

Radiation and Scattering of Waves

Излучение и рассеяние ВОЛН

ТОМ

2

LEOPOLD B. FELSEN

*Professor of Electrophysics
Polytechnic Institute of Brooklyn*

NATHAN MARCUVITZ

*Professor of Applied Physics
New York University*

Перевод с английского
под редакцией
М. Л. ЛЕВИНА

интерпретации волновых решений разного типа, отвечающих вкладом точек перевала, полюсов и точек ветвления.

В § 4 рассматривается область с простейшей геометрией — безграничный однородный диэлектрик. Так как в этом случае можно получить замкнутые выражения для функций Грина, отвечающих источникам различных типов, мы найдем их представления в виде разложений по собственным функциям и выведем соответствующие асимптотические формулы для того, чтобы на простых примерах разъяснить основные понятия и математические методы. Далее (§ 5) речь идет о возбуждении полей источниками при наличии полубесконечной диэлектрической среды, когда поле в дальней зоне не сводится лишь к падающему, отраженному и преломленному геометрооптическим полям, но содержит также дифракционные составляющие в виде поверхностных или боковых волн (последние связаны с явлением полного внутреннего отражения). Проводится также анализ переходных областей, где невозможно четко выделить из полного поля волны указанных типов; аналитически переходные эффекты объясняются близким расположением точек перевала к полюсам или точкам ветвления в интегральных представлениях поля. Природа геометрооптических и дифракционных полей становится очевидной из исследования переходных процессов при импульсном возбуждении (§ 5, п. «г»), позволяющего проследить за распространением различных волновых фронтов и тем самым разъяснить соответствующие явления для гармонических во времени процессов.

Параграф 6 посвящен полям, возбуждаемым источниками, расположенными возле диэлектрической пластины. В этом случае наблюдаются эффекты многократного отражения от граней пластины и, если диэлектрическая проницаемость пластины выше, чем у окружающей среды, захвата волн. Энергия захваченной, или поверхностной, волны сосредоточена в основном в объеме пластины и переносится в направлении, параллельном ее границам, а потому при анализе подобных волновых явлений удобно представлять поле в виде суперпозиции собственных волн, распространяющихся вдоль поперечной оси ρ . Такое представление можно либо построить непосредственно, используя собственные функции пластины, выведенные в § 3, п. «в», либо вывести из z -представления, деформируя контур интегрирования; в последнем случае используются характеристические функции Грина, приведенные в § 3, п. «а», и вывод служит иллюстрацией к тому, что говорилось вообще об альтернативных представлениях поля в § 3, п. «в». Аналогичные соображения относятся к случаю (рассматриваемому в § 7) границы с постоянным импедансом, вдоль которой при подходящих условиях также может распространяться поверхностная волна. В § 7, п. «г»,

на примере возбуждения волн раскрытом антенны показывается, как, зная функцию Грина, можно построить решение при заданных распределенных источниках.

Во всех упомянутых случаях исследовались слоистые среды, свойства которых описывались кусочно-постоянными функциями координаты z ; при этом функции Грина могут быть выражены через тригонометрические или экспоненциальные функции, как показано в гл. 2, § 4. Для сред с непрерывным изменением свойств, рассматриваемых в § 8 и 9, следует применять изложенную в гл. 3, § 3, п. «б», теорию неоднородных линий передачи, которая приводит к результатам (кратко изложенным в § 8, п. «б»), формально справедливым при любых профилях неоднородности. Решение в явном виде удается получить либо в случае «медленно меняющихся» неоднородностей, либо в случае профиля специальной формы. В первом случае, подробно исследуемом в § 8, п. «в», может быть использован метод геометрической оптики, изложенный в гл. 1, § 7. Можно также, как показано в § 8, п. «г», исходить из представления поля в виде интегралов по собственным функциям и добиться ряда упрощений, воспользовавшись ВКБ-приближением (гл. 3, § 5, п. «в») для функций Грина, отвечающих отдельным собственным волнам. Если это допустимо, то асимптотические оценки интегралов приводят к геометрооптическим полям, но в отличие от результатов, полученных в § 8, п. «в», прямым применением геометрической оптики, решение оказывается справедливым также и в переходных областях вблизи каустик; в последнем случае при получении асимптотических оценок следует учитывать взаимное влияние двух точек перевала в подынтегральном выражении (гл. 4, § 5, п. «а»).

В качестве примеров неоднородностей специального вида в § 9 исследуются слои с обратноквадратичной зависимостью диэлектрической проницаемости и плавный переходный слой (слой Эпштейна). Особенно тщательно рассматриваются среды с обратноквадратичным профилем, обладающие рядом интересных свойств. В частности, решение телеграфных уравнений в этом случае выражается через хорошо известные функции Бесселя и в результате оказывается возможным детально исследовать в § 8 различные аналитические и асимптотические соотношения общей теории. Простотой решения отличается также исследование волноводного распространения в неоднородных средах в § 9, п. «б». Двумерные задачи об излучении и дифракции волн в средах с обратноквадратичным профилем оказываются тесно связанными с трехмерными задачами о рассеянии при наличии симметрии вращения; анализ ряда двумерных и трехмерных процессов излучения и рассеяния в § 9, п. «в», основан на этой аналогии.

подходящие представления решения. Рассматривая эквивалентную линию передачи, проходящую вдоль оси z , и определяя собственные функции в каждом сечении, поперечном для оси z , можно получить следующее представление решения в виде разложения по собственным функциям [гл. 2, § 3, формулы (24а) и (25а)]:

$$\mathcal{P}'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{j\omega\epsilon(z')} \sum_i \frac{\Phi_i(\rho) \Phi_i^*(\rho')}{k_{ii}'} Y_i'(z, z'), \quad k_{ii}' \neq 0, \quad (5а)$$

$$\mathcal{P}''(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{j\omega\mu(z')} \sum_i \frac{\Psi_i(\rho) \Psi_i^*(\rho')}{k_{ii}''} Z_i''(z, z'), \quad k_{ii}'' \neq 0, \quad (5б)$$

а из выражений (32б) и (33б) гл. 2, § 3, следует

$$G'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{j\omega\epsilon(z')} \sum_i \Phi_i(\rho) \Phi_i^*(\rho') Y_i'(z, z'), \quad (5в)$$

$$G''(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{j\omega\mu(z')} \sum_i \Psi_i(\rho) \Psi_i^*(\rho') Z_i''(z, z'). \quad (5г)$$

Обозначения $\epsilon(z')$ и $\mu(z')$ в многослойной области подразумевают, что эти величины следует брать для среды, содержащей точку источника z' . Если аргумент ϵ и μ не указывается, то нужно использовать характеристики среды в точке наблюдения. Напомним, что большое число скалярных собственных функций $\Phi_i(\rho)$ и $\Psi_i(\rho)$ для различных форм поперечного сечения приведено в гл. 3. Величина $Y_i'(z, z')$ — это эквивалентный ток волны электрического типа, возбуждаемый генератором напряжения с единичной амплитудой (т. 1, фиг. 46), а величина $Z_i''(z, z')$ — эквивалентное напряжение волны магнитного типа, возбуждаемое генератором тока с единичной амплитудой (т. 1, фиг. 47); обе величины связаны с одномерными функциями Грина для волн типа E и H соотношениями

$$Y_i'(z, z') = j\omega\epsilon(z') g'_{zi}(z, z'), \quad Z_i''(z, z') = j\omega\mu(z') g''_{zi}(z, z'), \quad (6а)$$

где $g'_{zi}(z, z')$ и $g''_{zi}(z, z')$ удовлетворяют уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \kappa_i^2 \right) g_{zi}(z, z') = -\delta(z - z'), \quad \kappa_i^2 = k^2 - k_{ii}^2 \quad (6б)$$

и граничным условиям, наложенным в краевых точках области изменения z . Представления решений (5а) и (5б) становятся очевидно неприменимыми, если допустимо нулевое собственное значение $k_{ii} = 0$, что возможно в случае непрерывных спектральных распределений [гл. 2, § 3, примечание к формуле (24а)].

Из сказанного ясно, что основная задача сводится к определению скалярных функций \mathcal{P}' , \mathcal{P}'' или G' , G'' , удовлетворяющих дифференциальным уравнениям (2) и (3б); в некоторых задачах с простыми граничными условиями удастся провести прямое интегрирование этих уравнений и получить решение в замкнутом виде, но в более общем случае приходится представлять решение в виде ряда или интеграла по собственным функциям.

б. Представление решения в виде разложения по собственным функциям для поперечно-неограниченных областей

Если рассматривать поперечно-неограниченные области, то задача о собственных значениях для поперечного сечения в сильной степени вырождается и для нахождения решения оказываются пригодными различные системы координат. В случае полей, возбуждаемых точечным источником, удобнее всего взять цилиндрическую систему координат, а в случае полей, возбуждаемых поперечным линейным источником, — прямоугольную, ибо и та и другая прямо соответствуют симметрии исследуемого поля. Так как поперечные границы отсутствуют, задачи о собственных значениях для электрических и магнитных волн совпадают, т. е. $\Phi_i = \Psi_i$ и функции Грина для волн E - и H -типов различаются лишь видом зависимости от продольной координаты. Исходя из собственных функций прямоугольного волновода с помощью соотношений (5в), (5г), (6а) и (6б) данного параграфа и формулы (40) из гл. 3, § 2, получим представление функции Грина в виде двойного интеграла Фурье

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\xi(x-x') - j\eta(y-y')} g_{zi}(z, z') d\xi d\eta. \quad (7)$$

Хотя разложение по собственным функциям круглого волновода может быть получено аналогичным образом [при этом следует лишь вместо равенств (40) из гл. 3, § 2 использовать равенства (78)], полезно вывести его непосредственно из выражения (7) [1, разд. 6.9—6.11]. Рассмотрим интеграл вида

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(k_t) e^{-jk_t \cdot (\rho - \rho')} dk_t, \quad \mathbf{k}_t = x_0 \xi + y_0 \eta, \quad (7а)$$

где $k_t = |\mathbf{k}_t|$, а $dk_t = d\xi d\eta$. Введем полярные координаты (ρ, φ) в ρ -пространстве и (k_t, α) в k_t -пространстве с помощью соотношений $\rho = \rho(x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi)$, $\mathbf{k}_t = k_t(x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha)$; с учетом равенства $dk_t = k_t dk_t d\alpha$ перепишем (7а) в виде

$$I = \int_0^{\infty} dk_t k_t f(k_t) \int_0^{2\pi} da e^{-jk_t \rho \cos(\alpha - \varphi)} e^{jk_t \rho' \cos(\alpha - \varphi)}. \quad (7б)$$

координат так, чтобы выполнялось условие $\rho' = 0$ (т. е. чтобы источник был расположен на оси z). Электромагнитное поле продольного диполя можно выразить непосредственно через функцию Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ [формула (4в)], которая с учетом равенств $J_0(0) = 1$, $J_m(0) = 0$ при $m \neq 0$ принимает вид

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi H_0^{(2)}(\xi \rho) g_{zi}(z, z') d\xi, \quad \rho' = 0. \quad (11)$$

При поперечной ориентации векторов тока поле выражается через скалярные потенциалы Π' и Π'' согласно формулам (4а) и (4б). Если $\rho' \rightarrow 0$, то разложение величины $\nabla'_i \mathcal{P}$, которое можно получить из формул (10а) и (10б), содержит, как легко убедиться, лишь слагаемое с $m = 1$ и представляется в виде

$$\nabla'_i \mathcal{P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{cases} \rho_0 \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} J_1(\xi \rho) g_{zi}(z, z') d\xi, & (12а) \\ \rho_0 \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_1^{(2)}(\xi \rho) g_{zi}(z, z') d\xi, & (12б) \end{cases} \quad \rho' = 0,$$

где ρ_0 — единичный радиус-вектор в плоскости, нормальной к оси z : $\rho = x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi$.

Возбуждение линейным источником

При возбуждении линейным распределением источников, лежащим в плоскости $z = z'$, удобно воспользоваться разложением по волновым волнам прямоугольного волновода и направить одну из поперечных осей координат, например ось x , вдоль источника. Исходные выражения (7) и (9) упрощаются после интегрирования по x' , которое необходимо провести для получения линейного источника; это упрощение имеет место и в том случае, когда фаза элементов источника изменяется вдоль оси x' как $\exp(-j\alpha x')$, где α — действительная постоянная. Ориентация элементарных токов относительно линейной оси источника также может быть произвольной (фиг. 1). Выражения для функций $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ и $\mathcal{P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ в рассматриваемом случае получаем умножением формул (7) и (9) на $\exp(-j\alpha x')$ и интегрированием по x' от $-\infty$ до $+\infty$; изменяя порядок интегрирования

и учитывая соотношение $\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-j(\alpha - \xi)x'] dx' = 2\pi \delta(\alpha - \xi)$,

приходим к следующему выражению:

$$\bar{G}(\mathbf{r}, \hat{\rho}') = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\alpha x'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dx' = e^{-j\alpha x} \bar{G}(\hat{\rho}, \hat{\rho}'), \quad \hat{\rho}' = (y, z), \quad (13)$$

где $\bar{G}(\hat{\rho}, \hat{\rho}')$ — двумерная функция Грина:

$$\bar{G}(\hat{\rho}, \hat{\rho}') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\eta(y-y')} g_{zi}(z, z') d\eta. \quad (13а)$$

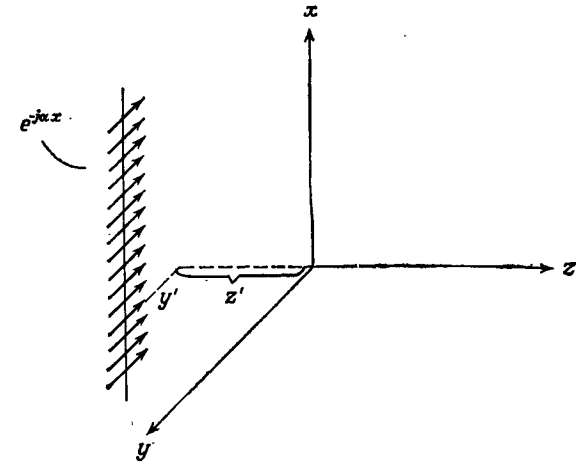
Аналогичным образом из формулы (9) получаем

$$\bar{\mathcal{P}}(\mathbf{r}, \hat{\rho}') = e^{-j\alpha x} \bar{\mathcal{P}}(\hat{\rho}, \hat{\rho}'), \quad (14)$$

где

$$\bar{\mathcal{P}}(\hat{\rho}, \hat{\rho}') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\eta(y-y')}}{\eta^2 + \alpha^2} g_{zi}(z, z') d\eta. \quad (14а)$$

Продольное волновое число, входящее в функцию $g_{zi}(z, z')$ в формулах (13а) и (14а), имеет вид $\kappa_i = (k^2 - \alpha^2 - \eta^2)^{1/2}$.



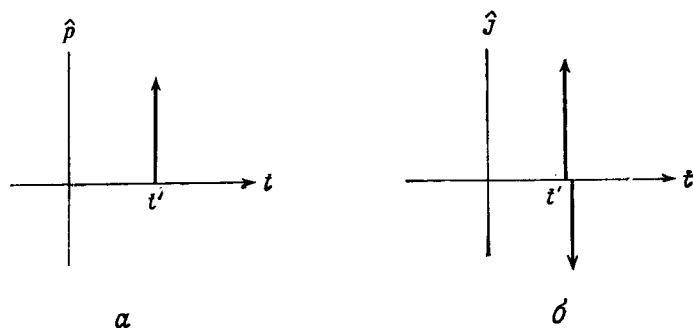
Фиг. 1. Линейный источник, состоящий из произвольно ориентированных относительно линии источника элементарных токов, фаза которых вдоль линии изменяется соответственно множителю $\exp\{-j\alpha x\}$.

При $\alpha \neq 0$ подынтегральное выражение в формуле (14а) регулярно в точке $\eta = 0$ и потенциалы $\bar{\Pi}'(\mathbf{r}, \hat{\rho}')$ и $\bar{\Pi}''(\mathbf{r}, \hat{\rho}')$ можно вычислить по формулам (4а) и (4б), подставив в них интеграл (14) и заменив оператор ∇'_i оператором $-j\alpha x_0 + y_0(\partial/\partial y')$. При $\alpha = 0$ подынтегральное выражение в интегральном представлении величины $\nabla'_i \bar{\mathcal{P}}$ имеет простой полюс в точке $\eta = 0$. Но это

Среди интегралов, представимых в форме (19а), можно отметить часто встречающийся в теории излучения интеграл вида [§ 3, формула (14)]

$$I_{\omega}(L, \bar{\alpha}) = \int_{\bar{P}} e^{-jkL \cos(\omega - \bar{\alpha})} f(\omega) d\omega, \quad (20)$$

где \bar{P} — контур интегрирования, изображенный на фиг. 7, б. Параметры L и $\bar{\alpha}$ считаются положительными, причем $0 < \bar{\alpha} < \pi/2$; функция $f(\omega)$ не зависит от волнового числа $k = \omega/\bar{c}$, где $\bar{c} = (\mu\epsilon)^{-1/2}$ — скорость света в среде. Как будет видно из



Фиг. 2. Изменение во времени дипольного момента и плотности тока импульсного источника.
а — дипольный момент; б — ток.

данной и следующей глав, в такой форме может быть представлено решение большого числа задач о дифракции и излучении монохроматического поля. Поскольку в гл. 1, § 6 [формулы (34)–(41)], была принята зависимость от времени типа $\exp(-i\omega t)$, повторим основные моменты вывода при зависимости типа $\exp(j\omega t)$, которой мы придерживаемся здесь. Произведя замену $\omega \rightarrow -js$, перепишем интеграл (20) в виде

$$I_{\omega}(L, \bar{\alpha}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s(L/\bar{c}) \cos \omega} f(\omega + \bar{\alpha}) d\omega, \quad (21)$$

где предполагается, что функция $f(\omega)$ не имеет особенностей в полосе $0 < |\operatorname{Re} \omega| < \pi/2$. Деформация контура при выводе представления (21) обосновывается по аналогии с интегралом (38) из гл. 1, § 6.

Производя сначала замену переменной $\beta = -j\omega$, затем замену $\tau = (L/\bar{c}) \operatorname{ch} \beta$, получаем¹⁾

$$I_{\omega}(L, \bar{\alpha}) = j \int_{L/\bar{c}}^{\infty} e^{-s\tau} \frac{b(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - (L/\bar{c})^2}} d\tau, \quad (22a)$$

$$b(\tau) = f\left[\bar{\alpha} + j \operatorname{Arch}\left(\frac{\bar{c}\tau}{L}\right)\right] + f\left[\bar{\alpha} - j \operatorname{Arch}\left(\frac{\bar{c}\tau}{L}\right)\right], \quad (22б)$$

откуда, сопоставляя с интегралом (19а), имеем

$$A(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau < \frac{L}{\bar{c}}, \\ \frac{jb(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - L^2/\bar{c}^2}} & \text{при } \tau > \frac{L}{\bar{c}}. \end{cases} \quad (23)$$

Если функция $v(\omega) = jf(\omega)$ действительна при действительных ω , то $v(\omega^*) = v^*(\omega)$ и, следовательно,

$$jb(\tau) = 2 \operatorname{Re} \left\{ jf\left[\bar{\alpha} + j \operatorname{Arch}\left(\frac{\bar{c}\tau}{L}\right)\right] \right\}. \quad (23a)$$

Далее будут приведены примеры приложений этого результата.

г. Поле равномерно и прямолинейно движущихся зарядов

Нестационарные поля могут возбуждаться также при изменении положения источника во времени, даже если интенсивность источника не меняется. Простейшая из задач такого типа — задача о поле электрического заряда, движущегося с постоянной скоростью по прямолинейной траектории. Решение этой задачи представляет интерес с точки зрения исследования взаимодействия быстрых заряженных частиц с материальными средами разного типа (диэлектриками, плазмой и т. д.), а также с точки зрения таких физических приложений, как расчет поглощения протонов в «погруженном» атомном реакторе или возбуждения низкочастотных шумов в земной экзосфере потоками зарядов, испускаемых Солнцем.

Пусть точечный заряд q движется с постоянной скоростью v параллельно оси x прямоугольной системы координат. Плотность тока $\hat{J}(\mathbf{r}, t)$, соответствующая движущемуся заряду, имеет вид

$$\hat{J}(\mathbf{r}, t) = x_0 q v \delta(x - vt) \delta(y - y') \delta(z - z'), \quad (24)$$

¹⁾ Если экспоненциальный множитель в формуле (21) представлен в виде $\exp[-s(L/\bar{c})h(\omega)]$, то переменную τ следует ввести по формуле $\tau = (L/\bar{c})h(\omega)$.

изменив порядок суммирования и интегрирования и используя условие ортогональности векторных собственных функций [гл. 2, § 2, формула (11б)], получим

$$W_{\omega}(z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[\sum_i V_i'(z, \omega) I_i^{*'}(z, \omega) + \sum_i V_i''(z, \omega) I_i^{*''}(z, \omega) \right]. \quad (34)$$

Таким образом, величина W_{ω} равна сумме мощностей, соответствующих отдельным собственным волнам, и зависит лишь от амплитуд собственных волн V_i и I_i . Полный поток энергии W через площадку S на плоскости $z = \text{const}$, очевидно, равен

$$W(z) = \int_S \mathbf{W}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{z}_0 dS = \int W_{\omega}(z) d\omega. \quad (35)$$

Заметим, что, хотя все сказанное в связи с формулами (26) — (35) относилось непосредственно к излучению движущегося заряда, область применимости полученных энергетических соотношений и, в частности, разложения (34) намного шире.

§ 3. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

а. Аналитические свойства интегральных представлений

Для нахождения многомерных функций Грина из интегральных представлений (7) — (14) предыдущего параграфа необходимо знать одномерную функцию Грина собственной волны $g_{zi}(z, z')$; эта функция определяется уравнением (6б) из § 2, решение которого требует знания детальных свойств рассматриваемой области вдоль оси z . Хотя вид функции g_{zi} зависит от характера неоднородности области вдоль z , общие асимптотические характеристики поля можно установить, исходя из аналитических свойств подынтегральных выражений, даже в отсутствие конкретных данных о свойствах среды. В данном параграфе мы рассмотрим вопрос о том, какой вклад вносят в асимптотическое выражение поля стационарные точки (точки перевала), полюсы и точки ветвления в указанных интегральных представлениях решений, и постараемся дать физическую интерпретацию соответствующих волн. В других параграфах главы эти общие результаты будут применены при рассмотрении ряда конкретных задач.

Продольные собственные функции Грина $g_{zi}(z, z')$, которые пока еще не определены, зависят от переменных интегрирования ξ или η через продольное волновое число $\kappa_i = (k^2 - k_{zi}^2)^{1/2}$. В многослойной области с кусочно-постоянными параметрами ϵ_{β} и μ_{β} , $\beta = 1, 2, \dots, N$, функция g_{zi} зависит от различных постоянных распространения $\kappa_{i\beta} = (k_{\beta}^2 - k_{zi}^2)^{1/2}$, где $k_{\beta} = \omega(\mu_{\beta}\epsilon_{\beta})^{1/2}$. Для слоя

с номером β , имеющего конечную толщину, g_{zi} , как будет показано, — четная функция величины $\kappa_{i\beta}$; в случае же полубесконечной по оси z области это неверно. В силу четной зависимости от $\kappa_{i\beta}$ функцию g_{zi} можно разложить в ряд по четным степеням $(\kappa_{i\beta})^{2n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и, следовательно, она является регулярной функцией в точке $\kappa_{i\beta} = 0$ на комплексной плоскости k_{zi} . Отсутствие же четной зависимости для полубесконечной области с параметрами ϵ_1, μ_1 (простирающейся до $z = -\infty$) или области с ϵ_N, μ_N (простирающейся до $z = +\infty$) приводит к наличию точек ветвления первого порядка в первом случае при $k_{zi} = \pm k_1$, а во втором — при $k_{zi} = \pm k_N$. Таким образом, продольная функция Грина g_{zi} для области с произвольным числом слоев имеет точки ветвления при $k_{zi} = \pm k_1, \pm k_N$, если область не ограничена по z , имеет точки ветвления лишь при $\pm k_1$ или при $\pm k_N$, если область ограничена непроницаемой стенкой соответственно со стороны положительных или отрицательных z (§ 7), и не имеет точек ветвления, если две непроницаемые границы заключают область в конечном интервале z (фиг. 3). Наличием границ обусловлено также, в общем случае, появление у функции g_{zi} простых полюсов (§ 5 и 6).

Точный аналитический вид функции $g_{zi}(z, z')$ зависит от деталей слоистости среды вдоль оси z , и о способах построения такой функции говорилось в гл. 2, § 4, и гл. 3, § 3, п. «б». Поскольку решение должно удовлетворять дифференциальному уравнению (6б) из § 2, его следует строить из тригонометрических или экспоненциальных функций. В случае многослойной структуры функция $g_{zi}(z, z')$ может оказаться довольно сложной, но она имеет простой общий вид, если и источник и точка наблюдения расположены в полуограниченной области (т. е. в области $z < 0$ на фиг. 3, а и б). В последнем случае функция Грина равна сумме «падающей» волны, соответствующей неограниченной области с волновым числом k_1 , и «отраженной» волны, амплитуда которой определяется детальным ходом изменения свойств среды в правом полупространстве $z > 0$. В частности [гл. 2, § 4, формулы (29в) и (29г) при $\vec{\Gamma}_i(z_0) = 0$],

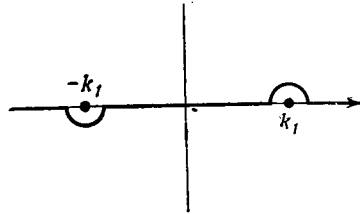
$$g_{zi}(z, z') = \frac{1}{2j\kappa_i} \left[e^{-j\kappa_i |z-z'|} \mp \vec{\Gamma}_i(0) e^{j\kappa_i (z+z')} \right], \quad z, z' < 0, \quad (1)$$

где $\vec{\Gamma}_i(0)$ — коэффициент отражения (по напряжению) собственной волны от плоскости $z = 0$ в полупространство $z > 0$ для первой структуры, связанный с входным импедансом собственной волны $\vec{Z}_i(0)$:

$$\vec{\Gamma}_i(0) = \frac{\vec{Z}_i(0) - Z_{i1}}{\vec{Z}_i(0) + Z_{i1}}. \quad (1a)$$

постоянен и не зависит от k_{ii} . Аналогичным образом можно рассмотреть импеданс $\tilde{Z}_i(0)$. Тем самым подтверждаются результаты, представленные на фиг. 3.

При действительных k_β (среда без потерь) точки ветвления лежат на контуре интегрирования, а поэтому следует уточнить способ проведения контуров в разложении (7)–(14) из § 2 вблизи особенностей. Так, например, в выражении (8б) из § 2, где $k_{ii} = \xi$, точки ветвления, соответствующие нулю функции κ_i , лежат при $\xi = \pm k_1$. Правильный выбор контура интегрирования возможен и при действительных k_1 (§ 3, п. «б»), но проще



Фиг. 4. Правило обхода точек ветвления на комплексной плоскости ξ [при временной зависимости вида $\exp(j\omega t)$].

предположить, что имеется небольшое затухание; тогда временной зависимости $\exp(j\omega t)$ должно отвечать волновое число $k = \omega [\mu(\epsilon_r - j\epsilon_i)]^{1/2}$ с небольшой отрицательной мнимой частью, где ϵ_r — действительная, а ϵ_i — мнимая части диэлектрической проницаемости ϵ . В результате точки ветвления смещаются с действительных осей ξ и η в четвертый и второй квадранты комплексных плоскостей ξ и η . Если теперь перейти к пределу при $\epsilon_i \rightarrow 0$, то контур интегрирования должен, очевидно, обходить точки ветвления, расположенные на положительной или отрицательной действительной полуоси, по петле в первом или третьем квадранте (фиг. 4). Что касается сходимости интеграла с действительным k^2 (для среды без потерь), то напомним, что для нераспространяющихся типов волн (волн с мнимым κ_i) по определению $\kappa_i = -j|\kappa_i|$ и, таким образом, интеграл ограничен [гл. 2, § 2, формула (15)]. В более общей форме можно сказать, что если при рассматриваемых деформациях контура величина ξ принимает комплексные значения, то на контуре интегрирования считается выполненным условие $\text{Im} \sqrt{k^2 - \xi^2} < 0$, обеспечивающее убывание экспоненциальных множителей в формуле (1). В § 3, п. «б», будут исследованы области на комплексной плоскости ξ , отвечающие условию $\text{Im} \sqrt{k^2 - \xi^2} < 0$, при различном выборе линий разреза, которые необходимо провести для обеспечения однозначности представления подынтегрального выражения на многолистной поверхности Римана. Сходное рассмотрение

можно провести также и для двукратного интеграла, входящего, например, в выражение (7) из § 2, где $k_{ii}^2 = \xi^2 + \eta^2$. Точки ветвления на ξ - и η -плоскостях в этом случае имеют место при $\xi = \pm \sqrt{k_1^2 - \eta^2}$ и $\eta = \pm \sqrt{k_1^2 - \xi^2}$.

На контуре интегрирования могут также лежать полюсы функции $g_{zi}(z, z')$, и способ их обхода следует устанавливать, как и выше, либо по смещению с действительной оси при наличии малых потерь, либо анализируя вклады вычетов на основе условия излучения на бесконечности.

б. Свойства функции $\kappa(\xi) = \sqrt{k^2 - \xi^2}$ на комплексной плоскости ξ

Как мы видели ранее (§ 2, п. «б»), подынтегральное выражение в представлении функции Грина может иметь точки ветвления, связанные, например, с зависимостью от волновых чисел $\kappa_i = \sqrt{k^2 - \xi^2}$. Чтобы определить подынтегральное выражение на комплексной плоскости ξ однозначно, необходимо подробно исследовать аналитические свойства квадратного корня $\kappa_i \equiv \kappa(\xi)$. Если ξ — действительная величина и $|\xi| < k$, причем k пока считаем действительным, то волноводная волна может распространяться вдоль оси z и, следовательно, постоянная распространения действительна и положительна, что согласуется с положительностью импеданса для собственной волны [гл. 2, § 2, формула (15)]. Таким образом, от функции $\kappa(\xi)$ нужно потребовать, чтобы она удовлетворяла условию

$$\sqrt{k^2 - \xi^2} > 0, \quad -k < \xi < k. \quad (2)$$

Так как подынтегральное выражение должно быть ограниченным при $|\kappa(\xi)| |z - z'| \rightarrow \infty$, необходимо наложить условие на поведение мнимой части величины κ . При зависимости от времени типа $\exp(j\omega t)$ требуемое условие состоит в том, чтобы действительным ξ отвечало $\kappa = -j|\kappa|$ (т. е. выполнялось неравенство $\text{Im} \kappa < 0$ при $|\xi| > k$)¹⁾. Если ξ может принимать также и комплексные значения, то условие $\text{Im} \kappa < 0$ должно выполняться при всех допустимых комплексных значениях κ . Аналитическое продолжение ξ с действительной оси на комплексную плоскость потребуется в дальнейшем при деформации контуров интегрирования.

Для полного определения двузначной функции $\kappa(\xi)$ необходимо ввести двулистую риманову поверхность комплексной

¹⁾ Это требование, а также требование (2) следуют из условия излучения, согласно которому излучаемая источником энергия в удаленных точках наблюдения должна быть ограничена, а поле должно носить характер уходящих волн (гл. 1, § 5, п. «б»).

(4а). В этом случае во всех квадрантах $0 < \alpha + \beta < 2\pi$, и, следовательно, на всем верхнем листе римановой поверхности $\text{Im } \kappa > 0$. [Такой выбор разрезов удобен при рассмотрении полей с зависимостью от времени типа $\exp(-i\omega t)$.] На схеме показано также поведение $\text{Re } \kappa$ в различных квадрантах комплексной плоскости. Если провести разрезы по линиям $\text{Im } \kappa = 0$ так, как показано на фиг. 5, а (3), то $\text{Im } \kappa < 0$ на верхнем листе, а $\text{Re } \kappa$ имеет знак, указанный на схеме. Знаки величин $\text{Im } \kappa$ и $\text{Re } \kappa$ в разных квадрантах на втором листе противоположны знакам соответствующих величин на первом листе римановой поверхности.

Выше мы считали k действительным. Так как все физические среды имеют потери, уместно рассмотреть случай диэлектрика с потерями, диэлектрическая проницаемость которого при временной зависимости типа $\exp(j\omega t)$ имеет вид $\epsilon = \epsilon_r - j\sigma/\omega$, где σ — проводимость среды. Волновое число $k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$ при этом имеет отрицательную мнимую часть. Так же как и при действительных k , удобно провести разрезы по линиям, на которых $\text{Re } \kappa$ или $\text{Im } \kappa$ обращается в нуль. Линии, на которых $\text{Im } \kappa = 0$, можно найти, положив $\alpha + \beta = 0, \pm 2\pi, \dots$, а линии $\text{Re } \kappa = 0$ — положив $\alpha + \beta = \pm\pi, \pm 3\pi$, и т. д. Поскольку

$$\text{tg } \alpha = \frac{k_i - \xi_i}{k_r - \xi_r}, \quad \text{tg } \beta = \frac{k_i + \xi_i}{k_r + \xi_r}, \quad (5a)$$

находим, что условия $\text{Re } \kappa = 0$ и $\text{Im } \kappa = 0$ выполняются на гиперболах

$$\xi_r \xi_i = k_r k_i, \quad (5б)$$

где ξ_r и k_r — действительные, а ξ_i и k_i — мнимые части величин ξ и k . Нетрудно убедиться, что $\text{Re } \kappa = 0$ на той части кривых, где $|\xi_r| > k_r$, а $\text{Im } \kappa = 0$ при $|\xi_r| < k_r$. Поведение функции κ на комплексной плоскости ξ при $k_i < 0$ показано на фиг. 5, б. В пределе при $k_i \rightarrow 0$ линии ветвления, изображенные на фиг. 5, б, очевидно, переходят в рассмотренные ранее и показанные на фиг. 5, а (1 и 3). При $k_i > 0$ [в случае полей с временной зависимостью типа $\exp(-i\omega t)$] можно выделить однозначные ветви корня на плоскости ξ , построив отражение всех кривых на фиг. 5, б относительно действительной или мнимой оси ξ (фиг. 30, б). При этом различные области должны быть выбраны так, чтобы в пределе при $k_i \rightarrow 0$ они переходили в области, изображенные на фиг. 5, а.

Знаки величин $\text{Re } \kappa$ и $\text{Im } \kappa$ в различных областях комплексной плоскости ξ можно установить, пользуясь простым правилом. Как было показано, знак величины $\text{Re } \kappa$ (или $\text{Im } \kappa$) изменится лишь в том случае, когда ξ пересекает линию $\text{Re } \kappa = 0$ (или $\text{Im } \kappa = 0$). Поэтому если провести разрезы, например, по

линиям $\text{Im } \kappa = 0$, то величина $\text{Im } \kappa$ будет иметь один знак на каждом из листов римановой поверхности, так как пересечение разреза $\text{Im } \kappa = 0$ соответствует переходу на другой лист. Следовательно, достаточно вычислить $\text{Re } \kappa$ и $\text{Im } \kappa$ один раз в единственной точке на верхнем листе, например при $\xi = 0$, и затем определять изменение знака $\text{Re } \kappa$ путем аналитического продолжения через разрезы $\text{Re } \kappa = 0$. Сходным образом можно провести анализ и на фиг. 5, б (2), если верхний лист римановой поверхности выбран так, что $\kappa_i = +k$ при $\xi = 0$.

в. Преобразование $\xi = k \sin \omega$

Для облегчения преобразования интегралов типа (11) — (14) из § 2 на комплексной плоскости перейдем к новой переменной ω , связанной с ξ соотношением

$$\xi = k \sin \omega. \quad (6)$$

Переменную ω можно рассматривать как некоторый комплексный угол, причем значению $\kappa_i = (k^2 - \xi^2)^{1/2} = 0$ отвечает регулярная точка на комплексной плоскости ω . Трансцендентная функция $\sin \omega$ определена однозначным образом. Поскольку это периодическая функция, т. е. $\sin(\omega + 2n\pi) = \sin \omega$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, очевидно, что одному значению ξ соответствует множество значений ω . Поэтому всю комплексную плоскость ξ можно отобразить на любую из полос шириной 2π на плоскости ω . Обратная функция $\arcsin(\xi/k)$ многозначна на плоскости ξ , и, следовательно, в этой плоскости имеются точки ветвления. Они отвечают нулям производной $d\xi/d\omega$ на плоскости ω , и их порядок совпадает с порядком нуля функции $d\xi/d\omega$. В рассматриваемом случае $d\xi/d\omega = k \cos \omega$ и, таким образом, точки ветвления первого порядка расположены при $\xi = \pm k$.

Чтобы детально исследовать свойства отображения комплексной плоскости ξ на плоскость ω , напомним равенство (6) отдельно для действительных и мнимых частей (величина k считается действительной):

$$\xi_r = k \sin \omega_r \text{ch } \omega_i, \quad \xi_i = k \cos \omega_r \text{sh } \omega_i, \quad (7)$$

где

$$\xi = \xi_r + i\xi_i, \quad \omega = \omega_r + i\omega_i, \quad (7a)$$

причем величины ξ_r , ξ_i , ω_r и ω_i действительны. Как показано на фиг. 6, а, четыре квадранта комплексной плоскости ξ отображаются на обозначенные теми же номерами области на плоскости ω , соответствующие равенствам (7). Мы видим, что эти области на плоскости ω периодически повторяются по мере того, как ω_r изменяется на величину, кратную 2π . Следовательно, двулиственную риманову поверхность функции $\kappa(\xi)$ можно отобразить,

в случае точечного источника

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} H_n^{(2)}(\xi\rho) e^{-I\kappa_{i1}\bar{z}} f_1(\xi) d\xi, \quad n=0, 1; \quad (9a)$$

в случае линейного источника

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-I\eta(y-y')} e^{-I\kappa_{i1}\bar{z}} f_2(\eta) d\eta, \quad (9б)$$

где \bar{z} — положительный параметр, равный $|z - z'|$ или $|z + z'|$, а $f_{1,2}$ — функции, не зависящие от пространственных координат и имеющие на комплексной плоскости ξ или η точки ветвления или полюсы (или то и другое). Типичное для таких интегралов расположение особенностей подынтегральных функций и контуров интегрирования показано на фиг. 7, а; точки ветвления при $\xi = \pm k_1$ и $\xi = \pm k_N$ и полюсы в точках $\pm a_p$ слегка смещены с действительной оси, что указывает на наличие малых потерь. В отсутствие потерь следует, очевидно, использовать контуры интегрирования, огибающие особенности по малым петлям. Точка ветвления в начале координат на плоскости ξ связана с присутствием в подынтегральном выражении в (9a) функции Ханкеля; на плоскости η , отвечающей интегралу (9б), этой особенности нет. Разрезы проведены таким образом, чтобы величины $\text{Im } \kappa_1$ и $\text{Im } \kappa_N$ были отрицательны на верхнем листе многостепенной римановой поверхности (фиг. 5).

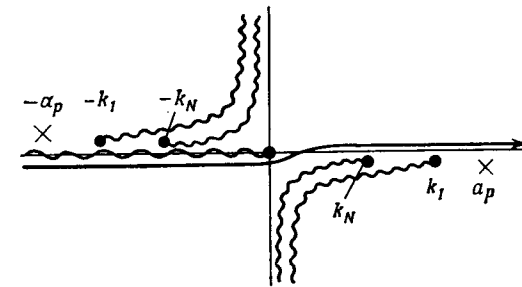
Поскольку изложение в книге строится так, чтобы познакомить читателя с выражениями, соответствующими временной зависимости и типа $\exp(j\omega t)$, и типа $\exp(-i\omega t)$, мы преобразуем интегралы (9a) и (9б) к зависимости от времени типа $\exp(-i\omega t)$. Чтобы перейти от одной зависимости к другой, заменим j на $-i$, а все величины — комплексно сопряженными. Наряду с внесением изменений в подынтегральном выражении нужно перейти к новому контуру интегрирования, чтобы обеспечить выполнение условия излучения. Для затухания нераспространяющихся волн вида $e^{i\kappa_{i1}\bar{z}}$ теперь необходимо выполнение условия $\text{Im } \kappa > 0$. При временной зависимости типа $\exp(-i\omega t)$ исследуемые типичные интегралы принимают вид

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} H_n^{(1)}(\xi\rho) e^{i\kappa_{i1}\bar{z}} f_1(\xi) d\xi \quad (10a)$$

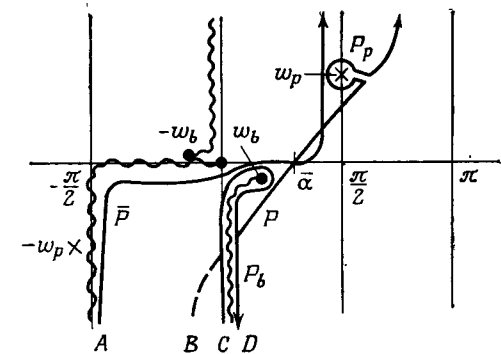
и

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta(y-y')} e^{i\kappa_{i1}\bar{z}} f_2(\eta) d\eta, \quad (10б)$$

а расположение особенностей и контуры интегрирования показаны на фиг. 8, а [в связи с интегралом (10a) см. т. 1, фиг. 70, а].



а



б

Фиг. 7. Контуры интегрирования [при временной зависимости типа $\exp(j\omega t)$]. а — комплексная плоскость ξ или η (на плоскости η точка ветвления при $\eta=0$ отсутствует); б — комплексная плоскость ω (w_b соответствует k_N , w_p соответствует a_p , точка ветвления при $\omega=0$ соответствует точке ветвления при $\xi=0$).

Для удобства перейдем от комплексных волновых чисел ξ или η к комплексному углу ω путем замены переменной $\xi = k_1 \sin \omega$ или $\eta = k_1 \sin \omega$; при этом точки ветвления $\pm k_1$, показанные на фиг. 7, а или 8, а, устраняются и последующие вычисления упрощаются. Расположение контура интегрирования \bar{P} и особенностей подынтегрального выражения на плоскости ω ,

где вид функции f зависит от того, рассматривается возбуждение точечным или линейным источником.

Асимптотическое выражение для интеграла I при больших значениях $k_1 L$ можно найти способом, изложенным в гл. 4. Прежде всего нужно деформировать контур \bar{P} в контур P , проходящий через точку перевала $\omega = \bar{\alpha}$ по линии наибыстрейшего спуска [т. 1, фиг. 107, где путь $P \equiv \bar{P}$, показан для временной зависимости типа $\exp(-i\omega t)$]; указанная деформация контура допустима, так как концы обоих контуров \bar{P} и P расположены в областях с $|\omega| \rightarrow \infty$, где подынтегральная функция в формуле (14) экспоненциально убывает и потому участки контура, примыкающие к концам, не дают вклада в интеграл. Точки перевала в ряде случаев могут быть расположены так, что при деформации контура пересекаются особенности подынтегрального выражения, лежащие в области с конечным значением ω . Такие полюсы или точки ветвления нужно обходить по петле P_p или P_b , как показано на фиг. 7, б и 8, б. При пересечении точки ветвления ω_b перевальный контур переходит через разрез на второй лист римановой поверхности; переход от концевой точки A на контуре \bar{P} к точке B на контуре P происходит по отрезкам AC , CD (вдоль петли P_b) и DB , причем отрезки контура AC и DB не дают вклада в интеграл¹⁾. Следовательно, при зависимости типа $\exp(-i\omega t)$ интеграл (14) может быть представлен в «перевальном» виде:

$$I = \int_P \dots d\omega + U(\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_b) \int_{P_b} \dots d\omega + U(\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_p) 2\pi i [(w - w_p) f(w)]_{w_p} \exp[ik_1 L \cos(w_p - \bar{\alpha})], \quad (15)$$

где $U(x)$ — функция Хевисайда, равная единице при положительных x и нулю — при отрицательных, а $\bar{\alpha}_b$ и $\bar{\alpha}_p$ — точка ветвления и полюс на комплексной плоскости $\bar{\alpha}$, пересекаемые контуром при его деформации. Согласно формуле (29) из гл. 4, § 2,

$$\bar{\alpha}_{p, b} = \operatorname{Re} w_{p, b} - \arccos \operatorname{sch}(\operatorname{Im} w_{p, b}). \quad (15a)$$

Последнее слагаемое в формуле (15) представляет собой вклад, обусловленный вычетом в простом полюсе при $\omega = w_p$.

Интегралы по контурам \bar{P} и P_b в общем виде не вычисляются, но при больших значениях параметра ($k_1 L$) можно получить для них простые асимптотические выражения. В соответствии с

¹⁾ Риманова поверхность функции $f(\omega)$ вводится при наличии точек ветвления $\pm \omega_b$, обусловленных соответствующими особенностями в точках $\pm k_N$ комплексной плоскости ξ или η . Так как эти особые точки не входят в показатель экспоненты в формуле (14), подынтегральная функция экспоненциально убывает на обоих листах римановой поверхности.

формулой (1a) из гл. 4, § 2, асимптотическое выражение, полученное методом перевала, имеет вид

$$\int_P f(\omega) e^{ik_1 L \cos(\omega - \bar{\alpha})} d\omega \sim \sqrt{\frac{2\pi}{k_1 L}} f(\bar{\alpha}) e^{i(k_1 L - \pi/4)} \left[1 + O\left(\frac{1}{k_1 L}\right) \right]. \quad (16a)$$

Аналогично, если P_b — контур, охватывающий разрез, то, согласно формуле (3) из гл. 4, § 8, интеграл по этому контуру равен

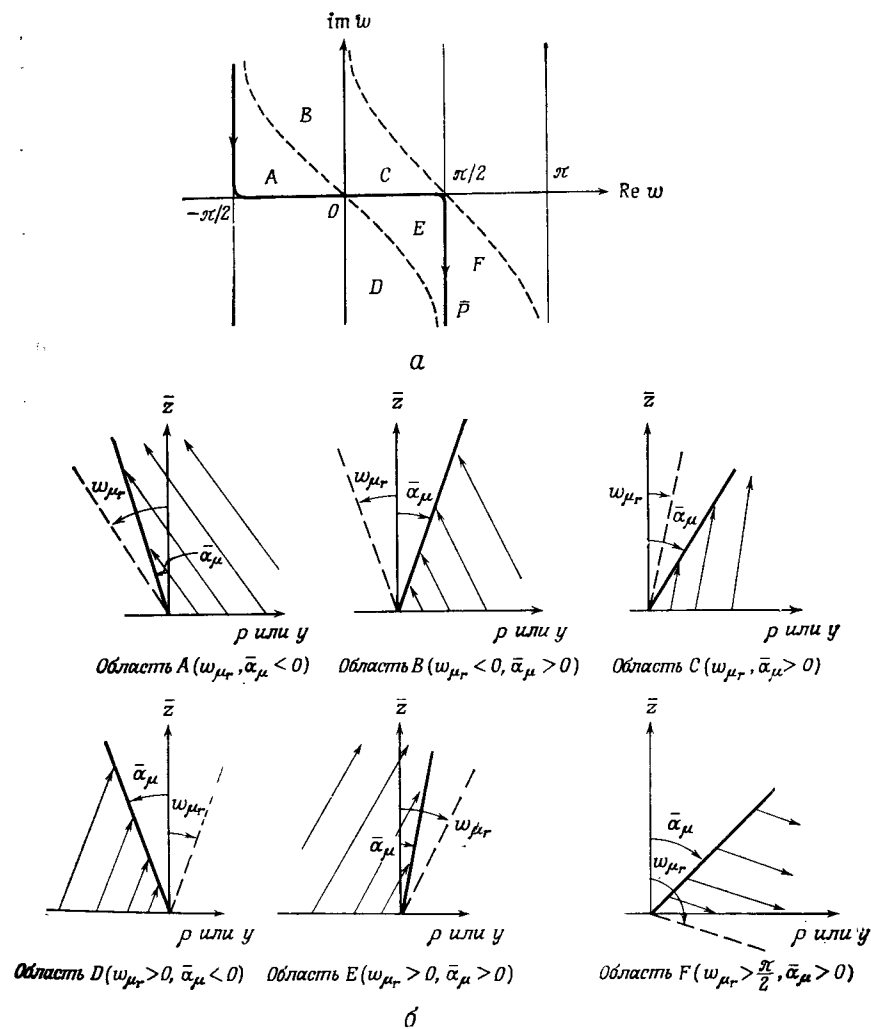
$$\int_{P_b} f(\omega) \exp[ik_1 L \cos(\omega - \bar{\alpha})] d\omega \sim \frac{2\sqrt{\pi}}{|k_1 L \sin(\bar{\alpha} - \omega_b)|^{1/2}} \left[\sqrt{\omega - \omega_b} \frac{df(\omega)}{d\omega} \right]_{\omega_b} \exp[ik_1 L \cos(\omega_b - \bar{\alpha})] \times \exp\left(-i \frac{3}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} + \arg[k_1 \sin(\omega_b - \bar{\alpha})] \right\}\right), \quad (16b)$$

где величина $\sqrt{\omega - \omega_b} df/d\omega$ считается ограниченной в точке ω_b , что обычно выполняется для функций, встречающихся в реальных задачах. При временной зависимости типа $\exp(j\omega t)$ в формулах (15) и (16) следует заменить i на $-j$. Очевидно, что в случае действительных w_p и w_b определяющим в выражении (15) при больших $k_1 L$ является вклад вычетов, поскольку он представляет собой величину $O(1)$, тогда как вклад точки перевала убывает на больших расстояниях как $(k_1 L)^{-1/2}$, а вклад точки ветвления — как $(k_1 L)^{-1/2}$. В случае же комплексных w_p из-за экспоненциального убывания слагаемого, соответствующего вычету в полюсе, основным может стать вклад точки перевала. Отметим также, что вклад в поле, соответствующий точке перевала, наблюдаем во всем пространстве, тогда как поля, связанные с полюсом или точкой ветвления, наблюдаются, вообще говоря, лишь в некоторых областях, где отличны от нуля функции Хевисайда в выражении (15). В задачах, которые будут рассматриваться в данной главе, наличие полюсов приводит к поверхностным и вытекающим волнам, точками ветвления обусловлены боковые волны, а вклад точек перевала дает падающее, отраженное и прошедшее поля в приближении геометрической оптики; выражение (16a) можно рассматривать как поле плоской волны, распространяющейся в направлении L и имеющей переменную амплитуду.

Взаимосвязь между решениями в виде распространяющихся волн на плоскости волновых чисел ξ (или η) и на плоскости комплексных углов ω и их связь с условиями применимости метода перевала можно исследовать, рассматривая схематически поверхность волновых векторов. Эта поверхность, геометрическое

При физической интерпретации полученных решений в виде плоских волн важное значение имеет их область существования (соответствующая асимптотическому выражению для поля), т. е. приблизительно та область углов наблюдения $\bar{\alpha}$, для которой при деформации исходного контура интегрирования \bar{P} в перевальный контур P (фиг. 8, б) пересекается особая точка ω_μ ; четкое разделение вкладов в интеграл, обусловленных особыми точками и точкой перевала, возможно лишь при «достаточном удалении» этих точек друг от друга (гл. 4, § 1). Пусть $\bar{\alpha}_\mu$ — то значение величины $\bar{\alpha}$, при котором контур P пересекает особую точку ω_μ [формула (15а)]; тогда, если точка ω_μ расположена выше или правее исходного контура \bar{P} на фиг. 10, а, эта особенность вносит вклад в интервале углов $\bar{\alpha}_\mu < \bar{\alpha} < \pi/2$, причем $(\bar{\alpha}_\mu - \omega_{\mu r}) \geq 0$ при $\omega_{\mu i} \geq 0$. При ином расположении точки ω_μ в полуплоскости $0 < \omega_r < \pi/2$, $\omega_{\mu i} < 0$ вклад особенности в интеграл отличен от нуля в дополнительной области $0 < \bar{\alpha} < \bar{\alpha}_\mu$ и $(\bar{\alpha}_\mu - \omega_{\mu r}) < 0$, где $\omega_{\mu i} < 0$. Как следует из выражения (17), соответствующее поле экспоненциально убывает в своей области существования вдоль любого радиального направления от точки $L = 0$ до удаленной точки наблюдения; поэтому поведение и физическая интерпретация волны типа (17) в дальней зоне значимы, хотя взятое само по себе, безотносительно к механизму возбуждения поле может оказаться неадекватным решением уравнений Максвелла. В этой связи заметим, что неадекватные, или немодальные (неспектральные), особые точки лежат в области $\text{Im } \omega_\mu = \text{Im } \sqrt{k^2 - k_{i\mu}^2} < 0$, соответствующей при рассматриваемой зависимости от времени типа $\exp(-i\omega t)$ неподходящему листу римановой поверхности комплексных поперечных волновых чисел k_t [например, область С на фиг. 10, а].

Для пояснения сказанного на фиг. 10 изображены волны разных типов, отвечающие особым точкам в разных областях комплексной плоскости ω [5]. На первой схеме (фиг. 10, а) штриховыми линиями показаны пути наименьшего спуска, проходящие через точки перевала $\omega = 0$ и $\omega = \pi/2$ и разделяющие комплексную плоскость ω на три области. На остальных схемах параллельными линиями (лучами) показано направление распространения фазовых фронтов (и потока энергии) неоднородной плоской волны, область существования которой ограничена углом наблюдения $\bar{\alpha}_r$; лучи параллельны прямой линии $\bar{\alpha} = \omega_{\mu r}$ и нормальны к плоскостям постоянной фазы (не показанным на схеме); амплитуда волны постоянна вдоль луча, но меняется в остальных направлениях. Увеличением расстояния между лучами показано убывание амплитуды в этом направлении. Физической области излучения для точечного источника



Фиг. 10. Физические характеристики волн, соответствующих различным особым точкам коэффициента отражения $\vec{\Gamma}_i(0)$ [формула (1)] на комплексной плоскости ω . а — расположение особых точек [при временной зависимости вида $\exp(-i\omega t)$]; б — виды волн.

Полученные при этих предположениях асимптотические разложения описывают поля в дальней зоне, но неприменимы в важном случае, когда k_1 и k_2 велики, а z и z' неограниченны. В таком геометрооптическом режиме ни один из экспоненциальных множителей в формуле (18) нельзя считать медленно меняющимися и они оба должны быть учтены при вычислении интеграла методом перевала. Так как простых отображений плоскости ξ или η на плоскость w , сводящих интеграл к виду (14), не существует, необходим иной подход. В вычислениях, которые будут проводиться ниже, преобразования выполняются непосредственно на комплексной плоскости поперечных волновых чисел. Как и прежде, будем рассматривать типичный интеграл, который при временной зависимости типа $\exp(j\omega t)$ можно записать в виде

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iq(\eta)} \bar{f}(\eta) d\eta, \quad q(\eta) = \eta y + \kappa_{i1} |z'| + \kappa_{i2} z; \quad (19a)$$

при временной зависимости типа $\exp(-i\omega t)$ интеграл принимает вид

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iq(\eta)} \bar{f}(\eta) d\eta. \quad (19б)$$

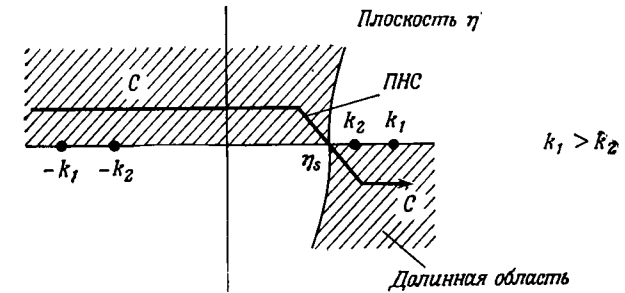
Контуры интегрирования изображены на фиг. 7, а и 8, а. Точки перевала подынтегрального выражения расположены при значениях $\eta = \eta_s$, удовлетворяющих уравнению $dq/d\eta = 0$, которое в явном виде выглядит так:

$$y + \frac{d\kappa_{i1}}{d\eta} |z'| + \frac{d\kappa_{i2}}{d\eta} z = 0 \quad \text{при} \quad \eta = \eta_s. \quad (19в)$$

Довольно трудно точно найти *полный* перевальный контур $C_{\text{пер}}$, проходящий через точку перевала η_s и удовлетворяющий условию $\text{Re } q(\eta) = \text{Re } q(\eta_s)$ (гл. 4, § 1, п. «б»). Но вид контура в окрестности точки перевала η_s определить просто: в случае действительной точки перевала порядка его следует провести по прямой, проходящей под углом $\pm 45^\circ$ к действительной оси η [т. 1, фиг. 10б; здесь мы рассматриваем лишь невытекающие волны, соответствующие действительным точкам перевала с действительным значением $\kappa_{i1,2}(\eta_s)$, т. е. $|\eta_s| < k_{1,2}$]. Поэтому в качестве пути интегрирования можно выбрать контур C , изображенный на фиг. 11: он совпадает с перевальным контуром $C_{\text{пер}}$ вблизи точки η_s , а остальные его части, проведенные для простоты параллельно действительной оси, лежат в области «долины» на комплексной плоскости η , где экспонента $\exp[iq(\eta)]$ мала (разрезы на чертеже не показаны). Так как $|\eta_s| < k_{1,2}$,

при деформации контура точки ветвления не пересекаются. Если при деформации контура пересекаются полюсы, то их вклад в интеграл учитывается так, как говорилось ранее.

Поскольку в заштрихованной области на фиг. 11 мы имеем $\text{Im } q(\eta) > 0$, основной вклад в интеграл вносит участок контура, находящийся в окрестности точки перевала η_s . Если проводить интегрирование по перевальному контуру не до бесконечности, а до некоторой конечной точки в области «долины», то ошибка вычисления интеграла экспоненциально мала и ею можно пренебречь [гл. 4, § 1, формула (17)]. На основании формулы (1)



Фиг. 11. Контур интегрирования, для которого $d^2q/d\eta^2|_{\eta_s} < 0$ [при временной зависимости типа $\exp(-i\omega t)$].

или (20а) из гл. 4, § 2, получаем следующее приближенное выражение для интеграла (19б), найденное методом перевала:

$$I_{\text{пер}} \sim \sqrt{\frac{2\pi}{|d^2q/d\eta^2|_{\eta_s}}} \bar{f}(\eta_s) \exp \left[iq(\eta_s) + i \frac{\pi}{4} \text{sign}(d^2q/d\eta^2)_{\eta_s} \right]. \quad (20)$$

Если пренебречь в уравнении (19в) членом $\kappa_{i2}z$ и произвести подстановку $\eta_s = k_1 \sin \bar{\alpha}$, то полученный результат перейдет в выражение (16а). Так как при выводе формулы (20) использовался *не полный* перевальный контур интегрирования, ограничения, связанные с разложением (16а) [гл. 4, § 2, замечания после формулы (18)]. Но если экспоненциально малыми вкладами можно пренебречь, то разложение (20) является достаточно точным.

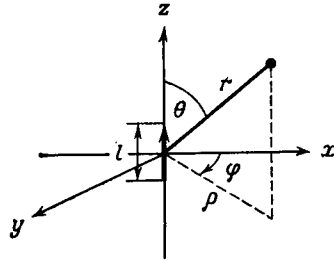
Условие, которым определяется точка перевала, можно представить графически. Введем величины $\bar{\alpha}_1$ и $\bar{\alpha}_2$:

$$\text{tg } \bar{\alpha}_1 = - \frac{\partial \kappa_{i1}}{\partial \eta} \Big|_{\eta_s}, \quad \text{tg } \bar{\alpha}_2 = - \frac{\partial \kappa_{i2}}{\partial \eta} \Big|_{\eta_s}, \quad \kappa_{i1,2} = \sqrt{k_{1,2}^2 - \eta^2}. \quad (21)$$

(2а) и имеет вид [нужно умножить выражение (31) из гл. 1, § 1, на $\exp(-i\omega t')$ и проинтегрировать по всем t']

$$G_f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad (2б)$$

где $k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$, причем ϵ и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. Среднеквадратичные значения составляю-



Фиг. 13. Система координат.

щих поля, вычисленные по формулам (1а), (1б) и (4в) из § 2 (при $G' = G_f$), в сферических координатах имеют вид

$$E_r = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{Ikl \cos \theta e^{ikr}}{2\pi kr^2} \left(1 + \frac{i}{kr}\right), \quad (3а)$$

$$E_\theta = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{ikl \sin \theta e^{ikr}}{4\pi r} \left(1 + \frac{i}{kr} - \frac{1}{(kr)^2}\right), \quad (3б)$$

$$H_\varphi = -\frac{ikl \sin \theta e^{ikr}}{4\pi r} \left(1 + \frac{i}{kr}\right), \quad (3в)$$

$$H_r = H_\theta = E_\varphi = 0, \quad (3г)$$

где I и l — ток и длина диполя. В общем случае, когда $\mathbf{r}' \neq 0$, для вывода формул, эквивалентных формулам (3), следует заменить r в выражении (2б) величиной $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Полученные результаты справедливы и при наличии потерь (т. е. при $\text{Im } k > 0$). Средняя по времени плотность мощности излучения \bar{S} дается выражениями

$$\bar{S}_r = \text{Re}(E_\theta H_\varphi^*) = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{|Ikl|^2 \sin^2 \theta}{(4\pi r)^2}, \quad (4а)$$

$$\bar{S}_\theta = \bar{S}_\varphi = 0, \quad (4б)$$

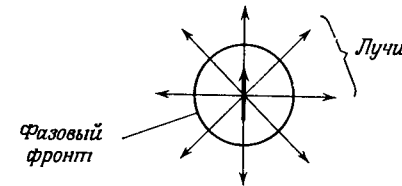
а полная мощность излучения P [гл. 1, § 2, формула (29)] такова:

$$P = \int_0^\pi \bar{S}_r \cdot 2\pi r^2 \sin \theta \, d\theta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{|Ikl|^2}{6\pi}. \quad (5)$$

Асимптотические выражения для поля в дальней зоне ($kr \gg 1$) содержат лишь составляющие E_θ и H_φ порядка $O(1/kr)$; они соответствуют учету первого слагаемого в скобках в формулах (3б) и (3в).

Замечания

Рассматриваемый источник возбуждает лишь волны E -типа (относительно оси z). Поле в дальней зоне поперечно относительно радиус-вектора, проведенного из источника в точку наблюдения, и излучение энергии описывается поперечными составляющими поля [формулы (4)]. Перенос энергии в дальнюю



Фиг. 14. Траектории лучей и поверхность равных фаз.

зону можно представить лучевой схемой (фиг. 14), причем нужно помнить (гл. 1, § 6), что направление луча в данной точке совпадает с направлением вектора потока энергии \bar{S} (см. также фиг. 9). Поверхности постоянной фазы (фазовые фронты) — это сферы, нормальные к лучам, а амплитуда поля убывает вдоль луча как $1/r$.

Нормировка поля при падении плоской волны

При удалении точки \mathbf{r}' , в которой находится источник, в бесконечность, поле, наблюдаемое на конечных расстояниях \mathbf{r} , ведет себя как плоская волна, ибо в любой конечной области кривизной сферического фронта можно пренебречь. Действительно, перейдем в уравнениях (2) после замены $r \rightarrow |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ к пределу при $\mathbf{r}' \rightarrow \infty$ и введем интенсивность источника $J^0 = Il$. С учетом равенства

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma]^{1/2}, \quad (6)$$

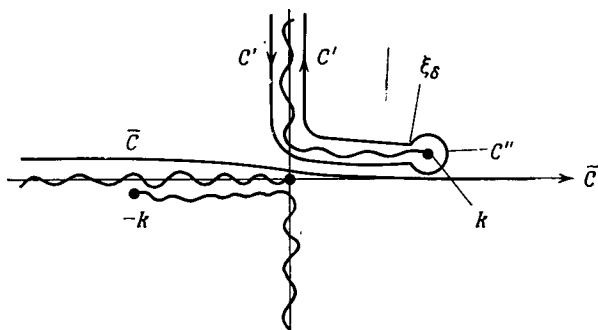
где γ — угол между векторами \mathbf{r} и \mathbf{r}' , и соотношения

$$\cos \gamma = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{rr'} = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi') \quad (6а)$$

интегрирования. Например, переписем [в случае временной зависимости типа $\exp(-i\omega t)$] выражение (7а) в виде

$$G_f = \frac{i}{8\pi} \int_{\infty \exp(i\pi)}^{\infty} \xi H_0^{(1)}(\xi \rho) \frac{e^{i\sqrt{k^2 - \xi^2} |z|}}{\sqrt{k^2 - \xi^2}} d\xi, \quad (10)$$

причем путь интегрирования таков, как на фиг. 15 (см. также фиг. 8, а). Выберем разрезы так, чтобы на верхнем листе римановой поверхности корня выполнялось условие $\text{Im} \sqrt{k^2 - \xi^2} > 0$ (фиг. 5, а); тогда подынтегральное выражение в формуле (10)



Плоскость ξ

Фиг. 15. Контуры интегрирования на комплексной плоскости ξ для различных интегральных представлений функции Грина.

будет экспоненциально убывать при $|\xi| \rightarrow \infty$. Поскольку функция $H_0^{(1)}(\xi \rho)$ экспоненциально убывает при $|\xi| \rightarrow \infty$ в области $\text{Im} \xi > 0$ [§ 3, формула (13б)], контур интегрирования C при всех значениях ρ и $|z|$, кроме нулевых, можно деформировать в контур $C' + C''$, охватывающий разрез в верхней полуплоскости. Здесь C'' — круглая петля малого, но конечного радиуса $\delta = |\xi_\delta - k|$ с центром в точке $\xi = k$. Хотя подынтегральное выражение в формуле (10) на контуре C'' возрастает как $1/\sqrt{\delta}$, сам интеграл есть $O(\sqrt{\delta})$, в чем нетрудно убедиться, разложив регулярную часть подынтегрального выражения в степенной ряд вблизи точки $\xi = k$ и выполнив интегрирование по C'' . Следовательно, вклад контура C'' в интеграл стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$.

Переходя в оставшемся интеграле по контуру C' (при $\delta = 0$) к новой переменной

$$\zeta = \sqrt{k^2 - \xi^2}, \quad \text{т. е. } \xi d\xi = -\zeta d\zeta,$$

замечаем, что ζ — действительная величина, которая изменяется от $+\infty$ до $-\infty$ при обходе контура C' в направлении, показан-

ном на фиг. 15 (знак $\text{Re} \zeta$ определяется так, как на фиг. 5, а). В результате выражение (10) преобразуется к виду

$$G_f = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}[\sqrt{k^2 - \zeta^2} \rho] e^{i\zeta |z|} d\zeta, \quad (11)$$

где для убывания функции Ханкеля при $|\zeta| \rightarrow \infty$ следует потребовать выполнения условия $\text{Im} \sqrt{k^2 - \zeta^2} > 0$, а корень $\sqrt{k^2 - \zeta^2}$ считается положительным при $-k < \zeta < k$. Контур интегрирования по ζ проходит относительно точек ветвления $\zeta = \pm k$ так же, как изображенный на фиг. 15 контур на комплексной плоскости ξ . После замены переменной интегрирования $\zeta \rightarrow -\zeta$ в выражении (11) приходим к аналогичному интегралу, в котором множитель $\exp(i\zeta |z|)$ заменен множителем $\exp(-i\zeta |z|)$. Следовательно, знак показателя экспоненты не существен и можно заменить величину $|z|$ величиной z .

Приведем ряд альтернативных представлений функции G_f (при значениях параметров $0 < \rho < \infty$, $-\infty < z < \infty$), соответствующих выражениям (2б), (10), (11) и формуле (7) из § 2 в случае точечного источника, расположенного при $\rho' = z' = 0$ [временная зависимость типа $\exp(-i\omega t)$]:

$$\left[\frac{e^{ik\sqrt{\rho^2 + z^2}}}{4\pi\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \quad (12а)$$

$$\frac{i}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\xi x + \eta y) + i\sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2} |z|}}{\sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2}} d\xi d\eta, \quad (12б)$$

$$G_f(\mathbf{r}, 0) = \left[\frac{i}{8\pi} \int_{\infty \exp(i\pi)}^{\infty} \xi H_0^{(1)}(\xi \rho) \frac{e^{i\sqrt{k^2 - \xi^2} |z|}}{\sqrt{k^2 - \xi^2}} d\xi, \quad (12в)$$

$$\frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}[\sqrt{k^2 - \zeta^2} \rho] e^{i\zeta z} d\zeta. \quad (12г)$$

Выражение (12а) дает решение в замкнутом виде, выражения (12б) и (12в) — разложения по волноводным волнам, распространяющимся вдоль оси z , в первом случае — по плоским волнам, а во втором — по цилиндрическим собственным функциям; наконец, выражение (12г) дает разложение по радиальным волноводным волнам, представляющим собой плоские волны в z -пространстве. Самое сложное из них — выражение (12б), содержащее двойной интеграл. Сходимость более удобных интегральных представлений (12в) и (12г) неодинакова. В разложении по продольным волноводным волнам (12в) подынтегральное выражение быстро убывает при $|\xi| > k$ и при больших $|z|$, а в

откуда интегрированием [формулы (21)] находим

$$\frac{\partial \mathcal{P}_f}{\partial \rho} = \frac{i}{4\pi k \rho} (e^{ik\sqrt{\rho^2+z^2}} - e^{ik|z|}). \quad (196)$$

Электромагнитные поля могут быть выражены через функции $\nabla'_i \mathcal{P}_f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\nabla_i \mathcal{P}_f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\rho_0 (\partial/\partial \rho) \mathcal{P}_f(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ по формулам (1а), (1б), (4а) и (4б) из § 2. (Заметим: $\partial/\partial z' \rightarrow -\partial/\partial z$, а $\mathbf{x}_0 \cdot \rho_0 = x/\rho$, $\mathbf{y}_0 \cdot \rho_0 = y/\rho$.) Составляющая магнитного поля вдоль оси x в точке $\mathbf{r} = (x, y, z)$ представляется в виде

$$H_x = H'_x + H''_x, \quad (20)$$

где H'_x — часть поля, соответствующая E -волнам,

$$H'_x = II \left[\frac{x^2 - y^2}{4\pi \rho^4} (e^{ikz} - \frac{z}{r} e^{ikr}) + \frac{y^2 z e^{ikr}}{4\pi \rho^2 r^2} \left(\frac{1}{r} - ik \right) \right], \quad (20a)$$

а H''_x — часть поля, соответствующая H -волнам,

$$H''_x = II \left[\frac{y^2 - x^2}{4\pi \rho^4} (e^{ikz} - \frac{z}{r} e^{ikr}) + \frac{x^2 z e^{ikr}}{4\pi \rho^2 r^2} \left(\frac{1}{r} - ik \right) \right]; \quad (20б)$$

полное поле таково:

$$H_x = \frac{ze^{ikr} I k l}{4\pi r^2} \left(\frac{1}{kr} - i \right). \quad (20в)$$

Аналогичным образом можно найти выражения для остальных составляющих поля. Плотность потока мощности излучения, как и в случае элемента тока, ориентированного вдоль оси z , определяется формулами (4) и (5), где угол θ теперь следует отсчитывать от положительного направления оси x . Физическая интерпретация результата соответствует фиг. 14.

Замечания

Полное поле в рассматриваемом случае дается формулами (3), если принять ось y за полярную ось сферической системы координат; но, как показывают вычисления, поперечный элементарный ток возбуждает как электрические, так и магнитные волны относительно выделенного направления [6]. Это очень важно в случае среды, слоистой вдоль оси z , так как части поля, отвечающие E - и H -волнам, неодинаковы (т. е. $\mathcal{P}' \neq \mathcal{P}''$). Кроме того, применив к формулам (20а) и (20б) разные масштабные преобразования координат, можно найти поля, излучаемые элементарным током, ориентированным поперек оптической оси, в анизотропном одноосном кристалле, что делает весьма ценными эти явные выражения (гл. 7, § 2, п. «в»).

Выражение (196) можно получить из формулы (19а), если учесть, что в силу симметрии вращения функции \mathcal{P}_f относительно

но оси z справедливо равенство $\nabla_i^2 = (1/\rho) (\partial/\partial \rho) (\rho \partial/\partial \rho)$. Поэтому, проводя интегрирование и учитывая, что производная $\partial \mathcal{P}_f/\partial \rho$ ограничена при $\rho = 0$, получаем

$$\rho \frac{\partial \mathcal{P}_f}{\partial \rho} = - \int_0^\rho \frac{e^{ik\sqrt{\rho'^2+z^2}}}{4\pi \sqrt{\rho'^2+z^2}} d\rho' = \frac{i}{4\pi k} \int_0^\rho \frac{d}{d\rho'} [e^{ik\sqrt{\rho'^2+z^2}}] d\rho', \quad (21)$$

что согласуется с (196). Заметим также, что если функции соответствуют формуле (7), то интегралы в формулах (12) из § 2 вычисляются в замкнутом виде по формуле (196). (Здесь $j \rightarrow -i$.)

Монохроматический магнитный источник с плотностью тока

$$\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, t) = V I \delta(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \mathbf{y}_0. \quad (22)$$

В этом случае выражения для полей можно получить из соответствующих выражений для электрического диполя путем дуальной замены $E \rightarrow H$, $H \rightarrow -E$, $I \rightarrow V$ и $\mu \leftrightarrow \epsilon$.

Импульсный электрический или магнитный ток

Соответствующие задачи подробно рассмотрены в гл. 1, § 1, п. «б» [формулы (43) — (46)].

в. Линейные токи, ориентированные поперек оси z

Монохроматический электрический источник с плотностью тока

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t) = I \delta(\hat{\rho} - \hat{\rho}') e^{-i\omega t} \mathbf{x}_0. \quad (23)$$

Электромагнитные поля, возбуждаемые линейным источником, ориентированным так, как показано на фиг. 17, легко выразить через двумерную функцию Грина \bar{G}_f , удовлетворяющую дифференциальному уравнению [двумерному аналогу уравнения (3б) из § 2]

$$(\nabla^2 + k^2) \bar{G}_f(\rho, \rho') = -\delta(\hat{\rho} - \hat{\rho}'), \quad (24)$$

$$\hat{\rho} = (y, z) = (\hat{\rho}, \phi), \quad \frac{\partial}{\partial x} \equiv 0$$

и условию излучения на бесконечности. Решение этого уравнения имеет вид

$$\bar{G}_f(\hat{\rho}, \hat{\rho}') = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\hat{\rho} - \hat{\rho}'|), \quad (25)$$

Решение (25) уравнения (24) можно получить прямым интегрированием. При $\hat{\rho}' = 0$ функция \bar{G}_f должна обладать симметрией относительно линии $\hat{\rho} = 0$ и, следовательно, $\nabla^2 \rightarrow -\rightarrow (\partial/\partial\hat{\rho}\partial\hat{\rho})(\hat{\rho}\partial/\partial\hat{\rho})$. В случае $\hat{\rho} \neq 0$ решение уравнения (24) имеет вид

$$\bar{G}_f(\hat{\rho}) = AH_0^{(1)}(k\hat{\rho}) + BH_0^{(2)}(k\hat{\rho}), \quad (32a)$$

где A и B — постоянные. Если принята зависимость от времени типа $\exp(-i\omega t)$, то для того, чтобы выполнялось условие излучения на бесконечности, следует оставить лишь функцию $H_0^{(1)}(k\hat{\rho})$ [§ 3, формула (13)], т. е. положить $B = 0$. Для определения постоянной A нужно проинтегрировать уравнение (24) в круге S радиусом $\hat{\rho}$, где $\hat{\rho} \rightarrow 0$. С учетом приближенного соотношения

$$H_0^{(1)}(k\hat{\rho}) \rightarrow i \frac{2}{\pi} \ln \hat{\rho}, \quad \hat{\rho} \rightarrow 0 \quad (32б)$$

при $\hat{\rho} \rightarrow 0$ имеем

$$-1 = \int_S (\nabla^2 + k^2) \bar{G}_f dS = \oint_S \frac{\partial \bar{G}_f}{\partial \hat{\rho}} ds = i4A, \quad (32в)$$

где s — граничный контур круга S . В результате получаем $A = i/4$ и $\bar{G}_f(\hat{\rho}) = (i/4)H_0^{(1)}(k\hat{\rho})$. Сдвинув источник в произвольную точку $\hat{\rho}'$, приходим к решению (25). Аналогичным образом при временной зависимости типа $\exp(+j\omega t)$ получим $\bar{G}_f(\hat{\rho}) = -(i/4)H_0^{(2)}(k\hat{\rho})$.

Поле собственных волн

Поскольку рассматриваемый источник образован поперечными электрическими токами, эквивалентную схему для собственной волны можно представить так, как на фиг. 18. При этом собственная функция Грина дается формулой (7) и в силу формулы (13a) из § 2 имеем

$$\bar{G}_f(\hat{\rho}, \hat{\rho}') = \frac{-i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-j\eta(y-y') - j\sqrt{k^2 - \eta^2}|z-z'|]}{\sqrt{k^2 - \eta^2}} d\eta. \quad (33)$$

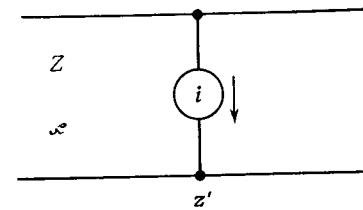
Контур интегрирования обходит точки ветвления $\eta = \pm k$ так же, как на фиг. 7, а; имеющаяся там точка ветвления при $\eta = 0$ в данном случае отсутствует. Замена переменной интегрирования $\eta = k \sin \omega$ и переход к полярным координатам по формулам

$$y - y' = R \sin \phi, \quad |z - z'| = R \cos \phi, \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2}. \quad (34)$$

приводят к следующим интегральным представлениям функции Грина:

$$\bar{G}_f(\hat{\rho}, \hat{\rho}') = \begin{cases} -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(k|\hat{\rho} - \hat{\rho}'|) \equiv -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kR), & (35a) \\ -\frac{i}{4\pi} \int_{\bar{P}} e^{-jkR \cos(\omega - \phi)} d\omega, & (35б) \\ -\frac{i}{4\pi} \int_{\bar{P}} e^{-jkR \cos \omega} d\omega. & (35в) \end{cases}$$

Здесь \bar{P} — контур на комплексной плоскости ω , изображенный на фиг. 7, б. Приняв в выражении (35б) разность $\omega - \phi$ за новую переменную, получим интегральное представление (35в).



Фиг. 18. Эквивалентная схема для определения собственных волн.

Поскольку величина ϕ лежит в пределах $0 < \phi < \pi/2$, а подынтегральное выражение не имеет особенностей (т. е. на фиг. 7, б отсутствуют точки ветвления), контур \bar{P} эквивалентен любому контуру, начинающемуся в полуплоскости $0 > \text{Re } \omega > -\pi$, $\text{Im } \omega < 0$ и заканчивающемуся в полуплоскости $0 < \text{Re } \omega < \pi$, $\text{Im } \omega > 0$. Представление (35в) не зависит от ϕ , как это явствует из решения в замкнутом виде (35a). Интегральное представление (35в) и приводимое ниже представление (36в) для функции Ханкеля впервые были получены Зоммерфельдом (подробнее о них говорится в книге [7]).

В случае временной зависимости вида $\exp(-i\omega t)$ аналогичным образом получаем

$$\bar{G}_f(\hat{\rho}, \hat{\rho}') = \begin{cases} -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR), & (36a) \\ \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[i\eta(y-y') + i\sqrt{k^2 - \eta^2}|z-z'|]}{\sqrt{k^2 - \eta^2}} d\eta, & (36б) \\ \frac{i}{4\pi} \int_{\bar{P}} e^{ikR \cos \omega} d\omega, & (36в) \end{cases}$$

дуальны задачам с источниками (23) и (38). Поля можно найти путем дуальной замены $E \rightarrow H$, $H \rightarrow -E$ и $I \rightarrow V$. Эквивалентные схемы, представленные на фиг. 18 и 20, также меняются местами.

Импульсные источники

Так же как монохроматические поля, возбуждаемые источниками вида (23), (38), (40а) и (40б), выражаются через функцию Грина $\bar{G}_f(\hat{\rho}, \hat{\rho}')$ вида (25), поля, произвольно меняющиеся во времени, можно выразить через соответствующую временную функцию Грина $\bar{G}_f(\hat{\rho}, \hat{\rho}'; t, t')$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \hat{G}_f(\hat{\rho}, \hat{\rho}'; t, t') = -\delta(\hat{\rho} - \hat{\rho}') \delta(t - t'),$$

$$\bar{c} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}, \quad (41)$$

и условию причинности $\hat{G}_f = 0$ при $t < t'$. Решение в случае $t' = 0$, $\hat{\rho}' = 0$ имеет вид

$$\hat{G}_f = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{t^2 - (\hat{\rho}/\bar{c})^2}} & \text{при } t > \frac{\hat{\rho}}{\bar{c}}, \\ 0 & \text{при } t < \frac{\hat{\rho}}{\bar{c}}, \end{cases} \quad (42a)$$

$$(42b)$$

где $\hat{\rho} = \sqrt{y^2 + z^2}$. Решение при произвольных ρ' , t' получается из выражений (42) путем замены $\hat{\rho} \rightarrow |\hat{\rho} - \hat{\rho}'|$, $t \rightarrow t - t'$. Например, если временная зависимость распределения плотности тока в источнике, изображенном на фиг. 19, такова:

$$\hat{J}(\mathbf{r}, t) = \delta(\hat{\rho}) I(t) \mathbf{z}_0, \quad I(t) = \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = \hat{\rho} \frac{d}{dt} \delta(t), \quad (43)$$

где $\hat{\rho}$ — дипольный момент, то, согласно формулам (39) (см. также § 2, п. «в»), меняющиеся во времени поля имеют вид

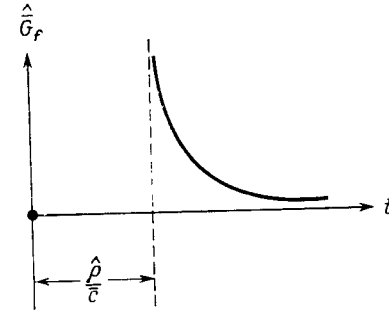
$$\hat{H}_x = \hat{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t \partial y} \hat{G}_f, \quad \hat{E}_\rho = -\hat{\rho} \frac{1}{\epsilon \hat{\rho}} \frac{\partial^2}{\partial \phi \partial y} \hat{G}_f, \quad \hat{E}_\phi = \hat{\rho} \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial \hat{\rho} \partial y} \hat{G}_f. \quad (44)$$

[Отметим, что $(\partial^2/\partial\phi\partial y) \neq (\partial^2/\partial y\partial\phi)$, так как $y = y(\hat{\rho}, \phi)$.] Аналогичным образом можно получить выражение для полей, возбуждаемых источниками иного вида.

Функция \hat{G}_f , даваемая формулами (42), описывает возмущение, обладающее цилиндрической симметрией, распространяющееся от источника со скоростью \bar{c} и достигающее точки наблюдения $\hat{\rho}$ в момент времени $t = \hat{\rho}/\bar{c}$. Хотя действие источника ог-

раничено лишь моментом $t = 0$, в точке $\hat{\rho}$ после прохождения головного фронта волны (фиг. 21) остается отклик с убывающей интенсивностью.

Решение (42) можно найти непосредственно методом, изложенным в § 2, п. «в». Интегральное выражение для функции



Фиг. 21. Сигнал от импульсного скалярного линейного источника, наблюдаемый на расстоянии $\hat{\rho}$ от него.

Грина (35в), соответствующей монохроматическому полю при $\hat{\rho}' = 0$, можно записать в виде формулы (20) из § 2, если положить в ней $\bar{\alpha} = 0$, $L = \hat{\rho}$, $f(\omega) = -j/4\pi$. Тогда решение для меняющегося во времени поля следует из формул (19) и (23) § 2 (см. также гл. 1, § 6, п. «б»).

г. Линейные токи, ориентированные вдоль оси z

Монохроматический электрический ток с плотностью

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = I \delta(\rho - \rho') e^{iaz} e^{-i\omega t} \mathbf{z}_0. \quad (45)$$

Поскольку элементы тока направлены вдоль оси z, поля можно выразить через скалярную функцию Грина

$$\bar{G}'(\mathbf{r}, \rho') = e^{iaz} \bar{G}_f(\rho, \rho'), \quad \rho = (x, y) = (\rho, \phi), \quad (46a)$$

где \bar{G}_f — двумерная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$(\nabla_i^2 + \hat{\kappa}^2) \bar{G}_f(\rho, \rho') = -\delta(\rho - \rho'), \quad \hat{\kappa}^2 = k^2 - \alpha^2,$$

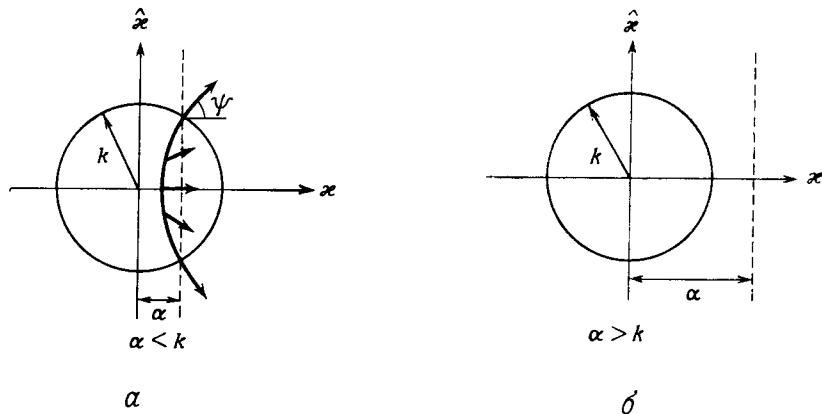
$$\nabla_i^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad (46b)$$

и условию излучения на бесконечности. При $\rho' = 0$ решение в соответствии с выражением (25) имеет вид

$$\bar{G}_f(\rho, \rho') = \frac{j}{4} H_0^{(1)}(\hat{\kappa} \rho), \quad \text{Im } \hat{\kappa} \geq 0, \quad (47)$$

(48) при мнимых $\hat{\gamma}$ видно, что составляющие E_p и H_ϕ имеют одинаковую фазу, а составляющие E_z и H_ϕ сдвинуты по фазе на 90° . Это относится не только к рассматриваемой задаче, в которой задано распределение токов источника, но и к задачам о дифракции, где приходится иметь дело с наведенными токами с быстрыми или медленными изменениями фазы.

Рассмотренные выше характеристики излучения линейного фазированного источника можно найти и непосредственно из диаграммы волновых векторов на фиг. 9. В рассматриваемом случае продольное волновое число α имеет заданную величину



Фиг. 23. Построение, основанное на представлении о поверхности волновых векторов.

α и поэтому существенно лишь пересечение плоскости $k_x = \alpha$ с поверхностью волновых векторов. При $\alpha < k$ плоскость $k_x = \alpha$ пересекается с поверхностью волновых векторов (фиг. 23, а) и плоские волны, соответствующие этому пересечению (т. е. нормали к сфере), образуют конус лучей, изображенный на фиг. 22. При $\alpha > k$ указанное пересечение отсутствует (фиг. 23, б) и, следовательно, нет распространяющихся плоских волн с действительными значениями поперечного волнового вектора $\hat{\gamma}$.

д. Равномерно и прямолинейно движущийся точечный заряд

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t) = qv\delta(x - vt)\delta(\hat{\rho} - \hat{\rho}')\mathbf{x}_0. \quad (54)$$

Электромагнитное поле, возбуждаемое точечным зарядом q , движущимся (фиг. 24) с постоянной скоростью v по прямолинейной траектории параллельно оси x в среде с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = \bar{\epsilon}\epsilon_0$, не зависящей от частоты, и магнитной

проницаемостью вакуума $\mu = \mu_0$, можно выразить через функцию $\hat{G}(\mathbf{r}, t)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\left(\nabla^2 - \frac{\bar{\epsilon}}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \hat{G}(\mathbf{r}, t) = -\delta(\hat{\rho} - \hat{\rho}')\delta\left(t - \frac{x}{v}\right), \quad (55)$$

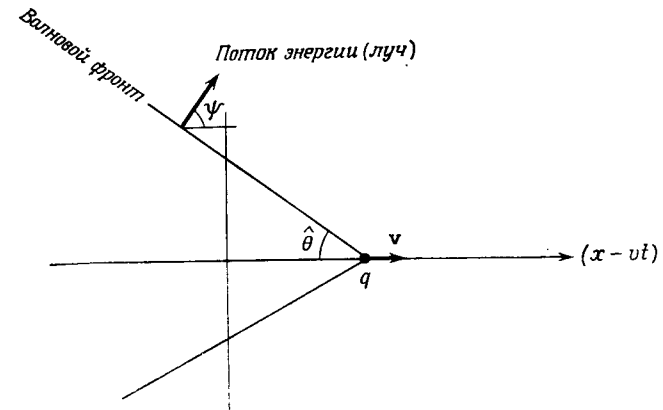
$$\hat{\rho} = (y, z) = (\hat{\rho}, \phi),$$

а также начальным условиям, которые будут рассмотрены ниже. Решение при $\hat{\rho}' = 0$ имеет вид

$$\hat{G}(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t - \frac{x}{v} < \frac{\hat{\rho}\gamma}{c}, \\ \frac{1}{2\pi\sqrt{(t - x/v)^2 - (\hat{\rho}\gamma/c)^2}} & \text{при } t - \frac{x}{v} > \frac{\hat{\rho}\gamma}{c}, \end{cases} \quad (55a)$$

$$(55b)$$

если величина $\gamma = \sqrt{\bar{\epsilon} - (1/\beta)^2}$ положительна. Здесь $\bar{\epsilon} = \epsilon/\epsilon_0$ — относительная диэлектрическая проницаемость (приведенная к



Фиг. 24. Точечный заряд, равномерно движущийся в неограниченном диэлектрике ($\epsilon > c^2/v^2$).

диэлектрической постоянной ϵ_0), $\beta = v/c$ отношение скорости заряда к скорости света в вакууме (т. е. $\beta < 1$). Выражения (55) справедливы, если скорость заряда достаточно велика, так что выполнено условие $\bar{\epsilon} > (c/v)^2$. При низких скоростях, когда $\bar{\epsilon} < (c/v)^2$, функция Грина имеет вид

$$\hat{G}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\sqrt{(t - x/v)^2 + (\hat{\rho}|\gamma|/c)^2}}, \quad |\gamma| = \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - \bar{\epsilon}}. \quad (56)$$

Решение при $\hat{\rho}' \neq 0$ получается заменой $\hat{\rho}$ на $|\hat{\rho} - \hat{\rho}'|$.

[формула (45)]. Поэтому в данном случае прямо применимы результаты п. «г», если учесть иную зависимость от времени ($i \rightarrow -j$) и ориентацию системы отсчета; мы приняли, что заряд движется вдоль оси x , для облегчения рассмотрения в дальнейшем более общего случая движения заряда в слоистой среде, свойства которой меняются вдоль оси z . Из уравнений (46) и (47) следует, что соответствующая функция Грина для монохроматического процесса имеет вид

$$G(\mathbf{r}, \omega) = \frac{-j}{4} e^{-l(k_0/\beta)x} H_0^{(2)}(k_0 \hat{\rho} \gamma), \quad k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad (63)$$

где зависимость от ω указана в явной форме. Соответствующие монохроматические поля выражаются по формулам (48) и приводят (с учетом замены $\partial/\partial t \leftrightarrow j\omega$) к выражениям (57).

Функция $G(\mathbf{r}, \omega)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению [формула (46б)]

$$\left(\hat{\nabla}_t^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \bar{\epsilon} - \frac{\omega^2}{v^2} \right) G(\mathbf{r}, \omega) = -\delta(\hat{\rho} - \hat{\rho}') e^{-j(\omega/v)x}, \quad (63a)$$

$$\hat{\nabla}_t^2 = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

которое можно записать в следующих различных формах с учетом временной зависимости типа $\exp(j\omega t)$:

$$\left. \begin{array}{l} \left(\nabla^2 - \frac{\bar{\epsilon}}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \\ \left(\hat{\nabla}_t^2 - \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \\ \left(\hat{\nabla}_t^2 + \beta^2 |\gamma|^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \end{array} \right\} G(\mathbf{r}, \omega) e^{j\omega t} = -\delta(\hat{\rho} - \hat{\rho}') e^{j\omega(t-x/v)}, \quad (63б)$$

где $v^2 = \bar{\epsilon} - (1/\beta)^2$. Временная функция Грина

$$\hat{G}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (64)$$

удовлетворяет уравнению, которое получается умножением (63б) на $1/2\pi$ и интегрированием по всем действительным ω ; при этом первое из уравнений (63б) переходит в уравнение (55).

Второе из уравнений (63б) дает

$$\left(\hat{\nabla}_t^2 - \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \hat{G}(\mathbf{r}, t) = -\delta(\hat{\rho} - \hat{\rho}') \delta\left(t - \frac{x}{v}\right); \quad (64a)$$

последнее совпадает с уравнением (41), если заменить в нем положительную постоянную c^2 положительной постоянной c^2/v^2 и принять $t' = x/v$. Координату x можно рассматривать как па-

раметр, ибо она не входит в дифференциальный оператор в левой части уравнения (64a). Решение уравнения (42) непосредственно приводит к выражениям (55a) и (55б) для функции Грина.

При отрицательных значениях v^2 удобно использовать третье из уравнений (63б)

$$\left(\hat{\nabla}_t^2 + \beta^2 |\gamma|^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \hat{G}(\mathbf{r}, t) = -\delta(\hat{\rho} - \hat{\rho}') \delta\left(t - \frac{x}{v}\right). \quad (64б)$$

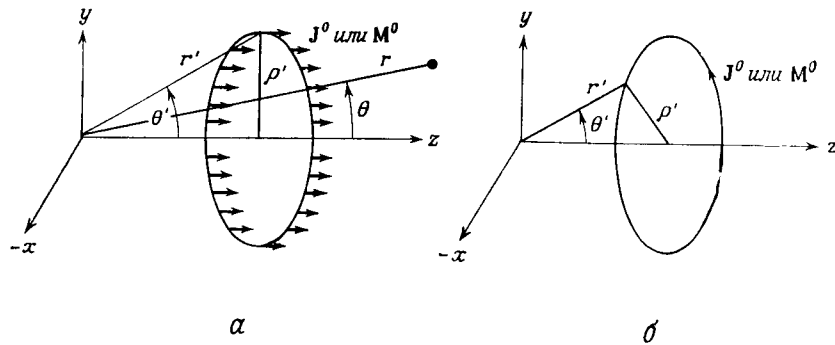
Если ввести новую переменную $\bar{x} = x/\beta|\gamma|$, то дифференциальный оператор в левой части уравнения примет вид лапласиана в координатном пространстве \bar{x}, y, z . Помимо этого, происходит замена $\delta(t - x/v) \rightarrow \delta(t - \bar{x}|\gamma|/c) = (c/|\gamma|) \delta(\bar{x} - \bar{x}')$, где величина $\bar{x}' = ct/|\gamma|$ играет роль параметра. Решение преобразованной таким образом задачи состоит в нахождении статической функции Грина G_S в пространстве \bar{x}, y, z , которая с учетом нормирующего множителя $c/|\gamma|$ имеет при $\hat{\rho}' = 0$ вид

$$G_S = \frac{c/|\gamma|}{4\pi \sqrt{\hat{\rho}^2 + [\bar{x} - (ct/|\gamma|)]^2}}. \quad (65)$$

Перейдя в этом выражении к координатам x, y, z , получим функцию Грина (56).

В случае монохроматического процесса, как и в п. «г», наличие или отсутствие излучения определяется параметром $\alpha = k_0/\beta = \omega/v$. При $\alpha < k_0 \sqrt{\bar{\epsilon}}$ излучение имеется, а при обратном условии $\alpha > k_0 \sqrt{\bar{\epsilon}}$ поток энергии от источника отсутствует. Эти условия эквивалентны ранее установленным соотношениям $\beta^2 \bar{\epsilon} > 1$ и $\beta^2 \bar{\epsilon} < 1$. Направление распространения волн при наличии излучения определяется углом ψ (фиг. 23). Из фиг. 23 видно также, что характеристики излучения движущейся заряженной частицы могут быть установлены непосредственно по виду поверхности волновых чисел для данной среды. Прежде всего построим плоскость $x = k_0/\beta$, где в данном случае символом x обозначена проекция волнового вектора на ось x . Если эта плоскость пересекается со сферой $k = k_0 \sqrt{\bar{\epsilon}}$, то излучение распространяется от траектории частицы вдоль показанных на схеме конических траекторий. Если же указанные поверхности не пересекаются, то излучение отсутствует. В случае когда $\bar{\epsilon}$ не зависит от частоты, все излучаемые плоские волны испускаются под одинаковым углом ψ , которым и определяется волновой фронт, показанный на фиг. 24. С физической точки зрения картина такова: заряд возбуждает плоские волны, фазовая скорость которых $v_p > c/\sqrt{\bar{\epsilon}}$ вдоль его траектории равна v ; это «условие когерентности черенковского излучения», очевидно, не выполняется при $v_p < c/\sqrt{\bar{\epsilon}}$.

параллельно оси кольца и вдоль его контура. Первые можно назвать «дипольными кольцевыми источниками», вторые — просто «кольцевыми источниками». В отличие от поля скалярного точечного или линейного источника с постоянной амплитудой,



Фиг. 25. Кольцевые токи.

а — дипольный кольцевой источник; б — кольцевой источник.

которое зависит лишь от расстояния до источника, поле, возбуждаемое кольцевым источником, зависит от угла наблюдения, отсчитываемого от оси кольца.

Монохроматический кольцевой источник с плотностью продольного электрического тока

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t) = J^0 \delta(\rho - \rho') \delta(z - z') e^{in\varphi} e^{-i\omega t} \mathbf{z}_0. \quad (71)$$

Поскольку в данном случае элементарные токи — продольные, поля, возбуждаемые кольцевым источником, можно выразить по формулам (1) и (4в) из § 2 через скалярную функцию Грина $\hat{G}_f(\mathbf{r}; \mathbf{r}', \theta')$, полученную путем интегрирования функции Грина для свободного пространства $G_f(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ [формула (26)], где следует положить $r \rightarrow |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ по контуру кольцевого источника:

$$\hat{G}_f(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \theta') = \rho' \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\varphi'} G_f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\varphi' = \quad (72a)$$

$$= \frac{\rho'}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\varphi'} \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\varphi', \quad (72b)$$

причем выражение для величины $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ в сферической системе координат дается формулой (6). Как видно из выражения (71),

распределение тока допускает фазовый сдвиг, соответствующий множителю $\exp(in\varphi)$, где n — целое число или нуль. Вычислить интеграл в формуле (72б) в замкнутом виде не удастся. Но при оценке поля в дальней зоне (см. также § 9, п. «в») можно приближенно положить $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sim r - r' \cos \gamma$, откуда получаем [формула (6)]

$$\frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \sim \frac{e^{ik(r - r') \cos \gamma}}{r}, \quad r \gg r'. \quad (73a)$$

На основании формулы

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix \cos \psi - in\psi} d\psi = 2\pi e^{-in\pi/2} J_n(x), \quad (73b)$$

заменив верхний и нижний пределы интегрирования в формуле (72б) величинами $\pi + \varphi$ и $-\pi + \varphi$, из формул (72б) и (73а) получаем следующее приближенное выражение для функции \hat{G}_f , описывающей поле в дальней зоне:

$$\hat{G}_f(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \theta) \sim \frac{e^{ik(r - r' \cos \theta \cos \theta')}}{2r} \rho' e^{in(\varphi - \pi/2)} J_n(kr' \sin \theta \sin \theta'), \quad (74)$$

$$r \gg r'.$$

Зависимость этой величины от расстояния, соответствующая множителю $(1/r) \exp(ikr)$, такова, что поле в дальней зоне ведет себя как расходящаяся сферическая волна.

Замечания

Выражение (74) можно по-разному интерпретировать с физической точки зрения в зависимости от радиуса источника $\rho' = r' \sin \theta'$. Если $x \ll 1$, то $J_n(x) \sim x^n$ и, следовательно, $\hat{G}_f \propto L(k\rho')^n$ при очень малых значениях $k\rho'$, где $L = 2\pi\rho'$ — есть длина контура кольцевого источника. Таким образом, поле, излучаемое кольцевым источником с очень малым $k\rho'$ в дальней зоне, всегда очень мало, кроме случая, когда $n = 0$, отвечающего источнику с постоянной амплитудой плотности тока; в этом случае $J_0(x) \sim 1$, $x \rightarrow 0$ и $\hat{G}_f \rightarrow LG_f$. Если же произведение $k\rho'$ велико, но гораздо меньше kr , то следует различать две области: $k\rho' \sin \theta > n$ и $k\rho' \sin \theta < n$. Пусть n также велико; тогда при $x \ll n$ мы имеем $J_n(x) \sim (x/n)^n$, а при $x \gg n$ следует использовать соотношение $2J_n(x) = H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x)$ и асимптотические выражения для функций Ханкеля (37) [или (13) из § 3]. Таким образом, при достаточно малых углах наблюдения θ , когда $k\rho' \sin \theta \ll n$, поле излучения кольцевого источника становится очень малым.

и объясняется его наличие в выражении (76). Наконец, множитель $\sqrt{\rho'/\rho}$ в формуле (76) обусловлен тем, что элементы тока в точках P_1 и P_2 не коллинеарны, а лежат на кольце; в проекции на плоскость кольца расходимость лучевой трубки с сечением dA на величину ρ/ρ' больше расходимости лучей от прямолинейного тока. Поскольку амплитуда поля вдоль луча убывает обратно пропорционально корню квадратному из сечения лучевой трубки, мы приходим к выражению (76) [см. также гл. 1, § 7, формула (37), где ψ — фазовая функция]. Множитель, описывающий расходимость лучевой трубки, очевидно, характеризует преобразование цилиндрической волны вблизи от элемента кольца в сферическую волну в дальней зоне.

Выражения (75) или (76) непригодны в предельном случае $\sin \theta \rightarrow 0$, в котором они дают бесконечные значения для поля. В этой переходной области, когда точки наблюдения лежат вблизи или на каустике, следует пользоваться формулой (74).

При выводе выражения (75) предполагалось выполнение условия $kr' \sin \theta' \sin \theta \gg n$, что дало возможность воспользоваться простой асимптотической формулой (37) для функции Ханкеля. Если же требуется асимптотическое представление поля (74) в случае, когда велики n , и $kr' \sin \theta$, то следует использовать более точные асимптотические формулы [§5, формулы (33) и (34)]. При $1 - n/x \gg x^{-2/3}$ имеем

$$H_n^{(1,2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x \cos \beta}} e^{\pm i x [\cos \beta + (\beta - \pi/2) \sin \beta] \mp i \pi/4}, \quad \sin \beta = \frac{n}{x}. \quad (77a)$$

При $(n/x) - 1 \gg x^{-2/3}$

$$H_n^{(1,2)}(x) \sim \mp i \sqrt{\frac{2}{\pi x \operatorname{sh} \psi}} e^{x(\psi \operatorname{ch} \psi - \operatorname{sh} \psi)}, \quad \operatorname{ch} \psi = \frac{n}{x}, \quad (77б)$$

$$J_n(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x \operatorname{sh} \psi}} e^{-x(\psi \operatorname{ch} \psi - \operatorname{sh} \psi)}.$$

При $|1 - n/x| = O(x^{-2/3})$,

$$H_n^{(1,2)}(x) \sim \left(\frac{2}{n}\right)^{1/3} [\operatorname{Ai}(-2^{1/3}\tau) \mp i \operatorname{Bi}(-2^{1/3}\tau)], \quad \tau = n^{-1/3}(x - n), \quad (77в)$$

где $\operatorname{Ai}(\alpha)$ и $\operatorname{Bi}(\alpha)$ — функции Эйри [гл. 4, § 2, п. «д»]. В представленных выражениях для функций Ханкеля величины n и x считаются действительными и положительными, но эти выражения сохраняют силу в выделенных комплексных областях. Величину $J_n(x)$ можно найти исходя из выражений (77а) или (77в) по формуле $2J_n = H_n^{(1)} + H_n^{(2)}$. При $n/x > 1$ требуется специальная формула, так как в соответствии с выражением (77б) $H_n^{(1)} + H_n^{(2)} \sim 0$. Выражения (77) ясно показывают, что при $n <$

$< x$ функция $J_n(x)$ описывает распространяющуюся волну, при $n > x$ — затухающую волну, а при $n \approx x$ мы имеем переходную область.

Если исследовать выражение (74) в случае, когда n велико и $kr' > n$, но условие $kr' \gg n$ не выполняется, то с помощью формул (77) можно получить более сложное и более точное асимптотическое представление, чем (75). Из-за наличия дополнительных фазовых множителей начальные точки двух лучей, приходящих в точку P , оказываются смещенными из ближайшей и наиболее удаленной точек кольца. Механизм излучения в этом случае показан на фиг. 26, б, где мы для простоты выбрали точки наблюдения в плоскости кольцевого источника ($\theta = \theta' = \pi/2$). Как и прежде, лучи испускаются каждым элементом кольца под углом $\psi = \arccos(\alpha/k)$. При волновых числах α , соответствующих «медленным» волнам ($\alpha = n/r' > k$), угол ψ — комплексный, действительных лучей нет, поле сосредоточено в окрестности кольцевого источника и распространяется вдоль направления тока. В случае же «быстрых» волн ($\alpha < k$) имеется излучение, соответствующее лучевой картине, изображенной на фиг. 26, б. Случай $\alpha \approx k$ относится к переходной области $n \approx kr'$, о которой говорилось, когда речь шла о формулах (77). При $kr' \gg n$ [т. е. когда пространственный период $(2\pi r')/n$ намного превышает длину волны] мы приходим к картине излучения, изображенной на фиг. 26, а, где $\psi \approx \pi/2$. В правильности такой интерпретации можно убедиться, рассмотрев в формуле (74) экспоненциальные множители $\exp(i\chi_{1,2})$, появляющиеся при замене $J_n(kr')$ асимптотическим выражением (77а). Результат таков:

$$\chi_1 = k(r - r' \cos \beta) + n(\varphi - \beta) + \pi/4,$$

$$\chi_2 = k(r + r' \cos \beta) + n(\varphi - \pi + \beta) - \pi/4.$$

Физический смысл этих фазовых функций ясен из фиг. 26, в, где исследуется поле излучения в отдаленной точке (r, φ) , причем r — расстояние от центра кольца. В соответствии с лучевой картиной, изображенной на фиг. 26, б, поле состоит из вкладов двух лучей, исходящих из точек P_1 и P_2 (фиг. 26, в). Луч, вышедший из точки P_1 , проходит путь $(r - r' \cos \beta)$ и приобретает разность хода $k(r - r' \cos \beta)$. Фаза элемента тока в точке P_1 равна $n(\varphi - \beta)$, и, следовательно, полная фаза в точке наблюдения (r, φ) почти совпадает с фазой χ_1 , отличаясь от нее лишь слагаемым $\pi/4$, обусловленным, согласно формуле (76б), свойствами поля излучения линейного источника. Точно так же для луча, выходящего из точки P_2 , получаем фазу χ_2 без фазового сдвига $-\pi/2$, обусловленного пересечением этим лучом каустики на границе тени (фиг. 26, б).

Интегралы, входящие в потенциальные функции кольцевого источника, можно вычислить по аналогии с формулой (72а) при $i \rightarrow -j$. Отметим, что при $n \neq 0$ возбуждаются волны электрического и магнитного типов (т. е. поле излучения кольцевого источника содержит продольные составляющие электрического и магнитного полей). В частном случае кольцевого источника с постоянной плотностью тока ($n = 0$) потенциал Π' отсутствует. Возбуждаемые электрическое и магнитное поля находятся по формуле (1) из § 2 и формуле (82) данного параграфа. Электрическое поле имеет только азимутальную составляющую, равную

$$\vec{E}(\mathbf{r}) = \varphi_0 \frac{j\omega\mu \partial \Pi''}{\partial \rho} = -\varphi_0 j\omega\mu J^0 \frac{\partial^2 \mathcal{P}_f}{\partial \rho \partial \rho'}, \quad (83a)$$

где в соответствии с выражением (10б) из § 2 и формулой (7)

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}_f}{\partial \rho \partial \rho'} = \frac{-i\rho'}{2} \int_0^\infty \frac{\xi J_1(\xi\rho) J_1(\xi\rho') \exp(-j\sqrt{k^2 - \xi^2}|z - z'|)}{\sqrt{k^2 - \xi^2}} d\xi. \quad (83б)$$

Сравнив выражения (78а) и (83б), находим

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{P}_f}{\partial \rho \partial \rho'} \right|_{n=0} = (e^{jn\varphi} \hat{G}_f)_{n=1}. \quad (83в)$$

Поэтому полученные ранее асимптотические формулы для \hat{G}_f можно непосредственно использовать для вычисления полей в дальней зоне в рассматриваемой задаче. Результаты, соответствующие временной зависимости типа $\exp(-i\omega t)$, находятся путем замены $j \rightarrow -i$.

Монохроматические магнитные токи

Аналогичные результаты в этом случае можно получить из приведенных выше формул путем дуальной замены

$$E \rightarrow H, \quad H \rightarrow -E, \quad J^0 \rightarrow M^0, \quad I \rightarrow V \quad \text{и} \quad \mu \leftrightarrow \varepsilon.$$

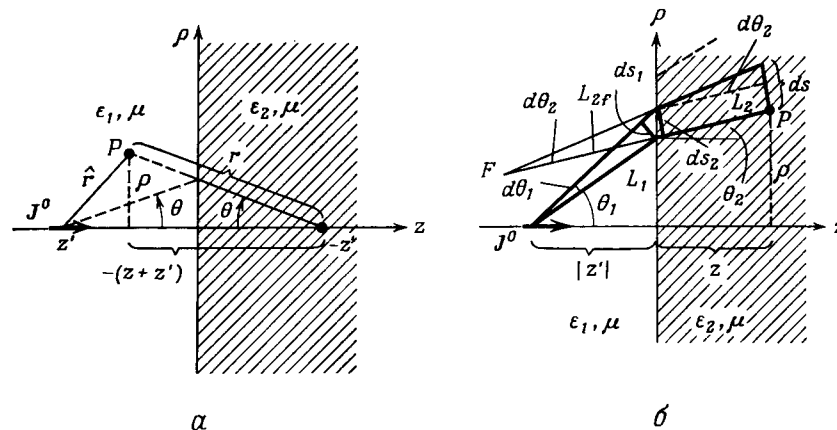
§ 5. ИСТОЧНИКИ ВБЛИЗИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ДИЭЛЕКТРИКА

а. Монохроматический продольный элементарный электрический ток

$$\hat{J}(\mathbf{r}, t) = I \delta(\rho) \delta(z - z') e^{-i\omega t} \mathbf{z}_0. \quad (1)$$

Допустим, что в точке $z' < 0$ на оси z возле плоской границы $z = 0$ полубесконечного диэлектрика (фиг. 27) расположен продольный элементарный электрический ток с амплитудой $J^0 = I$,

где I — переменный ток, проходящий по бесконечно малому отрезку l . Свойства среды в полупространстве $z < 0$ характеризуются диэлектрической и магнитной проницаемостями ε_1 и μ , а в полупространстве $z > 0$ — соответствующими величинами ε_2 и μ . В отличие от задачи о диполе в свободном пространстве в данном случае поле нельзя выразить через одну простую функцию пространственных координат и поэтому следует обратиться к методу разложения по собственным функциям. Если принять



Фиг. 27. Продольный элементарный ток возле границы полубесконечного диэлектрика.

а — система отсчета для случая, когда точка наблюдения лежит в области 1; б — система отсчета для случая, когда точка наблюдения лежит в области 2 ($\sqrt{\varepsilon_1} \sin \theta_1 = \sqrt{\varepsilon_2} \sin \theta_2$).

ось z за направление передачи, то электромагнитные поля можно выразить через скалярные функции Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ для E -волн [§ 2, формулы (1) и (4в)], которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$(\nabla^2 + k_1^2) G'_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \text{при} \quad z < 0, \quad (2a)$$

$$(\nabla^2 + k_2^2) G'_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad \text{при} \quad z > 0, \quad (2б)$$

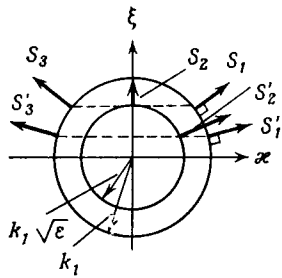
а также условию излучения на бесконечности в обеих областях и следующим граничным условиям при $z = 0$ [гл. 2, § 3, формулы (36) и далее]:

$$G'_1 = G'_2, \quad \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial G'_1}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial G'_2}{\partial z} \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (2в)$$

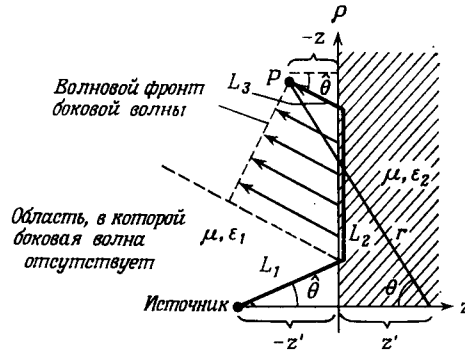
где $k_{1,2}^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_{1,2}$. В цилиндрических координатах $\mathbf{r} = (\rho, z)$ и $\mathbf{r}' = (0, z')$ поле при $z < 0$ можно выразить через функцию

$$G'_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_{f1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + C'_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (3)$$

Если потери в полупространстве $z > 0$ очень велики (т. е. $|\epsilon| \gg 1$, $\arg \epsilon \approx \pi/2$), то величина G'_{sb} пренебрежимо мала, но в том случае, когда точка наблюдения лежит близко от границы, требуются дополнительные видоизменения. В этом случае полюс подынтегрального выражения¹⁾, определяемый множителем



а



б

Фиг. 28. Боковая волна.

а — поверхность волновых векторов; б — ход лучей в физическом пространстве.

(Зд), расположен вблизи точки перевала и суммарное поле принимает вид

$$G'_1 \sim \frac{e^{ik_1 r}}{4\pi r} + \frac{e^{ik_1 r}}{4\pi r} - \frac{\theta - \omega_p}{8\pi} \hat{\Gamma}(k_1 \sin \theta) \sqrt{\frac{2k_1}{r}} e^{i(k_1 r + \pi/4)} \{ \}, \quad (7)$$

$$\{ \} = i2e^{-k_1 r b^2} Q(-ib\sqrt{k_1 r}) + T(0) \frac{1}{\sqrt{k_1 r}}, \quad (7a)$$

где $\hat{\Gamma} = 1 + \Gamma$,

$$b = \sqrt{2} e^{i\pi/4} \sin \frac{\omega_p - \theta}{2}, \quad \omega_p \approx \frac{\pi}{2} + \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{|\epsilon|}},$$

$$T(0) = \frac{\sqrt{2} e^{-i\pi/4}}{\theta - \omega_p} + \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2} \sin[(\omega_p - \theta)/2]}, \quad (7б)$$

$$Q(y) = \int_y^\infty e^{-x^2} dx.$$

Выражение (7) справедливо при всех углах наблюдения $0 < \theta \leq \pi/2$ в полупространстве $z < 0$ и при любых ϵ_2 ; при $\theta \approx \pi/2$ оно, как можно показать, переходит в разложение (5).

¹⁾ Если область 2 заполнена плазмой, то может выполняться соотношение $\epsilon_2 < -\epsilon_1$, где $\epsilon_1 > 0$, и тогда вклад полюса оказывается иным, чем указано здесь (п. «л»).

В частном случае, когда поглощение в среде 2 велико ($\arg \epsilon \approx \pi/2$), а в среде 1 потери отсутствуют и $\theta = \pi/2$ (источник и точка наблюдения расположены на границе), второе слагаемое в формуле (7а) пренебрежимо мало по сравнению с первым слагаемым. В этом случае разложение (7) для функции на границе областей с учетом формул (7б) принимает вид

$$G'_1 \sim \frac{e^{ik_1 r}}{2\pi r} [1 + i2\sqrt{\zeta} e^{-\zeta} Q(-i\sqrt{\zeta})], \quad k_1 r \gg 1, \quad |\epsilon| \gg 1, \quad (8)$$

$$\arg \epsilon \approx \frac{\pi}{2},$$

где ζ — введенное Зоммерфельдом [7, гл. 6] «численное расстояние»:

$$\zeta = \frac{k_1 r}{2|\epsilon|}. \quad (8a)$$

Учитывая, что $Q(-i\sqrt{\zeta}) = Q(0) - \int_0^{-i\sqrt{\zeta}} e^{-x^2} dx$, где $Q(0) = \sqrt{\pi}/2$,

перепишем разложение (8) в виде

$$G'_1 \sim \frac{e^{ik_1 r}}{2\pi r} \left[1 + i\sqrt{\pi\zeta} e^{-\zeta} - i2\sqrt{\zeta} e^{-\zeta} \int_0^{-i\sqrt{\zeta}} e^{-x^2} dx \right]. \quad (8б)$$

Первый член разложения (8б) представляет волны, распространяющиеся вдоль идеально проводящей поверхности ($|\epsilon| = \infty$); наличие второго члена связано с тем, что $|\epsilon|$ — конечная, хотя и большая, величина. При малых ζ все определяется первым членом, но при увеличении ζ второй и третий члены возрастают и их сумма стремится к -1 при $\zeta \gg 1$ [гл. 4, § 4, формула (20)]. Таким образом, характер решения довольно сильно зависит от численного расстояния. Второй член разложения (8б) соответствует «поверхностной волне», что явствует из зависимости вида $(1/\sqrt{\xi_p r}) \exp(i\xi_p r)$, где $\xi_p(r) = k_1 r \sin \omega_p \approx k_1 r + i\zeta$ (см. разд. «Замечания»). Но на очень больших расстояниях (при больших ζ) поле поверхностной волны гасится третьим членом разложения (8б), и поэтому утверждение о его основной роли в поле диполя справедливо лишь в ограниченных пределах.

В области $z > 0$ вычисление интеграла (3а) методом перевала при больших действительных значениях $k_{1,2}$, согласно формуле (4) с учетом лишь членов первого порядка, дает

$$G'_2(r, r') \sim \frac{e^{i(k_1 L_1 + k_2 L_2)}}{4\pi \sqrt{k_1 \rho}} \frac{\sqrt{\sin \theta_1}}{\cos \theta_1} \frac{1}{\sqrt{\frac{L_1}{k_1 \cos^2 \theta_1} + \frac{L_2}{k_2 \cos^2 \theta_2}}} \times$$

$$\times [1 - \Gamma(k_1 \sin \theta_1)], \quad (9)$$

в приближении геометрической оптики основано на предположении, что поле распространяется вдоль луча локально как плоская волна с соответствующей поляризацией (гл. 1, § 7, п. «б»), и проводится последовательно в четыре этапа.

1. Определение траекторий лучей от источника до точки наблюдения в соответствии с законами отражения и преломления лучей (и плоских волн) на границе диэлектрика.

2. Вычисление начального значения поля G'_{20} на преломленном луче, равного падающему полю на границе диэлектрика, умноженному на коэффициент прохождения для плоской волны.

3. Вычисление фазы поля в точке P , равной сумме фазы поля G'_{20} , и изменения фазы вдоль пути L_2 .

4. Вычисление амплитуды поля в точке P , равной произведению $|G'_{20}|$ на корень квадратный из отношения площадей сечения лучевых трубок на границе диэлектрика и в точке P .

На первом этапе мы приходим к траекториям лучей, изображенным на фиг. 27, б, где углы θ_1 и θ_2 соответствуют закону отражения плоской волны (закону Снеллиуса); оба луча лежат в плоскости, нормальной границе диэлектрика, хотя это и не обязательно в случае анизотропных сред (т. 1, фиг. 25). Для нахождения поля G'_{20} на втором этапе напомним, что падающее поле на границе диэлектрика равно $(4\pi L_1)^{-1} \exp(ik_1 L_1)$, а коэффициент прохождения плоской волны равен $1 - \Gamma(k_1 \sin \theta)$ [см. также выражение (5), где нужно положить $\hat{r} = r = L_1$ и учесть условие непрерывности полей ($G'_1 = G'_2$) при $z = 0$]. Изменение фазы вдоль преломленного луча (третий этап) равно $k_2 L_2$. При определении амплитуды поля на четвертом этапе следует рассмотреть лучевые трубки для падающего и преломленного полей, образованные близко идущими лучами (27, б). Отношение интенсивностей поля в точке P и на границе диэлектрика пропорционально отношению сечений лучевых трубок в этих точках, равному

$$\frac{dA_2}{dA} = \frac{2\pi |z'| \operatorname{tg} \theta_1 ds_2}{2\pi \rho ds}, \quad (9a)$$

где ds_2 и ds — длины элементов сечений в плоскости ρz , различающиеся из-за конического расширения лучевой трубки; при выводе выражения (9a) учтена симметрия конфигурации лучей относительно оси z . В результате геометрикооптическое приближение решения для точки наблюдения (ρ, z) в области 2 имеет вид [гл. 1, § 7, формула (37)] [10]

$$G'_{20}|_{\text{онт}} = \left\{ \frac{e^{ik_1 L_1}}{4\pi L_1} [1 - \Gamma(k_1 \sin \theta_1)] \right\} e^{ik_2 L_2} \sqrt{\frac{dA_2}{dA}}. \quad (9б)$$

Выражение в фигурных скобках соответствует полю G'_{20} на границе диэлектрика, а остальные множители учитывают изменение фазы и амплитуды поля вдоль преломленного луча.

Для доказательства эквивалентности выражений (9) и (9б) можно воспользоваться следующими геометрическими соотношениями, которые легко выводятся из фиг. 27, б:

$$ds = ds_2 + L_2 d\theta_2 = (L_2 + L_{2f}) d\theta_2, \quad (9в)$$

$$ds_2 = ds_1 \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} = L_1 \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} d\theta_1 = L_{2f} d\theta_2;$$

учитывая также, что $d\theta_1/d\theta_2 = (k_2/k_1) (\cos \theta_2/\cos \theta_1)$ в соответствии с законом Снеллиуса ($k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2$), имеем

$$\frac{ds_2}{ds} = \frac{L_{2f}}{L_2 + L_{2f}}, \quad L_{2f} = L_1 \frac{k_2}{k_1} \frac{\cos^2 \theta_2}{\cos^2 \theta_1}, \quad (9г)$$

где L_{2f} — длина лучевой трубки для преломленного поля от мнимого фокуса F до границы диэлектрика. Подставив выражения (9г) и (9а) в формулу (9б), приходим к выражению (9). Тем самым мы показали, что вычисление отраженного и преломленного полей методом перевала в первом порядке приводит к тем же результатам, что и вычисления на основе представлений геометрической оптики.

В случае когда в обоих диэлектриках отсутствуют потери, причем источник находится в более плотной среде (т. е. $\epsilon_1 > \epsilon_2$ или $\epsilon < 1$ и ϵ — действительная величина), дифракционное поле G'_{sb} , описываемое формулой (6), также допускает интересную лучевую интерпретацию [10]. Фазу экспоненциального множителя $k_1 \sqrt{1 - \epsilon} |z + z'| + k_1 \sqrt{\epsilon} \rho$ можно записать в виде $k_1 (L_1 + L_3) + k_2 L_2$, где L_1, L_2 и L_3 — расстояния, указанные на фиг. 28, б. В возможности такой записи нетрудно убедиться, если учесть соотношения $k_2 = k_1 \sqrt{\epsilon}, \rho = (L_1 + L_3) \sin \hat{\theta} + L_2, |z + z'| = (L_1 + L_3) \cos \hat{\theta}$, где $\hat{\theta} = \arcsin \sqrt{\epsilon}$ — угол полного внутреннего отражения при действительных $\epsilon < 1$ [формула (6a)]. Таким образом, фазу волны, соответствующей вкладу разреза, можно рассматривать как фазу луча, который распространяется от источника до границы диэлектрика под углом $\hat{\theta}$, преломляется и идет параллельно границе во второй среде (соответствующее изменение фазы $L_2 k_2$), выходит из второй среды под углом $\hat{\theta}$ и попадает в точку наблюдения. Имея в виду характер распространения этой волны вдоль границы диэлектрика, ее называют «боковой» волной. С учетом того, что $L_2 = \rho - |z + z'| \operatorname{tg} \hat{\theta}$ ($\sin \hat{\theta} = \sqrt{\epsilon}, \cos \hat{\theta} = \sqrt{1 - \epsilon}$), часть поля (6), зависящую от координат, можно записать в виде

$$G'_{sb} \sim \frac{e^{i(k_1 L_1 + k_2 L_2 + k_3 L_3)}}{\sqrt{\rho/k_1} (k_1 L_2)^{1/2}} U(\theta - \hat{\theta}). \quad (10)$$

Область существования функции G'_{sb} совпадает, очевидно, с областью, показанной на фиг. 28, б, когда боковой сегмент L_2

аргумента [§ 3, формула (13a)], интеграл, входящий в функцию G'_s , можно преобразовать к виду (14), где

$$f(w) = -\frac{e^{i\pi/4}}{8\pi} \sqrt{\frac{2k_1}{\pi r \sin \theta}} \sqrt{\sin w} \Gamma(k_1 \sin w), \quad \bar{\alpha} = \theta, \quad L = r. \quad (14)$$

Затем методом перевала можно вывести при действительных k_1 асимптотические разложения типа (15) и (16) из § 3; в частности, эквивалентом асимптотической формулы (16a) из § 3 служит выражение (5).

Для учета возможных вкладов, обусловленных различными особыми точками подынтегрального выражения, следует определить их расположение на комплексной плоскости. Исходный контур интегрирования на комплексной плоскости w показан на фиг. 30, а. Помимо точки ветвления $w = 0$, обусловленной аналитическими свойствами функции Ханкеля, имеются точка ветвления и полюс, связанные с особенностями коэффициента отражения $\Gamma(k_1 \sin w)$. Будем считать, что μ и ϵ_1 — действительные величины, а в среде 2 имеются потери, т. е. при временной зависимости вида $\exp(-i\omega t)$ мы имеем $\epsilon_2 = \epsilon'_2 + i\epsilon''_2$, где ϵ'_2 и ϵ''_2 — действительные величины, причем $\epsilon'_2 > 0$, $\epsilon''_2 \geq 0$. В этом случае

$$\epsilon = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = |\epsilon| e^{i2\psi}, \quad 0 \leq \psi < \pi/4, \quad (15a)$$

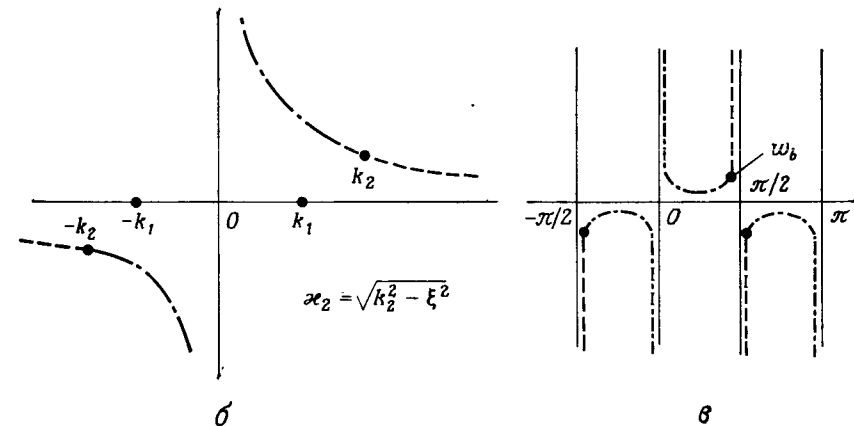
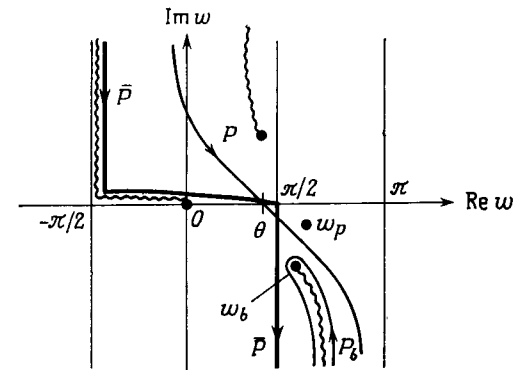
$$\sqrt{\epsilon} = \sqrt{|\epsilon|} e^{i\psi}. \quad (15b)$$

Если представить точки ветвления $w_b \pm \arcsin \sqrt{\epsilon}$ в виде $w_b = w_{br} + iw_{bi}$, где w_{br} и w_{bi} — действительные величины, то в соответствии с соотношением

$$\begin{aligned} \sin w_b &= \sin w_{br} \operatorname{ch} w_{bi} + i \cos w_{br} \operatorname{sh} w_{bi} = \\ &= \sqrt{|\epsilon|} \cos \psi + i \sqrt{|\epsilon|} \sin \psi \end{aligned} \quad (15в)$$

они расположены так, как показано на фиг. 30, а. При $\psi \rightarrow 0$ и $|\epsilon| > 1$ мы имеем $w_b \rightarrow \pi/2 + iw_{bi}$, а при $\psi \rightarrow 0$ и $|\epsilon| < 1$ мы имеем $w_{bi} \rightarrow 0$. Напомним, что на верхнем листе четырехлистной поверхности Римана, изображенной на фиг. 8, а, выполняются соотношения $k_N = k_2 = k_1 \sqrt{\epsilon}$, $\sqrt{k_1^2 - \xi^2} \equiv k_1$ и $\sqrt{k_1^2 \epsilon - \xi^2} \equiv k_1 \sqrt{\epsilon}$ при $\xi = 0$. В соответствии с этим на верхнем листе двулистной римановой поверхности, изображенном на фиг. 30, а, имеем $\sqrt{\epsilon - \sin^2 w} \equiv \sqrt{\epsilon}$ при $w = 0$ (т. е. корень квадратный считается положительным, если подкоренное выражение положительно). Поведение функций $\operatorname{Re} \kappa_2$ и $\operatorname{Im} \kappa_2$ ясно из фиг. 30, б и в, где изображены линии $\operatorname{Re} \kappa_2 = 0$ и $\operatorname{Im} \kappa_2 = 0$. Поскольку знак функции $\operatorname{Re} \kappa_2$ ($\operatorname{Im} \kappa_2$) может измениться лишь при пересечении линии

$\operatorname{Re} \kappa_2 = 0$ ($\operatorname{Im} \kappa_2 = 0$), при проведении разрезов вдоль этих линий знак функции $\operatorname{Re} \kappa_2$ ($\operatorname{Im} \kappa_2$) одинаков на всем верхнем листе двулистной римановой поверхности. Что же касается знака



Фиг. 30. Контур интегрирования и особые точки.

а — контур интегрирования на комплексной плоскости w ; б — особые точки на комплексной плоскости ξ ; в — особые точки на комплексной плоскости w ($\xi = k_1 \sin w$). Штриховые линии соответствуют равенству $\operatorname{Re} \kappa_2 = 0$, штрих-пунктирные — равенству $\operatorname{Im} \kappa_2 = 0$.

функции $\operatorname{Im} \kappa_2$ ($\operatorname{Re} \kappa_2$), то он меняется при каждом пересечении линии $\operatorname{Im} \kappa_2 = 0$ ($\operatorname{Re} \kappa_2 = 0$).

Полюсы w_p подынтегральной функции $\Gamma(k_1 \sin w)$ [формула (3д)] удовлетворяют уравнению

$$\sqrt{\epsilon - \sin^2 w_p} = -\epsilon \cos w_p. \quad (16)$$

Выбор знака в представлении (20в) согласуется с равенством (20б), в чем нетрудно убедиться, если учесть, что на левом берегу деформированного разреза на фиг. 30, а мы имеем $s > 0$ и $\arg(\omega - \omega_b) = \arg d\omega$ вблизи точки ω_b . В результате гочка ветвления $\omega = \omega_b$ отображается в регулярную точку $s = 0$ на плоскости s . Поскольку

$$\sqrt{\epsilon - \sin^2 \omega} = \sqrt{\omega - \omega_b} \sqrt{-\sin 2\omega_b} [1 + O(\omega - \omega_b)], \quad (21a)$$

имеем

$$\Gamma(k_1 \sin \omega) = -1 - \frac{2s}{\epsilon \cos \omega_b} \left[\frac{-\sin 2\omega_b}{i \sin(\omega_b - \theta)} \right]^{-1/2} + O(s^2). \quad (21б)$$

Напомним, что $\sqrt{\epsilon - \sin^2 \omega} > 0$ при $\sin \omega < \sqrt{\epsilon}$ (т. е. при $\omega = \pi/2 - i|\omega_i|$, $|\omega_i| < |\omega_{bi}|$). Правая часть равенства (21а) удовлетворяет этому условию, так как $-\sin 2\omega_b = -i|\sin 2\omega_{bi}|$, причем $\omega - \omega_b = i[|\omega_{bi}| - |\omega_i|]$. И наконец,

$$\sqrt{\sin \omega} = \sqrt{\sin \omega_b} + O(s^2). \quad (21в)$$

Полученные результаты остаются в силе и при комплексных ϵ , если квадратные корни определены так, что переходят в приведенные выше в пределе при $\arg \epsilon \rightarrow 0$.

Подставив выражения (21) в формулу (19а), нетрудно убедиться, что $G(0) = 0$. Поскольку в интеграл (19) дают вклад лишь четные степени степенного разложения $G(s)$ вблизи точки $s = 0$, из выражения (17) гл. 4, § 2, следует, что первый член асимптотического разложения I_b при больших значениях $k_1 r$ имеет вид

$$I_b \sim \frac{e^{ik_1 r \cos(\omega_b - \theta)}}{(k_1 r)^{3/2}} \frac{2\sqrt{2\pi} e^{-i\pi/4} \sin \omega_b}{\epsilon \sqrt{\cos \omega_b} [\sin(\omega_b - \theta)]^{1/2}}; \quad (22)$$

полученный результат совпадает с формулой (6), так как $\sin \omega_b = \sqrt{\epsilon}$, $\cos \omega_b = \sqrt{1 - \epsilon}$. Все сказанное относится к случаю $|\epsilon| > 1$. При $|\epsilon| < 1$ точка ветвления ω_{b1} на фиг. 30, а смещается к действительной оси в интервале $\pi/2 < \omega_r < \pi$, а точка ω_{b2} — к действительной оси в интервале $0 < \omega_r < \pi/2$. Таким образом, существенной при вычислении интеграла особенностью становится точка ветвления ω_{b2} и следует учитывать ее вклад в интеграл.

Отметим, что выражение (22) теряет силу при $\theta \rightarrow \omega_b$ (т. е. при $\theta \rightarrow \hat{\theta}$ в случае $\epsilon < 1$). Это объясняется тем, что точка ветвления оказывается вблизи от седловой точки $\omega = \theta$, когда равенства (20) и (21) не выполняются. Поведение интеграла I_b при $\theta = \omega_b$ нетрудно выяснить. Воспользовавшись преобразова-

нием (18) к переменной s , находим, что производная $d\omega/ds$ конечна при $s = 0$, $s \propto \omega - \theta$ и интеграл I_b пропорционален $e^{ik_1 r} \int_0^\infty e^{-k_1 r s^2} \sqrt{s} ds$, откуда, переходя к переменной $t = -k_1 r s^2$,

получаем для I_b оценку $e^{ik_1 r} (k_1 r)^{-3/4}$. Полный переход от радиальной зависимости вида $(k_1 r)^{-3/2}$ при $\theta \neq \omega_b$ к зависимости вида $(k_1 r)^{-3/4}$ при $\theta = \omega_b$ можно представить посредством функций параболического цилиндра (гл. 4, § 4, п. «в», и гл. 7, § 5, п. «г»). Подчеркнем, что при вычислении методом перевала интеграла для отраженного поля влияние точки ветвления проявляется при $\theta \rightarrow \omega_b$ сходным образом, но геометрооптическое приближение (5) остается верным; эффект проявляется в членах более высокого порядка $O(1/k_1^2 r^2)$.

Полюс подынтегрального выражения (16а) в точке $\omega = \omega_p$ не пересекается при переходе к пути наискорейшего спуска, но его близость к седловой точке в случае $\theta \approx \pi/2$ и $|\epsilon| \gg 1$ оказывает влияние на результат вычислений методом перевала; как отмечалось ранее, влияние точки ветвления при этих условиях незначительно. Чтобы дать читателю представление о некоторых трудностях, рассмотрим полученное методом перевала приближенное выражение для коэффициента отражения (5), справедливое при $\theta \approx \pi/2$:

$$\Gamma(k_1 \sin \theta) \approx \frac{1 - \sqrt{\epsilon} \cos \theta}{1 + \sqrt{\epsilon} \cos \theta} \approx -1 + \frac{2}{\sqrt{\epsilon} \cos \theta}, \quad |\epsilon| \gg 1, \quad (23)$$

где последнее равенство выполняется лишь при условии $\sqrt{|\epsilon|} \cos \theta \gg 1$. Если $\theta \rightarrow \pi/2$, т. е. источник или точка наблюдения расположены вблизи границы, коэффициент отражения (23) очень быстро изменяется от $\Gamma \approx -1$ до $\Gamma \approx +1$ и потому функцию $\Gamma(k_1 \sin \omega)$, входящую в подынтегральное выражение в формуле (3б), нельзя считать медленно меняющейся в окрестности седловой точки $\omega = \theta \approx \pi/2$. Фактически и числитель и знаменатель функции $\Gamma(k_1 \sin \omega)$ могут стать очень малыми. Чтобы обойти эту трудность в числителе, удобно воспользоваться представлением

$$\Gamma(k_1 \sin \omega) = -1 + \hat{\Gamma}(k_1 \sin \omega), \quad (24)$$

$$\hat{\Gamma}(k_1 \sin \omega) = \frac{2\sqrt{\epsilon - \sin^2 \omega}}{\sqrt{\epsilon - \sin^2 \omega} + \epsilon \cos \omega}.$$

Вклад в интеграл (3б) первого члена этого выражения, т. е. -1 , есть функция Грина свободного пространства, отнесенная к точке изображения. Второе слагаемое в формуле (24), функция $\hat{\Gamma}$, имеет полюс в точке $\omega = \omega_p$, определяющийся уравнением

Заметим, что функции G и \mathcal{P} удовлетворяют одинаковым условиям на границе диэлектриков, нормальной к оси z , так как они связаны поперечным оператором: $-\nabla_t^2 \mathcal{P} = G$. В цилиндрических координатах функция $\nabla_t^2 \mathcal{P}$ при $z < 0$ и $\rho' = 0$ выражается интегралом [§ 2, формула (12)]

$$\nabla_t^2 \mathcal{P}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \rho_0 \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_1^{(1)}(\xi \rho)}{\sqrt{k_1^2 - \xi^2}} \left\{ \exp(i \sqrt{k_1^2 - \xi^2} |z - z'|) - \right. \\ \left. - f(\xi) \exp[-i \sqrt{k_1^2 - \xi^2} (z + z')] \right\} d\xi, \quad (31)$$

где для E -волн $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ и

$$f(\xi) = \Gamma'(\xi) = \frac{\sqrt{k_1^2 \epsilon - \xi^2} - \epsilon \sqrt{k_1^2 - \xi^2}}{\sqrt{k_1^2 \epsilon - \xi^2} + \epsilon \sqrt{k_1^2 - \xi^2}}, \quad \epsilon = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}, \quad (31a)$$

а для H -волн $\mathcal{P} = \mathcal{P}''$ и

$$f(\xi) = -\Gamma''(\xi) = \frac{\sqrt{k_1^2 \epsilon - \xi^2} - \sqrt{k_1^2 - \xi^2}}{\sqrt{k_1^2 \epsilon - \xi^2} + \sqrt{k_1^2 - \xi^2}}, \quad (31b)$$

причем $k_{1,2}^2 = \omega^2 \mu \epsilon_{1,2}$.

Контур интегрирования следует проводить на верхней листе римановой поверхности, где по определению все квадратные корни имеют положительную мнимую часть (фиг. 8, а). Величина $\nabla_t^2 \mathcal{P}_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ также определяется формулой (31), где выражение в фигурных скобках следует заменить следующим образом:

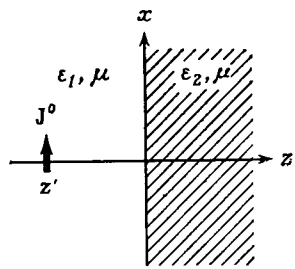
$$\{ \} \rightarrow [1 - f(\xi)] \times \\ \times \exp(i \sqrt{k_2^2 - \xi^2} z - i \sqrt{k_1^2 - \xi^2} z'). \quad (32)$$

Решение для неограниченного диэлектрика с волновым числом k_1 , описываемое функцией $\nabla_t^2 \mathcal{P}_1$, которая определяется по формуле (31) с учетом

Фиг. 31. Поперечный элементарный ток возле плоской границы диэлектрика.

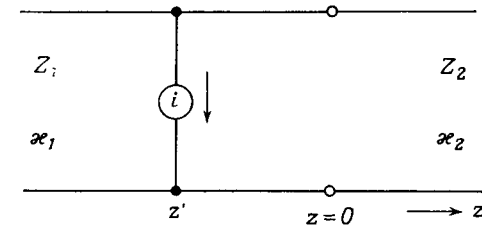
лишь одного первого слагаемого в квадратных скобках, можно найти в замкнутом виде [§ 4, формула (196)]; как и в выражении (3), влияние границы в области 1 описывается функцией $\nabla_t^2 \mathcal{P}_s$, представленной в виде интеграла. Можно также заметить, что поле в неограниченном диэлектрике (первичное) можно вычислить по более простым формулам

$$\mathbf{H}_{1f} = J^0 \nabla \times \mathbf{x}_0 G_{f1}, \quad \mathbf{E}_{1f} = \frac{J^0}{i\omega \epsilon_1} \nabla \times \nabla \times \mathbf{x}_0 G_{f1}, \quad (33)$$



которые следуют из выражений (1) и (4в) § 2 и учитывают, что элемент тока возбуждает в неограниченной области лишь E -волны относительно направления оси элемента. Функция G_{f1} определяется согласно формуле (3).

Методы, изложенные в п. «а», позволяют получить асимптотическое разложение интегралов, представляющих функции $\nabla_t^2 \mathcal{P}'_s$ и $\nabla_t^2 \mathcal{P}''_s$; при этом окончательное выражение для поля содержит волны такого же вида, как и в случае возбуждения продольным диполем.



Фиг. 32. Эквивалентная схема для определения собственных волн (E - и H -типов).

Для вывода выражений (31), кроме общего соотношения (12) из § 2, требуется знать функции Грина $g'_{zi}(z, z')$ для электрических волн и $g''_{zi}(z, z')$ для магнитных волн. На фиг. 32 приведена эквивалентная схема рассмотренной задачи, а функция Грина для собственных волн g'_{zi} дается формулами (11) — (13). Функция Грина для H -волн удовлетворяет уравнениям (11), где следует произвести замену $g_z \rightarrow g''_z$ и записать второе из равенств (11в) в виде $dg''_{z1}/dz = dg''_{z2}/dz$ при $z = 0$, так как магнитная проницаемость μ одинакова для обеих областей на фиг. 31. Коэффициент отражения $\Gamma''(\xi)$ для магнитных волн определяется формулой

$$\Gamma''(\xi) = \frac{Z''_2 - Z'_1}{Z''_2 + Z'_1}, \quad (34)$$

которая с учетом соотношений $Z''_{1,2} = \omega \mu / \chi''_{1,2}$, $\chi''_{1,2} = \sqrt{k_{1,2}^2 - \xi^2}$ совпадает с выражением (31б).

Поле, возбуждаемое горизонтальным диполем, исследовал несколько иным способом Зоммерфельд [7, разд. 33; 11, гл. 1], использовавший для его описания вектор Герца $\Pi = \mathbf{x}_0 \Pi_x + \mathbf{z}_0 \Pi_z$, а не введенные выше потенциалы, описывающие E - и H -волны в направлении оси z .

§ 2 по собственным волнам прямоугольного волновода [15]. При временной зависимости типа $\exp(j\omega t)$ соответствующий аналог интегрального представления (3б) имеет вид

$$G'_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \frac{j}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \frac{e^{-j\xi x - j\eta y - j\kappa_1 Z}}{\kappa_1} \Gamma(\kappa_1, \kappa_2), \quad (40)$$

где $Z = |z + z'|$, а

$$\Gamma(\kappa_1, \kappa_2) = -\frac{\epsilon_2 \kappa_1 - \epsilon_1 \kappa_2}{\epsilon_2 \kappa_1 + \epsilon_1 \kappa_2}, \quad \kappa_{1,2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_{1,2}^2} - \xi^2 - \eta^2}, \quad (40a)$$

$$\text{Im } \kappa_{1,2} \leq 0.$$

Положим $\omega \rightarrow -js$, $s > 0$ и введем изменение масштабов $\xi = \alpha's$, $\eta = \beta's$; последнее позволяет устранить зависимость величины Γ от s , а зависимость от s показателя экспоненты свести к явному множителю:

$$G'_s = -\frac{s}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{s(-j\alpha'x - j\beta'y - \gamma_1'Z)}}{\gamma_1'} \Gamma(\gamma_1', \gamma_2') d\alpha' d\beta', \quad (41)$$

где

$$\gamma_{1,2}' = \sqrt{\frac{1}{c_{1,2}^2} + \alpha'^2 + \beta'^2}, \quad \text{Re } \gamma_{1,2}' \geq 0. \quad (41a)$$

Введем теперь цилиндрические координаты (ρ, φ) в плоскости xy так, чтобы вектор $x_0\alpha' + y_0\beta'$ совпадал по направлению с радиус-вектором $\rho = \rho(x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi) \equiv x_0x + y_0y$:

$$\alpha' = \alpha \cos \varphi - \beta \sin \varphi, \quad \beta' = \alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi. \quad (42)$$

В результате имеем

$$\alpha'x + \beta'y = \alpha\rho, \quad \alpha'^2 + \beta'^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad d\alpha' d\beta' = d\alpha d\beta, \quad (42a)$$

и выражение (41) принимает вид

$$G'_s = -\frac{s}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{s(-j\alpha\rho - \gamma_1 Z)}}{\gamma_1} \Gamma(\gamma_1, \gamma_2) d\alpha, \quad (43)$$

где

$$\gamma_{1,2} = \sqrt{\alpha^2 + \Omega_{1,2}^2}, \quad \Omega_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{c_{1,2}^2} + \beta^2}, \quad (43a)$$

$$\text{Re } \gamma_{1,2} \geq 0, \quad \Omega_{1,2} > 0.$$

Интеграл по α может быть представлен в виде, соответствующем формуле (20) из § 2. Для этого прежде всего произведем замену

$$\alpha = \Omega_1 \text{sh } \chi, \quad (44)$$

откуда $\gamma_1 = \Omega_1 \text{ch } \chi$. Переходя затем к сферическим координатам (r, θ) , по формулам $\rho = r \sin \theta$, $Z = r \cos \theta$, $0 < \theta < \pi/2$, получаем

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-s(j\alpha\rho + \gamma_1 Z)}}{\gamma_1} \Gamma(\gamma_1, \gamma_2) d\alpha =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sr\Omega_1 \text{ch}(x + j\theta)} \Gamma(\gamma_1, \gamma_2) d\chi. \quad (45)$$

Полагая $\chi = -j\omega$, имеем

$$I = -j \int_{-j\infty}^{j\infty} e^{-sr\Omega_1 \cos(\omega - \theta)} \Gamma(\omega) d\omega, \quad (45a)$$

$$\Gamma(\omega) = \frac{\epsilon_2 \cos \omega - \epsilon_1 \sqrt{\Omega_2^2/\Omega_1^2 - \sin^2 \omega}}{\epsilon_2 \cos \omega + \epsilon_1 \sqrt{\Omega_2^2/\Omega_1^2 - \sin^2 \omega}}$$

или, что эквивалентно,

$$I = -j \int_{-j\infty}^{j\infty} e^{-sr\Omega_1 \cos \omega} \Gamma(\omega + \theta) d\omega. \quad (46b)$$

Переход от представления (46a) к представлению (46b) допустим в случае, когда функция Γ не имеет особых точек в полосе $0 < |\text{Re } \omega| < \pi/2$. При $\Omega_1 < \Omega_2$ (т. е. при $\epsilon_2 > \epsilon_1$) подынтегральная функция имеет точки ветвления ω_b , лежащие на линиях $\text{Re } \omega = \pm\pi/2$. Полюсы ω_p функции Γ определяются соотношением

$$\cos \omega_p = -\sqrt{\frac{\Omega_2^2/\Omega_1^2 - 1}{\epsilon - 1}}, \quad \epsilon = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{c_1^2}{c_2^2}, \quad (47)$$

причем величина $\cos \omega_p$ действительна при $\epsilon > 1$ и должна быть выбрана отрицательной, поскольку $\sqrt{(\Omega_2/\Omega_1)^2 - \sin^2 \omega} > 0$ при положительном подкоренном выражении. Следовательно, полюсы также расположены вне области $|\text{Re } \omega| < \pi/2$ и выражение (46b) справедливо при $0 < \theta < \pi/2$, если $\epsilon > 1$.

Как показывают асимптотические вычисления при больших $k_1 R$, где R — расстояние от источника-изображения (фиг. 33), для \bar{G}_s справедлива следующая приближенная формула:

$$\bar{G}_s = I_s + U(\phi - \hat{\phi}) I_b; \quad (57)$$

здесь U — единичная ступенчатая функция, а I_s — асимптотическое значение интеграла (54), найденное методом перевала:

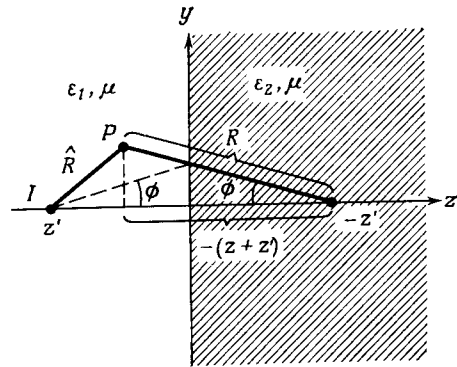
$$I_s \sim \frac{i}{4\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{k_1 R}} e^{i(k_1 R - \pi/4)} \Gamma''(k_1 \sin \phi) \left[1 + O\left(\frac{1}{k_1 R}\right) \right], \quad (57a)$$

$$\Gamma''(k_1 \sin \phi) = \frac{\cos \phi - \sqrt{\epsilon - \sin^2 \phi}}{\cos \phi + \sqrt{\epsilon - \sin^2 \phi}}. \quad (57b)$$

Вклад I_b точки ветвления в интеграл таков:

$$I_b \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp[ik_1(\sqrt{1-\epsilon}|z+z'| + \sqrt{\epsilon}y) + i\pi/4]}{[k_1(\sqrt{\epsilon}|z+z'| - \sqrt{1-\epsilon}y)]^{1/2}} \left(\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\right)^{1/4}. \quad (57b)$$

Величина $\hat{\phi}$ — угол, соответствующий формуле (6a), а ϕ — полярный угол, показанный на фиг. 33 [см. также формулу (10) и фиг. 27].



Фиг. 33. Линейный ток, параллельный плоской границе диэлектрика.

Если параметр $k_1 \hat{R}$ тоже велик, то можно воспользоваться асимптотической формой функции Грина в свободном пространстве [§ 3, формула (13б)] и представить \bar{G}_1 в виде

$$\bar{G}_1 \sim \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{ik_1 \hat{R}}}{\sqrt{k_1 \hat{R}}} + \Gamma''(k_1 \sin \phi) \frac{e^{ik_1 R}}{\sqrt{k_1 R}} \right] \left[1 + O\left(\frac{1}{k_1 R}\right) + O\left(\frac{1}{k_1 \hat{R}}\right) \right] + U(\phi - \hat{\phi}) I_b, \quad k_1 \hat{R} \gg 1, \quad k_1 R \gg 1. \quad (58)$$

Первая группа членов в выражении (58) представляет собой двумерное (цилиндрическая волна) поле в приближении геометрической оптики, а слабое, пропорциональное I_b , можно интерпретировать как поле боковой волны [см. также т. 1, фиг. 30, и гл. 1, § 7, формулы (64б) и (64в)]. Относительная величина этих вкладов в поле такая же, как и в случае продольного диполя, рассмотренном в § 5, п. «а». Вклад, обусловленный интегралом по разрезу, имеет порядок величины $O[(k_1 R)^{-3/2}]$ и потому, как правило, меньше геометрического поля; исключение составляет случай действительных ϵ и $\phi \rightarrow \pi/2$ (касательное падение), когда $\hat{R} \rightarrow R$, а $\Gamma''(k_1) = -1$. В этом случае все поле — порядка $O[(k_1 R)^{-3/2}]$ и для определения \bar{G} следует проводить асимптотическое разложение функций G_{j1} и G_s с учетом членов следующего порядка малости. Высшие члены асимптотического представления G_{j1} можно найти по формуле (37) из § 4. Для вычисления интеграла (54б) методом перевала с учетом членов более высокого порядка можно перейти к новой переменной по формуле $\cos(\omega - \phi) = 1 + is^2$, $-\infty < s < \infty$ и воспользоваться выражениями (17) из гл. 4, § 2, а также (2в) и (6в) из гл. 4, приложение 1.

Подчеркнем, что коэффициент Γ'' [формула (57б)] при $0 \leq \phi \leq \pi/2$ регулярен, даже если $|\epsilon| \gg 1$, и, следовательно, поле, возбуждаемое электрическим линейным источником, не обладает такими особенностями, как в формулах (7) и (8).

Подробности вычислений

Выражения для полей (56) можно вывести аналогично формулам (31) из § 4. Поскольку электрическое поле имеет лишь x -составляющую, возможны лишь магнитные волны относительно оси z и, таким образом, $\bar{G} \equiv \bar{G}''$ представляет собой двумерную функцию Грина (волны H -типа). Дифференциальные уравнения (53а) и (53б) следуют из уравнения (36) § 2 в частном случае $\partial/\partial x \equiv 0$, а граничные условия на плоскости $z = 0$ могут быть установлены так же, как в гл. 2, § 3, п. «г» [текст после формулы (36)].

Интегральные представления для \bar{G}_s выводятся из формул (13а) § 2 и (1) § 3 (с заменой $j \rightarrow -i$); при этом коэффициент отражения магнитных волн дается формулой (34). Отметим, что для описания волн H -типа пригодна эквивалентная схема, представленная на фиг. 32, так как она тоже построена для источника с поперечным электрическим током; правда, сила генератора тока i в обоих случаях должна задаваться по-разному. Интеграл, входящий в выражение (54б), по своему виду совпадает с общим интегралом (12б) из § 3 [следует лишь учесть переход

и. Импульсные поперечные электрические линейные токи

Если зависимость линейного тока (фиг. 33) от времени имеет вид

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t) = \delta(\hat{\rho} - \hat{\rho}') \hat{I}(t) \mathbf{x}_0, \quad \hat{I}(t) = I \delta(t), \quad (63)$$

то возбуждаемое им электромагнитное поле дается выражениями (56) (с заменой $i\omega \rightarrow -\partial/\partial t$):

$$\hat{E}_{x1,2} = -\mu I \frac{\partial}{\partial t} \hat{G}_{1,2}, \quad \hat{E}_y = \hat{E}_z = 0, \quad (64a)$$

$$\hat{H}_{y1,2} = I \frac{\partial}{\partial z} \hat{G}_{1,2}, \quad \hat{H}_{z1,2} = -I \frac{\partial}{\partial y} \hat{G}_{1,2}, \quad \hat{H}_x = 0, \quad (64b)$$

где $\hat{G}'' \equiv \hat{G}$ есть двумерная зависящая от времени функция Грина для магнитных волн, которая удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{\hat{c}_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \hat{G}_1(\hat{\rho}, \hat{\rho}'; t, t') = -\delta(\hat{\rho} - \hat{\rho}') \delta(t - t') \quad \text{при } z < 0, \quad (65a)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{\hat{c}_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \hat{G}_2(\hat{\rho}, \hat{\rho}'; t, t') = 0 \quad \text{при } z > 0, \quad (65b)$$

а также нулевым начальным условиями при $t < t'$ и граничным условиям

$$\hat{G}_1 = \hat{G}_2, \quad \frac{\partial}{\partial z} \hat{G}_1 = \frac{\partial}{\partial z} \hat{G}_2 \quad \text{при } z = 0. \quad (65в)$$

Скорость распространения электромагнитных волн в двух средах такова: $\hat{c}_{1,2} = (\mu \epsilon_{1,2})^{-1/2}$; кроме того, $\hat{\rho} = (y, z)$.

Решение в области $z < 0$ в случае $t' = 0$ можно представить в виде

$$\hat{G}_1(\hat{\rho}, \hat{\rho}'; t, t') = \hat{G}_{f1}(\hat{\rho}, \hat{\rho}'; t, t') + \hat{G}_s(\hat{\rho}, \hat{\rho}'; t, t'), \quad (66)$$

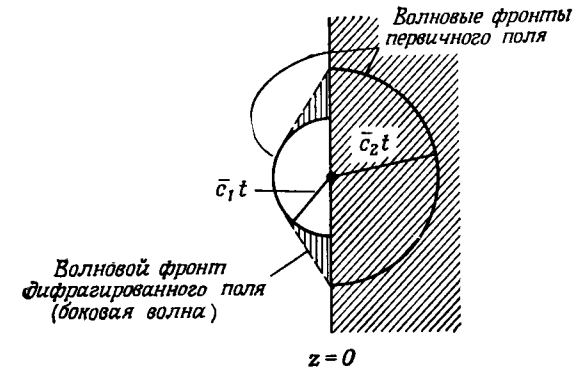
где \hat{G}_{f1} — функция Грина для безграничной среды 1 [§ 4, формула (42) с заменой $\bar{c} \rightarrow \hat{c}_1$, $\hat{\rho} \rightarrow \hat{R}$; см. фиг. 33], а \hat{G}_s — функция Грина, которая имеет вид

$$\hat{G}_s = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{\text{Re } \Gamma[\phi + j \text{Arch}(\hat{c}_1 t/R)]}{\sqrt{t^2 - R^2/\hat{c}_1^2}} & \text{при } t > \frac{R}{\hat{c}_1}, \\ 0 & \text{при } t < \frac{R}{\hat{c}_1}, \end{cases} \quad (67a)$$

где

$$\Gamma(\omega) = \frac{\cos \omega - \sqrt{\epsilon - \sin^2 \omega}}{\cos \omega + \sqrt{\epsilon - \sin^2 \omega}}, \quad \epsilon = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{\hat{c}_1^2}{\hat{c}_2^2}. \quad (67b)$$

При $t' \neq 0$ следует в этих формулах заменить t величиной $t - t'$. Здесь R и ϕ — полярные координаты, отсчитываемые от изображения источника (фиг. 33), и принято, что диэлектрические проницаемости $\epsilon_{1,2}$ не зависят от частоты, причем $\epsilon_2 > \epsilon_1$. Поэтому при $\epsilon_2 > \epsilon_1$ поле, возбуждаемое в точке наблюдения (y, z) , $z < 0$, импульсным источником, расположенным в точке $(0, z')$, $z' < 0$, равно сумме прямой волны \hat{G}_{f1} и отраженной волны \hat{G}_s ; амплитуда последней равна $\text{Re } \Gamma$, и ее можно рассматривать как



Фиг. 34. Волновые фронты в случае, когда источник находится на границе диэлектрика. В область, отмеченную вертикальной штриховкой, сначала приходит дифрагировавшая (боковая) волна, распространяющаяся так, как показано на фиг. 28.

волну, испущенную источником-изображением, находящимся в точке $(0, -z')$ в среде с фазовой скоростью волны \hat{c}_1 . При $\epsilon_1 > \epsilon_2$ возможен дополнительный вклад в поле, соответствующий нестационарному аналогу боковой волны, представленной на фиг. 28 (см. также фиг. 34).

Подробности вычислений

Решение (54б) для монохроматической функции \bar{G}_s по форме совпадает с общим интегралом (20) из § 2 (если произвести в нем замену $j \rightarrow -i$), так что результат (67) для нестационарного случая сразу следует из выражений (19) и (23) § 2. При принятом ограничении $\epsilon_2 > \epsilon_1$ (т. е. при $\epsilon > 1$) точки ветвления $\omega_b = \pm \arcsin \sqrt{\epsilon}$ функции $\Gamma(k_1 \sin \omega)$ не пересекаются в процессе деформации контура, в результате которого мы приходим к интегралу типа (21) из § 2; в выражении (67в) для краткости функция $\Gamma(k_1 \sin \omega)$ обозначена через $\Gamma(\omega)$.

Если $\epsilon < 1$, то точки ветвления лежат на действительной оси в интервале $|\text{Re } \omega| < \pi/2$ и их учет дает боковую волну (фиг. 28

выкладок записать заключенную в квадратные скобки часть выражения (73б) в виде $ak_{fi}^2(\eta^2 + f)[b(\eta^2 + g)]^{-1}$, где a, b, f и g — величины, не зависящие от η ; в результате действительная часть мощности, переносимой полем, которое представляет собой суперпозицию E - и H -волн, характеризуемую индексом η , принимает вид

$$\vec{P}_i \equiv \vec{P}_\eta = \frac{q^2 \omega \mu_0}{2\pi k_0^2 (\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_1)} \sqrt{k_0^2 \left(\bar{\epsilon}_2 - \frac{1}{\beta^2}\right) - \eta^2} \frac{\eta^2 + f}{\eta^2 + g} \times \exp\left[-2 \sqrt{\eta^2 + k_0^2 \left(\frac{1}{\beta^2} - \bar{\epsilon}_1\right)} |z'|\right], \quad (74)$$

где $k_0 = \omega/c$,

$$f = \frac{k_0^2 \bar{\epsilon}_2 (1 - \bar{\epsilon}_1 \beta^2)}{\beta^2 (\bar{\epsilon}_1 + \bar{\epsilon}_2)}, \quad g = \frac{k_0^2 [\bar{\epsilon}_2 (1 - \bar{\epsilon}_1 \beta^2) + \bar{\epsilon}_1]}{\beta^2 (\bar{\epsilon}_1 + \bar{\epsilon}_2)}, \quad \bar{\epsilon}_2 > \frac{1}{\beta^2} > \bar{\epsilon}_1. \quad (74a)$$

Полный поток энергии в область $z > 0$ в малом спектральном интервале $d\omega$ с центром на частоте ω дается выражением (34) из § 2; напомним, что интегрирование по η проводится лишь по тем значениям, при которых величины $\kappa_{1,2}$ действительны [17]:

$$W_\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\eta_0}^{\eta_0} \vec{P}_\eta d\eta = \frac{q^2 \omega \mu_0 (\bar{\epsilon}_2 - 1/\beta^2)}{2\pi^2 (\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_1)} \times \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \xi^2} \frac{\xi^2 + f}{\xi^2 + g} \exp\left[-2k_0 |z'| \sqrt{\left(\bar{\epsilon}_2 - \frac{1}{\beta^2}\right)\xi^2 + \left(\frac{1}{\beta^2} - \bar{\epsilon}_1\right)}\right] d\xi; \quad (75)$$

здесь была проведена замена переменной $\eta = \eta_0 \xi$, $\eta_0 = k_0 [\bar{\epsilon}_2 - (1/\beta^2)]^{1/2}$ и введены величины

$$\hat{f} = \frac{f}{k_0^2 (\bar{\epsilon}_2 - 1/\beta^2)}, \quad \hat{g} = \frac{g}{k_0^2 (\bar{\epsilon}_2 - 1/\beta^2)}. \quad (75a)$$

Интеграл в выражении (75) можно вычислить, если экспоненциальный множитель равен единице [17]. Это условие выполняется в случае, когда траектория заряда проходит по границе раздела диэлектриков $z' = 0$ или когда параметры задачи таковы, что выполнено неравенство $2k_0 |z'| \sqrt{\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_1} \ll 1$, $k_0 = \omega/c$. Во втором случае путем замены переменной $\xi = (\xi^2 - 1)^{-1/2}$ преобразуем выражение для энергии излучения к виду

$$W_\omega = \frac{q^2 \omega \mu_0 (\bar{\epsilon}_2 - 1/\beta^2)}{2\pi^2 (\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_1)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^2} \frac{\xi^2 (1 + \hat{f}) + \hat{f}}{\xi^2 (1 + \hat{g}) + \hat{g}}; \quad (76)$$

интеграл, входящий в это выражение, можно взять, вычислив вычеты в полюсах, расположенных в верхней или нижней полуплоскости комплексного ξ . Читатель может провести такие вычисления в качестве упражнения.

л. Поля в ограниченных областях с отрицательной действительной диэлектрической проницаемостью (монохроматический режим)

В предыдущих разделах рассматривались задачи о монохроматическом излучении в обычных диэлектрических средах, в которых действительная часть комплексной диэлектрической проницаемости считалась положительной. Но при определенных условиях действие макроскопически нейтральной ионизированной плазмы на электромагнитное поле можно характеризовать комплексной диэлектрической проницаемостью с отрицательной действительной частью [гл. 1, § 1, формула (64) при $\partial^2/\partial t^2 \rightarrow -\omega^2$, $\mathbf{a} \equiv 0$]. Влияние подобной среды на поле излучения электромагнитного источника и, в частности, эффекты, связанные с наличием поверхности раздела в случае ограниченной области, мы будем исследовать на примере поля линейного источника (59) с продольно-ориентированными электрическими токами¹⁾, расположенного в точке $\hat{\rho}' = (0, z')$, $z' < 0$, (фиг. 33). Возбуждаемые поля можно выразить через двумерную функцию Грина для E -волн $\bar{G}'(\hat{\rho}, \hat{\rho}') \equiv \bar{G}(\hat{\rho}, \hat{\rho}')$, которую для удобства представим в виде (п. «е»)

$$\bar{G}_1 = \bar{G}_{f1} + \bar{G}_s, \quad z < 0, \quad (77)$$

где \bar{G}_{f1} — функция Грина для свободного пространства, заполненного средой 1 [§ 4, формула (25)], а \bar{G}_s соответствует отраженному полю

$$\bar{G}_s = -\frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\eta y - i\kappa_1(z+z')}}{\kappa_1} \Gamma(\eta) d\eta, \quad \kappa_1 = \sqrt{k_1^2 - \eta^2}, \quad (77a)$$

причем $\Gamma(\eta) = (\epsilon_1 \kappa_2 - \epsilon_2 \kappa_1) / (\epsilon_1 \kappa_2 + \epsilon_2 \kappa_1)$ — коэффициент отражения, который дается формулой (3г). В области 2 ($z > 0$) поле описывается функцией

$$\bar{G}_2 = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta y + i\kappa_2 z - i\kappa_1 z'} \left\{ \frac{[1 - \Gamma(\eta)]}{\kappa_1} \right\} d\eta, \quad (78)$$

$$\kappa_2 = \sqrt{k_2^2 - \eta^2}, \quad \epsilon = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1},$$

¹⁾ Рассматриваемые ниже поверхностно-волновые эффекты проявляются для E -волн. Линейный ток (52) возбуждает лишь волны H -типа.

волны от координат в области 1 имеет вид

$$\bar{G}_{\text{пол}} \sim \exp \left[ik_1 \left(\frac{\sqrt{|\epsilon|}}{\sqrt{|\epsilon|-1}} \right) y \right] \exp \left[\frac{k_1(z+z')}{\sqrt{|\epsilon|-1}} \right], \quad (82)$$

$$z, z' < 0, \quad |\epsilon| > 1,$$

так что скорость ее распространения в направлении оси y меньше, чем у однородной плоской волны.

Поскольку при $\epsilon < 0$ функция κ_2 в выражении (78) — чисто мнимая при всех η , поле в области 2 экспоненциально убывает с ростом z . Поэтому представляют интерес лишь точки наблюдения вблизи границы раздела, для которых экспонента $\exp(ix_2z)$ не может быстро меняться, а носит характер амплитудного множителя. Так как асимптотическое разложение интеграла (78) легко находится при больших значениях y и z' [§ 3, формулы (19)], будем для удобства считать, что источник расположен вблизи от поверхности и что функция $\exp(-ix_1z')$ медленно меняется по сравнению с экспонентой $\exp(i\eta y)$. Если перейти к комплексной плоскости ω , произведя замену $\eta = k_1 \sin \omega$, то путь наибыстрейшего спуска P будет такой, как на фиг. 36, причем точка перевала $\omega = \pi/2$. Деформация контура \bar{P} в P проводится так, как было описано выше. Вклад интеграла по пути наибыстрейшего спуска дает поле поверхностной волны, имеющее вид

$$G_{\text{ПНС}} \propto (k_1 y)^{-1/2} \exp(ik_1 y - k_1 \sqrt{1+|\epsilon|} z), \quad k_1 y \gg 1, \quad z > 0; \quad (83)$$

в соответствии с тем, что $\Gamma(k_1 \sin \phi) \rightarrow 1$ при $\phi \rightarrow \pi/2$, вычисляемые методом перевала члены $O[(k_1 y)^{-1/2}]$ обращаются в нуль. Вкладом интеграла по разрезу также можно пренебречь, ибо он экспоненциально убывает с ростом как y , так и z . При $\epsilon < -1$ наиболее существен вклад полюса, соответствующий поверхностной волне вида

$$G_{\text{пол}} \sim \exp \left[ik_1 \left(\frac{\sqrt{|\epsilon|}}{\sqrt{|\epsilon|-1}} \right) y \right] \exp \left[-k_1 \left(\frac{|\epsilon|}{\sqrt{|\epsilon|-1}} \right) z + \frac{k_1 z'}{\sqrt{|\epsilon|-1}} \right], \quad z > 0, \quad z' < 0, \quad |\epsilon| > 1. \quad (84)$$

Как уже указывалось раньше, поле такой поверхностной волны убывает до нуля при удалении от границы в обе области.

О наличии поверхностной волны вблизи плоской границы раздела двух сред при $\epsilon < -1$ можно также заключить исходя из условий поперечного резонанса (гл. 2, § 4, п. «д»). Условие резонанса $Z_1 + Z_2 = 0$ в рассматриваемом случае принимает вид

$$\kappa_2 = -\epsilon \kappa_1, \quad \kappa_{1,2} = \sqrt{k_{1,2}^2 - \eta^2}, \quad k_2 = \sqrt{\epsilon} k_1. \quad (85)$$

Поскольку обе области простираются до $z = \pm\infty$, для собственных волн, удовлетворяющих условиям на бесконечности, должно выполняться условие $\kappa_{1,2} = i|\kappa_{1,2}|$. В этом случае уравнение (85) удовлетворяется лишь при отрицательных ϵ и при $\eta^2 > k_1^2$. При резонансных значениях η_p^2 получаем

$$\eta_p^2 = \frac{|\epsilon| k_1^2}{|\epsilon|-1}, \quad (86)$$

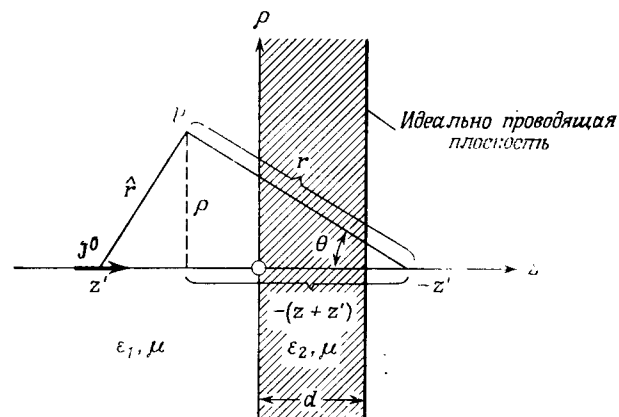
откуда в силу условия $\eta_p^2 > 0$ следует требование к диэлектрической проницаемости $\epsilon < -1$.

§ 6. МОНОХРОМАТИЧЕСКИЕ ИСТОЧНИКИ ВОЗЛЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ

а. Продольный элементарный электрический ток

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t) = I l \delta(\rho) \delta(z - z') e^{-i\omega t} \mathbf{z}_0. \quad (1)$$

Пусть, как показано на фиг. 37, продольный элементарный электрический ток с амплитудой $J^0 = Il$, где l — переменный



Фиг. 37. Продольный элементарный ток возле заземленной диэлектрической пластины.

ток, проходящий по бесконечно малому отрезку l , расположен в точке $z' < 0$ на оси z возле заземленной диэлектрической пластины. Пластина занимает область между плоскостями $z = 0$ и $z = d$, диэлектрическая и магнитная проницаемости ее ϵ_2 и μ , на границе $z = d$ расположен идеальный проводник. Свойства среды во внешней области $z < 0$ характеризуются проницаемостью ϵ_1 и μ . Возбуждаемое электромагнитное поле можно выразить

легко вычислить точно при любых значениях $k_1\rho$ [см. текст перед формулой (15)]. Полюсы ω_α , связанные с коэффициентом отражения (4а) и определяемые уравнениями (7), можно разделить на две категории:

- 1) полюсы $\omega_\alpha \equiv \omega_\nu$, соответствующие поверхностным волнам,
- 2) полюсы $\omega_\alpha \equiv \omega_\mu$, соответствующие вытекающим волнам.

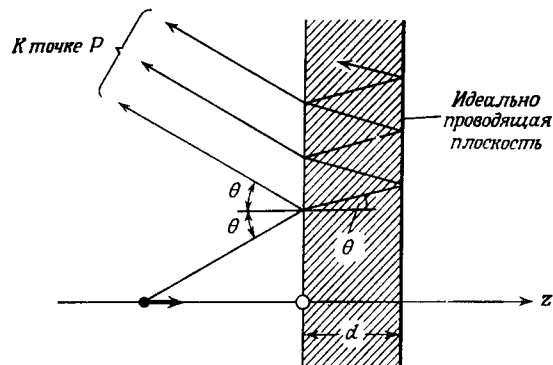
Суммы, входящие в выражение (6), дают вклад соответствующих этим полюсам вычетов в поле в дальней зоне; они появляются при углах наблюдения $\theta > \theta_\alpha$, где

$$\theta_\alpha = \operatorname{Re} \omega_\alpha - \arccos \operatorname{sch}(\operatorname{Im} \omega_\alpha), \quad \alpha = \nu, \mu. \quad (8)$$

Приведенные результаты справедливы вне переходных областей $\theta \approx \theta_\alpha$. Уточненные решения, пригодные и в переходных областях, можно найти ниже [после формулы (16)].

Замечания

Первые два слагаемых выражения (6) (не считая множителя в квадратных скобках) дают поле в приближении геометрической оптики; их можно интерпретировать точно так же, как

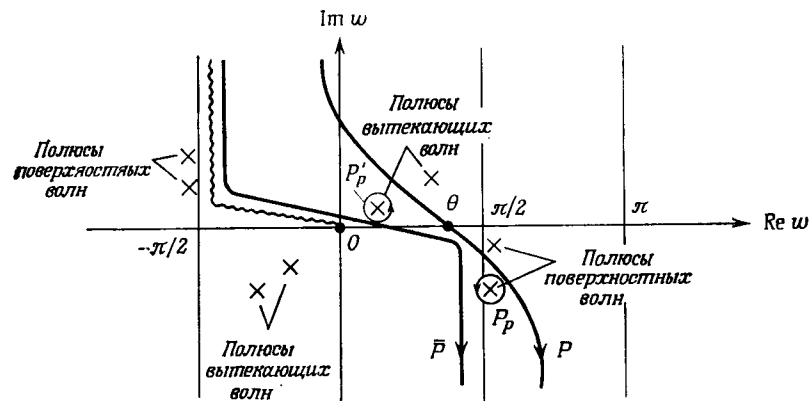


Фиг. 38. Схема хода лучей для вычисления коэффициента отражения.

в случае отражения от диэлектрического полупространства (§ 5, п. «а»), с той лишь разницей, что теперь $\Gamma(k_1 \sin \theta)$ учитывает отражение от пластины. Для сред без потерь входящий в формулу (6а) коэффициент отражения от пластины можно найти, рассмотрев многократное отражение и преломление лучей на границе диэлектрика (фиг. 38).

Остальные члены (суммы вычетов) дают дифрагированные поля, которые вносят заметный вклад при достаточно больших углах наблюдения θ . Расположение полюсов подынтегрального выражения на комплексной плоскости ω при наличии малых потерь в пластине показано на фиг. 39; в отсутствие потерь полюсы,

соответствующие поверхностным и вытекающим волнам, лежат на линиях $\operatorname{Re} \omega_\alpha = \pm \pi/2$. Заметим, что для падающего и отраженного полей мы имеем зависимость вида $1/k_1 r$ или $1/k_1 r$, т. е. такую же, как и для сферических расходящихся волн, а поверхностные и вытекающие волны ведут себя как цилиндрические волны с зависимостью от расстояния типа $1/\sqrt{k_1 r \sin \theta} = 1/\sqrt{k_1 \rho}$. Таким образом, в силу чисто геометрических соотношений поля поверхностных или вытекающих волн должны убывать



Фиг. 39. Контуры интегрирования и особые точки на комплексной плоскости ω .

медленнее, чем поле в приближении геометрической оптики. Но при оценке того или иного члена, соответствующего вычету в полюсе, следует также учесть амплитудные и экспоненциальные множители.

При действительных ϵ , больших единицы, уравнения (7) допускают конечное число решений с чисто мнимыми значениями $q = i|q|$ и действительными значениями p . Этим решениям соответствуют поверхностные волны с экспоненциальной зависимостью вида

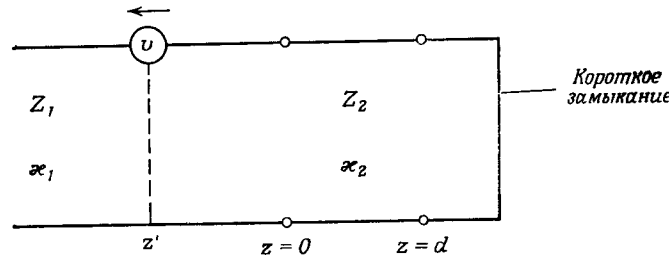
$$e^{ik_1 r \cos(\omega_\nu - \theta)} = e^{-|q||z+z'|/d} \exp[ik_1 \sqrt{1 + |q|^2/k_1^2 d^2} \rho], \quad (9)$$

распространяющиеся без затухания вдоль поверхности пластины (по ρ), но имеющие заметную амплитуду лишь в том случае, если источник и точка наблюдения расположены вблизи этой поверхности. Название «поверхностная волна» как раз и выражает то обстоятельство, что поле подобных волн сосредоточено вблизи поверхности. В отсутствие потерь при $|z+z'| \rightarrow 0$ поверхностные волны в диэлектрике составляют основной вклад в поле, так как амплитуды этих цилиндрических волн убывают с

рассматриваемые полюсы лежат на плоскости ω вблизи действительной оси и, следовательно, затухание вытекающих волн, как указывалось в предыдущем абзаце, может быть малым; для δ , определенного формулой (12б), имеем $\omega_\mu \approx \sqrt{\epsilon} \sqrt{1 + (i/k_1 d)}$. Таким образом, вклад этих волн в точках наблюдения с большим $k_1 r$, но малым $k_1 r \sin(\theta - \omega_{\mu r}) \text{sh } \omega_{\mu i}$ может оказаться значительным [5].

Подробности вычислений

Вывод интегрального представления (4) функции G'_s можно провести, используя одномерные собственные функции (11) из § 5, на которые следует дополнительно наложить граничное условие $dg_{z2}/dz = 0$ при $z = d$ [формула (2г)]. Эквивалентная схема для этой задачи представлена на фиг. 40, причем g_z пропор-



Фиг. 40. Эквивалентная схема для определения собственных волн (E-типа).

циональна току в линии. Решение при $z < 0$ дается выражением (1) из § 3, где $Z_1 = \kappa/\omega\epsilon_1$ (E-волны), а $\tilde{Z}(0)$ — входной импеданс короткозамкнутой линии передачи относительно плоскости $z = 0$ [гл. 2, § 4, формула (24а)]:

$$\tilde{Z}(0) = jZ_2 \operatorname{tg} \kappa_2 d, \quad Z_2 = \frac{\kappa_2}{\omega\epsilon_2}, \quad \kappa_{1,2} = \sqrt{k_{1,2}^2 - \xi^2}. \quad (13)$$

Подставляя эти выражения в общую формулу (1) из § 1 и учитывая, что $\xi = k_1 \sin \omega$, получаем запись (4а) для коэффициента отражения; выражения (3) и (4) для поля находятся при этом из общего интегрального представления (11) § 2 (с заменой $j \rightarrow -i$ соответственно иной зависимости от времени) [см. также § 4, формула (7а)]. Если источник поля (точка z') расположен в области $0 < z \leq d$, т. е. внутри пластины, то собственная функция Грина g_z выражается более общими формулами (28) и (29) из гл. 2, § 4 (см. также гл. 3, § 4, п. «а»).

Поле в области пластины $0 < z \leq d$ можно выразить через функцию g_{z1} для внешней области $z < 0$ [§ 3, формула (1)]. По-

скольку $dg_{z2}/dz = 0$ на границе $z = d$, функция g_{z2} должна быть пропорциональна $\cos \kappa_2 (d - z)$. При этом в силу условия непрерывности $g_{z1} = g_{z2}$ при $z = 0$ имеем

$$g_{z2}(z, z') = g_{z2}(0, z') \frac{\cos \kappa_2 (d - z)}{\cos \kappa_2 d} = g_{z1}(0, z') \frac{\cos \kappa_2 (d - z)}{\cos \kappa_2 d}, \quad (14)$$

чем и оправдывается замена (5).

Асимптотическое разложение интеграла (4) можно получить так же, как и в § 5, п. «а», с той лишь разницей, что в амплитуду $f(\omega)$ в формуле (14) из § 5 следует подставить коэффициент отражения (4а). Метод перевала в первом порядке дает второй член в выражении для поля (6), а члены более высокого порядка, обозначенные в этом выражении символом $O(1/k_1 r)$, можно найти так, как показано в гл. 4, § 2, п. «б».

Среди особых точек подынтегрального выражения (4) на комплексной плоскости ω отметим прежде всего точки ветвления, удовлетворяющие уравнению $\sin \omega = 0$ и отвечающие обращению в нуль аргумента функции Ханкеля. Интересующая нас точка ветвления $\omega = 0$ и выбранный вид разреза показаны на фиг. 39. Поскольку коэффициент отражения $\Gamma(k_1 \sin \omega)$ представляет собой четную функцию величины $\sqrt{\epsilon - \sin^2 \omega}$, точки ветвления при $\omega_b = \pm \arcsin \sqrt{\epsilon}$, т. е. при $\xi_b = \pm k_2$, отсутствуют. Это согласуется с общим выводом из § 3, п. «а», так как область 2 ограничена плоскостью $z = d$ (и, следовательно, точка $z = +\infty$ не достигается). Точки ветвления на плоскости комплексных волновых чисел ξ определяются условием $\xi_b = \pm k_1$, устраняются при преобразовании $\xi = k_1 \sin \omega$. Подынтегральное выражение имеет также полюсы в нулях $\omega = \omega_a$ знаменателя коэффициента отражения (4а). Если ввести новые параметры p и q согласно (7а), то мы придем к системе трансцендентных уравнений (7), которыми определяется положение полюсов. Эти уравнения можно также получить из условия поперечного резонанса [гл. 2, § 4, формула (36)]. Для эквивалентной линии, представленной на фиг. 40, относительно входа при $z = 0$ имеем: $\tilde{Z}(0)$ дается формулой (13), $\tilde{Z}(0) = Z_1$ и, таким образом, условие поперечного резонанса $\tilde{Z}(0) + \tilde{Z}(0) = 0$ приводит к уравнениям (7) (с заменой $j \rightarrow -i$).

В отсутствие потерь в среде величины ϵ и l^2 положительны; при этом уравнение (7) может иметь решение с чисто мнимыми $q = i|q|$ и действительными p . Этим значениям q отвечает конечное число простых полюсов при $\omega_{vr} = \pi/2$, $\omega_{vi} < 0^1$).

¹⁾ Очевидно, что если ω_a — решение уравнений (7), то и $-\omega_a$ также удовлетворяет им. При действительных ϵ , введя комплексно сопряженные величины, можно показать, что $-q^*$ также удовлетворяют системе (7) и таким образом, при действительных k_1 величина $\pi - \omega_a^*$ — тоже решение.

с точностью до замены $\epsilon_1 \leftrightarrow \epsilon_2$, которая учитывает различие в обозначениях диэлектрических проницаемостей сред на фиг. 37 данного тома и на фиг. 81 из т. 1.

Подчеркнем, что выражение (6) справедливо при углах $\theta \approx \theta_{v, \mu}$ (т. е. предполагается, что полюсы лежат достаточно далеко от пути наибоыстрейшего спуска). Если же путь наибоыстрейшего спуска пересекает полюс или полюс расположен вблизи от седловой точки, то для получения выражений, аналогичных формуле (6), следует воспользоваться обобщенным методом перевала (гл. 4, § 4).

Альтернативное представление поля (радиально распространяющиеся волны)

Как отмечалось в предыдущем разделе, вблизи диэлектрической пластины, изображенной на фиг. 37 (при $\epsilon_2 > \epsilon_1$), основной вклад в электромагнитное поле, возбуждаемое расположенным возле пластины продольным электрическим током, в дальней зоне вносят поверхностные волны, обладающие зависимостью от ρ цилиндрической волны и экспоненциально затухающие при удалении от поверхности диэлектрика. Амплитуды этих волн в выражении (6) оказалось невозможным получить на основе разложения поля по волнам, распространяющимся в z -направлении, приводящего к представлению (4); для определения амплитуд понадобилось асимптотическое разложение поля в дальней зоне, наблюдаемого вблизи поверхности диэлектрика. Поскольку поверхностные волны представляют собой поля, распространяющиеся вдоль границы диэлектрика, можно предположить, что выражение скалярной собственной функции Грина G' для электрических волн через радиально распространяющиеся решения (т. е. ее разложение по собственным волнам z -области) приведет к более прямому определению амплитуд возбуждаемых поверхностных волн.

Искомое ρ -представление для G' сразу следует из общего разложения (39б), если положить $u \equiv \rho$, $v = \varphi$. Ортонормированные системы собственных функций для φ - и z -областей были определены в гл. 3, § 4, но для удобства приводятся ниже. Скалярные собственные функции z -области $\Phi_r(z)$ должны удовлетворять граничным условиям для E -волн в структуре, изображенной на фиг. 37. Эта структура совпадает со структурой, изображенной на фиг. 81 т. 1, если в последней заменить величины x , x' , ϵ_1 и ϵ_2 величинами $-z$, $-z'$, ϵ_2 и ϵ_1 . Формулы (25)–(27) из гл. 3, § 4, показывают, что спектр собственных волн имеет дискретную (поверхностная волна) и непрерывную части; мы приведем лишь функции, требуемые для представления поля в области $z < 0$ при $z' < 0$.

z -область

Дискретная часть спектра:

$$\Phi_r(z) \equiv \Phi_v(z) = \frac{e^{i q_v |z|}}{\sqrt{\epsilon_1} A_v}, \quad (17a)$$

где $q_v = i |q_v|$ — корни системы уравнений (7), выражающих условие поперечного резонанса, а A_v — величина, даваемая формулой (6б).

Непрерывная часть спектра:

$$\Phi_r(z) \equiv \Phi(\xi, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [e^{i\xi z} - \vec{\Gamma}(\xi) e^{-i\xi z}], \quad 0 < \xi < \infty, \quad (17б)$$

где

$$\vec{\Gamma}(\xi) \equiv \Gamma(\xi) = \frac{-i\xi_1 \operatorname{tg} \xi_1 d - \xi e}{-i\xi_1 \operatorname{tg} \xi_1 d + \xi e}, \quad \xi_1 = \sqrt{k_1^2(\epsilon - 1) + \xi^2}. \quad (17в)$$

Здесь произведена замена $j \rightarrow -i$ в соответствии с принятой зависимостью от времени вида $\exp(-i\omega t)$. Кроме того, переменная ξ , фигурирующая в формулах (25)–(27) из гл. 3, § 4, обозначена здесь через ξ во избежание путаницы обозначений в настоящей главе.

φ -область

Собственные функции, зависящие от φ , определяются формулой (51б) из гл. 3, § 2:

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (18)$$

Радиальная характеристическая функция Грина $g'_\rho(\rho, \rho'; \lambda_\rho, \lambda_{\varphi m})$ определяется выражением (93) из гл. 3, § 4:

$$g'_\rho(\rho, \rho'; \lambda_\rho, \lambda_{\varphi m}) = \frac{\pi i}{2} H_m^{(1)}(\eta \rho_>) J_m(\eta \rho_<), \quad (19)$$

$$\eta = \sqrt{\lambda_\rho} = \sqrt{k_1^2 - \lambda_z}.$$

Соотношение $\lambda_\rho = k_1^2 - \lambda_z$ следует из формулы (38б) гл. 3, § 3, величина λ_{zr} по определению равна

$$[-1/\Phi_r(z)] [d^2\Phi_r(z)/dz^2].$$

Подставив в формулу (39б) из гл. 3, § 3, собственные функции (17) и (18), приходим к следующему разложению функции Грина $G'(r, r')$ по радиально распространяющимся волнам [поскольку $\rho' = 0$ на фиг. 37, следует учитывать в (18) лишь члены

$0 < \arg \xi < \pi$; тем самым интеграл по контуру \bar{C} сводится по теореме Коши к интегралу по контуру C' , охватывающему разрез, и сумме вычетов в полюсах поверхностных волн, определяемых функцией $\Gamma(\xi)$ (интегралы по замкнутым контурам C'_v). В результате мы приходим к искомому представлению поля через радиально распространяющиеся волны, в котором, как и в выражении (20), используется система собственных функций для z -области. Дискретный спектр соответствует вкладу вычетов в полюсах поверхностных волн и в точности совпадает с суммой в формуле (20). Чтобы убедиться в том, что интеграл по контуру C' , охватывающему разрез, дает непрерывную часть спектра [интегральный член в формуле (20)], введем новую переменную ξ согласно формуле (21) [формула (10) из § 4 и далее] и упростим выражением с учетом соотношения $\Gamma(-\xi) = -\Gamma(\xi)$ при действительных ξ .

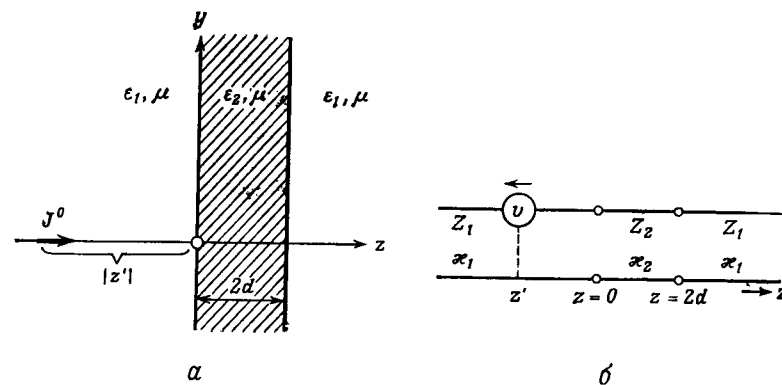
Контур \bar{C} на фиг. 41 переходит на комплексной плоскости w в контур \bar{P} фиг. 39, а контур C' отображается в контур P' , проходящий по мнимой оси от $w = i\infty$ до $w = 0$, по действительной оси от $w = 0$ до $w = \pi$ и затем по вертикальной прямой от $w = \pi$ до $w = \pi - i\infty$. Непрерывная часть спектра поля представляется в формуле (20) интегралом по бесконечному контуру P' ; при асимптотических оценках для дальнейшей зоны следует деформировать P' в путь наибо́льшего спуска P , показанный на фиг. 39, и вычислить интеграл методом перевала. В результате приходим к выражению типа (6). Если $\theta \neq \pi/2$, то при деформации контура интегрирования он может пересечь один или более из полюсов поверхностных волн, лежащих на плоскости w вблизи действительной оси (фиг. 39). Вычетами в этих полюсах компенсируются соответствующие члены суммы в формуле (20), и в результате в асимптотическом выражении для поля наблюдаемого над поверхностью диэлектрика, присутствуют не все возможные поверхностные волны. Кроме того, может оказаться, что необходимо учитывать один или более из полюсов вытекающих волн. Окончательный результат при этом согласуется с выражением (6), выведенным на основе представления поля в виде волны, распространяющихся вдоль оси z .

Случай незаземленной пластины

Если источник расположен возле незаземленной диэлектрической пластины (фиг. 42, а), то для обобщения всего сказанного выше достаточно просто ввести подходящую собственную функцию Грина g_z , которую можно найти из эквивалентной схемы, изображенной на фиг. 42, б. С учетом симметрии структуры относительно плоскости $z = d$ удобнее рассматривать не прямо

тричного и антисимметричного возбуждающего напряжения, представленные фиг. 43, а и б. Там же представлены соответствующие физические условия задачи.

Как видно из эквивалентных схем, при антисимметричном возбуждающем напряжении в плоскости $z = d$ напряжение равно нулю (короткое замыкание), а при симметричном возбуждающем напряжении в плоскости $z = d$ ток равен нулю (разрыв цепи). Соответственно этому в случае, когда возбуждающие продольные электрические токи антисимметричны в плоскости



Фиг. 42. Продольный элементарный ток возле незаземленной диэлектрической пластины.
а — физическая структура; б — эквивалентная схема для определения собственных волн (E-типа).

симметрии $z = d$, равны нулю касательные составляющие электрического поля, а когда токи симметричны, в этой плоскости равны нулю касательные составляющие магнитного поля. Очевидно, что суперпозиция возбужденных полей, или откликов в эквивалентных линиях передач, в случаях, представленных на фиг. 43, а и б, дает вдвое большее поле, нежели в случае, представленном на фиг. 42. Пусть $\mathbf{E}^a, \mathbf{H}^a$ — электромагнитное поле в некоторой точке при антисимметричном, а $\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s$ — при симметричном возбуждении. Тогда электромагнитное поле в случае, представленном на фиг. 42, а, оказывается таким:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^s + \mathbf{E}^a), \quad \mathbf{H} = \frac{1}{2} (\mathbf{H}^s + \mathbf{H}^a). \quad (22)$$

Поскольку области $z < d$ и $z > d$ разделены стенками из идеального проводника (фиг. 43, а) и идеального магнетика (фиг. 43, б), достаточно рассмотреть задачу лишь для полупространства $z < d$.

Различие состоит лишь в том, что величины $\Gamma'(\xi)$ и $\Gamma''(\xi)$, соответствующие формулам (31) из § 5, следует заменить коэффициентами отражения E - и H -волн, приведенными к плоскости $z = 0$ на фиг. 37 или 43, б. Как и в п. «а», поле, возбуждаемое возле диэлектрической пластины, можно представить в виде суперпозиции решений двух вспомогательных задач для изображенных на фиг. 43 структур со стенкой из идеального проводника или идеального магнетика в плоскости $z = 0$. Случай с идеально проводящей стенкой эквивалентен случаю элементарного поперечного тока, расположенного в точке z' , и противоположно направленного тока той же величины в точке $2d - z'$; случай же полубесконечной структуры со стенкой из идеального магнетика эквивалентен случаю двух одинаково ориентированных элементарных возбуждающих токов. Коэффициенты отражения E -волн для полуграниченных структур, отсчитываемые относительно плоскости $z = 0$, определяются формулами (4а) и (23а). Для H -волн величину $\vec{Z}(0)$ можно находить по формулам (13) и (23), где следует теперь вычислять характеристические импедансы как $Z''_{1,2} = \omega\mu/\kappa''_{1,2}$. Напомним также, что вследствие неограниченности области в поперечном направлении относительно z направлению мы имеем $\kappa'_{1,2} = \kappa''_{1,2} = \sqrt{k_{1,2}^2 - \xi^2}$. Поэтому коэффициент отражения для собственных волн в полуграниченной короткозамкнутой линии принимает вид

$$\Gamma''(\xi) = \frac{j\kappa_1 \operatorname{tg} \kappa_2 d - \kappa_2}{j\kappa_1 \operatorname{tg} \kappa_2 d + \kappa_2}; \quad (27a)$$

для полуграниченной разомкнутой линии имеем

$$\Gamma''(\xi) = \frac{j\kappa_1 \operatorname{ctg} \kappa_2 d + \kappa_2}{j\kappa_1 \operatorname{ctg} \kappa_2 d - \kappa_2}. \quad (27б)$$

Подставив эти выражения (с замной $j \rightarrow -i$) в формулы (31) из § 5, находим интегральные представления функций $\nabla'_i \mathcal{P}'_i$ и $\nabla'_i \mathcal{P}''_i$ для полуграниченных короткозамкнутой и разомкнутой линий и тем самым определяем поля в области $z < 0$ [по формулам (1) из § 2]. Для отыскания полей в области $0 < z \leq d$ следует учесть замены (5) и (24).

Асимптотические выражения для поля в области $z < 0$ на фиг. 37 и 43 или при $z > 2d$ на фиг. 42 можно получить, как и ранее, методом перевала; они аналогичны выражению (6). Заметим, что условия резонанса для H -волн очень похожи на соответствующие условия для E -волн [формулы (7) и (25)]. В частности, полюсы определяемого согласно формуле (27а) коэффициента отражения $\Gamma''(\xi)$ полуграниченной короткозамкнутой линии удовлетворяют уравнению (25), в котором величину ϵq следует заменить величиной q ; аналогичная замена в формуле

(7) приводит к уравнению, которым определяются полюсы коэффициента отражения (27б) полуграниченной разомкнутой линии.

Поперечно-ориентированный электрический линейный ток

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t) = I \delta(\hat{\rho} - \hat{\rho}') e^{-i\omega t} \mathbf{x}_0. \quad (28)$$

Случай такого тока возле диэлектрической пластины (фиг. 37 или 43) совершенно аналогичен случаю линейного источника возле полубесконечного ($z > 0$) диэлектрика (§ 5, п. «г»). Входные импедансы $\vec{Z}(0)$ и коэффициенты отражения Γ для полубесконечного диэлектрика следует заменить их аналогами для диэлектрической пластины. Асимптотическая оценка описывающих поле интегралов, близких по форме к интегралу (54б) из § 5, проводится практически идентично соответствующим вычислениям для точечного источника, так как функция Ханкеля в формуле (3б) заменяется асимптотическим выражением (13) из § 3. Полный вывод результатов мы оставляем читателю в качестве самостоятельного упражнения.

§ 7. МОНОХРОМАТИЧЕСКИЕ ИСТОЧНИКИ ВОЗЛЕ ПОВЕРХНОСТИ С ПОСТОЯННЫМ ИМПЕДАНСОМ

Для полупространства или слоистой области $z > 0$ можно в определенной области изменения параметров ввести поверхностный импеданс Z_s , приближенно характеризующий соотношение между касательными составляющими электрического и магнитного полей в плоскости $z = 0$:

$$\mathbf{E}_t(\rho, 0) = Z_s \mathbf{H}_t(\rho, 0) \times \mathbf{z}_0. \quad (1)$$

В тех случаях, когда можно ввести понятие поверхностного импеданса, решение граничной задачи электродинамики для области $z < 0$ весьма заметно упрощается, так как отпадает необходимость анализа поля в области $z > 0$. В сущности задание импеданса на плоскости $z = 0$ можно рассматривать как задание нагрузки для области $z < 0$ [фиг. 3 и 37; гл. 1, § 5, формула (40)].

а. Продольный элементарный электрический ток

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t) = I \delta(\rho) \delta(z - z') e^{-i\omega t} \mathbf{z}_0. \quad (2)$$

Пусть, как показано на фиг. 44, продольный электрический ток с амплитудой $J^0 = I$, где I — переменный ток, проходящий

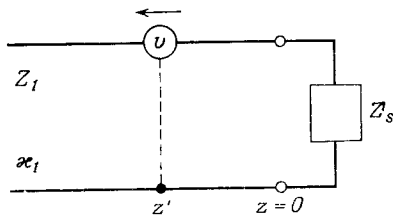
С учетом формулы (6а) постоянная распространения той части поля в выражении (6), которая соответствует вкладу вычета в полюс, просто выражается через поверхностный импеданс \bar{Z}_s :

$$\frac{e^{ik_1 r \cos(\omega_p - \theta)}}{\sqrt{r \sin \theta}} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \exp(-ik_1 \bar{Z}_s |z + z'|) \exp(ik_1 \sqrt{1 - \bar{Z}_s^2} \rho). \quad (7)$$

Мы видим, что эта часть поля экспоненциально убывает при удалении от плоскости $z = 0$, если $\text{Im } \bar{Z}_s < 0$, и представляет собой «правильное» решение уравнений Максвелла, если выбрать $\text{Im } \sqrt{1 - \bar{Z}_s^2} > 0$. Обобщая понятие поверхностной волны, введенное в случае, когда потерь нет ($\bar{Z}_s = -i|\bar{Z}_s|$), можно назвать найденное поле, распространяющееся вдоль поглощающей поверхности с $\text{Im } \bar{Z}_s < 0$, «затухающей» поверхностной волной. В случае сильного поглощения, $\bar{Z}_s \approx \varepsilon^{-1/2}$, $\sin \omega_p \approx 1 + i/2|\varepsilon|$, сравнение амплитуды поверхностной волны (при $z = z' = 0$) в выражении (6) с амплитудой второго слагаемого в формуле (8б) из § 5 показывает, что первая вдвое больше последней. Причина такого расхождения в том, что при $\theta = \pi/2$ полюс подынтегрального выражения лежит на пути наименьшего спуска вблизи точки перевала и ПНС обходит полюс по полуокружности. Поэтому соответствующий вклад в интеграл равен полувычету, а не целому вычету, как в выражении (6) (гл. 4, § 4, п. «а»).

Подробности вычислений

Интегральное представление рассеянного поля (5) нетрудно получить по аналогии с соответствующим выводом в § 6. На фиг. 45 приведена эквивалентная схема для определения одно-



Фиг. 45. Эквивалентная схема для определения собственных волн (E-типа)

мерной собственной функции Грина $g_{zi}(z, z')$ в формуле (1) из § 3, причем эквивалентная линия передачи для данного типа волны нагружена поверхностным импедансом Z_s . При выводе указанного выше результата следует воспользоваться представлением поля (11) из § 2 (с заменой $j \rightarrow -i$) и с помощью условия (3а) найти граничное условие для собственной функции

Грина $dg_{zi}/dz = i\omega \varepsilon_1 Z_s g_{zi}$; в результате с учетом соотношений (6а) из § 2 и (15) из гл. 2, § 2, приходим к эквивалентной схеме, изображенной на фиг. 45. Напомним, что величина $Y'_i(z, z')$, а следовательно, и g'_{zi} — это нормированный ток; в соответствии с формулой (15) из гл. 2, § 2, для линии передачи электрических волн величина $(1/i\omega \varepsilon_1)(dg_{zi}/dz)$ равна соответствующему напряжению, а отношение напряжения к току при $z = 0$ равно поверхностному импедансу Z_s . Формула для коэффициента отражения (5а) сразу следует из выражения (1а) § 3, если положить $\bar{Z}_i(0) = Z_s$ и $k_{it} = \xi = k_1 \sin \omega$.

Асимптотическое значение интеграла (5) можно найти методом перевала так же, как и в § 6. В отличие от случая плоской пластины, когда подынтегральное выражение имело бесконечную последовательность полюсов, отвечающих поверхностным волнам, в рассматриваемом случае подынтегральное выражение имеет единственный полюс

$$\cos \omega_p = -\bar{Z}_s, \text{ т. е. } \omega_p = \arccos(-\bar{Z}_s) \pm 2m\pi, \quad (8a)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

В случае пассивных поверхностных импедансов, когда на поверхности поглощается конечная (или нулевая) мощность, требование, чтобы действительная часть потока мощности была направлена к поверхности $\left[\text{Re} \int_S \mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_i^* \cdot \mathbf{z}_0 dS \geq 0 \right]$, означает в силу соотношения (1), что $\text{Re } \bar{Z}_s \geq 0$. Поэтому из уравнения (8а) следует, что рассматриваемый полюс лежит в области

$$\frac{3\pi}{2} > \text{Re } \omega_p \geq \pi/2; \quad \text{Im } \omega_p \geq 0 \text{ при } \text{Im } \bar{Z}_s \geq 0.$$

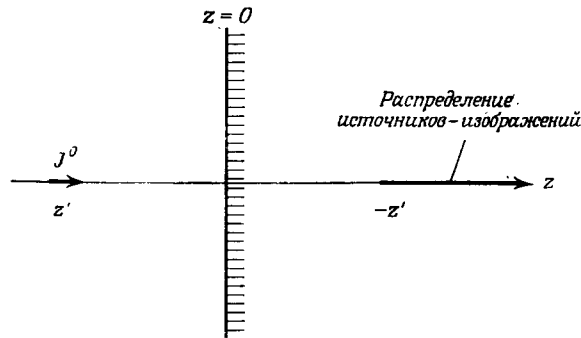
В случае поверхностей без потерь ($\text{Re } \bar{Z}_s = 0$) имеем $\text{Re } \omega_p = \pi/2$. Из уравнений (8) явствует, что при $\text{Re } \bar{Z}_s \rightarrow 0$ полюс приближается справа к линии $\text{Re } \omega_p = \pi/2$. Поэтому если $\text{Im } \bar{Z}_s < 0$ и $\text{Re } \bar{Z}_s = 0$, то контур интегрирования должен огибать полюс слева по полуокружности $\text{Re } \omega_p = \pi/2$, $\text{Im } \omega_p < 0$. Рассматриваемый полюс можно, как и в § 6 и § 3, п. «д», отнести к «полюсам поверхностной волны», поскольку вычет в нем дает вклад в поле, соответствующий поверхностной волне [формула (7)]. Поэтому условие существования поверхностной волны возле поверхности без потерь (реактивной) записывается в виде $\bar{Z}_s = -i|\bar{Z}_s|$ [т. е. импеданс должен быть индуктивным; напомним, что принята зависимость от времени типа $\exp(-i\omega t)$]. Такое условие сразу же следует из условия поперечного резонанса [гл. 2, § 4, формула (3б)], согласно которому в точке полюса должно выполняться равенство $\bar{Z}_i(0) + \bar{Z}_s = 0$.

связанную с прежней соотношением $\gamma = i\mu$. Тогда получим

$$G_{s2} = \int_0^{\infty} [-2ik_1 \bar{Z}_s e^{-ik_1 \bar{Z}_s \mu}] \frac{\exp\{ik_1 \sqrt{\rho^2 + [z + (z' + \mu)]^2}\}}{4\pi \sqrt{\rho^2 + [z + (z' + \mu)]^2}} d\mu, \quad (13)$$

$$\text{Im } \bar{Z}_s > 0.$$

Мы видим, что такое поле создается непрерывным распределением точечных источников, лежащих в области $z' \leq z < \infty$ на положительной оси z (фиг. 46). Отметим, что при условии



Фиг. 46. Метод изображений при $\text{Im } Z_s > 0$.

$\text{Im } \bar{Z}_s > 0$, при котором возмущающее влияние поверхности с постоянным импедансом можно точно представить как действие реальных физических источников-изображений, в системе невозможна распространяющаяся поверхностная волна. Это означает, что распределение источников изображений такого типа не может возбуждать в области $z < 0$ поле, соответствующее формуле (7).

б. Поперечный магнитный линейный ток

$$\vec{M}(\mathbf{r}, t) = V \delta(\hat{\rho} - \hat{\rho}') e^{-i\omega t} \mathbf{x}_0. \quad (14)$$

Если на фиг. 44 заменить электрический диполь линейным магнитным током с амплитудой V , направленным параллельно оси x , то у возбуждаемого электромагнитного поля оказываются отличными от нуля лишь составляющие H_x , E_y и E_z [формулы, дуальные формулам (56) из § 5 или (31) из § 4]:

$$H_x = i\omega \epsilon_1 V \bar{G}', \quad E_y = -V \frac{\partial \bar{G}'}{\partial z}, \quad E_z = V \frac{\partial \bar{G}'}{\partial y}, \quad (15)$$

которые можно выразить через двумерную скалярную функцию Грина G' для электрических волн, удовлетворяющую дифферен-

циальному уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_1^2 \right) \bar{G}'(\hat{\rho}, \hat{\rho}') = -\delta(\hat{\rho} - \hat{\rho}'), \quad \hat{\rho} = (y, z), \quad (16)$$

а также условию излучения на бесконечности и граничному условию

$$\frac{\partial \bar{G}'}{\partial z} = i\omega \epsilon_1 Z_s \bar{G}' = ik_1 \bar{Z}_s \bar{G}' \quad \text{при } z=0, \quad (16a)$$

где k_1 — волновое число в среде, а $\bar{Z}_s = Z_s / \sqrt{\mu/\epsilon_1}$. Решение можно записать в виде

$$\bar{G}'(\hat{\rho}, \hat{\rho}') = \bar{G}_f(\hat{\rho}, \hat{\rho}') + \bar{G}'_s(\hat{\rho}, \hat{\rho}'), \quad (17)$$

где \bar{G}_f — функция Грина свободного пространства

$$\bar{G}_f = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_1 |\hat{\rho} - \hat{\rho}'|), \quad (17a)$$

а \bar{G}'_s — функция, учитывающая наличие импедансного экрана при $z=0$, которую можно представить в виде интеграла по волнам, распространяющимся вдоль оси z :

$$\begin{aligned} \bar{G}'_s(\hat{\rho}, \hat{\rho}') &= \\ &= \begin{cases} -\frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\eta(y-y')} \exp[-i\sqrt{k_1^2 - \eta^2}(z+z')] \Gamma(\eta) d\eta, & (17b) \\ -\frac{i}{4\pi} \int_{\bar{P}} e^{ik_1 R \cos(\omega - \phi)} \Gamma(k_1 \sin \omega) d\omega. & (17b) \end{cases} \end{aligned}$$

Величина $\Gamma(k_1 \sin \omega)$ — функция, даваемая выражением (5а), а \bar{P} — контур интегрирования, показанный на фиг. 8, б. Если ввести полярные координаты R и ϕ , отсчитываемые от точки изображения источника, то можно написать $|z + z'| = R \cos \phi$, $y - y' = R \sin \phi$.

Нетрудно получить асимптотическое выражение для интеграла (17в), соответствующее большим значениям $k_1 R$; оно, как и в формуле (6), имеет вид суммы отраженного поля и поверхностной волны:

$$\begin{aligned} \bar{G}'_s \sim \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{k_1 R}} e^{i(k_1 R + \pi/4)} \Gamma(k_1 \sin \phi) \left[1 + O\left(\frac{1}{k_1 R}\right) \right] + \\ + e^{ik_1 R \cos(\omega_p - \phi)} \text{ctg } \omega_p U(\phi - \phi_p), \quad (18) \end{aligned}$$

где $\cos \omega_p = -Z_s$, величина $U(\phi - \phi_p)$ — единичная функция Хевисайда, ϕ_p — величина, даваемая формулой (8) из § 6,

согласно формуле (1а) из § 3, имеем

$$\vec{\Gamma}_i''(0) = \frac{\kappa_i'' - k_1 \bar{Y}_s}{\kappa_i'' + k_1 \bar{Y}_s}, \quad \bar{Y}_s = \frac{1}{Z_s}, \quad (22a)$$

откуда с учетом соотношения $\kappa_i'' = \sqrt{k_1^2 - \xi^2} = k_1 \cos \omega$ получаем

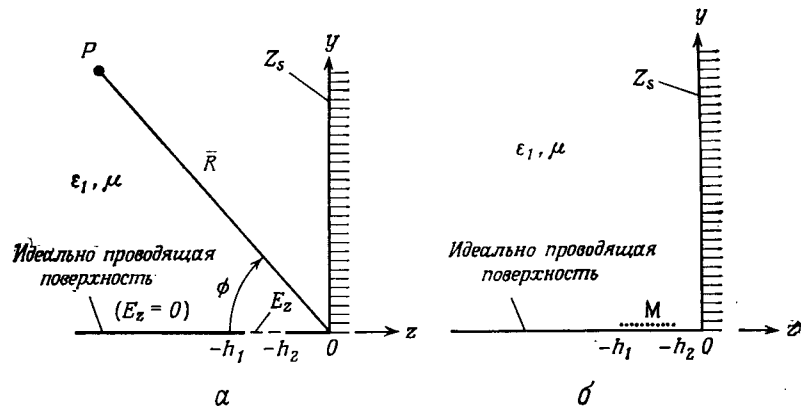
$$\Gamma''(k_1 \sin \omega) = \frac{\cos \omega - \bar{Y}_s}{\cos \omega + \bar{Y}_s}. \quad (22б)$$

Асимптотические выражения для поля могут быть получены так же, как это делается в пп. «а» и «б».

г. Непрерывное распределение поперечных магнитных линейных токов

Возбуждение поверхностных волн плоским раскрывом

Пусть электромагнитное поле в области, ограниченной плоскостью $z = 0$ с поверхностным импедансом Z_s , возбуждается (фиг. 47) полем в отверстии (раскрыве) в идеально проводящем



Фиг. 47. Возбуждение поверхностных волн конечным раскрывом.
а — физическая структура; б — эквивалентная структура.

плоском экране, расположенном при $y = 0$ [19]. Среда, заполняющая рассматриваемую область, характеризуется диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ_1 и μ . Отверстие представляет собой щель шириной $h = h_1 - h_2$, бесконечно протяженную по оси x ; предполагается, что поле в раскрыве не зависит от x , имеет единственную составляющую магнитного поля $\mathbf{H} = x_0 H$ и касательную составляющую электрического поля \mathbf{E}_z . Поле такого типа возникает, например, в раскрыве плоского вол-

новода со стенками при $z = -h_1$ и $z = -h_2$, $y < 0$, когда вдоль него распространяется основная волна типа TEM . В силу соотношения эквивалентности (33а) из гл. 1, § 5, поле в раскрыве можно отождествить с эквивалентным распределением магнитного тока $\mathbf{M} = \mathbf{E} \times \mathbf{y}_0 = -x_0 E_z$ в идеально проводящем плоском экране (фиг. 47, б). Как показано в гл. 1, § 5, п. «б», электромагнитное поле в области $z < 0$, $y > 0$ однозначно определяется заданием магнитного тока $M_x = -E_z$. Поскольку рассматриваемая структура однородна относительно координаты x , поле в области $z < 0$, $y > 0$ имеет единственную составляющую магнитного поля $H_x(\hat{\rho})$; составляющие электрического поля выражаются через нее по формулам (15). Формулы (15) дают поля, возбуждаемые линейным магнитным током с амплитудой V , а поэтому магнитное поле, создаваемое распределением магнитного тока в раскрыве, можно представить как их суперпозицию:

$$H_x(\hat{\rho}) = 2i\omega\epsilon_1 \int_{-h_1}^{-h_2} V(z') \bar{G}'(\hat{\rho}; 0, z') dz', \quad \hat{\rho} = (y, z), \quad (23)$$

где \bar{G}' — функция Грина (17), а множитель 2 учитывает наличие изображений в идеально проводящей плоскости $y = 0$ (фиг. 47, б).

При отыскании точного решения удобно пользоваться разложением (21) по волновым волнам, бегущим вдоль оси y ; тогда вследствие непрерывной зависимости функции Грина от z' облегчается интегрирование в выражении (23). При разложении же по волнам, распространяющимся вдоль оси z [§ 4, формула (36б)] такое упрощение не возникает. На больших расстояниях от раскрыва можно использовать в формуле (23) асимптотическое выражение (19) для функции \bar{G}' . Если $R \gg h_1$, где h_1 — координата верхнего края раскрыва (фиг. 47), то можно написать следующие приближенные формулы для \hat{R} и R :

$$\hat{R} = \bar{R} + z' \cos \phi, \quad R = \bar{R} - z' \cos \phi, \quad (24)$$

где $\bar{R} = \sqrt{y^2 + z^2}$ — расстояние от начала координат до точки наблюдения (y, z) . При указанных приближениях получаем

$$H_x(\hat{\rho}) \sim \frac{-\omega\epsilon}{\sqrt{2\pi k_1 \bar{R}}} e^{i(k_1 \bar{R} - \pi/4)} [A(\cos \phi) - \Gamma(k_1 \sin \phi) A(-\cos \phi)] - 2i\omega\epsilon_1 \frac{A(\bar{Z}_s) \bar{Z}_s}{\sqrt{1 - \bar{Z}_s^2}} [\exp(ik_1 \sqrt{1 - \bar{Z}_s^2} y + ik_1 \bar{Z}_s z)] U(\phi - \phi_p), \quad (25)$$

где

$$A(y) = \int_{-h_1}^{-h_2} V(z') e^{ik_1 z' y} dz'. \quad (25a)$$

Можно считать, что поле в квадранте $y > 0, z < 0$ на фиг. 48, а так же, как и в случае, представленном на фиг. 47, возбуждается эквивалентным распределением магнитных токов $M_x = -E_z$ в идеально проводящей плоскости $y = 0$ (фиг. 48, б). Поскольку в рассматриваемой задаче «раскрытие» занимает полуплоскость $y = 0, z < 0$, эквивалентное распределение магнитного тока простирается от $z = 0$ до $z = -\infty$. Магнитное поле H_x в области $z < 0, y > 0$ (фиг. 48, б) можно представить в виде интеграла (23), положив $h_1 = \infty, h_2 = 0$ и взяв в качестве \bar{G}' функцию Грина для полупространства с идеально проводящей границей при $z = 0$. Выражение для функции \bar{G}' легко получить из формул (17) или (21), положив в них $\bar{Z}_s = 0$, что соответствует идеально проводящей границе. Поле в дальней зоне $\bar{R} \rightarrow \infty, \phi > 0$ (фиг. 48, б), согласно формуле (25), имеет вид

$$H_x(\hat{\rho}) \sim \frac{-2\omega\epsilon_1}{\sqrt{2\pi k_1 \bar{R}}} e^{i(k_1 \bar{R} - \pi/4)} \int_{-\infty}^0 V(z') \cos(k_1 z' \cos \phi) dz', \quad (28)$$

т. е. выражается через значение величины $M_x(z') = V(z')$ (или величины E_z) в плоскости раскрытия $y = 0$.

Если реактивность поверхности \bar{X}_s мала или, точнее, мал параметр $k_1 \bar{X}_s$, то поверхностная волна «слабо ограничена» [т. е. поле (27) заметно отличается от нуля на больших расстояниях от импедансной поверхности]. В этом случае скачок импеданса в точке соединения двух граничных полуплоскостей на фиг. 48, а также мал и в качестве первого приближения можно принять за поле в раскрытии просто значение падающего поля

$$(E_i)_z = \frac{i}{\omega\epsilon_1} \frac{\partial H_i}{\partial y} = \frac{-\kappa}{\omega\epsilon_1} H_i, \quad (29a)$$

откуда находим

$$V(z') \approx \frac{\kappa}{\omega\epsilon_1} H_0 e^{k_1 \bar{X}_s z'}. \quad (29b)$$

Проводя элементарное интегрирование в формуле (28), для поля излучения в дальней зоне получаем

$$H_x(\hat{\rho}) \sim \frac{e^{i(k_1 \bar{R} - \pi/4)}}{\sqrt{2\pi k_1 \bar{R}}} H_0 \frac{2\bar{X}_s \sqrt{1 + \bar{X}_s^2}}{\bar{X}_s^2 + \cos^2 \phi}. \quad (30)$$

Интересно сравнить приближенное представление поля (30), точность которого должна возрастать при очень малых значениях \bar{X}_s , с точным выражением [20, 21], полученным в результате решения интегрального уравнения. Точное выражение ква-

драта модуля магнитного поля в дальней зоне имеет вид

$$|H_x|^2 \sim \frac{|H_0|^2}{\pi k_1 \bar{R}} \frac{\bar{X}_s^2 v \cos^2 \phi}{(1+v)(1-\sin \phi)(\bar{X}_s^2 + \cos^2 \phi)(v - \sin \phi)}, \quad (31a)$$

$$v = \sqrt{1 + \bar{X}_s^2};$$

приближенное же выражение, согласно формуле (30), таково:

$$|H_x|^2 \sim \frac{|H_0|^2}{\pi k_1 \bar{R}} \frac{2\bar{X}_s^2 v^2}{(\bar{X}_s^2 + \cos^2 \phi)^2}. \quad (31b)$$

При замене поля, наводимого в бесконечном раскрытии, просто падающим полем можно ввести ряд дополнительных приближений. Пусть S — область $y > 0, z < 0$ (фиг. 48, а); применим формулу Грина к функциям \bar{G}' и H_x , определенным вместе с первыми и вторыми производными в области S и на ее границе s :

$$\int_S [\bar{G}'(\hat{\rho}, \hat{\rho}') \nabla'^2 H_x(\hat{\rho}') - H_x(\hat{\rho}') \nabla'^2 \bar{G}'(\hat{\rho}, \hat{\rho}')] dS' =$$

$$= \oint_s [\bar{G}'(\hat{\rho}, \hat{\rho}') \frac{\partial}{\partial n'} H_x(\hat{\rho}') - H_x(\hat{\rho}') \frac{\partial}{\partial n'} \bar{G}'(\hat{\rho}, \hat{\rho}')] ds', \quad (32)$$

где n — внешняя нормаль к поверхности s . Магнитное поле H_x удовлетворяет в S однородному волновому уравнению

$$(\nabla^2 + k^2) H_x(\hat{\rho}) = 0, \quad \hat{\rho} = (y, z). \quad (33a)$$

На идеально проводящей границе $s_1 (y > 0, z = 0)$ должна обращаться в нуль касательная составляющая электрического поля $E_y = 0$ и, следовательно,

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = 0 \text{ на } s_1. \quad (33b)$$

Обозначим через s_2 дугу окружности в рассматриваемом квадранте при $\bar{R} \rightarrow \infty$; составляющая H_x должна удовлетворять на s_2 условию излучения [гл. 1, § 5, (34в)], поскольку все источники поля сосредоточены в области $y < 0$. Пусть \bar{G}' — функция Грина, удовлетворяющая неоднородному волновому уравнению

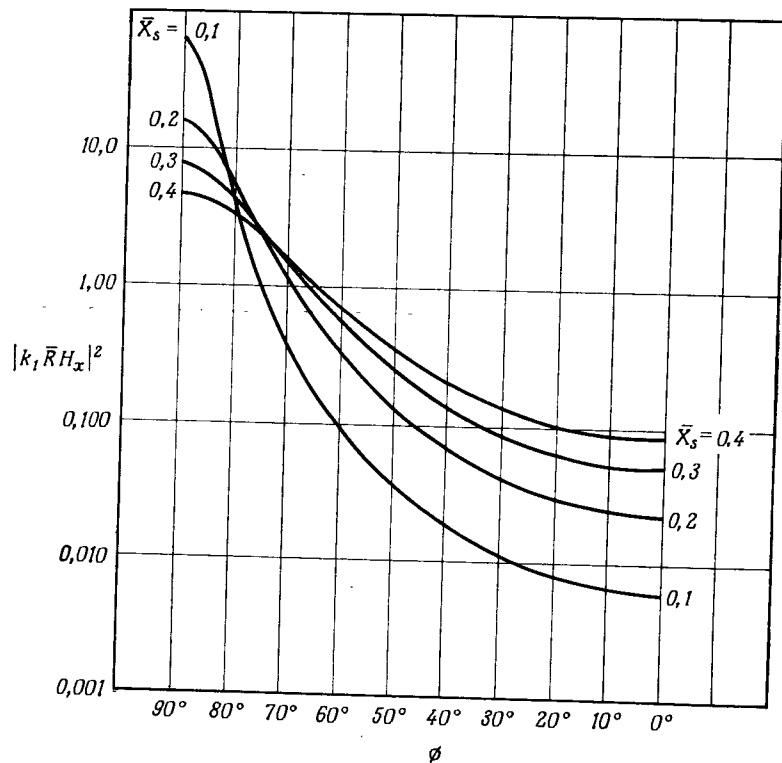
$$(\nabla^2 + k_1^2) \bar{G}'(\hat{\rho}, \hat{\rho}') = -\delta(\hat{\rho} - \hat{\rho}'), \quad \hat{\rho} \text{ и } \hat{\rho}' \text{ в области } S \quad (34a)$$

с граничным условием

$$\frac{\partial \bar{G}'}{\partial z} = 0 \text{ на } s_1, \quad (34b)$$

а также условию излучения на s_2 . О поведении функции \bar{G}' на плоскости раскрытия $y = 0$, необходимом для единственности

структуры, которую можно получить, заменив плоскость раскрыва стенкой из идеального магнетика с эквивалентным распределением электрического тока $J_z \propto H_x$. Взяв асимптотиче-



Фиг. 50. Диаграмма направленности ограниченной антенны поверхностной волны.

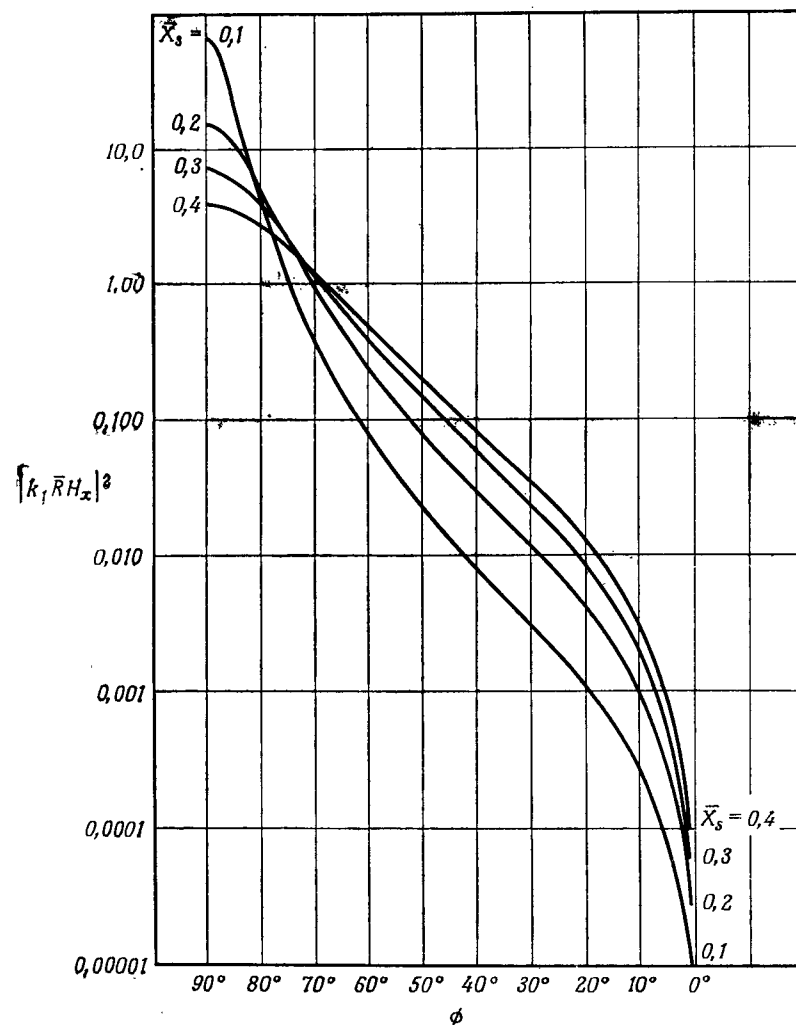
По оси ординат отложена величина

$$|k_1 \bar{R} H_x|^2 = \frac{2\bar{X}_s^2 v^2}{\pi (\bar{X}_s^2 + \cos^2 \phi)^2}$$

скую формулу для \bar{G}'_h , выполнив в формуле (37) дифференцирование и задав величину H_x равной падающему полю H_i (27), получаем

$$H_x(\hat{\rho}) \sim \frac{e^{i(k_1 \bar{R} - \pi/4)}}{\sqrt{2\pi k_1 \bar{R}}} H_0 \frac{2\bar{X}_s \sin \phi}{\bar{X}_s^2 + \cos^2 \phi} \quad (38)$$

Можно, наконец, использовать непосредственно функцию Грина \bar{G}'_h для полупространства. Как нетрудно показать мето-



Фиг. 51. Диаграмма направленности ограниченной антенны поверхностной волны.

По оси ординат отложена величина

$$|k_1 \bar{R} H_x|^2 = \frac{2\bar{X}_s^2 \sin \phi}{\pi (\bar{X}_s^2 + \cos^2 \phi)^2}$$

дом изображений, величина $\bar{G}'_h(\hat{\rho}; 0, z')$ вдвое меньше функции Грина, удовлетворяющей условию (36б), а производная $(\partial \bar{G}'_h / \partial y')_{y'=0}$ вдвое меньше производной по y' от функции Грина, удовлетворяющей условию (36а); при этом берутся значения

газообразным средам, как земная атмосфера или «электронный плазменный газ», образующий ионосферу, где изменение плотности частиц приводит к макроскопическим неоднородностям. Можно указать также на искусственные неоднородные среды, например линзы для ультракоротких волн.

Точные выражения для полей, излучаемых заданными источниками в неоднородных средах, можно найти только при тех частных видах зависимости параметров среды от координат, при которых получаются дифференциальные уравнения с известным решением (см. примеры в § 9). Но если характеристики среды мало меняются в пределах локальной длины волны, то можно найти приближенные выражения для полей, пригодные при любых медленно меняющихся в зависимости от координат диэлектрической проницаемости $\epsilon(r)$ или магнитной проницаемости $\mu(r)$ или, если пользоваться терминологией геометрической оптики, при любом медленно меняющемся показателе преломления $n(r) = [\mu(r)\epsilon(r)/\mu_0\epsilon_0]^{1/2}$, где ϵ_0 и μ_0 — диэлектрическая и магнитная проницаемости свободного пространства. Такие приближенные выражения совпадают с выражениями геометрической оптики. Вместо волн в этом случае можно рассматривать лучи, идущие по искривленным траекториям, которые определяются зависимостью показателя преломления от координат; направление луча в каждой точке совпадает с направлением потока энергии. Правда, в некоторые области пространства из-за своей искривленности не может попасть ни один реальный луч (фиг. 56). В таких «теневых» областях приближение геометрической оптики должно быть заменено более точным приближением. Геометрическая оптика неприменима также в окрестности каустики и в фокальной области, где расчет поля должен проводиться более строгими методами. Подобные замечания общего характера уже делались в гл. 1, § 6 и 7.

Плоскостными называются среды, в которых показатель преломления изменяется только вдоль оси z , т. е. $n(\mathbf{r}) = n(z)$. Следовательно, электромагнитные поля в них могут быть выражены через два скалярных потенциала (§ 2), но дифференциальные уравнения для этих потенциалов следует модифицировать с учетом непрерывного изменения свойств среды. Требуемые формулы были выведены в гл. 2, § 3, п. «д», и ниже мы их воспроизведем. В случае сред с медленно изменяющимися параметрами мы найдем решение дифференциальных уравнений для потенциалов асимптотическими методами. В первом приближении оно всюду совпадает с геометрическим, кроме переходных областей, упомянутых выше (см. также гл. 1, § 7). Затем мы найдем решение методом ВКБ исходя из точного интегрального представления потенциалов и покажем, что в некоторых областях приближение геометрической оптики допустимо, но в

переходных областях, где поле быстро изменяется, как и ранее, требуется некоторая модификация. Эти общие выводы конкретизируются в § 9 путем анализа точных решений при некоторых частных профилях $n(z)$.

б. Вычисление монохроматических полей с помощью скалярных потенциалов

В гл. 2, § 3, п. «д», было показано, что электромагнитные поля, возбуждаемые гармоническим электрическим током с плотностью $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}^0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \exp(j\omega t)$ и магнитным током с плотностью $\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{M}^0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \exp(j\omega t)$ в области, где диэлектрическая проницаемость $\epsilon(z)$ и магнитная проницаемость $\mu(z)$ представляют собой непрерывные функции координаты z , даются выражениями [гл. 2, § 3, формулы (26) и (40)]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\epsilon(z')}{\epsilon(z)} \nabla \times \nabla \times \mathbf{z}_0 \Pi'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - j\omega \mu(z') \nabla \times \mathbf{z}_0 \Pi''(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (1a)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = j\omega \epsilon(z') \nabla \times \mathbf{z}_0 \Pi'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{\mu(z')}{\mu(z)} \nabla \times \nabla \times \mathbf{z}_0 \Pi''(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (1b)$$

где Π' — электрический, а Π'' — магнитный потенциал Герца, причем потенциалы Герца связаны со скалярными функциями \mathcal{P}'_d и \mathcal{P}''_d соотношениями [гл. 2, § 3, формула (39)]

$$j\omega \epsilon(z') \Pi'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{j\omega \epsilon(z')} \mathbf{J}^0 \cdot \nabla' \times \nabla' \times \mathbf{z}_0 \mathcal{P}'_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \mathbf{M}^0 \cdot \nabla' \times \mathbf{z}_0 \mathcal{P}'_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (1в)$$

$$j\omega \mu(z') \Pi''(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{J}^0 \cdot \nabla' \times \mathbf{z}_0 \mathcal{P}''_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{1}{j\omega \mu(z')} \mathbf{M}^0 \cdot \nabla' \times \nabla' \times \mathbf{z}_0 \mathcal{P}''_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (1г)$$

где векторные операторы соответствуют формулам (1д) и (1е) из § 2. Функции \mathcal{P}'_d и \mathcal{P}''_d связаны соотношениями [см. примечание к формуле (3а) из § 2]

$$-\nabla_i^2 \mathcal{P}'_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = j\omega \epsilon(z') G'(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad -\nabla_i^2 \mathcal{P}''_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = j\omega \mu(z') G''(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2)$$

со скалярными функциями Грина G' и G'' , которые удовлетворяют уравнениям

$$[\mathcal{D}_\epsilon^2(z) + \nabla_i^2 + k^2(z)] G'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad k^2(z) = \omega^2 \mu(z) \epsilon(z), \quad (3a)$$

$$[\mathcal{D}_\mu^2(z) + \nabla_i^2 + k^2(z)] G''(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3б)$$

где

$$\mathcal{D}_\alpha^2(z) \equiv \alpha(z) \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\alpha(z)} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (3в)$$

в. Прямое решение методом геометрической оптики в среде с медленно меняющимися параметрами

В общем случае произвольной зависимости $k(z)$ решить уравнения (3) или соответствующие им уравнения для функций \mathcal{P}'_d и \mathcal{P}''_d не представляется возможным, но при сравнительно медленном изменении $k(z)$ в пределах локальной длины волны $2\pi/k(z)$ можно воспользоваться приближенными методами. Условие медленности изменения удобно выразить через показатель преломления $n(\bar{z})$ как неравенство

$$\left| \frac{dn/dz}{k_0 n^2} \right| \ll 1, \quad (9)$$

где k_0 — волновое число в свободном пространстве, а $k(z) = k_0 n(z)$. Это условие медленности изменения функции $n(z)$ можно обеспечить, выбрав достаточно большие k_0 (короткие волны). Если k_0 — большой параметр, то целесообразно искать приближенное решение для поля и скалярных потенциалов в виде разложения в ряд по обратным степеням величины k_0 . Такой подход, при котором можно исходить непосредственно из дифференциальных уравнений [гл. 1, § 7, п. «б»], в самом первом приближении дает решение, допускающее геометрикооптическое истолкование. Общий анализ, проведенный в гл. 1, § 7, п. «б», мы конкретизируем в частном случае плоской слоистости. Будем искать решение для поля или потенциалов в виде

$$u(\mathbf{r}) \sim u_0(\mathbf{r}) e^{i k_0 \Psi(\mathbf{r})}, \quad (10)$$

где u_0 и Ψ — не зависящие от k_0 амплитудная и фазовая функции [см., однако, то, что говорится после формулы (22а) в гл. 1, § 7]. Чтобы найти эти функции, нужно определить траектории лучей.

Траектории лучей

Траектории лучей определяются уравнением [гл. 1, § 7, формула (23)]

$$\frac{d}{ds} n \frac{d\mathbf{R}}{ds} = \nabla n, \quad \left(\frac{d\mathbf{R}}{ds} \right)^2 = 1, \quad (11)$$

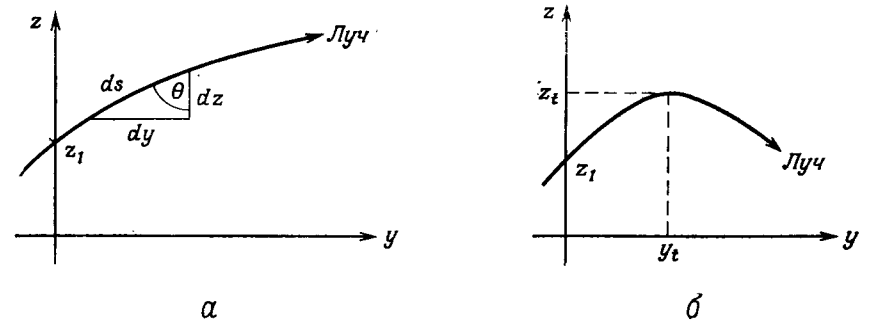
где s — расстояние вдоль луча, а $\mathbf{R} = x_0 x + y_0 y + z_0 z$ — радиус-вектор, идущий из произвольно выбранного начала координат в точку траектории луча (координата вдоль луча обозначается через \mathbf{R} , а не \mathbf{r} как в гл. 1, § 7, п. «б»). Если n зависит только от z , то уравнение (11) можно записать в виде уравнений для состав-

ляющих:

$$\frac{d}{ds} n \frac{dx}{ds} = 0 = \frac{d}{ds} n \frac{dy}{ds}, \quad (12a)$$

$$\frac{d}{ds} n \frac{dz}{ds} = \frac{dn}{dz}. \quad (12b)$$

Из уравнения (12а) следует, что величина $n(dx/ds)$ и $n(dy/ds)$ постоянны вдоль луча и их отношение, а значит, и производная dy/dx также постоянны. Постоянство производной dy/dx означает, что проекция траектории луча на плоскость xy есть прямая линия, а все искривление луча происходит в плоскости, перпендикулярной плоскости xy . Без потери общности систему координат



Фиг. 53. Траектории лучей.

а — без точки поворота; б — с точкой поворота.

нат можно выбрать так, чтобы рассматриваемый луч лежал в плоскости $x = 0$. В соответствии с фиг. 53 можно написать

$$\frac{dy}{ds} = \sin \theta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos \theta, \quad (13)$$

где θ — угол между лучевым вектором \mathbf{s} и положительным направлением оси z . В результате из уравнения (12а) следует равенство

$$n \sin \theta = a = \text{const} \text{ вдоль луча}, \quad (14)$$

т. е. закон преломления (Снеллиуса). Из уравнения (12б) получаем

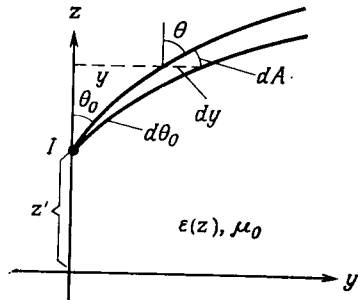
$$\frac{dn}{dz} = \frac{d}{ds} (n \cos \theta) = \cos \theta \frac{dn}{dz} \frac{dz}{ds} - n \sin \theta \frac{d\theta}{ds}, \quad (15)$$

где

$$\frac{d\theta}{ds} = - \frac{\sin \theta}{n} \frac{dn}{dz}. \quad (16)$$

Возбуждение поперечным электрическим линейным током

Чтобы показать, как определяется амплитуда поля, возбуждаемого ограниченным распределенным источником, мы рассмотрим линейный электрический ток, направленный параллельно оси x и расположенный в точке $(0, z')$ в среде с изменяющейся диэлектрической проницаемостью $\epsilon(z)$ и постоянной магнитной проницаемостью μ_0 , как показано на фиг. 54 [22, 10, гл. 38].



Фиг. 54. Излучение линейного источника

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t) = I \delta(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}') e^{-i\omega t} \mathbf{x}_0.$$

Такой источник возбуждает электрическое поле, имеющее только x -составляющую, что следует из уравнения (1) при $\partial/\partial x \equiv 0$ [см. также § 2, формула (4), и § 4, формула (31)]. Все лучи представляют собой плоские кривые, параллельные плоскости yz ; каждый луч характеризуется углом θ_0 , под которым он выходит из источников. Чтобы найти амплитуду луча из условия сохранения энергии в лучевой трубке [гл. 1, § 7, формула (34)], необходимо вычислить площадь поперечного сечения dA трубки, ограниченной лучами, которые испускаются источником под углами θ_0 и $\theta_0 + d\theta_0$. Если опустить линейный размер dx , то в соответствии с фиг. 54 имеем

$$dA = dy \cos \theta = \frac{\partial y}{\partial \theta_0} d\theta_0 \cos \theta, \quad (21)$$

где дифференциал dy при заданном значении z связан с θ_0 параметрической зависимостью $y = y(\theta_0)$, $z = z(\theta_0)$, следующей из уравнения для лучей. Если $P(\theta_0)$ — угловая плотность энергии (мощность на радиан), испускаемой источником под углом θ_0 , то энергия в лучевой трубке $P(\theta_0) d\theta_0$ сохраняется и интенсивность (плотность энергии) в каждой точке вдоль лучевой трубки дается выражением

$$\bar{S} = \frac{P(\theta_0) d\theta_0}{dA} = \frac{P(\theta_0)}{(\partial y/\partial \theta_0) \cos \theta}. \quad (22)$$

Частную производную $\partial y/\partial \theta$ при данном значении z можно найти из уравнения (18) и соотношения $a = n(z) \sin \theta$. В результате получаем

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_0} = \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial \theta_0} = n(z') \cos \theta_0 \int_{z'}^z \frac{n^2 dz}{(n^2 - a^2)^{1/2}}, \quad (23)$$

а на основании формулы (39) из гл. 1, § 7, имеем

$$E_0(y, z) = \sqrt{\frac{\xi \bar{S}(y, z)}{n(z)}} = \left[\frac{\xi P(\theta_0)}{n(z) \cos \theta_0 \int_{z'}^z [(n^2 dz)/(n^2 - a^2)^{1/2}]} \right]^{1/2}, \quad (24)$$

$$\xi = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}.$$

Это выражение, справедливое при $z > z'$, применимо и при $z < z'$, если поменять z и z' в пределах интегрирования местами и ввести, как и раньше, ограничение $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Такая симметрия относительно координат источника и точки наблюдения согласуется с теоремой взаимности.

Для вычисления $P(\theta_0)$ необходимо рассмотреть поле линейного источника в окрестности точки его нахождения $(0, z')$. Поскольку $k_0 \gg 1$ и параметры среды медленно меняются в пределах локальной длины волны в среде, можно выбрать точку наблюдения $\mathbf{r} = (y, z)$ достаточно близко к точке нахождения источника \mathbf{r}' , чтобы выполнялось условие $n(z) \approx n(z')$, но все-таки достаточно далеко, чтобы выполнялось условие

$$k_0 n(z') |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg 1.$$

При этом локальное распределение мощности, излучаемой источником, будет совпадать с распределением в среде с постоянным показателем преломления $n(z')$. Если амплитуда источника выбрана равной $I = (ik_0 \xi)^{-1}$, то x -составляющая электрического поля $E_f = x_0 E_f$ определяется функцией Грина свободного пространства [§ 4, формула (25)]:

$$E_f = \frac{i}{4} H_0^{(1)} [k_0 n(z') |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|] \sim \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 n(z') |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}} e^{ik_0 n(z') |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| + i\pi/4}. \quad (25)$$

Таким образом, интенсивность излучения не зависит от угла и $P(\theta_0) = P = \text{const}$ определяется следующим выражением:

$$P = \frac{\text{полная мощность}}{2\pi} = \frac{n(z') |E_f|^2}{2\pi \xi} 2\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \frac{1}{8\pi k_0 \xi}. \quad (26)$$

Подставляя выражение (26) в формулу (24), находим амплитуду E_0 электрического поля, а само поле $\mathbf{E} = x_0 E$ получаем подстановкой $E \sim E_0 \exp(ik_0 \psi)$, где ψ — фаза [формула (206)]. На-

(2б)], так что для произвольной точки \mathbf{R} на луче, соответствующем параметру $a = n(z') \sin \theta_0$, имеем

$$G \sim \frac{\sqrt{a} \exp \left(ik_0 a \rho + ik_0 \int_{z'}^z \sqrt{n^2 - a^2} dz \right)}{4\pi \sqrt{\rho} [n^2(z) - a^2]^{1/4} [n^2(z') - a^2]^{1/4} \left\{ \int_{z'}^z n^2 dz / [n^2 - a^2]^{1/2} \right\}^{1/2}}. \quad (31)$$

Для преломленного луча за точкой поворота это выражение изменяется так же, как и в случае линейного источника.

Возбуждение падающей плоской волны

В предельном случае падающей плоской волны, вектор электрического поля которой перпендикулярен оси z , поля можно вычислять по формуле (27), перейдя в ней к пределу при $y' \rightarrow -\infty$, $z' \rightarrow -\infty$ и положив $y' = z' \operatorname{tg} \theta_\infty$. Чтобы обобщить эту формулу на случай произвольной координаты точки источника y' , нужно заменить y разностью $y - y'$. Если при $z \rightarrow -\infty$ показатель преломления стремится к постоянному значению n_1 , то интеграл в знаменателе выражения (27) при $z' \rightarrow -\infty$ можно положить равным $n_1^2 [n_1^2 - a^2]^{-1/2} (-z')$. Фазовый же интеграл нельзя аппроксимировать подобным образом, так как в этом случае отбрасываемый член должен быть малым по сравнению с единицей, но не с $|z'|$. Поскольку $a = n(z) \sin \theta(z) = n_1 \sin \theta_\infty$, где θ_∞ — угол наклона луча при $z \rightarrow -\infty$ и $y \rightarrow -\infty$, выражение (27) можно переписать в следующем виде:

$$E \sim A \frac{\sqrt{n_1 \cos \theta_\infty}}{[n^2(z) - n_1^2 \sin^2 \theta_\infty]^{1/4}} \exp \left\{ ik_0 n_1 [y \sin \theta_\infty + z' \cos \theta_\infty] + ik_0 \int_{z'}^z \sqrt{n^2(\eta) - n_1^2 \sin^2 \theta_\infty} d\eta \right\}, \quad (32)$$

где

$$A = \frac{1}{2 \sqrt{2\pi k_0 n_1 \hat{\rho}'}} e^{ik_0 n_1 \hat{\rho}' + i\pi/4}, \quad \hat{\rho}' = \sqrt{y'^2 + z'^2}. \quad (32a)$$

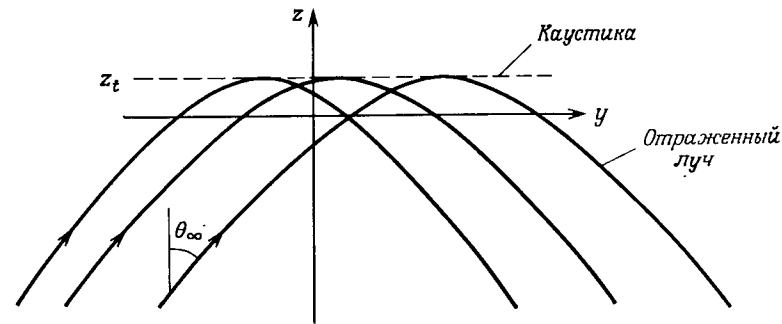
Если падающая волна имеет единичную амплитуду, то множитель A равен единице [§ 4, формула (30б)]. Переставив экспоненты таким образом, чтобы член $n_1 z' \cos \theta_\infty$ оказался под знаком интеграла, можно перейти к пределу $z' = -\infty$ и получить выражение для поля, возбуждаемого плоской волной с единичной амплитудой, падающей со стороны $z = -\infty$ под углом θ_∞

к положительному направлению оси z :

$$E \sim \frac{\sqrt{n_1 \cos \theta_\infty}}{[n^2(z) - n_1^2 \sin^2 \theta_\infty]^{1/4}} \exp \left\{ ik_0 n_1 [y \sin \theta_\infty + z \cos \theta_\infty] + ik_0 \int_{-\infty}^z [\sqrt{n^2(\eta) - n_1^2 \sin^2 \theta_\infty} - n_1 \cos \theta_\infty] d\eta \right\}. \quad (33)$$

Если $n(z) > n_1 \sin \theta_\infty$, то это выражение пригодно при любых z .

При наличии точки поворота z_t выражение (33) применимо лишь до точки поворота; для преломленного луча нужно рассматривать «каноническую» задачу и соответствующее выражение



Фиг. 55. Падающая плоская волна и точка поворота.

можно получить из формулы (55) при $z' \rightarrow -\infty$. Поле при $z \rightarrow -\infty$ дается выражением (57), а формула для \bar{G}_2'' получается заменой z на z' и наоборот, поскольку функция \bar{G}_2'' симметрична относительно z и z' . Выражение (57) получено в предположении, что $z, z' > z_t$ и что $n(\infty) = 1$. Применяв этот результат к рассматриваемому случаю $z' \rightarrow -\infty$, $y' \rightarrow -\infty$, $z_t > z, z'$, $n(-\infty) = n_1$, с учетом выражения (32a) найдем поле вдоль преломленного луча:

$$E_r \sim e^{-i\pi/2} \frac{\sqrt{n_1 \cos \theta_\infty}}{[n^2(z) - n_1^2 \sin^2 \theta_\infty]^{1/4}} \exp^{ik_0 [n_1 y \sin \theta_\infty - n_1 z \cos \theta_\infty] + ik_0 \Psi_r}, \quad (34)$$

где

$$\Psi_r = 2 \int_{-\infty}^{z_t} [\sqrt{n^2(\eta) - n_1^2 \sin^2 \theta_\infty} - n_1 \cos \theta_\infty] d\eta - \int_{-\infty}^z [\sqrt{n^2(\eta) - n_1^2 \sin^2 \theta_\infty} - n_1 \cos \theta_\infty] d\eta + 2z_t n_1 \cos \theta_\infty. \quad (34a)$$

Огибающая лучей (каустика) представляет собой в этом случае прямую линию $z = z_t$ (фиг. 55), и множитель $\exp(-i\pi/2)$ дает

В остальном интервале значений $k_{ii}^2 > k_0^2 n_2^2$, где функция g_{zi} экспоненциально убывает, нет решений, описывающих распространяющиеся волны. Множитель $-i$ во втором члене выражения (35б) представляет собой коэффициент отражения от каустики $z = z_i$ системы преломленных лучей [фиг. 55 при $z \rightarrow -z_i$; см. также замечания после формулы (58)]; если при $z = z_0$, $z_0 > z_i$ расположена реальная отражающая граница, то выражение (35б) останется пригодным, если положить $z_i \rightarrow z_0$ и подставить вместо множителя $-i$ соответствующий коэффициент отражения Γ от границы. Хотя формулы (35) были получены при действительных значениях k_{ii} , они верны и при прилегающих комплексных значениях k_{ii} и, следовательно, дают функцию g_{zi} в соответствующей части комплексной плоскости k_{ii} .

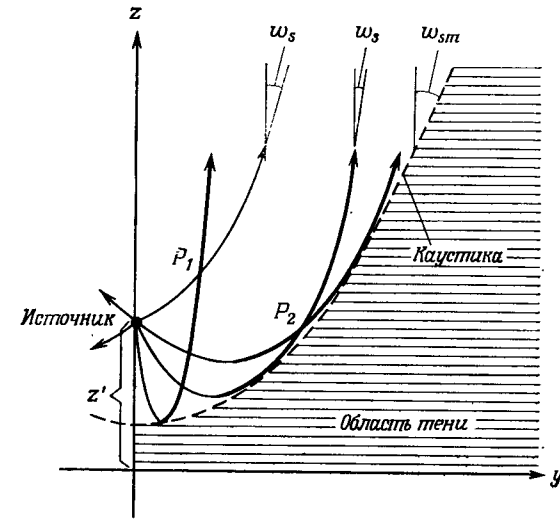
Пример: возбуждение линейным электрическим током

Если подставить выражения (35) в формулы (11)–(14) из § 2, то мы получим явные интегральные выражения для скалярных функций, через которые выражаются электромагнитные поля. Поскольку подынтегральные выражения содержат большой параметр k_0 , эти интегралы можно вычислить методом перевала. Хотя выражения для функции g_{zi} соответствуют лишь действительным значениям k_{ii} , этого достаточно для нахождения действительных стационарных точек, которыми определяются распространяющиеся волны. Остальная область значений k_{ii} не дает вклада в такие поля, а потому в дальнейшем поведение подынтегрального выражения в этой области нас не будет. Мы проиллюстрируем процедуру асимптотической оценки на примере источника, представляющего собой линейный электрический ток, параллельный оси x и расположенный в точке $z = z'$ (фиг. 54) в области, где показатель преломления монотонно убывает от значения $n_2^2 = 1$ при $z = \infty$ до значения $n_1^2 = -\infty$ при $z = 0$; при этом $n^2(z_0) = 0$, $z_0 > 0$. Затем можно будет сравнить результаты с точным решением для частного вида профиля этого типа (§ 9, п. «а»). В рассматриваемом случае поля могут быть выражены через скалярную функцию Грина $\bar{G}''(\hat{\rho}, \hat{\rho}')$, $\hat{\rho} = (y, z)$ для H -волн [§ 2, формула (13а) с заменой $j \rightarrow -i$, соответствующей временной зависимости вида $\exp(-i\omega t)$, и § 4, формула (31)]:

$$\bar{G}''(\hat{\rho}, \hat{\rho}') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta(y-y')} g_{zi}(z, z') d\eta, \quad k_{ii} = \eta, \quad (36)$$

где g_{zi} — функция, которая в наиболее существенной области значений подынтегрального выражения дается формулой (35б).

Как и в § 3, п. «в», для удобства введем комплексный угол ω , связанный с нашими переменными соотношением $\eta = k_0 \sin \omega$, и обозначим вклад первого члена выражения (35б)



Фиг. 56. Графическая иллюстрация к условию существования седловой точки. Прямые лучи [формула (41)] показаны тонкой линией, отраженные [формулы (52)] — жирной линией.

через \bar{G}_1'' а второго — через \bar{G}_2'' :

$$\bar{G}''(\hat{\rho}, \hat{\rho}') \sim \bar{G}_1''(\hat{\rho}, \hat{\rho}') + \bar{G}_2''(\hat{\rho}, \hat{\rho}'), \quad (37)$$

где при $y' = 0$ имеем

$$\bar{G}_{1,2}''(\hat{\rho}, \hat{\rho}') = \frac{i}{4\pi} \int_{\bar{P}} f_{1,2}(\omega) e^{ik_0 q_{1,2}(\omega)} d\omega, \quad (38)$$

$$f_1(\omega) = \frac{\cos \omega}{\{[n^2(z) - \sin^2 \omega][n^2(z') - \sin^2 \omega]\}^{1/4}}, \quad f_2(\omega) = -if_1(\omega), \quad (38a)$$

$$g_1(\omega) = y \sin \omega + \int_{z_<}^{z_>} \sqrt{n^2(\xi) - \sin^2 \omega} d\xi, \quad (39a)$$

$$g_2(\omega) = y \sin \omega + \int_{z_w}^z \sqrt{n^2(\xi) - \sin^2 \omega} d\xi + \int_{z_w}^{z'} \sqrt{n^2(\xi) - \sin^2 \omega} d\xi, \quad (39b)$$

причем точка z_w определяется уравнением $n^2(z_w) = \sin^2 \omega$. Асимптотическая оценка приводит к ложным точкам ветвления

согласуется с выражением (27), полученным непосредственно методом геометрической оптики. Если $z \rightarrow \infty$, а z' — конечная величина, то интеграл в знаменателе выражения (46) можно аппроксимировать функцией $z/\cos^3 \omega_s$. Поскольку $n(z) \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$ и $z/\cos \omega_s = \rho$, где ω_s — угол наклона луча при $z = \infty$ и ρ — радиус-вектор (фиг. 60, а), выражение (46) сводится к следующему:

$$\bar{G}_1'' \sim \frac{\sqrt{\cos \omega_s}}{2\sqrt{2\pi k_0 \rho}} \frac{\exp \left\{ ik_0 \left[y \sin \omega_s + \int_z^{\infty} \sqrt{n^2(\xi) - \sin^2 \omega_s} d\xi \right] + i\pi/4 \right\}}{[n^2(z') - \sin^2 \omega_s]^{1/4}}, \quad z \rightarrow \infty. \quad (47)$$

Это выражение согласуется с выражением, которое получается в частном случае, когда показатель преломления дается формулой (15а) из § 9. Для дополнительной проверки предположим, что среда однородна и $n(z) = 1$. Тогда выражение (46) сводится к виду

$$\bar{G}_1'' \sim \frac{\exp \{ ik_0 [y \sin \omega_s + |z - z'| \cos \omega_s] + i\pi/4 \}}{2\sqrt{2\pi k_0 \rho}}, \quad n(z) = 1, \quad (48)$$

совпадающему с выражением для функции Грина свободного пространства.

Интересно, что выражение (46) имеет конечный предел в точке поворота $n(z_t) = \sin \omega_s$ или $n(z'_t) = \sin \omega_s$, хотя асимптотическая формула (35) в этой точке непригодна. Разложение функций $n^2(z)$ и $n^2(\xi)$ в степенной ряд в окрестности точки z_t приводит к следующему пределу:

$$\lim_{z \rightarrow z_t} [n^2(z) - \sin^2 \omega_s]^{1/4} \left\{ \int_z^{z'} \frac{n^2(\xi) d\xi}{[n^2(\xi) - \sin^2 \omega_s]^{1/2}} \right\}^{1/2} \rightarrow \left[\frac{n(z_t)}{(d/dz_t) n(z_t)} \right]^{1/2}, \quad (49)$$

откуда получаем

$$\bar{G}_1'' \sim \frac{1}{2\sqrt{2\pi k_0}} \times \frac{\exp \left\{ ik_0 \left[y \sin \omega_s + \int_{z_t}^{z'} \sqrt{n^2(\xi) - \sin^2 \omega_s} d\xi \right] + i\pi/4 \right\}}{[n^2(z') - \sin^2 \omega_s]^{1/4} (n(z_t) / \{dn(z_t)/dz_t\})^{1/2}}, \quad z = z_t. \quad (50)$$

Асимптотическое выражение для функции \bar{G}_2'' в формуле (38) можно найти аналогичным путем; оно дает поле вдоль «пре-

ломленного» луча. Поскольку

$$\frac{d}{d\omega} \int_{z_\omega}^z \sqrt{n^2(\xi) - \sin^2 \omega} d\xi = \int_{z_\omega}^z \frac{d}{d\omega} \sqrt{n^2 - \sin^2 \omega} d\xi - [n^2(z_\omega) - \sin^2 \omega]^{1/2} \frac{dz_\omega}{d\omega} \quad (51)$$

и $n^2(z_\omega) = \sin^2 \omega$, для седловых точек ω_s функции $q_2(\omega)$ получаем уравнение

$$F(y, z, \omega_s) = 0, \quad (52a)$$

где $z_{\omega_s} \equiv z_t$, $n(z_t) = \sin \omega_s$ и

$$F(y, z, \omega) = y - \sin \omega \left[\int_{z_\omega}^z \frac{d\xi}{\sqrt{n^2(\xi) - \sin^2 \omega}} + \int_{z_\omega}^{z'} \frac{d\xi}{\sqrt{n^2(\xi) - \sin^2 \omega}} \right]. \quad (52b)$$

Уравнение (52а) точно совпадает с уравнением геометрической оптики для преломленного луча, который прошел через точку поворота z_t и траектория которого при $z \rightarrow \infty$ наклонена под углом ω_s [формула (28) и лучи, проведенные на фиг. 56 жирными линиями]. При вычислении функции

$$q_2''(\omega_s) = \cos \omega_s \frac{d}{d\omega_s} F(y, z, \omega_s), \quad (53)$$

входящей в асимптотическую формулу (16) из гл. 4, § 2, мы не можем прямо продифференцировать выражение (52б), поскольку производная от подынтегрального выражения расходится на нижнем пределе. Но после интегрирования по частям

$$\int_{z_t}^z \frac{d\xi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \omega_s}} = \frac{\sqrt{n^2(z) - \sin^2 \omega_s}}{n(z) n'(z)} - \int_{z_t}^z \sqrt{n^2 - \sin^2 \omega_s} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{nn'} \right) d\xi \quad (54)$$

и такого же преобразования интеграла, зависящего от z' , полученное выражение можно продифференцировать, и в результате получаем

$$\begin{aligned} \sec \omega_s \frac{d}{d\omega_s} F(y, z, \omega_s) = & \sin^2 \omega_s \left[\frac{1}{n(z) n'(z) \sqrt{n^2(z) - \sin^2 \omega_s}} + \frac{1}{n(z') n'(z') \sqrt{n^2(z') - \sin^2 \omega_s}} \right] - \\ & - \left[\int_{z_t}^z + \int_{z_t}^{z'} \right] \frac{1 + \sin^2 \omega_s (d/d\xi) [n'(\xi) n(\xi)]^{-1}}{\sqrt{n^2(\xi) - \sin^2 \omega_s}} d\xi, \quad (54a) \end{aligned}$$

которой $q''(\omega_2) > 0$; $Ai(x)$ и $Bi(x)$ — функции Эйри, введенные в гл. 4, § 2, п. «д»,

$$x = k_0^{2/3} X, \quad (59a)$$

причем

$$\frac{4}{3} X^{3/2} = i[q_2(\omega_1) - q_2(\omega_2)], \quad X^{1/2} \approx \left[\frac{1}{2} q_2^{(3)}(\omega_0) \right]^{1/3} \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) e^{i\pi/2}, \quad (59b)$$

и $q^{(3)}(\omega_0) > 0$, поскольку $\omega_1 < \omega_2$ и $q''(\omega_{1,2}) \leq 0$. В этих соотношениях $\omega_1 \approx \omega_2$, $\omega_0 \approx (\omega_1 + \omega_2)/2$, $q_2''(\omega_0) = 0$, откуда $q_2(\omega_1) > q_2(\omega_2)$, и

$$q_2'(\omega_0) \approx -\frac{q^{(3)}(\omega_0)}{8} (\omega_1 - \omega_2)^2, \quad q^{(3)} \equiv \frac{d^3 q}{d\omega^3}. \quad (59b)$$

При больших значениях $|x|$ (поскольку $k_0 \gg 1$, это условие выполняется лишь при очень малых значениях $\omega_1 - \omega_2$) выражение (59) с помощью асимптотических формул для функций Эйри [гл. 4, § 2, формула (51)] сводится к выражению (55) при условии $f_2(\omega_{1,2}) \approx f_2(\omega_0)$. Но при $x \rightarrow 0$ формула (59) сохраняет свой вид и дает для суммы вычетов в точках ω_1 и ω_2 выражение

$$\bar{G}'' \sim \bar{G}_2'' \sim \frac{i}{2} f(\omega_0) \left[\frac{2}{k_0 q_2^{(3)}(\omega_0)} \right]^{1/3} e^{i k_0 [q_2(\omega_1) + q_2(\omega_2)] \pi/2} Ai(x). \quad (60a)$$

В частности, при $x = 0$

$$\bar{G}'' \sim \frac{i}{2} f(\omega_0) \left[\frac{2}{k_0 q_2^{(3)}(\omega_0)} \right]^{1/3} e^{i k_0 q_2(\omega_0)} Ai(0). \quad (60b)$$

Зависимость вида $k_0^{-1/3}$ в этой формуле, а не вида $k_0^{-1/2}$, как в выражении (55) для обычной точки на луче, указывает на усиление поля вблизи каустики.

Для вычисления поля в затененной области по другую сторону каустики рассмотрим выражение (52б) в случае действительной функции $F(y, z, \omega_0) = q_2'(\omega_0) \sec \omega_0$, обращающейся в нуль в точках y и z на каустике. Если точка наблюдения перемещается вдоль прямой $z = \text{const}$, $y > 0$, то знак функции F изменяется при переходе через каустику, а, поскольку величина $q^{(3)}(\omega_0)$ положительна, из выражения (59в) следует, что производная $q_2'(\omega_0)$ отрицательна в освещенной области, где ω_1 и ω_2 действительны. Следовательно, в затененной области мы имеем $q_2'(\omega_0) > 0$ [это также явствует из выражения (52б), поскольку величина F положительна при достаточно больших значениях y], и, значит, $(\omega_1 - \omega_2)^2 < 0$. Поэтому параметр X в выражении (59б) положителен, а поле убывает, как это следует из асим-

птотики функции $Ai(x)$ при больших положительных x [гл. 4, § 2, формула (42a)]:

$$Ai(x) \sim \frac{1}{2 \sqrt{\pi x^{1/4}}} e^{-2/3 x^{3/2}}, \quad x \gg 1. \quad (61)$$

Поскольку величина X положительна, из выражения (59б) следует, что $\arg(\omega_1 - \omega_2) = -\pi/2$ и, стало быть, точка ω_2 сдвигается в верхнюю, а точка ω_1 — в нижнюю полуплоскость комплексной переменной ω . Асимптотическая формула, получаемая с помощью соотношений (60а) и (61), имеет тот же вид, что и аналитическое продолжение функции $\bar{G}_2''|_{\omega_2}$, определяемой выражением (55), с действительной оси в область комплексных ω_2 .

Интересно, что имеется сходство между описанием поля вблизи каустики в рассмотренной задаче, где траектория лучей и их огибающая искривлены, и в задаче из гл. 7, § 5, п. «д», где лучи прямолинейны (см. также работы [10 (гл. 38), 23, 24]).

д. Распространение волн в волновом канале (волноводные волны)

Если профиль показателя преломления описывается не монотонной функцией координаты z , а функцией, проходящей через максимум при некотором конечном значении z_m (фиг. 57, а), то луч, соответствующий параметру a [формула (18)] в интервале $n_B < a < n_m$, имеет две точки поворота z_1 и z_2 , поскольку $n(z_{1,2}) = a$. Для распространения волн необходимо, чтобы выполнялось условие $n(z) \geq a$, при котором рассматриваемый луч «захвачен» в области $z_1 \leq z \leq z_2$. В таком случае мы имеем как бы плоский волновой канал (фиг. 57, б). Вне волнового канала $n(z) < a$ и поле экспоненциально спадает. Ширина волнового канала зависит от величины a ; если профиль таков, как на фиг. 57, а, то захват лучей происходит при условии $n_B < a < n_m$. Лучи, для которых $n_a < a < n_B$, меняют направление один раз в некоторой точке поворота z_t , такой, что $-\infty < z_t < z_3$, а лучи, для которых $a < n_a$, идут от $-\infty$ до $+\infty$, не меняя направления. Лучи же, соответствующие значению параметра $a = n(z_{1,2})$, касаются прямых $z = z_1$ и $z = z_2$, которые, следовательно, представляют собой каустику, т. е. огибающую семейства лучей.

Для того чтобы поле лучей, изображенных на фиг. 57, б, было направленным, т. е. сохранялось на неограниченном расстоянии по поперечной оси y или ρ , должны выполняться определенные условия самосогласованности. Эти условия можно сформулировать в виде требования, чтобы амплитуда и фаза поля в точках А и В, разделенных одним пространственным периодом, были одинаковы. Пусть рассматриваемая собственная волна ха-

менением фазы на каустике. Расстояние L между точками A и B вдоль луча можно найти по формуле (28):

$$L_m = 2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{a_m dz}{\sqrt{n^2(z) - a_m^2}}, \quad (66)$$

где $a_m = n(z) \sin \theta$ — величина, постоянная вдоль луча.

Из сказанного нами относительно связи между направленными волнами в среде с меняющимися свойствами и условием поперечного резонанса (62) или (63) ясно, что эффект направленности, обусловленной неоднородностью среды, будет более четко выявлен, если задачу об излучении рассматривать исходя из представления о линии передачи, идущей вдоль оси y или r . О переходе от представления на основе линии передачи вдоль оси z [формулы (5), (6) или (36)] к альтернативному представлению на основе линии передачи в поперечном направлении говорилось в общем виде в гл. 3, § 3, п. «в», а в гл. 5, § 6, был подробно рассмотрен соответствующий пример (диэлектрический слой). Вычислительная сторона перехода от одного представления к другому состоит в смещении контура интегрирования с действительной оси для обхода особенностей продольной характеристической функции Грина $g_z(z, z'; \lambda_r)$. Для области, неограниченной по z , особенности представляют собой точки ветвления, а также возможно полюсы, если уравнение поперечного резонанса имеет дискретные решения, удовлетворяющие условию излучения на бесконечности. Соответствующий спектр волн, распространяющихся в поперечном направлении, имеет как дискретную, так и непрерывную часть. При наличии реальных границ в точках z_1, z_2 , не пропускающих волн, мы имеем обычный, хотя и неоднородно заполненный волновод и спектр — строго дискретный. Если возможны захваченные волны, а источник и точка наблюдения расположены вблизи волноводной области, то вклад непрерывного спектра пренебрежимо мал и поля достаточно точно описываются совокупностью одних направленных волн [см. замечания после формулы (9) из § 6]. Таким образом, решение задачи об излучении продольно направленного электрического тока полностью аналогично решению задачи в случае однородного диэлектрического слоя [§ 6, формула (20)]. Если не удастся найти точного решения задачи о собственных значениях, то собственные функции $\Phi_r(z)$ можно найти в ВКБ-приближении при условии, что волноводная область широкая и параметры среды меняются плавно. Об удобстве того или иного представления при вычислении поля в волноводной области говорится ниже в связи с конкретным примером, рассматриваемым в п. «б».

§ 9. ИСТОЧНИКИ В ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СРЕДЕ С НЕПРЕРЫВНО МЕНЯЮЩИМИСЯ СВОЙСТВАМИ (СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВИДЫ ПРОФИЛЕЙ)

Хотя формальное решение, приведенное в § 8, п. «а», пригодно для задач об излучении в среде с непрерывно меняющимися свойствами при любом профиле показателя преломления, получить из него решение в явном виде можно только тогда, когда функция $n^2(z)$ такова, что решение уравнений (7а) и (7б) выражается через известные функции. Из небольшого числа профилей, упомянутых в § 6, мы выбрали для детального исследования профиль с обратноквадратичной зависимостью, поскольку он типичен для общего случая монотонного изменения показателя преломления. Другой пример — профиль Эпштейна, описывающий плавный переход, — будет рассмотрен более кратко.

а. Профиль с обратноквадратичной зависимостью

Свойство среды

Рассмотрение характеристик излучения источника в неоднородной среде мы начнем с исследования области, диэлектрическая проницаемость которой изменяется монотонно от конечного постоянного значения ϵ_0 при $z \rightarrow \infty$ по закону

$$\epsilon(z) = \epsilon_0 \left(1 - \frac{p^2}{k_0^2 z^2} \right), \quad k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0, \quad (1)$$

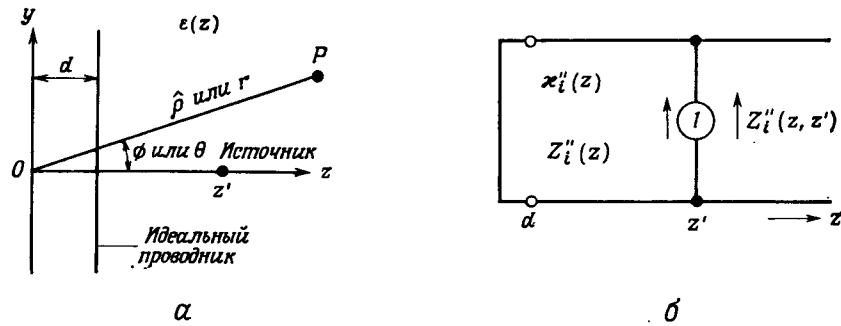
где p — произвольная постоянная, причем магнитная проницаемость μ_0 предполагается постоянной во всей области. Как будет показано ниже, в этом случае телеграфные уравнения для неоднородной линии передачи (7а) и (7б) из § 8 имеют особенно простое решение. При положительных действительных значениях p^2 , не зависящих от ω , диэлектрическая проницаемость $\epsilon(z)$, соответствующая формуле (1), приближенно описывает электрические свойства холодной изотропной плазмы без потерь, плотность электронов $N(z)$ [или, что эквивалентно, плазменная частота $\omega_p(z)$, даваемая формулой (60) из гл. 1, § 1] которой имеет вид

$$N(z) = \frac{p^2 m}{\mu_0 e^2} \frac{1}{z^2} = \frac{\omega_p^2(z) m \epsilon_0}{e^2}, \quad (1a)$$

где m и e — масса электрона и его заряд. Графики функций $\epsilon(z)$ и $N(z)$ при действительных значениях p схематически представлены на фиг. 58.

При действительных p диэлектрическая проницаемость проходит через ноль в точке поворота $z_t = p/k_0$. При $z > z_t$ функ-

z , описываемую уравнением (6б) из § 8, для чего нужно знать собственную функцию Грина $g''_{zi}(z, z') = (j\omega\mu_0)^{-1} Z''_i(z, z')$. Функция g''_{zi} удовлетворяет дифференциальному уравнению (76) из § 8, условию излучения при $z \rightarrow \infty$ и обращается в нуль при $z = d$; нахождение этой функции эквивалентно вычислению напряжения $Z''_i(z, z')$ в эквивалентной схеме на фиг. 60, б. Как отмечалось ранее в связи с уравнением (7) из § 8, волновое со-



Фиг. 60. Физическая структура и эквивалентная схема при наличии проводящей плоскости.

а — физическая структура; б — эквивалентная схема для Н-волны.

противление $Z''_i(z)$ пропорционально постоянной распространения $\kappa''_i(z)$ и дается выражением $Z''_i(z) = \omega\mu_0/\kappa''_i(z)$, причем $\kappa''_i(z) = [\omega^2\mu_0\epsilon(z) - k_i^2]^{1/2}$.

Подстановка выражения (1) для $\epsilon(z)$ в уравнение (76) из § 8 приводит к следующему дифференциальному уравнению для собственной функции Грина:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + k_0^2 \left(1 - \frac{p^2}{k_0^2 z^2} \right) - k_i^2 \right] g''_{zi}(z, z') = -\delta(z - z'). \quad (3)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (3) из гл. 3, § 3; его решение дается выражениями (4) и (14) из гл. 3, § 3, в которые входят приведенные ниже решения однородных уравнения $\vec{V}_i(z)$ и $\vec{V}_i(z)$, удовлетворяющие граничным условиям: первое при верхнем, а второе при нижнем граничном значении z . Решение однородных уравнений (3) выражается через сферические функции Бесселя:

$$c_\nu(\kappa z) \equiv \sqrt{\frac{\pi \kappa z}{2}} C_{\nu+1/2}(\kappa z), \quad \kappa = \sqrt{k_0^2 - k_i^2}, \quad p^2 = \nu(\nu + 1), \quad (3a)$$

где $C_\mu(z)$ — произвольная линейная комбинация цилиндрических функций $J_\mu(z)$, $N_\mu(z)$, $H_\mu^{(1)}(z)$, $H_\mu^{(2)}(z)$. В отличие от функ-

ции $\kappa(z)$ здесь κ — значение этой функции при $z \rightarrow \infty$. Из эквивалентной схемы, представленной на фиг. 60, б, видно, что решение будет иметь требуемый вид уходящей волны при $z = \infty$, если с учетом соотношений (13) из § 3 выбрать функцию $\vec{V}_i(z)$ [при временной зависимости $\exp(j\omega t)$] следующим образом:

$$\vec{V}_i(z) = h_v^{(2)}(\kappa z). \quad (4a)$$

На границе $z = d$ напряжение равно нулю, так что

$$\vec{V}_i(z) = j_\nu(\kappa z) - \frac{j_\nu(\kappa d)}{h_v^{(1)}(\kappa d)} h_v^{(2)}(\kappa z). \quad (4b)$$

Комбинация функций в этом выражении упрощает вычисление вронскиана, входящего в формулу (14а) из гл. 3, § 3. Поскольку

$$J_\mu(z) \frac{d}{dz} N_\mu(z) - N_\mu(z) \frac{d}{dz} J_\mu(z) = \frac{2}{\pi z}, \quad (5a)$$

из уравнения (3) следует равенство

$$j_\nu(z) \frac{d}{dz} n_\nu(z) - n_\nu(z) \frac{d}{dz} j_\nu(z) = 1 \quad (5b)$$

и вронскиан функций \vec{V}_i и \vec{V}_i оказывается равным

$$W(\vec{V}_i, \vec{V}_i) = \vec{V}_i \frac{d\vec{V}_i}{dz} - \vec{V}_i \frac{d\vec{V}_i}{dz} = -j\kappa. \quad (5b)$$

В итоге решение имеет вид

$$g''_{zi}(z, z') = -\frac{j}{\kappa} \left[j_\nu(\kappa z_{<}) - \frac{j_\nu(\kappa d)}{h_v^{(1)}(\kappa d)} h_v^{(2)}(\kappa z_{<}) \right] h_v^{(2)}(\kappa z_{>}) \quad (6)$$

[см. также гл. 2, § 7, формулу (12а) для аналогичной задачи в случае сферической области]. Из определения $\kappa = \sqrt{k_0^2 - k_i^2}$ следует $\kappa = k_0$ при $k_i = 0$ и $\text{Im } \kappa < 0$ при $k_i > k_0$.

Решение (6) можно проверить, рассмотрев предельный случай $p = 0$ (т. е. $\nu = 0$), когда среда с диэлектрической проницаемостью (1) представляет собой вакуум [$\epsilon(z) = \epsilon_0$]. Поскольку в этом случае

$$j_0(x) = \sin x, \quad h_0^{(1,2)}(x) = \mp j e^{\pm ix}, \quad (7)$$

решение (6) принимает вид

$$g''_{zi}(z, z') = \frac{1}{\kappa} \left[\sin \kappa z_{<} - \sin \kappa d e^{-j\kappa(z_{<} - d)} \right] e^{-j\kappa z_{>}}, \quad (8)$$

что согласуется с выражениями (4), (5) и (21) из гл. 3, § 4, если положить $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ и заменить d на $-d$ в соответствии с фиг. 60, а.

а $B(z', \phi)$ — функция, описывающая возмущение поля в свободном пространстве:

$$B(z', \phi) = -ie^{-i\nu\pi/2}A(z', \phi), \quad (13)$$

где $A(z', \phi)$ — функция, даваемая формулами (10а) и (10б).

Подстановка соотношения (9б) в выражение (11) из § 2 для функции точечного источника $G''(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ приводит к интегральному представлению типа (10), если величину $\exp(ik_0y \sin \omega)$ заменить величиной $^{1/2}k_0 \sin \omega H_0^{(1)}(k_0\rho \sin \omega)$. При $|k_0\rho \sin \omega| \gg 1$ и $|k_0z \cos \omega| \gg \nu$ (т. е. при $k_0\rho \gg 1$, $k_0z \gg |\nu|$, $\omega \approx 0, \pi/2$) функции Ханкеля $H_0^{(1)}(k_0\rho \sin \omega)$ и $h_0^{(1)}(k_0z \cos \omega)$ можно заменить их асимптотическими выражениями. Тогда подынтегральное выражение будет иметь такой же вид, как и в интеграле (11), если не считать множителя $\sqrt{\sin \omega}$, и асимптотическая оценка интеграла дает следующий результат:

$$G''(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sim G_f B(z', \theta), \quad r \rightarrow \infty, \quad \theta \approx 0, \pi/2, \quad (14)$$

где $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$, $z = r \cos \theta$ (фиг. 60, а), а G_f — функция Грина свободного пространства:

$$G_f = \frac{e^{ik_0r}}{4\pi r}. \quad (14a)$$

В формулах (11)—(14) предполагалось, что источник расположен в конечной точке z' , а точка наблюдения z стремится к бесконечности. Очевидно, что после замены $\mathbf{r} \leftrightarrow \mathbf{r}'$ представленные выше результаты останутся справедливыми в обратном случае, когда источник находится в бесконечности, а точка наблюдения расположена произвольно.

Геометрооптическая интерпретация решения

Хотя функцию $B(z', \phi)$, которой определяется диаграмма излучения, а следовательно, и электромагнитное поле, получаемое из асимптотического представления функций Грина \bar{G}'' и G'' , можно вычислить с помощью имеющих таблиц цилиндрических функций, для геометрооптической интерпретации решения желательнее аппроксимировать цилиндрические функции, входящие в $B(z', \phi)$, выражениями (77а) из § 4. Если ν — достаточно большая величина, то в выражении (3а) можно воспользоваться приближенным равенством $p^2 \approx (\nu + 1/2)^2$ и представить функцию Ханкеля в виде (19). Формулу (12) можно переписать в виде

$$\bar{G}''(\hat{\rho}, \hat{\rho}') \sim \bar{G}_1''(\hat{\rho}, \hat{\rho}') + \bar{G}_2''(\hat{\rho}, \hat{\rho}'), \quad (15)$$

где

$$\bar{G}_1''(\hat{\rho}, \hat{\rho}') = \frac{\sqrt{\cos \phi} \exp \left[ik_0y \sin \phi + ik_0 \int_{z'}^z \sqrt{n^2(\zeta) - \sin^2 \phi} d\zeta + i\pi/4 \right]}{2 \sqrt{2\pi k_0 \hat{\rho}} \sqrt{n^2(z') - \sin^2 \phi}}, \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_2''(\hat{\rho}, \hat{\rho}') &= \\ &= \frac{\sqrt{\cos \phi} \exp \left[ik_0y \sin \phi + ik_0 \left[\int_d^{z'} + \int_d^z \right] \sqrt{n^2(\zeta) - \sin^2 \phi} d\zeta + i\pi/4 \right]}{2 \sqrt{2\pi k_0 \hat{\rho}} \sqrt{n^2(z') - \sin^2 \phi}}. \end{aligned} \quad (15b)$$

Выражение (15а) применимо в интервале $\sin \phi \leq \sin \phi_c \equiv n(z')$, а выражение (15б) пригодно при углах наблюдения, удовлетворяющих условию $\sin \phi \leq \sin \phi_0 \equiv n(d)$. Если $\phi_0 < \phi < \phi_c$, то аргумент функции Ханкеля $H_p^{(1,2)}(k_0d \cos \phi)$ меньше ее порядка p и $H_p^{(1)} \sim -H_p^{(2)}$ [§ 4, формула (77б)]. В этом случае функция \bar{G}_2'' по-прежнему определяется выражением (15б) при условии, что верхний предел интегрирования d заменен величиной z_t , которая определяется уравнением

$$n(z_t) = \sin \phi, \quad (16)$$

а множитель -1 заменен множителем $\exp(-i\pi/2)$. Если $\phi > \phi_c$, то аргумент функций Ханкеля, входящих в $A(z', \phi)$, меньше их порядка и, следовательно, функция $A(z', \phi)$ убывает при возрастании ϕ . В случае $\sin \phi > n(\zeta)$ в выражениях (15) следует провести замену $[n^2(\zeta) - \sin^2 \phi]^{1/2} = i[\sin^2 \phi - n^2(\zeta)]^{1/2}$. В переходной области $\phi \approx \phi_0$ или $\phi \approx \phi_c$ можно воспользоваться для функций Эйри приближенными выражениями (77в) из § 4 [см. также § 8, формулу (60)].

Выражения (15а) и (15б) выделяют три области углов наблюдения ϕ при расположении точки наблюдения P на бесконечности. Во всех трех случаях поле излучения описывается локально плоской волной, распространяющейся под углом ϕ . Поскольку $n(\zeta) \rightarrow 1$ при $\zeta \rightarrow \infty$, основной экспоненциальный множитель имеет вид $\exp[ik_0y \sin \phi + ik_0z \cos \phi] = \exp(ik_0\rho)$ [см. также выражение (12)]. Но формулы (15) можно переписать в другом виде, при котором удастся проследить при $z \rightarrow \infty$ вклад каждой волны, испускаемой источником. Как было показано в § 8, п. «г» [§ 8, формулы (47) и (57)], функции \bar{G}_1'' и \bar{G}_2'' описывают поле вдоль лучей, распространяющихся в неоднородной среде по искривленным траекториям, и это придает определенный смысл тому, что иначе могло бы показаться произвольным преобразо-

чем дальше расположена точка поворота от отражающей плоскости, тем меньше поправка к полю преломленной волны. Эту поправку можно объяснить наличием затухающей волны, которая проникает в область тени для преломленной волны, отражается от плоскости и выходит обратно в область распространяющихся волн.

Поле в дальней зоне определялось выше в предположении $z \gg \infty$, которое позволяло пользоваться простой асимптотической формулой (13) из § 3 для функции $h_v^{(1)}(k_0 z \cos \omega)$ в подынтегральном выражении в формуле (10). Более точное приближение получается при использовании формулы Дебая [§ 4, формула (77a)]. Если k_0 — большой параметр, то, пользуясь этой формулой для всех цилиндрических функций в подынтегральном выражении (10), можно найти коротковолновую часть поля излучения. Такое приближение справедливо для всех точек наблюдения, удаленных от источника на большое число длин волн. Чтобы сформулировать этот результат в виде, пригодном при любой зависимости показателя преломления от координат, а не только в частном случае (1), необходимо записать соотношение (77a) из § 4 в виде ВКБ-приближения [гл. 3, § 5, формула (37)]:

$$H_s^{(1,2)}(k_0 z \cos \omega) \sim \left(\frac{2}{\pi k_0 z \cos \omega \cos \beta} \right)^{1/2} e^{\pm i k_0 z \cos \omega [\cos \beta + (\beta - \pi/2) \sin \beta] \mp i\pi/4} \sim \left(\frac{2}{\pi k_0 z \sqrt{n^2(z) - \sin^2 \omega}} \right)^{1/2} \exp \left[\pm i k_0 \int_{z_w}^z \sqrt{n^2(\zeta) - \sin^2 \omega} d\zeta \mp i\pi/4 \right], \quad (18)$$

где

$$n^2(z) = 1 - \frac{s^2 - 1/4}{k_0^2 z^2}, \quad s^2 = p^2 + \frac{1}{4}, \quad z_w = \frac{s}{k_0 \cos \omega}, \quad (19a)$$

$$n(z_w) = \sin \omega,$$

$$\sin \beta \equiv \frac{s}{k_0 z \cos \omega} \approx \sqrt{1 - n^2(z \cos \omega)}, \quad \cos \beta \approx n(z \cos \omega). \quad (19b)$$

Асимптотическое представление (18) можно использовать вдоль всего контура интегрирования при условии, что контур обходит окрестность точки $\omega = \pi/2$ (гл. 6, приложение 1). Приближенное соотношение (19b) справедливо при достаточно больших s , так что можно считать $s^2 - 1/4 \approx s^2$. Это предположение вместе с формулой

$$\int_{z_w}^z \sqrt{1 - \frac{s^2}{k_0^2 \zeta^2} - \sin^2 \omega} d\zeta = z \cos \omega \left[\cos \beta + \left(\beta - \frac{\pi}{2} \right) \sin \beta \right] \quad (20)$$

было использовано для перехода от выражения (18) к (19). На основании выражения (19) решение (10a) дифференциального уравнения (3) можно представить в виде, пригодном (асимптотически при больших k_0) при *любом* показателе преломления, если только он возрастает монотонно от единицы при $z = \infty$ и не содержит точек поворота или особенностей в интересующем нас интервале. Это следует из сравнения данного выражения с выражением (356) из § 8, полученным более общим методом для частного случая $d = 0$. Последующая асимптотическая оценка производится так же, как в § 8, п. «г», и допускает геометрическую интерпретацию всюду вдоль траекторий лучей на фиг. 61.

Форма лучей в приближении геометрической оптики

Рассмотрим теперь семейство лучей, уравнения которых даются формулами (18) и (28) из § 8, в случае обратноквадратичной зависимости показателя преломления $n(z) = \sqrt{\epsilon(z)/\epsilon_0}$, даваемого формулой (1). В этом случае интегрирование удается провести в явном виде; в результате оказывается, что лучи образуют семейство гипербол, уравнение которых имеет вид

$$(z'^2 - z^2) \sin^2 \phi_c + y^2 (\cos^2 \phi_c + \operatorname{ctg}^2 \alpha) + 2z'y \sin^2 \phi_c \operatorname{ctg} \alpha = 0, \quad (21)$$

где $\phi_c = \arcsin [n(z')] —$ угол, которым определяется протяженность освещенной области на бесконечности (фиг. 61), а α или $\pi + \alpha$ — угол (измеряемый от положительного направления оси z), под которым луч выходит из источника в точке $(0, z')$. Соотношение между углом α и углом наклона луча на бесконечности $\phi = \omega_s$ находим из формулы (18) § 8 [см. также § 8, формула (41)]:

$$\left. \frac{dy}{dz} \right|_{(0, z')} = \frac{\sin \phi}{\sqrt{\cos^2 \phi - (p^2/k_0^2 z'^2)}} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (22)$$

Каустика также представляет собой гиперболу, уравнение которой получается исключением параметра $\operatorname{ctg} \alpha$ из уравнения (21) и его производной по $\operatorname{ctg} \alpha$ [27]:

$$\frac{z^2}{z'^2 \cos^2 \phi_c} - \frac{y^2}{z'^2 \sin^2 \phi_c} = 1. \quad (23)$$

Каустика касается линии $z = z' \cos \phi_c = p/k_0$, на которой показатель преломления $n(z) = 0$. На фиг. 62 представлено семейство лучей для случая $\phi_c = \pi/4$. Если имеется отражающая плоскость (фиг. 61), то в точках пересечения ее с лучами возникают отраженные лучи. В этом случае освещенная область ограничена касательным лучом C (фиг. 61) до точки его касания с каустикой, а затем — каустикой.

вательно, условие поперечного резонанса имеет вид

$$k_0 \int_{z_i}^d \sqrt{n^2(\eta) - a_m^2} d\eta = \left(m + \frac{3}{4}\right) \pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (24)$$

где $n^2(z_i) = a_m^2$. Этот интеграл был вычислен ранее [формула (20)], так что мы получаем соотношение

$$k_0 d \cos \theta_m \left[\cos \beta_m + \left(\beta_m - \frac{\pi}{2}\right) \sin \beta_m \right] = \left(m + \frac{3}{4}\right) \pi, \quad (24a)$$

$$a_m = \sin \theta_m, \quad \beta_m = \arcsin \left(\frac{p}{k_0 d \cos \theta_m} \right).$$

Область применимости этого соотношения устанавливается путем сравнения с точным решением. Рассматривая распространение двумерных H -волн относительно оси z (т. е. $\mathbf{E} = E_x \mathbf{x}_0$ и $\partial/\partial x \equiv 0$), мы ищем решение $Q(y, z)$ однородного уравнения (36) из § 8: $[\nabla^2 + k^2(z)] Q(y, z) = 0$, ограниченное при $z = 0$ и обращающееся в нуль при $z = d$. Согласно формуле (3а), это решение таково:

$$Q(y, z) = \exp(i\eta_l y) \sqrt{z} J_s(\sqrt{k_0^2 - \eta_l^2} z), \quad s = \sqrt{p^2 + \frac{1}{4}} \approx p, \quad (25)$$

где η_l удовлетворяет уравнению

$$J_s(\sqrt{k_0^2 - \eta_l^2} d) = 0. \quad (25a)$$

Если χ_l — l -й корень уравнения $J_s(\chi) = 0$, то

$$\eta_l = \sqrt{k_0^2 - \frac{\chi_l^2}{d^2}}. \quad (26)$$

Корни χ_l положительны и действительны и образуют возрастающую последовательность, так что волновые числа η_l при распространении вдоль оси y действительны только при $\chi_l < k_0 d$; если же $\chi_l > k_0 d$, то η_l — мнимая величина и, следовательно, волны не распространяются вдоль оси y . Таким образом, рассматриваемые волны аналогичны волнам в круглом волноводе с идеально проводящими стенками и однородным диэлектрическим заполнением. Особой точке показателя преломления при $x = 0$ соответствует виртуальная граница, так что область оказывается замкнутым волноводом. Функции Бесселя, входящие в выражение (25), можно записать в виде $J_s(\chi_l z/d)$. Поскольку $J_s(\chi)$ при $s \geq \chi$ — убывающая функция, l -я волна, распространяющаяся в направлении оси z , осциллирует при $z > sd/\chi_l$ и затухает при

$z < sd/\chi_l$. Эффективная высота волновода для l -й волны равна $d - z_l$, где

$$z_l = \frac{s}{\chi_l} d = z_0 \frac{k_0 d}{\chi_l}. \quad (27)$$

Данное равенство вытекает из определения $n^2(z_0) = 0$. Таким образом, высота волновода увеличивается с ростом номера l . Волновая функция Q не меняется при изменении $\eta_l y$ на 2π ; длина волны

$$\lambda_l = \frac{2\pi}{\eta_l} \quad (28)$$

увеличивается с ростом l .

Приближенные значения нулей χ_l можно найти, заменив функцию $J_s(\chi)$ асимптотическим выражением (77а) из § 4, справедливым при больших s и при $1 - s/\chi \gg \chi^{-2/3}$. Тогда получим уравнение

$$\cos \left\{ \chi \left[\cos \beta + \left(\beta - \frac{\pi}{2} \right) \sin \beta \right] - \frac{\pi}{4} \right\} = 0, \quad \sin \beta = \frac{s}{\chi} \approx \frac{p}{\chi}. \quad (29)$$

Если положить $\eta = k_0 \sin \theta$, $\chi = k_0 d \cos \theta$, то уравнение (29) совпадает с уравнением (24), откуда следует, что приближение геометрической оптики пригодно для вычисления нулей высшего порядка функции $J_s(\chi)$.

Излучение линейного источника

Если линейный электрический ток находится в области $0 < z < d$ (фиг. 60, а; см. также фиг. 63, б), то эквивалентная схема для собственной волны, изображенная на фиг. 60, б, должна быть заменена схемой, представленной на фиг. 64. Величины $\vec{V}_i(z)$ и $\overleftarrow{V}_i(z)$ в выражении (4) должны быть теперь такими:

$$\overleftarrow{V}_i(z) = j_v(\kappa z), \quad \vec{V}_i(z) = h_v^{(1)}(\kappa z) - \frac{h_v^{(1)}(\kappa d)}{h_v^{(2)}(\kappa d)} h_v^{(2)}(\kappa z), \quad (30)$$

чтобы обеспечивалось выполнение граничных условий $\overleftarrow{V}_i(0) = 0 = \vec{V}_i(d)$. При этом [гл. 3, § 3, формула (14а)] получаем следующее выражение для собственной функции Грина [при временной зависимости вида $\exp(-i\omega t)$]:

$$g''_{zi}(z, z') = -\frac{i\pi}{4} \sqrt{zz'} [H_s^{(1)}(\kappa z_{>}) H_s^{(2)}(\kappa d) - H_s^{(2)}(\kappa z_{>}) H_s^{(1)}(\kappa d)] \frac{J_s(\kappa z_{<})}{J_s(\kappa d)}, \quad (31)$$

где $s = v + 1/2$ и $\kappa = \sqrt{k_0^2 - \eta^2}$. Подстановка в формулу (13а) из § 2 (с учетом замены j на $-i$) или в формулу (36) из § 8

§ 8, вычисление которых методом стационарной фазы непосредственно дает решение в приближении геометрической оптики. Функцию Бесселя в числителе выражения (31) легко разбить на два члена, содержащих требуемые функции Ханкеля. Для получения аналогичного разбиения функции $J_s(\kappa d)$, стоящей в знаменателе, воспользуемся разложением в степенной ряд

$$\frac{1}{2J_s(\kappa d)} = \frac{1}{H_s^{(2)}(\kappa d)} [1 + t(\kappa d)]^{-1} = \frac{1}{H_s^{(2)}(\kappa d)} \sum_{m=0}^{\infty} (-t)^m, \quad t = \frac{H_s^{(1)}(\kappa d)}{H_s^{(2)}(\kappa d)}, \quad (35)$$

который сходится при $|t| < 1$. Контур интегрирования можно слегка деформировать для выполнения этого условия. Подстановка в формулу (31) данного параграфа и (36) из § 8 приводит к следующим рядам:

$$\bar{G}'' = \sum_{m=0}^{\infty} G_m, \quad (36)$$

где G_m — сумма четырех интегралов:

$$G_m = \sum_{i=1}^4 g_i, \quad (37)$$

$$g_{1,2} = (-1)^m \frac{i\sqrt{zz'}}{8} \int_{-\infty}^{\infty} H_s^{(2,1)}(\kappa z_{<}) H_s^{(1)}(\kappa z_{>}) t^m e^{i\eta|y-y'|} d\eta, \quad (37a)$$

$$g_{3,4} = (-1)^{m+1} \frac{i\sqrt{zz'}}{8} \int_{-\infty}^{\infty} H_s^{(2,1)}(\kappa z_{<}) H_s^{(2)}(\kappa z_{>}) t^{m+1} e^{i\eta|y-y'|} d\eta. \quad (37b)$$

Поскольку $z, z' < d$ и $\text{Im } \kappa \geq 0$, на основании асимптотической формулы (13) из § 3 можно показать, что интегралы сходятся. Но каждый член ряда для g''_{zi} теперь не является четной функцией переменной η ; следовательно, точка $\eta = 0$ есть точка ветвления, и мы определяем контур интегрирования исходя из условия $\text{Im } \kappa \geq 0$.

Подстановка ВКБ-приближения (19) для различных функций Ханкеля сводит эти выражения к общему виду, остающемуся пригодным даже в случае (медленно меняющегося) показателя преломления, отличного от представленного на фиг. 63, а. После замены $\eta = k_0 \sin \omega$ асимптотическая оценка интеграла проводится так же, как в § 8, п. «г», и мы ее здесь приводить не

будем. Но мы исследуем различные седловые точки и сопоставим их с лучами на фиг. 63, б. Седловые точки определяются следующими уравнениями (для удобства принято $y' = 0$):

$$y = \begin{cases} \sin \omega_s \left[\int_{z_<}^{z_>} \frac{d\zeta}{\sqrt{n^2(\zeta) - \sin^2 \omega_s}} + 2m \int_{z_t}^d \frac{d\zeta}{\sqrt{n^2(\zeta) - \sin^2 \omega_s}} \right] & \text{для } g_1, \quad (38a) \\ \sin \omega_s \left[\int_{z_t}^z + \int_{z_t}^{z'} + 2m \int_{z_t}^d \right] & \text{для } g_2, \quad (38b) \\ \sin \omega_s \left[\int_z^{z_t} + \int_{z'}^{z_t} + (2m+2) \int_{z_t}^d \right] = \sin \omega_s \left[\int_{z'}^d + \int_z^d + 2m \int_{z_t}^d \right] & \text{для } g_3, \quad (38b) \\ \sin \omega_s \left[\int_{z_>}^{z_<} + (2m+2) \int_{z_t}^d \right] = \sin \omega_s \left[\int_{z_>}^d + \int_{z_t}^{z_<} + \int_{z_t}^d + 2m \int_{z_t}^d \right] & \text{для } g_4, \quad (38r) \end{cases}$$

где все подынтегральные выражения имеют такой же вид, как и в формуле (38a), а $n(z_t) = \sin \omega_s$.

Чтобы показать, что этими уравнениями определяются лучи, соответствующие приближению геометрической оптики, построим кривые в случае, когда ω_s — заданное положительное число в интервале $0 < \sin \omega_s < n(d)$, где $n(d)$ — значение показателя преломления вблизи плоскости $z = d$. Если в точке $F(0, z')$, где расположен источник, мы имеем $n(z') > 0$ и если $\sin \omega_s < n(z')$, то уравнениям (38) соответствует семейство лучей, изображенных на фиг. 66. Как отмечалось в § 8, п. «г», лучи касаются прямой линии $z = z_t$, а при $z \rightarrow \infty$ образуют угол ω_s с осью z . Можно выделить две отдельные группы лучей: первая образована лучами, приходящими в граничную точку A непосредственно от источника F , вторая — лучами, распространяющимися сначала в обратном направлении и затем поворачивающимися назад в точке A' . Напомним, что лучи идут направо (налево), когда точка наблюдения является верхним (нижним) пределом в интеграле. При $m = 0$ уравнение (38a) описывает падающие лучи FA' ($z < z'$) и FA ($z > z'$); при $m = 1$ — падающие лучи $F'C'$ и $F'C$, соответствующие первому повторению цикла периодичности; при $m = 2$ — лучи $F''E'$ и $F''E$ и т. д. Уравнение (38b) при $m = 0$ описывает отраженный луч $A'B'$, при $m = 1$ — луч $C'D'$ и т. д. Уравнение (38b) описывает при $m = 0$

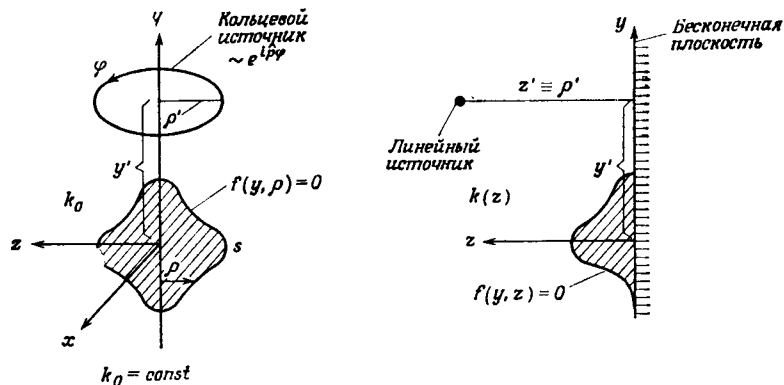
следующим граничным условиям:

$$\dot{G} = \gamma \frac{\partial \dot{G}}{\partial n} \text{ на } S, \quad (42a)$$

где n — направление нормали к контуру S , а γ — некоторая постоянная. Выполняя преобразование (40), получаем

$$\bar{G} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial n} - \frac{1}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial n} \right) \bar{G} \text{ на } S. \quad (42b)$$

В данном соотношении выражается то обстоятельство, что при $\gamma = 0$ условие $\dot{G} = 0$ на контуре S требует также обращения в



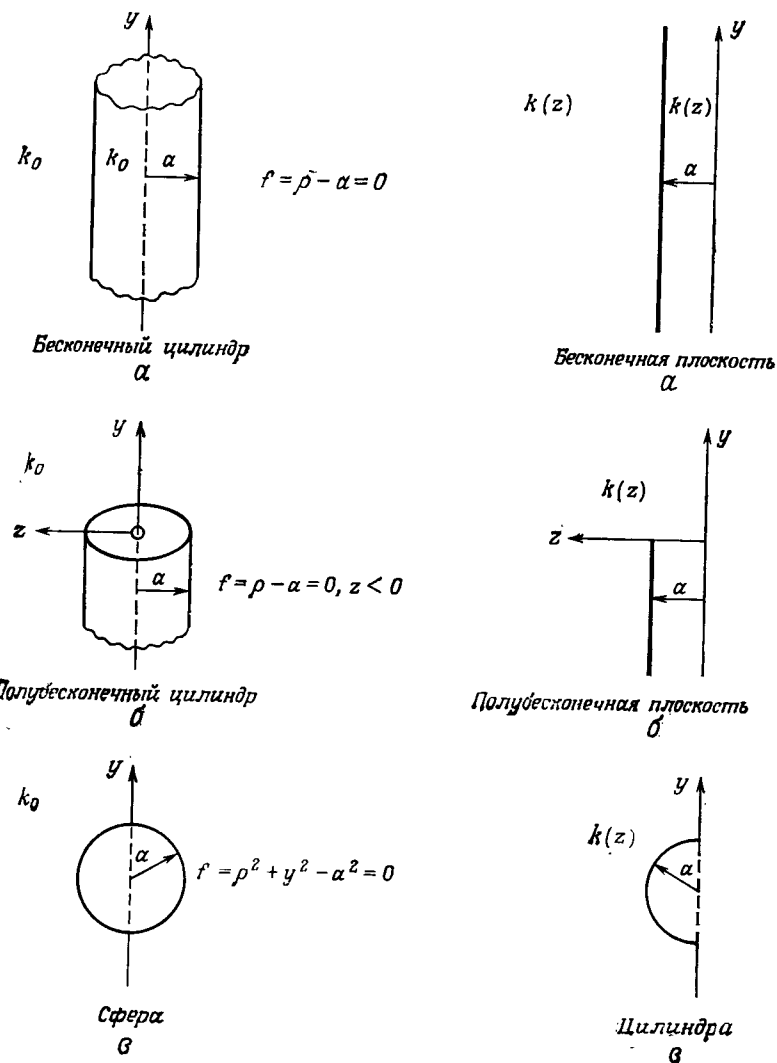
Фиг. 67. Эквивалентные дифракционные задачи.

$$\text{Справа } k(z) = k_0 \left(1 - \frac{\rho^2 - 1/4}{k_0^2 z^2} \right)^{1/2}.$$

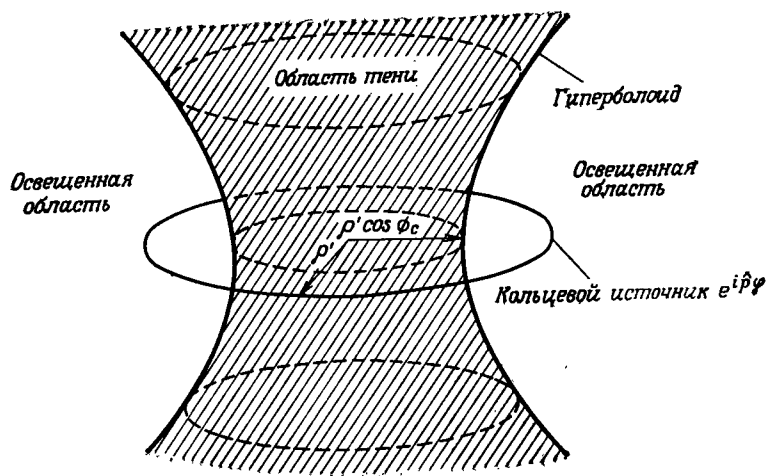
нуль функции \bar{G} на этом контуре. Поскольку в рассматриваемом случае функция $\bar{G}(y, z; y', z')$ пропорциональна электрическому полю E_x [§ 8, формула (1), и § 4, формула (31)], последнее граничное условие пригодно в случае идеально проводящих препятствий в неоднородной среде, описываемых уравнением $f(y, z) = 0$. Поэтому такой класс дифракционных задач в случае неоднородной среды при возбуждении линейным источником эквивалентен классу задач в случае свободного пространства, когда препятствие обладает симметрией вращения, а поле возбуждается кольцевым источником (фиг. 67). Поскольку показатель преломления $n^2(0) = -\infty$, поле обращается в нуль на плоскости $z = 0$ и потому не возмущается из-за наличия проводящей плоскости. На фиг. 68 и 69 представлены различные эквивалентные конфигурации. Отметим, что показатель преломления может изменяться произвольно (но монотонно) вдоль поверхностей, изображенных на фиг. 68, в и 69, а и б, для которых известно точное

Трехмерные конфигурации
(возбуждение кольцевым источником)

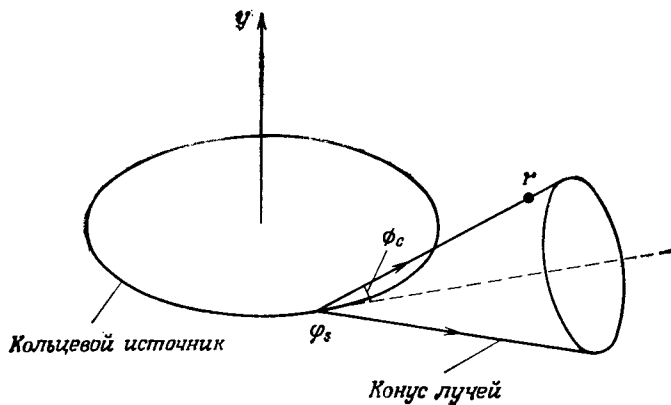
Двумерные конфигурации
(возбуждение линейным источником)



Фиг. 68. Некоторые эквивалентные структуры.



а

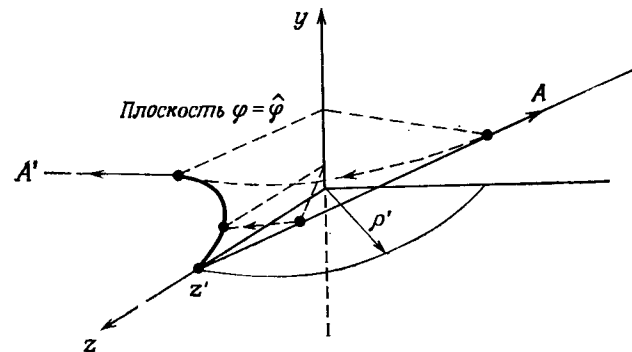


б

Фиг. 70. Излучение кольцевого источника с фазой, изменяющейся вдоль кольца пропорционально $e^{i\beta\varphi}$.
а — освещенная и теневая области; б — конус лучей.

нию (43), лежат на правильном круговом конусе с полным углом при вершине $2\varphi_c$; вершина расположена при $\varphi' = \varphi_c$, а ось является касательной к кольцу (фиг. 70, б). Как явствует из фиг. 22 и 26 (с учетом замены $\psi \rightarrow \varphi_c$), этот конус образован лучами, испускаемыми элементом кольцевого источника $\varphi' = \varphi_c$. Каустику, соответствующую уравнению (46), можно найти поворотом конуса лучей на фиг. 70, б вокруг оси кольца.

Исходя из найденного решения можно найти траектории лучей, испускаемых линейным источником в неоднородной среде: фазовую функцию для первой задачи получим из фазовой функции для второй, если исключим переменную φ [формулы (39) и (40)], заменив ρ координатой z , а переменную y оставив без из-



Фиг. 71. Соответствие между лучами кольцевого и линейного источников. А — луч кольцевого источника; А' — луч (в плоскости yz) линейного источника.

менения. При геометрической интерпретации дело обстоит так: элемент лучевой поверхности (ρ, φ, y) в задаче с кольцевым источником переходит в элемент поверхности $(\rho = z, y)$, где координаты z и y во второй задаче соответствуют координатам ρ и y в первой. Как показано на фиг. 71, лучи в двумерной задаче строятся путем поворота трехмерных лучей вокруг оси y в радиальной плоскости $\varphi = \hat{\varphi}$, пересекающей кольцо в точке испускания луча. Такое построение делает очевидным следующее: точки поворота в неоднородной среде совпадают с точками наибольшего приближения луча к оси y в задаче для кольцевого источника, прямой и преломленный лучи проходят через каждую точку (z_1, y_1) в освещенной области (сечением конуса лучей плоскостью $y = y_1$ является гипербола, которая пересекается в двух точках с цилиндром $\rho = z_1$, и лучам, проходящим через эти точки, соответствуют лучи плоской задачи); каустикой для освещенной области является гипербола (23).

Для получения уравнения, описывающего лучи, испускаемые источником в неоднородной среде под углом α к положитель-

причем κ_1 — постоянная распространения в среде слева от переходной области, ширина которой определяется величиной τ . Если $|z|$ и $|z'|$ достаточно велики, так что $\exp(\tau z)$ и $\exp(\tau z')$ очень малы, то множители в квадратных скобках в выражениях (51а) и (51б) очень медленно меняются и почти не отличаются от единицы [гл. 3, § 6, формула (21в)], а потому их можно рассматривать как возмущение поля падающей и отраженной волн.

Для проверки соотношений (51) рассмотрим предельный случай, когда $\nu = 0$ (однородная среда от $z = -\infty$ до $z = +\infty$) и $\tau = \infty$ (скачкообразное изменение диэлектрической проницаемости в плоскости $z = 0$). Если $\nu = 0$, то $\alpha = 1$, $\beta = 1 + (2i\kappa_2/\tau) = \gamma$, $\kappa_2 = \sqrt{k_0^2 - \xi^2}$. Поскольку $\Gamma(0) = \infty$, мы имеем $A = 0$ в выражении (51в). Кроме того,

$$F(\alpha, \beta; \beta; \xi) = (1 - \xi)^{-\alpha}, \quad F(\alpha, \beta; \alpha; \xi) = (1 - \xi)^{-\beta}, \quad (52)$$

так что выражение в квадратных скобках в формуле (51а) равно единице, чем обеспечивается правильное выражение для функции Грина свободного пространства. При $\tau = \infty$ выражения в квадратных скобках в формулах (51а) и (51б) также равны единице. В этом случае $\alpha = \beta = \gamma \rightarrow 1$, а точнее

$$1 - \beta = -\frac{i}{\tau}(\kappa_1 + \kappa_2), \quad 1 - \gamma = -\frac{2i}{\tau}\kappa_1, \quad \gamma - \beta = \frac{i}{\tau}(\kappa_1 - \kappa_2), \quad (53а)$$

что вместе с формулой

$$\Gamma(\omega) = \frac{1}{\omega} + O(1) \quad \text{при } \omega \rightarrow 0 \quad (53б)$$

приводит к следующему выражению для коэффициента отражения A [см. также гл. 3, § 6, формула (30б)]:

$$A = \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2}, \quad \kappa_1 = \sqrt{k_0^2(1 + \nu) - \xi^2}, \quad \kappa_2 = \sqrt{k_0^2 - \xi^2}; \quad (54)$$

данное выражение совпадает с выражением (54в) из § 5 для скачкообразного перехода. Собственная функция Грина, как и должно быть, переходит в функцию, полученную в § 5, п. «г».

Подставив выражение (49) в формулы (11) или (13) из § 2, можно найти функцию Грина для задачи об излучении продольного магнитного диполя или поперечного линейного электрического тока в среде с диэлектрической проницаемостью (48). Чтобы обеспечить однозначность подынтегрального выражения на контуре интегрирования, проходящем от $\xi = -\infty$ до $\xi = \infty$ вдоль действительной оси ξ (или таким же образом вдоль действительной оси η), необходимо исследовать особенности функции $g_{zi}''(z, z')$. Напомним [гл. 3, § 6, формулы (37)], что по определению квадратные корни имеют положительную мнимую

часть, если подкоренное выражение отрицательно. Легко показать, что в таком случае интегралы экспоненциально сходятся при $|\xi| \rightarrow \infty$. Функция $g_{zi}''(z, z')$ имеет точку ветвления первого порядка при $\kappa_{1,2} = 0$, т. е. при

$$\xi = \pm k_0, \quad \xi = \pm k_0 \sqrt{1 + \nu}. \quad (55)$$

В то же время функция $\Gamma(\omega)$ имеет простые полюсы в точках $\omega = -n = 0, -1, -2, \dots$, функция $F(\alpha, \beta; \gamma; \xi)$ имеет простые полюсы, совпадающие с полюсами функции $\Gamma(\gamma)$ и, в частности [4],

$$\lim_{\gamma \rightarrow -n} \frac{F(\alpha, \beta; \gamma; \xi)}{\Gamma(\gamma)} = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n)}{(n+1)!} \times \\ \times \xi^{n+1} F(\alpha+n+1, \beta+n+1; n+2; \xi). \quad (56)$$

Кроме того, функция $\Gamma(\omega)$ не имеет нулей. Из сказанного ясно, что функции g_1 и g_2 имеют простые полюсы при $\gamma = -n$; но более детальное исследование на основе формулы (56) показывает, что сумма $g_1 + g_2$ регулярна при $\gamma = -n$. Функция g_1 или g_2 имеет также полюсы в комплексной плоскости в точках ξ , где $2 - \gamma = -n$, $1 - \beta = -n$, $\alpha + 1 - \gamma = -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ (57)

Соотношения (57) могут выполняться только в том случае, когда γ, β и $\alpha - \gamma$ — действительные величины (т. е. κ_1 и κ_2 мнимые). Если они выполняются, то соответствующие решения при $\kappa_{1,2} = i|\kappa_{1,2}|$ описывают поверхностные волны, каждая из которых удовлетворяет условию излучения при $z \rightarrow \pm\infty$; они образуют дискретную ветвь спектра волн, которые могут распространяться вдоль неоднородности в направлении, перпендикулярном оси z . Но исследование уравнений (57) и выражений (37) из гл. 3, § 6, показывает, что подобных решений нет. Если разрезы проведены таким образом, что $\text{Im } \kappa_{1,2} > 0$ на верхнем листе четырехлистной римановой поверхности ξ , то на этом листе нет полюсов и контур интегрирования проходит так, как показано на фиг. 8, а.

Асимптотическая оценка интегралов (11) и (13) из § 2 при произвольных z и z' весьма затруднительна. Но если $|z|$ и $|z'|$ достаточно велики, так что множители в квадратных скобках в выражениях (51а) и (51б) можно считать медленно меняющимися, то асимптотическую оценку интегралов можно провести тем же способом, что и в § 3, п. «г». Седловые точки, соответствующие частям g_1 и g_2 подынтегрального выражения, расположены при $\xi_s = k_0(1 + \nu)\sin\theta$, где θ — угол между осью z и радиус-вектором, проведенным в точку наблюдения (ρ, z) в первом случае из точки источника (ρ', z') , а во втором — из точки изображения $(\rho', -z')$. Асимптотическое приближение в первом порядке (в котором пренебрегают вкладом интеграла вдоль разреза, описывающего вторичные волны) дает выражение, анало-

6. Электрические токи, параллельные оси z , распределены на цилиндрической поверхности $\rho = \rho'$ по закону $\exp(im\varphi)$, где m — целое число. Составляющая электрического поля E_z , возбуждаемого такими токами, пропорциональна скалярному потенциалу $u(\rho, \varphi; \rho')$, который определяется уравнением

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k^2\right) u(\rho, \varphi; \rho') = -\frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho'} e^{im\varphi} \quad (8)$$

и условием излучения на бесконечности [предполагается временная зависимость вида $\exp(-i\omega t)$].

Показать, что потенциал u дается выражением

$$u(\rho, \varphi; \rho') = \frac{\pi i}{2} J_m(k\rho_{<}) H_m^{(1)}(k\rho_{>}) e^{im\varphi}. \quad (9)$$

Положив $k\rho' \gg 1$ и $(m/k\rho') < 1$, на основании асимптотической формулы Дебая (77) из § 4 вывести асимптотическое выражение для u . Показать, что это выражение совпадает с геометрическим выражением, полученным в задаче 29 гл. 1.

7. Исходя из асимптотического разложения монохроматической двумерной функции Грина свободного пространства

$$\bar{G}_f(\hat{\rho}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k\hat{\rho}) = \frac{e^{i(k\hat{\rho} + \pi/4)}}{2\sqrt{2\pi k\hat{\rho}}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(0, m)}{(2ik\hat{\rho})^m}, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad (10)$$

где

$$(0, m) \equiv \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot (2m-1)^2}{2^{2m} m!}, \quad (0, 0) \equiv 1, \quad (10a)$$

и формул (80) и (81) из гл. 1, § 7, исследовать поведение монохроматической функции Грина \hat{G}_f вблизи волнового фронта. Проверить правильность полученного результата путем разложения точного решения [§ 4, формула (42)] $\hat{G}_f = \{4\pi^2 [t^2 - (\hat{\rho}/\bar{c})^2]\}^{-1/2} U(\bar{c}t - \hat{\rho})$ в ряд вблизи точки $\bar{c}t = \hat{\rho}$.

8. В диэлектрике без дисперсии и потерь, заполняющем полупространство (фиг. 33), в точке $\hat{\rho}' = (0, z')$, $z' < 0$ имеется направленный вдоль оси x импульсный электрический ток с плотностью $\hat{J}(\mathbf{r}, t) = I \hat{\delta}(t) \delta(\hat{\rho} - \hat{\rho}') \mathbf{x}_0$. Электромагнитное поле можно вычислить, найдя зависящую от времени двумерную функцию Грина $\hat{G}_{1,2}$ [§ 5, формула (65)]. Если $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, где ε_1 и ε_2 — диэлектрические проницаемости областей $z < 0$ и $z > 0$, то функция \hat{G}_1 в области $z < 0$ дается выражениями (66) и (67) из § 5,

Показать, что в случае, когда $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, выражения (66) и (67) остаются верными при $\phi < \arcsin \sqrt{\varepsilon}$, где $\varepsilon = \varepsilon_2/\varepsilon_1$, а ϕ — угол наблюдения, измеряемый от точки изображения на фиг. 33. Показать, что в случае $\phi > \arcsin \sqrt{\varepsilon}$ в полупространстве $z < 0$

к указанному выражению необходимо добавить функцию \hat{G}_b , имеющую [при временной зависимости $\exp(-i\omega t)$] следующий вид:

$$\bar{G}_b = \frac{i}{4\pi} \int_{P_1} e^{-s(R/\bar{c}_1) \cos(\omega - \phi)} \Gamma(k_1 \sin \omega) d\omega, \quad (11)$$

где R — расстояние от точки изображения, \bar{c}_1 — скорость распространения волны в области $z < 0$,

$$\Gamma(k_1 \sin \omega) = \frac{\cos \omega - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \omega}}{\cos \omega + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \omega}}, \quad (11a)$$

а P_1 — контур интегрирования, идущий от точки $\omega = \phi + i0$ до точки $\omega = \phi - i0$ вокруг точки ветвления $\omega_b = \arcsin \sqrt{\varepsilon}$, причем разрез проводится вдоль линии $\text{Re} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \omega} = 0$. С учетом формул (19)–(23) из § 2 показать, что во временном представлении функция Грина имеет вид

$$\hat{G}_b = -\text{Im} \left(\frac{\cos \beta + i \sqrt{\sin^2 \beta - \varepsilon}}{\cos \beta - i \sqrt{\sin^2 \beta - \varepsilon}} \right) \times \\ \times \frac{U(\phi - \arcsin \sqrt{\varepsilon}) U\{t - [(R/\bar{c}_1) \cos(\omega_b - \phi)]\} U[(R/\bar{c}_1) - t]}{2\pi \sqrt{(R/\bar{c}_1)^2 - t^2}}, \quad (12)$$

где $\beta = \phi + \arccos(\bar{c}_1 t/R)$, а $U(\alpha) = 1$ при $\alpha > 0$ и $U(\alpha) = 0$ при $\alpha < 0$. Показать, что выражению (12) соответствует боковая волна, связь которой с падающей и отраженной волнами такая же, как на фиг. 34 при $z' = 0$. Изобразите схематически волновые фронты падающей, отраженной и боковой волн при $z' \neq 0$ и укажите область, где существует боковая волна.

9. Пусть в полубесконечной диэлектрической среде, ограниченной плоскостью раздела $z' = 0$ (фиг. 33), распределенный источник возбуждает только H -волны относительно оси z .

а. Показать, что в точках наблюдения, расположенных на границе раздела ($z = 0$), напряжение собственной волны таково:

$$V = -\frac{2}{k_1^2 - k_2^2} \left[\frac{d^2}{dz^2} V_{f1} - \frac{d^2}{dz^2} V_{f2} \right]_{z=z'=0}, \quad (13)$$

где $k_\alpha^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, а $V_{f\alpha}$ — напряжение в бесконечной линии передачи, эквивалентной среде с номером α .

б. Поскольку возбуждаются только H -волны, электромагнитное поле можно определить, вычислив соответствующую скалярную функцию Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. На основе принципа суперпозиции собственных волн показать, что при $z = z' = 0$ функцию G можно выразить через элементарные функции Грина $G_{f\alpha}$ для не-

из радиальной линии передачи (§ 6, п. «а») и объяснить полученное выражение.

13. Поле излучения монохроматического линейного электрического тока в плоскостной среде с показателем преломления $n(z)$ в приближении геометрической оптики дается выражением (27) из § 8. Это выражение справедливо, если точка наблюдения лежит на выходящем из источника луче в промежутке между источником и точкой поворота z_i (если такая имеется), где $n(z_i) = a$ (a — параметр луча). Исходя из уравнения для преломленного луча [§ 8, формула (28)] вывести выражение для поля, пригодное для части луча за точкой поворота. Показать, что результат согласуется с асимптотической оценкой точного решения [§ 8, формула (55)].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stratton J. A.*, Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, New York, 1941 (имеется перевод: *Дж. А. Страттон*, Теория электромагнетизма, Гостехиздат, М., 1948).
2. *Morse P. M., Feshbach H.*, Methods of Theoretical Physics, McGraw-Hill, New York, 1953, Sec. 4.8 (имеется перевод: *Ф. Морс, Г. Феибах*, Методы теоретической физики, ИЛ, 1958).
3. *Knopp K.*, Theory of Functions, Pt. II, Dover Publications, New York, 1947, Sec. II.
4. *Magnus W., Oberhettinger F.*, Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics, Chelsea Publishing Co., New York, 1954, p. 22.
5. *Tamir T., Oliner A. A.*, Proc. IEE (London), **110**, 310 (1963).
6. *Clemmow P. C.*, Proc. IEE (London), **110**, 107 (1963).
7. *Sommerfeld A. N.*, Partial Differential Equations in Physics, Academic Press, 1949 (имеется перевод: *А. Зоммерфельд*, Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики, ИЛ, 1950).
8. *Франк И. М., Тамм И. Е.*, ДАН СССР, **14**, 109 (1937).
9. *Panofsky W. K. H., Phillips M.*, Classical Electricity and Magnetism, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1962, Ch. 19 (имеется перевод: *В. Пановский, М. Филипс*, Классическая электродинамика, М., 1963).
10. *Бреховских Л. М.*, Волны в слоистых средах, Изд-во АН СССР, М., 1957.
11. *Baños A.*, Dipole Radiation in the Presence of a Conducting Half Space, Pergamon Press, New York, 1966.
12. *Wait J. R.*, Electromagnetic Waves in Stratified Media, Macmillan, New York, 1962, Ch. 2.
13. *Clemmow P. C.*, The Plane Wave Spectrum Representation of Electromagnetic Fields, Pergamon Press, New York, 1966, Ch. 5.
14. *Фок В. А.*, Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн, Изд-во «Советское радио», М., 1970.
15. *de Hoop A. T., Frankena H. J.*, Appl. Sci. Res., **B8**, 369 (1960).
16. *Jones D. S.*, The Theory of Electromagnetism, Macmillan, New York, 1964, Sec. 10.1.
17. *Ситенко А. Г., Ткалич В. С.*, ЖТФ, **29**, 1074 (1959).
18. *Collin R. E.*, Field Theory of Guided Waves, McGraw-Hill, New York, 1960.
19. *Cullen A. L.*, Proc. IEE (London), **101**, Part IV (1954); **104**, Part C (1957).
20. *Barlow H. E. M., Brown J.*, Radio Surface Waves, Oxford University Press, London, 1962, Ch. 12.
21. *Kay A. F.*, IRE Trans. on Antennas and Propagation, **AP-7**, № 1 (1959).

22. *Seckler B. D., Keller J. B.*, Journ. Acoust. Soc., **31**, 192 (1959); **31**, 206 (1959).
23. *Ludwig D.*, Comm. Pure and Appl. Math., **19**, 215 (1966).
24. *Кравцов Ю. А.*, Изв. вузов, «Радиофизика», **7**, 664 (1964).
25. *Budden K. G.*, The Waveguide Mode Theory of Wave Propagation, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1961, Ch. 8.
26. *Watson G. N.*, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1944, Ch. 15 (имеется перевод: *Г. Н. Ватсон*, Теория бесселевых функций, ИЛ, 1949).
27. *Courant R.*, Differential and Integral Calculus, Vol. II, Interscience, New York, 1947, Sec. 3.5.
28. *Bremmer H.*, Terrestrial Radio Waves, Elsevier Publishing Co., New York, 1949, Ch. 8, 9.
29. *Bremmer H.*, в книге: Handbuch der Physik, Bd. 16, Berlin, S. 350.
30. *Felsen L. B., Levey L.*, IEEE Trans. on Antennas and Propagation, **AP-14**, 308 (1966).
31. *Epstein P. S.*, Proc. Natl. Acad. Sci. (USA), **16**, 627 (1930).
32. *Eckart C.*, Phys. Rev., **35**, 1303 (1930).
33. *Rawer K.*, Ann. dd. Physik, **35**, 385 (1939).
34. *Eckart G.*, Wellenoptische Behandlung der Strahlung eines magnetischen Dipols in einem eben geschichteten Medium mittels der Methode von Epstein, Bayerische Akad. d. Wissenschaften, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse, München, BRD, 1960.
35. *Леонтович М. А.*, в книге: «Исследования по распространению радиоволн», Изд-во АН СССР, М., 1948.
36. *Senior T. B. A.*, Appl. Sci. Res., **B8** (1960).

ного источника, исходя из соответствующих результатов для двумерного линейного источника. Поскольку в уравнение границы тени входят только угловые координаты, можно предположить, что дифрагированные поля в области тени лучше всего описываются с помощью бегущих по углу волн. Справедливость такого предположения подтверждается анализом (§ 3—7), который показывает, что угловое представление для полей дает решение, содержащее в явном виде квазиоптические (геометрооптические и дифракционные) члены, которые можно приближенно вычислить при высоких частотах. В диапазоне же низких частот невозможно четко различить хорошо освещенную и затененную области и для приближенного вычисления полей удобно использовать быстрее сходящееся при таких частотах радиальное представление. Хотя представление в виде набора бегущих вдоль оси z волн не дает никаких преимуществ при расчете полей, когда имеется препятствие типа изображенного на фиг. 74, оно может служить удобной исходной формулой при выводе других представлений скалярных функций $\mathcal{P}(r, r')$ и $\mathcal{P}''(r, r')$, а следовательно, и общих выражений для векторного электромагнитного поля. Эти общие положения развиваются в § 2 (цилиндрическая геометрия) и в § 8, п. «б» (сферическая геометрия).

При высоких частотах поле в освещенной и затененной областях можно почти всюду характеризовать лучами, которые распространяются локально как плоские волны и позволяют объяснить не только эффекты геометрической оптики, но и дифракционные эффекты. Такой подход непригоден вблизи границ области существования определенного типа лучей. Примером может служить, например, граница свет — тень для падающих лучей или аналогичная граница для геометрически отраженных лучей. В подобных переходных областях поля изменяются настолько быстро, что локальное представление в виде плоских волн, справедливое в том случае, когда поля изменяются слабо на длине порядка длины волны в плоскости постоянной фазы, оказывается непригодным. Хотя угловые размеры таких областей очень малы (фиг. 80 и 85, случай цилиндрической геометрии), их роль велика, поскольку именно в этих областях происходит плавный переход от одного типа геометрооптического поля к другому. В следующих параграфах подробно изучаются негармонические функции для клина. Ввиду того, что тень образуется, как отмечалось ранее, одинаково в случаях точечного источника, линейного источника и источника плоских волн, соответствующие негармонические функции тоже обнаруживают сходство.

Сказанное выше о возможности замены волновых фронтов лучами относится и к случаю импульсных источников, так как между гармоническим по времени высокочастотным полем и негармоническим полем в момент прихода различных волновых

фронтов существует тесная связь (гл. 1, § 6, п. «в»). Оказывается, однако, что негармонический отклик для различных конфигураций клина можно вычислить в замкнутой форме во все моменты наблюдения, и это позволяет проследить за поведением поля как непосредственно после прихода волнового фронта, так и по истечении длительного периода времени. Особое внимание уделяется задаче об идеально проводящей полуплоскости, которая является одной из классических дифракционных задач при импульсном и гармоническом возбуждении.

Поскольку угловое представление является основным при квазиоптическом описании полей, естественно исследовать вначале те конфигурации, которые наиболее просто анализируются с помощью бегущих по углу волн. Как и в случае областей, которые описываются бегущими вдоль прямолинейной оси координат волнами, к такого рода конфигурациям относятся двусторонне согласованные (неотражающие) структуры. В угловых координатах условие согласования выполняется на «идеально поглощающих» границах при $\varphi = 0, \phi$ в случае цилиндрической и при $\theta = \theta_{1,2}$ в случае сферической геометрии (т. 1, фиг. 87). Согласованное граничное условие эквивалентно представлению о бесконечном угловом пространстве, в котором распространяющаяся волна не испытывает отражений. Такое понятие бесконечного углового пространства, введенное в гл. 3, § 4, п. «б», используется и в данной главе. На основании решений, полученных в случае идеально поглощающих границ, можно методом изображений (мнимых источников) синтезировать эффекты, обусловленные либо наличием отражающих границ при $\varphi = 0, \phi$ или $\theta = \theta_{1,2}$, либо условием периодичности в отсутствие физических границ в угловом пространстве (гл. 3, § 4, п. «б»). Метод изображений позволяет выявить различия между областями с распространением поля вдоль прямолинейной и криволинейной координат. В областях первого типа все изображения видны из точки, где расположен источник, а потому они дают вклад в геометрооптическое поле; в областях же второго типа удаленные изображения заслонены из-за «кривизны пространства» и дают вклад только в дифрагированное поле.

§ 2. ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ

а. Вычисление полей на основании скалярных потенциалов

Электромагнитные поля произвольно ориентированного гармонического по времени элемента электрического или магнитного тока при наличии идеально проводящего препятствия, изображенного на фиг. 74, можно выразить, как в гл. 5, § 2, п. «а»,

Интересно отметить, что для описания неоднородных по z конфигураций или поглощающих границ не требуется никаких других компонент полей, кроме приведенных в формулах (16) и (26). Более того, если внутренние относительно поверхности z области заполнены произвольным однородным по z диэлектриком, необходимо лишь соответствующим образом модифицировать граничные условия. Читатель может убедиться, что набор компонент, приведенных в формулах (16) и (26), достаточен для удовлетворения условий непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей.

б. Угловое представление

В угловом представлении скалярные функции Грина G' и G'' или \bar{G}' и \bar{G}'' выражаются через собственные функции в пространстве (ρ, z) и одномерные функции Грина вдоль угловой координаты φ . Ввиду инвариантности структуры на фиг. 74 по отношению к перемещениям вдоль оси z трехмерные функции G' и G'' связаны с двумерными \bar{G}' и \bar{G}'' преобразованием (3в). Для простоты исследование различных задач дифракции будет проводиться в основном для двух измерений; соответствующие результаты для трехмерной геометрии, относящиеся к возбуждению точечным источником, будут выведены из двумерной задачи.

В случае двумерного (не зависящего от z) гармонического по времени источника условие полноты для собственных функций радиального оператора

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + k^2$$

из формулы (3) записывается в следующем общем виде [гл. 3, § 4, формулы (91) и (94д)]:

$$\rho' \delta(\rho - \rho') = \sum_p \Phi_p(k\rho) \bar{\Phi}_p(k\rho'), \quad (4)$$

где $\Phi_p(k\rho)$ — собственная радиальная функция, а $\bar{\Phi}_p(k\rho')$ — сопряженная собственная функция, приведенные в гл. 3, § 4, п. «в», для различных граничных условий. В трехмерном случае при гармонической зависимости от времени и при $-\infty < z < \infty$ зависящая от ρ и z часть оператора $\nabla^2 + k^2$, а именно

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2,$$

превращается в алгебраическое выражение для двумерных собственных функций, удовлетворяющих условию полноты

$$\begin{aligned} \rho' \delta(\rho - \rho') \delta(z - z') &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sum_p e^{i\xi(z-z')} \Phi_p(\sqrt{k^2 - \xi^2} \rho) \bar{\Phi}_p(\sqrt{k^2 - \xi^2} \rho'), \quad (5) \end{aligned}$$

которое получается из результата для двумерного случая (4) по правилу, указанному в формуле (3в): величина k в формуле (4) заменяется величиной $\sqrt{k^2 - \xi^2}$, а затем выполняется операция

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp[i\xi(z - z')].$$

При импульсном возбуждении k^2 в левой части формулы (3) или в соответствующем трехмерном выражении заменяется временным оператором $-\partial^2/\partial t^2$, превращающимся в алгебраическое выражение для собственных функций, которые удовлетворяют условию полноты

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t')} d\omega, \quad \omega = k\bar{c}. \quad (6)$$

Соответствующие условия полноты для

$$\rho' \delta(\rho - \rho') \delta(t - t') \quad \text{и} \quad \rho' \delta(\rho - \rho') \delta(z - z') \delta(t - t')$$

получаются затем применением интегрального оператора (6) к формулам (4) и (5), относящимся к случаю гармонической зависимости от времени (см. также гл. 5, § 2, п. «в»).

В угловом представлении зависимость от координаты φ определяется угловой функцией Грина $g_{\varphi\rho}(\varphi, \varphi')$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \rho^2 \right) g_{\varphi\rho}(\varphi, \varphi') = -\delta(\varphi - \varphi') \quad (7)$$

с соответствующими граничными условиями на концах области определения φ . В гл. 3, § 4, п. «б», приведены различные решения (7), позволяющие получать формальные выражения для скалярных функций Грина методом, изложенным в гл. 3, § 3, п. «в».

Гармонический линейный источник

Двумерные функции Грина \bar{G}' и \bar{G}'' удовлетворяют уравнению (3), и на основании формул (4) и (7) можно написать его формальное решение:

$$\bar{G}(\rho, \rho') = \sum_p \Phi_p(k\rho) \bar{\Phi}_p(k\rho') g_{\varphi\rho}(\varphi, \varphi'). \quad (8)$$

Явный вид функций Φ_p и $g_{\varphi\rho}$ для E - и H -волн зависит от конкретной формы границ клинообразной или цилиндрической конфигурации, изображенной на фиг. 74.

с необходимыми граничными условиями. Очевидно, что

$$u_{\text{пад}}(\mathbf{r}; \theta', \varphi'; k) = \bar{u}_{\text{пад}}(\rho, \varphi'; k \sin \theta') e^{-ikz \cos \theta'} \quad (17)$$

и, поскольку конфигурация на фиг. 74 однородна по z , волновая функция u имеет такую же зависимость от z . Таким образом, не зависящий от z множитель в функции u удовлетворяет двумерному волновому уравнению, в котором величина k заменена величиной $k \sin \theta'$, так что

$$u(\mathbf{r}; \theta', \varphi'; k) = \bar{u}(\rho, \varphi'; k \sin \theta') e^{-ikz \cos \theta'}. \quad (18)$$

В связи с замечаниями, сделанными после формулы (5), отметим, что переменная ζ равна постоянной величине $k \cos \theta'$ и необходимость интегрирования по ζ отпадает, а $\sqrt{k^2 - \zeta^2} \rightarrow k \sin \theta'$.

Все сказанное выше нельзя непосредственно применить к скалярным функциям \mathcal{P}' и \mathcal{P}'' , поскольку поперечная часть дифференциального оператора $(\nabla_i^2 + \partial^2/\partial z^2 + k^2)\nabla_i^2$ в формуле (2) из гл. 5, § 2, становится алгебраическим выражением в z -представлении, но не в φ -представлении [гл. 5, § 2, формула (5) с заменой $\nabla_i^2 = -k_i^2$]. В этом случае лучше воспользоваться контурным интегралом, полученным из формулы (5) гл. 5, § 2 (гл. 3, § 3, п. «в»), и вывести угловое представление из z -представления, деформировав контур интегрирования в комплексной плоскости k_i . Полученные таким способом результаты аналогичны выражениям для G' и G'' , но только содержат дополнительный множитель, соответствующий величине $1/k_i^2$ в формулах (5а) и (5б) из гл. 5, § 2, и могут содержать вклад дополнительного полюса $k_i = 0$ в комплексной k_i -плоскости.

Прежде чем переходить к применению полученных результатов, напомним, что разложения по собственным функциям (8), (10), (12) и (14) являются формальными и их можно использовать только для класса «представимых» функций (т. е. функций, для которых эти разложения сходятся). В связи с несколько аномальным поведением радиальных собственных функций $\Phi_p(k\rho)$ [§ 3, замечания после формулы (1)] разложения сходятся лишь при определенном взаимном расположении источника и точки наблюдения. При произвольном же взаимном расположении источника и точки наблюдения нужно обращаться к модифицированной процедуре [§ 3, формула (8)].

§ 3. ЗАДАЧИ О КЛИНЕ (ТЕХНИКА ИНТЕГРИРОВАНИЯ)

К первому классу задач, которые мы будем рассматривать, относятся геометрические конфигурации, получающиеся, когда на фиг. 74 радиус цилиндра a стремится к нулю. Граничные условия для области $0 < \rho < \infty$ состоят из условия излучения

при $\rho \rightarrow \infty$ и условия ограниченности при $\rho = 0$, которое ставит предел возрастанию полей вблизи ребра клина (гл. 1, § 5, п. «б»). Соответствующее условие полноты дается теоремой Лебедева — Конторовича [гл. 3, § 4, формула (94б)]:

$$\begin{aligned} \rho' \delta(\rho - \rho') &= \frac{1}{2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \mu J_\mu(k\rho) H_\mu^{(1)}(k\rho') d\mu = \\ &= \frac{1}{4} \int_{-i\infty}^{i\infty} \mu H_\mu^{(1)}(k\rho) H_\mu^{(1)}(k\rho') d\mu = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{i\infty} \mu (1 - e^{i2\mu\pi}) H_\mu^{(1)}(k\rho) H_\mu^{(1)}(k\rho') d\mu. \end{aligned} \quad (1a)$$

Сравнивая эти выражения с формулой (4) из § 2, можно установить вид собственных функций $\Phi_p(k\rho)$ и $\bar{\Phi}_p(k\rho)$, где p — непрерывный индекс в формулах (1) — обозначен через μ^1 . Подстановка выражений (1) в формулы (8), (10), (12) и (14) из § 2 дает модальное представление двумерных и трехмерных функций Грина на основе собственной функции Грина $g_{\varphi p}(\varphi, \varphi') \rightarrow g(\varphi, \varphi'; \mu)$, явный вид которой зависит от используемых граничных условий на гранях клина при $\varphi = 0$ и $\varphi = \phi$ (индекс φ у функции g_φ будем для удобства опускать). Из формулы (19а) приложения 1 следует, что, поскольку при $\mu \rightarrow i\infty$ функция $H_\mu^{(1)}(k\rho)$ растет как $\exp(|\mu|\pi/2)$, разложение по радиальным собственным функциям (угловое представление) можно использовать только в том случае, когда $g(\varphi, \varphi'; \mu)$ убывает быстрее множителя $\exp(|\mu|\pi)$ под знаком интеграла в формуле (16). Так как в силу формул (1) из § 4 и (2) из § 5

$$g(\varphi, \varphi'; \mu) \propto \exp(-|\mu||\varphi - \varphi'|) \quad \text{при } \mu \rightarrow i\infty, \quad (2)$$

разложение применимо при $|\varphi - \varphi'| > \pi$ (т. е. в области геометрической тени).

Следствия такой аномальной сходимости разложения подробно анализируются в случае двумерной функции Грина для задачи о возбуждении линейным гармоническим источником.

¹⁾ В остальной части данной главы μ будет обозначать параметр разделения. Его не следует путать с магнитной проницаемостью, которая всюду в других разделах книги обозначается той же буквой.

где $D(w)$ — функция, регулярная в точке w_p . Следовательно, величина \bar{G} отличается от величины, даваемой формулой (5), вычетом в полюсе w_p , так что при всех $|\varphi - \varphi'|$

$$\bar{G}(\rho, \rho') = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\rho - \rho'|) U(\pi - |\varphi - \varphi'|) + \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(k\chi) A(\varphi, \varphi'; w) dw, \\ |\rho - \rho'| = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi')}, \quad (8)$$

где $U(x) = 1$ при $x > 0$ и $U(x) = 0$ при $x < 0$, а под A подразумевается результат интегрирования в формуле (6). Первый член выражения (8), функция Грина для свободного пространства [§ 4, формула (25)], отличен от нуля лишь в «освещенной» области $|\varphi - \varphi'| < \pi$ (фиг. 75), из которой виден источник. Второй же член представляет собой поправку к полю в свободном пространстве и учитывает дифракционные эффекты, обусловленные наличием клина. Отметим, что зависимость дифракционного поля от (ρ, ρ') одинакова и в освещенной, и в затененной областях. Если функция $A(\varphi, \varphi'; w)$ имеет другие полюсы, пересекающие путь интегрирования при определенных значениях φ, φ' , то их вклады нужно учесть аналогичным образом. Эти вклады дополнительных полюсов описывают отраженное поле в геометрической оптике (§ 5).

Асимптотическое приближение

Для асимптотической оценки дифракционного интеграла в формуле (8) методом наибыстрейшего спуска необходимо исследовать аналитические свойства квадратного корня для χ из формулы (5) в плоскости комплексной переменной w . Функция χ имеет точки ветвления первого порядка при

$$w = w_b = \pm \left[n\pi \pm i \operatorname{Argh} \left(\frac{a^2}{2\rho\rho'} \right) \right], \quad n = 1, 3, 5, \dots, \quad (9)$$

где $a^2 = \rho^2 + \rho'^2 > 2\rho\rho'$. Если провести разрезы вдоль линий $\operatorname{Re} \chi = 0$ (фиг. 76), то знак $\operatorname{Re} \chi$ может измениться лишь при пересечении разреза. На верхнем листе римановой поверхности мы полагаем

$$\chi = \rho + \rho' > 0, \quad \text{когда } w = 0, \quad (10)$$

и $\operatorname{Re} \chi > 0$ на всем остальном верхнем листе. Знак $\operatorname{Im} \chi$ изменяется при пересечении кривых $\operatorname{Im} \chi = 0$, изображенных пунктиром на фиг. 76. При определении знака $\operatorname{Im} \chi$ в разных областях

нужно исходить из того, что вблизи точки ветвления

$$\frac{\chi}{\sqrt{2\rho\rho'}} \approx \sqrt{i(w - w_b) \operatorname{sh} w_{bi}}, \quad w \approx w_b, \quad (11)$$

где величина $\sqrt{w - w_b}$ определена таким образом, что $\operatorname{Re} \chi > 0$. Например, при $w_b = \pi + i|w_{bi}|$ мы имеем $\sqrt{w - w_b} = \sqrt{|w - w_b|} e^{i\alpha/2}$, $\pi/2 > \alpha > -3\pi/2$, т. е. $\arg \chi = \alpha/2 + \pi/4$. Следовательно, $\operatorname{Im} \chi > 0$ при $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ и $\operatorname{Im} \chi < 0$ при $-3\pi/2 < \alpha < -\pi/2$. Проводя такие же рассуждения применительно к другим точкам ветвления, получаем знаки $\operatorname{Im} \chi$ во всей плоскости w , показанные на фиг. 76. На основании этого исследования и асимптотического поведения функции $H_0^{(1)}(x) \propto \exp(ix)$ при $x \rightarrow \infty$ можно заключить, что контур интегрирования в формуле (8) можно сместить с мнимой оси и совместить с контуром P (фиг. 76), вдоль которого $\operatorname{Im} \chi > 0$.

Если произведение $k\rho$ или $k\rho'$ в формуле (8) велико, то χ тоже становится большой величиной и функцию Ханкеля можно заменить ее асимптотическим выражением (136) из § 3:

$$H_\mu^{(1)}(k\chi) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k\chi}} e^{i(k\chi - \pi/4 - \mu\pi/2)}, \quad |k\chi| \gg |\mu|. \quad (12)$$

Тогда подынтегральная функция будет содержать экспоненциальный множитель $\exp[ik\chi(w)]$, где k играет роль большого параметра, и, следовательно, соответствующая седловая точка функции $\chi(w)$ расположена при $w = 0$; функции A , представляющие для нас интерес, не содержат экспоненциальной зависимости от w . На основании формулы (5) из гл. 4, § 2, заключаем, что вдоль пути наибыстрейшего спуска (ПНС) при $w = 0$

$$\arg dw = \arg \sqrt{\frac{-2}{i\chi''(0)}} = -\frac{\pi}{4}, \quad (13)$$

т. е. ПНС пересекает седловую точку под углом -45° . В общем случае можно написать вдоль ПНС $\chi(w) = \chi(0) + is^2$, $s^2 > 0$, так что

$$\operatorname{Re} \chi(w) = \operatorname{Re} \chi(0) = \rho + \rho'. \quad (14)$$

При $w_i \rightarrow i\infty$ мы имеем $\cos w \rightarrow (\operatorname{ch} w_i) e^{-iw_r}$ и $\chi(w) \rightarrow \rightarrow [2\rho\rho' \cos w]^{1/2}$. Величина $\operatorname{Re} \chi(w)$ должна быть конечной [формула (14)], а потому $w_r \rightarrow \mp\pi$ при $w_i \rightarrow \pm\infty$. Поскольку между мнимой осью и ПНС особенностей нет, можно исходный контур деформировать в ПНС и полученный интеграл вычислить по формуле (16) из гл. 4, § 2. В результате получим с точностью до $O(1/\sqrt{k\rho})$ или $O(1/\sqrt{k\rho'})$ при $|\varphi - \varphi'| \approx \pi$ (т. е. когда по-

где $x = \tau \omega_p$ — расстояние от этой кривой (параболы) до границы тени, причем, когда ρ' — очень большая величина, множитель τ приблизительно равен координате вдоль границы тени (фиг. 80). Из фиг. 115, а т. 1 явствует, что асимптотическое выражение (18а) достаточно точно при $\xi \geq 3$, так что в формуле (19) мы можем положить $\xi_m = 3$; если нужна более высокая точность, то можно взять большее значение величины ξ_m .

С учетом формул (16) и (17) получаем следующую поправку \bar{G}' к \bar{G} для переходной области $|\varphi - \varphi'| \approx \pi$:

$$\bar{G}'(\rho, \rho') = -\frac{1}{2} C(k\rho + k\rho') \operatorname{sign}(\pi - |\varphi - \varphi'|) \left[F(\xi) - \frac{e^{i\pi/4}}{\xi \sqrt{2\pi}} \right], \quad (20)$$

где ξ и $C(\alpha)$ — величины, даваемые формулами (17б) и (15а), а $\tau = \rho\rho'/(\rho + \rho')$. Если это выражение добавить в формулу (15), то она будет справедливой при любом положении точки наблюдения. Интересно, что при $|\varphi - \varphi'| \rightarrow \pi$ мы имеем $F(\xi) \rightarrow 1$ и сумма выражений (15) и (20) принимает вид

$$\bar{G}(\rho, \rho') \sim \frac{1}{2} \bar{G}_{\text{пад}} + O\left(\frac{1}{k\sqrt{\rho\rho'}}\right), \quad |\varphi - \varphi'| = \pi, \quad (21)$$

где $\bar{G}_{\text{пад}}$ — волновая функция падающей волны:

$$\bar{G}_{\text{пад}} = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\rho - \rho'|) \sim C(k\rho + k\rho'); \quad (21а)$$

здесь было учтено, что $|\rho - \rho'| \rightarrow (\rho + \rho')$ при $|\varphi - \varphi'| = \pi$. Таким образом, при больших $k\rho$ и $k\rho'$ поле на границе тени равно половине поля падающей волны.

Мы рассмотрели лишь случай, когда функция A в формуле (7) имеет один полюс при $\omega_p = \pi - |\varphi - \varphi'|$; если A имеет другие полюсы, описывающие отраженные волны, то в угловых областях, соответствующих каждому полюсу, возникают сходные переходные явления.

6. Гармоническое возбуждение плоской волной и точечным источником

Решение в интегральном представлении

Если сместить линейный источник на бесконечность ($\rho' \rightarrow \infty$) вдоль угловой координаты φ' , то в пределе получится результат, соответствующий падению плоской волны. В этом случае одну из функций Ханкеля в формуле (3) можно заменить ее асимптотической формой (12). Хотя параметр μ в формуле (3) изменяется в бесконечных пределах, подынтегральная функция убывает по экспоненте с ростом μ , и можно показать, что ошиб-

ка, вносимая при использовании формулы (12), при любых μ пропорциональна величине $\exp(-\alpha N)$, где $\alpha = |\varphi - \varphi'| - \pi$ и $1 \ll N \ll k\rho'$, причем $N \geq |\mu|$ для значений параметра μ , при которых справедлива формула (12). При $\rho' \rightarrow \infty$ величину N можно сделать сколь угодно большой, и тогда ошибка будет стремиться к нулю. Используя для $H_\mu^{(1)}(k\rho)$ интегральное представление при мнимых μ

$$H_\mu^{(1)}(k\rho) = \frac{1}{\pi} \int_{i\infty}^{-i\infty} e^{ik\rho \cos \omega + i\mu(\omega - \pi/2)} d\omega, \quad (22)$$

получим выражение, сходное с (8), если произвести замену

$$\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 + 2\rho\rho' \cos \beta}) \rightarrow C(k\rho') e^{ik\rho \cos \beta}, \quad (23)$$

где $C(k\rho')$ — величина, даваемая формулой (15а). Если амплитуда падающей волны равна единице, то $C \equiv 1$ [§ 4, формула (30б)] и для волновой функции имеем

$$\bar{u}(\rho; \varphi') = e^{-ik\rho \cos(\varphi - \varphi')} U(\pi - |\varphi - \varphi'|) - \frac{i}{2\pi} \int_{i\infty}^{-i\infty} e^{ik\rho \cos \omega} A(\varphi, \varphi'; \omega) d\omega, \quad (24)$$

где A — результат интегрирования в формуле (6). Первый член в выражении (24) соответствует полю падающей волны, а второй — дифракционному полю [см. замечания, сделанные после формулы (8) относительно возможных вкладов отраженных волн]. Результат для случая наклонного падения плоской волны можно получить из формулы (18) § 2.

Трехмерная скалярная функция Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ для случая возбуждения точечным источником, расположенным в точке $\mathbf{r}' = (\rho', \varphi', z')$, получается из формулы (8), если воспользоваться правилом, сформулированным в § 2 после формулы (5). Поскольку k входит лишь в аргумент функций Ханкеля, примененные формулы (12г) из гл. 5, § 4,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(\sqrt{k^2 - \xi^2} q) e^{i\xi z} d\xi = -2i \frac{e^{ik\sqrt{q^2 + \rho^2}}}{\sqrt{q^2 + \rho^2}} \quad (25)$$

сразу же дает результат

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} U(\pi - |\varphi - \varphi'|) - \frac{i}{8\pi^2} \int_{i\infty}^{-i\infty} \frac{e^{ik\gamma}}{\gamma} A(\varphi, \varphi'; \omega) d\omega, \quad (26)$$

(37) или (38) из гл. 1, § 6. Именно такой вид имеют выражения (24) и (26), и потому негармонический отклик при возбуждении плоской волной или точечным источником можно вычислить прямо по формуле (39) из гл. 1, § 6 (см. также гл. 5, § 2, п. «в»; буквой A здесь обозначена другая величина).

Поскольку гармоническая по времени плоская волна $\exp[-ik\rho \cos(\varphi - \varphi')]$ соответствует импульсу плоской волны $\delta[t - t' + (\rho/\bar{c}) \cos(\varphi - \varphi')]$, негармонический отклик при наличии клина выражается на основании формулы (24) данного параграфа и формулы (39) из гл. 1, § 6, при произвольных ρ, ρ', t, t' в виде

$$\hat{u}(\rho, \varphi'; t) = \delta\left(t - t' + \frac{\rho}{\bar{c}} \cos(\varphi - \varphi')\right) U(\pi - |\varphi - \varphi'|) - \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{Re} A[\varphi, \varphi'; i \operatorname{Arch}(\bar{c}(t - t')/\rho)]}{\sqrt{(t - t')^2 - (\rho/\bar{c})^2}} U\left(t - t' - \frac{\rho}{\bar{c}}\right), \quad (32)$$

где \bar{c} — скорость распространения сигнала в среде, $A(\varphi, \varphi'; \omega)$ — результат интегрирования в формуле (6). Первый член в выражении (32) описывает падающий импульс плоской волны в освещенной области на фиг. 75, а второй — дифрагированное поле. Поскольку падающий импульс достигает ребра клина $\rho = 0$ лишь в момент $t = t'$, дифракция происходит только при $t > t'$. Дифрагированный импульс распространяется в виде цилиндрической волны, исходящей из ребра клина, и он эквивалентен полю линейного источника [гл. 5, § 4, формула (42)], расположенного на ребре клина, с учетом амплитудного множителя $\operatorname{Re} A$. О других физических следствиях говорится в связи с примерами в § 4 и 5 (фиг. 81). Если у функции $A(\varphi, \varphi'; \omega)$, кроме полюса $\omega = \pi - |\varphi - \varphi'|$, имеются другие полюсы, то возникают дополнительные импульсы плоских волн, описывающие отраженное поле геометрической оптики [см. замечания после формулы (8) и § 5].

При возбуждении импульсным точечным источником функция Грина $\hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')$, удовлетворяющая уравнению (13) из § 2 при произвольных $\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t'$, получается на основе формулы (26) так, как говорится в гл. 1, § 6, после формулы (37):

$$\hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') = \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/\bar{c})}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} U(\pi - |\varphi - \varphi'|) + \frac{\bar{c}}{4\pi} \frac{\operatorname{Re} A(\varphi, \varphi'; i\beta)}{\rho\rho' \operatorname{sh} \beta} U(t - t' - l/\bar{c}), \quad (33)$$

где $\beta = \operatorname{Arch}\{[\bar{c}^2(t - t')^2 - \rho^2 - \rho'^2 - (z - z')^2]/2\rho\rho'\}$, а l — величина, даваемая формулой (30б). Интерпретируется этот результат так же, как и ранее полученный [фиг. 79 и формула

(146) из гл. 5, § 4, а также замечания о дополнительных вкладах функции A].

Двумерная функция Грина (8) не обладает структурой выражения (37) из гл. 1, § 6, так что непосредственно использовать формулы из гл. 5, § 2, п. «в», нельзя (вспомним иное значение символа A в гл. 5, § 2, п. «в»). Но необходимый результат можно получить после некоторых предварительных преобразований. Полагая $k \rightarrow is/\bar{c}$, где s — положительная величина и \bar{c} — скорость света в окружающей среде, и вспоминая, что

$$H_v^{(1)}(iz) = \frac{2}{\pi i} e^{-iv\pi/2} K_v(z), \quad (34)$$

где $K_v(z)$ — модифицированная функция Бесселя, получаем

$$\bar{G}(\rho, \rho') = \frac{1}{2\pi} K_0\left(s \frac{|\rho - \rho'|}{\bar{c}}\right) U(\pi - |\varphi - \varphi'|) + I(\rho, \rho'; s), \quad (35)$$

где

$$I(\rho, \rho'; s) = \frac{i}{4\pi^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} K_0\left(\frac{s}{c} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 + 2\rho\rho' \cos \omega}\right) A(\varphi, \varphi'; \omega) d\omega. \quad (36)$$

Обратное преобразование Лапласа для первого члена в выражении (35) дается формулой (42) из гл. 5, § 4. Для преобразования второго члена к виду (34) из гл. 1, § 6, воспользуемся формулой

$$K_0(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t^2 - 1}} dt, \quad x > 0, \quad (37)$$

в результате чего получим

$$I(\rho, \rho'; s) = \frac{i}{4\pi^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\omega A(\varphi, \varphi'; \omega) \int_{f(\beta)}^\infty \frac{e^{-s\tau}}{\sqrt{\tau^2 - f^2/\bar{c}^2}} d\tau, \quad (38)$$

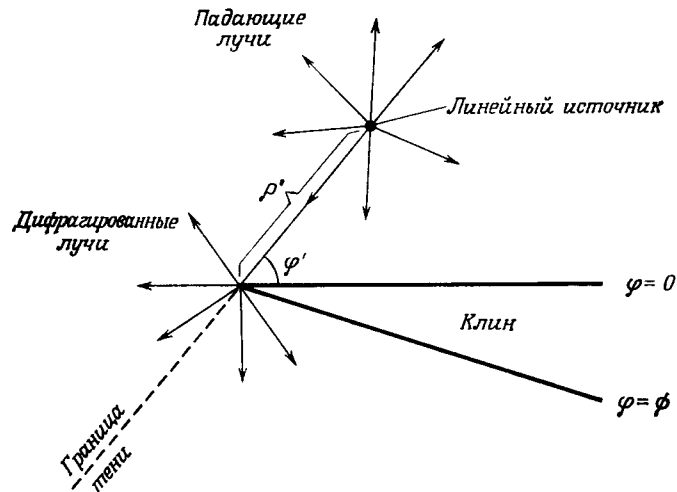
где

$$f \equiv f(\beta) = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 + 2\rho\rho' \operatorname{ch} \beta} > 0, \quad \beta = -i\omega. \quad (38a)$$

Нужный результат получается после изменения порядка интегрирования в формуле (38) по области $f(\beta) < \bar{c}\tau < \infty$ и $-\infty < \beta < \infty$. После изменения порядка интегрирования $-\psi(\tau) < \beta < \psi(\tau)$, $\psi(\tau) = \operatorname{Arch}[(\bar{c}^2\tau^2 - \rho^2 - \rho'^2)/2\rho\rho']$, а $f(0) < \bar{c}\tau < \infty$. В результате имеем

$$I(\rho, \rho'; s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} Q(\tau) d\tau, \quad (39)$$

то электромагнитные поля E_z , H_ρ , H_φ и H_z , E_ρ , E_φ , возбуждаемые в первом случае электрическим, а во втором магнитным током, можно найти, если известна двумерная скалярная функция Грина [§ 2, формулы (1) и (2)]. Поскольку граничные условия на идеально поглощающих гранях клина в обоих случаях одинаковы, функции Грина для E - и H -волн совпадают, и мы будем



Фиг. 77. Идеально поглощающий клин и линейный источник.

обозначать их символом $\bar{G}_\infty(\rho, \rho')$. Эта функция удовлетворяет неоднородному волновому уравнению

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k^2\right) \bar{G}_\infty(\rho, \rho') = -\frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho'} \delta(\varphi - \varphi') \quad (4)$$

в области $0 < (\rho, \rho') < \infty$, $-\infty < (\varphi, \varphi') < \infty$, а также условию ограниченности при $\rho = 0$ и условию излучения при $\rho \rightarrow \infty$, $|\varphi| \rightarrow \infty$. Индекс ∞ означает, что решение найдено в предположении, что угол φ может изменяться в бесконечных пределах $-\infty < \varphi < \infty$. Решение для области геометрической тени $|\varphi - \varphi'| > \pi$ получается из формулы (3) § 3 и формулы (1) данного параграфа:

$$\bar{G}_\infty(\rho, \rho') = \frac{i}{8} \int_0^{i\infty} (1 - e^{2i\mu\pi}) e^{i\mu|\varphi - \varphi'|} H_\mu^{(1)}(k\rho) H_\mu^{(1)}(k\rho') d\mu, \quad (5)$$

а из формулы (8) § 3 и формулы (2) данного параграфа получается результат, справедливый при всех значениях $|\varphi - \varphi'|$. Если $k\rho \gg 1$ и $k\rho' \gg 1$, но $|\varphi - \varphi'| \not\approx \pi$, то справедливо асим-

птотическое приближение [§ 3, формула (15)]:

$$\bar{G}_\infty \sim \bar{G}_\infty^o + \bar{G}_\infty^d, \quad (6)$$

$$\bar{G}_\infty^o = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\rho - \rho'|) U(\pi - |\varphi - \varphi'|), \quad (6a)$$

$$\bar{G}_\infty^d = -2A(\varphi, \varphi'; 0) C(k\rho) C(k\rho') = -iA(\varphi, \varphi'; 0) \frac{e^{ik(\rho + \rho')}}{4\pi k \sqrt{\rho\rho'}}, \quad (6b)$$

$$A(\varphi, \varphi'; 0) = \frac{1}{\pi - |\varphi - \varphi'|} + \frac{1}{\pi + |\varphi - \varphi'|}; \quad (6v)$$

при произвольных же значениях величины $|\varphi - \varphi'|$ к выражению (6) следует добавить негармоническую поправку [§ 3, формула (20)]:

$$\bar{G}_\infty^t(\rho, \rho') = -\frac{e^{i|k(\rho + \rho') + \pi/4|}}{4\sqrt{2\pi k(\rho + \rho')}} \left[F(\xi) - \frac{e^{i\pi/4}}{\xi\sqrt{2\pi}} \right] \text{sign}(\pi - |\varphi - \varphi'|), \quad (7)$$

где

$$\xi = \sqrt{\frac{k\rho\rho'}{\rho + \rho'}} \left| \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right|, \quad (7a)$$

$F(\xi)$ — функция, даваемая формулой (18) из § 3, $U(\alpha)$ — единичная функция Хевисайда, а $C(\alpha)$ — функция, даваемая формулой (15a) из § 3.

Замечания

Член \bar{G}_∞^o дает падающее поле в освещенной области $|\varphi - \varphi'| < \pi$, а \bar{G}_∞^d — с точностью до $O(1/\sqrt{k\rho})$ и $O(1/\sqrt{k\rho'})$ дифрагированное поле вне переходной области у границы тени [члены более высокого порядка вычисляются в формуле (9)]. Дифрагированное поле, содержащее множитель $C(k\rho)$, можно интерпретировать как цилиндрическую волну, расходящуюся от ребра клина, угловое распределение которой определяется множителем $-2A(\varphi, \varphi'; 0)$. Эта волна возбуждается цилиндрической волной, идущей от источника, причем множитель $C(k\rho')$ характеризует амплитуду падающей волны на ребре клина. Все сказанное можно наглядно представить, изобразив дифрагированные лучи (гл. 1, § 7, п. «г»). На фиг. 77 падающее поле изображается в виде лучей, выходящих радиально из источника; амплитуда падающей волны вдоль луча дается выражением

$$\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\rho - \rho'|) \sim C(k|\rho - \rho'|) = \frac{e^{i(k|\rho - \rho'| + \pi/4)}}{2\sqrt{2\pi k|\rho - \rho'|}}.$$

Падающие лучи имеются во всей освещенной области $|\varphi - \varphi'| < \pi$. Попадая на поверхность клина, луч полностью по-

при $|\varphi - \varphi'| > \pi$. Очевидно, что член наимизшего порядка $C(k\rho)C(k\rho')I_{00}(\varphi, \varphi')$ совпадает с выражением (6б), которое было выведено иначе.

б. Импульсный линейный источник

Если линейный источник на фиг. 77 импульсный, т. е. его интенсивность меняется во времени пропорционально дельта-функции $\delta(t - t')$, то поля можно вычислить, найдя функцию Грина $\hat{G}_{\infty}(\rho, \rho'; t, t')$, удовлетворяющую уравнению

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \hat{G}_{\infty}(\rho, \rho'; t, t') = -\frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho'} \delta(\varphi - \varphi') \delta(t - t'), \quad (13)$$

а также условию ограниченности при $\rho = 0$ и условию равенства нулю при $t < t'$. Решение дается формулой (41) из § 3, если для $A(\varphi, \varphi'; i\beta)$ взять выражение (2б). Для моментов времени наблюдения $t \approx t' + (\rho + \rho')/\bar{c}$ второй член в формуле (41) из § 3, который мы будем обозначать через \hat{G}_{∞}^d , можно упростить следующим образом [§ 3, замечания после формулы (41)]:

$$\hat{G}_{\infty}^d \approx -\frac{A(\varphi, \varphi'; 0) \bar{c}}{4\pi \sqrt{\rho\rho'}} U\left(t - t' - \frac{\rho + \rho'}{\bar{c}}\right). \quad (14a)$$

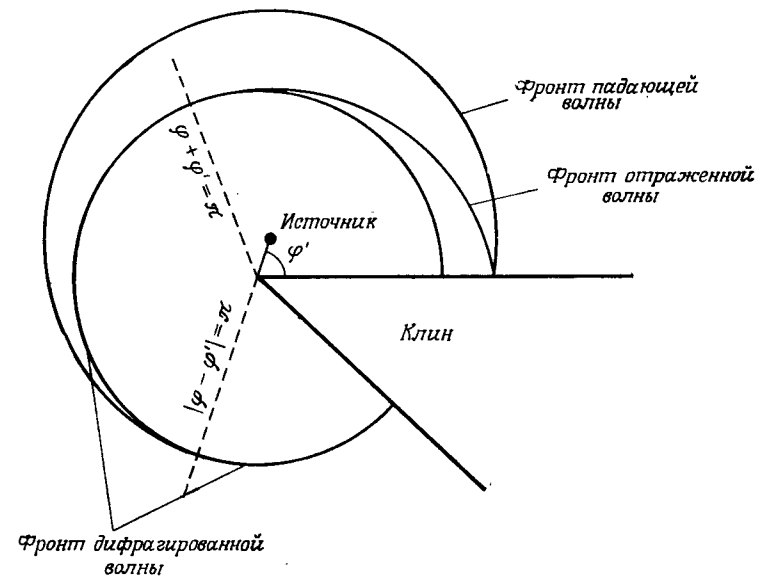
Он описывает поведение дифрагированного поля в окрестности волнового фронта дифрагированной волны. Вблизи же волнового фронта падающей волны, где $t \approx t' + |\rho - \rho'|/\bar{c}$, первый член в формуле (41) из § 3 дает

$$\hat{G}_{\infty}^o \approx \frac{\bar{c}}{2\pi \sqrt{2|\rho - \rho'|}} \frac{1}{\sqrt{\bar{c}(t - t') - |\rho - \rho'|}} \times U(\pi - |\varphi - \varphi'|) U\left(t - t' - \frac{|\rho - \rho'|}{\bar{c}}\right), \quad (14б)$$

откуда видно, что вследствие дифракции уменьшается скачок поля на волновом фронте.

Как уже отмечалось, первый член в выражении (41) из § 3 описывает отклик в отсутствие клина и отличен от нуля лишь вне затененной области (фиг. 77); этот член дает поле в приближении геометрической оптики. Второй же член описывает дифрагированный импульс, распространяющийся в виде цилиндрической волны, существующий во всех областях вне клина и достигающий точки наблюдения $P(\rho, \varphi)$ при $t - t' = (\rho + \rho')/\bar{c}$, т. е. через промежуток времени, необходимый для прохождения волной расстояния ρ' от источника до ребра клина и расстояния ρ от края клина до точки наблюдения. Поскольку грани кли-

на считаются полностью поглощающими, отраженный сигнал отсутствует. Волновые фронты для падающей и дифрагирован-



Фиг. 78. Дифракция импульсной цилиндрической волны на клине (в случае идеально поглощающего клина отраженная волна отсутствует).

Центр фронта падающей волны расположен в источнике, отраженной — в зеркальном изображении источника относительно горизонтальной грани клина и дифрагированной — на ребре клина.

ной волн изображены на фиг. 78. Нормали к фронтам, т. е. лучи, соответствуют лучам, проведенным на фиг. 77.

в. Гармонический точечный источник

Электромагнитные поля, которые возбуждаются ориентированным вдоль оси z элементом электрического тока

$$\hat{J}(\mathbf{r}, t) = J^o \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{-i\omega t} \mathbf{z}_0 \quad (15a)$$

или магнитного тока

$$\hat{M}(\mathbf{r}, t) = M^o \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{-i\omega t} \mathbf{z}_0 \quad (15б)$$

при наличии идеально поглощающего клина, можно найти (§ 2, п. «а»), вычислив скалярную функцию Грина, удовлетворяющую уравнению

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) G_{\infty}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho'} \delta(\varphi - \varphi') \delta(z - z') \quad (16)$$

нормировке можно представить в виде $\exp[-ik\rho \cos(\varphi - \varphi') - i\omega t]$. Соответствующая волновая функция $\bar{u}_\infty(\rho, \varphi')$ в случае идеально поглощающих граней клина удовлетворяет однородному волновому уравнению

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k^2\right) \bar{u}_\infty(\rho, \varphi') = 0 \quad (19)$$

в области $0 < \rho < \infty$, $-\infty < (\varphi, \varphi') < \infty$ и условию ограниченности при $\rho = 0$. Та часть функции $\bar{u}_\infty^d(\rho, \varphi')$, которая описывает рассеянное поле, должна удовлетворять условию излучения при $(\rho, |\varphi|) \rightarrow \infty$. В области тени $|\varphi - \varphi'| > \pi$ решение можно получить исходя из формулы (5), если заменить в ней функцию $H_\mu^{(1)}(k\rho')$ первым членом асимптотического разложения (8а) и использовать в формуле (30б) из гл. 5, § 4, условие нормировки

$$C(k\rho') = \frac{1}{2\sqrt{2\pi k\rho'}} e^{i(k\rho' + \pi/4)} \rightarrow 1, \quad (20)$$

чтобы амплитуда падающей плоской волны была равна единице. Тогда

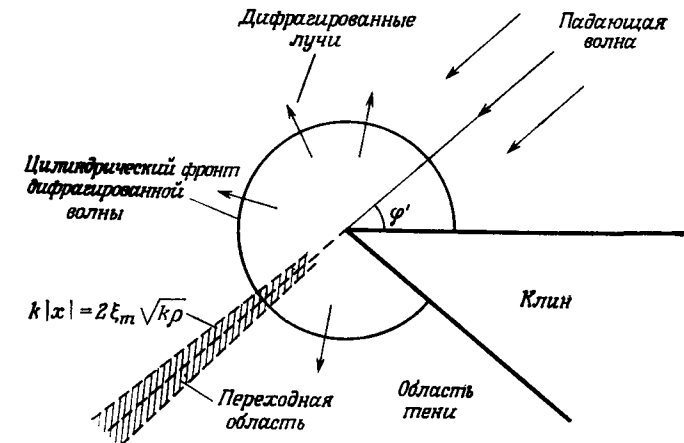
$$\bar{u}_\infty(\rho, \varphi') = \frac{i}{2} \int_0^{i\infty} (1 - e^{i2\mu\pi}) e^{i\mu[|\varphi - \varphi'| - \pi/2]} H_\mu^{(1)}(k\rho) d\mu, \quad |\varphi - \varphi'| > \pi. \quad (21)$$

При произвольных ρ, φ, φ' можно использовать также формулу (24) из § 3, подставив в нее $A(\varphi, \varphi'; \omega)$ из формулы (26).

Когда $k\rho \gg 1$, асимптотическое решение $\bar{u}_\infty \sim \bar{u}_\infty^0 + \bar{u}_\infty^d + \bar{u}_\infty^t$ дается выражением (28) из § 3, в котором $A(\varphi, \varphi'; 0)$ — величина, даваемая формулой (26). Функция \bar{u}_∞^0 [§ 3, формула (28а)] описывает плоскую волну, падающую под углом φ' ; из-за наличия клина эта функция отлична от нуля только в области $|\varphi - \varphi'| < \pi$, т. е. в области, освещенной прямыми лучами геометрической оптики (фиг. 80). Функцию \bar{u}_∞^d [§ 3, формула (28б)] можно рассматривать как расходящуюся цилиндрическую волну, возникающую на ребре клина при $\rho = 0$; вклад цилиндрической волны меньше вклада падающей плоской волны: их отношение равно $O(1/\sqrt{k\rho})$, поскольку в выражении для первой волны имеется множитель $1/\sqrt{k\rho}$. Цилиндрическая волна дает вклад как в освещенной, так и в затененной области и почти всюду описывает дифракционные эффекты; столь простая интерпретация дифрагированного поля оказывается неверной лишь в окрестности границы тени $|\varphi - \varphi'| = \pi$, где амплитуда цилиндрической волны расходится как $1/(\pi - |\varphi - \varphi'|)$. В этой переход-

ной области, ширина которой дается выражением (19) из § 3, основную роль играет негармоническая функция \bar{u}_∞^t [§ 3, формула (28в)]. Все сказанное поясняется на фиг. 80.

Члены более высокого порядка асимптотического разложения дифрагированного поля \bar{u}_∞^d можно найти так же, как и в случае линейного источника. Оказывается, что \bar{u}_∞^d дается выражением (9), в котором $C(k\rho') = 1$, а под знаком суммы стоят лишь члены I_{m0} , где $m = 0, 1, 2, \dots$. Замкнутые выражения для I_{m0}



Фиг. 80. Геометрическая интерпретация асимптотического решения в случае падающей плоской волны.

даются формулами (11) и (12), так что получающаяся в результате формула для \bar{u}_∞^d справедлива при всех $|\varphi - \varphi'| \approx \pi$.

Необходимые формулы для случая наклонного относительно оси z падения волны можно получить как прямое следствие соотношения (18) из § 2.

е. Импульсная плоская волна

Если падающее поле имеет вид импульса плоской волны $\delta[t - t' + (\rho/\bar{c}) \cos(\varphi - \varphi')]$, то волновая функция $\hat{u}_\infty(\rho, \varphi'; t, t')$ в случае идеально поглощающего клина удовлетворяет зависящему от времени волновому уравнению

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \hat{u}_\infty(\rho, \varphi'; t, t') = 0 \quad (22)$$

в области $0 < \rho < \infty$, $-\infty < (\varphi, \varphi') < \infty$, $-\infty < (t, t') < \infty$, а также условию ограниченности при $\rho = 0$ и условию отсутствия возмущения при $t < t'$ (\bar{c} — скорость распространения в среде).

следует понимать в таком смысле, т. е. мнимые источники по предположению так сгруппированы, что ряд сходится. Тогда

$$B_{1,2} = \frac{\pi}{2\phi} \operatorname{ctg} \left[\frac{\pi}{2\phi} [\pi \mp \omega \pm (\varphi - \varphi')] \right], \quad (7)$$

а выражение для B можно упростить, используя формулу

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) + \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{2 \sin 2\alpha}{\cos 2\beta - \cos 2\alpha}. \quad (8)$$

Аналогичное выражение получается для случая $\varphi > \varphi'$.

Если эти результаты подставить в формулы (8), (24) или (26) из § 3, то мы найдем выражения для различных функций Грина в произвольных точках наблюдения. Кроме полюса функции $A(\varphi, \varphi'; \omega)$ в точке $\pi - |\varphi - \varphi'|$, который был точно учтен в § 3, следует учитывать другие возможные полюсы [§ 3, текст после формулы (8)]. Поскольку множители перед $A(\varphi, \varphi'; \omega)$ в дифракционных интегралах являются четными функциями переменной ω , а путь интегрирования симметричен относительно точки $\omega = 0$, вклад в дифракционные интегралы дают лишь четные (по ω) части функций A или B . Следовательно, результат не изменится, если в B_1 или B_2 заменить ω на $-\omega$; это значит, что можно построить много разных функций $B(\varphi, \varphi'; \omega)$, дающих один и тот же дифракционный интеграл (т. е. обладающих одинаковой четной частью)¹⁾. Ниже мы приводим различные представления функции B , встречающиеся в литературе и полученные разными методами. Из формул (7) и (8) непосредственно следует

$$B(\varphi, \varphi'; \omega) = \frac{\pi}{\phi} \sin \frac{\pi^2}{\phi} \frac{1}{\cos [(\pi/\phi)(\omega - \varphi + \varphi')] - \cos(\pi^2/\phi)}; \quad (9a)$$

заменив в выражении для B_2 величину ω величиной $-\omega$, получим [1, 2]

$$B(\varphi, \varphi'; \omega) = \frac{\pi}{\phi} \frac{\sin [(\pi/\phi)(\pi - \omega)]}{\cos [(\pi/\phi)(\varphi - \varphi')] - \cos [(\pi/\phi)(\pi - \omega)]}. \quad (9б)$$

Используя равенство $2B_1(\omega) = B_1(\omega) + B_1(-\omega)$, находим

$$B_1 = \frac{\pi}{2\phi} \frac{\sin [(\pi/\phi)(\pi + \varphi - \varphi')]}{\cos(\pi\omega/\phi) - \cos [(\pi/\phi)(\pi + \varphi - \varphi')]}, \quad (9в)$$

так что [4]

$$B(\varphi, \varphi'; \omega) = \frac{\pi}{2\phi} \left[\frac{\sin [(\pi/\phi)(\pi + \varphi - \varphi')]}{\cos(\pi\omega/\phi) - \cos [(\pi/\phi)(\pi + \varphi - \varphi')]} + \frac{\sin [(\pi/\phi)(\pi - \varphi + \varphi')]}{\cos(\pi\omega/\phi) - \cos [(\pi/\phi)(\pi - \varphi + \varphi')]} \right]. \quad (9г)$$

¹⁾ То же самое относится и к сказанному в § 4.

Эти представления функции B эквивалентны, конечно, только в том смысле, что дают один и тот же дифракционный интеграл. Отметим, что четная часть величины B является четной функцией разности $\varphi - \varphi'$, т. е. зависит только от $|\varphi - \varphi'|$.

Полюсы функции $A(\varphi, \varphi'; \omega)$ в плоскости комплексной переменной ω видны сразу, если эта функция представлена в виде ряда (5). Когда $|\varphi - \varphi'| > \pi$ и $0 \leq (\varphi, \varphi') \leq \phi$, ни один из полюсов не пересекает пути интегрирования, идущего вдоль мнимой оси плоскости ω , и вклад полюсов равен нулю; этот случай соответствует, как и в выражении (5) из § 3, тому, что точка наблюдения находится в области геометрической тени (фиг. 77), что возможно лишь при углах клина $\phi > \pi$. Но когда угол между направлением на точку наблюдения φ и направлением на источник φ' или на мнимый источник $\varphi'_n, \hat{\varphi}'_n$ меньше $\pm\pi$, соответствующий полюс пересекает путь интегрирования и дает вклад в интеграл. В результате первый член в формуле (8) из § 3 выражается через конечные суммы:

$$\begin{aligned} \bar{G}^o(\rho, \rho') = \sum_n \frac{i}{4} H_0^{(1)}[kR(\varphi'_n)] U(\pi - |\varphi - \varphi'_n|) \mp \\ \mp \sum_n \frac{i}{4} H_0^{(1)}[kR(\hat{\varphi}'_n)] U(\pi - |\varphi - \hat{\varphi}'_n|), \quad (10) \end{aligned}$$

где $n = 0, \pm 1, \dots, 0 \leq (\varphi, \varphi') \leq \phi$. Верхний знак в формуле (10) относится к E -волнам, а нижний — к H -волнам, и

$$\begin{aligned} \varphi'_n = 2n\phi + \varphi', \quad \hat{\varphi}'_n = 2n\phi - \varphi', \\ R(\alpha) = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \alpha)}, \quad (10a) \end{aligned}$$

где $R(\alpha)$ — расстояние от точки наблюдения (ρ, φ) до действительного или мнимого источника в точке (ρ', α) . Аналогичным образом изменяются выражения (24) и (26) из § 3, относящиеся к случаям возбуждения плоской волной и точечным источником. Член с $\varphi'_0 = \varphi'$ в формуле (10) описывает падающую волну в освещенной области, остальные же члены — однократно и многократно отраженные волны, соответствующие геометрической оптике. Ясно, что при малых углах клина ϕ возможно большое число отражений, а при $\phi > \pi$ ряд в формуле (10) содержит не более трех членов: $\varphi'_0, \hat{\varphi}'_0, \varphi'_1$. Сказанное поясняется на фиг. 82, где видно, что в точку наблюдения P , находящуюся в вырезе $\phi < \pi$, могут попасть прямой луч a , два отраженных луча b_1, b_2 , дважды отраженные лучи c и т. д., каждый из которых описывается одним из членов ряда (10), где знаки « \mp » учитывают, что коэффициент отражения от идеального проводника равен -1 для E -волн и $+1$ для H -волн. В области же $\phi > \pi$

ходим следующие выражения для волновых функций:

$$\bar{u}'(\rho, \varphi') = \frac{4\pi}{\phi} \sum_{m=1}^{\infty} J_{\mu}(k\rho) \sin \mu\varphi \sin \mu\varphi' e^{-i\mu\pi/2}, \quad \mu = \frac{m\pi}{\phi}, \quad (16a)$$

$$\bar{u}''(\rho, \varphi') = \frac{2\pi}{\phi} \left\{ J_0(k\rho) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_{\mu}(k\rho) \cos \mu\varphi \cos \mu\varphi' e^{-i\mu\pi/2} \right\}. \quad (16b)$$

Аналогичные результаты для случая наклонного падения получаются сразу же из формулы (18) § 2.

в. Гармонический линейный источник

Электромагнитные поля, возбуждаемые линейным источником электрического или магнитного тока, можно найти, вычислив скалярные функции Грина $\bar{G}'(\rho, \rho')$ для E -волн и $\bar{G}''(\rho, \rho')$ для H -волн [3]. Эти функции Грина удовлетворяют в области $0 < (\rho, \rho') < \infty$, $0 \leq (\varphi, \varphi') \leq \phi$ волновому уравнению (3) из § 2 с граничными условиями

$$\bar{G}' = 0, \quad \frac{\partial \bar{G}''}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0, \phi, \quad (17)$$

а также условию ограниченности при $\rho = 0$ и условию излучения при $\rho \rightarrow \infty$. При произвольных ρ, ρ' решение дается формулами (12) и (13) в радиальном представлении и формулой (8) из § 3 с модификациями (4) и (10) в угловом представлении. Если угол клина $\phi > \pi$, то вклад в формулу (10) дают лишь три члена и

$$\bar{G}(\rho, \rho') = \bar{G}^0(\rho, \rho') + \bar{G}_1(\rho, \rho'), \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{G}^0(\rho, \rho') &= \frac{i}{4} H_0^{(1)}[kR(\varphi')] U(\pi - |\varphi - \varphi'|) \mp \\ &\mp \frac{i}{4} H_0^{(1)}[kR(-\varphi')] U(\pi - \varphi - \varphi') \mp \\ &\mp \frac{i}{4} H_0^{(1)}[kR(2\phi - \varphi')] U[\pi - (2\phi - \varphi - \varphi')]. \end{aligned} \quad (18a)$$

Здесь $U(x)$ — единичная функция Хевисайда [§ 3, формула (8)], а \bar{G}_1 — дифракционный интеграл:

$$\bar{G}_1(\rho, \rho') = \frac{1}{8\pi} \int_{i\infty}^{-i\infty} H_0^{(1)}(k\chi) [B(\varphi, \varphi'; \omega) \mp B(\varphi, -\varphi'; \omega)] d\omega. \quad (18b)$$

Верхний знак соответствует функции Грина \bar{G}' для E -волн, а нижний — функции Грина \bar{G}'' для H -волн. Функция R опреде-

лена в формуле (10a), различные выражения для B приведены в формуле (9) и

$$\chi = (\rho^2 + \rho'^2 + 2\rho\rho' \cos \omega)^{1/2}.$$

При $k\rho \gg 1$, $k\rho' \gg 1$ и $|\varphi - \varphi'|$, $(\varphi + \varphi')$, $(2\phi - \varphi - \varphi') \approx \pi$ справедливо асимптотическое выражение

$$\bar{G} \sim \bar{G}^0 + \bar{G}^d, \quad (19)$$

где \bar{G}^0 — функция, даваемая формулой (18a) [при больших аргументах ее можно упростить с учетом формулы (12) из § 3], а \bar{G}^d находится так же, как и в формуле (15) из § 3:

$$\begin{aligned} \bar{G}^d &= -2C(k\rho) C(k\rho') [B(\varphi, \varphi'; 0) \pm B(\varphi, -\varphi'; 0)] = \\ &= \frac{-ie^{ik(\rho+\rho')}}{4k\sqrt{\rho\rho'}\phi} \left(\sin \frac{\pi^2}{\phi} \right) \left[\frac{1}{\cos[(\pi/\phi)(\varphi - \varphi')] - \cos(\pi^2/\phi)} \mp \right. \\ &\quad \left. \mp \frac{1}{\cos[(\pi/\phi)(\varphi + \varphi')] - \cos(\pi^2/\phi)} \right] \quad \text{для} \quad \begin{array}{l} E\text{-волн} \\ H\text{-волн} \end{array}. \end{aligned} \quad (19a)$$

При произвольных φ и φ' в формулу (19) необходимо добавить следующие негармонические функции:

$$\begin{aligned} \bar{G}^t(\rho, \rho') &= \bar{G}_{\infty}^t(\rho; \rho', \varphi') \mp \bar{G}_{\infty}^t(\rho; \rho', -\varphi') \mp \\ &\pm \bar{G}_{\infty}^t(\rho; \rho', 2\phi - \varphi') \quad \text{для} \quad \begin{array}{l} E\text{-волн} \\ H\text{-волн} \end{array}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\bar{G}_{\infty}^t(\rho; \rho', \varphi')$ — функция, даваемая формулой (7) из § 4. При этом следует помнить, что условие $\xi \rightarrow 0$ означает $\pi - |\varphi - \varphi'| \rightarrow 0$.

Замечания

Выражение (19) можно интерпретировать так же, как и в случае идеально поглощающего клина (§ 4, п. «а»), рассматривая геометрооптические и дифракционные эффекты. Дифракционный член \bar{G}^d (фиг. 77) описывает цилиндрическую волну, расходящуюся от ребра клина и проникающую во все области, доступные для нее с точки зрения геометрической оптики. Поскольку грани клина считаются теперь идеально проводящими, геометрооптический член \bar{G}^0 описывает не только падающую волну в освещенной области, но и волны, отраженные от граней клина, вклад которых был уже исследован (фиг. 82). Амплитуда дифрагированного поля (19a) расходитс на границе тени $|\varphi - \varphi'| = \pi$, а также на линиях $\varphi = \pi - \varphi'$ и $\varphi = (2\phi - \varphi' - \pi)$, которыми ограничена область существования волн, отраженных по правилам геометрической оптики от граней клина при $\varphi = 0$ и $\varphi = \phi$ (угловое распределение дифрагированного поля пред-

шению, как и в формуле (10), добавляются геометрические члены. Таким образом,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G^o(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (24)$$

где $G^o(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — геометрическое слагаемое:

$$G^o(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_n \left\{ \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_n|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_n|} U(\pi - |\varphi - \varphi'_n|) \mp \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\hat{\mathbf{r}}'_n|}}{4\pi|\mathbf{r}-\hat{\mathbf{r}}'_n|} U(\pi - |\varphi - \hat{\varphi}'_n|) \right\} \text{ для } \begin{array}{l} E\text{-волн} \\ H\text{-волн} \end{array}, \quad (24a)$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_n| = \sqrt{R^2(\varphi'_n) + (z-z')^2}, \quad |\mathbf{r}-\hat{\mathbf{r}}'_n| = \sqrt{R^2(\hat{\varphi}'_n) + (z-z')^2},$$

а R — функция, даваемая формулой (10a). Слагаемое G_1 записывается в интегральной форме:

$$G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{i}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iky}}{\gamma} [B(\varphi, \varphi'; \omega) \mp B(\varphi, -\varphi'; \omega)] d\omega \quad \text{для } \begin{array}{l} E\text{-волн} \\ H\text{-волн} \end{array}, \quad (24б)$$

где $\gamma = [\rho^2 + \rho'^2 + (z-z')^2 + 2\rho\rho' \cos \omega]^{1/2}$.

Если произведения $k\rho$ и $k\rho'$ велики, то для $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ имеем асимптотическое выражение

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sim G^o(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + G^d(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + G^t(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (25)$$

где G^o — функция (24a), G^d — дифракционный член в формуле (30б) из § 3,

$$G^d = -\frac{e^{i(kl+\pi/4)}}{4\phi\sqrt{2\pi k\rho\rho'}} \sin \frac{\pi^2}{\phi} \left[\frac{1}{\cos[(\pi/\phi)(\varphi-\varphi')] - \cos(\pi^2/\phi)} \mp \frac{1}{\cos[(\pi/\phi)(\varphi+\varphi')] - \cos(\pi^2/\phi)} \right] \text{ для } \begin{array}{l} E\text{-волн} \\ H\text{-волн} \end{array}, \quad (25a)$$

а G^t — негармоническая функция:

$$G^t(\mathbf{r}; \rho', \varphi', z') = \sum_n [G_\infty^t(\mathbf{r}; \rho', \varphi'_n, z') \mp G_\infty^t(\mathbf{r}; \rho', \hat{\varphi}'_n, z')] \text{ для } \begin{array}{l} E\text{-волн} \\ H\text{-волн} \end{array}, \quad (25б)$$

причем $G_\infty^t(\mathbf{r}; \rho', \varphi', z')$ — функция, даваемая формулой (30в) из § 3, а l дается формулой (30б) из § 3 (см. также фиг. 79, где поясняется физический смысл различных величин). При углах

клина $\phi > \pi$ вклад в выражения (24a) и (25б) дают лишь члены с $\varphi'_0 = \varphi'$, $\hat{\varphi}'_0 = -\varphi'$ и $\hat{\varphi}'_1 = 2\phi - \varphi'$. Функция G^t всегда пренебрежимо мала, кроме случаев, когда точка наблюдения лежит в переходной области $|\varphi - \varphi'_n| \approx \pi$ или $|\varphi - \hat{\varphi}'_n| \approx \pi$.

е. Импульсный точечный источник

Когда источник импульсный с зависимостью от времени вида $\delta(t-t')$, поля можно найти, вычислив скалярные функции Грина $G'(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')$ для E -волн и $G''(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')$ для H -волн. Эти функции удовлетворяют уравнению (18) из § 4 в области $0 < (\rho, \rho') < \infty$, $0 \leq (\varphi, \varphi') \leq \phi$, $-\infty < (z, z') < \infty$, $-\infty < (t, t') < \infty$ и перечисленным ранее граничным условиям с соответствующей модификацией для области переменной φ , как в формуле (22). Решение при произвольных $\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t'$ дается формулой (33) из § 3 с добавлением членов, описывающих геометрическое отраженное поле:

$$\hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') = \sum_n \left\{ \frac{\delta(t-t' - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'_n|/\bar{c})}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_n|} U(\pi - |\varphi - \varphi'_n|) \mp \frac{\delta(t-t' - |\mathbf{r}-\hat{\mathbf{r}}'_n|/\bar{c})}{4\pi|\mathbf{r}-\hat{\mathbf{r}}'_n|} U(\pi - |\varphi - \hat{\varphi}'_n|) \right\} + \frac{\bar{c}}{4\pi} \frac{[\text{Re } B(\varphi, \varphi'; i\beta) \mp \text{Re } B(\varphi, -\varphi'; i\beta)]}{\rho\rho' \text{sh } \beta} \times U\left(t-t' - \frac{l}{\bar{c}}\right) \text{ для } \begin{array}{l} E\text{-волн} \\ H\text{-волн} \end{array}, \quad (26)$$

где $\mathbf{r}'_n, \hat{\mathbf{r}}'_n, l, \beta$ — те же величины, что и в формулах (24a) данного параграфа и (30б) и (33) § 3, $\text{Re } B$ — функция (21a).

ж. Гармоническая плоская волна

Когда на идеально проводящий клин падает в направлении φ' плоская волна $\exp[-ik\rho \cos(\varphi - \varphi') - i\omega t]$, волновая функция $\bar{u}(\rho, \varphi')$ удовлетворяет уравнению (19) из § 4 в области $0 < \rho < \infty$, $0 \leq (\varphi, \varphi') < \phi$, условию ограниченности при $\rho = 0$, условию излучения при $\rho \rightarrow \infty$ (этому условию удовлетворяет рассеянная часть функции \bar{u}) и граничным условиям

$$\bar{u}'(\rho, \varphi') = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}''(\rho, \varphi')}{\partial \varphi} = 0 \text{ при } \varphi = 0, \phi. \quad (27)$$

Функция \bar{u}' для E -волн относится к случаю, когда вектор \mathbf{E} падающей волны параллелен оси z , а функция \bar{u}'' для H -волн — к случаю, когда вектор \mathbf{H} параллелен оси z [2, 3].

ления по-прежнему наблюдаются, большинство из ранее полученных решений можно привести к более простому виду [3 (гл. 8), 4].

Гармонический линейный источник

При $\phi = 2\pi$ дифракционный интеграл в формуле (186) можно представить в более изящной форме, полученной впервые Мак-Дональдом [5]. Вместо того чтобы исходить прямо из формулы (186), возьмем импульсное решение (39) и, умножив его на $\exp(-i\omega t')$ и проинтегрировав по t' от $-\infty$ до $+\infty$, получим гармоническое решение. Поскольку

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} U[\hat{t} - \beta] \frac{e^{-i\omega t'}}{\sqrt{(\hat{c}\hat{t})^2 - R^2(\varphi')}} dt' = \int_{-\infty}^{\hat{t}-\beta} \frac{e^{-i\omega t'}}{\sqrt{(\hat{c}\hat{t})^2 - R^2(\varphi')}} dt', \quad \beta - \text{действительно}, \quad (31)$$

где $\hat{t} = t - t'$, замена переменной $\hat{c}\hat{t} = R(\varphi') \operatorname{ch} x$, где $R(\varphi')$ — та же величина, что и в формуле (10a), дает

$$Q = \frac{1}{\hat{c}} e^{-i\omega t} \int_{\xi}^{\infty} e^{ikR(\varphi') \operatorname{ch} x} dx, \quad \xi = \operatorname{Arch} \left[\frac{\hat{c}\beta}{R(\varphi')} \right], \quad k = \frac{\omega}{\hat{c}}. \quad (31a)$$

Если $\beta = R(\varphi')/\hat{c}$, то $\xi = 0$ и мы имеем [§ 3, формула (22) при $\mu = 0$]

$$\int_0^{\infty} e^{ikR(\varphi') \operatorname{ch} x} dx = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}[kR(\varphi')]. \quad (32)$$

Опуская общий множитель $\exp(-i\omega t)$, получаем требуемое выражение для стационарной функции Грина ($\varphi' < \pi$):

$$\bar{G}(\rho, \rho') = \bar{I}(\rho; \rho', \varphi') \mp \bar{I}(\rho; \rho', -\varphi'), \quad (33)$$

где

$$\bar{I}(\rho; \rho', \varphi') = \frac{i}{4} H_0^{(1)}[kR(\varphi')] U(\pi - |\varphi - \varphi'|) - \frac{1}{4\pi} \operatorname{sign}(\pi - |\varphi - \varphi'|) \int_{\xi}^{\infty} e^{ikR(\varphi') \operatorname{ch} x} dx, \quad (33a)$$

$$\xi = \operatorname{Arch} \left[\frac{\rho + \rho'}{R(\varphi')} \right].$$

Верхний знак в формуле (33) относится к E -волнам, а нижний — к H -волнам. С учетом равенства (32) выражение (33a) можно

также представить в виде

$$\bar{I}(\rho; \rho', \varphi') = \frac{1}{4\pi} \int_{-\xi}^{\infty} e^{ikR(\varphi') \operatorname{ch} x} dx, \quad |\varphi - \varphi'| < \pi, \quad (34)$$

т. е. функция $\bar{G}(\rho, \rho')$ выражается только через интегралы от $\exp[ikR(\varphi') \operatorname{ch} x]$.

Представление этого решения в виде ряда дается формулами (12) и (13) при $\mu = m/2$.

Импульсный линейный источник

Когда $\phi = 2\pi$, интеграл в формуле (21) можно взять в квадратурах [4], поскольку возможно следующее упрощение:

$$\operatorname{Re} B(\varphi, \varphi'; i\beta) = \frac{\cos(\psi/2) \operatorname{ch}(\beta/2)}{\operatorname{ch} \beta + \cos \psi}, \quad \phi = 2\pi. \quad (35)$$

Производя в формуле (21) последовательно замены переменных

$$\operatorname{ch} \beta = 1 + v^2, \quad \operatorname{ch} \frac{\beta}{2} d\beta = \sqrt{2} dv \quad (36a)$$

и

$$v = b \sin \gamma, \quad b = \sqrt{\frac{(\hat{c}\hat{t})^2 - (\rho + \rho')^2}{2\rho\rho'}}, \quad (36b)$$

получаем

$$D(\varphi, \varphi'; \hat{t}) = -\frac{\hat{c}}{2\pi^2} \frac{\cos(\psi/2)}{\sqrt{\rho\rho'}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\gamma}{1 + \cos \psi + b^2 \sin^2 \gamma}, \quad (37)$$

где $\hat{t} = t - t'$, а $D(\varphi, \varphi'; \hat{t})$ — вклад в выражение (21) члена $\operatorname{Re} B(\varphi, \varphi'; i\beta)$. Интеграл в формуле (37) берется в квадратурах:

$$D(\varphi, \varphi'; \hat{t}) = -\frac{\cos(\psi/2)}{\sqrt{\rho\rho'}} \frac{\hat{c}}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2} \cos(\psi/2) \sqrt{1 + \cos \psi + b^2}} = -\frac{\hat{c}}{4\pi \sqrt{(\hat{c}\hat{t})^2 - R^2(\varphi')}} \operatorname{sign} \cos \frac{\psi}{2}, \quad (38)$$

где $\operatorname{sign} x = \pm 1$, $x \geq 0$, а $R(\varphi')$ — функция, указанная в формуле (10a). В результате формула (21) дает следующую функцию Грина для полуплоскости:

$$\left. \begin{aligned} \hat{G}'(\rho, \rho'; t) \\ \hat{G}''(\rho, \rho'; t) \end{aligned} \right\} = \frac{\hat{c}}{2\pi} U[\pi - |\varphi - \varphi'|] U\left[\hat{t} - \frac{R(\varphi')}{\hat{c}}\right] \frac{1}{\sqrt{(\hat{c}\hat{t})^2 - R^2(\varphi')}} \mp \frac{\hat{c}}{2\pi} U[\pi - |\varphi + \varphi'|] U\left[\hat{t} - \frac{R(-\varphi')}{\hat{c}}\right] \frac{1}{\sqrt{(\hat{c}\hat{t})^2 - R^2(-\varphi')}} - \frac{\hat{c}}{4\pi} U\left[\hat{t} - \frac{(\rho + \rho')}{\hat{c}}\right] \left[\frac{\operatorname{sign}(\pi - |\varphi - \varphi'|)}{\sqrt{(\hat{c}\hat{t})^2 - R^2(\varphi')}} \mp \frac{\operatorname{sign}(\pi - |\varphi - \varphi'})}{\sqrt{(\hat{c}\hat{t})^2 - R^2(-\varphi')}} \right], \quad (39)$$

Если многомерная функция Грина строится на основе одномерной характеристической функции Грина $g(\varphi, \varphi'; \mu)$, то она должна также удовлетворять граничным условиям (1) на гранях клина $\varphi = 0, \phi$. Это требование можно сформулировать, введя понятие поверхностного импеданса Z_s , как будет показано на примере гармонического линейного источника. В случае линейного электрического тока [§ 2, формула (1a) или (2a)] электромагнитные поля выражаются через скалярную функцию Грина $\bar{G}(\rho, \rho'$ [§ 2, формула (16)], которая удовлетворяет двумерному волновому уравнению (3) из § 2. Граничное условие

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial \varphi} = \mp ia_{1,2} \bar{G} \quad \text{при} \quad \varphi = \begin{matrix} 0 \\ \phi \end{matrix} \quad (2)$$

можно переписать в виде

$$E_z = \mp Z_{s1,2} H_\rho \quad \text{при} \quad \varphi = \begin{matrix} 0 \\ \phi \end{matrix} \quad (\text{для случая } E\text{-волн}), \quad (3)$$

где

$$Z_{s1,2} = \xi \frac{k\rho}{a_{1,2}} \quad (3a)$$

— поверхностные импедансы на гранях $\varphi = 0$ и $\varphi = \phi$, ξ — волновое сопротивление неограниченного внешнего пространства и k — волновое число. В случае магнитного тока (2a) из § 2 электромагнитные поля можно найти вычислением той же скалярной функции Грина при условии, что в силу равенства [§ 2, формула (26)]

$$E_\rho = \pm Z_{s1,2} H_z \quad \text{при} \quad \varphi = \begin{matrix} 0 \\ \phi \end{matrix} \quad (\text{для случая } H\text{-волн}), \quad (4)$$

поверхностные импедансы связаны с $a_{1,2}$ соотношением

$$Z_{s1,2} = \xi \frac{a_{1,2}}{k\rho}. \quad (4a)$$

Таким образом, постоянство параметров $a_{1,2}$, необходимое для делимости граничного условия (2), имеет место при условии, что поверхностные импедансы *прямо пропорциональны величине* ρ в случае E -волн [формула (3a)] и *обратно пропорциональны ей* в случае H -волн [формула (4a)]; кроме того, $\text{Re } a_{1,2} > 0$ в случае реактивного поверхностного импеданса. Отметим, что ввиду соотношений (2) — (4) задача о дифракции на клине с гранями постоянного импеданса не решается методом разделения переменных, т. е. требует для своего решения гораздо более сложной математики, чем рассмотренная здесь задача о клине с гранями переменного импеданса.

Хотя угловую характеристическую функцию Грина g , удовлетворяющую уравнениям (1) данного параграфа и (7) § 2 (при $\rho \rightarrow \mu$), нетрудно получить при произвольных $a_{1,2}$ [гл. 3, § 4, формула (51)], для выяснения основных зависимостей электромагнитного поля, связанных с наличием переменного импеданса, достаточно рассмотреть случай, когда такой импеданс задается только на одной грани клина. При этом другая грань клина считается либо идеально поглощающей (п. «а»), либо идеально проводящей (п. «б»).

а. Клин, одна грань которого идеально поглощающая, а другая — с переменным импедансом

Представление, подчеркивающее квазиоптические свойства

Если грань клина $\varphi = 0$ характеризуется поверхностным импедансом Z_s (в случае E -волн) или адмиттансом $1/Z_s$ (в случае H -волн), который линейно возрастает при удалении от ребра клина $\rho = 0$, а грань клина $\varphi = \phi$ является идеально поглощающей, то соответствующая угловая характеристическая функция Грина удовлетворяет уравнению (7) из § 2 (где $\rho \equiv \mu$) с граничным условием (1) при $\varphi = 0$ и условию отсутствия отражения при $\varphi = \phi$ (последнее эквивалентно условию излучения в продолженном до $+\infty$ пространстве φ). Решение имеет вид [гл. 3, § 4, формула (51) при $\vec{\Gamma} = 0$]

$$g(\varphi, \varphi'; \mu) = g_\infty(\varphi, \varphi'; \mu) + \vec{\Gamma}(\mu) g_\infty(\varphi, -\varphi'; \mu), \quad (5)$$

где величина

$$g_\infty(\varphi, \varphi'; \mu) = \frac{e^{\pm i\mu|\varphi-\varphi'|}}{\mp 2i\mu}, \quad \text{Im } \mu \geq 0,$$

есть функция Грина [§ 4, формула (1)] для продолженного в обе стороны до бесконечности углового пространства, а

$$\vec{\Gamma}(\mu) = \frac{\pm \mu - a_1}{\pm \mu + a_1}, \quad \text{Im } \mu \geq 0 \quad (5a)$$

— коэффициент отражения при $\varphi = 0$ [величина c_1 в формуле (53) из гл. 3, § 4, соответствует величине $-a_1$]. Этот результат можно интерпретировать как отклик, обусловленный наличием источника при φ' и одного мнимого источника при $-\varphi'$ в бесконечном угловом пространстве.

Двумерную функцию Грина для линейного источника, изображенного на фиг. 75, можно получить, подставив выражение

Асимптотическое приближение

Чтобы найти асимптотическую форму выражения (11) при больших k , заменим, как в § 3, функцию $H_0^{(1)}(k\chi)$ ее асимптотическим выражением [§ 3, формула (12)]. Первый интеграл в формуле (11) совпадает по форме с выражением (8) из § 3, так что его асимптотическое представление получается сразу же [§ 3, формула (15)]:

$$4ia_1 [N(\varphi + \varphi' - \pi, a_1) - N(\varphi + \varphi' + \pi, a_1)] C(k\rho) C(k\rho'), \quad (12a)$$

$$C(x) = \frac{e^{i(x+\pi/4)}}{2\sqrt{2\pi x}},$$

где N — функция, даваемая формулой (10б). Поскольку $\exp(ik\chi)$ убывает вдоль P_b , основной вклад во второй интеграл дает окрестность точки ветвления $\omega_b = \pi - (\varphi + \varphi')$. Полагая $\chi(\omega) \approx R + (\rho\rho'/R)(\cos\omega - \cos\omega_b)$, где $R \equiv \chi(\omega_b)$ [§ 3, формула (16б)], находим

$$Q_1 \equiv \frac{i}{4} \int_{P_b} H_0^{(1)}(k\chi) N d\omega \sim C(kR) e^{-ik(\rho\rho'/R)\cos\omega_b} \int_{P_b} e^{ik(\rho\rho'/R)\cos\omega} N d\omega. \quad (12б)$$

Для упрощения произведем замену переменных $\omega = \omega_b - iz$; тогда получим

$$Q_2 \equiv \int_{P_b} e^{ia\cos\omega} N(\omega - \omega_b, a_1) d\omega = i \int_{P_b'} e^{ia\cos(\omega_b - iz)} N(-iz, a_1) dz, \quad (13)$$

где P_b' — контур, обходящий разрез вдоль положительной действительной оси z в положительном направлении. Поскольку интегральную показательную функцию можно представить в виде ряда [7]

$$E_1(y) = -\gamma - \ln y - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-y)^n}{n! n}, \quad \gamma = 0,5772, \quad (14)$$

ее многозначность содержится лишь в логарифмическом члене, так что вклад в интеграл по контуру P_b' дает только этот член. В силу соотношения $\ln ze^{i2\pi} = \ln z + i2\pi$ интеграл (13) сводится к виду

$$Q_2 = 2\pi \int_0^{\infty} e^{ia\cos(\omega_b - iz) - a_1 z} dz, \quad \omega_b = \pi - (\varphi + \varphi') > 0. \quad (15)$$

При больших и положительных α интеграл Q_2 можно приближенно вычислить, положив $\cos(\omega_b - iz) \approx \cos\omega_b + iz \sin\omega_b$:

$$Q_2 \sim \frac{2\pi}{\alpha \sin\omega_b + a_1} e^{ia\cos\omega_b}. \quad (16)$$

Таким образом,

$$Q_1 \sim C(kR) \frac{2\pi}{(k\rho\rho'/R) \sin(\varphi + \varphi') + a_1}, \quad (17)$$

$$R = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi + \varphi')}.$$

Подставив эти выражения в формулу (11), на основании формулы асимптотического представления функции \bar{G}_∞ [§ 4, формула (6)] получим [6]

$$\bar{G}(\rho, \rho') \sim \bar{G}^o(\rho, \rho') + \bar{G}^d(\rho, \rho'), \quad (18)$$

где геометрическое поле имеет вид

$$\bar{G}^o = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\rho - \rho'|) U(\pi - |\varphi - \varphi'|) + C(kR) \tilde{\Gamma} \left[\frac{k\rho\rho'}{R} \sin(\varphi + \varphi') \right] U(\pi - \varphi - \varphi'). \quad (18a)$$

Функция $\tilde{\Gamma}(\mu)$ дана в формуле (5а), а $C(x) = (8\pi x)^{-1/2} \exp(ix + i\pi/4)$. Дифрагированное поле таково:

$$\bar{G}^d = C(k\rho) C(k\rho') \{ -2A(\varphi, \varphi'; 0) - 2A(\varphi, -\varphi'; 0) + 4ia_1 [N(\varphi + \varphi' - \pi, a_1) - N(\varphi + \varphi' + \pi, a_1)] \}, \quad (18б)$$

где

$$A(\varphi, \varphi'; 0) = \frac{1}{\pi - |\varphi - \varphi'|} + \frac{1}{\pi + |\varphi - \varphi'|}, \quad (18в)$$

а N — функция (10б). Если $a_1 = 0$, то $\tilde{\Gamma} = 1$ и $a_1 N(\alpha, a_1) \rightarrow 0$, так что

$$\bar{G}(\rho, \rho') = \bar{G}_\infty(\rho; \rho', \varphi') + \bar{G}_\infty(\rho; \rho', -\varphi'), \quad (19)$$

т. е. мы получаем правильный результат для случая идеально проводящего (с нулевым импедансом) клина и возбуждения магнитным током [формула (4а)]. Если $a_1 \rightarrow \infty$, то $\tilde{\Gamma} \rightarrow -1$ и [7]

$$E_1(y) \sim \frac{e^{-y}}{y} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{(-y)^m}, \quad |y| \rightarrow \infty, \quad |\arg y| < \frac{3\pi}{2}. \quad (20)$$

В результате

$$4ia_1 [N(\alpha, a_1) - N(\beta, a_1)] = -4 \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right] + O\left(\frac{1}{a_1}\right), \quad |a_1| \rightarrow \infty, \quad (21)$$

и выражение для \bar{G} сводится к выражению (19), если в нем изменить знак плюс на минус. Получающаяся формула дает правильное решение для случая идеального проводника и возбуждения электрическим током [формула (3а)]. Интегральная показательная функция (10б) позволяет подробно вычислить дифракционные эффекты при любом конечном поверхностном им-

Выражения (18) неприменимы в переходных областях, прилегающих к границе тени $|\varphi - \varphi'| = \pi$, и на границе отраженной волны $(\varphi + \varphi') = \pi$. Поскольку зависимость от $|\varphi - \varphi'|$ содержится лишь в члене $\bar{G}_\infty(\rho, \rho')$ в формуле (11), переходная область вблизи границы тени описывается и в этом случае функцией \bar{G}'_∞ [§ 4, формула (7)]. Отсюда вытекает важный вывод, уже доказанный в § 4 и 5, о том, что поведение поля вблизи границы тени не зависит от физических свойств клина и в низшем порядке асимптотического представления напряженность поля на границе тени равна половине напряженности падающего поля. Поведение же поля вблизи границы отраженной волны зависит от физических свойств отражающей поверхности. Мы здесь не будем останавливаться на негармонической функции для отраженной волны при наличии поверхности переменного импеданса с конечным значением a_1 (результаты для предельных случаев $a_1 = 0, \infty$ содержатся в § 5).

На основании сходства формальных решений (6) данного параграфа и (3) § 3 можно заключить, что способ вычисления, изложенный применительно к формуле (9) из § 4, пригоден и в данном случае для получения членов более высокого порядка в асимптотическом разложении \bar{G}^d [6]. Коэффициенты $I_{mn}(\varphi, \varphi')$ находятся путем дифференцирования функции $I_{00}(\varphi, \varphi')$ в формуле (18б). Подчеркнем, что при вычислении \bar{G} с точностью до членов более высокого порядка по $1/k$ ($k \gg 1$) необходимо более аккуратно оценивать интеграл (11) по берегам разреза, так как дифракционные эффекты в освещенной области возникают не только на ребре клина, но и на локальных неоднородностях поверхностного импеданса.

Представление, подчеркивающее волноводные свойства (поверхностная волна)

Анализируя излучение, возникающее при наличии бесконечной плоской поверхности постоянного импеданса Z_s (гл. 5, § 7), мы отмечали, что электрический (магнитный) линейный ток, параллельный границе, возбуждает поверхностную волну, если импеданс Z_s носит емкостный (индуктивный) характер. Волноводные свойства поверхности лучше всего выявляются, если использовать разложение по собственным волнам, бегущим вдоль оси, параллельной поверхности. При исследовании волноводных свойств клинообразной поверхности с переменным импедансом удобнее всего должно быть, по-видимому, радиальное представление. Такое представление, содержащее явно радиальную характеристическую функцию Грина g_ρ [гл. 3, § 4, формула (93) с $\tau = k^2$], формально дается выражением (11) из § 5 и может быть получено из соответствующего выражения в угловом представ-

лении [§ 3, формула (3)] деформацией контура интегрирования вблизи особенностей функции $g(\varphi, \varphi'; \mu)$. Как отмечалось в связи с формулой (55) из гл. 3, § 4, функция g_∞ претерпевает разрыв на положительной действительной оси μ , на которой расположен непрерывный спектр собственных значений, связанный с введением бесконечно протяженного углового пространства. Поскольку исходный путь интегрирования можно выбрать вдоль всей мнимой оси μ [§ 3, формула (1)], все другие особенности функции $g(\varphi, \varphi'; \mu)$, расположенные в правой части комплексной плоскости μ , дают вклад в представление в виде спектра угловых собственных волн; следовательно, необходимо исследовать аналитические свойства коэффициента отражения $\hat{\Gamma}(\mu)$ из формулы (5). Так как [формула (5а)]

$$\hat{\Gamma}(\mu) = \frac{\mu - a_1}{\mu + a_1} \quad \text{при } \text{Im } \mu > 0, \quad (25a)$$

$$\hat{\Gamma}(\mu) = \frac{-\mu - a_1}{-\mu + a_1} \quad \text{при } \text{Im } \mu < 0 \quad (25b)$$

и $\text{Re } a_1 > 0$ для реактивного поверхностного импеданса [формулы (3а) и (4а)], функция $\hat{\Gamma}(\mu)$ не имеет особенностей в первом квадранте комплексной плоскости μ . Однако в четвертом квадранте у нее имеется простой полюс при

$$\mu_p = a_1, \quad \text{если } \text{Im } a_1 < 0. \quad (26)$$

Условие $\text{Im } a_1 < 0$ означает, что $\text{Im } Z_s > 0$ (емкостной импеданс) при возбуждении электрическим током и $\text{Im } Z_s < 0$ (индуктивный) при возбуждении магнитным током [напомним, что зависимость от времени берется в виде $\exp(-i\omega t)$]. Следовательно, полюс $\hat{\Gamma}(\mu)$ дает вклад в виде поверхностной волны при условиях, аналогичных тем, которые были найдены для поверхности постоянного импеданса.

Требуемое представление дается теперь непосредственно формулами (93) из гл. 3, § 4 ($\tau = k^2$, $\lambda = \mu^2$), (1а) из § 3 и (8) из § 2:

$$\bar{G}(\rho, \rho') = \frac{1}{2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \mu J_\mu(k\rho_{<}) H_\mu^{(1)}(k\rho_{>}) g(\varphi, \varphi'; \mu) d\mu, \quad (27)$$

где $g(\varphi, \varphi'; \mu)$ — функция, взятая из формулы (5). Путь интегрирования можно замкнуть, добавив по четверти окружности при $|\mu| \rightarrow \infty$ в первом и четвертом квадрантах, где функция $J_\mu(k\rho_{<}) H_\mu^{(1)}(k\rho_{>})$ убывает [формулы (12) и (16) приложения 1].

Если интеграл в формуле (29а) можно вычислить до конца, то полученное выражение для $I_{00}(\varphi, \varphi')$ будет справедливо при всех φ, φ' . Члены более высокого порядка в асимптотическом разложении можно, как и в формуле (9) из § 4, найти, зная I_{00} .

Путем таких же рассуждений, как и при выводе формулы (28), можно получить представление, выявляющее волноводные свойства поверхности клина. Поскольку величина $g(\varphi, \varphi'; \mu)$ в формуле (51) из гл. 3, § 4, — четная функция переменной μ , у нее имеются только особенности типа полюса в комплексной плоскости μ , так что угловой спектр оказывается дискретным. На основе интегрального выражения (27) можно представить \mathcal{G} в виде суммы вкладов полюсов функции g , замкнув контур интегрирования на бесконечности в правой половине комплексной плоскости μ . Ниже приведен результат для частного случая $a_2 = 0$, $a_1 = i|a_1|$ (т. е. для случая, когда грань $\varphi = \phi$ — идеально отражающая, а грань $\varphi = 0$ характеризуется чисто мнимым импедансом). В этом случае полюсы разбиваются на две группы: бесчисленное количество дискретных полюсов на положительной действительной оси μ и только один полюс на отрицательной мнимой оси μ ; последний приближается к мнимой оси со стороны четвертого квадранта, поэтому его вклад учитывается. Окончательный результат [8, 10] таков [гл. 3, § 4, формула (62)]:

$$\begin{aligned} \bar{G}(\varrho, \varrho') = & \frac{\pi i}{\phi} \frac{\operatorname{ch} \eta(\phi - \varphi) \operatorname{ch} \eta(\phi - \varphi')}{1 + \frac{1}{\phi|a_1|} \operatorname{sh}^2 \eta\phi} J_{-i\eta}(k\rho_{<}) H_{-i\eta}^{(1)}(k\rho_{>}) + \\ & + \frac{\pi i}{\phi} \sum_{\xi} \frac{\cos \xi(\phi - \varphi) \cos \xi(\phi - \varphi')}{1 - \frac{1}{\phi|a_1|} \sin^2 \xi\phi} J_{\xi}(k\rho_{<}) H_{\xi}^{(1)}(k\rho_{>}), \end{aligned} \quad (30)$$

где собственные значения ξ и η являются положительными корнями трансцендентных уравнений

$$\operatorname{ctg}(\xi\phi) = -\frac{\xi}{|a_1|}, \quad \operatorname{cth}(\eta\phi) = \frac{\eta}{|a_1|}. \quad (30a)$$

Ряд в формуле (30) быстро сходится, если источник или точка наблюдения находится вблизи ребра клина.

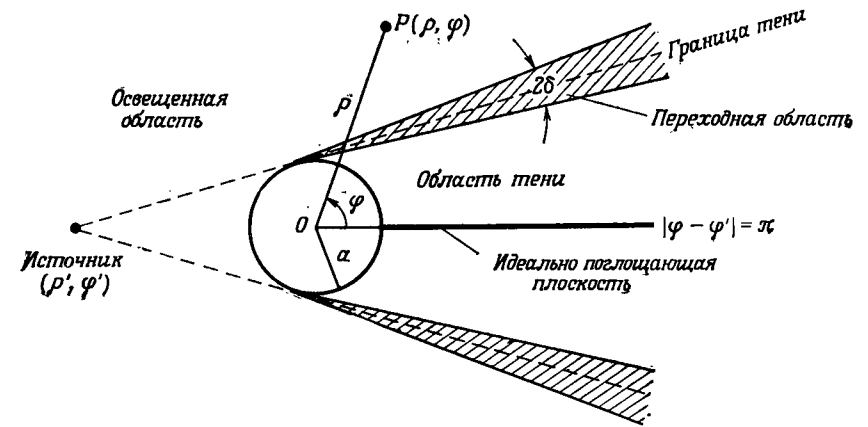
При $|a_1| \rightarrow 0$ мы имеем $\eta \rightarrow 0$ и уравнение для ξ (30а) сводится к виду $\sin \xi\phi = 0$, так что $\xi = m\pi/\phi$, $m = 1, 2, \dots$; кроме того, можно показать, что $\eta^2\phi/|a_1| \rightarrow 1$ и $(1/|a_1|) \sin^2 \xi\phi \rightarrow 0$. В результате выражение (30) сводится к выражению (13) из § 5.

Первый член в формуле (30) описывает поверхностную волну, интенсивность которой убывает при удалении от поверхности $\varphi = 0$. Это особенно очевидно при больших $|a_1|$, когда $\eta \approx |a_1|$. В таком случае вклад поверхностной волны приближенно дается формулой (28), подробно рассмотренной нами ранее,

§ 7. ДИФРАКЦИЯ НА КРУГОВОМ ЦИЛИНДРЕ

а. Линейный источник

Круговой цилиндр получается в геометрической конфигурации, изображенной на фиг. 14, если убрать границы при $\varphi = 0, \phi$. При не зависящем от z возбуждении линейным источником, параллельным оси цилиндра, область вне цилиндра можно рассматривать либо как радиальный волновод с распространением



Фиг. 85. Различные области в приближении геометрической оптики при дифракции на цилиндре.

вдоль координаты ρ , либо как азимутальный (угловой) волновод, в котором волна распространяется в направлении изменения координаты φ (гл. 3, § 3, п. «в»). Хотя в данном параграфе рассматриваются оба представления, особое внимание уделяется угловому представлению, которое, как отмечалось в § 1, особенно удобно при исследовании высокочастотных явлений. В разных геометрических областях на фиг. 85 поведение высокочастотного поля неодинаково. Мы подробно исследуем асимптотическое поведение поля в освещенной и затененной областях и укажем физический смысл решения, основываясь на представлениях геометрической оптики. При этом мы не будем касаться более сложных явлений в переходных областях (заштрихованных на фиг. 85), прилегающих к границам тени (эти вопросы рассматриваются в работах [3 (разд. 1.2.13.5—1.2.13.6 и гл. 2), 11—14]; в книге [3] можно найти соответствующую библиографию).

В угловом представлении решение дается формулой (51в) из гл. 3, § 4 (мы опускаем здесь индекс φ у величины g_φ):

$$g(\varphi, \varphi'; \hat{\lambda}) = \begin{cases} \frac{-\cos \hat{\mu} [\pi - |\varphi - \varphi'|]}{2\hat{\mu} \sin \hat{\mu}\pi}, & (7a) \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_\infty(\varphi, 2n\pi + \varphi'), & (7b) \end{cases}$$

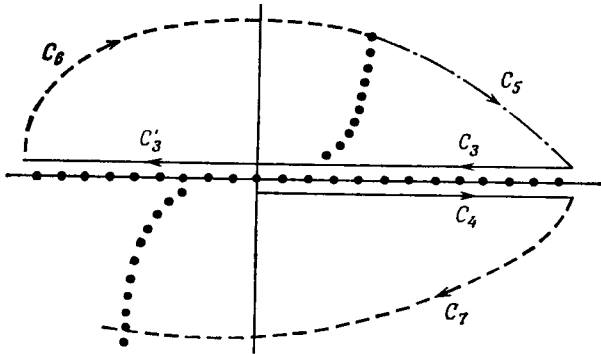
где $\hat{\mu} = \sqrt{\hat{\lambda}}$ и $g_\infty(\varphi, \varphi'; \hat{\lambda})$ — характеристическая функция Грина для бесконечного углового пространства:

$$g_\infty(\varphi, \varphi'; \hat{\lambda}) = \frac{e^{i\hat{\mu}|\varphi - \varphi'|}}{-2i\hat{\mu}}, \quad \text{Im } \hat{\mu} > 0. \quad (7в)$$

Условие полноты [гл. 3, § 2, формула (50в)] имеет вид

$$\delta(\varphi - \varphi') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi - \varphi')}. \quad (8)$$

Разные представления для двумерной функции Грина $\bar{G}(\rho, \rho')$ получаются непосредственно из формул (37) и (38б) из гл. 3, § 3,



Фиг. 86. Контуры интегрирования и особенности в комплексной плоскости μ .

если считать, что в последних отсутствует зависимость от z . В частности, представление в виде контурного интеграла имеет вид

$$\bar{G}(\rho, \rho') = -\frac{1}{\pi i} \int_{C_3 + C_4} g_\rho(\rho, \rho'; \lambda) g(\varphi, \varphi'; \lambda) \mu d\mu, \quad (9)$$

где C_3 и C_4 — контуры, изображенные на фиг. 86. Вблизи полюса $\mu = 0$ контур остается незамкнутым, и в этой точке вычисляется главное значение интеграла. Поскольку подынтегральное выражение в формуле (9) является нечетной функцией перемен-

ной μ , контур C_4 можно зеркально отразить относительно начала координат в контур C'_3 и тогда получим $\int_{C_3 + C_4} = \int_{C_3 + C'_3}$.

В представлении, основанном на введении мнимых источников [формула (7б)], выражение (9) записывается в виде

$$\bar{G}(\rho, \rho') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{G}_\infty(\rho, \rho'_n), \quad \rho'_n = (\rho', \varphi'_n), \quad \varphi'_n = \varphi' + 2n\pi, \quad (10a)$$

где в силу формулы (7в)

$$\bar{G}_\infty(\rho, \rho'_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_\rho(\rho, \rho'; \lambda) e^{i\mu|\varphi - \varphi'_n|} d\mu. \quad (10б)$$

Поскольку подынтегральное выражение в формуле (10б) не имеет особенностей на действительной оси μ , интегрировать можно от $\mu = -\infty$ до $\mu = +\infty$. Так как g_ρ — четная функция величины μ , замена μ на $-\mu$ дает то же самое подынтегральное выражение, но с заменой $|\varphi - \varphi'|$ на $-|\varphi - \varphi'|$. Следовательно, вместо абсолютной величины $|\varphi - \varphi'|$ можно писать просто $\varphi - \varphi'$. Тогда связь функций \bar{G}_∞ и g_ρ можно трактовать как преобразование Фурье в бесконечном угловом пространстве. Член с $n = 0$ в формуле (10a) — это функция Грина для конфигурации, изображенной на фиг. 85; как показывается ниже, он дает основной вклад в квазиоптической области $ka \gg 1$. При $n \neq 0$ быстро сходящееся представление для случая больших ka можно получить, замкнув контур интегрирования в верхней полуплоскости переменной μ полуокружностью бесконечного радиуса и вычислив интеграл как сумму вычетов в полюсах функции g_ρ . В результате получается следующее представление, быстро сходящееся при $ka \gg 1$, но справедливое при любых радиусах цилиндра и любых значениях $|\varphi - \varphi'| \leq \pi$:

$$\bar{G}(\rho, \rho') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_\rho(\rho, \rho'; \lambda) e^{i\mu|\varphi - \varphi'|} d\mu + \frac{\pi}{2} \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\mu_p} \frac{b(\mu_p)}{\frac{\partial}{\partial \mu} d(\mu)|_{\mu_p}} H_{\mu_p}^{(1)}(k\rho) H_{\mu_p}^{(1)}(k\rho') e^{i\mu_p|\varphi - \varphi'_n|}, \quad (11)$$

где $\mu = \sqrt{\lambda}$; штрих над суммой по n обозначает отсутствие члена с $n = 0$, а сама сумма дает вклад мнимых источников, расположенных в бесконечном угловом пространстве, и восстанавливает требуемую периодичность вдоль границы $|\varphi - \varphi'| = \pi$.

Хотя величины $H_{\mu_p}^{(1)}(k\rho)$ и $H_{\mu_p}^{(1)}(k\rho')$ расходятся при $\zeta \rightarrow \infty$, ряд сходится при всех n благодаря наличию множителей $\exp(-\zeta|\varphi - \varphi'_n|)$, если $\varphi \neq \varphi'_n$ (т. е. $\varphi \neq \varphi'$). Чтобы оценить скорость сходимости «ряда по вычетам», исследуем первые члены разложения (подробнее сходимость ряда исследуется в работе [14]). Поскольку $H_{\mu_p}^{(2)}(ka)$ и $(\partial/\partial\mu_p)H_{\mu_p}^{(1)}(ka)$ не содержат экспоненциальных множителей [приложение 1, формулы (24) и (26)], достаточно рассмотреть оставшиеся члены в формуле (11). При больших ka величина μ_p в низшем порядке ведет себя как $O[ka + \alpha(ka)^{1/2}]$, где $\alpha = \text{const}$, $\text{Im } \alpha > 0$ [приложение 1, формула (35)]. Если $k\rho, k\rho' > O[ka + \alpha(ka)^{1/2}]$, то функции Ханкеля аргументов $k\rho$ и $k\rho'$ можно приближенно заменить их асимптотиками Дебая [приложение 1, формула (1)]. Тогда для функции, стоящей под знаком суммы в формуле (11), получаем

$$H_{\mu_p}^{(1)}(k\rho) H_{\mu_p}^{(1)}(k\rho') e^{i\mu_p|\varphi - \varphi'_n|} \sim \exp\{i[\sqrt{(k\rho)^2 - \mu_p^2} + \sqrt{(k\rho')^2 - \mu_p^2}]\} \times \exp\left\{i\mu_p\left[|\varphi - \varphi'_n| - \arccos \frac{\mu_p}{k\rho} - \arccos \frac{\mu_p}{k\rho'}\right]\right\}. \quad (17)$$

Поскольку $\mu_p = ka(1 + \Delta)$, где $\text{Im } \Delta > 0$, а величина Δ возрастает с ростом номера члена ряда, можно утверждать, что экспоненциальный множитель в формуле (17) убывает, если

$$|\varphi - \varphi'_n| > \gamma_1 + \gamma_2, \quad \gamma_1 = \arccos \frac{a}{\rho}, \quad \gamma_2 = \arccos \frac{a}{\rho'}. \quad (18)$$

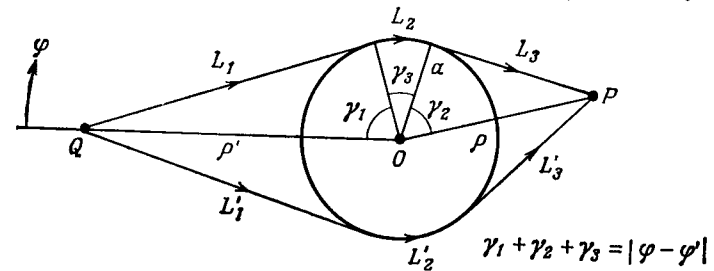
Физическая интерпретация ряда по вычетам

Как явствует из фиг. 87, условие (18) допускает простое физическое истолкование. При $n = 0$ оно означает, что источник Q должен быть невидим из точки наблюдения P (т. е. точка наблюдения должна находиться в области геометрической тени позади цилиндра). Величина (17) пропорциональна $\exp[-(\text{Im } \mu_p)\gamma_3]$, где γ_3 — угол, под которым видны из начала координат точки касания линий L_1 и L_3 , проведенных из источника и точки наблюдения, с поверхностью цилиндра. Выражение (17) можно представить в виде

$$e^{ik(L_1 + L_2 + L_3)} e^{-\chi_p L_2}, \quad \chi_p = \frac{\text{Im } \mu_p}{a}, \quad (19)$$

т. е. можно считать, что каждый член в ряде по вычетам при $n = 0$ описывает падающую волну, которая приходит к цилиндру под углом касания и огибает его, постепенно теряя по пути энергию; из-за потери энергии амплитуда волны убывает

как $\exp(-\chi_p L_2)$. Соответствующий ход лучей показан на фиг. 87. Поскольку волна огибает поверхность цилиндра, она получила название «стелющейся волны» [16], а соответствующий луч — «стелющегося луча» [17]. Стелющиеся лучи, возникающие как продолжение лучей, падающих под углом касания, соответствуют дифракционным эффектам, за счет которых энергия переносится в область геометрической тени. Каждому значению μ_p соответствует свой стелющийся луч; но из-за возрастания мнимой части μ_p для каждого последующего члена ряда существенны лишь несколько первых лучей. Поскольку амплитуда сте-

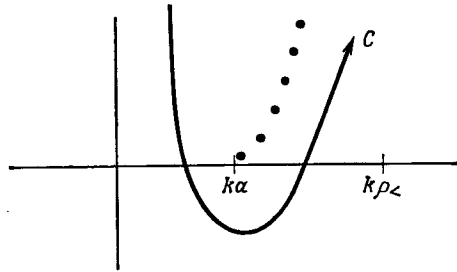


Фиг. 87. Геометрическая интерпретация поля в области тени.

лющейся волны убывает по экспоненте, а амплитуда волны, дифрагированной на ребре клина, убывает по степенному закону [§ 3, формула (15)], тень от закругленного препятствия гораздо темнее, чем от заостренного.

На основе представления о стелющихся лучах можно легко истолковать каждый член в формуле (11), соответствующий мнимому источнику-изображению при $n \neq 0$. Предположим, что $0 < (\varphi - \varphi') < \pi$. Поскольку $\varphi'_n = \varphi' + 2n\pi$, мы имеем $|\varphi - \varphi'_n| = = 2|n|\pi + (\varphi - \varphi')$ при $n < 0$ и $|\varphi - \varphi'_n| = = 2n\pi - (\varphi - \varphi')$ при $n > 0$. Таким образом, члены, содержащие изображения с $n < 0$, описывают лучи, которые идут вдоль L_1 и приходят в точку наблюдения P , сделав n оборотов вокруг цилиндра. Члены, содержащие изображения с $n > 0$, описывают лучи, идущие вдоль L'_1 . Так, член с $n = 1$ соответствует лучу, проходящему путь $(L'_1 + L'_2 + L'_3)$; в общем случае n -й член соответствует лучу, выходящему вдоль L'_1 и достигающему точки наблюдения P после $(n - 1)$ оборотов вокруг цилиндра. Ввиду убывающего экспоненциального множителя, содержащего в показателе длину пути луча вдоль поверхности цилиндра, существенны лишь несколько первых членов ряда. Поскольку $|\varphi - \varphi'_n| \geq (2|n| - 1)\pi$ при всех $|\varphi - \varphi'| < \pi$ и $n \neq 0$, а $(\gamma_1 + \gamma_2) < \pi$ (фиг. 87), ряд по вычетам быстро сходится, причем члены ряда, содержащие мнимые источники в безграничном угловом пространстве, дают вклад лишь в дифракционные эффекты.

а C — контур интегрирования, показанный на фиг. 89. Как уже отмечалось, такая деформация контура интегрирования допустима и полное подинтегральное выражение в формуле для \bar{G}_∞ убывает в верхней полуплоскости комплексной переменной μ . Поэтому можно рассматривать только участок контура, лежащий вблизи действительной оси, где можно использовать фор-



Фиг. 89. Контур интегрирования в комплексной плоскости μ при вычислении методом седловой точки.

мулы Дебая для цилиндрических функций [приложение 1, формулы (1) — (7)]. Тогда для $\bar{G}_\infty^{(1)}$ получим

$$\bar{G}_\infty^{(1)} \sim \frac{i}{4\pi} \int \frac{1}{[k\rho (\sin \beta_1) k\rho' (\sin \beta_2)]^{1/2}} e^{i\psi_1} d\mu, \quad (22)$$

где

$$\psi_1 = \mu |\varphi - \varphi'| + k\rho_> (\sin \beta_1 - \beta_1 \cos \beta_1) - k\rho_< (\sin \beta_2 - \beta_2 \cos \beta_2), \quad (22a)$$

$$\beta_1 = \arccos \frac{\mu}{k\rho_>}, \quad \beta_2 = \arccos \frac{\mu}{k\rho_<}, \quad (22b)$$

причем должно выполняться условие $0 < \text{Re } \beta_{1,2} < \pi$ [приложение 1, формула (46)]. Седловые точки μ_s функции $\psi_1(\mu)$ находятся из условия $d\psi_1/d\mu = 0$:

$$\arccos \left(\frac{\mu_s}{k\rho_<} \right) - \arccos \left(\frac{\mu_s}{k\rho_>} \right) + |\varphi - \varphi'| = 0; \quad (23)$$

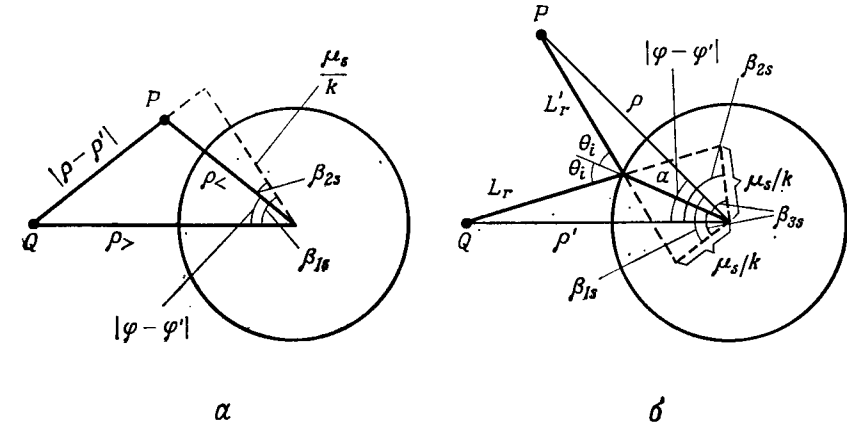
кроме того,

$$\left. \frac{d^2\psi_1}{d\mu^2} \right|_{\mu_s} = \frac{1}{k\rho_> \sin \beta_{1s}} - \frac{1}{k\rho_< \sin \beta_{2s}} < 0, \quad (24)$$

где β_{1s} и β_{2s} — значения величин β_1 и β_2 , соответствующие значениям μ_s .

Физический смысл условия (23) поясняется на фиг. 90, а. Поскольку β_{1s} и β_{2s} — положительные величины (ввиду условия $0 < \text{Re } \beta_{1,2} < \pi$), действительное решение возможно лишь в том

случае, когда $|\varphi - \varphi'| < \pi/2$. Контур интегрирования легко деформировать так, чтобы он проходил через седловую точку $\mu_s = k\rho_< \cos \beta_{2s} = k\rho_> \cos \beta_{1s}$ под углом -45° [формула (24) с учетом того, что $\beta_{1s} > \beta_{2s}$]; следует отметить, что полюсы, изображенные на фиг. 89, отсутствуют в подинтегральном выражении



Фиг. 90. Физический смысл условия для седловой точки. а — прямой луч; б — отраженный луч.

в формуле (21a). На основании формулы (1a) из гл. 4, § 2, и схемы, представленной на фиг. 90, а, получаем

$$\bar{G}_\infty^{(1)} \sim \frac{e^{ik|\rho - \rho'| + i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi} \sqrt{k|\rho - \rho'|}} \quad \text{при } |\varphi - \varphi'| < \frac{\pi}{2}, \quad (25)$$

что совпадает с асимптотическим выражением для функции Грина свободного пространства [гл. 5, § 4, формулы (36) и (37)]. Таким образом, интеграл $\bar{G}_\infty^{(1)}$ описывает падающее поле в области $|\varphi - \varphi'| < \pi/2$; в области же $|\varphi - \varphi'| > \pi/2$ этот интеграл дает пренебрежимо малый вклад.

Интеграл $\bar{G}_\infty^{(2)}$ из формулы (21б) можно исследовать точно так же, помня, что асимптотическое приближение для $H_\mu^{(1,2)}(ka)$ зависит от того, $\mu < ka$ или $\mu > ka$. В последнем случае $H_\mu^{(1)}(ka) \sim -H_\mu^{(2)}(ka)$ [приложение 1, формулы (1) и (6)], так что получающееся выражение под интегралом сходно с подинтегральным выражением в формуле (21a). Действуя, как и раньше, получаем условие существования седловой точки в виде

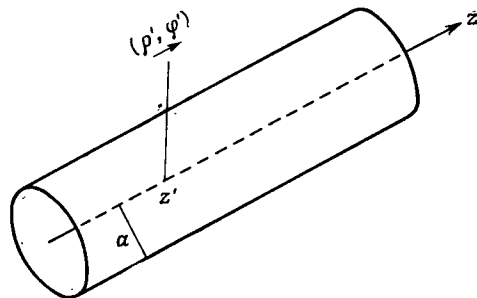
$$\beta_{1s} + \beta_{2s} = |\varphi - \varphi'|, \quad \mu_s = k\rho_> \cos \beta_{1s} = k\rho_< \cos \beta_{2s} > ka, \quad (26)$$

которое графически можно представить так, как показано на фиг. 90, а, при условии что $|\varphi - \varphi'| > \pi/2$. Отметим также, что

ответствующие угловому и радиальному представлениям, а также представлению в виде контурного интеграла (гл. 3, § 3, п. «в») [3, 14]:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left\{ \begin{array}{l} \frac{i}{8\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta e^{in(\varphi-\varphi')} e^{i\zeta(z-z')} \left[J_n(k_\zeta \rho_{<}) - \frac{b(n)}{d(n)} H_n^{(1)}(k_\zeta \rho_{<}) \right] H_n^{(1)}(k_\zeta \rho_{>}), \quad (30a) \\ \frac{1}{4} \sum_{\mu_p} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\zeta(z-z')} \frac{b(\mu_p)}{\frac{\partial}{\partial \mu} d(\mu) \Big|_{\mu_p}} \times \\ \times H_{\mu_p}^{(1)}(k_\zeta \rho) H_{\mu_p}^{(1)}(k_\zeta \rho') e^{i\mu_p |\varphi-\varphi'|}, \quad (30б) \\ \frac{1}{8\pi} \int_{C_1+C_2} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta e^{i\zeta(z-z')} \left[J_\mu(k_\zeta \rho_{<}) - \frac{b(\mu)}{d(\mu)} H_\mu^{(1)}(k_\zeta \rho_{<}) \right] \times \\ \times H_\mu^{(1)}(k_\zeta \rho_{>}) \frac{\cos \mu [\pi - |\varphi - \varphi'|]}{\sin \mu \pi}, \quad (30в) \end{array} \right.$$

где $k_\zeta = \sqrt{k^2 - \zeta^2}$ (причем $\text{Im } k_\zeta \geq 0$), а φ'_n — величина, указанная в формуле (10а). Поскольку цилиндр считается идеально



Фиг. 91. Проводящий цилиндр и точечный источник.

проводящим, $\bar{C} = \infty$ в формуле (5а) в случае E -волн относительно оси z (элемент электрического тока) и $\bar{C} = 0$ в случае H -волн (элемент магнитного тока). Подчеркнем также, что в функциях $b(\mu)$ и $d(\mu)$ следует произвести замену $k \rightarrow k_\zeta$.

Другие представления можно получить из представлений (30), деформировав контур интегрирования в комплексной плоскости ζ вблизи точек ветвления функции k_ζ . В результате полу-

чаются выражения в z -представлении, например такое:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{8\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi-\varphi')} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \eta \left[J_n(\eta \rho') - \frac{b(n)}{d(n)} H_n^{(1)}(\eta \rho') \right] H_n^{(1)}(\eta \rho) \frac{e^{ik_\eta |z-z'|}}{k_\eta}, \quad (31)$$

где $k_\eta = \sqrt{k^2 - \eta^2}$, $\text{Im } k_\eta \geq 0$. Читатель может сам вывести эту формулу в качестве упражнения.

Выражение (31) удобно для исследования случаев, соответствующих векторным точечным источникам с произвольной ориентацией. Напомним [гл. 2, § 3, п. «в»; гл. 5, § 2, формула (1)], что поля в этих случаях можно выразить через потенциальные функции $\mathcal{P}'(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ и $\mathcal{P}''(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, которые в z -представлении отличаются от $G'(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ и $G''(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ только множителями $1/k_{ii}'^2$ и $1/k_{ii}''^2$. Для цилиндрического волновода $k_{ii}' = k_{ii}'' = \eta$ [гл. 3, § 2, формула (46б)], так что выражение для \mathcal{P} получим, разделив подынтегральное выражение в формуле (31) на η^2 . При истолковании этого результата следует учитывать сказанное в гл. 5, § 2, после формулы (10).

§ 8. ПОЛЯ В СФЕРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

а. Введение

Основная конфигурация для исследования полей в сферической системе координат представляет собой комбинацию сфер, круговых конусов и плоскостей (фиг 92; см. также т. 1, фиг. 53). Хотя на схеме изображены лишь одна сферическая и одна коническая поверхности, излагаемым ниже методом можно исследовать области, заключенные между двумя концентрическими сферами и двумя коаксиальными конусами. Некоторые закономерности в распределении полей, возбуждаемых при наличии непрозрачных сферических препятствий (например, эффекты тени), такие же, как и для полей в случае цилиндрических рассеивателей (§ 1 и 7), но на других характеристиках сильно сказывается различие между цилиндрическими и сферическими координатами (например, поля при рассеянии на ребре клина $\rho = 0$ и при рассеянии на острие $r = 0$). Цель данного параграфа — получить различные представления полей в сферических областях и сравнить их с аналогичными результатами для цилиндрических областей. Ввиду формального сходства представлений, в которых используются бегущие по радиусу или углу волны в цилиндрической и сферической системах координат, нетрудно сразу же

где J_r^0 и M_r^0 — моменты электрического и магнитного диполей. При $r' \rightarrow 0$ вклад дает лишь член с $n = 1$ [гл. 2, § 7, формула (4в)] и

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial G}{\partial \theta} \Big|_{r'=0} = - \frac{k \sin \theta}{j4\pi r} h_1^{(2)}(kr), \quad h_1^{(2)}(kr) = -e^{-jkr} + j \frac{e^{-jkr}}{kr}. \quad (4a)$$

Таким образом, в скалярной задаче основной является собственная волна с $n = 0$, а в векторной — собственная волна с $n = 1$.

Чтобы получить выражения для \mathcal{P}'/rr' и \mathcal{P}''/rr' в формулах (9) из гл. 2, § 6, нужно ввести множитель $[n(n+1)]^{-1}$ под знак суммы в формуле (1) и отбросить член с $n = 0$.

Сфера

Если некий источник расположен вне идеально проводящей сферы, то возбуждаемые им электромагнитные поля можно найти, вычислив скалярные функции G' и G'' или \mathcal{P}' и \mathcal{P}'' , радиальные представления для которых получаются из представлений для свободного пространства, если заменить собственные функции Грина (11) из гл. 2, § 7, функциями (12) из гл. 12, § 7. Например, если источником служит вертикальный (радиальный) электрический диполь, а система координат выбрана так, что ось z совпадает с осью диполя, то для нахождения полей нужно знать лишь функцию G' , которую на основании формул (12) из гл. 2, § 7, (67) из гл. 3, § 4, (43) из гл. 3, § 3, (101) из гл. 3, § 4, (2a) и условия $h_t^{(2)}(ka) = 0$ можно представить следующим образом [18]:

$$G'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{1}{j4\pi k r r'} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \theta) h_n^{(2)}(kr) \times \\ \times h_n^{(2)}(kr') \frac{j_n'(ka)}{h_n^{(2)}(ka)}, & (5a) \\ \frac{1}{4j\pi k r r'} \sum_t \frac{(2t+1) j_t'(ka)}{\sin t\pi (\partial/\partial t) h_t^{(2)}(ka)} \times \\ \times P_t(-\cos \theta) h_t^{(2)}(kr) h_t^{(2)}(kr'); & (5b) \end{cases}$$

возможно также промежуточное представление в виде контурного интеграла [гл. 3, § 3, формула (43в)]. Переход от представления (5a) к представлению (5b) называется преобразованием

Ватсона; но в работе Ватсона [19] не использовалось представление о характеристических функциях Грина.

В формуле (5a) функция Грина для сферы представляется в виде поправки к функции Грина для свободного пространства, и это выражение быстро сходится при малых ka . В случае же больших ka поля в области геометрической тени удобно вычислять с помощью «ряда по вычетам» (5б). Поскольку $t = O(ka)$ [приложение 1, формула (5)], для функции Лежандра можно взять асимптотическое выражение [гл. 3, § 4, формула (66б)], если $\theta \not\approx 0, \pi$. Получающийся при этом ряд имеет такой же вид, как и ряд, рассмотренный нами в § 7, п. «а», где речь шла о рассеянии на круговом цилиндре, а потому поля в различных геометрических областях можно вычислять путем такого же анализа. Физический смысл различных составляющих полей оказывается тоже аналогичным, поскольку в данном случае распределение лучей, хотя и трехмерно, обладает вращательной симметрией (фиг. 87 и 88), Простая лучевая интерпретация невозможна вдоль оси $\theta = 0, \pi$, где функцию $P_t(-\cos \theta)$ нельзя приближенно заменить экспонентой: с физической точки зрения это означает, что на оси $\theta = 0, \pi$ все стелющиеся лучи пересекаются, образуя каустику. Как и в случае цилиндра, можно расширить область изменения θ от $-\infty$ до $+\infty$ и выразить угловые характеристические функции Грина g_θ' и g_θ'' через мнимые источники (изображения) в этом пространстве θ . Такое представление легко получить, если функции Лежандра можно аппроксимировать тригонометрическими функциями (т. е. при достаточно больших ν), но его можно написать и при произвольных ν , если ввести функции Лежандра «для бегущей» волны [гл. 3, § 4, формула (71)].

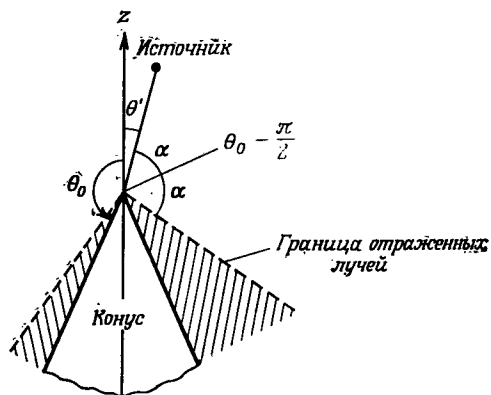
Если элемент электрического тока лежит на оси z , но ориентирован нормально к ней (например, $J_0 = \theta_0 J^0$, $\theta' = \varphi' = 0$), то по формулам (9) из гл. 2, § 6, можно выразить через \mathcal{P}' и \mathcal{P}'' потенциалы Герца Π' и Π'' :

$$j\omega \epsilon r \Pi'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{J^0}{r'} \frac{\partial^2}{\partial \theta'^2 \partial r'} \mathcal{P}'(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (6a)$$

$$r \Pi''(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{J^0}{r' \sin \theta'} \frac{\partial}{\partial \varphi'} \mathcal{P}''(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (6b)$$

где после дифференцирования следует положить $\theta', \varphi' \rightarrow 0$. Радиальное представление для \mathcal{P}'/rr' будет совпадать с выражением (1), если заменить радиальную функцию (11) из гл. 2, § 7, функцией (12б) из того же параграфа, ввести под знак суммы множитель $(n+1)^{-1}n^{-1}$ и отбросить член ряда с $n = 0$. Согласно формуле (79г) из гл. 3, § 4, при $\theta' \rightarrow 0$ в ряде останется

бенностей функции g_r (точка ветвления при $\lambda = -1/4$, причем сделан разрез вдоль отрицательной действительной оси), в результате чего было получено θ -представление (9в) [см. также § 3, формула (3)]. Кроме того, при выводе использовалось то обстоятельство, что величины $h_v^{(1)}$, $h_v^{(2)}$ и g_{θ_s}' — четные функции переменной $v + 1/2$. Аналогичные представления можно написать для функции Грина G'' , относящейся к H -волне, если заменить $P_v^{-m}(\pm \cos \theta_0)$ величиной $(d/d\theta_0) P_v^{-m}(\pm \cos \theta_0)$ [20], и для функций \mathcal{P}' и \mathcal{P}'' , если добавить в формулу (9а) множитель $1/\rho(\rho +$



Фиг. 93. Коническое препятствие ($\alpha = \theta_0 - \pi/2 - \theta'$).

+ 1). В последнем случае угловое представление принимает следующий вид [21]:

$$\mathcal{P}'_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = Q'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \bar{\mathcal{P}}'_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (10)$$

где $\mathcal{P}'_s \equiv \mathcal{P}' - \mathcal{P}_f$ и

$$Q'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi^2 k} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi') [2\pi j \text{ (вычет в } \lambda = 0)], \quad (10a)$$

$$\bar{\mathcal{P}}'_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{-1}{16\pi k} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi') \int_{-1/2-j\infty}^{-1/2+j\infty} \frac{dv}{v(v+1)} [], \quad (10b)$$

а скобками [] обозначено подынтегральное выражение в формуле (9в). Выражение для \mathcal{P}''_s отличается от выражения (10) только тем, что в нем вместо $P_v^{-m}(\pm \cos \theta_0)$ стоит $(d/d\theta_0) P_v^{-m}(\pm \cos \theta_0)$. На основании формул (65) и (66а) из гл. 3, § 4, можно

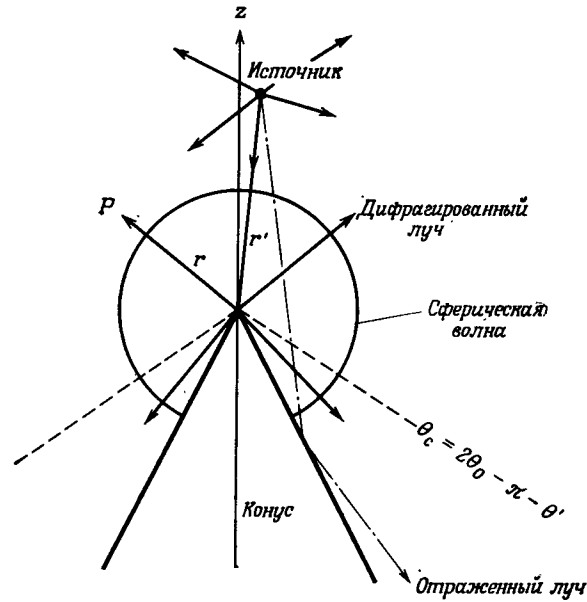
показать, что

$$Q' = -Q'' = \frac{1}{2\pi k} j_0(kr_<) h_0^{(2)}(kr_>) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos m(\varphi - \varphi')}{m} \times \\ \times \left[\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta'}{2} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi - \theta_0}{2} \right) \right]^m + \text{член с } m=0. \quad (10в)$$

Подставив выражение (10в) в формулу (10) из гл. 2, § 6, нетрудно убедиться, что член с $m=0$ не дает вклада в электромагнитные поля, выраженные через \mathcal{P}' и \mathcal{P}'' ; поэтому в дальнейшем его можно не учитывать.

Взяв для функций, входящих в формулу (9а), асимптотические выражения, соответствующие большому ρ [гл. 2, § 7, формула (4), гл. 3, § 4, формула (66)], можно показать, что радиальное представление сходится всегда, но оно *быстро сходится* только в том случае, когда либо источник, либо точка наблюдения находится вблизи вершины конуса (т. е. когда либо kr , либо kr' — малая величина; § 5, п. «в»). Такое представление позволяет проверять, выполняется ли «условие на вершине» [гл. 1, § 5, формула (39)], ограничивающее скорость роста полей вблизи данной особенности. Указанный ряд можно, например, использовать для вычисления токов, наводимых вблизи вершины конуса падающей плоской волной [для чего нужно заменить функцию $h_p^{(2)}(kr_>)$ асимптотическим выражением при $r' \rightarrow \infty$ и ввести новую нормировку], или для расчета диаграммы излучения при наличии источников, расположенных вблизи вершины, если конечно, известны собственные значения ρ . Когда kr и kr' велики, представление в виде ряда (9а) неудобно для расчетов, поскольку члены ряда убывают по абсолютной величине лишь при $\rho > kr_<$. В этом случае удобнее интегральное представление (9в), которое в явном виде описывает возмущение, вносимое конусом. Поскольку теорема о представлениях связана с преобразованием Конторовича — Лебедева, а оно применимо лишь к ограниченному классу функций, необходимо ввести ограничения, которые обеспечивали бы сходимость интеграла. Путем точно таких же рассуждений, как и в задаче о дифракции на клине [см. замечания после формулы (3) из § 3], можно показать, что деформация контура, необходимая при переходе от формулы (9б) к формуле (9в), допустима, если $\theta + \theta' < 2\theta_0 - \pi$. Как и в случае клина, данным условием определяется область, в которую не попадают лучи, зеркально отраженные от поверхности конуса (область $\theta > \theta' + 2\alpha$ на фиг. 93). Поэтому второй член выражения (9в) должен учитывать (в своей области применимости) дифракционные эффекты, которыми обусловлено отличие высокочастотного поля от геометрического поля.

рассеянной волны определяется «коэффициентом дифракции» A_0 . Сказанное поясняется на фиг. 94. Здесь полное поле равно сумме поля в свободном пространстве и дифрагированного поля. Все это относится к области $\theta < \theta_c$, в которой нет лучей, зеркально отраженных от поверхности конуса. В области $\theta_0 \geq \theta > \theta_c$ картина значительно сложнее, поскольку интегралы, входящие в формулы (9в) и (10б), здесь расходятся. Как и в за-



Фиг. 94. Интерпретация высокочастотного дифрагированного поля.

даче о клине (§ 3, п. «а», и § 5, п. «в»), интегралы становятся сходящимися, если из них выделить вклады зеркально отраженных полей. В случае клина это довольно просто сделать, поскольку плоские грани клина возбуждают отраженное поле, которое по своему характеру совпадает с падающим полем, но в случае конуса анализ осложняется тем, что поверхность конуса криволинейна. Такая задача была решена в случаях простой зависимости от азимута [3 (гл. 18), 22] [например, в случае кольцевого источника, центр которого лежит на оси конуса, с зависимостью от азимута типа $\exp(im\phi)$] и было показано, что функциональный вид коэффициентов дифракции A'_n, A''_n или B'_n, B''_n одинаков во всей области $0 < \theta \leq \theta_0$, хотя их указанное выше интегральное представление справедливо лишь при $\theta < \theta_c$. Таким образом, если интеграл удастся вычислить, то получающаяся функция $\theta, \theta', \phi, \phi'$ должна быть всюду применима. Выделе-

ние геометрооптического вклада упрощается, если сформулировать задачу в угловом представлении с введением мнимых источников в бесконечном θ -пространстве [гл. 3, § 4, формула (74)]. Подчеркнем, что простой анализ высокочастотного поля, основанный на вычислении вкладов падающих, отраженных и дифрагированных лучей, невозможен в переходных зонах, прилегающих к границе области существования отраженных лучей.

Приближенные выражения для случая малых углов при вершине конуса

Хотя коэффициенты дифракции вычисляются, как правило, численными методами [3 (гл. 18), 23], в случае малых углов при вершине конуса можно получить приближенные аналитические результаты. В этом случае $\theta_0 \approx \pi$ и функции Лежандра, содержащие θ_0 , приближенно выражаются через элементарные функции. Поскольку $F(a, b; c; 0) = 1$, из (65) гл. 3, § 4, следует, что при $\phi \rightarrow 0$

$$P_\nu^{-m}(\cos \phi) \sim \frac{1}{\Gamma(1+m)} \left(\frac{\phi}{2}\right)^m, \quad m \geq 0, \quad (16a)$$

$$P_\nu^{-m}(-\cos \phi) \sim \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(1+m+\nu)\Gamma(m-\nu)} \left(\frac{2}{\phi}\right)^m, \quad m \geq 1, \quad (16b)$$

причем [24]

$$P_\nu(-\cos \phi) \sim \frac{2 \sin \nu\pi}{\pi} \ln \frac{\phi}{2}, \quad (m=0). \quad (16в)$$

Кроме того,

$$\frac{d}{d\phi} P_\nu^{-m}(\cos \phi) \sim \frac{1}{2\Gamma(m)} \left(\frac{\phi}{2}\right)^{m-1}, \quad m \geq 1, \quad (17a)$$

$$\frac{d}{d\phi} P_\nu^{-m}(-\cos \phi) \sim \frac{-\Gamma(1+m)}{2\Gamma(1+m+\nu)\Gamma(m-\nu)} \left(\frac{2}{\phi}\right)^{m+1}, \quad m \geq 1, \quad (17b)$$

а выражения для $m=0$ получаются из (16a) и (16b) с помощью формулы

$$\frac{d}{d\phi} P_\nu(\cos \phi) = P_\nu^1(\cos \phi) = -\nu(\nu+1)P_\nu^{-1}(\cos \phi). \quad (17в)$$

Таким образом, при $\theta_0 \rightarrow \pi$

$$\frac{P_\nu(-\cos \theta_0)}{P_\nu(\cos \theta_0)} \sim \frac{\pi \operatorname{cosec} \nu\pi}{2 \ln [(\pi - \theta_0)/2]},$$

$$\frac{P_\nu^{-m}(-\cos \theta_0)}{P_\nu^{-m}(\cos \theta_0)} \sim O[(\pi - \theta_0)^{2m}] \quad \text{при } m \geq 1, \quad (18a)$$

$$\frac{d}{d\theta_0} P_\nu^{-m}(-\cos \theta_0) \sim \begin{cases} \frac{\Gamma(m-\nu)\Gamma(1+m+\nu)}{-\Gamma(m)\Gamma(1+m)} \left(\frac{\pi-\theta_0}{2}\right)^{2m} & \text{при } m \geq 1, \quad (18b) \\ -\frac{\pi\nu(\nu+1)}{\sin \nu\pi} \left(\frac{\pi-\theta_0}{2}\right)^2 & \text{при } m=0. \quad (18в) \end{cases}$$

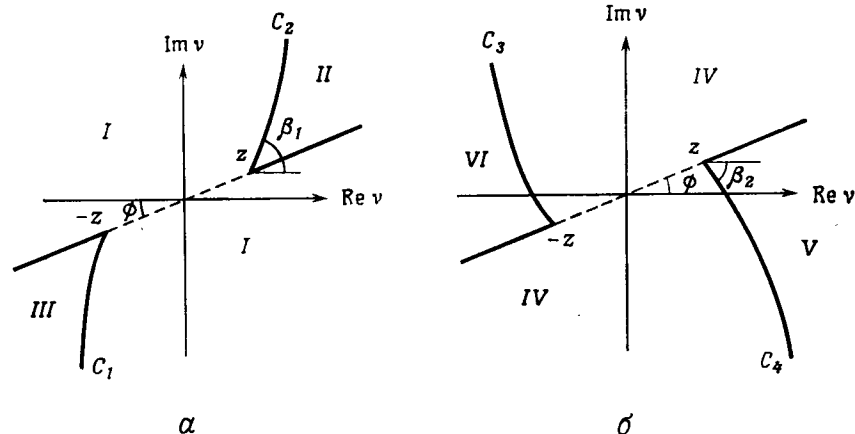
в замкнутом виде; соответствующие кривые, рассчитанные численными методами, приведены в работах [3 (гл. 18), 23]. Поля, вычисленные с использованием этих кривых, в хорошем приближении описываются выражениями, полученными методом физической оптики; кроме того, при больших углах $\theta_0 \approx \pi/2$ можно вывести приближенные аналитические формулы. Сказанное иллюстрируется в разделе «Задачи» в конце главы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ $H_\nu^{(1)}(z)$ И $H_\nu^{(2)}(z)$

Во многих задачах, рассматривавшихся в данной главе, требовались асимптотические выражения для функций Бесселя при больших значениях комплексного аргумента z или порядка ν . Здесь мы приведем соответствующие формулы для двух случаев: 1) когда $|\nu/z| \gg 1$ или $|\nu/z| \ll 1$ и 2) когда $|\nu/z| \approx 1$. Формулы для 1-го случая были выведены Дебаем [26], а для 2-го — в основном Лангером [27] и Олвером [28] (см. также [29]).

а. Большие и неодинаковые аргумент и порядок

Если аргумент и порядок нельзя считать приблизительно равными [точнее, если $|\nu - z| < O(|\nu|^{1/2})$], то вся комплексная



Фиг. 95. Различные области в комплексной плоскости ν .

α — для $H_\nu^{(1)}(z)$; β — для $H_\nu^{(2)}(z)$; $\phi = \arg z < \pi/2$.

плоскость, разделенная на области так, как показано на фиг. 95, охватывается тремя разными асимптотическими представлениями для $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$.

Для $H_\nu^{(1)}(z)$ имеем:

В области I

$$H_\nu^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi^2 z \sin \gamma}} e^{-i\pi/4} e^{iz(\sin \gamma - \gamma \cos \gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n \Gamma(n + 1/2) e^{-in\pi/2}}{[(z \sin \gamma)/2]^n}. \quad (1)$$

В области II

$$H_\nu^{(1)}(z) \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi^2 z \sin \gamma}} e^{i\pi/4} e^{-iz(\sin \gamma - \gamma \cos \gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n \Gamma(n + 1/2) e^{in\pi/2}}{[(z \sin \gamma)/2]^n}. \quad (2)$$

В области III

$$H_\nu^{(1)}(z) \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi^2 z \sin \gamma}} e^{i\pi/4} e^{-iz[\sin \gamma + (2\pi - \gamma) \cos \gamma]} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n \Gamma(n + 1/2) e^{in\pi/2}}{[(z \sin \gamma)/2]^n}. \quad (3)$$

В этих формулах $\Gamma(x)$ — гамма-функция,

$$\cos \gamma = \frac{\nu}{z}, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2}, \quad (4a)$$

причем угол γ удовлетворяет условию

$$0 < \operatorname{Re} \gamma < \pi. \quad (4b)$$

Первые несколько коэффициентов A_n таковы:

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \frac{1}{8} + \frac{5}{24} \operatorname{ctg}^2 \gamma, \quad A_2 = \frac{3}{128} + \frac{77}{576} \operatorname{ctg}^2 \gamma + \frac{385}{3456} \operatorname{ctg}^4 \gamma. \quad (4в)$$

Для $H_\nu^{(2)}(z)$ имеем:

В области IV

$$H_\nu^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi^2 z \sin \gamma}} e^{i\pi/4} e^{-iz(\sin \gamma - \gamma \cos \gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n e^{in\pi/2} \Gamma(n + 1/2)}{[(z \sin \gamma)/2]^n}. \quad (5)$$

В области V

$$H_\nu^{(2)}(z) \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi^2 z \sin \gamma}} e^{-i\pi/4} e^{iz(\sin \gamma - \gamma \cos \gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n \Gamma(n + 1/2) e^{-in\pi/2}}{[(z \sin \gamma)/2]^n}. \quad (6)$$

В области VI

$$H_\nu^{(2)}(z) \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi^2 z \sin \gamma}} e^{-i\pi/4} e^{iz[\sin \gamma + (2\pi - \gamma) \cos \gamma]} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n \Gamma(n + 1/2) e^{-in\pi/2}}{[(z \sin \gamma)/2]^n}. \quad (7)$$

где γ по-прежнему дается соотношением (4). Нули функции $H_\nu^{(1)}(z)$ при больших ν, z лежат на кривых C_1 и C_2 , являющихся

заны между собой соотношением $v_I = v_{III} e^{i2\pi}$. То же самое относится и к выражениям (13а) и (13в). Абсолютная величина множителей $(2v/ez)^{\pm v}$ стремится к единице вблизи кривых C_2 и C_4 , а $|2ve^{\pm i\pi}/ez|^v \rightarrow 1$ вблизи кривых $C_{1,3}$. В окрестности любого из этих контуров пригодно любое из двух выражений для $H_v^{(1),(2)}$, написанных для областей, лежащих по обе стороны от контура.

Асимптотическая формула для функции Бесселя получается непосредственно из ряда

$$J_v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z/2)^{v+2n}}{n! \Gamma(v+n+1)}, \quad (14)$$

если подставить в него следующее приближенное выражение для гамма-функции при большом аргументе:

$$\Gamma(v+\alpha) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{v}} \left(\frac{v}{e}\right)^v v^\alpha, \quad |v| \rightarrow \infty, \quad |\arg v| < \pi, \quad \alpha > 0. \quad (15)$$

В результате имеем

$$J_v(z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \left(\frac{2v}{ez}\right)^{-v}, \quad |\arg v| < \pi. \quad (16)$$

Выражения (12) и (13) можно было также получить исходя из выражения (16) и формулы

$$H_v^{(1,2)}(z) = \frac{J_{-v}(z) - e^{\mp i\pi} J_v(z)}{\pm i \sin \pi v}. \quad (17)$$

Чтобы оценить величину множителя $(2v/ez)^{\pm v}$, положим

$$v = \zeta e^{i\psi}, \quad \zeta = |v| \rightarrow \infty. \quad (18a)$$

Тогда

$$\left| \left(\frac{2v}{ez}\right)^{\pm v} \right| = \exp \left\{ \pm \zeta \left[\cos \psi \ln \frac{2\zeta}{e|z|} - \sin \psi (\psi - \arg z) \right] \right\}. \quad (18b)$$

Это выражение растет быстрее экспоненты при $\pm \cos \psi > 0$, убывает при $\pm \cos \psi < 0$ и стремится к единице лишь при $|\psi| \rightarrow \pi/2$ [формула (21)]. Следовательно, функции Ханкеля всегда растут быстрее экспоненты при $|v| \rightarrow \infty$, кроме случая, когда $|\psi| \rightarrow \pi/2$. В последнем случае (т. е. вблизи кривых $C_{1,2,3,4}$) простые соотношения (12) и (13) следует модифицировать указанным выше способом, и тогда оказывается, что при $|v| \rightarrow \infty$ функция $H_v^{(1)}(z)$ мала в области между кривыми C_1 и C_4 , но велика вне этой области, а функция $H_v^{(2)}(z)$ мала в области между кривыми C_2 и C_3 , но велика вне ее. Функция $J_v(z)$ из (16) убывает справа от кривых C_2 и C_4 и возрастает в остальных обла-

стях. На мнимой оси при положительных действительных z имеем

$$H_v^{(1)}(z), J_v(z) \sim O[\zeta^{-1/2} e^{\zeta\pi/2}]; \quad H_v^{(2)}(z) \sim O[\zeta^{-1/2} e^{-\zeta\pi/2}], \quad \psi = \frac{\pi}{2}, \quad (19a)$$

$$H_v^{(1)}(z) \sim O[\zeta^{-1/2} e^{-\zeta\pi/2}]; \quad H_v^{(2)}(z), J_v(z) \sim O[\zeta^{-1/2} e^{\zeta\pi/2}], \quad \psi = -\frac{\pi}{2}. \quad (19b)$$

Посмотрим теперь, каково поведение функций $H_v^{(1,2)}(z)$, $(\partial/\partial z)H_v^{(1)}(z)$, $(\partial/\partial v)H_v^{(1)}(z)$ и $J_v(z)$ и $H_v^{(1)}(y)$, где $y \neq z$, на кривой C_2 , ибо это существенно при решении задачи о дифракции на цилиндре, рассматриваемой в данной главе. Вблизи кривой C_2 асимптотическое выражение для $H_v^{(1)}(z)$ получается сложением выражений (12а) и (12б):

$$H_v^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi v}} \left[\left(\frac{2v}{ez}\right)^{-v} - i \left(\frac{2v}{ez}\right)^v \right]. \quad (20)$$

Каждый член в квадратных скобках становится равным единице по абсолютной величине при

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \delta, \quad \delta \approx \frac{\pi}{2 \ln(2\zeta/ez)} \quad \text{или} \quad \zeta = \frac{ez}{2} e^{\pi/2\delta}, \quad (21)$$

где для удобства считается, что z — положительная действительная величина. Условием (21) фактически определяются далекие участки контура C_2 , на которых расположены нули функции $H_v^{(1)}(z)$, поскольку величина (20) обращается в нуль только в том случае, когда экспоненциальные члены равны по абсолютной величине. Сравнивая (19) и (21), мы видим, что все функции крайне быстро изменяются при $|\psi| \rightarrow \pi/2$.

Поскольку для далеких нулей функции $H_v^{(1)}(y)$ при $y > 0$ и $y \neq z$ мы имеем $|\psi| \rightarrow \pi/2$, выражение для $H_v^{(1)}(y)$ вблизи кривой C_2 также состоит из двух членов (20). На кривой C_2

$$\delta \ln \frac{2\zeta}{ey} = \delta \ln \left(\frac{z}{y} e^{\pi/2\delta} \right) = \frac{\pi \ln(z/y)}{2 \ln(2\zeta/ez)} + \frac{\pi}{2}, \quad (22a)$$

так что

$$\left| \left(\frac{2v}{ey}\right)^{\pm v} \right| = \exp \left[\pm \frac{\zeta \pi}{2} \frac{\ln(z/y)}{\ln(2\zeta/ez)} \right]. \quad (22b)$$

Таким образом, при $z > y$ в выражении (20) (где вместо z стоит y) преобладает первый, а при $z < y$ — второй член, и при любом положительном y имеем

$$|H_v^{(1)}(y)| \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \zeta}} \exp \left[\frac{\zeta \pi}{2} \frac{|\ln(z/y)|}{\ln(2\zeta/ez)} \right] \quad \text{на } C_2 \text{ при } \zeta \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Дифференцируя выражение (20) по v и учитывая, что $|(2v/ez)^{\pm v}| = O(1)$ на кривой C_2 , а два члена в квадратных

мы рассмотрим те и другие функции. Если произвести замену переменной

$$\frac{2}{3} \sigma^{3/2} = \xi e^{-i\pi} \quad (33)$$

и воспользоваться формулой (17), то можно показать, что нули $\bar{\xi}_p$ функции $H_{1/3}^{(1)}(\xi e^{-i\pi})$ совпадают с корнями уравнения

$$J_{-1/3}(\bar{\xi}_p) + J_{1/3}(\bar{\xi}_p) = 0. \quad (34)$$

Корни этого уравнения действительны. Положив $\sigma = 2^{1/3}\tau$, где $\tau = (z - \nu)^{1/3}$ и z — фиксированная величина, получим на основании формул (29), (33) и (34) нули $\pm \bar{\xi}_p$ функции $H_{\nu}^{(1)}(z)$:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_p &\sim z + 2^{-1/3} \left(\frac{3}{2} \bar{\xi}_p\right)^{2/3} e^{i\pi/3} z^{1/3}, \\ H_{\bar{\xi}_p}^{(1)}(z) &= 0, \quad \bar{\xi}_p > 0. \end{aligned} \quad (35)$$

В первом приближении нули функции $H_{\nu}^{(1)}(z)$ совпадают с нулями функции $A_1'(-2^{1/3}\tau) \equiv A_1'(-\sigma)$, которые в силу соотношения

$$\frac{d}{d\xi} [\xi^{\mu} H_{\mu}^{(1)}(\xi e^{-i\pi})] = \xi^{\mu} H_{\mu-1}^{(1)}(\xi e^{-i\pi}) \quad (36)$$

при $\mu = 1/3$ и формул (17), (32) и (33) можно выразить через чисто действительные корни $\bar{\eta}_p$ уравнения

$$J_{1/3}(\bar{\eta}_p) - J_{-1/3}(\bar{\eta}_p) = 0. \quad (37)$$

Если обозначить через $\pm \eta_p$ нули функции $H_{\nu}^{(1)}(z)$ в комплексной плоскости ν , то

$$\eta_p \sim z + 2^{-1/3} \left(\frac{3}{2} \bar{\eta}_p\right)^{2/3} e^{i\pi/3} z^{1/3}, \quad H_{\eta_p}^{(1)}(z) = 0, \quad \bar{\eta}_p > 0. \quad (38)$$

При положительных действительных z нулями $H_{\nu}^{(2)}(z)$ и $H_{\nu}^{(1)}(z)$ будут величины, комплексно сопряженные величинам $\bar{\xi}_p$ и η_p .

Нули $\bar{\xi}_p$ и $\bar{\eta}_p$ можно также выразить через нули функции Эйри $Ai(-\alpha)$ или ее производной. На основании формул (32) и (34) из гл. 4, § 2, можно показать, что

$$A_1(-\alpha e^{-i2\pi/3}) = -2e^{i2\pi/3} Ai(-\alpha), \quad \alpha = \left(\frac{3}{2} \bar{\xi}_p\right)^{2/3}, \quad (39a)$$

$$A_2(-\alpha e^{-i2\pi/3}) = e^{i2\pi/3} A_1(-\alpha), \quad A_{2,1}(x) \equiv Ai(x) \pm i Bi(x), \quad (39b)$$

откуда следует, что $\bar{\xi}_p$ удовлетворяет уравнению

$$Ai(-\bar{\alpha}_p) = 0, \quad \bar{\alpha}_p = \left(\frac{3}{2} \bar{\xi}_p\right)^{2/3}, \quad (40)$$

а $\bar{\eta}_p$ — уравнению

$$Ai'(-\bar{\beta}_p) = 0, \quad \bar{\beta}_p = \left(\frac{3}{2} \bar{\eta}_p\right)^{2/3}. \quad (41)$$

Корни $\bar{\alpha}_p$ и $\bar{\beta}_p$ табулированы в работе [30]. Несколько первых корней таковы:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_1 &= 2,3381, & \bar{\alpha}_2 &= 4,0879, & \bar{\alpha}_3 &= 5,5205, \\ \bar{\beta}_1 &= 1,0188, & \bar{\beta}_2 &= 3,2482, & \bar{\beta}_3 &= 4,8201. \end{aligned} \quad (41a)$$

На основании формулы (29) можно показать, что

$$\frac{\partial H_{\nu}^{(1,2)}(z)}{\partial \nu} \sim -H_{\nu}^{(1,2)}(z) \sim \left(\frac{2}{\nu}\right)^{2/3} A_1'(-2^{1/3}\tau), \quad (42a)$$

$$\frac{\partial H_{\nu}^{(1,2)}(z)}{\partial \nu} \sim -\frac{d^2 H_{\nu}^{(1,2)}(z)}{dz^2} = \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) H_{\nu}^{(1,2)}(z) + \frac{1}{z} H_{\nu}^{(1,2)}(z) \quad (42b)$$

(последнее равенство следует из дифференциального уравнения Бесселя).

Все написанные выше выражения соответствуют асимптотическим приближениям низшего порядка, и их можно уточнить, введя в асимптотические ряды дополнительные члены, содержащие обратные степени z . Это было сделано многими авторами, и было показано [3, 14, 31], что с точностью до членов второго порядка

$$\bar{\xi}_p \sim z + \left(\frac{z}{2}\right)^{1/3} \left[t_p + \left(\frac{2}{z}\right)^{2/3} \frac{t_p^2}{60} + \dots \right], \quad t_p = \bar{\alpha}_p e^{i\pi/3}, \quad (43a)$$

$$\frac{1}{[\partial H_{\nu}^{(1)}(z)/\partial \nu]_{\nu=\bar{\xi}_p}} \sim \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2/3} \frac{e^{-i\pi/3}}{Ai'(-\bar{\alpha}_p)} \left[1 + \left(\frac{2}{z}\right)^{2/3} \frac{t_p}{10} + \dots \right], \quad (43b)$$

$$\eta_p \sim z + \left(\frac{z}{2}\right)^{1/3} \left[q_p + \left(\frac{2}{z}\right)^{2/3} \frac{q_p^2}{60} \left(1 + \frac{8}{3\bar{\eta}_p^2}\right) + \dots \right], \quad q_p = \bar{\beta}_p e^{i\pi/3}, \quad (44a)$$

$$\frac{1}{[\partial H_{\nu}^{(1)}(z)/\partial \nu]_{\nu=\eta_p}} \sim \frac{1}{[1 - (\eta_p/z)^2] H_{\eta_p}^{(1)}(z)} \left[1 + \frac{1}{6} q_p \left(\frac{2}{z}\right)^{2/3} + \dots \right], \quad (44b)$$

где при нескольких первых значениях p имеем

$$\begin{aligned} Ai(-\bar{\beta}_1) &= 0,5356, & Ai(-\bar{\beta}_2) &= -0,4190, & Ai(-\bar{\beta}_3) &= 0,3804, \\ Ai'(-\bar{\alpha}_1) &= 0,7012, & Ai'(-\bar{\alpha}_2) &= -0,8031, & Ai'(-\bar{\alpha}_3) &= 0,8652. \end{aligned} \quad (44b)$$

Мы исследовали нули функции $H_{\nu}^{(1,2)}(z)$ и $H_{\nu}^{(1,2)}(z)$ в комплексной плоскости ν при фиксированном большом параметре z

(где $M_0 = \text{const}$), имитирующее излучение системы осевых линейных источников, фаза которых возрастает в направлении ρ ; вторая грань клина расположена при $\varphi = \phi$. Магнитное поле излучения $H = H_z$ параллельно ребру клина (ось z) и дается выражением

$$H_z(\rho) = ik \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_{l_1}^{l_2} [\bar{G}''(\rho, \rho') M(\rho')]_{\varphi'=0} d\rho', \quad (2)$$

где $\bar{G}''(\rho, \rho')$ — функция Грина для H -волн (§ 5, п. «в»), асимптотическое выражение для которой (при больших ρ) дается формулами (19) и (20) из § 5. Покажите, что при $\rho \rightarrow \infty$, $kl_1 \gg 1$ и $\phi > \pi$ магнитное поле (2) при любых φ можно представить в виде

$$H_z(\rho) \sim ikl_1 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} M_0 \frac{e^{i[k\rho + \pi/4]}}{\sqrt{2\pi k\rho}} [A(\xi, k, \varphi) + B(\xi, k, \varphi) + C(\xi, k, \varphi)], \quad (3)$$

где

$$A(\xi, k, \varphi) = \frac{e^{i2(\gamma_2^2 - \delta_2^2)} - e^{i2(\gamma_1^2 - \delta_1^2)}}{i2(\gamma_1^2 - \delta_1^2)} U(\pi - \varphi) = \\ = e^{i(\xi - k \cos \varphi)(l_1 + l_2)} \frac{2 \sin[(\xi - k \cos \varphi)l]}{(\xi - k \cos \varphi)l} U(\pi - \varphi), \quad 2l = l_2 - l_1, \quad (3a)$$

$$B(\xi, k, \varphi) = \frac{i\pi \sin \frac{\pi^2}{\phi}}{2\phi} \frac{1}{[\cos(\pi^2/\phi) - \cos(\pi\varphi/\phi)]} \frac{1}{\gamma_1 \sqrt{kl_1}} \times \\ \times [e^{i2\gamma_1^2} F(\gamma_1) - e^{i2\gamma_2^2} F(\gamma_2)], \quad (3б)$$

$$C(\xi, k, \varphi) = \text{sign}(\pi - \varphi) \frac{i}{4(\gamma_1^2 - \delta_1^2)} \left\{ e^{i2\gamma_2^2} \left[F(\delta_2) - \frac{\gamma_2}{\delta_2} F(\gamma_2) \right] - \right. \\ \left. - e^{i2\gamma_1^2} \left[F(\delta_1) - \frac{\gamma_1}{\delta_1} F(\gamma_1) \right] \right\}, \quad (3в)$$

$$\gamma_{1,2} = \sqrt{\left(\frac{k + \xi}{2}\right) l_{1,2}}, \quad \delta_{1,2} = \sqrt{kl_{1,2}} \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right|,$$

$$\gamma_2^2 - \delta_2^2 = \frac{l_2}{2} (\xi - k \cos \varphi) = \frac{l_2}{l_1} (\gamma_1^2 - \delta_1^2),$$

$$F(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-i2y^2} \int_{(1-i)y}^{\infty} e^{-x^2} dx. \quad (3г)$$

Покажите, что $A(\xi, k, \varphi)$ — функция углового распределения излучения для случая, когда источник распределен по бесконечной плоскости, что функция $B(\xi, k, \varphi)$ учитывает эффекты, обусловленные наличием ребра, вне переходной области $\varphi \approx \pi$ и что только все выражение (3) позволяет оценить поведение поля в

переходной области. Именно, поскольку вне переходной области $\delta_1 \gg 1$, а $C \sim O(\delta_1^{-2})$, членом C можно в этом случае пренебречь. Проверьте правильность следующих формул, необходимых для вывода выражения (3):

$$I_1 = \int_a^b \frac{e^{i\alpha\rho}}{\sqrt{\rho}} d\rho = e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \left[e^{i\alpha a} F\left(\sqrt{\frac{\alpha a}{2}}\right) - e^{i\alpha b} F\left(\sqrt{\frac{\alpha b}{2}}\right) \right], \quad (4)$$

$$I_2 = \int_a^b d\rho e^{i\alpha\rho} F(\beta\sqrt{\rho}) = I_2' + I_2'', \quad (5)$$

где

$$I_2' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_a^b d\rho e^{i\gamma\rho} \int_{(1-i)\beta\sqrt{\rho}}^{\infty} dx e^{-x^2} = \frac{e^{i\gamma b} - e^{i\gamma a}}{i\gamma} \frac{2}{\sqrt{\pi}} S(\beta\sqrt{b}), \quad (5a)$$

$$I_2'' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_a^b d\rho e^{i\gamma\rho} \int_{(1-i)\beta\sqrt{\rho}}^{(1-i)\beta\sqrt{b}} dx e^{-x^2}, \quad (5б)$$

причем

$$S(y) = \int_{(1-i)y}^{\infty} dx e^{-x^2}, \quad \gamma = \alpha - 2\beta^2. \quad (6)$$

Чтобы найти I_2'' , нужно изменить порядок интегрирования:

$$I_2'' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{(1-i)\beta\sqrt{a}}^{(1-i)\beta\sqrt{b}} dx e^{-x^2} \int_a^{(ix^2/2\beta^2)} d\rho e^{i\gamma\rho} = \\ = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{i\gamma} e^{i\gamma a} [S(\beta\sqrt{a}) - S(\beta\sqrt{b})] + \\ + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{i\gamma\sqrt{\delta}} [S(\beta\sqrt{\delta a}) - S(\beta\sqrt{\delta b})], \quad \delta = 1 + \frac{\gamma}{2\beta^2} = \frac{\alpha}{2\beta^2}, \quad (7)$$

откуда

$$I_2 = \frac{1}{i\gamma} \left\{ e^{i\alpha b} \left[F(\beta\sqrt{b}) - \frac{1}{\sqrt{\delta}} F\left(\sqrt{\frac{\alpha b}{2}}\right) \right] - \right. \\ \left. - e^{i\alpha a} \left[F(\beta\sqrt{a}) - \frac{1}{\sqrt{\delta}} F\left(\sqrt{\frac{\alpha a}{2}}\right) \right] \right\}. \quad (8)$$

6. На идеально проводящую полуплоскость $y < 0$ при $z = 0$ падает плоская волна под углом θ_0 к оси z (фиг. 96). Падающая волна поляризована так, что ее электрический вектор колеблется параллельно краю полуплоскости; ввиду трансляционной симме-

Прибавьте к падающему полю E_i вторичное поле $E_{s1} + E_{s2}$ и объясните результат в точки зрения геометрической оптики. В частности, объясните, какова роль седловой точки y'_s и концевой точки $y' = 0$ при выборе тех частей распределения наведенных токов, которыми определяется поле в заданной точке наблюдения (y, z) . Сравните свои выводы со схемой хода лучей, представленной в гл. 1 на фиг. 29, при $n_1 = n_2$ [множитель $\exp(ik_0 n R_8)/R_8$ в формуле (64г) из гл. 1, § 7, следует положить равным единице для падающей волны]. При $y'_s \rightarrow 0$ уточните асимптотическое выражение, перейдя к равномерному приближению [гл. 4, § 6, п. «а»].

в. Сравните результаты п. «б» с асимптотическим приближением точного решения [§ 5, формула (29) при $\phi = 2\pi$]. Объясните, почему геометрическая часть поля в п. «б» найдена верно, а дифракционная — нет. Покажите на основании точного решения [§ 5, формула (43)], что точное распределение наведенных токов имеет вид

$$I(y') = \frac{k}{\omega\mu} \left\{ 2 \cos \theta_0 e^{iky' \sin \theta_0} + 2 \sqrt{\frac{2}{-\pi ky'}} e^{-i[ky' - \pi/4]} \times \right. \\ \left. \times \sin \frac{\varphi'}{2} [1 - 2\sqrt{2} \xi e^{-i[2\xi^2 + (\pi/4)]} Q[(1-i)\xi]] \right\}, \quad (15)$$

где $Q[(1-i)\xi]$ есть величина $S(\xi)$ из формулы (6) и

$$\xi = \sqrt{-ky'} \cos \frac{\varphi'}{2}, \quad \varphi' = \frac{\pi}{2} - \theta_0. \quad (15a)$$

Первый член в формуле (15) — ток в приближении физической оптики [формула (11)], а второй — строго вычисленная поправка, учитывающая вклады как освещенной, так и затененной сторон полуплоскости. Покажите, что данная поправка существенна лишь вблизи края (гл. 1, фиг. 115), и в связи с этим выясните, верны или нет формулы (14a) и (14б).

г. Выведите уточненное выражение для дифракционного поля E_{s2} , подставив выражение (15) в формулу (9) и взяв, как и раньше, асимптотическое выражение для функции Ханкеля. Учтите, что вклад концевой точки, обусловленный членом выражения (15), соответствующим приближению физической оптики, дает величину (14). Покажите, что поправка E'_s к E_s , обусловленная первым слагаемым в больших квадратных скобках в формуле (15), имеет вид

$$E'_s \sim \frac{-e^{i[k\phi + (\pi/4)]}}{\sqrt{2\pi k\rho}} \frac{\sqrt{2} \sin(\varphi'/2)}{\sqrt{1 + \sin \theta_0}}, \quad \sqrt{2} \sin \frac{\varphi'}{2} = \sqrt{1 - \sin \theta_0}. \quad (16)$$

При этом нужно учесть, что $|\hat{\rho} - \hat{\rho}'| = \rho - y' \sin \theta + O(y'^2)$ вблизи $y' = 0$ и в связи с этим приходится вычислять интеграл

$$I_1 = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-ik(1+\sin\theta)y'}}{\sqrt{-y'}} dy' = \sqrt{\frac{\pi}{-ik(1+\sin\theta)}}. \quad (16a)$$

При отыскании поправки E''_s , связанной с последним членом в больших квадратных скобках формулы (15), приходится вычислять интеграл

$$I_2 = \int_0^0 \exp[-ik(1+\sin\theta)y' - i2\xi^2] Q dy' = \quad (17a)$$

$$= \int_0^0 \exp[ik(\sin\theta_0 - \sin\theta)y'] Q dy' = \\ = \frac{1}{ik(\sin\theta_0 - \sin\theta)} \int_0^0 Q \frac{d}{dy'} \exp[ik(\sin\theta_0 - \sin\theta)y'] dy'. \quad (17b)$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $Q(0) = \sqrt{\pi}/2$, $dQ/d\xi = -(1-i)\exp(2i\xi^2)$, получите выражение

$$I_2 = \frac{1}{ik(\sin\theta_0 - \sin\theta)} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{e^{-i\pi/4}\sqrt{k}}{\sqrt{2}} \cos \frac{\varphi'}{2} \int_0^0 \frac{e^{-ik(1+\sin\theta)y'}}{\sqrt{-y'}} dy' \right\} \quad (17b)$$

и вычислите интеграл по формуле (16a). Покажите, что окончательно

$$E''_s \sim \frac{-e^{i[k\phi + (\pi/4)]}}{\sqrt{2\pi k\rho}} \frac{\cos \theta_0}{(\sin \theta_0 - \sin \theta)} \left[1 - \frac{\sqrt{1 + \sin \theta_0}}{\sqrt{1 + \sin \theta}} \right]. \quad (18)$$

Полное дифракционное поле E_{s2} равно сумме E'_s , E''_s и члена, соответствующего приближению физической оптики [формула (14б)]. Покажите, что окончательное выражение согласуется с точной формулой (29) из § 5 при $\phi = 2\pi$.

7. а. Идеально проводящий клин, образованный двумя полуплоскостями $\varphi = 0$ и $\varphi = \phi$, — это конфигурация, допускающая разделение переменных как в цилиндрических, так и в сферических координатах. Покажите, что в случае элемента тока, расположенного вдоль прямой, проходящей через ребро клина в точке A , анализ значительно проще в сферической системе координат, поскольку элемент тока радиален относительно начала координат, выбранного в точке A . [Отметим, что поля радиальных элементов тока выражаются через единственную сферическую потенциальную функцию; гл. 2, § 6, формула (11).] Укажите, как можно использовать это упрощение при наличии неаксиально ориентированных тангенциальных элементов магнит-

10. Умножьте выражения (30а) и (31) из § 7 на $\exp(im\varphi')$, где m — целое число, проинтегрируйте полученные выражения по φ' и найдите тем самым альтернативные представления функции Грина для цилиндра, возбуждаемого кольцевым источником радиусом $\rho' > a$ и с фазовой зависимостью $\exp(im\varphi)$. Сравните полученный результат с выражением (1) из гл. 5, § 9, для двумерной функции Грина в случае среды с меняющимися свойствами [см. также гл. 5, § 9, формула (9) и т. д.].

11. Считайте, что либо точка наблюдения, либо источник расположены на фиг. 91 далеко от поверхности цилиндра.

а. Оценив методом седловой точки асимптотическое значение интеграла в формуле (30а) из § 7, выведите формулу для случая E -волн [при $kr > \sin \theta > \gg 1$ и временной зависимости типа $\exp(-i\omega t)$]:

$$G'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sim \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \cos n(\varphi - \varphi') e^{-in\pi/2} e^{-ikz < \cos \theta >} \times \\ \times \left[J_n(kr < \sin \theta \sin \theta') - \frac{J_n(ka \sin \theta >)}{H_n^{(1)}(ka \sin \theta >)} H_n^{(1)}(kr < \sin \theta \sin \theta') \right], \quad (26)$$

где $z >, r >, \theta >$ — величины z, r, θ при $\rho > \rho'$ и величины z', r', θ' при $\rho < \rho'$. Наоборот, $z <, r <, \theta <$ — это величины z, r, θ при $\rho < \rho'$ и величины z', r', θ' при $\rho > \rho'$. Величины r, θ — сферические координаты, причем $r > \cos \theta > = z >, r > \sin \theta > = \rho >$ и т. д., а $\epsilon_n = 1$ при $n = 0$ и $\epsilon_n = 2$ при $n \neq 0$. Найдите аналогичное выражение для $G''(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, относящееся к случаю H -волн. Вычислите компоненты электромагнитного поля, возбуждаемого электрическим или магнитным диполем [гл. 5, § 2, формула (1)].

б. Сместив источник в бесконечность, примените формулу (26) к случаю падения плоской волны и покажите, что если падающая волна описывается функцией

$$u'_{\text{пад}} = \exp[-ikr \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi') - ikr \cos \theta \cos \theta'], \quad (27)$$

то соответствующее выражение для полной волновой функции имеет вид $u' = u'_{\text{пад}} + u'_s$, где

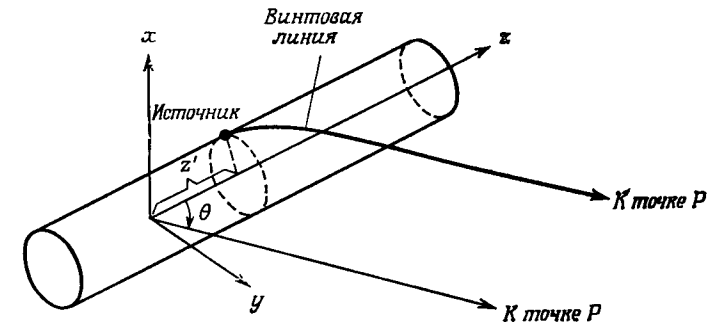
$$u'_s = -e^{-ikr \cos \theta \cos \theta'} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \cos n(\varphi - \varphi'') e^{-in\pi/2} \times \\ \times \frac{J_n(ka \sin \theta')}{H_n^{(1)}(ka \sin \theta')} H_n^{(1)}(kr \sin \theta \sin \theta'). \quad (28)$$

Найдите аналогичное выражение для функции $u''(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, относящейся к случаю H -волн. Суммируя вклады E - и H -волн, получите выражения для полей, возбуждаемых произвольно поляризованной плоской волной.

в. Примените аналог выражения (26), относящийся к случаю H -волн, к задаче, где источник расположен на цилиндре, и покажите, что поле в дальней зоне выражается через функцию Грина

$$G''(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \frac{2ie^{-ikz' \cos \theta}}{\pi k a \sin \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \cos n(\varphi - \varphi') \frac{e^{-in\pi/2}}{H_n^{(1)}(ka \sin \theta)}. \quad (29)$$

Исходя из этого найдите поля, излучаемые аксиально направленной щелью в цилиндре, предполагая, что электрическое поле в щели имеет лишь компоненту E_φ , которая считается заданной



Фиг. 98. «Стелющиеся» по цилиндру лучи (выходящие по винтовой линии).

(такой источник эквивалентен распределению осевых магнитных токов $\mathbf{M} = \mathbf{E}_\varphi \times \rho_0$ на гладкой поверхности цилиндра).

12. Решите задачу 11 исходя из представления (30б) из § 7 для $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Покажите, что для функции $G''(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ из формулы (29) возможно альтернативное представление

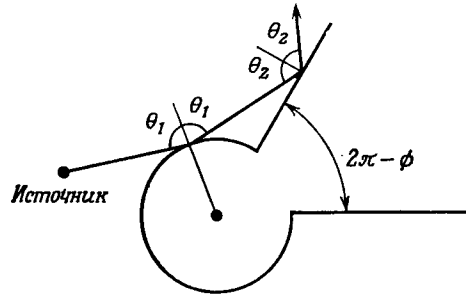
$$G''(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sim \frac{e^{ikr}}{4r} e^{-ikz' \cos \theta} \times \\ \times \sum_{\mu_p} \frac{H_{\mu_p}^{(1)}(ka \sin \theta) H'_{\mu_p}{}^{(2)}(ka \sin \theta) \cos[\mu_p(\pi - |\varphi - \varphi'|)] e^{-i\mu_p \pi/2}}{(\partial/\partial \mu) H_{\mu}^{(1)}(ka \sin \theta) |_{\mu_p} \sin \mu_p \pi}, \quad (30)$$

где $H_{\mu_p}^{(1)}(ka \sin \theta) = 0$. Исследуйте сходимость этого ряда. Покажите, что при $ka \sin \theta \gg 1$ ряд быстро сходится в затененной области $|\varphi - \varphi'| > \pi/2$; упростите выражение, стоящее под знаком суммы. Покажите, что поле в затененной области можно рассматривать как соответствующее стелющемуся лучу, который выходит из источника по винтовой линии на поверхности цилиндра, а затем идет касательной к этой поверхности в сторону удаленной точки наблюдения P (фиг. 98).

дифракционный интеграл асимптотически при больших $k\rho$ и произвольных ϕ . Объясните полученный результат с точки зрения лучевой оптики.

15. В этой задаче рассматриваются альтернативные представления для не зависящих от z двумерных функций Грина и трехмерных функций Грина $G'(r, r')$, $G''(r, r')$, $\mathcal{P}'(r, r')$, $\mathcal{P}''(r, r')$ в случае (идеально проводящего) клина с закруглением, изображенного на фиг. 74.

а. Исходя из того, что радиальная характеристическая функция Грина (97) из гл. 3, § 4, состоит из двух частей, из которых



Фиг. 99. Многократно отраженные лучи в случае клина с цилиндром.

первая соответствует клину без цилиндрической поверхности, а вторая учитывает наличие такой поверхности, покажите, что полные функции Грина в радиальном представлении можно представить в виде суммы двух слагаемых — функции Грина для клина без цилиндра и поправочного члена, учитывающего наличие цилиндра. Покажите, что такое представление удобно при малых радиусах цилиндра.

б. Решите задачу «а» в угловом представлении, пользуясь методом мнимых источников (изображений) в бесконечном угловом пространстве [§ 7, формула (10), измененная в соответствии с формулой (57) из гл. 3, § 4]. Покажите, что в окончательном выражении для функции Грина мы имеем сумму функции Грина для цилиндрической конфигурации, изображенной на фиг. 85, и поправочного члена, учитывающего наличие граней клина при $\phi = 0, \phi$. Покажите, что такое представление удобно в случае, когда радиус цилиндра велик и обе грани клина не видны из точки, где расположен источник. Методом, изложенным в § 7, выведите асимптотические формулы для полей.

в. Методом седловой точки покажите, что в случае, когда радиус цилиндра велик, а одна из граней клина видна из точки, где расположен источник, основной вклад в рассеянное поле в освещенной области соответствует лучам, отраженным только ци-

линдром и только гранью клина, и лучам, испытавшим многократное отражение (фиг. 99). На основании геометрической оптики напишите выражения для амплитуды и фазы поля вдоль многократно отраженного луча и сравните их с асимптотическим решением.

г. Решите задачу «в» в случае, когда обе грани видны из точки расположения источника,

16. На вершине конуса $\theta = \theta_0$ имеется сфера радиусом $r = a$, причем все поверхности — идеально проводящие. Найдите различные представления функций Грина для такой конфигурации. В частности, получите радиальное представление, в котором в явном виде входит функция Грина для конуса, а влияние сферы описывается поправочным членом, и угловое представление, в котором, наоборот, в явном виде входит функция Грина для сферы, а член, учитывающий влияние конической поверхности, имеет вид возмущения. Исследуйте сходимость таких представлений (см. также задачу 15, где исследуется аналогичная цилиндрическая конфигурация) и покажите, что радиальное представление удобно при малых размерах сферы и произвольных углах при вершине конуса, а угловое — при больших радиусах сферы и малых углах при вершине конуса.

17. Рядом с цилиндром, радиус которого равен a , имеется линейный источник магнитных токов с единичной интенсивностью, лежащий параллельно оси цилиндра при $\phi = \phi'$, $\rho = \rho' > a$. Граничные условия на поверхности цилиндра задаются в виде импеданса, зависящего от угла:

$$\bar{Z}(\phi) = -\frac{E_\phi}{H_z} = Z \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} [1 + \alpha \cos \rho(\phi - \phi_0)] \quad \text{при } \rho = a. \quad (37)$$

Здесь Z — нормированная амплитуда импеданса, $\sqrt{\mu/\epsilon}$ — волновое сопротивление свободного пространства, α — действительная постоянная, характеризующая глубину модуляции, $\rho = 2\pi a/L$ — целое число, причем L — пространственный период модуляции импеданса, и ϕ_0 — начальная фаза. В случае пассивной системы выполняется условие $\text{Re } \bar{Z} \geq 0$ [подразумевается временная зависимость типа $\exp(-i\omega t)$].

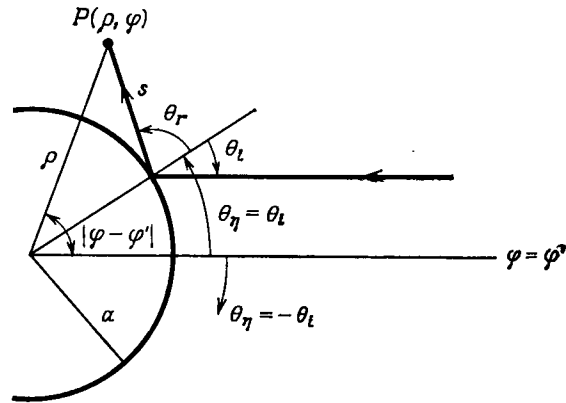
а. Покажите, что единственная компонента магнитного поля дается выражением $H_z = i\omega\epsilon\bar{G}$, где $\bar{G}(\rho, \rho')$ — скалярная функция, которая удовлетворяет неоднородному волновому уравнению

$$(\nabla^2 + k^2)\bar{G}(\rho, \rho') = -\delta(\rho - \rho') \quad (38)$$

с граничным условием

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial \rho} = -ikZ [1 + \alpha \cos \rho(\phi - \phi_0)] \bar{G} \quad \text{при } \rho = a, \quad (38a)$$

точки наблюдения (фиг. 100); $\theta_\eta = \pm\theta_i$, причем знак зависит от рассматриваемого падающего луча. Покажите, что первый член в выражении (44) можно рассматривать как луч, зеркально отраженный ($\theta_r = \theta_i$) от поверхности цилиндра с постоянным импедансом Z [§ 7, формула (29) при $L_r \rightarrow \infty$ и с нормировкой для плоской волны], а второй и третий члены — как лучи, соответствующие отражению первого порядка «дифракционной решетки». Покажите, что выражение для коэффициента расхождения



Фиг. 100. Ход лучей в случае цилиндра с переменным поверхностным импедансом.

$$0 \leq \theta_i < \pi/2; \quad -\pi/2 < \theta_r < \pi/2.$$

$D(np)$ получается из закона сохранения энергии, примененного к трубкам падающих и отраженных лучей в общем случае, когда угол падения не равен углу отражения (гл. 1, задачи 30 и 32). Исследуйте свойства симметрии поля (44) при $\varphi' = \varphi_0$ и $\varphi' = \varphi_0$. Рассмотрите поведение лучей, соответствующих отражению «дифракционной решетки», и определите области их существования относительно поверхности цилиндра.

б. Покажите, что в случае, когда поверхностный импеданс изменяется медленно [$(p/ka) \ll 1$], траектории трех отраженных лучей, соответствующих значениям $n = 0, \pm 1$ в формуле (44г), почти совпадают, пересекаясь в точке наблюдения P , и выходят из трех близко расположенных точек на поверхности цилиндра, две из которых находятся на одинаковом расстоянии от точки, где происходит зеркальное отражение. Докажите, что вклады трех отраженных лучей эквивалентны вкладу одного зеркально отраженного луча типа первого слагаемого в формуле (44), если заменить величину Γ_0 локальным коэффициентом отражения Γ'_0

в точке отражения $\hat{\phi}$:

$$\Gamma'_0 = \frac{\cos \theta_i - \bar{Z}(\hat{\phi})/\sqrt{\mu/\epsilon}}{\cos \theta_i + \bar{Z}(\hat{\phi})/\sqrt{\mu/\epsilon}}, \quad (44д)$$

где $\bar{Z}(\hat{\phi})$ — поверхностный импеданс [формула (37)]. Исходя из этого покажите, что поле можно вычислять простым лучевым методом, пользуясь локальными параметрами поверхности вблизи точки отражения [§ 6, формулы (23)].

19. Линейный источник электрического тока расположен вне идеально проводящего цилиндра, уравнение поверхности которого имеет вид $\rho = a + b \cos p\phi$, где p — целое число [41]. Покажите, что в случае, когда b — малый параметр, решение данной задачи является частным случаем решения задачи 17.

20. Исходя из формул (16) § 8 и соотношения [42]

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta_0} P_v^{-q}(\cos \theta_0) &= \cos(\nu - q)\pi \frac{d}{d\theta_0} P_v^{-q}(-\cos \theta_0) + \\ &+ \frac{\sin(\nu - q)\pi}{\sin q\pi} \left[\cos \nu\pi \frac{d}{d\theta_0} P_v^{-q}(-\cos \theta_0) - \frac{\Gamma(\nu - q + 1)}{\Gamma(\nu + q + 1)} \frac{d}{d\theta_0} P_v^q(-\cos \theta_0) \right], \end{aligned} \quad (45)$$

покажите, что при $\theta_0 \approx \pi$ приближенное решение уравнения $(d/d\theta_0) P_p^{-q}(\cos \theta_0) = 0$ имеет вид

$$p \approx q + k - \frac{\Gamma(2q + n + 1)}{\Gamma(1 + q)\Gamma(1 + n)\Gamma(q)} \left(\frac{\pi - \theta_0}{2} \right)^{2q}, \quad (46)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ и $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Найдите также решение уравнения $P_p^{-q}(\cos \theta_0) = 0$. Пользуясь асимптотической формулой (66б) из гл. 3, § 4, найдите приближенные значения корней при $\theta_0 \approx \pi/2$.

21. Напишите выражение для функции Грина $G''(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ (Н-волны) в случае идеально проводящего полубесконечного конуса в представлении типа (9а) из § 8 и перейдите к частному случаю обратного рассеяния аскально падающей плоской волны ($r' \rightarrow \infty$ с последующей нормировкой, а $\theta, \theta' \rightarrow 0$) [примите временную зависимость типа $\exp(-i\omega t)$]. Замените функцию $j_p(kr)$ соответствующим интегралом Зоммерфельда

$$j_p(kr) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi kr}{2}} \int_{\hat{P}} \exp\{ikr \cos \omega + i(p + 1/2)(\omega - \pi/2)\} d\omega, \quad (47)$$

где \hat{P} — контур интегрирования, показанный на фиг. 101. Измените последовательность операций суммирования и интегрирования

26. а. Используя формулы (п. «б», задача 5 из гл. 4)

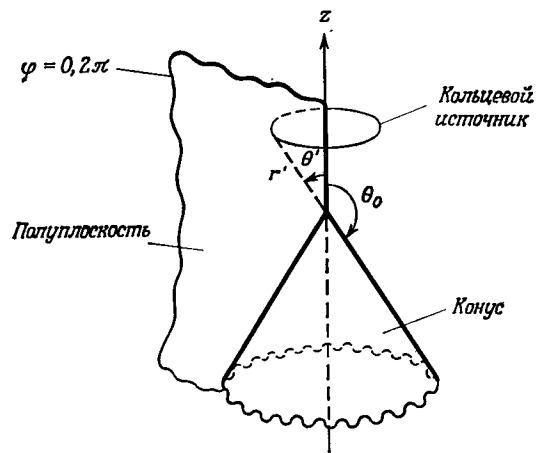
$$\lim_{\substack{\nu \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow 0}} \nu^q P_\nu^{-q}(\cos \theta) = J_q(\nu \theta), \quad (54a)$$

$$\lim_{\substack{\nu \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow 0}} \frac{\nu^q P_\nu^{-q}(-\cos \theta)}{\sin \nu \pi} \Big|_{\arg \cong 0} = \mp i e^{\pm i q \pi} H_q^{(1,2)}(\nu \theta) \quad (54б)$$

и выражения (71) из гл. 3, § 4, покажите, что

$$\lim_{\substack{|\xi| \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow 0}} E_q^{(1,2)}(\xi, \theta) = \xi^{-q} H_q^{(1,2)}(\xi \theta), \quad \arg \xi \neq 0. \quad (54в)$$

Исходя из этого выражения и формулы (72) из гл. 3, § 4, выведе-



Фиг. 102. Комбинация полуплоскости и конуса.

дите асимптотическую формулу, справедливую при малых и больших углах θ :

$$E_q^{(1,2)}(\xi, \theta) \sim \xi^{-q} \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} H_q^{(1,2)}(\xi \theta), \quad |\xi| \rightarrow \infty. \quad (55)$$

б. Выведите формулу (54б) на основании формулы (54а), выражения (17) из приложения 1 и формулы

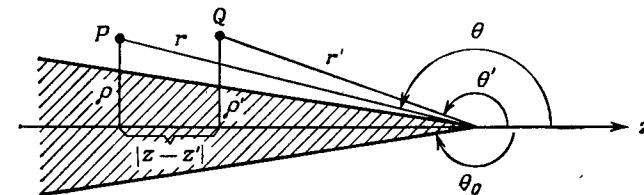
$$P_\nu^{-q}(-\cos \theta) = \frac{\sin \nu \pi}{\sin q \pi} P_\nu^{-q}(\cos \theta) - \frac{\sin(\nu - q)\pi}{\sin q \pi} \frac{\Gamma(\nu - q + 1)}{\Gamma(\nu + q + 1)} P_\nu^q(\cos \theta). \quad (56)$$

27. Когда угол при вершине конуса $\theta_0 \approx \pi$, а источник и точка наблюдения расположены далеко от вершины, но вблизи

поверхности конуса, коническая поверхность локально эквивалентна поверхности цилиндра (фиг. 103). Покажите, что от случая рассеяния на конусе можно перейти к случаю рассеяния на круговом цилиндре, если сместить начало координат в бесконечность, закрепив неподвижно, например, точку P . Введите предельные величины ρ и ρ' соответственно равенству

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow \pi}} r(\pi - \theta) = \rho = \lim_{\substack{r' \rightarrow \infty \\ \theta' \rightarrow \pi}} r'(\pi - \theta') \quad (57)$$

для ρ и аналогичному равенству для ρ' (с заменой $\theta \rightarrow \theta'$). Покажите, что радиус a получающегося при этом цилиндра можно



Фиг. 103. Переход от конуса к цилиндру.

найти, положив θ или θ' равным θ_0 и приняв $(r > -r <) \rightarrow |z - z'| = |\bar{z} - \bar{z}'|$, где \bar{z} отсчитывается от нового начала координат, расположенного на оси z вблизи $\rho = 0$ или $\rho' = 0$.

Покажите, что в результате такого преобразования радиальная характеристическая функция Грина (11) из гл. 2, § 7, заменяется функцией (10) из гл. 2, § 7 [преобразованной к временной зависимости типа $\exp(-i\omega t)$], т. е.

$$g_r \rightarrow \frac{i}{2k} h_\nu^{(2)}(kr_<) h_\nu^{(1)}(kr_>), \quad (58)$$

поскольку отражения от бесконечно удаленной вершины конуса нет (считайте, что среда является слегка поглощающей). Учитывая, что g_r — четная функция аргумента $\nu + 1/2$, как и g'_θ в формуле (68) из гл. 3, § 4, покажите, что нижняя часть пути интегрирования в формуле (96) из § 8 (где вместо g'_θ стоит g'_θ и член G_f опущен) может быть отражена в третий квадрант комплексной плоскости ν , в результате чего путь интегрирования будет целиком проходить над действительной осью ν .

На основании асимптотических формул для цилиндрических функций (приложение 1) покажите, что

$$g_r \rightarrow \frac{i}{2} \frac{\exp(i\sqrt{k^2 - \xi^2} |z - z'|)}{\sqrt{k^2 - \xi^2}}, \quad \text{Im} \sqrt{k^2 - \xi^2} > 0, \quad (59)$$

ГЛАВА 7. Электромагнитные поля в одноосных анизотропных средах

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В данной и следующей главах рассматриваются эффекты, обусловленные анизотропией среды. С учетом определенных ограничений макроскопические электромагнитные свойства таких физических сред, как кристаллические твердые тела, намагниченные ферриты, магнитоактивная плазма и искусственные диэлектрики, можно характеризовать тензором диэлектрической проницаемости ϵ или тензором магнитной проницаемости μ (или и тем и другим). Плоские волны в подобных средах рассматривались ранее в связи с вопросами распространения света в кристаллах [1, 2], радиоволн в ионосфере [3, 4] и высокочастотных колебаний в волноводах, нагруженных ферритами. В последнее время актуальными стали задачи об излучении покоящихся и движущихся источников в таких средах, а также задачи о дифракции волн на различных телах. При исследовании электромагнитных волн, распространяющихся в средах, свойства которых зависят от направления распространения, лучше всего начать с простейших анизотропных сред — одноосных. Свойства таких сред в соответствующем образом выбранной системе координат можно характеризовать диагональным тензором с двумя одинаковыми (поперечными) компонентами, отличающимися от третьей (продольной). К подобным физическим средам относятся одноосные кристаллы, а также плазма и ферриты, находящиеся в очень сильном внешнем магнитном поле. Постановка и решение задач об излучении и дифракции волн в таких анизотропных средах, а также физическая интерпретация полученных решений и составляют содержание данной главы. Некоторые задачи для таких сред иногда удается свести к эквивалентным задачам для изотропных сред, что существенно упрощает все рассмотрение. В более сложном случае гиротропной среды, характеризуемой недиагональными тензорами ϵ или μ , такие упрощения невозможны. Эффекты, обусловленные гиротропией среды, рассматриваются в гл. 8.

Как и в случае изотропной среды, при исследовании распространения волн в анизотропной среде можно ввести понятие вол-

новодных волн, но при этом неизбежны существенные различия. Чтобы показать, каковы эти различия, рассмотрим сначала неограниченную однородную среду. В неограниченной изотропной среде без пространственной дисперсии¹⁾ собственные волны с поперечной зависимостью поля вида $\exp[i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ распространяются вдоль оси z с волновыми числами $\pm \kappa(\mathbf{k}_t, \omega)$; при заданных \mathbf{k}_t, ω существуют два вида таких волн (E и H), так что всего имеются четыре волны с волновыми числами $\pm \kappa, \pm \kappa$ для каждого выбранного направления (гл. 1, § 4 и § 2 данной главы). В неограниченной анизотропной среде без пространственной дисперсии тоже существуют волноводные волны с такой же поперечной зависимостью полей; и в этом случае имеются четыре возможных вида волны для каждого набора \mathbf{k}_t, ω , но теперь их волновые числа для выбранного направления распространения отличаются друг от друга не только знаком. Правда, в частном случае одноосной анизотропии, если выбрать в качестве оси z , вдоль которой происходит распространение волноводных волн, оптическую ось среды, то четыре волны при заданных \mathbf{k}_t, ω распадутся на две пары с волновыми числами $\pm \kappa', \pm \kappa''$ ($\kappa' \neq \kappa''$). Волновое сопротивление для этих волн такое же, как в изотропной среде, и им соответствуют такие же несвязанные эквивалентные линии передачи. Собственные волны остаются несвязанными друг с другом и при наличии одноосных анизотропных плоских слоев или границ вдоль оси z , если для всех областей оптическая ось совпадает с осью z . Но при наличии слоев или границ, расположенных под углом к оптической оси, возникает связь между собственными волнами.

Чтобы пояснить сказанное, рассмотрим дисперсионное уравнение для плоской волны с продольным и поперечным волновыми числами κ и \mathbf{k}_t в однородной анизотропной среде. Если электрическое поле записать в виде $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{E}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$, где $\bar{\mathbf{E}}$ — вектор, характеризующий амплитуду и плоскость поляризации, то, исключив $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ из уравнений поля (41а) из гл. 1, § 5, свободных от источников, получим для среды с изотропной магнитной проницаемостью μ_0 и тензором диэлектрической проницаемости ϵ следующее уравнение:

$$\left[\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{1}) + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon' \right] \bar{\mathbf{E}} = 0, \quad \epsilon' = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}, \quad c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}. \quad (1)$$

В одноосной среде тензор ϵ имеет вид

$$\epsilon = \epsilon_t \mathbf{e}_t + \epsilon_z \mathbf{z}_0 \mathbf{z}_0, \quad \mathbf{1}_t = \mathbf{1} - \mathbf{z}_0 \mathbf{z}_0. \quad (2)$$

¹⁾ То есть в среде, диэлектрическая и магнитная проницаемости которой не зависят от пространственного дифференциального оператора ∇ или, в представлении (\mathbf{k}, ω) , от волнового вектора \mathbf{k} .

направление векторов \mathbf{k} , \mathbf{v}_g или $\bar{\mathbf{S}}$ в цилиндрической системе координат (ρ, z) , сопоставим оси ρ и z с осями k_t и κ . В случае H -волн, распространяющихся так же, как волны в свободном пространстве, векторы \mathbf{k} и \mathbf{v}_g параллельны друг другу. В случае же E -волн эти векторы различаются по направлению. Это видно из фиг. 104, где $\bar{\theta}$ — угол между положительной осью z и вектором \mathbf{k} , а θ — между осью z и вектором \mathbf{v}_g . Мы видим, что при $\epsilon > 0$ E -волны могут распространяться во всех направлениях, а при $\epsilon < 0$ их вектор групповой скорости (или лучевой вектор) заключен внутри конической области $|\operatorname{tg} \theta| < \operatorname{tg} \theta_c = 1/\sqrt{|\epsilon|}$. Предельный угол θ_c определяется нормалью к асимптоте для поверхности волновых векторов (фиг. 104, б), и поскольку асимптота образует угол $\bar{\theta} = \operatorname{arctg} \sqrt{|\epsilon|}$ с осью z , для θ_c получаем приведенное выше выражение. При углах $\theta_c < \theta < \pi - \theta_c$ вектор \mathbf{k} является комплексным и волны экспоненциально затухают. Таким образом, при $\epsilon < 0$ распространение плоских волн ограничено определенными углами в пространстве и, если волны в среде возбуждаются точечным источником, энергия должна быть локализована в области «действительных лучей». Такой вывод подтверждается анализом (§ 3). При $\epsilon > 0$ (фиг. 104, а) ρ - и z -составляющие векторов \mathbf{k} и \mathbf{v}_g для E -волн одинаковы по знаку, а потому механизм распространения волны такой же, как в случае изотропной среды. В случае же анизотропной среды, когда поверхность волновых векторов для E -волн незамкнута (фиг. 104, б), этого нельзя сказать. Различие в знаке поперечных составляющих волнового вектора и вектора групповой скорости говорит об «обратном» характере волны, при котором направление распространения фазы противоположно направлению потока энергии.

Поскольку дисперсионное уравнение имеет простой вид, трудно установить соотношение между углами θ и $\bar{\theta}$. Так как наклон касательной к кривой по отношению к оси κ при данном $\bar{\theta}$ определяется производной $dk_t/d\kappa$, наклон нормали к данной кривой по отношению к той же оси равен $-d\kappa/dk_t$, и на основании уравнения (5) получаем

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{d\kappa}{dk_t} = \frac{1}{\epsilon} \frac{k_t}{\kappa} = \frac{1}{\epsilon} \operatorname{tg} \bar{\theta}. \quad (7)$$

При $\epsilon < 0$ углы θ и $\bar{\theta}$ отсчитываются в противоположных направлениях относительно оси z (фиг. 104, б).

Из фиг. 104, б видно, что, поскольку поверхность волновых векторов представляет собой поверхность вращения с осью z , два значения κ' или κ'' , отвечающие данным k_t, ω , различаются лишь знаком, причем положительные значения κ соответствуют волнам, переносящим энергию в положительном, а отрицательные — в отрицательном направлении оси z . Как будет показано

в § 2, это позволяет исследовать распространение волны, рассматривая эквивалентную линию передачи подобно тому, как это делалось в случае изотропной среды, даже при наличии идеально проводящих граничных поверхностей, расположенных параллельно оси z , а также в случае плоскостной среды. Представление поля H -волн оказывается таким же, как в изотропной среде, а представление E -волн можно получить из решения для изотропной среды, изменив масштаб вдоль осей координат. Такой подход проиллюстрирован на ряде примеров в § 3, где получены в явном виде решения для различных источников в неограниченной одноосной среде. При этом основное внимание уделяется физической интерпретации поведения поля (особенно на основе лучевого метода) и вопросу о «бесконечной» интенсивности излучения точечного источника в среде с незамкнутой поверхностью волновых векторов.

Если, как это иногда бывает необходимо, цилиндрическая система координат (ρ, z) повернута относительно главных осей поверхности волновых векторов для E -волн, то два решения $\kappa'_1(k_t, \omega)$ и $\kappa'_2(k_t, \omega)$ не связаны между собой соотношением $\kappa'_1 = -\kappa'_2$ (фиг. 125). Отсутствие зеркальной симметрии относительно новой оси z не позволяет вычислять поле методом эквивалентных схем, поскольку в обычной линии передачи постоянные распространения в противоположных направлениях должны быть одинаковыми. Повернутая система координат используется для описания плоских границ или поверхностей раздела, составляющих угол с оптической осью. Наличие подобных границ приводит к связи между E - и H -волнами, и поле в этом случае приходится вычислять более общими методами, рассматриваемыми в гл. 8 для случая сред с произвольной анизотропией. Упрощение возможно лишь в двумерных задачах, когда источником является магнитный линейный ток, перпендикулярный оптической оси, но параллельный плоской или цилиндрической граничной поверхности; в этом случае возбуждаются лишь E -волны. Когда границы являются идеально проводящими или имеют заданный поверхностный импеданс, чтобы перейти к соответствующей задаче для изотропной среды, можно изменить масштаб вдоль координатных осей. Как показывается в § 4, в одноосной анизотропной среде возможны такие специфические явления, как незеркальное отражение лучей, приводящее к искажению изображения линейного источника в идеально проводящей плоскости. Рассматриваемая там же задача о дифракции на полуплоскости показывает влияние анизотропии среды на вид дифракционной картины.

Если поверхность, отделяющая одноосную анизотропную среду от изотропной, составляет некоторый угол с оптической осью,

Чтобы решить уравнения (3) — (5), будем, как и в гл. 2, искать величины \mathbf{E}_i и \mathbf{H}_i в виде разложения по решениям уравнений для данной области, свободной от источников. Из геометрии рассматриваемой структуры следует, что в отсутствие источников поперечные составляющие электрического и магнитного полей могут быть представлены в виде произведений $V_i(z)\mathbf{e}_i(\rho)$ и $I_i(z)\mathbf{h}_i(\rho)$, где \mathbf{e}_i и \mathbf{h}_i — поперечные векторные функции, зависящие лишь от двумерного радиус-вектора ρ в поперечной плоскости. Ввиду однородности поперечного сечения волновода и простого вида уравнений (3а) и (3б) задача о собственных значениях для поперечных составляющих поля (определяемая оператором $\nabla_i \nabla_i$) совпадает с соответствующей задачей для изотропной среды и систему собственных функций можно разбить на E - и H -волны по отношению к оси z (задача о собственных значениях формулируется в гл. 8, § 2). Поэтому имеем [гл. 2, § 2, формула (8)]

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \sum_i V_i'(z) \mathbf{e}_i'(z) + \sum_i V_i''(z) \mathbf{e}_i''(z), \quad (6a)$$

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{r}) = \sum_i I_i(z) \mathbf{h}_i'(z) + \sum_i I_i''(z) \mathbf{h}_i''(z), \quad \mathbf{h}_i = \mathbf{z}_0 \times \mathbf{e}_i, \quad (6б)$$

$$\mathbf{J}_{te}(\mathbf{r}) = \sum_i i_i'(z) \mathbf{e}_i'(z) + \sum_i i_i''(z) \mathbf{e}_i''(z), \quad (6в)$$

$$\mathbf{M}_{te}(\mathbf{r}) = \sum_i v_i'(z) \mathbf{h}_i'(z) + \sum_i v_i''(z) \mathbf{h}_i''(z), \quad (6г)$$

где одним штрихом обозначены величины, относящиеся к E -волнам, а двумя — к H -волнам. Векторные собственные функции \mathbf{e}_i' , \mathbf{e}_i'' , \mathbf{h}_i' , \mathbf{h}_i'' , так же как и в волноводе с изотропным заполнением, удовлетворяют уравнениям (10) из гл. 2, § 2, и условиям ортогональности [гл. 2, § 2, формула (11б)]. Источник «напряжения» v_i и источник «тока» i_i считаются заданными, и необходимо найти «напряжение» V_i и «ток» I_i данной собственной волны.

Подставив выражения (6а) — (6г) в уравнения (3а) и (3б), на основании соотношений (10) из гл. 2, § 2, получим телеграфные уравнения для амплитуд V_i и I_i (отметим, что $\text{div}_i \mathbf{e}_i'' = \text{div}_i \mathbf{h}_i' = 0$ на S):

$$-\frac{dV_i(z)}{dz} = -ix_i(z)Z_i(z)I_i(z) + v_i(z), \quad (7a)$$

$$-\frac{dI_i(z)}{dz} = -ix_i(z)Y_i(z)V_i(z) + i_i(z), \quad Y_i(z) = \frac{1}{Z_i(z)}, \quad (7б)$$

где x_i — постоянная распространения, а Z_i — волновое сопротивление, которые в случае E -волн даются выражениями

$$Z_i'(z) = \frac{1}{Y_i'(z)} = \frac{x_i'(z)}{\omega \epsilon_i(z)}, \quad x_i'(z) = \sqrt{\frac{\epsilon_i(z)}{\epsilon_z(z)}} \sqrt{k_i^2(z) - k_{ii}^{\prime 2}}, \quad (8a)$$

а в случае H -волн имеют следующий вид:

$$Z_i''(z) = \frac{1}{Y_i''(z)} = \frac{\omega \mu_i(z)}{x_i''(z)}, \quad x_i''(z) = \sqrt{\frac{\mu_i(z)}{\mu_z(z)}} \sqrt{k_i^2(z) - k_{ii}^{\prime 2}}. \quad (8б)$$

Отметим, что волновое сопротивление для анизотропной среды отличается от волнового сопротивления для изотропной среды и, что еще более важно, неодинаковы постоянные распространения x_i' и x_i'' (§ 1). Источники напряжения и тока v_i и i_i следующим образом выражаются через заданные \mathbf{J} и \mathbf{M} [гл. 2, § 2, формулы (14)]:

$$v_i = \int_S \mathbf{M}_{te} \cdot \mathbf{h}_i^* dS = \int_S \mathbf{M} \cdot \mathbf{h}_i^* dS + Z_i^* \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{e}_{zi}^* dS, \quad (9a)$$

$$i_i = \int_S \mathbf{J}_{te} \cdot \mathbf{e}_i^* dS = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{e}_i^* dS + Y_i^* \int_S \mathbf{M} \cdot \mathbf{h}_{zi}^* dS, \quad (9б)$$

где

$$Y_i'' \mathbf{h}_{zi}'' = \mathbf{z}_0 \frac{\nabla_i \cdot \mathbf{h}_i''}{-i\omega \mu_z}, \quad \mathbf{h}_{zi}' \equiv 0, \quad (9в)$$

$$Z_i' \mathbf{e}_{zi}' = \mathbf{z}_0 \frac{\nabla_i \cdot \mathbf{e}_i'}{-i\omega \epsilon_z}, \quad \mathbf{e}_{zi}'' \equiv 0. \quad (9г)$$

Согласно теории цепей, величины V_i и I_i представляют собой напряжение и ток в линии передачи, возбуждаемой заданным источником, и их можно найти методами этой теории.

Если величины ϵ и μ терпят разрыв при $z = z_1$, то в силу требования непрерывности составляющих \mathbf{E}_i и \mathbf{H}_i , даваемых формулами (6а) и (6б), должны быть непрерывными величины V_i и I_i , так как поперечные векторные собственные функции не зависят от z . Поэтому эквивалентная схема для данного случая неоднородной среды представляет собой соединение двух линий передач, одна из которых соответствует области $z < z_1$, а другая — области $z > z_1$.

Активная мощность, переносимая i -й волной в положительном направлении оси z , дается выражением

$$\bar{S}_{zi} = \text{Re} \int_S (V_i \mathbf{e}_i) \times (I_i \mathbf{h}_i)^* \cdot \mathbf{z}_0 dS = \text{Re} (V_i I_i^*), \quad (10a)$$

где подразумеваются среднеквадратичные значения всех величин; при выводе данного выражения было использовано соотношение ортогональности (11б) из гл. 2, § 2. Если область заполнена однородной средой без потерь и простирается до $z = \infty$ и если все источники сосредоточены в области $z \leq z_0$, то i -я соб-

Здесь α обозначает либо ϵ , либо μ . Выражения (11а) и (11б) справедливы для любой точки z , в которой нет источника [т. е. где $v_i(z) = i_i(z) = 0$]. Нетрудно убедиться, что потенциальная функция для E -волн $I'(\mathbf{r})$ в любой свободной от источников точке z удовлетворяет волновому уравнению [гл. 2, § 3, формула (44)]

$$\left[\frac{\epsilon_z(z)}{\epsilon_t(z)} \mathcal{D}_\epsilon^2 + \nabla_t^2 + k_1^2(z) \right] I'(\mathbf{r}) = 0, \quad k_1^2(z) = \omega^2 \mu_t(z) \epsilon_z(z), \quad (12а)$$

$$\mathcal{D}_\epsilon^2 \equiv \epsilon_t(z) \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\epsilon_t(z)} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (12б)$$

а потенциальная функция для H -волн $V''(\mathbf{r})$ — уравнению

$$\left[\frac{\mu_z(z)}{\mu_t(z)} \mathcal{D}_\mu^2 + \nabla_t^2 + k_2^2(z) \right] V''(\mathbf{r}) = 0, \quad k_2^2(z) = \omega^2 \mu_z(z) \epsilon_t(z). \quad (12в)$$

На идеально проводящей боковой поверхности s функции I' и V'' удовлетворяют следующим граничным условиям [гл. 2, § 3, формулы (36а) и (37а)]:

$$I'(\mathbf{r}) = 0, \quad \frac{\partial V''(\mathbf{r})}{\partial \nu} = 0 \text{ на } s. \quad (12г)$$

в. Тензорная функция Грина

Общий случай

В случае волноводной области, заполненной одноосной анизотропной средой, поле в которой определяется уравнением (1), выражения для тензорных функций Грина выводятся так же, как были выведены формулы (40) из гл. 2, § 3. Пусть $Y_i(z, z')$ и $T_i^V(z, z')$ — напряжение и ток, возбуждаемые в точке z генератором напряжения с единичной амплитудой $v_i(z') \equiv -1$, расположенным в точке z' , а $Z_i''(z, z')$ и $T_i^I(z, z')$ — напряжение и ток, возбуждаемые в точке z генератором тока с единичной амплитудой $i_i(z) \equiv -1$, расположенным в точке z' (фиг. 106). Тогда ток E -волны $I_i'(z, z')$ и напряжение H -волны $V_i''(z, z')$, обусловленные наличием одновременно источников $v_i(z')$ и $i_i(z')$, даются формулами (19) и (20) из гл. 2, § 3, с заменой величин ϵ и μ величинами $\epsilon_t(z')$ и $\mu_t(z')$, а также с заменой $j \rightarrow -i$, соответствующей временной зависимости вида $\exp(-i\omega t)$. Вместо выражения (39) из гл. 2, § 3, теперь получим

$$I'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -L_1' \mathcal{P}'_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}^0 - \frac{1}{i\omega \epsilon_t(z')} \mathbf{Q}'_e \mathcal{P}'_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}^0, \quad (13а)$$

$$V''(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = L_1' \mathcal{P}''_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}^0 - \frac{1}{i\omega \mu_t(z')} \mathbf{Q}'_\mu \mathcal{P}''_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}^0, \quad (13б)$$

где \mathcal{P}'_d и \mathcal{P}''_d — скалярные функции, разложение которых по собственным функциям имеет следующий вид:

$$\mathcal{P}'_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_i \frac{1}{k_{ii}^2} Y_i'(z, z') \Phi_i(\rho) \Phi_i^*(\rho'), \quad (13в)$$

$$\mathcal{P}''_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_i \frac{1}{k_{ii}''^2} Z_i''(z, z') \Psi_i(\rho) \Psi_i^*(\rho'). \quad (13г)$$

Штрих у операторов L_1' и \mathbf{Q}'_α [формула (11в)] означает, что все переменные заменяются их значениями со штрихами. При выводе выражений (13а) и (13б) предполагалось, что операции дифференцирования и суммирования можно менять местами, в связи с чем и появились множители $1/k_{ii}^2$ под знаком суммы в выражениях для \mathcal{P}'_d и \mathcal{P}''_d . Поэтому сюда полностью относится замечание, сделанное по поводу выражения (24) из гл. 2, § 3.

Тензорные функции Грина [гл. 2, § 3, формулы (26)] оказываются такими:

$$\mathcal{Z}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\mathbf{Q}_\epsilon}{i\omega \epsilon_t(z)} \frac{\mathbf{Q}'_\epsilon}{i\omega \epsilon_t(z')} \mathcal{P}'_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + L_1 L_1' \mathcal{P}''_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (14а)$$

$$\mathcal{Y}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = L_1 L_1' \mathcal{P}'_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{\mathbf{Q}_\mu}{i\omega \mu_t(z)} \frac{\mathbf{Q}'_\mu}{i\omega \mu_t(z')} \mathcal{P}''_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (14б)$$

$$\mathcal{T}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\mathbf{Q}_\epsilon}{i\omega \epsilon_t(z)} L_1' \mathcal{P}'_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - L_1 \frac{\mathbf{Q}'_\mu}{i\omega \mu_t(z')} \mathcal{P}''_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (14в)$$

$$\mathcal{T}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = L_1 \frac{\mathbf{Q}'_\epsilon}{i\omega \epsilon_t(z')} \mathcal{P}'_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{\mathbf{Q}_\mu}{i\omega \mu_t(z)} L_1' \mathcal{P}''_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (14г)$$

Здесь $\mathcal{P}'_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathcal{P}'_d(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ и $\mathcal{P}''_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathcal{P}''_d(\mathbf{r}', \mathbf{r})$, так что тензорные функции удовлетворяют обычным соотношениям взаимности [гл. 2, § 3, формула (28)]. Это оказывается следствием симметрии тензоров $\epsilon = \tilde{\epsilon}$ и $\mu = \tilde{\mu}$, характеризующих среду [формула (1); гл. 1, § 5, п. «б»]. В силу уравнений (7а) и (7б) тензорные функции Грина удовлетворяют дифференциальным уравнениям второго порядка

$$[D_\epsilon^2 + \kappa_i'^2(z)] Y_i'(z, z') = i\omega \epsilon_t(z') \delta(z - z'), \quad (15а)$$

$$[D_\mu^2 + \kappa_i''^2(z)] Z_i''(z, z') = i\omega \mu_t(z') \delta(z - z'), \quad (15б)$$

где D_α^2 — дифференциальный оператор (12б), в котором частные производные заменены полными производными. На основании формул (13в) и (13г) данного параграфа, а также формулы

Функция Грина для анизотропной среды G' связана с G'_z следующим соотношением [заметим, что $\delta(\alpha x) = \delta(x)/|\alpha|$]:

$$G'(\rho, z; \rho', z') = \sqrt{\frac{\epsilon_t}{\epsilon_z}} G'_z\left(\rho, \sqrt{\frac{\epsilon_t}{\epsilon_z}} z; \rho', \sqrt{\frac{\epsilon_t}{\epsilon_z}} z'\right). \quad (24)$$

Граничные условия для функции G'_z следуют из условий (19) и (20) для функции G' . Даже если отношение ϵ_t/ϵ_z не есть положительная действительная величина, то и в этом случае можно выразить функцию G' через функцию G'_z для изотропной среды, если получаемая функция может быть аналитически продолжена в соответствующую область комплексных значений ϵ_t/ϵ_z .

Относительно функции G'' [формула (176)] можно сделать аналогичные выводы дуального характера.

Изотропная среда

В случае изотропной среды, когда $\epsilon_t(z) = \epsilon_z(z) \equiv \epsilon(z)$, $\mu_t(z) = \mu_z(z) \equiv \mu(z)$, оператор \mathbf{Q}_α [формула (11в)] сводится к произведению $\nabla \times \nabla \times \mathbf{z}_0$ и результаты полностью совпадают с полученными в гл. 2, § 3, п. «г».

§ 3. ИСТОЧНИКИ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ

Применим теперь результаты, полученные в § 2 при решении задач об излучении в неограниченной однородной одноосной анизотропной среде, описываемой тензорной диэлектрической проницаемостью ϵ и скалярной магнитной проницаемостью μ_0 :

$$\epsilon = \epsilon_0 (\mathbf{1}_t + \mathbf{z}_0 \mathbf{z}_0 \epsilon) \rightarrow \epsilon_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}, \quad \mu = \mu_0, \quad (1)$$

где $\mathbf{1}$ — единичный тензор, $\mathbf{1}_t = \mathbf{1} - \mathbf{z}_0 \mathbf{z}_0$ — тензор в поперечной по отношению к оптической оси (оси z) области, \mathbf{z}_0 — единичный вектор вдоль оси z , ϵ_0 и μ_0 — диэлектрическая и магнитная проницаемости свободного пространства. Поскольку поле H -волны в рассматриваемой среде такое же, как в свободном пространстве, а поле E -волны можно найти из решения для свободного пространства путем изменения масштаба вдоль координатных осей (§ 2), поля и потенциалы в анизотропной среде рассматриваемого вида могут быть написаны непосредственно на основании решения для изотропной среды, полученного в гл. 5,

§ 4. Поэтому основное внимание в данном параграфе уделяется интерпретации решения, получаемого путем изменения масштаба, и выявлению тех свойств излучения, которые характерны именно для анизотропной среды. При этом мы будем пользоваться методом графического построения поверхности волновых векторов и лучей для обобщения найденных характеристик излучения в одноосной среде на анизотропные среды более общего вида.

При $\epsilon > 0$ поверхность волновых векторов представляет собой эллипсоид, но она имеет много общего со сферой, описывающей изотропную среду. Процесс распространения волн в этом случае можно анализировать путем непрерывного перехода от изотропной к анизотропной среде. При $\epsilon < 0$, когда поверхность волновых векторов незамкнута и возможно распространение волн с произвольно большими поперечными и продольными волновыми числами, это уже недопустимо. Дифференциальные уравнения в частных производных, описывающие распространение волн в случае незамкнутых поверхностей волновых векторов, относятся к классу гиперболических, и, следовательно, могут существовать разрывы полей и особенности на «характеристических конусах» (границе тени), сходные с особенностями во временном представлении импульсно-возбуждаемых полей в изотропной среде. В случае точечных и линейных источников особенности на границе тени столь сильные, что полная мощность излучения становится бесконечной (это явление называется в литературе катастрофой бесконечности). Бесконечная мощность излучения указывает на то, что холодную плазму без потерь не всегда можно рассматривать как диэлектрик, характеризующийся тензорами (1), но представляет интерес исследовать причину появления бесконечности и способ ее устранения. Это подробно делается в пп. «а» и «д».

Сначала в п. «а» рассматривается излучение элемента тока, меняющегося во времени по гармоническому закону и ориентированного вдоль оптической оси. После анализа решения в замкнутой форме, полученного из решения для свободного пространства путем изменения масштаба вдоль координатных осей, рассматривается решение в виде интегрального разложения, которое пригодно при более общих условиях, когда результаты не удается выразить в замкнутой форме. Аналитические свойства подынтегрального выражения, в частности седловые точки и особенности, сопоставляются с характерными особенностями решения в замкнутой форме, что позволяет лучше понять механизм излучения. В пп. «б», «в» и «д» рассматриваются другие источники, меняющиеся во времени по гармоническому закону, а в п. «г» исследуется излучение равномерно движущегося заряда.

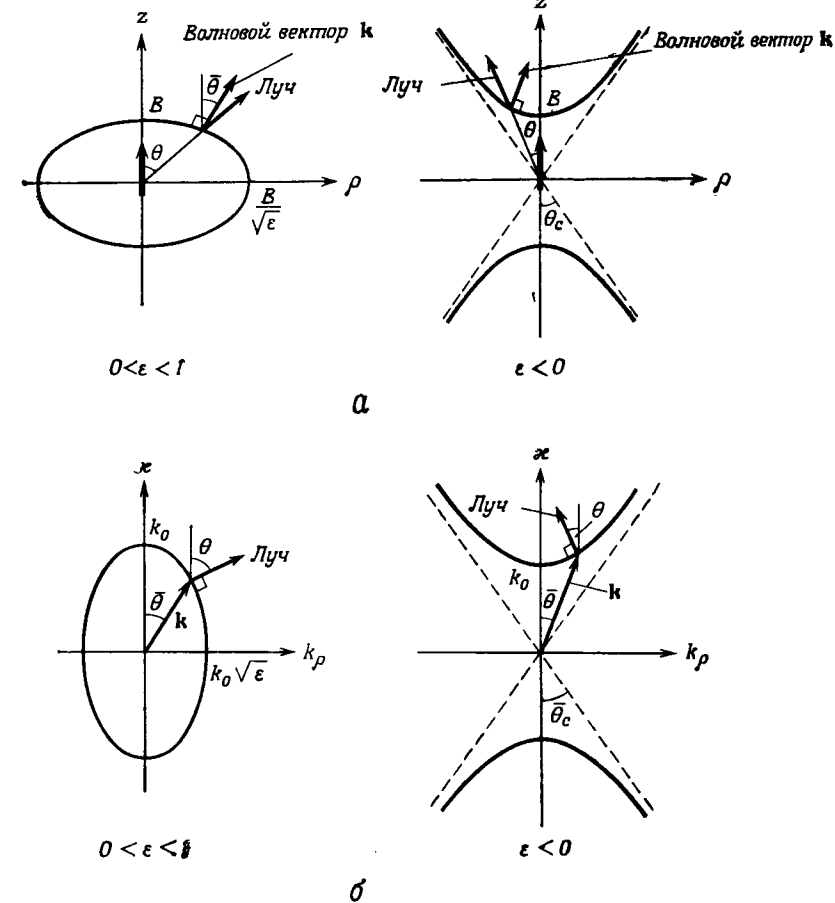
излучения в анизотропных средах. При $\epsilon > 0$ эффект анизотропии приводит в основном к искажению (без принципиальных изменений) поверхности равных фаз, диаграммы излучения и т. д., относящихся к изотропной среде. Отрицательные же значения ϵ приводят к новым аномальным свойствам. Это следует уже из вида дифференциального уравнения в частных производных (3а), которое является эллиптическим при $\epsilon > 0$ и гиперболическим при $\epsilon < 0$, что приводит в последнем случае к появлению поверхностей с особенностями (характеристик). В результате оказывается, что теперь уже недостаточно определить дальнюю зону условием $k_0 r \gg 1$, как в случае изотропной среды, а вместо этого необходимо условие $k_0 r N(\theta) \gg 1$. При $\epsilon > 0$ дальняя зона существует на достаточно больших расстояниях от источника, и поле излучения, определяемое формулами (4), в которых выражения в скобках следует приравнять единице, поперечно относительно r и убывает как $1/r$. При $\epsilon < 0$ это не так, поскольку величина $N(\theta)$ обращается в нуль на конусе $\theta_c = \text{arctg} |\epsilon|^{-1/2}$, на котором все составляющие поля обращаются в бесконечность при всех значениях r . Еще хуже то, что соответствующая плотность потока мощности (5а) ведет себя вблизи θ_c как $(\theta_c - \theta)^{-1/2}$. Эта особенность — неинтегрируемая, и в результате появляется расходимость (6б). Если ввести понятие сопротивления излучения $R = P/|I|^2$, то получается, что $R = \infty$ при $\epsilon < 0$. То же самое мы имеем, когда речь идет о диполе в более общем случае гиротропной среды с незамкнутой поверхностью показателя преломления (гиперболоид вращения; гл. 8, § 3). Но нужно иметь в виду, что бесконечности исчезают, если ввести потери (ϵ — комплексное), и что характеризовать плазму простым тензором (1), где $\epsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$, допустимо лишь в приближении малых амплитуд волн (малых сигналов), которое, очевидно, нарушается вблизи θ_c . Указанные особенности у полей не так уж страшны, поскольку даже в рамках рассматриваемой здесь идеализированной модели среды они исчезают, если считать источник распределенным и описываемым более плавной функцией, чем $\delta(r - r')$, которая характерна для элементарного диполя Герца [8, 9]. Данный вопрос рассматривается далее в п. «д».

Из выражения (5а) видно, что поток энергии излучения направлен по радиусу от источника, чем подтверждается сказанное в гл. 1, § 6, о переносе энергии вдоль лучей. Распространяющиеся лучи существуют лишь в освещенной области, где $N(\theta) > 0$, а в область тени $N(\theta) = i|N(\theta)|$, где поле затухает, никакой энергии не поступает. Освещенная область, где $|\text{tg } \theta| < \text{tg } \theta_c = |\epsilon|^{-1/2}$, и область тени, где $|\text{tg } \theta| > \text{tg } \theta_c$, показаны на фиг. 107, б. Из-за анизотропии лучи не совпадают с нормальными к поверхностям равной фазы, определяющимся условием

$rN(\theta) = \text{const}$ или

$$\frac{z^2}{|\epsilon|} \pm \rho^2 = \frac{B^2}{|\epsilon|}, \quad \epsilon \geq 0,$$

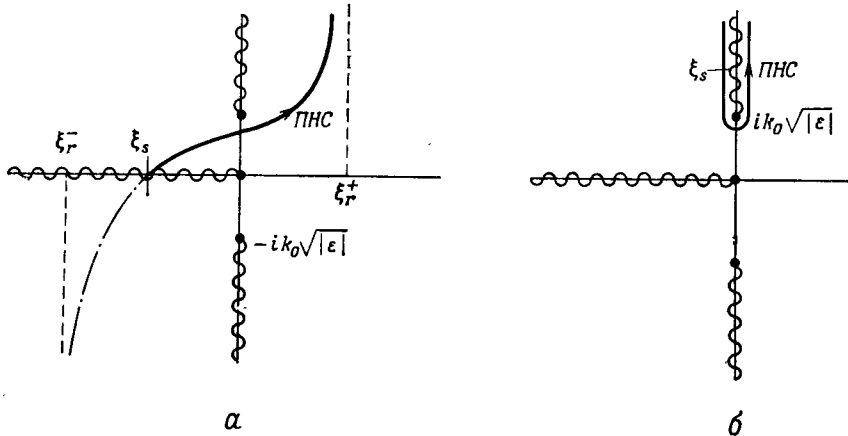
где $z = r \cos \theta$, $\rho = r \sin \theta$, B — положительная постоянная. Очевидно, что такие поверхности представляют собой эллип-



Фиг. 108. Поверхности равных фаз и поверхности волновых векторов. а — поверхности равной фазы, волновые векторы и лучи; б — поверхности волновых векторов $\theta_c = \text{arctg} |\epsilon|^{-1/2}$.

соиды при $\epsilon > 0$ и гиперболоиды при $\epsilon < 0$ (фиг. 108, а). Сравнив эти поверхности с поверхностями волновых векторов, изображенными на фиг. 108, б, можно сразу сделать ряд выводов относительно поля излучения (гл. 1, § 6). Например, на основа-

абсолютно, а условно. Поскольку вычисление электромагнитных полей требует повторного дифференцирования функции G' , желательнее перейти к представлению, которое обладало бы экспоненциальной сходимостью при $\xi \rightarrow \infty$. Очевидно, что для этого можно деформировать контур интегрирования в комплексной плоскости. Если разрезы проведены вдоль линий $\text{Re } \kappa = 0$



Фиг. 109. Путь наимыбшейшего спуска (ПНС) в комплексной плоскости ξ . а — при $|\text{tg } \theta| < \text{tg } \theta_c = \frac{1}{\sqrt{|\epsilon|}}$ (освещенная область); б — при $|\text{tg } \theta| > \text{tg } \theta_c$ (область тени)

(фиг. 109), то $\text{Re } \kappa > 0$ на всем верхнем листе двулистной поверхности ξ . Таким образом, при $\xi \rightarrow \infty$ мы имеем $\kappa \sim \pm \xi \sqrt{|\epsilon|}$, $\text{Re } \xi \geq 0$, так что в правой полуплоскости экспоненциальная зависимость имеет вид $\exp i\psi$, где $\psi = \xi \rho + \kappa |z - z'| \sim \xi (\rho + |z - z'| / \sqrt{|\epsilon|})$, а в левой полуплоскости $\psi \sim \xi (\rho - |z - z'| / \sqrt{|\epsilon|})$. Итак, $\text{Im } \psi > 0$, когда

$$\text{Im } \xi > 0 \text{ при } |\xi| \rightarrow \infty \text{ и } \text{Re } \xi > 0, \quad (10a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Im } \xi > 0, |\text{tg } \theta| > \text{tg } \theta_c \\ \text{Im } \xi < 0, |\text{tg } \theta| < \text{tg } \theta_c \end{array} \right\} \text{ при } |\xi| \rightarrow \infty, \text{Re } \xi < 0, \quad (10б)$$

где θ — угол наблюдения, который входит в выражения (4), а θ_c — предельный угол, показанный на фиг. 102, б. Смещение конечных точек пути интегрирования с действительной оси ξ , согласно этим условиям, обеспечивает экспоненциальную сходимость интеграла (8) при $\text{arg } \epsilon = \pi$. Различие в условиях сходимости (10б) для случаев $|\text{tg } \theta| \geq \text{tg } \theta_c$ (т. е. для точек наблюдения в освещенной области и области тени) указывает на важную роль граничного конуса $|\text{tg } \theta| = \text{tg } \theta_c$. Для точек наблюде-

ния, лежащих на границе тени, мы имеем $\psi \sim 0$, и подынтегральное выражение ведет себя как $\xi^{-1/2}$, что приводит к расходимости интеграла.

Асимптотическую оценку интеграла (8) можно произвести точно так же, как и в гл. 5, § 3, с тем исключением, что в данном случае более предпочтительно оставаться в комплексной плоскости ξ , чтобы проще было находить седловые точки путем анализа поверхности показателя преломления. При больших значениях аргумента функции Ханкеля заменяются их асимптотическими выражениями [гл. 5, § 3, формула (13б)], так что в результате экспоненциальная зависимость в подынтегральном выражении имеет вид $\exp(i\psi) = \exp(ir(\xi \sin \theta + \kappa |\cos \theta|))$. При больших значениях r основной вклад дает окрестность седловых точек ξ_s , которые находятся путем решения уравнения $(d/d\xi) [\xi \sin \theta + \kappa |\cos \theta|] = 0$, а именно

$$\left. \frac{d\kappa(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi_s} = - \frac{\xi_s}{\epsilon \kappa(\xi_s)} = - |\text{tg } \theta|. \quad (11a)$$

Это уравнение легко решается относительно ξ_s :

$$\xi_s = \frac{k_0 \epsilon \sin \theta}{N(\theta)}, \quad \kappa(\xi_s) = \frac{k_0 |\cos \theta|}{N(\theta)}, \quad (11б)$$

где $N(\theta)$ — функция, определенная так, что $N(\theta) = -\text{arg } \kappa(\xi_s)$. При $k_t \equiv \xi$ уравнение (11a) совпадает с уравнением (7) из § 1 и потому допускает простую графическую интерпретацию: действительные значения $\xi_s, \kappa(\xi_s)$, которыми характеризуется распространяющаяся волна, соответствуют точкам на кривой зависимости k от $\bar{\theta}$, в которых нормаль наклонена в сторону положительного направления оси z при данном угле θ (фиг. 108). Поскольку нормаль к поверхности совпадает с направлением лучей, из условия для седловых точек следует, что лучи идут от источника к точке наблюдения радиально. Можно, наоборот, использовать кривую зависимости k от $\bar{\theta}$ для нахождения седловых точек: седловые точки ξ_s отвечают тем точкам на поверхности, в которых нормаль ν направлена под углом θ и $\mathbf{k} \cdot \nu \geq 0$. Как указано в гл. 1, § 6, это общее требование остается в силе и в случае сред более общего вида, когда $\kappa(\xi)$ не является простой функцией, указанной в формуле (8).

Седловая точка ξ_s расположена на положительной действительной оси, когда ϵ — положительная величина, на отрицательной действительной оси, когда $\epsilon < 0$ и $N(\theta) > 0$, и в верхней полуплоскости комплексной плоскости ξ , когда $\epsilon < 0$ и $N(\theta)$ — положительная мнимая величина. Два первых условия можно также получить в результате анализа фиг. 104, а и б. Более детальное исследование выражения (11б) для ξ_s в среде с небольшим поглощением ($0 < \text{Im } \epsilon \leq 1$) показывает, что седловые

асимптотическая оценка с точностью до членов первого порядка такова:

$$G'_f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sim \frac{e^{-k_0 r} |N(\theta)|}{4\pi i r |N(\theta)|}, \quad k_0 r |N(\theta)| \gg 1. \quad (15)$$

Это выражение является аналитическим продолжением функции (14) в область положительных мнимых значений $N(\theta)$. Проведенная асимптотическая оценка подтверждает правильность сделанного выше разделения на освещенную область и область тени при $\varepsilon < 0$, но не дает информации о поведении поля вблизи границы области тени.

При наличии потерь, когда $\text{Im } \varepsilon > 0$, седловая точка расположена в верхней полуплоскости ξ , так что получающиеся асимптотические выражения совпадают с выражением (14) при $\text{Im } N(\theta) > 0$.

Монохроматический магнитный ток с плотностью

$$\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, t) = V l \delta(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \mathbf{z}_0. \quad (16)$$

В силу формулы (1) данного параграфа и уравнения (176) из § 2 соответствующая скалярная функция Грина для H -волн $G''_f(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ совпадает с функцией Грина для свободного пространства [формула (3) при $N(\theta) = 1$] и выраженные через нее поля также совпадают с полями в свободном пространстве [гл. 5, § 4, формула (16) и далее].

б. Диполь, ориентированный перпендикулярно оптической оси

Монохроматический электрический ток с плотностью

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t) = I l \delta(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \mathbf{x}_0. \quad (17)$$

Диполь, ориентированный перпендикулярно оптической оси (оси z), возбуждает в анизотропной среде, описываемой тензором (1), E - и H -волны, поля которых по формулам (14) из § 2 выражаются через скалярные потенциальные функции $\mathcal{P}'_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ и $\mathcal{P}''_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям [§ 2, формулы (16) и (17)]

$$\left[\varepsilon \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right) + \nabla_i^2 \right] \nabla_i^2 \mathcal{P}'_f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \varepsilon \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad -\mathcal{P}'_f = \frac{\mathcal{P}'_d}{i\omega \varepsilon_0}, \quad (18a)$$

$$\left(\nabla^2 + k_0^2 \right) \nabla_i^2 \mathcal{P}''_f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad -\mathcal{P}''_f = \frac{\mathcal{P}''_d}{i\omega \mu_0}, \quad (18б)$$

$$k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0},$$

и условию излучения на бесконечности, Потенциальная функция для H -волн совпадает с функцией $\mathcal{P}'_f(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ для неограниченной изотропной среды с волновым числом $k = k_0$ [гл. 5, § 4, формула (18)]. Потенциальную функцию для E -волн при положительных действительных ε можно найти, изменив в выражении для функции \mathcal{P}'_f масштаб вдоль координатной оси, согласно равенству $\xi = z e^{-1/2}$, поскольку из уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \nabla_i^2 + k_0^2 \varepsilon \right) \nabla_i^2 \mathcal{P}'_f = \sqrt{\varepsilon} \delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') \delta(\xi - \xi') \quad (19)$$

следует, что

$$\mathcal{P}'_f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sqrt{\varepsilon} \mathcal{P}'_f \left(\boldsymbol{\rho}, \frac{z}{\sqrt{\varepsilon}}; \boldsymbol{\rho}', \frac{z'}{\sqrt{\varepsilon}} \right). \quad (20)$$

при условии, что функция \mathcal{P}'_f вычислена для среды с волновым числом $k = k_0 \sqrt{\varepsilon}$. Как и в п. «а», путем аналитического продолжения можно расширить область применимости полученного результата так, чтобы она охватывала интервал $0 < \arg \varepsilon \leq \pi$.

Электромагнитные поля можно вычислять непосредственно по формулам гл. 5, § 4, для изотропной среды. Составляющие поля H -волны — такие же, как в гл. 5, § 4, п. «б», а составляющие поля E -волны находятся путем указанного выше преобразования масштаба в выражениях для поля в изотропной среде [7]. Подробности вычислений мы опускаем, оставляя читателю возможность поупражняться самому.

Монохроматический магнитный ток с плотностью

$$\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, t) = V l \delta(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \mathbf{x}_0. \quad (21)$$

По формулам (14) из § 2 поля выражаются через скалярные функции \mathcal{P}'_f и \mathcal{P}''_f , которые определяются уравнениями (18).

в. Линейные токи с линейным изменением фазы, ориентированные вдоль оптической оси

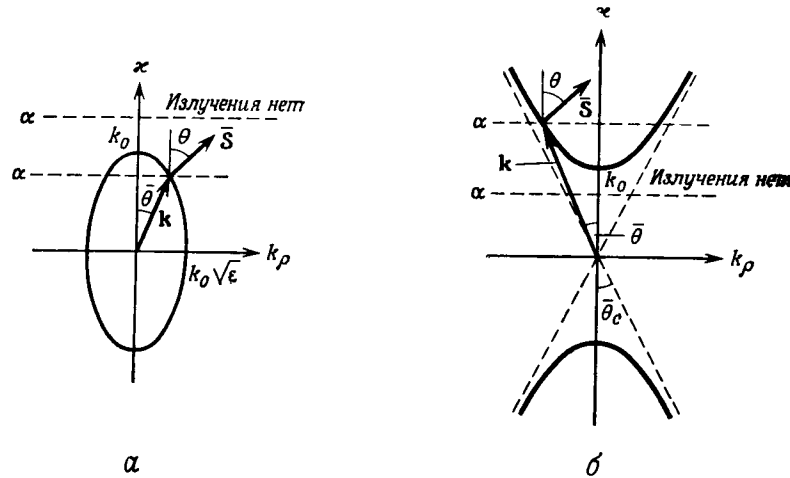
Монохроматический электрический ток с плотностью

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t) = I e^{i\alpha z} \delta(\boldsymbol{\rho}) e^{-i\omega t} \mathbf{z}_0. \quad (22)$$

Поскольку в этом случае ток направлен вдоль оптической оси (фиг. 110), электромагнитное поле можно выразить через двумерную скалярную функцию Грина для E -волн (§ 2), удовлетворяющую уравнению

$$\left[\nabla_i^2 + (k_0^2 - \alpha^2) \varepsilon \right] \bar{G}'_f(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = -\delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'), \quad \nabla_i^2 = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (23)$$

К тем же выводам приводит и анализ поверхности волновых векторов. Вследствие трансляционной инвариантности физической картины в направлении оси z продольная зависимость излучаемых полей (на больших расстояниях от оси — локально плоских волн) имеет вид $\exp(i\alpha z)$, обусловленный распределением тока источника. Поэтому роль продольного волнового числа k играет величина α и, как явствует из фиг. 111, распространение волн (т. е. пересечение плоскости $k = \alpha$ с поверхностью



Фиг. 111. Интерпретация результатов на основе анализа поверхности волновых векторов.

a — при $\epsilon > 0$; b — при $\epsilon < 0$ ($\theta_c = \arctg |\epsilon|^{1/2}$)

волновых векторов) возможно при $\alpha < k_0$, если $\epsilon > 0$, и при $\alpha > k_0$, если $\epsilon < 0$. Очевидно, что, когда $\bar{S}_\rho > 0$ (в соответствии с условием излучения), для поперечного волнового числа имеем: $k_\rho > 0$ при $\epsilon > 0$ и $k_\rho < 0$ при $\epsilon < 0$, что согласуется с выводом, сделанным ранее. Если поле в дальней зоне считать локально плоской волной, то k_ρ можно рассматривать как волновое число при прямолинейном распространении, что придает физический смысл отрицательным значениям k_ρ . Поскольку поверхность волновых векторов симметрична относительно оси источника, лучи, направленные вдоль вектора \bar{S} и определяющиеся пересечением с плоскостью $k = \alpha$, направлены под углом $\theta = \arctg [|\hat{k}|/\alpha \sqrt{|\epsilon|}]$ к оптической оси и образуют правильный круговой конус (фиг. 110). Такая симметрия отсутствует, когда ось источника не совпадает с оптической осью.

Монохроматический магнитный ток с плотностью

$$\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, t) = V e^{i\alpha z} \delta(\rho) e^{-i\omega t} \mathbf{z}_0. \quad (29)$$

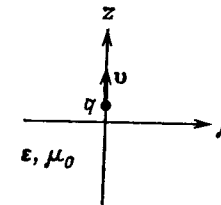
Такой источник возбуждает лишь H -волны, и все поля такие же, как в свободном пространстве (гл. 5, § 4, п. «г»).

г. Излучение заряда, движущегося прямолинейно и равномерно вдоль оптической оси

Плотность тока источника дается в этом случае выражением

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t) = q v \delta(z - vt) \delta(\rho) \mathbf{z}_0, \quad (30)$$

где q — заряд, а $v = \text{const}$ есть скорость частицы (фиг. 112).



Фиг. 112. Точечный заряд, движущийся вдоль оптической оси. Параметры среды: $\epsilon = \epsilon_0 (1 + z_0 z_0 \epsilon)$, $\mu = \mu_0$.

Исходя из интеграла Фурье

$$Q(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{Q}(\mathbf{r}, t) dt, \quad (31a)$$

найдем фурье-образ плотности тока

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) = q e^{i(\omega/v)z} \delta(\rho) \mathbf{z}_0, \quad (31b)$$

который совпадает с плотностью тока монохроматического источника (22), если положить $I = q$, $\alpha = \omega/v$. При такой замене поля определяются формулами (25), а спектральная плотность радиального потока мощности излучения дается выражением (26a) и имеет вид

$$\bar{S}_\rho(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\left(\frac{1}{\beta^2} - 1\right) k_0 \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} q^2}{8\pi\rho}, \quad \beta < 1, \quad (32)$$

где $\beta = v/c$, $k_0 = \omega/c$, а c — скорость света в свободном пространстве. Поскольку $\beta < 1$, выполняется соотношение $k_0 < \alpha (= k_0/\beta)$ и излучение возможно лишь при отрицательных

Асимптотические выражения для составляющих поля находятся путем замены в выражениях (38) функций Ханкеля их приближенными значениями при больших значениях аргумента

$$H_n^{(1)}(\omega) \sim (2/\pi\omega)^{1/2} \exp[i(\omega - \pi/4 - n\pi/2)].$$

Замечания

Формулы (38), в которых поля выражаются через функцию Грина, следуют непосредственно из уравнений Максвелла при условии $\partial/\partial x \equiv 0$. Но их можно получить иначе — упрощая формулы (14), (16) и (17) из § 2 [см. также аналогичное выражение для изотропной среды — гл. 5, § 4, формула (31)]. При выводе формулы (39) был использован вронскиан цилиндрических функций, а также справедливое при мнимых N равенство $H_n^{(1)}(i\omega) = (2/\pi i) \exp(-\nu \pi/2) K_\nu(\omega)$, где $K_\nu(\omega)$ — модифицированная функция Ханкеля, действительная при действительных ν и ω . Из формулы (39а) видно, что при $\epsilon > 0$ излучение источника попадает во все точки пространства, а при $\epsilon < 0$ имеется область тени, где $|\operatorname{tg} \phi| > |\epsilon|^{-1/2}$, и поле быстро затухает (N — мнимая величина). На границе области тени, где $|\operatorname{tg} \phi| = \operatorname{tg} \phi_c = |\epsilon|^{-1/2}$ и $N = 0$, поля и плотность потока мощности излучения бесконечны. Расходимости слабее, чем в случае точечного заряда [формулы (5а) и (39а)], но достаточно сильные, чтобы обратились в бесконечность полная мощность излучения и, следовательно, проводимость излучения $\bar{S}/|V|^2$.

Все сказанное можно объяснить также, рассматривая поверхность волновых векторов. Поскольку поля не зависят от координаты x , волновые числа ξ (или k_x) соответствующих плоских волн в дальней зоне равны нулю. В таком случае все определяется кривыми пересечения поверхности волновых векторов с плоскостью $k_x = 0$, которые совпадают с кривыми на фиг. 108, б, если k_ρ считать волновым числом $k_y \equiv \eta$. Поскольку нормали к поверхности волновых векторов при $k_x = 0$ лежат в плоскостях ηx , лучи (вдоль которых распространяется мощность излучения) перпендикулярны оси x и радиальны относительно источника [это следует из формулы (39)]. В связи с этим остается в силе все сказанное по поводу фиг. 108, если произвести замену $k_\rho \rightarrow \eta$, $\rho \rightarrow y$.

Устранение бесконечного значения мощности излучения

Выше было показано, что поля, излучаемые точечным или линейным источником в одноосной анизотропной среде, для которой поверхность волновых векторов незамкнута, обращаются в бесконечность вдоль границы тени θ_c или $\phi_c = \operatorname{arctg} |\epsilon|^{-1/2}$ и что бесконечной оказывается также полная мощность излуче-

ния. Хотя мы уже отмечали в п. «а», что эти особенности пропадают при правильном учете физических свойств реальной среды, покажем теперь, что в случае распределенных источников поля и мощность излучения оказываются конечными и в одноосной среде без потерь [6, 8, 9]. Ниже все вычисления проводятся для двумерного случая, но окончательные выводы справедливы и для трехмерных объектов.

Из самых общих соображений можно сказать, что в случае распределенного источника особенности полей точечного источника будут сглажены, поскольку из-за наличия соседних элементов в распределенном источнике граница тени размывается. Это видно из сравнения результатов для точечного [формулы (4) и (5)] и линейного [формулы (38) и (39)] источников: в случае линейного источника особенность поля слабее, чем в случае точечного.

Для удобства перейдем к интегральному представлению функции \bar{G}'_f , аналогичному представлению (8). Соответствующий базис образуют плоские волны $\Phi_\eta(y) = (2\pi)^{-1/2} \exp(i\eta y)$, $-\infty < \eta < \infty$; на основании формулы (18а) из § 2 получаем для магнитного поля следующее выражение:

$$H = C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\eta y + i\kappa |z-z'|}}{\kappa} d\eta, \quad \kappa(\eta) = \sqrt{k_0^2 - \frac{\eta^2}{\epsilon}}, \quad (41)$$

где C — множитель, в который входят различные постоянные. Сходимость этого интеграла точно такая же, как и интеграла (8), так что все сказанное выше остается в силе. Если источник распределен в плоскости $z = z'$, причем его амплитуда равна $f(y')$, то соответствующее ему магнитное поле имеет вид

$$\hat{H} = C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\eta y + i\kappa |z-z'|}}{\kappa} F(\eta) d\eta, \quad (42)$$

где $F(\eta)$ — фурье-образ функции $f(y')$:

$$F(\eta) = \int f(y') e^{-i\eta y'} dy', \quad (42a)$$

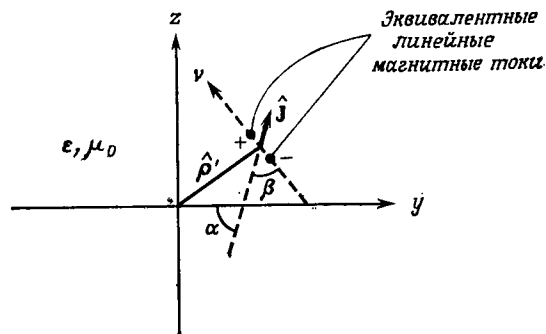
а интеграл берется по области, занятой источником. В случае линейного источника мы имеем $f(y') = \delta(y')$, $F(\eta) = 1$, так что снова получается формула (41). В случае же более плавно распределенного источника функция $F(\eta)$ стремится к нулю при $\eta \rightarrow \infty$ и тем самым уменьшается вклад удаленных областей в интеграл (42). Если интеграл сходится абсолютно, несмотря на то что κ принимает во всей области интегрирования лишь действительные значения, то отмеченная ранее расходимость полей при $\phi \rightarrow \phi_c$ исчезает. Если функция $F(\eta)$, где η_s — седловая

где учтено, что $\partial/\partial y = -\partial/\partial y'$, $\partial/\partial z = -\partial/\partial z'$, поскольку аргументами функции \hat{G}'_f являются разности $y - y'$ и $z - z'$. Оператор, стоящий в скобках в выражении (53), можно записать в виде $\mathbf{v} \cdot \nabla' = v(\partial/\partial v)$, где \mathbf{v} — вектор с составляющими $v_y = (1/\epsilon) \sin \alpha$, $v_z = -\cos \alpha$. Следовательно,

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{y}_0 \cos \alpha + \mathbf{z}_0 \sin \alpha) = (1/\epsilon - 1) \sin \alpha \cos \alpha = v \cos \beta, \\ v = \sqrt{\cos^2 \alpha + (1/\epsilon^2) \sin^2 \alpha}, \quad (54)$$

где β — угол между вектором \mathbf{v} и вектором плотности тока источника $\hat{\mathbf{J}}$.

В среде без потерь (ϵ — действительная величина) β — действительный угол, и на основании формулы (37) решение (53)



Фиг. 114. Линейный электрический диполь.

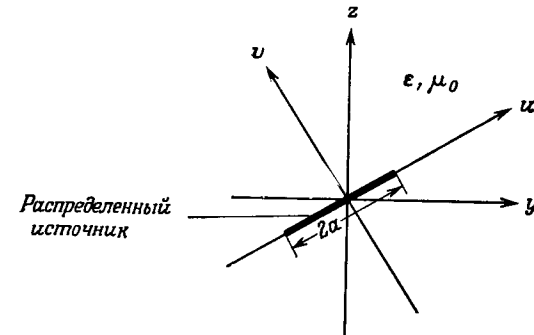
$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + z_0 z_0 \epsilon), \quad \mu = \mu_0 1.$$

можно рассматривать как поле двух близко расположенных, противоположно направленных магнитных токов, т. е. линейного магнитного диполя, параллельного вектору \mathbf{v} . В случае изотропной среды с $\epsilon = 1$ векторы \mathbf{v} и $\hat{\mathbf{J}}$ взаимно перпендикулярны и формула (53) переходит в формулу (39а) из гл. 5, § 4. В одноосной среде мы имеем $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{J}} = 0$ только тогда, когда электрический диполь ориентирован параллельно или перпендикулярно оптической оси ($\alpha = 0, \pi/2$). Источник рассмотренного типа индуцируется, например, когда на узкую проводящую полосу, расположенную при $\rho = \rho'$ и ориентированную под углом α , падает поле, в котором $H \equiv H_x$.

Высоконаправленный распределенный источник с плотностью

$$\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \cos \frac{\pi u}{2a} e^{i u \zeta} \delta(v) e^{-i \omega t} \mathbf{x}_0 & \text{при } -a \leq u \leq a, \\ 0 & \text{в остальной области,} \end{cases} \quad (55a) \quad (55b)$$

где u и v — координаты, указанные на фиг. 115. Такой вид функции $\hat{\mathbf{M}}$ соответствует фазированной антенной решетке с убывающим к краям распределением амплитуды, достаточно гладким, чтобы обеспечивалось отсутствие особенностей на границе области тени, имеющих место в случае уединенного линейного источника при $\epsilon < 0$ (см. выше в данном параграфе). Когда размеры антенной решетки намного больше длины волны



Фиг. 115. Высоконаправленный распределенный источник магнитного тока.

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + z_0 z_0 \epsilon), \quad \mu = \mu_0 1.$$

($k_0 a \gg 1$), диаграмма излучения оказывается высоконаправленной. Такие источники имеют важное значение в антенной технике и осуществляются либо в виде системы близко расположенных отдельных элементов, либо в виде системы с непрерывным распределением, как предполагается здесь.

Диаграмма направленности такой антенны находится путем интегрирования поля (38а) в дальней зоне

$$H \sim \frac{-\omega \epsilon_0 \sqrt{\epsilon} e^{-i\pi/4}}{2 \sqrt{2\pi} \sqrt{k_0 R N(\phi)}} e^{i k_0 R N(\phi) - i \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0 u} \quad (56)$$

по всей области, занятой источником. Здесь $R = \sqrt{y^2 + z^2} \rightarrow \infty$ ϕ — угол между R и положительным направлением оси z , \mathbf{u}_0 — единичный вектор вдоль оси u , \mathbf{k} — волновой вектор, соответствующий лучу, распространяющемуся под углом ϕ . В результате для магнитного поля H_T получаем выражение

$$H_T \sim H|_{u=0} F, \quad (57)$$

где F — коэффициент решетки, который имеет следующий вид:

$$F = \pi a \frac{\cos [a (\zeta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0)]}{(\pi/2)^2 - [a (\zeta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0)]^2}. \quad (58)$$

Поскольку произведение $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0 a = (z_0 k + y_0 \eta) \cdot \mathbf{u}_0 a$ пропорционально величине $1/N(\phi)$, отношение $F/\sqrt{N(\phi)}$ стремится к нулю при

приводит лишь к слабому смещению главных максимумов относительно направления лучей \bar{S}' и \bar{S}'' . Из-за анизотропии среды диаграмма направленности асимметрична относительно оси точечника u , и лепесток, отвечающий лучу \bar{S}'' , оказывается направленным назад, хотя фаза в антенной решетке возрастает в сторону положительных u . Путем графического построения, показанного на фиг. 116, можно решать также обратную задачу: находить те значения величины ξ и направления вектора u_0 , которые соответствовали бы заданному максимуму диаграммы направленности.

Изложенный выше метод определения положения максимума диаграммы высоконаправленного источника в анизотропной среде пригоден и в том случае, когда поверхность волновых векторов имеет более сложную форму или дополнительные ветви. Суть метода в том, что определяют направление лучей, для которых проекция волновой нормали на ось антенны совпадает с волновым числом заданного источника.

Для иллюстрации на фиг. 117 представлен численный пример, соответствующий частному случаю, когда $u_0 = z_0$, $\varepsilon = -1$, $a = 4\lambda_0$ и ξ/k_0 принимает значения 1, $\sqrt{1,25}$, $\sqrt{2}$ и 2. Сравнение истинного распределения магнитного поля, рассчитанного по формуле (57), с положением максимумов, определенным на основе условия (59), показывает хорошее совпадение в случае достаточного узких лепестков.

§ 4. ДИФРАКЦИЯ НА ПРЕПЯТСТВИЯХ, НАХОДЯЩИХСЯ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

Расчет влияния возмущающих структур на излучение распределенных источников существенно усложняется, если окружающая среда анизотропна. Правда, в некоторых случаях возможны упрощения: так, для одноосной анизотропной среды можно выделить два специальных класса дифракционных задач, которые путем изменения масштаба вдоль координатных осей легко сводятся к эквивалентным задачам для изотропной среды.

а. Оптическая ось параллельна образующим идеально проводящего цилиндра

К первому из указанных классов задач относятся задачи о дифракции поля произвольного источника на идеально проводящем цилиндре с произвольной формой поперечного сечения (например, круговой, эллиптический, параболический цилиндры, клин, полуплоскость, полоска и т. д.), образующие которого

параллельны оптической оси среды. Такой цилиндрический рассеиватель представляет собой граничную поверхность однородной волноводной области, а соответствующие задачи об излучении или дифракции решаются методами, изложенными в § 2. По формуле (24) из § 2 решение в этом случае прямо выражается через решение для изотропной среды, что позволяет решить целый класс задач о дифракции в одноосной анизотропной среде путем простого изменения масштаба вдоль оси z . Анализ таких решений в пределе коротких и длинных волн, позволяющий выяснить некоторые дифракционные эффекты, характерные для анизотропной среды, мы оставляем читателю в качестве упражнения. Напомним лишь, что поле H -волн *идентично* с полем в изотропной среде и изменение масштаба необходимо только в случае E -волн.

б. Оптическая ось перпендикулярна оси идеально проводящего цилиндра

Формулировка краевой задачи и сведение ее к более простой

К второму классу задач, допускающих сведение к эквивалентной задаче для изотропной среды, относятся задачи о цилиндрических рассеивателях произвольного сечения, ориентированных перпендикулярно оптической оси среды, при условии что распределение тока источника не изменяется вдоль оси цилиндра (ось z). В этом случае решение позволяет учесть эффекты, обусловленные плавным изменением ориентации оптической оси относительно граничной поверхности препятствия, тогда как в задачах п. «а» оптическая ось всегда должна быть параллельной образующим цилиндра.

Пусть ось цилиндра параллельна оси x и источником возбуждения служит магнитный ток с плотностью

$$\hat{M}(r, t) = V \delta(\hat{\rho} - \hat{\rho}') e^{-i\omega t} x_0, \quad \hat{\rho} = (y, z) \quad (1)$$

(линейный электрический ток возбуждает только H -волны в направлении, перпендикулярном оси x ; на них анизотропия одноосной среды не оказывает никакого влияния). Среду будем характеризовать проницаемостями

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1_t + z_0 z_0 \varepsilon), \quad \mu = \mu_0 1. \quad (2)$$

В отсутствие рассеивателя отличны от нуля составляющие $H_x \equiv H$, E_y , E_z . Будем считать, что на поверхности препятствия, уравнение которой напишем в виде $A(y, z) = 0$, выполняются импедансные граничные условия

$$E_{\text{кас}} = ZH, \quad (3a)$$

Как явствует из формул (6г) и (7б), во вспомогательной задаче для изотропной среды мы имеем, вообще говоря, другую форму поверхности препятствия¹⁾ и другой поверхностный импеданс. Форма препятствия изменяется согласно преобразованию (5), так что, например, круговой цилиндр радиусом a (т. е. $A = y^2 + z^2 - a^2 = 0$) преобразуется в эллиптический цилиндр $\bar{A} = (\hat{y}^2/\epsilon) + \hat{z}^2 - a^2 = 0$, клин, образуемый двумя полуплоскостями $A_1 = y - z \operatorname{ctg} \alpha_1 = 0$, $A_2 = y - z \operatorname{ctg} \alpha_2 = 0$, $z \geq 0$, превращается в клин, образуемый полуплоскостями $\bar{A}_1 = \hat{y} - z \operatorname{ctg} \psi_1 = 0$, $\bar{A}_2 = \hat{y} - z \operatorname{ctg} \psi_2 = 0$, $z \geq 0$, и т. д. Постоянный в пространстве yz поверхностный импеданс Z становится, вообще говоря, поверхностным импедансом \bar{Z} , зависящим от координат, поскольку α изменяется вдоль искривленного контура препятствия A . Имеются только два исключения:

а) когда $Z = 0$; б) когда α — кусочно-постоянная функция на поверхности A . (8)

Первое условие выполняется в случае идеально проводящей поверхности в пространстве yz , и в этом случае $\bar{Z} = 0$ и в пространстве $\hat{y}z$. Второе условие выполняется, когда поверхность препятствия состоит из плоских участков (например, бесконечная плоскость, полуплоскость, клин, многоугольник). Все сказанное ранее справедливо, очевидно, лишь при действительных положительных ϵ , поскольку о геометрической эквивалентности задач, схематически представленных фиг. 118, а и б, нельзя говорить при наличии у величины $\sqrt{\epsilon}$ мнимой части. Но если решение, найденное при положительных действительных ϵ , можно аналитически продолжить в область $0 \leq \arg \epsilon \leq \pi$, то результат будет верен при всех ϵ .

Применим теперь данный метод в различных конкретных случаях, которые позволяют выявить ряд дифракционных явлений, характерных для анизотропных сред.

в. Полупространство, ограниченное идеальным проводником

Рассмотрим линейный магнитный ток в точке $(0, z')$ в среде, ограниченной бесконечной идеальной проводящей плоскостью, наклоненной под углом α к плоскости $z = 0$ (фиг. 119, а). В системе координат u, v , повернутой на угол α относительно системы y, z , уравнение граничной плоскости имеет вид $u = 0$.

¹⁾ Преобразование $\hat{z} = z/\sqrt{\epsilon}$ (§ 2) оставляет форму цилиндрического препятствия, ориентированного параллельно оси z , неизменной. В данном же случае форма не остается инвариантной при изменении масштаба как вдоль оси z , так и вдоль оси y , поскольку теперь образующие цилиндра перпендикулярны оси z .

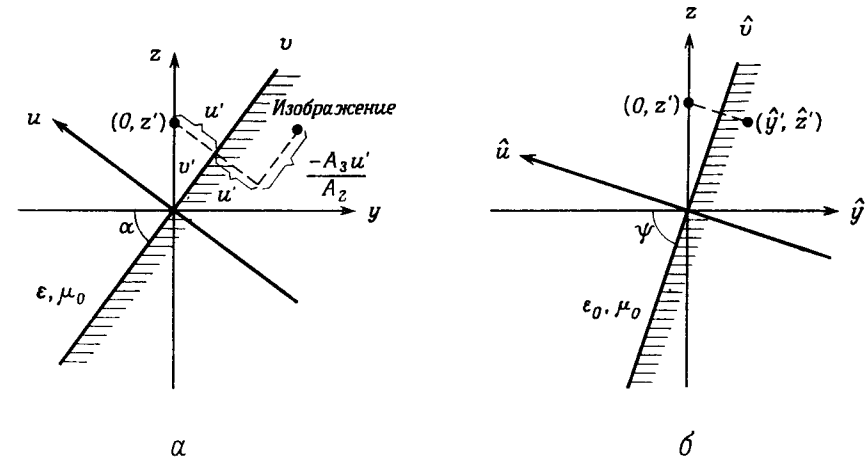
Вспомогательная задача в изотропном $\hat{y}z$ пространстве с идеально проводящей плоскостью, наклоненной под углом $\psi = \operatorname{arccotg}(\sqrt{\epsilon} \operatorname{ctg} \alpha)$, и при том же расположении источника легко решается методом изображений. Изображение расположено в точке \hat{y}', \hat{z}' :

$$\hat{y}' = z' \sin 2\psi, \quad \hat{z}' = -z' \cos 2\psi, \quad (9)$$

и для магнитного поля в полупространстве $u > 0$ получаем выражение

$$H(y, z; 0, z') = H_1(y, z; 0, z') + H_1\left(y, z; \frac{\hat{y}'}{\sqrt{\epsilon}}, \hat{z}'\right), \quad (10)$$

где H_i — решение для неограниченного пространства [§ 3, формула (38а)].



Фиг. 119. Полупространство, ограниченное идеальным проводником ($0 < \epsilon < 1$). а — реальная конфигурация; б — вспомогательная задача.

Представляет интерес положение изображения источника в системе координат u, v , наиболее удобной для описания граничной поверхности $u = 0$. По формулам (5) и (6в) вычисляем положение изображения источника (\hat{y}', \hat{z}') в системе координат yz :

$$\hat{y}' = 2z' \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\epsilon A_2}, \quad \hat{z}' = z' \frac{\sin^2 \alpha - \epsilon \cos^2 \alpha}{\epsilon A_2}, \quad (11)$$

$$\epsilon A_2 = \sin^2 \alpha + \epsilon \cos^2 \alpha.$$

Соответствующая точка в системе координат uv находится следующим образом:

$$\bar{u}' = \hat{z}' \cos \alpha - \hat{y}' \sin \alpha, \quad \bar{v}' = \hat{y}' \cos \alpha + \hat{z}' \sin \alpha. \quad (12)$$

Вклад поверхностной волны заслуживает более пристального внимания. Если \hat{u} и \hat{v} — координатные оси, параллельная и перпендикулярная поверхности в эквивалентной задаче об изотропной среде (фиг. 119, б), то магнитное поле H_s поверхностной волны имеет следующий вид [гл. 5, § 7, формула (21)]:

$$\hat{H}_s = \exp(ik_y \sqrt{1 - \hat{Z}^2} \hat{u} - ik_0 \hat{Z} \hat{v}), \quad (14)$$

где $\text{Im } \hat{Z} < 0$, $\text{Re } \hat{Z} \geq 0$ и $\hat{v} \geq 0$. Это решение можно преобразовать в решение для анизотропной среды, если вспомнить, что $\hat{u} = \hat{y} \cos \psi + z \sin \psi$, $\hat{v} = z \cos \psi - y \sin \psi$, и использовать соотношение (5). Окончательное выражение в координатах u, v получается на основании соотношений $y = v \cos \alpha - u \sin \alpha$, $z = v \sin \alpha + u \cos \alpha$ и дает следующую функциональную зависимость поля H_s поверхностной волны:

$$H_s = e^{iq_u + i\beta v}, \quad (15)$$

где q и β — волновые числа вдоль осей u и v :

$$q = -\beta \frac{A_3}{2A_2} - k_0 \frac{Z'}{A_2}, \quad \beta = k_0 \sqrt{\varepsilon (A_2 - Z'^2)}, \quad Z' = \frac{Z}{\sqrt{\mu/\varepsilon_0}}. \quad (15a)$$

Здесь величина ε предполагается положительной, Z и A_2 определены соотношениями (76) и (11). Такая связь между q и β является прямым следствием дисперсионного уравнения (5) из § 1, написанного в повернутой системе координат u, v [§ 5, формула (5)]. Если поверхностный импеданс чисто реактивный, т. е. $Z' = -i|Z'|$, то поле, определяющееся обоими выражениями (14) и (15), убывает при удалении от границы. Но в случае изотропной среды волновое число в перпендикулярном направлении \hat{u} чисто мнимое, а в анизотропной среде оно комплексное. Поэтому плоскости постоянной фазы в анизотропной среде наклонены по отношению к оси v , направленной вдоль границы.

Если H_s — поле поверхностной волны, то последняя должна переносить энергию вдоль оси v параллельно поверхности. Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial y} = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial v} - \sin \alpha \frac{\partial}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \sin \alpha \frac{\partial}{\partial v} + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial u} \quad (16)$$

и $E_u = E_z \cos \alpha - E_y \sin \alpha$, $E_v = E_z \sin \alpha + E_y \cos \alpha$, на основании формул (38) из § 3 для электрического поля получим

$$\begin{aligned} E_u &= \frac{1}{i\omega\varepsilon_0} \left(A_1 \frac{\partial}{\partial v} + \frac{A_3}{2} \frac{\partial}{\partial u} \right) H, \\ E_v &= -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0} \left(\frac{A_3}{2} \frac{\partial}{\partial v} + A_2 \frac{\partial}{\partial u} \right) H, \end{aligned} \quad (17)$$

где A_2 и A_3 — величины, определяющиеся соотношениями (11) и (13), а

$$A_1 = \sin^2 \alpha + \frac{1}{\varepsilon} \cos^2 \alpha \equiv \frac{1}{\varepsilon} N^2(\alpha). \quad (17a)$$

Вычисление усредненного по времени вектора Умова — Пойнтинга для случая поверхностного импеданса $Z' = -i|Z'|$ приводит к выражениям

$$\bar{S}_u = -\text{Re}(E_{vs} H_s^*) = 0, \quad (18a)$$

$$\bar{S}_v = \text{Re}(E_{us} H_s^*) = \frac{\beta}{\omega \varepsilon A_2} |H_s|^2, \quad (18b)$$

подтверждающим, что поле (15) имеет характерный для поверхностной волны вид.

д. Клины и полуплоскость

Мы лишь кратко рассмотрим задачу о дифракции на идеально проводящем клине, которую можно, пользуясь формулами (6), свести к аналогичной задаче для изотропной среды, подробно рассмотренной в гл. 6 [6, 10]. При этом может быть использовано (в соответствующей области значений параметров) любое из представлений, перечисленных в § 5. Если источник или точка наблюдения расположены вблизи ребра клина, то удобнее пользоваться быстро сходящимся рядом (13) из § 5. Поле же в дальней зоне, возбуждаемое удаленным источником, лучше вычислять по асимптотическим формулам (19) из § 5.

Приближенное выражение для поля в дальней зоне состоит из трех слагаемых, каждое из которых допускает простую геометрическую интерпретацию: а) поле в неограниченном пространстве в отсутствие препятствия, б) отраженное поле, соответствующее всем лучам, зеркально отраженным от плоскостей клина (фиг. 82), и в) дифрагированное поле, имеющее вид неоднородной цилиндрической волны (радиально расходящиеся лучи), излучаемое ребром клина (фиг. 75). Столь простая картина оказывается неадекватной вблизи границы геометрической тени и границы области отраженных волн и должна быть дополнена решением для переходной области (гл. 6). Если $\varepsilon > 0$, то никаких трудностей при преобразовании этого решения на случай анизотропной среды не возникает; при этом угол клина изменяется в соответствии с тем, что было сказано после формулы (7), и при $y' \neq 0$ меняется расположение источника. Получаемое в результате асимптотическое выражение для поля содержит перечисленные выше слагаемые и допускает такую же физическую интерпретацию. Первичное поле «а» определяется выражением (37) из § 3 и существует лишь в освещенной области.

с единичной амплитудой на ребре, $f(\phi, \phi', \phi_0)$ — функция углового распределения дифрагированного поля:

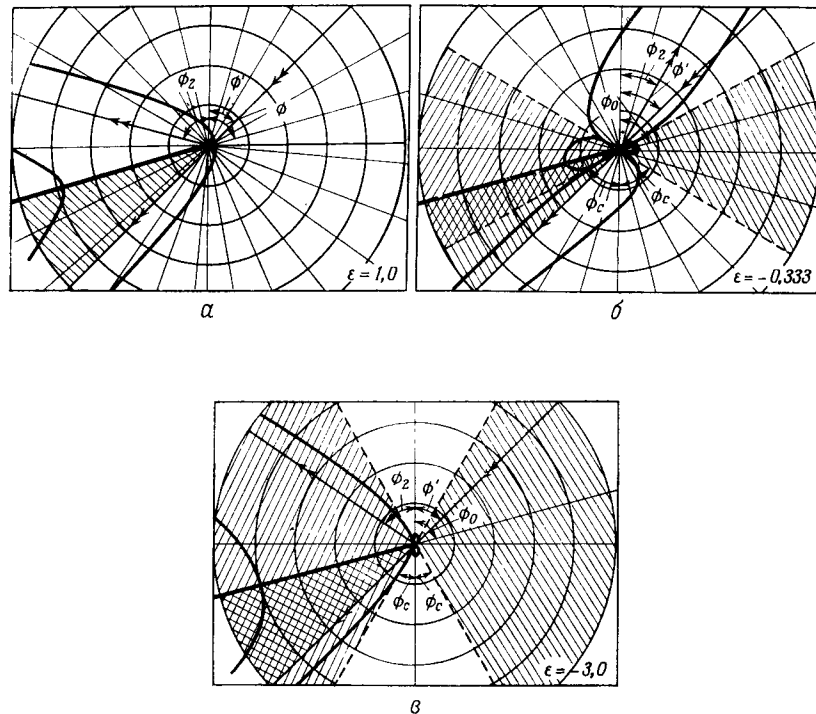
$$f(\phi, \phi', \phi_0) = \frac{1}{2} \frac{f_1(\phi, \phi_0) f_1(\phi', \phi_0)}{f_2(\phi, \phi_0) + f_2(\phi', \phi_0)}, \quad (19б)$$

где

$$f_1(\phi, \phi_0) = \left[1 - \frac{\epsilon \sin \phi_0 \sin \phi + \cos \phi_0 \cos \phi}{N(\phi_0) N(\phi)} \right]^{1/2},$$

$$f_2(\phi, \phi_0) = \frac{\epsilon \sin \phi_0 \sin \phi + \cos \phi_0 \cos \phi}{N(\phi_0) N(\phi)} \quad (19в)$$

и $N(\phi) = \cos^2 \phi + \epsilon \sin^2 \phi$. В этих формулах, справедливых при положительных и отрицательных значениях ϵ , если $\text{Im } N \geq 0$,



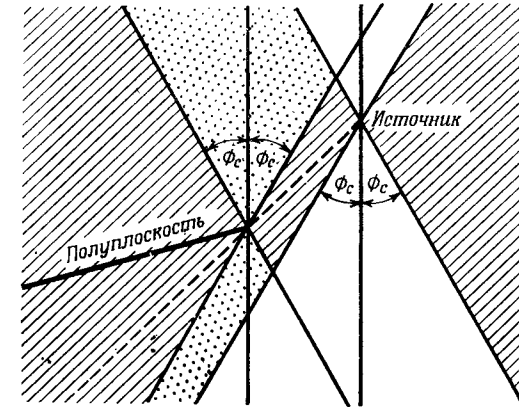
Фиг. 122. Графики амплитудных функций $f(\phi, \phi', \phi_0)$ при $\phi' = 45^\circ$, $\phi_0 = 75^\circ$ и различных ϵ .

а — при $\epsilon = 1,0$; б — при $\epsilon = -0,333$; в — при $\epsilon = -3,0$.

величины ϕ , ϕ' и ϕ_0 — это угловые координаты точки наблюдения, источника и полушлюскости относительно оптической оси (ось z) (фиг. 121). Вблизи области геометрической тени и границы отраженных лучей, где $f_2(\phi, \phi_0) \rightarrow -f_2(\phi', \phi_0)$, можно перейти к мо-

дифицированному представлению, основанному на интегралах Френеля [гл. 6, § 5, формула (20)]. При $\epsilon < 0$ эта формула оказывается неприменимой вдоль границы тени $N(\phi_c') = 0$ и $N(\phi_c) = 0$ вследствие анизотропии среды.

Множители, заключенные в квадратные скобки в формуле (19), имеют простой физический смысл: произведение $fQ(\hat{\rho})$



Фиг. 123. Различные волновые области в случае, когда полушлюскость находится в области тени источника в среде с тензором $\epsilon = \epsilon_0 (1_x + z_0 z_0 \epsilon)$, $\epsilon < 0$. Косой штриховкой отмечена область тени, где поле затухает, а точками — область, в которой распространяется только дифрагированное поле, штриховой линией показан затухающий луч.

описывает дифрагированное поле, обусловленное падающим полем с единичной амплитудой на ребре, а произведение $VQ(\hat{\rho}')$ дает отклонение напряженности падающего поля от единицы. Из этого следует, что падающая плоская волна вида $\exp[-i(\eta_i y + \kappa_i z)]$, переносящая энергию в направлении, соответствующем углу ϕ' , возбуждает дифрагированное на ребре поле с напряженностью $fQ(\hat{\rho})$. Влияние анизотропии окружающей среды на диаграмму направленности показано на фиг. 122, где представлены графики функций f при $\epsilon = 1$, $\epsilon = -1/3$ и $\epsilon = -3$; при этом направление падающей волны определяется углом $\phi' = 45^\circ$, а положение полушлюскости — углом $\phi_0 = 75^\circ$. Угол ϕ_2 соответствует границе области, где имеются отраженные волны. В случае $\epsilon = 1$ мы имеем изотропную среду, а в двух других случаях $\epsilon < 0$ и поэтому волны распространяются лишь в области углов, ограниченной условием $|\text{tg } \phi| < \text{tg } \phi_c = |\epsilon|^{-1/2}$, причем при $\epsilon = -1/3$ мы имеем дело с распространяющимся падающим полем, а при $\epsilon = -3$ — с затухающим. Необходимо различать две зоны тени, заштрихованные на фиг. 122: первая —

а. Постановка задачи (линейный источник)

Полупространство $u < 0$ заполнено одноосной анизотропной средой (фиг. 124), а область $u > 0$ — изотропной средой с диэлектрической проницаемостью ϵ_0 . Система координат uv , наиболее соответствующая геометрии задачи, повернута на угол α относительно системы yz , наиболее подходящей для описания анизотропных свойств среды. Опуская множитель $\exp(-i\omega t)$ и нормируя амплитуду источника, находим, что единственная отличная от нуля составляющая магнитного поля удовлетворяет в области II, заполненной анизотропной средой, однородному волновому уравнению (36) из § 3, которое

после перехода к переменным uv имеет вид (величина ϵ_0 для большей общности заменена величиной ϵ_y) [11]

$$\left(A_1 \frac{\partial^2}{\partial v^2} + A_2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} + A_3 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + k_y^2 \right) H_2 = -i\omega \epsilon_y \delta(u - u') \delta(v - v'), \quad u < 0, \quad (1)$$

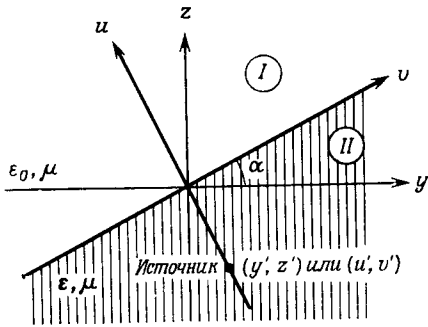
а составляющие электрического поля E_{u2} и E_{v2} вычисляются по формулам (17) из § 4. Постоянные $A_{1,2,3}$ даются формулами (11), (13) и (17а) из § 4. В области I, заполненной изотропной средой с диэлектрической проницаемостью ϵ_0 и магнитной проницаемостью μ , магнитное поле H_1 удовлетворяет однородному уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} + k_0^2 \right) H_1 = 0, \quad u > 0, \quad (2)$$

а составляющие электрического поля таковы:

$$E_{u1} = \frac{1}{i\omega \epsilon_0} \frac{\partial H_1}{\partial v}, \quad E_{v1} = -\frac{1}{i\omega \epsilon_0} \frac{\partial H_1}{\partial u}. \quad (2a)$$

Решения для областей I и II связаны между собой условием непрерывности полей при $u = 0$: $H_1 = H_2$, $E_{v1} = E_{v2}$; условием излучения на бесконечности обеспечивается единственность решения для H .



Фиг. 124. Геометрия структуры.

б. Отражение и прохождение плоских волн и условие излучения

При указанной в п. «а» постановке задачи об излучении ее удобнее всего решать, рассматривая структуру как волновод, ось которого направлена вдоль оси u , а собственные функции представляют собой плоские волны с зависимостью от поперечной координаты вида $\exp(i\beta v)$, $-\infty < \beta < \infty$. Таким образом, мы будем искать H_2 в виде разложения по плоским волнам непрерывного спектра

$$\exp(ik \cdot R) = \exp[iq(\beta)u + i\beta v]. \quad (3)$$

Поскольку такие волновые решения имеют важное значение, мы рассмотрим их подробнее. Будет показано, что продольные волновые числа $q_1(\beta)$ и $q_2(\beta)$, которыми характеризуются плоские волны, переносящие энергию в положительном и отрицательном направлениях оси u , не связаны между собой простым соотношением $q_1 = -q_2$, соответствующим зеркальному отражению волн. Поэтому, как отмечалось в § 1, теперь нельзя пользоваться эквивалентной схемой в виде двусторонней линии передачи с постоянной распространения q ; вместо этого приходится рассматривать две однонаправленные линии передачи с разными характеристиками: одна для прямой волны, другая для обратной. В связи с таким усложнением, типичным для анизотропных сред, более подходящим оказывается разложение по бегущим, а не стоячим волнам. В связи с этим эквивалентная схема в виде линии передачи не дает таких преимуществ, как в задачах с зеркальным отражением.

Плоская волна (3) удовлетворяет однородному волновому уравнению, и поэтому волновые числа q и β связаны между собой дисперсионным уравнением

$$A_2 q^2 + A_1 \beta^2 + A_3 q \beta = k_y^2 = k_0^2 \epsilon'_y, \quad \epsilon'_y = \frac{\epsilon_y}{\epsilon_0}, \quad (4)$$

которое имеет два решения:

$$q_{1,2}(\beta) = \frac{-\beta A_3 \pm 2\sqrt{k_y^2 A_2 - (\beta^2/\epsilon)}}{2A_2}, \quad \epsilon = \frac{\epsilon_z}{\epsilon_y}. \quad (5)$$

В уравнении (4) содержится та же самая информация, что и в уравнении (5) из § 1, но последнее проще, так как в нем волновые числа $k_t = \eta$ и κ соответствуют главным осям поверхности волновых векторов. Поэтому действительные решения (5) соответствуют кривым, представленным на фиг. 104, если q и β измеряются в повернутой системе координат (фиг. 125). Если квадратный корень в выражении (5) определен таким образом, что он положителен при действительных значениях, то решение

отражения и преломления лучей на границе одноосного кристалла с изотропной средой:

$$\operatorname{tg} \phi_{1,2} = \frac{A_3}{2A_2} \pm \frac{\sin \phi_0}{\varepsilon A_2 \sqrt{\varepsilon'_y A_2 - (\sin^2 \phi_0)/\varepsilon}}. \quad (96)$$

Во всех случаях, кроме случая $A_3 = 0$ (т. е. $\varepsilon = 1$ или $\alpha = 0, \pi/2$), мы имеем $\phi_2 \neq \pi - \phi_1$ и, значит, отражение от границы раздела, вообще говоря, незеркальное. Это уже отмечалось ранее в задаче об отражении от идеально проводящей плоскости, решенной в § 4, п. «в», методом, при котором связь между направлением падающего и отраженного лучей находится путем построения изображения. Приведенное здесь решение также пригодно для полупространства, заполненного анизотропной средой и ограниченного идеально проводящей плоскостью, если положить коэффициент отражения по току $-\Gamma$ равным единице, чтобы выполнялось условие $E_z = 0$ при $u = 0$.

Если $\varepsilon < 0$, то знаки углов ϕ_1 и ϕ_0 могут оказаться разными, что приводит к явлению обратного преломления лучей по отношению к направлению нормали к границе раздела (когда падающий и преломленный лучи лежат по одну сторону от нормали). С волновыми векторами дело обстоит иначе, поскольку оба вектора $\mathbf{k}_1 = q_1 \mathbf{u}_0 + \beta \mathbf{v}_0$ и $\mathbf{k}_0 = q_0 \mathbf{u}_0 + \beta \mathbf{v}_0$ имеют одинаковую касательную составляющую $\beta \mathbf{v}_0$. Кроме того, если $\sqrt{\varepsilon'_y A_2 - 1/\varepsilon}$ — действительная величина, то в полупространстве, заполненном плазмой, возможно полное внутреннее отражение. Угол полного внутреннего отражения дается выражением (96) для ϕ_1 , если положить в нем $\phi_0 = \pm \pi/2$.

Отметим, что у функции Γ могут быть полюсы и тогда в выражении для поля излучения появляются отличные от нуля вклады поверхностной или вытекающей волны. Ранее мы рассматривали анизотропную среду, характеризующую параметрами ε_y и ε_z тензора диэлектрической проницаемости, и внешнюю изотропную среду с диэлектрической проницаемостью ε_0 . Теперь предположим, что анизотропная среда представляет собой плазму, а внешняя среда — свободное пространство. В таком случае $\varepsilon'_y = 1$. Знаменатель выражения для Γ в формуле (7) имеет нуль первого порядка β_p , когда

$$\sqrt{k_0^2 - \beta_p^2} = -\sqrt{k_0^2 A_2 - \beta_p^2/\varepsilon}. \quad (10)$$

Возводя в квадрат и решая уравнение относительно β_p , получаем $\beta_p = \pm k_0 \sin \alpha$, так что $\sqrt{k_0^2 - \beta_p^2}$ — действительная положительная величина. Поскольку корень в правой части равенства тоже определен так, что он положителен, если действителен (т. е. расположен на верхнем листе соответствующей рима-

новой поверхности), то найденное значение β_p не может быть решением уравнения (10), а вместо этого приводит к обращению в нуль числителя в выражении (7). Таким образом, β_p — это нуль коэффициента отражения, а полюсы не существуют. Из фиг. 125 видно, что при $k_y = k_0$ волна с волновым числом β_p распространяется вдоль оптической оси (ось z) в среде и не испытывает отражения на границе, поскольку $\Gamma = 0$. Это можно объяснить следующим образом: если поперечные диэлектрические проницаемости в обеих средах одинаковы, то для волн, распространяющихся вдоль оси z , область оказывается как бы однородной, поскольку электрическое поле имеет лишь составляющую E_y .

в. Разложение решения по собственным волнам

При построении полей линейного источника H_1 и H_2 в виде разложения по плоским волнам \bar{H}_1 и \bar{H}_2 будем исходить из следующих интегральных представлений:

$$H_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta v + iq_0 u} f(\beta) d\beta, \quad u > 0, \quad (11)$$

$$H_2 = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} g(\beta) e^{i\beta v} [e^{iq_1 u} - \Gamma(\beta) e^{iq_2 u}] d\beta, & u > u' > u', \quad (12a) \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(\beta) e^{i\beta v} [h(\beta) e^{iq_2 u} - \Gamma(\beta) e^{iq_1 u}] d\beta, & 0 < u' < 0. \quad (12b) \end{cases}$$

Эти выражения уже удовлетворяют условию излучения, поскольку плоские волны, описывающие первичное поле (соответствующее значению $\Gamma = 0$) в формулах (12), переносят энергию от источника, а отраженная и прошедшая волны несут энергию от границы раздела. Выражением (7) для Γ определяется связь между f и g . Амплитуду падающей волны можно найти, если записать первичное поле в виде

$$H_{2i} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta v} Q(u, \beta) d\beta \quad (13)$$

и подставить этот интеграл Фурье в уравнение (1), помня при этом, что $2\pi\delta(v - v') = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta(v - v')} d\beta$. В результате получим

$\sqrt{\epsilon} = i\sqrt{|\epsilon|}$. Чтобы можно было представить вклад отраженного поля в разложении (12) в виде экспоненциальной функции $\exp[i\gamma \cos(\omega - \omega_s)]$, где γ и ω_s не зависят от ω , нужно принять для параметра ω_s

$$\operatorname{tg} \omega_s = \frac{(v - v') - (A_3/2A_2)(u - u')}{|u + u'|/\sqrt{\epsilon A_2}}. \quad (21)$$

Тогда интегральное представление отраженного поля в области II можно будет записать в виде

$$H_{2r} = -\frac{\omega \epsilon_0 \sqrt{\epsilon}}{4\pi} \int_P \Gamma(k \sin \omega) e^{i\gamma \cos(\omega - \omega_s)} d\omega, \quad \gamma = \frac{k_0 |u + u'|}{\sqrt{A_2 \cos \omega_s}}, \quad (22)$$

удобном для асимптотической оценки при больших γ .

Единственными особенностями на плоскости ω являются точки ветвления $\hat{\omega} = \pm \operatorname{arcsin}(k_0/k)$. Точки $\omega_s \pm n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$, представляют собой седловые точки подынтегрального выражения. При положительных ϵ величина ω_s действительна и седловые точки расположены в интервале $-\pi/2 < \omega_s < \pi/2$, а соответствующие точки ветвления $\hat{\omega}$ комплексны и лежат на линиях $|\operatorname{Re} \omega| = \pi/2$. Деформация контура P в путь наиболее быстрого спуска и асимптотическая оценка интеграла производятся так же, как в гл. 5, § 3. При $\epsilon < 0$ величины ω_s комплексны и удобно ввести действительный параметр δ :

$$\omega_s = i \operatorname{arctg} \delta, \quad \delta = \frac{(v - v') - (A_3/2A_2)(u - u')}{|u + u'|/\sqrt{|\epsilon| A_2}}. \quad (23)$$

Если $-1 < \delta < 1$, то $\omega_s = i\varphi_s$, где φ_s — действительная величина, изменяющаяся от $-\infty$ до $+\infty$; если $\pm\delta > 1$, то $\omega_s = \pm\pi/2 + i \operatorname{arctg} \delta$. Поскольку ω_s — седловая точка подынтегрального выражения в формуле (22), при асимптотической оценке интеграла следует различать случаи $|\delta| < 1$ и $|\delta| > 1$. При $|\delta| < 1$ величина γ действительна, а величина $\operatorname{Im} \cos(\omega - \omega_s) = \sin \omega_r \operatorname{sh}(\varphi_s - \omega_i)$ положительна либо при $\sin \omega_r > 0$, $\omega_i < \varphi_s$, либо при $\sin \omega_r < 0$, $\omega_i > \varphi_s$, где ω_r — действительная, а ω_i — мнимая часть величины ω . Поэтому интеграл вдоль контура P на фиг. 126, б сходится экспоненциально. При $\pm\delta > 1$ мы имеем $\gamma = i|\gamma|$, и поэтому $\operatorname{Im}[\gamma \cos(\omega - \omega_s)] > 0$ при $\sin \omega_r \geq 0$, а значит, интеграл вдоль контура $P_{1,2}$ сходится экспоненциально.

Для асимптотической оценки при больших $|\gamma|$ контур интегрирования P деформируется в путь наиболее быстрого спуска (ПНС), проходящий через данную седловую точку. При $|\delta| < 1$ ПНС определяется условием $\operatorname{Re} \cos(\omega - \omega_s) = 1$, которому соответствует контур P на фиг. 126, б. Контур P можно деформировать в контур \hat{P} , если добавить путь P_1 или P_2 обхода точек

ветвления (линии разреза показаны) и точки $|\omega_i| = \infty$. Ввиду отмеченного выше экспоненциального убывания подынтегрального выражения вклад в интеграл дают именно эти участки контура. Таким образом, получаем [11]

$$H_{2r} = -\frac{i\omega \epsilon_0 \sqrt{|\epsilon|}}{4\pi} [I + U(|\hat{\omega}| + \varphi_s) I_1 + U(|\hat{\omega}| - \varphi_s) I_2], \quad (24)$$

$$|\delta| < 1,$$

где

$$I = \int_{\hat{P}} F d\omega, \quad I_1 = \int_{P_1} F d\omega, \quad I_2 = \int_{P_2} F d\omega, \quad (24a)$$

F — подынтегральное выражение в формуле (22), а U — функция, определенная следующим образом: $U(x) = 1$ при $x > 0$ и $U(x) = 0$ при $x < 0$.

При $|\delta| > 1$ величина γ оказывается мнимой и седловая точка ω_s лежит на линии $\omega_r = \pi/2$ при $\delta > 1$ и на линии $\omega_r = -\pi/2$ при $\delta < -1$. Путь наиболее быстрого спуска при $\delta > 1$ определяется условием $\operatorname{Im} \cos(\omega - \omega_s) = 0$ и совпадает с линией $\omega_r = \pi/2$. Поскольку подынтегральное выражение экспоненциально убывает в полосе $\sin \omega_r > 0$, контур P можно деформировать в контур \hat{P}_1 , если исключить интеграл по разрезу. Таким образом, при $\delta > 1$

$$H_{2r} = \frac{-i\omega \epsilon_0 \sqrt{|\epsilon|}}{4\pi} [\hat{I}_1 + I_1], \quad \hat{I}_1 = \int_{\hat{P}_1} F d\omega, \quad (25a)$$

а при $\delta < -1$ точно так же получаем выражение

$$H_{2r} = \frac{-i\omega \epsilon_0 \sqrt{|\epsilon|}}{4\pi} [\hat{I}_2 + I_2], \quad \hat{I}_2 = \int_{\hat{P}_2} F d\omega. \quad (25b)$$

Поле в приближении геометрической оптики

Асимптотическая оценка интеграла вдоль пути наиболее быстрого спуска производится без особого труда, и на основании формулы (7) из гл. 4, § 2, получаем в приближении низшего порядка выражение

$$H_{2r} |_{\text{ПНС}} \approx -\frac{\omega \epsilon_0 \sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{2\pi}} \Gamma(k \sin \omega_s) \frac{e^{i(\gamma - \pi/4)}}{\sqrt{\gamma}} + O(\gamma^{-3/2}), \quad (26)$$

справедливое как при положительных, так и при отрицательных ϵ ; если γ — мнимая величина, то следует выбрать $\gamma = i|\gamma|$. Это выражение далее интерпретируется как геометрическая часть отраженного поля. Учитывая асимптотическую оценку для падающего поля [§ 3, формула (38a)], получаем для

уравнение (28) в другом виде:

$$\operatorname{tg} \phi_2 - \frac{|u'|}{|u|} \operatorname{tg} \phi_1 + \frac{v}{|u|} = 0, \quad (29)$$

где

$$\operatorname{tg} \phi_1 = -\frac{dq_1}{d\beta} \Big|_{\beta_s}, \quad \operatorname{tg} \phi_2 = -\frac{dq_2}{d\beta} \Big|_{\beta_s}. \quad (29a)$$

Уравнение (29) представлено графически на фиг. 127, где $\operatorname{tg} \phi_1 = \bar{v}/|u|$, $\operatorname{tg} \phi_2 = -(v - \bar{v})/|u|$. Поскольку величину β следует считать фиксированной и равной β_s , уравнение (29a) эквивалентно уравнению (9б). Таким образом, уравнение для седловой точки (28) выделяет те значения β_s , при которых падающий и отраженный лучи направлены так, что отраженный луч \bar{S}_2 проходит через точку наблюдения P . Фазовая зависимость отраженного поля, определяемого седловой точкой β_s , а именно $\gamma = \beta_s v + q_1(\beta_s) |u'|$, соответствует выражению (27б).

Интересно, что метод изображений, строго применимый при вычислении отраженного поля в случае идеально проводящей плоскости (§ 4, п. «в»), пригоден и в случае асимптотического решения (27). Для проверки достаточно показать, что изменение фазы L_1 на пути от источника до границы раздела вдоль R_1 (фиг. 124) такое же, как изменение фазы L'_1 на пути от изображения до границы раздела вдоль R_3 , при условии что анизотропная среда заполняет все пространство. Величина L_1 дается выражением (27в), а

$$L'_1 = \beta_s \left(\frac{A_3}{A_2} u' + \bar{v} \right) - q_2(\beta_s) |u'| = k_0 R_3 N(\phi_2). \quad (30)$$

Но поскольку $q_1 + q_2 = -\beta A_3/A_2$ [формула (5)], легко показать, что $L'_1 = L_1$. И при $\epsilon < 0$ путем построения изображения можно найти область, освещенную отраженным полем (фиг. 120), и границу области тени. Нетрудно убедиться, что направления падающего и отраженного лучей, даваемые аналитическим выражением (29), можно также определить путем анализа поверхностей волновых векторов (фиг. 125).

Боковые волны

Интегралы по разрезам I_1 [формула (24)] и I_2 [формула (25)] дают вклад в поле, который можно отождествить с боковыми волнами. При $1 > \epsilon > 0$ точки ветвления $\hat{w} = \pm \arcsin(1/\sqrt{\epsilon A_2}) = \pm \arcsin(1/\sqrt{\sin^2 \alpha + \epsilon \cos^2 \alpha})$ комплексны, и если источник и точка наблюдения не лежат одновременно на границе раздела, то интеграл по разрезу экспоненциально мал, как и в аналогичной задаче для изотропной среды (гл. 5, § 5, п. «д»). Но при $\epsilon < 0$ точки ветвления расположены на мнимой оси, где

экспоненциальный множитель подынтегрального выражения в формуле (22) не убывает, и интеграл может давать существенный вклад в поле в полупространстве, заполненном плазмой. Фактически вклад интеграла по разрезу оказывается главным в области тени, где обе величины χ и γ , определяемые формулами (27), мнимые. В рассматриваемом случае их роль гораздо важнее, чем в соответствующей задаче для изотропной среды (фиг. 28), где геометрические поля всегда сильнее (напомним, что интеграл по разрезу есть $O[(\text{расстояние})^{-3/2}]$; но при наличии потерь геометрические поля экспоненциально затухают и могут стать слабее боковых волн). Таким образом, при $\epsilon < 0$ интегралы по разрезу требуют более тщательного анализа. При сопоставлении их с боковыми волнами обнаруживаются совсем иные закономерности, нежели в случае изотропной среды [11].

Асимптотическая оценка интеграла по разрезу I_1 [формула (24а)] при условии, что седловые точки не лежат вблизи точек ветвления (т. е. $-\varphi_s \approx |\hat{w}|$), проводится точно так же, как в формулах (17)–(22) из гл. 5, § 5. При $|\delta| < 1$ следует произвести замену переменной

$$\cos(\omega - \omega_s) = \cos(\omega + \hat{w}) + is^2, \quad -\infty < s < \infty, \quad (31)$$

где s — величина, действительная на контуре P_1 (фиг. 126, б) и возрастающая от $-\infty$ до $+\infty$ в направлении, указанном стрелкой. В окрестности точки $s = 0$, которая дает основной вклад в интеграл при $\gamma \gg 1$,

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{2s}{\operatorname{sh}(\varphi_s + |\hat{w}|)} + O(s^3), \quad (32a)$$

$$s \approx \sqrt{\operatorname{sh}(\varphi_s + |\hat{w}|)} \sqrt{\omega + \hat{w}}, \quad 0 < \arg(\omega + \hat{w}) < 2\pi, \quad (32б)$$

$$\Gamma(k \sin \omega) = 1 + \frac{2e^{-i\pi/4}}{\operatorname{ch} |\hat{w}|} \sqrt{\frac{|\epsilon| \operatorname{sh} 2|\hat{w}|}{\operatorname{sh}(\varphi_s + |\hat{w}|)}} s + O(s^2). \quad (32в)$$

Интеграл можно переписать в виде

$$I_1 = e^{i\gamma \operatorname{ch}(\varphi_s + |\hat{w}|)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d\omega}{ds} \Gamma \right) e^{-\gamma s^2} ds, \quad (33)$$

и, значит, главный член в асимптотическом разложении при больших γ обусловлен членом с s^2 в степенном разложении функции $\Gamma d\omega/ds$. Окончательно получаем [гл. 4, § 2, формула (17)]

$$I_1 \sim \frac{2\sqrt{\pi\epsilon} e^{-i\pi/4} e^{i\gamma \operatorname{ch}(\varphi_s + |\hat{w}|)}}{\operatorname{ch} |\hat{w}| [\gamma \operatorname{sh}(\varphi_s + |\hat{w}|)]^{3/2}} \sqrt{|\epsilon| \operatorname{sh} 2|\hat{w}|} + O(\gamma^{-5/2}), \quad (34)$$

ля L_3 фиксированным. Полная траектория, для которой выполняется требование $\beta_s = k_0$, соответствует боковой волне на границе раздела анизотропной среды (случай изотропной среды представлен на фиг. 28).

С учетом введенных обозначений вклад интеграла по разрезу в отраженное поле в полупространстве, заполненном плазмой, можно записать в виде

$$H_{2b} \sim - \frac{\omega \varepsilon_0 e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{|\varepsilon|}{1 + |\varepsilon| A_2} \right) \times \left[\frac{e^{i(L_3 + L_4 + L_5)}}{L_4^{3/2}} U(L_4) + \frac{e^{i(L'_3 + L'_4 + L'_5)}}{L_4'^{3/2}} U(L'_4) \right], \quad (38)$$

где $U(x)$ — единичная функция Хевисайда, а

$$L'_3 = L_3(-k_0), \quad L'_4 = L_4(-k_0), \quad L'_5 = L_5(-k_0) \quad (38a)$$

и изменения фазы вдоль бокового луча соответствуют значению $\beta_s = -k_0$. Таким образом, можно считать, что интегралы вдоль разрезов описывают поле вдоль боковых лучей, идущих параллельно поверхности раздела в свободном пространстве, которые возбуждаются лучом, падающим под критическим углом, и постепенно теряют энергию, отдавая ее обратно в плазму за счет преломления. В отличие от боковых волн, возбуждаемых на границе раздела изотропных сред, в анизотропной среде наблюдается обратное преломление, в связи с чем в некоторые точки наблюдения попадают два боковых луча. Кроме того, боковые лучи проникают и в область тени (по лучу для каждой из заштрихованных областей на фиг. 128, б), чем обеспечивается перенос энергии в область, недоступную при каких-либо других механизмах. В этой области геометрическое поле H_{2g} [формула (27)] экспоненциально мало. Амплитуда поля боковых лучей убывает как $L_4^{-3/2}$ или $L_4'^{-3/2}$, и для удаленных точек наблюдения в освещенной зоне такое убывание быстрее убывания геометрического поля. Исключение — углы, близкие к углу полного внутреннего отражения, который определяется условием $L_4 = 0$ или $L_4' = 0$. В его окрестности выражение (38) становится неприменимым и должно быть заменено более точной формулой (45), которая позволяет вычислить поле в переходной области или вблизи от нее.

Поля в окрестности угла полного внутреннего отражения

Для асимптотической оценки интеграла I_1 в окрестности угла полного внутреннего отражения, где $\varphi_s \rightarrow -|\hat{\omega}|$, замена переменной (31) не дает преимуществ, поскольку теперь нельзя

считать, что производная dw/ds [формула (32a)] медленно изменяется вблизи точки $s = 0$. Трудность обусловлена близостью точки ветвления и седловой точки. Теперь удобнее ввести новую переменную¹⁾

$$\tau = \sqrt{1 + \frac{s \operatorname{Im}^2 \omega}{\operatorname{sh}^2 |\hat{\omega}|}}, \quad \operatorname{sh} |\hat{\omega}| = \frac{1}{\sqrt{|\varepsilon| A_2}}, \quad \varepsilon < 0, \quad (39)$$

так что точка ветвления $\omega = -\hat{\omega}$ соответствует точке $\tau = 0$. Производная

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\tau}{(\sin \omega \cos \omega) |\varepsilon| A_2} \quad (40)$$

не имеет особенностей вблизи точки $\tau = 0$, и при $\omega \approx -i|\hat{\omega}|$ имеем

$$\begin{aligned} \cos \omega &= \operatorname{ch} |\hat{\omega}| \sqrt{1 - \frac{\tau^2}{1 + |\varepsilon| A_2}} \approx \\ &\approx \operatorname{ch} |\hat{\omega}| \left[1 - \frac{\tau^2}{2(1 + |\varepsilon| A_2)} - \frac{\tau^4}{8(1 + |\varepsilon| A_2)^2} - \dots \right], \quad (41a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \omega &= -i(\operatorname{sh} |\hat{\omega}|) \sqrt{1 - \tau^2} \approx -i \operatorname{sh} |\hat{\omega}| \left(1 - \frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^4}{8} - \dots \right), \\ & \quad (41б) \end{aligned}$$

$$\frac{d\omega}{d\tau} \Gamma = i \left(1 - \frac{2\tau}{\sqrt{A_2} \operatorname{ch} |\hat{\omega}|} \right) \tau \operatorname{th} |\hat{\omega}| + O(\tau^3), \quad (41в)$$

где квадратные корни определены положительными при положительных подкоренных выражениях. Поведение функций $\tau_r = \operatorname{Re} \tau$ и $\tau_i = \operatorname{Im} \tau$ в разных областях комплексной плоскости ω показано на фиг. 129, а; мы видим, что контур $P_1 + P_2$ переходит в контур $C_1 + C_2$ на фиг. 129, б. Поскольку

$$\cos(\omega - \omega_s) = \operatorname{sh} |\hat{\omega}| (\operatorname{ch} \varphi_s \sqrt{1 + |\varepsilon| A_2 - \tau^2} + \operatorname{sh} \varphi_s \sqrt{1 - \tau^2}), \quad (42)$$

подынтегральное выражение в формуле (24a) для I_1 имеет седловые точки

$$\tau = 0, \quad \pm \tau_s, \quad \text{где } \tau_s = \sqrt{1 - (\operatorname{sh} \varphi_s / \operatorname{sh} |\hat{\omega}|)^2} \geq 0. \quad (43)$$

Следовательно, на действительной оси τ имеются три равноудаленные друг от друга седловые точки первого порядка, сливающиеся в одну при $\varphi_s \rightarrow -|\hat{\omega}|$. Подынтегральное выражение, убывающее от точки $\tau = 0$ вдоль контуров $C_{1,2}$, имеет также точки ветвления $\tau = \pm 1$ и $\pm \tau' = \pm \operatorname{cth} |\hat{\omega}|$ (фиг. 129, б), которые, однако, теперь далеко отстоят от седловых точек, расположенных в окрестности точки $\tau = 0$. Таким образом, интеграл с близкой расположенными седловой точкой и точкой ветвления нам

¹⁾ Введенную здесь переменную интегрирования τ не следует путать с функцией $\tau(s) \equiv q(z)$, которая фигурирует в гл. 4.

Хотя асимптотическая оценка интеграла I в формуле (24а) по пути наименьшего спуска \tilde{P} дает вклад низшего порядка малости (26), не изменяющийся при $\varphi_s \rightarrow -|\hat{\omega}|$, на членах более высоких порядков сказывается близкое расположение точки ветвления к седловой точке. При $\varphi_s \rightarrow -|\hat{\omega}|$ получаем (фиг. 129)

$$I = \begin{cases} \left(\int_{\tilde{P}_3} - \int_{\tilde{P}_1} \right) F d\omega = \left(\int_{C_1} - \int_{C_1} \right) F \frac{d\omega}{d\tau} d\tau, & -\varphi_s < |\hat{\omega}|, \quad (47a) \\ \int_{\tilde{P}_3 + \tilde{P}_2} F d\omega = \int_{C_3 + C_1} F \frac{d\omega}{d\tau} d\tau, & -\varphi_s > |\hat{\omega}|, \quad (47b) \end{cases}$$

где $F = \Gamma \exp[i\gamma \cos(\omega - \omega_s)]$. Напишем $\Gamma = 1 + (\Gamma - 1)$, и тогда вклад первого члена можно будет точно выразить через функцию Ханкеля. Для оставшегося же члена следует использовать описанный выше способ выражения интеграла по контуру $C_{1,2}$ через функцию $D_{-3/2}[\zeta \exp(-i\pi/4)]$. Интеграл по контуру C_3 сводится к функции $D_{-3/2}[-\zeta \exp(-i\pi/4)]$. В результате получаем [11]

$$I = I' + I'', \quad (48)$$

$$I' = \int_{\tilde{P}} e^{i\gamma \cos(\omega - \omega_s)} d\omega \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}} e^{i(\gamma - \pi/4)} + O(\gamma^{-3/2}), \quad (48a)$$

$$I'' = \int_{\tilde{P}} (\Gamma - 1) e^{i\gamma \cos(\omega - \omega_s)} d\omega \sim \frac{-iI_1}{2D_{-3/2}(\zeta e^{-i\pi/4})} \times \\ \times [D_{-3/2}(-\zeta e^{-i\pi/4}) \pm iD_{-3/2}(\zeta e^{-i\pi/4})], \quad -\varphi_s \geq |\hat{\omega}|, \quad (48b)$$

где I_1 — величина, даваемая выражением (45).

Хотя интеграл I'' терпит разрыв на границе полного внутреннего отражения $\varphi_s = -|\hat{\omega}|$, функция $\bar{I} = I'' + I_1 U(|\hat{\omega}| + \varphi_s)$, входящая в выражение (24), непрерывна. В силу равенства

$$D_{1/2}(z) = 2^{-3/2} [e^{i\pi/4} D_{-3/2}(iz) + e^{-i\pi/4} D_{-3/2}(-iz)] \quad (49)$$

можно написать

$$\bar{I} \sim I_1 e^{-i5\pi/8 - i\zeta^{3/4}} \zeta^{3/2} \sqrt{2} D_{1/2}(-\zeta e^{i\pi/4}). \quad (50)$$

Это выражение остается справедливым и при $-\varphi_s \geq |\hat{\omega}|$. При $-\zeta \gg 1$ выражение (50) можно преобразовать на основании асимптотической формулы (66а), а при $\zeta \gg 1$ можно воспользоваться формулой (66б). Если применить эти асимптотические приближения к приведенным выше выражениям для $I + I'$, то в окрестности точки $-\varphi_s \approx |\hat{\omega}|$ они сведутся к формулам (27) и (38).

д. Асимптотические оценки в случае свободного полупространства

Лучевая интерпретация седловых точек (каустика и точка возврата)

Поле в свободном полупространстве $u > 0$ определяется формулой (11):

$$H_1 = -\frac{\omega \varepsilon_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\beta) e^{i\psi(\beta)} d\beta, \quad (51)$$

где

$$F(\beta) = \frac{1}{2q_0 - A_2(q_2 - q_1)}, \quad (51a)$$

$$\omega(\beta) = \beta(v - v') + q_0 u + q_1 |u'|. \quad (51b)$$

Здесь нам удобнее не переходить к плоскости ω , а провести интегрирование в плоскости β . Изменив масштаб в соответствии с соотношением $\beta = k_0 \beta'$, можно написать $\psi(\beta) = k_0 \psi(\beta')$. Тогда если k_0 — большая величина, то подынтегральное выражение имеет вид, удобный для асимптотической оценки. Мы не будем переходить к переменной β' , но нужно помнить, что функция $\psi(\beta)$ содержит большой параметр k_0 . Следовательно, стационарные точки β_s , определяемые уравнением $d\psi/d\beta = 0$, должны играть важную роль при асимптотической оценке:

$$v = u \operatorname{tg} \phi_0 + |u'| \operatorname{tg} \phi_1 \quad \text{при} \quad \beta = \beta_s, \quad (52)$$

где $\operatorname{tg} \phi_1 \equiv -dq_1/d\beta$ и $\operatorname{tg} \phi_0 \equiv -dq_0/d\beta = \beta(k_0^2 - \beta^2)^{-1/2}$. Решение этого уравнения имеет вид $\beta_s = k_0 \sin \phi_0$, а отвечающее ему значение ϕ_1 находится по формуле (9б). В дальнейшем мы ограничимся частным случаем $\varepsilon < 0$ и $A_2 > 0$. Для простоты (но без потери общности) положим v' равным нулю.

Наиболее важную роль играют те седловые точки, в которых функция $\psi(\beta_s)$ принимает действительные значения, ибо тогда соответствующее слагаемое поля $\sim \exp[i\psi(\beta_s)]$ не затухает. Эти действительные решения соответствуют действительным углам падения ϕ_1 и преломления ϕ_0 лучей, проходящих из плазмы в свободное полупространство (п. «б»). Уравнение преломленного луча точно совпадает с уравнением (52), а соответствующий ход лучей показан на фиг. 130. Из выражения (9б) (при $\varepsilon < 0$ и $A_2 > 0$) видно, что ϕ_0 и ϕ_1 могут иметь разные знаки (обратное преломление); увеличение угла ϕ_0 приводит к уменьшению угла ϕ_1 (т. е. $|\phi_1|$ возрастает, поскольку $\phi_1 < 0$ при $\phi_0 > 0$), в связи с чем последовательные лучи пересекаются. Если $\phi_0 = \pm\pi/2$, то соответствующее значение ϕ_1 и есть критический угол преломле-

Другая ветвь, соответствующая значению $\phi_0 < 0$, получается заменой величины $v_0 - v$ величиной $v - v_0$. Очевидно, что из уравнения (54б) получаются правильные выражения (53а) и (53б) для координат граничных точек.

Асимптотическая оценка поля

При оценке интеграла (51) методом седловых точек контур интегрирования деформируется в путь наискорейшего спуска, проходящий через различные седловые точки, которые дают вклад в интеграл. Деление комплексной плоскости β на «горы» и «долины» в окрестности каждой седловой точки зависит от знака второй производной функции $\psi(\beta)$:

$$\psi''(\beta) = q_0''(\beta)u + q_1''(\beta)|u'|, \quad (55)$$

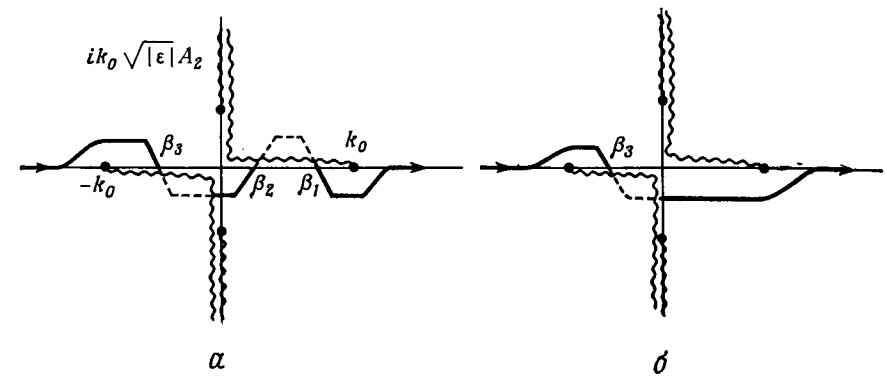
где

$$q_0'' = \frac{-k_0^2}{(k_0^2 - \beta^2)^{3/2}}, \quad q_1'' = \frac{k_0^2}{|\epsilon|(k_0^2 A_2 + \beta^2/|\epsilon|)^{3/2}}, \quad \beta = k_0 \sin \phi_0. \quad (55a)$$

Поскольку знаки производных q_0'' и q_1'' противоположны в представляющей для нас интерес области $|\beta| < k_0$, где обе величины действительны, производная $\psi''(\beta)$ может быть положительной или равной нулю. Если рассматривать луч с заданным углом преломления ϕ_0 , то при перемещении точки наблюдения вдоль луча производная $\psi''(\beta)$ положительна в начальной точке $u = 0$, поскольку $q_1''(\beta) > 0$, и отрицательна при достаточно больших значениях u , где доминирует член $q_0''u$. Изменение знака происходит в точке касания каустики, где $\psi''(\beta) = 0$. Из схемы хода лучей (фиг. 131) видно, что из трех лучей, попадающих в данную точку наблюдения, находящуюся внутри каустики, два касаются каустики, а один нет и что угол ϕ_0 , под которым распространяется этот луч, занимает промежуточное положение между углами, под которыми распространяются два первых луча. Таким образом, для трех седловых точек $\beta_s = \beta_{1,2,3}$ мы имеем $\psi''(\beta_1) < 0$, $\psi''(\beta_2) > 0$, $\psi''(\beta_3) < 0$, тогда как при наличии одной действительной седловой точки, внешней по отношению к каустике, $\psi''(\beta_s) < 0$. Поэтому пути наискорейшего спуска, показанные на фиг. 132, наклонены под углом 45° и можно показать, что на остальной части контура абсолютная величина подынтегрального выражения в формуле (51) экспоненциально мала по сравнению с его величиной вблизи седловых точек. Следовательно, интеграл можно аппроксимировать вкладом лишь окрестностей седловых точек. Линии разреза, обусловленные точками ветвления $\beta = \pm k_0$, проводятся так, что $\text{Im } q_0 > 0$ на всем верхнем листе четырехлист-

ной плоскости β . Разрез, обусловленный точкой ветвления функции q_1 , определяемой выражением (5), проводится так, чтобы величина $\text{Re } \sqrt{\dots} > 0$ была положительной на всем верхнем листе.

Фиг. 132, а соответствует точке наблюдения P , показанной на фиг. 131, а фиг. 132, б — точке наблюдения, лежащей на луче β вне каустики. Если наблюдатель перемещается вдоль луча β (т. е. точка β_3 фиксирована), то точки β_1 и β_2 сближаются и сливаются в двойную седловую точку на каустике; во внешней по-



Фиг. 132. Контурны интегрирования при разном расположении точек наблюдения.

а — внутри каустики; б — вне каустики.

отношению к каустике области седловые точки β_1 и β_2 комплексные и основной вклад в интеграл дает окрестность точки β_3 . Хотя решить уравнение (52), которым определяются седловые точки β_s , при произвольных u и v в явном виде весьма затруднительно, это легко сделать в том случае, когда точка наблюдения лежит на луче $v = v_0$, падающем нормально к границе раздела. В этом случае

$$\beta_2 = 0, \quad \beta_1 = -\beta_3 = k_0 \left(\frac{1 - A_2 b^2}{1 + b^2/|\epsilon|} \right)^{1/2}, \quad b = \frac{u|\epsilon|A_2}{|u'|}, \quad (56)$$

и, значит, величины β_1 и β_3 мнимые при $u > \tilde{u}$, где $\tilde{u} = |u'| [|\epsilon| A_2^{3/2}]^{-1}$ — ордината точки возврата. Поскольку в точке возврата $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, мы имеем $\psi'(0) = \psi''(0) = \psi'''(0) = 0$, так что для асимптотической оценки необходим учет седловой точки третьего порядка.

Теперь можно непосредственно выписать асимптотические формулы для магнитного поля, определяемого интегралом (51)

функции переменной β на линии $v = v_0$, формулу (57) можно переписать в виде

$$H \sim -\omega \varepsilon_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{F(0)}{\sqrt{\psi''(0)}} e^{i[\psi(0) + \pi/4]} + \frac{2F(\beta_1)}{\sqrt{|\psi''(\beta_1)|}} e^{i[\psi(\beta_1) - \pi/4]} \right\}, \quad (64)$$

$$u < \hat{u}, \quad v = v_0.$$

Если $u \gg \hat{u}$, то формула (58) пригодна и при $\beta_s = 0$, так что фаза поля вдоль луча $v = v_0$ уменьшается на 90° при прохождении точки возврата $u = \hat{u}$. Указанные выше формулы становятся неприменимыми при $u \rightarrow \hat{u}$, поскольку в этом случае $\psi''(0) \rightarrow 0$. На линии $v = v_0$ мы имеем $\psi'(0) = 0$ и производная $\psi'''(0)$ тоже обращается в нуль, так что первая отличная от нуля производная есть $\psi''''(0)$. Поэтому точка возврата (фокальная область) характеризуется слиянием трех седловых точек.

Для подробного описания поля в фокальной области следует пользоваться формулой

$$H \sim \frac{i\omega \varepsilon_0 e^{+i3\pi/8}}{-2^{1/4} \sqrt{\pi}} e^{i[\psi(0) + \psi(\beta_1)]/2} D_{-1/2} \left\{ e^{-i(3\pi/4)} \sqrt{2[\psi(\beta_1) - \psi(0)]} \right\} \times$$

$$\times \left[\frac{24}{-\psi''''(0)} \right]^{1/4} F(0), \quad (65)$$

где $D_{-1/2}(z)$ — функция параболического цилиндра порядка $-1/2$, величина $-\psi''''(0)$ положительна и величина $\arg[\psi(\beta_1) - \psi(0)]$ равна 0 при $u < \hat{u}$ и π при $u > \hat{u}$. Используя асимптотические оценки при больших значениях аргумента

$$D_{-\nu}(z) \sim \frac{e^{-z^{2/4}}}{z^\nu} \left[1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right], \quad |\arg z| < \frac{3\pi}{4}, \quad (66a)$$

$$D_{-\nu}(z) \sim \frac{e^{-z^{2/4}}}{z^\nu} - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\nu)} \frac{e^{z^{2/4} + i\nu\pi}}{z^{1-\nu}} + O[z^{\nu-3}, z^{-(2+\nu)}],$$

$$-\frac{\pi}{4} > \arg z > -\frac{5\pi}{4}, \quad (66b)$$

можно свести выражение (65) к выражениям (58) и (64), что обеспечивает полное прохождение через точку возврата. При этом необходимо использовать приближенное равенство

$$\psi''(\beta_1) \approx -2\psi''(0), \quad \left[\frac{24}{-\psi''''(0)} \right]^{1/4} \approx -\frac{i2\sqrt{2}[\psi(\beta_1) - \psi(0)]^{1/4}}{\sqrt{\psi''(\beta_1)}} \quad (67)$$

и предположить, что аргумент функции параболического цилиндра достаточно большой, хотя β_1 и не сильно отличается от нуля (т. е. k_0 или u и $|u'|$ велики). Мы видим, что поле вдали от каустики ведет себя как $|\psi''|^{-1/2}$, вблизи от каустики — как $|\psi''|^{-1/2}$ и вблизи точки возврата — как $|\psi''''|^{-1/4}$. Поскольку ψ содержит

большой параметр, эти зависимости характеризуют и увеличение напряженности поля при приближении точки наблюдения к каустике и фокальной области.

Описанное выше явление фокусировки имеет место в ограниченной области вблизи поверхности раздела и не проявляется на больших расстояниях от границы. Это следует из схемы хода лучей (фиг. 131), которая показывает, что в точку наблюдения, находящуюся вне каустики, попадает только один луч; при этом поле в дальней зоне описывается единственным членом в выражении (58). Заметим, что то же самое относится и к средам с анизотропией более общего вида (например, гиротропным), когда поверхность показателя преломления имеет более сложную форму, чем показанная на фиг. 125 (гл. 8, § 3, п. «б»). Преломленное поле в общем случае описывается интегралом (51), но зависимость волнового числа q_1 от β обычно определяется более сложным дисперсионным уравнением, чем (4). Фокусировка возможна при $\psi''(\beta) \rightarrow 0$ [формула (55)], т. е. когда действительные величины q_0'' и q_1'' имеют разные знаки. Знак величины q'' определяется кривизной кривой $q(\beta)$, что позволяет по виду поверхности показателя преломления судить о том, могут ли существовать фокальные области. Так, например, фокусировка отсутствует, когда полупространство заполнено одноосной анизотропной средой с поверхностью показателя преломления, изображенной на фиг. 125, а, поскольку в этом случае знаки величин q_0'' и q_1'' одинаковы.

е. Излучение поперечного электрического диполя

В предыдущих разделах рассматривалось излучение линейного магнитного тока, помещенного в полупространство, заполненное анизотропной плазмой. Благодаря симметрии, присущей такому источнику возбуждения, задача нахождения электромагнитного поля сводилась к одной скалярной граничной задаче и для математического представления полей было достаточно лишь E -волн. Поскольку плазма, вообще говоря, по-разному влияет на распространение E - и H -волн, что связано с различием двух поверхностей показателя преломления (фиг. 104), полезно рассмотреть пример, в котором необходимо учитывать оба типа волн [13]. Сюда относится задача об излучении поперечно направленного диполя. В этой задаче проявятся и трехмерные эффекты, отсутствовавшие в случае возбуждения линейным источником.

Условия задачи представлены на фиг. 133, где источником служит электрический диполь, ориентированный вдоль оси y :

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{y}_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{r}' \equiv (x', y', z') = (0, 0, z'), \quad z' < 0. \quad (68)$$

Поскольку $x=0$, мы имеем $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = y$. Полное магнитное поле в плоскости $x=0$ равно $H = H' + H''$.

Для облегчения асимптотической оценки интеграла (71) удобно отделить точки наблюдения, лежащие на оси z ($\rho=0$), от точек, удаленных на большое расстояние от оси. Для первых на основе соотношения

$$\frac{d}{d\rho} J_1(\beta\rho) \Big|_{\rho=0} = \frac{\beta}{2} \quad (73)$$

получаем выражение

$$H' = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\kappa'_1}{\kappa'_1 + \kappa'_2} \beta e^{i(\kappa'_2 z + \kappa'_1 |z'|)} d\beta, \quad \rho=0, \quad (74)$$

а для вторых более удобным оказывается интегральное представление по бесконечному интервалу [гл. 3, § 2, формула (68) и далее]:

$$H' = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{-\infty}^\infty \frac{\kappa'_1}{\kappa'_1 + \kappa'_2} H_1^{(1)}(\beta\rho) e^{i(\kappa'_2 z + \kappa'_1 |z'|)} d\beta. \quad (75)$$

Здесь путь интегрирования проходит в верхней полуплоскости комплексной переменной β для обхода точки ветвления $\beta=0$. Асимптотическая оценка интеграла для произвольных значений ρ приведена в работе [14].

Асимптотическая оценка интеграла (75) проводится обычным способом с заменой функции Ханкеля асимптотической формулой для больших значений аргумента [гл. 5, § 3, формула (136)] и выбором пути интегрирования, обходящего точку $\beta=0$. В результате подынтегральное выражение оказывается идентичным с подынтегральным выражением в формуле (51), если не считать различий в определении амплитудной функции $F(\beta)$, и, значит, расположение седловых точек такое же, как в п. «д», при условии что переменная v отождествляется с радиальной переменной ρ . Геометрическая трактовка вклада седловых точек приводит к схеме хода лучей, представленной на фиг. 131, но измененной так, что $\alpha=0$, причем точки наблюдения лежат в области $v>0$, поскольку радиальная переменная ρ всегда положительна. Вследствие симметрии лучей относительно оси $\rho=0$ каустика на фиг. 131 представляет собой поверхность вращения и точка возврата, являющаяся в двумерной задаче линией, превращается действительно в точку. Замечая, что угол наклона преломленного луча, прошедшего через точку наблюдения с $\rho>0$ (т. е. $v>0$ на фиг. 131), есть ϕ_0 , и вспоминая формулу, которой определяется седловая точка β_s ($\beta_s = k_0 \sin \phi_0$), нетрудно убедиться, что контур интегрирования для интеграла

(75) можно деформировать в путь наиболее быстрого спуска с различных седловых точек без пересечения каких-либо точек ветвления. Поэтому асимптотическая оценка вклада E -волн в поле дает формулу, аналогичную формулам (57) и (58) для точек наблюдения, лежащих вдали от каустики, и формуле (59) для точек наблюдения на самой каустике или вблизи от нее. Поскольку приведенная выше асимптотическая формула для функции Ханкеля содержит множитель $\rho^{-1/2}$, трехмерное поле убывает как (расстояние) $^{-1}$ в отличие от зависимости вида (расстояние) $^{-1/2}$ для двумерных полей, возбуждаемых линейными источниками.

В предшествующем рассмотрении, справедливом для точек наблюдения, расположенных вдали от оси $\rho=0$, седловые точки, дающие вклад в интеграл, не были расположены вблизи точки $\beta=0$ на комплексной плоскости β . Если же $\rho=0$, то подынтегральное выражение имеет седловые точки

$$\beta_1 = k_0 \left(\frac{1-b^2}{1+b^2/|\varepsilon|} \right)^{1/2}, \quad \beta_2 = 0, \quad b = \frac{z|\varepsilon|}{|z'|}, \quad (76)$$

как это следует из формулы (56) при $\alpha=0$. Асимптотическая оценка вклада в поле H'_1 седловой точки β_1 при $0 < z < \hat{z}$, где $\hat{z} = |z'|/|\varepsilon|$ — координата точки возврата, производится так же, как и в двумерной задаче, и дает следующий результат:

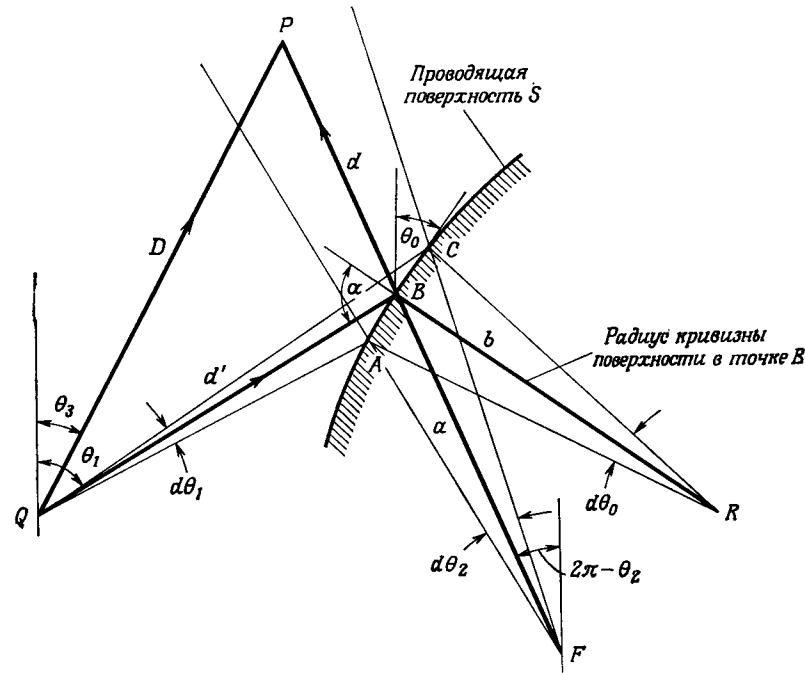
$$H'_1 \approx \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{\psi''(\beta_1)}} \frac{\beta_1 \kappa'_1(\beta_1)}{\kappa'_1(\beta_1) + \kappa'_2(\beta_1)} e^{i\psi(\beta_1) - i\pi/4}, \quad \psi(\beta) = \kappa'_2 z + \kappa'_1 |z'|, \quad (77)$$

т. е. поле убывает как (расстояние) $^{-1/2}$. Такое поведение поля объясняется тем, что в точки на оси симметрии преломленные лучи попадают со всех углов в интервале $0 < \varphi \leq 2\pi$, так что ось z представляет собой каустику для системы преломленных лучей. Итак, на оси структуры имеет место усиление поля, которое не столь очевидно для точек, удаленных от оси.

Седловая точка $\beta_2=0$ соответствует лучу, проходящему вдоль оси z , и дает обычный вклад в поле, на котором не сказывается описанная выше фокусировка. Поэтому данная часть поля убывает в соответствии с обычным законом обратной пропорциональности расстоянию. При асимптотической оценке интеграла (74) необходимо учитывать обращение в нуль амплитудной функции $g(\beta) = \beta \kappa'_1 [\kappa'_1 + \kappa'_2]^{-1}$ в точке $\beta=0$. При использовании метода, изложенного в гл. 4, § 2, п. «б», в случае полубесконечного интервала $0 \leq \beta < \infty$ седловая точка $\beta=0$ на основании соотношения $\psi(\beta) = \psi(0) + is^2$ преобразуется в седловую точку $s=0$ и амплитудная функция $G(s) = g(\beta) d\beta/ds$ разлагается в степенной ряд в окрестности точки

где $\epsilon = y_0 y_0 \epsilon_0 + z_0 z_0 \epsilon_0 \epsilon$, $N(\theta) = \sqrt{\cos^2 \theta + \epsilon \sin^2 \theta}$, $m = \partial \theta_2 / \partial \theta_1$, $n = \partial \theta_2 / \partial \theta_0$; последние величины можно вычислить на основании закона отражения [§ 5, формула (96) при $\phi \rightarrow \theta + \alpha$, $\theta_0 = \pi/2 - \alpha$].

Покажите, что при $\epsilon = 1$ эти выражения переходят в решение задачи 30 из гл. 1 для цилиндрической поверхности в изотропной среде, а при $b \rightarrow \infty$ — в решение для плоскости (§ 4, п. «в»).



Фиг. 134. Искривленный рассеиватель в анизотропном диэлектрике.

6. Взяв оптические пути L_{12} и L_{23} от источника в точке 1 до точки наблюдения 3 вдоль падающего и отраженного лучей, проходящих через точку 2 на плоской границе раздела, покажите, что закон отражения (96) из § 5 можно вывести на основании принципа Ферма

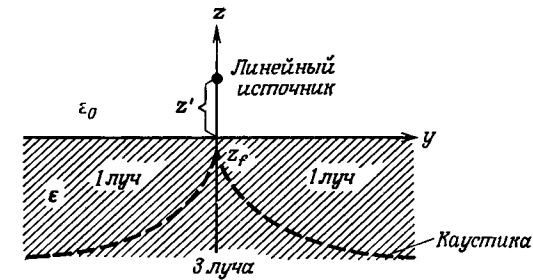
$$\delta(L_{12} + L_{23}) = 0, \quad L_{ab} = \int_a^b N ds, \quad (2)$$

требующего, чтобы длина оптического пути была экстремальна. Здесь через δ обозначена вариационная производная, а через N — лучевой показатель преломления.

7. Однородная волноводная область ограничена в поперечном направлении идеально проводящей поверхностью и заполнена анизотропным диэлектриком, для которого $\epsilon_t = \text{const}$, а $\epsilon_z(\rho, z)$ — произвольная функция. Магнитная проницаемость среды скаляр ($\mu_t = \mu_z = \mu$) и однородна по всей области.

а. Покажите, что H -волны в этой области могут существовать и распространяться, как в изотропной однородной среде с волновым числом $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon_t}$.

б. Покажите, что E -волны также существуют, и сформулируйте соответствующую краевую задачу.



Фиг. 135. Каустика в случае, когда источник расположен вне полупространства, заполненного плазмой ($|z_f| = z' | \epsilon |$).

8. Линейный магнитный ток расположен в свободном полупространстве $z > 0$, а полупространство $z < 0$ заполнено одноосной анизотропной плазмой с тензором диэлектрической проницаемости $\epsilon = y_0 y_0 \epsilon_0 + z_0 z_0 \epsilon_0 \epsilon$ (фиг. 135).

а. Покажите, что при $\epsilon_z < 0$ система преломленных лучей образует каустическую, уравнение которой имеет вид

$$\left| \frac{z \sqrt{|\epsilon|}}{z'} \right|^{2/3} - \left| \frac{y \sqrt{1+|\epsilon|}}{z' |\epsilon|} \right|^{2/3} = |\epsilon|.$$

б. Найдите асимптотическое поведение поля (при больших k_0) в полупространстве, заполненном плазмой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Born M., E. Wolf, Principles of Optics, Pergamon Press, New York, 1959, Ch. 14 (имеется перевод: Борн М., Вольф Э., Основы оптики, «Наука», 1970, гл. 14).
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.
3. Budden K. G., Radio Waves in the Ionosphere, Cambridge University Press, Cambridge (England), 1961.
4. Гинзбург В. Л., Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.

ка, в которых переменные электромагнитных и неэлектромагнитных полей равносильны, то многие из таких трудностей отпадают. Тем не менее метод приведенных уравнений часто встречается в литературе, и мы в дальнейшем будем использовать оба подхода. В некоторых случаях, например при анализе волноводных волн в холодной магнитоплазме без пространственной дисперсии, метод приведенных уравнений вполне удовлетворителен и не наталкивается на упомянутые выше затруднения.

При вычислении однородного линейного поля методом волноводных волн (гл. 1, § 4) полное поле представляется в виде суперпозиции собственных волн $\Psi_\alpha \exp(i\kappa_\alpha z)$. Здесь z — координата вдоль волноводной оси (оси симметрии), κ_α — собственное значение (волновое число), а Ψ_α — собственный вектор поля, который зависит от пространственной переменной ρ , перпендикулярной оси z , и от времени t . В явном виде полное поле (в гочках, не содержащих источников) представляется выражением

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(0) \Psi_{\alpha}(\rho, t) e^{i\kappa_{\alpha} z} = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(z) \Psi_{\alpha}(\rho, t), \quad (2)$$

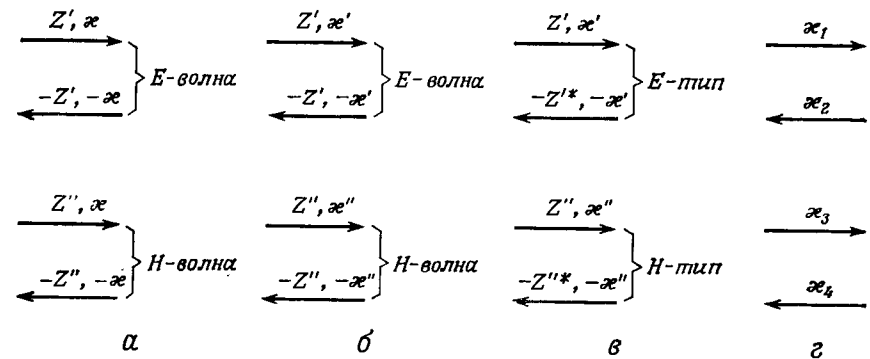
где $a_{\alpha}(z)$ — амплитуда собственной волны с номером α в точке z . Если рассматривать гармонические колебания, то в случае неограниченного поперечного сечения $\Psi_{\alpha}(\rho, t) = \Psi_{\alpha} \exp[i(\mathbf{k}_t \cdot \rho - \omega t)]$, а в случае ограниченного $\Psi_{\alpha}(\rho, t) = \Psi_{\alpha}(\rho) \exp(-i\omega t)$; в том и другом случае, если функции Ψ_{α} и свойства их ортогональности известны, то несложно определить амплитудные коэффициенты $a_{\alpha}(z)$, исходя из значения полного поля Ψ в какой-либо плоскости отсчета z . В следующих параграфах будут приведены необходимые сведения о собственных функциях Ψ_{α} и волновых числах κ_{α} для анизотропных (§ 2) и гиротропных (§ 2 и 3) сред.

Различия в характере распространения волн в изотропных и анизотропных областях обнаруживаются при сопоставлении поведения собственных волн с амплитудами $a_{\alpha}(z)$ в эквивалентных линиях передачи для таких сред. В обоих случаях, если среда однородна в направлении оси z , зависимость a_{α} от z в точках, не содержащих источников, определяется уравнением

$$\frac{d}{dz} a_{\alpha} = i\kappa_{\alpha} a_{\alpha}. \quad (3)$$

Только для областей, зеркально-симметричных относительно оси z , в которых для каждой волны a_{α} существует отраженная волна с соответствующей симметрией поля и постоянной распространения $\kappa_{-\alpha} = -\kappa_{\alpha}$, можно ввести эквивалентную схему в виде обычной линии передачи для расчета амплитуд напряжения и тока, как это было сделано для изотропных и одноосных

областей. Как отмечалось в гл. 7, § 1, при описании распространения в изотропных (неограниченных) областях с помощью волноводных волн вводится базис \mathbf{k}_t , ω для собственных волн с зависимостью $\exp[i(\mathbf{k}_t \cdot \rho - \omega t)]$, что позволяет свести общую задачу вычисления поля к двум независимым задачам анализа E - и H -волн в линии передачи с одинаковыми постоянными распространения $\pm \kappa'_{\alpha} = \pm \kappa''_{\alpha} = \pm \kappa_{\alpha}$, но с разными характеристическими импедансами $\pm Z'_{\alpha} \neq \pm Z''_{\alpha}$. В одноосной области с направлением распространения, выбранным вдоль оси (т. е. с век-



Фиг. 136. Характеристики эквивалентных линий передачи для неограниченных однородных сред (направление распространения совпадает с направлением симметрии, если оно есть).

а — изотропная среда (линия передачи обычного типа); б — одноосная среда (линия передачи обычного типа); в — гиротропная среда (линия передачи необычного типа); з — общий случай анизотропной среды.

тором \mathbf{b}_0 , параллельным вектору \mathbf{z}_0), задачу поля также можно свести (гл. 7, § 2) к обычным задачам анализа E - и H -волн в линии передачи, но с параметрами $\pm \kappa'_{\alpha} \neq \pm \kappa''_{\alpha}$ и $\pm Z'_{\alpha} \neq \pm Z''_{\alpha}$, характеризующими прямую и отраженную волны. В гиротропных же областях (§ 2, п. «з») и вообще в любых областях, где могут быть волны с $\pm \kappa_{\alpha}$, метод эквивалентных схем дает результаты, не совсем соответствующие обычным представлениям о линии передачи. Для гиротропной области с распространением вдоль гиротропной оси получаются прямые и отраженные волны $\pm \kappa'_{\alpha} \neq \pm \kappa''_{\alpha}$. Более того, соответствующие характеристические импедансы различаются не только по знаку, а и по величине, и мы имеем Z'_{α} и $-Z'_{\alpha}$; кроме того, мы имеем Z''_{α} и $-Z''^{*}_{\alpha}$, причем величины с двумя штрихами отличаются от величин с одним штрихом. Правда, для гиротропной области с направлением распространения, перпендикулярным гиротропной оси (§ 4, п. «б»), волновые числа прямых и отраженных волн одинаковы

где $\Psi_\alpha(\rho)$ — собственные функции, а κ_α — собственные значения и $\mathbf{r} = \rho + z\mathbf{z}_0$. Наличие множителя $\exp(i\kappa_\alpha z)$ означает, что свойства среды не зависят от z ; впоследствии это ограничение будет снято. Как и в гл. 1, § 4, подстановка (4а) в уравнение (1а) в отсутствие источников приводит к уравнению для собственных значений

$$K\Psi_\alpha = \kappa_\alpha \Gamma\Psi_\alpha \quad (4б)$$

с тензорным импедансным условием на поперечной границе s (если она существует) вида

$$\mathbf{v} \times \mathbf{E}_\alpha = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{H}_\alpha \text{ на } s \quad (4в)$$

или, в базисе $\mathbf{s}_0, \mathbf{z}_0$,

$$\begin{aligned} -\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{E}_\alpha &= \mathcal{L}_{zs} \mathbf{H}_\alpha \cdot \mathbf{s}_0 + \mathcal{L}_{zz} \mathbf{H}_\alpha \cdot \mathbf{z}_0, \\ \mathbf{z}_0 \cdot \mathbf{E}_\alpha &= \mathcal{L}_{ss} \mathbf{H}_\alpha \cdot \mathbf{s}_0 + \mathcal{L}_{sz} \mathbf{H}_\alpha \cdot \mathbf{z}_0, \end{aligned} \quad (4г)$$

где \mathbf{s}_0 — тангенциальный, а \mathbf{v} — нормальный единичные векторы, причем они связаны соотношением $\mathbf{v} \times \mathbf{z}_0 = \mathbf{s}_0$. Поперечная зависимость электромагнитного поля позволяет выразить z -компоненты полей собственных волн через поперечные компоненты. Если разложить поля собственных волн следующим образом:

$$\mathbf{E}_\alpha = \mathbf{E}_{t\alpha} + E_{z\alpha} \mathbf{z}_0, \quad \mathbf{H}_\alpha = \mathbf{H}_{t\alpha} + H_{z\alpha} \mathbf{z}_0, \quad (5)$$

и исключить продольные z -компоненты, пользуясь соотношениями [уравнение (3а)]

$$\begin{aligned} -i\omega\mu_z H_{z\alpha} - i\omega\bar{\mu}_{zt} \cdot \mathbf{H}_{t\alpha} &= \nabla_t \cdot (\mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}_{t\alpha}), \\ -i\omega\epsilon_z E_{z\alpha} - i\omega\bar{\epsilon}_{zt} \cdot \mathbf{E}_{t\alpha} &= \nabla_t \cdot (\mathbf{H}_{t\alpha} \times \mathbf{z}_0), \end{aligned} \quad (5а)$$

то уравнения для собственных значений (4) будут только содержать поперечные компоненты (гл. 2, § 2, п. «а»):

$$\begin{aligned} \omega \left[\epsilon_t - \frac{\bar{\epsilon}_{tz}\bar{\epsilon}_{zt}}{\epsilon_z} - \frac{1}{\omega^2} \mathbf{z}_0 \times \nabla_t \frac{1}{\mu_z} \nabla_t \times \mathbf{z}_0 \right] \cdot \mathbf{E}_{t\alpha} + \\ + i \left[\frac{\bar{\epsilon}_{tz}}{\epsilon_z} \mathbf{z}_0 \times \nabla_t - \mathbf{z}_0 \times \nabla_t \frac{\bar{\mu}_{zt}}{\mu_z} \right] \cdot \mathbf{H}_{t\alpha} &= \kappa_\alpha \mathbf{H}_{t\alpha} \times \mathbf{z}_0, \\ \omega \left[\mu_t - \frac{\bar{\mu}_{tz}\bar{\mu}_{zt}}{\mu_z} - \frac{1}{\omega^2} \mathbf{z}_0 \times \nabla_t \frac{1}{\epsilon_z} \nabla_t \times \mathbf{z}_0 \right] \cdot \mathbf{H}_{t\alpha} - \\ - i \left[\frac{\bar{\mu}_{tz}}{\mu_z} \mathbf{z}_0 \times \nabla_t - \mathbf{z}_0 \times \nabla_t \frac{\bar{\epsilon}_{zt}}{\epsilon_z} \right] \cdot \mathbf{E}_{t\alpha} &= \kappa_\alpha \mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}_{t\alpha}. \end{aligned} \quad (6)$$

Очевидно, что в случае гиротропной среды $\bar{\epsilon}_{zt} = \bar{\epsilon}_{tz} = \bar{\mu}_{zt} = \bar{\mu}_{tz} = 0$ и уравнения (6) существенно упрощаются.

Чтобы вывести соотношения ортогональности для собственных функций Ψ_α , рассмотрим задачу на собственные значения, сопряженную с уравнением (4б),

$$K^+ \Psi_\alpha^+ = \kappa_\alpha^* \Gamma^+ \Psi_\alpha^+, \quad (7а)$$

где сопряженные операторы и собственные функции имеют вид

$$K^+ \rightarrow \begin{bmatrix} \omega\tilde{\epsilon}^* & -i\nabla_t \times \mathbf{1} \\ i\nabla_t \times \mathbf{1} & \omega\tilde{\mu}^* \end{bmatrix}, \quad \Gamma^+ = \Gamma, \quad \Psi_\alpha^+ \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{E}_\alpha^+ \\ \mathbf{H}_\alpha^+ \end{bmatrix} \quad (7б)$$

при условии на границе (если она существует)

$$\mathbf{v} \times \mathbf{E}_\alpha^+ = \tilde{\mathbf{Z}}^* \cdot \mathbf{H}_\alpha^+. \quad (7в)$$

Сопряженные поля \mathbf{E}_α^+ и \mathbf{H}_α^+ удовлетворяют уравнениям в отсутствие источников в транспонированно-сопряженной (эрмитово-сопряженной) среде с параметрами $\tilde{\epsilon}^*$ и $\tilde{\mu}^*$, полученной из первоначальной среды путем следующей замены (тильдой обозначены транспонированные, а звездочкой — комплексносопряженные величины):

$$\begin{aligned} \epsilon_t \rightarrow \tilde{\epsilon}_t^*, \quad \bar{\epsilon}_{tz} \leftrightarrow \bar{\epsilon}_{zt}^*, \quad \mu_t \rightarrow \tilde{\mu}_t^*, \\ \bar{\mu}_{tz} \leftrightarrow \bar{\mu}_{zt}^*, \quad \mathbf{Z} \rightarrow \tilde{\mathbf{Z}}^*. \end{aligned} \quad (7г)$$

Обычным способом (гл. 1, § 4) из уравнений для собственных значений (4) и (7) выводится соотношение ортогональности:

$$(\Psi_\alpha^+, \Gamma\Psi_\beta) = 2N_\alpha \delta_{\alpha\beta} = (\bar{\Psi}_\alpha^+, \Gamma\bar{\Psi}_\beta), \quad (8а)$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, который равен единице при $\kappa_\alpha = \kappa_\beta$ и нулю при $\kappa_\alpha \neq \kappa_\beta$, N_α — константа нормировки собственной функции с индексом α , а $\bar{\Psi}_\alpha$ и $\bar{\Psi}_\alpha^+$ — поперечные собственные векторы с компонентами $(\mathbf{E}_{t\alpha}, \mathbf{H}_{t\alpha})$ и $(\mathbf{E}_{t\alpha}^+, \mathbf{H}_{t\alpha}^+)$. В развернутом виде соотношение ортогональности (8а) записывается следующим образом:

$$\iint_S [\mathbf{E}_{t\alpha}^+ \cdot \mathbf{H}_{t\beta} \times \mathbf{z}_0 + \mathbf{H}_{t\alpha}^+ \cdot \mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}_{t\beta}] dS = 2N_\alpha \delta_{\alpha\beta}, \quad (8б)$$

где интегралы берутся по поперечному сечению S , перпендикулярному оси z . Как подчеркивалось в § 1, в общем случае в волноводе не существует волновых решений с собственными значениями $+\kappa_\alpha$ и $-\kappa_\alpha$, а потому оказывается невозможным рассматривать стоячие волны в линии передачи, возникающие в результате интерференции волн с $+\kappa_\alpha$ и $-\kappa_\alpha$. Это возможно только в случае областей с отражательной симметрией.

Таким образом, из уравнения (8а) вытекают соотношения ортогональности

$$\begin{aligned}(\Psi_\alpha^+, \Gamma\Psi_\beta) &= 0, \text{ если } \kappa_\alpha \neq \kappa_\beta, \\ (\Psi_\alpha^+, \Gamma R\Psi_\beta) &= 0 = (R\Psi_\alpha^+, \Gamma\Psi_\beta), \text{ если } \kappa_\alpha \neq -\kappa_\beta,\end{aligned}$$

а также

$$(\Psi_\alpha^+, \Gamma(\Psi_\beta + R\Psi_\beta)) = 0 = (\Psi_\alpha^+ + R\Psi_\alpha^+, \Gamma\Psi_\beta), \text{ если } \kappa_\alpha^2 \neq \kappa_\beta^2, \quad (14a)$$

или, в записи через компоненты,

$$\iint_S \mathbf{H}_{t\alpha}^* \cdot \mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}_{t\beta} dS = 0 = \iint_S \mathbf{E}_{t\alpha}^{**} \cdot \mathbf{H}_{t\beta} \times \mathbf{z}_0 dS, \text{ если } \kappa_\alpha^2 \neq \kappa_\beta^2. \quad (14b)$$

Отметим, что в соотношениях ортогональности (14) различия между волнами с $\pm\kappa$ не играют роли.

В эрмитовом случае, когда нет потерь, в силу равенств (10а) уравнения (14б) приобретают вид

$$\iint_S \mathbf{H}_{t\alpha}^* \cdot \mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}_{t\beta} dS = 0, \text{ если } \kappa_\alpha^2 \neq \kappa_\beta^2. \quad (15)$$

В симметричном случае при наличии потерь, в силу равенств (12а), уравнения (14б) приобретают вид

$$\iint_S \mathbf{H}_{t\alpha} \cdot \mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}_{t\beta} dS = 0, \text{ если } \kappa_\alpha^2 \neq \kappa_\beta^2. \quad (16)$$

д. Изотропные области

В случае изотропной среды и изотропной границы волновода (если она имеется)

$$\epsilon = 1\epsilon, \quad \mu = 1\mu, \quad \mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\mathbf{z}_0\mathbf{z}_0 + \mathbf{s}_0\mathbf{s}_0), \quad (17)$$

где ϵ , μ и \mathcal{Z} — скаляры, а \mathbf{s} — вектор, который определяется соотношением (4г). Если потери отсутствуют, то ϵ , μ и $i\mathcal{Z}$ — действительные величины и справедливо соотношение ортогональности (15). При наличии же потерь указанные параметры становятся комплексными, а потому применимо уравнение (16).

е. Области с разложением на E- и H-волны

У полного поля, соответствующего поперечным собственным функциям $\mathbf{E}_{t\alpha}$ и $\mathbf{H}_{t\alpha}$, вообще говоря, имеются обе продольные компоненты $E_{z\alpha}$ и $H_{z\alpha}$. Чтобы выяснить, можно ли разложить такое собственное поле на E- и H-волны относительно направления z , нужно посмотреть, выполняются ли уравнения (6) в пер-

вом случае при $H_{z\alpha} = 0$, а во втором — при $E_{z\alpha} = 0$. Продольные компоненты поля выражаются через $\mathbf{E}_{t\alpha}$ и $\mathbf{H}_{t\alpha}$ по формулам (5а); в общем случае эти уравнения в сочетании с уравнениями (6) не позволяют особенно надеяться на указанное упрощение. В случае же волновода с изотропным заполнением уравнения (6) приобретают вид

$$\kappa_\alpha \mathbf{E}_{t\alpha} = \omega \left[\mathbf{1}_t \mu + \frac{1}{\omega^2} \nabla_t \frac{1}{\epsilon} \nabla_t \right] \cdot (\mathbf{H}_{t\alpha} \times \mathbf{z}_0), \quad (18a)$$

$$\kappa_\alpha \mathbf{H}_{t\alpha} = \omega \left[\mathbf{1}_t \epsilon + \frac{1}{\omega^2} \nabla_t \frac{1}{\mu} \nabla_t \right] \cdot (\mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}_{t\alpha}), \quad (18b)$$

причем на границе s изотропного волновода, которая характеризуется импедансом \mathcal{Z} [формула (17)] и единичным вектором нормали \mathbf{v} , выполняется условие

$$\mathbf{v} \times \mathbf{E}_{t\alpha} = \mathcal{Z} \mathbf{H}_{t\alpha} \text{ на } s. \quad (18b)$$

Для E-волны из уравнения (5а) следует равенство $\nabla_t \cdot (\mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}_{t\alpha}) = 0$, а поэтому из соотношения (18б) получаем

$$\kappa_\alpha \mathbf{H}_{t\alpha} = \omega \epsilon \mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}_{t\alpha}. \quad (19a)$$

Для H-волны имеем $\nabla_t \cdot (\mathbf{H}_{t\alpha} \times \mathbf{z}_0) = 0$, так что

$$\kappa_\alpha \mathbf{E}_{t\alpha} = \omega \mu \mathbf{H}_{t\alpha} \times \mathbf{z}_0. \quad (19b)$$

Таким образом, требование $E_{z\alpha} = 0$ или $H_{z\alpha} = 0$ приводит к взаимной перпендикулярности векторов $\mathbf{E}_{t\alpha}$ и $\mathbf{H}_{t\alpha}$.

Влияние граничного импеданса и неоднородности среды на возможность разложения поля собственных волн на E- и H-волны удобно рассмотреть по отдельности. Импедансные граничные условия (18б) означают, что

$$-\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{E}_{t\alpha} = \mathcal{Z} H_{z\alpha}, \quad \mathcal{Z} \mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{H}_{t\alpha} = E_{z\alpha} \text{ на } s, \quad (20)$$

т. е. с тангенциальной компонентой вектора $\mathbf{H}_{t\alpha}$ на границе связана продольная компонента $E_{z\alpha}$, а с тангенциальной компонентой вектора $\mathbf{E}_{t\alpha}$ на границе связана продольная компонента $H_{z\alpha}$. Таким образом, даже если поле E-волны может существовать в волноводной среде, его поперечная тангенциальная электрическая компонента на границе зависит от продольного магнитного поля, а это несовместимо с определением E-волны при $\mathcal{Z} \neq 0$ и $\mathcal{Z} \neq \infty$. То же самое относится к H-волнам. Следовательно, волновод, ограниченный стенками с конечным импедансом, в общем случае не допускает разложения полей на E- и H-волны, хотя такое разложение возможно при определенных видах симметрии. Например, при возбуждении E-волны, для которой поперечная компонента электрического поля, параллельная границе, равна нулю, H-волна не возбуждается.

тору источника. Для определения амплитуд $a_\alpha(z)$ собственных волн прежде всего примем во внимание, что из соотношения ортогональности (86) и из равенства (266) следует выражение $a_\alpha = (2N_\alpha)^{-1}(\Psi_\alpha^+, \Gamma\Psi)$, в которое не входит θ_z . Преобразование уравнений поля (1а) и (2а) путем умножения на сопряженную собственную функцию $\Psi_\alpha^+(\rho)$ и интегрирования по поперечному сечению волновода дает уравнение, которым определяется величина $a_\alpha(z)$ [напомним, что в соответствии с уравнением (7а) мы имеем $(\Psi_\alpha^+, K\Psi) = (K^+\Psi_\alpha^+, \Psi) = (\kappa_\alpha^* \Gamma^+ \Psi_\alpha^+, \Psi) = 2N_\alpha \kappa_\alpha a_\alpha$]:

$$\left(\frac{d}{dz} - i\kappa_\alpha\right) a_\alpha(z) = -b_\alpha(z), \quad (27)$$

где b_α — амплитуда источника¹⁾, которая дается следующими выражениями:

$$b_\alpha = (2N_\alpha)^{-1}(\Psi_\alpha^+, \Phi) = \quad (28а)$$

$$= (2N_\alpha)^{-1} \iint [\mathbf{J}_t \cdot \mathbf{E}_\alpha^{+*} + J_z E_{z\alpha}^{+*} + \mathbf{M}_t \cdot \mathbf{H}_\alpha^{+*} + M_z H_{z\alpha}^{+*}] dS. \quad (28б)$$

Интегрируя второй и четвертый члены выражения (28б) по частям (в предположении, что J_z обращается в нуль на стенках волновода), получаем

$$b_\alpha = (2N_\alpha)^{-1} \iint [\mathbf{J}_{te} \cdot \mathbf{E}_\alpha^{+*} + \mathbf{M}_{te} \cdot \mathbf{H}_\alpha^{+*}] dS, \quad (29а)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{te} &= \mathbf{J}_t - \frac{1}{i\omega} \nabla_t \times \frac{\mathbf{M}_z}{\mu_z} - \frac{\bar{\mathbf{e}}_{zt} J_z}{\epsilon_z}, \\ \mathbf{M}_{te} &= \mathbf{M}_t + \frac{1}{i\omega} \nabla_t \times \frac{\mathbf{J}_z}{\epsilon_z} - \frac{\bar{\mu}_{zt} M_z}{\mu_z}. \end{aligned} \quad (29б)$$

Здесь \mathbf{J}_{te} и \mathbf{M}_{te} — эквивалентные плотности поперечных токов, соответствующие описанию поля только его поперечными компонентами.

Наряду с абстрактным анализом на основе уравнений (26) и (27) можно получить альтернативное представление поля, исключив его продольные компоненты из выражений (1) и (2), что позволяет вывести уравнения для поперечных компонент поля в явном виде (гл. 2, § 2, п. «а»). При этом получаются уравнения для поперечного поля, сходные с уравнениями (6), но в них величина $i\kappa_\alpha$ заменена символом d/dz и в них входят эквивалентные поперечные токи \mathbf{J}_{te} и \mathbf{M}_{te} [формула (29б); относительно частного случая однородных изотропных областей, огра-

¹⁾ В случае произвольных источников анализ можно упростить, если перейти к функциям Грина. При этом телеграфные уравнения принимают форму уравнений (15) из гл. 1, § 4.

женных непоглощающими стенками, см. гл. 2, § 2, формулы (4) и (5)]. Разложение поперечных полей по собственным волнам имеет теперь следующий вид:

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}) = \sum_\alpha a_\alpha(z) \mathbf{E}_{t\alpha}(\rho), \quad \mathbf{H}_t(\mathbf{r}) = \sum_\alpha a_\alpha(z) \mathbf{H}_{t\alpha}(\rho). \quad (30)$$

Подстановка этих выражений в уравнения поперечных полей с учетом уравнений (6) и соотношения ортогональности (10б) дает приведенное выше уравнение линии передачи (27) для амплитуд собственных волн $a_\alpha(z)$. Поскольку в общем случае нет решений, допускающих наличие κ_α и $-\kappa_\alpha$ в одной и той же области, линии передачи, эквивалентные уравнению (27), оказываются однонаправленными, т. е. волны в них распространяются лишь в одном направлении. В связи с этим метод эквивалентной линии передачи обычного типа не представляет особой ценности при такого рода общей формулировке.

Как видно из уравнения (26б), для полного представления полей в области, содержащей источники, необходимо указать в каждой точке \mathbf{r} не только полные поля собственных волн $\mathbf{E}_\alpha = \mathbf{E}_{t\alpha} = E_{z\alpha} \mathbf{z}_0$ и $\mathbf{H}_\alpha = \mathbf{H}_{t\alpha} + H_{z\alpha} \mathbf{z}_0$, но и продольные токи источника J_z и M_z . В таком отсутствии полноты системы векторов для полных полей нет ничего неожиданного, поскольку задача на собственные значения относится только к поперечному пространству.

3. Эквивалентная линия передачи необычного типа

Излучение энергии источником в неограниченной однородной стационарной среде можно представить как возбуждение волноводных собственных волн, уносящих энергию от источника. В полный набор таких собственных волн (гл. 1, § 4) входят волны, переносящие энергию не только от источника, но и к источнику, однако в неограниченной среде возможно возбуждение волн лишь первого типа. Граничная поверхность рассеивает волны излучения; описание этого процесса рассеяния требует в общем случае применения сложных аналитических методов теории дифракции. Но если граничная поверхность и среда достаточно просты, то процесс рассеяния удается рассчитать сравнительно простым методом эквивалентной линии передачи. Такой метод был рассмотрен в гл. 2, § 4, для простого случая изотропной среды. Здесь же мы изложим аналогичный метод, основанный на линии передачи необычного типа для некоторых выбранных направлений распространения в соответствующих гиротропных средах, и с этой целью введем более общую форму теории линий передачи.

В однородной изотропной или анизотропной эрмитовой среде соотношение (36) между полными полями \mathbf{E} и \mathbf{H} и амплитудой волны $a_\alpha(\mathbf{k}_t, \omega; z)$ сохраняет силу в любой плоскости z . Рассмотрим теперь связь, обусловленную наличием в точке z плоской граничной поверхности, перпендикулярной направлению распространения z_0 . Если плоская граница пространственно однородна и не изменяется во времени, то на этой граничной поверхности волна с амплитудой $a_\alpha(\mathbf{k}_t, \omega; z)$ будет связана только с собственными волнами, соответствующими тем же \mathbf{k}_t, ω . Как отмечалось выше, имеются четыре собственные волны с данными \mathbf{k}_t, ω . Таким образом, если $\Psi(z) \equiv \Psi(\mathbf{k}_t, \omega; z)$ есть (\mathbf{k}_t, ω) -компонента полного поля $\Psi(\mathbf{r}, t)$ на плоскости z , то, опустив аргументы \mathbf{k}_t, ω , получим из выражения (31)

$$\Psi(z) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(z) \Psi_{\alpha}, \quad (38)$$

где в случае приведенного описания электромагнитного поля (в средах без пространственной дисперсии) индексом α различаются четыре возможные волны. Задача состоит в том, чтобы найти соотношение между коэффициентами $a_{\alpha}(z)$, обусловленное наличием плоской границы при некотором значении $z = z_0$.

Мы рассмотрим частный случай эрмитовых сред, которые допускают существование волн с волновыми числами (собственными значениями) $\pm \kappa_{\alpha}$ и поперечными собственными векторами $\mathbf{e}_{\alpha} = \mathbf{e}_{-\alpha}$, $\mathbf{h}_{\alpha} = \mathbf{h}_{-\alpha}$. Это более общий случай, нежели случай среды с отражательной симметрией (п. «г»). При заданных \mathbf{k}_t, ω находим две разные пары волн с волновыми числами¹⁾ $\pm \kappa'_{\alpha}$ и $\pm \kappa''_{\alpha}$. Таким образом, для каждого \mathbf{k}_t, ω поперечные поля $\mathbf{E}_t(z)$, $\mathbf{H}_t(z)$ в точке z на основании формул (32) и (38) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t(z) &= V'_\alpha(z) \mathbf{e}'_{\alpha} + V''_{\alpha}(z) \mathbf{e}''_{\alpha}, \\ \mathbf{H}_t(z) &= I'_\alpha(z) \mathbf{h}'_{\alpha} + I''_{\alpha}(z) \mathbf{h}''_{\alpha}, \end{aligned} \quad (39a)$$

где для волн и с одним и с двумя штрихами величины V_{α} и I_{α} имеют вид

$$\begin{aligned} V_{\alpha}(z) &= Z_{\alpha} a_{\alpha}(z) + Z_{-\alpha} a_{-\alpha}(z), \\ I_{\alpha}(z) &= a_{\alpha}(z) + a_{-\alpha}(z). \end{aligned} \quad (39b)$$

Вообще говоря, между «характеристическими импедансами» Z_{α} и $Z_{-\alpha}$ нет простого соотношения (§ 4, п. «б»), тогда как в обычных линиях передачи $Z_{-\alpha} = -Z_{\alpha}$. Поскольку предполагается, что $\mathbf{e}_{\alpha} = \mathbf{e}_{-\alpha}$, $\mathbf{h}_{\alpha} = \mathbf{h}_{-\alpha}$, из соотношений ортогональности (33) и

¹⁾ Для различия этих волн можно было бы также ввести обозначения $\kappa'_{\alpha} = \kappa_{\alpha}$, $\kappa''_{\alpha} = \kappa_{\beta}$.

нормировки (34) можно вывести дополнительные соотношения ортогональности (в пространстве поляризации):

$$\mathbf{e}_{\beta} \cdot \mathbf{h}_{\alpha}^* \times \mathbf{z}_0 = \delta_{\alpha\beta}, \quad \mathbf{h}_{\beta} \cdot \mathbf{z}_0 \times \mathbf{e}_{\alpha}^* = \delta_{\alpha\beta}, \quad (40)$$

где \mathbf{e}_{α} , \mathbf{h}_{α} — собственные векторы, соответствующие собственным значениям κ_{α}^2 . Отметим (как и в гл. 2, § 2), что поперечными векторными собственными функциями $\mathbf{e}_{\alpha} \exp[i(\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega t)]$, $\mathbf{h}_{\alpha} \exp[i(\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega t)]$ определяется полный набор собственных векторов в пространстве $\boldsymbol{\rho}, t$ и в поперечном векторном (поляризационном) пространстве. Эти векторы, различающиеся значениями κ_{α}^2 , не следует путать с собственными векторами $\Psi_{\alpha} \exp[i(\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega t)]$, собственные значения которых равны κ_{α} . Таким образом, суммирование в разложении по собственным волнам для собственных векторов \mathbf{e}_{α} , \mathbf{h}_{α} (гл. 2 и 3) производится только по положительным индексам α , тогда как в случае собственных векторов Ψ_{α} при суммировании собственных волн учитываются все значения $\pm \alpha$.

На основании формул (36) и (40) можно вывести следующее соотношение между амплитудами «бегущих волн» a_{α} и амплитудами «напряжения» и «тока» V_{α} и I_{α} в точке z :

$$\begin{aligned} a_{\alpha}(z) &= \frac{1}{2N_{\alpha}} [V_{\alpha}(z) + Z_{\alpha}^* I_{\alpha}(z)], \\ a_{-\alpha}(z) &= \frac{1}{2N_{-\alpha}} [V_{\alpha}(z) + Z_{-\alpha}^* I_{\alpha}(z)], \end{aligned} \quad (41)$$

где, поскольку амплитуды напряжения и тока связаны с κ_{α}^2 , разница в индексах $+\alpha$ и $-\alpha$ у этих величин несущественна. В теории линий передачи обычно вводят по направлению возрастания z «коэффициент отражения» (по напряжению) $\Gamma_{\alpha}(z)$ и «концевой импеданс» $Z_{\alpha}(z)$:

$$\Gamma_{\alpha}(z) = \frac{a_{-\alpha}(z) N_{-\alpha}}{a_{\alpha}(z) N_{\alpha}}, \quad Z_{\alpha}(z) = \frac{V_{\alpha}(z)}{I_{\alpha}(z)} \quad (42)$$

для описания связи между волнами с $\pm \alpha$. Тогда из равенств (41) получаем соотношение

$$\Gamma_{\alpha}(z) = \frac{Z_{\alpha}(z) + Z_{-\alpha}^*}{Z_{\alpha}(z) + Z_{\alpha}^*} \quad (43a)$$

и обратное ему

$$Z_{\alpha}(z) = \frac{-Z_{-\alpha}^* + Z_{\alpha}^* \Gamma_{\alpha}(z)}{1 - \Gamma_{\alpha}(z)}. \quad (43b)$$

Соотношения (43) отличаются от соотношений для обычной линии передачи

$$\Gamma_{\alpha}(z) = \frac{Z_{\alpha}(z) - Z_{\alpha}}{Z_{\alpha}(z) + Z_{\alpha}}, \quad \frac{Z_{\alpha}(z)}{Z_{\alpha}} = \frac{1 + \Gamma_{\alpha}(z)}{1 - \Gamma_{\alpha}(z)}, \quad (44)$$

дельны. Мы найдем выражения для стационарных волновых векторов Ψ_α , описывающих волноводные собственные волны в такой среде, и проиллюстрируем их применение к теории излучения гармонических источников. Как отмечалось в § 2, поля излучения можно выразить либо через векторы Ψ «первого порядка», т. е. через все электромагнитные и динамические переменные поля, либо через «приведенные» векторы Ψ , к числу которых относятся только электромагнитные переменные.

Волноводные волны в однородной гиротропной среде, например в бесстолкновительной холодной магнитоплазме, описываются волновыми векторами вида $\Psi_\alpha(\mathbf{r}, t) = \Psi_\alpha \exp[j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$ ¹⁾, где индекс собственной волны α учитывает как поляризационный индекс α , так и постоянные периодичности ω , \mathbf{k}_t , причем $\mathbf{k}_t = \mathbf{k} - z_0 \kappa_\alpha$ — есть поперечное волновое число. В поляризационном пространстве при заданных ω , \mathbf{k}_t векторы Ψ_α удовлетворяют уравнению для собственных значений [§ 2, формула (2)]

$$L\Psi_\alpha = 0 = j(K - \kappa_\alpha \Gamma) \Psi_\alpha, \quad (1a)$$

где K и Γ — эрмитовы операторы, а κ_α — собственное значение. Векторы Ψ_α удовлетворяют соотношению ортогональности [§ 2, формула (8a)]

$$(\Psi_\alpha^+, \Gamma \Psi_\beta) = 2N_\alpha \delta_{\alpha\beta} = (\bar{\Psi}_\alpha^+, \Gamma \bar{\Psi}_\beta). \quad (1б)$$

В случае среды без потерь, как было показано в § 2, п. «б», для сопряженного волнового вектора выполняются соотношения $\Psi_\alpha^+ = \Psi_\alpha$ при $\kappa_\alpha = \kappa_\alpha^*$ и $\Psi_\alpha^+ = \Psi_{\alpha^*}$ при комплексных κ_α . Хотя эти свойства можно априори вывести из общей формы оператора L [формула (1a)], для определения в явном виде различных компонент волнового вектора Ψ_α нужно знать конкретную структуру этого оператора.

Для магнитоплазмы, в которой подвижны только электроны, форма оператора L первого порядка представлена в формуле (68) из гл. 1, § 1, а приведенная форма — в формулах (1) и (2) из § 2; компоненты векторов первого порядка Ψ задаются в виде $\Psi \rightarrow (\mathbf{E}, \mathbf{H}, p, \mathbf{v})$, а компоненты приведенных векторов — в виде $\Psi \rightarrow (\mathbf{E}, \mathbf{H})$. Исключение динамических переменных: электронного давления p и средней скорости \mathbf{v} , характерно для приведенного описания. Если, кроме того, исключить магнитное поле \mathbf{H} из уравнений поля в плазме без источников, то окончательное уравнение для электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ можно записать в форме

$$\mathcal{U} \left(\nabla, \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2)$$

¹⁾ В данном параграфе принята временная зависимость типа $\exp(+j\omega t)$.

Отметим, что тензорный оператор «полной проводимости» \mathcal{U} равен обратной величине электрической компоненты \mathcal{U}_{11} плазменной функции Грина [гл. 1, § 1, формула (57)].

Хотя решение уравнения (2) желательно получить в базисе \mathbf{k}_t, ω , мы будем искать решение в базисе \mathbf{k}, ω , где $\mathbf{k} = \mathbf{k}_t + \kappa_\alpha z_0$. При базисе \mathbf{k}, ω (причем $\nabla = -j\mathbf{k}$ и $\partial/\partial t = j\omega$, гл. 1, § 2) оператор проводимости \mathcal{U} для гиротропной среды с диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной проницаемостью $\mu = \mu_0 \mathbf{1}$ имеет вид

$$\mathcal{U}(\mathbf{k}, \omega) = j\omega\epsilon_0 \left[\epsilon + \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{1})}{k_0^2} \right], \quad k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0, \quad (3a)$$

причем

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \epsilon_1 \mathbf{1}_\perp - j\epsilon_2 \mathbf{b}_0 \times \mathbf{1}_\perp + \epsilon_3 \mathbf{1}_b, \quad (3б)$$

где $\mathbf{1}_b = \mathbf{b}_0 \mathbf{b}_0$ и $\mathbf{1}_\perp = \mathbf{1} - \mathbf{b}_0 \mathbf{b}_0$ — единичные тензоры, продольный и поперечный по отношению к единичному вектору \mathbf{b}_0 , характеризующему направление гиротропной оси [в соотношениях (3) штриховые индексы, используемые в других разделах для обозначения нормировки по отношению к ϵ_0 , для простоты опущены]. В частном случае холодной бесстолкновительной магнитоплазмы

$$\epsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2}, \quad \epsilon_2 = -\frac{\omega_c}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2}, \quad \epsilon_3 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (4)$$

где в соответствии с формулами (20) — (22) из гл. 1, § 5, величины ω_p и ω_c — это плазменная и циклотронная частоты электронов.

Для определения в явном виде собственных значений κ_α и собственных векторов Ψ_α в общем случае удобнее решать приведенное уравнение вида (2), чем первоначальную задачу на собственные значения (1). Как было показано в гл. 1, § 4, и как отмечалось здесь в связи с уравнением (1a), в однородной, не ограниченной в поперечном направлении среде с волноводной осью вдоль оси z_0 существует набор волноводных собственных волн вида $\Psi_\alpha(\mathbf{r}, t) = \Psi_\alpha \exp[j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$, где $\mathbf{k} = \mathbf{k}_t + \kappa_\alpha z_0$. Таким образом, поскольку $\mathbf{E}_\alpha(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_\alpha \exp[j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$, из уравнения (2) получаем

$$\mathcal{U}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}_\alpha = 0 \quad (5a)$$

и, следовательно, поле \mathbf{E}_α собственной волны отлично от нуля при таких значениях $\kappa = \kappa_\alpha$, которые при заданных величинах ω, \mathbf{k}_t удовлетворяют секулярному уравнению

$$\det \mathcal{U}(\mathbf{k}, \omega) = 0. \quad (5б)$$

откуда с помощью уравнения (6) находим соответствующее собственное магнитное поле

$$\mathbf{H} = \frac{k_t}{\omega\mu_0} E_{t''} \mathbf{z}_0 - \frac{E_{t''}}{Z'_\alpha} \mathbf{k}_{t0} + \frac{E_{t''}}{Z'_\alpha} \hat{\mathbf{k}}_{t0}. \quad (12б)$$

Параметры

$$Z'_\alpha = \frac{\omega\mu_0}{\kappa_\alpha} (1 - k_t'^2), \quad Z''_\alpha = \frac{\omega\mu_0}{\kappa_\alpha} \quad (12в)$$

в изотропном случае, когда $\epsilon'_2 = 0$, $\epsilon'_1 = 1$, сводятся к характеристическим импедансам E - и H -волн [гл. 2, § 2, формулы (15в) и (15г)]. Не выписывая компоненты скорости для собственной волны κ_α , которые легко определяются по формулам (6) и (12а), найдем только приведенные волновые векторы Ψ_α :

$$\Psi_\alpha \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{E}_\alpha \\ \mathbf{H}_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_\alpha \mathbf{e}_\alpha + \mathbf{e}_{z\alpha} \\ \mathbf{h}_\alpha + \mathbf{h}_{z\alpha} \end{bmatrix}. \quad (13а)$$

Из уравнений (12) и (8), приравняв $E_{t''}/(\sqrt{2} Z'_\alpha)$ единице, получаем равенства [2]

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \mathbf{e}_\alpha &= \frac{\Delta - k_t'^2}{\Delta} \mathbf{k}_{t0} - j \frac{\delta}{\Delta} \hat{\mathbf{k}}_{t0}, & \sqrt{2} \mathbf{e}_{z\alpha} &= -\frac{k_t}{\omega\epsilon_0\epsilon_3} \mathbf{z}_0, \\ \sqrt{2} \mathbf{h}_\alpha &= j \frac{\Delta + k_t'^2}{\delta} \mathbf{k}_{t0} + \hat{\mathbf{k}}_{t0}, & \sqrt{2} \mathbf{h}_{z\alpha} &= -j \frac{k_t}{\kappa_\alpha} \frac{\Delta + k_t'^2}{\delta} \mathbf{z}_0, \end{aligned} \quad (13б)$$

где $\delta = 2\epsilon'_2/(\epsilon'_1 - 1)$, а импеданс собственной волны в выражении (13а), имеющий вид

$$Z_\alpha = \frac{\omega\mu_0}{\kappa_\alpha} \frac{\Delta(1 - k_t'^2)}{\Delta - k_t'^2} = \frac{\omega\mu_0}{\kappa_\alpha} \frac{\Delta^2 + k_t'^2\Delta}{\delta^2}, \quad (13в)$$

выбран так, чтобы выполнялись условия нормировки (15). Отметим, что при заданных ω и \mathbf{k}_t векторы \mathbf{e}_α и \mathbf{h}_α оказываются фиксированными, а величина Z_α в зависимости от выбора знака перед собственным значением κ_α в выражении (11) может принимать четыре разных значения, которыми определяются разные волновые векторы Ψ_α . Сопряженные собственные векторы \mathbf{e}_{α^*} и \mathbf{h}_{α^*} и сопряженный импеданс собственной волны Z_{α^*} получаются из выражений (13б) и (13в) при замене

$$\Delta \rightarrow \Delta^* \text{ и } \kappa_\alpha \rightarrow \kappa_{\alpha^*}. \quad (13г)$$

Заметим, что $Z_{\alpha^*} = Z_\alpha$, но $\mathbf{e}_\alpha \neq \mathbf{e}_{\alpha^*}$ и $\mathbf{h}_\alpha \neq \mathbf{h}_{\alpha^*}$; таким образом, справедливы выражения для обычной линии передачи, но в формулу для мощности входят амплитуды как первоначальной, так и сопряженной собственных волн (п. «з»).

Поперечные собственные функции [формула (13а)] с таким же успехом можно вывести из уравнений поперечного поля [§ 2, формулы (25)], которые можно записать в виде ($\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_3$)

$$\begin{aligned} \kappa_\alpha Z_\alpha \mathbf{e}_\alpha &= \omega\mu_0 \left(\mathbf{1}_t + \frac{\nabla_t \nabla_t}{k_0^2 \epsilon_z} \right) \cdot \mathbf{h}_\alpha \times \mathbf{z}_0, \\ \kappa_\alpha Y_\alpha \mathbf{h}_\alpha &= \omega\epsilon_0 \left(\mathbf{e}_t + \frac{\nabla_t \nabla_t}{k_0^2} \right) \cdot \mathbf{z}_0 \times \mathbf{e}_\alpha, \end{aligned} \quad (14)$$

где $Y_\alpha = 1/Z_\alpha$, $\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_1 \mathbf{1}_t - j\epsilon_2 \mathbf{z}_0 \times \mathbf{1}_t$, а индекс α у величин \mathbf{e}_α и \mathbf{h}_α означает, что в них включен множитель $\exp[j(\omega t - \mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho})]$. Изложенный вывод на основе приведенного уравнения (2) или (5а) для электрического поля \mathbf{E} носит более общий характер и справедлив также в случае систем с пространственной дисперсией.

Благодаря наличию отражательной симметрии относительно гиротропной оси в рассматриваемом случае возможны собственные значения $\pm\kappa_\alpha$. Следовательно, условия ортогональности (16) или (7) можно упростить, различая собственные волны по значениям κ_α^2 , а не κ_α . Тогда из уравнения (13а) с учетом соотношений (7) для $+\kappa_\alpha$ и $-\kappa_\alpha$, положив $N_\alpha = Z_\alpha$, получаем следующие соотношения ортонормальности при заданных ω , \mathbf{k}_t :

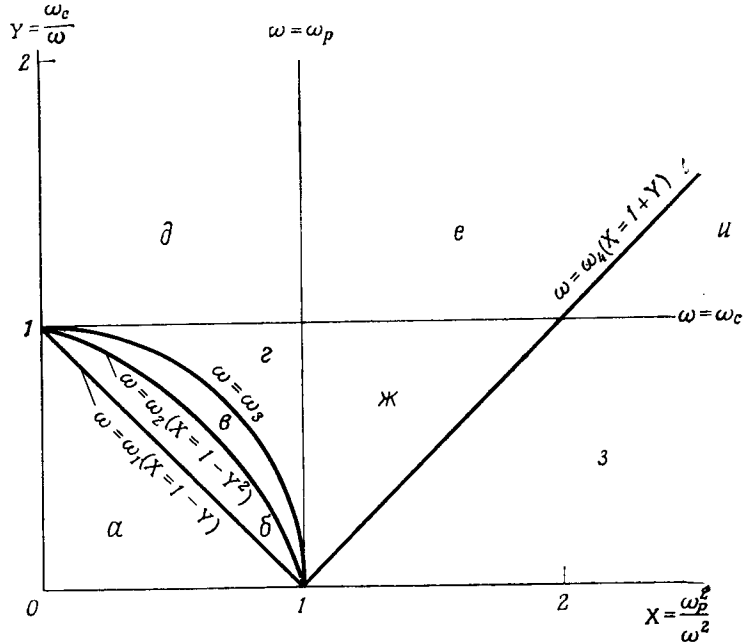
$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{h}_{\beta^*} \times \mathbf{z}_0 &= \delta_{\alpha\beta} \text{ при действительных } \kappa_\alpha, \\ \mathbf{e}_{\alpha^*} \cdot \mathbf{h}_\beta \times \mathbf{z}_0 &= \delta_{\alpha\beta} \text{ при комплексных } \kappa_\alpha, \end{aligned} \quad (15)$$

где теперь $\delta_{\alpha\beta} = 1$, если $\kappa_\alpha^2 = \kappa_\beta^2$, и $\delta_{\alpha\beta} = 0$, если $\kappa_\alpha^2 \neq \kappa_\beta^2$. Таким образом, собственные функции, обозначенные индексами α и α^* , соответствуют собственным значениям κ_α и κ_{α^*} , т. е. выбору противоположных знаков перед Δ в выражении (11).

На основе собственных функций \mathbf{e}_α и \mathbf{h}_α , различающихся собственными значениями κ_α^2 , стационарные поперечные электрическое и магнитное поля и их источники в холодной магнитоплазме можно выразить через параметры эквивалентной линии передачи:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t(\mathbf{r}) &= \sum_\alpha V_\alpha(z) \mathbf{e}_\alpha e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}}, \\ \mathbf{H}_t(\mathbf{r}) &= \sum_\alpha I_\alpha(z) \mathbf{h}_\alpha e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}}, \\ \mathbf{M}_{te} \times \mathbf{z}_0 &= \sum_\alpha v_\alpha(z) \mathbf{e}_\alpha e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}}, \\ \mathbf{z}_0 \times \mathbf{J}_{te} &= \sum_\alpha i_\alpha(z) \mathbf{h}_\alpha e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}}, \end{aligned} \quad (16а)$$

ной плоскости k'_i [2, 6]. Наибольший интерес представляют те из таких точек, которые соответствуют действительным значениям k'_i и которыми определяются границы по k'_i интервала распространения незатухающих собственных волн с действительными κ' . Положение таких точек ветвления \bar{k}'_{i1} можно определить на фиг. 138 из условия $d\kappa'/dk'_i = \infty$. Уравнениями $\bar{k}'_{i1} = 1$



Фиг. 137. Подразделение плоскости XY (показанная часть плоскости не включает в себя низкочастотную область $\omega \rightarrow 0$).

Граничные частоты различных областей таковы: частоты $\omega_{1,4}$ соответствуют равенству $\epsilon_2^2 = \epsilon_2^2$, частота ω_2 — равенству $\epsilon_1 = 0$, частота ω_3 — равенству $2\epsilon_1^2 = (\epsilon_1' + 1)(\epsilon_1'^2 - \epsilon_2'^2)$.

и $\bar{k}'_{i2} = (\epsilon_1'^2 - \epsilon_2'^2)/\epsilon_1'$ определяются значения k'_i , при которых $\kappa'_{o,e} = 0$, а точки ветвления при $\bar{k}'_{i4} = \pm \delta [(\delta/2) - \sqrt{(\delta^2/4) - 1}]$ соответствуют равенству $\Delta = 0$ в выражении (11а). Напомним, что величина δ равна $2\epsilon_2'/(\epsilon_1' - 1)$. Знак величины $\kappa'_{o,e}$, если она действительна, следует выбирать в соответствии с условием излучения, которое требует, чтобы волны с зависимостью $\exp(-jk\kappa'_{o,e}z)$ переносили энергию в положительном направлении оси z . Из сказанного в гл. 1, § 7, п. «в», следует, что средний вектор плотности потока мощности $\bar{S} = \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$ нормален к поверхности волнового числа и направлен так, что

$k' \cdot \bar{S} > 0$, где $k' = k'_i + z_0 \kappa'$ — нормированный волновой вектор. Поскольку нас интересуют волны с $\bar{S} \cdot z_0 > 0$, это означает, например, что для диапазонов распространения, представленных на фиг. 138, а и д, мы имеем $\kappa'_{o,e} > 0$, на фиг. 138, в мы имеем $\kappa'_o > 0$ при $k_i'^2 < 1$ и $\kappa'_o < 0$ при $k_i'^2 < k_i'^2 < \infty$ и на фиг. 138, и мы имеем $\kappa'_e > 0$ при $-\infty < k_i'^2 < \infty$. При переходе от диапазона распространения к диапазону, в котором распространение невозможно, аналитическое продолжение функции $\kappa'_{o,e}$ следует осуществить так, чтобы выполнялось условие $\text{Im} \kappa'_{o,e} < 0$, которым определяется и соответствующий знак перед величиной $\text{Re} \kappa'_{o,e}$.

Выражения для собственных функций $\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_{o,e}$, $\mathbf{h}_\alpha = \mathbf{h}_{o,e}$ (и сопряженных функций), соответствующих обыкновенной и необыкновенной собственным волнам, следуют из формул (13) при $\epsilon_3 > 0$:

$$\sqrt{2} \mathbf{e}_{o,e} = \frac{\pm \Delta - k_i'^2}{\pm \Delta} \mathbf{k}_{t0} \mp j \frac{\delta}{\Delta} \hat{\mathbf{k}}_{t0}, \quad (19a)$$

$$\sqrt{2} \mathbf{e}_{o^*,e^*} = \frac{\pm \Delta^* - k_i'^2}{\pm \Delta^*} \mathbf{k}_{t0} \mp j \frac{\delta}{\Delta^*} \hat{\mathbf{k}}_{t0},$$

$$\sqrt{2} \mathbf{h}_{o,e} = j \frac{k_i'^2 \pm \Delta}{\delta} \mathbf{k}_{t0} + \hat{\mathbf{k}}_{t0}, \quad \sqrt{2} \mathbf{h}_{o^*,e^*} = j \frac{k_i'^2 \pm \Delta^*}{\delta} \mathbf{k}_{t0} + \hat{\mathbf{k}}_{t0}, \quad (19б)$$

причем характеристический импеданс $Z_{o,e}$ [формула (13в)] принимает вид

$$Z_{o,e} = \frac{\omega \mu_0}{k \kappa'_{o,e}} \frac{\Delta^2 \pm k_i'^2 \Delta}{\delta^2}, \quad k = k_0 \sqrt{\epsilon_3}, \quad \kappa'_{o,e} = \frac{1}{k} \kappa_{o,e}. \quad (20)$$

Согласно формуле (15), собственные функции в формулах (19а) и (19б) удовлетворяют условиям ортонормальности

$$\mathbf{e}_{e,o} \cdot \mathbf{h}_{o^*,e}^* \times \mathbf{z}_0 = 0, \quad \mathbf{e}_{e,o} \cdot \mathbf{h}_{e,o}^* \times \mathbf{z}_0 = 1 \quad \text{при действительных } \Delta, \quad (21a)$$

$$\mathbf{e}_{e^*,o^*} \cdot \mathbf{h}_{o,e}^* \times \mathbf{z}_0 = 0, \quad \mathbf{e}_{e^*,o^*} \cdot \mathbf{h}_{e^*,o}^* \times \mathbf{z}_0 = 1 \quad \text{при мнимых } \Delta, \quad (21б)$$

причем $\kappa'_o = -\kappa_e^*$, если Δ — мнимая величина (знак минус выбран, чтобы обеспечивалось неравенство $\text{Im} \kappa'_{o,e} < 0$). Тогда из соотношения (20) следует, что

$$Z_o = -Z_e^*, \quad \text{если } \Delta \text{ — мнимая величина.} \quad (21в)$$

Если потери в среде отличны от нуля, то матричные элементы (4) оказываются комплексными и в соотношение ортогональности собственных волн [§ 2, формула (8б) или (14б)] в рассматриваемом случае отражательной симметрии входят собст-

Можно иначе: по формулам (17) и (22) вычислить для среды, свободной от источников, величины

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \int [b_{\alpha}(Z_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} + \mathbf{e}_{z\alpha}) e^{-j(k_t \cdot \rho + \kappa_{\alpha} z)}] \frac{d\mathbf{k}_t}{(2\pi)^2}, \quad z \geq 0, \quad (24a)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \int [b_{\alpha}(\mathbf{h}_{\alpha} + \mathbf{h}_{z\alpha}) e^{-j(k_t \cdot \rho + \kappa_{\alpha} z)}] \frac{d\mathbf{k}_t}{(2\pi)^2}, \quad z \geq 0. \quad (24б)$$

Индексам $\alpha_>$ и $\alpha_<$ обозначены собственные волны, переносящие энергию в направлении увеличения ($z > 0$) или уменьшения ($z < 0$), а суммирование производится по тому или иному типу собственных волн в зависимости от неравенства $z \geq 0$. Далее, формула (18в) при $b_{\alpha}(z) = b_{\alpha} \delta(z)$ дает

$$b_{\alpha} = -(\text{sign } z) \frac{e_{z\alpha}^*}{2Z_{\alpha}} J^0 = \frac{v_{\alpha}}{2Z_{\alpha}}, \quad e_{z\alpha}^* = e_{z\alpha}. \quad (24в)$$

Благодаря наличию отражательной симметрии каждому значению κ_{α} соответствует собственное значение $-\kappa_{\alpha}$ (§ 2, п. «Г»), поэтому весь интервал $z \geq 0$ можно охватить одним выражением для $\alpha_>$, если в интервале $z < 0$ величину κ_{α} заменять величиной $-\kappa_{\alpha}$. В этом случае выражения (24) дают тот же результат, что и формулы (16) данного параграфа и (3) из § 2.

Поскольку подынтегральные выражения в формулах (24а) и (24б) зависят только от \mathbf{k}_t и ρ , можно воспользоваться азимутальной симметрией и перейти к разложению Фурье — Бесселя (по цилиндрическим волнам). С учетом того, что $\mathbf{k}_{t0} = \rho_0 \cos \varphi - \varphi_0 \sin \varphi$, $\mathbf{k}_{t0} = \rho_0 \sin \varphi + \varphi_0 \cos \varphi$, на основании формул (7) из гл. 5, § 2 [при $f(k_t) = 1$, $\rho' = 0$], получаем

$$\int e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \rho} d\mathbf{k}_t = 2\pi \int_0^{\infty} J_0(k_t \rho) k_t dk_t, \quad d\mathbf{k}_t = k_t dk_t d\varphi, \quad (24г)$$

тогда как дифференцирование по ρ тех же формул при $f(k_t) = 1/k_t$, $\rho' = 0$ дает

$$\int_0^{\infty} dk_t \int_0^{2\pi} d\varphi k_t \cos \varphi e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \rho \cos \varphi} = -j2\pi \int_0^{\infty} J_1(k_t \rho) k_t dk_t. \quad (24д)$$

Кроме того, прямое интегрирование по φ дает

$$\int_0^{\infty} dk_t \int_0^{2\pi} d\varphi k_t \sin \varphi e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \rho \cos \varphi} = 0. \quad (24е)$$

На основании этих результатов из формул (24а), (24б) и (13) (при фиксированных ρ_0 и φ_0) путем преобразования, приводя-

щего в гл. 3, § 2, от формулы (62) к формуле (69), получаем при $z \neq 0$ и $\epsilon_3 > 0$ [2] ¹⁾

$$\mathbf{E}_{t_{0,e}} = jA(\text{sign } z) \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 \left(\rho_0 \frac{\sigma^2 \mp \Delta}{\pm \Delta} + \varphi_0 \frac{j\delta}{\pm \Delta} \right) \times \\ \times H_1^{(2)}(k\sigma\rho) e^{-jk\kappa'_{0,e}|z|} d\sigma, \quad (25a)$$

$$E_{z_{0,e}} = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma^2 \mp \Delta}{\pm \Delta} \frac{\sigma^3 \kappa'_{0,e}}{1 - \sigma^2} H_0^{(2)}(k\sigma\rho) e^{-jk\kappa'_{0,e}|z|} d\sigma, \quad (25б)$$

$$\mathbf{H}_{t_{0,e}} = \frac{A}{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 \left(\rho_0 \frac{\delta \kappa'_{0,e}}{\pm \Delta} + \varphi_0 j \frac{\sigma^2 \mp \Delta}{\pm \Delta} \frac{\kappa'_{0,e}}{1 - \sigma^2} \right) \times \\ \times H_1^{(2)}(k\sigma\rho) e^{-jk\kappa'_{0,e}|z|} d\sigma, \quad (25в)$$

$$H_{z_{0,e}} = -j(\text{sign } z) \frac{A\delta}{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma^3}{\pm \Delta} H_0^{(2)}(k\sigma\rho) e^{-jk\kappa'_{0,e}|z|} d\sigma, \quad \sigma \equiv k'_t, \quad (25г)$$

где верхний знак относится к вкладу обыкновенной, а нижний — к вкладу необыкновенной волны, $A = k_2 \xi J^0 / 16\pi$ при $\xi = (\mu_0 / \epsilon_0 \epsilon_3)^{1/2}$; ρ_0 , φ_0 , z_0 — единичные векторы цилиндрической системы координат. Для краткости введено обозначение $\sigma \equiv k'_t$, где k'_t определяется формулой (10а). Теперь полные поля вычисляются как

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_o, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_e + \mathbf{H}_o. \quad (26)$$

Контур интегрирования деформирован в нижнюю половину плоскости σ для того, чтобы исключить точку ветвления $\sigma = 0$, обусловленную наличием функций Ханкеля. Особые точки ветвления, обусловленные наличием Δ и $\kappa'_{0,e}$, в случае отличных от нуля потерь смещены с действительной оси, а поэтому их местонахождение в предельном случае, когда потерь нет, определяется однозначно. Можно и иначе — сразу выбрать контур, деформированный около существенных действительных точек ветвления, на основании сказанного в п. «б». Это связано с условием излучения, требующим, чтобы на контуре интегрирования выполнялось неравенство $\text{Im } \kappa'_{0,e} \leq 0$. В отсутствие потерь, когда величина $\kappa'_{0,e}$ может быть действительной в некоторых интервалах изменения σ , знак величины $\kappa_{0,e}$ можно определить так, как говорилось в п. «б», или путем перехода к предельному случаю нулевых потерь.

¹⁾ При $\epsilon_3 < 0$ следует произвести замену $\sqrt{\epsilon} \rightarrow -j\sqrt{|\epsilon|}$, $\sigma \rightarrow j\sigma$, $\kappa' \rightarrow j\kappa'$

обретает вид [гл. 1, § 6, формула (22), при $A \equiv L$, $\psi \equiv krM$, $i \rightarrow -j$, $k_i \rightarrow k\sigma$]

$$I = \int L(\sigma) e^{-krM(\sigma)} d\sigma, \quad (32)$$

где

$$M(\sigma) = \kappa'(\sigma) |\cos \theta| + \sigma \sin \theta, \quad (32a)$$

причем γ , θ — сферические координаты с началом отсчета в точке расположения источника $\gamma = 0$:

$$\rho = r \sin \theta, \quad z = r \cos \theta. \quad (32b)$$

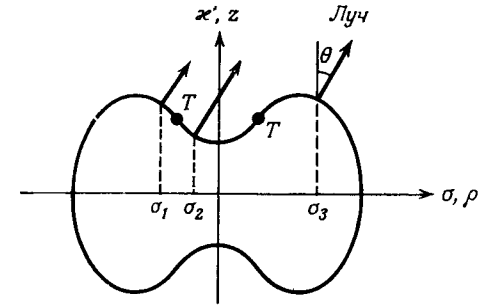
При $kr \gg 1$ основной вклад в интеграл вносит окрестность седловой точки σ_i , где

$$\frac{d}{d\sigma} M(\sigma) = 0 \quad \text{или} \quad \left. \frac{d\kappa'(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma_i} = -|\operatorname{tg} \theta|. \quad (33)$$

Действительным решениям $\kappa'(\sigma_i) \equiv \kappa'_i$, σ_i соответствуют распространяющиеся волны в дальней зоне, а комплексным седловым точкам — экспоненциально затухающие. Геометрическая интерпретация условия седловой точки (33) проводилась в гл. 1, § 6, п. «б», а также в связи с излучением в одноосной среде [гл. 7, § 3, формула (11) и далее]. При этом было установлено, что действительными седловыми точками определяется положение таких точек κ'_i , σ_i на поверхности волновых чисел для данной среды [т. е. на графике действительных решений κ' , $k_i \equiv \sigma$ уравнения (11)], в которых нормаль образует угол θ с положительным направлением оси κ' . Нормаль к поверхности волновых чисел направлена в сторону потока энергии (направление луча), так что вклад каждой седловой точки представляет собой волну, которая, по крайней мере в дальней зоне, переносит энергию в радиальном направлении от области источника. Это условие радиальности потока энергии не обязательно выполняется для полного поля, соответствующего нескольким седловым точкам, так как, вообще говоря, возможна интерференция между разными составляющими поля. Сказанное поясняется в общем виде на фиг. 139 (подробнее о такой диаграмме см. т. 1, фиг. 14), а на фиг. 138 показана фактическая форма кривых, соответствующих различным параметрам плазмы с тензором диэлектрической проницаемости (36).

Для асимптотического вычисления интеграла (32) остается показать, что контур интегрирования можно деформировать в пути наискорейшего спуска (ПНС), проходящие через различные седловые точки. ПНС, проходящие через седловую точку σ_i , определяются уравнением $\operatorname{Re} M(\sigma) = \operatorname{Re} M(\sigma_i)$, которое трудно решить из-за сложной зависимости $\kappa'(\sigma)$. Но по ПНС

можно точно следовать только в окрестности точки σ_i (где его ход легко определить), если остальные участки C' контура лежат в долинах ниже уровня различных седловых точек, которые тоже дают заметный вклад. В долинах комплексной плоскости σ имеем $\operatorname{Im} M(\sigma) < 0$, и, следовательно, вклад любого участка C' равен $O[\exp(-akr)]$, где $a > 0$ — минимальное значение величины $|\operatorname{Im} M(\sigma)|$ вдоль C' . Этим экспоненциально малым членом можно пренебречь в сравнении с вкладом окрестности седловой точки, в которой $\operatorname{Im} M(\sigma_i) = 0$ ¹⁾. Для случая, представленного



Фиг. 139. Поверхность волновых чисел и седловые точки.

на фиг. 139, картина на комплексной плоскости σ в окрестности седловых точек показана на фиг. 140. Нетрудно видеть, что контур можно деформировать относительно действительной оси таким образом, чтобы при $\sigma \neq \sigma_i$ он целиком располагался в долинах. Для этого необходимо, чтобы знак производной $d^2M(\sigma_i)/d\sigma_i^2$ изменялся от одной седловой точки к другой, поскольку аргумент векторного элемента $\sigma - \sigma_i$, указывающего направление от седловой точки вдоль ПНС, равен $\mp \pi/4$ при $d^2M(\sigma_i)/d\sigma_i^2 \gtrless 0$ [гл. 4, § 2, формула (1), а также гл. 7, § 5, п. «д»]. Такое условие выполняется, если $\kappa'(\sigma)$ — регулярная функция аргумента σ на соответствующем интервале действительной оси. Можно также показать, что ни одна из точек ветвления в подынтегральном выражении не пересекается при деформировании контура. Поэтому асимптотическое выражение для интеграла (32) соответствует только седловым точкам, причем вклад низшего порядка каждой точки имеет такой вид, как в формуле (16) из гл. 4, § 2 (относительно аналитических свойств функции $\kappa'_{\sigma, z}$ см. п. „б“).

¹⁾ Эта оценка экспоненциальной малости ошибки, возникающей при пренебрежении вкладом C' , дополняет оценку ошибки метода седловой точки в гл. 4, § 2, п. «б», основанную на рассмотрении расстояния между седловой точкой и ближайшей особенностью подынтегрального выражения.

величины σ_1 и σ_2 являются комплексными и вклады соответствующих лучей пренебрежимо малы; этот диапазон углов наблюдения соответствует «области тени» для упомянутых лучей. Все сказанное никак не влияет на луч, соответствующий точке σ_3 , который вносит вклад во всех точках наблюдения. Аналогичные соображения высказывались в гл. 7, § 3, при объяснении явлений, наблюдающихся в том случае, когда у поверхностей волновых чисел имеются незамкнутые ветви.

Переходная область (слияние двух седловых точек)

Как отмечалось выше, асимптотические выражения (34) теряют силу при $R_i \rightarrow \infty$, например, в точке перегиба дисперсионной кривой (точки T на фиг. 139). При приближении угла наблюдения θ в дальней зоне к значению θ_c , которое соответствует направлению нормали в точке T , две седловые точки первого порядка σ_1 и σ_2 сближаются и сливаются в одну седловую точку второго порядка на границе тени $\theta = \theta_c$. В этом случае асимптотическое вычисление интеграла следует проводить с помощью функций Эйри (гл. 4, § 5, п. «а») и результат полностью аналогичен полученному в гл. 7, § 5, п. «д» [член формулы (59) из гл. 7, § 5, обусловленный седловыми точками β_1 и β_2]. В области тени ($\theta > \theta_c$ на фиг. 139) вклады двух лучей, соответствующих точкам $\sigma_{1,2}$, экспоненциально малы, а потому ими можно пренебречь [лучевой показатель преломления $N(\theta)$ уже не является действительным], тогда как на границе тени поля изменяются пропорционально $(kr)^{-5/6} \exp[-jkrN(\theta_c)]$. Таким образом, поля на границе сильнее, чем при других углах наблюдения, когда зависимость от расстояния имеет обычный вид $(kr)^{-1}$. Следовательно, усиление поля должно быть больше в переходной области, где оба луча, соответствующие точкам σ_1 и σ_2 , вносят почти одинаковый вклад и поэтому сильно взаимодействуют.

Переходная область (седловая точка удаляется в бесконечность)

Радиус кривизны дисперсионной поверхности неограниченно возрастает и на удаленных участках незамкнутых ветвей. Простой, но типичный пример уже встречался нам в случае одноосной анизотропной среды в гл. 7 (фиг. 108); в нашем случае трудность возникает при $\theta \rightarrow \theta_c$ ($\sigma_i \rightarrow \infty$), где θ_c — угол, соответствующий нормали к асимптоте поверхности. Ветви дисперсионной кривой могут быть незамкнутыми, когда $\epsilon'_1 < 0$, что вытекает из исследования действительных решений уравнения (10) при $k', \sigma \rightarrow \infty$; уравнение асимптот, как легко показать, имеет вид $\theta = \hat{\theta} = \pm \arccos \sqrt{-1/\epsilon'_1}$, причем $\sigma \equiv k'_i$.

Чтобы дать представление о модификации асимптотического метода при $\sigma_i \rightarrow \infty$, нам достаточно рассмотреть подынтегральные выражения в формулах (25) в области больших σ . Из выражения (11) и такого же выражения при $\epsilon_3 < 0$ получаем в случае, когда $|\sigma| \gg 1$,

$$k'_o \approx -\sqrt{\epsilon'_1 + \frac{\epsilon_2'^2}{\epsilon'_1 - 1} - \epsilon'_1 \sigma^2}, \quad \epsilon_3 > 0, \quad \epsilon'_1 < 0, \quad (36a)$$

$$k'_i \approx \sqrt{-\epsilon'_1 + \frac{\epsilon_2'^2}{1 - \epsilon'_1} - \epsilon'_1 \sigma^2}, \quad \epsilon_3 < 0, \quad \epsilon'_1 < 0, \quad (36b)$$

где $k'_o < 0$ и $k'_i > 0$ (фиг. 138), а незамкнутая ветвь связана с обыкновенными при $\epsilon_3 > 0$ и необыкновенными при $\epsilon_3 < 0$ собственными волнами. Чтобы аппроксимировать множители, стоящие перед экспоненциальной функцией и функцией Ханкеля в подынтегральных выражениях в формулах (25), следует положить $k \sim \sigma$, $\Delta \approx -\sigma^2$. Тогда получаются простые степени σ , которые можно представить в виде соответствующих пространственных производных остающихся подынтегральных выражений. Таким образом, поля можно выразить через пространственные производные интеграла, имеющего тот же вид, что и интеграл (8) из гл. 7, § 3. Последний можно вычислить [гл. 7, § 3, формула (36) ¹⁾]. Поскольку потенциальная функция в формуле (36) из гл. 7, § 3, ведет себя как $[rN(\theta)]^{-1} \exp[-jkrN(\theta)]$, очевидно, что при $\theta \rightarrow \theta_c$ [т. е. при $N(\theta) \rightarrow 0$] имеется особая точка истинного поля и что поведение поля вблизи такого типа границы тени в гиротропном случае такое же, как и в более простом случае одноосной анизотропной среды [2]. Данный вопрос подробно рассматривался в гл. 7, § 3, пп. «а» и «д». Еще раз подчеркнем, что сильные особые точки поля и потока мощности при $\theta = \theta_c$ исчезают при наличии потерь, а также при замене точечного диполя тока плавным распределением источников.

г. Функции Грина в плоскостных областях

Представление в виде разложения по обыкновенным или необыкновенным собственным волнам

В среде, состоящей из кусочно-однородных слоев, границы которых перпендикулярны оси z прямоугольной системы координат, выполнение электромагнитных граничных условий на ка-

¹⁾ Следует учитывать, что в данной главе принята временная зависимость типа $\exp(j\omega t)$. Несмотря на то что формула (8) из гл. 7, § 3, имеет вид, прямо соответствующий формуле (36b), можно показать, что интеграл, соответствующий выражению (36a), приводит к результату того же типа.

а $\cos(kx'd)$ — диагональная матрица с элементами $\cos(kx'_0d)$ в одном и $\cos(kx'_ed)$ в другом случае; подобным же образом интерпретируется и $\sin(kx'd)$. Значения V_1 и I_1 векторов напряжения и тока на передней границе слоя $z = z_1$ связаны с их значениями на плоскости $z = z_2$ того же слоя соотношениями

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \hat{T}_z \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix}, \quad z_2 - z_1 = d, \quad (41)$$

а переходу через поверхность раздела между слоями соответствуют соотношения (39). Путем многократного применения формул (39) и (41) можно последовательно рассчитать напряжение и ток в любой точке плоскостной области и найти полную матрицу передачи, равную упорядоченному произведению всех отдельных матриц T_z и \hat{T}_z .

Если область замыкается при $z = a$ плоскостью с постоянным анизотропным поверхностным импедансом \mathcal{Z} (т. е. $\mathbf{E}_t = \mathcal{Z} \cdot \mathbf{H}_t \times \mathbf{z}_0$ при $z = a$), то на основании таких же соображений, что и при выводе выражений (38), получаем

$$V = \hat{\mathcal{Z}} I, \quad (42)$$

где V и I — столбцы, как и в формуле (39), а $\hat{\mathcal{Z}}$ — (2×2) -матрица импеданса:

$$\hat{\mathcal{Z}} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{h}_{o^*}^* \times \mathbf{z}_0 \cdot \mathcal{Z} \cdot \mathbf{h}_o \times \mathbf{z}_0 & \mathbf{h}_{o^*}^* \times \mathbf{z}_0 \cdot \mathcal{Z} \cdot \mathbf{h}_e \times \mathbf{z}_0 \\ \mathbf{h}_{e^*}^* \times \mathbf{z}_0 \cdot \mathcal{Z} \cdot \mathbf{h}_o \times \mathbf{z}_0 & \mathbf{h}_{e^*}^* \times \mathbf{z}_0 \cdot \mathcal{Z} \cdot \mathbf{h}_e \times \mathbf{z}_0 \end{pmatrix}, \quad (42a)$$

причем собственные функции относятся к среде, примыкающей к концевой плоскости. Нетрудно видеть, что наличие даже скалярного поверхностного импеданса \mathcal{Z}_s , для которого $\mathcal{Z} = \mathbf{1}_t \mathcal{Z}_s$, приводит к связи между собственными волнами во всех случаях, кроме случаев $\mathcal{Z} = 0$ (идеальный проводник) и $k_t = 0$ (нормальное падение собственных волн).

Из того что резкое изменение свойств среды приводит к связи между собственными волнами o и e , соответствующей формуле (39), следует, что в гиротропной среде с непрерывным изменением свойств вдоль оси z существует непрерывная связь между такими собственными волнами. Поэтому разложения по собственным функциям (37) применимы лишь локально, а сами собственные функции зависят от z (дискретный индекс ν превращается в непрерывную функцию координаты z). Подобные трудности отпадают в частном случае одноосной анизотропии (гл. 7, § 2) и, разумеется, в случае изотропного диэлектрика (гл. 2, § 3, п. «д»). Анализ связанных уравнений см. в работе [10].

Быстрые изменения параметров среды приводят к сильной связи между собственными волнами o и e , что усложняет вычисления. При этом может оказаться более удобным другой метод, основанный на несвязанных уравнениях для собственных функций при $\epsilon_2 = 0$ и при произвольной зависимости ϵ_1 и ϵ_3 от z ; связь же между собственными волнами вводится за счет недиагонального элемента тензора диэлектрической проницаемости (36). «Невозмущенное» решение в этом случае, очевидно, соответствует либо одноосной (гл. 7, § 2, $\epsilon_1 \neq \epsilon_3$), либо изотропной (гл. 2, § 3, п. «д», $\epsilon_1 = \epsilon_3$) среде. В гиротропной плазме, описываемой формулами (4), мы имеем $\epsilon_2 = 0$ при $\omega_c = 0$ или $\omega_c = \infty$, и поэтому в широких пределах изменения электронной концентрации $X(z) = \omega_p^2(z)/\omega^2$ можно пользоваться методом теории возмущений, при малых значениях ω_c рассматривая возмущение изотропного, а при малых значениях $1/\omega_c$ — возмущение одноосного случая [11].

Асимптотическое вычисление полей

Если расстояние от точки наблюдения до области источника намного больше длины волны, то интегральные выражения для полей можно упростить так, как это делалось в гл. 5, § 5 и 7. Например, решение задачи об излучении дипольного источника в однородном гиротропном плазменном полупространстве $z < 0$ в том случае, когда точка наблюдения находится в плазме, имеет вид интегралов (25), описывающих основное поле, к которым добавляются аналогичные интегралы для возмущения, обусловленного наличием поверхности раздела; подынтегральные выражения последних дополнительно содержат соответствующие коэффициенты отражения собственных волн, которые выводятся методом эквивалентных схем, изложенным ранее в данном параграфе. Экспоненциальные множители в подынтегральных выражениях имеют вид

$$\exp\{-jk[\kappa'_{o,e}(\sigma)|z| + \kappa'_{o,e}(\sigma)|z'| + \sigma\rho]\}, \quad (43)$$

где индексы o и e могут быть в любой комбинации. Экспонента такого же типа исследовалась в связи с выражениями (12) из гл. 7, § 5, где вместо $\kappa'_{o,e}$ стоит $q_{1,2}(\beta)$; дальнейший вывод и интерпретация условия в седловой точке справедливы и в данном случае, если учитывать, что лучи направлены перпендикулярно поверхности волновых чисел. Здесь вновь поверхности волновых чисел играют важную роль при выяснении физического смысла решения, как это уже отмечалось в гл. 1, § 6 и § 7, п. «г». Если, например, поверхность волновых чисел для плазмы имеет такой вид, как на фиг. 138, e , то все лучи $A - D$ на

§ 4. ВОЛНОВОДНЫЕ ВОЛНЫ В ХОЛОДНОЙ МАГНИТОПЛАЗМЕ (ВОЛНОВОДНАЯ ОСЬ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНА ГИРОТРОПНОЙ ОСИ)

Как говорилось в § 2, п. «з», анализ краевых задач в гиротропной среде в общем случае весьма сложен. Но при специальном выборе геометрии, параметров среды и источников возбуждения анализ становится вполне доступным и его можно проводить методом эквивалентных линий передачи. Например, в гл. 7, § 2, п. «б», и § 4, п. «б», было установлено, что некоторый класс краевых задач в одноосной анизотропной среде можно свести к эквивалентным задачам в изотропной среде. Такие же упрощения оказываются возможными и в гиротропной среде, если поля не зависят от координаты, отсчитываемой в направлении гиротропной оси (т. е. если волна распространяется перпендикулярно этой оси). Для исследования подобных задач установим сначала возможные волноводные волны в гиротропной среде с гиротропной осью \mathbf{b}_0 , перпендикулярной волноводной оси \mathbf{z}_0 . В таком волноводе рассматриваемые задачи соответствуют частному случаю волн с волновыми векторами \mathbf{k} в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{b}_0 и содержащей ось \mathbf{z}_0 ; однако в такой системе существуют и другие волны, например такие, волновые векторы \mathbf{k} которых лежат в плоскости, проходящей через векторы \mathbf{b}_0 и \mathbf{z}_0 .

а. Собственные функции и собственные значения в случае, когда вектор \mathbf{b}_0 перпендикулярен вектору \mathbf{z}_0

В волноводе с вектором \mathbf{b}_0 , перпендикулярным вектору \mathbf{z}_0 , волноводные волновые векторы Ψ_α и собственные значения κ_α , введенные в гл. 1, § 4, а также в § 2 из данной главы, существенно зависят от угла ϕ , которым характеризуется ориентация гиротропной оси $\mathbf{b}_0 = k_{t0} \cos \phi + \hat{\mathbf{k}}_{t0} \sin \phi$ в плоскости, перпендикулярной оси волновода \mathbf{z}_0 . Здесь обозначения такие же, как и в приведенном электромагнитном описании гиротропной среды в случае, когда вектор \mathbf{b}_0 параллелен вектору \mathbf{z}_0 (§ 3, п. «а»). Зависимость величин Ψ_α и κ_α от ϕ можно установить, решив задачу на собственные значения (1а) из § 3 методом, указанным в формулах (2)–(6) из § 3. Компоненту E_α вектора Ψ_α для случая, когда вектор \mathbf{b}_0 перпендикулярен вектору \mathbf{z}_0 , можно вывести из уравнения (5а) § 3 с базисом $\mathbf{z}_0, \mathbf{k}_{t0}, \hat{\mathbf{k}}_{t0}$, в котором напи-

сана формула (8) из § 3 (в предположении $\omega \neq 0$):

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 - \frac{k_t^2}{k_0^2} & \frac{\kappa k_t}{k_0} + j\epsilon_2 \sin \phi & -j\epsilon_2 \cos \phi \\ \frac{\kappa k_t}{k_0^2} - j\epsilon_2 \sin \phi & \epsilon_1 \sin^2 \phi + \epsilon_3 \cos^2 \phi - \frac{\kappa^2}{k_0^2} & (\epsilon_1 - \epsilon_3) \sin \phi \cos \phi \\ j\epsilon_2 \cos \phi & (\epsilon_1 - \epsilon_3) \sin \phi \cos \phi & \epsilon_1 \cos^2 \phi + \epsilon_3 \sin^2 \phi - \frac{k_t^2 + \kappa^2}{k_0^2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E_z \\ E_{t'} \\ E_{t''} \end{bmatrix} = 0, \quad (1)$$

причем обозначения и способ вычисления такие же, как и в формуле (9) из § 3 и далее в случае, когда вектор \mathbf{b}_0 параллелен вектору \mathbf{z}_0 .

Ненулевые решения уравнений (1) существуют при тех значениях $\kappa = \kappa_\alpha$, которые удовлетворяют детерминантному уравнению [заметим, что в данном случае нормировка $\kappa' = \kappa/k_0$, $k_t' = k_t/k_0$ отличается от нормировки (10а) из § 3]:

$$\begin{aligned} \kappa'^4 - [\epsilon_\perp + \epsilon_3 - 2k_t'^2 + (1 - \frac{\epsilon_3}{\epsilon_1}) k_t'^2 \cos^2 \phi] \kappa'^2 + \\ + (\epsilon_\perp - k_t'^2)(\epsilon_3 - k_t'^2) - \cos^2 \phi [4(\epsilon_1 - \epsilon_3) \sin^2 \phi - (\epsilon_\perp - \epsilon_3) k_t'^2 + \\ + (1 - \frac{\epsilon_3}{\epsilon_1}) k_t'^4] = 0, \quad (2a) \end{aligned}$$

которое при $\phi = \pi/2$ приобретает вид

$$[\kappa'^2 - (\epsilon_\perp - k_t'^2)][\kappa'^2 - (\epsilon_3 - k_t'^2)] = 0, \quad (2б)$$

а при $\phi = 0$

$$\kappa'^4 - [\epsilon_\perp + \epsilon_3 - (1 + \frac{\epsilon_3}{\epsilon_1}) k_t'^2] \kappa'^2 + \frac{\epsilon_3}{\epsilon_1} [(\epsilon_1 - k_t'^2)^2 - \epsilon_2^2] = 0, \quad (2в)$$

где $\epsilon_\perp = (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)/\epsilon_1$ и $\epsilon_{1,2,3}$ — величины, которые даются формулами (4) из § 3.

Волновые векторы Ψ_α , соответствующие корням $\kappa = \kappa_\alpha$ уравнения (2), довольно сложны при произвольной ориентации ϕ гиротропной оси в поперечной плоскости. Для простоты рассмотрим сначала случай $\phi = \pi/2$, когда гиротропная ось перпендикулярна как волноводной оси \mathbf{z}_0 , так и направлению \mathbf{k}_0 . При заданных \mathbf{k}_t, ω получаем из формул (1) данного параграфа и (6)

равно нулю, а поэтому существенна только перпендикулярная оси \mathbf{b}_0 часть тензора диэлектрической проницаемости.

Интересно сопоставить решение задачи в случае линейного магнитного тока на основе приведенных уравнений Максвелла и на основе эквивалентной линии передачи [12]. Выберем прямоугольную систему координат x, y, z , ориентированную таким образом, что $\mathbf{x}_0 = \mathbf{k}_{t0}$, $\mathbf{y}_0 = \mathbf{b}_0 = \mathbf{k}_{l0}$, а вектор \mathbf{z}_0 направлен вдоль оси волновода. Пусть $\mathbf{M} = M\mathbf{y}_0$ — плотность линейного магнитного тока, причем $\partial/\partial y \equiv 0$; обозначим отличные от нуля компоненты полей через $H_{y'} = H_y = H$, $E_{x'} = E_x$ и E_z . Исключив E_z , приведенные уравнения Максвелла [§ 2, формула (1)] с учетом выражения (3б) из § 3 для ϵ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -j\omega\mu_0 \left(1 + \frac{1}{k_0^2 \epsilon_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) H - j \frac{\epsilon_3}{\epsilon_1} \frac{\partial}{\partial x} E_x - M, \\ \frac{\partial H}{\partial z} &= j \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{\partial}{\partial x} H - j\omega\epsilon_0 \epsilon_{\perp} E_x. \end{aligned} \quad (5a)$$

Исключая теперь E_x , получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \epsilon_{\perp} \right) H = j\omega\epsilon_0 \epsilon_{\perp} M, \quad (5б)$$

где $\epsilon_{\perp} = (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)/\epsilon_1$ — эффективная относительная диэлектрическая проницаемость. Уравнение (5б) имеет такой же вид, как и уравнение для изотропной среды с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ_{\perp} , но анизотропия проявляется в наличии членов, содержащих ϵ_2 , в выражениях (5а). На основании формулы (3б) из § 3 нетрудно показать, что в холодной электронной плазме

$$\begin{aligned} \epsilon_{\perp} < 0 & \text{ при } \omega < \omega_4 \text{ и } \omega_2 < \omega < \omega_1, \\ \epsilon_{\perp} > 0 & \text{ при } \omega_4 < \omega < \omega_2 \text{ и } \omega > \omega_1, \end{aligned} \quad (6a)$$

где (фиг. 138)

$$\omega_{4,1} = \frac{\sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} \mp \omega_c}{2}, \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_c^2 + \omega_p^2}. \quad (6б)$$

В рассматриваемом случае линейного магнитного тока зависимость полей необыкновенной волны от z можно также исследовать методом эквивалентной линии передачи. Это особенно удобно в случае волн с зависимостью полей от x вида $\exp(-jk_t x)$ и в случае плоскостных рассеивателей (ось z перпендикулярна слоям). Как показано в § 2, п. «з», при методе эквивалентной линии передачи общего вида поведение собственной волны с номером α характеризуется коэффициентом отражения (по напряжению) $\Gamma_{\alpha}(z)$, который связан с импедансом

$Z_{\alpha}(z)$ на некоторой рассеивающей плоскости, расположенной в точке z , соотношением (43) из § 2. При заданных k_t , ω характеристические импедансы необыкновенных собственных волн даются формулами (4б) и (4в), откуда на основании формулы (43) из § 2 получаем следующее выражение для коэффициента отражения собственных волн, распространяющихся в сторону увеличения z с действительными κ_{α} :

$$\Gamma_{\alpha}(z) = \frac{Z_{\alpha}(z) - Z_{\alpha}}{Z_{\alpha}(z) + Z_{\alpha}}. \quad (7)$$

Например, если в точке $z = 0$ расположена идеально проводящая плоскость, так что $Z_{\alpha}(0) = 0$, то по формулам (4б) и (7) находим коэффициенты отражения в точке $z = 0$, соответствующие распространению в положительном и отрицательном направлениях:

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_{\alpha}(0) &= -\frac{Z_{\alpha}}{Z_{\alpha}^*} = -\frac{1 + j(k_t \epsilon_2 / \kappa_{\alpha} \epsilon_1)}{1 - j(k_t \epsilon_2 / \kappa_{\alpha} \epsilon_1)}, \\ \overleftarrow{\Gamma}_{\alpha}(0) &= -\frac{Z_{-\alpha}}{Z_{-\alpha}^*} = -\frac{1 - j(k_t \epsilon_2 / \kappa_{\alpha} \epsilon_1)}{1 + j(k_t \epsilon_2 / \kappa_{\alpha} \epsilon_1)}, \end{aligned} \quad (8)$$

и затем по формуле (45) из § 2 нетрудно вычислить коэффициент отражения в любой плоскости z . Несимметричными выражениями (8) для коэффициента отражения случай гиротропной среды резко отличается от случая изотропной среды, где коэффициент отражения от идеально проводящей плоскости имеет единственное симметричное значение, равное -1 . Кроме того, в силу требования $E_x = 0$ на идеально проводящей плоскости при $z = 0$ и соотношений (5а) величины $\partial H/\partial z$ и $\partial H/\partial x$ оказываются взаимосвязанными, тогда как в изотропной среде $\partial H/\partial z = 0$. Анизотропия среды приводит к нарушению принципа взаимности, поскольку величина $\Gamma_{\alpha}(0)$ не является четной функцией переменной k_t (т. е. волны с поперечной периодичностью, характеризующейся величиной $-k_t$, отражаются иначе, чем волны с $+k_t$).

Изложенный выше анализ распространения волноводных волн вдоль оси z становится неприменимым, если рассеивающий объект представляет собой идеально проводящий цилиндр произвольного поперечного сечения с осью, параллельной оси \mathbf{b}_0 и направлению линейного магнитного тока. В этом случае падающая волна с заданным значением k_t связана с бесконечным числом рассеянных волн, для которых $-\infty < k_t < \infty$. Даже если рассеивающая поверхность S лежит на координатной поверхности $u = \text{const}$ в ортогональной системе координат (u, v) , что позволяет разделить переменные в уравнении (5б), и поле падающей волны выражается через собственные функции, завися-

импедансом; различие только в форме выражения (13а) для Γ . Следовательно, асимптотический подход при вычислении поля в дальней зоне остается почти таким же, как в гл. 5, § 7, п. «б». Как отмечалось выше, важное значение имеет то обстоятельство, что $\Gamma(\xi) \neq \Gamma(-\xi)$; это означает, что граница по-разному воздействует на волны с одинаковой пространственной периодичностью, падающие на поверхность по разные стороны от нормали к ней. Такое нарушение принципа взаимности является следствием гиротропных свойств среды.

Однонаправленная поверхностная волна

Поскольку выражение (13а) для $\Gamma(\xi)$ имеет вид, соответствующий индуктивному поверхностному импедансу в изотропной среде, в силу сказанного в гл. 5, § 7, должна существовать поверхностная волна, которая экспоненциально затухает в направлении оси z и распространяется без затухания в направлении оси x . Действительно, коэффициент отражения Γ имеет полюсы ξ_p при

$$\sqrt{k^2 - \xi_p^2} \varepsilon_1 = j \xi_p \varepsilon_2. \quad (14)$$

Это уравнение легко решить относительно ξ_p , что дает $\xi_p = \pm k_0 \sqrt{\varepsilon_1}$. Чтобы получить поверхностную волну с действительными ξ_p , нужно, чтобы величина ε_1 была положительной, откуда $\xi_p^2 > k^2$; следовательно, $\kappa_p = -j|\kappa_p|$ есть мнимая величина. Знак величины ξ_p совпадает со знаком отношения $-\varepsilon_2/\varepsilon_1$, а поскольку $\varepsilon_1 > 0$, мы имеем $\text{sign } \xi_p = -\text{sign } \varepsilon_2$; знак величины ε_2 определяется направлением внешнего постоянного магнитного поля [§ 3, формула (4)]. Таким образом,

$$\xi_p = \pm k_0 \sqrt{\varepsilon_1} \quad \text{при} \quad \varepsilon_2 \leq 0, \quad \varepsilon_1 > 0. \quad (15)$$

При наличии слабого поглощения выполняется неравенство $\text{Im} \sqrt{\varepsilon_1} < 0$, чем фиксируется положение полюса по отношению к контуру интегрирования. В отличие от изотропного случая здесь имеется лишь один полюс, а не обычная симметричная пара $\pm \xi_p$, как в гл. 5, § 7. Это приводит к однонаправленному распространению волны, как будет показано ниже [12].

Исследование элементов тензора диэлектрической проницаемости показывает, что величина $\varepsilon_1 = (\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_c^2)(\omega^2 - \omega_c^2)^{-1}$ положительна, если $\omega > \sqrt{\omega_p^2 + \omega_c^2}$ или $\omega < \omega_c$, где ω_c и ω_p — циклотронная и плазменная частоты электронов. В частности,

$$\begin{aligned} \text{а) } 0 < \varepsilon_1 < 1, & \quad \text{если } \omega > \sqrt{\omega_p^2 + \omega_c^2}; \\ \text{б) } \varepsilon_1 > 1, & \quad \text{если } \omega < \omega_c. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, фазовая скорость поверхностной волны $c/\sqrt{\varepsilon_1}$ в направлении оси y , параллельной плоскости, превышает скорость света в вакууме c (быстрая волна) в случае «а», но меньше c (медленная волна) в случае «б». Эти выводы представляют интерес в связи с задачей об излучении линейного источника, находящегося в магнитоплазменном слое конечной толщины; в такой системе возмущенная медленная волна (случай «б») остается поверхностной, а возмущенная быстрая волна, соответствующая случаю «а», превращается в вытекающую, что может сильно изменить картину излучения; быстрая волна уносит энергию от границы (гл. 5, § 5, п. «ж»). На основании формул (5), (14) и (15) компоненты поля поверхностной волны можно представить в виде

$$H \equiv H_y = C \exp(\pm j k_0 \sqrt{\varepsilon_1} x - k_0 |\varepsilon_2| \varepsilon_1^{-1/2} z), \quad (17a)$$

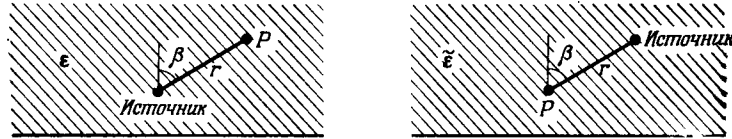
$$E_z = \pm \frac{k_0}{\omega \varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon_1}} H, \quad E_x = 0, \quad (17б)$$

где C — постоянный амплитудный коэффициент, причем верхний знак соответствует значениям $\varepsilon_2 > 0$, а нижний — значениям $\varepsilon_2 < 0$ при $\varepsilon_1 > 0$. Поскольку $E_x = 0$, поверхностная волна является волной *ТЕМ* (поперечной электромагнитной) относительно направления оси x . Это можно установить непосредственно, потребовав, чтобы поверхностная волна была решением уравнений Максвелла в отсутствие источников, удовлетворяла граничным условиям при $z = 0$ и имела компоненты поля, пропорциональные $\exp[-j \xi_p x - |\kappa_p| z]$. Поскольку компонента E_x должна обращаться в нуль при $z = 0$, она должна быть равна нулю всюду. Поверхностная волна распространяется (и переносит энергию) только в направлении $-x$, если $\varepsilon_2 > 0$, и только в направлении $+x$, если $\varepsilon_2 < 0$, т. е. является однонаправленной, как говорилось выше.

Сравнение выражений (6) и (16) показывает, что поверхностные волны могут распространяться, даже если сама среда непрозрачна; так обстоит дело при $\varepsilon_1 < 0$, $\varepsilon_1 > 0$ [т. е. при $\omega_2 < \omega < \omega_3$ или $\omega < \min(\omega_c, \omega_1)$]. Можно даже представить себе физическую ситуацию, в которой мы сталкиваемся с «термодинамическим парадоксом», когда энергия поглощается конечным элементом, не имеющим потерь. Рассмотрим систему, изображенную на фиг. 143, в отсутствие линейного источника и с непоглощающей границей в плоскости $x = 0$; параметры среды выберем так, чтобы выполнялось условие $\varepsilon_1 < 0$ и поверхностная волна могла распространяться в направлении $+x$. Поскольку в направлении $x = -\infty$ распространение волн невозможно ни в самой среде, ни вдоль плоскости, нет никакого механизма, которым можно было бы скомпенсировать перенос

ланные в гл. 1, § 5, п. «б». В рассматриваемом случае плазмы транспонирование соответствует изменению направления внешнего магнитного поля на противоположное.

Полученный результат имеет прямое отношение к измерениям антенных диаграмм в анизотропной области. В изотропной среде диаграмму направленности обычно определяют, изме-

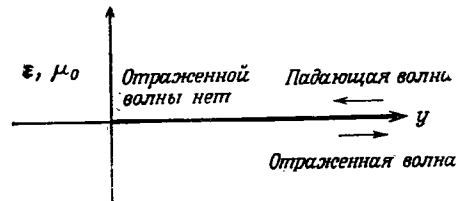


Фиг. 145. Эквивалентные задачи.

ря энергию, которая поступает в антенну от плоских волн, падающих под разными углами. При аналогичных измерениях в гиротропной среде необходимо также транспонировать параметры среды [15].

г. Дифракция на полуплоскости

Допустим, что идеально проводящая граница на фиг. 143 простирается только от $x = 0$ до $x = \infty$, а все пространство заполнено одной и той же анизотропной средой. Такую краевую



Фиг. 146. Полуплоскость.

задачу нельзя решить путем разделения переменных, но она решается методом Винера — Хопфа [16]. Мы не будем останавливаться на деталях и отметим лишь некоторые физические характеристики решения. Если выбрать условия таким образом, чтобы сверху вдоль экрана могла распространяться поверхностная волна в направлении $x = -\infty$, то это будет означать, что снизу вдоль экрана может распространяться поверхностная волна в направлении $x = +\infty$ (достаточно повернуть фиг. 143 на 180° вокруг оси y). Это единственные возможные типы волн; распро-

странение вдоль экрана в направлении $x = \infty$ сверху и в направлении $x = -\infty$ снизу невозможно. Следовательно, падающая поверхностная волна, идущая вдоль экрана сверху, возбуждает отраженную поверхностную волну, идущую вдоль экрана снизу, и поле излучения, если $\epsilon_1 > 0$; при отрицательных ϵ_1 излучение с края экрана отсутствует и падающая энергия полностью возвращается вдоль экрана снизу (фиг. 146).

ЗАДАЧИ

1. Покажите, что уравнения для поперечных полей в среде с произвольными тензорами диэлектрической $\epsilon(\mathbf{r})$ и магнитной $\mu(\mathbf{r})$ проницаемости имеют вид [при зависимости от времени типа $\exp(j\omega t)$]

$$-\frac{\partial \mathbf{E}_t}{\partial z} = j\omega \left[-\mathbf{z}_0 \times \mu_t \times \mathbf{z}_0 + \frac{1}{\omega^2} \nabla_t \frac{1}{\epsilon_z} \nabla_t + \frac{\mathbf{z}_0 \times \bar{\mu}_{tz} \bar{\mu}_{zt} \times \mathbf{z}_0}{\mu_z} \right] \cdot \mathbf{H}_t \times \mathbf{z}_0 - \left[\nabla_t \frac{1}{\epsilon_z} \bar{\epsilon}_{zt} \times \mathbf{z}_0 + \frac{\mathbf{z}_0 \times \bar{\mu}_{tz} \nabla_t}{\mu_z} \right] \cdot \mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}_t + \mathbf{M}_{te} \times \mathbf{z}_0, \quad (1a)$$

$$-\frac{\partial \mathbf{H}_t}{\partial z} = j\omega \left[-\mathbf{z}_0 \times \epsilon_t \times \mathbf{z}_0 + \frac{1}{\omega^2} \nabla_t \frac{1}{\mu_z} \nabla_t + \frac{\mathbf{z}_0 \times \bar{\epsilon}_{tz} \bar{\epsilon}_{zt} \times \mathbf{z}_0}{\epsilon_z} \right] \cdot \mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}_t - \left[\nabla_t \frac{1}{\mu_z} \bar{\mu}_{zt} \times \mathbf{z}_0 + \frac{\mathbf{z}_0 \times \bar{\epsilon}_{tz} \nabla_t}{\epsilon_z} \right] \cdot \mathbf{H}_t \times \mathbf{z}_0 + \mathbf{z}_0 \times \mathbf{J}_{te}, \quad (1б)$$

где z — продольное направление, по отношению к которому ϵ и μ выражаются формулами (2в) из § 2, а \mathbf{J}_{te} и \mathbf{M}_{te} — эквивалентные электрический и магнитный токи источника, которые даются формулой (29б) из § 2 (при $i \rightarrow -j$). Показать, что продольные компоненты полей выражаются через поперечные компоненты следующим образом:

$$H_z = \frac{1}{j\omega\mu_z} [\nabla_t \cdot (\mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}_t) - j\omega \bar{\mu}_{zt} \cdot \mathbf{H}_t - M_z], \quad (2a)$$

$$E_z = \frac{1}{j\omega\epsilon_z} [\nabla_t \cdot (\mathbf{H}_t \times \mathbf{z}_0) - j\omega \bar{\epsilon}_{zt} \cdot \mathbf{E}_t - J_z]. \quad (2б)$$

2. Хотя в однородной гиротропной среде обыкновенная и необыкновенная собственные волны распространяются независимо, при наличии пространственной неоднородности возникает связь между ними. Эта связь слаба (что облегчает вычисления), если при произвольной анизотропии свойства среды изменяются медленно. В одноосной анизотропной среде неоднородности вдоль гиротропной оси не приводят к связи между собственными волнами (гл. 7, § 2). Следовательно, в сильно неоднородной среде, которая своей анизотропией незначительно отличается от одноосной среды (или от изотропной как частного случая одноос-

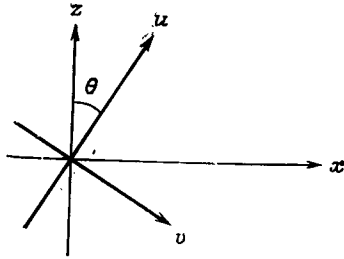
§ 2, формула (15б) и фиг. 106], а затем выполнив интегрирование по области источника, распределенного непрерывно вдоль оси z :

$$V_i^{(1)}(z) = -\omega \epsilon_0 \int Z_i^{(0)}(z, z') X(z') V_i''^{(0)}(z') dz', \quad (7a)$$

$$V_i''^{(1)}(z) = \omega \epsilon_0 \int Z_i''^{(0)}(z, z') X(z') V_i'^{(0)}(z') dz', \quad (7б)$$

$$\begin{aligned} V_i^{(c)}(z) &= -\omega \epsilon_0 \int Z_i^{(0)}(z, z') X(z') [V_i''^{(1)}(z') + jV_i'^{(0)}(z')] dz' = \\ &= -j\omega \epsilon_0 \int Z_i^{(0)}(z, z') X(z') V_i'^{(0)}(z') dz' - \\ &- (\omega \epsilon_0)^2 \int dz' Z_i^{(0)}(z, z') X(z') \int dz'' Z_i''^{(0)}(z', z'') X(z'') V_i''^{(0)}(z'') \quad (7в) \end{aligned}$$

и т. д. Интервал интегрирования в уравнениях (7) охватывает всю протяженность области источника в продольном направлении. Покажите, что в аналогичные выражения для $I_i^{(n)}$ входит



Фиг. 147. Система координат (ось y не показана).

токовая функция Грина T^I , и что в приближение n -го порядка входит n -кратный интеграл решений нулевого порядка. Обратите внимание на то, что, поскольку в каждый интеграл входит функция плотности $X(z)$, в члене n -го порядка в формуле (5) имеется множитель $[X/Y]^n$. Проанализируйте условия сходимости решения.

3. Исходя из уравнений для собственных значений (6) из § 8, примененных к гиротропной плазме, описываемой диэлектрическим тензором (3б) из § 3, покажите, что векторы поляризации \mathbf{e}_α и \mathbf{h}_α для собственных волн с поперечной пространственной зависимостью и временной зависимостью вида $\exp[-jk_t \cdot \rho + j\omega t]$ удовлетворяют уравнениям

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_\alpha = \kappa_\alpha'^2 \mathbf{e}_\alpha, \quad \tilde{\mathbf{P}}^* \cdot (\mathbf{h}_\alpha \times \mathbf{z}_0) = \kappa_\alpha'^2 (\mathbf{h}_\alpha \times \mathbf{z}_0), \quad (8)$$

где $\mathbf{P} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{S}$ и

$$\mathbf{R} = \mathbf{1}_t - \mathbf{k}'_t \mathbf{k}'_t, \quad \mathbf{S} = \epsilon'_t - (\mathbf{z}_0 \times \mathbf{k}'_t)(\mathbf{z}_0 \times \mathbf{k}'_t). \quad (8a)$$

Обозначения те же, что и в уравнениях (10а) и (13а) из § 3. На основании представления тензоров ϵ_α и \mathbf{h}_α в векторном базисе $\mathbf{k}_{t0}, \hat{\mathbf{k}}_{t0}$ [§ 3, формула (8)] покажите, что решение уравнений (8) приводит к формулам (13б) из § 3.

4. В системе координат (v, y, u) , изображенной на фиг. 147, одноосная среда (с оптической осью, направленной вдоль оси u) характеризуется тензором диэлектрической проницаемости (нормированным к ϵ_0)

$$\epsilon \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}. \quad (9)$$

а. Покажите, что в системе координат (x, y, z) , повернутой вокруг оси y на угол θ , тензор ϵ представляется в виде

$$\epsilon \rightarrow \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & \epsilon_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ \epsilon_{13} & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \cos^2 \theta + \epsilon \sin^2 \theta, & \epsilon_{13} &= (\epsilon - 1) \sin \theta \cos \theta, \\ \epsilon_{33} &= \epsilon \cos^2 \theta + \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (10a)$$

б. Покажите, что [при временной зависимости типа $\exp(j\omega t)$] в этой среде могут существовать не зависящие от x решения в виде плоских волн

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\alpha(y, z) &= \mathbf{E}_\alpha e^{-ik_0 \bar{k}_t y - ik_0 \bar{\kappa}_\alpha z}, & \bar{k}_t &= k_t/k_0, & \bar{\kappa}_\alpha &= \kappa_\alpha/k_0, \\ \mathbf{H}_\alpha(y, z) &= \mathbf{H}_\alpha e^{-ik_0 \bar{k}_t y - ik_0 \bar{\kappa}_\alpha z} \end{aligned} \quad (11)$$

при условии, что $\bar{\kappa}_\alpha$ принимает одно из четырех значений:

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}_\alpha(\bar{k}_t) &= \pm \kappa_0, & \kappa_0 &= \sqrt{1 - \bar{k}_t^2}, \\ \bar{\kappa}_\alpha(\bar{k}_t) &= \pm \kappa_e, & \kappa_e &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{33}}} \sqrt{\epsilon - \bar{k}_t^2}. \end{aligned} \quad (11a)$$

Здесь κ_0 соответствует обыкновенным собственным волнам, которые распространяются так же, как в вакууме, а κ_e — необыкновенным собственным волнам. Поясните эти решения, в которых $\bar{\kappa}$ выражается через \bar{k}_t , рассмотрев поверхности волновых чисел, изображенные на фиг. 104, с учетом того, что оси системы координат (x, y, z) не совпадают с основными осями среды и что для рассматриваемых волн $k_x \equiv 0$. Покажите, что значениям $\kappa_{0,e} > 0$ соответствуют волны, переносящие энергию в направлении $+z$, а значениям $\kappa_{0,e} < 0$ — в направлении $-z$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Clemmow P. C.*, The Plane Wave Spectrum Representation of Electromagnetic Fields, Pergamon Press, New York, 1966, Sec. 8.2.
2. *Arbel E., Felsen L. B.*, в книге: *Electromagnetic Theory and Antennas*, ed. E. C. Jordan, Pergamon Press, New York, 1963, p. 391.
3. *Clemmow P. C., Mullaly F.*, в книге: *The Physics of the Ionosphere*, The Physical Society, London (England), 1955, p. 340.
4. *Allis W. P., Buchsbaum S. J., Bers A.*, *Waves in Anisotropic Plasmas*, John Wiley and Sons, New York, 1962, Ch. 3 (имеется перевод: В. Эллис, С. Буксбаум, А. Берс, Волны в анизотропной плазме, «Атомиздат», М., 1966).
5. *Deschamps G. A., Weeks W. L.*, IRE Trans. on Antennas and Propagation, **AP-10**, 305 (1962).
6. *Seshadri S. R., Wu T. T.*, Quart. Journ. of Mech. and Appl. Math., **23**, part 2, 285 (1970).
7. *Бункин Ф. В.*, ЖЭТФ, **32**, 338 (1957).
8. *Kogelnik H., Motz H.*, в книге: *Electromagnetic Theory and Antennas*, ed. E. C. Jordan, Pergamon Press, New York, 1963, p. 477.
9. *Барсуков К. А.*, Радиотехника и электроника, **4**, 1759 (1959).
10. *Budden K. G.*, *Radio Waves in the Ionosphere*, Cambridge University Press, Cambridge (England), 1961, Ch. 18.
11. *Gross S., Felsen L. B.*, Radio Science (NBS), **69D**, 333 (1965).
12. *Seshadri S. R.*, IRE Trans. on Microwave Theory and Techniques, **MTT-10**, 573 (1962).
13. *Ishimaru A.*, в книге: *Electromagnetic Theory and Antennas*, ed. E. C. Jordan, Pergamon Press, New York, 1963, p. 591.
14. *Hurd R. A.*, в книге: *Electromagnetic Theory and Antennas*, ed. E. C. Jordan, Pergamon Press, New York, 1963, p. 569.
15. *Tai C. T.*, IRE Trans. on Antennas and Propagation, **AP-9**, 502 (1961).
16. *Seshadri S. R.*, IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, **MTT-11**, 238 (1963).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ (К I и II ТОМАМ)

- Альтернативные представления I: 126, 127
 — — — характеристической функции Грина I: 354
 Анизотропная среда II: 474
 Антенна поверхностной волны II: 165—168
 — — — диаграммы направленности II: 165—168
 Асимптотические представления поля акустического I: 169
 — — — векторного гармонического для изотропной среды I: 176
 — — — «квaziоптическое» приближение I: 8
 — — — лучевая интерпретация I: 169
 — — — метод перевала I: 8
 — — — метод седловой точки I: 8, 131
 Асимптотические разложения функций I: 474
 — — — Бесселя I: 48, 162, 163, 328; II: 338—348
 — — — сферических I: 285, 286
 — — — Ханкеля I: 215, 328, 426, 445, 514—517; II: 37, 255, 268, 338—348
 — — — Эйри I: 485—489
- Безграничный диэлектрик, возбуждение движущимся зарядом II: 70, 71
 — — — возбуждение плоской волной II: 51, 60, 61
 Бесселя функции I: 446
 — — — асимптотическое представление I: 48, 162—163, 328; II: 338—348
 — — — Дебая формула I: 516
 — — — интегральное представление I: 162, 479
 — — — модифицированные II: 263
 — — — сферические I: 285; II: 202, 325
- Бесселя функции сферические I: 285; II: 202, 325
 — — — асимптотическое представление I: 285, 286
 Боковые волны (см. Волны боковые)
- Вавилова — Черенкова излучение II: 20, 73, 75, 408
 Ватсона преобразование II: 327, 357
 Вебера функции (см. Параболического цилиндра функции)
 Ветвления точки II: 22—27, 35, 36, 39—41, 501, 502, 504
 Взаимности соотношения I: 27, 28
 — — — для вакуума I: 29
 — — — для неоднородных анизотропных сред I: 122—126
 — — — для ограниченных цилиндрических областей I: 41, 42
 — — — для однокомпонентной плазмы I: 53
 Взаимности теоремы I: 248
 Винера — Хопфа метод II: 534
 ВКБ-приближение I: 419, 422—425, 430—433
 — критерий справедливости I: 433
 — область применимости I: 447
 Внутреннее произведение векторов I: 51, 52
 — — — эрмитово I: 74, 76, 77, 93
 Волновод однородный с идеально проводящими стенками I: 40—42
 — регулярный I: 235
 — с неоднородным заполнением II: 213
 — — — траектории лучей II: 213, 220
 — — — эквивалентная схема для собственных волн II: 216
 — сферический I: 235
 — — согласование I: 289
 Волноводная ось I: 105
 Волноводное интегральное представление поля I: 144
 — — — для магнитоплазмы I: 157

«Каноническая» задача II: 183
 Канонический интеграл I: 458, 460
 Каустика I: 159, 176; II: 84, 183, 193, 211, 212, 456—463
 Кирхгофа приближение (см. Физической оптике приближение)
 Клин II: 250—252
 — идеально поглощающий II: 264—266, 271, 275
 — идеально проводящий II: 276, 287
 — с гранями переменного импеданса II: 293—295, 305
 — — — контуры интегрирования II: 297
 — скругленный (клин с цилиндром) II: 240, 241
 Кольцевой источник II: 78—81
 — — дипольный II: 78
 — — с азимутальным током II: 85
 Контрорвича — Лебедева преобразование I: 404, 507; II: 331
 Концевой импеданс I: 248, 257
 Коши — Римана соотношения I: 467, 468
 Критические точки I: 131

 Лапласа интеграл II: 17
 Лапласа интегральное преобразование II: 17
 Лебедева — Контрорвича теорема II: 251
 Лежандра полином I: 541
 Лежандра функции II: 327, 332, 335
 — — присоединенные I: 391, 396, 540
 Линейный источник II: 14, 15
 — — волновых векторов поверхность II: 70
 — — дипольный II: 65
 — — импульсный II: 66, 67
 — — магнитный II: 65
 — — электрический II: 59—61, 64, 65, 67—69
 — — — Грина функция II: 62, 63, 67, 69
 — — — эквивалентная схема для определения собственных волн II: 63, 65
 Линии передачи, возбуждение точечным источником I: 261—263
 — — двустороннее согласование I: 381
 — — для анизотропной среды II: 475
 — — для гиротропной среды II: 475
 — — для заряда, движущегося вдоль границы диэлектрика II: 120, 121

Линии передачи для звуковых волн I: 97
 — — для изотропной среды II: 475
 — — для кусочно-однородной среды II: 517
 — — для одноосной среды II: 475
 — — для электромагнитных волн I: 101
 — — короткое замыкание I: 266
 — — необычного типа II: 475, 487, 488
 — — неоднородные II: 7
 — — обычного типа II: 475, 492
 — — разрыв I: 267
 — — резонанс I: 272
 — — угловые I: 381
 Логарифмические производные (нормированные импедансы), I: 270, 271
 Лучевая поверхность, лучевых скоростей поверхность I: 139
 Лучевое приближение, лучевой метод, приближение лучевой оптики (см. Геометрическая оптика)
 Лучевой показатель преломления I: 181, 182
 Лучи боковые I: 184, 193, 194; II: 433, 449, 450, 520, 521
 — в волноводе с неоднородным заполнением II: 213, 220
 — в волновом канале II: 195
 — в геометрической оптике I: 132
 — геометрическая теория дифракции I: 164, 183—186
 — дифрагировавшие I: 183, 184, 191, 192; II: 208, 209
 — длина оптического пути I: 173
 — захваченные II: 196
 — изменение фазы вдоль II: 177
 — канонические препятствия I: 185
 — коэффициент расходимости I: 183
 — критические углы падения II: 448
 — направление I: 106
 — необыкновенные II: 520, 521
 — обратное преломление в плазме II: 438, 448
 — обыкновенные II: 520, 521
 — отражение и преломление I: 183, 186, 203, 204; II: 191
 — — — в анизотропных средах I: 188, 189
 — — — в горячей изотропной плазме I: 190, 191
 — — — в изотропной среде I: 187, 188
 — — — на границе плазмы II: 455, 456

Лучи, отражение и преломление на искривленной поверхности I: 219, 220
 — — — ползущие I: 184, 185
 — — пространственно-временные I: 131, 132, 136, 137, 160
 — — прямые II: 189
 — — стелющиеся II: 315, 359
 — траектории I: 151, 154, 171—173, 174—177, 208
 — трубка I: 141, 142, 148; II: 94, 178
 — — сохранение энергии I: 171, 174, 175, 181, 182, 203; II: 179
 — фокусировка II: 433, 456, 463

Магнитный ток I: 117, 118
 Магнитоактивная среда, I: 136
 Магнитоплазма II: 494, 495, 499, 500
 Мелера функция II: 333
 Мощность излучения источника звука I: 60, 61
 — плазменного поля I: 70
 — — электрического и магнитного токов I: 64, 65

Наведенные токи I: 6, 26, 117, 120
 Непрерывный переход (см. Плавный переход)

Обратноквадратичный профиль II: 7, 199—201
 — — возбужденные линейным электрическим током II: 201
 — — возбужденные магнитным диполем II: 201
 — — траектории лучей II: 208, 212
 — — эквивалентная схема II: 202
 Общая задача теории поля I: 6
 Одноосная среда II: 374, 380
 — — волновых векторов поверхность II: 377—380, 391, 395, 406
 — — дисперсионное уравнение для плоской волны II: 375, 376
 — — неограниченная II: 390
 — — равных фаз поверхность II: 394, 395
 — — собственные функции II: 391
 — — телеграфные уравнения II: 382
 Ортогональности соотношения I: 90, 91
 — — для гиротропной среды II: 479—482
 Особые точки коэффициента отражения II: 43

Осцилляторное представление функции Грина I: 78, 79
 — — — акустической I: 81
 — — — для однородной среды I: 132
 — — — для слабееоднородной среды I: 142
 — — — плазменной I: 87
 — — — электромагнитной I: 84
 Отражательная симметрия II: 481
 Отражения оператор II: 481

Параболического цилиндра функции I: 425, 427, 516, 517; II: 41, 453, 462

Парсевала теорема I: 65, 135
 Перевала метод II: 39, 103—105
 — точки II: 39—41, 46, 47
 Переноса уравнения I: 166, 170, 201, 202

— — поляризации вектора I: 179
 Переходная область (полутень) I: 10; II: 256—258

Плавный переход I: 434; II: 7, 199, 228

— — Эпштейна решение I: 438
 Плазменная частота электронов I: 112

Плазменное поле I: 43—45
 — — дисперсионное уравнение I: 68, 69, 86

— — плазменные колебания I: 86
 — — приведенная формулировка задачи I: 49

— — статические колебания I: 86
 Плоские волны I: 7
 Плоский раскрыв II: 158

Плоскостные среды, возбуждение движущимися зарядами II: 19
 — — — линейным источником II: 14
 — — — точечным источником II: 13

— — — — импульсным II: 16
 — — контуры интегрирования и точки ветвления II: 35, 36

— — эквивалентная схема для определения собственных волн II: 24

Поверхностный импеданс II: 147—150, 237, 294

Поверхность раздела, геометрические особенности I: 120, 123

— — граничные условия I: 117
 — — «импедансное граничное условие» I: 122

— — наведенные токи I: 117
 — — сторонние токи I: 117

- Фурье — Лапласа распределение I: 7
 Фурье-образы функций Грина I: 58, 63
 Фурье четырехмерный интеграл I: 54
- Ханкеля преобразование (см. Фурье — Бесселя преобразование)
 Ханкеля функции II: 63, 82
 — — аналитические свойства II: 253
 — — асимптотические выражения I: 215, 328, 426, 445, 514—517, II: 37, 255, 268, 338—348
 — — Дебая формула I: 516; II: 320
 — — модифицированные I: 474
 — — первого рода I: 403
 — — сферические I: 294
 Характеристик метод I: 167
 Характеристическая функция Грина (резольвента) I: 9, 342, 343; II: 328
 — — альтернативные представления I: 354
 — — для E-волн I: 353
 — — для H-волн I: 348
 — — для неограниченной области I: 377
 — — для ограниченной области I: 361
 — — для полубесконечной области I: 369
 — — для сферической области I: 390
 — — определение с помощью эквивалентных схем I: 343—345, 362
 — — представленные в виде контурных интегралов I: 357
 — — радиальная I: 401; II: 139
 — — угловая I: 385
 Характеристический импеданс I: 60
 Хевисайда функция I: 32, 36
- Ценнека поверхностная волна II: 92
 Циклотронная частота электронов (гирочастота) I: 44
 Цилиндрические функции II: 348
- Частотомодулированный (ЧМ) импульс, распространение в плазме I: 230, 231
 Черенкова излучение (см. Вавилова — Черенкова излучение)
 «Черный экран» II: 264

- Шварца принцип симметрии I: 155, 441
 Шварца производная I: 417
 Штурма — Лиувилля задача I: 9, 303, 342, 343
 — — оператор I: 302
 — — уравнение I: 302, 303, 408
- Эйконала уравнение I: 167, 170, 177, 181
 Эйлера уравнения для заряженной невязкой жидкости I: 44
 — — для звукового поля I: 14
 Эйри волна I: 159
 Эйри дифференциальное уравнение II: 345
 Эйри функции I: 158, 422—424, 483—485, 533—537; II: 82, 345—347
 — — асимптотическое разложение I: 485—489
 — — контуры интегрирования I: 484
 — — неполные I: 466, 522, 523, 527
 Эквивалентности принцип I: 6
 Эквивалентные линии передачи (см. Линии передачи)
 Эквивалентные схемы (см. также Линии передачи) для возбуждения точечным источником I: 262—264
 — — для звуковых волн I: 59
 — — для изотропной плазмы I: 68, 69
 — — для однородной задачи I: 271
 — — для определения собственных волн в волноводе с неоднородным заполнением II: 216
 — — — — — в диэлектрической пластине II: 134, 143, 144
 — — — — — в одноосной среде II: 384
 — — — — — в плоскостных средах II: 24
 — — — — — в полубесконечном диэлектрике II: 97, 107
 — — — — — в среде с обратно-квадратичным профилем II: 202
 — — — — — на импедансной поверхности II: 150
 — — — — — при возбуждении линейным источником электрического тока II: 63, 65
 — — для определения характеристической функции Грина I: 343—345
 — — для падающей волны в регулярном волноводе I: 260
 — — для «поперечного резонанса» I: 273

- Эквивалентные схемы для сферических волноводов I: 289—291
 — — для угловой линии передачи I: 383
 — — для электромагнитных волн I: 64
 Электрический диполь I: 32
 — — «ближнее поле» I: 33
 — — импульсный I: 207
 — — «поле излучения» I: 33
 — — статическое поле I: 33
 Электроакустическая волна I: 190, 191
 Элементарный электрический ток вблизи диэлектрической пластины II: 145—147
 — — вблизи полубесконечного диэлектрика поперечный II: 105
- Элементарный электрический ток вблизи диэлектрической пластины продольный II: 87
 Энергия звукового поля I: 60
 — плазменного поля I: 70
 — электромагнитного поля I: 64, 65
 Эпштейна профиль (см. Плавный переход)
 Эрмитова среда II: 489, 490
 — — без диссипации I: 304
 — — с отражательной симметрией II: 493
 Эрмитово внутреннее произведение векторов I: 74, 76, 77, 93
 Эрмитово-сопряженные аффиноры I: 109
 Эрмитовы операторы I: 99, II: 494

ж. Гармоническая плоская волна	287
з. Импульсная плоская волна	289
и. Особый случай: полуплоскость	289
§ 6. Клин с гранями переменного импеданса	293
а. Клин, одна грань которого идеально поглощающая, а другая — с переменным импедансом	295
б. Клин с двумя гранями переменного импеданса	305
§ 7. Дифракция на круговом цилиндре	307
а. Линейный источник	307
б. Точечный источник	321
§ 8. Поля в сферических областях	323
а. Введение	323
б. Различные представления для полей	324
в. Высокочастотное поле при дифракции на конусе	332
Приложение 1. Асимптотические выражения для $H_V^{(1)}(z)$ и $H_V^{(2)}(z)$	338
а. Большие и неодинаковые аргумент и порядок	338
б. Большой аргумент	340
в. Большой порядок	341
г. Большие и почти одинаковые порядок и аргумент	344
д. Нули функций $H_V^{(1)}(z)$ и $H_V^{(1)'}(z)$	345
Приложение 2. Формулы для цилиндрических функций	348
Задачи	349
Литература	372
Глава 7. Электромагнитные поля в одноосных анизотропных средах	374
§ 1. Введение	374
§ 2. Вычисление поля методами теории цепей	380
а. Вывод телеграфных уравнений	380
б. Метод потенциальных функций	385
в. Тензорная функция Грина	386
§ 3. Источники в неограниченной среде	390
а. Диполь, ориентированный вдоль оптической оси	392
б. Диполь, ориентированный перпендикулярно оптической оси	402
в. Линейные токи с линейным изменением фазы, ориентированные вдоль оптической оси	403
г. Излучение заряда, движущегося прямолинейно и равномерно вдоль оптической оси	407
д. Линейные токи, ориентированные перпендикулярно оптической оси	408
§ 4. Дифракция на препятствиях, находящихся в неограниченной однородной плазме	418
а. Оптическая ось параллельна образующим идеально проводящего цилиндра	418
б. Оптическая ось перпендикулярна оси идеально проводящего цилиндра	419
в. Полупространство, ограниченное идеальным проводником	422
г. Полупространство, ограниченное поверхностью с реактивным импедансом	425
д. Клин и полуплоскость	427
§ 5. Излучение из полупространства, заполненного однородной плазмой	432
а. Постановка задачи (линейный источник)	434
б. Отражение и прохождение плоских волн и условие излучения	435
в. Разложение решения по собственным волнам	439

г. Асимптотические оценки в случае полупространства, заполненного плазмой	440
д. Асимптотические оценки в случае свободного полупространства	455
е. Излучение поперечного электрического диполя	463
Задачи	468
Литература	471
Глава 8. Поля в анизотропных областях	473
§ 1. Введение	473
§ 2. Разложение по волноводным волнам в анизотропных средах (приведенная формулировка)	476
а. Общий случай произвольной среды	476
б. Области без потерь	480
в. Симметричные области с потерями	480
г. Поперечная анизотропия (отражательная симметрия)	481
д. Изотропные области	482
е. Области с разложением на E - и H -волны	482
ж. Разложения по собственным функциям для приведенного электромагнитного поля	485
з. Эквивалентная линия передачи необычного типа	487
§ 3. Волноводные волны в холодной магнитоплазме (волноводная ось параллельна гиротропной оси)	493
а. Определение собственных функций	493
б. Поверхности волиовых чисел	501
в. Функции Грина для неограниченных областей	505
г. Функции Грина в плоскостойких областях	515
§ 4. Волноводные волны в холодной магнитоплазме (волноводная ось перпендикулярна гиротропной оси)	522
а. Собственные функции и собственные значения в случае, когда вектор \mathbf{b}_0 перпендикулярен вектору \mathbf{z}_0	522
б. Двумерные краевые задачи в гиротропных средах	525
в. Излучение линейного магнитного источника в присутствии идеально проводящей плоскости	528
г. Дифракция на полуплоскости	534
Задачи	535
Литература	542
Предметный указатель (к I и II томам)	543