит запомнить, что он равен в точности  $10^{-7}$  (в системе единиц СИ)\*, потому что уравнение вида (13.17) используется для *определения* единицы тока, ампера. На расстоянии 1 м ток в 1 а создает магнитное поле, равное  $2 \cdot 10^{-7}$  вебер/м<sup>2</sup>.

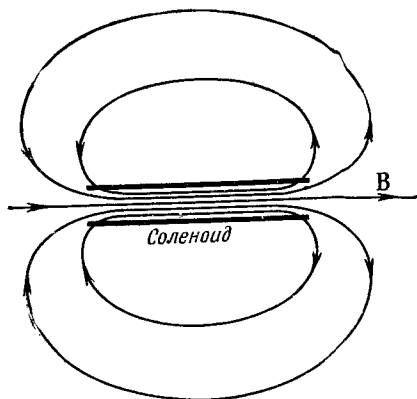
Раз ток создает магнитное поле, то он будет действовать с некоторой силой на соседний провод, по которому также проходит ток. В гл. 1 мы описывали простой опыт, показывающий силы между двумя проводами, по которым течет ток. Если провода параллельны, то каждый из них перпендикулярен полю В другого провода; тогда провода будут отталкиваться или притягиваться друг к другу. Когда токи текут в одну сторону, провода притягиваются, когда токи противоположно направлены, — они отталкиваются.

Возьмем другой пример, который тоже можно проанализировать с помощью закона Ампера, если еще добавить кое-какие сведения о характере поля. Пусть имеется длинный провод, свернутый в тугую спираль, сечение которой показано на фиг. 13.8. Такая спираль называется *соленоидом*. На опыте мы наблюдаем, что когда длина соленоида очень велика по сравнению с диаметром, то поле вне его очень мало по сравнению с полем внутри. Используя только этот факт и закон Ампера, можно найти величину поля внутри.

Поскольку поле *остается* внутри (и имеет нулевую дивергенцию), его линии должны идти параллельно оси, как показано на фиг. 13.8. Если это так, то мы можем использовать закон Ампера для прямоугольной «кривой»  $\Gamma$  на рисунке. Эта кривая проходит расстояние  $L$  внутри соленоида, где поле, скажем, равно  $B_0$ , затем идет под прямым углом к полю и воз-

\* Это и есть магнитная проницаемость пустоты. См. примечание на стр. 67.— *Прим. ред.*

Фиг. 13.9. Магнитное поле вне соленоида.



вращается назад по внешней области, где полем можно пренебречь. Линейный интеграл от  $\mathbf{B}$  вдоль этой кривой равен в точности  $B_0L$ , и это должно равняться  $1/\epsilon_0 c^2$ , умноженному на полный ток внутри  $\Gamma$ , т. е. на  $NI$  (где  $N$  — число витков соленоида на длине  $L$ ). Мы имеем

$$B_0L = \frac{NI}{\epsilon_0 c^2}.$$

Или же, вводя  $n$  — число витков на единицу длины соленоида (так что  $n=N/L$ ), мы получаем

$$B_0 = \frac{nI}{\epsilon_0 c^2}. \quad (13.19)$$

Что происходит с линиями  $\mathbf{B}$ , когда они доходят до конца соленоида? По-видимому, они как-то расходятся и возвращаются в соленоид с другого конца (фиг. 13.9). В точности такое же поле наблюдается вне магнитной палочки. Ну а что же такое поле возникает от присутствия токов. А мы знаем, что обычные железные бруски (не батареи и не генераторы) тоже создают магнитные поля. Вы могли бы ожидать, что в правой части (13.12) или (13.13) должны были бы быть другие члены, представляющие «плотность намагниченного железа» или какую-нибудь подобную величину. Но такого члена нет. Наша теория говорит, что магнитные эффекты железа возникают от каких-то внутренних токов, уже учтенных членом  $\mathbf{j}$ .

Вещество устроено очень сложно, если рассматривать его с глубокой точки зрения; в этом мы уже убедились, когда пытались понять диэлектрики. Чтобы не прерывать нашего изложения, отложим подробное обсуждение внутреннего механизма магнитных материалов типа железа. Пока придется принять, что любой магнетизм возникает за счет токов и что в постоянном магните имеются постоянные внутренние токи. В случае железа эти токи создаются электронами, вращающимися вокруг собственных осей. Каждый электрон имеет такой



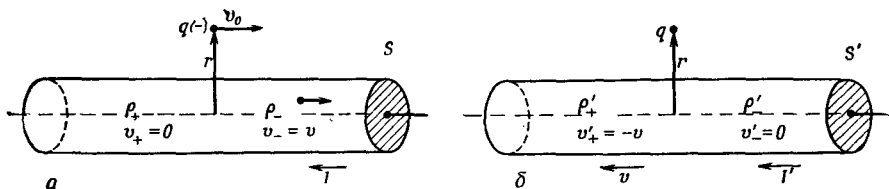
спин, который соответствует крошечному циркулирующему току. Один электрон, конечно, не дает большого магнитного поля, но в обычном куске вещества содержатся миллиарды и миллиарды электронов. Обычно они вращаются любым образом, так что суммарный эффект исчезает. Удивительно то, что в немногих веществах, подобных железу, большая часть электронов крутится вокруг осей, направленных в одну сторону, — у железа два электрона из каждого атома принимают участие в этом совместном движении. В магните имеется большое число электронов, вращающихся в одном направлении, и, как мы увидим, их суммарный эффект эквивалентен току, циркулирующему по поверхности магнита. (Это очень похоже на то, что мы нашли в диэлектриках, — однородно поляризованный диэлектрик эквивалентен распределению зарядов на его поверхности.) Поэтому не случайно, что магнитная палочка эквивалентна соленоиду.

## § 6. Относительность магнитных и электрических полей

Когда мы сказали, что магнитная сила на заряд пропорциональна его скорости, вы, наверное, подумали: «Какой скорости? По отношению к какой системе отсчета?» Из определения  $\mathbf{V}$ , данного в начале этой главы, на самом деле ясно, что этот вектор будет разным в зависимости от выбора системы отсчета, в которой мы определяем скорость зарядов. Но мы ничего не сказали о том, какая же система подходит для определения магнитного поля.

Оказывается, что годится *любая* инерциальная система. Мы увидим также, что магнетизм и электричество — не независимые вещи, они всегда должны быть взяты в совокупности как *одно* полное электромагнитное поле. Хотя в статическом случае уравнения Максвелла разделяются на две отдельные пары: одна пара для электричества и одна для магнетизма, без видимой связи между обоими полями, тем не менее в самой природе существует очень глубокая взаимосвязь между ними, возникающая из принципа относительности. Исторически принцип относительности был открыт после уравнений Максвелла. В действительности же именно изучение электричества и магнетизма привело Эйнштейна к открытию принципа относительности. Но посмотрим, что наше знание принципа относительности подскажет нам о магнитных силах, если предположить, что принцип относительности применим (а в действительности так оно и есть) к электромагнетизму.

Давайте подумаем, что произойдет с отрицательным зарядом, движущимся со скоростью  $v_0$  параллельно проволоке, по



Фиг. 13.10. Взаимодействие проволоки с током и частицы с зарядом  $q$ , рассматриваемое в двух системах координат.

$a$  — в системе  $S$  покоится проволока;  $b$  — в системе  $S'$  покоится заряд.

которой течет ток (фиг. 13.10). Постараемся разобраться в происходящем, используя две системы отсчета: одну, связанную с проволокой, как на фиг. 13.10,  $a$ , а другую — с частицей, как на фиг. 13.10,  $b$ . Мы будем называть первую систему отсчета  $S$ , а вторую  $S'$ .

В системе  $S$  на частицу явно действует магнитная сила. Сила направлена к проволоке, поэтому, если заряду ничего не мешает, его траектория загнется в сторону проволоки. Но в системе  $S'$  магнитной силы на частицу быть не может, потому что скорость частицы равна нулю. Что же, следовательно, она так и будет стоять на месте? Увидим ли мы в разных системах разные вещи? Принцип относительности утверждает, что в системе  $S'$  мы увидели бы тоже, как частица приближается к проволоке. Мы должны попытаться понять, почему такое могло бы произойти.

Вернемся к нашему атомному описанию проволоки, по которой идет ток. В обычном проводнике, вроде меди, электрические токи возникают за счет движения части отрицательных электронов (называемых электронами проводимости), тогда как положительные ядерные заряды и остальные электроны остаются закрепленными внутри материала. Пусть плотность электронов проводимости есть  $\rho_-$ , а их скорость в системе  $S$  есть  $v$ . Плотность неподвижных зарядов в системе  $S$  есть  $\rho_+$ , что должно быть равно  $\rho_-$  с обратным знаком, потому что мы берем незаряженную проволоку. Поэтому вне проволоки электрического поля нет, и сила на движущуюся частицу равна просто

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}.$$

Используя результат, найденный нами в уравнении (13.18) для магнитного поля на расстоянии  $r$  от оси проволоки, мы заключаем, что сила, действующая на частицу, направлена к проволоке и равна по величине

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2Iqv_0}{r}.$$

С помощью уравнений (13.4) и (13.5) ток  $I$  может быть записан как  $\rho_+ v A$ , где  $A$  — площадь поперечного сечения проволоки. Тогда

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2g\rho_+ A v v_0}{r}. \quad (13.20)$$

Мы могли бы продолжить рассмотрение общего случая произвольных скоростей  $v$  и  $v_0$ , но ничуть не хуже будет взята частный случай, когда скорость  $v_0$  частицы совпадает со скоростью  $v$  электронов проводимости. Поэтому мы запишем  $v = v_0$ , и уравнение (13.20) приобретет вид

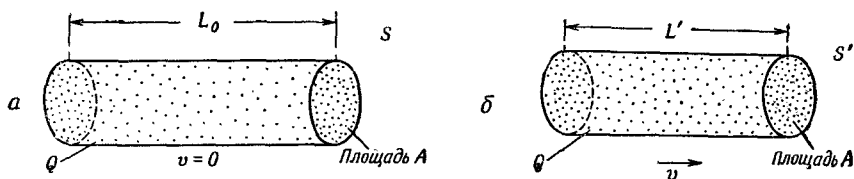
$$F = \frac{g}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho_+ A}{r} \frac{v^2}{c^2}. \quad (13.21)$$

Теперь обратимся к тому, что происходит в системе  $S'$ , где частица покоится и проволока бежит мимо нее (влево на фиг. 13.10, б) со скоростью  $v$ . Положительные заряды, движущиеся вместе с проволокой, создадут около частицы некоторое магнитное поле  $B'$ . Но частица теперь *покоится*, так что *магнитная* сила на нее не действует! Если и возникает какая-то сила, то она должна появиться за счет электрического поля. Выходит, что движущаяся проволока создает электрическое поле. Но она может это сделать, только если она кажется *заряженной*; должно получаться так, чтобы нейтральная проволока с током казалась заряженной, если ее привести в движение.

Нужно в этом разобраться. Попробуем вычислить плотность зарядов в проволоке в системе  $S'$ , пользуясь тем, что мы знаем о ней в системе  $S$ . На первый взгляд можно было бы подумать, что плотности одинаковы, но из гл. 15 (вып. 2) мы знаем, что при переходе от одной системы к другой длины меняются, следовательно, объемы также изменятся. Поскольку *плотности* зарядов зависят от объема, занимаемого зарядами, плотности будут также меняться.

Прежде чем определить плотности зарядов в системе  $S'$ , нужно знать, что происходит с электрическим *зарядом* группы электронов, когда заряды движутся. Мы знаем, что кажущаяся масса частицы приобретает множитель  $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ . Происходит ли что-нибудь подобное с ее зарядом? Нет! *Заряды* никогда *не меняются* независимо от того, движутся ли они или нет. Иначе мы не могли бы наблюдать на опыте сохранение полного заряда.

Возьмем кусок вещества, например проводника, и пусть он вначале незаряжен. Теперь нагреем его. Поскольку масса электронов иная, чем у протонов, скорости электронов и протонов изменятся по-разному. Если бы заряд частицы зависел от скорости частицы, которая его переносит, то в нагретом куске заряды электронов и протонов не были бы скомпенсированы. Кусок материала при нагревании становился бы заряженным.



Ф и г. 13.11. Если распределение заряженных частиц имеет плотность зарядов  $\rho_0$ , то с точки зрения системы, движущейся с относительной скоростью  $v$ , плотность зарядов будет равна  $\rho = \rho_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ .

Мы видели раньше, что очень малое изменение заряда у каждого из электронов в куске привело бы к огромным электрическим полям. Ничего подобного никогда не наблюдалось.

Кроме того, можно заметить, что средняя скорость электронов в веществе зависит от его химического состава. Если бы заряд электрона менялся со скоростью, суммарный заряд в куске вещества изменялся бы в ходе химической реакции. Как и раньше, прямое вычисление показывает, что даже совсем малая зависимость заряда от скорости привела бы в простейших химических реакциях к огромным полям. Ничего похожего не наблюдалось, и мы приходим к выводу, что электрический заряд отдельной частицы не зависит от состояния движения или покоя.

Итак, заряд частицы  $q$  есть инвариантная скалярная величина, не зависящая от системы отсчета. Это означает, что в любой системе плотность зарядов у некоторого распределения электронов просто пропорциональна числу электронов в единице объема. Нам нужно только учесть тот факт, что объем может меняться из-за релятивистского сокращения расстояний.

Применим теперь эти идеи к нашей движущейся проволоке. Если взять проволоку длиной  $L_0$ , в которой плотность неподвижных зарядов есть  $\rho_0$ , то в ней будет содержаться полный заряд  $Q = \rho_0 L_0 A_0$ . Если те же заряды движутся в другой системе со скоростью  $v$ , то они все будут находиться в куске материала меньшей длины

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (13.22)$$

но того же сечения  $A_0$ , поскольку размеры в направлении, перпендикулярном движению, не меняются (фиг. 13.11).

Если через  $\rho$  обозначить плотность зарядов в системе, где они движутся, то полный заряд  $Q$  будет  $\rho L A_0$ . Но это должно быть также равно  $\rho_0 L_0 A$ , потому что заряд в любой системе

одинаков, следовательно,  $\rho L = \rho_0 L_0$ , или с помощью (13.22)

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (13.23)$$

*Плотность* зарядов движущейся совокупности зарядов меняется таким же образом, как и релятивистская масса частицы.

Применим теперь этот результат к плотности положительных зарядов  $\rho_+$  в нашей проволоке. Эти заряды покоятся в системе  $S$ . Однако в системе  $S'$ , где проволока движется со скоростью  $v$ , плотность положительных зарядов становится равной

$$\rho'_+ = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (13.24)$$

*Отрицательные* заряды в системе  $S'$  покоятся, поэтому их плотность в этой системе есть «плотность покоя»  $\rho_0$ . В уравнении (13.23)  $\rho_0 = \rho'_-$ , потому что их плотность зарядов равна  $\rho'_-$ , если проволока покоится, т. е. в системе  $S$ , где скорость отрицательных зарядов равна  $v$ . Тогда для электронов проводимости мы получаем

$$\rho_- = \frac{\rho'_-}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (13.25)$$

или

$$\rho'_- = \rho_- \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (13.26)$$

Теперь мы можем понять, почему в системе  $S'$  возникают электрические поля: потому что в этой системе в проволоке имеется результирующая плотность зарядов  $\rho'$ , даваемая формулой

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_-.$$

С помощью (13.24) и (13.26) имеем

$$\rho' = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \rho_- \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Поскольку покоящаяся проволока нейтральна,  $\rho_- = -\rho_+$ , получаем

$$\rho' = \rho_+ \frac{v^2/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (13.27)$$

Наша движущаяся проволока заряжена положительно и должна создавать поле  $E'$  в точке, где находится внешняя покоящаяся частица. Мы уже решали электростатическую задачу

об однородно заряженном цилиндре. Электрическое поле на расстоянии  $r$  от оси цилиндра есть

$$E' = \frac{\rho' A}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho + Av^2/c^2}{2\pi\epsilon_0 r \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (13.28)$$

Сила, действующая на отрицательно заряженную частицу, направлена к проволоке. Мы имеем силу, направленную одинаково в обеих системах; электрическая сила в системе  $S'$  направлена так же, как магнитная сила в системе  $S$ .

Величина силы в системе  $S'$  равна

$$F' = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho + A}{r} \frac{v^2/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (13.29)$$

Сравнивая этот результат для  $F'$  с нашим результатом для  $F$  в уравнении (13.21), мы видим, что величины сил с точки зрения двух наблюдателей почти одинаковы. Точнее,

$$F' = \frac{F}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (13.30)$$

поэтому для малых скоростей, которые мы рассматриваем, обе силы одинаковы. Мы можем сказать, что по меньшей мере для малых скоростей магнетизм и электричество суть просто «две разные стороны одной и той же вещи».

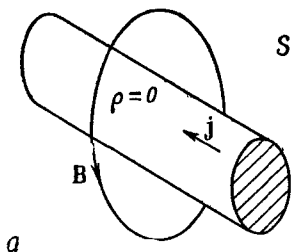
Но оказывается, что все обстоит даже еще лучше, чем мы сказали. Если принять во внимание тот факт, что *силы* также преобразуются при переходе от одной системы к другой, то окажется, что оба способа наблюдения за происходящим дают на самом деле одинаковые *физические* результаты при любой скорости.

Чтобы это увидеть, можно, например, задать вопрос: какой поперечный импульс приобретет частица, на которую в течение некоторого времени действовала сила? Мы знаем из вып. 2, гл. 16, что поперечный импульс частицы должен быть один и тот же как в системе  $S$ , так и в системе  $S'$ . Обозначим поперечную координату  $y$  и сравним  $\Delta p_y$  и  $\Delta p'_y$ . Используя релятивистски правильное уравнение движения  $F = dp/dt$ , мы ожидаем, что за время  $\Delta t$  наша частица приобретет поперечный импульс  $\Delta p_y$  в системе  $S$ , даваемый выражением

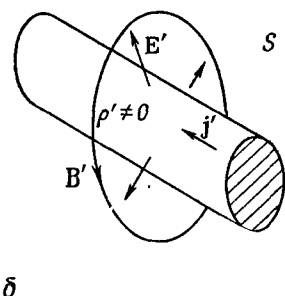
$$\Delta p_y = F \Delta t. \quad (13.31)$$

В системе  $S'$  поперечный импульс будет равен

$$\Delta p'_y = F' \Delta t'. \quad (13.32)$$



Ф и г. 13.12. В системе  $S$  плотность зарядов есть нуль, а плотность тока равна  $\mathbf{j}$ . Есть только магнитное поле. В системе  $S'$  плотность зарядов равна  $\rho'$ , а плотность тока равна  $\mathbf{j}'$ . Магнитное поле здесь равно  $\mathbf{B}'$  и существует электрическое поле  $\mathbf{E}'$ .



Мы должны сравнивать  $\Delta p_y$  и  $\Delta p'_y$ , конечно, для соответствующих интервалов времени  $\Delta t$  и  $\Delta t'$ . В гл. 15 (вып. 2) мы видели, что интервалы времени, относящиеся к движущейся частице, кажутся *длиннее* интервалов в системе покоя частицы. Поскольку наша частица первоначально была в покое в системе  $S'$ , то

мы ожидаем, что для малых  $\Delta t$

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (13.33)$$

и все получается великолепно. Согласно (13.31) и (13.32),

$$\frac{\Delta p'_y}{\Delta p_y} = \frac{F' \Delta t'}{F \Delta t},$$

и если скомбинировать (13.30) и (13.33), то это отношение равно единице.

Вот и выходит, что мы получаем один и тот же результат, независимо от того, анализируем ли мы движение летящей рядом с проволокой частицы в системе покоя проволоки или в системе покоя частицы. В первом случае сила была чисто «магнитной», во втором — чисто «электрической». Оба способа наблюдения показаны на фиг. 13.12 (хотя во второй системе еще есть и магнитное поле  $\mathbf{B}'$ , оно не воздействует на неподвижную частицу).

Если бы мы выбрали еще одну систему координат, мы бы нашли некую другую смесь полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Электрические и

магнитные силы составляют части *одного* физического явления — электромагнитного взаимодействия частиц. Разделение этого взаимодействия на электрическую и магнитную части в большой степени зависит от системы отсчета, в которой мы описываем взаимодействие. Но полное электромагнитное описание инвариантно; электричество и магнетизм, вместе взятые, согласуются с принципом относительности, открытым Эйнштейном.

Раз электрические и магнитные поля появляются в разных соотношениях при изменении системы отсчета, мы должны проявлять осторожность в обращении с полями  $E$  и  $B$ . Если, например, мы говорим о «линиях»  $E$  или  $B$ , то не нужно преувеличивать реальность их существования. Линии могут исчезнуть, если мы захотим увидеть их в другой системе координат. Например, в системе  $S'$  имеются линии электрического поля, однако мы *не видим* их «движущимися мимо нас со скоростью  $v$  в системе  $S$ ». В системе  $S$  линий электрического поля нет вообще! Поэтому бессмысленно говорить что-нибудь вроде: «Когда я двигаю магнит, он несет свое поле с собой, поэтому линии поля  $B$  тоже движутся». Нет никакого способа сделать вообще осмысленным понятие о «скорости движущихся линий поля».

Поля суть способ описания того, что происходит в некоторой точке пространства. В частности,  $E$  и  $B$  говорят нам о силах, которые будут действовать на движущуюся частицу. Вопрос «чему равна сила, действующая на заряд со стороны *движущегося* магнитного поля?» не имеет сколько-нибудь точного содержания. Сила дается величинами  $E$  и  $B$  в точке заряда, и формула (13.1) не изменится, если *источник* полей  $E$  или  $B$  движется (изменится в результате движения как раз значения  $E$  и  $B$ ). Наше математическое описание относится только к полям как функциям  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $t$ , взятым в *некоторой инерциальной системе отсчета*.

Позднее мы будем говорить о «*волне* электрического и магнитного полей, распространяющейся в пространстве», например о световой волне. Но это все равно, что говорить о *волне*, бегущей по веревке. Мы при этом не имеем в виду, что какая-нибудь часть *веревки* движется в направлении волны, а подразумеваем, что *смещение* веревки появляется сначала в одном месте, а затем в другом. Аналогично для электромагнитной волны — сама *волна* распространяется, а величина полей *изменяется*.

Так что в будущем, когда мы — или кто-нибудь еще — будем говорить о «*движущемся*» поле, вы должны понимать, что речь идет просто о коротком и удобном способе описания изменяющегося поля в определенных условиях.



## § 7. Преобразование токов и зарядов

Вы, вероятно, были обеспокоены сделанным нами упрощением, когда мы взяли одну и ту же скорость  $v$  для частицы и электронов проводимости в проволоке. Можно было бы вернуться назад и снова проделать анализ с двумя разными скоростями, но легче просто заметить, что плотность заряда и тока являются компонентами четырехвектора (см. вып. 2, гл. 17).

Мы видели уже, что если  $\rho_0$  есть плотность зарядов в их системе покоя, то в системе, где они имеют скорость  $v$ , плотность равна

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

В этой системе их плотность тока есть

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = \frac{\rho_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (13.34)$$

Далее, мы знаем, что энергия  $U$  и импульс частицы  $\mathbf{p}$ , движущейся со скоростью  $v$ , даются выражениями

$$U = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

где  $m_0$  — ее масса покоя. Мы знаем также, что  $U$  и  $\mathbf{p}$  образуют релятивистский четырехвектор. Поскольку  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  зависят от скорости  $v$  в точности, как  $U$  и  $\mathbf{p}$ , то можно заключить, что  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  также компоненты релятивистского четырехвектора. Это свойство есть ключ к общему анализу поля проволоки, движущейся с любой скоростью, и мы могли бы его использовать, если бы захотели решить снова задачу со скоростью частицы  $v_0$ , не равной скорости электронов проводимости.

Если нам нужно перевести  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  в систему координат, движущуюся со скоростью  $u$  в направлении  $x$ , то мы знаем, что они преобразуются в точности как  $t$  и  $(x, y, z)$ ; поэтому мы имеем (см. вып. 2, гл. 15)

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, & j'_x &= \frac{j_x - u\rho}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \\ y' &= y, & j'_y &= j_y, \\ z' &= z, & j'_z &= j_z, \\ t' &= \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, & \rho' &= \frac{\rho - uj_x/c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (13.35)$$

С помощью этих уравнений можно связать заряды и токи в одной системе с зарядами и токами в другой. Взяв заряды и токи в какой-то системе, можно решить электромагнитную задачу в этой системе, пользуясь уравнениями Максвелла. Результат, который мы получим для движения частиц, будет одним и тем же, независимо от выбранной системы отсчета. Позже мы вернемся к релятивистским преобразованиям электромагнитных полей.

## § 8. Суперпозиция; правило правой руки

Мы закончим эту главу еще двумя замечаниями по вопросам магнитостатики. Первое: наши основные уравнения для магнитного поля

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{c^2 \epsilon_0}$$

линейны по  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{j}$ . Это означает, что принцип суперпозиции (наложения) приложим и к магнитному полю. Поле, создаваемое двумя разными постоянными токами, есть сумма собственных полей от каждого тока, действующего по отдельности. Наше второе замечание относится к правилам правой руки, с которыми мы уже сталкивались (правило правой руки для магнитного поля, создаваемого током). Мы указывали также, что намагничивание железного магнита объясняется вращением электронов в материале. Направление магнитного поля вращающегося электрона связано с осью его вращения тем же самым правилом правой руки. Поскольку  $\mathbf{B}$  определяется правилом определенной руки (с помощью либо векторного произведения, либо ротора), он называется *аксиальным* вектором. (Векторы, направление которых в пространстве не зависит от ссылок на левую или правую руку, называются *полярными* векторами. Например, смещение, скорость, сила и  $\mathbf{E}$  — полярные векторы.)

*Физически наблюдаемые* величины в электромагнетизме, однако, не связаны с правой или левой рукой. Из гл. 52 (вып. 4) мы знаем, что электромагнитные взаимодействия симметричны по отношению к отражению. При вычислении магнитных сил между двумя наборами токов результат всегда инвариантен по отношению к перемене рук. Наши уравнения, независимо от условия правой руки, приводят к конечному результату, что параллельные токи притягиваются, а противоположные — отталкиваются. (Попробуйте вычислить силу с помощью «правила левой руки».) Притяжение или отталкивание есть полярный вектор. Так получается потому, что при описании любого полного взаимодействия мы пользуемся правилом правой руки дважды — один раз, чтобы найти  $\mathbf{B}$  из токов, а затем, чтобы

найти силу, оказываемую полем  $\mathbf{B}$  на второй ток. Два раза пользоваться правилом правой руки — все равно что два раза пользоваться правилом левой руки. Если бы мы условились перейти к системе левой руки, все наши поля  $\mathbf{B}$  изменили бы знак, но все силы или (что, пожалуй, нагляднее) наблюдаемые ускорения объектов не изменились бы.

Хотя физики недавно, к своему удивлению, обнаружили, что *не все* законы природы всегда инвариантны по отношению к зеркальным отражениям, тем не менее законы электромагнетизма обладают этой фундаментальной симметрией.

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В РАЗНЫХ СЛУЧАЯХ

- §1. Векторный потенциал
- §2. Векторный потенциал заданных токов
- §3. Прямой провод
- §4. Длинный соленоид
- §5. Поле маленькой петли; магнитный диполь
- §6. Векторный потенциал цепи
- §7. Закон Био—Савара

§ 1. Векторный потенциал

В этой главе мы продолжим разговор о магнитостатике, т. е. о постоянных магнитных полях и постоянных токах. Магнитное поле и электрические токи связаны нашими основными уравнениями:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{14.1}$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}. \tag{14.2}$$

На этот раз нам нужно решить эти уравнения математически самым *общим образом*, а не ссылаться на какую-нибудь особую симметрию или на интуицию. В электростатике мы нашли прямой способ вычисления поля, когда известны положения всех электрических зарядов: скалярный потенциал  $\phi$  дается просто интегралом по зарядам, как в уравнении (4.25) на стр. 77. Если затем нужно знать электрическое поле, то его получают дифференцированием  $\phi$ . Мы покажем сейчас, что для нахождения поля  $\mathbf{B}$  существует аналогичная процедура, если известна плотность тока  $\mathbf{j}$  всех движущихся зарядов.

В электростатике, как мы видели (из-за того, что  $\text{rot}$  от  $\mathbf{E}$  везде равен нулю), всегда можно представить  $\mathbf{E}$  в виде градиента от скалярного поля  $\phi$ . А вот  $\text{rot}$  от  $\mathbf{B}$  *не везде* равен нулю, поэтому представить его в виде градиента, вообще говоря, невозможно. Однако *дивергенция*  $\mathbf{B}$  везде равна нулю, а это значит, что мы можем представить  $\mathbf{B}$  в виде *ротора* от другого векторного поля. Ибо, как мы видели в гл. 2, § 8, дивергенция ротора всегда равна нулю. Следовательно, мы всегда можем выразить  $\mathbf{B}$  через поле, которое мы обозначим  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{14.3}$$

Или, расписывая компоненты:

$$\begin{aligned} B_x &= (\nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \\ B_y &= (\nabla \times \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \\ B_z &= (\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Запись  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  гарантирует выполнение (14.4), потому что обязательно

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0.$$

Поле  $\mathbf{A}$  называется *векторным потенциалом*.

Вспомним, что скалярный потенциал  $\varphi$  оказывается не полностью определенным. Если мы нашли для некоторой задачи потенциал  $\varphi$ , то всегда можно найти столь же хороший другой потенциал  $\varphi'$ , добавив постоянную:

$$\varphi' = \varphi + C.$$

Новый потенциал  $\varphi'$  дает те же электрические поля, потому что градиент  $\nabla C$  есть нуль;  $\varphi'$  и  $\varphi$  отвечают одной и той же картине.

Точно так же у нас может быть несколько векторных потенциалов  $\mathbf{A}$ , приводящих к одним и тем же магнитным полям. Опять-таки, поскольку  $\mathbf{B}$  получается из  $\mathbf{A}$  дифференцированием, то прибавление к  $\mathbf{A}$  константы не меняет физики дела. Но для  $\mathbf{A}$  свобода больше. Мы можем добавить к  $\mathbf{A}$  любое поле, которое есть градиент от некоторого скалярного поля, не меняя при этом физики. Это можно показать следующим образом. Пусть у нас есть  $\mathbf{A}$ , которое в какой-то реальной задаче дает правильное поле  $\mathbf{B}$ . Спрашивается, при каких условиях другой векторный потенциал  $\mathbf{A}'$ , будучи подставлен в (14.3), дает *то же самое* поле  $\mathbf{B}$ . Значит,  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}'$  имеют одинаковый ротор

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Поэтому

$$\nabla \times \mathbf{A}' - \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{A}' - \mathbf{A}) = 0.$$

Но если ротор вектора есть нуль, то вектор должен быть градиентом некоторого скалярного поля, скажем  $\psi$ , так что  $\mathbf{A}' - \mathbf{A} = \nabla \psi$ . Это означает, что если  $\mathbf{A}$  есть векторный потенциал, отвечающий данной задаче, то при любом  $\psi$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi \quad (14.5)$$

также будет векторным потенциалом, в одинаковой степени удовлетворяющим данной задаче и приводящим к тому же полю  $\mathbf{B}$ .

Обычно бывает удобно уменьшить «свободу»  $A$ , накладывая на него произвольно некоторое другое условие (почти таким же образом мы считали удобным — довольно часто — выбирать потенциал  $\varphi$  равным нулю на больших расстояниях). Мы можем, например, ограничить  $A$ , наложив на него такое условие, чтобы дивергенция  $A$  чему-нибудь равнялась. Мы всегда можем это сделать, не задевая  $V$ . Так получается потому, что, хотя  $A'$  и  $A$  имеют одинаковый ротор и дают одно и то же  $V$ , они вовсе не обязаны иметь одинаковую дивергенцию. В самом деле,  $V \cdot A' = V \cdot A + V^2 \psi$ , и, подбирая соответствующее  $\psi$ , можно придать  $V \cdot A'$  любое значение.

Чему следует приравнять  $V \cdot A$ ? Выбор должен обеспечить наибольшее математическое удобство и зависит от нашей задачи. Для *магнитостатики* мы сделаем простой выбор

$$V \cdot A = 0. \quad (14.6)$$

(Потом, когда мы перейдем к электродинамике, мы изменим наш выбор.) Итак, наше полное определение \*  $A$  в данный момент есть  $V \times A = V$  и  $V \cdot A = 0$ .

Чтобы привыкнуть к векторному потенциалу, посмотрим сначала, чему он равен для однородного магнитного поля  $V_0$ . Выбирая ось  $z$  в направлении  $V_0$ , мы должны иметь

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0, \\ B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0, \\ B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_0. \end{aligned} \quad (14.7)$$

Рассматривая эти уравнения, мы видим, что одно из *возможных* решений есть

$$A_y = xB_0, \quad A_x = 0, \quad A_z = 0.$$

Или с тем же успехом можно взять

$$A_x = -yB_0, \quad A_y = 0, \quad A_z = 0.$$

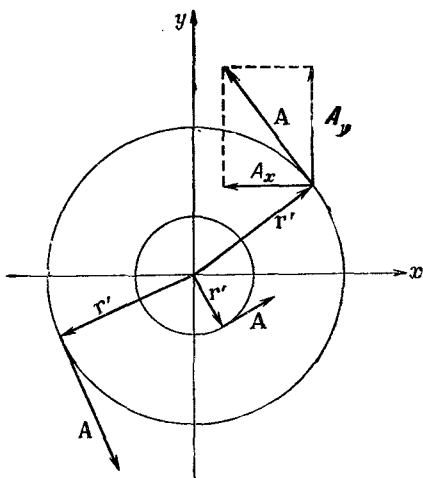
Еще одно решение есть комбинация первых двух

$$A_x = -\frac{1}{2} yB_0, \quad A_y = \frac{1}{2} xB_0, \quad A_z = 0. \quad (14.8)$$

Ясно, что для каждого поля  $V$  векторный потенциал  $A$  не единственный; существует много возможностей.

---

\* Наше определение все еще не полностью задает  $A$ . Чтобы задание было *единственным*, мы должны были бы что-нибудь сказать о поведении поля  $A$  на какой-либо границе или на больших расстояниях. Иногда бывает удобно выбрать, например, поле, спадающее к нулю на больших расстояниях.



Фиг. 14.1. Однородное магнитное поле  $\mathbf{B}$ , направленное по оси  $z$ , соответствует векторному потенциалу  $\mathbf{A}$  ( $\mathbf{A} = \mathbf{B}r'/2$ ), который вращается вокруг оси  $z$ .  
 $r'$  — расстояние до оси  $z$ .

Третье решение [уравнение (14.8)] обладает рядом интересных свойств. Поскольку  $x$ -компонента пропорциональна  $-y$ , а  $y$ -компонента пропорциональна  $+x$ , то вектор  $\mathbf{A}$  должен быть перпендикулярен вектору, проведенному от оси  $z$ , который мы обозначим  $\mathbf{r}'$  (штрих означает, что это не вектор расстояния от начала). Кроме того, величина  $A$  пропорциональна  $\sqrt{x^2+y^2}$  и, следовательно, пропорциональна  $r'$ . Поэтому  $\mathbf{A}$  (для однородного поля) может быть записано просто

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}'. \quad (14.9)$$

Векторный потенциал  $\mathbf{A}$  равен по величине  $B r'/2$  и вращается вокруг оси  $z$ , как показано на фиг. 14.1. Если, например, поле  $\mathbf{B}$  есть поле внутри соленоида вдоль его оси, то векторный потенциал циркулирует точно таким же образом, как и токи в соленоиде.

Векторный потенциал однородного поля может быть получен и другим способом. Циркуляция  $\mathbf{A}$  вдоль любой замкнутой петли  $\Gamma$  может быть выражена через поверхностный интеграл от  $\nabla \times \mathbf{A}$  с помощью теоремы Стокса [уравнение (3.38), стр. 63]

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{Внутри } \Gamma} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, da. \quad (14.10)$$

Но интеграл справа равен потоку  $\mathbf{B}$  сквозь петлю, поэтому

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{Внутри } \Gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da. \quad (14.11)$$

Итак, циркуляция  $A$  вдоль *всякой* петли равна потоку  $B$  сквозь петлю. Если мы возьмем круглую петлю радиуса  $r'$  в плоскости, перпендикулярной однородному полю  $B$ , то поток будет в точности равен

$$\pi r'^2 B.$$

Если выбрать начало отсчета в центре петли, так что  $A$  можно считать направленным по касательной и функцией только от  $r'$ , то циркуляция будет равна

$$\oint A \cdot ds = 2\pi r' A = \pi r'^2 B.$$

Как и раньше, получаем

$$A = \frac{B r'}{2}.$$

В только что разобранном примере мы вычисляем векторный потенциал из магнитного поля, обычно поступают наоборот. В сложных задачах всегда проще найти векторный потенциал, а затем уже из него найти магнитное поле. Сейчас мы покажем, как это можно сделать.

## § 2. Векторный потенциал заданных токов

Раз  $B$  определяется токами, значит, и  $A$  тоже. Мы хотим теперь выразить  $A$  через токи. Начнем с нашего основного уравнения (14.2):

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0},$$

откуда, конечно, следует

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}. \quad (14.12)$$

Это уравнение для магнитостатики; оно похоже на уравнение

$$\nabla \cdot \nabla \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (14.13)$$

для электростатики.

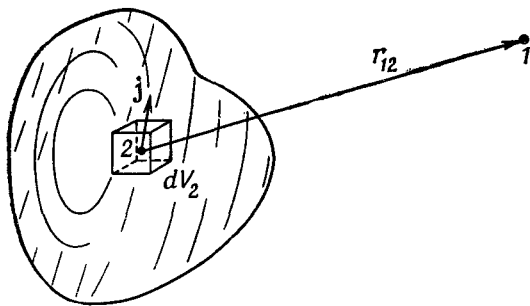
Наше уравнение (14.12) для векторного потенциала станет еще более похожим на уравнение для  $\phi$ , если переписать  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$ , используя векторное тождество [см. уравнение (2.58) стр. 44]

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (14.14)$$

Поскольку мы выбрали  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  (и теперь вы видите, почему), уравнение (14.12) приобретает вид

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (14.15)$$





Ф и г. 14.2. Векторный потенциал  $A$  в точке 1 определяется интегралом по элементам тока  $j dV$  во всех точках 2.

Это векторное уравнение, конечно, распадается на три уравнения

$$\nabla^2 A_x = -\frac{j_x}{\epsilon_0 c^2}, \quad \nabla^2 A_y = -\frac{j_y}{\epsilon_0 c^2}, \quad \nabla^2 A_z = -\frac{j_z}{\epsilon_0 c^2}, \quad (14.16)$$

и каждое из этих уравнений математически идентично уравнению

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (14.17)$$

Все, что мы узнали о нахождении потенциала для известного  $\rho$ , можно использовать для нахождения каждой компоненты  $A$ , когда известно  $j$ !

В гл. 4 мы видели, что общее решение уравнения электростатики (14.17) имеет вид

$$\phi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2) dV_2}{r_{12}}.$$

Тогда мы немедленно получаем общее решение для  $A_x$ :

$$A_x(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j_x(2) dV_2}{r_{12}} \quad (14.18)$$

и аналогично для  $A_y$  и  $A_z$ . (Фиг. 14.2 напоминает вам о принятых нами обозначениях для  $r_{12}$  и  $dV_2$ .) Мы можем объединить все три решения в векторной форме:

$$A(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j(2) dV_2}{r_{12}}. \quad (14.19)$$

(Вы можете при желании проверить прямым дифференцированием компонент, что этот интеграл удовлетворяет  $\nabla \cdot A = 0$ , поскольку  $\nabla \cdot j = 0$ , а последнее, как мы видели, должно выполняться для постоянных токов.)

Мы имеем, таким образом, общий метод вычисления магнитного поля от постоянных токов. Принцип такой:  $x$ -компонента векторного потенциала, возникающая от плотности тока  $j$ , точно такая же, как электрический потенциал  $\phi$ , кото-

рый был бы создан плотностью зарядов  $\rho$ , равной  $j_x/c^2$ , и аналогично для  $y$ - и  $z$ -компонент. (Этот принцип действует только для декартовых компонент. Например, «радиальная» компонента  $A$  не связана таким же образом с «радиальной» компонентой  $j$ .) Итак, из вектора плотности тока  $\mathbf{j}$  можно найти  $A$ , пользуясь уравнениями (14.19), т. е. мы находим каждую компоненту  $A$ , решая три воображаемые электростатические задачи для распределений заряда  $\rho_1 = j_x/c^2$ ,  $\rho_2 = j_y/c^2$  и  $\rho_3 = j_z/c^2$ . Затем мы находим  $V$ , вычислив разные производные от  $A$ , входящие в  $\nabla \times A$ . Немного сложнее, чем в электростатике, но идея та же. Сейчас мы проиллюстрируем теорию, вычислив векторный потенциал в нескольких частных случаях.

### § 3. Прямой провод

В качестве первого примера снова вычислим поле прямого провода, которое мы находили в предыдущем параграфе, пользуясь уравнением (14.2) и соображениями симметрии. Возьмем длинный прямой провод радиуса  $a$ , по которому течет постоянный ток  $I$ . В отличие от заряда в проводнике в случае электростатики постоянный ток в проводе распределен равномерно по поперечному сечению провода. При таком выборе координат, как показано на фиг. 14.3, вектор плотности тока  $\mathbf{j}$  имеет только  $z$ -компоненту. По величине она равна

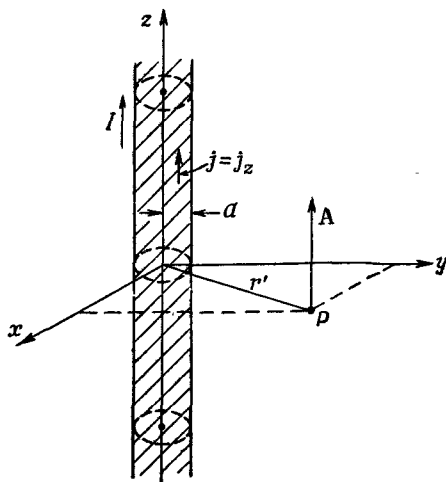
$$j_z = \frac{I}{\pi a^2} \quad (14.20)$$

внутри провода и нулю вне его.

Поскольку  $j_x$  и  $j_y$  оба равны нулю, то сразу же получим

$$A_x = 0, \quad A_y = 0.$$

Чтобы получить  $A_z$ , можно использовать наше решение для электростатического потенциала  $\phi$  от



Фиг. 14.3. Длинный цилиндрический провод с однородной плотностью тока  $\mathbf{j}$ , направленный вдоль оси  $z$ .

провода с однородной плотностью заряда  $\rho = j_z/c^2$ . Для точек вне бесконечного заряженного цилиндра электростатический потенциал равен

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r',$$

где  $r' = \sqrt{x^2 + y^2}$ , а  $\lambda$  — заряд на единицу длины  $\lambda a^2 \rho$ . Следовательно,  $A_z$  должно быть равно

$$A_z = -\frac{\pi a^2 j_z}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln r'$$

для точек вне длинного провода с равномерно распределенным током. Поскольку  $\pi a^2 j_z = I$ , то можно также написать

$$A_z = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln r'. \quad (14.21)$$

Теперь можно найти  $\mathbf{B}$ , пользуясь (14.4). Из шести производных от нуля отличны только две. Получаем

$$B_x = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial y} \ln r' = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{y}{r'^2}, \quad (14.22)$$

$$B_y = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial x} \ln r' = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{x}{r'^2}, \quad (14.23)$$

$$B_z = 0.$$

Мы получаем тот же результат, что и раньше:  $\mathbf{B}$  обходит провод по окружности и по величине равен

$$B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2I}{r'}. \quad (14.24)$$

#### § 4. Длинный соленоид

Еще пример. Рассмотрим опять бесконечно длинный соленоид с током по окружности, равным  $nI$  на единицу длины. (Мы считаем, что имеется  $n$  витков проволоки на единицу длины, несущих каждый ток  $I$ , и пренебрегаем небольшими зазорами между витками.)

Точно так же, как мы выводили «поверхностную плотность заряда»  $\sigma$ , определим здесь «поверхностную плотность тока»  $\mathbf{J}$ , равную току на единице длины по поверхности соленоида (что, конечно, есть просто среднее  $\mathbf{j}$ , умноженное на толщину тонкой намотки). Величина  $\mathbf{J}$  здесь равна  $nI$ . Этот поверхностный ток (фиг. 14.4) имеет компоненты

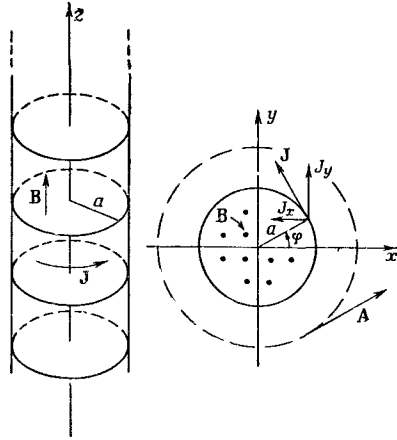
$$J_x = -J \sin \varphi, \quad J_y = J \cos \varphi, \quad J_z = 0.$$

Мы должны теперь найти  $\mathbf{A}$  для такого распределения токов.

Прежде всего найдем  $A_x$  в точках вне соленоида. Результат такой же, как электростатический потенциал вне цилиндра с поверхностным зарядом:

$$\sigma = \sigma_0 \sin \varphi,$$

Фиг. 14.4. Длинный соленоид с поверхностной плотностью тока  $J$ .



где  $\sigma_0 = -J/c^2$ . Мы не решали случай такого распределения заряда, но делали нечто похожее. Это распределение заряда эквивалентно двум жестким цилиндрам, состоящим из зарядов, один из положительных, другой из отрицательных, с малым относительным смещением их осей в направлении  $y$ . Потенциал такой пары цилиндров пропорционален производной по  $y$  от потенциала одного однородно заряженного цилиндра. Мы, конечно, можем вычислить константу пропорциональности, но пока не будем возиться с этим.

Потенциал заряженного цилиндра пропорционален  $\ln r'$ ; потенциал пары тогда равен

$$\varphi \sim \frac{\partial \ln r'}{\partial y} = \frac{y}{r'^2}.$$

Итак, мы знаем, что

$$A_x = -K \frac{y}{r'^2}, \quad (14.25)$$

где  $K$  — некоторая константа. Рассуждая точно так же, найдем

$$A_y = K \frac{x}{r'^2}. \quad (14.26)$$

Хотя мы раньше говорили, что вне соленоида магнитного поля нет, теперь мы находим, что поле  $A$  существует и циркулирует вокруг оси  $z$  (см. фиг. 14.4). Возникает вопрос: равен ли нулю его ротор?

Очевидно,  $B_x$  и  $B_y$  равны нулю, а

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{x}{r'^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( -K \frac{y}{r'^2} \right) = \\ &= K \left( \frac{1}{r'^2} - \frac{2x^2}{r'^4} + \frac{1}{r'^2} - \frac{2y^2}{r'^4} \right) = 0. \end{aligned}$$

Итак, магнитное поле вне очень длинного соленоида действительно равно нулю, хотя векторный потенциал нулю не равен.

Мы можем проверить наш результат, прибегнув к другим соображениям. Циркуляция векторного потенциала вокруг соленоида должна равняться потоку  $B$  внутри катушки [уравнение (14.11)]. Циркуляция равна  $A \cdot 2\pi r'$  или, поскольку  $A = K/r'$ , она равна  $2\pi K$ . Заметьте, что циркуляция не зависит от  $r'$ . Так и должно быть, если  $B$  вне соленоида отсутствует, потому что поток есть просто величина  $B$  *внутри* соленоида, умноженная на  $\pi a^2$ . Он один и тот же для всех окружностей с радиусом  $r' > a$ . Раньше мы нашли, что поле внутри равно  $nI/\epsilon_0 c^2$ , поэтому мы можем определить константу  $K$ :

$$2\pi K = \pi a^2 \frac{nI}{\epsilon_0 c^2},$$

или

$$K = \frac{nIa^2}{2\epsilon_0 c^2}.$$

Итак, векторный потенциал *снаружи* имеет величину

$$A = \frac{nIa^2}{2\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r'} \quad (14.27)$$

и всегда перпендикулярен вектору  $\mathbf{r}'$ .

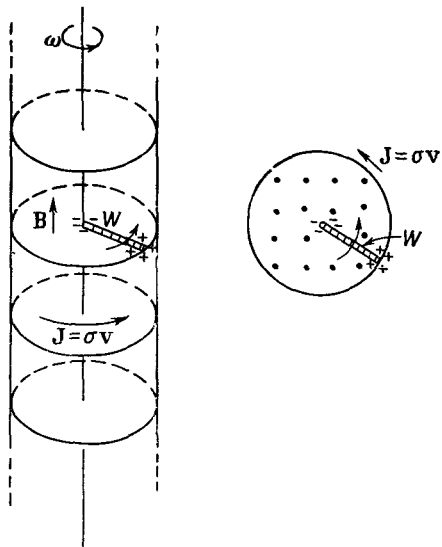
Мы говорили о соленоидальной катушке из проволоки, но такое же поле мы могли бы создать, вращая длинный цилиндр с электростатическим зарядом на поверхности. Если у нас есть тонкий цилиндрический слой радиуса  $a$  с поверхностным зарядом  $\sigma$ , то вращение цилиндра образует поверхностный ток  $J = \sigma v$ , где  $v = a\omega$  — скорость поверхностного заряда. Внутри цилиндра тогда будет магнитное поле  $B = \sigma_a \omega / \epsilon_0 c^2$ .

Теперь можно поставить интересный вопрос. Предположим, что перпендикулярно к оси цилиндра мы поместили короткий отрезок проволоки  $W$  от оси до поверхности и прикрепили ее к цилиндру так, что проволока вращается вместе с ним (фиг. 14.5). Эта проволока движется в магнитном поле, так что сила  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  приведет к тому, что концы проволоки зарядятся (они будут заряжаться до тех пор, пока поле  $\mathbf{E}$  зарядов не уравновесит силы  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ). Если цилиндр заряжен положительно, то конец проволоки вблизи оси будет иметь отрицательный заряд. Измеряя заряд на конце проволоки, мы могли бы определить скорость вращения системы. Мы получили бы «угловой скоростемер» (или «угловой сигометр»!).

Но вы, наверно, засомневаетесь: «А что, если я сам перейду, — скажете вы, — в систему координат вращающегося цилиндра? Там заряженный цилиндр покоится, а я знаю из электростатических уравнений, что внутри цилиндра никакого поля *не будет*, не будет и силы, толкающей заряды к центру. Поэтому здесь что-то не так?» Нет. Все правильно.

**Ф и г. 14.5.** Вращающийся заряженный цилиндр создает внутри себя магнитное поле.

Короткая проволока, закрепленная вдоль радиуса, вращаясь вместе с цилиндром, приобретает на своих концах индуцированные заряды.



«Относительности вращения» не существует. Вращающаяся система — не инерциальная система, и законы физики в ней другие. Мы должны пользоваться уравнениями электромагнетизма только в инерциальных системах координат.

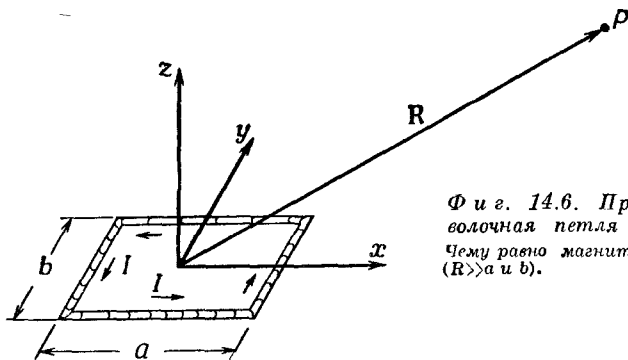
Было бы здорово, если бы смогли измерить абсолютное вращение Земли с помощью такого заряженного цилиндра, но эффект, к несчастью, настолько мал, что его невозможно наблюдать даже с помощью самых тонких современных приборов.

### § 5. Поле маленькой петли; магнитный диполь

Воспользуемся методом векторного потенциала, чтобы найти магнитное поле маленькой петли с током. Как обычно, под словом «маленькая» мы просто подразумеваем, что нас интересуют поля только на больших расстояниях по сравнению с размером петли. Как мы увидим, любая петелька представляет собой «магнитный диполь». Это значит, что она создает магнитное поле, подобное электрическому полю от электрического диполя.

Возьмем сначала прямоугольную петлю и выберем оси координат, как показано на фиг. 14.6. Токов в направлении  $z$  нет, поэтому  $A_z$  равно нулю. Есть токи в направлении  $x$  по обеим сторонам прямоугольника, длина которых  $a$ . В каждой стороне плотность тока и ток однородны. Поэтому решение для  $A_x$  в точности подобно электростатическому потенциалу от двух заряженных палочек (фиг. 14.7). Поскольку палочки имеют противоположные заряды, их электрический потенциал на больших расстояниях есть как раз дипольный потенциал (см. гл. 6, § 5). В точке  $P$  на фиг. 14.6 потенциал равен

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot e_R}{R^2}, \quad (14.28)$$



Ф и г. 14.6. Прямоугольная проволочная петля с током  $I$ .  
Чему равно магнитное поле в точке  $P$ ?  
( $R \gg a$  и  $b$ ).

где  $p$  — дипольный момент распределения зарядов. В данном случае дипольный момент равен полному заряду на одной палочке, умноженному на расстояние между ними:

$$p = \lambda ab. \quad (14.29)$$

Дипольный момент смотрит в отрицательном направлении  $y$ , поэтому косинус угла между  $\mathbf{R}$  и  $p$  равен  $-y/R$  (где  $y$  — координата  $P$ ). Итак, мы имеем

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ab y}{R^2 R}.$$

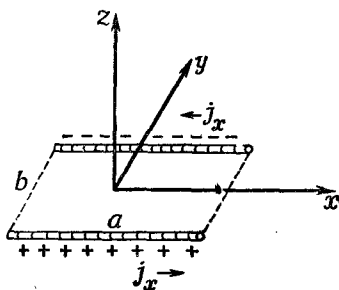
Заменяя  $\lambda$  на  $I/c^2$ , сразу же получаем  $A_x$ :

$$A_x = -\frac{Iab y}{4\pi\epsilon_0 c^2 R^3}. \quad (14.30)$$

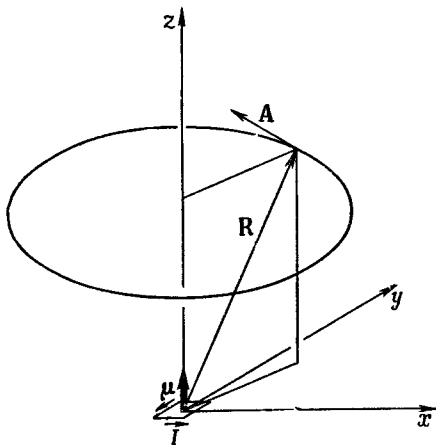
С помощью тех же рассуждений:

$$A_y = \frac{Iab x}{4\pi\epsilon_0 c^2 R^3}. \quad (14.31)$$

Ф и г. 14.7. Распределение  $j_x$  в проволочной петле с током, изображенной на фиг. 14.6.



Фиг. 14.8. Векторный потенциал маленькой петли с током, расположенной в начале координат (в плоскости  $xy$ ). Поле магнитного диполя.



Снова  $A_y$  пропорционально  $x$ , а  $A_x$  пропорционально  $-y$ , так что векторный потенциал (на больших расстояниях) идет по кругу вокруг оси  $z$ , циркулируя таким же образом, как ток  $I$  в петле (фиг. 14.8).

Величина  $A$  пропорциональна  $Iab$ , т. е. току, умноженному на площадь петли. Это произведение называется *магнитным дипольным моментом* (или часто просто «магнитным моментом») петли. Мы обозначим его через  $\mu$ :

$$\mu = Iab. \quad (14.32)$$

Векторный потенциал маленькой плоской петельки *любой* формы (круг, треугольник и т. п.) также дается уравнениями (14.30) и (14.31), если заменить  $Iab$  на

$$\mu = I \cdot \text{Площадь петли}. \quad (14.33)$$

Мы предоставляем вам право это доказать.

Нашему уравнению можно придать векторную форму, если определить вектор  $\mu$  как нормаль к плоскости петли с положительным направлением, определяемым по правилу правой руки (см. фиг. 14.8). Тогда можно написать

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mu \times \mathbf{R}}{R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mu \times \mathbf{e}_R}{R^2}. \quad (14.34)$$

Нам еще нужно найти  $\mathbf{B}$ . Пользуясь (14.33) и (14.34), а также (14.4), получаем

$$B_x = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{\mu}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{x}{R^3} = \dots \frac{3xz}{R^5} \quad (14.35)$$

(под многоточием мы подразумеваем  $\mu/4\pi\epsilon_0 c^2$ ),

$$B_y = \frac{\partial}{\partial z} \left( -\dots \frac{y}{R^3} \right) = \dots \frac{3yz}{R^5}, \quad (14.36)$$

$$B_z = \frac{\partial}{\partial x} \left( \dots \frac{x}{R^3} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( -\dots \frac{y}{R^3} \right) = \dots \left( \frac{1}{R^3} - \frac{3z^2}{R^5} \right).$$



Компоненты поля  $\mathbf{B}$  ведут себя точно так же, как компоненты поля  $\mathbf{E}$  для диполя, ориентированного вдоль оси  $z$  [см. уравнения (6.14) и (6.15), а также фиг. 6.5, стр. 115]. Вот почему мы называем петлю магнитным диполем. Слово «диполь» в применении к магнитному полю немного запутывает, потому что *нет* отдельных магнитных «полюсов», соответствующих электрическим зарядам. Магнитное «дипольное поле» создается не двумя «зарядами», а элементарной петлей с током.

В общем-то довольно любопытно, что, начав с совсем разных законов,  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$  и  $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}/\epsilon_0 c^2$ , можно прийти к полю одного и того же вида. Почему так получается? Потому что дипольные поля возникают, только когда мы находимся далеко от всех токов и зарядов. Тогда в большей части пространства уравнения для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  одинаковы: у обоих дивергенция и ротор равны нулю. Следовательно, они дают одни и те же решения. Однако *источники*, конфигурацию которых мы описываем с помощью дипольных моментов, физически совершенно различны. В одном случае это циркулирующий ток, а в другом — пара зарядов, один над, а другой под плоскостью петли для соответствующего поля.

## § 6. Векторный потенциал цепи

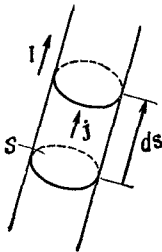
Нас часто интересует магнитное поле, создаваемое цепью проводов, в которой диаметр провода очень мал по сравнению с размерами всей системы. В таких случаях мы можем упростить уравнения для магнитного поля.

Для тонкого провода элемент объема можно записать в виде

$$dV = S ds,$$

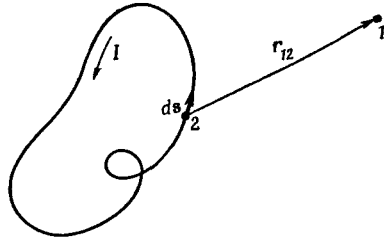
где  $S$  — площадь поперечного сечения провода, а  $ds$  — элемент расстояния вдоль проволоки. В самом деле, поскольку вектор  $ds$  имеет то же направление, что и  $\mathbf{j}$  (фиг. 14.9), и мы можем предположить, что  $\mathbf{j}$  постоянно по любому данному сечению, то можно записать векторное уравнение

$$\mathbf{j} dV = \mathbf{j} S ds. \quad (14.37)$$



Фиг. 14.9. Для тонкой проволоки  $\mathbf{j} dV$  то же самое, что и  $\mathbf{j} ds$ .

Фиг. 14.10. Магнитное поле провода может быть получено интегрированием по всей цепи.



Но  $jS$  — как раз то, что мы называем током  $I$  во всем проводе, так что наш интеграл для векторного потенциала (14.19) становится равным

$$A(i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{I ds_2}{r_{12}} \quad (14.38)$$

(фиг. 14.10). (Мы предполагаем, что  $I$  одно и то же вдоль всего контура. Если есть несколько ответвлений с разными токами, то следует, конечно, брать соответствующий ток в каждой ветви.)

Как и раньше, можно найти поле с помощью (14.38) либо прямым интегрированием, либо решая соответствующую электростатическую задачу.

### § 7. Закон Био — Савара

В ходе изучения электростатики мы нашли, что электрическое поле известного распределения зарядов может быть получено сразу в виде интеграла [уравнение (4.16)]

$$E(i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2) e_{12} dV_2}{r_{12}^2}.$$

Как мы видели, вычислить этот интеграл (а их на самом деле три, по одному на каждую компоненту) обычно бывает труднее, чем вычислить интеграл для потенциала и взять от него градиент.

Подобный интеграл связывает и магнитное поле с токами. Мы уже имеем интеграл для  $A$  [уравнение (14.19)]; мы можем получить интеграл и для  $B$ , если возьмем ротор от обеих частей:

$$B(i) = \nabla \times A(i) = \nabla \times \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j(2) dV_2}{r_{12}} \right]. \quad (14.39)$$

А теперь мы должны быть осторожны. Оператор ротора означает взятие производных от  $A(i)$ , т. е. он действует только на координаты  $(x_1, y_1, z_1)$ . Можно внести оператор  $\nabla \times$  под интеграл, если помнить, что он действует только на переменные со значком 1, которые появляются, конечно, только в

$$r_{12} = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2}. \quad (14.40)$$

Мы получаем для  $x$ -компоненты  $\mathbf{B}$ :

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y_1} - \frac{\partial A_y}{\partial z_1} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \left[ j_z \frac{\partial}{\partial y_1} \left( \frac{1}{r_{12}} \right) - j_y \frac{\partial}{\partial z_1} \left( \frac{1}{r_{12}} \right) \right] dV_2 = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \left[ j_z \frac{y_1 - y_2}{r_{12}^3} - j_y \frac{z_1 - z_2}{r_{12}^3} \right] dV_2. \end{aligned} \quad (14.41)$$

Величина в скобках есть просто  $x$ -компонента от

$$\frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} = \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2}.$$

Такие же результаты получаются и для других компонент, и мы имеем

$$\mathbf{B}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(2) \times \mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2. \quad (14.42)$$

Интеграл дает  $\mathbf{B}$  сразу через известные токи. Геометрия здесь точно такая же, какая изображена на фиг. 14.2.

Если токи текут только по тонким проводам, мы можем, как в предыдущем параграфе, немедленно взять интеграл поперек провода, заменив  $\mathbf{j}dV$  на  $I ds$ , где  $ds$  — элемент длины провода. Тогда, пользуясь обозначениями фиг. 14.10, имеем

$$\mathbf{B}(1) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{I \mathbf{e}_{12} \times ds_2}{r_{12}^2}. \quad (14.43)$$

(Знак минус появляется потому, что мы изменили порядок векторного произведения.) Это уравнение для  $\mathbf{B}$  называется *законом Био—Савара* в честь открывших его ученых. Он дает формулу для прямого вычисления магнитного поля, создаваемого проводами с током.

Вероятно, вы удивились: «Какой же прок от векторного потенциала, если мы можем сразу найти  $\mathbf{B}$  в виде векторного интеграла? В конце концов  $\mathbf{A}$  тоже определяется тремя интегралами!» Из-за векторного произведения интегралы для  $\mathbf{B}$  обычно сложнее устроены, как это видно из уравнения (14.41). Кроме того, поскольку интегралы для  $\mathbf{A}$  похожи на электростатические, то нам не надо их вычислять заново. Наконец, мы увидим, что в более трудных теоретических вопросах, таких, как теория относительности, в современном изложении законов механики, вроде принципа наименьшего действия, о котором будет рассказано позже, в квантовой механике, векторный потенциал играет важную роль.