АКАДЕМИЯ НАУК УССР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

С. Ф. ФЕЩЕНКО, Н. И. ШКИЛЬ, Л. Д. НИКОЛЕНКО

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

«НАУКОВА ДУМКА»
КИЕВ — 1966

В книге излагаются асимптотические методы интегрирования линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами, встречающихся во миогих областях физики и техники.

Книга рассчитана на широкий круг инженерно-техническнх и научных работников, интересующихся вопросами приближенного интегрирования дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, в частности уравнениями, описывающими колебательные процессы.

517.2
Ф47

Ответственный редактор
доктор физико-математических наук
Ю. Л. Далецкий

2—2—3
7—66—ЗЛТЛ

Введение

Решение многих задач физики и техники сводится, как известно, к исследованию дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Так как лишь в исключительных случаях удается получить точное решение такого уравнения, то приходится прибегать к различным приближенным методам интегрирования. Среди приближенных методов интегрирования дифференциальных уравнений важное место занимают асимптотические методы, в основе которых лежит идея разложения искомого решения в формальный ряд по степеням некоторого малого параметра. И, хотя при этом степенные ряды являются, как правило, расходящимися, тем не менее приближенное решение — решение, получаемое путем обрыва формальных рядов на каком-то m-ом члене, — оказывается весьма пригодным для целого ряда практических расчетов. Получаемое таким путем приближенное решение имеет асимптотический характер в том смысле, что оно стремится к соответствующему точному решению не с увеличением числа m, а при фиксированном m и при стремлении к нулю малого параметра.

Так как асимптотические методы дают возможность получить аналитическое выражение приближенного решения, то последнее пригодно также и для исследования качественной картины поведения решения на достаточно большом, хотя и конечном, интервале изменения независимой переменной (см., например, работу [118])

В настоящей монографии излагаются асимптотические методы интегрирования определенного класса линейных дифференциальных уравнений, а именно уравнений, в которых коэффициенты являются функциями медленного времени $\tau = \varepsilon t$, где ε — малый положительный параметр, свидетельствующий о том, что коэффициенты уравнения меняются медленно, т. е. их производные по независимой переменной t пропорциональны малому параметру ε.

Дифференциальные уравнения с медленно меняющимися коэффициентами часто встречаются на практике. К ним приводятся, например, уравнения с малым параметром при старших производных, исследованию которых посвящены работы А. Н. Тихонова [78—80], И. С. Градштейна [16—17], В. М. Волосова [13—14], А. Б. Васильевой [9—11], К. В. Задираки [26—28], М. И. Вишика, Л. А. Люстерника [12] и других.

В самом деле, рассмотрим уравнение

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} + p(x) y = 0. \tag{1}$$

Положив здесь

$$x = \varepsilon t = \tau, \tag{2}$$

получим

$$\frac{dy}{dt} + p(\tau)\, y = 0, \tag{3}$$

т. е. получим уравнение, в котором коэффициент $p(\tau)$ есть медленно меняющаяся функция переменного t.

К аналогичным уравнениям преобразуются также некоторые задачи на собственные значения. Например, применяя в уравнении Штурма — Лиувилля

$$\frac{d^2y}{dx^2} + [\lambda g(x) - r(x)]\, y = 0, \tag{4}$$

где λ — большой параметр, подстановку

$$x = \varepsilon t \equiv \tau, \qquad \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \tag{5}$$

получим уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} + [g(\tau) - \varepsilon^2 r(\tau)]\, y = 0, \tag{6}$$

в котором $g(\tau)$, $r(\tau)$ — медленно меняющиеся функции.

Кроме того (и это особенно важно для приложений), встречается целый ряд практических задач (см., например, § 5 и 10 настоящей монографии), где возможно выделить безразмерную комбинацию известных величин, играющую роль малого параметра, что позволяет рассматривать полученные уравнения как уравнения с медленно меняющимися коэффициентами (см. также работы [64, 103]).

Изложим теперь вкратце историю вопроса.

Идея асимптотического представления решений дифференциальных уравнений зародилась еще в работах Лиувилля [123, 124]. Дело в том, что исследование сходимости разложения заданной «произвольной» функции по собственным функциям некоторой краевой задачи основывается на изучении поведения самих собственных функций, поэтому получение асимптотических формул собственных функций представляет значительный интерес. Лиувиллем впервые были получены асимптотические формулы для решений уравнения второго порядка типа (4), а затем и для уравнений высших порядков.

Ввиду важности вопроса асимптотических представлений решений дифференциальных уравнений для задач математической физики эта теория после работ Лиувилля стала быстро развиваться.

В дальнейшем выяснилось, что асимптотические представления решений имеют значение не только для анализа сходимости разложения по собственным функциям, но и для многих задач, в частности прикладных, совершенно другого характера.

Так, в работах Фауллера и Локка [132] результаты Лиувилля были применены к решению приближенных уравнений движения снаряда. Де-Спаар [127] применил этот метод к решению задачи вращательного движения снаряда. Асимптотический характер решения, полученного де-Спааром, был доказан Горном [121].

Значительной вехой в разработке асимптотического представления решений явилась работа А. Пуанкаре [125], где он систематизировал и значительно развил идеи по этому вопросу.

С большим успехом и мастерством асимптотический метод применялся в работах русского ученого В. А. Стеклова, в частности в работе «Задача об охлаждении неоднородного твердого тела» (Харьков, 1896 г.). Однако все перечисленные исследования вращаются, если можно так выразиться, вокруг идей Лиувилля и относятся к исследованию самосопряженных дифференциальных систем. Приходится поэтому признать, что несмотря на общие результаты, полученные исследователями в этом направлении, область применимости указанного метода оставалась ограниченной.

С этим ограничением мы не сталкиваемся в работах Биркгоффа [119, 120], которые являются обобщением результатов Горна и Шлезингера на уравнения n-го порядка и системы уравнений.

Отметим, что асимптотическое представление решений дифференциальных уравнений, содержащих параметр, определяется, вообще говоря, поведением корней некоторого алгебраического уравнения, подобного характеристическому уравнению для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Это уравнение в дальнейшем мы также будем называть характеристическим.

В упомянутых работах Шлезингера, Биркгоффа рассматривался тот случай, когда корни характеристического уравнения оставались простыми на всем промежутке изменения аргумента.

Дальнейшим обобщением их результатов являются работы Я. Д. Тамаркина. В работе [76] он частично рассмотрел и случай кратных корней характеристического уравнения, построив асимптотическое решение линейной системы второго порядка.

Однако теория Шлезингера — Биркгоффа — Тамаркина относилась к обыкновенным однородным линейным дифференциальным уравнениям. Необходимо было обобщить теорию асимптотического представления решения на неоднородные дифференциальные уравнения. Этот пробел восполнили Фаулер и Локк [132, 133], причем они значительно упростили доказательства основных результатов Биркгоффа.

В 1936 г. появилась работа В. И. Тржицинского [131], где дано полное изложение состояния вопроса об асимптотическом представлении решений систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Кроме того, здесь была обобщена теория Шлезингера — Биркгоффа — Тамаркина на случай линейных интегро-дифференциальных уравнений, содержащих параметр.

Обычно для асимптотического представления решений дифференциальных уравнений, содержащих параметр, пользовались выражением

$$e^{\alpha^r \sum\limits_{s=0}^{r-1} \Omega_s(x)\alpha^{-s}} \left[\sum_{s=0}^{m} y_s(x)\alpha^{-s} + \eta\alpha^m \right],$$

где α — большой параметр, а η — величина, стремящаяся к нулю при $\alpha \to \infty$ по пути, целиком лежащему в некоторой области плоскости α.

В период с 1940 по 1946 гг. вышел ряд работ В. С. Пугачева [56—60], в которых излагаются интересные и существенно новые результаты, относящиеся к теории асимптотических представлений интегралов неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго и высшего порядков, коэффициенты которых содержат параметр. В работах [56, 57] содержится существенно новый результат, относящийся к оценке погрешности приближенного представления интегралов первыми членами их асимптотических разложений.

Кроме теорем, обобщающих результаты предшествующих исследователей, В. С. Пугачев указал новый тип асимптотического представления интегралов систем обыкновенных линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений.

Этот новый тип представления решения имеет вид

$$\sum_{h=1}^{n} z_h(x, \alpha) \left\{ \sum_{k=0}^{m} y_{hk}(x)\alpha^{-k} + \eta_h \alpha^{-m} \right\},$$

где $z_h(x, \alpha)$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ — функции, удовлетворяющие некоторой системе линейных дифференциальных уравнений, а η_h — величины, стремящиеся к нулю при $\alpha \to \infty$.

В. С. Пугачев обобщает также теорию асимптотического представления на случай произвольной комплексной области изменения аргументов.

К работам по асимптотическим методам следует отнести также работы Терретина [130, 77] и Сибуя [126], в которых, в основном, выполняется асимптотическое расщепление исходной системы линейных дифференциальных уравнений на несколько подсистем более низкого порядка, количество которых определяется числом тождественно кратных корней характеристического уравнения.

Наш краткий исторический обзор был бы далеко неполным, если бы мы не остановились на асимптотических методах, созданных Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым [41, 2—4], для решения задач нелинейной механики. Будучи строго обоснованными, эти методы применимы для описания как периодических, так и квазипериодических процессов, а также для исследования самых общих неконсервативных систем.

Необходимо заметить, что обычные методы разложения по степеням малого параметра приводят к приближенным решениям, содержащим так называемые секулярные члены, в которых независимое переменное t выходит за знак тригонометрических выражений. Это приводит к тому, что ошибка, происходящая от подстановки в дифференциальные уравнения таких приближенных решений, хотя при фиксированном t и убывает вместе с малым параметром, но неравномерно по отношению к t. Можно найти такую последовательность значений $t \to \infty$, для которой ошибка будет стремиться не к нулю, а к бесконечности, как бы быстро ни убывал малый параметр. Поэтому область применимости обычного метода разложения по степеням малого параметра приходится ограничивать достаточно узким интервалом времени. Однако при исследовании колебательных процессов, особенно процессов высокочастотных, требуется как раз иметь приближенные формулы, которые были бы пригодны на возможно более длинном интервале времени.

Созданные Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым асимптотические методы приводят к приближенным формулам, уже не содержащим секулярных членов. Получаемые на этом пути асимптотические решения применимы на достаточно большом (хотя и конечном) интервале времени.

Дальнейшее значительное развитие методов нелинейной механики, предложенных и обоснованных Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым, мы находим в работах Ю. А. Митропольского и его школы [52—54, 44—46, 55]. Разработанный Ю. А. Митропольским метод позволяет весьма эффективно проводить исследования нестационарных процессов в нелинейных колебательных системах, возникающих при изменении частот, масс и других параметров нелинейной системы. Следует отметить, что область применения этого метода весьма широка, так как основное его условие — требование медленного изменения параметров системы по отношению к «собственным периодам» колебаний — фактически выполняется во многих задачах.

Нельзя не упомянуть здесь также и о работах И. З. Штокало [116—118], который на основе асимптотических методов Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова создал метод, позволяющий устанавливать критерии устойчивости и неустойчивости решений систем линейных дифференциальных уравнений, коэффициенты которых мало отличаются от постоянных.

Следует указать и на метод исследования асимптотического поведения решений линейных дифференциальных уравнений, развитый И. М. Рапопортом [61]. В основе указанного метода лежит идея преобразования заданной системы дифференциальных уравнений к специальному виду, названному автором L-диагональным.

Пользуясь этим методом, И. М. Рапопорт получает ряд интересных результатов, относящихся к асимптотическим свойствам решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и вопросам устойчивости движения.

Все упомянутые выше исследования по асимптотической теории линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр, относились к тому случаю, когда корни характеристического уравнения оставались простыми или же сохраняли кратность (в системах второго порядка [76]) во всей области изменения аргумента. Весьма важный и интересный вопрос об асимптотическом представлении решений для случая, когда кратность корней характеристического уравнения меняется в отдельных точках области изменения аргумента, оставался неисследованным.

Этот пробел был восполнен в ряде работ авторов данной книги [82—100, 104—115], а также в фундаментальных исследованиях Ю. Л. Далецкого и С. Г. Крейна [18—22]. Здесь следует упомянуть также результаты А. Г. Илюхина [29—31], И. И. Ковтун [34—38], И. И. Маркуша [50—51], А. А. Стоницкого [72—75] и др.

Указанные работы, опубликованные в 1947—1965 гг., легли в основу настоящей монографии.

Монография состоит из шести глав.

В первых двух главах исследуется вопрос об асимптотическом представлении решений линейных дифференциальных уравнений со свободными членами вида $p(\tau, \varepsilon) e^{i\theta(t, \varepsilon)}$, где $p(\tau, \varepsilon)$ — медленно меняющаяся функция (или вектор-функция), а $\theta(t, \varepsilon)$ — скалярная функция, производная которой имеет вид

$$\frac{d\theta}{dt} = k(\tau).$$

При этом различаются два таких случая:

1) «резонанса» — когда для некоторых значений аргумента из $[0, L]$ функция $ik(\tau)$ становится равной одному (или нескольким) из корней соответствующего характеристического уравнения;

2) «нерезонанса» — когда значения $ik(\tau)$ не могут совпадать ни с одним корнем характеристического уравнения на $[0, L]$.

В каждом из указанных случаев предлагается свой метод построения асимптотических решений заданных дифференциальных уравнений.

Разработанная методика оказывается весьма эффективной при решении ряда практических задач. В настоящей монографии с помощью этих методов интегрируются дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, которые отражают движение шахтных подъемных канатов с грузом на конце.

В третьей главе описан асимптотический метод расщепления системы линейных дифференциальных уравнений на несколько независимых подсистем низших порядков, количество которых зависит от числа изолированных групп корней характеристического уравнения. В случае простых корней отщепленные уравнения интегрируются в квадратурах, т. е. мы можем получить асимптотические решения исследуемой системы.

Весьма интересный и в то же время сложный случай построения асимптотических решений системы линейных дифференциальных уравнений содержится в четвертой главе книги.

Здесь рассматривается случай, когда среди корней характеристического уравнения появляются кратные корни с кратными элементарными делителями и «внешняя частота» — $ik(\tau)$ — в некоторых точках рассматриваемого промежутка становится равной одному из таких (кратных) корней.

Изложенная теория применяется к исследованию дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных.

Пятая глава посвящена изложению результатов тех работ Ю. Л. Далецкого и С. Г. Крейна [18—22], в которых асимптотическими методами исследуются дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах.

В шестой главе делается попытка применить описанные в предыдущих главах асимптотические методы к решению некоторых задач, связанных с уравнениями в частных производных. При этом ставилась цель получить наиболее простые и удобные в пользовании расчетные формулы.

В конце книги приводится список литературы, посвященной асимптотическим представлениям решений дифференциальных уравнений, содержащих параметр. Остается добавить, что в кратком историческом обзоре, посвященном данному вопросу, мы не смогли осветить целый ряд результатов, весьма интересных как с точки зрения теории [23—25, 47, 48, 5—8], так и инженерных приложений [63, 67].

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность академику Николаю Николаевичу Боголюбову, ценные советы которого во многом способствовали разработке данных методов.

Авторы также благодарят академиков АН УССР Ю. А. Митропольского и И. З. Штокало за ряд полезных замечаний, способствовавших улучшению книги, и доктора физико-математических наук Ю. Л. Далецкого за согласие быть ответственным редактором монографии.

Мы признательны также кандидатам физико-математических наук А. Г. Илюхину и И. И. Ковтун, которые написали для данной книги § 18 (А. Г. Илюхин) и § 11, 27 (И. И. Ковтун).

Построение асимптотического решения для линейных дифференциальных уравнений второго порядка с медленно меняющимися коэффициентами

§ 1. Постановка задачи

Простейшим примером дифференциальных уравнений, для решения которых может быть применен излагаемый ниже асимптотический метод, служит уравнение

$$a(\tau, \varepsilon)\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon c(\tau, \varepsilon)\frac{dx}{dt} + b(\tau, \varepsilon)x = p(\tau, \varepsilon)e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \tag{1.1}$$

где $a(\tau, \varepsilon)$, $c(\tau, \varepsilon)$, $b(\tau, \varepsilon)$, $p(\tau, \varepsilon)$ — медленно меняющиеся функции, допускающие разложение

$$\begin{aligned} a(\tau, \varepsilon) &= \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s a_s(\tau), & c(\tau, \varepsilon) &= \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s c_s(\tau), \\ b(\tau, \varepsilon) &= \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s b_s(\tau), & p(\tau, \varepsilon) &= \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s p_s(\tau). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь τ — так называемое «медленное» время, определяемое соотношением

$$\tau = \varepsilon t, \tag{1.3}$$

а ε — малый действительный параметр из интервала

$$0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0. \tag{1.4}$$

Условимся называть уравнение

$$a_0(\tau)\lambda^2(\tau) + b_0(\tau) = 0 \tag{1.5}$$

характеристическим для дифференциального уравнения (1.1).

Будем в дальнейшем предполагать, что для всех $\tau \in [0, L]$ выполняются условия

$$a_0(\tau) \neq 0, \qquad \frac{b_0(\tau)}{a_0(\tau)} > 0, \qquad \frac{d\theta(t, \varepsilon)}{dt} = k(\tau)^*. \tag{1.6}$$

* Условия (1.6) вызваны не существом излагаемого ниже метода, а выделением класса дифференциальных уравнений, описывающих колебательные процессы.

Поэтому из уравнения (1.5) следует

$$\lambda_{1,2}(\tau) = \pm i\sqrt{\frac{b_0(\tau)}{a_0(\tau)}}. \tag{1.7}$$

В зависимости от значения функций $ik(\tau)$ и корней (1.7) могут представиться два случая:

1) «резонансный» — функция $ik(\tau)$ в некоторых точках сегмента $[0, L]$ становится равной одному из корней уравнения (1.5), например $\lambda_1(\tau)$;

2) «нерезонансный» — когда

$$ik(\tau) \neq \lambda_{1,2}(\tau) \tag{1.8}$$

при любом $\tau \in [0, L]$.

В настоящей главе каждый из случаев будет рассмотрен отдельно.

Следует отметить, что здесь рассматривается, вообще говоря, задача Коши, т. е. ищется решение уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$x(t)\big|_{t=0} = x_0, \qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = x_0. \tag{1.9}$$

Однако излагаемый метод может быть применим и к решению краевых задач.

§ 2. Формальное решение в случае «резонанса»

В «резонансном» случае может быть доказана такая теорема.

Теорема I.1. *Если коэффициенты уравнения (1.1) и функция $k(\tau)$ неограниченно дифференцируемы по τ на сегменте $[0,L]$, то формальное частное решение дифференциального уравнения (1.1) может быть представлено в виде*

$$x(t, \varepsilon) = \xi(t, \varepsilon)\, e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \tag{2.1}$$

где функция $\xi(t, \varepsilon)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\xi}{dt} = [D(\tau, \varepsilon) + i(\Omega(\tau, \varepsilon) - k(\tau))]\,\xi + z(t, \varepsilon), \tag{2.2}$$

в котором коэффициенты допускают формальные разложения:

$$D(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s D_s(\tau), \qquad \Omega(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Omega_s(\tau),$$

$$z(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s z_s(\tau). \tag{2.3}$$

Доказательство данной теоремы будет состоять в определении членов разложения (2.3) таким образом, чтобы выражение (2.1), в котором $\xi(t, \varepsilon)$ является интегралом уравнения (2.2), формально удовлетворяло уравнению (1.1).

Для этого подставим функцию $x(t, \varepsilon)$, определяемую соотношениями (2.1), (2.2), в уравнение (1.1). Получим тождество

$$\{a(\tau, \varepsilon)[(D(\tau, \varepsilon) + i\Omega(\tau, \varepsilon))^2 + \varepsilon(D(\tau,\varepsilon) + i\Omega(\tau, \varepsilon))'] +$$
$$+ \varepsilon c(\tau, \varepsilon)[D(\tau, \varepsilon) + i\Omega(\tau, \varepsilon)] + b(\tau, \varepsilon)\}\, \xi(t, \varepsilon) + a(\tau, \varepsilon)\{D(\tau, \varepsilon) +$$
$$+ i[\Omega(\tau, \varepsilon) + k(\tau)] + z(\tau, \varepsilon) + \varepsilon z'(\tau, \varepsilon)\} + \varepsilon c(\tau, \varepsilon) = p(\tau, \varepsilon) \quad (2.4)$$

(здесь и в дальнейшем штрихом (′) обозначено дифференцирование по τ).

Приравняем отдельно коэффициенты при $\xi(t, \varepsilon)$ и отдельно свободные члены из обеих частей этого тождества. В результате получим два соотношения:

$$a(\tau, \varepsilon)\{[D(\tau, \varepsilon) + i\Omega(\tau, \varepsilon)]^2 + \varepsilon[D(\tau, \varepsilon) + i\Omega(\tau, \varepsilon)]'\} +$$
$$+ \varepsilon c(\tau, \varepsilon)[D(\tau, \varepsilon) + i\Omega(\tau, \varepsilon)] + b(\tau, \varepsilon) = 0, \quad (2.5)$$

$$a(\tau, \varepsilon)\{[D(\tau, \varepsilon) + i(\Omega(\tau, \varepsilon) + k(\tau))]\, z(\tau, \varepsilon) + \varepsilon z'(\tau, \varepsilon)\} +$$
$$+ \varepsilon c(\tau, \varepsilon)\, z(\tau, \varepsilon) = p(\tau, \varepsilon), \quad (2.6)$$

которые дают нам возможность определить коэффициенты формальных рядов (2.3).

Воспользуемся сначала соотношением (2.5). Выделяя в нем коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε, получаем рекуррентные формулы:

$$-a_0(\tau)[\Omega_0(\tau)]^2 + b_0(\tau) = 0, \quad (2.7)$$

$$\sum_{j=0}^{s}\sum_{m=0}^{s-j} a_j(\tau)[D_m(\tau) + i\Omega_m(\tau)][D_{s-j-m}(\tau) + i\Omega_{s-j-m}(\tau)] +$$
$$+ \sum_{j=0}^{s-1} a_j(\tau)[D_{s-1-j}(\tau) + i\Omega_{s-1-j}(\tau)]' +$$
$$+ \sum_{j=0}^{s-1} c_j(\tau)[D_{s-1-j}(\tau) + i\Omega_{s-1-j}(\tau)] + b_s(\tau) = 0, \qquad s = 1, 2, \ldots \quad (2.8)$$

(в силу (2.3), $D_0 \equiv 0$).

Из уравнения (2.7) находим

$$\Omega_0(\tau) = \pm\sqrt{\frac{b_0(\tau)}{a_0(\tau)}}. \quad (2.9)$$

В дальнейшем при построении частного решения неоднородного уравнения (1.1) будем для $\Omega_0(\tau)$ брать арифметическое значение.

Положив в уравнении (2.8) $s=1$, получим

$$2i\Omega_0(\tau)a_0(\tau)[D_1(\tau)+i\Omega_1(\tau)]-a_1(\tau)\Omega_0^2(\tau)+ia_0(\tau)\Omega_0'(\tau)+$$
$$+i\Omega_0(\tau)c_0(\tau)+b_1(\tau)=0, \tag{2.10}$$

откуда

$$D_1(\tau)=-\frac{a_0(\tau)\Omega_0'(\tau)+c_0(\tau)\Omega_0(\tau)}{2\Omega_0(\tau)a_0(\tau)}, \tag{2.11}$$

$$\Omega_1(\tau)=\frac{b_1(\tau)-a_1(\tau)\Omega_0^2(\tau)}{2\Omega_0(\tau)a_0(\tau)}.$$

Аналогично находим рекуррентные соотношения для определения функций $D_s(\tau)$ и $\Omega_s(\tau)$ при $s\geqslant 2$, а именно;

$$D_s(\tau)+i\Omega_s(\tau)=-\frac{1}{2ia_0(\tau)\Omega_0(\tau)}\Bigg\{-a_0(\tau)\sum_{j=1}^{s-1}[D_j(\tau)+i\Omega_j(\tau)]\times$$
$$\times[D_{s-j}(\tau)+i\Omega_{s-j}(\tau)]+\sum_{j=1}^{s}\sum_{m=0}^{s-j}a_j(\tau)[D_m(\tau)+i\Omega_m(\tau)]\times$$
$$\times[D_{s-j-m}(\tau)+i\Omega_{s-j-m}(\tau)]+\sum_{j=0}^{s-1}a_j(\tau)[D_{s-1-j}(\tau)+i\Omega_{s-1-j}(\tau)]'+$$
$$+\sum_{j=0}^{s-1}c_j(\tau)[D_{s-1-j}(\tau)+i\Omega_{s-1-j}(\tau)]+b_s(\tau)\Bigg\}. \tag{2.12}$$

Отделяя здесь действительную и мнимую части, находим неизвестные функции $D_s(\tau)$ и $\Omega_s(\tau)$. Заметим, что из формул (2.9), (2.11), (2.12) и согласно предположений теоремы следует дифференцируемость по τ функций $D_s(\tau)$ и $\Omega_s(\tau)$ $(s=0,\ 1,\dots)$ на сегменте $[0,\ L]$.

Чтобы закончить доказательство теоремы 1.1, нам осталось определить функцию $z(\tau,\ \varepsilon)$. Воспользуемся для этого соотношением (2.6). Из равенства коэффициентов при одинаковых степенях параметра ε имеем

$$ia_0(\tau)[\Omega_0(\tau)+k(\tau)]z_0(\tau)=p_0(\tau), \tag{2.13}$$

$$ia_0(\tau)[\Omega_0(\tau)+k(\tau)]z_s(\tau)+\sum_{j=1}^{s}\sum_{j_1=1}^{s-j+1}a_j(\tau)[D_{j_1}(\tau)+i\Omega_{j_1}(\tau)]z_{s-j-j_1}(\tau)+$$

$$+a_0(\tau)\sum_{j=1}^{s}[D_j(\tau)+i\Omega_j(\tau)]\,z_{s-j}(\tau)+\sum_{j=0}^{s-1}a_j(\tau)\,z'_{s-1-j}(\tau)+$$

$$+\sum_{j=0}^{s-j}c_j(\tau)\,z_{s-j}(\tau)=p_s(\tau),\qquad s=1,\ 2,\ldots,\tag{2.14}$$

откуда

$$z_0(\tau)=\frac{p_0(\tau)}{ia_0(\tau)[\Omega_0(\tau)+k(\tau)]},\tag{2.15}$$

$$z_s(\tau)=\frac{1}{ia_0(\tau)\,[\Omega_0(\tau)+k(\tau)]}\left\{p_s(\tau)-a_0(\tau)\sum_{j=1}^{s}[D_j(\tau)+i\Omega_j(\tau)]z_{s-j}(\tau)-\right.$$

$$-\sum_{j=1}^{s}\sum_{j_1=0}^{s-j}a_j(\tau)\,[D_{j_1}(\tau)+i\Omega_{j_1}(\tau)]\,z_{s-j-j_1}(\tau)-$$

$$\left.-\sum_{j=0}^{s-1}a_j(\tau)\,z'_{s-1-j}(\tau)+\sum_{j=0}^{s-1}c_j(\tau)\,z_{s-j}(\tau)\right\},\qquad s=1,\ 2,\ldots\tag{2.16}$$

Таким образом, указав способ определения коэффициентов рядов (2.3), мы доказали теорему I.1.

Примечание. Теорема I.1 дает возможность построить частное решение неоднородного уравнения (1.1).

Для построения его общего решения нужно, как известно, к полученному частному решению добавить общее решение соответствующего однородного уравнения

$$a(\tau,\varepsilon)\,\frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon c(\tau,\varepsilon)\,\frac{dx}{dt}+b(\tau,\varepsilon)\,x(t,\varepsilon)=0.\tag{2.17}$$

Формальное частное решение этого уравнения следует искать в виде

$$x(t,\varepsilon)=\xi(t,\varepsilon),$$

где

$$\frac{d\xi}{dt}=[D(\tau,\varepsilon)+i\Omega(\tau,\varepsilon)]\,\xi.$$

Здесь $D(\tau,\varepsilon)$ и $\Omega(\tau,\varepsilon)$ строятся так же, как в теореме I. 1.

При этом для $\Omega_s(\tau)$ ($s=0,1,\ldots$), согласно (2.9), мы получим два различных значения, что дает возможность построить два частных линейно независимых решения уравнения (2.17), а следовательно, и его общее решение.

§ 3. Формальное решение в «нерезонансном случае»

Теорема I.2. *Если коэффициенты уравнения (1.1) и функция* $k(\tau)$ *обладают на сегменте* $[0, L]$ *производными по* τ *всех порядков, то формальное общее решение дифференциального уравнения (1.1) в «нерезонансном» случае может быть представлено в виде*

$$x(t, \varepsilon) = X(t, \varepsilon) + F(\tau, \varepsilon)\, e^{i\theta(t, \varepsilon)}, \tag{3.1}$$

где $X(t, \varepsilon)$ *— общее решение однородного уравнения (2.17), а* $F(\tau, \varepsilon)$ *— функция, допускающая формальное разложение вида*

$$F(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s F_s(\tau). \tag{3.2}$$

Доказательство. Так как способ определения общего решения $X(t, \varepsilon)$ описан в примечании § 2, то для доказательства данной теоремы нужно указать лишь метод построения коэффициентов ряда (3.2). С этой целью подставим

$$x(t, \varepsilon) = F(\tau, \varepsilon)\, e^{i\theta(t, \varepsilon)} \tag{3.3}$$

в уравнение (1.1). В результате этого получим

$$\begin{gathered} a(\tau, \varepsilon)\left[\varepsilon^2 F''(\tau, \varepsilon) + 2\varepsilon F'(\tau, \varepsilon) + \varepsilon i k'(\tau) F(\tau, \varepsilon) - k^2(\tau) F(\tau, \varepsilon)\right] + \\ + \varepsilon c(\tau, \varepsilon)\left[\varepsilon F'(\tau, \varepsilon) + i k(\tau) F(\tau, \varepsilon)\right] + b(\tau, \varepsilon) F(\tau, \varepsilon) = p(\tau, \varepsilon). \end{gathered} \tag{3.4}$$

Сравнивая в соотношении (3.4) коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε, имеем

$$a_0(\tau)\left[\frac{b_0(\tau)}{a_0(\tau)} - k^2(\tau)\right] F_0(\tau) = p_0(\tau), \tag{3.5}$$

$$a_0(\tau)\left[\frac{b_0(\tau)}{a_0(\tau)} - k^2(\tau)\right] F_s(\tau) = H_s(\tau), \qquad s = 1, 2, \ldots, \tag{3.6}$$

где

$$\begin{gathered} H_s(\tau) = p_s(\tau) - \sum_{j=0}^{s-2} a_j(\tau) F_{s-2-j}(\tau) - 2\sum_{j=0}^{s-1} a_j(\tau) F'_{s-1-j}(\tau) - \\ - ik'(\tau) \sum_{j=0}^{s-1} a_j(\tau) F_{s-1-j}(\tau) - k^2(\tau) \sum_{j=1}^{s} a_j(\tau) F_{s-j}(\tau) - \\ - \sum_{j=0}^{s-2} c_j(\tau) F'_{s-2-j}(\tau) - ik(\tau) \sum_{j=0}^{s-1} c_j(\tau) F_{s-1-j}(\tau) - \\ - \sum_{j=1} b_j(\tau) F_{s-j}(\tau), \qquad s = 1, 2, \ldots. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Отсюда, учитывая условия (1.5) и (1.6), находим

$$F_0(\tau) = \frac{p_0(\tau)}{b_0(\tau) - a_0(\tau) k^2(\tau)}, \tag{3.8}$$

$$F_s(\tau) = \frac{H_s(\tau)}{b_0(\tau) - a_0(\tau) k^2(\tau)}, \qquad s = 1, 2, \ldots .$$

Теорема I.2 доказана.

§ 4. Асимптотический характер решения

В предыдущих параграфах мы изложили способ построения решения, формально удовлетворяющего уравнению (1.1), в «резонансном» и «нерезонансном» случаях. В настоящем параграфе покажем, что построенное таким образом решение имеет асимптотический характер.

Исследуем подробно случай «резонанса».

Введем в рассмотрение функцию

$$x^{(m)}(t, \varepsilon) = \xi^{(m)}(t, \varepsilon) e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \tag{4.1}$$

где $\xi^{(m)}(t, \varepsilon)$ определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{d\xi^{(m)}}{dt} = [D^{(m)}(\tau, \varepsilon) + i(\Omega^{(m)}(\tau, \varepsilon) - k(\tau))]\xi^{(m)} + z^{(m)}(t, \varepsilon), \tag{4.2}$$

в котором

$$D^{(m)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{m} \varepsilon^s D_s(\tau), \qquad \Omega^{(m)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s \Omega_s(\tau),$$

$$z^{(m)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s z_s(\tau). \tag{4.3}$$

Функцию $x^{(m)}(t, \varepsilon)$ (m — натуральное число) в дальнейшем будем называть m-ым приближением решения уравнения (1.1).

Подставляя значение $x^{(m)}(t, \varepsilon)$ с учетом уравнения (4.2) в выражение

$$a(\tau, \varepsilon)\frac{d^2x^{(m)}}{dt^2} + \varepsilon c(\tau, \varepsilon)\frac{dx^{(m)}}{dt} + b(\tau, \varepsilon)x^{(m)} - p(\tau, \varepsilon)e^{i\theta(t,\varepsilon)},$$

получим

$$a(\tau, \varepsilon)\frac{d^2x^{(m)}}{dt^2} + \varepsilon c(\tau, \varepsilon)\frac{dx^{(m)}}{dt} + b(\tau, \varepsilon)x^{(m)}(t, \varepsilon) - p(\tau, \varepsilon)e^{i\theta(t,\varepsilon)} =$$

$$= \{a(\tau, \varepsilon)[(D^{(m)}(\tau, \varepsilon) + i\Omega^{(m)}(\tau, \varepsilon))^2 + \varepsilon(D^{(m)}(\tau, \varepsilon) + i\Omega^{(m)}(\tau, \varepsilon))'] +$$
$$+ \varepsilon c(\tau, \varepsilon)[D^{(m)}(\tau, \varepsilon) + i\Omega^{(m)}(\tau, \varepsilon)] + b^{(m)}(\tau, \varepsilon)\}\, \xi^{(m)}(t, \varepsilon) e^{i\theta(t,\varepsilon)} + \tag{4.4}$$
$$+ \{a(\tau, \varepsilon)[(D^{(m)}(\tau, \varepsilon) + i\Omega^{(m)}(\tau, \varepsilon) + ik(\tau))\, z^{(m)}(\tau, \varepsilon) +$$
$$+ \varepsilon z^{(m)\prime}(\tau, \varepsilon)] + \varepsilon c(\tau, \varepsilon)\, z^{(m)}(\tau, \varepsilon) - p(\tau, \varepsilon)\}\, e^{i\theta(t,\varepsilon)}.$$

Функции, стоящие в правой части соотношения (4.4) при $\xi^{(m)}(t, \varepsilon)\, e^{i\theta(t,\varepsilon)}$ и при $e^{i\theta(t,\varepsilon)}$, согласно построению величин, входящих в $\tilde{m}$-ое приближение, имеют порядок малости ε^{m+1}. Поэтому мы можем написать

$$a(\tau, \varepsilon)\frac{d^2x^{(m)}}{dt^2} + \varepsilon c(\tau, \varepsilon)\frac{dx^{(m)}}{dt} + b(\tau, \varepsilon)\, x^{(m)}(t, \varepsilon) =$$
$$= p(\tau, \varepsilon)\, e^{i\theta(t,\varepsilon)} + \varepsilon^{m+1}[r_m(\tau, \varepsilon)\, \xi^{(m)}(t, \varepsilon) + f_m(\tau, \varepsilon)], \tag{4.5}$$

где $r_m(\tau, \varepsilon)$, $f_m(\tau, \varepsilon)$ — функции, регулярные относительно ε в окрестности точки $\varepsilon = 0$.

Интегрируя уравнение (4.2), находим

$$\xi^{(m)}(t, \varepsilon) = Ae^{\int\limits_0^t [D^{(m)}(\tau,\varepsilon) + i(\Omega^{(m)}(\tau,\varepsilon) - k(\tau))]dt} +$$
$$+ \int\limits_0^t z^{(m)}(\sigma, \varepsilon)\, e^{\int\limits_s^t [D^{(m)}(\tau,\varepsilon) + i(\Omega^{(m)}(\tau,\varepsilon) - k(\tau))]dt} ds, \tag{4.6}$$

где A — постоянная интегрирования, $\sigma = \varepsilon s$.

Так как функции $D^{(m)}(\tau, \varepsilon)$, $z^{(m)}(\tau, \varepsilon)$ дифференцируемы по τ на сегменте $[0, L]$, то они ограничены при всяком ε из (1.4).

Следовательно, можно указать такие постоянные M_1 и M_2, не зависящие от ε, что

$$\left|\sum_{j=1}^{m} \varepsilon^{j-1} D_j(\tau)\right| \leqslant M_1, \qquad |z^{(m)}(\tau, \varepsilon)| \leqslant M_2. \tag{4.7}$$

Используя эти неравенства, получаем, согласно (4.6), оценку для $\xi^{(m)}(t, \varepsilon)$:

$$|\xi^{(m)}(t, \varepsilon)| \leqslant Ae^{M_1L} + M_2e^{M_1L}t \leqslant \left(A + \frac{M_2L}{\varepsilon}\right)e^{M_1L}. \tag{4.8}$$

Теперь уравнение (4.5) можно записать в виде

$$a(\tau, \varepsilon)\frac{d^2x^{(m)}}{dt^2} + \varepsilon c(\tau, \varepsilon)\frac{dx^{(m)}}{dt} + b(\tau, \varepsilon)x^{(m)}(t, \varepsilon) =$$

$$= p(\tau, \varepsilon) e^{i\theta(t,\varepsilon)} + \varepsilon^m g_m(\tau, \varepsilon), \tag{4.9}$$

где $g_m(\tau, \varepsilon)$ — функция, ограниченная для всех $\tau \in [0, L]$ и $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

Таким образом, m-е приближение удовлетворяет исходному уравнению с точностью до величин порядка малости ε^m равномерно относительно t на сегменте $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{L}{\varepsilon}$.

Теорема I.3. *Если выполняются условия теоремы I.1 и*

$$x(t, \varepsilon)|_{t=0} = x^{(m)}(t, \varepsilon)|_{t=0} = x_0, \quad \frac{dx}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{dx^{(m)}}{dt}\bigg|_{t=0} = \dot{x}_0, \tag{4.10}$$

то для любых $L > 0$ и $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ можно указать такую постоянную C, не зависящую от ε, что будут иметь место оценки:

$$|x(t, \varepsilon) - x^{(m)}(t, \varepsilon)| \leqslant \varepsilon^{m-1} C, \qquad \left|\frac{dx}{dt} - \frac{dx^{(m)}}{dt}\right| \leqslant \varepsilon^{m-1} C. \tag{4.11}$$

Прежде чем перейти к доказательству сформулированной теоремы, докажем две вспомогательные леммы.

Лемма I.1. *Если для всех $t \in \left[0, \dfrac{L}{\varepsilon}\right]$ выполняется неравенство*

$$r(t) \leqslant c \int_0^t r(s)\, ds + f(t), \tag{4.12}$$

где c — положительная константа, а функция $f(t)$ — дифференцируема на рассматриваемом сегменте, то

$$r(t) \leqslant f(0) e^{ct} + \int_0^t e^{c(t-s)} f'(s)\, ds. \tag{4.13}$$

Доказательство данной леммы заимствовано из работы [39]. Положим

$$R(t) = \int_0^t r(s)\, ds. \tag{4.14}$$

Тогда неравенство (4.12) можно переписать в виде

$$R'(t) \leqslant cR(t) + f(t). \tag{4.15}$$

Умножая обе части неравенства (4.15) на e^{-ct} и интегрируя полученный результат от 0 до t, находим

$$R(t) \leqslant \int_0^t e^{c(t-s)} f(s)\, ds. \tag{4.16}$$

Используя прием интегрирования по частям, представим неравенство (4.16) в виде

$$R(t) \leqslant \frac{1}{c}\left[\int_0^t e^{c(t-s)} f'(s)\,ds + e^{ct} f(0) - f(t)\right]. \qquad (4.17)$$

Теперь, согласно неравенствам (4.14) и (4.17), мы можем записать исходное неравенство (4.12) в виде (4.13), что и требовалось доказать.

Лемма I.2. *Если $y(t, \varepsilon)$ есть решение дифференциального уравнения*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2(\tau, \varepsilon) y = q(\tau, \varepsilon) \qquad (4.18)$$

с начальными условиями

$$y(0) = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0, \qquad (4.19)$$

где

$$\omega(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \omega_s(\tau), \qquad \omega_0(\tau) \neq 0, \qquad \tau \in [0, L], \qquad (4.20)$$

то любому $L > 0$ можно сопоставить такую постоянную S_1, не зависящую от ε, что на сегменте $0 \leqslant t \leqslant \frac{L}{\varepsilon}$ будут иметь место неравенства

$$|y(t, \varepsilon)| \leqslant 2e^{2S_1L} \int_0^t \left|\frac{q(\tau, \varepsilon)}{\omega(\tau, \varepsilon)}\right| dt,$$

$$\left|\frac{dy}{dt}\right| \leqslant 2\omega^* e^{2S_1L} \int_0^t \left|\frac{q(\tau, \varepsilon)}{\omega(\tau, \varepsilon)}\right| dt, \qquad (4.21)$$

$$\omega^* = \max_{\substack{0 \leqslant \tau \leqslant L \\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0}} \omega(\tau, \varepsilon).$$

Доказательство. Введем новые переменные u и v по формулам

$$y = u\cos\theta_1 + v\sin\theta_1, \qquad (4.22)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\omega(\tau, \varepsilon) u \sin\theta_1 + \omega(\tau, \varepsilon) v \cos\theta_1,$$

где

$$\theta_1 = \int_0^t \omega(\tau, \varepsilon)\,dt. \qquad (4.23)$$

Тогда уравнение (4.18) может быть преобразовано к эквивалентной системе уравнений первого порядка вида

$$\frac{du}{dt} = q_1(\tau, \varepsilon) + \varepsilon\,[a(\tau, \varepsilon)u + b(\tau, \varepsilon)v], \tag{4.24}$$

$$\frac{dv}{dt} = q_2(\tau, \varepsilon) + \varepsilon\,[a_1(\tau, \varepsilon)u + b_1(\tau, \varepsilon)v],$$

где

$$a(\tau, \varepsilon) = -\frac{\omega'(\tau, \varepsilon)\sin^2\theta_1}{\omega(\tau, \varepsilon)}, \qquad b_1(\tau, \varepsilon) = -\frac{\omega'(\tau, \varepsilon)\cos^2\theta_1}{\omega(\tau, \varepsilon)}, \tag{4.25}$$

$$a_1(\tau, \varepsilon) = b(\tau, \varepsilon) = \frac{\omega'(\tau, \varepsilon)\sin 2\theta_1}{2\omega(\tau, \varepsilon)}, \qquad q_1(\tau, \varepsilon) = \frac{q(\tau, \varepsilon)\sin\theta_1}{\omega(\tau, \varepsilon)},$$

$$q_2(\tau, \varepsilon) = \frac{q(\tau, \varepsilon)\cos\theta_1}{\omega(\tau, \varepsilon)}.$$

Так как, согласно условиям (4.19),

$$u\,|_{t=0} = v\,|_{t=0} = 0, \tag{4.26}$$

то систему (4.24) можно заменить равносильной интегральной системой

$$u = \int_0^t [q_1(\tau, \varepsilon) + \varepsilon\,(a(\tau, \varepsilon)u + b(\tau, \varepsilon)v)]\,dt, \tag{4.27}$$

$$v = \int_0^t [q_2(\tau, \varepsilon) + \varepsilon\,(a_1(\tau, \varepsilon)u + b_1(\tau, \varepsilon)v)]\,dt,$$

откуда следует

$$|u| \leqslant \int_0^t \left|\frac{q(\tau, \varepsilon)}{\omega(\tau, \varepsilon)}\right| dt + \varepsilon S_1 \int_0^t [|u| + |v|]\,dt, \tag{4.28}$$

$$|v| \leqslant \int_0^t \left|\frac{q(\tau, \varepsilon)}{\omega(\tau, \varepsilon)}\right| dt + \varepsilon S_1 \int_0^t [|u| + |v|]\,dt,$$

где

$$S_1 = \max\,\{|a(\tau, \varepsilon)|,\ |a_1(\tau, \varepsilon)|,\ |b_1(\tau, \varepsilon)|\}, \tag{4.29}$$

$$\tau \in [0, L], \qquad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

В результате суммирования неравенств (4.28) получим

$$r < 2\int_0^t \left|\frac{q(\tau,\varepsilon)}{\omega(\tau,\varepsilon)}\right| dt + 2\varepsilon S_1 \int_0^t r\,dt, \tag{4.30}$$

где

$$r = |u(t,\varepsilon)| + |v(t,\varepsilon)|. \tag{4.31}$$

Неравенство (4.30) аналогично неравенству (4.12), поэтому, согласно лемме I.1:

$$r \equiv |u| + |v| < 2\int_0^t \left|\frac{q(\tau_1,\varepsilon)}{\omega(\tau_1,\varepsilon)}\right| e^{2\varepsilon S_1(t-t_1)} dt_1, \qquad \tau_1 = \varepsilon t_1,$$

или

$$|u| + |v| \leqslant 2e^{2S_1L} \int_0^t \left|\frac{q(\tau_1,\varepsilon)}{\omega(\tau_1,\varepsilon)}\right| dt_1. \tag{4.32}$$

Из неравенства (4.32) и формул (4.22) следует справедливость леммы I.2. Перейдем теперь к доказательству теоремы I.3.

Положим

$$y(t,\varepsilon) = x(t,\varepsilon) - x^{(m)}(t,\varepsilon), \tag{4.33}$$

где $x(t,\varepsilon)$ — точное решение уравнения (1.1), а $x^{(m)}(t,\varepsilon)$ — его m-е приближение. Тогда, согласно (1.1) и (4.9), функция $y(t,\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$a(\tau,\varepsilon)\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon c(\tau,\varepsilon)\frac{dy}{dt} + b(\tau,\varepsilon)\,y = -\varepsilon^m g(\tau,\varepsilon), \tag{4.34}$$

которое может быть представлено в виде (4.18), где

$$q(\tau,\varepsilon) = -\frac{1}{a(\tau,\varepsilon)}\left[\varepsilon^m g(\tau,\varepsilon) + \varepsilon c(\tau,\varepsilon)\frac{dy}{dt} + \varepsilon b_1(\tau,\varepsilon)\,y\right],$$

$$b_1(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s b_{s+1}(\tau), \tag{4.35}$$

$$\omega^2(\tau,\varepsilon) = \frac{b_0(\tau)}{a(\tau,\varepsilon)},$$

причем

$$y(0) = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

Применяя только что доказанную лемму I.2, получим

$$
\begin{gathered}
|y(t,\varepsilon)| \leqslant S_2 \int_0^t \left| \frac{q(\tau,\varepsilon)}{\omega(\tau,\varepsilon)} \right| dt, \\
\left| \frac{dy}{dt} \right| \leqslant S_3 \int_0^t \left| \frac{q(\tau,\varepsilon)}{\omega(\tau,\varepsilon)} \right| dt,
\end{gathered} \tag{4.36}
$$

где

$$
S_2 = 2e^{2S_1L}, \qquad S_3 = \omega^* S_2. \tag{4.37}
$$

Неравенства (4.36), согласно (4.35), приобретают вид

$$
\begin{gathered}
|y| \leqslant S_2 \int_0^t \left| \frac{1}{\sqrt{b_0(\tau) a(\tau,\varepsilon)}} \left[\varepsilon^m g_m(\tau,\varepsilon) + \varepsilon c(\tau,\varepsilon) \frac{dy}{dt} + b_1(\tau,\varepsilon) y \right] \right| dt, \\
\left| \frac{dy}{dt} \right| \leqslant S_3 \int_0^t \left| \frac{1}{\sqrt{b_0(\tau) a(\tau,\varepsilon)}} \left[\varepsilon^m g_m(\tau,\varepsilon) + \varepsilon c(\tau,\varepsilon) \frac{dy}{dt} + b_1(\tau,\varepsilon) y \right] \right| dt.
\end{gathered} \tag{4.38}
$$

В силу дифференцируемости по τ функций $b_0(\tau)$, $a(\tau,\varepsilon)$, $g_m(\tau,\varepsilon)$, $c(\tau,\varepsilon)$ и $b_1(\tau,\varepsilon)$ можно для всех $t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$ и $\varepsilon\,(0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0)$ указать такие постоянные C_1 и C_2, не зависящие от ε, что будут иметь место оценки

$$
\begin{gathered}
\left| \frac{g_m(\tau,\varepsilon)}{\sqrt{b_0(\tau) a(\tau,\varepsilon)}} \right| \leqslant C_1, \qquad \left| \frac{c(\tau,\varepsilon)}{\sqrt{b_0(\tau) a(\tau,\varepsilon)}} \right| \leqslant C_2, \\
\left| \frac{b_1(\tau,\varepsilon)}{\sqrt{b_0(\tau) a(\tau,\varepsilon)}} \right| \leqslant C_2.
\end{gathered} \tag{4.39}
$$

Следовательно, неравенства (4.38) могут быть переписаны в виде

$$
\begin{gathered}
|y(t,\varepsilon)| \leqslant \varepsilon S_2 C_2 \int_0^t \left(|y| + \left| \frac{dy}{dt} \right| \right) dt_1 + \varepsilon^m S_3 C_1 t, \\
\left| \frac{dy}{dt} \right| \leqslant \varepsilon S_3 C_2 \int_0^t \left(|y| + \left| \frac{dy}{dt} \right| \right) dt_1 + \varepsilon^m S_3 C_1 t.
\end{gathered} \tag{4.40}
$$

Складывая полученные неравенства и введя при этом обозначение

$$W = |y| + \left|\frac{dy}{dt}\right|, \tag{4.41}$$

получим неравенство

$$W \leqslant \varepsilon K_1 \int_0^t W dt + \varepsilon^{m-1} K_2, \tag{4.42}$$

в котором

$$K_1 = C_2(S_2 + S_3), \qquad K_2 = C_1 L (S_1 + S_2). \tag{4.43}$$

Согласно лемме I.1, из неравенства (4.42) находим

$$W \leqslant \varepsilon^{m-1} C, \qquad \text{где} \qquad C = K_2 e^{KL}, \tag{4.44}$$

а значит, и

$$|y| \leqslant \varepsilon^{m-1} C, \quad \left|\frac{dy}{dt}\right| \leqslant \varepsilon^{m-1} C. \tag{4.45}$$

Теорема доказана.

Из полученных неравенств (4.45) вытекает, что m-е приближение $x^{(m)}(t, \varepsilon)$ и его производная $\frac{dx^{(m)}}{dt}$ стремятся соответственно к точному решению $x(t, \varepsilon)$ и $\frac{dx}{dt}$ при $\varepsilon \to 0$, начиная с $m \geqslant 2$. Этим самым мы доказали асимптотический характер построенного нами решения для «резонансного» случая.

Для «нерезонансного» случая, повторяя аналогичные рассуждения, мы при условиях теоремы можем получить оценки:

$$|x(t, \varepsilon) - x^{(m)}(t, \varepsilon)| \leqslant \varepsilon^m C, \qquad \left|\frac{dx}{dt} - \frac{dx^{(m)}}{dt}\right| \leqslant \varepsilon^m C, \tag{4.46}$$

где C — постоянная, не зависящая от ε.

Для случая малого свободного члена ($p_0(\tau) \equiv 0$) асимптотические оценки имеют вид (4.46) и при «резонансе».

Замечание. Здесь мы указали алгоритм построения асимптотического решения для дифференциального уравнения (1.1) с правой частью $p(\tau, \varepsilon) e^{i\theta(t, \varepsilon)}$. Полученные результаты могут быть легко перенесены на случай, когда правая часть в дифференциальном уравнении (1.1) имеет вид

$$\sum_{j=1}^{N} p_j(\tau, \varepsilon) e^{i\theta_j(t, \varepsilon)}.$$

§ 5. Нахождение усилий в упруго-вязкой нити переменной длины

В качестве примера, иллюстрирующего изложенную выше теорию, рассмотрим вопрос о нахождении усилий в упруго-вязкой нити переменной длины $l = l(t)$ с грузом Q на конце. Эта задача, как показано в работах [32, 63], может быть сведена к интегрированию уравнения

$$\frac{l}{g}\left(Q+\frac{1}{3}ql\right)\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\left[\alpha+\frac{1}{g}\left(Q+\frac{ql}{2}\right)\frac{dl}{dt}\right]\frac{d\varphi}{dt}+K\varphi=$$
$$=\frac{1}{g}\left(Q+\frac{ql}{2}\right)\left(g-\frac{dV_c}{dt}\right), \qquad (5.1)$$

где φ — относительное удлинение нити; q — вес погонного метра нити; α — коэффициент, характеризующий затухания динамических усилий в нити; g — ускорение силы тяжести; v_c — линейная скорость точек обвода барабана, на который наматывается нить; $K = E\sigma$, E — модуль упругости нити, σ — площадь поперечного сечения нити.

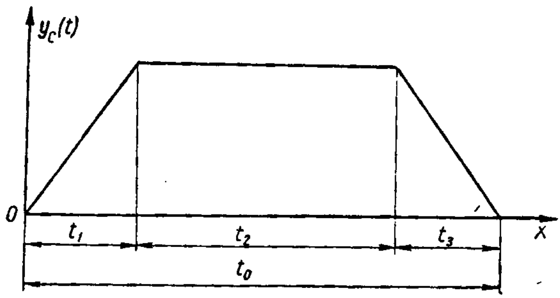

Рис. 1.

На практике, чаще всего, подъем груза Q осуществляется по трапецоидальной тахограмме (рис. 1, по этому поводу см. [67] стр. 48—50).

Следовательно, уравнение (5.1) должно быть проинтегрировано на каждом из таких трех участков:

1) участок равно-ускоренного движения:

$$l = l_0 - \frac{at^2}{2}, \qquad v_c = \frac{dl}{dt} = -at, \qquad \frac{dv_c}{dt} = -a; \qquad (5.2)$$

2) участок равномерного движения:

$$l = l_1 - v_0 t, \qquad v_c = \frac{dl}{dt} = -v_0, \qquad \frac{dv}{dt} = 0.$$

$$l_1 = l_0 - \frac{at_1^2}{2}, \qquad v_0 = at_1; \tag{5.3}$$

3) участок равно-замедленного движения:

$$l = l_2 - v_0 t + \frac{at^2}{2}, \qquad v_c = \frac{dl}{dt} = -v_0 + at,$$

$$\frac{dv}{dt} = a, \qquad l_2 = l_1 - v_0(t_2 - t_1), \tag{5.4}$$

l_0 — начальная длина нити.

Для применения изложенного выше асимптотического метода к интегрированию дифференциального уравнения (5.1) последнее нужно на каждом из участков подъема груза представить в виде (1.1). Для этого, следуя работе [103], введем в рассмотрение на первом участке подъема груза величины

$$T = \omega_0 t, \qquad \omega_0 = \frac{Q^2}{\alpha q l_0}, \qquad \varepsilon = \sqrt[3]{\frac{a}{\omega_0^2 l_0}}. \tag{5.5}$$

Тогда уравнение (5.1) приобретает вид

$$\left[\left(\frac{Q}{l_0} + \frac{q}{3}\right) - \varepsilon\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{Q}{l_0} + \frac{1}{3}q\right)\tau^2 + \varepsilon^2\frac{q\tau^4}{12}\right]\frac{d^2\varphi}{dT^2} +$$

$$+ \varepsilon\left\{\frac{ag}{l_0^2}\sqrt[3]{\frac{aql_0^2}{aQ^2}} - \varepsilon\left[\left(\frac{Q}{l_0} + \frac{1}{2}q\right)\tau - \frac{q}{4}\sqrt[3]{\frac{\alpha^2 q^2 a l_0}{Q^4}\tau^3}\right]\right\}\frac{d\varphi}{dT} +$$

$$+ \frac{Kg\alpha^2 q^2}{Q^4}\varphi = \varepsilon\left[\left(\frac{Q}{l_0} + \frac{q}{2}\right) - \varepsilon\frac{q\tau^2}{4}\right]\left(1 + \frac{g}{a}\right)\sqrt[3]{\frac{\alpha^4 q^4 l_0^2 a^2}{Q^8}}, \tag{5.6}$$

где

$$\tau = \varepsilon T. \tag{5.7}$$

На втором участке движения груза Q уравнение (5.1) после элементарных преобразований может быть записано следующим образом:

$$\left[\frac{Q}{l_1} + \frac{1}{3}q - \varepsilon\left(\frac{Q}{l_1} + \frac{2}{3}q\right)\tau + \varepsilon^2\frac{q\tau^2}{3}\right]\frac{d^2\varphi}{dT^2} +$$

$$+ \varepsilon\left\{\left[\frac{ag}{l_1 v_0} - \left(\frac{Q}{l_1} + \frac{1}{2}q\right)\right]\sqrt{\frac{v_0}{l_1\omega_1}} + \varepsilon\frac{q}{2}\sqrt{\frac{v_0}{l_1\omega_1}}\tau\right\}\frac{d\varphi}{dT} +$$

$$+ \frac{Kg}{l_1^2\omega_1^2}\varphi = \varepsilon\left[\frac{Q}{l_1} + \frac{q}{2} - \varepsilon\frac{q\tau}{2}\right]\frac{g}{v_0\omega_1}\sqrt{\frac{v_0}{l_1\omega_1}}, \tag{5.8}$$

где

$$T=\omega_1 t,\qquad \omega_1=\frac{Q^2}{agl_1},\qquad \tau=\varepsilon T,\qquad \varepsilon=\sqrt{\frac{v_0}{l_1\omega_1}},\tag{5.9}$$

и, наконец, на третьем участке:

$$\left\{\frac{Q}{l_2}+\frac{q}{3}-\varepsilon\left[\left(\frac{Q}{l_2}+\frac{2}{3}q\right)\tau-\sqrt{\frac{v_0}{l_1w_2}}\left(\frac{Q}{2v_0^2}+\frac{q}{3}+\frac{qal_2}{3v_0^2}\right)\tau^2\right]-\right.$$
$$\left.-\varepsilon^2\left[\sqrt{\frac{v_0}{l_2\omega_2}}\,\frac{qal_2}{3v_0^2}\tau^3-\frac{qa^2l_2}{12v_0^3\omega_2}\tau^4\right]\right\}\frac{d^2\varphi}{dT^2}+$$
$$+\varepsilon\left\{\sqrt{\frac{v_0}{l_2\omega_2}}\left[\frac{ag}{v_0l_2}-\left(\frac{Q}{l_2}+\frac{q}{2}\right)+\left(\frac{Qa}{v_0^2}+\frac{q}{2}+\frac{qal_2}{2v_0^2}\right)\sqrt{\frac{v_0}{l^2\omega^2}}\tau\right]-\right.$$
$$\left.-\varepsilon\left[\frac{3aq}{4v_0\omega_2}\tau^2-\frac{qa^2l_2}{4v_0^2\omega_2}\sqrt{\frac{v_0}{l_2\omega_2}}\tau^3\right]\right\}\frac{d\varphi}{dT}+\frac{Kg}{l_2^2\omega_2^2}\varphi=\tag{5.10}$$
$$=\varepsilon\left[\frac{Q}{l_2}+\frac{q}{2}-\varepsilon\left(\frac{q\tau}{2}-\frac{qal_2}{4v_0}\sqrt{\frac{v_0}{l_2\omega_2}}\tau^2\right]\frac{g-a}{v_0\omega_2}\sqrt{\frac{v_0}{l_2\omega_2}},$$

где

$$T=\omega_2 t,\qquad \omega_2=\frac{Q^2}{aql_2},\qquad \tau=\varepsilon T,\qquad \varepsilon=\sqrt{\frac{v_0}{l_2\omega_2}}.\tag{5.11}$$

Полученные уравнения (5.6), (5.8), (5.10) есть уравнения вида (1.1), в котором

$$\theta(t,\varepsilon)\equiv 0.\tag{5.12}$$

Следовательно, к ним применима теорема I.2, относящаяся к «нерезонансному» случаю.

Используя формулы § 3, мы можем построить асимптотическое решение $\varphi^{(m)}$ упомянутых выше уравнений для любого натурального m. В частности, во втором приближении ($m=2$) решение уравнения (5.6) имеет вид

$$\varphi^{(2)}=Be^{-(\beta_1t+\beta_2t^2+\beta_3t^3+\beta_4t^4)}\cos(\delta_0+\delta_1t+\delta_2t^2+\delta_3t^3+\delta_4t^4)+$$
$$+\frac{a+g}{Kg}\left(Q+\frac{ql_0}{2}-\frac{qat^2}{4}\right),\tag{5.13}$$

где

$$\beta_1=\frac{ag}{2l_0\left(Q+\frac{ql_0}{3}\right)},\qquad \beta_2=-\frac{a}{8l_0},\qquad \beta_3=\frac{aag\left(\frac{Q}{2}+\frac{ql_0}{3}\right)}{6l_0^2\left(Q+\frac{ql_0}{3}\right)},$$

$$\beta_4 = \frac{a^2 g}{32 l_0\left(Q + \frac{q l_0}{3}\right)}, \qquad \delta_1 = \nu_0 - \frac{a^2 \nu_0^3}{8K^2},$$

$$\delta_2 = \frac{a\nu_0^3}{6Kg}\left(\frac{KQ}{l_0\nu_0^2} - \frac{1}{2}Q\right), \qquad \nu_0 = \sqrt{\frac{Kg}{l_0\left(Q + \frac{1}{3}ql_0\right)}}, \tag{5.14}$$

$$\delta_3 = \frac{a\nu_0^5}{40K^2g^2}\left[3\left(\frac{Kg}{l_0\nu_0^2} - \frac{1}{2}Q\right)^2 - \frac{qKg}{3\nu_0^2}\right],$$

B, δ_0 — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Решение уравнения (5.8) представим в виде

$$\varphi^{(2)} = B_1 e^{-(\beta_{11}t + \beta_{21}t^2)} \cos(\delta_{01} + \delta_{11}t + \delta_{21}t^2 + \delta_{31}t^3) + \frac{1}{K}\left[Q + \frac{q}{2}(l_1 - v_0 t)\right], \tag{5.15}$$

где

$$\beta_{11} = \frac{2ag - v_0\left(Q + \frac{1}{3}ql_1\right)}{4l_1\left(Q + \frac{1}{3}ql_1\right)},$$

$$\beta_{21} = \frac{v_0^2 g}{8l_1\left(Q + \frac{1}{3}ql_1\right)} + \frac{v_0\left(Q + \frac{2}{3}ql_1\right)\left[ag - v_0\left(Q + \frac{1}{2}ql_1\right)\right]}{4l_1^2\left(Q + \frac{1}{3}ql_1\right)^2},$$

$$\delta_{11} = \nu_{11} - \frac{\left[ag - v_0\left(Q + \frac{1}{2}ql_1\right)\right]^2 \nu_{11}^3}{8K^2g^2}, \tag{5.16}$$

$$\delta_{21} = \frac{v_0\left(Q + \frac{2}{3}ql_1\right)\nu_{11}^3}{4Kg},$$

$$\delta_{31} = \frac{v_0\left(Q + \frac{2}{3}ql_1\right)^2 \nu_{11}^5}{8K^2g^2} - \frac{v_0^2 g \nu_{11}^3}{18Kg},$$

$$\nu_{11} = \sqrt{\frac{Kg}{l_1\left(Q + \frac{1}{3} g l_1\right)}},$$

B_1, δ_{01} — постоянные интегрирования.

И, наконец, решая уравнение (5.10), получим

$$\varphi^{(2)} = B_2 e^{-(\beta_{12}t + \beta_{22}t^2 + \beta_{32}t^3 + \beta_{42}t^4)} \cos(\delta_{02} + \delta_{12}t + \delta_{22}t^2 + \delta_{32}t^3 + \delta_{42}t^4 + \\ + \delta_{52} t^5) + \frac{g - a}{Kg}\left[Q + \frac{1}{2} q \left(l_2 - v_0 t + \frac{1}{2} a t^2\right)\right], \qquad (5.17)$$

где

$$\beta_{12} = \frac{2ag - v_0\left(Q + \frac{1}{3} q l_2\right)}{4 l_2 \left(Q + \frac{1}{3} q l_2\right)},$$

$$\beta_{22} = \frac{Qa + \frac{1}{3} q v_0^2 + \frac{q a l_2}{3}}{8 l_2 \left(Q + \frac{1}{3} q l_2\right)} + \frac{v_0 \left(Q + \frac{2}{3} q l_2\right)\left[ag - v_0\left(Q + \frac{q l_2}{2}\right)\right]}{4 l_2^2 \left(Q + \frac{1}{3} q l_2\right)^2},$$

$$\beta_{32} = \frac{v_0\left(Q + \frac{2}{3} q l_2\right)\left(Qa + \frac{q v_0^2}{2} + \frac{q a l_2}{2}\right)}{6 l_2^2 \left(Q + \frac{q l_2}{3}\right)^2} - \frac{a q v_0}{8 l_2 \left(Q + \frac{q l_2}{3}\right)^2} - \\ - \frac{\left(\frac{1}{2} Qa + \frac{q v_0^2}{3} + \frac{q a l_2}{3}\right)\left[ag - v_0\left(Q + \frac{q l_2}{2}\right)\right]}{6 l_2^2 \left(Q + \frac{1}{3} q l_2\right)^2},$$

$$\beta_{42} = \frac{q a^2}{32 l_2 \left(Q + \frac{1}{3} q l_2\right)} - \\ - \frac{\left(\frac{1}{2} Qa + \frac{1}{3} q v_0^2 + \frac{1}{3} q a l_2\right)\left(Qa + \frac{1}{2} q l_2^2 + \frac{1}{2} q a l_2\right)}{8 l_2^2 \left(Q + \frac{1}{3} q l_2\right)^2},$$

$$\delta_{12}=\nu_2\,\frac{\left[ag-v_0\left(Q+\frac{1}{2}ql_2\right)^2\right]\nu_2^3}{8K^2g^2}-\frac{\left(Qa+\frac{1}{2}qv_0^2+\frac{1}{2}qal_2\right)\nu_2}{4Kg},$$

$$\delta_{22}=\frac{v_0\left(Q+\frac{2}{3}ql_2\right)\nu_2^3}{4Kg}-$$

$$-\frac{\left[ag-v_0\left(Q+\frac{1}{2}ql_2\right)\right]\left[Qa+\frac{1}{2}(qv_0^2+qal_2)\right]\nu_2^3}{8K^2g^2},$$

$$\delta_{23}=\frac{v_0^2\left(Q+\frac{2}{3}ql_2\right)^2\nu_2^5}{8K^2g^2}-\frac{\left[\frac{1}{2}Qa+\frac{1}{3}q(v_0^2+al_2)\right]\nu_2^3}{6Kg}-$$

$$-\frac{\left[Qa+\frac{1}{2}q(v_0^2+al_2)\right]\nu_2^3}{24K^2g^2},$$

$$\delta_{24}=\frac{v_0qa\nu_2^3}{24Kg}-\frac{3v_0\left(Q+\frac{2}{3}ql_2\right)\left[\frac{1}{2}Qa+\frac{1}{3}q(v_0^2+al_2)\right]\nu_2^5}{16K^2g^2},$$

$$\delta_{25}=\frac{3\left|\frac{1}{2}Qa+\frac{1}{3}q(v_0^2+al_2)\right|^2\nu_2^5}{40K^2g^2}-\frac{qa^2\nu_2^3}{120\,Kg},$$

$$\nu_2=\sqrt{\frac{Kg}{l_2\left(Q+\frac{1}{3}ql_2\right)}},$$

B_2, δ_{02} — постоянные интегрирования.

Используя полученные решения, на каждом из участков подъема или спуска груза Q, можно вычислить усилия $T_1=K\varphi$, возникающие в нити при подъеме (спуске) груза Q. Такие вычисления для подъема груза были произведены в работе [64] при следующих исходных данных:

$$v_0=3{,}724\ \textit{м/сек};\quad a=0{,}98\ \textit{м/сек}^2;\quad l_0=105\ \textit{м};$$

$$Q=5200\ \textit{кГ};\quad q=2{,}48\ \textit{кГ/м};\quad K=4{,}45\cdot10^6\ \textit{кг},$$

$\alpha=0$ (рис. 2).

На рис. 3 изображен график усилий в упруго-вязкой нити при следующих исходных данных:

$$v_0 = 3{,}6\ \text{м/сек};\quad a = 0{,}75\ \text{м/сек}^2;\quad l_0 = 182\ \text{м};\quad Q = 5200\ \text{кГ},$$

$$q = 2{,}6\ \text{кГ/м};\quad \alpha = 3\,000\ \text{кГ}\cdot\text{сек};\ K = 4{,}64\cdot 10^6\ \text{кГ}.$$

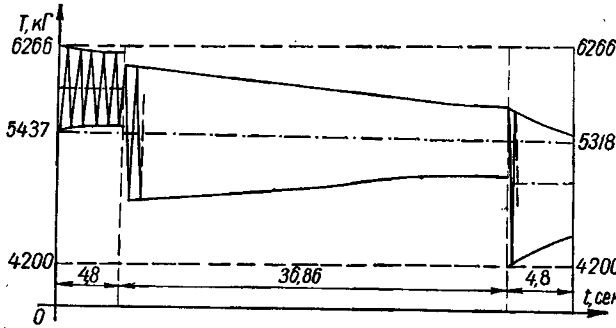

Рис. 2.

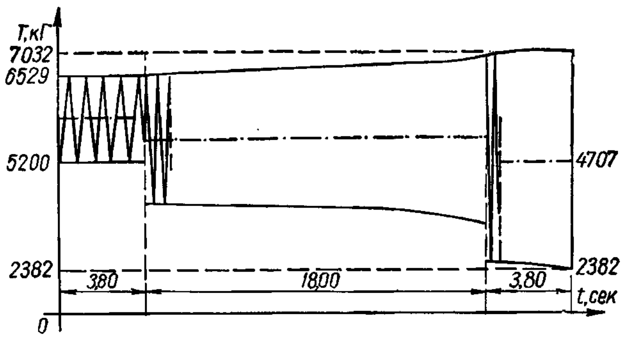

Рис. 3.

Последний пример, кроме того, был просчитан с помощью метода Штермера. Выяснилось, что расхождение результатов, полученных этими двумя методами, не превышает 7%.

Построение асимптотического решения для систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка с медленно меняющимися коэффициентами

§ 6. Постановка задачи

Рассмотрим в конечномерном пространстве систему линейных дифференциальных уравнений вида

$$A(\tau,\ \varepsilon)\frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon C(\tau,\ \varepsilon)\frac{dx}{dt}+B(\tau,\ \varepsilon)x=P(\tau,\ \varepsilon)e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \tag{6.1}$$

где $A(\tau,\ \varepsilon)$, $C(\tau,\ \varepsilon)$, $B(\tau,\ \varepsilon)$ — действительные квадратные матрицы n-го порядка, а $x(t,\ \varepsilon)$ и $P(\tau,\ \varepsilon)$ — n-мерные векторы. Предполагается, что имеют место формальные разложения:

$$\begin{gathered} A(\tau,\ \varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s A_s(\tau),\quad C(\tau,\ \varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s C_s(\tau),\\ B(\tau,\ \varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s B_s(\tau),\quad P(\tau,\ \varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s P_s(\tau), \end{gathered} \tag{6.2}$$

в которых $A_0(\tau)$, $B_0(\tau)$ — симметрические, определенно положительные* матрицы, причем матрица $A_0(\tau)$ — неособенная для всех $\tau\in[0,\ L]$.

В частности, суммы (6.2) могут быть и конечными.

В данной главе (§7—9) мы изложим метод построения асимптотического решения задачи Коши для уравнения (6.1) с начальными условиями

$$x(t,\ \varepsilon)\big|_{t=0}=x_0,\quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=\dot{x}_0 \tag{6.3}$$

и укажем (§11) способ нахождения асимптотики собственных значений некоторых краевых задач.

Сделаем несколько предварительных замечаний.

В ходе доказательств теорем главы II нам придется обращаться к решениям системы n линейных алгебраических уравнений

$$[B_0(\tau)-\omega(\tau)A_0(\tau)]\mu(\tau)=0, \tag{6.4}$$

---

* Относительно этого предположения см. сноску на стр. 10.

где $\omega(\tau)=\omega_\nu(\tau)$ $(\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ — корни характеристического уравнения

$$\det[B_0(\tau)-\omega(\tau)A_0(\tau)]=0. \qquad (6.5)$$

Будем предполагать, что для любого $\tau\in[0,\ L]$ все корни уравнения (6.5) простые и не равны нулю.

Далее взаимно ортогональные решения системы (6.4) $\mu_\nu(\tau)$ $(\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ мы нормируем так, чтобы выполнялось условие

$$(A_0(\tau)\mu_i(\tau),\mu_k(\tau))=\delta_{ik}, \qquad (6.6)$$

где δ_{ik} — символ Кронекера.

Кроме того, пусть $\dfrac{d\theta(t,\ \varepsilon)}{dt}=k(\tau)$. Тогда в зависимости от значений функций $k^2(\tau)$ и $\omega_\nu(\tau)$ могут представиться два случая:

1) «резонансный», когда функция $k^2(\tau)$ в некоторых точках сегмента $[0,\ L]$ становится равной одной или нескольким из функций $\omega_\nu(\tau)$;

2) «нерезонансный», когда

$$k^2(\tau)\neq\omega_\nu(\tau),\quad \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n \qquad (6.7)$$

для всех $\tau\in[0,\ L]$.

Ниже рассмотрим каждый случай отдельно.

§ 7. Формальное решение в «резонансном» случае

Пусть

$$k^2(\tau)=\omega_1(\tau) \qquad (7.1')$$

при некоторых значениях $\tau\in[0,\ L]$. Однако $k^2(\tau)$ не равно $\omega_p(\tau)$ $(p=2,\ 3,\ \ldots,\ n)$ ни при одном τ из сегмента $[0,\ L]$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема II. 1. *Если матрицы $A_s(\tau)$, $C_s(\tau)$, $B_s(\tau)$, векторы $P_s(\tau)$ $(s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ и функция $k(\tau)$ на сегменте $[0,\ L]$ обладают производными по τ всех порядков, то формальное частное решение системы (6.1) в «резонансном» случае может быть представлено в виде*

$$x(t,\ \varepsilon)=[\Pi(\tau,\ \varepsilon)\xi+H(\tau,\ \varepsilon)]\,e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \qquad (7.1)$$

где скалярная функция $\xi(t,\ \varepsilon)$ определяется дифференциальным уравнением первого порядка

$$\frac{d\xi}{dt}=[D(\tau,\ \varepsilon)+i(\Omega(\tau,\ \varepsilon)-k(\tau))]\,\xi+Z(\tau,\ \varepsilon), \qquad (7.2)$$

а векторы $\Pi(\tau, \varepsilon)$, $H(\tau, \varepsilon)$ *и функции* $D(\tau, \varepsilon)$, $\Omega(\tau, \varepsilon)$, $Z(\tau, \varepsilon)$ *допускают формальное разложение вида*

$$\Pi(\tau, \varepsilon) = \mu_1(\tau) + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \Pi_s(\tau)^*,$$

$$H(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s H_s(\tau), \quad D(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s D_s(\tau), \tag{7.3}$$

$$\Omega(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Omega_s(\tau), \quad Z(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s Z_s(\tau).$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что собственные числа $\omega_\nu(\tau)$ и собственные векторы $\mu_\nu(\tau)$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) имеют, согласно работе [87], столько же производных по τ на сегменте $[0, L]$, сколько и матрицы $A_0(\tau)$, $B_0(\tau)$.

Для определения членов формальных рядов (7.3) подставим вектор $x(t, \varepsilon)$ из (7.1) в уравнение (6.1), учитывая при этом соотношение (7.2). Приравнивая в полученном таким образом тождестве отдельно коэффициенты при функции $\xi(t, \varepsilon)$ и отдельно свободные члены, находим два соотношения:

$$\begin{gathered} A(\tau, \varepsilon)\{\varepsilon^2 \Pi''(\tau, \varepsilon) + 2\varepsilon \Pi'(\tau, \varepsilon)[D(\tau, \varepsilon) + i\Omega(\tau, \varepsilon)] + \\ + \varepsilon \Pi(\tau, \varepsilon)[D(\tau, \varepsilon) + i\Omega(\tau, \varepsilon)]' + \Pi(\tau, \varepsilon)[D(\tau, \varepsilon) + i\Omega(\tau, \varepsilon)]^2\} + \\ + \varepsilon C(\tau, \varepsilon)\{\varepsilon \Pi'(\tau, \varepsilon) + \Pi(\tau, \varepsilon)[D(\tau, \varepsilon) + i\Omega(\tau, \varepsilon)]\} + \\ + B(\tau, \varepsilon)\Pi(\tau, \varepsilon) = 0, \end{gathered} \tag{7.4}$$

$$\begin{gathered} A(\tau, \varepsilon)\{[D(\tau, \varepsilon) + i(\Omega(\tau, \varepsilon) + k(\tau))]\Pi(\tau, \varepsilon)Z(\tau, \varepsilon) + \\ + \varepsilon Z'(\tau, \varepsilon)\Pi(\tau, \varepsilon) + 2\varepsilon Z(\tau, \varepsilon)\Pi'(\tau, \varepsilon) + i\varepsilon k'(\tau)H(\tau, \varepsilon) - \\ - k^2(\tau)H(\tau, \varepsilon) + 2i\varepsilon k(\tau)H'(\tau, \varepsilon) + \varepsilon^2 H''(\tau, \varepsilon)\} + \\ + \varepsilon C(\tau, \varepsilon)[\Pi(\tau, \varepsilon)Z(\tau, \varepsilon) + ik(\tau)H(\tau, \varepsilon) + \varepsilon H'(\tau, \varepsilon)] + \\ + B(\tau, \varepsilon)H(\tau, \varepsilon) = P(\tau, \varepsilon). \end{gathered} \tag{7.5}$$

1. Для определения векторов $\Pi_s(\tau)$, функций $D_{s+1}(\tau)$ и $\Omega_s(\tau)$ ($s = 0, 1, \ldots$) воспользуемся соотношением (7. 4). Выделяя в нем

---

* Для случая «резонанса», при котором $k^2(\tau) = \omega_r(\tau)$ для некоторых $\tau \in [0, L]$, вектор $\Pi(\tau, \varepsilon)$ имеет вид

$$\Pi(\tau, \varepsilon) = \mu_r(\tau) + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \Pi_s(\tau), \qquad 1 \leqslant r \leqslant n.$$

коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε, получим

$$[B_0(\tau) - \Omega_0^2(\tau)\ A_0(\tau)]\,\mu_1(\tau) = 0, \tag{7.6}$$

$$[B_0(\tau) - \Omega_0^2(\tau)\,A_0(\tau)]\,\Pi_s(\tau) = E_s(\tau), \tag{7.7}$$

$$s = 1,\ 2,\ \ldots,$$

где

$$E_s(\tau) = -A_{s-2}(\tau)\,\mu_1''(\tau) - \sum_{j=0}^{s-3} A_j(\tau)\,\Pi''_{s-2-j}(\tau) -$$

$$-2\sum_{j=0}^{s-1} A_j(\tau)\,[D_{s-1-j}(\tau) + i\Omega_{s-1-j}(\tau)]\,\mu_1'(\tau) -$$

$$-2\sum_{j_1=0}^{s-2}\ \sum_{j=1}^{s-j_1-1} A_{j_1}(\tau)\,\Pi_j'(\tau)\,[D_{s-j_1-j-1}(\tau) + i\Omega_{s-j_1-j-1}(\tau)] -$$

$$-\sum_{j=0}^{s-1} A_j(\tau)\,[D_{s-j-1}(\tau) + i\Omega_{s-j-1}(\tau)]'\,\mu_1(\tau) -$$

$$-\sum_{j_1=0}^{s-2}\ \sum_{j=1}^{s-j_1-1} A_{j_1}(\tau)\,\Pi_j(\tau)\,[D_{s-j_1-j-1}(\tau) + i\Omega_{s-j_1-j-1}(\tau)] -$$

$$-\sum_{j_2=1}^{s-1}\ \sum_{j_1=1}^{s-1-j_2}\ \sum_{j=1}^{s-1-j_1-j_2} A_{j_2}(\tau)\,\Pi_{j_1}(\tau)\,[D_j(\tau) + i\Omega_j(\tau)]\,[D_{s-j_2-j_1-j}(\tau) +$$

$$+ i\Omega_{s-j_2-j_1-j}(\tau)] - \sum_{j_1=0}^{s}\ \sum_{j=0}^{s-j_1} A_{j_1}(\tau)\,\mu_1(\tau)\,[D_j(\tau) + i\Omega_j(\tau)]\,[D_{s-j_1-j}(\tau) +$$

$$+ i\Omega_{s-j_1-j}(\tau)] - C_{s-2}(\tau)\,\mu_1'(\tau) - \sum_{j=0}^{s-3} C_j(\tau)\,\Pi'_{s-2-j}(\tau) -$$

$$-\sum_{j=0}^{s-1} C_j(\tau)\,[D_{s-1-j}(\tau) + i\Omega_{s-1-j}(\tau)] -$$

$$-\sum_{j_1=0}^{s-2}\ \sum_{j=1}^{s-1-j_1} C_{j_1}(\tau)\,\Pi_j(\tau)\,[D_{s-j_1-j-1}(\tau) + i\Omega_{s-j_1-j-1}(\tau)] -$$

$$-B_s(\tau)\,\mu_1(\tau) - \sum_{j=1}^{s-1} B_j(\tau)\,\Pi_{s-j}(\tau),$$

$$s = 1,\ 2,\ \ldots. \tag{7.8}$$

Умножая скалярно соотношения (7.6) и (6.4) (в последнем при этом полагаем $\mu(\tau)=\mu_1(\tau)$) на вектор $\mu_1(\tau)$ и учитывая условие (6.6), легко находим функцию $\Omega_0(\tau)$:

$$\Omega_0(\tau) = \pm\sqrt{\omega_1(\tau)}.$$

В дальнейщем полагаем

$$\Omega_0(\tau) = +\sqrt{\omega_1(\tau)}. \tag{7.9}$$

Перейдем теперь к построению функций $D_1(\tau)$, $\Omega_1(\tau)$ и вектора $\Pi_1(\tau)$, для чего воспользуемся соотношением (7.7) при $s=1$, а именно:

$$[[B_0(\tau) - A_0(\tau)\,\omega_1(\tau)]\,\Pi_1(\tau) = E_1(\tau), \tag{7.10}$$

где

$$E_1(\tau) = [A_1(\tau)\,\omega_1(\tau) - B_1(\tau)]\,\mu_1(\tau) - iA_0(\tau)\,[2\mu_1'(\tau)\,\Omega_0(\tau) -$$
$$- \mu_1(\tau)\,\Omega_0'(\tau) + 2\Omega_0(\tau)\,(D_1(\tau) + i\Omega_1(\tau))\,\mu_1(\tau)] -$$
$$- i\Omega_0(\tau)\,C_0(\tau)\,\mu_1(\tau). \tag{7.11}$$

Таким образом, искомый вектор $\Pi_1(\tau)$ является решением неоднородной системы линейных алгебраических уравнений (7.10), правая часть которой — вектор $E_1(\tau)$ — в свою очередь зависит от неизвестной функции $D_1(\tau)+i\Omega_1(\tau)$. Заметим к тому же, что детерминант $\det|B_0(\tau) - \omega_1(\tau)\,A_0(\tau)|$ системы (7.10), согласно принятым ранее предположениям (см. (6.5)), в точках сегмента $[0, L]$ обращается в нуль. В силу этого мы можем найти вектор $\Pi_1(\tau)$ и функцию $D_1(\tau)+i\Omega_1(\tau)$, воспользовавщись хорошо известным утверждением линейной алгебры [68]: неоднородная система линейных алгебраических уравнений

$$TX = f,$$

определитель которой равен нулю, разрещима тогда и только тогда, когда вектор f ортогонален ко всем векторам, дающим решение однородной системы $T^*y=0$ (T^* — матрица, сопряженная к T).

В нашем случае матрицы $B_0(\tau)$ и $A_0(\tau)$ — симметрические и все корни уравнения (6.5) простые, поэтому в точках аннулирования детерминанта системы (7.10) необходимым и достаточным условием разрешимости системы есть условие

$$(E_s(\tau),\ \mu_1(\tau)) = 0, \qquad s = 1,\ 2,\ \ldots. \tag{7.12}$$

Воспользуемся этим условием для определения функции $D_1(\tau) + i\Omega_1(\tau)$ на всем сегменте $[0, L]$. Тогда, согласно (7.11), находим

$$D_1(\tau) + i\Omega_1(\tau) = \frac{1}{2i\Omega_0(\tau)}\,[(A_1(\tau)\,\mu_1(\tau),\ \mu_1(\tau))\,\omega_1(\tau) -$$

$$-(B_1(\tau)\mu_1(\tau),\ \mu_1(\tau))-2i\Omega_0(\tau)(A_0(\tau)\mu_1'(\tau),\ \mu_1(\tau))-$$
$$-i\Omega_0'(\tau)-i(C_0(\tau)\mu_1(\tau),\ \mu_1(\tau))\Omega_0(\tau)],$$

или

$$D_1(\tau)=-(A_0(\tau)\mu_1'(\tau),\ \mu_1(\tau))-\frac{\Omega_0'(\tau)}{2\Omega_0(\tau)}-$$
$$-\frac{1}{2}(C_0(\tau)\mu_1(\tau),\ \mu_1(\tau)), \qquad (7.13)$$

$$\Omega_1(\tau)=\frac{(A_1(\tau)\mu_1(\tau),\ \mu_1(\tau))\,\omega_1(\tau)-(B_1(\tau)\mu_1(\tau),\ \mu_1(\tau))}{2\Omega_0}.$$

Определив функцию $D_1(\tau)+i\Omega_1(\tau)$, а следовательно, и вектор $E_1(\tau)$, мы можем найти искомый вектор $\Pi_1(\tau)$.

Будем искать $\Pi_1(\tau)$ в виде

$$\Pi_1(\tau)=\sum_{j=1}^{n}V_{j1}(\tau)\mu_j(\tau), \qquad (7.14)$$

где $V_{j1}(\tau)$ — скалярные функции, подлежащие определению.

Подставляя (7.14) в соотношение (7.10) и умножая полученный результат скалярно на вектор $\mu_r(\tau)$, находим

$$[\omega_r(\tau)-\omega_1(\tau)]\,V_{r1}(\tau)=(E_1(\tau),\ \mu_r(\tau)). \qquad (7.15)$$

Отсюда следует

$$V_{p1}(\tau)=\frac{(E_1(\tau),\ \mu_p(\tau))}{\omega_p(\tau)-\omega_1(\tau)}, \qquad p=2,\ 3,\ \ldots,\ n. \qquad (7.16)$$

В силу равенств (7.12) и (7.15) функция $V_{11}(\tau)$ остается произвольной. Положим ее равной нулю.

Таким же путем можно определить все последующие функции $D_s(\tau)$, $\Omega_s(\tau)$ и векторы $\Pi_s(\tau)$ ($s=2,\ 3,\ \ldots$). Действительно, предположим, что указанным способом уже найдены все векторы $\Pi_s(\tau)$ и функции $D_s(\tau)$, $\Omega_s(\tau)$, номера которых меньше некоторого номера m. Тогда, воспользовавшись соотношением (7.7) при $s=m$, мы можем определить функции $D_m(\tau)$, $\Omega_m(\tau)$ и вектор $\Pi_m(\tau)$ из системы уравнений

$$[B_0(\tau)-\omega_1(\tau)A_0(\tau)]\,\Pi_m(\tau)=E_m(\tau). \qquad (7.17)$$

Как и в случае $s=1$, мы вначале находим функцию $D_m(\tau)+$ $+i\Omega_m(\tau)$ из условия

$$(E_m(\tau),\ \mu_1(\tau))=0, \qquad (7.18)$$

а потом строим вектор $\Pi_m(\tau)$ в виде суммы

$$\Pi_m(\tau) = \sum_{j=1}^{n} V_{jm}(\tau)\,\mu_j(\tau), \tag{7.19}$$

где скалярные функции $V_{jm}(\tau)$ задаются соотношениями

$$V_{jm} = \frac{(E_m(\tau),\ \mu_j(\tau))}{\omega_j(\tau) - \omega_1(\tau)}, \qquad j = 2,\ 3,\ \ldots,\ n. \tag{7.20}$$

Произвольную функцию V_{1m}, как и прежде, полагаем равной нулю.

Таким образом, наш алгоритм позволяет находить функции $D_m(\tau)$, $\Omega_m(\tau)$ и вектор $\Pi_m(\tau)$ для любого натурального m.

Заметим, что из вида полученных формул следует (в силу условий теоремы) существование у функций $D_s(\tau)$, $\Omega_s(\tau)$ и векторов $\Pi_s(\tau)$ $(s = 0,\ 1,\ \ldots, m)$ на сегменте $[0,\ L]$ любого числа производных по τ.

2. Перейдем к нахождению вектора $H(\tau,\ \varepsilon)$ и функции $Z(\tau,\ \varepsilon)$ в соотношениях (7.1) и (7. 2). Для этого сравним в тождестве (7.5) коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε, в результате чего получим

$$[B_0(\tau) - k^2(\tau)\,A_0(\tau)]\,H_s(\tau) = F_s(\tau), \tag{7.21}$$
$$s = 0,\ 1,\ \ldots,$$

где

$$F_s(\tau) = P_s(\tau) - ik(\tau)\sum_{j=0}^{s} A_j(\tau)\,\mu_1(\tau) Z_{s-j}(\tau) -$$
$$- \sum_{j=0}^{s}\ \sum_{j_1=0}^{s-j} A_j(\tau)\,\mu_1(\tau)\,(D_{j_1}(\tau) + i\Omega_{j_1}(\tau))\,Z_{s-j-j_1}(\tau) -$$
$$- \sum_{j=0}^{s}\ \sum_{j_1=0}^{s-j}\ \sum_{j_2=0}^{s-j-j_1} A_j(\tau)\,\Pi_{j_1}(\tau)\,(D_{j_2}(\tau) + i\Omega_{j_2}(\tau))\,Z_{s-j_1-j_2-j}(\tau) -$$
$$- \sum_{j=0}^{s-1} A_j(\tau)\,\mu_1(\tau) Z'_{s-1-j}(\tau) - \sum_{j=0}^{s-1}\ \sum_{j_1=1}^{s-1-j} A_j(\tau)\,\Pi_{j_1}(\tau) Z'_{s-1-j-j_1}(\tau) -$$
$$- \sum_{j=0}^{s-1} A_j(\tau)\,\mu_1(\tau) Z'_{s-1-j}(\tau) - \sum_{j=0}^{s-1}\ \sum_{j_1=1}^{s-1-j} A_j(\tau)\,\Pi_{j_1}(\tau)\,Z'_{s-1-j_1-j}(\tau) -$$
$$- 2\sum_{j=0}^{s-1} A_j(\tau)\,\mu'_1(\tau)\,Z_{s-1-j}(\tau) - \sum_{j=0}^{s-1}\ \sum_{j_1=1}^{s-1-j} A_j(\tau)\,\Pi'_{j_1}(\tau)\,Z_{s-1-j_1-j}(\tau) -$$

$$-ik'(\tau)\sum_{j=0}^{s-1}A_j(\tau)H_{s-1-j}(\tau)+k^2(\tau)\sum_{j=1}^{s}A_j(\tau)H_{s-j}(\tau)-$$

$$-2ik(\tau)\sum_{j=0}^{s-1}A_j(\tau)H'_{s-1-j}(\tau)-\sum_{j=0}^{s-2}A_j(\tau)H''_{s-2-j}(\tau)-$$

$$-\sum_{j=0}^{s-1}C_j(\tau)\mu_1(\tau)Z_{s-1-j}(\tau)-\sum_{j=0}^{s-2}\sum_{j_1=1}^{s-1-j}C_j(\tau)\Pi_{j_1}(\tau)Z_{s-j_1-j-1}(\tau)-$$

$$-ik(\tau)\sum_{j=0}^{s-1}C_j(\tau)H_{s-1-j}(\tau)-\sum_{j=0}^{s-2}C_j(\tau)H_{s-2-j}(\tau)-$$

$$-\sum_{j=1}^{s}B_j(\tau)H_{s-j}(\tau),\quad s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots. \qquad (7.22)$$

Таким образом, определение векторов $H_s(\tau)$ и функций $Z_s(\tau)$ ($s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$) сводится к решению системы алгебраических уравнений (7.21), которая аналогична исследованной нами в п. 1 системе (7.7). Напоминаем, что детерминант системы (7.21) при некоторых τ из $[0, L]$ становится равным нулю, так как мы рассматриваем построение формального решения в случае «резонанса», т. е. для некоторых значений τ имеет место совпадение $k^2(\tau)$ и $\omega_1(\tau)$ (см. (7,1')).

В соответствии со сказанным выше мы будем находить неизвестную функцию $z_s(\tau)$ ($s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$) из условия

$$(F_s(\tau),\ \mu_1(\tau))=0,\qquad s=0,\ 1,\ \ldots. \qquad (7.23)$$

После этого не представит труда и построение вектора $H_s(\tau)$, если искать его, как решение системы (7.21), в виде

$$H_s(\tau)=\sum_{j=1}^{n}C_{js}(\tau)\mu_j(\tau),\qquad s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \qquad (7.24)$$

где $C_{js}(\tau)$ — коэффициенты, подлежащие определению.

Действительно, подставляя (7.24) в (7.21) и умножая результат скалярно на $\mu_r(\tau)$, найдем неизвестные коэффициенты $C_{js}(\tau)$:

$$C_{rs}(\tau)=\frac{(F_s(\tau),\ \mu_r(\tau))}{\omega_r(\tau)-k^2(\tau)},\qquad r=2,\ 3,\ \ldots,\ n. \qquad (7.25)$$

Согласно равенствам (7.23) и (7.1'), функция $C_{1s}(\tau)$ ($s=0,\ 1,\ \ldots$) остается произвольной. Положим ее равной нулю. Итак, указанным способом можно последовательно определить значение $Z_s(\tau)$ и $H_s(\tau)$ для любого натурального s.

Например, при $s=0$ имеем

$$Z_0(\tau) = -i\frac{(P_0(\tau),\ \mu_1(\tau))}{k(\tau)+\Omega_0(\tau)},$$

а при $s=1$

$$\begin{aligned}Z_1(\tau) = &-\frac{i}{\Omega_0(\tau)+k(\tau)}\{(P_1(\tau),\ \mu_1(\tau)) - ik(\tau)(A_1(\tau)\mu_1(\tau),\ \mu_1(\tau)) -\\ &-[D_1(\tau)+i\Omega_1(\tau)]Z_0(\tau) - i(A_1(\tau)\mu_1(\tau),\ \mu_1(\tau))\Omega_0(\tau)Z_0(\tau) -\\ &-i(A_0(\tau)\Pi_1(\tau),\ \mu_1(\tau))\Omega_0(\tau)Z_0(\tau) - Z_0'(\tau) -\\ &-2(A_0(\tau)\mu_1'(\tau),\ \mu_1(\tau)) + k^2(\tau)(A_1(\tau)H_0(\tau),\ \mu_1(\tau)) -\\ &-ik'(\tau)(A_0(\tau)H_1(\tau),\ \mu_1(\tau)) - 2ik(\tau)(A_0(\tau)H_0(\tau),\ \mu_1(\tau)) -\\ &-(C_0(\tau)\mu_1(\tau),\ \mu_1(\tau))Z_0(\tau) - ik(\tau)(C_0(\tau)H_0(\tau),\ \mu_1(\tau)) -\\ &-(B_0(\tau)H_0(\tau),\ \mu_1(\tau))\}.\end{aligned} \tag{7.26}$$

Нетрудно выписать и соответствующие формулы для определения коэффициентов $C_{rs}(\tau)$ $(r=2,\ 3,\ \ldots,\ n;\ s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$.

Итак, теорема II.1 доказана.

Замечание 1. Теорема II. 1 может быть перенесена на более общие случаи «резонанса», а именно: 1) когда значение функции $k^2(\tau)$ может при отдельных $\tau\in[0,\ L]$ совпадать с несколькими корнями $\omega_r(\tau)$ $(1\leqslant r\leqslant n)$ уравнения (6.5); 2) когда правая часть уравнения (6.1) имеет вид $\sum_{n=1}^{N} P_n(\tau,\ \varepsilon)e^{i\theta_n}$ и значения различных функций $k_n^2(\tau)$ совпадают с различными корнями уравнения (6.5).

Замечание 2. Для построения формального общего решения системы (6.1) следует к полученному частному решению (7.1) добавить формальное общее решение соответствующей однородной системы

$$A(\tau,\ \varepsilon)\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon C(\tau,\ \varepsilon)\frac{dx}{dt} + B(\tau,\ \varepsilon)x = 0. \tag{7.27}$$

Некоторое ν-е $(\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ частное решение системы (7.27) ищется с помощью описанного выше алгоритма в виде

$$x_\nu(t,\ \varepsilon) = \Pi_\nu(\tau,\ \varepsilon)\xi_\nu(t,\ \varepsilon), \tag{7.28}$$

где $\Pi_\nu(\tau,\ \varepsilon)$ — n-мерный вектор вида (7.3), а $\xi_\nu(\tau,\ \varepsilon)$ — скалярная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{d\xi_\nu}{dt} = [D_\nu(\tau, \varepsilon) + i\Omega_\nu(\tau, \varepsilon)]\,\xi_\nu, \tag{7.29}$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, n,$$

в котором

$$D_\nu(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s D_{\nu s}(\tau), \qquad \Omega_\nu(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Omega_{\nu s}(\tau), \tag{7.30}$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Здесь функции $D_{\nu s}(\tau)$, $\Omega_{\nu s}(\tau)$ и векторы $\Pi_{\nu s}(\tau)$ $(s = 0, 1, \ldots; \nu = 1, 2, \ldots, n)$ определяются по соответствующим формулам данного параграфа, в которых следует заменить $\omega_1(\tau)$, $\mu_1(\tau)$ на $\omega_\nu(\tau)$, $\mu_\nu(\tau)$. Так как все $\omega_\nu(\tau)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ — различны, то используя оба значения функции $\Omega_{\nu s}(\tau)$, мы получим $2n$ частных линейно независимых решения, необходимых для построения формального общего решения уравнения (7.27).

§ 8. «Нерезонансный» случай

Для «нерезонансного» случая может быть доказана такая теорема.

Теорема II.2. *Если коэффициенты уравнения (6.1) и функция $k(\tau)$ на сегменте $[0, L]$ обладают по τ производными всех порядков, то формальное общее решение системы (6.1) в «нерезонансном» случае может быть представлено в виде*

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{\nu=1}^{n} \Pi_\nu(\tau, \varepsilon)\,\xi_\nu(t, \varepsilon) + R(\tau, \varepsilon)\,e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \tag{8.1}$$

где $\sum_{\nu=1}^{n} \Pi_\nu(\tau, \varepsilon)\,\xi_\nu(t, \varepsilon)$ *— общее решение уравнения (7.27), а* $R(\tau, \varepsilon)$ *— n-мерный вектор, допускающий разложение*

$$R(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{n} \varepsilon^s R_s(\tau). \tag{8.2}$$

Доказательство. Ввиду замечания 2 § 7 доказательство данной теоремы сводится к определению элементов формального ряда (8.2). Для этого подставим

$$\tilde{x}(t, \varepsilon) = R(\tau, \varepsilon)\,e^{i\theta(t,\varepsilon)} \tag{8.3}$$

в систему (6.1) и в полученном тождестве

$$A(\tau, \varepsilon)\{\varepsilon^2 R''(\tau, \varepsilon) + \varepsilon i\,[2k(\tau)R'(\tau, \varepsilon) + k'(\tau)R(\tau, \varepsilon)] -$$

$$-k^2(\tau)R(\tau,\ \varepsilon)\} + \varepsilon^2 C(\tau,\ \varepsilon)[R'(\tau,\ \varepsilon) + ik'(\tau)R(\tau,\ \varepsilon)] + \\ + B(\tau,\ \varepsilon)R(\tau,\ \varepsilon) = P(\tau,\ \varepsilon) \qquad (8.4)$$

сравним коэффициенты при ε^s $(s = 0,\ 1,\ \ldots)$. В результате этого найдем следующие рекуррентные соотношения:

$$[B_0(\tau) - k^2(\tau)A_0(\tau)]R_s(\tau) = G_s(\tau), \qquad s = 0,\ 1,\ \ldots, \qquad (8.5)$$

где

$$G_s(\tau) = P_s(\tau) - \sum_{j=0}^{s-2} A_j(\tau)R_{s-2-j}(\tau) - 2ik(\tau)\sum_{j=0}^{s-1} A_j(\tau)R'_{s-1-j}(\tau) - \\ - ik'(\tau)\sum_{j=0}^{s-1} A_j(\tau)R_{s-1-j}(\tau) - \sum_{j=0}^{s-2} C_j(\tau)R'_{s-2-j}(\tau) - \\ - ik(\tau)\sum_{j=0}^{s-1} C_j(\tau)R_{s-1-j}(\tau) - \sum_{j=1}^{s} B_j(\tau)R_{s-j}(\tau). \qquad (8.6)$$

Так как, согласно (6.7),

$$\det[B_0(\tau) - k^2(\tau)A_0(\tau)] \neq 0 \qquad (8.7)$$

при любом $\tau \in [0,\ L]$, то из соотношений (8.5) находим

$$R_s(\tau) = [B_0(\tau) - k^2(\tau)A_0(\tau)]^{-1}G_s(\tau), \qquad s = 0,\ 1,\ \ldots. \qquad (8.8)$$

Отметим, что здесь вектор $G_s(\tau)$ при последовательном решении системы (8.5) определяется через уже известные величины.

Теорема доказана.

§ 9. Асимптотический характер решения

Как мы уже отметили во введении, практическая применимость излагаемого здесь асимптотического метода определяется не сходимостью рядов (7.3) или (8.2) (во многих случаях эти ряды являются расходящимися), а асимптотическим поведением вектора $x^{(m)}(t,\ \varepsilon)$, определяемого следующим образом:

$$x^{(m)}(t,\ \varepsilon) = [\Pi^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)\,\xi^{(m)}(t,\ \varepsilon) + H^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)]\,e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \qquad (9.1)$$

$$\frac{d\xi^{(m)}}{dt} = [D^{(m)}(\tau,\ \varepsilon) + i(\Omega^{(m)}(\tau,\ \varepsilon) - k(\tau))]\,\xi^{(m)} + Z^{(m)}(\tau,\ \varepsilon),$$

где (9.2)

$$\Pi^{(m)}(\tau,\ \varepsilon) = \mu_1(\tau) + \sum_{s=1}^{m} \varepsilon^s \Pi_s(\tau), \quad H^{(m)}(\tau,\ \varepsilon) = \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s H_s(\tau),$$

$$D^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)=\sum_{s=1}^{m}\varepsilon^s D_s(\tau),\quad \Omega^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)=\sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s\Omega_s(\tau), \tag{9.3}$$

$$Z^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)=\sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s Z_s(\tau)$$

(m — любое натуральное число).

Ниже будет показано, что норма разности между точным частным решением $x(t,\ \varepsilon)$ системы (6.1) и соответствующим вектором $x^{(m)}(t,\ \varepsilon)$ m-ым приближением может быть сделана сколь угодно малой для достаточно малого ε.

Для этого рассмотрим, например, «резонансный» случай (аналогичные результаты могут быть получены и для «нерезонансного» случая).

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма II. 1. *Если выполняются условия теоремы II.1, то m-е приближение удовлетворяет исходной системе дифференциальных уравнений (6.1) с точностью до величин порядка малости ε^m равномерно по t на сегменте $0\leqslant t\leqslant \frac{L}{\varepsilon}$ для любого ε из интервала $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$.*

Доказательство. Действительно, подставляя вектор $x^{(m)}(t,\ \varepsilon)$, определяемый формулой (9.1), в выражение

$$A(\tau,\ \varepsilon)\frac{d^2x^{(m)}}{dt^2}+\varepsilon C(\tau,\ \varepsilon)\frac{dx^{(m)}}{dt}+B(\tau,\ \varepsilon)x^{(m)}-P(\tau,\ \varepsilon)e^{i\theta(t,\varepsilon)},$$

получим

$$A(\tau,\ \varepsilon)\frac{d^2x^{(m)}}{dt^2}+\varepsilon C(\tau,\ \varepsilon)\frac{dx^{(m)}}{dt}+B(\tau,\ \varepsilon)x^{(m)}-P(\tau,\ \varepsilon)e^{i\theta(t,\varepsilon)}=$$

$$=\{A(\tau,\ \varepsilon)[\varepsilon^2\Pi^{(m)''}(\tau,\ \varepsilon)+2\varepsilon\Pi^{(m)'}(\tau,\ \varepsilon)(D^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)+i\Omega^{(m)}(\tau,\ \varepsilon))+$$

$$+\varepsilon\Pi^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)(D^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)+i\Omega^{(m)}(\tau,\ \varepsilon))'+\Pi^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)(D^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)+$$

$$+i\Omega(\tau,\ \varepsilon))^2]+\varepsilon C(\tau,\ \varepsilon)[\varepsilon\Pi^{(m)'}(\tau,\ \varepsilon)+\Pi^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)(D^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)+$$

$$+i\Omega^{(m)}(\tau,\varepsilon))]+B(\tau,\ \varepsilon)\Pi^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)\}\,\xi^{(m)}(t,\ \varepsilon)e^{i\theta(t,\varepsilon)}+$$

$$+\{A(\tau,\ \varepsilon)[(D^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)+i\Omega^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)-ik(\tau))\Pi^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)\overline{Z}^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)+$$

$$+\varepsilon Z^{(m)'}(\tau,\ \varepsilon)\Pi^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)+2\varepsilon Z^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)\Pi^{(m)'}(\tau,\ \varepsilon)+$$

$$+\varepsilon ik'(\tau)H^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)-k^2(\tau)H^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)+2\varepsilon ik(\tau)H^{(m)'}(\tau,\ \varepsilon)+$$

$$+\varepsilon^2H^{(m)''}(\tau,\ \varepsilon)]+\varepsilon C(\tau,\ \varepsilon)[\Pi^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)Z^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)+$$

$$+ik(\tau)H^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)+\varepsilon H^{(m)\prime}(\tau,\ \varepsilon)]+B(\tau,\ \varepsilon)H^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)-$$
$$-P(\tau,\ \varepsilon)\}\,e^{i\theta(t,\varepsilon)}. \tag{9.4}$$

Выражения, стоящие в правой части соотношения (9. 4), согласно определению элементов рядов (7.3), имеют порядок малости ε^{m+1}. Поэтому выражение (9.4) можно представить в виде

$$A(\tau,\ \varepsilon)\frac{d^2x^{(m)}}{dt^2}+\varepsilon C(\tau,\ \varepsilon)\frac{dx^{(m)}}{dt}+B(\tau,\ \varepsilon)x^{(m)}=$$
$$=P(\tau,\ \varepsilon)e^{i\theta(t,\varepsilon)}+\varepsilon^{m+1}[F_m(\tau,\ \varepsilon)\xi^{(m)}(t,\ \varepsilon)+R_m(\tau,\ \varepsilon)]\,e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \tag{9.5}$$

где $F_m(\tau,\ \varepsilon)$, $R_m(\tau,\ \varepsilon)$ — векторы, регулярные относительно ε в окрестности точки $\varepsilon=0$.

Интегрируя уравнение (9.2), находим

$$\xi^{(m)}(t,\ \varepsilon)=ae^{\int_0^t D^{(m)}(\tau,\varepsilon)dt}\left\{\cos\int_0^t[\Omega^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)-k(\tau)]\,dt+\right.$$
$$\left.+i\sin\int_0^t[\Omega^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)-k(\tau)]\,dt\right\}+$$
$$+\int_0^t Z^{(m)}(\tau_1,\ \varepsilon)e^{\int_{t_1}^t D^{(m)}(\tau,\varepsilon)dt}\left[\cos\int_{t_1}^t(\Omega^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)-k(\tau))\,dt+\right.$$
$$\left.+i\sin\int_{t_1}^t(\Omega^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)-k(\tau))\,dt\right]dt_1, \tag{9.6}$$

где a — постоянная интегрирования.

Так как функции $D^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)$, $Z^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)$, $\Omega^{(m)}(\tau,\ \varepsilon)$, $k(\tau)$ — дифференцируемы по τ, а значит, ограничены на сегменте $[0,\ L]$, то из соотношения (9.6) получим

$$|\xi^{(m)}(t,\ \varepsilon)|\leqslant\frac{C_1}{\varepsilon}, \tag{9.7}$$

где C_1 — постоянная, не зависящая от ε.

Учитывая оценку (9.7), соотношение (9.5) можно переписать в виде

$$A(\tau,\ \varepsilon)\frac{d^2x^{(m)}}{dt^2}+\varepsilon C(\tau,\ \varepsilon)\frac{dx^{(m)}}{dt}+B(\tau,\ \varepsilon)x^{(m)}=$$
$$=P(\tau,\ \varepsilon)e^{i\theta(t,\varepsilon)}+\varepsilon^m\Phi_m(\tau,\ \varepsilon), \tag{9.8}$$

где $\Phi_m(\tau, \varepsilon)$ — вектор, ограниченный по модулю равномерно для всех $t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$ и $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

Лемма доказана.

Теперь можно доказать теорему, устанавливающую асимптотический характер решения $x^{(m)}(t, \varepsilon)$.

Теорема II. 3. *Пусть точное решение $x(t, \varepsilon)$ системы (6.1) и m-е приближение $x^{(m)}(t, \varepsilon)$ взяты при одинаковых начальных условиях*

$$x(0) = x^{(m)}(0) = x_0, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{dx^{(m)}}{dt}\right|_{t=0} = \dot{x}_0. \tag{9.9}$$

Тогда при выполнении условий теоремы II. 1 любому $L > 0$ можно сопоставить такую постоянную C, не зависящую от ε, что для всех $t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$ и $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ будут выполняться неравенства

$$\begin{gathered} \| x(t, \varepsilon) - x^{(m)}(t, \varepsilon) \| \leqslant \varepsilon^{m-1} C, \\ \left\| \frac{dx}{dt} - \frac{dx^{(m)}}{dt} \right\| \leqslant \varepsilon^{m-1} C. \end{gathered} \tag{9.10}$$

Доказательство. Для доказательства данной теоремы введем в рассмотрение вектор

$$y(t, \varepsilon) = x(t, \varepsilon) - x^{(m)}(t, \varepsilon). \tag{9.11}$$

Нетрудно видеть, что вектор $y(t, \varepsilon)$ удовлетворяет нулевым начальным условиям

$$y(0) = 0, \qquad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

и системе

$$A(\tau, \varepsilon)\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon C(\tau, \varepsilon)\frac{dy}{dt} + B(\tau, \varepsilon)y = -\varepsilon^m \Phi_m(\tau, \varepsilon). \tag{9.12}$$

Перепишем полученную систему (9.12) следующим образом:

$$A_0(\tau)\frac{d^2y}{dt^2} + B_0(\tau)y = -\varepsilon A_1(\tau, \varepsilon)\frac{d^2y}{dt^2} - \varepsilon C(\tau, \varepsilon)\frac{dy}{dt} -$$

$$- \varepsilon B_1(\tau, \varepsilon) y - \varepsilon^m \Phi_m(\tau, \varepsilon), \tag{9.13}$$

где

$$A_1(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_{s+1}(\tau), \quad B_1(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s B_{s+1}(\tau). \tag{9.14}$$

Представим искомый вектор $y(t, \varepsilon)$ в виде

$$y(t, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j(\tau) b_j(t, \varepsilon), \tag{9.15}$$

где $b_j(t, \varepsilon)$ — скалярные функции.

Подставляя (9.15) в систему (9.13) и умножая результат скалярно на вектор μ_k ($k = 1, 2, \ldots, n$), получим

$$\frac{d^2 b_k}{dt^2} + \varrho_k^2(\tau) b_k = -\varepsilon \sum_{j=1}^{n} \{\varepsilon^2 (A_1(\tau, \varepsilon) \mu_j''(\tau), \mu_k(\tau)) +$$
$$+ \varepsilon (C(\tau, \varepsilon) \mu_j'(\tau), \mu_k(\tau)) + (B_1(\tau, \varepsilon) \mu_j(\tau), \mu_k(\tau)) b_j +$$
$$+ (A_1(\tau, \varepsilon) \mu_j(\tau), \mu_k(\tau)) \frac{d^2 b_j}{dt^2} + (C(\tau, \varepsilon) \mu_j(\tau), \mu_k(\tau)) \frac{db_j}{dt} -$$
$$- \varepsilon^m (\Phi_m(\tau, \varepsilon), \mu_k(\tau)), \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{9.16}$$

где

$$\varrho_k^2(\tau) = \omega_k(\tau), \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{9.17}$$

Решим полученную систему (9.16) относительно вторых производных, учитывая при этом, что определитель системы для достаточно малых значений ε мало отличается от единицы. Результат запишем в виде

$$\frac{d^2 b_k}{dt^2} + \varrho_k^2(\tau, \varepsilon) b_k = \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \left[\alpha_{kj}(\tau, \varepsilon) b_j + \beta_{kj}(\tau, \varepsilon) \frac{db_j}{dt} \right] +$$
$$+ \varepsilon^m f_k(\tau, \varepsilon), \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{9.18}$$

где функции $\varrho_k^2(\tau, \varepsilon)$, $\alpha_{kj}(\tau, \varepsilon)$, $\beta_{kj}(\tau, \varepsilon)$ и $f_k(\tau, \varepsilon)$ — ограничены на сегменте $[0, L]$, причем, согласно (9.17),

$$\varrho_k^2(\tau, \varepsilon) \neq 0 \tag{9.19}$$

при любом $\tau \in [0, L]$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

Применяя к системе (9.18) лемму I.2, будем иметь

$$|b_k(t, \varepsilon)| \leqslant S_k \int_0^t \left| \frac{P_k(\tau, \varepsilon)}{\varrho_k(\tau, \varepsilon)} \right| dt,$$
$$\left| \frac{db_k}{dt} \right| \leqslant S_{1k} \int_0^t \left| \frac{P_k(\tau, \varepsilon)}{\varrho_k(\tau, \varepsilon)} \right| dt, \tag{9.20}$$

где

$$P_k(\tau, \varepsilon) = \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \left[\alpha_{kj}(\tau, \varepsilon) b_j(t, \varepsilon) + \beta_{kj}(\tau, \varepsilon) \frac{db_j}{dt} \right] + \varepsilon^m f_k(\tau, \varepsilon). \quad (9.21)$$

Пусть

$$W = \sum_{j=1}^{n} \left(|b_j(t, \varepsilon)| + \left| \frac{db_j}{dt} \right| \right). \quad (9.22)$$

Складывая почленно неравенства (9.20) и учитывая при этом, что функции $\alpha_{kj}(\tau, \varepsilon)$, $\beta_{kj}(\tau, \varepsilon)$, $\varrho_k(\tau, \varepsilon)$ и $f_k(\tau, \varepsilon)$ ограничены для любых $\tau \in [0, L]$ и $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, находим

$$W \leqslant \varepsilon K \int_0^t W dt + \varepsilon^{m-1} K_1, \quad (9.23)$$

где K, K_1 — постоянные, не зависящие от ε.

Применяя к неравенству (9.23) лемму I.1, получим неравенство

$$W \leqslant \varepsilon^{m-1} C, \quad C = K_1 e^{KL}. \quad (9.24)$$

Отсюда вытекают оценки

$$|b_j(t, \varepsilon)| \leqslant \varepsilon^{m-1} C, \quad \left| \frac{db_j}{dt} \right| \leqslant \varepsilon^{m-1} C, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \quad (9.25)$$

Из неравенства (9.25) и соотношений (9.11), (9.15) следует справедливость теоремы II.3.

Заметим, что в «нерезонансном» случае оценки улучшаются, а именно

$$\| x(t, \varepsilon) - x^{(m)}(t, \varepsilon) \| \leqslant \varepsilon^m C, \quad \left\| \frac{dx}{dt} - \frac{dx^{(m)}}{dt} \right\| \leqslant \varepsilon^m C. \quad (9.26)$$

Кроме того, и в случае «резонанса» при малом свободном члене ($P_0(\tau) \equiv 0$) оценки тоже будут иметь вид (9.26).

§ 10. О динамических усилиях в упруго-вязкой нити переменной длины с грузом Q на конце

В § 5 был рассмотрен вопрос о нахождении усилий в упруго-вязкой нити (канате) переменной длины с грузом Q на конце. Эта задача свелась к интегрированию обыкновенного линейного дифференциального уравнения (5.1).

В работе [69] Ю. Д. Соколов показал, что задача о нахождении усилий в упруго-вязкой нити переменной длины $l = l(t)$ с грузом Q на конце при определенных условиях приводится к системе двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$l^2(t)\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -6[2\gamma+\gamma_1 l(t)]\frac{d\varphi}{dt} - 3(\gamma_1 - v)\frac{d\psi}{dt} -$$

$$-3\beta_1\psi - 6[2\beta+\beta_1 l(t) - v^2]\varphi - 3\left(g - \frac{dv}{dt}\right),$$

$$l(t)\frac{d^2\psi}{dt^2} = 4[3\gamma+\gamma_1 l(t) - vl(t)]\frac{d\varphi}{dt} +$$

$$+2(\gamma_1 - 2v)\frac{d\psi}{dt} + 4[3\beta+\beta_1 l(t) - 2v^2]\varphi + 2\beta_1\psi + 4\left(g - \frac{dv}{dt}\right), \tag{10.1}$$

где

$$\gamma = \frac{g\alpha}{q}, \quad \gamma_1 = \frac{g\alpha}{Q}, \quad \beta = \frac{gK}{q}, \quad \beta_1 = \frac{gK}{Q},$$

$$K = E\sigma, \qquad v = \frac{dl}{dt}, \tag{10.2}$$

g, q, E, σ, α — те же, что и в уравнении (5.1).

В системе (10.1) функция $\varphi(t)$ определяет относительное удлинение нити, а $\psi(t)$ характеризует усилия T_1, возникающие на верхнем конце нити, ибо, согласно работе [69], можно приближенно принять

$$T_1 \approx K\psi(t). \tag{10.3}$$

В данном параграфе покажем, что система (10.1) может быть проинтегрирована асимптотическим методом, изложенным нами в § 7, 8 настоящей главы.

Будем допускать, как и при решении уравнения (5.1), что подъем груза осуществляется по трапецоидальной тахограмме (рис. 1), т. е. закон движения груза задается формулами (5.2), (5.3) и (5.4). Тогда на каждом из участков подъема груза система (10.1) должна быть приведена к виду (6.1).

1. Рассмотрим сначала первый участок подъема груза. Вводя в рассмотрение величины

$$\varphi = \frac{x_1 - x_2}{l_0}, \quad \psi = \frac{4x_2 - 3x_1}{3}, \quad T = \omega_0 t, \quad \tau = \varepsilon T, \tag{10.4}$$

где

$$\omega_0 = \frac{c}{l_0}, \quad c = \sqrt{\frac{Kg}{q}}, \quad \varepsilon = \sqrt[3]{\frac{al_0}{2c^2}}, \tag{10.5}$$

приведем систему (10.1) к виду (6.1), где

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{2} \varepsilon^s A_s(\tau), \quad C(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{2} \varepsilon^s C_s(\tau), \tag{10.6}$$

$$B(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{4} \varepsilon^s B_s(\tau), \quad P(\tau, \varepsilon) = P_0,$$

$$A_0(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}, \quad A_1(\tau) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \tau^2, \ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tau^4,$$

$$B_0(\tau) = \begin{bmatrix} 3(4+\eta_0) & -2(6+\eta_0) \\ -2(6+\eta_0) & 4\left(3+\frac{1}{3}\eta_0\right) \end{bmatrix},$$

$$B_1(\tau) = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \eta_0 \tau^2, \quad B_2(\tau) \equiv B_3(\tau) \equiv 0,$$

$$B_4(\tau) = \begin{bmatrix} -24 & 24 \\ 32 & -32 \end{bmatrix} \tau^2,$$

$$C_0(\tau) = \begin{bmatrix} 3\left(\frac{4\gamma}{l_0} + \gamma_1\right) & -2\left(\frac{6\gamma}{l_0} + \gamma_1\right) \\ -2\left(\frac{6\gamma}{l_0} + \gamma_1\right) & 4\left(\frac{3\gamma}{l_0} + \frac{1}{3}\gamma_1\right) \end{bmatrix} \delta_1^0,$$

$$C_1(\tau) = \begin{bmatrix} -6(\gamma_1\delta_1\tau + 1) & 6\left(\gamma_1\delta_1\tau + \frac{4}{3}\right) \\ 4\gamma_1\delta_1\tau & -4\left(\gamma_1\delta_1\tau + \frac{2}{3}\right) \end{bmatrix} \tau,$$

$$C_2(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} 8\tau^2,$$

$$P_0 = \frac{p_0}{K}\left(1 + \frac{a}{g}\right) \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \tag{10.7}$$

$$p_0 = l_0 q, \quad \delta_1^0 = \sqrt[3]{\frac{2}{a l_0 C}}, \quad \eta_0 = \frac{p_0}{Q}.$$

Для построения искомого решения найдем прежде всего собственные числа и собственные векторы матрицы $B_0(\tau)$ по отношению к матрице $A_0(\tau)$. Из соотношений (6.4), (6.5) находим

$$\omega_1 = 6 + 2\eta_0 + 2\sqrt{9 + 3\eta_0 + \eta_0^2},$$

$$\omega_2 = 6 + 2\eta_0 - 2\sqrt{9 + 3\eta_0 + \eta_0^2}, \tag{10.8}$$

$$\mu_1 = \frac{1}{R_1}\begin{bmatrix} 2(6+\eta_0) - \omega_1 \\ 3(4+\eta_0) - \omega_1 \end{bmatrix}, \quad \mu_2 = \frac{1}{R_2}\begin{bmatrix} 2(6+\eta_0) - \omega_2 \\ 3(4+\eta_0) - \omega_2 \end{bmatrix},$$

где

$$R_1 = \sqrt{\frac{\omega_1^2}{3} - 2(4+\eta_0)\omega_1 + 4(12 + 6\eta_0 + \eta_0^2)},$$

$$R_2 = \sqrt{\frac{\omega_2^2}{3} - 2(4+\eta_0)\omega_2 + 4(12 + 6\eta_0 + \eta_0^2)}. \tag{10.9}$$

Тогда, согласно формулам § 7, 8, асимптотическое решение системы дифференциальных уравнений (10.1) на первом участке подъема груза Q во втором приближении имеет вид

$$\begin{aligned}
l_0\varphi = {} & N_1 e^{-(\beta_1 t + \beta_2 t^3 + \beta_3 t^5)} \{[\mu_{11} - \mu_{21} + (\mu_{12} - \mu_{22}) \times \\
& \times (\Delta_0 t^2 + \Delta_1 t^4)] \sin(\delta_1 t + \delta_2 t^3 + \delta_3 t^5 + \theta_1) + \\
& + (\mu_{22} - \mu_{12})(\Delta_2 t + \Delta_3 t^3) \cos(\delta_1 t + \delta_2 t^3 + \delta_3 t^5 + \theta_1)\} + \\
& + N_2 e^{-(\bar\beta_1 t + \bar\beta_2 t^3 + \bar\beta_3 t^5)} \{[\mu_{12} - \mu_{22} + (\mu_{11} - \mu_{21})(\bar\Delta_0 t^2 + \bar\Delta_1 t^4)] \times \\
& \times \sin(\bar\delta_1 t + \bar\delta_2 t^3 + \bar\delta_3 t^5 + \theta_2) + \\
& + (\mu_{21} - \mu_{11})(\bar\Delta_2 t + \bar\Delta_3 t^3) \cos(\bar\delta_1 t + \bar\delta_2 t^3 + \bar\delta_3 t^5 + \theta_2)\} - \frac{p_0}{2K}\left(1 + \frac{a}{g}\right); \\
\psi = {} & N_1 e^{-(\beta_1 t + \beta_2 t^3 + \beta_3 t^5)} \left\{\left[\frac{4}{3}\mu_{21} - \mu_{11} + \right.\right. \\
& + \left(\frac{4}{3}\mu_{22} - \mu_{12}\right)(\Delta_0 t^2 + \Delta_1 t^4)\Big] \sin(\delta_1 t + \delta_2 t^3 + \delta_3 t^5 + \theta_1) + \\
& + \left.\left(\mu_{12} - \frac{4}{3}\mu_{22}\right)(\Delta_2 t + \Delta_3 t^3)\cos(\delta_1 t + \delta_2 t^3 + \delta_3 t^5 + \theta_1)\right\} + \\
& + N_2 e^{-(\bar\beta_1 t + \bar\beta_2 t^3 + \bar\beta_3 t^5)} \left\{\left[\frac{4}{3}\mu_{22} - \mu_{12} + \left(\frac{4}{3}\mu_{21} - \mu_{11}\right) \times \right.\right. \\
& \times (\bar\Delta_0 t^2 + \bar\Delta_1 t^4)\Big] \sin(\bar\delta_1 t + \bar\delta_2 t^3 + \bar\delta_3 t^5 + \theta_2) + \\
& + \left.\left(\mu_{11} - \frac{4}{3}\mu_{21}\right)(\bar\Delta_2 t + \bar\Delta_3 t^3)\cos(\bar\delta_1 t + \bar\delta_2 t^3 + \bar\delta_3 t^5 + \theta_2)\right\} +
\end{aligned} \tag{10.10}$$

$$+\frac{Q}{K}\left(1+\frac{a}{g}\right)\left[1+\eta_0\left(1-\frac{at^2}{2l_0}\right)\right],$$

где

$$\beta_1=\frac{g\alpha\left(\frac{1}{3}\omega_1^2-8\omega_1+48+12\eta_0\right)}{2Ql_0R_1^2}.$$

$$\beta_2=\frac{a\left[24\eta_0^2-12(4+\eta_0)\omega_1+(8-\eta_0)\omega_1^2-\frac{1}{3}\omega_1^3\right]}{8\omega_1 l_0 R_1^2},$$

$$\beta_3=\frac{g\alpha a}{12l_0^2QR_1^4}\left[\frac{1}{9}\omega_1^4-\frac{1}{3}(16+3\eta_0)\omega_1^3+\right.$$

$$+\left(96+40\eta_0+\frac{14}{3}\eta_0^2\right)\omega_1^2-(768+528\eta_0+124\eta_0^2+8\eta_0^3)\omega_1+$$

$$\left.+2304(1+\eta_0)+816\eta_0^2+120\eta_0^3\right],$$

$$\Delta_0=\frac{a\eta_0\left[\omega_1^2-2\eta_0(\omega_1-\omega_2)-24\eta_0\right]}{2l_0R_1R_2(\omega_2-\omega_1)},$$

$$\Delta_1=-\frac{a^2\eta_0}{2l_0^2R_1^3R_2^3(\omega_2-\omega_1)^2}\left\{12\eta_0\left[\frac{\omega_1^3}{3}-(8+\eta_0)\omega_1^2+12(4+\eta_0)\omega_1+\right.\right.$$

$$\left.+24\eta_0^2\right]R_2^2+4\left[\omega_1^2-2\eta_0(\omega_1-\omega_2)-24\eta_0\right]\left[\eta_0\omega_2-24\eta_0+\right.$$

$$\left.\left.+3\eta_0^2+3(4+\eta_0)\omega_1\right]R_1^2+\omega_1(\omega_2-\omega_1)(12+2\eta_0-\omega_2)R_1^2R_2^2\right\},$$

$$\delta_1=\nu_0-\frac{g^2\alpha^2\left(\frac{1}{3}\omega_1^2-8\omega_1+48+12\eta_0\right)^2}{8Q^2l_0^2\nu_0R_1^4},$$

$$\delta_2=\frac{a\nu_0\left[\frac{1}{3}\omega_1^3-(8+\eta_0)\omega_1+12(4+\eta_0)\omega_1+24\eta_0^2\right]}{12l_0\omega_1R_1^2},$$

$$\delta_3=\frac{a^2\nu_0}{160\omega_1^2l_0^2R_1^4}\left\{4\omega_1\left[\frac{\omega_1^3}{3}-(8+\eta_0)\omega_1^2+12(4+\eta_0)\omega_1+\right.\right.$$

$$\left.+24\eta_0^2\right]\left[\frac{1}{3}\omega_1^2-(8+\eta_0)\omega_1+48-12\eta_0+2\eta_0^2\right]-$$

$$-\left[\frac{\omega_1^3}{3}-(8+\eta_0)\omega_1^2+12(4+\eta_0)\omega_1+24\eta_0^2\right]^2-$$

$$-4\omega_1^2\eta_0R_1^2(\omega_1-12-2\eta_0)+\frac{4\omega_1R_1^2\eta_0(12+3\eta_0-\omega_1)}{R_2^2(\omega_2-\omega_1)}\times$$

$$\times\{16\eta_0+4\eta_0^2-\eta_0(\omega_2+2\omega_1)-4\omega_1\}\{\omega_1^2-2\eta_0(\omega_1-\omega_2)-24\eta_0\}\},\tag{10.11}$$

$$v_0=\sqrt{\frac{Kga}{l_0p_0}},\quad \Delta_2=-\frac{2a\omega_1\eta_0\{\omega_2^2+2(\omega_1-\omega_2)(\eta_0+3)\}}{l_0v_0R_1R_2(\omega_2-\omega_1)^2},$$

$$\Delta_3=\frac{ga\omega_1a}{2l_0^2(\omega_2-\omega_1)^2R_1^3R_2^3Qv_0}\left\{12\eta_0^2R_2^2\left(\frac{\omega_1^2}{3}-8\omega_1+48+12\eta_0\right)+\right.$$

$$+\eta_0R_1^2\{\omega_1^2-2\eta_0(\omega_1-\omega_2)-24\eta_0\}\left[\frac{\omega_2^2}{3}-8\omega_2+48+12\eta_0\right]-$$

$$\left.-2R_1^2R_2^2(\omega_2-\omega_1)(12+3\eta_0-\omega_2)(\omega_1-12-4\eta_0)\right\},$$

N_1, N_2, θ_1, θ_2 — постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий, а коэффициенты $\bar\beta_1$, $\bar\beta_2$, $\bar\beta_3$, $\bar\Delta_0$, $\bar\Delta_1$, $\bar\delta_1$, $\bar\delta_2$, $\bar\delta_3$, $\bar\Delta_2$, $\bar\Delta_3$ совпадают соответственно с коэффициентами β_1, β_2, β_3, Δ_0, Δ_1, δ_1, δ_2, δ_3, Δ_2, Δ_3, если заменить в последних ω_1, R_1 на ω_2, R_2 и наоборот.

2. Перейдем к нахождению решения системы дифференциальных уравнений (10.1) на втором участке движения груза Q. Для этого введем новые переменные по формулам

$$\varphi=\frac{x_1-x_2}{l_1},\quad \psi=\frac{4x_2-3x_1}{3},$$
$$T=\omega_{01}t,\quad \tau=\varepsilon T,\tag{10.12}$$

где

$$\omega_{01}=\frac{c}{l_1},\quad \varepsilon=\sqrt{\frac{v_0}{c}}.\tag{10.13}$$

Система (10.1) приводится к виду (6.1), где

$$A(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{2}\varepsilon^sA_s(\tau),\quad C(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{2}\varepsilon^sC_s(\tau),$$
$$B(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{4}\varepsilon^sB_s(\tau),\quad P(\tau,\varepsilon)=P_0.\tag{10.14}$$

причем

$$A_0(\tau)=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & \dfrac{4}{3}\end{bmatrix},\quad A_1(\tau)=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 1 & -\dfrac{4}{3}\end{bmatrix}\tau,$$

$$A_2(\tau)=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\tau^2,\qquad C_0(\tau)=$$

$$=\begin{bmatrix}3\left(\dfrac{4\gamma}{l_1}+\gamma_1\right) & -2\left(6\dfrac{\gamma}{l_1}+\gamma_1\right)\\ -2\left(6\dfrac{\gamma}{l_1}+\gamma_1\right) & 2\left(6\dfrac{\gamma}{l_1}+\dfrac{2}{3}\gamma_1\right)\end{bmatrix}f^{(1)},$$

$$C_1(\tau)=\begin{bmatrix}-3(2\gamma_1 f^{(1)}\tau+1) & 3\left(2\gamma_1 f^{(1)}\tau+\dfrac{4}{3}\right)\\ 4\gamma_1 f^{(1)}\tau & -2\left(2\gamma_1 f^{(1)}(\tau)+\dfrac{2}{3}\right)\end{bmatrix},$$

$$C_2(\tau)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 4 & -4\end{bmatrix}\tau,\quad B_0(\tau)=3\begin{bmatrix}4+\eta_1 & -\left(4+\dfrac{2}{3}\eta_1\right)\\ -\left(4+\dfrac{2}{3}\eta_1\right) & 4+\dfrac{4}{9}\eta_1\end{bmatrix},$$

$$B_1(\tau)=\begin{bmatrix}-6 & 6\\ 4 & -4\end{bmatrix}\eta_1\tau,\quad B_2(\tau)\equiv B_3(\tau)\equiv 0, \qquad (10.1$$

$$B_4(\tau)=\begin{bmatrix}-6 & 6\\ 8 & -8\end{bmatrix},\quad P_0=\frac{P_1}{K}\begin{vmatrix}-3\\ 4\end{vmatrix},$$

$$f^{(1)}=\frac{1}{\sqrt{v_0C}},\quad p_1=l_1q,\quad \eta_1=\frac{p_1}{Q}.$$

Решение в этом случае имеет вид

$$l_1\varphi=N_1^{(1)}e^{-(\beta_1^{(1)}t+\beta_2^{(1)}t^2)}\{[\mu_{11}^{(1)}-\mu_{21}^{(1)}+(\mu_{12}^{(1)}-\mu_{22}^{(1)})(\Delta_0^{(1)}+\Delta_1^{(1)}t^2)]\times$$

$$\times\sin(\delta_1^{(1)}t+\delta_2^{(1)}t^2+\delta_3^{(1)}t^3+\theta_1^{(1)})+(\mu_{22}^{(1)}-\mu_{12}^{(1)})(\Delta_2^{(1)}+\Delta_3^{(1)}t)\times$$

$$\times\cos(\delta_1^{(1)}t+\delta_2^{(1)}t^2+\delta_3^{(1)}t^3+\theta_1^{(1)})\}+$$

$$+N_2^{(1)}e^{-(\bar\beta_1 t+\bar\beta_2 t^2)}\{[\mu_{12}^{(1)}-\mu_{22}^{(1)}+(\mu_{11}^{(1)}-\mu_{21}^{(1)})(\bar\Delta_0^{(1)}t+\bar\Delta_1^{(1)}t^2)]\times$$

$$\times\sin(\bar\delta_1^{(1)}t+\bar\delta_2^{(1)}t^2+\bar\delta_3^{(1)}t^3+\theta_2^{(1)})+$$

$$+ (\mu_{21}^{(1)} - \mu_{11}^{(1)})(\bar{\Delta}_2^{(1)} + \bar{\Delta}_3^{(1)}t)\cos(\bar{\delta}_1^{(1)}t + \bar{\delta}_2^{(1)}t^2 + \bar{\delta}_3^{(1)}t^3 + \theta_2^{(1)})\} - \frac{p_1}{2K}$$

$$\psi = N_1^{(1)} e^{-(\beta_1^{(1)}t + \beta_2^{(1)}t^2)} \left\{\left[\frac{4}{3}\mu_{21}^{(1)} - \mu_{11}^{(1)} + \right.\right. \tag{10.16}$$

$$+ \left(\frac{4}{3}\mu_{22}^{(1)} - \mu_{12}^{(1)}\right)(\Delta_0^{(1)}t + \Delta_1^{(1)}t^2)\Big] \sin(\delta_1^{(1)}t + \delta_2^{(1)}t^2 + \delta_3^{(1)}t^3 + \theta_1^{(1)}) +$$

$$+ \left(\mu_{12}^{(1)} - \frac{4}{3}\mu_{22}^{(1)}\right)(\Delta_2^{(1)} + \Delta_3^{(1)}t)\cos(\delta_1^{(1)}t + \delta_2^{(1)}t^2 + \delta_3^{(1)}t^3 + \theta_1^{(1)})\Big\} +$$

$$+ N_2^{(1)} e^{-(\bar{\beta}^{(1)}t + \bar{\beta}_2^{(1)}t^2)} \left\{\left[\frac{4}{3}\mu_{22}^{(1)} - \mu_{12}^{(1)} + \right.\right.$$

$$+ \left(\frac{4}{3}\mu_{21}^{(1)} - \mu_{11}^{(1)}\right)(\bar{\Delta}_0^{(1)}t + \bar{\Delta}_1^{(1)}t^2)\Big] \sin(\bar{\delta}_1^{(1)}t + \bar{\delta}_2^{(1)}t^3 + \theta_2^{(1)}) +$$

$$+ \left(\mu_{11}^{(1)} - \frac{4}{3}\mu_{21}^{(1)}\right)(\bar{\Delta}_2^{(1)} + \bar{\Delta}_3^{(1)}t)\cos(\bar{\delta}_1^{(1)}t + \bar{\delta}_2^{(1)}t^2 + \bar{\delta}_3^{(1)}t^3 + \theta_2^{(1)})\Big\} +$$

$$+ \frac{Q}{K}\left[1 + \eta_1\left(1 - \frac{v_0 t}{l_1}\right)\right],$$

где

$$\beta_1^{(1)} = \frac{g\alpha\left[\frac{1}{3}(\omega_1^{(1)})^2 - 8\omega_1^{(1)} + 48 + 12\eta_1\right]}{2Ql_1(R_1^{(1)})^2} + \frac{v_0}{4l_1\omega_1^{(1)}(R_1^{(1)})^2} \times$$

$$\times \left[24\eta_1^2 + 12\eta_1\omega_1^{(1)} - 48\omega_1^{(1)} - \eta_1(\omega_1^{(1)})^2 + 8(\omega_1^{(1)})^2 - \frac{1}{3}(\omega_1^{(1)})^3\right],$$

$$\beta_2^{(1)} = \frac{v_0 g\alpha}{4l_1^2 Q(R_1^{(1)})^4}\left\{\left[\frac{1}{3}(\omega_1^{(1)})^2 - 8\omega_1^{(1)} + 48 + 12\eta_1^2\right]\left[\frac{1}{3}(\omega_1^{(1)})^2 - \right.\right.$$

$$\left. - \eta_1\omega_1^{(1)} - 8\omega_1^{(1)} + 48 + 12\eta_1 + 2\eta_1^2\right] - 2\eta_1(R_1^{(1)})^2(\omega_1^{(1)} - 12)\Big\},$$

$$\Delta_0^{(1)} = \frac{v_0\eta_1\left[(\omega_1^{(1)})^2 - 2\eta_1(\omega_1^{(1)} - \omega_2^{(1)}) - 24\eta_1\right]}{l_1 R_1^{(1)} R_2^{(1)}(\omega_2^{(1)} - \omega_1^{(1)})},$$

$$\Delta_1^{(1)} = -\frac{v_0^2\eta_1}{l_1^2(R_1^{(1)})^3(R_2^{(1)})^3(\omega_2^{(1)} - \omega_1^{(1)})^2}\left\{12\eta_1\left[\frac{1}{3}(\omega_1^{(1)})^3 - (8 + \eta_1)(\omega_1^{(1)})^2 + \right.\right.$$

$$\left. + 12(4 + \eta_1)\omega_1^{(1)} + 24\eta_1^2\right](R_2^{(1)})^2 + \left[(\omega_1^{(1)})^2 - 2\eta_1(\omega_1^{(1)} - \omega_2^{(1)}) - \right.$$

$$\left. - 24\eta_1\right]\left[4\eta_1\omega_2^{(1)} - 96\eta_1 + 12\omega_1^{(1)}(4 + \eta_1)\right](R_1^{(1)})^2 +$$

$$+\omega_1^{(1)}(\omega_2^{(1)}-\omega_1^{(1)})(12+2\eta_1-\omega_2^{(1)})\,|R_2^{(1)}R_1^{(1)}|^2\},$$

$$\Delta_2^{(1)}=-\frac{2v_0\omega_1^{(1)}\eta_1\,[(\omega_2^{(1)})^2+2(\omega_2^{(1)}-\omega_1^{(1)})(3+\eta_1)]}{l_1\nu^{(1)}(\omega_2^{(1)}-\omega_1^{(1)})^2R_1^{(1)}R_2^{(1)}},$$

$$\Delta_3^{(1)}=\frac{v_0 g\alpha\omega_1^{(1)}}{l_1^2Q\nu^{(1)}\,|R_1^{(1)}R_2^{(1)}|^3(\omega_2^{(1)}-\omega_1^{(1)})^2}\Big\{12\eta_1^2(R_1^{(1)})^2\Big[\frac{1}{3}(\omega_1^{(1)})^2-$$

$$-8\omega_1^{(1)}+48+12\eta_1\Big]+\eta_1(R_1^{(1)})^2\left[\frac{1}{3}(\omega_2^{(1)})^2-8\omega_2^{(1)}+48+12\eta_1\right]\times$$

$$\times[(\omega_1^{(1)})^2-2\eta_1(\omega_1^{(1)}-\omega_2^{(1)})-24\eta_1]-2(\omega_2^{(1)}-\omega_1^{(1)})(R_1^{(1)})^2\times$$

$$\times(12+3\eta_1-\omega_2^{(1)})(\omega_2^{(1)}-12-4\eta_1)\Big\},$$

$$\delta_1^{(1)}=\nu^{(1)}-\frac{g^2\alpha^2\left[\frac{1}{3}(\omega_1^{(1)})^2-8\omega_1^{(1)}+48+12\eta_1\right]^2}{8\nu^{(1)}l_1^2Q^2(R_1^{(1)})^4},$$

$$\delta_2^{(1)}=\frac{v_0\nu^{(1)}\left[\frac{1}{3}(\omega_1^{(1)})^3-(8+\eta_1)(\omega_1^{(1)})^2+(48+12\eta_1)\omega_1^{(1)}+24\eta_1^2\right]}{4l_1^2\omega_1^{(1)}(R_1^{(1)})^2},$$

$$\delta_3^{(1)}=-\frac{v_0\nu^{(1)}}{24l_1^2(\omega_1^{(1)})^2(R_1^{(1)})^4}\Big\{\frac{1}{3}(\omega_1^{(1)})^3-(8+\eta_1)(\omega_1^{(1)})^2+$$

$$+12(4+\eta_1)\omega_1^{(1)}+24\eta_1^2-4\omega_1^{(1)}\Big[\frac{1}{3}(\omega_1^{(1)})^3-(8+\eta_1)(\omega_1^{(1)})^2+$$

$$+12(4+\eta_1)\omega_1^{(1)}+24\eta_1^2\Big]\Big[\frac{1}{3}(\omega_1^{(1)})^2-(8+\eta_1)\omega_1^{(1)}+$$

$$+12(4+\eta_1)+2\eta_1^2\Big]+4(\omega_1^{(1)})^2\eta_1(R_1^{(1)})^2(\omega_1^{(1)}-12-2\eta_1)-$$

$$-\frac{4\omega_1^{(1)}\eta_1(R_1^{(1)})^2(12+3\eta_1-\omega_1^{(1)})}{(R_2^{(1)})^2(\omega_2^{(1)}-\omega_1^{(1)})}[16\eta_1+4\eta_1^2-\eta_1(\omega_2^{(1)}+2\omega_1^{(1)})-$$

$$-4\omega_1^{(1)}]\,[(\omega_1^{(1)})^2-2\eta_1(\omega_1^{(1)}-\omega_2^{(1)})-24\eta_1]\Big\},\qquad(10.17)$$

$N_1^{(1)}$, $N_2^{(1)}$, $\theta_1^{(1)}$, $\theta_2^{(1)}$ — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий, а коэффициенты $\nu^{(1)}$, $\overline{\beta}_1^{(1)}$, $\overline{\beta}_2^{(1)}$, $\overline{\Delta}_0^{(1)}$, $\overline{\Delta}_1^{(1)}$, $\overline{\delta}_1^{(1)}$, $\overline{\delta}_2^{(1)}$, $\overline{\delta}_3^{(1)}$, $\overline{\Delta}_2^{(1)}$, $\overline{\Delta}_3^{(1)}$ совпадают соответственно с коэффициентами ν, $\beta_1^{(1)}$, $\beta_2^{(1)}$, $\Delta_0^{(1)}$, $\Delta_1^{(1)}$, $\delta_1^{(1)}$, $\delta_2^{(1)}$, $\delta_3^{(1)}$, $\Delta_2^{(1)}$, $\Delta_3^{(1)}$, если заменить в последних l_0, $\omega_1^{(1)}$, $R_1^{(1)}$, p_0 на величины l_1, $\omega_2^{(1)}$, $R_2^{(1)}$; $\omega_2^{(1)}$, $R_2^{(1)}$ на $\omega_1^{(1)}$, $R_1^{(1)}$, причем $\omega_1^{(1)}$, $\omega_2^{(1)}$, $\mu_{11}^{(1)}$, $\mu_{21}^{(1)}$, $\mu_{12}^{(1)}$, $\mu_{22}^{(1)}$, $R_1^{(1)}$, $R_2^{(1)}$ определяются из соотношений (10.8), (10.9), в которых η_0 надо заменить на

$$\eta_1 = \frac{p_1}{Q}, \quad p_1 = l_1 q. \tag{10.18}$$

3. Чтобы проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (10.1) на третьем участке подъема груза Q, нужно, как и раньше, представить эту систему в виде (6.1).

Для этого введем новые переменные

$$\varphi = \frac{x_1 - x_2}{l_2}, \quad \psi = \frac{4x_2 - 3x_1}{3}, \tag{10.19}$$

$$T = \omega_{02} t, \quad \tau = \varepsilon T,$$

где

$$\omega_{02} = \frac{c}{l_2}, \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{V_0}{c}}. \tag{10.20}$$

Тогда

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0} \varepsilon^s A_s(\tau), \quad C(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{4} \varepsilon^s C_s(\tau),$$
$$B(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{6} \varepsilon^s B_s(\tau), \quad P(\tau, \varepsilon) = P_0, \tag{10.21}$$

где

$$A_0(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}, \quad A_1(\tau) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \tau,$$

$$A_2(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tau^2, \quad A_3(\tau) = 2\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \delta_3^* \tau^3,$$

$$A_4(\tau) = (\delta_3^*)^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tau^4,$$

$$C_0(\tau) = f^{(1)} \begin{bmatrix} 3\left(\frac{4\gamma}{l_2} + \gamma_1\right) & -3\left(\frac{4\gamma}{l_2} + \frac{2}{3}\gamma_1\right) \\ -3\left(\frac{4\gamma}{l_2} + \frac{2}{3}\gamma_1\right) & 2\left(\frac{6\gamma}{l_2} + \frac{2}{3}\gamma_1\right) \end{bmatrix}, \tag{10.22}$$

$$C_1(\tau)=\begin{bmatrix}-3(1+2f^{(1)}\gamma_1\tau) & 3\left(2\gamma_1 f^{(1)}\tau+\frac{4}{3}\right)\\ 4\gamma_1 f^{(1)}\tau & -2\left(2\gamma_1 f^{(1)}\tau+\frac{2}{3}\right)\end{bmatrix},$$

$$C_2(\tau)=\begin{bmatrix}6(\delta_3^*\gamma_1 f^{(1)}\tau^2+\delta_3^*\tau) & -6\left(\delta_3^* f^{(1)}\tau^2+\frac{4}{3}\delta_3^*\tau\right)\\ -2(2\gamma_1 f^{(1)}\delta_3^*\tau^2-2\tau) & 4\left(\gamma_1 f^{(1)}\delta_3^*\tau^2-\tau+\frac{2}{3}\delta_3^*\tau\right)\end{bmatrix},$$

$$C_3(\tau)=6\delta_3^*\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\tau^2,\quad C_4(\tau)=4(\delta_3^*)^2\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\tau^2,$$

$$B_0(\tau)=\begin{bmatrix}3(4+\eta_2) & -3\left(4+\frac{2}{3}\eta_2\right)\\ -3\left(4+\frac{2}{3}\eta_2\right) & 4\left(3+\frac{1}{3}\eta_2\right)\end{bmatrix},$$

$$B_1(\tau)=2\eta_2\tau\begin{bmatrix}-3 & 3\\ 2 & -2\end{bmatrix},$$

$$B_2(\tau)=2\eta_2\delta_3^*\tau^2\begin{bmatrix}3 & -3\\ -2 & 2\end{bmatrix},\quad B_4(\tau)=2\begin{bmatrix}-3 & 3\\ 4 & -4\end{bmatrix},\quad B_3(\tau)\equiv 0,$$

$$B_5(\tau)=8\delta_3^*\tau\begin{bmatrix}-3 & 3\\ 4 & -4\end{bmatrix},\quad B_6(\tau)=8(\delta_3^*)^2\tau^2\begin{bmatrix}-3 & 3\\ 4 & -4\end{bmatrix},$$

$$P_0=\frac{p_2}{K}\left(1-\frac{a}{g}\right)\begin{bmatrix}-3\\ 4\end{bmatrix},\quad \eta_2=\frac{p_2}{Q},\quad p_2=l_2q,\quad \delta_3^*=\frac{al_2}{2v_0^2}.$$

Решение системы (10.1) во втором приближении на третьем участке будет иметь вид

$$l_2\varphi=N_1^{(2)}e^{-(\beta_1^{(2)}t+\beta_2^{(2)}t^2)}\{[\mu_{11}^{(2)}-\mu_{21}^{(2)}+$$

$$+(\mu_{12}^{(2)}-\mu_{22}^{(2)})(\Delta_0^{(2)}t+\Delta_1^{(2)}t^2)\sin(\delta_1^{(2)}t+\delta_2^{(2)}t^2+\delta_3^{(2)}t^3+\theta_1^{(2)})+$$

$$+(\mu_{22}^{(2)}-\mu_{12}^{(2)})(\Delta_2^{(2)}+\Delta_3^{(2)}t)\cos(\delta_1^{(2)}t+\delta_2^{(2)}t^2+\delta_3^{(2)}t^3+\theta_1^{(2)})\}+$$

$$+N_2^{(2)}e^{-(\bar\beta_1 t+\bar\beta_2 t^2)}\{[\mu_{12}^{(2)}-\mu_{22}^{(2)}+(\mu_{11}^{(2)}-\mu_{21}^{(2)})(\bar\Delta_0^{(2)}t+\bar\Delta_1^{(2)}t^2)]\times$$

$$\times\sin(\bar\delta_1^{(2)}t+\bar\delta_2^{(2)}t^2+\bar\delta_3^{(2)}t^3+\theta_2^{(2)})+$$

$$+ (\mu_{21}^{(2)} - \mu_{11}^{(2)})(\overline{\Delta}_2^{(2)} + \overline{\Delta}_3^{(2)}t)\cos(\overline{\delta}^{(2)}t + \overline{\delta}_2^{(2)}t^2 + \overline{\delta}_3^{(2)}t^3 +$$

$$+ \theta_2^{(2)})\} - \frac{p_2}{2K}\left(1 - \frac{a}{g}\right), \qquad (10.23)$$

$$\psi = N_1^{(2)}e^{-(\beta_1^{(2)}t+\beta_2^{(2)}t^2)}\left\{\frac{4}{3}\mu_{21}^{(2)} - \mu_{11}^{(2)} + \left(\frac{4}{3}\mu_{22}^{(2)} - \mu_{12}^{(2)}\right)(\Delta_0^{(2)}t + \Delta_1^{(2)}t^2) \times\right.$$

$$\times \sin(\delta_1^{(2)}t + \delta_2^{(2)}t^2 + \delta_3^{(2)}t^3 + \theta_1^{(2)}) + \left(\mu_{12}^{(2)} - \frac{4}{3}\mu_{22}^{(2)}\right)(\Delta_2^{(2)} + \Delta_3^{(2)}t) \times$$

$$\left.\times \cos(\delta_1^{(2)}t + \delta_2^{(2)}t^2 + \delta_3^{(2)}t^3 + \theta_1^{(2)})\right\} + N_2^{(2)}e^{-(\overline{\beta}_1^{(2)}t+\overline{\beta}_2^{(2)}t^2)} \times$$

$$\times \left\{\left[\frac{4}{3}\mu_{22}^{(2)} - \mu_{12}^{(2)} + \left(\frac{4}{3}\mu_{21}^{(2)} - \mu_{11}^{(2)}\right)(\overline{\Delta}_0^{(2)}t + \overline{\Delta}_1^{(2)}t^2)\right]\sin(\overline{\delta}_1^{(2)}t +\right.$$

$$+ \overline{\delta}_2^{(2)}t^2 + \overline{\delta}_3^{(2)}t^3 + \theta_2^{(2)}) + \left(\mu_{11}^{(2)} - \frac{4}{3}\mu_{21}^{(2)}\right)(\Delta_2^{(2)} + \overline{\Delta}_3^{(2)}t) \times$$

$$\left.\times \cos(\overline{\delta}_1^{(2)}t + \overline{\delta}_2^{(2)}t^2 + \overline{\delta}_3^{(2)}t^3 + \theta_2^{(2)})\right\} + \frac{Q}{K}\left(1 - \frac{a}{g}\right) \times$$

$$\times \left[1 + \eta_2\left(1 - \frac{v_0}{l_2}t + \frac{a}{2l_2}t^2\right)\right],$$

где $N_1^{(2)}$, $N_2^{(2)}$, $\theta_1^{(2)}$, $\theta_2^{(2)}$ — постоянные интегрирования, а коэффициенты $\beta_1^{(2)}$, $\beta_2^{(2)}$, $\Delta_0^{(2)}$, $\delta_1^{(2)}$, $\delta_2^{(2)}$, $\Delta_2^{(2)}$, $\Delta_3^{(2)}$, $\overline{\beta}_1^{(2)}$, $\overline{\beta}_2^{(2)}$, $\overline{\Delta}_0^{(2)}$, $\overline{\delta}_1^{(2)}$, $\overline{\delta}_2^{(2)}$, $\overline{\Delta}_2^{(2)}$, $\overline{\Delta}_3^{(2)}$ совпадают соответственно с коэффициентами $\beta_1^{(1)}$, $\beta_2^{(1)}$, $\Delta_0^{(1)}$, $\delta_1^{(1)}$, $\delta_2^{(1)}$, $\Delta_2^{(1)}$, $\Delta_3^{(1)}$, $\overline{\beta}_1^{(1)}$, $\overline{\beta}_2^{(1)}$, $\overline{\Delta}_0^{(1)}$, $\overline{\delta}_1^{(1)}$, $\overline{\delta}_2^{(1)}$, $\overline{\Delta}_2^{(1)}$, $\overline{\Delta}_3^{(1)}$, если в последних величины η_1, $\omega_1^{(1)}$, $\omega_2^{(1)}$, $R_1^{(1)}$, $R_2^{(1)}$ заменить соответственно величинами η_2, $\omega_1^{(2)}$, $\omega_2^{(2)}$, $R_1^{(2)}$, $R_2^{(2)}$, которые определяются из соотношений (10.8), (10.9) с предварительной заменой величины η_0 на η_2.

Коэффициенты $\Delta_1^{(2)}$, $\delta_3^{(2)}$ имеют вид

$$\Delta_1^{(2)} = -\frac{v_0\eta_2}{l_2^2(R_1^{(2)}R_2^{(2)})^3(\omega_2^{(2)} - \omega_1^{(2)})^2}\left\{12\eta_2^2\left|\frac{1}{3}(\omega_1^{(2)})^3 -\right.\right.$$

$$- (8 + \eta_2)(\omega_1^{(2)})^2 + 12(4 + \eta_2)\omega_1^{(2)} + 24\eta_2^{(2)}](R_2^{(2)})^2 +$$

$$+ (R_1^{(2)})^2[(\omega_1^{(2)})^2 - 2\eta_2(\omega_1^{(2)} - \omega_2^{(2)}) - 24\eta_2][4\eta_2\omega_2^{(2)} - 96\eta_2 +$$

$$+ 12\omega_1^{(2)}(4 + \eta_2)] + \omega_1^{(2)}(R_1^{(2)}R_2^{(2)})^2(\omega_2^{(2)} - \omega_1^{(2)})(12 + 2\eta_2 - \omega_2^{(2)}) -$$

$$- \omega_1^{(2)}(R_1^{(2)}R_2^{(2)})^2\delta_3^*(\omega_2^{(2)} - \omega_1^{(2)})(2\omega_2^{(2)}\eta_2 + \omega_1^{(2)}\eta_2 - 24\eta_2 - 6\eta_2^2) +$$

$$+ 2\delta_3^*\eta_2^2(R_1^{(2)}R_2^{(2)})^2(\omega_2^{(2)} - \omega_1^{(2)})[4\omega_2^{(2)} + 3\omega_1^{(2)} - 36 - 12\eta_2]\} \qquad (10.24)$$

$$\delta_3^{(2)} = -\frac{v_0^2 \nu^2}{24 l_2^2 (\omega_1^{(2)})^2 (R_1^{(2)})^4} \left\{ \left[\frac{1}{3} (\omega_1^{(2)})^3 - (8 + \eta_2)(\omega_1^{(2)})^2 + \right.\right.$$

$$+ 12(4+\eta_2)\,\omega_1^{(2)} + 24\eta_2^2 \Big]^2 - 4\omega_1^{(2)} \Big[\frac{1}{3} (\omega_1^{(2)})^3 - (8 + \eta_2)(\omega_1^{(2)})^2 +$$

$$+ 12(4 + \eta_2)\,\omega_1^{(2)} + 24\eta_2^2 \Big] \Big[\frac{1}{3} (\omega_1^{(2)})^2 - (8 + \eta_2)\,\omega_1^{(2)} + 12(4 + \eta_2) +$$

$$+ 2\eta_2^2 \Big] + 4\eta_2 (\omega_1^{(2)} R_1^{(2)})^2 (\omega_1^{(2)} - 12 - 2\eta_2) -$$

$$- \frac{4\eta_2 \omega_1^{(2)} (R_1^{(2)})^2 (12 + 3\eta_2 - \omega_1^{(2)})}{(R_2^{(2)})^2 (\omega_2^{(2)} - \omega_1^{(2)})} [4\eta_2^2 - \eta_2 (\omega_2^{(2)} + 2\omega_1^{(2)} - 16) - 4\omega_1^{(2)}] \times$$

$$\times [(\omega_1^{(2)})^2 - 2\eta_2 (\omega_1^{(2)} - \omega_2^{(2)} + 12)] +$$

$$+ 4\omega_1^{(2)} (R_1^{(2)})^2 \delta_3^{*} \Big[\frac{1}{3} (\omega_1^{(2)})^2 - (8 + \eta_2)\,\omega_1^{(2)} + 12(4 + \eta_2) + 2\eta_2^2 \Big] -$$

$$\left. - 8\omega_1^{(2)} \delta_3^{*} (\eta_2 R_1^{(2)})^2 (\omega_1^{(2)} - 12) \right\},$$

$\nu^{(2)}$ совпадает с $\nu^{(1)}$, если заменить в последней величины $\omega_1^{(1)}$, l_1, p_1 величинами $\omega_1^{(2)}$, l_2, p_2.

Чтобы получить постоянные коэффициенты $\bar{\delta}_3^{(2)}$, $\bar{\Delta}_1^{(2)}$, нужно в коэффициентах $\delta_3^{(2)}$, $\Delta_1^{(2)}$ вместо $\omega_1^{(2)}$, $R_1^{(2)}$ поставить $\omega_2^{(2)}$, $R_2^{(2)}$, а вместо $\omega_2^{(2)}$, $R_2^{(2)}$ — $\omega_1^{(2)}$, $R_1^{(2)}$.

Собственные функции $\mu_{11}^{(2)}$, $\mu_{21}^{(2)}$, $\mu_{12}^{(2)}$, $\mu_{22}^{(2)}$ определяются соотношениями (10.8), где η_0, ω_1, ω_2, R_1, R_2 заменены соответственно величинами η_2, $\omega_1^{(2)}$, $\omega_2^{(2)}$, $R_1^{(2)}$, $R_2^{(2)}$.

4. Исходя из асимптотического решения (10.16), можно найти при данном коэффициенте α такое предельное значение скорости $v_{\text{пр}}$ ($v < v_{\text{пр}}$), при котором усилия T_1 будут затухать. Это соотношение имеет вид

$$\alpha > \frac{vQ}{2g} \left\{ 1 + \frac{\eta_1 [(\omega_2^{(1)})^2 - 24\omega_2^{(1)} - 24\eta_1]}{\frac{1}{3} (\omega_2^{(1)})^3 + 48\omega_2^{(1)} + 12\eta_1 \omega_2^{(1)} - 8(\omega_2^{(1)})^2} \right\}. \tag{10.25}$$

Для иллюстрации характера изменения динамических усилий в упруго-вязкой нити на первом этапе мы вычислили по полученным формулам усилия при следующих данных:

$$Q = 20{,}10\ кГ, \qquad \eta_0 = 0{,}555, \qquad \alpha = 3{,}10\ кГ \cdot сек,$$

$$a = 0{,}1\ g, \qquad v_0 = 14{,}028, \qquad K = 20791284\ кГ,$$
$$q = 11{,}5625\,\frac{кГ}{м}, \qquad l_0 = 1200\,м. \tag{10.26}$$

Характер изменения усилий, возникающих на верхнем конце нити на первом участке движения груза Q, показывает табл. 1, из которой видно, что

$$\max T_1 = 56502\ кГ.$$

По формуле, предложенной Г. Н. Савиным [62], $\max T_1$ при этих же числовых данных параметров приближенно равняется 56 300 $кГ$.

Следовательно, расхождение полученных числовых результатов не превосходит 0,36%.

§ 11. Краевая задача для системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка

В настоящем параграфе применим изложенный выше асимптотический метод (§ 7, 8) к нахождению больших собственных значений краевой задачи, определяемой системой дифференциальных уравнений

$$A(t,\lambda)\frac{d^2x}{dt_1^2} + C(t_1, \lambda)\frac{dx}{dt_1} + \lambda B(t_1, \lambda)x = 0 \tag{11.1}$$

и некоторыми регулярными краевыми условиями

$$G_1x'(1) + F_1x'(0) + G_0x(1) + F_0x(0) = 0,$$
$$K_1x'(1) + M_1x'(0) + K_0x(1) + M_0x(0) = 0, \tag{11.2}$$

где $x(t_1)$ — n-мерный вектор; G_i, F_i, K_i, M_i $(i = 0,1)$ — постоянные действительные матрицы n-го порядка.

Пусть

$$A(t_1, \lambda) = \sum_{s=0}^{\infty}\lambda^{-\frac{s}{2}}A_s(t_1), \quad B(t_1, \lambda) = \sum_{s=0}^{\infty}\lambda^{-\frac{s}{2}}B_s(t_1),$$
$$C(t_1, \lambda) = \sum_{s=0}^{\infty}\lambda^{-\frac{s}{2}}C_s(t_1).$$

Полагая

$$t_1 = \varepsilon t = \tau, \quad \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\lambda}},$$

мы преобразуем систему (11.1) к виду (7.27):

$$A(\tau, \varepsilon)\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon C(\tau, \varepsilon)\frac{dx}{dt} + B(\tau, \varepsilon)x = 0. \tag{11.3}$$

Таблица 1

Время	Усилия	Время	Усилия	Время	Усилия
0	39352,620	4,8	30479,357	9,6	29210,112
0,1	42573,397	4,9	32284,290	9,7	28707,524
0,2	45788,894	5,0	34655,016	9,8	29087,609
0,3	49021,606	5,1	37592,388	9,9	30332,945
0,4	52001,039	5,2	40923,297	10,0	32281,005
0,5	54301,511	5,3	44309,865	10,1	34771,094
0,6	55731,732	5,4	47476,980	10,2	37717,260
0,7	56422,576	5,5	50332,247	10,3	40988,291
0,8	56501,583	5,6	52825,185	10,4	44377,104
0,9	55845,971	5,7	54769,648	10,5	47553,284
1,0	54266,623	5,8	55913,501	10,6	50343,786
1,1	51825,152	5,9	56154,410	10,7	52657,586
1,2	48965,116	6,0	55594,147	10,8	54366,837
1,3	45899,545	6,1	54355,548	10,9	55288,120
1,4	42687,063	6,2	52443,353	11,0	55342,510
1,5	39318,480	6,3	49849,307	11,1	54513,562
1,6	37279,770	6,4	46737,206	11,2	52985,818
1,7	33239,566	6,5	43417,648	11,3	50792,171
1,8	31179,940	6,6	40142,418	11,4	47994,059
1,9	29804,763	6,7	37012,561	11,5	44777,627
2,0	29030,267	6,8	34119,724	11,6	41421,415
2,1	28980,409	6,9	31683,526	11,7	38147,349
2,2	29860,796	7,0	29969,118	11,8	35088,577
2,3	31648,680	7,1	29090,894	11,9	32402,821
2,4	34056,040	7,2	28990,618	12,0	30320,574
2,5	36813,442	7,3	29611,300	12,1	29023,967
2,6	39868,327	7,4	30993,338	12,2	28549,198
2,7	43221,337	7,5	33151,370	12,3	28862,502
2,8	46660,444	7,6	35923,347	12,4	29972,424
2,9	49797,745	7,7	39030,001	12,5	31878,007
3,0	52361,788	7,8	42260,509	12,6	34447,935
3,1	54336,129	7,9	45517,610	12,7	37447,681
3,2	55753,387	8,0	48668,154	12,8	40678,168
3,3	56490,459	8,1	51453,105	12,9	44001,031
3,4	56313,671	8,2	53607,145	13,0	47226,009
3,5	55195,037	8,3	55020,619	13,1	50084,082
3,6	53352,077	8,4	55710,183	13,2	52354,948
3,7	51015,012	8,5	55656,230	13,3	53945,086
3,8	48238,108	8,6	54770,001	13,4	54796,801
3,9	45029,316	8,7	53041,559	13,5	54809,567
4,0	41562,733	8,8	50637,484	13,6	53926,561
4,1	38216,958	8,9	47792,571	13,7	52236,770
4,2	35269,503	9,0	44657,890	13,8	49905,672
4,3	32784,362	9,1	41327,916	13,9	47057,204
4,4	30770,061	9,2	37987,901	14,0	43812,225
4,5	29383,199	9,3	34929,004	14,1	40394,533
4,6	28861,296	9,4	32393,694	14,2	37086,889
4,7	29278,078	9,5	30474,617	14,3	34095,291

Здесь $A(\tau, \varepsilon)$, $B(\tau, \varepsilon)$, $C(\tau, \varepsilon)$—матрицы, удовлетворяющие условиям §6. Частные решения системы уравнений (11.3) в силу выкладок §7 имеют вид

$$x_\nu(\tau, \varepsilon) = \Pi_\nu(\tau, \varepsilon) e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau D_\nu(\tau, \varepsilon) d\tau} \left[C_{1\nu} \cos \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^\tau \Omega_\nu(\tau, \varepsilon) d\tau + \right.$$

$$\left. + C_{2\nu} \sin \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^\tau \Omega_\nu(\tau, \varepsilon) d\tau \right], \tag{11.4}$$

где $C_{1\nu}$, $C_{2\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ — постоянные интегрирования.

Общее решение системы (11.1) запишется следующим образом

$$X(\tau, \varepsilon) = X_1(\tau, \varepsilon) C_1 + X_2(\tau, \varepsilon) C_2, \tag{11.5}$$

где $X_1(\tau, \varepsilon)$, $X_2(\tau, \varepsilon)$ — фундаментальные матрицы решений системы (11.1) вида

$$X_1(\tau, \varepsilon) = \left[\Pi_\nu(\tau, \varepsilon) e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau D_\nu(\tau, \varepsilon) d\tau} \cos \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^\tau \Omega_\nu(\tau, \varepsilon) d\tau \right],$$

$$X_2(\tau, \varepsilon) = \left[\Pi_\nu(\tau, \varepsilon) e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau D_\nu(\tau, \varepsilon) d\tau} \sin \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^\tau \Omega_\nu(\tau, \varepsilon) d\tau \right] \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{11.6}$$

C_1, C_2 — постоянные n-мерные векторы, определяемые из краевых условий (11.2).

Подставив решение $X(\tau, \varepsilon)$ в краевые условия (11.2), получим систему алгебраических уравнений относительно C_1 и C_2. Для существования нетривиального решения этой системы, как известно, необходимо и достаточно, чтобы определитель ее был равен нулю. Приравнивая нулю данный определитель, найдем трансцендентное уравнение для определения собственных значений краевой задачи.

Для примера рассмотрим случай, часто встречающийся на практике, когда краевые условия (11.2) принимают вид

$$X(0) = 0, \quad X(1) = 0. \tag{11.7}$$

Собственные значения в этом случае вычисляются весьма просто.

Действительно, так как, согласно (11.6),

$$X_1(0, \varepsilon) \neq 0, \quad X_2(0, \varepsilon) = 0, \tag{11.8}$$

то первому условию (11.7) можно удовлетворить, положив в (11.5) $C_1 = 0$. Следовательно,

$$X(\tau, \varepsilon) = X_2(\tau, \varepsilon) C_2. \tag{11.9}$$

Используя второе условие из (11.7), получаем

$$X_2(1, \varepsilon) C_2 = 0. \tag{11.10}$$

Система уравнений (11.10) будет иметь нетривиальное решение тогда и только тогда, когда

$$\det |X_2(1, \varepsilon)| = \left| \Pi_\nu(\tau, \varepsilon) e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^1 D_\nu(\tau,\varepsilon) d\tau} \sin \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^1 \Omega_\nu(\tau, \varepsilon) d\tau \right| = 0,$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{11.11}$$

откуда

$$\det [X_2(1, \varepsilon)| = e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^1 \sum\limits_{\nu=1}^{n} D_\nu(\tau,\varepsilon) d\tau} \prod_{\nu=1}^{n} \sin \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^1 \Omega_\nu(\tau, \varepsilon) d\tau \,|\, \Pi_\nu(\tau, \varepsilon)|_{\nu=1}^{n} = 0. \tag{11.12}$$

Из уравнения (11.12) следует, что

$$\sin \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^1 \Omega_\nu(\tau, \varepsilon) d\tau = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

или

$$\int\limits_0^1 \Omega_\nu(\tau, \varepsilon) d\tau = K_\nu \pi \varepsilon, \quad K_\nu = 1, 2, 3, \ldots .$$

Принимая во внимание (7.3), получаем

$$\int\limits_0^1 [\Omega_{\nu 0}(\tau) + \varepsilon \Omega_{\nu 1}(\tau) + \ldots + \varepsilon^m \Omega_{\nu m}(\tau) + O(\varepsilon^{m+1})] d\tau = K_\nu \varepsilon \pi. \tag{11.13}$$

Следовательно, в нулевом приближении имеем

$$\lambda_{\nu,k}^{(0)} = \frac{[\pi K_\nu - O(1)]^2}{\left(\int\limits_0^1 \sqrt{\omega_\nu(\tau)}\, d\tau \right)^2}. \tag{11.14}$$

Полагая в (11.13) $m=1$, найдем

$$\lambda_{\nu,k}^{(1)} = \frac{\left[\pi K_\nu - \int\limits_0^1 \Omega_{\nu 1}(\tau)\,d\tau - O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right]^2}{\left(\int\limits_0^1 \sqrt{\omega_\nu(\tau)}\,d\tau\right)^2}$$

Легко можно получить также второе и дальнейшие приближения для собственных значений $\lambda_{\nu,k}$.

Проиллюстрируем сказанное выше на примерах.

Пример 1. Найти собственные значения следующей краевой задачи:

$$y'' + \lambda(1+x)y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Решение ищем в виде

$$y = \xi, \quad \frac{d\xi}{dt} = [D(\tau, \varepsilon) + i\Omega(\tau, \varepsilon)]\,\xi, \quad x = \varepsilon t = \tau, \quad \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Согласно формулам § 7, находим

$$\Omega_0(\tau) = \pm\sqrt{1+\tau}, \quad \Omega_1(\tau) = 0, \quad D_1(\tau) = -\frac{1}{8(1+\tau)},$$

$$\Omega_2(\tau) = \pm\frac{5}{32(1+\tau)^{5/2}}, \quad D_2(\tau) = 0.$$

Из равенства (11.13) имеем $\varepsilon = 2{,}553$; $\lambda = 6{,}52$. Точное решение этой задачи $\lambda = 6{,}55$ (сравни с примером в работе [26]).

Пример 2. Найти собственные значения краевой задачи

$$\begin{gathered} y^{(IV)} - \lambda(1+x)y = 0, \\ y(0) = y''(0) = 0, \quad y(1) = y''(1) = 0. \end{gathered} \tag{11.15}$$

Сначала нужно привести это уравнение к виду (11.3). Сделаем замену переменных

$$y = u_1, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = u_2.$$

Кроме того, для получения симметрических матриц введем в рассмотрение матрицу $V(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda(1+x)} \end{bmatrix}$. Тогда, положив $u = V(x)z, \quad x = \varepsilon t = \tau, \quad \varepsilon = \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda}}$,

где

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \qquad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix},$$

приведем задачу (11.15) к виду

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \varepsilon C(\tau, \varepsilon)\frac{dz}{dt} + B(\tau, \varepsilon) z = 0, \tag{11.16}$$

где

$$C(\tau, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1+\tau} \end{bmatrix}, \quad B(\tau, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1+\tau} \\ \sqrt{1+\tau} & -\dfrac{\varepsilon^2}{4(1+\tau)^2} \end{bmatrix},$$

$$Z_1(0) = Z_2(0) = 0; \quad Z_1(1) = Z_2(1) = 0.$$

В данном случае $\Omega_{\nu 0}(\tau) = \pm\sqrt{\omega_\nu(\tau)}$,

$$\omega_\nu(\tau) = \pm\sqrt{1+\tau}, \quad \Omega_1(\tau) = 0, \quad \nu = 1, 2,$$

$$D_1(\tau) = -\frac{1}{8(1+\tau)}, \quad \mu = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Легко видеть, что в первом приближении $\lambda = 65{,}8$. Этот пример взят из работы [27], где в первом приближении $\underline{\lambda} = 63{,}2$, $\overline{\lambda} = 67{,}2$, среднее значение $\lambda = 65{,}2$. Здесь $\underline{\lambda}$ и $\overline{\lambda}$—соответственно верхнее и нижнее приближения к решению, определяемые по методу С. А. Чаплыгина.

Асимптотическое расщепление системы линейных дифференциальных уравнений

§ 12. Постановка задачи

В предыдущих главах мы рассмотрели вопрос о построении асимптотических решений одного дифференциального уравнения второго порядка и системы n таких же уравнений в случае простых собственных значений. Однако изложенный метод становится неприменимым, если среди корней характеристического уравнения появляются кратные на всем промежутке $[0, L]$ или в его отдельных точках.

В этом случае исследование системы дифференциальных уравнений высокого порядка можно упростить путем асимптотического расщепления исходной системы на несколько подсистем низшего порядка. Изложению этого вопроса посвящается настоящая глава.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau, \varepsilon)\,x, \tag{12.1}$$

где $x(t, \varepsilon)$ — n-мерный вектор; $A(\tau, \varepsilon)$ — действительная квадратная матрица порядка n; $\tau = \varepsilon t$ и $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Пусть выполняются следующие условия:

1. Матрица $A(\tau, \varepsilon)$ допускает разложение

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(\tau) \tag{12.2}$$

и неограниченно дифференцируема* по τ на сегменте $[0, L]$, где $L > 0$ — фиксированное число.

В частности, матрица $A(\tau, \varepsilon)$ может быть некоторым полиномом от ε.

2. Корни $\lambda_j(\tau)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ характеристического уравнения матрицы $A_0(\tau)$

$$D(\lambda) \equiv \det[A_0(\tau) - \lambda(\tau) E] = 0, \tag{12.3}$$

* Под дифференцируемостью матрицы мы понимаем дифференцируемость всех ее элементов.

при $\tau \in [0, L]$ образуют две изолированные группы, т. е. такие, что $\lambda_i(\tau) \neq \lambda_j(\tau)$, где $i = 1, 2, \ldots, r_1$; $j = r_1 + 1, r_1 + 2, \ldots, n$; $n - r_1 = r_2$. Внутри каждой группы корни могут иметь произвольную (и разную при различных τ) кратность.

В дальнейшем мы покажем, что при сделанных предположениях рассматриваемую систему (12.1) можно асимптотически расщепить на две независимые системы, сумма порядков которых равна порядку заданной системы.

При построении алгоритма расщепления нам понадобится неособенная матрица $V(\tau)$, которая преобразует $A_0(\tau)$ к квазидиагональной форме

$$W_0(\tau) \equiv V^{-1}(\tau) A_0(\tau) V(\tau) = \begin{bmatrix} W_{10}(\tau) & 0 \\ 0 & W_{20}(\tau) \end{bmatrix}, \qquad (12.4)$$

где $W_{10}(\tau)$ — квадратная матрица порядка r_1 с собственными числами первой группы $\lambda_i(\tau)$; $W_{20}(\tau)$ — квадратная матрица r_2-го порядка с собственными числами второй группы $\lambda_j(\tau)$ ($i = 1, 2, \ldots, r_1$; $j = r_1 + 1, \quad r_1 + 2, \ldots, n$; $\quad r_1 + r_2 = n$).

Как известно, при выполнении условия 2 такую преобразующую матрицу $V(\tau)$ можно указать для каждого $\tau \in [0, L]$. Построение и свойства матрицы $V(\tau)$ мы подробно рассмотрим в § 14.

§13. Формальное расщепление

Возможность формального расщепления системы линейных дифференциальных уравнений (12.1) на две независимые подсистемы устанавливает следующая теорема.

Теорема III.1. *Если матрица $A(\tau, \varepsilon)$ удовлетворяет условиям 1), 2) § 12, то формальное решение системы (12.1) может быть представлено в виде*

$$x(t, \varepsilon) = U(\tau, \varepsilon)\,\xi(t, \varepsilon), \qquad (13.1)$$

где $U(\tau, \varepsilon)$ — квадратная матрица порядка n, а n-мерный вектор $\xi(t, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathfrak{A}(\tau, \varepsilon)\,\xi, \qquad (13.2)$$

в котором матрица $\mathfrak{A}(\tau, \varepsilon)$ имеет квазидиагональную структуру

$$\mathfrak{A}(\tau, \varepsilon) = \begin{bmatrix} \mathfrak{A}_1(\tau, \varepsilon) & 0 \\ 0 & \mathfrak{A}_2(\tau, \varepsilon) \end{bmatrix}, \qquad (13.3)$$

и $\mathfrak{A}_k(\tau, \varepsilon)$ — суть квадратные матрицы порядка r_k ($k = 1, 2$).

Предполагается, что матрицы $U(\tau, \varepsilon)$, $\mathfrak{A}(\tau, \varepsilon)$ (следовательно, и

$\mathfrak{A}_k(\tau, \varepsilon)$) *допускают формальные разложения вида*

$$U(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s U_s(\tau), \tag{13.4}$$

$$\mathfrak{A}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \mathfrak{A}_s(\tau) \quad \text{или} \quad \mathfrak{A}_k(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \mathfrak{A}_{ks}(\tau). \tag{13.5}$$

Таким образом, согласно структуре матрицы $\mathfrak{A}(\tau, \varepsilon)$, уравнение (13.2) можно рассматривать как систему двух независимых подсистем, где

$$\xi(t, \varepsilon) = \begin{bmatrix} \xi_1(t, \varepsilon) \\ \xi_2(t, \varepsilon) \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \frac{d\xi_1}{dt} = \mathfrak{A}_1(\tau, \varepsilon)\xi_1, \quad \frac{d\xi_2}{dt} = \mathfrak{A}_2(\tau, \varepsilon)\xi_2.$$

(Порядок отщепленных систем — r_1 и r_2 соответственно.)

Доказательство теоремы III.1 будет состоять в построении алгоритма, по которому можно определять члены разложения (13.4), (13.5). Для этого подставим выражение (13.1) с учетом (13.2) в систему (12.1). В полученном таким образом тождестве приравняем коэффициенты при вектор-функции $\xi(t, \varepsilon)$, в результате чего найдем матричное дифференциальное уравнение

$$\varepsilon \frac{dU}{d\tau} + U(\tau, \varepsilon)\mathfrak{A}(\tau, \varepsilon) = A(\tau, \varepsilon)U(\tau, \varepsilon), \tag{13.6}$$

которому должны удовлетворять искомые матрицы $U(\tau, \varepsilon)$ и $\mathfrak{A}(\tau, \varepsilon)$.

Если в соотношении (13.6) последовательно выделить члены, стоящие при одинаковых степенях параметра ε, то получим бесконечную систему алгебраических матричных уравнений для определения неизвестных элементов разложений (13.4), (13.5):

$$\begin{gathered} A_0(\tau)U_0(\tau) - U_0(\tau)\mathfrak{A}_0(\tau) = 0, \\ A_0(\tau)U_1(\tau) - U_1(\tau)\mathfrak{A}_0(\tau) = U_0(\tau)\mathfrak{A}_1(\tau) - A_1(\tau)U_0(\tau) + \\ + \frac{dU_0}{d\tau} \equiv U_0(\tau)\mathfrak{A}_1(\tau) + B_1(\tau), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_0(\tau)U_s(\tau) - U_s(\tau)\mathfrak{A}_0(\tau) = U_0(\tau)\mathfrak{A}_s(\tau) + B_s(\tau), \end{gathered} \tag{13.7}$$

где

$$B_s(\tau) = \sum_{j=1}^{s-1} U_j(\tau)\mathfrak{A}_{s-j}(\tau) - \sum_{j=1}^{s} A_j(\tau)U_{s-j}(\tau) + \frac{dU_{s-1}}{d\tau} \tag{13.8}$$

(матрица $B_s(\tau)$ содержит неизвестные матрицы с номерами меньшими, чем s, и производные по τ матрицы $U_{s-1}(\tau)$).

Будем пока предполагать, что все необходимые нам производные по τ элементов $U_s(\tau)$ существуют. К вопросу обоснования дифференцируемости матриц $U_s(\tau)$ мы вернемся в § 14.

Умножим слева обе части каждого уравнения системы (13.6) на матрицу $V^{-1}(\tau)$ (см. § 12) и, введя новую неизвестную матрицу

$$Q(\tau) = V^{-1}(\tau) U_s(\tau), \tag{13.9}$$

получим, согласно (13.7), следующую систему уравнений:

$$W_0(\tau) Q_0(\tau) - Q_0(\tau) \mathfrak{A}_0(\tau) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$W_0(\tau) Q_s(\tau) - Q_s(\tau) \mathfrak{A}_0(\tau) = Q_0(\tau) \mathfrak{A}_s(\tau) + F_s(\tau), \tag{13.10}$$

где

$$F_s(\tau) = V^{-1}(\tau) B_s(\tau), \qquad s = 1, 2, 3, \ldots . \tag{13.11}$$

Приступая к решению системы (13.10), рассмотрим вначале первое уравнение.

Пусть

$$Q_0(\tau) = E, \tag{13.12}$$

где E — единичная матрица порядка n.

Тогда, согласно первому уравнению системы (13.10),

$$\mathfrak{A}_0(\tau) = W_0(\tau), \tag{13.13}$$

и последнее уравнение (13.10) можно переписать в виде

$$W_0(\tau) Q_s(\tau) - Q_s(\tau) W_0(\tau) = \mathfrak{A}_s(\tau) + F_s(\tau), \tag{13.14}$$
$$s = 1, 2, \ldots .$$

Определив нулевой член разложения матрицы $U(\tau, \varepsilon)$ в соответствии с (13.9) и (13.12)

$$U_0(\tau) = V(\tau), \tag{13.15}$$

мы можем перейти к решению уравнений (13.14) при $s \geqslant 1$. Заметим, что матрица $F_s(\tau)$, согласно (13.8) и (13.11), содержит только те члены разложений (13.4), (13.5), номера которых меньше s. Поэтому при последовательном решении ($s = 1, 2, \ldots$) уравнения (13.14) мы должны рассматривать матрицу $F_s(\tau)$ как известную.

Для построения решения уравнения (13.14) разобьем матрицы $Q_s(\tau)$ и $F_s(\tau)$ на клетки, соответствующие квазидиагональной структуре известной матрицы $W_0(\tau)$ и искомой матрицы $\mathfrak{A}(\tau, \varepsilon)$ (см. (12.4) и (13.3)):

$$Q_s(\tau) = \begin{bmatrix} Q_{11s}(\tau) & Q_{12s}(\tau) \\ Q_{21s}(\tau) & Q_{22s}(\tau) \end{bmatrix}, \qquad F_s(\tau) = \begin{bmatrix} F_{11s}(\tau) & F_{12s}(\tau) \\ F_{21s}(\tau) & F_{22s}(\tau) \end{bmatrix}, \tag{13.16}$$

где $Q_{ijs}(\tau)$ и $F_{ijs}(\tau)$ — матрицы порядка (r_i, r_j) $(i = 1, 2;\ j = 1, 2)$. Тогда уравнение (13.14) можно представить в виде следующей, эквивалентной, системы матричных уравнений:

$$W_{i0}(\tau)Q_{ijs}(\tau) - Q_{ijs}(\tau)W_{j0}(\tau) = \delta_{ij}\mathfrak{A}_{is}(\tau) + F_{ijs}(\tau), \qquad (13.17)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера; $i, j = 1, 2$. Найдем решение этой системы.

Пусть $i = j$ и

$$Q_{iis} = E_{r_i} \qquad (13.18)$$

(E_{r_i} — единичная матрица порядка r_i).

В этом случае, согласно (13.17), находим

$$\mathfrak{A}_{is}(\tau) = -F_{iis}(\tau) \qquad (i = 1, 2). \qquad (13.19)$$

При $i \neq j$ уравнение (13.17) можно представить в виде

$$W_{i0}(\tau)Q_{ijs}(\tau) - Q_{ijs}(\tau)W_{j0}(\tau) = F_{ijs}(\tau). \qquad (13.20)$$

Из уравнения (13.20) неизвестная матрица $Q_{ijs}(\tau)$ $(i \neq j)$ определяется однозначно, так как соответствующее однородное уравнение

$$W_{i0}(\tau)Q_{ijs}(\tau) - Q_{ijs}(\tau)W_{j0}(\tau) = 0 \qquad (13.21)$$

имеет только нулевое решение.

Последнее утверждение является следствием того, что матрицы $W_{i0}(\tau)$ и $W_{j0}(\tau)$ $(i \neq j)$ при любом $\tau \in [0, L]$, согласно предположению 2) § 12, не имеют равных собственных значений (см. гл. VIII из работы [15]).

Таким образом, определив из системы (13.17) клетки матрицы $Q_s(\tau)$, мы можем восстановить саму матрицу $Q_s(\tau)$, а следовательно, определить соответствующий член разложения матрицы $U(\tau, \varepsilon)$:

$$U_s(\tau) = V(\tau)Q_s(\tau). \qquad (13.22)$$

Итак, описанная здесь схема решения показывает, как можно найти элементы формальных разложений (13.4), (13.5), т. е. матрицы $U_s(\tau)$ и $\mathfrak{A}_s(\tau)$ с любым номером $s = 0, 1, 2, \ldots$.

Для завершения описания алгоритма формального расщепления системы (12.1) нам необходимо доказать, что при выполнении условий теоремы III.1 матрицы $U_s(\tau)$ дифференцируемы по τ достаточное число раз. Этот вопрос будет подробно рассмотрен в следующем параграфе.

§ 14. Построение преобразующей матрицы и дифференцируемость формального решения

Прежде чем приступить к исследованию дифференцируемости по τ матриц $U_s(\tau)$ $(s = 0, 1, 2, \ldots)$, докажем следующую лемму.

Лемма III.1. *Если матрица $A_0(\tau)$ имеет на сегменте $[0, L]$ некоторое число производных по τ, то можно так выбрать неособенную преобразующую матрицу $V(\tau)$, что она сама, а следовательно, и квазидиагональная матрица $W_0(\tau)$ (см. (12.4)) будут иметь на сегменте $[0, L]$ такое же число производных.*

Доказательство. Для построения матрицы преобразования $V(\tau)$ разложим все наше пространство R_n в прямую сумму двух инвариантных относительно матрицы $A_0(\tau)$ подпространств, соответствующих двум группам собственных чисел. Указанное разложение, как известно [68], может быть выполнено с помощью матриц $P_1(A_0)$ и $P_2(A_0)$, проекционных в том смысле, что

$$P_k^2(A_0) = P_k(A_0) \quad (k = 1, 2). \tag{14.1'}$$

Эти матрицы обладают следующими свойствами:

$$P_1(A_0) + P_2(A_0) = E, \qquad A_0 P_k = P_k A_0 \qquad (k = 1, 2),$$
$$P_1(A_0) P_2(A_0) = P_2(A_0) P_1(A_0) = 0. \tag{14.1''}$$

Напомним способ построения матриц $P_k(A_0)$.

В соответствии с предположением 2) § 12 представим характеристический полином $D(\lambda)$ матрицы $A_0(\tau)$ в виде произведения двух взаимно простых сомножителей, каждый из которых соответствует определенной группе собственных значений

$$D(\lambda) = D_1(\lambda) D_2(\lambda), \tag{14.2}$$

где $D_1(\lambda)$ — полином r_1-ой степени; $D_2(\lambda)$ — полином степени r_2 $(r_1 + r_2 = n)$.

Согласно (14.2), имеет место формула

$$\frac{1}{D(\lambda)} = \frac{d_1(\lambda)}{D_1(\lambda)} + \frac{d_2(\lambda)}{D_2(\lambda)},$$

а следовательно, справедливо тождество

$$E = d_1(A_0) D_2(A_0) + d_2(A_0) D_1(A_0). \tag{14.3}$$

Здесь $d_k(\lambda)$ — полином степени не выше $r_k - 1$ взаимно простой с $D_k(\lambda)$ $(k = 1, 2)$.

Обозначим

$$\begin{aligned} P_1(A_0) &= d_1(A_0) D_2(A_0), \\ P_2(A_0) &= d_2(A_0) D_1(A_0). \end{aligned} \tag{14.4}$$

Используя соотношение (14.3) и тождество Кэли $D(A_0)=0$, нетрудно убедиться в справедливости равенств (14.1′) и (14.1″), т. е. матрицы $P_1(A_0)$ и $P_2(A_0)$ действительно раскладывают пространство R_n в полную систему инвариантных относительно $A_0(\tau)$ подпространств P_1R_n и P_2R_n, сумма измерений которых равна n.

Покажем далее, что подпространство P_kR_n, определяемое формулой

$$x_k = P_k x, \qquad k = 1, 2, \tag{14.5}$$

можно задать и уравнением вида

$$D_k(A_0)\, x_k = 0, \qquad k = 1, 2, \tag{14.6}$$

т. е. подпространство P_kR_n является совокупностью векторов, удовлетворяющих уравнению (14.6).

Действительно, положим вначале, что имеется вектор x_k, определяемый формулой (14.5). Тогда, подставляя в уравнение (14.6) вместо x_k выражение (14.5), получим

$$D_k(A_0)\, P_k x = d_k(A_0)\, D(A_0)\, x,$$

но $D(A_0)=0$, следовательно, векторы (14.5) удовлетворяют уравнению (14.6).

Справедливо и обратное: решение уравнения (14.6) принадлежит подпространству (14.5).

Действительно, согласно (14.1), каждый вектор пространства R_n, в том числе и любое решение η_1 уравнения $D_1(A_0)\,\eta_1 = 0$, можно представить в виде

$$\eta_1 = (P_1 + P_2)\,\eta_1 \equiv d_1(A_0)\, D_2(A_0)\,\eta_1 + d_2(A_0)\, D_1(A_0)\,\eta_1. \tag{14.7}$$

Но $D_1(A_0)\,\eta_1 = 0$, следовательно,

$$\eta_1 = d_1(A_0)\, D_2(A_0)\,\eta_1 \equiv P_1(A_0)\,\eta_1,$$

т. е. решение уравнения (14.6) при $k=1$ принадлежит подпространству P_1R_n.

Аналогичное утверждение имеет место и в случае $k=2$.

Заметим, что множество решений уравнения $D_k(A_0)\,x = 0$ ($k = 1, 2$) есть не пустое подпространство, в чем легко убедиться, если уравнение (14.6) записать в виде

$$D_1(A_0)\,x = \prod_{i=1}^{r_1} (A_0 - \lambda_i E)\, x = 0,$$

$$D_2(A_0)\,x = \prod_{j=r_1+1}^{n} (A_0 - \lambda_j E)\, x = 0.$$

Пусть размерность подпространств P_1R_n и P_2R_n равна α_1 и α_2 ($\alpha_1+\alpha_2=n$) соответственно. Выберем в качестве новых основных ортов нашего n-мерного пространства α_1 базисных векторов подпространства P_1R_n и α_2 базисных векторов подпространства P_2R_n.

Согласно инвариантности подпространств P_kR_n относительно $A_0(\tau)$, матрица $A_0(\tau)$ в этом новом базисе будет иметь квазидиагональную форму, причем указанное преобразование выполняется с помощью матрицы $T(\tau)$:

$$T^{-1}(\tau)A_0(\tau)T(\tau)=\Lambda(\tau),$$

где $T(\tau)$ — квадратная матрица n-го порядка, составленная из новых базисных векторов;

$$\Lambda(\tau)=\begin{bmatrix}\Lambda_1(\tau) & 0\\ 0 & \Lambda_2(\tau)\end{bmatrix}; \qquad (14.8)$$

$\Lambda_1(\tau)$ — матрица порядка α_1; $\Lambda_2(\tau)$ — матрица порядка α_2.

Покажем, что $\alpha_1=r_1$, $\alpha_2=r_2$ и собственные значения μ_m ($m=1,2,\ldots,\alpha_1$) матрицы $\Lambda_1(\tau)$ — суть собственные значения первой группы $\lambda_i(\tau)$ ($i=1,2,\ldots,r_1$), а собственные значения μ_l ($l=\alpha_1+1,\alpha_1+2,\ldots,n$) матрицы $\Lambda_2(\tau)$ принадлежат второй группе $\lambda_j(\tau)$ ($j=r_1+1,r_2+2,\ldots,n$) корней характеристического полинома матрицы $A_0(\tau)$.

Возьмем любой вектор y из подпространства P_1R_n. Он удовлетворяет уравнению (14.6) при $k=1$ и, следовательно (в новых координатах), уравнению

$$T^{-1}(\tau)D_1(A_0)T(\tau)y=0,$$

которое, очевидно, можно переписать в виде

$$D_1(T^{-1}A_0T)y=0. \qquad (14.9)$$

Так как $y\in P_1R_n$, то его последние $\alpha_2=n-\alpha_1$ компонент равны нулю, следовательно, уравнение (14.9) эквивалентно уравнению

$$D_1(\Lambda_1)y_1=0, \qquad (14.10)$$

где y_1 — любой α_1-мерный вектор.

Поскольку равенство (14.10) имеет место при любом y_1, то $D_1(\Lambda_1)\equiv 0$, а значит, все характеристические числа матрицы $D_1(\Lambda_1)$ тоже равны нулю. Но все эти характеристические числа образуются из характеристических чисел матрицы Λ_1 по формуле $D_1(\mu_m)$, следовательно, любое собственное значение матрицы Λ_1 является корнем уравнения

$$D_1(\mu_m)=0 \qquad (m=1,2,\ldots,\alpha_1).$$

Аналогичными рассуждениями мы можем убедиться в том, что любое собственное значение матрицы Λ_2 есть корень уравнения

$$D_2(\mu_l) = 0 \qquad (l = \alpha_1 + 1, \alpha_2 + 2, \ldots, n).$$

Так как подобные матрицы $A_0(\tau)$ и $\Lambda(\tau)$ имеют одинаковые характеристические числа, и, кроме того, $D_1(\lambda)$ и $D_2(\lambda)$ взаимно простые полиномы, то из нашего рассмотрения следует, что $\alpha_1 = r_1$, $\alpha_2 = r_2$ и собственные значения матрицы $\Lambda_k(\tau)$ совпадают с корнями соответствующих полиномов $D_k(\lambda)$ $(k = 1, 2)$.

Таким образом, в качестве искомой преобразующей матрицы мы можем выбрать построенную нами матрицу $T(\tau)$.

Остается только показать, что эта матрица имеет столько же производных по τ, что и $A_0(\tau)$.

Для этого вернемся к вопросу о построении базисных векторов, образующих матрицу T. Как следует из приведенных рассуждений, векторы, принадлежащие подпространствам P_1R_n и P_2R_n, являются решениями систем алгебраических уравнений

$$P_2(A_0(\tau))x_1 = d_2(A_0(\tau))D_1(A_0(\tau))x_1 = 0 \qquad (14.11)$$

и

$$P_1(A_0(\tau))x_2 = d_1(A_0(\tau))D_2(A_0(\tau))x_2 = 0 \qquad (14.12)$$

соответственно.

Поэтому прежде всего убедимся в том, что матрицы $P_k(A_0(\tau))$ $(k = 1, 2)$ имеют столько же производных по τ, сколько и матрица $A_0(\tau)$. Очевидно, для этого достаточно показать, что коэффициенты полинома $P_k(\lambda)$ дифференцируемы по τ по крайней мере столько же раз, сколько и элементы матрицы $A_0(\tau)$.

Докажем последнее утверждение.

Как уже говорилось, согласно разложению

$$D(\lambda) = D_1(\lambda)D_2(\lambda), \qquad (14.13)$$

имеет место формула

$$\frac{1}{D(\lambda)} = \frac{d_1(\lambda)}{D_1(\lambda)} + \frac{d_2(\lambda)}{D_2(\lambda)}, \qquad (14.14)$$

где $d_k(\lambda)$ — полином степени не выше $r_k - 1$ взаимно простой с $D_k(\lambda)$ $(k = 1, 2)$.

Корни полиномов $D_1(\lambda)$ и $D_2(\lambda)$ образуют на комплексной плоскости две изолированные группы, поэтому мы можем построить на этой плоскости два гладких непересекающихся контура Γ_1 и Γ_2, содержащих внутри себя корни соответствующих полиномов.

Так как функция $\frac{d_1(\lambda)}{D_1(\lambda)}$ голоморфна в замкнутой области, ограниченной контуром Γ_2, то справедлива формула Коши:

$$\frac{d_1(\lambda)}{D_1(\lambda)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{d_1(\mu)\,d\mu}{D_1(\mu)(\mu-\lambda)}, \tag{14.15}$$

где λ — любая точка внутри контура Γ_2, который обходится в положительном направлении.

Функция $\frac{d_2(\lambda)}{D_2(\lambda)}$ — голоморфна вне области, ограниченной Γ_2, и при $\lambda\to\infty$ равномерно стремится к нулю, поэтому

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{d_2(\mu)\,d\mu}{D_2(\mu)(\mu-\lambda)}, \tag{14.16}$$

где λ — точка внутри контура Γ_2 и контур обходится в том же направлении, что и в формуле (14.15).

Складывая равенства (14.15) и (14.16), получаем, согласно (14.14):

$$\frac{d_1(\lambda)}{D_1(\lambda)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{d\mu}{D(\mu)(\mu-\lambda)}. \tag{14.17}$$

На основании формулы (14.17) мы можем утверждать, что функция $\frac{d_1(\lambda)}{D_1(\lambda)}$ дифференцируема по параметру τ столько же раз, сколько и характеристический полином $D(\lambda,\tau)$ матрицы $A_0(\tau)$, т. е. столько же, сколько и элементы матрицы $A_0(\tau)$: коэффициенты полинома $D(\lambda,\tau)$ являются многочленами, образованными из элементов матрицы $A_0(\tau)$. Итак, дифференцируемость по τ функции $P_1(\lambda,\tau)$ уже очевидна, ибо

$$P_1(\lambda)=\frac{d_1(\lambda)}{D_1(\lambda)}\cdot D(\lambda)=d_1(\lambda)\,D_2(\lambda),$$

а каждая из функций $\frac{d_1(\lambda)}{D_1(\lambda)}$ и $D(\lambda)$ дифференцируемы по τ столько же раз, сколько и матрица $A_0(\tau)$.

Аналогичное утверждение справедливо для полинома

$$P_2(\lambda)=d_2(\lambda)\,D_1(\lambda).$$

Перейдем теперь к доказательству дифференцируемости по τ решений уравнений (14.11) и (14.12).

В силу наших предыдущих рассуждений, система n алгебраических уравнений (14.11) имеет r_1 независимых решений, т. е. ранг матрицы $P_2(A_0(\tau))$ равен r_2. Поэтому, выделив в уравнении (14.11) отличный от нуля минор r_2-го порядка и задавшись соответствующими значениями r_1 произвольных компонент вектора x_1 (например, положив их равными постоянным), мы можем продифференцировать по τ уравнение (14.11) и убедиться в том, что решение $x_1(\tau)$ дифференцируемо столько же раз, сколько и матрица $P_2(A_0(\tau))$, т. е. сколько элементы матрицы $A_0(\tau)$. Аналогичные утверждения относительно дифференцируемости имеют место для r_2 независимых решений системы (14.12).

Итак, при построении преобразующей матрицы мы всегда можем найти пространства дифференцируемых решений уравнений (14.11) и (14.12), которые имеют столько же производных, что и матрица $A_0(\tau)$.

Если мы в качестве нового базиса возьмем ортонормированные (каждые отдельно) системы независимых дифференцируемых решений уравнений (14.11) и (14.12) (что, как известно, всегда возможно), то построенная из них преобразующая матрица $V(\tau) = [V_1, V_2]$ будет обладать всеми свойствами, указанными в лемме III.1. Кроме того, имеет место равенство

$$V_k^*(\tau)\, V_k(\tau) = E_{r_k}, \qquad k = 1, 2, \tag{14.18}$$

где $V_k^*(\tau)$ — матрица, транспонированная к матрице $V_k(\tau)$. Очевидно, что и матрица $W_0(\tau) = V^{-1}(\tau)\, A_0(\tau)\, V(\tau)$ будет иметь столько же производных, что и $V(\tau)$, т. е. столько же, сколько и $A_0(\tau)$. Лемма III.1 доказана.

Теперь, с помощью утверждений леммы III.1, докажем дифференцируемость матриц $U_s(\tau)$ $(s = 1, 2, 3, \ldots)$.

Так как, согласно (13.22),

$$U_s(\tau) = V(\tau)\, Q_s(\tau),$$

то вопрос о дифференцируемости элементов $U_s(\tau)$ можно решить после исследования свойств матрицы $Q_s(\tau)$ $(s = 1, 2, \ldots)$.

Матрица $Q_s(\tau)$ будет дифференцируема, если дифференцируемы все ее клетки $Q_{ijs}(\tau)$ $(i = 1, 2;\ j = 1, 2;\ s = 1, 2, \ldots)$. Дифференцируемость клеток $Q_{iis}(\tau)$ сразу следует из равенства (13.18). Матрицы $Q_{ijs}(\tau)$ при $i \neq j$ являются единственным решением уравнения (13.20). Выполняя в (13.20) дифференцирование по τ, придем к выводу, что $Q_{ijs}(\tau)$ имеет столько же производных, сколько матрицы $W_{i0}(\tau)$ $(i = 1, 2)$, т. е. матрица $W_0(\tau)$, и $F_{ijs}(\tau)$. Напомним, что $F_{ijs}(\tau)$ являются клетками матрицы $F_s(\tau)$, которая образуется из членов разложения (12.2) матрицы $A(\tau, \varepsilon)$, матриц $\mathfrak{A}_m(\tau)$, $U_m(\tau)$ $(m < s)$ и производных последней.

Таким образом, если предположить существование достаточного числа производных у элементов $A_s(\tau)$, т. е. выполнение условия

1) § 12, то $F_s(\tau)$, а следовательно, и $Q_{ijs}(\tau)$ будут иметь нужное число производных.

Это утверждение показывает, что все производные по τ от матриц $U_s(\tau)$ ($s = 0, 1, 2, \ldots$), с которыми нам пришлось оперировать в процессе формального расщепления системы (12.1), при сделанных предположениях действительно существуют.

Обоснование дифференцируемости матриц $U_s(\tau)$ завершает доказательство теоремы III.1.

§ 15. Доказательство асимптотической сходимости

В § 13 мы изложили алгоритм формального расщепления системы дифференциальных уравнений (12.1) на две линейно независимые системы.

В настоящем параграфе покажем, что построенное по указанному алгоритму формальное решение (13.1) асимптотически сходится к точному решению $x(t, \varepsilon)$ системы (12.1), т. е. норма* разности между точным решением и приближением m-го порядка стремится к нулю при фиксированном m и $\varepsilon \to 0$.

Как и раньше, будем понимать под приближением m-го порядка вектор $x^{(m)}(t, \varepsilon)$ вида

$$x^{(m)}(t, \varepsilon) = U^{(m)}(\tau, \varepsilon)\, \xi^{(m)}(t, \varepsilon), \tag{15.1}$$

где $\xi^{(m)}(t, \varepsilon)$ определяется уравнением (13.2), если в формальных разложениях (13.4), (13.5) ограничиться первыми $m+1$ слагаемыми.

При получении оценки разности

$$z(t, \varepsilon) = x(t, \varepsilon) - x^{(m)}(t, \varepsilon) \tag{15.2}$$

нам понадобится такая лемма.

Лемма III.2. *Если матрица* $A(\tau, \varepsilon) = A_0(\tau) + \varepsilon \bar{A}(\tau, \varepsilon)$, *где* $\bar{A}(\tau, \varepsilon) = \sum\limits_{s=1}^{\infty} \varepsilon^{s-1} A_s(\tau)$, *удовлетворяет условиям теоремы III.1, и, кроме того, для любого n-мерного вектора y справедливо неравенство*

$$\operatorname{Re}(A_0(\tau)\, y, y) \leqslant 0, \tag{15.3}$$

что эквивалентно неположительности собственных значений симмет-

---

* Имеются в виду нормы обычного унитарного пространства:

$$\| y \| = \sqrt{(y, y)}, \qquad \| A \| = \max_i \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |.$$

рической матрицы $\frac{A_0 + A_0^*}{2}$, *то для решения уравнения*

$$\frac{dx}{dt} = [A_0(\tau) + \varepsilon \bar{A}(\tau, \varepsilon)]\, x \tag{15.4}$$

с начальным условием $x(0, \varepsilon) = x_0$ *имеет место на сегменте* $\left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, *оценка*

$$\| x(t, \varepsilon) \| \leqslant C \| x_0 \|, \tag{15.5}$$

где C*—некоторая положительная константа, не зависящая от* ε.

Доказательство. Пусть $\Psi(t, \varepsilon) = (x(t, \varepsilon), x(t, \varepsilon))$, где $x(t, \varepsilon)$ — решение системы (15.4), причем $x(t, \varepsilon)|_{t=0} = x_0$. Тогда, в силу (15.3), имеем

$$\frac{d\Psi}{dt} = (A(\tau, \varepsilon)x, x) + (x, A(\tau, \varepsilon)x) = 2\mathrm{Re}\,(A(\tau, \varepsilon)x, x) =$$

$$= 2\mathrm{Re}\,(A_0(\tau)x, x) + 2\varepsilon\,\mathrm{Re}\,(\bar{A}(\tau, \varepsilon)x, x) \leqslant \tag{15.6}$$

$$\leqslant 2\varepsilon \sup_{\substack{0 \leqslant \tau \leqslant L, \\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0}} \| \bar{A}(\tau, \varepsilon) \| \, \Psi(t, \varepsilon);$$

или

$$\Psi(t, \varepsilon) \leqslant \Psi(0, \varepsilon) + 2\varepsilon \sup_{\substack{0 \leqslant \tau \leqslant L, \\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0}} \| \bar{A}(\tau, \varepsilon) \| \int_0^t \Psi(t, \varepsilon)\, dt, \tag{15.7}$$

Согласно лемме I.1, из неравенства (15.7) получаем оценку

$$\Psi(t, \varepsilon) \leqslant \Psi(0, \varepsilon)\, e^{2L \sup\limits_{0 \leqslant \tau \leqslant L,\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0} \| \bar{A}(\tau, \varepsilon) \|},$$

которую перепишем в виде

$$\| x(t, \varepsilon) \| \leqslant C \| x_0 \|, \text{ где } C = e^{L \sup\limits_{0 \leqslant \tau \leqslant L,\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0} \| \bar{A}(\tau, \varepsilon) \|},$$

что и завершает доказательство нашей леммы.

На основании леммы III.2 мы можем утверждать, что и для функции $\xi_k^{(m)}(t, \varepsilon)$, $k = 1, 2$, имеет место оценка вида (15.5), ибо система

$$\frac{d\xi_k^{(m)}}{dt} = \mathfrak{A}_k^{(m)}(\tau, \varepsilon)\, \xi^{(m)}, \quad k = 1, 2, \tag{15.8}$$

где

$$\mathfrak{A}_k^{(m)}(\tau, \varepsilon) = \mathfrak{A}_{k0}(\tau) + \varepsilon \sum_{s=0}^{m-1} \varepsilon^s \mathfrak{A}_{ks+1}(\tau)$$

удовлетворяет условиям леммы III.2.

Действительно, согласно определению матрицы $\mathfrak{A}_0(\tau)$ (13.13) и свойствам преобразующей матрицы $V(\tau) = [V_1(\tau), V_2(\tau)]$, можно записать

$$A_0(\tau) V_k(\tau) = V_k(\tau)\mathfrak{A}_{k0}(\tau),$$

или

$$\mathfrak{A}_{k0}(\tau) = V_k^*(\tau) A_0(\tau) V_k(\tau).$$

Отсюда очевидна справедливость неравенства

$$\operatorname{Re}(\mathfrak{A}_{k0}(\tau) y_k, y_k) = \operatorname{Re}(V_k^*(\tau) A_0 V_k(\tau) y_k, y_k) = \operatorname{Re}(A_0 V_k(\tau) y_k, V_k(\tau) y_k) \leqslant 0,$$

где y_k — произвольный вектор размерности r_k.

Вернемся к рассмотрению разности (15.2).

В силу определения матриц $U_s(\tau)$, $\mathfrak{A}_s(\tau)$ $(s = 0, 1, 2, \ldots, m)$ (см. (13.7)) вектор $x^{(m)}(t, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dx^{(m)}}{dt} = A^{(m)}(\tau, \varepsilon)\, x^{(m)} + \varepsilon^{m+1} f(t, \varepsilon), \tag{15.9}$$

где

$$A^{(m)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s A_s(\tau),$$

$$f(t, \varepsilon) = \Phi(\tau, \varepsilon)\, \xi^{(m)}(t, \varepsilon),$$

причем

$$\Phi(\tau, \varepsilon) = \frac{dU_m}{d\tau} + \sum_{s=0}^{m-1} \varepsilon^s \sum_{p=s+1}^{m} [U_p(\tau)\mathfrak{A}_{m+s+1-p}(\tau) - A_{m+s+1-p}(\tau) U_p(\tau)].$$

Следовательно, вектор $z(t, \varepsilon)$ является решением системы уравнений

$$\frac{dz(t, \varepsilon)}{dt} = A(\tau, \varepsilon)\, z + \varepsilon^{m+1} F_1(t, \varepsilon), \tag{15.10}$$

где

$$F_1(t, \varepsilon) = \widetilde{A}(\tau, \varepsilon)\, x^{(m)}(t, \varepsilon) - f(t, \varepsilon), \quad \widetilde{A}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=m+1}^{\infty} \varepsilon^{s-m-1} A_s(\tau).$$

Вектор $F_1(t, \varepsilon)$ в силу предположений § 12, леммы III.2 и (15.1) является ограниченным на $\left[0, \dfrac{L}{\varepsilon}\right]$ и для него справедлива оценка:

$$\| F_1(t, \varepsilon) \| \leqslant \| \widetilde{A}(\tau, \varepsilon) \| \, \| x^{(m)}(t, \varepsilon) \| + \| f(t, \varepsilon) \| \leqslant$$

$$\leqslant C [\, \| \widetilde{A}(\tau, \varepsilon) \| \, \| U^{(m)}(\tau, \varepsilon) \| + \| \Phi(\tau, \varepsilon) \| \,] \, \| \xi_0^{(m)} \|,$$

где C — некоторая положительная константа; $\xi_0^{(m)}$ — начальное значение вектора $\xi^{(m)}(t, \varepsilon)$.

Как известно [1], решение уравнения (15.10), удовлетворяющее начальному условию $z(t, \varepsilon)|_{t=0} = z_0$, определяется формулой

$$z(t, \varepsilon) = Y(t, \varepsilon) z_0 + \varepsilon^{m+1} \int_0^t Y(t, \varepsilon) Y^{-1}(t_1, \varepsilon) F(t_1, \varepsilon)\, dt_1, \qquad (15.11)$$

где $Y(t, \varepsilon)$ — решение задачи,

$$\frac{dY}{dt} = A(\tau, \varepsilon) Y, \quad Y(0, \varepsilon) = E. \qquad (15.12)$$

Действительно, пусть

$$z(t, \varepsilon) = Y(t, \varepsilon) u(t, \varepsilon). \qquad (15.13)$$

Подставив выражение (15.13) в уравнение (15.10), получим, согласно (15.12),

$$\frac{dz}{dt} = A(\tau, \varepsilon) z + Y(t, \varepsilon) \frac{du}{dt} = A(\tau, \varepsilon) z + \varepsilon^{m+1} F(t, \varepsilon),$$

откуда следует

$$Y(t, \varepsilon) \frac{du}{dt} = \varepsilon^{m+1} F(t, \varepsilon)$$

или

$$u(t, \varepsilon) = u(0, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1} \int_0^t Y^{-1}(t_1, \varepsilon) F(t_1, \varepsilon)\, dt_1. \qquad (15.14)$$

Так как $Y(0, \varepsilon) = E$ и, согласно (15.13), $z_0 = u(0, \varepsilon)$, то соотношения (15.13) и (15.14) приводят к искомому выражению решения $z(t, \varepsilon)$ (см. (15.11)).

Таким образом, согласно (15.11), для вектора $z(t, \varepsilon)$ имеет место оценка:

$$\| z(t, \varepsilon) \| \leqslant \| Y(t, \varepsilon) \| \| z_0 \| + \varepsilon^{m+1} \int_0^t \Psi(t, t_1, \varepsilon)\, dt_1,$$

где

$$\Psi(t, t_1, \varepsilon) = \| Y(t, \varepsilon) Y^{-1}(t_1, \varepsilon) F(t_1, \varepsilon) \|, \qquad (15.15)$$

или

$$\| z(t, \varepsilon) \| \leqslant \| Y(t, \varepsilon) \| \| z_0 \| + \varepsilon^m M,$$

где

$$M = L \sup \Psi(t, t_1, \varepsilon),$$

$$0 \leqslant t, t_1 \leqslant \frac{L}{\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0.$$

Теперь, основываясь на неравенстве (15.15), можно утверждать, что нами доказана следующая теорема.

Теорема III.2. *Пусть точное решение $x(t, \varepsilon)$ системы (12.1) и приближение m-го порядка $x^{(m)}(t, \varepsilon)$ (15.11) к этому решению взяты при одинаковых начальных условиях. Тогда при выполнении условий леммы III.2 найдется такая константа M, не зависящая от ε, что для всех $t \in [0, \frac{L}{\varepsilon}]$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, справедлива оценка*

$$\| x(t, \varepsilon) - x^{(m)}(t, \varepsilon) \| \leqslant \varepsilon^m M. \tag{15.16}$$

Неравенство (15.16) указывает на асимптотический характер формального решения $x^{(m)}(t, \varepsilon)$, алгоритм получения которого описан в § 13.

§ 16. Некоторые специальные случаи расщепления

Метод, развитый в настоящей главе, позволяет в случае разбиения корней характеристического уравнения матрицы $A_0(\tau)$ на p непересекающихся групп расщепить исходную систему дифференциальных уравнений на p изолированных подсистем порядков r_k ($k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, p$; $\sum_{k=1}^{p} r_k = n$).

Особенно простым получается расщепление заданной системы в случае простых на всем сегменте $[0, L]$ собственных значений матрицы $A_0(\tau)$.

Действительно, согласно изложенному в этой главе методу, мы можем в рассматриваемом случае представить общее формальное решение заданной системы

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau, \varepsilon) x \tag{16.1}$$

в виде

$$x(t, \varepsilon) = U(\tau, \varepsilon) \xi(t, \varepsilon) \equiv \sum_{k=1}^{n} U_k(\tau, \varepsilon) \xi_k(t, \varepsilon), \tag{16.2}$$

где функция $\xi_k(t, \varepsilon)$ является общим решением уравнения первого порядка

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \omega_k(\tau, \varepsilon) \xi_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{16.3}$$

а $U_k(\tau, \varepsilon)$ — n-мерный вектор, являющийся соответствующим столбцом преобразующей матрицы $U(\tau, \varepsilon)$.

Таким образом, система (16.1) n-го порядка в данном случае расщепляется на n независимых уравнений первого порядка (16.3) и ее общее решение можно записать в виде

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} c_k U_k(\tau, \varepsilon)\, e^{\int_{t_0}^{t} \omega_k(\tau,\varepsilon)dt},$$

где c_k — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий.

При последовательном определении (по алгоритму, описанному в § 13) членов асимптотического разложения функции $\omega_k(\tau, \varepsilon)$ и вектора $U_k(\tau, \varepsilon)$ мы найдем, что $U_{k0}(\tau)$ является собственным вектором матрицы $A_0(\tau)$, соответствующим собственному числу $\lambda_k(\tau)$, и $\omega_{k0}(\tau) \equiv \lambda_k(\tau)$.

Далее в случае простых собственных значений матрицы $A_0(\tau)$ элементы матрицы $Q_s(\tau)$ $(s \geqslant 1)$ (см. (13.20)) определяются по формулам

$$q_{ijs}(\tau) = \frac{f_{ijs}(\tau)}{\lambda_i(\tau) - \lambda_j(\tau)}, \qquad i \neq j; \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

где $f_{ijs}(\tau)$ — соответствующий элемент матрицы $F_s(\tau)$ (13.20).

При $i=j$ мы можем положить $q_{iis}(\tau) \equiv 0$, $s \geqslant 1$ (но $q_{ii0} \equiv 1$!).

Зная столбцы матрицы $Q_s(\tau)$ и используя формулу $U_s(\tau) = V(\tau) Q_s(\tau)$, нетрудно определить и соответствующие векторы $U_{ks}(\tau)$.

Рассмотренный случай показывает, что с помощью алгоритма, изложенного в § 13, можно при определенных условиях довольно просто найти численное значение преобразующей матрицы $U(\tau, \varepsilon)$, т. е. фактически выполнить асимптотическое расщепление заданной системы дифференциальных уравнений на несколько подсистем низшего порядка.

Аналогичное положение имеет место в случае p тождественно кратных на $[0, L]$ корней характеристического полинома, но с простыми элементарными делителями (см. следующую главу, § 19).

Однако в общем случае, когда собственные значения матрицы $A_0(\tau)$ имеют переменную кратность при $\tau \in [0, L]$ и порядок исходной системы достаточно высок, описанный алгоритм наталкивается на значительные вычислительные трудности. В частности, весьма непросто построить матрицу $U_0(\tau) \equiv V(\tau)$, а также решать для каждого $s \geqslant 1$ неоднородную систему алгебраических уравнений вида (13.20). Поэтому в таких случаях расчет необходимо выполнять на быстродействующих электронно-счетных машинах, что требует применения специального, более удобного, алгоритма. К этому вопросу мы еще вернемся в главе V.

§ 17. Расщепление неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений

В данном параграфе рассмотрим вопрос об асимптотическом расщеплении систем дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau, \varepsilon)\,x + b(\tau, \varepsilon)\,e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \qquad (17.1)$$

где матрица $A(\tau, \varepsilon)$ такая же, как в § 13—15, а n-мерный вектор $b(\tau, \varepsilon)$—бесконечно дифференцируемый по τ на $[0, L]$ и допускает следующее представление:

$$b(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s b_s(\tau). \qquad (17.2)$$

Как и в предыдущих главах, здесь необходимо различать два случая:

а) «резонанса»—когда значения функции $i\nu(\tau) \equiv i\,\frac{d\theta}{dt}\,(i=\sqrt{-1}\,)$ совпадают при некоторых $\tau \in [0, L]$ со значениями корней характеристического уравнения матрицы $A_0(\tau)$, образующими одну изолированную группу, и не совпадают ни при каких τ с другой группой корней;

б) «нерезонанса» —когда функция $i\nu(\tau)$ ни при одном $\tau \in [0, L]$ не принимает значений, совпадающих с собственными значениями матрицы $A_0(\tau)$.

1. *Случай «резонанса».* Пусть значения функции $i\nu(\tau)$ при некоторых $\tau \in [0, L)$ совпадают со значениями каких-нибудь собственных чисел из первой группы, т. е. с некоторыми $\lambda_i(\tau)$, где $i=1, 2, \ldots, r_1$.

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема III.3. *При выполнении условий теоремы III.1 и бесконечной дифференцируемости по τ вектора $b(\tau, \varepsilon)$ и функции $\nu(\tau)$ формальное общее решение системы (17.1) в случае «резонанса» может быть представлено в виде*

$$x(t, \varepsilon) = U(\tau, \varepsilon)\,\xi(t, \varepsilon) + P(\tau, \varepsilon)\,e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \qquad (17.3)$$

где матрица $U(\tau, \varepsilon)$ такая же, как в § 13; n-мерный вектор $\xi(t, \varepsilon)$ является общим решением неоднородного уравнения

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathfrak{A}(\tau,\varepsilon)\,\xi + Z(\tau, \varepsilon)\,e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \qquad (17.4)$$

в котором матрица $\mathfrak{A}(\tau, \varepsilon)$ та же, что и в § 13:

$$\mathfrak{A}(\tau, \varepsilon) = \begin{bmatrix} \mathfrak{A}_1(\tau, \varepsilon) & 0 \\ 0 & \mathfrak{A}_2(\tau, \varepsilon) \end{bmatrix}, \qquad (17.5)$$

а у вектора $Z(\tau, \varepsilon)$ только первые r_1 компонент отличны от нуля

$$Z(\tau, \varepsilon) = \begin{bmatrix} Z_1(\tau, \varepsilon) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{17.6}$$

Вектор $P(\tau, \varepsilon)$—n-мерный и допускает так же, как и вектор $Z(\tau, \varepsilon)$, обычное формальное разложение

$$P(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s P_s(\tau), \qquad Z(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s Z_s(\tau). \tag{17.7}$$

Иными словами, с помощью преобразования (17.3), которое также может быть записано в форме

$$x(t, \varepsilon) = U_1(\tau, \varepsilon)\,\xi_1(t, \varepsilon) + U_2(\tau, \varepsilon)\,\xi_2(t, \varepsilon) + P(\tau, \varepsilon)\, e^{i\theta(t, \varepsilon)}, \tag{17.8}$$

неоднородная система n-го порядка (17.1) асимптотически расщепляется на две изолированные системы низшего порядка, а именно:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \mathfrak{A}_1(\tau, \varepsilon)\,\xi_1 + Z_1(\tau, \varepsilon)\, e^{i\theta(t, \varepsilon)}, \tag{17.9}$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = \mathfrak{A}_2(\tau, \varepsilon)\,\xi_2. \tag{17.10}$$

Система (17.9) имеет порядок r_1, система (17.10) — порядок r_2 ($r_1 + r_2 = n$) в соответствии с числом корней в каждой из изолированных групп (см. § 12). Мы не будем подробно излагать доказательство теоремы III.3, ибо оно совершенно аналогично доказательству теоремы III.1. Кроме того, формулы для определения членов асимптотического разложения матриц $U(\tau, \varepsilon)$ и $\mathfrak{A}(\tau, \varepsilon)$ данного параграфа тождественны с соответствующими формулами § 13.

Остановимся только на определении членов разложений (17.7).

Следуя уже подробно описанному приему, мы найдем, что для доказательства теоремы III.3 (не касаясь построения матриц $\mathfrak{A}(\tau, \varepsilon)$ и $U(\tau, \varepsilon)$) достаточно выбрать векторы $P(\tau, \varepsilon)$ и $Z(\tau, \varepsilon)$ так, чтобы удовлетворялось равенство

$$\varepsilon \frac{dP}{d\tau} + U(\tau, \varepsilon) Z(\tau, \varepsilon) = [A(\tau, \varepsilon) - i\nu(\tau) E]\, P(\tau, \varepsilon) + b(\tau, \varepsilon). \tag{17.11}$$

Отделяя в равенстве (17.11) последовательно коэффициенты при степенях ε^s ($s = 0, 1, 2, \ldots$), получим рекуррентные соотношения для определения векторов $Z_s(\tau)$ и $P_s(\tau)$:

$$[A_0(\tau) - i\nu(\tau) E]\, P_s(\tau) = U_0(\tau) Z_s(\tau) + G_s(\tau), \tag{17.12}$$

где

$$G_s(\tau) = \frac{dP_{s-1}}{d\tau} + \sum_{k=0}^{s-1} [U_{s-k}(\tau) Z_k(\tau) - A_{s-k}(\tau) P_k(\tau)] - b_s(\tau),$$

$$s = 0, 1, 2, \ldots . \tag{17.13}$$

Умножив (17.12) слева на $V^{-1}(\tau)$ и введя новый вектор $R_s(\tau)$ по формуле

$$V^{-1} P_s(\tau) = R_s(\tau), \qquad s = 0, 1, 2, \ldots, \tag{17.14}$$

получим

$$[W_0(\tau) - i\nu(\tau) E] R_s(\tau) = Z_s(\tau) + \Phi_s(\tau), \tag{17.15}$$

где

$$\Phi_s(\tau) = V^{-1}(\tau) G_s(\tau), \quad V^{-1}(\tau) U_0(\tau) = Q_0(\tau) \equiv E.$$

Согласно структуре матрицы W_0 и вектора $Z_s(\tau)$, система (17.15) распадается на две независимые системы меньших порядков:

$$[W_{k0}(\tau) - i\nu(\tau) E_{r_k}] R_{ks}(\tau) = Z_{ks}(\tau) + \Phi_{ks}(\tau) \quad (k = 1, 2). \tag{17.16}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$R_s(\tau) = \begin{bmatrix} R_{1s}(\tau) \\ R_{2s}(\tau) \end{bmatrix}, \qquad \Phi_s(\tau) = \begin{bmatrix} \Phi_{1s}(\tau) \\ \Phi_{2s}(\tau) \end{bmatrix}. \tag{17.17}$$

Пусть $k = 2$. Тогда (17.16) имеет вид

$$[W_{20}(\tau) - i\nu(\tau) E_{r_2}] R_{2s}(\tau) = \Phi_{2s}(\tau). \tag{17.18}$$

Так как значения $i\nu(\tau)$ при $\tau \in [0, L]$ не совпадают с корнями второй группы, то матрица $[W_{20}(\tau) - i\nu(\tau) E_{r_2}]$—неособенная и уравнение (17.18) имеет единственное решение $R_{2s}(\tau)$:

$$R_{2s}(\tau) = [W_{20}(\tau) - i\nu(\tau) E_{r_2}]^{-1} \Phi_{2s}(\tau), \quad s = 0, 1, 2, \ldots . \tag{17.19}$$

При $k = 1$ система (17.16) принимает вид

$$[W_{10}(\tau) - i\nu(\tau) E_{r_1}] R_{1s}(\tau) = Z_{1s}(\tau) + \Phi_{1s}(\tau), \tag{17.20}$$

откуда необходимо определить неизвестные векторы $R_{1s}(\tau)$ и $Z_{1s}(\tau)$.

В силу наших предположений матрица $[W_{10}(\tau) - i\nu(\tau) E_{r_1}]$ в некоторых точках сегмента $[0, L]$ становится особенной:

$$\det [W_{10}(\tau) - i\nu(\tau) E] = 0. \tag{17.21}$$

Поэтому здесь вновь следует вспомнить о необходимом и достаточном условии разрешимости неоднородных алгебраических систем, определители которых равны нулю (см. § 7). И хотя определитель

(17.21) только в некоторых точках $\tau \in [0, L]$ обращается в нуль, мы подберем пока неизвестный вектор $Z_{1s}(\tau)$ так, чтобы на всем сегменте $[0, L]$ выполнялось упомянутое условие разрешимости, а именно, чтобы правая часть уравнения (17.20) $f_s(\tau) = Z_{1s}(\tau) + \Phi_{1s}(\tau)$ была ортогональна всем решениям алгебраической системы

$$[W_{10}^*(\tau) + iv(\tau) E_{r_1}] y = 0.$$

Сформулированное условие будет заведомо выполняться, если мы выберем $Z_{1s}(\tau)$ так, чтобы

$$Z_{1s}(\tau) + \Phi_{1s}(\tau) = 0,$$

т. е.

$$Z_{1s}(\tau) = -\Phi_{1s}(\tau), \quad s = 0, 1, 2, \ldots .$$

В силу нашего выбора вектора $Z_{1s}(\tau)$ мы должны на сегменте $[0, L]$ ограничиться тривиальным решением для вектора $R_{1s}(\tau)$, а именно положить

$$R_{1s}(\tau) \equiv 0, \quad s = 0, 1, 2 \ldots .$$

Итак, при последовательном решении системы (17.16) мы сможем определить, учитывая (17.14), любой член разложений искомых векторов $Z(\tau, \varepsilon)$ и $P(\tau, \varepsilon)$. Это и доказывает, в сочетании с теоремой III.1, справедливость теоремы III.3.

2. Еще более простым оказывается расщепление системы (17.1) *в случае «нерезонанса»*. Здесь можно сформулировать и доказать теорему, аналогичную теореме III.3, т. е. утверждающую, что в случае «нерезонанса» общее формальное решение системы (17.1) может быть представлено в виде

$$x(t, \varepsilon) = U(\tau, \varepsilon)\,\xi(t, \varepsilon) + H(\tau, \varepsilon)\, e^{i\theta(t, \varepsilon)}, \tag{17.22}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathfrak{A}(\tau, \varepsilon)\,\xi,$$

где матрицы $U(\tau, \varepsilon)$ и $\mathfrak{A}(\tau, \varepsilon)$ те же, что и в теоремах III.1 и III.3, а n-мерный вектор $H(\tau, \varepsilon)$ допускает формальное разложение

$$H(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s H_s(\tau). \tag{17.23}$$

Рекуррентные формулы для определения членов ряда (17.23) можно получить, если искать частное решение неоднородной системы (17.1) в виде

$$X(\tau, \varepsilon) = H(\tau, \varepsilon)\, e^{i\theta} \tag{17.24}$$

Действительно подставив (17.24) в систему (17.1), найдем уравнение.

которому должен удовлетворять искомый вектор $H(\tau, \varepsilon)$:

$$[A(\tau, \varepsilon) - i\nu(\tau)E]\, H(\tau, \varepsilon) = \varepsilon \frac{dH}{d\tau} - b(\tau, \varepsilon). \tag{17.25}$$

Отсюда, согласно формальным разложениям, имеющим место для всех членов уравнения (17.25), получим следующие рекуррентные формулы для определения членов ряда (17.23):

$$[A_0(\tau) - i\nu(\tau)E]\, H_s(\tau) = \Psi_s(\tau), \quad s = 0, 1, 2, \ldots, \tag{17.26}$$

где

$$\Psi_s(\tau) = \frac{dH_{s-1}}{d\tau} - b_s(\tau) - \sum_{k=0}^{s-1} A_{s-k}(\tau)\, H_k(\tau). \tag{17.26$'$}$$

Для «нерезонансного» случая система (17.26) при каждом $s \geqslant 0$ определяет единственное решение

$$H_s(\tau) = [A_0(\tau) - i\nu(\tau)E]^{-1}\Psi_s(\tau). \tag{17.27}$$

Таким образом, и в рассматриваемом случае отсутствия «резонанса» получение формального решения (17.22) неоднородной системы (17.1) сводится к решению двух независимых дифференциальных систем низших порядков:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \mathfrak{A}_1(\tau, \varepsilon)\,\xi_1, \qquad \frac{d\xi_2}{dt} = \mathfrak{A}_2(\tau, \varepsilon)\,\xi_2 \qquad \xi(t, \varepsilon) = \begin{bmatrix} \xi_1(t, \varepsilon) \\ \xi_2(t, \varepsilon) \end{bmatrix}$$

и определению вектора $H(\tau, \varepsilon)$ с помощью рекуррентных формул (17.26).

Подобно тому, как это делалось в § 15, можно показать, что построенные нами формальные решения неоднородной системы (17.1) в обоих случаях («резонанса» и «нерезонанса») являются асимптотическими. При этом в случае «резонанса» оценка имеет вид

$$\| x(t, \varepsilon) - x^{(m)}(t, \varepsilon) \| \leqslant C\varepsilon^{m-1},$$

а для «нерезонанса» —

$$\| x(t, \varepsilon) - x^{(m)}(t, \varepsilon) \| \leqslant C_1\varepsilon^{m}.$$

Последняя, улучшенная, оценка справедлива в обоих случаях, если $b_0(\tau) \equiv 0$.

Замечание 1. Нетрудно видеть, что все построения этого параграфа остаются справедливыми и в случае разбиения корней характеристического уравнения матрицы $A_0(\tau)$ на p изолированных групп. Видоизменение структуры матрицы $\mathfrak{A}(\tau, \varepsilon)$ и вектора $Z(\tau, \varepsilon)$ (в случае «резонанса») очевидны.

Замечание 2. Построенные нами в данной главе асимптотические расщепления системы высокого порядка иа несколько изолированных подсистем не всегда дают возможность непосредствеино выписать асимптотические решеиия исходной системы диффереициальиых уравиеиий. Это объясияется тем, что «отщеплеииые» системы уравиений, хотя и низшего порядка, чем задаииая, далеко ие всегда могут быть проиитегрированы в замкнутом виде. Только в случае простых собственных чисел матрицы $A_0(\tau)$ (см. § 16) решение в квадратурах заведомо возможно. При иаличии кратных корней характеристического уравнения построеиие асимптотических решений стаиовится возможным только в отдельных случаях и, вообще, значительно усложняется.

Рассмотрению указанных особых случаев будет посвящена следующая, четвертая, глава.

§ 18. Асимптотическое расщеплеиие системы обыкиовеииых лииейиых диффереициальиых уравиеиий в случае кратиых кориеи характеристического уравиеиия

В предыдущих параграфах главы III мы показали, что при выполнении определенных условий возможно асимптотическое расщепление системы линейных дифференциальных уравнений высокого порядка на несколько независимых подсистем низшего порядка.

При этом, говоря об асимптотическом расщеплеиии, мы имели в виду асимптотический характер сходимости приближенного решения $x^{(m)}(t, \varepsilon)$ к точному решению исходной системы $x(t, \varepsilon)$.

Однако существует и другой подход к задаче обоснования возможности асимптотического расщепления системы линейных дифференциальных уравнеиий, а именно: в отличие от предыдущего можно доказать асимптотическую сходимость преобразующей матрицы к некоторой «точной» матрице, осуществляющей расщепление задаиной системы.

Такой подход содержится, например, в работах [126, 29, 30]. В настоящем параграфе, результаты которого принадлежат А. Г. Илюхину, излагаются основные положения указанного второго подхода.

1. Рассмотрим вновь систему линейиых дифференциальных уравнений (12.1):

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau, \varepsilon)x. \tag{18.1}$$

Будем предполагать, что матрица $A(\tau, \varepsilon)$ удовлетворяет условию 1) из § 12, а условие 2) заменяется следующим:

Корни $\lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau), \ldots, \lambda_n(\tau)$ характеристического уравнения (12.3) можно разбить на p классов, $p \leqslant n$, в каждом из которых содержится по n_j ($j = 1, 2, \ldots, p$; $\sum\limits_{j=1}^{p} n_j = n$) кратных корней, причем кратность корней сохраняется на всем интервале $0 \leqslant \tau \leqslant L$. Кроме того, предполагается, что матрица $A_0(\tau)$ сохраняет свою каноническую структуру на всем интервале $[0, L]$, т. е. при любом $\tau \in [0, L]$ матрица $A_0(\tau)$ приводится к нормальной форме с одним и тем же числом клеток Жордана по главной диагонали.

Тогда можно построить такую неособенную матрицу $V(\tau)$ порядка n, которая преобразует матрицу $A_0(\tau)$ в матрицу $W_0(\tau)$ канонической жордановой формы

$$W_0(\tau) = V^{-1}(\tau) A_0(\tau) V(\tau), \tag{18.2}$$

где

$$W_0(\tau) = \begin{bmatrix} W_{10}(\tau) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & W_{20}(\tau) & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & W_{p0}(\tau) \end{bmatrix}, \tag{18.3}$$

а $W_{j0}(\tau)$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$—клетки вида

$$W_{j0}(\tau) = \begin{bmatrix} \lambda_j(\tau) & \alpha_{j1} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j(\tau) & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & \lambda_j(\tau) & \alpha_{j,n_j-1} \\ 0 & 0 & & 0 & \lambda_j(\tau) \end{bmatrix}, \tag{18.4}$$

где числа $\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{j,n_j-1}$ могут быть либо нулями, либо единицами для всех $\tau \in [0, L]$, согласно принятому выше предположению. Таким образом, в $W_{j0}(\tau)$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ объединены все клетки Жордана, соответствующие корню $\lambda_j(\tau)$ кратности n_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$.

При этом матрица $V(\tau)$ оказывается столько раз дифференцируемой, сколько и $A_0(\tau)$. В самом деле, в § 14 было показано, что если спектр матрицы $A_0(\tau)$ распадается на p изолированных частей при $\tau \in [0, L]$, то можно указать некоторую матрицу $T(\tau)$, которая приводит $A_0(\tau)$ к клеточно-диагональной форме $\Lambda(\tau) = [\Lambda_1(\tau), \Lambda_2(\tau), \ldots, \Lambda_p(\tau)]$, где $\Lambda_j(\tau)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$—диагональные клетки, порядки которых определяются размерностями инвариантных подпространств, соответствующих изолированным частям спектра матрицы $A_0(\tau)$. Там же было доказано, что $T(\tau)$ и $\Lambda_j(\tau)$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ имеют столько же производных по τ, сколько и матрица $A_0(\tau)$.

Аналогичными методами покажем теперь, что можно построить матрицу $\widetilde{V}(\tau)$, которая при наших предположениях относительно $A_0(\tau)$ приводит клеточно-диагональную матрицу $\Lambda(\tau)$ к виду (18.3). При этом $\widetilde{V}(\tau)$ будет столько же раз дифференцируема, сколько и матрицы $\Lambda_j(\tau)$ $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ p)$, т. е., в конечном счете, сколько раз дифференцируема матрица $A(\tau)$.

В самом деле, рассмотрим для определенности инвариантное подпространство E_1, отвечающее первой диагональной клетке $\Lambda_1(\tau)$ матрицы $\Lambda(\tau)$. Подпространство E_1 размерности n_1 будет в данном случае корневым подпространством (см. [49]), отвечающим корню $\lambda_1(\tau)$. Тогда, как известно из линейной алгебры (см. [68]), можно так определить базис, что матрица $\Lambda_1(\tau)$ будет приведена к канонической форме Жордана (18.4). Для этого найдем наименьшее число $l < n_1$, при котором имеет место матричное равенство

$$(\Lambda_1(\tau) - \lambda_1(\tau)E_{n_1})^l = 0. \tag{18.5}$$

Для сокращения выкладок обозначим

$$\Lambda_1(\tau) - \lambda_1(\tau)E_{n_1} = B(\tau). \tag{18.6}$$

Найдем все ненулевые решения однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$B^{l-1}(\tau)x = 0. \tag{18.7}$$

Так как матрица $A_0(\tau)$ имеет при всех $\tau \in [0,\ L]$ постоянную каноническую структуру, то полученные вектор-решения системы (18.7) будут обладать теми же свойствами дифференцируемости, что и матрица $B(\tau)$, т. е., в конечном счете, свойствами дифференцируемости $\Lambda_1(\tau)$ и собственного значения $\lambda_1(\tau)$.

Действительно, так как при любом значении τ кратность $\lambda_1(\tau)$ одна и та же, то матрица $\Lambda_1(\tau)$, как было выше показано, дифференцируема столько же раз, сколько и матрица $A_0(\tau)$. Можно также показать, что корни $\lambda_j(\tau)$ $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ p)$ обладают тем же числом производных, что и элементы матрицы $A_0(\tau)$. Тогда из равенства (18.6) следует, что $B(\tau)$ обладает теми же свойствами дифференцируемости, что и матрица $A_0(\tau)$.

Чтобы вектор-решение однородной системы (18.7) был столько же раз дифференцируем, сколько и матрица $A_0(\tau)$, необходимо, кроме того, чтобы матрица $B^{l-1}(\tau)$ имела один и тот же ранг при всех $\tau \in [0,\ L]$. В свою очередь, ранг матрицы $B^{l-1}(\tau)$ сохраняется при изменении τ, если сохраняется канонический вид матрицы $\Lambda_1(\tau)$, т. е. если сохраняется кратность элементарных делителей, соответствующих корню $\lambda_1(\tau)$.

Проиллюстрируем сказанное на простом примере. Пусть матрица $\Lambda_1(\tau)$ при всех $\tau \in [0,\ L]$ имеет следующий канонический вид:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(\tau) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1(\tau) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1(\tau) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1(\tau) \end{bmatrix}. \tag{18.8}$$

Тогда, согласно (18.6), матрица $B(\tau)$ будет везде на интервале $[0, L]$ эквивалентна матрице

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (18.9)$$

В этом случае при любом $\tau \in [0, L]$ ранг матрицы $B^3(\tau)$ будет равен единице.

Если же, например, при одном значении $\tau_1 \in [0, L]$ матрица $\Lambda_1(\tau_1)$ имеет каноническую форму (18.8), а при другом значении $\tau_2 \in [0, L]$ каноническая форма $\Lambda_1(\tau_2)$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(\tau_2) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1(\tau_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1(\tau_2) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1(\tau_2) \end{bmatrix}, \qquad (18.10)$$

то матрица $B^3(\tau_2)$ будет уже нулевого ранга. Следовательно, в этом втором случае не все вектор-решения однородной системы уравнений

$$B^3(\tau)x = 0$$

будут непрерывными, хотя бы одно из этих решений будет иметь разрыв в промежутке $\tau_1 < \tau < \tau_2$.

Таким образом, для того чтобы вектор-решение системы (18.7) было неограниченно дифференцируемым, оказываются существенными два условия: неограниченная дифференцируемость матрицы $A_0(\tau)$ и постоянство канонической структуры матрицы $A_0(\tau)$ на всем интервале $[0, L]$. Поэтому с самого начала мы предполагали эти условия выполненными.

При построении преобразующей матрицы $V_1(\tau)$, которая приводит матрицу $\Lambda_1(\tau)$ к канонической жордановой форме, возникает необходимость найти не сами решения однородной системы (18.7), а векторы, не принадлежащие к подпространству решений этой системы. Так как упомянутые вектор-решения неограниченно дифференцируемы, то в ортогональном дополнении к подпространству решений системы (18.7) можно выбрать базис, состоящий также из сколь угодно гладких вектор-функций. Применяя к векторам этого базиса линейное преобразование, задаваемое матрицей (18.6), мы по известным правилам [68] построим столбцы матрицы $V_1(\tau)$. Опишем вкратце этот процесс, а более подробные сведения даются в «Курсе высшей математики» [68].

Итак, будем находить столбцы матрицы $V_1(\tau)$, которая приводит матрицу $\Lambda_1(\tau)$ к канонической жордановой форме. Число линейно независимых векторов, которые не удовлетворяют системе (18.7), очевидно, равно рангу матрицы $B^{l-1}(\tau)$. Обозначим это число через r_1. Тогда r_1 линейно независимых векторов в подпространстве, ортогональном подпространству решений системы (18.7), можно взять в качестве столбцов матрицы $V_1(\tau)$. Применим к каждому из этих векторов преобразование, задаваемое матрицей $B(\tau)$. Тогда получим снова r_1 векторов, часть из которых, возможно, будет равна тождественному нулю, а остальные будут отличны от нуля. К этим последним снова применяем матрицу $B(\tau)$ и т. д. до тех пор, пока все векторы после ряда последовательных применений матрицы $B(\tau)$ не перейдут в тождественные нули.

Таким образом, каждый из r_1 первоначально выбранных линейно независимых векторов $x^{(k)}(\tau)$ ($k = 1, 2, \ldots, r_1$) вместе с векторами $B(\tau)x^{(k)}(\tau)$, $B^2(\tau)x^{(k)}(\tau)$, ... ($k=1, 2, \ldots, r_1$) образует серию ортов в ортогональном дополнении к подпространству решений системы (18.7). Построенные таким образом серии линейно независимых векторов (их будет всего n_1, где n_1 — порядок матрицы $\Lambda_1(\tau)$) образуют n_1 столбцов искомой матрицы $V_1(\tau)$.

Таким же способом строим неособенные квадратные матрицы $V_2(\tau), V_3(\tau), \ldots, V_p(\tau)$ размерности $n_2, n_3, \ldots, n_p$ соответственно, которые приводят к нормальной жордановой форме матрицы $\Lambda_2(\tau)$, $\Lambda_3(\tau), \ldots, \Lambda_p(\tau)$.

Построим далее квадратную квазидиагональную матрицу $\widetilde{V}(\tau)$ порядка $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_p$, диагональными клетками которой являются матрицы $V_1(\tau)$, $V_2(\tau), \ldots, V_p(\tau)$. Тогда полученная матрица $\widetilde{V}(\tau) = [V_1(\tau), V_2(\tau), \ldots, V_p(\tau)]$ приводит квазидиагональную матрицу $\Lambda(\tau) = [\Lambda_1(\tau), \Lambda_2(\tau), \ldots, \Lambda_p(\tau)]$ к нормальной форме Жордана, т. е. имеет место равенство

$$\widetilde{V}^{-1}(\tau)\,\Lambda(\tau)\widetilde{V}(\tau) = W_0(\tau),$$

где $W_0(\tau)$ имеет вид (18.3).

Описанный процесс построения $V_1(\tau)$, $V_2(\tau)$, ..., $V_p(\tau)$ показывает, что матрица $\widetilde{V}(\tau)$, а следовательно, и матрица $V(\tau) = T(\tau)\widetilde{V}(\tau)$, приводящая матрицу $A_0(\tau)$ к жордановой форме (18.3), дифференцируема столько же раз по τ, сколько и матрица $A_0(\tau)$, что и требовалось.

2. Будем, как и в § 13, искать решение системы (18.1) в виде

$$x = U(\tau, \varepsilon)\,\zeta, \tag{18.11}$$

где $\zeta(t, \varepsilon)$—n-мерный вектор, определяемый из системы уравнений

$$\frac{d\zeta}{dt} = \mathfrak{A}(\tau, \varepsilon)\,\zeta. \tag{18.12}$$

Здесь $U(\tau, \varepsilon)$ и $\mathfrak{A}(\tau, \varepsilon)$—матрицы n-го порядка, бесконечно дифференцируемые по τ и представимые в виде формальных рядов

$$U(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s U_s(\tau), \tag{18.13}$$

$$\mathfrak{A}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \mathfrak{A}_s(\tau). \tag{18.14}$$

В соответствии со структурой $W_0(\tau)$ ищем матрицу $\mathfrak{A}(\tau, \varepsilon)$ в виде

$$\mathfrak{A}(\tau, \varepsilon) = \begin{bmatrix} \mathfrak{A}_1(\tau, \varepsilon) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathfrak{A}_2(\tau, \varepsilon) & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \mathfrak{A}_p(\tau, \varepsilon) \end{bmatrix}, \tag{18.15}$$

где $\mathfrak{A}_j(\tau, \varepsilon)$ ($j = 1, 2, \ldots, p$)—квадратные матрицы того же порядка, что и матрицы $W_{j0}(\tau, \varepsilon)$ соответственно, причем для $\mathfrak{A}_j(\tau, \varepsilon)$ ($j = 1, 2, \ldots, p$) имеют место разложения вида (18.14).

Как и в § 13, для определения матриц $U(\tau, \varepsilon)$, $\mathfrak{A}(\tau, \varepsilon)$ получаем матричное уравнение

$$\varepsilon \frac{dU(\tau, \varepsilon)}{d\tau} + U(\tau, \varepsilon)\mathfrak{A}(\tau, \varepsilon) - A(\tau, \varepsilon)U(\tau, \varepsilon) = 0. \tag{18.16}$$

Введем в рассмотрение матрицы $Q(\tau, \varepsilon)$ и $W(\tau, \varepsilon)$, определяемые равенствами

$$Q(\tau, \varepsilon) = V^{-1}(\tau)U(\tau, \varepsilon), \tag{18.17}$$

$$W(\tau, \varepsilon) = V^{-1}(\tau)A(\tau, \varepsilon)V(\tau). \tag{18.18}$$

Так как, по предположению, матрицы $A(\tau, \varepsilon)$ и $U(\tau, \varepsilon)$ представимы в виде рядов по степеням ε, то этим же свойством, очевидно, обладают и матрицы $Q(\tau, \varepsilon)$ и $W(\tau, \varepsilon)$:

$$Q(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s Q_s(\tau), \tag{18.19}$$

$$W(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s W_s(\tau). \tag{18.20}$$

Умножая (18.16) слева на $V^{-1}(\tau)$, получим матричное уравнение

$$\varepsilon V^{-1}(\tau)\frac{dV}{d\tau}Q(\tau, \varepsilon) + \varepsilon \frac{dQ(\tau, \varepsilon)}{d\tau} + Q(\tau, \varepsilon)\mathfrak{A}(\tau, \varepsilon) - W(\tau, \varepsilon)Q(\tau, \varepsilon) = 0, \tag{18.21}$$

из которого способом, изложенным в § 13, определяем члены разложений искомых матриц $Q(\tau, \varepsilon)$ и $\mathfrak{A}(\tau, \varepsilon)$.

3. В дальнейшем изложении нам существенно понадобятся формулы (13.12) — (13.14), которые можно также получить из (18.21).

Разобьем каждую из матриц $Q_s(\tau)$ и $F_s(\tau)$, входящих в уравнение (13.14), на клетки таким образом, чтобы по главной диагонали стояли квадратные клетки порядков $n_1, n_2, \ldots, n_p$ $\left(\sum_{j=1}^{p} n_j = n\right)$, равных порядкам соответствующих диагональных клеток матриц $\mathfrak{A}_s(\tau)$ $(s = 1, 2, \ldots)$.

В результате получим клеточные матрицы несколько более общего по сравнению с (13.16) вида (в нашем случае матрицы будут состоять из p^2 клеток). Заметим, что матрицы $\mathfrak{A}_s(\tau)$ $(s = 1, 2, \ldots)$, а также $W_0(\tau)$, как это видно из (18.15) и (18.3), уже имеют требуемую клеточную структуру.

После этого мы можем полностью провести все рассуждения § 13, касающиеся решения матричного уравнения (13.14), т. е. нахождения матриц $Q_s(\tau)$ и $\mathfrak{A}_s(\tau)$ $(s = 1, 2, \ldots)$.

Нам, однако, будет удобнее в отличие от (13.18) здесь положить

$$Q_{iis}(\tau) \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, p;\ s = 1, 2, \ldots). \tag{18.22}$$

Это вполне допустимо, так как в определении диагональных клеток матриц $Q_s(\tau)$ $(s = 1, 2, \ldots)$, как следует из системы (13.17), имеется некоторый произвол.

Тогда остальные клетки $Q_{ijs}(\tau)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, p,\ i \neq j;\ s = 1, 2, \ldots)$, а также $\mathfrak{A}_s(\tau)$ $(s = 1, 2, \ldots)$ однозначно определяются из матричных уравнений (13.14).

Таким образом, согласно (18.19), мы получим преобразующую матрицу $Q(\tau, \varepsilon)$ в виде формального матричного ряда, асимптотическая сходимость которого будет доказана ниже.

4. В дальнейшем нам понадобятся некоторые предварительные построения.

Учитывая (18.19), (18.20), а также (13.12) и (13.13), представим каждую из матриц $W(\tau, \varepsilon)$, $\mathfrak{A}(\tau, \varepsilon)$ и $Q(\tau, \varepsilon)$ в виде двух слагаемых

$$W(\tau, \varepsilon) = W_0(\tau) + \widetilde{W}(\tau, \varepsilon), \tag{18.23}$$

$$\mathfrak{A}(\tau, \varepsilon) = W_0(\tau) + \widetilde{\mathfrak{A}}(\tau, \varepsilon), \tag{18.24}$$

$$Q(\tau, \varepsilon) = E + \widetilde{Q}(\tau, \varepsilon), \tag{18.25}$$

где

$$\widetilde{W}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s W_s(\tau), \tag{18.26}$$

$$\widetilde{\mathfrak{A}}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \mathfrak{A}_s(\tau), \tag{18.27}$$

$$\widetilde{Q}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s Q_s(\tau). \tag{18.28}$$

Запишем $\widetilde{W}(\tau, \varepsilon)$ в виде клеточной матрицы, у которой по главной диагонали стоят матрицы $\widetilde{W}_{ii}(\tau, \varepsilon)$ порядка n_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$:

$$\widetilde{W}(\tau, \varepsilon) = \begin{bmatrix} \widetilde{W}_{11}(\tau, \varepsilon) & \widetilde{W}_{12}(\tau, \varepsilon) & \ldots & \widetilde{W}_{1p}(\tau, \varepsilon) \\ \widetilde{W}_{21}(\tau, \varepsilon) & \widetilde{W}_{22}(\tau, \varepsilon) & \ldots & \widetilde{W}_{2p}(\tau, \varepsilon) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \widetilde{W}_{p1}(\tau, \varepsilon) & \widetilde{W}_{p2}(\tau, \varepsilon) & \ldots & \widetilde{W}_{pp}(\tau, \varepsilon) \end{bmatrix}. \tag{18.29}$$

Согласно принятому выше условию (18.22), которому должны удовлетворять матрицы $Q_s(\tau)$ $(s = 1, 2, \ldots)$, матрица $\widetilde{Q}(\tau, \varepsilon)$ может быть следующим образом разбита на клетки:

$$\widetilde{Q}(\tau, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{Q}_{12}(\tau, \varepsilon) & \ldots & \widetilde{Q}_{1p}(\tau, \varepsilon) \\ \widetilde{Q}_{21}(\tau, \varepsilon) & 0 & \ldots & \widetilde{Q}_{2p}(\tau, \varepsilon) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \widetilde{Q}_{p1}(\tau, \varepsilon) & \widetilde{Q}_{p2}(\tau, \varepsilon) & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \tag{18.30}$$

где нули на главной диагонали означают нулевые матрицы порядка n_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$.

Матрица $V^{-1}(\tau)\dfrac{dV(\tau)}{d\tau}$ также может быть представлена в виде клеточной матрицы по аналогии с (18.29) и (18.30). Ее клетки будем обозначать

$$\left(V^{-1}(\tau)\frac{dV(\tau)}{d\tau}\right)_{jk} \quad (j, k = 1, 2, \ldots, p). \tag{18.31}$$

Принимая во внимание равенства (18.23)—(18.25), запишем матричное уравнение (18.21) в несколько иной форме

$$\varepsilon V^{-1}(\tau)\frac{dV(\tau)}{d\tau}[E + \widetilde{Q}(\tau, \varepsilon)] + \varepsilon\frac{d\widetilde{Q}(\tau, \varepsilon)}{d\tau} +$$

$$+[E+\widetilde{Q}(\tau,\varepsilon)][W_0(\tau)+\widetilde{\mathfrak{A}}(\tau,\varepsilon)]-[W_0(\tau)+\widetilde{W}(\tau,\varepsilon)][E+\widetilde{Q}(\tau,\varepsilon)]=0. \tag{18.32}$$

Все матрицы, входящие в уравнение (18.32), разбиты одинаковым образом на p^2 клеток, поэтому в (18.32) можно выполнить умножение клеточных матриц. Записывая результат такого перемножения для диагональных и недиагональных клеток, получим следующие соотношения:

$$\widetilde{\mathfrak{A}}_j(\tau,\varepsilon)=\widetilde{W}_{jj}(\tau,\varepsilon)+\sum_{k=1}^{p}\widetilde{W}_{jk}(\tau,\varepsilon)\widetilde{Q}_{kj}(\tau,\varepsilon)-$$

$$-\varepsilon\left(V^{-1}(\tau)\frac{dV(\tau)}{d\tau}\right)_{jj}-\varepsilon\sum_{k=1}^{p}\left(V^{-1}(\tau)\frac{dV(\tau)}{d\tau}\right)_{jk}\widetilde{Q}_{kj}(\tau,\varepsilon),\ j=1,2,\ldots,p,$$

и (18.33)

$$\varepsilon\frac{d\widetilde{Q}_{jk}(\tau,\varepsilon)}{d\tau}=W_{j0}(\tau)\widetilde{Q}_{jk}(\tau,\varepsilon)-\widetilde{Q}_{jk}(\tau,\varepsilon)W_{k0}(\tau)+$$

$$+\widetilde{W}_{jk}(\tau,\varepsilon)-\widetilde{Q}_{jk}(\tau,\varepsilon)\widetilde{\mathfrak{A}}_k(\tau,\varepsilon)+\sum_{l=1}^{p}W_{jl}(\tau,\varepsilon)\widetilde{Q}_{lk}(\tau,\varepsilon)-$$

$$-\varepsilon\left(V^{-1}(\tau)\frac{dV(\tau)}{d\tau}\right)_{jk}-\varepsilon\sum_{l=1}^{p}\left(V^{-1}(\tau)\frac{dV(\tau)}{d\tau}\right)_{jk}\widetilde{Q}_{lk}(\tau,\varepsilon) \tag{18.34}$$

при $j\neq k$ $(j,k=1,2,\ldots,p)$.

Подставив значение $\widetilde{\mathfrak{A}}_k(\tau,\varepsilon)$ из соотношения (18.33) в (18.34), получим

$$\varepsilon\frac{d\widetilde{Q}_{jk}(\tau,\varepsilon)}{d\tau}=W_{j0}(\tau)\widetilde{Q}_{jk}(\tau,\varepsilon)-\widetilde{Q}_{jk}(\tau,\varepsilon)W_{k0}(\tau)+$$

$$+\sum_{l=1}^{p}W_{jl}(\tau,\varepsilon)\widetilde{Q}_{lk}(\tau,\varepsilon)-\varepsilon\sum_{l=1}^{p}\left(V^{-1}(\tau)\frac{dV(\tau)}{d\tau}\right)_{jl}\widetilde{Q}_{lk}(\tau,\varepsilon)+$$

$$+\widetilde{W}_{jk}(\tau,\varepsilon)-\varepsilon\left(V^{-1}(\tau)\frac{dV(\tau)}{d\tau}\right)_{jk}-\widetilde{Q}_{jk}(\tau,\varepsilon)\widetilde{W}_{kk}(\tau,\varepsilon)-$$

$$-\widetilde{Q}_{jk}(\tau,\varepsilon)\sum_{l=1}^{p}\widetilde{W}_{kl}(\tau,\varepsilon)\widetilde{Q}_{lk}(\tau,\varepsilon)+ \tag{18.35}$$

$$+\varepsilon\tilde{Q}_{jk}(\tau,\varepsilon)\sum_{l=1}^{p}\left(V^{-1}(\tau)\frac{dV(\tau)}{d\tau}\right)_{kl}\tilde{Q}_{lk}(\tau,\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\tilde{Q}_{jk}(\tau,\varepsilon)\left(V^{-1}(\tau)\frac{dV(\tau)}{d\tau}\right)_{kk}\quad (j\neq k;\ j,k=1,2,\ldots,p).$$

Таким образом, мы получили систему (18.35) обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, которым должны удовлетворять элементы матриц $\tilde{Q}_{jk}(\tau,\varepsilon)$ $(j\neq k;\ j,k=1,2,\ldots,p)$. Если записать систему (18.35) в развернутом виде, то легко видеть, что порядок этой системы будет равен $n^2-\sum_{j=1}^{p}n_j^2$; кроме того, правые части системы будут многочленами второй степени относительно неизвестных функций (элементов матрицы $\tilde{Q}(\tau,\varepsilon)$) с коэффициентами, зависящими от τ и ε. Так как эти коэффициенты построены из элементов матриц $\tilde{W}(\tau,\varepsilon)$ и $V^{-1}(\tau)\dfrac{dV(\tau)}{d\tau}$ (см. (18.35)), то они могут быть разложены в ряды по степеням ε, подобно элементам матрицы $\tilde{W}(\tau,\varepsilon)$.

5. Системе (18.35) удовлетворяет, очевидно, формальное решение

$$\tilde{Q}_{jk}(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s\tilde{Q}_{jks}(\tau)\quad (j\neq k;\ j,k=1,2,\ldots p),\tag{18.36}$$

получаемое с помощью рекуррентного процесса (13.14), описанного в § 13, так как при выводе системы (18.35) мы исходили из уравнений (13.14). Теперь мы покажем, что это формальное решение является асимптотическим разложением некоторого точного решения системы дифференциальных уравнений (18.35). Этим самым будет доказана асимптотическая сходимость формального ряда (18.36) к некоторой «точной» преобразующей матрице $Q(\tau,\varepsilon)$.

Прежде чем сформулировать основную теорему настоящего параграфа, касающуюся асимптотической сходимости ряда (18.36), рассмотрим более детально систему (18.35). Будем в дальнейшем для краткости обозначать неизвестные элементы матриц $\tilde{Q}_{jk}(\tau,\varepsilon)$ $(j\neq k;\ j,k=1,2,\ldots,p)$ через $u_1,u_2,\ldots,u_m$. Выше было отмечено, что порядок системы (18.35) равен

$$m=n^2-\sum_{j=1}^{p}n_j^2.\tag{18.37}$$

Первые два матричных слагаемых в правых частях (18.35) играют в некотором смысле главную роль, так как они линейны относительно $u_1, u_2, \ldots, u_m$ и коэффициенты при неизвестных функциях в этих слагаемых не зависят от ε. Остальные же слагаемые (как линейные, так и нелинейные) в правых частях уравнений (18.35) имеют порядок малости ε. Действительно, каждое из этих слагаемых, согласно (18.26) и (18.35), имеет вид

$$\varepsilon F_k(\tau, \varepsilon) u_k \text{ или } \varepsilon G_{jk}(\tau, \varepsilon) u_j u_k \qquad (j, k = 1, \ldots, p),$$

где $F_k(\tau, \varepsilon)$ и $G_{jk}(\tau, \varepsilon)$ — некоторые функции от τ и ε, бесконечно дифференцируемые по τ на отрезке $[0, L]$, которые мажорируются постоянными, не зависящими от ε.

Назовем главной линейной частью системы (18.35) выражения

$$W_{j0}(\tau)\tilde{Q}_{jk}(\tau, \varepsilon) - \tilde{Q}_{jk}(\tau, \varepsilon) W_{k0}(\tau) \tag{18.38}$$
$$(j \neq k;\ j, k = 1, 2, \ldots, p).$$

Для простоты изложения будем иллюстрировать преобразования системы (18.35) на примере. При этом все рассуждения, относящиеся к примеру, непосредственно переносятся на общий случай.

6. Итак, пусть наша исходная система дифференциальных уравнений (18.1) имеет порядок $n = 5$, а соответствующая ей матрица (18.3) состоит из двух жордановых клеток:

$$W_{10} = \begin{bmatrix} \lambda_1(\tau) & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1(\tau) & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1(\tau) \end{bmatrix}, \qquad W_{20}(\tau) = \begin{bmatrix} \lambda_2(\tau) & 1 \\ 0 & \lambda_2(\tau) \end{bmatrix}. \tag{18.39}$$

Для этого случая неизвестные элементы ($\tilde{Q}_{12}$ и $\tilde{Q}_{21}$) матрицы $\tilde{Q}(\tau, \varepsilon)$ в системе (18.35) будут иметь вид

$$\tilde{Q}_{12}(\tau, \varepsilon) = \begin{bmatrix} u_1 & u_4 \\ u_2 & u_5 \\ u_3 & u_6 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{Q}_{21}(\tau, \varepsilon) = \begin{bmatrix} u_7 & u_8 & u_9 \\ u_{10} & u_{11} & u_{12} \end{bmatrix}. \tag{18.40}$$

Лемма III.2. *С помощью линейной замены переменных с постоянными коэффициентами система дифференциальных уравнений (18.35) может быть приведена к виду*

$$\varepsilon \frac{dv_j}{d\tau} = f_j(v_1, v_2, \ldots, v_m; \tau, \varepsilon) \tag{18.41}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, m),$$

где $f_j(v_1, v_2, \ldots, v_m; \tau, \varepsilon)$ — полиномы второй степени относительно $v_1, v_2, \ldots, v_m$ с коэффициентами, зависящими от τ и ε, разложимыми в ряды по степеням ε и неограниченно дифферен-

цируемыми по τ. При этом матрица главной линейной части системы (18.41) имеет вид

$$P(\tau)=\begin{cases}\mu_j(\tau) & (j=k)\\ \delta_j & (j=k-1)\\ 0 & (j\neq k,\ k-1)\end{cases}\qquad(18.42)$$

$$(j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

где

$$\mu_j(\tau)=\lambda_r(\tau)-\lambda_s(\tau)\qquad(r\neq s;\ r,\ s=1,\ 2,\ \ldots,\ p;\ j=1,\ \ldots,\ m),$$

а числа δ_j $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ *равны либо нулю, либо числу* δ, *которое мы можем выбрать как угодно малым. Кроме того, если* $\delta_j=\delta$, *то* $\mu_{j-1}(\tau)=\mu_j(\tau)$.

Доказательство будем сначала проводить для матриц (18.39) — (18.40), после чего оно легко переносится на общий случай.

Применительно к нашему примеру главная линейная часть (18.38) системы (18.35) будет состоять из матриц

$$W_{10}(\tau)\tilde{Q}_{12}(\tau,\ \varepsilon)-\tilde{Q}_{12}(\tau,\ \varepsilon)\,W_{20}(\tau)\qquad(18.43)$$

и

$$W_{20}(\tau)\tilde{Q}_{21}(\tau,\ \varepsilon)-\tilde{Q}_{21}(\tau,\ \varepsilon)\,W_{10}(\tau).\qquad(18.44)$$

Выполнив указанные здесь действия с матрицами (18.39) и (18.40), найдем, что система (18.35) в этом случае примет вид

$$\varepsilon\frac{du}{d\tau}=R(\tau)\,u+\ldots,\qquad(18.45)$$

где многоточием обозначены слагаемые, пропорциональные ε, ε^2 и т. д., $u=\{u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{12}\}$, а матрица главной линейной части имеет вид

$$R(\tau)=\begin{bmatrix}R_1(\tau) & 0\\ 0 & R_2(\tau)\end{bmatrix},\qquad(18.46)$$

где, в свою очередь,

$$R_1=\begin{bmatrix}\mu_1(\tau) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mu_1(\tau) & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mu_1(\tau) & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & \mu_1(\tau) & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & \mu_1(\tau) & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \mu_1(\tau)\end{bmatrix},\qquad(18.47)$$

$$R_2(\tau)=\begin{bmatrix} \mu_2(\tau) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \mu_2(\tau) & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \mu_2(\tau) & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2(\tau) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \mu_2(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \mu_2(\tau) \end{bmatrix}, \quad (18.48)$$

$$\mu_1(\tau)=\lambda_1(\tau)-\lambda_2(\tau), \qquad \mu_2(\tau)=\lambda_2(\tau)-\lambda_1(\tau), \qquad (18.49)$$

нули на второй диагонали в матрице (18.46) означают нулевые матрицы шестого порядка.

Матрицы (18.47) и (18.48) имеют весьма простую структуру. Непосредственно видно, что $R_1(\tau)$ обладает собственным значением $\mu_1(\tau)$ кратности шесть, а $R_2(\tau)$ — собственным значением $\mu_2(\tau)$ той же кратности.

Тот факт, что собственные значения матриц $R_1(\tau)$ и $R_2(\tau)$ стоят на главной диагонали, а недиагональные элементы не зависят от τ, имеет место также и в общем случае системы (18.35). Это обстоятельство как раз и позволяет привести систему (18.35) с помощью линейной замены переменных с постоянными коэффициентами к виду (18.41) с матрицей $P(\tau)$ главной линейной части (см. (18.42)). Покажем это на нашем примере. Произведем в системе (18.45) линейную замену переменных:

$$u=S\tilde{u}, \qquad (18.50)$$

где постоянная матрица S очень просто устроена:

$$S=\begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}, \qquad (18.51)$$

$$S_1=\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (18.52)$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (18.53)$$

После такой замены система (18.45) будет выглядеть так:

$$\varepsilon \frac{d\tilde{u}}{d\tau} = S^{-1}R(\tau)S\tilde{u} + \ldots . \qquad (18.54)$$

Предоставляем читателю убедиться в том, что матрица $S^{-1}R(\tau)S$ имеет каноническую форму Жордана.

Совершим, наконец, в системе (18.54) линейное преобразование

$$\tilde{u} = Dv, \qquad v = (\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}) \qquad (18.55)$$

с матрицей

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_1 \end{bmatrix}; \qquad (18.56)$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta^5 \end{bmatrix}, \qquad (18.57)$$

где $\delta \neq 0$ — некоторое число. Тогда система (18.54) перейдет в такую:

$$\varepsilon \frac{dv}{d\tau} = D^{-1}S^{-1}R(\tau)SDv + \ldots . \qquad (18.58)$$

Введем обозначение

$$D^{-1}S^{-1}R(\tau)SD = P(\tau). \qquad (18.59)$$

Таким образом, с помощью линейной замены переменных, задаваемой постоянной матрицей SD (см. формулы (18.51) — (18.57)), система дифференциальных уравнений (18.35), соответствующая матрицам (18.39) и (18.40), преобразуется в систему

$$\varepsilon\frac{dv}{d\tau}=P(\tau)v+\ldots \tag{18.60}$$

с матрицей главной линейной части вида

$$P(\tau)=\begin{bmatrix}P_1(\tau) & 0\\ 0 & P_2(\tau)\end{bmatrix}, \tag{18.61}$$

где

$$P_1(\tau)=\begin{bmatrix}\mu_1(\tau) & \delta & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mu_1(\tau) & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mu_1(\tau) & \delta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mu_1(\tau) & \delta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_1(\tau) & \delta\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_1(\tau)\end{bmatrix}. \tag{18.62}$$

Матрица $P_2(\tau)$ отличается от $P_1(\tau)$ только главной диагональю, где у нее вместо $\mu_1(\tau)$ стоят $\mu_2(\tau)$. Нули в правой части (18.61), как и в формулах (18.51) и (18.46), означают нулевые матрицы соответствующего порядка.

Сделанное выше замечание об общем характере проведенных здесь линейных преобразований, которые непосредственно переносятся на систему (18.35), позволяет считать лемму III.2 доказанной.

Подчеркнем, что собственные значения $\mu_j(\tau)$ матрицы главной линейной части системы (18.35) равны всевозможным разностям (18.43) попарно различных собственных значений $\lambda_s(\tau)$ ($s = 1, 2, \ldots, p$), поэтому ни в одной точке $\tau \in [0, L]$ значения $\mu_j(\tau)$ ($j = 1, 2, \ldots, m$) не обращаются в нуль.

Заметим также, что система (18.35) эквивалентна системе (18.41) в том смысле, что любому решению системы (18.35) соответствует некоторое решение системы (18.41) и наоборот, и зная, например, решение системы (18.35), можно указать соответствующее ему решение системы (18.41). В частности, формальному решению (18.36) системы (18.35) соответствует некоторое формальное решение системы (18.41).

Поэтому, если мы докажем асимптотическую сходимость формального решения системы (18.41), соответствующего формальному решению (18.36) системы (18.35), то это будет равносильно доказательству асимптотической сходимости формального решения (18.36).

К доказательству такого утверждения мы сейчас и перейдем.

7. **Теорема III.4.** *Пусть задана система дифференциальных уравнений (18.41), удовлетворяющая условиям леммы леммы III.2, и*

пусть

$$\mu_j(\tau) \neq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant L. \tag{18.63}$$

Предположим, что

$$v_j(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} p_{js}(\tau)\,\varepsilon^s \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{18.64}$$

есть формальное решение системы (18.41) с коэффициентами $p_{js}(\tau)$ $(j = 1, 2, \ldots, m;\ s = 1, 2, \ldots)$, *неограниченно дифференцируемыми по* τ.

Тогда найдется такое $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0$, *что в области*

$$0 \leqslant \tau \leqslant L, \qquad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1 \qquad (\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0) \tag{18.65}$$

существует единственное решение системы (18.41)

$$v_j = p_j(\tau, \varepsilon) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{18.66}$$

по крайней мере непрерывное по τ, *а ряды (18.64) являются асимптотическими разложениями решения (18.66) в области (18.65).*

Прежде чем переходить к доказательству данной теоремы, заметим, что $\mu_j(\tau)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ — вообще говоря, комплексно-значные функции от τ, и мы можем подобрать такие комплексные константы $c_j = c_j' + ic_j''$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, что величины

$$\sup_{\tau \in [0, L_1]} |\mu_j(\tau) - c_j| \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{18.67}$$

будут сколь угодно малыми, если область аппроксимации

$$0 \leqslant \tau \leqslant L_1 \qquad (L_1 \leqslant L) \tag{18.68}$$

достаточно мала.

Более того, мы можем приблизить на $[0, L]$ функции $\mu_j(\tau)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ некоторыми кусочно-постоянными функциями вида

$$C_j(\tau) = \begin{cases} c_{j0} = c_j, & 0 \leqslant \tau \leqslant L_1, \\ c_{j1}, & L_1 < \tau \leqslant L_2, \\ \cdots\cdots\cdots & \\ c_{j,q-1}, & L_{q-1} < \tau \leqslant L_q = L \\ & (j = 1, 2, \ldots, m). \end{cases} \tag{18.69}$$

Такое разбиение интервала $[0, L]$ и такая аппроксимация функций $\mu_j(\tau)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ кусочно-постоянными функциями (18.69) вполне осуществимы для любой непрерывной функции, но, так как $\mu_j(\tau)$ не только непрерывны, но и неограниченно дифференцируемы, то их заведомо можно весьма хорошо аппроксимировать кусочно постоянными функциями.

Рассмотрим сначала функции $\mu_j(\tau)$ ($j = 1, 2, \ldots, m$) на первом интервале аппроксимации $0 \leqslant \tau \leqslant L_1$. Все рассуждения с небольшими изменениями можно будет затем распространить на последующие интервалы $[L_i, L_{i+1}]$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, q-1$), составляющие в целом интервал $[0, L]$.

Без ограничения общности можно предположить, что первые m' ($m' < m$) функций $\mu_j(\tau)$ ($j = 1, 2, \ldots, m'$) имеют на интервале $[0, L_1]$ неотрицательную вещественную часть, а оставшиеся функции $\mu_j(\tau)$ ($j = m'+1, m'+2, \ldots, m$) обладают отрицательной вещественной частью. Кроме того, при выборе интервала $[0, L_1]$ поставим условие, чтобы вещественная часть каждой из функций $\mu_j(\tau)$ ($j = 1, 2, \ldots, m$) внутри интервала $[0, L_1]$ не меняла знак. В связи с этим следует выбирать точки деления $L_1, L_2, \ldots, L_{q-1}, L$ в формуле (18.69) так, чтобы те значения $\tau \in [0, L]$, при которых какая-либо из функций $\mu_j(\tau)$ ($j = 1, 2, \ldots, m$) меняет знак вещественной части, вошли во множество точек разбиения L_i ($i = 1, 2, \ldots, p$). Таким образом, число p будет всегда больше или равно, чем число перемен знака функций $\operatorname{Re}\mu_j(\tau)$ ($j = 1, 2, \ldots, m$).

Заметим, что среди первых m' функций $\mu_j(\tau)$ ($j = 1, 2, \ldots, m'$) могут быть и такие, для которых $\operatorname{Re}\mu_j(\tau) \equiv 0$ ($j = 1, 2, \ldots, l, l \leqslant m'$).

Лемма III. 3. *Если τ и ε изменяются в области*

$$0 \leqslant \tau \leqslant L_1, \qquad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \qquad (L_1 \leqslant L), \tag{18.70}$$

то всегда найдется такая положительная постоянная c, не зависящая от ε, что будут иметь место неравенства

$$\left| \int_{\tau_j}^{\tau} \exp\left(-\frac{c_j(\tau-\tau_j)}{\varepsilon}\right) d\tau \right| \leqslant c\varepsilon \left| \exp\left(-\frac{c_j(\tau-\tau_j)}{\varepsilon}\right) \right|, \tag{18.71}$$

где

$$\tau_j = \begin{cases} L_1 \text{ при } j = 1, 2, \ldots, m'; \ c_j' \geqslant 0; \\ 0 \text{ при } j = m'+1, m'+2, \ldots, m; \ c_j' < 0. \end{cases} \tag{18.72}$$

Доказательство леммы становится очевидным на основании такой последовательности неравенств:

$$\left| \int_{\tau_j}^{\tau} \exp\left(-\frac{c_j(\tau-\tau_j)}{\varepsilon}\right) d\tau \right| = \varepsilon \left| \frac{1}{c_j}\left[1 - \exp\left(-\frac{c_j(\tau-\tau_j)}{\varepsilon}\right)\right] \right| =$$

$$= \varepsilon \left| \frac{1}{c_j}\left[\exp\left(\frac{c_j(\tau-\tau_j)}{\varepsilon}\right) - 1\right] \right| \left| \exp\left(-\frac{c_j(\tau-\tau_j)}{\varepsilon}\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant c\varepsilon \left| \exp\left(-\frac{c_j(\tau-\tau_j)}{\varepsilon}\right) \right| \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \qquad (18.73)$$

где

$$c = \max_{j=1,\ldots,m} \left\{ \frac{1}{|c_j|} \sup_{\substack{\tau\in[0, L_2]\\ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0}} \left| \exp\left(\frac{c_j(\tau-\tau_j)}{\varepsilon}\right) - 1 \right| \right\} = \max_{j=1,\ldots,m} \left\{ \frac{2}{|c_j|} \right\}. \qquad (18.74)$$

При доказательстве теоремы нас будут интересовать линейные относительно v части функций $f_j(v; \tau, \varepsilon)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ в системе (18.41):

$$a_j(\tau, \varepsilon) + \sum_{k=1}^{m} a_{jk}(\tau, \varepsilon) v_k \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \qquad (18.75)$$

По условию теоремы коэффициенты при v_j $(j = 1, \ldots, m)$ разлагаются в асимптотические ряды:

$$a_{jk}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} a_{jks}(\tau) \varepsilon^s \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \qquad (18.76)$$

Тогда первые члены разложений (18.76), не содержащие ε, образуют матрицу $P(\tau) = [a_{jk0}(\tau)]_{j,k=1}^{j,k=m}$, имеющую вид (18.42).

8. Доказательство теоремы III.4. Произведем в системе (18.41) замену переменных

$$v_j = p_j^{(N)}(\tau, \varepsilon) + y_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \qquad (18.77)$$

где

$$p_j^{(N)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{N-1} p_{js}(\tau) \varepsilon^s \qquad (18.78)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m;\ N > 1),$$

т. е. частичная сумма ряда (18.64).

В результате этой замены система (18.41) примет вид

$$\frac{dy_j}{dt} = g_j^{(N)}(y_1, y_2, \ldots, y_m; \tau, \varepsilon) \qquad (18.79)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m),$$

где правые части по-прежнему являются полиномами от y_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ второй степени с неограниченно дифференцируемыми по τ коэффициентами, которые раскладываются в асимптотические ряды по степеням параметра ε в области $0 \leqslant \tau \leqslant L$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

По аналогии с (18.75) линейные части $g_j^{(N)}(y;\ \tau,\ \varepsilon)$ имеют вид

$$b_j^{(N)}(\tau,\ \varepsilon)+\sum_{k=1}^{m} b_{jk}^{(N)}(\tau,\ \varepsilon)\, y_k \tag{18.80}$$

$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Кроме того, имеют место разложения коэффициентов

$$b_{jk}^{(N)}(\tau,\ \varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty} b_{jks}^{(N)}(\tau)\,\varepsilon^s \tag{18.81}$$

$$(j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Тогда непосредственной подстановкой (18.77) в (18.75) и (18.41) можно легко убедиться, что матрица коэффициентов главной линейной части системы (18.79) совпадает с (18.42), т. е.

$$b_{jk0}^{(N)}(\tau)=a_{jk0}(\tau)=\begin{cases}\mu_j(\tau) & (k=j),\\ \delta_j & (k=j+1),\\ 0 & (k\neq j,\ j+1).\end{cases} \tag{18.82}$$

С другой стороны, система (18.79) обладает формальным решением

$$y_j=\sum_{s=N}^{\infty} p_{js}(\tau)\,\varepsilon^s \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{18.83}$$

что следует из замены (18.77) и условий теоремы.

Поэтому разложения свободных членов $b_j^{(N)}(\tau,\ \varepsilon)$ $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ не содержат степеней ε ниже N, следовательно, можно найти такую константу B_N, что будут выполняться неравенства

$$|b_j^{(N)}(\tau,\ \varepsilon)|\leqslant B_N\varepsilon^N \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ m) \tag{18.84}$$

для $0\leqslant\tau\leqslant L$, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, причем B_N не зависит от ε. Обозначим

$$\|y\|=\max\{|y_1|,\ |y_2|,\ \ldots,\ |y_m|\}. \tag{18.85}$$

Заметим, что δ в (18.42) может быть выбрано сколь угодно малым. Тогда можно указать такие δ, $\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_0$ и $L_1\leqslant L$, что будут выполняться неравенства

$$|b_{jj}^{(N)}(\tau,\ \varepsilon)-c_j|\leqslant A_1 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{18.86}$$

$$|b_{jk}^{(N)}(\tau,\ \varepsilon)|\leqslant A_1 \qquad (j\neq k;\ j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{18.87}$$

если

$$0 \leqslant \tau \leqslant L_1, \qquad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{18.88}$$

Константу A_1 можно выбрать достаточно малой, если ε, δ и L_1 также будут достаточно малыми. К вопросу о выборе этих постоянных мы еще возвратимся.

Произведем замену переменных в системе (18.79), положив

$$y_j = z_j \exp\left[\frac{c_j(\tau - \tau_j)}{\varepsilon}\right] \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{18.89}$$

Тогда из системы (18.79) получим систему уравнений относительно z_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$:

$$\varepsilon \frac{dz_j}{d\tau} = g_j^{(N)}\left[z_1 \exp\left(\frac{c_1(\tau - \tau_1)}{\varepsilon}\right), \ldots, z_m \exp\left(\frac{c_m(\tau - \tau_m)}{\varepsilon}\right); \tau, \varepsilon\right] \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{c_j(\tau - \tau_j)}{\varepsilon}\right) - c_j z_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{18.90}$$

Для оценки правых частей системы (18.90) нам удобнее частично сохранить старые переменные y_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ в системе (18.90). Сравнивая (18.89) и (18.90), нетрудно видеть, что систему (18.90) можно записать в виде

$$\varepsilon \frac{dz_j}{d\tau} = \{g_j^{(N)}(y_1, \ldots, y_m; \tau, \varepsilon) - c_j y_j\} \exp\left(-\frac{c_j(\tau - \tau_j)}{\varepsilon}\right) \tag{18.91}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, m),$$

где τ_j выбраны, согласно (18.72).

Оценим в системе (18.91) выражения, стоящие в фигурных скобках.

Функции $g_j^{(N)}(y; \tau, \varepsilon)$ $(j = 1, \ldots, m)$ состоят из линейных слагаемых вида (18.80) и нелинейных частей, структуру которых можно уяснить, рассматривая правые части системы (18.35), откуда они получены после линейных замен переменных. Мы уже отмечали выше, что коэффициенты при нелинейных слагаемых в системе (18.35) имеют порядок малости ε. То же самое можно сказать о правых частях системы (18.79). Тогда, учитывая неравенства (18.84), (18.86) и (18.87), получим

$$|g_j^{(N)}(y; \tau, \varepsilon) - c_j y_j| \leqslant B_N \varepsilon^N + A_1 m \|y\| + \varepsilon H m^2 \|y\|^2 \tag{18.92}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, m),$$

где первое слагаемое в правой части соответствует оценке (18.84), второе слагаемое — оценкам (18.86) и (18.87), а через постоянную H оценен максимальный коэффициент при нелинейных (квадратичных относительно y) членах в системе (18.79). При достаточно малых ε и $\|y\|$ третье слагаемое в правой части неравенства (18.92) можно сделать как угодно малым. Запишем

$$A_1 m \|y\| + \varepsilon H m^2 \|y\|^2 = m \|y\| (A_1 + \varepsilon H m \|y\|) = Am \|y\|, \quad (18.93)$$

где

$$A = A_1 + \varepsilon H m \|y\|. \quad (18.94)$$

Следовательно,

$$|g_j^{(N)}(y; \tau, \varepsilon) - c_j y_j| \leqslant B_N \varepsilon^N + Am \|y\| \quad (18.95)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, m)$$

при

$$0 \leqslant \tau \leqslant L_1, \qquad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1.$$

Выберем L_1, δ и ε_1 достаточно малыми, чтобы выполнялось неравенство

$$Amc < 1, \quad (18.96)$$

где c определено по формуле (18.74). Неравенства (18.95) и (18.96) нам понадобятся в дальнейшем.

Пусть $\psi_j(\varepsilon)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ — некоторые функции от ε $(0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0)$, которые разлагаются в ряды по степеням ε:

$$\psi_j(\varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} p_{js}(\tau_j) \varepsilon^s \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \quad (18.97)$$

Положим

$$\psi_j^{(N)}(\varepsilon) = \psi_j(\varepsilon) - p_j^{(N)}(\tau_j, \varepsilon) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \quad (18.98)$$

где τ_j — константы, определяемые, согласно (18.72), а $p_j^{(N)}(\tau_j, \varepsilon)$ определены по (18.78).

Тогда имеют место неравенства

$$|\psi_j^{(N)}(\varepsilon)| \leqslant R_N \varepsilon^N \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$
$$(18.99)$$
$$|\psi_j^{(N)}(\varepsilon_2) - \psi_j^{(N)}(\varepsilon_1')| \leqslant k_N |\varepsilon_2 - \varepsilon_1'| \varepsilon^{N-1} \quad (\varepsilon_1', \varepsilon_2 \in [0, \varepsilon_1]),$$

которые вытекают из дифференцируемости $p_j(\tau, \varepsilon)$ $(j = 1, \ldots, m)$ по ε, причем R_N и k_N — константы, не зависящие от ε, общие для всех $j = 1, 2, \ldots, m$.

Докажем теперь существование и единственность решения

$$z_j = \psi_j^{(N)}(\tau, \varepsilon) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \quad (18.100)$$

системы (18.90), непрерывного по τ, удовлетворяющего условиям

$$\psi_j^{(N)}(\tau_j, \varepsilon) = \psi_j^{(N)}(\varepsilon) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{18.101}$$

и неравенствам

$$|\psi_j^{(N)}(\tau, \varepsilon)| \leqslant K_N \varepsilon^N \left| \exp\left(-\frac{c_j(\tau - \tau_j)}{\varepsilon}\right) \right| \tag{18.102}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m)$$

в области (18.88): $0 \leqslant \tau \leqslant L_1$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$. Постоянная K_N не зависит от ε и, как будет ниже показано, может быть определена следующим образом:

$$K_N = \frac{R_N + cB_N}{1 - Amc}. \tag{18.103}$$

Доказательство существования и единственности решения (18.100) системы (18.90), удовлетворяющего условиям (18.101) и (18.102), благодаря (18.89) равносильно доказательству существования и единственности решения системы (18.79), удовлетворяющего условиям

$$|y_j(\tau, \varepsilon)| \leqslant K_N \varepsilon^N \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{18.104}$$

и условиям, аналогичным (18.101). Если же принять во внимание формулы (18.77), (18.78) и (18.64), то станет понятно, что доказательство такого утверждения о решении (18.100) будет равносильно доказательству теоремы III.4 для области (18.88).

Доказательство сводится, по существу, к применению принципа неподвижной точки для банаховых пространств (принцип Шаудера [33]). Можно также сослаться на теорему аналогичного содержания, сформулированную для линейных топологических пространств в работе [135]. При этом мы будем пользоваться понятиями выпуклости и компактности применительно к множествам в банаховых (или в топологических) пространствах. Соответствующие определения и другие необходимые сведения читатель может найти, например, в книге Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова [33].

Продолжая доказательство теоремы III.4, рассмотрим множества Φ_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ функций $\varphi_j(\tau, \varepsilon)$, определенных в области (18.88), бесконечно дифференцируемых по τ, имеющих непрерывную производную по ε и удовлетворяющих в указанной области неравенствам

$$|\varphi_j(\tau, \varepsilon)| \leqslant K_N \varepsilon^N \left| \exp\left(-\frac{c_j(\tau - \tau_j)}{\varepsilon}\right) \right|, \tag{18.105}$$

$$\left|\varphi_j(\tau, \varepsilon_2)\exp\left(\frac{c_j(\tau-\tau_j)}{\varepsilon_2}\right)-\varphi_j(\tau, \varepsilon_1)\exp\left(\frac{c_j(\tau-\tau_j)}{\varepsilon_1}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant h_N \varepsilon^{N-2} |\varepsilon_2 - \varepsilon_1'|, \tag{18.106}$$

$$\left|\varphi_j(\tau_2, \varepsilon)\exp\left(\frac{c_j(\tau_2-\tau_j)}{\varepsilon}\right)-\varphi_j(\tau_1, \varepsilon)\exp\left(\frac{c_j(\tau-\tau_j)}{\varepsilon}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant M_N \varepsilon^{N-1} |\tau_2 - \tau_1| \tag{18.107}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m;\ \tau_1, \tau_2 \in [0, L_1],\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1),$$

где константа K_N была определена выше по формуле (18.103), а h_N и M_N — некоторые постоянные, не зависящие от ε. В частности, можно положить

$$M_N = R_N c^* + (1 + c^* c)(B_N + A_m K_N), \tag{18.108}$$

где

$$c^* = \max_{1 \leqslant j \leqslant m} |c_j|. \tag{18.109}$$

Каждому множеству Φ_j ($j = 1, 2, \ldots, m$) сопоставим множество F_j ($j = 1, 2, \ldots, m$) функций $f_j(\tau, \varepsilon)$, заданных в той же области (18.88) и связанных с функциями $\varphi_j \in \Phi_j$ соотношениями

$$f_j(\tau, \varepsilon) = \varphi_j(\tau, \varepsilon)\exp\left(\frac{c_j(\tau-\tau_j)}{\varepsilon}\right) \tag{18.110}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m).$$

Равенства (18.110), очевидно, соответствуют замене переменных (18.89) и устанавливают взаимно-однозначное соответствие между элементами множеств Φ_j и F_j ($j = 1, \ldots, m$).

Тогда из неравенств (18.105) — (18.107), согласно соотношению (18.110), непосредственно следуют неравенства для функций $f_j(\tau, \varepsilon) \in F_j$ ($j = 1, 2, \ldots, m$):

$$|f_j(\tau, \varepsilon)| \leqslant K_N \varepsilon^N, \tag{18.111}$$

$$|f_j(\tau, \varepsilon_2) - f_j(\tau, \varepsilon_1')| \leqslant h_N \varepsilon^{N-2} |\varepsilon_2 - \varepsilon_1'|, \tag{18.112}$$

$$|f_j(\tau_2, \varepsilon) - f_j(\tau_1, \varepsilon)| \leqslant M_N \varepsilon^{N-1} |\tau_2 - \tau_1|$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m;\ \tau_1, \tau_2 \in [0, L],\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1), \tag{18.113}$$

где

$$0 < \varepsilon_1' \leqslant \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_1. \tag{18.114}$$

Введем во множествах F_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ топологию равномерной сходимости, т. е. топологию пространства C непрерывных функций. Именно, будем говорить, что две функции $f_j^{(1)}$, $f_j^{(2)} \in F_j$ достаточно близки, если «расстояние» ϱ между ними, определенное по формулам

$$\varrho(f_j^{(1)}, f_j^{(2)}) = \max_{\substack{\tau\in[0, L_1] \\ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1}} |f_j^{(1)}(\tau, \varepsilon) - f_j^{(2)}(\tau, \varepsilon)| \tag{18.115}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m),$$

достаточно мало. Таким образом, можно считать $F_j \subset C$. Покажем, что неравенства (18.111) — (18.113) обеспечивают компактность множеств F_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

Согласно теореме Арцела [33], множество функций в пространстве C компактно, если функции этого множества равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Равномерная ограниченность функций из F_j следует из неравенства (18.111). Требование равностепенной непрерывности можно заменить условием Липшица (см. [33]). Итак, мы должны показать, что функции $f_j \in F_j$ удовлетворяют условию Липшица по τ и ε в области (18.88):

$$|f_j(\tau_2, \varepsilon_2) - f_j(\tau_1, \varepsilon_1')| \leqslant k_1|\tau_2 - \tau_1| + k_2|\varepsilon_2 - \varepsilon_1'| \tag{18.116}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m),$$

где τ_1, τ_2, ε_1' и ε_2 — любые значения τ и ε из (18.88), а k_1 и k_2 — постоянные, не зависящие от τ и ε. Из неравенств (18.112) и (18.113) следует даже более сильное по сравнению с (18.116) неравенство.

В самом деле,

$$|f_j(\tau_2, \varepsilon_2) - f_j(\tau_1, \varepsilon_1')| = |f_j(\tau_2, \varepsilon_2) - f_j(\tau_1, \varepsilon_2) + f_j(\tau_1, \varepsilon_2) -$$

$$(18.117)$$

$$- f_j(\tau, \varepsilon_1')| \leqslant |f_j(\tau_2, \varepsilon_2) - f_j(\tau_1, \varepsilon_2)| + |f_j(\tau_1, \varepsilon_2) - f_j(\tau_1, \varepsilon_1')|$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m;\ \tau_1, \tau_2 \in [0, L_1];\ \varepsilon_1', \varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1]).$$

При оценке первого слагаемого в правой части (18.117) сошлемся на неравенство (18.113), а при оценке второго слагаемого воспользуемся оценкой (18.112). Тогда получим

$$|f_j(\tau_2, \varepsilon_2) - f_j(\tau_1, \varepsilon_1')| \leqslant M_N\varepsilon^{N-1}|\tau_2 - \tau_1| + h_N\varepsilon^{N-2}|\varepsilon_2 - \varepsilon_1'| \tag{18.118}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m;\ 0 < \varepsilon_1' \leqslant \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_1;\ \varepsilon_1' \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_2).$$

Очевидно, неравенство (18.118) даже более сильно, чем (18.116).

Таким образом, доказано, что множества $F_j (j=1, \ldots, m)$ на основании (18.111) и (18.118) компактны в метрике пространства C непрерывных функций. Но тогда множества Φ_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ тоже компактны, но в метриках, которые задаются в соответствии с (18.115) и (18.110) такими равенствами:

$$\tilde{\varrho}_j (\varphi_j^{(1)}, \varphi_j^{(2)}) = \max_{\substack{\tau\in[0,L_1] \\ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1}} \left| \exp\left(\frac{c_j(\tau-\tau_j)}{\varepsilon}\right) [\varphi_j^{(1)}(\tau, \varepsilon) - \varphi_j^{(2)}(\tau, \varepsilon)] \right| \tag{18.119}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m).$$

Заметим, что множества Φ_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ выпуклы. Это непосредственно следует из неравенств (18.105)—(18.107). В самом деле, возьмем два положительных числа α и β, таких, что $\alpha+\beta=1$, и возьмем любые две функции $\varphi_j^{(1)}$, $\varphi_j^{(2)} \in \Phi_j$. Тогда из неравенства (18.105) следует

$$|\alpha\varphi_j^{(1)} + \beta\varphi_j^{(2)}| \leqslant \alpha|\varphi_j^{(1)}| + \beta|\varphi_j^{(2)}| \leqslant$$

$$\leqslant (\alpha + \beta) K_N\varepsilon^N \left|\exp\left(-\frac{c_j(\tau-\tau_j)}{\varepsilon}\right)\right| = K_N\varepsilon^N \left|\exp\left(-\frac{c_j(\tau-\tau_j)}{\varepsilon}\right)\right| \tag{18.120}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m).$$

Совершенно аналогично можно показать, что функция $\varphi_j^{(3)}(\tau, \varepsilon) = \alpha\varphi_j^{(1)}(\tau, \varepsilon) + \beta\varphi_j^{(2)}(\tau, \varepsilon)$ удовлетворяет и неравенствам (18.106) и (18.107). Следовательно, $\varphi_j^{(3)}(\tau, \varepsilon) \in \Phi_j$. Но это и означает, что множества Φ_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ выпуклы.

Рассмотрим прямое произведение множеств Φ_j $(j = 1, \ldots, m)$:

$$F = \Phi_1\times\Phi_2\times\ldots\times\Phi_m. \tag{18.121}$$

Элементами множества F будут всевозможные упорядоченные наборы из m функций: $\{\varphi_1(\tau, \varepsilon), \ldots, \varphi_m(\tau, \varepsilon)\}$, причем $\varphi_j(\tau, \varepsilon) \in \Phi_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

Из выпуклости и компактности множеств Φ_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ будет следовать выпуклость и компактность множества F в метрике, заданной набором расстояний (18.119). Это следует из свойств прямого произведения метрических или топологических пространств [33].

Систему дифференциальных уравнений (18.90) с условиями (18.101) можно записать в следующей интегральной форме:

$$z_j(\tau, \varepsilon) = \psi^{(N)}(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau_j}^{\tau} G_j(z_1, \ldots, z_m; \tau, \varepsilon)\, d\tau \tag{18.122}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m),$$

где через $G_j(z;\ \tau,\ \varepsilon)$ обозначены правые части уравнений (18.90). Отправляясь от системы (18.122), можно считать, что на множестве F посредством равенств

$$\Psi_j(\tau,\varepsilon)=\psi_j^{(N)}(\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau_j}^{\tau}G_j(\varphi_1,\ldots,\varphi_m;\tau,\varepsilon)\,d\tau \qquad (18.123)$$

$$(j=1,2,\ldots,m)$$

задан некоторый оператор T, который каждому элементу множества F, т. е. каждому упорядоченному набору функций $\{\varphi_1(\tau,\varepsilon),\ \varphi_2(\tau,\varepsilon),\ldots$ $\ldots,\ \varphi_m(\tau,\varepsilon)\}$ ставит в соответствие новый вполне определенный набор функций $\{\Psi_1(\tau,\varepsilon),\ldots,\Psi_m(\tau,\varepsilon)\}$.

Напомним, что $G_j(\varphi_1,\ldots,\varphi_m;\tau,\varepsilon)$ — это полином второго порядка относительно $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ с бесконечно гладкими по τ коэффициентами, умноженный на $\exp\left(-\dfrac{c_j(\tau-\tau_j)}{\varepsilon}\right)$. Тогда из вида правой части (18.123) следует, что оператор T переводит бесконечно дифференцируемые по τ функции в бесконечно дифференцируемые. Легко доказать, что T — непрерывный оператор, т. е., что T переводит близкие элементы в близкие же элементы (в принятой метрике).

Теперь нам надо доказать, что оператор T переводит множество F в себя, т. е. мы должны доказать включение

$$T\{F\}\subseteq F. \qquad (18.124)$$

Это значит, что функции $\Psi_j(\tau,\ \varepsilon)$, найденные по (18.123), должны удовлетворять неравенствам (18.105) — (18.107). Если мы это покажем, то тем самым будет доказана компактность $T\{F\}$ и включение (18.124).

Докажем для $\Psi_j(\tau,\varepsilon)$ $(j=1,2,\ldots,m)$ оценки типа (18.105). Заметим, что неравенства (18.111) можно объединить в одном неравенстве

$$\|f\|\leqslant K_N\varepsilon^N, \qquad (18.125)$$

если положить

$$\|f\|=\max\{|f_1(\tau,\varepsilon)|,\ldots,|f_m(\tau,\varepsilon)|\}. \qquad (18.126)$$

Приняв во внимание связь между системами (18.90) и (18.91), а также соотношения (18.89) и (18.110), мы можем так оценить величину (18.123):

$$|\Psi_j(\tau,\varepsilon)|\leqslant|\psi_j^{(N)}(\varepsilon)|+\frac{1}{\varepsilon}\left|\int\limits_{\tau_j}^{\tau}\{g_j^{(N)}(f_1,\ldots,f_m;\tau,\varepsilon)-c_jf_j\}\times\right.$$

$$\times \exp\left(-\frac{c_j(\tau-\tau_j)}{\varepsilon}\right)d\tau\Bigg| \qquad (j=1,2,\ldots,m). \qquad (18.127)$$

Оценки (18.95) и (18.99) остаются справедливыми, если в них заменить y_j на f_j ($j=1, \ldots, m$). Это следует из (18.85), (18.126) и (18.125). Если воспользоваться этими оценками и леммой III.3, то из неравенства (18.127) получим

$$|\Psi_j(\tau,\varepsilon)| \leqslant R_N\varepsilon^N + \frac{1}{\varepsilon}(B_N\varepsilon^N + Am\|f\|)\left|\int_{\tau_j}^{\tau}\exp\left(-\frac{c_j(\tau-\tau_j)}{\varepsilon}\right)d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant R_N\varepsilon^N + (B_N\varepsilon^N + Am\|f\|)\,c\left|\exp\left(-\frac{c_j(\tau-\tau_j)}{\varepsilon}\right)\right| =$$

$$= \varepsilon^N(R_N + cB_N)\left[1+\frac{Am\|f\|}{(R_N+B_Nc)\varepsilon^N}\right]\left|\exp\left(-\frac{c_j(\tau-\tau_j)}{\varepsilon}\right)\right| =$$

$$= \varepsilon^N(R_N+cB_N)\left[1+\frac{Amc\|f\|}{(1-Amc)\dfrac{R_N+cB_N}{1-Amc}\varepsilon^N}\right]\left|\exp\left(-\frac{c_j(\tau-\tau_j)}{\varepsilon}\right)\right|$$

$$(j=1,2,\ldots,m). \qquad (18.128)$$

Используя обозначение (18.103) и неравенство (18.125), находим отсюда

$$|\Psi_j(\tau,\varepsilon)| \leqslant K_N\varepsilon^N\left|\exp\left(\frac{-c_j(\tau-\tau_j)}{\varepsilon}\right)\right| \qquad (j=1,2,\ldots,m), \qquad (18.129)$$

что и требовалось.

Для получения неравенств типа (18.106) для функций $\Psi_j(\tau,\varepsilon)$ ($j=1,2,\ldots,m$) введем обозначения

$$\left|\Psi_j(\tau,\varepsilon_2)\exp\frac{c_j(\tau-\tau_j)}{\varepsilon_2} - \Psi_j(\tau,\varepsilon_1')\exp\frac{c_j(\tau-\tau_j)}{\varepsilon_1'}\right| = \Delta(\Psi_j,\varepsilon_1',\varepsilon_2)$$

$$(j=1,2,\ldots,m). \qquad (18.130)$$

Тогда, исходя из равенств (18.123), находим

$$\Delta(\Psi_j,\varepsilon_1',\varepsilon_2) \leqslant \left|\Psi_j^N(\varepsilon_2)\exp\frac{c_j(\tau-\tau_j)}{\varepsilon_2} - \Psi_j^{(N)}(\varepsilon_1')\exp\frac{c_j(\tau-\tau_j)}{\varepsilon}\right| +$$

$$+\left|\frac{1}{\varepsilon_2}\exp\left(\frac{c_j(\tau-\tau_j)}{\varepsilon_2}\right)\int_{\tau_j}^{\tau}G_j(\varphi;\tau,\varepsilon_2)\,d\tau - \frac{1}{\varepsilon_1'}\exp\left(\frac{c_j(\tau-\tau_j)}{\varepsilon}\right)\times\right.$$

$$\times \int_{\tau_j}^{\tau} G_j(\varphi;\tau,\varepsilon_1')\,d\tau \Bigg| \qquad (j=1,2,\ldots,m). \qquad (18.131)$$

Для оценки первого слагаемого в правой части неравенства (18.131) можно добавить и вычесть выражение $\psi_j^{(N)}(\varepsilon_1')\exp\frac{c_j(\tau-\tau_j)}{\varepsilon}$. Тогда из соотношений (18.89) и (18.109) легко получается неравенство

$$\left|\psi_j^{(N)}(\varepsilon_2)\exp\frac{c_j(\tau-\tau_j)}{\varepsilon_2}-\psi_j^{(N)}(\varepsilon_1')\exp\frac{c_j(\tau-\tau_j)}{\varepsilon_1'}\right|\leqslant$$

$$\leqslant k_N'\varepsilon^{N-2}|\varepsilon_2-\varepsilon_1'| \qquad (j=1,2,\ldots,m;\quad \varepsilon_1'\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_2), \qquad (18.132)$$

где

$$k_N' = k_N\varepsilon_1 + R_Nc^*. \qquad (18.133)$$

Второе слагаемое в правой части (18.131) для краткости обозначим $\Delta_2(\Psi_j,\varepsilon_1',\varepsilon_2)$. Для него по теореме о среднем из неравенства (18.131) и системы (18.91) следует оценка

$$\Delta_2(\Psi_j,\varepsilon_1',\varepsilon_2)=\left|\frac{d}{d\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau_j}^{\tau}\{g_j^{(N)}(f_1,\ldots,f_m;\tau,\varepsilon)-c_jf_j\}\,d\tau\right|_{\varepsilon=\varepsilon_j^*}|\varepsilon_2-\varepsilon_1'|, \qquad (18.134)$$

где $\varepsilon_1'\leqslant\varepsilon_j^*\leqslant\varepsilon_2$; $j=1,2,\ldots,m$.

При оценке производной от интегрального члена в (18.134) используется дифференцируемость по ε функций $f_j(\tau,\varepsilon)$ и коэффициентов исходной системы (18.90) и повторяются неравенства типа (18.128). В результате получаем оценку

$$\Delta_2(\Psi_j,\varepsilon_1',\varepsilon_2)\leqslant H_N\varepsilon^{N-2}|\varepsilon_2-\varepsilon_1'| \qquad (j=1,2,\ldots,m;\ \varepsilon_1'\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_2), \qquad (18.135)$$

где постоянная H_N не зависит от ε.

Тогда для обозначения (18.130) из неравенств (18.132) и (18.135) следуют неравенства

$$\Delta(\Psi_j,\varepsilon_1',\varepsilon_2)\leqslant(H_N+k_N')\varepsilon^{N-2}|\varepsilon_2-\varepsilon_1'|$$

$$(j=1,2,\ldots,m;\quad \varepsilon\in[\varepsilon_1',\varepsilon_2]\subset(0,\varepsilon_1]). \qquad (18.136)$$

Итак, если положить в неравенстве (18.106) постоянную h_N, равной $h_N=H_N+k_N'$ (до сих пор h_N оставалось произвольной), то неравенствам (18.106) будут удовлетворять не только функции $\varphi_j(\tau,\varepsilon)\in\in\Phi_j$, но также и функции $\Psi_j(\tau,\varepsilon)$ $(j=1,\ldots,m)$, построенные по формулам (18.123).

Нам осталось доказать выполнение условий (18.107) для $\Psi_j(\tau, \varepsilon)$ ($j = 1, 2, \ldots, m$). Подставив равенства (18.123) в левые части (18.107) вместо $\varphi_j(\tau, \varepsilon)$ и проводя соответствующие оценки, получим

$$\left| \Psi_j(\tau_2, \varepsilon) \exp\left(\frac{c_j(\tau_2 - \tau_j)}{\varepsilon}\right) - \Psi_j(\tau_1, \varepsilon) \exp\left(\frac{c_j(\tau_1 - \tau_j)}{\varepsilon}\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \psi_j^{(N)}(\varepsilon) \left[\exp\left(\frac{c_j(\tau_2 - \tau_j)}{\varepsilon}\right) - \exp\left(\frac{c_j(\tau_1 - \tau_j)}{\varepsilon}\right) \right] \right| +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \left| \exp\left(\frac{c_j(\tau_2 - \tau_j)}{\varepsilon}\right) \int_{\tau_j}^{\tau_2} G_j(\varphi; \tau, \varepsilon)\, d\tau - \exp\left(\frac{c_j(\tau_2 - \tau_j)}{\varepsilon}\right) \int_{\tau_j}^{\tau_1} G_j(\varphi; \tau, \varepsilon)\, d\tau \right|$$

$$(j = 1, \ldots, m; \quad \tau_1, \tau_2 \in [0, L_1], \; 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1). \tag{18.137}$$

Благодаря (18.99) первое слагаемое в правой части (18.137) мажорируется величиной $R_N c^* |\tau_2 - \tau_1| \varepsilon^{N-1}$; $c^* = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} |c_j|$. Для оценки второго слагаемого в неравенстве (18.137) добавим к нему и вычтем из него величину

$$\exp\left(\frac{c_j(\tau - \tau_j)}{\varepsilon}\right) \int_{\tau_j}^{\tau_1} G_j(\varphi; \tau, \varepsilon)\, d\tau. \tag{18.138}$$

После этого проводим оценки, аналогичные (18.128). Опуская промежуточные выкладки, которые можно легко проделать, запишем окончательный результат

$$\left| \Psi_j(\tau_2, \varepsilon) \exp\left(\frac{c_j(\tau_2 - \tau_j)}{\varepsilon}\right) - \Psi_j(\tau_1, \varepsilon) \exp\left(\frac{c_j(\tau_1 - \tau_j)}{\varepsilon}\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant [R_N c^* + (1 + cc^*)(B_N + AmK_N)] \varepsilon^{N-1} |\tau_2 - \tau_1| = M_N \varepsilon^{N-1} |\tau_2 - \tau_1|$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m), \tag{18.139}$$

где константа M_N, очевидно, совпадает с константой M_N в правой части (18.107), (18.108).

Итак, сравнение неравенств (18.105), (18.106) и (18.107) с неравенствами соответственно (18.129), (18.136) и (18.139), а также тот факт, что оператор T, определенный выше, не понижает гладкости функций, позволяют заключить, что образ $T\{F\}$ множества F содержится в самом F, т. е. выполняется включение (18.124).

Нам остается лишь сослаться на принцип Шаудера [33] или на теорему об инвариантных точках, доказанную в работе М. Фукухара [135]: если непрерывный оператор T преобразует выпуклое компактное множество F в подмножество этого множества, т. е. если $T\{F\} \subseteq F$, то множество F содержит по крайней мере одну инвариантную относительно оператора T точку x, для которой

$$Tx = x. \tag{18.140}$$

Иными словами, существует хотя бы один набор функций $\psi_1^{(N)}(\tau, \varepsilon)$, $\psi_2^{(N)}(\tau, \varepsilon), \ldots, \psi_m^{(N)}(\tau, \varepsilon)$ из F, который обращает систему уравнений (18.122) в систему тождеств

$$\psi_j^{(N)}(\tau, \varepsilon) \equiv \psi_j^{(N)}(\varepsilon) + \varepsilon^{-1} \int_{\tau_j}^{\tau} G_j(\psi_1^{(N)}, \ldots, \psi_m^{(N)}; \tau, \varepsilon)\, d\tau$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m). \tag{18.141}$$

Следовательно, существование решения системы дифференциальных уравнений (18.90), удовлетворяющего условиям (18.101) и (18.102), доказано.

Докажем единственность этого решения. Предположим, что существует другое решение

$$z_j = \chi_j^{(N)}(\tau, \varepsilon) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{18.142}$$

удовлетворяющее условиям вида (18.101) и (18.102) и отличное от решения (18.100). Положим

$$M(\varepsilon) = \max_{\tau, j} \left| [\chi_j^{(N)}(\tau, \varepsilon) - \psi_j^{(N)}(\tau, \varepsilon)] \exp \frac{c_j(\tau - \tau_j)}{\varepsilon} \right|. \tag{18.143}$$

Тогда, принимая во внимание неравенства (18.86), (18.92) и (18.95), получим для $M(\varepsilon)$ следующую оценку:

$$M(\varepsilon) = \max_{\tau, j} \left| \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau_j}^{\tau} [G_j(\chi^{(N)}; \tau, \varepsilon) - G_j(\psi^{(N)}; \tau, \varepsilon)] d\tau \right\} \exp \frac{c_j(\tau - \tau_j)}{\varepsilon} \right| <$$

$$< \max_{\tau, j} \left\{ Amc \left| \chi_j^{(N)}(\tau, \varepsilon) - \psi_j^{(N)}(\tau, \varepsilon) \right| \left| \exp \frac{c_j(\tau - \tau_j)}{\varepsilon} \right| \right\} = AmcM(\varepsilon), \tag{18.144}$$

т. е.

$$M(\varepsilon) < AmcM(\varepsilon), \tag{18.145}$$

если ε достаточно мало. Однако неравенство (18.145) противоречит условию (18.96). Следовательно, $\chi_j^{(N)}(\tau, \varepsilon) \equiv \psi_j^{(N)}(\tau, \varepsilon)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ Единственность доказана.

Итак, первоначально рассматриваемая система (18.41) имеет единственное решение

$$v_j(\tau, \varepsilon) = p_j^{(N)}(\tau, \varepsilon) + \psi_j^{(N)}(\tau, \varepsilon) \exp \frac{c_j(\tau - \tau_j)}{\varepsilon}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m; \;\; N > 1) \tag{18.146}$$

в области $0 \leqslant \tau \leqslant L_1$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$. Тогда из соотношений (18.64), (18.77), (18.89) и (18.102) вытекает, что формальный ряд (18.64) является асимптотически сходящимся рядом в этой области.

Таким образом, теорема III.4 нами доказана лишь для $\tau \in [0, L_1]$ ($L_1 \leqslant L$). Это доказательство можно теперь распространить на весь первоначальный интервал $[0, L]$. В самом деле, в соответствии с (18.69) разобьем первоначально заданный интервал $[0, L]$ на частичные интервалы $[L_i, L_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \ldots, q-1$) так, чтобы конец каждого из них совпадал с началом последующего. Тогда, очевидно, $L_0 = 0$, $L_q = L$.

Из предыдущего легко было заметить, что доказательство теоремы III.4 при $0 \leqslant \tau \leqslant L_1$ существенно опирается на неравенства (18.86), (18.87), (18.96) и лемму III.3, из которых затем следовали все основные оценки. В свою очередь, эти неравенства выполняются при достаточно хорошей аппроксимации функций $\mu_j(\tau)$ ($j = 1, 2, \ldots, m$) постоянными c_j ($j = 1, 2, \ldots, m$).

Подчиним разбиение интервала $[0, L]$ на подынтервалы $[L_i, L_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \ldots, q-1$) двум условиям: 1) аппроксимация функций $\mu_j(\tau)$ постоянными c_{ji} ($j = 1, 2, \ldots, m$; $i = 0, 1, \ldots, q-1$) (см. (18.69)) должна обеспечивать выполнение неравенств типа (18.86) и (18.87):

$$\begin{gathered} |b_{jj}^{(N)}(\tau, \varepsilon) - c_{ji}| \leqslant A, \\ |b_{jk}^{(N)}(\tau, \varepsilon)| \leqslant A \quad (j \neq k) \\ L_i \leqslant \tau \leqslant L_{i+1}, \ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \ c_{j0} = c_j \\ (j, k = 1, 2, \ldots, m; \ i = 0, 1, \ldots, q-1); \end{gathered} \tag{18.147}$$

2) те точки интервала $[0, L]$, в которых вещественная часть какой-либо функции $\mu_j(\tau)$ ($j = 1, 2, \ldots, m$) меняет знак (т. е. точки, в которых графики функций $\operatorname{Re}\mu_j(\tau)$ ($j = 1, 2, \ldots, m$) пересекают ось абсцисс), не должны попадать внутрь интервалов $[L_i, L_{i+1}]$.

Тогда все рассуждения, проведенные выше в предположении $\tau \in [0, L_1]$, переносятся на все последующие подынтервалы. При этом на каждом подынтервале $[L_i, L_{i+1}]$ ищем решение системы (18.90), удовлетворяющее условиям

$$\begin{gathered} \psi_j^{(N)}(\tau_{ji}, \varepsilon) = \psi_j^{(N)}(\varepsilon), \\ \psi_j^{(N)}(\varepsilon) = \sum_{s=N}^{\infty} p_{js}(\tau_{ji})\varepsilon^s, \end{gathered} \tag{18.148}$$

где по аналогии с (18.72)

$$\tau_{ji} = \begin{cases} L_{i+1}, & \text{если } c'_{ji} \geqslant 0; \\ L_i, & \text{если } c'_{ji} < 0, \end{cases} \tag{18.149}$$

где $\qquad j = 1, 2, \ldots, m;\ i = 0, 1, \ldots, q-1;$

$$c'_{ji} = \operatorname{Re} c_{ji} \text{ (см. (18.69)).}$$

Таким образом, существование и единственность решения системы (18.90), удовлетворяющего условиям вида (18.101) и (18.102), доказано для каждого из подынтервалов $[L_i, L_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \ldots, q-1$). Необходимо теперь показать, что решение на каждом предыдущем подынтервале переходит в решение на последующем, что будет означать существование и единственность решения с указанными свойствами на всем интервале $[0, L]$.

В самом деле, разбиение интервала $[0, L]$, обеспечивающее аппроксимацию функций $\mu_j(\tau)$ ($j = 1, 2, \ldots, m$) постоянными c_{ji} ($j = 1, 2, \ldots, m$; $i = 0, 1, \ldots, q-1$) с условием выполнения неравенств (18.147), не единственно. Наряду с рассмотренным разбиением интервала $[0, L]$ на подынтервалы $[L_i, L_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \ldots, q-1$) рассмотрим новое разбиение на подынтервалы $[\bar{L}_k, \bar{L}_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \ldots, q'-1$; $q' > q$; $\bar{L}_0 = 0$, $\bar{L}_{q'} = L$). Это последнее разбиение должно обладать следующими свойствами: во-первых, аппроксимирующие функции $\bar{c}_j(\tau)$, определенные по аналогии с (18.69), обеспечивают выполнение неравенств вида (18.147), что позволяет провести доказательство теоремы существования, как это было сделано выше, для каждого из $[\bar{L}_k, \bar{L}_{k+1}]$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, q'-1$); во-вторых, последняя система подынтервалов $[\bar{L}_k, \bar{L}_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \ldots, q'-1$) должна таким образом перекрываться с первой, чтобы все точки L_{i+1} ($i = 0, 1, \ldots, p$) оказались лежащими внутри каких-либо подынтервалов второй системы. Например, должны иметь место неравенства: $0 < \bar{L}_1 < L_1 < \bar{L}_2 < L_2 < \ldots < L$. Заметим, что в этом случае некоторые из функций $\operatorname{Re}\mu_j(\tau)$ ($j = 1, 2, \ldots, m$) могут менять знак внутри какой-то части из подынтервалов $[\bar{L}_k, \bar{L}_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \ldots, q'-1$; $q' > q$). Выберем тогда эти подынтервалы достаточно малой длины так, чтобы при аппроксимации функций $\mu_j(\tau)$ кусочно-постоянными функциями $\bar{c}_j(\tau)$ вида (18.69) вещественные части постоянных аппроксимации равнялись нулю:

$$c'_{jk} = \operatorname{Re} c_{jk} = 0.$$

Мнимые же части этих постоянных тогда обязательно отличны от нуля, так как по условию теоремы $\mu_j(\tau) \neq 0$ ($j = 1, 2, \ldots, m$) везде на $[0, L]$. Такой выбор постоянных, аппроксимирующих функции $\mu_j(\tau)$ ($j = 1, 2, \ldots, m$), позволяет нам по-прежнему опираться на лемму III.3 (однако с τ_{ji} из (18.148)) и применять замену переменных вида (18.89) при доказательстве теоремы существования и единственности решения системы (18.90) на каждом из подынтервалов $[\bar{L}_k, L_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \ldots, q'-1$).

Для интервалов $[0, L_1]$ и $[L_1, L_2]$ теорема существования и единственности доказана, так же как и для интервалов $[0, \bar{L}_1]$ и $[\bar{L}_1, \bar{L}_2]$, причем решение системы (18.90) совпадает на общей части интервалов $[0, L_1]$ и $[0, \bar{L}_1]$, т. е. на $[0, \bar{L}_1]$ ввиду совпадения начальных условий (18.101). Тогда, если в качестве начальных условий для решения системы (18.90) на $[\bar{L}_1, \bar{L}_2]$ взять значение в точке $\tau = \bar{L}_1$ решения системы, найденного на интервале $[0, L_1] \supset [0, \bar{L}_1]$, то решение системы (18.71) будет продолжено на интервал $[0, \bar{L}_2]$. В силу единственности это решение может быть продолжено на интервал $[0, L_2]$ и т. д. Таким образом, нам удается «склеивать» решения, найденные на соседних интервалах $[0, L_1]$ и $[L_1, L_2]$. Повторяя приведенные рассуждения необходимое число раз, находим, что решение системы (18.90), удовлетворяющее условиям

$$\psi_j^{(N)}(0, \varepsilon) = \psi_j^{(N)}(\varepsilon) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{18.150}$$

и

$$|\psi_j^{(N)}(\tau, \varepsilon)| \leqslant K_N \varepsilon^N \exp \frac{|\xi_j(\tau)|}{\varepsilon}, \tag{18.151}$$

где

$$\xi_j(\tau) = \operatorname{Re} \mu_j(\tau) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

существует и единственно на $[0, L]$.

Условия [18.151] получаются следующим образом. На каждом интервале $[L_k, L_{k+1}]$ решение системы (18.90), построенное описанным выше способом, удовлетворяет неравенствам

$$|\psi_j^{(N)}(\tau, \varepsilon)| \leqslant K_N \varepsilon^N \left| \exp\left(- \frac{c_{jk}(\tau - \tau_{jk})}{\varepsilon} \right) \right| \tag{18.152}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 0, 1, \ldots, q - 1; \ L_k < \tau \leqslant L_{k+1}),$$

где τ_{jk} выбраны согласно (18.149). Тогда при достаточно мелком разбиении интервала $[0, L]$ правая часть неравенства (18.152) будет мажорироваться величиной $K_N \varepsilon^N \exp \frac{|\xi_j(\tau)|}{\varepsilon}$ при любом $\tau \in [0, L]$ и $j = 1, 2, \ldots, m$.

Итак, продолжая непрерывно решение системы (18.90) с одного подынтервала на последующие, как было выше описано, мы найдем единственное непрерывное по τ решение, удовлетворяющее начальным условиям (18.150) и условиям (18.151).

Отправляясь от этого «склеенного» решения, удовлетворяющего условиям (18.150) и (18.151), совершим теперь две замены переменных, обратных по отношению к заменам переменных, с помощью которых мы преобразовывали систему дифференциальных уравнений (18.41) к виду (18.90). Тогда неравенства (18.151) в конечном итоге дадут нам требуемую асимптотическую оценку для остатка формального ряда (18.64):

$$|p_j(\tau, \varepsilon) - p_j^{(N)}(\tau, \varepsilon)| \leqslant K_N \varepsilon^N$$
$$(j = 1, 2, \ldots, m;\; N > 1;\; 0 \leqslant \tau \leqslant L;\; 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1). \tag{18.153}$$

Следовательно, ряд (18.64) есть не просто формальное решение системы дифференциальных уравнений (18.41), а представляет собой асимптотическое разложение по степеням параметра ε решения упомянутой системы в области $0 \leqslant \tau \leqslant L$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$.

Теорема доказана.

ГЛАВА IV

Построение асимптотического решения в случае кратных корней характеристического уравнения

§ 19. Общие замечания

Способ, изложенный в предыдущей главе, позволяет асимптотически привести систему линейных дифференциальных уравнений (12.1) или (17.1) к системам соответственно (13.2), (17.4), которые распадаются на изолированные подсистемы более низкого порядка по сравнению с исходными. В случае, когда корни характеристического уравнения (12.3) остаются простыми на сегменте $[0, L]$, такое расщепление, как это показано в § 16, приводит к скалярным дифференциальным уравнениям, интегрируемым в квадратурах. Следовательно, в данном случае путем расщепления мы можем получить асимптотическое решение систем (12.1), (17.1).

В более сложном случае, когда среди корней характеристического уравнения (12.3) появляются кратные, при помощи изложенного алгоритма нельзя получить асимптотическое решение рассматриваемых систем, так как полученные в процессе расщепления системы дифференциальных уравнений (13.2), (17.4), вообще говоря, не интегрируются в квадратурах (матрицы, входящие в данные системы, имеют такую же структуру, как и матрицы систем (12.1), (17.1)). И лишь в более простом случае, когда кратным корням соответствуют простые элементарные делители, как это показано в § 20, асимптотическое расщепление дает возможность построить решение исходных систем, подвергнув при этом отщепленные системы дополнительному исследованию. В общем же случае, когда наряду с кратными корнями появляются и кратные элементарные делители, решение отщепленных систем весьма затруднительно. Можно было бы, используя конкретную структуру отщепленных систем, применить к последним метод, изложенный в § 21 и 23. Однако следует отметить, что теоремы об асимптотическом расщеплении получены при выполнении условия (15.3), которое заведомо не выполняется, если среди корней характеристического уравнения имеются чисто мнимые корни, обладающие кратными элементарными делителями. В самом деле, пусть матрица $A_0(\tau)$ имеет вид

$$A_0(\tau) = \begin{vmatrix} i\alpha(\tau) & 1 \\ 0 & i\alpha(\tau) \end{vmatrix}, \tag{19.1}$$

где $\alpha(\tau)$ — действительная положительная функция на сегменте $[0, L]$. Тогда для выполнения условия (15.3), как уже отмечалось выше, необходимо, чтобы матрица

$$\Delta(\tau) = \frac{1}{2}[A_0(\tau) + A_0^*(\tau)] \tag{19.2}$$

не имела собственных чисел с положительными вещественными частями. В данном случае

$$\Delta(\tau) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{19.3}$$

откуда следует, что собственные числа матрицы равны $\pm\frac{1}{2}$.

Настоящая глава и посвящается исследованию случая кратных корней характеристического уравнения, причем мы предполагаем, что кратность корней и кратность соответствующих элементарных делителей не меняется на сегменте $[0, L]$. Для этого случая изложенный здесь способ позволяет сразу, обойдя предварительное расщепление, строить асимптотическое решение для исходных систем линейных дифференциальных уравнений.

Итак, пусть корни характеристического уравнения (12.3), обозначенные нами, как и прежде, через $\lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau), \ldots, \lambda_p(\tau)$ $(p < n)$, обладают на сегменте $[0, L]$ постоянной кратностью $k_1, k_2, \ldots, k_p$ $\left(\sum\limits_{j=1}^{p} k_j = n\right)$.

Тогда в зависимости от поведения элементарных делителей могут представиться три случая, а именно — каждому корню $\lambda_j(\tau)$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ могут соответствовать:

а) k_j простых элементарных делителей;

б) один элементарный делитель кратности k_j;

в) $r_j (1 < r_j < k_j)$ элементарных делителей кратности $s_{j1}, s_{j2}, \ldots, s_{jr_j}$ $(s_{j1} + s_{j2} + \ldots + s_{jr_j} = k_j;\ j = 1, 2, \ldots, p)$.

Ниже каждый из случаев мы рассматриваем отдельно. При этом для большей общности мы будем исследовать неоднородные системы вида (17.4), выделяя отдельно, как и в § 17, два случая:

1) «резонансный» — функция $i\nu(\tau)$ при некоторых значениях $\tau \in [0, L]$ становится равной одному из корней характеристического уравнения (12.3), например корню $\lambda_1(\tau)$, однако

$$i\nu(\tau) \neq \lambda_r(\tau), \quad r = 2, 3, \ldots, p, \tag{19.4}$$

при любом $\tau \in [0, L]$;

2) «нерезонансный», когда

$$i\nu(\tau) \neq \lambda_j(\tau), \quad j = 1, 2, \ldots, p, \tag{19.5}$$

для всех $\tau \in [0, L]$.

§ 20. Случай простых элементарных делителей

Прежде чем перейти к построению решения, напомним, что в данном случае [15] каноническая матрица для матрицы $A_0(\tau)$ будет иметь простую структуру. Другими словами, можно указать такую неособенную матрицу $T(\tau)$, что

$$W(\tau)=T^{-1}(\tau)A_0(\tau)T(\tau)=\begin{bmatrix} W_1(\tau) & & & 0 \\ & W_2(\tau) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & W_p(\tau) \end{bmatrix}, \tag{20.1}$$

где $W_j(\tau)$ — квадратная матрица порядка k_j, имеющая вид

$$W_j(\tau)=\begin{bmatrix} \lambda_j(\tau) & & & 0 \\ & \lambda_j(\tau) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_j(\tau) \end{bmatrix},\quad j=1,2,\ldots,p. \tag{20.2}$$

Тогда условие (15.3) здесь выполняется и при наличии чисто мнимых корней, ибо $W_0(\tau)+W_0^*(\tau)=0$. Следовательно, к системе (17.4) в данном случае применимы теоремы III.1, III.3, позволяющие асимптотически расщепить систему (17.1) на p изолированных подсистем вида

$$\frac{d\xi_j}{dt}=[W_j(\tau)+\varepsilon W_j(\tau,\varepsilon)]\,\xi_j{}^*,\qquad j=1,2,\ldots,p, \tag{20.3}$$

где $W_j(\tau,\varepsilon)$ — квадратные матрицы порядка k_j, имеющие вид

$$W_j(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{m}\varepsilon^{s-1}W_{js}(\tau) \tag{20.4}$$

(m — любое натуральное число).

Преобразуем дополнительно систему (20.3), а именно, положим

$$\xi_j(t,\varepsilon)=\exp\left\{\int_0^t\lambda_j(\tau)\,dt\right\}q_j,\qquad j=1,2,\ldots,p. \tag{20.5}$$

---

* Для простоты рассматривается «нерезонансный случай».

Тогда, учитывая (20.2), получим

$$\frac{dq_j}{dt} = \varepsilon W_j(\tau, \varepsilon)\, q_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, p. \tag{20.6}$$

Перейдем в системе (20.6) от дифференцирования по t к дифференцированию по $\tau = \varepsilon t$; имеем

$$\frac{dq_j}{d\tau} = W_j(\tau, \varepsilon)\, q_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, p. \tag{20.7}$$

Система (20.7) допускает, в отличие от исходной системы (17.1), применение метода последовательных приближений. Следовательно, применяя метод последовательных приближений к системе (20.7), мы получим для вектора q_j решение в виде сходящегося ряда по степеням параметра ε. Тогда, используя (20.5), мы получим требуемое решение для вектора ξ_j, $j = 1, \ldots, p$.

Примечание. Исходная система дифференциальных уравнений (17.1) в общем случае, вообще говоря, не может быть проинтегрирована методом последовательных приближений. Действительно, перейдем в системе (17.1) от дифференцирования по t к дифференцированию по τ. Будем иметь

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} A(\tau, \varepsilon)\, x + \frac{1}{\varepsilon} b(\tau, \varepsilon)\, e^{i\theta(t,\varepsilon)}. \tag{20.8}$$

Отсюда следует, что при $\varepsilon \to 0$ матрица $\frac{1}{\varepsilon} A(\tau, \varepsilon)$ и вектор $\frac{1}{\varepsilon} b(\tau, \varepsilon)$, становятся неограниченными.

§ 21. Формальное решение при наличии одного кратного элементарного делителя

Перейдем теперь к построению асимптотического решения системы вида (17.1):

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau, \varepsilon)\, x + \varepsilon b(\tau, \varepsilon)\, e^{i\theta(t,\varepsilon)} \tag{17.1'}$$

в случае, когда корню $\lambda_j(\tau)$ ($j = 1, 2, \ldots, p$) соответствует элементарный делитель той же кратности, что и $\lambda_j(\tau)$. Здесь для получения асимптотического решения мы применим метод, изложенный в работах [104—106], [107—109], [110—112], [113—115].

Отметим, что в этом случае каноническая форма матрицы $A_0(\tau)$ состоит из жордановых клеток, т. е. имеет вид (18.3).

Тогда может быть доказана следующая теорема.

Теорема IV.1. *Если* $A(\tau, \varepsilon)$, $b(\tau, \varepsilon)$, $\nu(\tau)$ *обладают на сегменте*

[0, L] производными по τ всех порядков и матрица

$$C(\tau) = T^{-1}(\tau)[A(\tau)T(\tau) - T'(\tau)] \qquad (21.1)$$

такова, что ее элементы, стоящие на пересечении r_j строки и $r_{j-1}+1$ столбца ($r_j = k_1 + k_2 + \ldots + k_j$, $j = 1, 2, \ldots, p$), не обращаются нигде в нуль, т. е.

$$\{c(\tau)\}_{r_j, r_{j-1}+1} \neq 0 \qquad (21.2)$$

при любом $\tau \in [0, L]$ и всех $j = 1, 2, \ldots, p$, то формальное частное решение системы (17.1) в «резонансном» случае может быть представлено в виде

$$x(t, \varepsilon) = [U_1(\tau, \mu_1) h_1 + P(\tau, \mu_1)] e^{i\theta(t,\varepsilon)} + \sum_{k=2}^{p} U_k(\tau, \mu_k) h_k, \qquad (21.3)$$

где $U_j(\tau, \mu_j)$ ($j = 1, 2, \ldots, p$), $P(\tau, \mu_1)$ — n-мерные векторы, h_j — скалярные функции, определяемые линейными дифференциальными уравнениями

$$\frac{dh_1}{dt} = [\lambda_1(\tau, \mu_1) - i\nu(\tau)] h_1 + z(\tau, \mu_1), \qquad (21.4)$$

$$\frac{dh_k}{dt} = \lambda_k(\tau, \mu_k) h_k, \quad k = 2, 3, \ldots, p, \qquad (21.5)$$

причем имеют место формальные разложения

$$\begin{aligned} U_j(\tau, \mu_j) &= \sum_{s=0}^{\infty} \mu_1^s U_{js}(\tau), & \lambda_j(\tau, \mu_j) &= \sum_{s=0}^{\infty} \mu_j^s \lambda_{js}(\tau), \\ P(\tau, \mu_1) &= \sum_{s=0}^{\infty} \mu_1^s P_s(\tau), & z(\tau, \mu_1) &= \sum_{s=0}^{\infty} \mu_1^s z_s(\tau), \end{aligned} \qquad (21.6)$$

где μ_j ($j = 1, 2, \ldots, p$) — параметр, связанный с параметром ε соотношением

$$\mu_j = \sqrt[k_j]{\varepsilon}, \qquad j = 1, 2, \ldots, p. \qquad (21.7)$$

Доказательство. Доказательство данной теоремы так же, как и доказательство предыдущих теорем, относящихся к формальному построению решения, состоит в указании алгоритма определения коэффициентов формальных рядов (21.6). Как только последние будут надлежащим образом определены, мы можем из скалярных уравнений (21.4), (21.5) найти функции $h_j(t, \varepsilon)$, а значит, использовав (21.3), построить требуемое формальное решение системы (17.1′).

Для этого подставим вектор x, определяемый соотношениями (21.3) — (21.5), в систему (17.1'). Имеем

$$\{\varepsilon U_1'(\tau, \mu_1) - [A(\tau, \varepsilon) - \lambda_1(\tau, \mu_1) E] U_1(\tau, \mu_1)\} h_1 e^{i\theta(t,\varepsilon)} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{p} \{\varepsilon U_k'(\tau, \mu_k) - [A(\tau, \varepsilon) - \lambda_k(\tau, \mu_k) E] U_k(\tau, \mu_k)\} h_k +$$

$$+ \{U_1(\tau, \mu_1) z(\tau, \mu_1) + \varepsilon P'(\tau, \mu_1) -$$

$$- [A(\tau, \varepsilon) - i\nu(\tau) E] P(\tau, \mu_1) - \varepsilon b(\tau, \varepsilon)\} e^{i\theta(t,\varepsilon)} = 0. \qquad (21.8)$$

Потребовав теперь в тождестве (21.8) равенства нулю коэффициентов при функциях $h_1 e^{i\theta(t,\varepsilon)}$, $h_k (k = 2, 3, \ldots, p)$ и $e^{i\theta(t,\varepsilon)}$, получим

$$[A(\tau, \varepsilon) - \lambda_j(\tau, \mu_j) E] U_j(\tau, \mu_j) = \varepsilon U_j'(\tau, \mu_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, p), \quad (21.9)$$

$$[A(\tau, \varepsilon) - i\nu(\tau) E] P(\tau, \mu_1) = U_1(\tau, \mu_1) z(\tau, \mu_1) + \varepsilon [P'(\tau, \mu_1) - b(\tau, \varepsilon)]. \qquad (21.10)$$

Соотношения (21.9), (21.10) дают нам возможность определить коэффициенты формальных рядов (21.6).

1. Воспользуемся сначала соотношением (21.9), связывающим между собой неизвестные векторы $U_j(\tau, \mu_j)$ и неизвестные функции $\lambda_j(\tau, \mu_j)$, $j = 1, \ldots, p$.

Покажем теперь, как, исходя из соотношения (21.9), могут быть определены векторы $U_j(\tau, \mu_j)$ и функции $\lambda_j(\tau, \mu_j)$ ($j = 1, 2, \ldots, p$). При этом, чтобы не загромождать полученные ниже формулы многочисленными индексами, мы остановимся здесь на определении лишь векторов $U_1(\tau, \mu_1)$ и функций $\lambda_1(\tau, \mu_1)$.

Тогда, положив в соотношении (21.9) $j = 1$ и сравнив между собой коэффициенты при одинаковых степенях параметра $\mu_1 = \sqrt[k_1]{\varepsilon}$, получим

$$[A_0(\tau) - \lambda_{10}(\tau) E] U_{10}(\tau) = 0, \qquad (21.11)$$

$$[A_0(\tau) - \lambda_{10}(\tau) E] U_{1s}(\tau) = \sum_{k=0}^{s-1} U_{1k}(\tau) \lambda_{1s-k}(\tau) + H_{1s}(\tau)$$

$$(s = 1, 2, \ldots), \qquad (21.12)$$

где $H_{1s}(\tau) = U'_{1s-k_1}(\tau) - \sum_{k=1}^{\left[\frac{s}{k_1}\right]} A_k(\tau) U_{1,s-k_1k}(\tau)^*$, $s = k_1, k_1 + 1, \ldots,$

$$H_{1s}(\tau) \equiv 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, k_1 - 1), \qquad (21.13)$$

$$\lambda_{10}(\tau) = \lambda_1(\tau).$$

* Целую часть числа r мы обозначим, как обычно, через $[r]$.

В дальнейшем целесообразней от векторов $U_{1s}(\tau)$ $(s=0,1,\ldots)$ перейти к векторам

$$Q_{1s}(\tau)=T^{-1}(\tau)U_{1s}(\tau). \qquad (21.14)$$

Тогда, умножая векторные уравнения (21.11), (21.12) слева на матрицу $T^{-1}(\tau)$ и учитывая при этом (18.2), (21.14), имеем

$$[W_0(\tau)-\lambda_{10}(\tau)E]\,Q_{10}(\tau)=0, \qquad (21.15)$$

$$[W_0(\tau)-\lambda_{10}(\tau)E]\,Q_{1s}(\tau)=\sum_{k=0}^{s-1}Q_k(\tau)\lambda_{1s-k}(\tau)+\overline{H}_{1s}(\tau), \qquad (21.16)$$

где

$$\overline{H}_{1s}(\tau)=T^{-1}(\tau)H_{1s}(\tau), \qquad s=1,2,\ldots . \qquad (21.17)$$

Рассмотрим сначала уравнение (21.15). На основании (18.3) оно распадается на p векторных уравнений вида

$$[W_{r0}(\tau)-\lambda_{10}(\tau)E_{k_r}]\,Q_{1r0}(\tau)=0,\ r=1,2,\ldots,p, \qquad (21.18)$$

где $Q_{1r0}(\tau)$ — вектор размерности k_r $(r=1,2,\ldots,p)$, образованный из соответствующих компонент вектора $Q_{10}(\tau)$.

Так как

$$\det[W_{r0}(\tau)-\lambda_{10}(\tau)E_{k_r}]\neq 0, \quad r=2,3,\ldots,p, \qquad (21.19)$$

при любом $\tau\in[0,L]$, то из (21.18) следует, что

$$Q_{1r0}(\tau)\equiv 0 \qquad (21.20)$$

для всех $r=2,3,\ldots,p$.

При $r=1$ уравнение (21.18), согласно (18.7), обращается в уравнение

$$I_1Q_{110}(\tau)=0, \qquad (21.21)$$

где I_1 имеет вид

$$I_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\end{bmatrix}. \qquad (21.22)$$

Переходя в уравнении (21.21) к координатной форме и учитывая при этом вид матрицы I_1, получим

$$\{q_{10}(\tau)\}_2=\{q_{10}(\tau)\}_3=\ldots=\{q_{10}(\tau)\}_{k_1}=0. \qquad (21.23)$$

Компонента $\{q_{10}(\tau)\}_1$ остается произвольной. Для получения нетривиального решения положим

$$\{q_{10}(\tau)\} = 1. \tag{21.24}$$

Таким образом, вектор $Q_{10}(\tau)$ нами определен. На основании (21.20), (21.23), (21.24) он имеет вид

$$Q_{10}(\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{21.25}$$

Зная вектор $Q_{10}(\tau)$, из соотношения (21.14) определим вектор $U_{10}(\tau)$:

$$U_{10}(\tau) = T(\tau) Q_{10}(\tau), \tag{21.26}$$

т. е. $U_{10}(\tau)$ есть собственный вектор матрицы $A_0(\tau)$, соответствующий собственному числу $\lambda_{10}(\tau)$.

Перейдем теперь к определению векторов $Q_{1s}(\tau)$ и функций $\lambda_{1s}(\tau)$ $(s = 1, 2, \ldots)$. Для этого воспользуемся векторным уравнением (21.16), которое, согласно (18.3), так же, как и уравнение (21.15), распадается на p уравнений

$$[W_{r0}(\tau) - \lambda_{10}(\tau) E_{r_k}] Q_{1rs}(\tau) = \sum_{k=0}^{s-1} Q_{1kr}(\tau) \lambda_{1s-k}(\tau) + \overline{H}_{1rs}(\tau) \tag{21.27}$$

$$(r = 1, 2, \ldots, p, \quad s = 1, 2, \ldots),$$

в которых $Q_{1rs}(\tau)$, $\overline{H}_{1rs}(\tau)$ — векторы размерности k_r $(r = 1, 2, \ldots, p)$, образованные из компонент векторов $Q_{1s}(\tau)$, $\overline{H}_{1s}(\tau)$.

Так как для всех $r = 2, \ldots, p$ определитель системы (21.27) не равен нулю, то

$$Q_{1rs}(\tau) = [W_{r0}(\tau) - \lambda_{10}(\tau) E_{k_r}]^{-1} \left[\sum_{k=0}^{s-1} Q_{1k_r}(\tau) \lambda_{1s-k}(\tau) + \overline{H}_{1rs}(\tau) \right] \tag{21.28}$$

$$(r = 2, 3, \ldots, p; \quad s = 1, 2, \ldots),$$

причем, согласно (21.13),

$$Q_{1rs}(\tau) = 0, \quad r = 2, \ldots, p; \quad s = 1, 2, \ldots, k_1 - 1. \tag{21.29}$$

Все последующие векторы $Q_{1rs}(\tau)$ $(r = 2, 3, \ldots, p;\ s = k_1,\ k_1 + 1, \ldots)$ определяются из соотношения (21.28), правая часть которого, однако, содержит функции $\lambda_{11}(\tau)$, $\lambda_{12}(\tau), \ldots$, подлежащие определению.

При $r=1$ уравнение (21.27) на основании (18.4) может быть записано следующим образом:

$$I_1 Q_{11s}(\tau) = \sum_{k=0}^{s-1} Q_{11k}(\tau)\lambda_{1s-k}(\tau) + \overline{H}_{11s}(\tau) \qquad (s=1,2,\ldots). \quad (21.30)$$

Отсюда, учитывая вид матрицы I_1, заключаем, что первые компоненты векторов $Q_{11s}(\tau)$ $(s=1,2,\ldots)$ остаются произвольными. Поэтому их можно принять равными нулю, т. е.

$$\{q_{1s}(\tau)\}_1 = 0 \qquad (s=1,2,\ldots). \quad (21.31)$$

Остальные компоненты векторов $Q_{11s}(\tau)$ $(s=1,2,\ldots)$ так же, как и все компоненты векторов $Q_{1rs}(\tau)$ $(r=2,3,\ldots,p;\ s=1,2,\ldots)$, как это следует из уравнения (21.30), выражаются опять-таки через неизвестные функции $\lambda_{1s}(\tau)$ $(s=1,2,\ldots)$, к определению которых мы сейчас и переходим.

Ввиду того, что последняя строка матрицы I_1 состоит из нулей, последнее скалярное уравнение в системе (21.30) имеет вид

$$\sum_{k=0}^{s-1} \{q_{1k}(\tau)\}_{k_1}\lambda_{1s-k}(\tau) + \{h_{1s}(\tau)\}_{k_1} = 0 \qquad (s=1,2,\ldots). \quad (21.32)$$

Полученное уравнение (21.32) дает возможность определить неизвестные функции $\lambda_{11}(\tau)$, $\lambda_{12}(\tau), \ldots$. В самом деле, как это будет показано ниже, k_1 компоненты векторов $Q_{1s}(\tau)$ $(s=1,2,\ldots)$ определенным образом выражаются через функции $\lambda_{1s}(\tau)$ $(s=1,2,\ldots)$. Поэтому, подставляя в уравнение (21.32) найденные выражения для $\{q_{1k}(\tau)\}_{k_1}$, мы сможем из него найти функции $\lambda_{1s}(\tau)$ $(s=1,2,\ldots)$.

Перейдем к установлению выше упомянутой зависимости. Для этого, положив в уравнении (21.30) $s=1$, имеем

$$I_1 Q_{111}(\tau) = Q_{110}(\tau)\lambda_{11}(\tau). \quad (21.33)$$

Переходя здесь к координатной форме и учитывая вид матрицы I_1 и вектора $Q_{110}(\tau)$, а также (21.13), находим

$$\begin{gathered} \{q_{11}(\tau)\}_2 = \lambda_{11}(\tau), \\ \{q_{11}(\tau)\}_3 = \ldots = \{q_{11}(\tau)\}_{k_1} = 0. \end{gathered} \quad (21.34)$$

Пусть $s=2$. Тогда уравнение (21.30) запишется так:

$$I_1 Q_{112}(\tau) = Q_{110}(\tau)\lambda_{12}(\tau) + Q_{111}(\tau)\lambda_{11}(\tau). \quad (21.35)$$

Отсюда

$$\{q_{12}(\tau)\}_2 = \lambda_{12}(\tau),$$

$$\{q_{12}(\tau)\}_3 = \{q_{11}(\tau)\}_2\lambda_{11}(\tau) = [\lambda_{11}(\tau)]^2, \qquad (21.36)$$
$$\{q_{12}(\tau)\}_4 = \ldots = \{q_{12}(\tau)\}_{k_1} = 0.$$

При $s=3$ из уравнения (21.30) находим

$$\begin{gathered}\{q_{13}(\tau)\}_2 = \lambda_{13}(\tau),\\ \{q_{13}(\tau)\}_3 = 2\lambda_{11}(\tau)\lambda_{12}(\tau),\\ \{q_{14}(\tau)\}_4 = [\lambda_{11}(\tau)]^3,\\ \{q_{13}(\tau)\}_5 = \ldots = \{q_{13}(\tau)\}_{k_1} = 0.\end{gathered} \qquad (21.37)$$

Таким образом, мы видим, что k_1-ые компоненты векторов $Q_{110}(\tau)$, $Q_{111}(\tau)$, $Q_{112}(\tau)$, $Q_{113}(\tau)$ равны нулю. Полагая в уравнении (21.30) $s=4, \ldots, k_1-2$, нетрудно показать, что k_1-ые компоненты векторов $Q_{114}(\tau), \ldots, Q_{11k_1-2}(\tau)$ также равны нулю, т. е.

$$\{q_{1s}(\tau)\}_{k_1} = 0, \qquad 0 \leqslant s \leqslant k_1 - 2. \qquad (21.38)$$

Что касается k_1-ой компоненты вектора Q_{11k_1-1}, то она равна

$$\{q_{1k_1-1}(\tau)\}_{k_1} = [\lambda_{11}(\tau)]^{k_1-1}. \qquad (21.39)$$

Тогда, положив в скалярном уравнении (21.32) $s=k_1$ (при $1 \leqslant s \leqslant k_1-1$ данное уравнение в силу (21.13), (21.38) обращается в тождество), имеем

$$\{q_{1k_1-1}(\tau)\}_{k_1}\lambda_{11}(\tau) + \{\bar{h}_{1k_1}(\tau)\}_{k_1} = 0. \qquad (21.40)$$

Отсюда, учитывая равенство (21.39), находим

$$\lambda_{11}(\tau) = \sqrt[k_1]{-\{h_{1k_1}(\tau)\}_{k_1}}\,. \qquad (21.41)$$

Так как, согласно (21.13), (21.17),

$$-\{h_{1k_1}(\tau)\}_{k_1} = \{T^{-1}(\tau)[A_1(\tau)U_0(\tau) - U_0'(\tau)]\}_{k_1} = \{C(\tau)Q_0(\tau)\}_{k_1} = \\ = \{c(\tau)\}_{k_1,1}, \qquad (21.42)$$

то окончательно

$$\lambda_{11}(\tau) = \sqrt[k_1]{\{c(\tau)\}_{k_1,1}}. \qquad (21.43)$$

Таким образом, функция $\lambda_{11}(\tau)$ определена. Зная ее, из соотношений (21.31), (21.34) находим вектор

$$Q_{11}(\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_{11}(\tau) \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для определения функции $\lambda_{12}(\tau)$ положим в уравнении (21.32) $s = k_1 + 1$. Будем иметь

$$\{q_{1k_1-1}(\tau)\}_{k_1}\lambda_{12}(\tau) + \{q_{1k_1}(\tau)\}_{k_1}\lambda_{11}(\tau) + \{\bar{h}_{1k_1+1}(\tau)\}_{k_1} = 0. \quad (21.44)$$

Вектор $\bar{H}_{1k_1+1}(\tau)$ в силу (21.13) содержит в себе уже найденный нами вектор $Q_{11}(\tau)$. Поэтому в уравнении (21.44) компонента $\{\bar{h}_{1k_1+1}(\tau)\}_{k_1}$ известна.

Что касается компоненты $\{q_{1k_1}(\tau)\}_{k_1}$, то из уравнения (21.30) находим

$$\{q_{1k_1}(\tau)\}_{k_1} = \{q_{1k_1-1}(\tau)\}_{k_1-1}\lambda_{11}(\tau) + \{q_{1k_1-2}(\tau)\}_{k_1-1}\lambda_{12}(\tau) + \{\bar{h}_{1k_1}(\tau)\}_{k_1-1}. \quad (21.45)$$

Ввиду того, что $\{q_{12}(\tau)\}_2 = \lambda_{12}(\tau)$, то, применяя рекуррентную формулу

$$\{q_{1k_1-1}(\tau)\}_{k_1-1} = \{q_{1k_1-2}(\tau)\}_{k_1-2}\lambda_{11}(\tau) + \{q_{1k_1-3}(\tau)\}_{k_1-2}\lambda_{12}(\tau) \quad (21.46)$$

и учитывая, что

$$\{q_{1k_1-3}(\tau)\}_{k_1-2} = [\lambda_{11}(\tau)]^{k_1-3}, \quad (21.47)$$

из равенства (21.45) имеем

$$\{q_{1k_1}(\tau)\}_{k_1} = (k_1 - 1)[\lambda_{11}(\tau)]^{k_1-2}\lambda_{12}(\tau) + \{\bar{h}_{1k_1}(\tau)\}_{k_1-1}. \quad (21.48)$$

Тогда, подставляя значение $\{q_{1k_1}(\tau)\}_{k_1}$ в уравнение (21.44) и решая его относительно $\lambda_{12}(\tau)$, получаем

$$\lambda_{12}(\tau) = -\frac{\{\bar{h}_{1k_1+1}(\tau)\}_{k_1} + \lambda_{11}(\tau)\{\bar{h}_{1k_1}(\tau)\}_{k_1-1}}{k_1[\lambda_{11}(\tau)]^{k_1-1}}. \quad (21.49)$$

Следует отметить, что знаменатель в правой части последнего выражения, согласно условию теоремы и (21.43), не обращается в нуль при любом $\tau \in [0, L]$.

Таким образом, определив функцию $\lambda_{12}(\tau)$, мы тем самым определили и вектор $Q_{112}(\tau)$, ибо

$$Q_{112}(\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_{12}(\tau) \\ [\lambda_{11}(\tau)]^2 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (21.50)$$

Подобным образом можно найти и все последующие функции $\lambda_{13}(\tau)$, $\lambda_{14}(\tau), \ldots$, а значит, и векторы $Q_{113}(\tau)$, $Q_{114}(\tau), \ldots$. Для этого нужно в уравнении (21.32) соответственно положить $s = k_1 + 2$, $k_1 + 3, \ldots$ и, используя исходное векторное уравнение (21.30), найти зависимость k_1-ых компонент векторов $Q_{11k_1+1}(\tau)$, $Q_{11k_1+2}(\tau), \ldots$ от скалярных функций $\lambda_{11}(\tau)$, $\lambda_{12}(\tau), \ldots$.

Однако такой подход к определению неизвестных функций $\lambda_{11}(\tau)$, $\lambda_{12}(\tau), \ldots$ оказывается несколько громоздким, ибо он требует находить каждый раз зависимость соответствующих компонент от упомянутых выше функций. Установление такой зависимости с увеличением числа s приводит зачастую к кропотливым исследованиям.

Поэтому возникает вопрос, нельзя ли, исходя из уравнений (21.30), получить новое скалярное уравнение, которое было бы эквивалентно уравнению (21.32) и которое содержало бы только неизвестные функции $\lambda_{11}(\tau)$, $\lambda_{12}(\tau), \ldots$.

Оказывается, что такое уравнение можно получить, использовав при этом нильпотентное свойство матрицы I_1, которое заключается в том, что

$$I_1^m = 0, \qquad m \geqslant k_1. \tag{21.51}$$

Действительно,

$$I_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}, \ldots,$$

$$I_1^j = \left[\begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{matrix}\right] \left.\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{matrix}}\right\} k_1 - j, \tag{21.52}$$

откуда следует справедливость соотношения (21.51).

Нетрудно заметить, что матрица I_1, кроме свойства (21.51), обладает также и другим, очень важным для нас свойством, а именно: при умножении векторного уравнения (21.30) слева на матрицу I_1 все его скалярные уравнения поднимаются на одно место вверх. В частности, последнее уравнение в системе (21.30), т. е. уравнение (21.32), становится при этом предпоследним. Поэтому, умножая уравнение (21.30) слева на матрицу I_1 k_1-1 раз, мы получаем новое векторное уравнение

$$I_1^{k_1}Q_{11s}(\tau) = I_1^{k_1-1}\sum_{i=0}^{s-1} Q_{11i}(\tau)\lambda_{1s-i}(\tau) + I_1^{k_1-1}H_{11s}(\tau) \quad (21.53)$$

$$(s = 1, 2, \ldots),$$

в котором уравнение (21.32) будет занимать первое место.

Уравнение (21.53), согласно (21.51), приобретает вид

$$I_1^{k_1-1}\sum_{i=0}^{s-1} Q_{11i}(\tau)\lambda_{1s-i}(\tau) + I_1^{k_1-1}\overline{H}_{11s}(\tau) = 0. \quad (21.54)$$

Левую часть последнего уравнения подвергнем некоторому преобразованию, использовав при этом исходную систему уравнений (21.30). Для этого уравнение (21.54) запишем следующим образом:

$$I_1^{k_1-2}\sum_{i=0}^{s-1} I_1Q_{11i}(\tau)\lambda_{1s-i}(\tau) + I_1^{k_1-1}\overline{H}_{11s}(\tau) = 0. \quad (21.55)$$

Так как вектор $I_1Q_{110}(\tau)$ в силу (21.21) равен нулевому вектору, а вектор $I_1Q_{11j}(\tau)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ в силу (21.30) равен

$$I_1Q_{11j}(\tau) = \sum_{j_0=0}^{j} Q_{11j_0}(\tau)\lambda_{1j-j_0}(\tau) + \overline{H}_{11j}(\tau), \quad j = 1, 2, \ldots, \quad (21.56)$$

то уравнение (21.55) может быть записано в виде

$$I_1^{k-2}\sum_{i=1}^{s-1}\sum_{i_0=0}^{i-1}[Q_{11i_0}(\tau)\lambda_{1i-i_0}(\tau) + \overline{H}_{11i}(\tau)]\lambda_{1s-i}(\tau) + I^{k_1-1}\overline{H}_{11s}(\tau) = 0,$$

или

$$I_1^{k_1-2}\sum_{i=1}^{s-1}\sum_{i_0=0}^{i-1} Q_{11i_0}(\tau)\lambda_{1i-i_0}(\tau)\lambda_{1s-i}(\tau) + I_1^{k_1-2}\sum_{i=k_1}^{s-1}\overline{H}_{11i}(\tau)\lambda_{1s-i}(\tau) +$$

$$+ I_1^{k_1-1}\overline{H}_{11s}(\tau) = 0 \quad (21.57)$$

$$(s = 1, 2, \ldots).$$

Если $k_1 > 2$, то, применяя к уравнению (21.57) те же преобразования, что и к уравнению (21.54), получаем

$$I_1^{k_1-3}\sum_{i=2}^{s-1}\sum_{i_1=1}^{i-1}\sum_{i_0=0}^{i_1-1} Q_{11i_0}(\tau)\lambda_{1i_1-i_0}(\tau)\lambda_{1i-i_1}(\tau)\lambda_{1s-i}(\tau) +$$

$$+I_1^{k_1-3}\sum_{i=k+1}^{s-1}\sum_{i_1=k}^{i-1}\overline{H}_{11i_1}\lambda_{1i-i_1}(\tau)\lambda_{1s-i}(\tau)+I_1^{k_1-2}\sum_{i=k}^{s-1}\overline{H}_{11i}\lambda_{1s-i}(\tau)+$$

$$+I_1^{k_1-1}\overline{H}_{11s}(\tau)=0. \qquad (21.58)$$

Продолжая этот процесс еще $k-3$ раза, получим окончательно

$$\sum_{i_{k_1-1}=k_1-1}^{s-1}\ \sum_{i_{k_1-2}=k_1-2}^{i_{k_1-1}-1}\cdots\sum_{i_0=0}^{i_1-1}Q_{11i_0}(\tau)\lambda_{1i_1-i_0}(\tau)\lambda_{1i_2-i_1}(\tau)\ldots\lambda_{1s-i_{k_1-1}}(\tau)+$$

$$+F_{11s}(\tau)=0 \qquad (s=1,2,\ldots), \qquad (21.59)$$

где

$$F_{11s}(\tau)=I_1^{k_1-1}\overline{H}_{11s}(\tau)+I_1^{k_1-2}\sum_{i_1=k_1}^{s-1}\overline{H}_{11i_1}\lambda_{1s-i_1}(\tau)+$$

$$+I_1^{k_1-3}\sum_{i_2=k_1+1}^{s-1}\ \sum_{i_1=k_1}^{i_2-1}\overline{H}_{11i_1}(\tau)\lambda_{1i_2-i_1}(\tau)\lambda_{1s-i_2}(\tau)+\ldots+$$

$$+\sum_{i_{k_1-1}=2k_1-2}^{s-1}\ \sum_{i_{k_1-2}=2k_1-3}^{i_{k_1-1}-1}\cdots\sum_{i_1=k_1}^{i_2-1}\overline{H}_{11i_1}(\tau)\lambda_{1i_2-i_1}(\tau)\ldots\lambda_{1s-i_{k_1-1}}(\tau) \qquad (21.60)$$

$$(s=1,2,\ldots).$$

Полученное уравнение (21.59) является уравнением, из которого без особого труда определяются неизвестные функции $\lambda_{11}(\tau)$, $\lambda_{12}(\tau)$, ... При этом следует отметить, что так как уравнение (21.59) получено из уравнения (21.30) путем умножения последнего на особую матрицу $I_1^{k_1-1}$, то уравнение (21.59) нельзя считать эквивалентным уравнению (21.30). Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать в векторном уравнении (21.59) только первое скалярное уравнение, которое, согласно предыдущим рассуждениям, тождественно с уравнением (21.32).

Итак, положим в уравнении (21.59) $s=k$ (легко видеть, что при $1\leqslant s\leqslant k_1-1$ оно обращается в тождество). Будем иметь

$$Q_{110}(\tau)[\lambda_{11}(\tau)]^{k_1}+F_{11k}(\tau)=0. \qquad (21.61)$$

Откуда, учитывая (21.25), находим

$$\lambda_{11}(\tau)=\sqrt[k_1]{-\{f_{1k_1}(\tau)\}}\,. \qquad (21.62)$$

Так как, согласно (21.60),

$$F_{11k_1}(\tau) = I_1^{k_1-1}\overline{H}_{11k_1}(\tau) = \begin{bmatrix} \{h_{1k_1}(\tau)\}_{k_1} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{21.63}$$

то, учитывая (21.42), получим

$$\lambda_{11}(\tau) = \sqrt[k_1]{\{c(\tau)\}_{k_1 1}}. \tag{21.64}$$

Таким образом, функция $\lambda_{11}(\tau)$, определяемая из уравнения (21.59), совпадает с функцией $\lambda_{11}(\tau)$, определяемой уравнением (21.32).

Положив теперь в уравнении (21.59) $s = k_1 + 1$, имеем

$$k_1[\lambda_{11}(\tau)]^{k_1-1}\lambda_{12}Q_{110}(\tau) + [\lambda_{11}(\tau)]^{k_1}Q_{111}(\tau) + F_{11k_1+1}(\tau) = 0. \tag{21.65}$$

Беря здесь первое скалярное уравнение, находим

$$\lambda_{12}(\tau) = -\frac{\{f_{1k_1+1}(\tau)\}_1}{k_1[\lambda_{11}(\tau)]^{k_1-1}}. \tag{21.66}$$

Компонента $\{f_{1k_1+1}(\tau)\}_1$ представляет собой уже известную функцию, ибо вектор $F_{11k_1+1}(\tau)$ равен

$$F_{11k_1+1}(\tau) = I_1^{k_1-1}\overline{H}_{11k_1+1}(\tau) + I_1^{k_1-2}\overline{H}_{11k_1}(\tau)\lambda_{11}(\tau). \tag{21.67}$$

Таким образом, функция $\lambda_{12}(\tau)$ нами найдена. Зная ее, из (21.30) без особых затруднений можно найти вектор $Q_{112}(\tau)$.

Таким же путем определяются и все последующие функции $\lambda_{13}(\tau)$, $\lambda_{14}(\tau), \ldots$. В частности, положив в уравнении (21.59) $s = k_1 + m - 1$ (m — любое натуральное число) и считая при этом функции $\lambda_{11}(\tau), \ldots, \lambda_{1m-1}(\tau)$ уже известными, находим

$$\lambda_{1m}(\tau) = -\frac{\{\widetilde{f}_{1k_1+m-1}(\tau)\}_1}{k_1[\lambda_{11}(\tau)]^{k_1-1}}, \tag{21.68}$$

где $\{\widetilde{f}_{1k_1+m-1}(\tau)\}_1$ — первая компонента вектора

$$\widetilde{F}_{11k_1+m-1}(\tau) = I_1^{k_1-1}\overline{H}_{11k_1+m-1}(\tau) + I_1^{k_1-2}\sum_{j_1=k_1}^{k_1+m-2}\overline{H}_{11j_1}(\tau)\lambda_{1m+k_1-1-j_1}(\tau) +$$

$$+ I_1^{k_1-3}\sum_{j_2=k_1+1}^{k_1+m-2}\sum_{j_1=k_1}^{j_2-1}\overline{H}_{11j_1}\lambda_{1j_2-j_1}(\tau)\lambda_{1k_1+m-1-j_2}(\tau) + \ldots +$$

$$+ \sum_{j_{k_1-1}=2k_1-2}^{k_1+m-2}\;\sum_{j_{k_1-2}=2k_1-3}^{j_{k_1-1}-1}\cdots\sum_{j_1=k_1}^{j_2-1}\overline{H}_{11j_1}(\tau)\lambda_{1j_2-j_1}(\tau)\ldots\lambda_{1k_1+m-1-j_{k_1-1}}(\tau) +$$

$$+Q_{110}(\tau)\sum_{h=1}^{k_1-1}\ \sum_{j_{k_1-h}=k_1-h+1}^{k_1+m-2-h}\ \sum_{j_{k_1-h-1}=k_1-h-1}^{j_{k_1-h}-1}\cdots\sum_{j_1=1}^{j_2-1}\lambda_{1j_1}(\tau)\lambda_{1j_2-j_1}(\tau)\cdots$$

$$\cdots\lambda_{1k_1+m-h-j_{k_1-h}}(\tau)(\lambda_{11}(\tau))^{h-1}. \qquad (21.69)$$

Как уже вспоминалось выше, зная функции $\lambda_{1s}(\tau)$, $s=1,2,\ldots$, из системы уравнений (21.30) можно легко определить неизвестные векторы $Q_{11s}(\tau)$, $s=1, 2, \ldots$. В частности, использовав системы уравнений (21.33), (21.35), которые получаются соответственно из системы (21.30) при $s=1, 2$, находим

$$Q_{111}(\tau)=\begin{bmatrix}0\\ \lambda_{11}(\tau)\\ 0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ 0\end{bmatrix},\quad Q_{112}(\tau)=\begin{bmatrix}0\\ \lambda_{12}(\tau)\\ \lambda_{11}^2(\tau)\\ 0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ 0\end{bmatrix}. \qquad (21.70)$$

Определив $Q_{1s}(\tau)$, мы можем, исходя из соотношения (21.14), найти и векторы

$$U_{1s}(\tau)=T(\tau)Q_{1s}(\tau) \qquad (s=0,1,\ldots).$$

Способ, предложенный здесь для определения векторов $U_{1s}(\tau)$ и функций $\lambda_{1s+1}(\tau)$ $(s=0,1,\ldots)$, может быть применен также и для определения векторов $U_{js}(\tau)$ и функций $\lambda_{js+1}(\tau)$ $(j=2,3,\ldots,p)$, входящих в решение. При этом оказывается, что векторы

$$Q_{js}(\tau)=T^{-1}(\tau)U_{js}(\tau) \qquad (j=2,3,\ldots,p) \qquad (21.71)$$

определяются по формулам, полученным для векторов $Q_{1s}(\tau)$, если в последних заменить функцию $\lambda_{1s+1}(\tau)$ функцией $\lambda_{js+1}(\tau)$

$$(j=2,3,\ldots,p; \qquad s=0,1,2,\ldots).$$

2. Для полного доказательства теоремы осталось указать еще способ определения коэффициентов вектора $P(\tau,\mu_1)$ и функции $z(\tau,\mu_1)$. Для этого воспользуемся соотношением (21.10). Сравнивая в данном соотношении коэффициенты при одинаковых степенях параметра $\mu_1=\sqrt[k_1]{\varepsilon}$, получаем

$$[A_0(\tau)-i\nu(\tau)E]P_s(\tau)=\sum_{j_0=0}^{s-1}U_{1j_0}(\tau)z_{s-j_0}(\tau)+\Pi_s(\tau) \qquad (21.72)$$

$$(s=0,1,2,\ldots),$$

где

$$\Pi_s(\tau) = P'_{s-k_1}(\tau) - b_{s-k_1}(\tau) - \sum_{i=1}^{\left[\frac{s}{k_1}\right]} A_i(\tau) P_{s-k_1-i}(\tau). \quad (21.73)$$

Положив

$$R_s(\tau) = T^{-1}(\tau) P_s(\tau), \quad (21.74)$$

уравнение (21.72) на основании (18.2) и (21.14) может быть представлено следующим образом:

$$[W_0(\tau) - i\nu(\tau) E] R_s(\tau) = \sum_{j_0=0}^{s-1} Q_{1j_0}(\tau) z_{s-j_0}(\tau) + \overline{\Pi}_s(\tau), \quad (21.75)$$

где

$$\overline{\Pi}_s(\tau) = T^{-1}(\tau) \Pi_s(\tau) \qquad (s = 0, 1, \ldots). \quad (21.76)$$

Система (21.75) в силу (18.3) распадается на p подсистем вида

$$[W_{j0}(\tau) - i\nu(\tau) E] R_{js}(\tau) = \sum_{j_0=0}^{s-1} Q_{11j_0}(\tau) z_{s-j_0}(\tau) + \overline{\Pi}_{sj}(\tau), \quad (21.77)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, p; \qquad s = 0, 1, \ldots).$$

Так как

$$\det [W_{j0}(\tau) - i\nu(\tau) E] \neq 0 \quad (21.78)$$

для всех $\tau \in [0, L]$ и $j = 2, 3, \ldots, p$, то из подсистем (21.77) следует

$$R_{js}(\tau) = [W_{j0}(\tau) - i\nu(\tau) E]^{-1} \left[\sum_{j_0=0}^{s-1} Q_{11j_0}(\tau) z_{s-j_0}(\tau) + \overline{\Pi}_{sj}(\tau) \right] \quad (21.79)$$

$$(j = 2, 3, \ldots, p; \quad s = 0, 1, 2, \ldots).$$

Поэтому остается рассмотреть уравнение

$$[W_{10}(\tau) - i\nu(\tau) E] R_{1s}(\tau) = \sum_{j_0=0}^{s-1} Q_{11j_0}(\tau) z_{s-j_0}(\tau) + \overline{\Pi}_{1s}(\tau) \quad (21.80)$$

$$(s = 0, 1, 2, \ldots).$$

В «резонансном» случае функция $i\nu(\tau)$ становится равной в некоторых точках сегмента $[0, L]$ функции $\lambda_{10}(\tau)$. Следовательно, при этих значениях τ

$$W_{10}(\tau) - i\nu(\tau) E = I_1. \quad (21.81)$$

Тогда уравнение (21.80) запишется в виде

$$I_1 R_{1s}(\tau) = \sum_{j_0=0}^{s-1} Q_{11j_0}(\tau) z_{s-j_0}(\tau) + \overline{\Pi}_{1s}(\tau). \quad (21.82)$$

В полученном уравнении (21.82) первые компоненты векторов $R_{1s}(\tau)$ $(s=0, 1, 2, \ldots)$ остаются произвольными. Положим их равными нулю:

$$\{r_{1s}(\tau)\}_1 = 0 \qquad (s=0, 1, 2, \ldots). \tag{21.83}$$

Для определения остальных компонент вектора $R_{1s}(\tau)$ перейдем в уравнении (21.82) к координатной форме. Будем иметь

$$\{r_{1s}(\tau)\}_l = \sum_{j_0=0}^{s-1} \{q_{1j_0}(\tau)\}_{l-1} z_{s-j_0}(\tau) + \{p_{1s}(\tau)\}_{l-1}, \tag{21.84}$$

$$(2 \leqslant l \leqslant k_1),$$

$$\sum_{j_0=0}^{s-1} \{q_{1j_0}(\tau)\}_{k_1} z_{s-j_0}(\tau) + \{p_{1s}(\tau)\}_{k_1} = 0 \tag{21.85}$$

$$(s=0, 1, 2, \ldots).$$

Полученное уравнение (21.85) дает возможность определять неизвестные функции $z_s(\tau)$, $s=0, 1, \ldots$, а, зная последние, из уравнения (21.84) могут быть найдены компоненты вектора $R_{1s}(\tau)$. В самом деле, уравнение (21.85), согласно (21.38), может быть записано в виде

$$\sum_{j_0=k_1-1}^{s-1} \{q_{1j_0}(\tau)\}_{k_1} z_{s-j_0}(\tau) + \{p_{1s}(\tau)\}_{k_1} = 0. \tag{21.86}$$

Последнее уравнение в силу (21.73) и (21.76) для всех $0 \leqslant s \leqslant k_1 - 2$ обращается в тождество. При $s = k_1 - 1$ получаем

$$[\lambda_{11}(\tau)]^{k_1-1} z_0(\tau) = 0. \tag{21.87}$$

Так как $\lambda_{11}(\tau)$, согласно ее построению, нигде на сегменте $[0, L]$ в ноль не обращается, то из (21.87) следует, что

$$z_0(\tau) = 0. \tag{21.88}$$

Положив теперь в уравнении (21.86) $s = k_1$, имеем

$$[\lambda_{11}(\tau)]^{k_1-1} z_1(\tau) + \{p_{1k_1}(\tau)\}_{k_1} = 0. \tag{21.89}$$

Отсюда

$$z_1(\tau) = -\frac{\{p_{1k_1}(\tau)\}_{k_1}}{[\lambda_{11}(\tau)]^{k_1-1}}. \tag{21.90}$$

Считая функции $z_0(\tau)$, $z_1(\tau), \ldots, z_{m-1}(\tau)$, где m — любое натуральное число, уже определенными, мы можем, исходя из уравнения (21.86), найти и функцию $z_m(\tau)$. Действительно, положив в уравнении (21.86) $s=k_1+m-1$, получим

$$[\lambda_{11}(\tau)]^{k_1-1}z_m(\tau)+\sum_{j_0=k_1}^{k_1+m-2}\{q_{1j_0}(\tau)\}_{k_1}z_{s-j_0}(\tau)+\{p_{1k_1+m-1}(\tau)\}_{k_1}=0, \tag{21.91}$$

или

$$z_m(\tau)=-\frac{\sum\limits_{j_0=k_1}^{k_1+m-2}\{q_{1j_0}(\tau)\}_{k_1}z_{s-j_0}(\tau)+\{p_{1k_1+m-1}(\tau)\}_{k_1}}{[\lambda_{11}(\tau)]^{k_1-1}}. \tag{21.92}$$

Таким образом, наш алгоритм позволяет при любом натуральном m находить функцию $z_m(\tau)$. Зная последние, из соотношения (21.84) могут быть определены компоненты векторов $R_{1s}(\tau)$ $(s=0,1,\ldots)$. В самом деле, положив в нем $s=0$, получим

$$\{r_{10}(\tau)\}_l=\{q_{10}(\tau)\}_{l-1}z_0(\tau)=0. \tag{21.93}$$

Отсюда в силу (21.88) находим

$$\{r_{10}(\tau)\}_l=0,\quad 2\leqslant l\leqslant k_1. \tag{21.94}$$

При $s=1$ из (21.84) имеем

$$\{r_{11}(\tau)\}_l=\{q_{10}(\tau)\}_{l-1}z_1(\tau), \tag{21.95}$$

или, учитывая вид вектора $Q_{10}(\tau)$, получаем

$$\begin{gathered}\{r_{11}(\tau)\}_2=z_1(\tau),\\ \{r_{11}(\tau)\}_3=\ldots=\{r_{11}(\tau)\}_{k_1}=0.\end{gathered} \tag{21.96}$$

Подобным образом определяются и все последующие векторы $R_{12}(\tau)$, $R_{13}(\tau),\ldots$. Зная их, из соотношения (21.74) могут быть найдены и векторы

$$R_s(\tau)=T(\tau)R_s(\tau)\qquad (s=0,1,\ldots). \tag{21.97}$$

Таким образом, указав способ определения коэффициентов формальных рядов (21.6), мы и доказали теорему IV. 1.

Примечание 1. Доказанная только что теорема позволяет получить не только формальное частное решение системы (17.1′), но и формальное общее решение данной системы. Действительно, функция $\lambda_{11}(\tau)$ (можно показать, что и все последующие функции $\lambda_{1s}(\tau)$ $(s=2,\ldots)$) согласно (21.43) имеет k_1 различных значений. Следовательно, для собственного числа $\lambda_{10}(\tau)$, исходя из (21.4), мы можем получить k_1 различных линейно-независимых частных решений. Тогда для собственного числа $\lambda_{j0}(\tau)$ $(j=1,\ldots,p)$ мы получим k_j частных формальных линейно-независимых решений. Но так как $\sum\limits_{j=1}^{p}k_j=$

$= n$, то мы в силу сказанного выше получаем n частных линейно-независимых решений, а значит для системы (17.1′) мы можем построить формальное общее решение.

Примечание 2. Теорема, подобная теореме IV.1, имеет место и в «нерезонансном» случае.

Теорема IV. 2. *Если выполняются условия теоремы IV.1, то формальное общее решение системы в «нерезонансном» случае может быть представлено в виде*

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{p} U_j(\tau, \mu_j) \tilde{h}_j(t, \varepsilon) + \tilde{P}(\tau, \varepsilon) e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \tag{21.98}$$

$$\frac{d\tilde{h}_j}{dt} = \lambda_j(\tau, \mu_j) \tilde{h}_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, p, \tag{21.99}$$

где $U_j(\tau, \mu_j)$, $\lambda_j(\tau, \mu_j)$ — те же, что и в теореме IV.1, а $\tilde{P}(\tau, \varepsilon)$ — n-мерный вектор, допускающий разложение

$$\tilde{P}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \tilde{P}_s(\tau). \tag{21.100}$$

Доказательство данной теоремы сводится к определению коэффициентов вектора $\tilde{P}(\tau, \varepsilon)$. Повторяя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы III.3, находим

$$\tilde{P}_s(\tau) = [A_0(\tau) - i\nu(\tau)E]^{-1}\Phi_s(\tau), \qquad s = 0, 1, 2, \ldots, \tag{21.101}$$

где $\Phi_s(\tau)$ определяется из соотношения (17.26′), в котором $H_s(\tau)$ следует заменить на $\Phi_s(\tau)$.

§ 22. Пример

В качестве примера рассмотрим уравнение четвертого порядка

$$\frac{d^4y}{dt^4} + \varepsilon p_1(\tau, \varepsilon) \frac{d^3y}{dt^3} + 2p_2(\tau, \varepsilon) \frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon p_3(\tau, \varepsilon) \frac{dy}{dt} + p_4(\tau, \varepsilon) y =$$

$$= \varepsilon b_1(\tau, \varepsilon) e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \tag{22.1}$$

где $p_i(\tau, \varepsilon)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, $b_1(\tau, \varepsilon)$ — действительные, достаточное число раз дифференцируемые по $\tau = \varepsilon t$ функции, которые допускают представление

$$p_i(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s p_{is}(\tau), \quad b_1(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s b_{s1}(\tau), \tag{22.2}$$
$$i = 1, 2, 3, 4,$$

ε — малый действительный параметр.

Уравнение (22.1) при помощи замены переменных

$$y = x_1, \quad \frac{dy}{dt} = x_2, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = x_3, \quad \frac{d^3y}{dt^3} = x_4 \tag{22.3}$$

приводится к эквивалентной системе уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = x_4, \tag{22.4}$$

$$\frac{dx_4}{dt} = -[p_4(\tau, \varepsilon)x_1 + \varepsilon p_3(\tau, \varepsilon)x_2 + 2p_2(\tau, \varepsilon)x_3 + \varepsilon p_1(\tau, \varepsilon)x_4] + \\ + \varepsilon b_1(\tau, \varepsilon)e^{i\theta(t, \varepsilon)}.$$

Вводя в рассмотрение векторы

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad b(\tau, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_1(\tau, \varepsilon) \end{bmatrix} \tag{22.5}$$

и матрицу

$$A(\tau, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -p_4(\tau, \varepsilon) & -\varepsilon p_3(\tau, \varepsilon) & -2p_2(\tau, \varepsilon) & -\varepsilon p_1(\tau, \varepsilon) \end{bmatrix}, \tag{22.6}$$

систему (22.4) можно записать в виде (17.1').

Будем предполагать в дальнейшем, что на сегменте $[0, L]$ имеют место соотношения

$$p_{40}(\tau) \equiv [p_{20}(\tau)]^2, \quad p_{20}(\tau) > 0. \tag{22.7}$$

В силу этого корни характеристического уравнения (12.3) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \lambda_{10}(\tau) &\equiv \lambda_{30}(\tau) = i\sqrt{p_{20}(\tau)}, \\ \lambda_{20}(\tau) &\equiv \lambda_{40}(\tau) = -i\sqrt{p_{20}(\tau)}, \end{aligned} \tag{22.8}$$

т. е. матрица $A_0(\tau)$ имеет на сегменте $[0, L]$ тождественно кратные собственные числа. Будем допускать, что и соответствующие элементарные делители имеют такую же кратность.

Тогда в качестве преобразующей матрицы $T(\tau)$, приводящей матрицу $A_0(\tau)$ к жордановой форме, можно взять матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_{10}(\tau) & 1+\lambda_{10}(\tau) & \lambda_{20}(\tau) & 1+\lambda_{20}(\tau) \\ \lambda_{10}^2(\tau) & \lambda_{10}(\tau)[2+\lambda_{10}(\tau)] & \lambda_{20}^2(\tau) & \lambda_{20}(\tau)[2+\lambda_{20}(\tau)] \\ \lambda_{10}^3(\tau) & \lambda_{10}^2(\tau)[3+\lambda_{10}(\tau)] & \lambda_{20}^3(\tau) & \lambda_{20}^2(\tau)[3+\lambda_{20}(\tau)] \end{bmatrix}. \tag{22.9}$$

Матрица, обратная к матрице $T(\tau)$, имеет вид

$$T^{-1}(\tau)=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2+\lambda_{10}(\tau) & \dfrac{\lambda_{10}(\tau)+3}{\lambda_{10}(\tau)} & -\dfrac{1}{\lambda_{10}(\tau)} & -\dfrac{1+\lambda_{10}(\tau)}{\lambda_{10}^3(\tau)} \\ -\lambda_{10}(\tau) & -1 & \dfrac{1}{\lambda_{10}(\tau)} & \dfrac{1}{\lambda_{10}^2(\tau)} \\ 2+\lambda_{20}(\tau) & \dfrac{\lambda_{20}(\tau)+3}{\lambda_{20}(\tau)} & -\dfrac{1}{\lambda_{20}(\tau)} & -\dfrac{1+\lambda_{20}(\tau)}{\lambda_{20}^3(\tau)} \\ -\lambda_{20}(\tau) & -1 & \dfrac{1}{\lambda_{20}(\tau)} & \dfrac{1}{\lambda_{20}^2(\tau)} \end{bmatrix}. \tag{22.10}$$

Каноническая матрица $W_0(\tau)$ в данном случае представима следующим образом:

$$W_0(\tau)=\begin{bmatrix} i\sqrt{p_{20}(\tau)} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{p_{20}(\tau)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{p_{20}(\tau)} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i\sqrt{p_{20}(\tau)} \end{bmatrix}. \tag{22.11}$$

Функции $\{c(\tau)\}_{r_j, r_{j-1}+1}$ $(j=1,2;\ r_j=k_1+k_2)$, которые в данном случае превращаются в функции $\{c(\tau)\}_{21}$, $\{c(\tau)\}_{41}$, имеют соответственно вид

$$\{c(\tau)\}_{21}= \frac{2p_{21}(\tau)\lambda_{10}^2(\tau)+p_{10}(\tau)\lambda_{10}^3(\tau)+2\lambda_{10}^2(\tau)\lambda_{10}'(\tau)-p_{41}(\tau)-p_{31}(\tau)\lambda_{10}(\tau)}{4\lambda_{10}^2(\tau)},$$

$$\{c(\tau)\}_{41}= \frac{2p_{21}(\tau)\lambda_{20}^2(\tau)+p_{10}(\tau)\lambda_{20}^3(\tau)+2\lambda_{20}^2(\tau)\lambda_{20}'(\tau)-p_{41}(\tau)-p_{31}(\tau)\lambda_{20}(\tau)}{4\lambda_{20}^2(\tau)}. \tag{22.12}$$

Следовательно, если функции $\{c(\tau)\}_{21}$, $\{c(\tau)\}_{41}$ нигде на сегменте $[0, L]$ не обращаются в нуль, то для получения формального решения системы могут быть использованы теоремы IV. 1 и IV. 2. В частности, согласно теореме IV. 1, формальное решение системы (22.4) в первом приближении представимо в виде

$$x(t, \varepsilon) = \Big\{[U_{10}(\tau) + \sqrt{\varepsilon}U_{11}(\tau)]\Big[c_1 e^{\int_0^t (\lambda_{10}(\tau) - i\nu(\tau) + \sqrt{\varepsilon}\lambda_{11}(\tau))dt} + \\ + \sqrt{\varepsilon}\int_0^t z_1(\tau_1) e^{\int_{t_1}^t (\lambda_{10}(\tau) - i\nu(\tau) + \sqrt{\varepsilon}\lambda_{11}(\tau))dt} dt_1\Big] + \sqrt{\varepsilon}p_1(\tau)\Big\} e^{i\theta(t,\varepsilon)} + \\ + c_2 e^{\int_0^t [\lambda_{20}(\tau) + \sqrt{\varepsilon}\lambda_{21}(\tau)]dt} [U_{20}(\tau) + \sqrt{\varepsilon}U_{21}(\tau)], \qquad (22.13)$$

где

$$\lambda_{11}(\tau) = +\sqrt{\{c(\tau)\}_{21}},$$

$$\lambda_{21}(\tau) = +\sqrt{\{c(\tau)\}_{41}},$$

$$U_{j0}(\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_{j0}(\tau) \\ \lambda_{j0}^2(\tau) \\ \lambda_{j0}^3(\tau) \end{bmatrix}, \qquad j = 1, 2,$$

$$U_{j1}(\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \lambda_{j0}(\tau) \\ \lambda_{j0}(\tau)[2 + \lambda_{j0}(\tau)] \\ \lambda_{j0}^2(\tau)[3 + \lambda_{j0}(\tau)] \end{bmatrix} \lambda_{j1}(\tau), \quad j = 1,2, \qquad (22.14)$$

$$P_1(\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \lambda_{10}(\tau) \\ \lambda_{10}(\tau)[2 + \lambda_{10}(\tau)] \\ \lambda_{10}^2(\tau)[3 + \lambda_{10}(\tau)] \end{bmatrix} z_1(\tau),$$

где

$$z_1(\tau) = \frac{1}{4\lambda_{10}^3(\tau)}, \qquad (22.15)$$

c_1, c_2 — постоянные интегрирования.

Имея решение системы (22.4), нетрудно, используя (22.3), написать в «резонансном» случае решение уравнения (22.1).

Аналогично, используя теорему IV.2, можно получить решение для уравнения (22.1) и в «нерезонансном» случае.

§ 23. Асимптотический характер решения

В настоящем параграфе покажем, что построенные в § 21 формальные решения при определенных условиях имеют асимптотический характер в том смысле, что вектор $x^{(m)}(t, \varepsilon)$, образованный из вектора $x(t, \varepsilon)$ путем обрыва формальных рядов на m-ых членах, сколь угодно мало отличается по норме от точного решения системы (17.1′) при фиксированном m и при достаточно малых значениях параметра ε.

Для этого в дальнейшем будем рассматривать подробно лишь «резонансный» случай. Случай «нерезонанса» исследуется аналогично.

Итак, введем в рассмотрение вектор

$$x^{(m)} = [U_1^{(m)}(\tau, \mu_1) h_1^{(m)} + P^{(m)}(\tau, \mu_1)] e^{i\theta(t,\varepsilon)} + \sum_{k=2}^{p} U_k^{(m)}(\tau, \mu_k) h_k^{(m)}, \tag{23.1}$$

$$\frac{dh_1^{(m)}}{dt} = [\lambda^{(m)}(\tau, \mu_1) - i\nu(\tau)] h_1^{(m)} + z^{(m)}(\tau, \mu_1), \tag{23.2}$$

$$\frac{dh_k^{(m)}}{dt} = \lambda_k^{(m)}(\tau, \mu_k) h_k^{(m)} \quad (k = 2, 3, \ldots, p), \tag{23.3}$$

где

$$\begin{gathered} U_j^{(m)}(\tau, \mu_j) = \sum_{s=0}^{m} \mu_j^s U_{js}(\tau), \quad \lambda_j^{(m)}(\tau, \mu_j) = \sum_{s=0}^{m} \mu_j^s \lambda_{js}(\tau), \\ P^{(m)}(\tau, \mu_1) = \sum_{s=0}^{m} \mu_1^s P_s(\tau), \quad z^{(m)}(\tau, \mu_1) = \sum_{s=0}^{m} \mu_1^s z_s(\tau). \end{gathered} \tag{23.4}$$

Тогда может быть доказана следующая лемма.

Лемма IV.1. *Если выполняются условия теоремы IV.1 и при* $\tau \in [0, L]$

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{s=0}^{k_j-1} \mu_j^s \lambda_{js}(\tau)\right) \leqslant 0 \tag{23.5}$$

для всех $j = 1, 2, \ldots, p$, *то*

$$\frac{dx^{(m)}}{dt} = A(\tau, \varepsilon) x^{(m)} + b(\tau, \varepsilon) e^{i\theta(t,\varepsilon)} + \mu_1^{m+2-k_1} R_m^*(\tau, \mu_1), \tag{23.6}$$

где $R_m^*(\tau, \mu_1)$ — *вектор, регулярный относительно параметра* $\mu_1 = \sqrt[k_1]{\varepsilon}$ *в окрестности точки* $\varepsilon = 0$.

Для доказательства леммы подставим вектор $x^{(m)}$ в следующее выражение:

$$\frac{dx^{(m)}}{dt} - A(\tau, \varepsilon)\, x^{(m)} - \varepsilon b(\tau, \varepsilon)\, e^{i\theta(t, \varepsilon)}.$$

Будем иметь

$$\frac{dx^{(m)}}{dt} - A(\tau, \varepsilon)\, x^{(m)} - \varepsilon b(\tau, \varepsilon)\, e^{i\theta(t,\varepsilon)} =$$

$$= \Big\{\varepsilon \frac{dU_1^{(m)}(\tau, \mu_1)}{d\tau} h_1^{(m)} + U_1^{(m)}(\tau, \mu_1)\,[(\lambda_1^{(m)}(\tau, \mu_1) - i\nu(\tau))\, h_1^{(m)} +$$

$$+ z^{(m)}(\tau, \mu_1)] + \varepsilon \frac{dP^{(m)}(\tau, \mu_1)}{d\tau} +$$

$$+ i\nu(\tau)\,[U_1^{(m)}(\tau, \mu_1)\, h_1^{(m)} + P^{(m)}(\tau, \mu_1)]\Big\}\, e^{i\theta(t,\varepsilon)} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{p} \left[\varepsilon \frac{dU_k^{(m)}}{d\tau} h_k^{(m)} + U_k^{(m)}(\tau, \mu_k)\, \lambda_k^{(m)}(\tau, \mu_k)\, h_k^{(m)}\right] -$$

$$- A(\tau, \varepsilon)\,\{[U_1^{(m)}(\tau, \mu_1)\, h_1^{(m)} + P^{(m)}(\tau, \mu_1)]\, e^{i\theta(t,\varepsilon)} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{p} U_k^{(m)}(\tau, \mu_k)\, h_k^{(m)}\} - \varepsilon b(\tau, \varepsilon)\, e^{i\theta(t,\varepsilon)}$$

или

$$\frac{dx^{(m)}}{dt} = A(\tau, \varepsilon)\, x^{(m)} + \varepsilon b(\tau, \varepsilon)\, e^{i\theta(t,\varepsilon)} + [U_1^{(m)}(\tau, \mu_1)\, \lambda_1^{(m)}(\tau, \mu_1) +$$

$$+ \varepsilon \frac{dU_1^{(m)}}{d\tau} - A(\tau, \varepsilon)\, U_1^{(m)}(\tau, \mu_1)]\, h_1^{(m)} e^{i\theta(t,\varepsilon)} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{p} [U_k^{(m)}(\tau, \mu_k)\, \lambda_k^{(m)}(\tau, \mu_k) + \varepsilon \frac{dU_k^{(m)}}{d\tau} -$$

$$- A(\tau, \varepsilon)\, U_k^{(m)}(\tau, \mu_k)]\, h_k^{(m)} +$$

$$+ \{U_1^{(m)}(\tau, \mu_1)\, z^{(m)}(\tau, \mu_1) + \varepsilon \frac{dP^{(m)}}{d\tau} -$$

$$- [A(\tau, \varepsilon) - i\nu(\tau)\, E]\, P^{(m)}(\tau, \mu_1) - \varepsilon b(\tau, \varepsilon)\}\, e^{i\theta(t,\varepsilon)}. \qquad (23.7)$$

Векторы, стоящие в правой части соотношения (23.7) при функциях $h_1^{(m)} e^{i\theta(t,\varepsilon)}$, $h_k^{(m)}$ $(k = 2, 3, \ldots, p)$ и $e^{i\theta(t,\varepsilon)}$, согласно теореме IV.1, имеют порядок малости соответственно μ_1^{m+1}, μ_k^{m+1} $(k = 2, \ldots, p)$ и μ_1^{m+1}. Поэтому

$$\frac{dx^{(m)}}{dt} = A(\tau, \varepsilon) x^{(m)} + b(\tau, \varepsilon) e^{i\theta(t,\varepsilon)} + \mu_1^{m+1} R_{1m}(\tau, \mu_1) h_1^{(m)} + \tag{23.8}$$

$$+ \sum_{k=2}^{p} \mu_k^{m+1} R_{km}(\tau, \mu_k) h_k^{(m)} + \mu_1^{m+1} F_m(\tau, \mu_1),$$

где векторы $R_{jm}(\tau, \mu_j)$, $F_m(\tau, \mu_1)$ ограничены в окрестности точки $\mu_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$.

Интегрируя уравнения (23.2), (23.3) и учитывая (23.5), находим

$$|h_1^{(m)}| \leqslant \frac{N_1}{\mu_1^{k_1-1}}, \quad |h_k^{(m)}| \leqslant N_k, \quad k = 2, 3, \ldots, p, \tag{23.9}$$

где N_j — постоянные, не зависящие от параметра μ_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$, изменяющегося в интервале $0 < \mu_j \leqslant \mu_{j0}$.

Тогда система дифференциальных уравнений (23.8) может быть записана в виде

$$\frac{dx^{(m)}}{dt} = A(\tau, \varepsilon) x^{(m)} + b(\tau, \varepsilon) e^{i\theta(t,\varepsilon)} + \mu_1^{m+2-k_1} \overline{R}_{1m}(\tau, \mu_1) + \tag{23.10}$$

$$+ \sum_{k=2}^{p} \mu_k^{m+1} \overline{R}_{km}(\tau, \mu_k) + \mu_1^{m+1} F_m(\tau, \mu_1),$$

где $\overline{R}_{jm}(\tau, \mu_j)$ — векторы, ограниченные в окрестности $\mu_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$.

Пусть корни уравнения (12.3) пронумерованы так, что

$$k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_p. \tag{23.11}$$

Тогда

$$\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_p. \tag{23.12}$$

Следовательно,

$$\mu_1^{m+2-k_1} \overline{R}_{1m} + \sum_{k=2}^{p} \mu_k^{m+1} \overline{R}_{km}(\tau, \mu_k) + \mu_1^{m+1} F_m(\tau, \mu_1) = O(\mu_1^{m+2-k_1}). \tag{23.13}$$

Отсюда следует справедливость соотношения (23.6).

Теорема IV.3. *Если выполняются условия леммы IV.1 и при* $t = 0$

$$x = x^{(m)}, \tag{23.14}$$

то для любых $L > 0$ *и* $0 < \mu_j \leqslant \mu_{j0}$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ *можно указать постоянную* C, *не зависящую от* ε, *что*

$$\| x - x^{(m)} \| \leqslant \mu_1^{m+2-2k_1} C. \tag{23.15}$$

Для доказательства данной теоремы представим точное решение системы (17.1′) в виде

$$x = [U_1^{(m)}(\tau, \mu_1) q_1 + P^{(m)}(\tau, \mu_1)] e^{i\theta(t,\varepsilon)} + \sum_{k=2}^{p} U_k^{(m)}(\tau, \mu_k) q_k. \tag{23.16}$$

Тогда вектор

$$y = x - x^{(m)} = \sum_{j=1}^{p} U_j^{(m)}(\tau, \mu_j) \eta_j, \tag{23.17}$$

где

$$\eta_1 = (q_1 - h_1^{(m)}) e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \quad \eta_k = q_k - h_k^{(m)} \qquad (k = 2, 3, \ldots, p), \tag{23.18}$$

будет удовлетворять системе

$$\frac{dy}{dt} = A(\tau, \varepsilon) y - \mu_1^{m+2-k_1} R_m^*(\tau, \mu_1). \tag{23.19}$$

Полученную систему (23.19), согласно (23.17), можно представить следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{p} U_j^{(m)}(\tau, \mu_j) \left[\frac{d\eta_j}{dt} - \lambda_j^{(m)}(\tau, \mu_j) \eta_j \right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \left[A(\tau, \varepsilon) U_j^{(m)}(\tau, \mu_j) - \right.$$

$$\left. - U_j^{(m)}(\tau, \mu_j) \lambda_j^{(m)}(\tau, \mu_j) - \varepsilon \frac{dU_j^{(m)}}{d\tau}(\tau, \mu_j) \right] \eta_j -$$

$$- \mu_1^{m+2-k_1} R_m^*(\tau, \mu_1)$$

или

$$\sum_{j=1}^{p} U_j^{(m)}(\tau, \mu_j) \left[\frac{d\eta_j}{dt} - \lambda_j^{(m)}(\tau, \mu_j) \eta_j \right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \mu_j^{m+1} R_{jm}(\tau, \mu_j) \eta_j - \mu_1^{m+2-k_1} R_m^*(\tau, \mu_1). \tag{23.20}$$

Систему (23.20) будем рассматривать как алгебраическую относительно скалярных величин $\frac{d\eta_j}{dt} - \lambda_j^{(m)}(\tau, \mu_j)\eta_j$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$. Нетрудно показать, исходя из построения векторов $U_j^{(m)}(\tau, \mu_j)^*$, что при $0 < \mu_j \leqslant \mu_{j0}$ ранг данной системы равен p. Поэтому данная система разрешима и

$$\frac{d\eta_j}{dt} = \lambda_j^{(m)}(\tau, \mu_j)\eta_j + \sum_{i=1}^{p} \mu_i^{m+1}\alpha_{ji}(\tau, \mu_i)\eta_i + \mu_1^{m+2-k_1}\beta_j(\tau, \mu_1)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, p), \tag{23.21}$$

где $\alpha_{ji}(\tau, \mu_i)$, $\beta_j(\tau, \mu_1)$ — функции, ограниченные в окрестности точки $\mu_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$.

Тогда, интегрируя систему (23.21), учитывая при этом, что $\eta_j = 0$ при $t = 0$, находим

$$\eta_j = \mu_1^{m+2-k_1}\int_0^t \beta_j(\tau_1, \mu_1) e^{\int_{t_1}^{t} \lambda_j^{(m)}(\tau,\mu_j)dt} dt_1 +$$

$$+ \int_0^t \sum_{i=1}^{p} \mu_i^{m+1}\alpha_{ji}(\tau_1, \mu_i)\eta_i e^{\int_{t_1}^{t} \lambda_j^{(m)}(\tau,\mu_j)dt} dt_1. \tag{23.22}$$

Предполагая, что $m \geqslant k_j - 1$, из соотношения (23.22), согласно (23.5), получим оценку

$$|\eta_j| \leqslant \mu_1^{m+2-k_1}\beta_j^* N_j^* t + N_j^* \int_0^t \sum_{i=1}^{p} \alpha_{ji}^* \mu_i^{m+1} |\eta_i| \, dt, \tag{23.23}$$

где

$$\beta_j^* = \max|\beta_j(\tau, \mu_1)|, \quad \alpha_{ji}^* = \max|\alpha_{ji}(\tau, \mu_i)|,$$

$$N_j^* = \max e^{\int_{t_1}^{t} \lambda_j^{(m)}(\tau,\mu_j)dt}, \quad \tau \in [0, L], \quad 0 < \mu_j \leqslant \mu_{j0} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, p). \tag{23.24}$$

---

* $U_j^{(m)}(\tau, \mu_j) = U_{j0}(\tau) + \sum_{s=1}^{m} \mu_j^s U_{js}(\tau) \to U_{j0}(\tau)$ при $\mu_j \to 0$.

Обозначая

$$\max_{l} \alpha^*_{jl} = \alpha^*_j \tag{23.25}$$

и учитывая (23.12), из неравенства (23.23) имеем

$$|\eta_j| \leqslant \mu_1^{m+2-k_1}\beta^*_j N^*_j t + \alpha^* N^* \mu_1^{m+1} \int_0^t \sum_{i=1}^{p} |\eta_i|\, dt \quad (j = 1,\ 2, \ldots, p). \tag{23.26}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\omega = \sum_{i=1}^{p} |\eta_i|. \tag{23.27}$$

Тогда, складывая почленно неравенства (23.26), находим

$$\omega \leqslant \mu_1^{m+1} N_1 \int_0^t \omega dt + \mu_1^{m+2-k_1} N_2 t, \tag{23.28}$$

где

$$N_1 = \sum_{j=1}^{p} \beta^*_j N^*_j, \quad N_2 = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j N^*_j. \tag{23.29}$$

Применяя к неравенству (23.28) лемму I.1 из главы I, имеем

$$\omega \leqslant \mu_1^{m+2-2k_1} C_{1m}, \tag{23.30}$$

где

$$C_{1m} = N_2 L e^{\mu_{10}^{m+1-k_1} N_1 L}. \tag{23.31}$$

Тогда из равенства (23.27) и неравенства (23.30) следует, что

$$|\eta_j| \leqslant C_{1m} \mu_1^{m+2-2k_1} \quad (j = 1,\ 2, \ldots, p). \tag{23.32}$$

Переходя в равенстве (23.17) к норме, получим

$$\| x - x^{(m)} \| \leqslant \sum_{j=1}^{p} \| U_j^{(m)}(\tau,\ \mu_j) \| \, |\eta_j|. \tag{23.33}$$

Так как векторы $U_j^{(m)}(\tau, \mu_j)$ $(j = 1,\ 2, \ldots, p)$ дифференцируемы по τ на сегменте $[0, L]$, то для всех

$$\tau \in [0, L] \text{ и } 0 < \mu_j \leqslant \mu_{j0} \quad (j = 1,\ 2, \ldots, p),$$

$$\| U_j^{(m)}(\tau,\ \mu_j) \| \leqslant M, \tag{23.34}$$

где M — константа, не зависящая от ε.

Следовательно, соотношения (23.30), (23.33), (23.34) доказывают неравенство (23.15), в котором

$$C = pMC_{1m}. \tag{23.35}$$

Теорема доказана.

Отметим, что полученная оценка (23.15) и указывает на асимптотический характер решения $x^{(m)}$. В самом деле, из неравенства (23.15) следует, что для всех $m > 2k_1$ $-2x^{(m)} \to x$ при $\mu_1 \to 0$.

Примечание. Применяя способ, изложенный в настоящем параграфе, можно получить оценку, аналогичную к оценке (23.15) и для «нерезонансного» случая, причем оказывается, что в данном случае оценка улучшается, а именно: при выполнении условий теоремы IV.3 в случае «нерезонанса» имеет место соотношение

$$\| x - x^{(m)} \| \leqslant \mu_1^{m+1-k_1} C, \tag{23.36}$$

где C — постоянная, не зависящая от ε. Из неравенства (23.36) следует, что для всех $m > k_1 - 1$ $x_m \to x$ при $\mu_1 \to 0$.

§ 24. Асимптотическое решение при наличии нескольких кратных элементарных делителей

В § 21 подробно был описан процесс построения формального решения системы (17.1′) в случае, когда кратность элементарных делителей совпадает с кратностью соответствующих корней характеристического уравнения (12.3).

В настоящем параграфе приведем основные результаты, полученные в работе [111], для более общего случая, когда некоторому корню характеристического уравнения соответствуют несколько кратных элементарных делителей.

Итак, пусть корню $\lambda_j(\tau)$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ соответствует $r_j (1 < r_j < k_j)$ элементарных делителей, каждый из которых имеет соответственно кратность s_{j1}, $s_{j2}, \ldots, s_{jr_j}$ $(s_{j1} + s_{j2} + \ldots + s_{jr_j} = k_j;$ $j = 1, 2, \ldots, p)$. В этом случае, следуя теории линейной алгебры, для матрицы $A_0(\tau)$ можно указать такую неособенную матрицу $T(\tau)$, что

$$W_0(\tau) = T^{-1}(\tau) A_0(\tau) T(\tau) = \begin{bmatrix} W_{k_1}(\tau) & & & & 0 \\ & W_{k_2}(\tau) & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & W_{k_p}(\tau) \end{bmatrix}, \tag{24.1}$$

где

$$W_{k_j}(\tau)=\begin{bmatrix} W_{s_{j1}}(\tau) & & & & \\ & W_{s_{j2}}(\tau) & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & W_{s_{jr_j}}(\tau) \end{bmatrix},$$

$$W_{s_{jn_j}}=\begin{bmatrix} \lambda_{j_0}(\tau) & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_{j_0}(\tau) & 1 & 0 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & \lambda_{j_0}(\tau) \end{bmatrix} \qquad (24.2)$$

$$(n_j=1,\ 2,\ldots,r_j,\ j=1,\ 2,\ldots,p).$$

Тогда в «резонансном» случае может быть справедлива теорема.

Теорема IV.4. *Если* $A(\tau,\ \varepsilon)$, $b(\tau,\ \varepsilon)$, $\nu(\tau)$ *имеют по* τ *производных всех порядков и для всех* $\tau\in[0,\ L]$ m_{jn_j}*—компонента вектора*

$$C_j(\tau)=T^{-1}(\tau)\ [A(\tau)\ T_{m_{jn_j-1}+1}(\tau)-T'_{m_{jn_{j-1}}+1}(\tau)], \qquad (24.3)$$

где $T_{m_{jn_{j-1}}+1}(\tau)$*—столбец матрицы* $T(\tau)$ *с номером* $m_{jn_j-1}+1$

$$(m_{jn_j}=k_1+k_2+\ldots+k_{j-1}+s_{j1}+s_{j2}+\ldots+s_{jn_j};\quad n_j=1,\ 2,\ldots,r_j;$$
$$j=1,\ 2,\ldots,p)$$

удовлетворяет соотношению

$$\{c_j(\tau)\}_{m_{jn_j}}\neq 0,^* \qquad (24.4)$$

то частное формальное решение системы (17.1′) может быть представлено в виде

$$x=\sum_{n_1=1}^{r_1}[U_{1n_1}(\tau,\ \mu_{1n_1})\,h_{1n_1}+P_{n_1}(\tau,\ \mu_{1n_1})]\,e^{i\theta(t,\varepsilon)}+$$

---

* Предполагается также, что на сегменте [0, L] выполняются «условные» уравнения — уравнения, не содержащие неизвестных [76, стр. 83].

$$+\sum_{k=2}^{p}\sum_{n_k=1}^{r_k} U_{kn_k}(\tau, \mu_{kn_k}) h_{kn_k}, \tag{24.5}$$

$$\frac{dh_{1n_1}}{dt} = [\lambda_{1n_1}(\tau, \mu_{1n_1}) - i\nu(\tau)] h_{1n_1} + zn_1(\tau, \mu_{1n_1})$$
$$(n_1 = 1, 2, \ldots, r_1), \tag{24.6}$$

$$\frac{dh_{kn_k}}{dt} = \lambda_{kn_k}(\tau, \mu_{kn_k}) h_{kn_k} \qquad (n_k = 1, 2, \ldots, r_k,$$
$$k = 2, 3, \ldots, p), \tag{24.7}$$

где $U_{jn_j}(\tau, \mu_{jn_j})$, $P_{n_1}(\tau, \mu_{1n_1})$ — *n-мерные векторы;* h_{jn_j}, $z_{n_1}(\tau, \mu_{1n_1})$ — *скалярные функции, допускающие формальные разложения*

$$U_{jn_j}(\tau, \mu_{jn_j}) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu_{jn_j}^s U_{jn_js}(\tau),$$

$$\lambda_{jn_j}(\tau, \mu_{jn_j}) = \sum_{s=1}^{\infty} \mu_{jn_j}^s \lambda_{jn_js}(\tau) + \lambda_{j_0}(\tau), \tag{24.8}$$

$$P_{n_1}(\tau, \mu_{1n_1}) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu_{1n_1}^s P_{n_1s}(\tau), \quad z_{n_1}(\tau, \mu_{1n_1}) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu_{1n_1}^s z_{n_1s}(\tau)$$
$$(n_j = 1, 2, \ldots, r_j; \qquad j = 1, 2, \ldots, p),$$

где μ_{jn_j} — *параметр, связанный с параметром* ε *соотношением*

$$\mu_{jn_j} = \sqrt[s_{jn_j}]{\varepsilon} \; (n_j = 1, 2, \ldots, r_j, \; j = 1, 2, \ldots, p). \tag{24.9}$$

На доказательстве данной теоремы мы не останавливаемся (отсылая при этом читателя к работе [111]).

Для «нерезонансного» случая имеет место такая теорема.

Теорема IV.5. *Если выполняются условия теоремы IV.4, то формальное общее решение системы (17.1′) в «нерезонансном» случае может быть представлено в виде*

$$x = \sum_{j=1}^{p}\sum_{n_j=1}^{r_j} U_{jn_j}(\tau, \mu_{jn_j}) \tilde{h}_{jn_j} + \tilde{\Phi}(\tau, \varepsilon) e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \tag{24.10}$$

$$\frac{d\tilde{h}_{jn_j}}{dt} = \lambda_{jn_j}(\tau, \mu_{in_j}) \tilde{h}_{jn_j}, \tag{24.11}$$
$$(n_j = 1, 2, \ldots, r_j, \; j = 1, 2, \ldots, p),$$

где $U_{jn_j}(\tau, \mu_{jn_j}), \lambda_{jn_j}(\tau, \mu_{jn_j})$*—те же, что и в теореме IV.4, а* $\widetilde{\Phi}(\tau, \varepsilon)$*— n-мерный вектор, допускающий формальное разложение*

$$\widetilde{\Phi}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \widetilde{P}_s(\tau). \qquad (24.12)$$

Асимптотический характер решения (24.5) доказывает следующая теорема.

Теорема IV.6. *Если выполняются условия теоремы IV.4 и*

$$x\big|_{t=0} = x^{(m)}\big|_{t=0}; \ \mathrm{Re}\Big(\lambda_{j_0}(\tau) + \sum_{s=1}^{s_{jn_j}-1} \mu^s_{jn_j}\lambda_{jn_js}\Big) \leqslant 0, \qquad (24.13)$$

где $x^{(m)}$*—вектор, определяемый соотношениями (24.5)—(24.7), в которых ряды (24.8) оборваны на m-ых членах, то для любых* $L > 0$ *и* $0 < \mu_{jn_j} \leqslant \bar{\mu}_{jn_j}$ *можно указать такие постоянные* C_{jn_j}*, не зависящие от параметра* ε*, что*

$$\|x - x^{(m)}\| \leqslant \sum_{j=1}^{p} \sum_{n_j=1}^{r_j} \mu_{jn_j}^{m+2-2s_{jn_j}} C_{jn_j}. \qquad (24.14)$$

В «нерезонансном» случае может быть получена оценка

$$\|x - x^{(m)}\| \leqslant \sum_{j=1}^{p} \sum_{n_j=1}^{r_j} \mu_{jn_j}^{m+1-s_{jn_j}} C_{jn_j}. \qquad (24.15)$$

Доказательство неравенств (24.14), (24.15) выполняется таким же способом, как и доказательство неравенства (23.15).

§ 25. Построение асимптотического решения при других достаточных условиях

При построении асимптотического решения системы (17.1′) при наличии кратных элементарных делителей мы потребовали, например, в случае, когда корню $\lambda_i(\tau)$ соответствует один элементарный делитель кратности k_j от коэффициентов системы, кроме неограниченной их дифференцируемости по τ, выполнения условия (21.2).

В настоящем параграфе мы указываем алгоритм построения асимптотического решения системы (17.1′) в том случае, когда условие (21.2) не удовлетворяется на сегменте $[0, L]$, т. е.

$$\{c(\tau)\}_{r_j r_{j-1}+1} \equiv 0 \qquad (25.1)$$

для всех $j = 1, 2, \ldots, p$ $(r_j = k_1 + k_2 + \ldots + k_j)$.

Однако при выполнении условия (25.1), как это показано в работах [113 — 114), нужно от матрицы $C(\tau) = T^{-1}(\tau)[A_1(\tau)T(\tau) - T'(\tau)]$ потребовать, чтобы

$$a_j(\tau) = \{c(\tau)\}_{r_j, r_{j-1}+2} + \{c(\tau)\}_{r_j-1,\ r_{j-1}+1} \neq 0 \qquad (25.2)$$

при любом $\tau \in [0, L]$ и всех $j = 1, 2, \ldots, p$.

Кроме этого, будем предполагать, что все числа $k_j (j = 1, 2, \ldots, p)$, обозначающие кратность соответствующих корней характеристического уравнения, удовлетворяют условию

$$k_j > 2 \ (j = 1, 2, \ldots, p). \qquad (25.3)$$

Если среди чисел k_j $(j = 1, 2, \ldots p)$ появляются числа, равные двум, то приведенный ниже алгоритм построения асимптотического решения системы (17.1') не может быть эффективным, так как он приводит нас к нахождению решения уравнения Риккати. Рассмотрение этого случая, названного нами «особым», мы отнесли к концу § 25 (см. примечание на стр. 164).

Итак, предполагая условие (25.3) выполненным, может быть доказана следующая теорема.

Теорема IV.7. *Если $A(\tau, \varepsilon)$, $b(\tau, \varepsilon)$, $\nu(\tau)$ на сегменте $[0, L)$ имеют производные по τ всех порядков и соответствующие элементы матрицы $C(\tau) = T^{-1}(\tau)\ [A_1(\tau)T(\tau) - T'(\tau)]$ удовлетворяют условиям (25.1) и (25.2), то формальное частное решение системы (17.1') в случае «резонанса» может быть представлено в виде*

$$x = [U_1(\tau, \mu_1)h_1 + P(\tau, \varepsilon)]\, e^{i\theta(t,\varepsilon)} + \sum_{k=2}^{p} U_k(\tau, \mu_k)h_k, \qquad (25.4)$$

$$\frac{dh_1}{dt} = [\lambda_1(\tau, \mu_1) - i\nu(\tau)]\, h_1 + z(\tau, \varepsilon), \qquad (25.5)$$

$$\frac{dh_k}{dt} = \lambda_k(\tau, \mu_k)h_k, \quad k = 2, 3, \ldots, p, \qquad (25.6)$$

где $U_j(\tau, \mu_j)\ (j = 1, 2, \ldots, p)$, $P(\tau, \varepsilon)$ — n-мерные векторы; $\lambda_j(\tau, \mu_j)$, $z(\tau, \varepsilon)$ — скалярные функции, допускающие формальное разложение в отличие от (21.7) по степеням параметра

$$\mu_j = \sqrt[k_j-1]{\varepsilon} \quad (j = 1, 2, \ldots, p), \qquad (25.7)$$

т. е.

$$U_j(\tau, \mu_j) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu_j^s U_{js}(\tau), \quad \lambda_j(\tau, \mu_j) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu_j^s \lambda_{js}(\tau), \qquad (25.8)$$

$$P(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s P_s(\tau), \quad z(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s z_s(\tau).$$

Доказательство. Если вектор x, определяемый соотношениями (25.4) — (25.6), суть формальное решение системы, то он должен ей удовлетворять. Поэтому, подставляя его в систему (17.1′), получим тождество. Потребуем, чтобы в полученном таким образом тождестве были равные коэффициенты при h_j и свободные члены. Вследствие чего будем иметь

$$[A(\tau, \varepsilon)-\lambda_j(\tau, \mu_j)E]\,U_j(\tau, \mu_j)=\varepsilon U_j'(\tau, \mu_j), \qquad (25.9)$$

$$[A(\tau, \varepsilon)-i\nu(\tau)E]\,P(\tau, \varepsilon)=U_1(\tau, \mu_1)z(\tau, \varepsilon)+\varepsilon(P'(\tau, \varepsilon)-b(\tau, \varepsilon)). \qquad (25.10)$$

1°. Для определения коэффициентов вектора $U_j(\tau, \mu_j)$ и функции $\lambda_j(\tau, \mu_j)$ воспользуемся соотношением (25.9). Сравнивая в нем коэффициенты при одинаковых степенях параметра μ_j, получаем

$$[A_0(\tau)-\lambda_{j_0}(\tau)E]\,U_{j_0}(\tau)=0, \qquad (25.11)$$

$$[A_0(\tau)-\lambda_{j_0}(\tau)E]\,U_{js}(\tau)=\sum_{l_0=1}^{s-1}U_{jl_0}(\tau)\lambda_{js-l_0}(\tau)+H_{js}(\tau), \qquad (25.12)$$

$$(s=1, 2,\ldots; \qquad j=1, 2,\ldots, p),$$

где

$$H_{js}(\tau)=U'_{js+1-k_j}(\tau)-\sum_{k=1}^{\left[\frac{s}{k_j-1}\right]}A_k(\tau)\,U_{js-k(k_j-1)}(\tau) \qquad (25.13)$$

$$(j=1, 2,\ldots, p).$$

В дальнейшем нам понадобится вектор

$$Q_{js}(\tau)=T^{-1}(\tau)\,U_{js}(\tau) \quad (s=0, 1,\ldots; \qquad j=1, 2,\ldots, p) \qquad (25.14)$$

и вектор размерности k_i $(i=1,\ldots, p)$

$$Q_{jis}(\tau)=\begin{bmatrix}\{q_{js}\}_{r_{i-1}+1}\\ \{q_{js}\}_{r_{i-1}+2}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \{q_{js}\}_{r_i}\end{bmatrix} \quad \begin{matrix}(r_i=k_1+k_2+\ldots+k_i;\\ i=1, 2,\ldots, p),\end{matrix} \qquad (25.15)$$

образованный из соответствующих компонент вектора $Q_{js}(\tau)$.

Тогда на основании (20.1) уравнение (25.11) может быть записано в виде

$$[W_i(\tau)-\lambda_{j_0}(\tau)E]\,Q_{ji_0}(\tau)=0\ \ (i,j=1,\ 2,\dots,\ p). \tag{25.16}$$

Так как

$$\det[W_i(\tau)-\lambda_{j_0}(\tau)E]\neq 0,\ i\ \neq j, \tag{25.17}$$

для всех $\tau\in[0,\ L]$, то из уравнения (25.16) следует

$$Q_{ji_0}(\tau)=0\ \ (i\neq j;\ \ i,\ j=1,\ 2,\dots,\ p). \tag{25.18}$$

При $i=j$ уравнение (25.16) приобретает вид

$$I_jQ_{jj_0}(\tau)=0\ \ (j=1,\ 2,\dots,\ p), \tag{25.19}$$

где

$$I_j=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}. \tag{25.20}$$

Отсюда находим

$$\{q_{j_0}(\tau)\}_{r_{j-1}+n_j}=0\ \ (n_j=2,\ 3,\dots,\ k_j;\qquad j=1,\dots,\ p). \tag{25.21}$$

Компоненту $\{q_{j_0}(\tau)\}_{r_{j-1}+1}$ в силу ее произвольности положим равной

$$\{q_{j_0}(\tau)\}_{r_{j-1}+1}=1\ \ (j=1,\ 2,\dots,\ p). \tag{25.22}$$

Таким образом, вектор $Q_{j_0}(\tau)$ определен. Зная его, из формулы (25.14) может быть найден вектор $U_{j_0}(\tau)\,(j=1,\ 2,\dots,\ p)$.

Для определения вектора $U_{js}(\tau)$ и функции $\lambda_{js}(\tau)$ воспользуемся уравнением (25.12), которое может быть записано следующим образом:

$$[W_i(\tau)-\lambda_{j_0}(\tau)E]\,Q_{jis}(\tau)=\sum_{k=0}^{s-1}Q_{jik}(\tau)\,\lambda_{js-k}(\tau)+\overline{H}_{jis}(\tau) \tag{25.23}$$

$$(j,\ i=1,\ 2,\dots,\ p;\qquad s=1,\ 2,\dots),$$

где

$$\overline{H}_{js}(\tau)=T^{-1}(\tau)\,H_{js}(\tau). \tag{25.24}$$

Тогда, учитывая соотношение (25.17), имеем

$$Q_{jis}(\tau) = [W_i(\tau) - \lambda_{j0}(\tau) E]^{-1} \left[\sum_{k=0}^{s-1} Q_{jis}(\tau) \lambda_{js-k}(\tau) + \widetilde{H}_{jis}(\tau) \right] \tag{25.25}$$

$$(i \neq j; \quad i, j = 1, 2, \ldots, p; \quad s = 1, 2, \ldots).$$

Заметим, так как

$$\overline{H}_{ji}(\tau) \equiv 0 \text{ при } 1 \leqslant s \leqslant k_j - 2,$$

то

$$Q_{jis}(\tau) \equiv 0, \ 1 \leqslant s \leqslant k_j - 2; \quad i \neq j. \tag{25.26}$$

Остается теперь исследовать уравнение (25.23) при $j = i$. В данном случае оно приобретает вид

$$I_j Q_{jjs}(\tau) = \sum_{k=0}^{s-1} Q_{jjk}(\tau) \lambda_{js-k}(\tau) + \overline{H}_{jjs}(\tau) \tag{25.27}$$

$$(s = 1, 2, \ldots; \quad j = 1, 2, \ldots, p).$$

В уравнении (25.27) первые компоненты векторов $Q_{jjs}(\tau)$ остаются произвольными. Для простоты положим

$$\{q_{js}(\tau)\}_{r_{j-1}+1} = 0 \ (r_j = k_1 + k_2 + \ldots + k_j, \ j = 1, 2, \ldots, p, \quad s = 1, 2, \ldots). \tag{25.28}$$

В остальные компоненты векторов $Q_{jjs}(\tau)$ входят неизвестные функции $\lambda_{js}(\tau)$, для определения которых служит последнее уравнение из системы (25.27):

$$\sum_{k=0}^{s-1} \{q_{jk}(\tau)\}_{r_j} \lambda_{js-k}(\tau) + \{\widetilde{h}_{js}(\tau)\}_{r_j} = 0 \ (s = 1, 2, \ldots; \ j = 1, 2, \ldots, p). \tag{25.29}$$

При исследовании уравнения (25.29) поступим так же, как и при исследовании уравнения (21.32), т. е. вместо уравнения (25.29) будем рассматривать эквивалентное ему первое скалярное уравнение в новой системе, полученной из системы (25.27) путем умножения последней слева на матрицу I_j $k_j - 1$ раз. Вследствие чего будем иметь

$$\sum_{i_{k_j-1}=k_j-1}^{s-1} \ \sum_{i_{k_j-2}=k_j-2}^{i_{k_j-1}-1} \cdots \sum_{i_0=0}^{i_1-1} Q_{jji_0}(\tau) \lambda_{ji_1-i_0}(\tau) \lambda_{ji_2-i_1}(\tau) \ldots \lambda_{js-i_{k_j-1}} + F_{jjs}(\tau) = 0 \ (s = 1, 2, \ldots), \tag{25.30}$$

где

$$F_{jjs}(\tau)=\sum_{i_{k_j-1}=2k_j-2}^{s-1}\ \sum_{i_{k_j-2}=2k_j-3}^{i_{k_j-1}-1}\ \cdots \sum_{i_1=k_j-1}^{i_2-1}\overline{H}_{jji_1}(\tau)\,\lambda_{ji_2-i_1}(\tau)\ldots\lambda_{js-i_{k_j-1}}(\tau)+$$

$$+\sum_{i_{k_j-1}=2k_j-3}^{s-1}\ \sum_{i_{k_j-2}=2k_j-4}^{i_{k_j-1}-1}\ \cdots \sum_{i_2=k_j-1}^{i_3-1} I_j\overline{H}_{jji_2}(\tau)\,\lambda_{ji_3-i_2}(\tau)\ldots\lambda_{js-i_{k_j-1}}(\tau)+\ldots+$$

$$+\sum_{i_{k_j-1}=k_j-1}^{s-1} I_j^{k_j-2}\,\overline{H}_{jji_{k_j-1}}(\tau)\,\lambda_{js-i_{k_j-1}}(\tau)+I_j^{k_j-1}\overline{H}_{jjs}(\tau) \qquad (25.31)$$

$$(s=1,\ 2,\ldots,\ j=1,\ 2,\ldots,\ p).$$

Положив в уравнении (25.30) $s=k_j-1$ (при $1\leqslant s\leqslant k_j-2$, согласно (25.13), оно обращается в тождество), имеем

$$F_{jjk_j-1}(\tau)=0 \qquad (25.32)$$

или, учитывая (25.31), имеем

$$I_j^{k_j-1}\overline{H}_{jjk_j-1}(\tau)=0,\ j=1,\ 2,\ldots,\ p, \qquad (25.33)$$

где

$$\overline{H}_{jjk_j-1}(\tau)=C_j(\tau)\,Q_{j0}(\tau), \qquad (25.34)$$

$C_j(\tau)$ — прямоугольная матрица размеров $(k_j\times n)$, образованная из соответствующих элементов матрицы $C(\tau)$.

Уравнение (25.33) на основании (25.1) обращается в тождество.

Пусть теперь $s=k_j$. Тогда уравнение (25.30) превращается в уравнение

$$Q_{jj_0}(\tau)\,[\lambda_{j_1}(\tau)]^{k_j}+F_{jjk_j}(\tau)=0, \qquad (25.35)$$

в котором

$$F_{jjk_j}(\tau)=I_j^{k_j-2}\overline{H}_{jjk_j-1}(\tau)\lambda_{j_1}(\tau)+I_j^{k_j-1}\left(Q'_{jj_1}(\tau)+C_j(\tau)\,Q_{j_1}(\tau)\right). \qquad (25.36)$$

Вектор $Q_{j_1}(\tau)$, как это следует из формул (25.26) и (25.27), имеет компоненты, равные нулю, кроме компоненты

$$\{q_{j_1}(\tau)\}_{r_{j-1}+2}=\lambda_{j_1}(\tau)\ \ (j=1,\ 2,\ldots,\ p). \qquad (25.37)$$

Тогда, учитывая условие (25.3), из уравнения (25.35) получим

$$[\lambda_{j_1}(\tau)]^{k_j}+\alpha_j(\tau)\,\lambda_{j_1}(\tau)=0\ \ (j=1,\ 2,\ldots,\ p) \qquad (25.38)$$

(при $k_j = 2$ первое уравнение в системе (23.35) обращается в уравнение Риккати).

Отсюда

$$\lambda_{j_1}^{(1)}(\tau) = 0, \quad \lambda_{j_1}^{(2)}(\tau) = \sqrt[k_j-1]{-\alpha_j(\tau)}, \quad j = 1, 2, \ldots, p. \tag{25.39}$$

При $s = k_j + 1$ из уравнения (25.30) имеем

$$k_j [\lambda_{j_1}(\tau)]^{k_j-1} \lambda_{j_2}(\tau) Q_{jj_0}(\tau) + [\lambda_{j_1}(\tau)]^{k_j} Q_{jj_1}(\tau) + F_{jjk_j+1}(\tau) = 0 \tag{25.40}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, p),$$

где

$$F_{jjk_j+1}(\tau) = I_j^{k_j-1} (Q'_{jj_2}(\tau) + C_j(\tau) Q_{j_2}(\tau)) + I_j^{k_j-2} \overline{H}_{jjk_j-1}(\tau) \lambda_{j_2}(\tau) + \tag{25.41}$$
$$+ I_j^{k_j-3} \overline{H}_{jjk_j}(\tau) \lambda_{j_1}(\tau) \, (j = 1, 2, \ldots, p).$$

Беря первое уравнение в системе (25.40) и учитывая, что

$$\{q_{j2}(\tau)\}_{r_{j-1}+2} = \lambda_{j2}(\tau), \tag{25.42}$$

будем иметь

$$\lambda_{j2}(\tau) [k_j (\lambda_{j1}(\tau))^{k_j-1} + \alpha_j(\tau)] + \beta_{j2}(\tau) = 0, \tag{25.43}$$

где

$$\beta_{j2}(\tau) = \sum_{i=1}^{n} {}^{*} \{C(\tau)\}_{r_j, i} \{q_{ji}(\tau)\}_2 + \{c(\tau)\}_{r_j-3,\, r_{j-1}-2} (\lambda_{j_1}(\tau))^2 \tag{25.44}$$

(в сумме $\sum^*$ опущено слагаемое, соответствующее $i = r_{j-1} + 2$; компоненты вектора $Q_{j2}(\tau)$, входящие в сумму $\sum^*$, выражаются через уже известную функцию $\lambda_{j1}(\tau)$).

Тогда из формулы (23.43) находим

$$\lambda_{j2}(\tau) = -\frac{\beta_{j2}(\tau)}{k_j \lambda_{j1}(\tau) + \alpha_j(\tau)} \quad (j = 1, 2, \ldots, p). \tag{25.45}$$

Таким же способом определяются и все последующие функции $\lambda_{js}(\tau)$ ($s = 3, 4, \ldots$). Так, например, положив в (23.30) $s = k_j + m - 1$ (m — любое натуральное число), имеем

$$\lambda_{jm}(\tau) = -\frac{\beta_{jm}(\tau)}{k_j (\lambda_{j1})^{k_j-1} + \alpha_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, p), \tag{25.46}$$

где

$$\beta_{jm}(\tau) = \sum_{i=1}^{n}{}^{*} \{c(\tau)\}_{r_j,i} \{q_{jm}(\tau)\}_i + \{c(\tau)\}_{r_j, r_{j-1}+2} \{\overline{h}_{jm}(\tau)\}_{r_{j-1}+1} +$$

$$+ \gamma_{jm}(\tau), \; j = 1, 2, \ldots, p, \tag{25.47}$$

$\gamma_{jm}(\tau)$ — первая компонента вектора $F_{jjm}(\tau)$:

$$F_{jjm}(\tau) = I_j^{k_j-1} [Q'_{jjm}(\tau) - \sum_{k=2}^{\left(\frac{k_j+m-1}{k_j-1}\right)} c_{jk}(\tau) Q_{jk_j+m-1-k(k_j-1)}(\tau) +$$

$$+ \sum_{i_{k_j-1}=k_j}^{k_j+m-2} I_j^{k_j-2} \overline{H}_{jji_{k_{j-1}}}(\tau) \lambda_{jm+k_j-1-ik_j-1}(\tau) + \ldots +$$

$$+ \sum_{i_{k_j-1}=2k_j-2}^{k_j+m-2} \; \sum_{i_{k_j-2}=2k_j-3}^{i_{k_j-1}-1} \ldots \sum_{i_1=k_j-1}^{i_2-1} \overline{H}_{jji_1}(\tau) \lambda_{ji_2-i_1}(\tau) \ldots \lambda_{jk_j+m-1-i_{k_j-1}}(\tau), \tag{25.48}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, p),$$

где $C_{jk}(\tau)$ — прямоугольная матрица размеров $(k_j \times n)$, образованная из элементов матрицы $T^{-1}(\tau) A_k(\tau) T(\tau)$ $\left(k = 2, 3, \ldots, \ldots, \left[\dfrac{k_j+m-1}{k_j-1}\right]\right)$.

Следует отметить, что знаменатель в формулах (25.45) и (25.46), согласно (25.2) и (25.39), не обращается в ноль для всех $\tau \in [0, L]$.

Таким образом, указанный нами способ позволяет при любом натуральном m определить функции $\lambda_{j1}(\tau), \ldots, \lambda_{jm}(\tau)$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$. Зная последние, из (25.27) очень легко определяются векторы $Q_{jj1}(\tau)$, $Q_{jj2}(\tau), \ldots, Q_{jjm}(\tau)$.

2°. Перейдем к нахождению коэффициентов вектора $P(\tau, \varepsilon)$ и функции $z(\tau, \varepsilon)$.

Для этого, отделив в соотношении (25.10) коэффициенты порядка ε^s, имеем

$$[A_0(\tau) - i\nu(\tau) E] P_s(\tau) = \sum_{k=0}^{s} U_{1k(k_1-1)}(\tau) z_{s-k}(\tau) +$$

$$+ P'_{s-1}(\tau) - b_{s-1}(\tau) - \sum_{k=1}^{s} A_k(\tau) P_{s-k}(\tau) \; (s = 0, 1, \ldots). \tag{25.49}$$

Введем в рассмотренне вектор

$$R_s(\tau) = T^{-1}(\tau) P_s(\tau) \quad (s = 0,\ 1,\ 2,\ldots). \tag{25.50}$$

Тогда прн $s = 0$ уравненне (25.49) может быть записано в внде

$$[W_0(\tau) - i\nu(\tau) E]\, R_0(\tau) = Q_{10}(\tau) z_0(\tau),$$

нлн

$$[W_{j0}(\tau) - i\nu(\tau) E]\, R_{j0}(\tau) = Q_{1j0}(\tau) z_0(\tau) \quad (j = 1,\ 2,\ldots, p). \tag{25.51}$$

Отсюда, согласно (19.4), нмеем

$$R_{j0}(\tau) = 0 \quad (j = 2,\ 3,\ldots, p). \tag{25.52}$$

Прн $j=1$ функцня $i\nu(\tau)$ становнтся равной $\lambda_{10}(\tau)$. Поэтому нз уравнення (25.51) следует

$$\{r_0(\tau)\}_2 = z_0(\tau),\ \{r_0(\tau)\}_{r_1} = 0,\ 3 \leqslant r_1 \leqslant k_1. \tag{25.53}$$

Первые компоненты векторов $R_s(\tau)\,(s = 1,\ 2,\ldots)$ в силу нх пронзвольностн прнравняем к нулю.

Пусть $s = 1$. Имеем

$$[W_0(\tau) - i\nu(\tau) E]\, R_1(\tau) = Q_{10}(\tau) z_1(\tau) + Q_{1k_1-1}(\tau) z_0(\tau) + \\ + c(\tau) R_0(\tau) + R_0'(\tau) + G_0(\tau), \tag{25.54}$$

где

$$G_0(\tau) = -T^{-1}(\tau)\, b_0(\tau). \tag{25.55}$$

Уравненне (25.54), согласно (18.3), может быть записано в внде

$$[W_{j0}(\tau) - i\nu(\tau) E]\, R_{j1}(\tau) = Q_{1j0}(\tau) z_1(\tau) + Q_{1jk_1-1}(\tau) z_0(\tau) + \\ + c_j(\tau) R_0(\tau) + R_{j0}'(\tau) + G_{j0}(\tau) \quad (j = 1,\ 2,\ldots, p). \tag{25.56}$$

Отсюда

$$R_{j1}(\tau) = [W_{j0}(\tau) - i\nu(\tau) E]^{-1}\, [Q_{1jk_1-1}(\tau) z_0(\tau) + \\ + c_j(\tau) R_0(\tau) + G_{j0}(\tau)] \quad (j = 2,\ 3,\ldots, p). \tag{25.57}$$

Прн $j = 1$ уравнение (25.56) может быть запнсано следующнм образом:

$$\{r_1(\tau)\}_2 = z_1(\tau) + \{c(\tau)\}_{12} \{r_0(\tau)\}_2 + \{g_0(\tau)\}_1, \tag{25.58}$$

$$\{r_1(\tau)\}_l = \{q_{1k_1-1}(\tau)\}_{l-1} z_0(\tau) + \{c(\tau)\}_{l-1,2} \{r_0(\tau)\}_2 + \{g_0(\tau)\}_l$$

$$(3 \leqslant l \leqslant k_1),$$

$$\{q_{1k_1-1}(\tau)\}_k\, z_0(\tau) + \{c(\tau)\}_{k_12} \{r_0(\tau)\}_2 + \{g_0(\tau)\}_{k_1} = 0. \tag{25.59}$$

Тогда из уравнения (25.59) находим

$$z_0(\tau) = -\frac{\{g_0(\tau)\}_{k_1}}{\alpha_1(\tau)}. \qquad (25.60)$$

Такой же способ можно применять и для определения всех последующих коэффициентов $R_s(\tau)$, $Z_s(\tau)$ $(s = 1, 2, \ldots)$. Найдем, например, $R_m(\tau)$, $Z_m(\tau)$, считая $R_0(\tau)$, $R_1(\tau), \ldots, R_{m-1}(\tau)$, $Z_0(\tau)$, $Z_1(\tau), \ldots, Z_{m-1}(\tau)$ уже известными. Для этого в уравнении (25.49) положим $s = m$. Будем иметь

$$[W(\tau) - i\nu(\tau) E] R_m(\tau) = Q_{10}(\tau) Z_m(\tau) + G_{m-1}(\tau), \qquad (25.61)$$

где

$$G_{m-1}(\tau) = T^{-1}(\tau)\left[\sum_{i=1}^{m}(U_{1i(k_1-1)}(\tau) Z_{m-i}(\tau) - A_i(\tau) P_{m-i}(\tau)) + \right.$$

$$\left. + P'_{m-1}(\tau) - b_{m-1}(\tau)\right]. \qquad (25.62)$$

Из уравнения (25.61) находим

$$R_{jm}(\tau) = [W_{j0}(\tau) - i\nu(\tau) E]^{-1} G_{jm-1}(\tau) \qquad (j = 2, 3, \ldots, p).$$

$$\{r_m(\tau)\}_2 = Z_m(\tau) + \{g_{m-1}(\tau)\}_1, \qquad (25.63)$$

$$\{r_m\}_l = \{g_{m-1}(\tau)\}_{l-1} \qquad (3 \leqslant l \leqslant k_1), \qquad (25.64)$$

$$\{g_{m-1}(\tau)\}_{k_1} = 0.$$

Последнее уравнение определяет функцию $z_{m-1}(\tau)$.

Положив теперь в соотношении (25.49) $s = m + 1$ и повторив те же рассуждения, что и при нахождении функции $z_0(\tau)$, получим

$$z_m(\tau) = \frac{\{g_m(\tau)\}_{k_1} + \sum_{i=3}^{n}\{c(\tau)\}_{k_1 i}\{r_m(\tau)\}_i + \{c(\tau)\}_{k_1 2}\{g_{m-1}(\tau)\}_2}{\alpha_1(\tau)}, \qquad (25.65)$$

где $\{g_m(\tau)\}_{k_1}$ — k_1-я компонента вектора

$$G_m(\tau) = \sum_{i=2}^{m+1}(Q_{1i(k_1-1)}(\tau) z_{m+1-i}(\tau) - T^{-1}(\tau) A_i(\tau) P_{m+1-i}(\tau)) -$$

$$- T^{-1}(\tau)(b_m(\tau) - P'_m(\tau)). \qquad (25.66)$$

Таким образом, указав способ определения коэффициентов формальных рядов (25.8), мы доказали данную теорему.

1. Заметим, доказанная нами теорема позволяет получить не только частное решение системы (17.1′), но и общее. В самом деле, согласно (25.39), функции $\lambda_{j1}(\tau)$ (можно показать, что и все последующие функции $\lambda_{js}(\tau)$, $s = 2, 3, \ldots$) имеют k_j различных значений. Следовательно, для дифференциальных уравнений (25.5), (25.6) можно построить k_j $\left(\sum_{j=1}^{p} k_j = n;\ j = 1, 2, \ldots, p\right)$ частных линейно-независимых решений, а значит для них может быть построено общее решение. Подставляя его вместо h_j ($j = 1, 2, \ldots, p$) в частное решение (25.4), мы и получим формальное общее решение системы (17.1′).

2. Подобный алгоритм построения формального решения для системы (17.1′) может быть предложен и в «нерезонансном» случае, а именно справедлива следующая теорема.

Теорема IV.8. *Если выполняются условия теоремы IV.7, то формальное общее решение системы (17.1′) в «нерезонансном» случае может быть представлено в виде*

$$x = \sum_{j=1}^{p} U_j(\tau, \mu_j)\tilde{h}_j + \tilde{P}(\tau, \varepsilon)e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \tag{25.67}$$

$$\frac{d\tilde{h}_j}{dt} = \lambda_j(\tau, \mu_j)\tilde{h}_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, p), \tag{25.68}$$

где

$$U_j(\tau, \mu_j), \qquad \lambda_j(\tau, \mu_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, p)$$

те же, что и в теореме IV.7, а $\tilde{P}(\tau, \varepsilon)$ — n-мерный вектор, допускающий формальное разложение

$$\tilde{P}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \tilde{P}_s(\tau). \tag{25.69}$$

Доказательство. Так как в п. 1° настоящего параграфа нами указан способ определения векторов $U_j(\tau, \mu_j)$ и функций $\lambda_j(\tau, \mu_j)$ ($j = 1, 2, \ldots, p$), то для доказательства данной теоремы остается указать способ определения коэффициентов вектора $\tilde{P}(\tau, \varepsilon)$.

Подставив вектор x, определяемый соотношениями (25.67), (25.68), в систему, будем иметь тождество. Приравнивая в нем коэффициенты при $\tilde{h}_j$ и свободные члены, получим соотношение (25.9) и соотношение

$$[A(\tau, \varepsilon) - i\nu(\tau)E]\tilde{P}(\tau, \varepsilon) = \varepsilon(\tilde{P}'(\tau, \varepsilon) - b(\tau, \varepsilon)). \tag{25.70}$$

Выделяя здесь коэффициенты порядка ε^s ($s = 1, 2, \ldots$), имеем

$$[A_0(\tau) - i\nu(\tau)E]\tilde{P}_s(\tau) = \Phi_s(\tau), \tag{25.71}$$

где

$$\Phi_s(\tau) = \widetilde{P}'_{s-1}(\tau) - b_{s-1}(\tau) - \sum_{l=1}^{s} A_l(\tau)\widetilde{P}_{s-1}(\tau) \tag{25.72}$$

(согласно разложению (25.69), $\widetilde{P}_0(\tau) = 0$).

Так как

$$\det[A_0(\tau) - i\nu(\tau)E] \neq 0 \tag{25.73}$$

при любом $\tau \in [0, L]$, то из равенства (25.71) находим

$$\widetilde{P}_s(\tau) = [A_0(\tau) - i\nu(\tau)E]^{-1}\Phi_s(\tau) \qquad (s = 1,\ 2, \ldots). \tag{25.74}$$

3. Применяя способ, изложенный в § 23, можно было бы показать, что построенные здесь формальные решения (25.4) и (25.67) имеют асимптотический характер, а именно, справедлива следующая теорема.

Теорема IV.9. *Если выполняются условия теоремы IV.7 для всех* $\tau \in [0, L]$

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{s=0}^{k_j-2} \mu_j^s \lambda_{js}(\tau)\right) \leqslant 0, \tag{25.75}$$

то для любых $L > 0$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *можно указать такую постоянную* C, *не зависящую от* ε, *что*

$$\| x - x^{(m)} \| \leqslant \mu_1^{m+2-2k_1} C \tag{25.76}$$

(*предполагается, что* $x|_{t=0} = x^{(m)}|_{t=0}$ и $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_p$).

В «нерезонансном» случае может быть получена оценка

$$\| x - x^{(m)} \| \lesssim \mu_l^{m+2-k_1} C. \tag{25.77}$$

Примечание. Предложенный нами алгоритм построения асимптотического решения системы (17.1′) при наличии двукратных корней характеристического уравнения не может быть эффективным, так как в этом случае он приводит к уравнению Риккати. Поэтому в данном случае целесообразней применить изложенный ниже метод.

Следуя § 13, систему (17.1′) можно асимптотически расщепить на p подсистем порядка k_j ($j = 1,\ 2,\ \ldots,\ p$). Пусть, например, $k_1 = 2$. Тогда соответствующая отщепленная система (рассматриваем для простоты «нерезонансный» случай) имеет вид

$$\frac{d\xi}{dt} = W(\tau, \varepsilon)\xi, \tag{25.78}$$

в которой ξ—двумерный вектор: $\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$, а $W(\tau, \varepsilon)$ — квадратная матрица второго порядка

$$W(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s W_s(\tau), \tag{25.79}$$

где

$$W_0(\tau) = \begin{bmatrix} \lambda_{10}(\tau) & 1 \\ 0 & \lambda_{10}(\tau) \end{bmatrix}, \qquad W_1(\tau) = \begin{bmatrix} \{C(\tau)\}_{11} & \{C(\tau)\}_{12} \\ 0 & \{C(\tau)\}_{22} \end{bmatrix}, \tag{25.80}$$

(в силу (25.1) $\{C(\tau)\}_{21} = 0$).

К системе (25.78) применим преобразование

$$\xi_1 = q_1, \qquad \xi_2 = \varepsilon q_2. \tag{25.81}$$

Тогда система (25.78) приобретает вид

$$\frac{dq}{dt} = [\lambda_{10}(\tau) E + \varepsilon \widetilde{W}(\tau, \varepsilon)] q, \tag{25.82}$$

где

$$\widetilde{W}(\tau, \varepsilon) = \begin{bmatrix} \{W(\tau, \varepsilon)\}_{11} & 1 + \varepsilon \{W(\tau, \varepsilon)\}_{12} \\ \{W(\tau, \varepsilon)\}_{21} & \{W(\tau, \varepsilon)\}_{22} \end{bmatrix}, \tag{25.83}$$

q — двумерный вектор; $q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$.

Применяя к системе (25.82) экспоненциальное преобразование

$$q = \exp \left\{ \int_0^t \lambda_{10}(\tau)\, dt \right\} v, \tag{25.84}$$

получим

$$\frac{dv}{dt} = \varepsilon \widetilde{W}(\tau, \varepsilon) v,$$

или

$$\frac{dv}{d\tau} = \widetilde{W}(\tau, \varepsilon) v. \tag{25.85}$$

Полученная система (25.85) в отличие от системы (17.4) имеет нулевой ранг (см. [76], стр. 80).

Поэтому к ней применим метод последовательных приближений. Следовательно, для вектора v, а значит и для ξ, можно получить решение в виде сходящегося ряда по степеням ε.

§ 26. Дифференциальные уравнения с малым параметром при старших производных

Как уже упоминалось во введении, асимптотический метод, применяемый нами к дифференциальным уравнениям с медленно меняющимися коэффициентами, может быть применим также и к дифференциальным уравнениям, неоднократно исследовавшимся в работах [78—80], [16—17], [9—12], в которых при старших производных в качестве множителя стоит малый параметр ε. Оказывается, что характеристическое уравнение в данном случае обладает той особенностью, что число нуль является его кратным корнем.

Таким образом, дифференциальные уравнения с малым параметром при старших производных могут служить примером дифференциальных уравнений, рассмотренных нами в § 20—25 настоящей главы.

Итак, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\sum_{j=0}^{k} a_j(\tau)\frac{d^j y}{d\tau^j} + \sum_{r=1}^{l} \varepsilon^r a_{k+r}(\tau)\frac{d^{k+l} y}{d\tau^{k+l}} = \varepsilon b(\tau)\, e^{i\theta(\tau)}, \tag{26.1}$$

в котором $a_h(\tau)$ $(h = 1, 2, \ldots, k+l)$ достаточное число раз дифференцируемые функции на сегменте $0 \leqslant \tau \leqslant L$, $(a_{k+l}(\tau) \neq 0$, $\tau \in [0, L])$, ε — малый параметр.

Уравнение (26.1) можно рассматривать, как частный случай системы линейных дифференциальных уравнений

$$E_1\frac{dx}{d\tau} = A(\tau)x + E_1 B(\tau)e^{i\theta(\tau)}, \tag{26.2}$$

где x, $B(\tau)$ — n-мерные векторы; $A(\tau)$ — действительная квадратная матрица n-го порядка; E_1 — диагональная матрица следующего вида:

$$E_1 = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & & & & & & & 0 \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \varepsilon & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & \varepsilon \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\ \ddots\\1\end{array}}\right\} k \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}\varepsilon\\ \ddots\\ \\ \varepsilon\end{array}}\right\} n-k \end{array}. \tag{26.3}$$

В самом деле, положив

$$\begin{gathered} y = x_1, \quad \frac{dy}{d\tau} = x_2, \ldots, \frac{d^k y}{d\tau^k} = x_{k+1}, \\ \varepsilon\frac{d^{k+1} y}{d\tau^{k+1}} = x_{k+2}, \ldots, \varepsilon^{l-1}\frac{d^{k+l-1} y}{d\tau^{k+l-1}} = x_{k+l}, \end{gathered} \tag{26.4}$$

мы приводим уравнение (26.1) к системе (26.2), в которой

$$A(\tau)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_0(\tau) & -a_1(\tau) & -a_2(\tau) & \ldots & -a_{k+l-1}(\tau) \end{bmatrix}, \tag{26.5}$$

$$B(\tau)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \varepsilon\dfrac{b(\tau)}{\alpha_{k+l}(\tau)} \end{bmatrix},$$

где

$$a_i(\tau)=\frac{\alpha_i(\tau)}{\alpha_{k+l}(\tau)} \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ldots,k+l-1). \tag{26.6}$$

Поэтому в дальнейшем вместо уравнения (26.1) мы будем рассматривать эквивалентную ему систему (26.2). Последнюю систему, следуя работам [95, 96], при помощи подстановки

$$\tau=\varepsilon t \tag{26.7}$$

преобразуем к системе

$$\frac{dx}{dt}=[A_0(\tau)+\varepsilon A_1(\tau)]\,x+\varepsilon B(\tau)\,e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \tag{26.8}$$

где

$$A_0(\tau)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{k+1,1}(\tau) & a_{k+1,2}(\tau) & \ldots & a_{k+1,n}(\tau) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(\tau) & a_{n2}(\tau) & & a_{nn}(\tau) \end{bmatrix},$$

$$A_1(\tau)=\begin{bmatrix} a_{11}(\tau) & a_{12}(\tau) & \ldots & a_{1n}(\tau) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1}(\tau) & a_{k2}(\tau) & \ldots & a_{kn}(\tau) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \tag{26.9}$$

$a_{ij}(\tau)$ $(i,\ j=1,\ 2,\ldots,n)$ — элементы матрицы $A(\tau)$.

Полученная система линейных дифференциальных уравнений (26.8) есть частный случай системы вида (17.1′), рассмотренной нами в предыдущих параграфах, причем из вида матрицы $A_0(\tau)$ следует, что характеристическое уравнение (12.3), построенное для матрицы $A_0(\tau)$, в данном случае имеет число нуль k-кратным корнем. Поэтому при построении асимптотического решения системы (26.8) может быть использован способ, изложенный нами в § 20—25.

Не прибегая к построению асимптотического решения системы (26.8) в общем случае, проиллюстрируем идею метода на следующем примере, рассмотренном в работе [35].

§ 27. Нахождение собственных значений краевой задачи для дифференциального уравнения четвертого порядка, содержащего два самосопряженных выражения

Будем искать собственные значения краевой задачи, состоящей из уравнения

$$\frac{d^4u}{dy^4}+\frac{d}{dy}\left[a(y)\frac{du}{dy}\right]+b(y)u=-\lambda\left[\frac{d^2u}{dy^2}+C(y)u\right] \quad (27.1)$$

и краевых условий

$$u(0)=0,\ u(T)=0,$$

$$\sin\alpha\frac{du}{dy}\bigg|_{y=0}+\cos\alpha\frac{d^2u}{dy^2}\bigg|_{y=0}=0,$$

$$\sin\beta\frac{du}{dy}\bigg|_{y=T}+\cos\beta\frac{d^2u}{dy^2}\bigg|_{y=T}=0. \quad (27.2)$$

Применяя подстановку

$$u=\varepsilon x_1,\qquad \frac{du}{dy}=\varepsilon x_3,\qquad \frac{d^2u}{dy^2}=x_4,$$

$$\varepsilon\frac{d^2u}{dy^2}+\varepsilon a(y)\frac{du}{dy}=x_2-x_3,\qquad \varepsilon=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad (27.3)$$

придем к системе

$$\frac{dx_1}{dy}=x_3,$$

$$\frac{dx_2}{dy}=-[c(y)+\varepsilon^2b(y)]x_1, \quad (27.4)$$

$$\varepsilon\frac{dx_3}{dy}=x_4,$$

$$\varepsilon\frac{dx_4}{dy} = x_2 - [1 + \varepsilon^2 a(y)]x_3.$$

Заменой переменной

$$y = \varepsilon t = \tau$$

приведем полученную систему (27.4) к виду

$$\frac{dx}{dt} = [A_0(\tau) + \varepsilon A_1(\tau, \varepsilon)]\, x, \tag{27.5}$$

где

$$A_0(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_1(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -[c(\tau)+\varepsilon^2 b(\tau)] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon a(\tau) & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда корни характеристического уравнения (12.3) следующие:

$$\lambda_{10}(\tau) = \lambda_{20}(\tau) = 0, \qquad \lambda_{30}(\tau) = i, \qquad \lambda_{40}(\tau) = -i.$$

Решение задачи (27.1), (27.2) будем искать асимптотическим методом, изложенным выше, в виде разложения по степеням ε.

Вид этого разложения, как это следует из § 20—25, существенно зависит от того, кратные или простые элементарные делители, отвечающие кратному числу $\lambda_{10} = 0$. (В первом случае разложение будет по дробным степеням ε, во втором — по целым.) Как известно, элементарные делители простые тогда и только тогда, если ранг матрицы $A_0(\tau) - \lambda E$ равен $n - k$, где n — размерность матрицы, k — кратность числа λ_{10}. В нашем случае, как легко видеть, элементарные делители простые. Таким образом, каноническая форма матрицы $A_0(\tau)$:

$$W(\tau) = T^{-1}(\tau)\, A_0(\tau)\, T(\tau)$$

имеет вид

$$W(\tau) = \begin{bmatrix} W_1(\tau) & 0 \\ 0 & W_2(\tau) \end{bmatrix},$$

где

$$W_1(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad W_2(\tau) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

При этом матрицы $T(\tau)$ и $T^{-1}(\tau)$ следующие:

$$T(\tau)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&1\\0&0&i&-i\end{bmatrix},\qquad T^{-1}(\tau)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0&0&0\\-2&2&0&0\\0&-1&1&-i\\0&-1&1&i\end{bmatrix}.$$

Поскольку элементарные делители простые, решение уравнения (27.1) ищем в виде

$$x=U_1(\tau,\varepsilon)h_1+U_2(\tau,\varepsilon)h_2, \tag{27.6}$$

где $U_1(\tau,\varepsilon)$ и $U_2(\tau,\varepsilon)$ — матрицы порядка (4.2); h_1 и h_2 — двумерные векторы, определенные равенствами

$$\frac{dh_k}{dt}=\mathfrak{A}_k(\tau,\varepsilon)h_k\qquad(k=1,\ 2). \tag{27.7}$$

При этом $\mathfrak{A}_k(\tau,\varepsilon)$ и $U_k(\tau,\varepsilon)$ предполагаем представленными в виде формальных рядов по степеням ε

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_k(\tau,\varepsilon)&=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\mathfrak{A}_{ks}(\tau),\\ U_k(\tau,\varepsilon)&=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\mathfrak{A}_{ks}(\tau).\end{aligned} \tag{27.8}$$

Подставляя (27.6) в систему (27.5) и учитывая равенство (27.7), имеем

$$\sum_{k=1}^{2}[\varepsilon U_k'(\tau,\varepsilon)+U_k(\tau,\varepsilon)\mathfrak{A}_k(\tau,\varepsilon)]h_k=$$
$$=\sum_{k=1}^{2}[A_0(\tau)+\varepsilon A_1(\tau,\varepsilon)]U_k(\tau,\varepsilon)h_k.$$

Приравнивая коэффициенты при h_1 и h_2 в обеих частях равенства, получим

$$\varepsilon U_k'(\tau,\varepsilon)+U_k(\tau,\varepsilon)\mathfrak{A}_k(\tau,\varepsilon)=[A_0(\tau)+\varepsilon A_1(\tau,\varepsilon)]U_k(\tau,\varepsilon)\quad(k=1,\ 2).$$

Как легко увидеть, получим следующие формулы для нахождения

$$U_{ks}(\tau)\qquad\text{и}\qquad\mathfrak{A}_{ks}(\tau)\qquad(k=1,\ 2;\ s=0,\ 1,\ 2,\dots).$$

I. $U_{k0}(\tau)\mathfrak{A}_{k0}(\tau)=A_0(\tau)U_{k0}(\tau)$

или

$$Q_{k0}(\tau)\mathfrak{A}_{k0}(\tau)=W(\tau)Q_{k0}(\tau)\qquad(k=1,\ 2), \tag{27.9}$$

где

$$Q_{k0}(\tau) = T^{-1}(\tau) U_{k0}(\tau) \qquad (k = 1,\ 2). \tag{27.10}$$

Каждое из уравнений (27.9) распадается на два независимых уравнения

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{k0}\mathfrak{A}_{k0}(\tau) &= W_1(\tau)\tilde{Q}_{k0}(\tau), \\ \tilde{\tilde{Q}}_{k0}\mathfrak{A}_{k0}(\tau) &= W_2(\tau)\tilde{\tilde{Q}}_{k0}(\tau), \end{aligned} \qquad Q_{k0} = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{k0}(\tau) \\ \tilde{\tilde{Q}}_{k0}(\tau) \end{bmatrix}.$$

Подберем находящиеся в нашем распоряжении матрицы $\tilde{Q}_{10}(\tau)$, $\tilde{\tilde{Q}}_{20}(\tau)$ таким образом, чтобы

$$\tilde{Q}_{10}(\tau) = E, \qquad \tilde{\tilde{Q}}_{20} = E.$$

Тогда

$$\mathfrak{A}_{k0}(\tau) = W_k(\tau) \qquad (k = 1,\ 2),$$

т. е.

$$\mathfrak{A}_{10}(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathfrak{A}_{20}(\tau) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \tag{27.11}$$

а

$$\tilde{\tilde{Q}}_{10}(\tau) = \tilde{Q}_{20}(\tau) = 0.$$

Из равенства (27.10) имеем

$$U_{10}(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad U'_{20}(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}. \tag{27.12}$$

II. Определим $\mathfrak{A}_{11}(\tau)$, $\mathfrak{A}_{21}(\tau)$ и $U_{11}(\tau)$, $U_{21}(\tau)$ из уравнения

$$U_{k1}(\tau)\mathfrak{A}_{k0}(\tau) - A_0(\tau)U_{k1}(\tau) = A_{10}(\tau)U_{k0}(\tau) - U_{k0}(\tau)\mathfrak{A}_{k1}(\tau),$$

которое может быть записано в виде

$$Q_{k1}(\tau)W_k(\tau) - W(\tau)Q_{k1}(\tau) = D_{k1}(\tau) - Q_{k0}(\tau)\mathfrak{A}_{k1}(\tau), \tag{27.13}$$

где

$$Q_{k1}(\tau) = T^{-1}(\tau)U_{k1}(\tau), \qquad D_{k1}(\tau) = T^{-1}(\tau)A_{10}(\tau)U_{k0}(\tau) \tag{27.14}$$

$$(k = 1,\ 2).$$

В силу построения матрицы $W(\tau)$ уравнение (27.13) можно расщепить на следующие:

$$\tilde{Q}_{k1}(\tau)W_k(\tau) - W_1(\tau)\tilde{Q}_{k1}(\tau) = \tilde{D}_{k1}(\tau) - \tilde{Q}_{k0}(\tau)\mathfrak{A}_{k1}(\tau), \tag{27.15}$$

$$\tilde{\tilde{Q}}_{k1}(\tau)W_k(\tau)-W_2(\tau)\tilde{\tilde{Q}}_{k1}(\tau)=\tilde{\tilde{D}}_{k1}(\tau)-\tilde{\tilde{Q}}_{k0}(\tau)\mathfrak{A}_{k1}(\tau)$$
$$(k=1,\ 2).$$

Тогда

$$D_{11}(\tau)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1-c(\tau) & -1-c(\tau) \\ \frac{1}{2}c(\tau) & \frac{1}{2}c(\tau) \\ \frac{1}{2}c(\tau) & \frac{1}{2}c(\tau) \end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\tilde{D}_{11}\\ \tilde{\tilde{D}}_{11}\end{bmatrix},$$

$$D_{21}(\tau)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\tilde{D}_{21}\\ \tilde{\tilde{D}}_{21}\end{bmatrix}.$$

Из первого уравнения (27.15) при $k=1$ имеем

$$\mathfrak{A}_{11}(\tau)=\tilde{D}_{11}(\tau)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1-c(\tau) & -1-c(\tau)\end{bmatrix},$$

а $Q_{11}(\tau)$ — произвольная матрица. Пусть она равна нулю. Матрицу $\tilde{\tilde{Q}}_{21}(\tau)$ подберем так, чтобы

$$\{Q_{21}(\tau)\}_{s_2p_2}=\begin{cases}0 & \text{при } s_2=p_2,\\ \dfrac{\{D_{21}\}_{s_2p_2}}{\lambda_{p_20}(\tau)-\lambda_{s_20}(\tau)}, & s_2\neq p_2,\quad s_2,\ p_2=3,\ 4.\end{cases}$$

Следовательно, учитывая вид матрицы D_{21}, имеем

$$\tilde{\tilde{Q}}_{21}(\tau)=0.$$

Тогда

$$\{\mathfrak{A}_{21}(\tau)\}_{s_2p_2}=\begin{cases}\{D_{21}\}_{s_2p_2} & s_2=p_2,\\ 0 & s_2\neq p_2,\ s_2,\ p_2=3,\ 4\end{cases}$$

и

$$\mathfrak{A}_{21}(\tau)=0. \tag{27.16}$$

Из первого уравнения (27.13) при $k=2$ и второго при $k=1$ имеем

$$\tilde{Q}_{21}(\tau)=i\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\qquad \tilde{\tilde{Q}}_{11}(\tau)=\frac{i}{2}c(\tau)\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$U_{11}(\tau)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ -c(\tau) & -c(\tau)\end{bmatrix} \qquad U_{21}(\tau)=\begin{bmatrix}-i & i\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}. \qquad (27.17)$$

III. Можно показать, что

$$\mathfrak{A}_{12}(\tau)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \qquad \mathfrak{A}_{22}(\tau)=\begin{bmatrix}\frac{i}{2}a(\tau) & 0\\ 0 & -\frac{i}{2}a(\tau)\end{bmatrix}, \quad (27.18)$$

$$U_{12}(\tau)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ -[a(\tau)+c'(\tau)] & -[a(\tau)+c'(\tau)]\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \qquad (27.19)$$

$$U_{22}(\tau)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ -\frac{1}{4}a(\tau) & -\frac{1}{4}a(\tau)\\ \frac{i}{4}a(\tau) & -\frac{i}{4}a(\tau)\end{bmatrix}.$$

Учитывая найденные приближения матриц $\mathfrak{A}_k(\tau)$, $U_k(\tau)$. получим

$$x=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 1-\varepsilon^2[a(\tau)+\varepsilon c'(\tau)] & 1-\varepsilon^2[a(\tau)+\varepsilon c'(\tau)]\\ -\varepsilon c(\tau) & -\varepsilon c(\tau)\end{bmatrix}h_1+$$

$$+\begin{bmatrix}-\varepsilon i & \varepsilon i\\ 0 & 0\\ 1-\frac{\varepsilon^2 a(\tau)}{4} & 1-\frac{\varepsilon^2 a}{4}\\ i\left(1+\frac{\varepsilon^2 a}{4}\right) & -i\left(1+\frac{\varepsilon^2 a}{4}\right)\end{bmatrix}h_2, \qquad (27.20)$$

h_1 и h_2 определяются системами

$$\frac{dh_1}{dt} = \varepsilon \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1-c(\tau) & -1-c(\tau) \end{bmatrix} h_1, \tag{27.21}$$

$$\frac{dh_2}{dt} = \begin{bmatrix} i\left[1+\varepsilon^2 \frac{a(\tau)}{4}\right] & 0 \\ 0 & -i\left[1+\varepsilon^2 \frac{a(\tau)}{4}\right] \end{bmatrix} h_2. \tag{27.22}$$

Несколько преобразуем систему (27.21). Обозначим

$$P(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1-c(\tau) & -1-c(\tau) \end{bmatrix}.$$

Тогда уравнение (27.21) примет вид

$$\frac{dh_1}{d\tau} = P(\tau) h_1. \tag{27.23}$$

Будем искать такую матрицу преобразования $Q(\tau)$

$$h_1 = Q(\tau) z_1, \tag{27.24}$$

чтобы матрица

$$R(\tau) = Q^{-1}(\tau) P(\tau) Q(\tau) - Q^{-1}(\tau) Q'(\tau)$$

имела вид

$$R(\tau) = \begin{bmatrix} r_{11}(\tau) & 0 \\ r_{21}(\tau) & r_{22}(\tau) \end{bmatrix}.$$

Уравнение (27.23) при этом перейдет в уравнение

$$\frac{dz}{dt} = R(\tau) z. \tag{27.25}$$

Матрица $Q(\tau)$ имеет вид

$$Q(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку выполняется соотношение

$$a(\tau)(p_{11} - p_{22}) + a^2(\tau) p_{21} - p_{12} = 0$$

при $a = -1$, то $y = \text{const}$ (см. [23]).

Поэтому при $y = -1$ имеем

$$Q(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R(\tau) = \begin{bmatrix} -c(\tau) & 0 \\ -1-c(\tau) & 0 \end{bmatrix}.$$

Из системы (27.25) получаем

$$z_1 = c_1 e^{-\int\limits_0^\tau c(\tau)d\tau},$$

$$z_2 = -c_1 \int\limits_0^\tau [1+c(\tau)]\, e^{-\int\limits_0^\tau c(\tau)d\tau} d\tau + c_2.$$

Учитывая (27.24), имеем

$$h_{11} = c_1 \left[e^{-\int\limits_0^\tau c(\tau)d\tau} + \int\limits_0^\tau [1+c(\tau)]\, e^{-\int\limits_0^\tau c(\tau)d\tau} \right] - c_2,$$

$$h_{12} = -c_1 \int\limits_0^\tau [1+c(\tau)]\, e^{-\int\limits_0^\tau c(\tau)d\tau} d\tau + c_2. \tag{27.26}$$

Система (27.25) имеет решение

$$h_{21} = c_3 \exp\left\{ i \left[\frac{1}{\varepsilon}\tau + \frac{1}{2}\varepsilon \int\limits_0^\tau a(\tau)\, d\tau \right] \right\},$$

$$h_{22} = c_4 \exp\left\{ -i \left[\frac{1}{\varepsilon}\tau + \frac{1}{2}\varepsilon \int\limits_0^\tau a(\tau)d\tau \right] \right\}. \tag{27.27}$$

Таким образом, вектор x принимает вид

$$x = \begin{Vmatrix} c_1 \left[e^{-\int\limits_0^\tau c(\tau)d\tau} + \int\limits_0^\tau (1+c(\tau))\, e^{-\int\limits_2^\tau c(\tau)d\tau} d\tau \right] - c_2 - c_3\varepsilon i e^{ik_1} + c_4\varepsilon i e^{-ik_1} \\ c_1 \exp\left\{ -\int\limits_0^\tau c(\tau)\, d\tau \right\} \end{Vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} c_1\{1-\varepsilon^2[a(\tau)+c'(\tau)]\}e^{-\int\limits_0^\tau c(\tau)d\tau} & +c_3\left[1-\varepsilon^2\frac{a(\tau)}{4}\right]e^{ik_1}+c_4\left[1-\varepsilon^2\frac{a(\tau)}{4}\right]e^{-ik_1} \\ -c_1\varepsilon c(\tau)e^{-\int\limits_0^\tau c(\tau)d\tau} & +c_3 i\left(1+\varepsilon^2\frac{a(\tau)}{4}\right)e^{ik_1}-c_4 i\left(1-\varepsilon^2\frac{a(\tau)}{4}\right)e^{-ik_1} \end{vmatrix},$$

(27.28)

где

$$k_1=\frac{\tau}{\varepsilon}+\varepsilon\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau a(\tau)\,d\tau,$$

c_1, c_2, c_3 и c_4 — произвольные постоянные.

Из краевых условий (27.2) с учетом подстановки (27.3) получим следующую систему для нахождения постоянных c_1, c_2, c_3 и c_4:

$$c_1-c_2-c_3\varepsilon i+c_4\varepsilon i=0,$$

$$c_1\left[e^{-\int\limits_0^T c(\tau)d\tau}+\int\limits_0^T(1+c(\tau))e^{-\int\limits_0^\tau c(\tau)d\tau}d\tau\right]-c_2-c_3\varepsilon ie^{ik_2}+c_4\varepsilon ie^{-ik_2}=0,$$

(27.29)

$$c_1\varepsilon\{[1-\varepsilon^2(a(0)+c'(0))]\sin\alpha-c(0)\cos\alpha\}+$$
$$+c_3\left\{\left[1-\frac{1}{4}\varepsilon^2a(0)\right]\sin\alpha+i\left[1+\frac{1}{4}\varepsilon^2a(0)\right]\cos\alpha\right\}+$$
$$+c_4\left\{\left[1-\frac{1}{4}\varepsilon^2a(0)\right]\sin\alpha-i\left[1+\frac{1}{4}\varepsilon^2a(0)\right]\cos\alpha\right\}=0,$$

$$c_1\varepsilon\{[1-\varepsilon^2(a(T)+c'(T))]\sin\beta-c(T)\cos\beta\}e^{-\int\limits_0^T c(\tau)d\tau}+$$
$$+c_3\left\{\left[1-\frac{1}{4}\varepsilon^2a(T)\right]\sin\beta+i\left[1+\frac{1}{4}\varepsilon^2a(T)\right]\cos\beta\right\}e^{ik_2}+$$
$$+c_4\left\{\left[1-\frac{1}{4}\varepsilon^2a(T)\right]\sin\beta-i\left[1+\frac{1}{4}\varepsilon^2a(T)\cos\beta\right]\right\}e^{-ik_2}=0,$$

$$k_2=\frac{T}{\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^T a(\tau)\,d\tau.$$

Из первых двух уравнений (27.29) имеем

$$c_1 = \frac{i\varepsilon\,[c_4(1-e^{-ik_2}) - c_3(1-e^{ik_2})]}{K}, \tag{27.30}$$

где

$$K = e^{-\int_0^T c(\tau)d\tau} + \int_0^T [1+c(\tau)]e^{-\int_0^\tau c(\tau)d\tau}\,d\tau - 1.$$

Подставляя значение c_1 в остальные два уравнения, получим уравнения для нахождения c_3 и c_4:

$$c_3\{-i\varepsilon^2[1-\varepsilon^2(a(0)+c'(0))\sin\alpha - c(0)\cos\alpha](1-e^{ik_2}) +$$
$$+K\left[\varepsilon\sin\alpha\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon^2 a(0)\right)+i\cos\alpha\left(1+\frac{1}{4}\varepsilon^2 a(0)\right]\right\} +$$
$$+c_4\{i\varepsilon^2[(1-\varepsilon^2(a(0)+c'(0)))\sin\alpha - c(0)\cos\alpha](1-e^{ik_2})+$$
$$+K\left[\varepsilon\sin\alpha\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon^2 a(0)\right)-i\cos\alpha\left(1+\frac{1}{4}\varepsilon^2 a(0)\right)\right]\right\}=0, \tag{27.31}$$

$$c_3\left\{-i\varepsilon^2[(1-\varepsilon^2(a(T)+c'(T)))\sin\beta - c(T)\cos\beta](1-e^{ik_2})e^{-\int_0^T c(\tau)d\tau} +\right.$$
$$\left.+K\left[\varepsilon\sin\beta\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon^2 a(T)\right)+i\cos\beta\left(1+\frac{1}{4}\varepsilon^2 a(T)\right)\right]e^{ik_2}\right\}+$$
$$+c_4\left\{i\varepsilon^2[(1-\varepsilon^2(a(T)+c'(T)))\sin\beta - c(T)\cos\beta](1-e^{-ik_2})e^{-\int_0^T c(\tau)d\tau} +\right.$$
$$\left.+K\left[\varepsilon\sin\beta\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon^2 a(T)\right)-i\cos\beta\left(1+\frac{1}{4}\varepsilon^2 a(T)\right)\right]e^{-ik_2}\right\}=0.$$

Чтобы система уравнений (27.31) имела нетривиальное решение, определитель системы должен равняться нулю, т. е. должно выполняться такое соотнощение:

$$\varepsilon^2\{[1-\varepsilon^2(a(0)+c'(0))]\sin\alpha - c(0)\cos\alpha\}\left[\varepsilon\left(\frac{1}{4}\varepsilon^2 a(T)-1\right)\times\right.$$

$$\times \sin\beta\cos K_2 + \left(1 + \frac{1}{4}\varepsilon^2 a(T)\right)\cos\beta\sin K_2 +$$

$$+ \varepsilon\left(1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 a(T)\right)\sin\beta\Bigg] + \varepsilon^2\{[1 - \varepsilon^2(a(T) + c'(T))]\sin\beta - c(T)\cos\beta\}\times$$

$$\times\left\{\varepsilon\left[\varepsilon^2\frac{a(0)}{4} - 1\right]\sin\alpha\cos K_2 - \left[1 + \frac{1}{4}\varepsilon^2 a(0)\right]\cos\alpha\sin K_2 +\right.$$

$$\left. + \varepsilon\left[1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 a(0)\right]\sin\alpha\right\} e^{-\int\limits_0^T c(\tau)d\tau} + K\left\{\varepsilon^2\left[\frac{1}{4}\varepsilon^2 a(0) - 1\right]\times\right.$$

$$\times\left[1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 a(T)\right]\sin\alpha\sin\beta\sin K_2 - \left[1 + \frac{1}{4}\varepsilon^2 a(0)\right]\times \tag{27.32}$$

$$\times\left[1 + \frac{1}{4}\varepsilon^2 a(T)\right]\cos\alpha\cos\beta\sin K_2 - \varepsilon\left[1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 a(0)\right]\times$$

$$\times\left[1 + \frac{1}{4}\varepsilon^2 a(T)\right]\sin\alpha\cos\beta\cos K_2 + \varepsilon\left[1 + \frac{1}{4}\varepsilon^2 a(0)\right]\times$$

$$\left.\times\left[1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 a(T)\right]\cos\alpha\sin\beta\cos K_2\right\} = 0,$$

которое мы используем для определения собственных значений краевой задачи (27.1) — (27.2).

Рассмотрим следующие случаи:

1) $\qquad \cos\alpha \neq 0, \qquad \cos\beta \neq 0.$

Из уравнения (27.32) имеем

$$\sin K_2 = 0,$$

откуда получаем следующую асимптотическую формулу:

$$\lambda_n \approx \frac{\pi^2 n^2}{T^2},$$

или более подробно

$$\lambda_n \approx \frac{\pi^2 n^2}{T^2} - \frac{1}{T}\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{T}\operatorname{tg}\beta - \frac{1}{2T}\int\limits_0^T a(\tau)\,d\tau;$$

2) $\cos\alpha \neq 0, \qquad \cos\beta = 0$

$$\lambda_n \approx \frac{(2n+1)^2}{4T^2}\pi^2 - \frac{1}{T}\operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{2T}\int_0^T a(\tau)\,d\tau;$$

3) $\cos\alpha = 0, \quad \cos\beta \neq 0$

$$\lambda_n \approx \frac{(2n+1)^2}{4T^2}\pi^2 + \frac{1}{T}\operatorname{tg}\beta - \frac{1}{2T}\int_0^T a(\tau)\,d\tau;$$

4) $\cos\alpha = 0, \quad \cos\beta = 0$

$$\lambda_n \approx \frac{\pi^2 n^2}{T^2} \qquad (n = 1,\ 2, \ldots).$$

ГЛАВА V

Асимптотические решения дифференциальных уравнений в банаховом пространстве

§ 28. Постановка задачи

В третьей главе данной работы был рассмотрен вопрос об асимптотическом расщеплении системы линейных дифференциальных уравнений n-го порядка на несколько независимых систем низших порядков. Описанная методика допускает обобщение на случай дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах (гильбертовых, банаховых), что и было осуществлено Ю. Л. Далецким и С. Г. Крейном в ряде работ [18—22].

В настоящей главе мы изложим основные результаты этих работ, однако ради удобства читателя, впервые знакомящегося с этим вопросом, ограничимся не самым общим случаем. Интересующихся более общей постановкой задачи отсылаем к работам [20, 22].

Итак, в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$ будем рассматривать дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = [A + \varepsilon B(\tau, \varepsilon)]\, x, \tag{28.1}$$

в котором $x(t, \varepsilon)$ — искомая функция переменного $t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$ со значениями в пространстве $\mathfrak{X}$; A, $B(\tau, \varepsilon)$ — операторы, действующие в $\mathfrak{X}$: A — неограниченный, $B(\tau, \varepsilon)$ — ограниченный (параметры τ, ε и $L > 0$ имеют прежний характер).

Решением уравнения (28.1), удовлетворяющим заданному условию

$$x(t_0, \varepsilon) = x_0 \qquad (t_0 = 0), \tag{28.2}$$

где x_0 — некоторый элемент из $\mathfrak{X}$, будем называть вектор-функцию $x(t, \varepsilon)$, обладающую следующими свойствами:

1) $x(t, \varepsilon)$ — сильно непрерывна и непрерывно дифференцируема на любом конечном промежутке, содержащемся в $\left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$;

2) $x(t, \varepsilon)$ при любом $t > 0$ принадлежит области определения $D(A)$ оператора A и

$$\frac{dx}{dt} = [A + \varepsilon B(\tau, \varepsilon)]\, x\,;$$

3) $\lim_{t \to 0+} \| x(t, \varepsilon) - x_0 \| = 0$

(терминологию и основные понятия функционального анализа см. в работе [102]).

Будем предполагать в дальнейшем, что неограниченный оператор A удовлетворяет условиям (S_1):

1) область определения $D(A)$ оператора A плотна в $\mathfrak{X}$;

2) A — замкнутый, линейный;

3) резольвента оператора A существует при всех $\lambda > 0$ и удовлетворяет условию

$$\| R(\lambda; A) \| \equiv \| [A - \lambda I]^{-1} \| \leqslant \frac{1}{\lambda}, \qquad \lambda > 0.$$

Ограниченный линейный оператор $B(\tau, \varepsilon)$ подчиним условию (S_2): операторнозначная функция $B(\tau, \varepsilon)$ непрерывно дифференцируема по $\tau \in [0, L]$ в смысле нормы операторов.

Предположим еще, что спектр $\sigma(A)$ оператора A распадается на $n+1$ спектральных множеств:

$$\sigma(A) = \bigcup_0^n \sigma_k, \tag{28.3}$$

причем только множество σ_0 может содержать бесконечно удаленную точку, а остальные σ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — ограничены.

Спектральным множеством оператора A, как известно [102], называется непустое множество σ_k, которое является подмножеством спектра $\sigma(A)$, одновременно замкнутым и открытым в $\sigma(A)$.

Пусть далее Γ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — замкнутая гладкая дуга, окружающая ограниченное спектральное множество σ_k и отделяющая его от $\sigma(A) - \sigma_k$. По предположению, Γ_k лежит в резольвентном множестве оператора A и ограничивает некоторое открытое множество Δ_k, содержащее σ_k.

Ориентация Γ_k определяется обычным образом, т. е. при обходе Γ_k в положительном направлении множество Δ_k расположено слева.

Введем теперь в рассмотрение проекционные операторы параллельного проектирования P_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$:

$$P_k = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} R(\lambda; A)\, d\lambda, \tag{28.4}$$

которые, как известно [102], обладают следующими свойствами:

$$P_k^2 = P_k; \qquad P_j P_k = 0 \ (j \neq k); \quad P_k D \subseteq D; \qquad P_k A \subseteq A P_k. \tag{28.5}$$

Если положить

$$P_0 = I - \sum_{k=1}^n P_k, \tag{28.6}$$

то перечисленные выше свойства распространяются и на оператор P_0. (В соответствии с теорией операторного исчисления для неограниченных замкнутых операторов [102] проектор P_0 можно определить также посредством формулы

$$P_0 = I - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_0} R(\lambda; A)\, d\lambda,$$

где Γ_0 — огибающая спектрального множества σ_0).

В данной главе мы покажем, что в соответствии со структурой спектра оператора A дифференциальное уравнение (28.1) можно, подобно тому, как это сделано в гл. III, асимптотически расщепить на $n+1$ уравнений.

При этом каждое из отщепленных уравнений является дифференциальным уравнением в соответствующем подпространстве $P_k[\mathfrak{X}]$, и, таким образом, есть уравнение как бы «низшего порядка» по сравнению с исходным (28.1).

Изложение указанного вопроса мы начнем с доказательства того, что решение уравнения (28.1), удовлетворяющее условию (28.2), в рамках предположений (S_1) и (S_2) действительно существует.

Этому и будет посвящен следующий параграф.

§ 29. Существование и единственность решения

В данном параграфе мы не будем касаться асимптотических свойств решений уравнения (28.1), а исследуем лишь вопрос об его разрешимости, поэтому перепишем (28.1) в форме

$$\frac{dx}{dt} = [A + B(t)]\, x, \qquad t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]. \tag{29.1}$$

Операторы A и $B(t)$ подчиняются условиям (S_1) и (S_2)* соответственно.

Существование и единственность решения уравнения (29.1) при заданном начальном условии были исследованы Р. Филлипсом в работе [134]. Однако ради целостности изложения мы воспроизведем здесь указанные результаты.

Заметим прежде всего, что при выполнении условий (S_1) существует ограниченный оператор $T(t)$, $t \in [0, \infty]$, обладающий следующими свойствами:

$$\| T(t) \| \leqslant 1, \qquad T(t_1 + t_2) = T(t_1)\, T(t_2),$$

---

* Для разрешимости уравнения (29.1) условие (S_2) можно ослабить, заменив его требованием непрерывной дифференцируемости по t функции $B(t)x$. Здесь и везде в § 29, если не оговаривается особо, непрерывность, дифференцируемость, сходимость понимаются в смысле сильной топологии.

$T(t)$ — сильно непрерывен по t на $[0, \infty)$, $T(0) = I$. Кроме того, для любого $x \in D$ вектор-функция $T(t)x$ — непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению

$$\frac{d[T(t)x]}{dt} = AT(t)x = T(t)Ax, \qquad x \in D. \tag{29.2}$$

В дальнейшем нам будет полезна следующая лемма.

Лемма V.1. *Если функция $\varphi(t)$, определенная на $[0, \infty)$ и со значениями в пространстве $\mathfrak{X}$, непрерывно дифференцируема, то и функция*

$$g(t, s) = \int_s^t T(t-\sigma)\varphi(\sigma)\,d\sigma = \int_0^{t-s} T(\sigma)\varphi(t-\sigma)\,d\sigma \tag{29.3}$$

$$(0 \leqslant s < t < \infty)$$

непрерывно дифференцируема по t, причем имеет место представление

$$\frac{dg}{dt} = T(t-s)\varphi(s) + \int_s^t T(t-\sigma)\varphi'(\sigma)\,d\sigma. \tag{29.4}$$

Кроме того, $\int_s^t T(t-\sigma)\varphi(\sigma)\,d\sigma \in D(A)$ *и справедлива также формула*

$$\frac{dg}{dt} = \varphi(t) + A\int_s^t T(t-\sigma)\varphi(\sigma)\,d\sigma. \tag{29.4'}$$

Доказательство. Так как $\|T(t)\| \leqslant 1$, то элемент $T(t-\sigma)\varphi(\sigma)$ при $\sigma \in [0, t]$ непрерывен по σ, коль скоро непрерывна функция $\varphi(\sigma)$. Поэтому интеграл

$$g(t, s) = \int_s^t T(t-\sigma)\varphi(\sigma)\,d\sigma \qquad (0 \leqslant s < t < \infty)$$

существует и справедливо равенство (29.3).

Функция $g(t, s)$ непрерывна по t, в чем нетрудно убедиться с помощью таких неравенств:

$$\|g(t+\Delta, s) - g(t, s)\| \leqslant \int_s^t \|T(\sigma)[\varphi(t+\Delta-\sigma) - \varphi(t-\sigma)]\|\,d\sigma +$$
$$+ \int_t^{t+\Delta} \|T(\sigma)\varphi(t+\Delta-\sigma)\|\,d\sigma \leqslant \int_s^t \|\varphi(t+\Delta-\sigma) - \varphi(t-\sigma)\|\,d\sigma +$$
$$+ \int_t^{t+\Delta} \|\varphi(t+\Delta-\sigma)\|\,d\sigma.$$

Действительно, так как $\varphi(t)$ непрерывна по $t \in [0, \infty)$, то, очевидно, $\| g(t+\Delta, s) - g(t, s) \| \to 0$, при $\Delta \to 0$, т. е. функция $g(t, s)$ непрерывна по t.

Далее в силу предположений леммы вектор $T(\sigma)\varphi'(t-\sigma)$ — непрерывен по σ при $\sigma \in [0, t]$, поэтому, согласно второй части равенства (29.3), мы имеем право написать

$$\frac{dg(t,s)}{dt} = T(t-s)\varphi(s) + \int_0^{t-s} T(\sigma)\varphi'(t-\sigma)\,d\sigma =$$

$$= T(t-s)\varphi(s) + \int_s^t T(t-\sigma)\varphi'(\sigma)\,d\sigma,$$

откуда ясно, что производная $\frac{dg(t,s)}{dt}$ тоже непрерывна по t.

С другой стороны, используя представление

$$g(t,s) = \int_s^t T(t-\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma,$$

рассмотрим такое отношение

$$\frac{g(t+\Delta,s)-g(t,s)}{\Delta} = \frac{T(\Delta)-I}{\Delta}\int_s^t T(t-\sigma)\varphi(\sigma)\,d\sigma +$$

$$+\frac{1}{\Delta}\int_t^{t+\Delta} T(t+\Delta-\sigma)\varphi(\sigma)\,d\sigma \qquad (29.5)$$

при $\Delta \to 0$.

Так как $T(t+\Delta-\sigma)\varphi(\sigma)$ — непрерывная функция своих переменных и $T(0) = I$, то

$$\frac{1}{\Delta}\int_t^{t+\Delta} T(t+\Delta-\sigma)\varphi(\sigma)\,d\sigma \to \varphi(t), \qquad \text{если} \quad \Delta \to 0.$$

Далее, по доказанному выше, функция $g(t, s)$ дифференцируема, т. е. предел отношения (29.5) при $\Delta \to 0$ существует, а значит, $\int_s^t T(t-\sigma)\varphi(\sigma)\,d\sigma \in D(A)$ (здесь использовано известное свойство оператора $T(t)$ [102]:

$$\lim_{\eta\to 0}\frac{T(t+\eta)-I}{\eta}x = Ax).$$

Таким образом, мы получаем и второе равенство (29. 4'):

$$\frac{dg(t,s)}{dt}=\varphi(t)+A\int_s^t T(t-\sigma)\varphi(\sigma)\,d\sigma,\quad 0\leqslant s<t<\infty.$$

В заключение заметим, что в силу (29. 3) и установленных выше свойств функции $g(t,s)$ легко убедиться в непрерывной дифференцируемости функции $g(t,s)$ и по переменной s, $0\leqslant s<t<\infty$, причем производная $\frac{dg(t,s)}{ds}$ будет непрерывна по t.

Дополнение к лемме V. 1. Если заданная в лемме V. 1 функция $\varphi(t)$ ($t\in[0,\infty)$) зависит еще и от действительного параметра s ($0\leqslant s<t<\infty$), т. е. $\varphi=\varphi(t,s)$, причем функция $\varphi(t,s)$ непрерывно дифференцируема по этому параметру s, а ее производная $\frac{d\varphi(t,s)}{ds}$ непрерывна также по t, то и функция

$$g(t,s)=\int_s^t T(t-\sigma)\varphi(\sigma,s)d\sigma$$

будет обладать такими же свойствами. При этом

$$\frac{dg(t,s)}{ds}=-T(t-s)\varphi(s,s)+\int_s^t T(t-\sigma)\frac{d\varphi(\sigma,s)}{ds}\,d\sigma.$$

Справедливость этого предположения в силу результатов леммы V.1 очевидна.

Перейдем к исследованию разрешимости уравнения (29.1). Существование и единственность решения уравнения (29.1) устанавливает такая теорема.

Теорема V. 1. *Пусть оператор A удовлетворяет условиям (S_1), а оператор $B(t)$—условиям (S_2)*.*

Тогда существует единственный ограниченный оператор $V(t,t_0)$ $\left(0\leqslant t_0\leqslant t\leqslant\frac{L}{\varepsilon}\right)$ такой, что $V(t_0,t_0)=I$ и функция $x(t)=V(t,t_0)x_0$ ($x_0\in D(A)$) является решением уравнения (29.1), удовлетворяющим условию

$$x(t_0)=x_0.$$

Кроме того, операторная функция $V(t,s)f$ при $f\in D(A)$, когда параметр s изменяется в пределах $0\leqslant s\leqslant t\leqslant\frac{L}{\varepsilon}$, непрерывно диф-

* См. сноску на стр. 182.

ференцируема по s и удовлетворяет уравнению

$$\frac{dV(t,s)}{ds}f = -V(t,s)[A+B(s)]f, \quad f \in D(A).$$

Доказательство. Для построения оператора $V(t, t_0)$ воспользуемся методом последовательных приближений и введем следующие обозначения:

$$V(t, t_0) = T(t - t_0),$$

$$V_n(t, t_0)x = T(t-t_0)x + \int_{t_0}^{t} T(t-s)B(s)V_{n-1}(s, t_0)x\,ds \tag{29.6}$$

$$(x \in \mathfrak{X}, \quad n = 1, 2, \dots).$$

Если мы положим далее

$$W_0(t, t_0) = V_0(t, t_0),$$

$$W_n(t, t_0)x = [V_n(t, t_0) - V_{n-1}(t, t_0)]x =$$

$$= \int_{t_0}^{t} T(t-s)B(s)W_{n-1}(s, t_0)x\,ds, \tag{29.7}$$

то искомый оператор $V(t, t_0)$ можно представить в виде

$$V(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(t, t_0). \tag{29.8}$$

Покажем, что нащи предыдущие построения имеют смысл и оператор $V(t, t_0)$ действительно существует.

Прежде всего ясно, что для любого $x \in \mathfrak{X}$ вектор-функция $B(t)V_0(t, t_0)x \equiv B(t)T(t-t_0)x$ непрерывна по t, следовательно, согласно лемме V.1, функция $W_1(t, t_0)x$ существует и тоже будет непрерывна по t. (Очевидно, это же справедливо и для функции $V_1(t, t_0)x$). Используя индукцию, мы получим аналогичное утверждение для любого вектора $W_n(t, t_0)x$, т. е. любого приближения $V_n(t, t_0)x$.

Так как $\|W_0(t, t_0)\| \equiv \|T(t-t_0)\| \leqslant 1$ $(0 \leqslant t_0 \leqslant t)$, то очевидно,

$$\|W_n(t, t_0)\| \leqslant M^n \frac{(t-t_0)^n}{n!}, \tag{29.9}$$

где

$$M = \max_{0 \leqslant t \leqslant \frac{L}{\varepsilon}} [\|B(t)\|, \|B'(t)\|].$$

Следовательно, ряд (29.8) (или последовательность (29.6)) сходится (в смысле нормы операторов) равномерно относительно t

(в каждом конечном интервале) к ограниченному оператору $V(t, t_0)$, сильно непрерывному по t на интервале $[t_0, \infty)$.

Согласно (29.8) и (29.9), имеет место оценка

$$\| V(t, t_0) \| \leqslant e^{M(t-t_0)}.$$

Так как $V_n(t_0, t_0) = I$ для любого n, то и $V(t_0, t_0) = I$. Наконец, переходя к пределу в формулах (29.6), получим

$$V(t, t_0)x = T(t-t_0)x + \int_{t_0}^{t} T(t-s)B(s)V(s, t_0)x\,ds. \qquad (29.10)$$

Покажем теперь, что функция

$$x(t) = V(t, t_0)x_0 \quad (x_0 \in D(A)) \qquad (29.11)$$

является решением уравнений (29.1).

Установим прежде всего дифференцируемость по t выражения (29.11).

Очевидно, что функция $W_0(t, t_0)x = V_0(t, t_0)x_0$ при $x_0 \in D(A)$ непрерывно дифференцируема по t. Предположим, что это справедливо и для $W_n(t, t_0)x_0$. Тогда нетрудно проверить, что элемент $B(t)W_n(t, t_0)x_0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ тоже будет непрерывно дифференцируемым по t, следовательно, согласно лемме V.1, этим же свойством будет обладать функция $W_{n+1}(t, t_0)x_0$ (см. формулу (29.7)).

В силу (29.4) и (29.7) мы можем написать:

$$\frac{d}{dt} W_0(t, t_0)x_0 = T(t-t_0)Ax_0,$$

$$\frac{d}{dt} W_n(t, t_0)x_0 = T(t-t_0)B(t_0)W_{n-1}(t_0, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)B'(s)W_{n-1}(s, t_0)x_0\,ds + \int_{t_0}^{t} T(t-s)B(s)\frac{dW(s, t_0)}{dt}x_0\,ds \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда следуют оценки:

$$\left\| \frac{d}{dt} W_0(t, t_0)x_0 \right\| \leqslant \| Ax_0 \|, \qquad (29.12)$$

$$\left\| \frac{d}{dt} W_n(t, t_0)x_0 \right\| \leqslant M^n \frac{(t-t_0)^{n-1} + (t-t_0)^n}{(n-1)!} \alpha,$$

где

$$\alpha = \|Ax_0\| + \|x_0\|.$$

Таким образом, в силу неравенств (29. 12), мы можем утверждать, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt} W_n(t, t_0)\, x_0$$

сходится равномерно по t в каждом конечном интервале, следовательно функция

$$x(t) = V(t, t_0)\, x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(t, t_0)\, x_0 \quad (x_0 \in D(A))$$

является дифференцируемой по t; более того, в силу свойств выражения $\frac{d}{dt} W_n(t, t_0)\, x_0$, функция $V(t, t_0)\, x_0$ непрерывно дифференцируема по t.

Так как при этом, очевидно, непрерывно дифференцируемым будет и выражение $B(t) V(t, t_0)\, x_0$ $(x_0 \in D(A))$, то мы можем, согласно лемме V.1, продифференцировать по t обе части равенства (29.10), в результате чего получим

$$\frac{d}{dt} [V(t, t_0)\, x_0] = AT(t - t_0)\, x_0 + B(t) V(t, t_0)\, x_0 +$$

$$+ A \int_{t_0}^{t} T(t - s) B(s) V(s, t_0)\, x_0 ds =$$

$$= [A + B(t)]\, V(t, t_0)\, x_0 \quad (x_0 \in D(A)). \tag{29.13}$$

Таким образом, мы убеждаемся, что функция

$$x(t) = V(t, t_0)\, x_0$$

удовлетворяет уравнению (29. 1) и условию $x(t_0) = x_0$. Заметим, кроме того, что из равенства (29. 13) вытекает свойство оператора $V(t, t_0)$ оставлять инвариантной область D:

$$V(t, t_0)\, D \subseteq D.$$

Докажем теперь единственность построенного оператора $V(t, t_0)$, удовлетворяющего условию $V(t_0, t_0) = I$.

Предположим, что существует еще один оператор $V_1(t, t_0)$ такой, что $V_1(t_0, t_0) = I$ и функция $x_1(t) = V_1(t, t_0)\, x_0$ тоже является решением уравнения (29.1). Тогда, очевидно, уравнение (29.1) имеет также решение вида

$$y(t) = [V(t, t_0) - V_1(t, t_0)]\, x_0,$$

причем $y(t)$ обладает всеми описанными выше свойствами и кроме того:

$$y(t_0) = [V(t_0, t_0) - V_1(t_0, t_0)]\, x_0 = 0. \tag{29.14}$$

Исследуем построенное решение $y(t)$ уравнения

$$\frac{dy}{dt} = [A + B(t)]\, y. \tag{29.15}$$

Для этого подействуем на обе части равенства (29. 15) оператором $T(t-s)$ и результат проинтегрируем от t_0 до t:

$$\int_{t_0}^{t} T(t-s)\, y'(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} T(t-s)\, Ay(s)\, ds + \int_{t_0}^{t} T(t-s)\, B(s) y(s)\, ds. \tag{29.16}$$

Так как для $s \in [t_0, t]$ справедливо равенство

$$\frac{d}{ds}[T(t-s)\, y(s)] = -T(t-s)\, Ay(s) + T(t-s)\, y'(s),$$

то из соотношения (29. 16) находим, что

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} T(t-s)\, B(s)\, y(s)\, ds. \tag{29.17}$$

В силу (29. 14), $T(t-t_0)\, y(t_0) = 0$, $0 \leqslant t_0 \leqslant t < \infty$.)

Предположим, что $\max\limits_{t_0 \leqslant s \leqslant t} \| y(s) \| = m_t$. Тогда, в соответствии с (29. 17), должно выполняться неравенство

$$m_t \leqslant M m_t (t - t_0) \tag{29.18}$$

при любом $t \geqslant t_0$.

Однако ясно, что для t, достаточно близких к t_0, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, где $M(t_1 - t_0) < 1$, неравенство (29. 18) возможно лишь при условии $m_t = 0$. Таким образом, мы приходим к заключению, что построенное нами решение $y(t)$ должно быть тождественным нулем на отрезке $[t_0, t_1]$.

Если теперь исследовать вместо выражения (29.17) эквивалентные ему соотношения

$$y(t) = \int_{t_1}^{t} T(t-s)\, B(s)\, y(s)\, ds; \quad y(t) \equiv 0 \text{ при } t \in [t_0, t_1],$$

то с помощью указанного выше приема мы можем убедиться в том, что $y(t) \equiv 0$ для любого $t \geqslant t_0$, т. е. операторы $V(t, t_0)$ и $V_1(t, t_0)$ тождественны.

Итак, мы доказали, что уравнение (29. 1) при заданном начальном условии

$$x(t_0) = x_0 \in D(A) \quad (t_0 \geqslant 0) \tag{29.19}$$

имеет единственное решение, которое можно представить в виде

$$x(t) = V(t, t_0) x_0, \quad x_0 \in D(A).$$

Докажем теперь и вторую часть теоремы V.1, а именно, непрерывную дифференцируемость функции $V(t, s) x_0$ ($x_0 \in D(A)$) по параметру s ($0 \leqslant s \leqslant t < \infty$).

Действительно, функция $V_0(t, s) x_0 = W_0(t, s) x_0 = T(t-s) x_0$ непрерывно дифференцируема по $s \in [0, t]$ при $x_0 \in D(A)$. При этом

$$\frac{dW_0(t, s)}{ds} x_0 = -T(t-s) A x_0 = -W_0(t, s) A x_0. \tag{29.20}$$

Следовательно, в силу дополнения к лемме V.1 производная $\frac{dW_1(t, s)}{ds} x_0$ от функции $W_1(t, s)$ (см. (29.7)) существует и непрерывна по t и s:

$$\frac{dW_1(t, s)}{ds} x_0 = -T(t-s) B(s) x_0 - \int_s^t T(t-\sigma) B(\sigma) W_0(\sigma, s) A x_0 d\sigma =$$

$$= -W_0(t, s) B(s) x_0 - W_1(t, s) A x_0.$$

Применяя индукцию, найдем

$$\frac{dW_n(t, s)}{ds} x_0 = -W_{n-1}(t, s) B(s) x_0 - W_n(t, s) A x_0, \tag{29.21}$$

причем $\frac{d}{ds} W_n(t, s) x_0$ непрерывна по t и s ($0 \leqslant s \leqslant t < \infty$).

Из формул (29. 20) и (29. 21) следуют оценки, аналогичные неравенствам (29. 12):

$$\left\| \frac{dW_0(t, s)}{ds} x_0 \right\| \leqslant \| A x_0 \|,$$

$$\left\| \frac{dW_n(t, s)}{ds} x_0 \right\| \leqslant M^n \frac{(t-s)^{n-1} + (t-s)^n}{(n-1)!} \alpha \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Согласно этим оценкам, мы можем утверждать, что функция

$$x(t, s) = V(t, s) x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(t, s) x_0 \quad (x_0 \in D(A))$$

непрерывно дифференцируема по параметру s, а производная

$\frac{dV(t,s)}{ds}x_0$ непрерывна по переменным t и s. Для производной $\frac{dV(t,s)}{ds}x_0$ имеет место оценка

$$\left\| \frac{dV(t,s)}{ds} x_0 \right\| \leqslant [1 + Me^{M(t-s)}(1+t-s)]\,\alpha, \qquad (29.22)$$

где

$$\alpha = \| Ax_0 \| + \| x_0 \| .$$

Кроме того, в силу (29.20) и (29.21) справедливо соотношение

$$\frac{dV(t,s)}{ds} x_0 = -V(t,s)B(s)x_0 - V(t,s)Ax_0 = -V(t,s)[A+B(s)]x_0.$$

Этим и завершается доказательство теоремы V.1.

Рассмотрим теперь построение решения неоднородного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = [A+B(t)]x + f(t) \qquad (29.23)$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0 \in D(A) \quad (0 \leqslant t_0 \leqslant t < \infty). \qquad (29.24)$$

Здесь имеет место следующая теорема.

Теорема V.2. *Пусть операторы A и $B(t)$ такие же, как в теореме V.1, а функция $f(t) \in \mathfrak{X}$ непрерывно дифференцируема.*

Тогда существует единственное решение задачи (29.23), (29.24). Это решение имеет вид

$$x(t) = V(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} V(t,s)f(s)\,ds,$$

где $V(t,s)$ — оператор из теоремы V.1.

Доказательство. Построим такую последовательность:

$$y_0(t) = \int_{t_0}^{t} W_0(t,s)f(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s)\,ds,$$

$$y_n(t) = \int_{t_0}^{t} W_n(t,s)f(s)\,ds \quad (n=1,2,\ldots), \qquad (29.25)$$

где $W_n(t,s)$ — такие же операторы, как в теореме V.1.

Нетрудно убедиться, что

$$y_n(t) = \int_{t_0}^{t} T(t-\sigma)B(\sigma)y_{n-1}(\sigma)\,d\sigma \quad (n=1,2,\ldots). \qquad (29.26)$$

Действительно,

$$y_n(t) = \int_{t_0}^{t}\left[\int_{s}^{t} T(t-\sigma)\,B(\sigma)\,W_{n-1}(\sigma, s)\,d\sigma\right] f(s)\,ds =$$

$$= \int_{t_0}^{t} T(t-\sigma)\,B(\sigma)\left[\int_{t_0}^{\sigma} W_{n-1}(\sigma, s)\,f(s)\,ds\right] d\sigma =$$

$$= \int_{t_0}^{t} T(t-\sigma)\,B(\sigma)\,y_{n-1}(\sigma)\,d\sigma.$$

Согласно лемме V.1, функция $y_0(t)$ является непрерывно дифференцируемой и по индукции это имеет место для любой $y_n(t)$, причем

$$y_0'(t) = T(t-t_0)\,f(t_0) + \int_{t_0}^{t} T(t-s)\,f'(s)\,ds,$$

$$y_n'(t) = \int_{t_0}^{t} T(t-s)\,B'(s)\,y_{n-1}(s)\,ds + \int_{t_0}^{t} T(t-s)\,B(s)\,y_{n-1}'(s)\,ds \qquad (29.27)$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Из выражений (29.26) и (29.27) легко получим оценки:

$$\| y_n(t) \| \leqslant M^n K \frac{(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad (29.28)$$

$$\| y_n'(t) \| \leqslant M^n K \frac{(t-t_0)^n + (t-t_0)^{n+1}}{n!},$$

где

$$K = \max_{0 \leqslant t_0 \leqslant t < \infty} [\, \| f(t) \|, \ \| f'(t) \| \,].$$

Полагая

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t), \qquad (29.29)$$

мы, согласно неравенствам (29.28), можем утверждать, что ряд (29.29) сходится равномерно по t, допускает почленное дифференцирование и $y(t)$ является непрерывно дифференцируемой функцией.

Согласно формулам (29.25) и (29.26), мы имеем такие представления для полученной функции $y(t)$:

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} T(t-s)\,f(s)\,ds + \int_{t_0}^{t} T(t-s)\,B(s)\,y(s)\,ds =$$

$$= \int_{t_0}^{t} V(t,s) f(s)\, ds, \tag{29.30}$$

причем $y(t_0) = 0$.

На основании леммы V. 1' из выражения (29. 30) следует

$$\frac{dy}{dt} = f(t) + A \int_{t_0}^{t} T(t-s) f(s)\, ds + B(t)\, y(t) +$$

$$+ A \int_{t_0}^{t} T(t-s) B(s) y(s)\, ds = f(t) + [A + B(t)]\, y(t),$$

т. е. функция $y(t) = \int_{t_0}^{t} V(t,s) f(s)\, ds$ является частным решением уравнения (29. 23).

Таким образом, объединяя результаты теорем V. 1 и V. 2, приходим к выводу, что вектор

$$x(t) = V(t, t_0) x_0 + \int_{t_0}^{t} V(t,s) f(s)\, ds$$

есть решение задачи (29.23), (29.24), что и требовалось доказать.

Замечание. В работе [70] доказана разрешимость уравнения (29.20) при менее жестких предположениях относительно коэффициентов и начального условия $x(0) = x_0$. В частности, оператор $B(t)$ может быть тоже неограниченным, но подчиненным в определенном смысле оператору A.

§ 30. О разрешимости некоторых операторных уравнений в банаховом пространстве

При асимптотическом расщеплении уравнения (28.1) нам неоднократно придется встречаться с уравнением вида

$$AX - XA = F, \tag{30.1}$$

где A — наш заданный оператор, удовлетворяющий условиям (S_1); F — некоторый ограниченный оператор.

Функциональное уравнение (30.1) понимается в том смысле, что левая и правая части уравнения совпадают на векторах ψ из области $D(A)$:

$$(AX - XA)\psi = F\psi \quad (\psi \in D(A)).$$

Пусть α — некоторая точка комплексной плоскости λ, не принадлежащая спектру $\sigma(A)$. Тогда оператор $(A - \alpha I)^{-1} = H$ является ограниченным оператором, спектр которого получается из спектра $\sigma(A)$ с помощью дробно-линейного преобразования

$$\mu = \frac{1}{\lambda - \alpha}. \tag{30.2}$$

(Предполагается, что выбор α обеспечивает выполнение требования $\mu \overline{\in} \sigma(A)$.)

Таким образом, если по условию спектр $\sigma(A)$ распадается на $n+1$ спектральных множеств σ_k $(\sigma(A) = \overset{n}{\underset{0}{U}} \sigma_k)$, то и спектр оператора H состоит из $n+1$ замкнутых частей

$$\sigma(H) = \overset{n}{\underset{0}{U}} \sigma'_k,$$

причем $\sigma'_k = \dfrac{1}{\sigma_k - \alpha}$ $(k = 0, 1, 2, \dots, n)$ — ограниченные множества и только σ'_0 содержит точку $\mu = 0$.

Далее, если Γ_k — дуга, отделяющая спектральное множество σ_k от остальной части спектра $\sigma(A) - \sigma_k$, а $\widetilde{\Gamma}_k$ — содержит внутри себя $\sigma(A) - \sigma_k$, то в результате преобразования (30.2) мы получим дугу γ_k, окружающую множество σ'_k, и дугу $\widetilde{\gamma}_k$, содержащую $\sigma(H) - \sigma'_k$.

Построим для оператора H проекционные операторы J_k, соответствующие спектральному множеству σ'_k:

$$J_k = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_k} R(\mu;\ H)\, d\mu \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, n). \tag{30.3}$$

Проекторы J_k обладают теми же свойствами, что и операторы P_k:

$$J_k^2 = J_k; \qquad J_k J_j = 0 \quad (k \neq j), \ J_k H = H J_k.$$

Более того, нетрудно доказать, что $J_k \equiv P_k$ $(k = 0, 1, \dots, n)$. Для этого выразим прежде всего резольвенту оператора H через резольвенту заданного оператора A. Здесь оказывается полезной известная формула обобщенного операторного исчисления [102]:

$$f(A) = f(\infty) I - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} f(\lambda) R(\lambda;\ A)\, d\lambda, \tag{30.4}$$

где $\Gamma = \overset{n}{\underset{0}{U}} \Gamma_k$ — ориентированная огибающая множества $\Delta \supset \sigma(A)$; $f(\lambda)$ — некоторая комплексная функция, голоморфная на Δ.

Очевидно, для наших целей, а именно, построения резольвенты оператора H

$$R(\mu; H)=[(A-\alpha I)^{-1}-\mu I]^{-1}, \tag{30.5}$$

в качестве функции $f(\lambda)$ следует выбрать такую:

$$f(\lambda)=[(\lambda-\alpha)^{-1}-\mu]^{-1}. \tag{30.6}$$

Тогда, согласно формуле (30. 4), находим

$$R(\mu; H)=-\frac{1}{\mu} I-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{R(\lambda; A)\,d\lambda}{\dfrac{1}{\lambda-\alpha}-\mu}$$

и, следовательно, оператор J_k имеет вид

$$J_k=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_k} R(\mu; H)\,d\mu=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_k}\frac{d\mu}{\mu} I+$$

$$+\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int\limits_{\gamma_k}\int\limits_{\Gamma}\frac{R(\lambda; A)}{\dfrac{1}{\lambda-\alpha}-\mu}\,d\lambda d\mu.$$

Применяя обычные рассуждения теории функций комплексного переменного, мы можем выписать следующую цепочку равенств и доказать желаемое:

$$J_k=\delta I+\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int\limits_{\gamma_k}\int\limits_{\Gamma_k}\frac{R(\lambda; A)}{\dfrac{1}{\lambda-\alpha}-\mu}\,d\lambda d\mu+$$

$$+\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int\limits_{\gamma_k}\int\limits_{\widetilde{\Gamma}_k}\frac{R(\lambda; A)}{\dfrac{1}{\lambda-\alpha}-\mu}\,d\lambda d\mu=\delta I+\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int\limits_{\Gamma_k} R(\lambda; A)\times$$

$$\times\left[\int\limits_{\gamma_k}\frac{d\mu}{\dfrac{1}{\lambda-\alpha}-\mu}\right]d\lambda+\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int\limits_{\widetilde{\Gamma}_k} R(\lambda; A)\left[\int\limits_{\gamma_k}\frac{d\mu}{\dfrac{1}{\lambda-\alpha}-\mu}\right]d\lambda=$$

$$=\delta I-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_k} R(\lambda; A)\,d\lambda=P_k,$$

где

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0. \\ 0, & \text{если } k \neq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь операторное уравнение

$$HX - XH = G, \tag{30.7}$$

где H — построенный оператор, а G — некоторый (известный) ограниченный оператор.

Нетрудно проверить, что справедлива следующая теорема.

Теорема V. 3. *Пусть H и G—заданные ограниченные операторы в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$.*

При выполнении условий

$$GP_k = G, \ P_kG = 0 \tag{30.8}$$

уравнение (30.7) имеет решение

$$X = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} R(\mu;\ H)\,GR(\mu;\ H)\,d\mu. \tag{30.9}$$

Это решение — единственное, обладающее свойством

$$XP_k = X; \qquad P_kX = 0. \tag{30.10}$$

Доказательство теоремы V.3 будет состоять в непосредственной проверке решения (30.9).

При этом следует помнить, что по доказанному $J_k = P_k$.

Подставим выражение (30.9) в обе части уравнения (30.7), в результате чего получим

$$\begin{aligned} HX &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} GR(\mu; H)\,d\mu - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} \mu R(\mu; H)GR(\mu; H)\,d\mu, \\ XH &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} R(\mu; H)\,G\,d\mu - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} \mu R(\mu; H)\,GR(\mu; H)\,d\mu. \end{aligned} \tag{30.11}$$

Здесь использовано хорошо известное свойство резольвент ограниченных операторов:

$$HR(\mu; H) = R(\mu; H)\,H = I + \mu R(\mu; H); \quad \mu \bar{\in} \sigma(H).$$

Из равенств (30.11) следует

$$HX - XH = GP_k - P_kG = G,$$

что и утверждается теоремой.

Нетрудно непосредственно проверить, что решение (30.9) удовлетворяет условию (30.10). Покажем теперь, что решение с такими свойствами — единственно.

Предположим, что наряду с решением X существует еще одно решение Y, удовлетворяющее условию (30.10), т. е.

$$YP_k = Y, \ P_kY = 0.$$

Но тогда, очевидно, элемент $Z = X - Y$ является решением однородного уравнения

$$HZ - ZH = 0. \tag{30.12}$$

Так как правая часть уравнения (30.12) удовлетворяет условию (28.8) (в данном случае $G \equiv 0$), то, по доказанному выше, мы можем построить элемент Z по формуле (30.9). В результате этого получим $Z \equiv 0$, т. е. $X \equiv Y$, что и требовалось доказать.

Заметим в заключение, что решение уравнения (30.7), удовлетворяющее условиям (30.8), можно записать также в форме

$$X = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\tilde{\gamma}_k} R(\mu;\ H)\, GR(\mu;\ H)\, d\mu \tag{30.9$'$}$$

(ср. с формулой (30.9)).

Теперь мы можем вернуться к рассмотрению исходного уравнения (30.1) и показать, что при выполнении условия

$$FP_k = F, \ P_kF = 0 \tag{30.13}$$

выражение (30.9), в котором

$$G = -HFH, \tag{30.14}$$

является решением уравнения (30.1), обладающим свойством (30.10).

Заметим, что в силу равенства $P_kH = HP_k$, справедливого для ограниченных операторов, выполнение условия (30.13) влечет за собой выполнение таких же условий для оператора G из (30.14).

Прежде всего установим, что оператор (30.9) оставляет инвариантной область $D(A)$, т. е. $XD \subset D$.

Действительно, из уравнения (30.7) имеем

$$XH = HX - G = [A - \alpha I]^{-1} X + [A - \alpha I]^{-1} F [A - \alpha I]^{-1} =$$

$$= [A - \alpha I]^{-1} [X + F(A - \alpha I)^{-1}].$$

Пусть $f \in D(A)$ и $(A - \alpha I) f = g$, т.е. $f = Hg$.
Тогда можно записать

$$Xf = XHg = [A - \alpha I]^{-1} [X + FH]\, g, \tag{30.15}$$

откуда следует, что $Xf \in D$, ибо ограниченный оператор $H =$

$= (A - \alpha I)^{-1}$ переводит все пространство $\mathfrak{X}$ в $D(A)$. Применим к левой и правой части равенства (30.15) оператор $(A - \alpha I)$:

$$(A - \alpha I) X f = X g + F H g = X (A - \alpha I) f + F f$$

и в результате получим желаемое равенство

$$A X f - X A f = F f, \ f \in D(A).$$

Таким образом, нами установлена такая теорема.

Теорема* V. 4. *Пусть оператор A такой же, как в теореме V.1, а ограниченный оператор F подчиняется условиям (30.13).*

Тогда операторное уравнение (30.1) имеет решение

$$X = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_k} R(\mu; H) H F H R(\mu; H)\, d\mu, \tag{30.16}$$

которое является единственным, удовлетворяющим условию

$$X P_k = X, \ P_k X = 0.$$

Замечание. Допустим, что оператор F зависит от параметра τ:

$$F \equiv F(\tau), \ \tau \in [0, L].$$

Тогда из вида формулы (30.16) следует, что решение $X(\tau)$ будет иметь столько же производных по τ, сколько и $F(\tau)$.

В дальнейшем в этой главе дифференцируемость, непрерывность и сходимость понимаются в смысле нормы операторов.

§ 31. Построение формального решения

Вернемся к рассмотрению уравнения

$$\frac{dx}{dt} = [A + \varepsilon B(\tau, \varepsilon)]\, x \quad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{L}{\varepsilon}\right) \tag{31.1}$$

и укажем метод построения его формального решения, удовлетворяющего условию

$$x(t_0) = x_0, \ x_0 \in D(A), \ 0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant \frac{L}{\varepsilon}. \tag{31.2}$$

Кроме уже сформулированных предположений, относящихся к свойствам операторов A и $B(\tau, \varepsilon)$ (см. § 28), будем предполагать

---

* Решение операторных уравнений более общего типа рассматривается в работе [21].

еще, что оператор $B(\tau, \varepsilon)$ допускает представление в виде

$$B(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^{s-1} B_s(\tau), \quad \| B(\tau, \varepsilon) \| \leqslant M_1, \tag{31.3}$$

причем $B_s(\tau)$ дифференцируемы по τ достаточное (бесконечное) число раз.

Как следует из теоремы V.1, задача (31.1) и (31.2) имеет точное решение вида

$$x(t, \varepsilon) = V(t, t_0, \varepsilon) x_0, \quad x_0 \in D(A), \tag{31.4}$$

где $V(t, t_0, \varepsilon)$ — оператор, исследованный в § 29 и удовлетворяющий условиям:

$$V(t_0, t_0, \varepsilon) = I,$$

$$\| V(t, t_0, \varepsilon) \| \leqslant e^{\varepsilon M_1 (t - t_0)} \leqslant e^{M_1 L}.$$

В соответствии со структурой спектра оператора A (см. (28.3)) будем строить оператор $V(t, t_0, \varepsilon)$ для формального решения уравнения (31.1) в форме

$$V(t, t_0, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} V_k(\tau, \varepsilon) X_k(t, t_0, \varepsilon), \tag{31.5}$$

считая, что операторы $X_k(t, t_0, \varepsilon)$ действуют в подпространствах $\mathfrak{X}_k = P_k[\mathfrak{X}]$:

$$X_k(t, t_0, \varepsilon) = P_k X_k(t, t_0, \varepsilon) = X_k(t, t_0, \varepsilon) P_k \tag{31.6}$$

и удовлетворяют в них уравнениям

$$\frac{dX_k}{dt} = \Omega_k(\tau, \varepsilon) X_k(t, t_0, \varepsilon) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n) \tag{31.7}$$

(уравнение (31.7) понимается как равенство левой и правой частей на векторах из области $D(A)$).

Предполагается, что для коэффициентов из выражений (31.5) и (31.7) имеют место представления

$$V_k(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s V_{ks}(\tau),$$

$$\Omega_k(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Omega_{ks}(\tau), \tag{31.8}$$

о характере сходимости которых мы пока ничего не говорим.

Прежде чем перейти к построению операторов $V_k(\tau, \varepsilon)$ и $\Omega_k(\tau, \varepsilon)$, выясним, каким дополнительным условиям должен удовлетворять оператор $\Omega_k(\tau, \varepsilon) \equiv \Omega_{k0} + \varepsilon\Omega_k(\tau, \varepsilon)$, подчиняющийся условиям (S_1) и (S_2), чтобы имело место соотношение (31.6). Нетрудно проверить, что для этого оказывается достаточным выполнение равенства

$$\Omega_k(\tau, \varepsilon) = P_k\Omega_k(\tau, \varepsilon)P_k. \tag{31.9}$$

Действительно, в случае (31.9) уравнению (31.7) удовлетворяют наряду с $X_k(t, t_0, \varepsilon)$ также операторы $P_kX_k(t, t_0, \varepsilon)$ и $X_k(t, t_0, \varepsilon)P_k$:

$$P_k \frac{d}{dt} X_k(t, t_0, \varepsilon) = P_k\Omega_k P_k(P_kX_k) = \Omega_k(\tau, \varepsilon)P_kX_k(t, t_0, \varepsilon),$$

$$\frac{d}{dt} X_k(t, t_0, \varepsilon)P_k = \Omega_k(t, \varepsilon)X_k(t, t_0, \varepsilon)P_k.$$

Если предположить, что все эти решения совпадают при $t = t_0$:

$$X(t_0, t_0, \varepsilon) = P_kX_k(t_0, t_0, \varepsilon) = X_k(t_0, t_0, \varepsilon)P_k,$$

то и при любом $t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$ будут выполняться соотношения (31.6), ибо, согласно теореме V. 1, уравнение (31.7) имеет единственное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию.

Итак, мы убедились, что равенство (31.9) обеспечивает для операторов $X_k(t, t_0, \varepsilon)$ выполнение условия (31.6); другими словами, уравнения (31.7) являются уравнениями в подпространствах $\mathfrak{X}_k = P_k[\mathfrak{X}]$. Таким образом, по аналогии с конечномерным случаем можно сказать, что эти уравнения как бы имеют порядок меньший, чем уравнение (31.1).

Перейдем теперь к построению оператора $V(t, t_0, \varepsilon)$, удовлетворяющего, хотя бы формально, уравнению (31.1). Для этого подставим в (31.1) выражение (31.4), где $V(t, t_0, \varepsilon)$ имеет вид (31.5).

Пользуясь представлениями (31.7) и (31.8), получим равенство

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{s=1}^{\infty}{}' \varepsilon^s \frac{dV_{ks-1}}{d\tau} + \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \sum_{j=0}^{s} V_{kj}(\tau)\Omega_{ks-j}(\tau)\right]X_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}{}' \left[\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s AV_{ks}(\tau) + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \sum_{j=0}^{s-1} B_{s-j}(\tau)V_{kj}(\tau)\right]X_k. \tag{31.10}$$

Отделяя в равенстве (31.10) коэффициенты при различных выражениях типа $\varepsilon^s X_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$; $s = 0, 1, 2, \ldots$, находим (с учетом требования (31.6)) систему рекуррентных соотношений для определения членов разложения (31.8):

$$\frac{dV_{ks-1}}{d\tau} P_k + \sum_{j=0}^{s}{}' V_{kj}(\tau)\Omega_{ks-j}(\tau)P_k = AV_{ks}(\tau)P_k +$$

$$+\sum_{j=0}^{s-1} B_{s-j}(\tau) V_{kj}(\tau) P_k \qquad (31.11)$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n; \ \ s = 0, 1, 2, \ldots; \ \ V_{k-1}(\tau) \equiv 0).$$

Отсюда можно определить все интересующие нас величины. При $s = 0$ имеем

$$V_{k0}(\tau)\,\Omega_{k0}(\tau)\,P_k = A\dot{V}_{k0}(\tau)\,P_k. \qquad (31.12)$$

Это соотношение выполняется, если положить

$$V_{k0}(\tau) = P_k; \quad \Omega_{k0} = AP_k. \qquad (31.13)$$

Очевидно, при таком выборе оператора $\Omega_{k0}(\tau)$ соотношение (31.9) выполняется на элементах из области $D(A)$.

При $s = 1$ из системы (31.11) получаем

$$AV_{k1}(\tau)\,P_k - V_{k1}(\tau)\,AP_k = P_k\Omega_{k1}(\tau)\,P_k - B_1(\tau)\,P_k$$

или—на элементах из $D(A)$:

$$AV_{k1}(\tau)\,P_k - V_{k1}(\tau)\,P_kA = P_k\Omega_{k1}(\tau)\,P_k - B_1(\tau)\,P_k. \qquad (31.14)$$

Для решения уравнения (31.14) используем результаты § 30, откуда следует, что уравнение (31.14) разрешимо при условии

$$P_k\,[P_k\Omega_{k1}(\tau)\,P_k - B_1(\tau)\,P_k] = 0, \qquad (31.15)$$

которое вместе с (31.9) позволяет определить оператор

$$\Omega_{k1}(\tau) = P_k\Omega_{k1}(\tau)\,P_k = P_kB_1(\tau)\,P_k. \qquad (31.16)$$

При этом искомое решение $V_{k1}(\tau)\,P_k$ имеет вид:

$$V_{k1}(\tau)\,P_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} R(\mu;\ H)\,H\,[\Omega_{k1}(\tau) - B_1(\tau)]\,P_kHR(\mu;\ H)\,d\mu, \qquad (31.17)$$

где

$$H = [A - \alpha I]^{-1}, \quad \alpha \bar{\in} \sigma(A).$$

Положим теперь

$$V_{k1}(\tau) = V_{k1}(\tau)\,P, \qquad (31.18)$$

при этом заметим, что, согласно теореме V. 4,

$$P_kV_{k1}(\tau) = 0. \qquad (31.19)$$

Если рассмотреть соотношение (31.11) при произвольном $s > 1$, то мы получим уравнение

$$AV_{ks}(\tau)\,P_k - V_{ks}(\tau)\,P_kA = P_k\Omega_{ks}(\tau)\,P_k - T_{ks}(\tau)\,P_k, \qquad (31.20)$$

где

$$T_{ks}(\tau) = \sum_{j=0}^{s-1} B_{s-j}(\tau) V_{kj}(\tau) - \sum_{j=1}^{s-1} V_{kj}(\tau) \Omega_{ks-j}(\tau) - \frac{dV_{ks-1}}{d\tau}.$$

Если считать, что все величины с номерами, меньшими s, уже найдены, то оператор T_{ks} известен, и уравнение (31.20) решается так же, как и для случая $s = 1$.

Из условия разрешимости

$$P_k [P_k \Omega_{ks}(\tau) P_k - T_{ks}(\tau) P_k] = 0$$

находим

$$\Omega_{ks}(\tau) = P_k \Omega_{ks}(\tau) P_k = P_k T_{ks}(\tau) P_k =$$

$$= \sum_{j=0}^{s-1} P_k B_{s-j}(\tau) V_{kj}(\tau) - P_k \frac{dV_{ks-1}}{d\tau} \tag{31.21}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n; \; s = 1, 2, \ldots).$$

Тогда

$$V_{ks}(\tau) = V_{ks}(\tau) P_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} R(\mu; H) H [\Omega_{ks}(\tau) -$$

$$- T_{ks}(\tau)] P_k H R(\mu; H) d\mu \tag{31.22}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n; \; s = 1, 2, \ldots).$$

Указанным путем можно определить операторы $\Omega_{ks}(\tau)$ и $V_{ks}(\tau)$ с достаточно большими номерами s. Нужно заметить, что в выражение для $V_{ks}(\tau)$ входит производная $\frac{dV_{ks-1}}{d\tau}$.

Легко проверить, пользуясь представлениями (31.21) и (31.22), что в случае непрерывной дифференцируемости по τ операторов $B_{p-j}(\tau)$ $(p \geqslant 1, \; j = 0, 1, 2, \ldots, p-1)$ соответственно $j+2$ раза, удается вычислить искомые решения $\Omega_{ks}(\tau)$ и $V_{ks}(\tau)$ для $0 \leqslant s \leqslant p$, причем все они окажутся непрерывно дифференцируемыми по τ $(p - s + 2)$ раза.

Итак, мы описали алгоритм построения членов разложения (31.8) операторов $V_k(\tau, \varepsilon)$ и $\Omega_k(\tau, \varepsilon)$. Если бы было возможно определить бесконечное число членов указанных разложений, а потом найти разрешающие операторы $X_k(t, t_0, \varepsilon)$ уравнений (31.7), то построенная функция

$$x(t, \varepsilon) = V(t, t_0, \varepsilon) x_0,$$

где $V(t, t_0, \varepsilon)$ имеет структуру (31.5), представляла бы собой формальное решение задачи (31.1), (31.2).

Однако в действительности всегда приходится ограничиваться лишь конечным числом шагов описанного выше алгоритма. Рассмотрим поэтому оператор

$$V_{k}^{(p)}(t, t_0, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} V_k^{(p)}(\tau, \varepsilon) X_k^{(p)}(t, t_0, \varepsilon), \tag{31.23}$$

где

$$V_k^{(p)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{p} \varepsilon^s V_{ks}(\tau), \tag{31.24}$$

а $X_k^{(p)}(t, t_0, \varepsilon)$ — операторы, удовлетворяющие (в указанном ранее смысле) дифференциальным уравнениям

$$\frac{dX_k^{(p)}(t, t_0, \varepsilon)}{dt} = \Omega_k^{(p)}(\tau, \varepsilon) X_k^{(p)}(t, t_0, \varepsilon) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n) \tag{31.25}$$

с операторными коэффициентами

$$\Omega_k^{(p)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{p} \varepsilon^s \Omega_{ks}(\tau) = \Omega_{k0} + \varepsilon \overline{\Omega}_k^{(p)}(\tau, \varepsilon), \tag{31.26}$$

$$\overline{\Omega}_k^{(p)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{p} \varepsilon^{s-1} \Omega_{ks}(\tau).$$

Согласно нашим предыдущим рассмотрениям, оператор $V^{(p)}(t, t_0, \varepsilon)$ обладает непрерывной производной по t, следовательно, мы можем продифференцировать его, используя при этом соотношение (31.11). В результате получим для $V^{(p)}(t, t_0, \varepsilon)$ уравнение

$$\frac{dV^{(p)}(t, t_0, \varepsilon)}{dt} = [A + \varepsilon B^{(p)}(\tau, \varepsilon)] V^{(p)}(t, t_0, \varepsilon) + \varepsilon^{p+1} \Phi_p(t, t_0, \varepsilon), \tag{31.27}$$

где

$$B^{(p)} = \sum_{s=1}^{p} \varepsilon^{s-1} B_s(\tau),$$

$$\Phi_p(t, t_0, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{dV_{kp}(\tau)}{d\tau} + \sum_{s=p+1}^{2p} \varepsilon^{s-p-1} \sum_{j=s-p}^{p} (V_{ks-j}(\tau) \Omega_{kj}(\tau) - \right.$$

$$\left. - B_j(\tau) V_{ks-j}(\tau) \right] X_k^{(p)}(t, t_0, \varepsilon) \equiv \sum_{k=0}^{n} \Phi_k^{(p)}(\tau, \varepsilon) X_k^{(p)}(t, t_0, \varepsilon). \tag{31.28}$$

Более детальному исследованию оператора $V^{(p)}(t, t_0, \varepsilon)$ будет посвящен следующий параграф.

§ 32. Обоснование асимптотической сходимости

Для выяснения свойств оператора $V^{(p)}(t, t_0, \varepsilon)$ рассмотрим операторы $X_k^{(p)}(t, t_0, \varepsilon)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, определяющие решение уравнений

$$\frac{dX_k^{(p)}(t, t_0, \varepsilon)}{dt} = [\Omega_{k0}(\tau) + \varepsilon\overline{\Omega}_k^{(p)}(\tau, \varepsilon)]\, X_k^{(p)}(t, t_0, \varepsilon) \qquad (32.1)$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

заданных в подпространствах $P_k[\mathfrak{X}]$.

В силу наших построений коэффициенты $\Omega_k^{(p)}(\tau, \varepsilon) = \Omega_{k0} + \varepsilon\overline{\Omega}_k^{(p)}(\tau, \varepsilon)$ удовлетворяют условиям теоремы V.I, поэтому мы можем утверждать, что разрешающий оператор $X_k^{(p)}(t, t_0, \varepsilon)$ уравнений (32.1) ограничен

$$\| X_k^{(p)}(t, t_0, \varepsilon) \| \leqslant e^{\varepsilon N(t - t_0)} \leqslant e^{NL},$$

$$[N = \max_k \{N_k\}, \qquad N_k = \max_{0 \leqslant \tau \leqslant L, 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0} \| \overline{\Omega}_k^{(p)}(\tau, \varepsilon) \|, \qquad (32.2)$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n],$$

а для функции $X_k^{(p)}(t, s, \varepsilon) y$ $(y \in D(A))$ параметра s $\left(0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \dfrac{L}{\varepsilon}\right)$ имеет место соотношение

$$\frac{dX_k^{(p)}(t, s, \varepsilon)}{ds} y = -X_k^{(p)}(t, s, \varepsilon)[\Omega_{k0} + \varepsilon\overline{\Omega}_k^{(p)}(\sigma, \varepsilon)]\, y, \qquad \sigma = \varepsilon s. \quad (32.3)$$

Таким образом, в силу свойств операторов $X_k^{(p)}(t, t_0, \varepsilon)$ и свойств операторов $V_{kj}(\tau)$, $\Omega_{kj}(\tau)$ $(k = 0, 1, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, p)$, построенных в предыдущем параграфе, следует, что операторы

$$V^{(p)}(t, t_0, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} V_k^{(p)}(\tau, \varepsilon) X_k^{(p)}(t, t_0, \varepsilon),$$

$$\Phi_p(t, t_0, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \Phi_k^{(p)}(\tau, \varepsilon) X_k^{(p)}(t, t_0, \varepsilon) \qquad (32.4)$$

(см. уравнение (31.27)) ограничены на сегменте $0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant \dfrac{L}{\varepsilon}$, а операторные функции $V^{(p)}(t, t_0, \varepsilon) y$, $\Phi^{(p)}(t, t_0, \varepsilon) y$, $y \in D(A)$, непрерывно дифференцируемы по t и t_0.

Нетрудно видеть, что для функции $V^{(p)}(t, t_0, \varepsilon) y$, $y \in D(A)$, имеет место и уравнение

$$\frac{dV^{(p)}(t, t_0, \varepsilon)}{dt} y = [A + \varepsilon B(\tau, \varepsilon)] V^{(p)}(t, t_0, \varepsilon) y + \varepsilon^{p+1} \Psi(t, t_0, \varepsilon) y, \quad (32.5)$$

где

$$\Psi(t, t_0, \varepsilon) = \Phi_p(t, t_0, \varepsilon) - \bar{B}^{(p)}(\tau, \varepsilon) V^{(p)}(t, t_0, \varepsilon),$$

$$\bar{B}^{(p)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^{s-1} B_{s+p}(\tau)$$

(ср. (32.5) и (31.27)).

Иными словами, $x^{(p)}(t, \varepsilon) = V^{(p)}(t, t_0, \varepsilon) y$, $y \in D(A)$ удовлетворяет исходному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = [A + \varepsilon B(\tau, \varepsilon)] x(t, \varepsilon) \tag{32.6}$$

с точностью до выражения порядка $O(\varepsilon^{p+1})$, так как, согласно установленным свойствам операторов $\Phi_p(t, t_0, \varepsilon)$, $V^{(p)}(t, t_0, \varepsilon)$ и условий (S_2), наложенных на $B(\tau, \varepsilon)$, оператор $\Psi(t, t_0, \varepsilon)$ ограничен на сегменте $0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant \frac{L}{\varepsilon}$ и для него справедлива оценка

$$\| \Psi(t, t_0, \varepsilon) \| \leqslant C_1,$$

где C_1 — постоянная, не зависящая от ε.

Теперь уже нетрудно доказать, что построенный нами оператор $V^{(p)}(t, t_0, \varepsilon)$ асимптотически сходится к разрешающему оператору $V(t, t_0, \varepsilon)$ уравнения (32.6). По доказанному ранее, $V(t, t_0, \varepsilon)$ обладает следующими свойствами:

$$\frac{dV(t, t_0, \varepsilon)}{dt} y = [A + \varepsilon B(\tau, \varepsilon)] V(t, t_0, \varepsilon) y, \qquad y \in D(A),$$

$$V(t_0, t_0, \varepsilon) = I, \qquad \| V(t, t_0, \varepsilon) \| \leqslant e^{M_1 L}. \tag{32.7}$$

Введем в рассмотрение разность

$$Z(t, t_0 \varepsilon) = V^{(p)}(t, t_0, \varepsilon) - V(t, t_0, \varepsilon). \tag{32.8}$$

Согласно (32.5) и (32.7), оператор $Z(t, t_0, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dZ(t, t_0, \varepsilon)}{dt} y = [A + \varepsilon B(\tau, \varepsilon)] Z(t, t_0, \varepsilon) y + \varepsilon^{p+1} \Psi(t, t_0, \varepsilon) y,$$

причем

$$Z(t_0, t_0, \varepsilon) = V^{(p)}(t_0, t_0, \varepsilon) - I.$$

Используя результаты теоремы V.2, мы можем утверждать, что для оператора $Z(t, t_0, \varepsilon)$ на элементах $y \in D(A)$ имеет место представление

$$Z(t, t_0, \varepsilon) = V(t, t_0, \varepsilon) Z(t_0, t_0, \varepsilon) + \varepsilon^{p+1} \int_{t_0}^{t} V(t, s, \varepsilon) \Psi(s, t_0, \varepsilon) ds. \tag{32.9}$$

Если в начальный момент времени ($t = t_0$) выполняется неравенство

$$\| V^{(p)}(t_0, t_0, \varepsilon) - I \| \leqslant C_0 \varepsilon^p, \tag{32.10}$$

то из равенства (32.9) с учетом (32.8) легко получаем оценку

$$\| V^{(p)}(t, t_0, \varepsilon) - V(t, t_0, \varepsilon) \| \leqslant C\varepsilon^p. \tag{32.11}$$

(Здесь используется установленная ранее ограниченность операторов $V(t, t_0, \varepsilon)$ и $\Psi(t, t_0, \varepsilon)$.)

Итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема V.5. *Если операторы A и $B(\tau, \varepsilon)$ удовлетворяют условиям (S_1), (S_2), то из оценки*

$$\| V^{(p)}(t_0, t_0, \varepsilon) - I \| \leqslant C_0 \varepsilon^p$$

для оператора $V^{(p)}(t, t_0, \varepsilon)$ вытекает оценка

$$\| V^{(p)}(t, t_0, \varepsilon) - V(t, t_0, \varepsilon) \| \leqslant C\varepsilon^p \qquad \left(0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant \frac{L}{\varepsilon}\right),$$

где C — некоторая постоянная, не зависящая от ε.

§ 33. Асимптотические решения неоднородного уравнения

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = [A + \varepsilon B(\tau, \varepsilon)]\, x + f(\tau, \varepsilon) e^{\theta(t, \varepsilon)}, \tag{33.1}$$

где операторы A и $B(\tau, \varepsilon)$ такие же, как в § 31, а вектор-функция $f(\tau, \varepsilon)$ непрерывно дифференцируема по $\tau \in [0, L]$ и допускает представление

$$f(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s f_s(\tau), \qquad \| f(\tau, \varepsilon) \| \leqslant h. \tag{33.2}$$

Пусть, кроме того, комплекснозначная функция $\theta(t, \varepsilon)$ удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Re} \theta(t, \varepsilon) \leqslant 0, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau), \tag{33.3}$$

где $\nu(\tau)$ — функция, непрерывная на $[0, L]$.

Как следует из теоремы V.2, решение уравнения (33.1), удовлетворяющее условию $x(0) = x_0$, имеет вид

$$x(t, \varepsilon) = V(t, 0, \varepsilon) x_0 + \int_0^t V(t, s, \varepsilon) f(\sigma, \varepsilon) e^{\theta(s, \varepsilon)} ds, \qquad \sigma = \varepsilon s. \tag{33.4}$$

Для построения приближений к этому решению введем оператор

$$V^{(p)}(t, t_0, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{n} V_j^{(p)}(\tau, \varepsilon) X_j^{(p)}(t, t_0, \varepsilon), \tag{33.5}$$

где $V_j^{(p)}(\tau, \varepsilon)$ и $X_j^{(p)}(t, t_0, \varepsilon)$ — операторы, построенные в § 31, причем начальные условия для $X_j^{(p)}(t, t_0, \varepsilon)$ подобраны так, чтобы

$$\| V^{(p)}(t_0, t_0, \varepsilon) - I \| \leqslant C_0 \varepsilon^p. \tag{33.6}$$

Положим теперь

$$x^{(p)}(t, \varepsilon) = V^{(p)}(t, 0, \varepsilon) x_0 + \int_0^t V^{(p)}(t, s, \varepsilon) f^{(p)}(\sigma, \varepsilon) e^{\theta(s, \varepsilon)} \, ds, \tag{33.7}$$

где

$$f^{(p)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{p} \varepsilon^s f_s(\tau),$$

и оценим разность

$$y(t, \varepsilon) = x(t, \varepsilon) - x^{(p)}(t, \varepsilon).$$

Согласно (33.4) и (33.5), имеем

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) - x^{(p)}(t, \varepsilon) = {} & [V(t, 0, \varepsilon) - V^{(p)}(t, 0, \varepsilon)] x_0 + \\ & + \int_0^t [V(t, s, \varepsilon) - V^{(p)}(t, s, \varepsilon)] f^{(p)}(\sigma, \varepsilon) e^{\theta(s, \varepsilon)} ds + \\ & + \varepsilon^{p+1} \int_0^t V(t, s, \varepsilon) \bar{f}^{(p)} e^{\theta(s, \varepsilon)} ds, \end{aligned} \tag{33.8}$$

где

$$\bar{f}^{(p)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^{s-1} f_{s+p}(\tau).$$

Используя результаты предыдущего параграфа, легко находим оценку для элемента $y(t, \varepsilon)$. Действительно,

$$\begin{aligned} \| y(t, \varepsilon) \| = \| x(t, \varepsilon) - x^{(p)}(t, \varepsilon) \| < C \| x_0 \| \varepsilon^p + \\ + Ch \varepsilon^p \frac{L}{\varepsilon} + \varepsilon^{p+1} e^{M_1 L} h \frac{L}{\varepsilon} \leqslant C_2 \varepsilon^{p-1}, \end{aligned}$$

где

$$C_2 = ChL + C \| x_0 \| \varepsilon_0 + \varepsilon_0 h L e^{M_1 L}.$$

Таким образом, и в случае неоднородного уравнения (33.1) приближенное решение (33.7) имеет асимптотический характер, т. е.

для решения $x^{(p)}(t, \varepsilon)$ справедлива оценка

$$\| x(t, \varepsilon) - x^{(p)}(t, \varepsilon) \| \leqslant C_2 \varepsilon^{p-1}, \tag{33.9}$$

если в начальный момент времени ($t = 0$) имело место неравенство

$$\| x(0, \varepsilon) - x^{(p)}(0, \varepsilon) \| \leqslant C_0 \varepsilon^p.$$

Если выражение (33.7) записать подробнее

$$x^{(p)}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} V_k^{(p)}(\tau, \varepsilon) \left[X_k^{(p)}(t, 0, \varepsilon) x_0 + \right.$$
$$\left. + \int_0^t X_k^{(p)}(t, s, \varepsilon) f^{(p)}(\sigma, \varepsilon) e^{\theta(s,\varepsilon)} ds \right], \tag{33.10}$$

то становится ясно, что при выполнении условия $P_k f(\sigma, \varepsilon) = 0$, $P_k x_0 = 0$ для некоторых индексов $k = 0, 1, \ldots, n$ в выражение (33.10) не будут входить слагаемые с соответствующими номерами k.

Покажем теперь, что оценка (33.9) для приближенного решения неоднородного уравнения (33.1) в случае «нерезонанса» может быть улучшена. Как и прежде, указанный случай характеризуется тем, что значения функции $\nu(\tau)$ при $\tau \in [0, L]$ не могут совпадать с точками спектра оператора A.

Лемма V.2. *Пусть выполняются сформулированные ранее условия относительно операторов A, $B(\tau, \varepsilon)$, вектор-функции $f(\tau, \varepsilon)$ и скалярной функции $\theta(t, \varepsilon)$. Кроме того, пусть операторы $X_k^{(p)}(t, t_0, \varepsilon)$ подобраны так, чтобы*

$$\| V^{(p)}(t, t, \varepsilon) - I \| \leqslant C_3 \varepsilon^{p+1}. \tag{33.11}$$

Тогда, в случае «нерезонанса» приближенное решение $x^{(p)}(t, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dx^{(p)}}{dt} = [A + \varepsilon B(\tau, \varepsilon)] x^{(p)} + f(\tau, \varepsilon) e^{\theta(t,\varepsilon)} + \varepsilon^{p+1} \varphi(t, \varepsilon),$$

где вектор-функция $\varphi(t, \varepsilon)$ ограничена равномерно относительно t и ε в области $0 \leqslant t \leqslant \frac{L}{\varepsilon}$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

Доказательство. Продифференцируем по t приближенное решение $x^{(p)}(t, \varepsilon)$, определяемое формулой (33.7). Тогда, в силу самого способа построения выражения (33.7), получим для $x^{(p)}(t, \varepsilon)$ уравнение

$$\frac{dx^{(p)}}{dt} = [A + \varepsilon B(\tau, \varepsilon)] x^{(p)} + f(\tau, \varepsilon) e^{\theta(t,\varepsilon)} +$$

$$+ g(t, \varepsilon) + \varepsilon^{p+1} \int_0^t \Psi(t, s, \varepsilon) f^{(p)}(\sigma, \varepsilon) e^{\theta(s,\varepsilon)} ds, \qquad (33.12)$$

где

$$g(t, \varepsilon) = \varepsilon^{p+1} [\Psi(t, t_0, \varepsilon) x_0 - \bar{f}^{(p)}(\tau, \varepsilon) e^{\theta(t,\varepsilon)}] +$$
$$+ [V^{(p)}(t, t, \varepsilon) - I] f^{(p)}(\tau, \varepsilon) e^{\theta(t,\varepsilon)}.$$

Согласио ограниченности оператора $\Psi(t, t_0, \varepsilon)$, доказанной в § 32, и предположений данной леммы, можно утверждать, что вектор-функция $g(t, \varepsilon)$ имеет порядок $O(\varepsilon^{p+1})$, т. е.

$$\| g(t, \varepsilon) \| \leqslant C_4 \varepsilon^{p+1}, \qquad C_4 = \text{const}. \qquad (33.13)$$

Нетрудно проверить, что в рассматриваемом случае «нерезонанса» и последнее слагаемое в правой части уравнения (33.12) имеет порядок $O(\varepsilon^{p+1})$, т. е. для интеграла

$$I = \int_0^t \Psi(t, s, \varepsilon) f^{(p)}(\sigma, \varepsilon) e^{\theta(s,\varepsilon)} ds \qquad (33.14)$$

справедлива оценка

$$\| I \| < C_5 = \text{const}. \qquad (33.15)$$

Воспользуемся для этого представлением

$$\Psi(t, s, \varepsilon) = \Phi_p(t, s, \varepsilon) - \overline{B}^{(p)}(\tau, \varepsilon) V^{(p)}(t, s, \varepsilon)$$

и формулами (32.4). Тогда выражение (33.14) можно переписать в виде

$$I = \sum_{k=0}^{n} Q_k(\tau, \varepsilon) \int_0^t X_k^{(p)}(t, s, \varepsilon) f^{(p)}(\sigma, \varepsilon) e^{\theta(s,\varepsilon)} ds, \qquad (33.16)$$

где

$$Q_k(\tau, \varepsilon) = \Phi_k^{(p)}(\tau, \varepsilon) - \overline{B}^{(p)}(\tau, \varepsilon) V_k^{(p)}(\tau, \varepsilon).$$

Заметим, что, согласно предыдущим рассмотрениям, операторы $Q_k(\tau, \varepsilon)$ равномерно ограничены.

Исследуем теперь интеграл в выражении (33.16), для чего введем такие обозначения:

$$\int_0^t X_k^{(p)}(t, s, \varepsilon) f^{(p)}(\sigma, \varepsilon) e^{\theta(s,\varepsilon)} ds = e^{\theta(t,\varepsilon)} \int_0^t Y_k(t, s, \varepsilon) f^{(p)}(\sigma, \varepsilon) ds, \quad (33.17)$$

где

$$Y_k(t, s, \varepsilon) = e^{-[\theta(t,\varepsilon) - \theta(s,\varepsilon)]} X_k^{(p)}(t, s, \varepsilon). \qquad (33.18)$$

Согласно установленным ранее свойствам операторов $X_k^{(p)}(t, s, \varepsilon)$ (см. (32.3)), справедливо уравнение

$$\frac{dY_k(t, s, \varepsilon)}{ds} = -Y_k(t, s, \varepsilon)[\Omega_{k0} - \nu(\sigma) I] - \varepsilon Y_k(t, s, \varepsilon)\overline{\Omega}_k^{(p)}(\sigma, \varepsilon). \quad (33.19)$$

Так как по предположению функция $\nu(\sigma)$, $\sigma = \varepsilon s$, не совпадает с точками спектра оператора A, а $\Omega_{k0} = AP_k$ (по построению), то для любого $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ существует ограниченный обратный оператор $[\Omega_{k0} - \nu(\sigma) I]^{-1}$.

Вследствие этого из уравнения (33.19) имеем

$$Y_k(t, s, \varepsilon) = -\frac{dY_k}{ds}[\Omega_{k0} - \nu(\sigma) I]^{-1} -$$

$$- \varepsilon Y_k(t, s, \varepsilon)\overline{\Omega}_k^{(p)}(\sigma, \varepsilon)[\Omega_{k0} - \nu I]^{-1}. \quad (33.20)$$

Подставляя выражение $Y_k(t, s, \varepsilon)$ в соотношение (33.17) и интегрируя по частям, находим

$$\int_0^t X_k^{(p)}(t, s, \varepsilon) f^{(p)}(\sigma, \varepsilon) e^{\theta(s,\varepsilon)} ds =$$

$$= -e^{\theta(t,\varepsilon)} X_k^{(p)}(t, t, \varepsilon)[\Omega_{k0} - \nu(\tau) I]^{-1} f^{(p)}(\tau, \varepsilon) +$$

$$+ e^{\theta(0,\varepsilon)} X^{(p)}(t, 0, \varepsilon)[\Omega_{k0} - \nu(0) I]^{-1} f^{(p)}(0, \varepsilon) + \varepsilon \int_0^t e^{\theta(s,\varepsilon)} X_k^{(p)}(t, s, \varepsilon) \times$$

$$\times \left\{ \frac{d}{d\sigma}[(\Omega_{k0} - \nu(\sigma) I)^{-1} f^{(p)}(\sigma, \varepsilon)] -\right.$$

$$\left. - \overline{\Omega}^{(p)}(\sigma, \varepsilon)[\Omega_{k0} - \nu(\sigma) I]^{-1} f^{(p)}(\sigma, \varepsilon) \right\} ds.$$

Из последнего соотношения легко получаем оценку

$$\left\| \int_0^t X_k^{(p)}(t, s, \varepsilon) f^{(p)}(\sigma, \varepsilon) e^{\theta(s,\varepsilon)} ds \right\| \leqslant \beta_k = \text{const}. \quad (33.21)$$

Так как неравенство (33.21) имеет место в данном случае для всех k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$), то теперь очевидна справедливость неравенства (33.15).

Объединяя полученные результаты, мы можем представить уравнение (33.12) в виде

$$\frac{dx^{(p)}}{dt} = [A + \varepsilon B(\tau, \varepsilon)] x^{(p)} + f(\tau, \varepsilon) e^{\theta(t,\varepsilon)} + \varepsilon^{p+1} \varphi(t, \varepsilon), \quad (33.22)$$

где $\varphi(t, \varepsilon)$ — равномерно ограниченная функция:

$$\| \varphi(t, \varepsilon) \| \leqslant C_6 = \text{const}.$$

Иными словами, приближенное решение $x^{(p)}(t, \varepsilon)$ при выполнении условий леммы V.2 удовлетворяет заданному уравнению (33.1) с точностью до величины порядка $O(\varepsilon^{p+1})$. Лемма V.2 доказана.

Пусть

$$z(t, \varepsilon) = x^{(p)}(t, \varepsilon) - x(t, \varepsilon) \tag{33.23}$$

разность между приближенным и точным решениями уравнения (31.1). Тогда на основании (33.1) и (33.22) получаем для $z(t, \varepsilon)$ уравнение

$$\frac{dz}{dt} = [A + \varepsilon B(\tau, \varepsilon)] z + \varepsilon^{p+1} \varphi(t, \varepsilon). \tag{33.24}$$

При этом, согласно (33.7) и (33.4), начальное условие $z_0 = z(0, \varepsilon)$ имеет вид

$$z_0 = x^{(p)}(0, \varepsilon) - x(0, \varepsilon) = [V^{(p)}(0, 0, \varepsilon) - I] x_0. \tag{33.25}$$

В силу теоремы V.2, можно записать

$$z(t, \varepsilon) = V(t, 0, \varepsilon) z_0 + \varepsilon^{p+1} \int_0^t V(t, s, \varepsilon) \varphi(s, \varepsilon) ds,$$

откуда, при выполнении условий леммы V.2, сразу же следует оценка

$$\| x^{(p)}(t, \varepsilon) - x(t, \varepsilon) \| = \| z(t, \varepsilon) \| \leqslant C_7 \varepsilon^p. \tag{33.26}$$

Таким образом, можно утверждать, что для построенного по формуле (33.7) приближенного решения $x^{(p)}(t, \varepsilon)$ неоднородного уравнения (33.1) справедлива такая теорема.

Теорема V.6. *Пусть операторы A и $B(\tau, \varepsilon)$ удовлетворяют условиям (S_1) и (S_2), а вектор-функция $f(\tau, \varepsilon)$ непрерывно дифференцируема по $\tau \in [0,L]$ и допускает представление (33.2). Кроме того, функция $\theta(t, \varepsilon)$ удовлетворяет условиям (33.3). Тогда для построенного приближения $x^{(p)}(t, \varepsilon)$ к точному решению уравнения (33.1) при выполнении условия (33.6) имеет место оценка*

$$\| x^{(p)}(t, \varepsilon) - x(t, \varepsilon) \| \leqslant C_2 \varepsilon^{p-1},$$

а в случае «нерезонанса» и условия (33.11) — улучшенная оценка

$$\| x^{(p)}(t, \varepsilon) - x(t, \varepsilon) \| \leqslant C_7 \varepsilon^p.$$

§ 34. Непосредственное построение частного решения неоднородного уравнения

Как было показано в § 33 (см. формулы (33.4), (33.7)), частное решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = [A + \varepsilon B(\tau, \varepsilon)]\, x + f(\tau, \varepsilon)\, e^{\theta(t,\varepsilon)} \tag{34.1}$$

весьма просто выражается через общее решение соответствующего однородного уравнения. Однако иногда построение общего решения наталкивается на значительные трудности, а подчас становится вообще невозможным. Кроме того, может понадобиться такое частное решение, которое имеет тот же характер, что и свободный член уравнения (34.1). Тогда оказывается полезным излагаемый ниже метод непосредственного построения частного асимптотического решения уравнения (34.1).

При использовании упомянутого метода следует различать уже известные случаи:

1) «резонанса»—функция $\nu(\tau) = \frac{d\theta}{dt}$ при некоторых значениях $\tau \in [0, L]$ совпадает с точками одного или нескольких, но не всех спектральных множеств оператора A;

2) «нерезонанса»—функция $\nu(\tau)$ не имеет на сегменте $[0, L]$ общих значений со спектром оператора A.

Покажем, как строится формальное частное решение уравнения (34.1) в первом случае. Будем предполагать, что $\nu(\tau)$ при некоторых τ из $[0, L]$ совпадает с точками спектрального множества σ_k. (Напомним, что спектр $\sigma(A)$ оператора A имеет такую структуру: $\sigma(A) = \bigcup\limits_{0}^{n} \sigma_l$, следовательно, $0 \leqslant k \leqslant n$.)

При сделанных предположениях (с учетом условий, сформулированных в § 33) представим частное решение уравнения (34.1) в виде

$$x(t, \varepsilon) = [V_k(\tau, \varepsilon)\, \xi_k(t, \varepsilon) + h(\tau, \varepsilon)]\, e^{\theta(t,\varepsilon)}, \tag{34.2}$$

где $V_k(\tau, \varepsilon)$ — некоторый оператор; $h(\tau, \varepsilon)$ — некоторый вектор из пространства $\mathfrak{X}$; $\xi_k(t, \varepsilon)$ — решение уравнения

$$\frac{d\xi_k}{dt} = [\Omega_k(\tau, \varepsilon) - \nu(\tau) I]\, \xi_k + b_k(\tau, \varepsilon), \tag{34.3}$$

определенного в подпространстве $P_k[\mathfrak{X}]$, т. е.

$$P_k \xi_k(t, \varepsilon) = \xi_k(t, \varepsilon). \tag{34.4}$$

При этом, как обычно, предполагается, что операторы $V_k(\tau, \varepsilon)$, $\Omega_k(\tau, \varepsilon)$ и векторы $h(\tau, \varepsilon)$, $b_k(\tau, \varepsilon)$ допускают много раз встречавшиеся ранее разложения по степеням параметра ε.

Переходя к построению указанных разложений, заметим, что для выполнения условия (34.4) достаточно потребовать

$$P_k\Omega_k(\tau, \varepsilon) P_k = \Omega_k(\tau, \varepsilon), \qquad P_k b_k(\tau, \varepsilon) = b_k(\tau, \varepsilon) \tag{34.5}$$

(равенства (34.5) вытекают из соответствующих рассмотрений § 31).

Подставим теперь (34.2) в уравнение (34.1), учитывая при этом равенства (34.3) и (34.4). Приравняв в обеих частях полученного тождества отдельно выражения при $e^{\theta(t,\varepsilon)}\xi_k(t, \varepsilon)$ и коэффициенты при $e^{\theta(t,\varepsilon)}$, найдем два соотношения для определения искомых операторов и векторов:

$$\varepsilon \frac{dV_k}{d\tau} P_k + V_k(\tau, \varepsilon)\,\Omega_k(\tau, \varepsilon) P_k = [A + \varepsilon B(\tau, \varepsilon)]\, V_k P_k, \tag{34.6}$$

$$[A - \nu(\tau) I]\, h(\tau, \varepsilon) = \varepsilon \frac{dh}{d\tau} + V_k(\tau, \varepsilon)\, b_k(\tau, \varepsilon) -$$

$$- f(\tau, \varepsilon) - \varepsilon B(\tau, \varepsilon)\, h(\tau, \varepsilon). \tag{34.7}$$

Так как соотношение (34.6) полностью совпадает с соответствующим равенством (31.10), то на построении членов разложений операторов $V_k(\tau, \varepsilon)$ и $\Omega_k(\tau, \varepsilon)$ мы здесь останавливаться не будем. Они строятся совершенно так же, как в § 31.

Скажем несколько слов о нахождении членов разложения векторов $h(\tau, \varepsilon)$ и $b_k(\tau, \varepsilon)$, считая, что в равенстве (34.7) оператор $V_k(\tau, \varepsilon)$ уже известен. Отделяя в выражении (34.7) коэффициенты при последовательных степенях параметра ε, получаем следующие рекуррентные соотношения для определения неизвестных $h_s(\tau)$ и $b_{ks}(\tau)$ $(s = 0, 1, 2, \ldots)$:

$$[A - \nu(\tau) I]\, h_s(\tau) = b_{ks}(\tau) + T_s(\tau) \equiv F_s(\tau), \qquad s = 0, 1, 2, \ldots, \tag{34.8}$$

где

$$T_s(\tau) = \frac{dh_{s-1}}{d\tau} + \sum_{m=0}^{s-1} V_{ks-m}(\tau)\, b_{km}(\tau) - f_s(\tau) - B_s(\tau). \tag{34.9}$$

Из соотношения (34.8) при $s = 0$ имеем

$$[A - \nu(\tau) I]\, h_0(\tau) = b_{k0}(\tau) - f_0(\tau) \equiv F_0(\tau). \tag{34.10}$$

К решению уравнения (34.10) мы применяем тот же прием, что и в § 31, а именно, находим $b_{k0}(\tau)$ из условия разрешимости уравнения (34.10):

$$P_k F_0(\tau) = P_k [b_{k0}(\tau) - f_0(\tau)] = 0,$$

т. е., согласно (34.5),

$$b_{k0}(\tau) = P_k f_0(\tau). \tag{34.11}$$

Теперь неизвестный вектор $h_0(\tau)$ находим в соответствии с результатами § 30 по формуле

$$h_0(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_k} \frac{R(\mu; H) H F_0(\tau)}{1-\mu[\nu(\tau)-\alpha]}\,d\mu, \tag{34.12}$$

где $H = (A-\alpha I)^{-1}$ — ограниченный оператор, построенный в § 30; γ_k — дуга, окружающая спектральное множество $\sigma'_k = \dfrac{1}{\sigma_k - \alpha}$ оператора H.

Используя другую форму записи решения уравнения (34.10), а именно,

$$h_0(\tau) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}_k} \frac{R(\mu; H) H F_0(\tau)}{1-\mu[\nu(\tau)-\alpha]}\,d\mu,$$

где $\tilde{\gamma}_k$ содержит спектр $\sigma(H) - \sigma'_k$, можно представить это решение в виде

$$h_0(\tau) = \left[H - \frac{1}{\nu(\tau)-\alpha}\right]^{-1}[I-P_k]Hf_0.^*$$

Аналогично мы решаем уравнение (34.7) для последующих значений $s \geqslant 1$.

В частности, вектор $b_{ks}(\tau)$ находим из условия

$$P_k F_s(\tau) \equiv P_k[b_{ks}(\tau) + T_s(\tau)] = 0,$$

т. е.

$$b_{ks}(\tau) = P_k\left[f_s(\tau) + B_s(\tau) - \frac{dh_{s-1}}{d\tau}\right] \quad (s = 1, 2, \ldots), \tag{34.13}$$

а вектор $h_s(\tau)$ определяем по формуле

$$h_s(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_k} \frac{R(\mu; H) H F_s(\tau)}{1-\mu[\nu(\tau)-\alpha]}\,d\mu \quad (s = 1, 2, \ldots). \tag{34.14}$$

Таким образом, мы можем найти любой член разложения искомых операторов $V_k(\tau, \varepsilon)$, $\Omega_k(\tau, \varepsilon)$ и векторов $h(\tau, \varepsilon)$, $b_k(\tau, \varepsilon)$, а следовательно, построить формальное частное решение неоднородного уравнения (34.1) в случае «резонанса».

---

* Обращаем внимание на то, что обратный оператор $\left[H - \dfrac{1}{\nu(\tau)-\alpha}\right]^{-1}$, не существующий на всем пространстве, определен, однако, на подпространстве $(I - P_k)[\mathfrak{X}]$.

Частное решение уравнения (34.1) при отсутствии «резонанса» ищется, как обычно, в виде

$$x(t, \varepsilon) = h(\tau, \varepsilon)\, e^{\theta(t,\varepsilon)}.$$

Для однородного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = [A + \varepsilon B(\tau, \varepsilon)]\, x$$

частное решение, соответствующее спектральному множеству σ_k, строится по формуле

$$x(t, \varepsilon) = V_k(\tau, \varepsilon)\, \xi_k(t, \varepsilon),$$

где $\xi_k(t, \varepsilon)$ — решение уравнения

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \Omega_k(\tau, \varepsilon)\, \xi_k.$$

Асимптотический характер построенных формальных решений легко доказывается по схеме, использованной нами ранее (см., например, § 33). При этом получаются оценки такие же, как указано в теореме V.4.

В заключение заметим, что рассмотрение уравнения второго порядка

$$\frac{d^2y}{dt^2} + A(\tau, \varepsilon)\frac{dy}{dt} + B(\tau, \varepsilon)\, y = 0 \tag{34.15}$$

в пространстве $\mathfrak{X}$ с помощью обычного приема можно свести к уравнению первого порядка в пространстве $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$.

Действительно, полагая

$$y = \psi_1, \qquad \frac{dy}{dt} = \psi_2,$$

имеем, согласно (34.15),

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \psi_2,$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -B(\tau, \varepsilon)\, \psi_1 - A(\tau, \varepsilon)\, \psi_2,$$

или

$$\frac{d\psi}{dt} = H(\tau, \varepsilon)\, \psi,$$

где

$$\psi(t, \varepsilon) = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}, \qquad H(\tau, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -B(\tau, \varepsilon) & -A(\tau, \varepsilon) \end{bmatrix}.$$

Таким образом, и к уравнению второго порядка (34.15) можно применить изложенную в предыдущих параграфах методику.

§ 35. Приложения

Изложенные в пятой главе результаты дают возможность решать вопросы об асимптотическом решении (или расщеплении) широкого круга задач.

Для выяснения условий применимости описанного метода, когда заданы конкретные операторы, нужно проверить выполнение условий (S_1), (S_2).

В частности, пользуясь результатами § 31, можно получить весьма удобные формулы для выполнения асимптотического расщепления системы линейных дифференциальных уравнений n-го порядка (см. гл. III) на электронных цифровых вычислительных машинах.

Предположим, что для системы дифференциальных уравнений n-го порядка:

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau, \varepsilon)\, x$$

выполняются условия теоремы III.1.

Для получения указанных, удобных для расчета формул расщепления заданной системы вернемся к рассмотрению системы (13.7) из главы III:

$$A_0(\tau)\, U_0(\tau) - U_0(\tau)\, \mathfrak{A}_0(\tau) = 0, \tag{35.1}$$

$$A_0(\tau)\, U_s(\tau) - U_s(\tau)\, \mathfrak{A}_0(\tau) = U_0(\tau)\, \mathfrak{A}_s(\tau) + B_s(\tau), \tag{35.2}$$

где $B_s(\tau)$ состоит из неизвестных матриц с номерами меньшими, чем s.

Как известно (см. § 13), уравнение (35.1) удовлетворяется при

$$U_0(\tau) = V(\tau), \qquad \mathfrak{A}_0(\tau) = W_0(\tau) = V^{-1}(\tau)\, A_0(\tau)\, V(\tau), \tag{35.3}$$

где $V(\tau)$ — матрица, преобразующая $A_0(\tau)$ к квазидиагональной форме $W_0(\tau)$. Напомним, что $V(\tau)$ в соответствии с характером спектра матрицы $A_0(\tau)$ имеет структуру

$$V(\tau) = [V_1(\tau), V_2(\tau)], \tag{35.4}$$

где $V_k(\tau)$ — матрица порядка (n, r_k) $(k = 1, 2;\ r_1 + r_2 = n)$, столбцы которой являются базисом подпространства, инвариантного относительно $A_0(\tau)$ и, кроме того, они ортонормированы, т. е. подчинены условию

$$V_k^*(\tau)\, V_k(\tau) = E_{r_k}. \tag{35.5}$$

Матричное уравнение (35.2), согласно (35.3), (35.4) и квазидиагональной структуре матрицы $W_0(\tau)$, распадается на два следующих уравнения:

$$A_0(\tau)U_{ks}(\tau)-U_{ks}(\tau)W_{k0}(\tau)=V_k(\tau)\mathfrak{A}_{ks}(\tau)+B_{ks}(\tau)\equiv F_{ks}(\tau)$$

$$(k=1,2;\ s=1,2,\ldots), \tag{35.6}$$

где

$$B_s(\tau)=\begin{bmatrix}B_{1s}(\tau)\\ B_{2s}(\tau)\end{bmatrix}.$$

В соответствии с результатами § 30 решение уравнения (35.6) можно представить в виде

$$U_{ks}(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\widetilde{\Gamma}_k}[A_0(\tau)-\lambda E]^{-1}F_{ks}(\tau)[W_{k0}(\tau)-\lambda E]^{-1}d\lambda \tag{35.7}$$

$$(k=1,2;\ s=1,2,\ldots),$$

если оператор $F_{ks}(\tau)$ удовлетворяет условию

$$P_kF_{ks}(\tau)=0. \tag{35.8}$$

В формуле (35.7) $\widetilde{\Gamma}_k$ — гладкий контур на комплексной плоскости, содержащий внутри себя все собственные значения матрицы $A_0(\tau)$, не принадлежащие k-ой группе.

Предположим, что решения всех уравнений вида (35.6) с номерами, меньшими некоторого определенного номера s, уже найдены. Тогда из уравнения (35.6) с указанным номером s мы можем определить искомые матрицы $U_{ks}(\tau)$ и $\mathfrak{A}_{ks}(\tau)$.

Действительно, $\mathfrak{A}_{ks}(\tau)$ мы находим, используя условие (35.8):

$$P_k[V_k(\tau)\mathfrak{A}_{ks}(\tau)+B_{ks}(\tau)]=0 \tag{35.9}$$

или

$$V_k(\tau)\mathfrak{A}_{ks}(\tau)=-P_kB_{ks}(\tau),$$

откуда

$$\mathfrak{A}_{ks}(\tau)=-V_k^*(\tau)P_kB_{ks}(\tau). \tag{35.10}$$

Покажем теперь, как следует выполнять вычисления по формуле (35.7), если $A_0(\tau)$ и $W_{k0}(\tau)$ — квадратные матрицы порядков n и r_k $(k=1,2)$ соответственно. Ради конкретности изложения рассмотрим случай $k=1$.

Как известно [81], матрица $[W_{10}(\tau)-\lambda E]^{-1}$, обратная к матрице $W_{10}(\tau)-\lambda E$, может быть построена по формуле

$$[W_{10}(\tau)-\lambda E]^{-1}=\frac{B}{D_1(\lambda)}, \tag{35.11}$$

где B — матрица, союзная к $W_{10}(\tau) - \lambda E$, а

$$D_1(\lambda) = \det [W_{10} - \lambda E] = \lambda^{r_1} + c_1\lambda^{r_1-1} + \ldots + c_{r_1-1}\lambda + c_{r_1}. \quad (35.12)$$

Напомним, что союзной к некоторой заданной матрице M (n-го порядка) называется матрица вида

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{21} \ldots M_{n1} \\ M_{12} & M_{22} \ldots M_{n2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ M_{1n} & M_{2n} \ldots M_{nn} \end{bmatrix},$$

где M_{ij} — алгебраические дополнения элемента m_{ij} в определителе матрицы M.

Так как каждое алгебраическое дополнение в определителе $\det [W_{10} - \lambda E]$ является полиномом от λ степени не выше $r_1 - 1$, то матрицу B из формулы (35.11) можно представить в виде

$$B = B_0\lambda^{r_1-1} + B_1\lambda^{r_1-2} + \ldots + B_{r_1-2}\lambda + B_{r_1-1}, \quad (35.13)$$

где B_j ($j = 0, 1, 2, \ldots, r_1 - 1$) — матрицы, не зависящие от λ.

В силу равенства

$$(\lambda^{r_1} + c_1\lambda^{r_1-1} + \ldots + c_{r_1-1}\lambda + c_{r_1})E =$$
$$= (B_{r_1-1} + B_{r_1-2}\lambda + \ldots + B_0\lambda^{r_1-1})(W_{10} - \lambda E)$$

находим следующие выражения для матриц $B_j(\tau)$ ($j = 0, 1, 2, \ldots, r_1 - 1$):

$$\begin{aligned} &B_0 = -E, \\ &B_j = B_{j-1}W_{10} - c_jE, \qquad j = 1, 2, \ldots, r_1 - 1 \\ &(B_{r_1-1}W_{10} = c_{r_1}E). \end{aligned} \quad (35.14)$$

Итак, для вычисления искомой матрицы $U_{1s}(\tau)$ мы имеем, согласно (35.7) и (35.11), формулу

$$U_{1s}(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\widetilde{\Gamma}_1} [A_0(\tau) - \lambda E]^{-1} F_{1s}(\tau)\frac{B}{D_1(\lambda)}\,d\lambda, \quad (35.15)$$

где $\widetilde{\Gamma}_1$ — контур, окружающий корни многочлена $D_2(\lambda)$ (см. гл. III) и не содержащий корней многочлена $D_1(\lambda)$.

Принимая во внимание, что для матрицы $[A_0(\tau) - \lambda E]^{-1}$ справедливо представление, аналогичное (35.11), и что (см. § 14)

$$\frac{1}{D(\lambda)}=\frac{d_1(\lambda)}{D_1(\lambda)}+\frac{d_2(\lambda)}{D_2(\lambda)},$$

можно переписать (35.15) в виде

$$U_{1s}(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\widetilde{\Gamma}_1} d_2(\lambda)\,[A_0(\tau)-\lambda E]^{-1}\,F_{1s}(\tau)\,B d\lambda. \tag{35.16}$$

Заметим, что, согласно теории операторного исчисления, для ограниченного оператора T имеет место формула

$$f(T)\,P_k=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_k} f(\lambda)\,(T-\lambda I)^{-1}\,d\lambda, \tag{35.17}$$

где Γ_k — гладкий контур, содержащий внутри себя спектральное множество σ_k оператора T; $f(\lambda)$ — рациональная функция, не имеющая полюсов внутри Γ_k.

Применяя эту формулу к вычислению интеграла в (35.16), мы найдем с учетом (35.13), (35.14) и (35.18) следующее выражение для матрицы $U_{1s}(\tau)$:

$$U_{1s}(\tau)=d_2(A_0)\,[A_0^{r_1-1}\,F_{1s}(\tau)+A_0^{r_1-2}F_{1s}(\tau)\,G_1+$$
$$+A_0^{r_1-3}F_{s1}(\tau)\,G_2+\ldots+F_{s1}(\tau)\,G_{r_1-1}]\qquad (s=1,2,\ldots), \tag{35.18}$$

где

$$G_1=-B_1=W_{10}(\tau)+c_1E,$$
$$G_j=G_{j-1}W_{10}(\tau)+c_jE,\qquad j=2,3,\ldots,r_1-1 \tag{35.19}$$
$$(G_{r_1-1}W_{10}(\tau)=-c_{r_1}E).$$

В силу условия $P_1F_{1s}(\tau)=0$ таким же свойством обладает матрица $U_{1s}(\tau)$, т. е.

$$P_1U_{1s}(\tau)=0\qquad (s=1,2,\ldots).$$

С помощью аналогичных рассуждений мы находим формулу для вычисления искомой матрицы $U_{2s}(\tau)$, если матрица $\mathfrak{A}_{2s}(\tau)$ определена из условия

$$P_2\,[V_2(\tau)\,\mathfrak{A}_{2s}(\tau)+B_{2s}(\tau)]=0.$$

Указанная формула имеет вид

$$U_{2s}(\tau)=d_1(A_0)\,[A_0^{r_2-1}F_{2s}(\tau)+A_0^{r_2-2}F_{2s}(\tau)\,H_1+\ldots+F_{s2}H_{r_2-1}], \tag{35.18'}$$

где

$$H_1 = W_{20}(\tau) + b_1E,$$

$$H_i = H_{i-1}(\tau)W_{20}(\tau) + b_iE, \qquad i = 2, 3, \ldots, r_2 - 1, \quad (35.19')$$

$$(H_{r_2-1}W_{20} = -b_{r_2}E),$$

$$D_2(\lambda) = \lambda^{r_2} + b_1\lambda^{r_2-1} + \ldots + b_{r_2-1}\lambda + b_{r_2}.$$

В случае, когда собственные значения матрицы $A_0(\tau)$ распадаются на $k > 2$ изолированных групп, соответствующие расчетные формулы можно найти в работе [98].

Покажем теперь на весьма тривиальном примере, как выполняется весь расчет, связанный с асимптотическим расщеплением системы линейных дифференциальных уравнений.

Пусть задана система третьего порядка

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_3, \qquad (35.20)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = (1 + 0{,}01t)(2 + 0{,}01t)^2 x_1 - (2 + 0{,}01t)(4 + 0{,}03t)x_2 + $$

$$+ (5 + 0{,}03t)x_3.$$

Полагая $0{,}01\,t = \tau$ ($\varepsilon = 0{,}01$), можем записать матрицу $A(\tau)$, соответствующую системе (35.20), следующим образом:

$$A(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ (1+\tau)(2+\tau)^2 & -(2+\tau)(4+3\tau) & 5+5\tau \end{bmatrix}.$$

Нетрудно подсчитать, что характеристический полином матрицы $A(\tau)$ имеет вид

$$D(\lambda) = [\lambda - (1+\tau)][\lambda - (2+\tau)]^2 = 0, \qquad (35.21)$$

а корни его образуют две изолированные группы:

$$\lambda_1 = 1 + \tau; \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 2 + \tau.$$

Согласно (35.21), имеет место формула

$$\frac{1}{D(\lambda)} = \frac{d_1(\lambda)}{\lambda - (1+\tau)} + \frac{d_2(\lambda)}{[\lambda - (2+\tau)]^2},$$

где

$$d_1(\lambda) = 1, \qquad d_2(\lambda) = -\lambda + \frac{(2+\tau)^2 - 1}{1+\tau}. \tag{35.22}$$

Определим проекционные матрицы $P_1(A)$ и $P_2(A)$:

$$P_1(A) = [A(\tau) - (2+\tau)E]^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} (2+\tau)^2 & -2(2+\tau) & 1 \\ (2+\tau)^2(1+\tau) & -2(2+\tau)(1+\tau) & 1+\tau \\ (2+\tau)^2(1+\tau)^2 & -2(2+\tau)(1+\tau)^2 & (1+\tau)^2 \end{bmatrix}, \tag{35.23}$$

$$P_2(A) = \left[-A(\tau) + \frac{(2+\tau)^2 - 1}{1+\tau} E\right][A(\tau) - (1+\tau)E] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1-(2+\tau)^2 & 2(2+\tau) & -1 \\ -(1+\tau)(2+\tau)^2 & 2\tau^2+6\tau+5 & -(1+\tau) \\ -(1+\tau)^2(2+\tau)^2 & 2(2+\tau)(1+\tau)^2 & -\tau(2+\tau) \end{bmatrix}. \tag{35.24}$$

Из уравнений $P_1(A)y = 0$ и $P_2(A)z = 0$ находим столбцы матрицы $V(\tau) = [V_1(\tau), V_2(\tau)]$, $(V_2^* V_2 = E_2)$:

$$V_1(\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+\tau \\ (1+\tau)^2 \end{bmatrix}, \quad V_2(\tau) = \begin{bmatrix} \frac{2}{\alpha} & -\frac{2+\tau}{\beta} \\ \frac{2+\tau}{\alpha} & \frac{2}{\beta} \\ 0 & \frac{(2+\tau)(\tau^2+4\tau+8)}{\beta} \end{bmatrix}, \tag{35.25}$$

где

$$\alpha = \sqrt{\tau^2+4\tau+8}, \quad \beta = \sqrt{(2+\tau)^2[1+\alpha^4]+4}.$$

Заметим, что столбцы матрицы $V_2(\tau)$ – ортонормированы.

После выполнения указанных предварительных расчетов переходим непосредственно к расщеплению системы (35.20).

В соответствии с характером собственных значений матрицы $A(\tau)$ систему (35.20) можно с помощью преобразования

$$x(t,\varepsilon) = U_1(\tau,\varepsilon)\xi_1(t,\varepsilon) + U_2(\tau,\varepsilon)\xi(t,\varepsilon), \tag{35.26}$$

где

$$U_2(\tau,\varepsilon) = \begin{bmatrix} u_{11}(\tau,\varepsilon) \\ u_{21}(\tau,\varepsilon) \\ u_{31}(\tau,\varepsilon) \end{bmatrix}, \quad U_2(\tau,\varepsilon) = \begin{bmatrix} u_{12}(\tau,\varepsilon) & u_{13}(\tau,\varepsilon) \\ u_{22}(\tau,\varepsilon) & u_{23}(\tau,\varepsilon) \\ u_{32}(\tau,\varepsilon) & u_{33}(\tau,\varepsilon) \end{bmatrix},$$

$\xi_1(t, \varepsilon)$ — скалярная функция, $\xi(t, \varepsilon)$ — двумерный вектор:

$$\xi(t, \varepsilon) = \begin{vmatrix} \xi_2(t, \varepsilon) \\ \xi_3(t, \varepsilon) \end{vmatrix},$$

асимптотически представить в виде одного независимого уравнения

$$\frac{d\xi_1}{dt} = a(\tau, \varepsilon)\,\xi_1 \tag{35.27}$$

и системы второго порядка

$$\frac{d\xi_3}{dt} = w_{11}(\tau, \varepsilon)\,\xi_2 + w_{12}(\tau, \varepsilon)\,\xi_3, \qquad \frac{d\xi_3}{dt} = w_{21}(\tau, \varepsilon)\,\xi_2 + w_{22}(\tau, \varepsilon)\,\xi_3, \tag{35.28}$$

которой соответствует матрица

$$W(\tau, \varepsilon) = \begin{bmatrix} w_{11}(\tau, \varepsilon) & w_{12}(\tau, \varepsilon) \\ w_{21}(\tau, \varepsilon) & w_{22}(\tau, \varepsilon) \end{bmatrix}.$$

Матрицы $U_1(\tau, \varepsilon)$, $U_2(\tau, \varepsilon)$, $W(\tau, \varepsilon)$ и функция $a(\tau, \varepsilon)$, как известно, должны удовлетворять уравнениям

$$A(\tau)\,U_1(\tau, \varepsilon) - a(\tau, \varepsilon)\,U_1(\tau, \varepsilon) = \varepsilon\,\frac{dU_1}{d\tau}, \tag{35.29}$$

$$AU_2(\tau, \varepsilon) - U_2(\tau, \varepsilon)\,W(\tau, \varepsilon) = \varepsilon\,\frac{dU_2}{d\tau}. \tag{35.30}$$

Будем решать уравнение (35.29), согласно изложенной выше методике, полагая, что для $U_1(\tau, \varepsilon)$ и $a(\tau, \varepsilon)$ имеют место представления

$$U_1(\tau, \varepsilon) = U_{10}(\tau) + \varepsilon U_{11}(\tau) + \varepsilon^2 U_{12}(\tau) + \ldots,$$

$$a(\tau, \varepsilon) = a_0(\tau) + \varepsilon a_1(\tau) + \varepsilon^2 a_2(\tau) + \ldots.$$

В силу результатов § 13 мы имеем

$$U_{10}(\tau) = V_1(\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \tau \\ (1 + \tau)^2 \end{bmatrix},$$

а из уравнения

$$A(\tau)\,U_{10}(\tau) - U_{10}(\tau)\,a_0(\tau) = 0$$

находим

$$a_0(\tau) = 1 + \tau.$$

Для определения вектора $U_{11}(\tau)$ и функции $a_1(\tau)$ получаем из уравнения (35.29) систему

$$A(\tau)\,U_{11}(\tau) - a_0(\tau)\,U_{11}(\tau) = \frac{dU_{10}}{d\tau} + a_1(\tau)\,U_{10}(\tau) \equiv F_1(\tau).$$

Используя условие разрешимости $P_1F_1(\tau)=0$, находим значение $a_1(\tau)$:

$$a_1(\tau)=2.$$

Согласно общей формуле (35.18), искомый вектор $U_{11}(\tau)$ имеет вид

$$U_{11}(\tau)=d_2(A)F_1(\tau)=$$

$$=\left[-A(\tau)+\frac{(2+\tau)^2-1}{1+\tau}E\right]\begin{bmatrix}2\\3+2\tau\\2(2+\tau)(1+\tau)\end{bmatrix},$$

т. е.

$$U_{11}(\tau)=\begin{bmatrix}3\\5+3\tau\\(2+\tau)(4+3\tau)\end{bmatrix}.$$

Таким образом, ограничиваясь первым приближением, мы получаем следующие значения искомых величин:

$$U_1^{(1)}(\tau,\varepsilon)=\begin{bmatrix}1{,}03\\1{,}05+1{,}03\tau\\1{,}08+2{,}1\tau+1{,}03\tau^2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1{,}03\\1{,}05+0{,}0103\,t\\1{,}08+0{,}021t+0{,}000103\,t^2\end{bmatrix},$$

$$a^{(1)}(\tau,\varepsilon)=1{,}02+\tau=1{,}02+0{,}01t.$$

Аналогично решается уравнение (35.30). Вполне понятно, что расщепление системы дифференциальных уравнений высокого порядка возможно выполнить только с помощью быстродействующих вычислительных цифровых машин. При этом весь расчет приходится выполнять в отдельных фиксированных точках рассматриваемого интервала $0\leqslant t\leqslant\frac{L}{\varepsilon}$.

Покажем, например, как строится в этом случае решение уравнения (35.30).

В соответствии с обычным приемом асимптотического решения заданного уравнения представим $U_2(\tau,\varepsilon)$ и $W(\tau,\varepsilon)$ в виде рядов по степеням параметра ε:

$$U_2(\tau,\varepsilon)=U_{20}(\tau)+\varepsilon U_{21}(\tau)+\varepsilon^2U_{22}(\tau)+\ldots,$$

$$W(\tau,\varepsilon)=W_0(\tau)+\varepsilon W_1(\tau)+\varepsilon^2W_2(\tau)+\ldots.$$

Тогда матрицы $U_{20}(\tau)$ и $W_0(\tau)$ определяются из уравнения

$$A(\tau)U_{20}(\tau)-U_{20}(\tau)W_0(\tau)=0, \tag{35.31}$$

а матрицы $U_{21}(\tau)$ и $W_1(\tau)$ из уравнения

$$A(\tau)U_{21}(\tau)-U_{21}(\tau)W_0(\tau)=\frac{dU_{20}}{d\tau}+U_{20}(\tau)W_1(\tau)\equiv F_2(\tau). \tag{35.32}$$

Выбирая на заданном интервале изменения переменной $\tau\in[0, L]$ m фиксированных точек, находим решение системы (35.31) в каждой из этих точек.

Например, выполняя в точке $\tau_0=0$ весь расчет по указанной ранее схеме, найдем

$$U_{20}(\tau_0)=V_2(\tau_0)=\begin{bmatrix}0{,}707107 & -0{,}123091\\ 0{,}707107 & 0{,}123091\\ 0 & 0{,}984728\end{bmatrix},$$

$$W_0(\tau)=U_{20}^*A(\tau)U_{20}=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0{,}783351\\ 2{,}87228 & 3{,}5\end{bmatrix}.$$

Соответствующие значения $U_{20}(\tau_j)$ и $W_0(\tau_j)$ получаем и для других фиксированных τ_j из промежутка $[0,L]$.

Найденные значения $U_{20}(\tau_j)$ $(j=0, 1, 2, \ldots, m)$ дадут возможность численно определить значения $\frac{dU_{20}}{d\tau}\,|\,\tau=\tau_j$, а следовательно, перейти к решению системы (35.32).

В нашем случае для $\tau_0=0$ имеем

$$\left.\frac{dU_{20}}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0=0}=\begin{bmatrix}-0{,}176777 & -0{,}0587482\\ 0{,}176777 & -0{,}120294\\ 0 & 0{,}0223803\end{bmatrix}.$$

Согласно условию разрешимости

$$P_2F_2(\tau)=0,$$

находим

$$W_1(\tau_0)=-U_{20}^*(\tau_0)P_2\left.\frac{dU_{20}}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0=0},$$

т. е.

$$W_1(\tau_0)=\begin{vmatrix}-2 & +0{,}506408\\ -1{,}43614 & 0{,}25\end{vmatrix}.$$

После этого решение уравнения (35.32) — матрицу $U_{21}(\tau)$ — определяем, согласно (35.18′) и (35.19′), по формуле

$$U_{21}(\tau)=d_1(A)\,[A(\tau)F_2(\tau)+F_2(\tau)(W_0(\tau)-2(2+\tau)E)]. \tag{35.33}$$

В точке $\tau_0 = 0$ матрица $U_{21}(\tau_0)$ имеет вид

$$U_{21}(\tau_0) = [A(\tau_0) F_2(\tau_0) + F_2(\tau_0)(W_0(\tau_0) - 4E)] \equiv$$
$$\equiv \begin{bmatrix} 6,68537 & -1,45472 \\ 6,68537 & -1,45472 \\ 6,68537 & -1,45472 \end{bmatrix}.$$

Аналогично выполняется расчет для других фиксированных значений $\tau_i \in [0, L]$. После численного дифференцирования по τ найденной матрицы $U_{21}(\tau)$ можно переходить к определению следующего члена разложения матриц $U_2(\tau, \varepsilon)$ и $W(\tau, \varepsilon)$, т. е. к определению $U_{22}(\tau)$ и $W_2(\tau)$.

Таким образом, после завершения расчета мы получим (в результате двух первых шагов) вместо системы третьего порядка (35.20) одно уравнение первого порядка

$$\frac{d\xi_1^{(1)}}{dt} = (1,02 + 0,01t)\,\xi_1^{(1)} \tag{35.34}$$

и некоторую систему дифференциальных уравнений второго порядка. Согласно выполненным нами расчетам, эта отщепленная система в момент $t = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_2^{(1)}}{dt} &= 0,048\xi_2^{(1)} + 0,788415\xi_3^{(1)}, \\ \frac{d\xi_3^{(1)}}{dt} &= 2,85792\xi_2^{(1)} + 3,5025\xi_3^{(1)}. \end{aligned} \tag{35.35}$$

Аналогичные представления получаются и при других фиксированных значениях t. Иными словами, при выполнении расчета на вычислительных машинах коэффициенты отщепленных систем задаются таблицами.

Преобразование, с помощью которого мы осуществили асимптотическое расщепление системы (35.20) на две системы (35.34) и (35.35), в точке $t = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= 1,03\xi_1^{(1)} + 0,773961\xi_2^{(1)} - 0,136638\,\xi_3^{(1)}, \\ x_2 &= 1,05\xi_1^{(1)} + 0,773961\xi_2^{(1)} + 0,108544\xi_3^{(1)}, \\ x_3 &= 1,08\xi_1^{(1)} + 0,0668537\xi_2^{(1)} + 0,970181\xi_3^{(1)}. \end{aligned}$$

Если бы мы выполнили расчет и для других значений t, то получили бы (в виде таблиц) преобразование (35.26), расщепляющее на всем рассматриваемом интервале изменения t систему (35.20) на две изолированные подсистемы (первого и второго порядков).

ГЛАВА VI

Асимптотические методы решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных

§ 36. Постановка задачи

Результаты главы V показывают, что асимптотические методы можно применять и для решения ряда задач, связанных с уравнениями в частных производных. При этом, как уже указывалось в § 35, необходимо исследовать свойства операторов, порождаемых конкретно поставленной задачей, т. е. заданными уравнениями в частных производных вместе с соответствующими начальными и граничными условиями. Если свойства этих операторов укладываются в рамки условий (S_1) и (S_2) из главы V, то по описанной там схеме можно осуществить асимптотическое расщепление, а подчас (при простом спектре) найти непосредственно асимптотическое решение поставленной задачи.

В данной главе мы на одном весьма простом частном примере покажем несколько иной подход к решению указанных задач. Этот подход, хотя и не вполне обоснован теоретически, позволяет значительно упростить получение расчетных формул и в ряде случаев дает хорошие практические результаты, о чем свидетельствует сравнение с другими методами расчета, а также опытные данные.

Итак рассмотрим следующую смешанную задачу.

Найти в области

$$Q = [0 \leqslant x \leqslant l] \times \left[0 \leqslant t \leqslant \frac{L}{\varepsilon}\right]$$

решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon a(x, \tau) u(x, t) + p(x, \tau) e^{i\theta(t, \varepsilon)}, \qquad (36.1)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \qquad (36.2)$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_t(x, 0) \equiv \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varphi_2(x). \qquad (36.3)$$

(Ради простоты, будем предполагать все коэффициенты уравнения (36.1) действительными.)

Как известно, вопросы существования и единственности решения смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка общего вида хорошо изучены [43]. Согласно результатам работы [43], задача (36.1) — (36.3) имеет классическое решение*, если коэффициенты и свободный член уравнения (36.1) имеют в области Q непрерывные производные по t и x до третьего порядка (включительно), функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — достаточное число раз дифференцируемы ($\varphi_1(x)$ непрерывно дифференцируема 5 раз, $\varphi_2(x)$ — 4 раза) и, кроме того, выполняются условия согласования (подробнее об этих условиях см. в работе [43]).

В дальнейшем будем предполагать, что указанные условия разрешимости выполнены.

Нетрудно убедиться, что задача (36.1)—(36.3) при сделанных (и даже менее жестких) предположениях может быть представлена в виде операторного уравнения типа (29.1) с соответствующими начальными условиями. При этом по дифференциальному выражению $Tu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и граничным условиям (36.2) определяется замкнутый линейный оператор A, обладающий свойством (S_1), а выражение $a(x, \tau)\, u$ при наших предположениях порождает ограниченный оператор умножения $B(\tau)$, обладающий свойством (S_2).

Таким образом, видно, что к асимптотическому решению задачи (36.1) — (36.3) применимы результаты главы V.

Более подробно на этом вопросе мы останавливаться не будем, а перейдем к изложению упомянутого выше приема, приводящего к весьма простому алгоритму построения асимптотического решения задачи (36.1) — (36.3).

Заметим, наконец, что в дальнейшем, в соответствии с требованиями рассматриваемого асимптотического метода функции $a(x, \tau)$, $p(x, \tau)$ и $\nu(\tau) = \frac{d\theta}{dt}$ из уравнения (36.1) удовлетворяют не только условиям разрешимости, но и предполагаются бесконечно** дифференцируемыми по τ на сегменте $[0, L]$.

При этом справедливо следующее утверждение.

---

* Под классическим решением понимается функция, имеющая в Q непрерывные производные до второго порядка и удовлетворяющая всем поставленным условиям в обычном смысле. В данной главе мы будем рассматривать только такие решения.

** Как и прежде, требование бесконечной дифференцируемости на практике может быть заменено условием существования конечного (достаточного) числа частных производных по τ.

Интегралы

$$I_k(\tau) = \int_0^l \left(\frac{\partial^k a(x,\tau)}{\partial \tau^k}\right)^2 dx, \quad S_k(\tau) = \int_0^l \left(\frac{\partial^k p(x,\tau)}{\partial \tau^k}\right)^2 dx \quad (36.4)$$

при любом целом $k \geqslant 0$ непрерывны по τ на сегменте $[0, L]$.

Итак, будем искать решение уравнения (34.1) в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} z_m(t)\, v_m(x), \quad (36.5)$$

где $v_m(x)$ — ортонормированная система собственных функций краевой задачи

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \omega^2 v = 0,$$
$$v(0) = v(l) = 0. \quad (36.6)$$

Как известно, собственные значения ω_n^2 и соответствующие им собственные функции $v_n(x)$ задачи (36.6) имеют вид

$$\omega_n^2 = \left(n\frac{\pi}{l}\right)^2, \qquad v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin \omega_n x. \quad (36.7)$$

Подставим выражение (36.5) в уравнение (36.1), предполагая возможность почленного дифференцирования ряда по обеим переменным. Умножая полученное равенство на $v_n(x)$ и интегрируя обе части его по x в пределах от 0 до l, найдем бесконечную систему дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют искомые функции $z_n(t)$:

$$\frac{d^2 z_n}{dt^2} + \omega_n^2 z_n = \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}(\tau) z_m + p_n(\tau) e^{i\theta(t,\varepsilon)}$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots), \quad (36.8)$$

где

$$A_{nm}(\tau) = \int_0^l a(\tau, x) v_m(x) v_n(x)\, dx,$$
$$p_n(\tau) = \int_0^l p(\tau, x) v_n(x)\, dx \quad (36.9)$$

(очевидно, $A_{nm}(\tau) \equiv A_{mn}(\tau)$).

Начальные значения для системы (36.8) мы получим, если аналогично преобразуем условия (36.3), а именно,

$$z_n(0) = \int_0^l \varphi_1(x) v_n(x)\,dx = \alpha_n,$$

$$z'_n(0) = \int_0^l \varphi_2(x) v_n(x)\,dx = \beta_n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{36.10}$$

В силу наших предположений, коэффициенты $A_{nm}(\tau)$ и $P_n(\tau)$ — бесконечно дифференцируемы по τ на сегменте $[0, L]$:

$$\frac{d^k A_{nm}(\tau)}{d\tau^k} = \int_0^l \frac{\partial^k a(\tau, x)}{\partial \tau^k} v_m(x) v_n(x)\,dx,$$

$$\frac{d^k p_n(\tau)}{d\tau^k} = \int_0^l \frac{\partial^k p(\tau, x)}{\partial \tau^k} v_n(x)\,dx \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{36.11}$$

При этом, согласно равенству Парсеваля, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d^k A_{nm}(\tau)}{d\tau^k}\right)^2 = \int_0^l \left(\frac{\partial^k a(\tau, x)}{\partial \tau^k}\right)^2 v_m^2(x)\,dx \leqslant \frac{2}{l} \int_0^l \left(\frac{\partial^k a(\tau, x)}{\partial \tau^k}\right)^2 dx,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{d^k p_n(\tau)}{d\tau^k}\right|^2 = \int_0^l \left(\frac{\partial^k p(\tau, x)}{\partial \tau^k}\right)^2 dx \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{36.12}$$

Ряды (36.12) для каждого $k \geqslant 0$ сходятся равномерно относительно $\tau \in [0, L]$. Это утверждение непосредственно следует из свойств интегралов (36.4) и известной теоремы Дини [101] о равномерной сходимости функциональных рядов с положительными членами.

В следующем параграфе данной главы мы укажем достаточно простой алгоритм построения асимптотических решений системы (36.8), коэффициенты которой удовлетворяют выписанным выше условиям, (т. е. они бесконечно дифференцируемы по τ и ряды (36.12) сходятся равномерно).

§ 37. Построение формальных решений

При построении частных решений системы уравнений

$$\frac{d^2 z_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 z_n = \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}(\tau) z_m + p_n(\tau) e^{i\theta(t,\varepsilon)} \qquad (37.1)$$

$$(n = 1, 2, \ldots),$$

будем различать два уже известных случая:

1) «резонанса», когда функция $\nu(\tau) = \frac{d\theta}{dt}$ при некоторых значениях $\tau \in [0, L]$ совпадает с одним числом (или несколькими) из последовательности

$$\omega_n = \frac{\pi}{l} n \quad (n = 1, 2, \ldots);$$

2) «нерезонанса» — функция $\nu(\tau)$ ни в одной точке $\tau \in [0, L]$ не принимает значений, равных ω_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

Ради удобства дальнейшего изложения запишем систему (37.1) в векторно-матричной форме

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + [\Omega - \varepsilon A(\tau)] Z = P(\tau) e^{i\theta(t,\varepsilon)}. \qquad (37.2)$$

Здесь $Z(t, \varepsilon)$ и $P(\tau)$ — бесконечномерные векторы; Ω — бесконечная диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят элементы числовой последовательности ω_n^2; $A(\tau)$ — бесконечная матрица.

Заметим, что в силу предположений, сформулированных в § 36, элементы матрицы $A(\tau)$ и вектора $P(\tau)$ бесконечно дифференцируемы по τ на сегменте $[0, L]$ и ряды (36.12) сходятся равномерно.

Рассмотрим теперь построение формального частного решения системы (37.2) в случае «резонанса», т. е. когда для некоторых значений τ из $[0, L]$ имеет место равенство

$$\nu(\tau) = \omega_\alpha. \qquad (37.3)$$

Алгоритм построения указанного решения описывает такая теорема.

Теорема VI.1. *Если элементы матриц $A(\tau)$, Ω и вектора $P(\tau)$ удовлетворяют сформулированным выше условиям, то формальное частное решение системы (35.2) в случае «резонанса» может быть представлено в виде*

$$Z_\alpha(t, \varepsilon) = [\Pi_\alpha(\tau, \varepsilon) \xi_\alpha(t, \varepsilon) + f_\alpha(\tau, \varepsilon)] e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \qquad (37.4)$$

где скалярная функция $\xi_\alpha(t, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\xi_\alpha}{dt} = [\lambda_\alpha(\tau, \varepsilon) - i\nu(\tau)]\, \xi_\alpha + b_\alpha(\tau, \varepsilon), \tag{37.5}$$

а бесконечномерные векторы $\Pi_\alpha(\tau, \varepsilon)$, $f_\alpha(\tau, \varepsilon)$ и функции $\lambda_\alpha(\tau, \varepsilon)$, $b_\alpha(\tau, \varepsilon)$ допускают следующие формальные разложения:

$$\begin{aligned} \Pi_\alpha(\tau, \varepsilon) &= \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Pi_\alpha^{(s)}(\tau), & f_\alpha(\tau, \varepsilon) &= \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s f_\alpha^{(s)}(\tau), \\ \lambda_\alpha(\tau, \varepsilon) &= \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \lambda_\alpha^{(s)}(\tau), & b_\alpha(\tau, \varepsilon) &= \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s b_\alpha^{(s)}(\tau). \end{aligned} \tag{37.6}$$

Доказательство. Для определения членов разложений (37.6) подставим, учитывая (37.5), выражение вектора $Z_\alpha(t, \varepsilon)$ из (37.4) в систему (37.3). Приравнивая отдельно коэффициенты при функции $\xi_\alpha(t, \varepsilon)$ и свободные члены из обеих частей полученного тождества, найдем два соотношения для определения искомых членов разложений (37.6):

$$\begin{gathered} \varepsilon^2 \frac{d^2\Pi_\alpha}{d\tau^2} + 2\varepsilon\lambda_\alpha(\tau, \varepsilon) \frac{d\Pi_\alpha}{d\tau} + \varepsilon \frac{d\lambda_\alpha}{d\tau} \Pi_\alpha(\tau, \varepsilon) + \\ + [\Omega + \lambda_\alpha^2(\tau, \varepsilon) E]\, \Pi_\alpha(\tau, \varepsilon) = \varepsilon A(\tau)\, \Pi_\alpha(\tau, \varepsilon), \end{gathered} \tag{37.7}$$

$$\begin{gathered} \varepsilon^2 \frac{d^2 f_\alpha}{d\tau^2} + 2i\varepsilon\nu(\tau) \frac{df}{d\tau} + i\varepsilon \frac{d\nu}{d\tau} f_\alpha(\tau, \varepsilon) + \\ + [\Omega - \nu^2(\tau) E]\, f_\alpha(\tau, \varepsilon) + 2\varepsilon \frac{d\Pi_\alpha}{d\tau} b_\alpha(\tau, \varepsilon) + \\ + [\lambda_\alpha(\tau, \varepsilon) + i\nu(\tau)]\, \Pi_\alpha(\tau, \varepsilon) b_\alpha(\tau, \varepsilon) + \varepsilon \Pi_\alpha(\tau, \varepsilon) \frac{db_\alpha}{d\tau}(\tau, \varepsilon) = \\ = \varepsilon A(\tau) f_\alpha(\tau, \varepsilon) + P(\tau). \end{gathered} \tag{37.8}$$

В тождествах (37.7) и (37.8) через E обозначена бесконечная единичная матрица.

1. Рассмотрим вначале соотношение (37.7). Выделяя в нем последовательно коэффициенты при ε^s $(s = 0, 1, 2, \ldots)$, мы получим рекуррентные формулы для определения членов $\lambda_\alpha^{(s)}(\tau)$ и $\Pi_\alpha^{(s)}(\tau)$:

$$[\Omega + (\lambda_\alpha^{(0)})^2 E]\, \Pi_\alpha^{(0)}(\tau) = 0, \tag{37.9}$$

$$[\Omega + (\lambda_\alpha^{(0)}(\tau))^2 E]\, \Pi_\alpha^{(s)}(\tau) = A(\tau)\, \Pi_\alpha^{(s-1)}(\tau) - [2\lambda_\alpha^{(0)}(\tau)\, \lambda_\alpha^{(s)}(\tau) +$$

$$+\sum_{j=1}^{s-1}\lambda_\alpha^{(j)}(\tau)\lambda_\alpha^{(s-j)}(\tau)]\,\Pi_\alpha^{(0)}(\tau)-\sum_{k=1}^{s-1}\left[\sum_{j=0}^{s-k}\lambda_\alpha^{(j)}(\tau)\lambda_\alpha^{(s-k-j)}(\tau)+\right.$$

$$\left.+\frac{d\lambda_\alpha^{(s-1-k)}(\tau)}{d\tau}\right]\Pi_\alpha^{(k)}(\tau)-2\sum_{k=1}^{s-1}\lambda_\alpha^{(s-1-k)}(\tau)\frac{d\Pi_\alpha^{(k)}(\tau)}{d\tau}-\frac{d^2\Pi_\alpha^{(s-2)}(\tau)}{d\tau^2}-$$

$$-\left[\frac{d\lambda_\alpha^{(s-1)}}{d\tau}\Pi_\alpha^{(0)}(\tau)+2\lambda_\alpha^{(s-1)}(\tau)\frac{d\Pi_\alpha^{(0)}(\tau)}{d\tau}\right]\qquad (s=1,2,\ldots).\qquad (37.10)$$

В выражении (37.10) имеют смысл только те суммы, для которых $1\leqslant k\leqslant s-1$; кроме того, в соответствии с (37.6), полагаем $\Pi_\alpha^{(-1)}\equiv 0$.

Определим, согласно равенству (37.9), величины $\lambda_\alpha^{(0)}(\tau)$ и $\Pi_\alpha^{(0)}(\tau)$. Для этого положим

$$\Pi_\alpha^{(0)}(\tau)=e_\alpha,\qquad (37.11)$$

где e_α — бесконечномерный единичный вектор: α-я компонента равна единице, остальные — нули.

Теперь соотношение (37.9) можно представить в координатной форме следующим образом:

$$[\omega_n^2+(\lambda_\alpha^{(0)})^2]\,\delta_{\alpha n}=0\qquad (n=1,2,\ldots),$$

где $\delta_{\alpha n}$ — символ Кронекера.

Отсюда имеем

$$\omega_\alpha^2+(\lambda_\alpha^{(0)})^2=0$$

или

$$\lambda_\alpha^{(0)}=\pm i\omega_\alpha.$$

В дальнейшем будем полагать

$$\lambda_\alpha^{(0)}=i\omega_\alpha.\qquad (37.12)$$

В соответствии с (37.11) и (37.12) перепишем выражение (37.10) в виде

$$[\Omega-\omega_\alpha^2E]\,\Pi_\alpha^{(s)}(\tau)=F_\alpha^{(s)}(\tau)-2i\omega_\alpha\lambda_\alpha^{(s)}(\tau)\,e_\alpha,\qquad (37.13)$$

где

$$F_\alpha^{(s)}(\tau)=A(\tau)\,\Pi_\alpha^{(s-1)}(\tau)-e_\alpha\sum_{j=1}^{s-1}\lambda_\alpha^{(j)}(\tau)\lambda_\alpha^{(s-j)}(\tau)-$$

$$-\sum_{k=1}^{s-1}\left[\sum_{j=0}^{s-k}\lambda_\alpha^{(j)}(\tau)\lambda_\alpha^{(s-k-j)}(\tau)+\frac{d}{d\tau}\lambda_\alpha^{(s-1-k)}(\tau)\right]\Pi_\alpha^{(k)}(\tau)-$$

$$-2\sum_{k=1}^{s-1}\lambda_\alpha^{(s-1-k)}(\tau)\frac{d\Pi_\alpha^{(k)}(\tau)}{d\tau}-\frac{d\lambda_\alpha^{(s-1)}(\tau)}{d\tau}e_\alpha-\frac{d^2\Pi_\alpha^{(s-2)}(\tau)}{d\tau^2}$$

$$(s=1,2,\ldots). \qquad (37.14)$$

Представив равенство (37.13) в координатной форме

$$(\omega_n^2-\omega_\alpha^2)\,\Pi_{n\alpha}^{(s)}(\tau)=F_{n\alpha}^{(s)}(\tau)-2i\omega_\alpha\lambda_\alpha^{(s)}(\tau)\,\delta_{\alpha n}, \qquad (37.15)$$

мы сможем последовательно определить $\lambda_\alpha^{(s)}(\tau)$ и компоненты вектора $\Pi_\alpha^{(s)}(\tau)$ для любого номера $s\geqslant 1$. Действительно, из равенства (37.15) при $n\neq\alpha$ имеем

$$\Pi_{n\alpha}^{(s)}(\tau)=\frac{F_{n\alpha}^{(s)}(\tau)}{\omega_n^2-\omega_\alpha^2}, \qquad (37.16)$$

или

$$\Pi_{n\alpha}^{(s)}(\tau)=\frac{1}{\omega_n^2-\omega_\alpha^2}\left[\sum_{j=1}^{\infty}A_{nj}(\tau)\,\Pi_{j\alpha}^{(s-1)}(\tau)-\right.$$

$$-\sum_{k=1}^{s-1}\left[\sum_{j=0}^{s-k}\lambda_\alpha^{(j)}(\tau)\,\lambda_\alpha^{(s-k-j)}(\tau)+\frac{d\lambda_\alpha^{(s-1-k)}(\tau)}{d\tau}\right]\Pi_{n\alpha}^{(k)}(\tau)-$$

$$\left.-2\sum_{k=1}^{s-1}\lambda_\alpha^{(s-1-k)}(\tau)\frac{d\Pi_{n\alpha}^{(k)}(\tau)}{d\tau}-\frac{d^2\Pi_{n\alpha}^{(s-2)}(\tau)}{d\tau^2}\right]$$

$$(n=1,2,\ldots;\quad n\neq\alpha;\quad s=1,2,\ldots). \qquad (37.17)$$

В случае $n=\alpha$ из равенства (37.15) следует, что

$$F_{\alpha\alpha}^{(s)}(\tau)-2i\omega_\alpha\lambda_\alpha^{(s)}(\tau)=0 \qquad (s=1,2,\ldots), \qquad (37.18)$$

а функция $\Pi_{\alpha\alpha}^{(s)}(\tau)$ может быть произвольной, вследствие чего мы полагаем (ради простоты)

$$\Pi_{\alpha\alpha}^{(s)}(\tau)\equiv 0 \qquad (s=1,2,\ldots). \qquad (37.19)$$

Теперь, согласно формуле (37.14) и равенству (37.18), находим

$$\lambda_\alpha^{(s)}(\tau)=\frac{1}{2i\omega_\alpha}\left[\sum_{j=1}^{\infty}A_{\alpha j}(\tau)\,\Pi_{j\alpha}^{(s-1)}(\tau)-\right.$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{s-1}\lambda_\alpha^{(j)}(\tau)\,\lambda_\alpha^{(s-j)}(\tau)-\frac{d\lambda_\alpha^{(s-1)}(\tau)}{d\tau}\right] \qquad (s\geqslant 1). \qquad (37.20)$$

Однако выражения (37.17) и (37.20) только тогда можно рассматривать как формулы, определяющие члены разложения искомых величин $\lambda_\alpha(\tau, \varepsilon)$ и $\Pi_\alpha(\tau, \varepsilon)$, когда будет доказана равномерная сходимость рядов, фигурирующих в (37.17) и (37.20), а также обоснована дифференцируемость соответствующих элементов.

Исследуем с этой точки зрения формулы (37.17) и (37.20).

Заметим, что $\Pi^{(0)}_\alpha = e_\alpha$ и $\lambda^{(0)}_\alpha = i\omega_\alpha$ бесконечно дифференцируемы. В случае $s = 1$ имеем, согласно (37.17) и (37.20),

$$\Pi^{(1)}_{n\alpha}(\tau) = \frac{A_{n\alpha}(\tau)}{\omega_n^2 - \omega_\alpha^2} \quad (n = 1, 2, \ldots, n \neq \alpha), \tag{37.21}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Pi^{(1)}_{\alpha\alpha} \equiv 0, \\ &\lambda^{(1)}_\alpha(\tau) = \frac{A_{\alpha\alpha}(\tau)}{2i\omega_\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{37.22}$$

Отсюда следует, что $\Pi^{(1)}_{n\alpha}(\tau)$ и $\lambda^{(1)}_\alpha(\tau)$ вполне определяются формулами (37.17) и (37.20) и имеют столько же производных по τ, сколько и элементы матрицы $A(\tau)$. Кроме того, нетрудно показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{d^k \Pi^{(1)}_{n\alpha}(\tau)}{d\tau^k} \right|^2 < \infty \tag{37.23}$$

для любого целого $k \geqslant 0$ сходится равномерно относительно $\tau \in [0, L]$.

Действительно, согласно (37.21), для $k \geqslant 0$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{d^k \Pi^{(1)}_{n\alpha}(\tau)}{d\tau^k} \right|^2 = \sum_{n=1}^{\alpha-1} \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega_\alpha^2)^2} \left| \frac{d^k A_{n\alpha}}{d\tau^k} \right|^2 + \sum_{n=\alpha+1}^{\infty} \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega_\alpha^2)^2} \left| \frac{d^k A_{n\alpha}}{d\tau^k} \right|^2, \tag{37.24}$$

причем ряд в правой части равенства (37.24) сходится равномерно в силу наших предположений (ср. с соответствующим рядом (36.12)) и признака равномерной сходимости Абеля [101].

Предположим теперь, что формулы (37.17), (37.20) имеют смысл для всех номеров s, меньших некоторого натурального числа m ($s \leqslant m - 1$), и функции $\Pi^{(s)}_{n\alpha}(\tau)$, $\lambda^{(s)}_\alpha(\tau)$ дифференцируемы по τ (очевидно, количество производных у $\lambda^{(s)}_\alpha(\tau)$ и $\Pi^{(s)}_{\alpha n}(\tau)$ будет на $(s - 1)$ меньше, чем у элементов матрицы $A(\tau)$, если последние не бесконечно дифференцируемы).

Кроме того, предположим, что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{d^k\Pi_{n\alpha}^{(s)}(\tau)}{d\tau^k}\right|^2<\infty \; (0\leqslant s\leqslant m-1,\ k\geqslant 0), \tag{37.25}$$

построенные для любой из существующих производных функций $\Pi_{n\alpha}^{(s)}(\tau)$, сходятся равномерно относительно τ.

Нетрудно убедиться, что при сделанных предположениях функции $\Pi_{n\alpha}^{(m)}(\tau)$ и $\lambda_{\alpha}^{(m)}(\tau)$ вполне определяются формулами (37.17) и (37.20), являются дифференцируемыми по τ и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{d^k\Pi_{n\alpha}^{(m)}(\tau)}{d\tau^k}\right|^2 (k=0,1,2,\ldots) \tag{37.26}$$

равномерно сходится на сегменте $[0, L]$.

Действительно, бесконечные ряды в выражениях (37.17) и (37.20) при $s=m$ сходятся и притом равномерно, так как, согласно неравенству Коши —Буняковского, имеет место следующая оценка:

$$\sum_{l=1}^{\infty}|A_{nl}(\tau)\Pi_{l\alpha}^{(m-1)}(\alpha)|\leqslant\sqrt{\sum_{l=1}^{\infty}|A_{nl}(\tau)|^2}\sqrt{\sum_{l=1}^{\infty}|\Pi_{l\alpha}^{(m-1)}(\tau)|^2}$$
$$(n=1,2,\ldots).$$

Аналогично можно убедиться в том, что равномерно сходятся ряды

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left|\frac{d}{d\tau}[A_{nl}(\tau)\Pi_{l\alpha}^{(m-1)}(\tau)]\right|\leqslant\sum_{l=1}^{\infty}\left|\frac{dA_{nl}}{d\tau}\Pi_{l\alpha}^{(m-1)}(\tau)\right|+$$
$$+\sum_{l=1}^{\infty}\left|A_{nl}(\tau)\frac{d\Pi_{l\alpha}^{(m-1)}(\tau)}{d\tau}\right|,$$

т. е. функции $\Pi_{n\alpha}^{(m)}(\tau)$ и $\lambda_{\alpha}^{(m)}(\tau)$ дифференцируемы по τ (см. формулы (37.17) и (37.20)).

Больше того, в силу наших предположений и вида формул (37.17) и (37.20) функции $\lambda_{\alpha}^{(m)}(\tau)$ и $\Pi_{n\alpha}^{(m)}(\tau)$ имеют только на одну производную меньше, чем $\lambda_{\alpha}^{(m-1)}(\tau)$ и $\Pi_{n\alpha}^{(m-1)}(\tau)$.

Чтобы убедиться в равномерной сходимости ряда (37.26), достаточно подставить значение $\Pi_{n\alpha}^{(m)}(\tau)$ из выражения (37.17) в ряд (37.26) и выполнить соответствующую оценку полученного выражения. Не выписывая подробно (из-за громоздкости) общего члена ряда (37.26), приведем оценки только нескольких типичных выражений. Например, при исследовании сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\omega_n^2-\omega_\alpha^2)^2}\left|\frac{d^k}{d\tau^k}\sum_{j=1}^{\infty}A_{nj}(\tau)\,\Pi_{j\alpha}^{(m-1)}(\tau)\right|^2$$

(см. формулы (37.17) и (37.26)) мы сталкиваемся с рядами вида

$$\sum\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\omega_n^2-\omega_\alpha^2)^2}\left|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{d^{k-l}A_{nj}}{d\tau^{k-l}}\frac{d^l\Pi_{j\alpha}^{(m-1)}(\tau)}{d\tau^l}\right|^2, \qquad (37.27)$$

где $0\leqslant l\leqslant k$.

Используя неравенство Коши — Буняковского, находим

$$\sum\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(\omega_n^2-\omega_\alpha^2)^2}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{d^{k-l}A_{nj}}{d\tau^{k-l}}\right|\right]\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{d^l\Pi_{j\alpha}^{(m-1)}(\tau)}{d\tau^l}\right|^2,$$

откуда (в силу (36.12) и (37.25)) очевидна равномерная сходимость ряда (37.27).

Далее, вопрос о равномерной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\omega_n^2-\omega_\alpha^2)^2}\left|\frac{d^k}{d\tau^k}\sum_{i=1}^{m-1}\beta_i(\tau)\Pi_{n\alpha}^{(i)}(\tau)\right|^2,$$

являющегося составной частью выражения (37.26), где

$$\beta_i(\tau)=-\sum_{j=0}^{m-i}[\lambda_\alpha^{(j)}(\tau)\,\lambda_\alpha^{(m-i-j)}(\tau)+\lambda_\alpha^{(m-1-i)}(\tau)],$$

сводится к исследованию сходимости рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\omega_n^2-\omega_\alpha^2)^2}\left|\frac{d^l\Pi_{n\alpha}^{(i)}(\tau)}{d\tau^l}\right|^2 \quad (0\leqslant l\leqslant k,\quad 1\leqslant i\leqslant m-1),$$

которые, согласно нашим предположениям, сходятся равномерно относительно $\tau\in[0,\ L]$.

Таким образом, можно убедиться в том, что ряд (37.26) действительно равномерно сходится, если выполняется предположение (37.25).

Итак, рекуррентные формулы (37.17) и (37.20) позволяют определить для функций $\lambda_\alpha(\varepsilon,\ \tau)$ и вектора $\Pi_\alpha(\varepsilon,\ \tau)$ члены разложений (37.6) с любым номером s, причем эти функции будут дифференцируемы по τ на $(s-1)$ раз меньше, чем элементы матрицы $A(\tau)$, если последние имеют конечное число производных.

2. Перейдем теперь к определению членов разложений (37.6) функции $b_\alpha(\tau, \varepsilon)$ и вектора $f_\alpha(\tau, \varepsilon)$. Для этого воспользуемся тождеством (37.8). Приравнивая в обеих частях его коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε, получаем рекуррентные соотношения для нахождения указанных членов разложения

$$[\Omega - \nu^2(\tau) E]\, f_\alpha^{(0)}(\tau) + [\lambda_\alpha^{(0)}(\tau) + i\nu(\tau)]\, \Pi_\alpha^{(0)}(\tau) b_\alpha^{(0)}(\tau) = P(\tau), \tag{37.28}$$

$$\begin{gathered}[\Omega - \nu^2(\tau) E]\, f_\alpha^{(s)}(\tau) + [\lambda_\alpha^{(0)} + i\nu(\tau)]\, \Pi_\alpha^{(0)}(\tau) b_\alpha^{(s)}(\tau) = \\ = \left[A(\tau) - i\frac{d\nu}{d\tau}E\right] f_\alpha^{(s-1)}(\tau) - \sum_{j=1}^{s}\Bigg[i\nu(\tau)\,\Pi_\alpha^{(j)}(\tau) + \\ + \sum_{k=0}^{j}\lambda_\alpha^{(k)}(\tau)\,\Pi_\alpha^{(j-k)}(\tau)\Bigg] b_\alpha^{(s-j)}(\tau) - \sum_{j=0}^{s-1}\Pi_\alpha^{(j)}(\tau)\frac{db_\alpha^{(s-1-j)}(\tau)}{d\tau} - \\ - 2\sum_{j=0}^{s-1}\frac{d\Pi_\alpha^{(j)}(\tau)}{d\tau}\, b_\alpha^{(s-1-j)}(\tau) - \frac{d^2 f^{(s-2)}(\tau)}{d\tau^2} - 2i\nu(\tau)\frac{df_\alpha^{(s-1)}(\tau)}{d\tau}.\end{gathered} \tag{37.29}$$

Воспользовавшись результатами п. 1 данного параграфа, представим равенство (37.28) в координатной форме

$$[\omega_n^2 - \nu^2(\tau)]\, f_{n\alpha}^{(0)}(\tau) + i\,[\omega_\alpha + \nu(\tau)]\, b_\alpha^{(0)}(\tau)\, \delta_{n\alpha} = p_n(\tau), \tag{37.30}$$

откуда легко находится $f_{n\alpha}^{(0)}(\tau)$ и $b_\alpha^{(0)}(\tau)$.

Пусть $n=\alpha$. Тогда

$$[\omega_\alpha^2 - \nu^2(\tau)]\, f_{\alpha\alpha}^{(0)}(\tau) + i\,[\omega_\alpha + \nu(\tau)]\, b_\alpha^{(0)}(\tau) = p_\alpha(\tau). \tag{37.31}$$

Так так в случае «резонанса» при некоторых значениях $\tau \in [0, L]$ имеет место совпадение значения $\nu(\tau)$ и ω_α, то мы подберем $b_\alpha^{(0)}(\tau)$ в соотношении (37.31) так, чтобы на всем сегменте $[0, L]$ выполнялось равенство

$$i\,[\omega_\alpha + \nu(\tau)]\; b_\alpha^{(0)}(\tau) = p_\alpha(\tau), \tag{37.32}$$

т. е.

$$b_\alpha^{(0)}(\tau) = \frac{p_\alpha(\tau)}{i\,[\omega_\alpha + \nu(\tau)]}. \tag{37.33}$$

Очевидно, при таком выборе $b_\alpha^{(0)}(\tau)$ нужно, согласно (37.31) и (37.32), положить

$$f_{\alpha\alpha}^{(0)}(\tau) \equiv 0. \tag{37.34}$$

При $n \neq \alpha$ из равенства (37.30) получаем

$$f_{n\alpha}^{(0)}(\tau) = \frac{p_n(\tau)}{\omega_n^2 - \nu^2(\tau)}, \qquad n = 1,2,\ldots,\ n \neq \alpha. \tag{37.35}$$

Аналогично можно последовательно определять $f_{n\alpha}^{(s)}(\tau)$ и $b_\alpha^{(s)}(\tau)$ для любого натурального $s \geqslant 1$ из соотношения (37.29).

Перепишем (37.29) в координатной форме, учитывая при этом результаты *п*.1:

$$[\omega_n^2 - \nu^2(\tau)]\, f_{n\alpha}^{(s)}(\tau) + i\,[\omega_\alpha + \dot\nu(\tau)]\, b_\alpha^{(s)}(\tau)\delta_{n\alpha} = T_{n\alpha}^{(s)}(\tau) \tag{37.36}$$

$$(n = 1, 2, \ldots;\ s = 1, 2, \ldots),$$

где

$$T_{n\alpha}^{(s)}(\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} A_{nj}(\tau)\, f_{j\alpha}^{(s-1)}(\tau) - i\frac{d\nu}{d\tau} f_{n\alpha}^{(s-1)}(\tau) - \sum_{j=1}^{s}\Bigg[i\nu(\tau)\Pi_{n\alpha}^{(j)}(\tau) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{j} \lambda_\alpha^{(k)}(\tau)\,\Pi_{n\alpha}^{(j-k)}(\tau)\Bigg] b_\alpha^{(s-j)}(\tau) - \sum_{j=0}^{s-1} \Pi_{n\alpha}^{(j)}(\tau)\frac{db_\alpha^{(s-1-j)}(\tau)}{d\tau} -$$

$$-2\sum_{j=0}^{s-1}\frac{d\Pi_{n\alpha}^{(j)}(\tau)}{d\tau}\, b_\alpha^{(s-1-j)}(\tau) - \frac{d^2 f_{n\alpha}^{(s-2)}(\tau)}{d\tau^2} - 2i\nu(\tau)\frac{df_{n\alpha}^{(s-1)}(\tau)}{d\tau}. \tag{37.37}$$

При $n = \alpha$ соотношение (37.36) имеет вид

$$[\omega_\alpha^2 - \nu^2(\tau)]\, f_{\alpha\alpha}^{(s)}(\tau) + i\,[\omega_\alpha + \nu(\tau)]\, b_\alpha^{(s)}(\tau) = T_{\alpha\alpha}^{(s)}(\tau), \tag{37.38}$$

а

$$T_{\alpha\alpha}^{(s)}(\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} A_{\alpha j}(\tau)\, f_{j\alpha}^{(s-1)}(\tau) - i\frac{d\nu}{d\tau} f_{\alpha\alpha}^{(s-1)}(\tau) -$$

$$-\sum_{j=1}^{s}\lambda_\alpha^{(j)}(\tau)\, b_\alpha^{(s-j)}(\tau) - \frac{db_\alpha^{(s-1)}(\tau)}{d\tau} - \frac{d^2 f_{\alpha\alpha}^{(s-2)}(\tau)}{d\tau^2} - 2i\nu(\tau)\frac{df_{\alpha\alpha}^{(s-1)}(\tau)}{d\tau}. \tag{37.39}$$

Рассуждая, как и в случае $s = 0$, подбираем $b_\alpha^{(s)}(\tau)$ в равенстве (37.38) таким образом, чтобы при любом $\tau \in [0, L]$ выполнялось равенство

$$i\,[\omega_\alpha + \nu(\tau)]\, b_n^{(s)}(\tau) = T_{\alpha\alpha}^{(s)}(\tau),$$

иными словами,

$$b_\alpha^{(s)}(\tau) = \frac{T_{\alpha\alpha}^{(s)}(\tau)}{i\,[\omega_\alpha + \nu(\tau)]} \qquad (s = 1, 2, \ldots). \tag{37.40}$$

В силу такого выбора $b_\alpha^{(s)}(\tau)$ мы должны в равенстве (37.38) положить

$$f_{\alpha\alpha}^{(s)}(\tau) \equiv 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots). \tag{37.41}$$

Возвращаясь к формуле (37.40), можно представить ее (с учетом (37.39) и (37.41)) в развернутом виде

$$b_\alpha^{(s)}(\tau) = \frac{1}{i\,[\omega_\alpha + \nu(\tau)]}\left[\sum_{j=1}^{\infty} A_{\alpha j}(\tau)\, f_{j\alpha}^{(s-1)}(\tau) - \sum_{j=1}^{s} \lambda_\alpha^{(j)}(\tau)\, b_\alpha^{(s-j)}(\tau) - \frac{db_\alpha^{(s-1)}(\tau)}{d\tau}\right]$$

$$(s = 1, 2, \ldots). \tag{37.42}$$

Пусть $n \neq \alpha$. Тогда, согласно (37.36), имеем

$$[\omega_n^2 - \nu^2(\tau)]\, f_{n\alpha}^{(s)}(\tau) = T_{n\alpha}^{(s)}(\tau),$$

откуда следует

$$f_{n\alpha}^{(s)}(\tau) = \frac{T_{n\alpha}^{(s)}(\tau)}{\omega_n^2 - \nu^2(\tau)} \qquad (n = 1, 2, \ldots;\quad n \neq \alpha,\quad s = 1, 2, \ldots). \tag{37.43}$$

Как и в случае п. 1, нам необходимо убедиться, что формулы (37.42) и (37.43) имеют смысл, т. е. бесконечные ряды в этих формулах сходятся и допускают почленное дифференцирование по τ.

Из формул (37.33) и (37.35) следует, что функции $b_\alpha^{(0)}(\tau)$ и $f_{n\alpha}^{(0)}(\tau)$ имеют столько же производных, сколько производных имеют компоненты вектора $P(\tau)$ и функция $\nu(\tau)$. Кроме того, нетрудно показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{d^m}{d\tau^m} f_{n\alpha}^{(0)}(\tau)\right|^2 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{37.44}$$

равномерно сходится.

Действительно, записывая подробно общий член ряда (37.44), имеем, согласно (37.35)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{d^m}{d\tau^m} f_{n\alpha}^{(0)}(\tau)\right|^2 = \sum_{n=1}^{\alpha-1}\left|\frac{d^m f_{n\alpha}^{(0)}(\tau)}{d\tau^m}\right|^2 + \sum_{n=\alpha+1}^{\infty}\left|\sum_{j=0}^{m} C_m^j \times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{d^{m-j}}{d\tau^{m-j}}\cdot\frac{1}{\omega_n^2 - \nu^2(\tau)}\right]\frac{d^j p_n(\tau)}{d\tau^j}\right|^2 \qquad \left(C_m^j = \frac{m!}{j!\,(m-j)!}\right). \tag{37.45}$$

Таким образом, вопрос о сходимости ряда (37.44) сводится к исследованию сходимости ряда

$$\sum_{n=\alpha+1}^{\infty}\left|\sum_{j=0}^{m} C_m^j\left[\frac{d^{m-j}}{d\tau^{m-j}}\cdot\frac{1}{\omega_n^2-\nu^2(\tau)}\right]\frac{d^j p_n(\tau)}{d\tau^j}\right|^2. \qquad (37.46)$$

Рассмотрим вначале выражение k-ой производной от функции $\frac{1}{\omega_n^2-\nu^2(\tau)}$. Очевидно, имеет место следующее соотношение:

$$\frac{d^k}{d\tau^k}\left[\frac{1}{\omega_n^2-\nu^2(\tau)}\right]=\sum_{j=1}^{k}\frac{f_j(\nu(\tau),\nu'(\tau),\ldots,\nu^{(k)}(\tau))}{[\omega_n^2-\nu^2(\tau)]^{j+1}}, \qquad (37.47)$$

где $f_j[\nu(\tau),\nu'(\tau),\ldots,\nu^{(k)}(\tau)]$ — многочлен от функции $\nu(\tau)$ и ее производных по τ до k-го порядка включительно.

Полином $f_j(\nu,\nu',\ldots,\nu^{(k)})$ не зависит от ω_n и, вследствие бесконечной дифференцируемости функции $\nu(\tau)$, является ограниченным по τ на сегменте $[0, L]$:

$$|f_j(\nu,\nu',\ldots,\nu^{(k)})| < M_j = \text{const}. \qquad (37.48)$$

Согласно (37.47) и (37.48), для ряда (37.46) имеет место оценка

$$\sum_{n=\alpha+1}^{\infty}\left|\sum_{j=0}^{m} C_m^j\left[\frac{d^{m-j}}{d\tau^{m-j}}\cdot\frac{1}{\omega_n^2-\nu^2(\tau)}\right]\frac{d^j p_n}{d\tau^j}\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=\alpha+1}^{\infty}\left\{\sum_{j=0}^{m}(C_m^j)^2(m-j)\sum_{k=1}^{m-j}\frac{M_k^2}{[\omega_n^2-\nu^2(\tau)]^{2k+2}}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{d^j p_n(\tau)}{d\tau^j}\right)^2\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\sum_{j=0}^{m}(C_m^j)^2(m-j)\sum_{k=1}^{m-j}\frac{M_k^2}{[\omega_{\alpha+1}^2-\nu^2(\tau)]^{2k+2}}\right]\sum_{j=0}^{m}\sum_{n=\alpha+1}^{\infty}\left(\frac{d^j p_n}{d\tau^j}\right)^2.$$

Откуда, в силу наших предположений, очевидна равномерная сходимость ряда (37.46), а следовательно и (37.44).

С помощью аналогичных рассмотрений можно показать, что формулы (37.42) и (37.43) имеют смысл при любом натуральном $s \geqslant 1$, а определяемые ими функции $b_\alpha^{(s)}(\tau)$ и $f_{n\alpha}^{(s)}(\tau)$ дифференцируемы по τ, причем только на s раз меньше, чем функции $b_\alpha^{(0)}$ и $f_{n\alpha}^{(0)}(\tau)$, если последние не бесконечно дифференцируемы.

Кроме того, ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{d^m}{d\tau^m} f_{n\alpha}^{(s)}(\tau)\right|^2 \qquad (m \geqslant 0)$$

сходятся равномерно относительно τ для любого $s \geqslant 1$.

(Из-за громоздкости и однотипности с предыдущими рассмотрениями мы не будем подробнее останавливаться на этом вопросе.)

Таким образом, в п. 1 и 2 настоящего параграфа указан алгоритм, с помощью которого можно построить частное решение бесконечной системы (37.1) в случае «резонанса». Этим и завершается доказательство теоремы V.1.

Замечание 1. Построение частного решения системы (37.1) в случае более сложного «резонанса»: когда функция $\nu(\tau)$ при некоторых значениях $\tau \in [0, L]$ совпадает с несколькими числами ω_k (например, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$) и ни при каких значениях τ не может совпадать с другими членами последовательности $\{\omega_n\}$ $(n=r+1, r+2, \ldots)$, выполняется также, как описано в п. 1, 2, а именно, частное решение $Z(t, \varepsilon)$ неоднородной системы (37.2) ищется в виде

$$Z(t, \varepsilon) = \left[\sum_{k=1}^{r} \Pi_k(\tau, \varepsilon)\,\xi_k(t, \varepsilon) + f(\tau, \varepsilon)\right] e^{i\theta(t,\varepsilon)},$$

где скалярные функции $\xi_k(t, \varepsilon)$ являются решениями уравнений

$$\frac{d\xi_k}{dt} = [\lambda_k(\tau, \varepsilon) - i\nu(\tau)]\,\xi_k + b_k(\tau, \varepsilon) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Члены разложения векторов $\Pi_k(\tau, \varepsilon)$, $f(\tau, \varepsilon)$ и функций $\lambda_k(\tau, \varepsilon)$, $b_k(\tau, \varepsilon)$ в этом случае определяются по формулам, аналогичным приведенным в п. 1 и 2.

Замечание 2. В случае отсутствия «резонанса» частное решение системы (37.2) ищется, согласно правилу, в виде

$$Z(t, \varepsilon) = f(\tau, \varepsilon)\, e^{i\theta(t,\varepsilon)},$$

где $f(\tau, \varepsilon)$ — бесконечномерный искомый вектор.

При этом из-за отсутствия функций $\xi_k(t, \varepsilon)$ нахождение приближенных решений исходиой системы сводится только к решению алгебраических уравнений и дифференцированию.

Замечание 3. Если в рассматриваемой смешанной задаче задано однородное уравнение, соответствующее (36.1), то искомые функции $z_n(t, \varepsilon)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (см. формулу (36.5)) определяются из однородной системы

$$\frac{d^2 z_n}{dt^2} + \omega_n^2 z_n = \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}(\tau)\, z_m \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Для отыскания частного решения этой системы тоже применяется только что описанный метод. В этом случае частное решение, соответствующее собственному значению ω_k, ищется в виде

$$Z_k(t, \varepsilon) = \Pi_k(\tau, \varepsilon)\,\xi_k(t, \varepsilon),$$

где $\Pi_k(\tau, \varepsilon)$ и $\xi_k(t, \varepsilon)$ — такие же, как и выше, но функция $\xi_k(t,\varepsilon)$ удовлетворяет однородному уравнению вида

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \lambda_k(\tau, \varepsilon)\,\xi_k \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

§ 38. Доказательство асимптотической сходимости

Описанный в § 37 алгоритм дает возможность определить любой член разложения в формулах (37.6). Обычно на практике из-за громоздкости вычислений приходится ограничиваться построением первых m членов указанных разложений. В связи с этим в рассмотрение вводятся так называемые m-ые приближения к искомым решениям системы (37.2). Определим для случая «резонанса», рассмотренного в § 37, m-е приближение при помощи выражения

$$Z_\alpha^{(m)}(t, \varepsilon) = \left[\sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s \Pi_\alpha^{(s)}(\tau)\xi_\alpha^{(m)}(t, \varepsilon) + \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s f^{(s)}(\tau)\right] e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \qquad (38.1)$$

где функция $\xi_\alpha^{(m)}(t, \varepsilon)$ является решением уравнения

$$\frac{d\xi_\alpha^{(m)}}{dt} = \left[\sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s \lambda_\alpha^{(s)}(\tau) - i\nu(\tau)\right]\xi_\alpha^{(m)} + \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s b_\alpha^{(s)}(\tau). \qquad (38.2)$$

Пусть $Z(t, \varepsilon)$ представляет собой точное решение системы (37.2), удовлетворяющее при $t = 0$ тем же начальным условиям, что и $Z_\alpha^{(m)}(t,\varepsilon)$. Тогда подобно тому, как это делалось в предшествующих главах (в частности во второй главе), можно показать, что приближенное решение $Z_\alpha^{(m)}(t, \varepsilon)$ асимптотически сходится к точному решению $Z(t\ \varepsilon)$.

Не останавливаясь подробно на деталях доказательства, укажем основные его этапы.

Прежде всего доказывается лемма.

Лемма VI. 1. *Пусть выполняются условия теоремы VI.1. Тогда m-ое приближение $Z_\alpha^{(m)}(t, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению*

$$\frac{d^2 Z_\alpha^{(m)}(t, \varepsilon)}{dt^2} + [\Omega - \varepsilon A(\tau)]\, Z_\alpha^{(m)}(t, \varepsilon) = P(\tau)\, e^{i\theta(t,\varepsilon)} + \varepsilon^m R(\tau, \varepsilon), \quad (38.3)$$

где $R(\tau, \varepsilon)$—вектор-функция, равномерно ограниченная на сегменте $[0, L]$*.

Доказательство леммы VI.1 выполняется точно так же, как леммы II.1, а именно, подстановкой (с учетом способа построения $Z_\alpha^{(m)}(t, \varepsilon)$) выражения (38.1) в уравнение (37.2) и последующей оценкой полученных выражений.

Введем в рассмотрение разность

$$X(t, \varepsilon) = Z_\alpha^{(m)}(t, \varepsilon) - Z_\alpha(t, \varepsilon), \tag{38.4}$$

где $Z_\alpha^{(m)}(t, \varepsilon)$ и $Z_\alpha(t, \varepsilon)$ — приближенное и точное решение системы (37.2), соответствующие одинаковым начальным условиям.

Очевидно, вектор-функция $X(t, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \Omega X = \varepsilon A(\tau) X + \varepsilon^m R(\tau, \varepsilon) \tag{38.5}$$

и начальным условиям

$$X(0, \varepsilon) = 0; \qquad \left.\frac{dX}{dt}\right|_{t=0} = 0. \tag{38.6}$$

Теорема VI.2. *Предположим, что выполнены условия теоремы VI.1. Кроме того, точное решение $Z_\alpha(t, \varepsilon)$ и m-ое приближение к нему — $Z_\alpha^{(m)}(t, \varepsilon)$ — взяты при одинаковых начальных условиях. Тогда найдутся такие положительные числа C и ε_1 $(\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0)$, что при $\varepsilon < \varepsilon_1$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant \frac{L}{\varepsilon}$ будет выполняться неравенство*

$$\| Z_\alpha^{(m)}(t, \varepsilon) - Z_\alpha(t, \varepsilon) \| \leqslant C\varepsilon^{m-1}. \tag{38.7}$$

Доказательство. Представим задачу (38.5), (38.6) в координатной форме

$$\frac{d^2x_n}{dt^2} + \omega_n^2 x_n = \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} A_{nj}(\tau) x_j + \varepsilon^m r_n(\tau, \varepsilon), \tag{38.8}$$

$$x_n(0, \varepsilon) = 0, \qquad \left.\frac{dx_n}{dt}\right|_{t=0} = 0. \tag{38.9}$$

Легко видеть, что система дифференциальных уравнений (38.8)

---

* Под ограниченностью действительной вектор-функции $Y(t)$ будем понимать, как обычно, ограниченность функции

$$\| Y(t) \| = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} y_j^2(t)}.$$

с начальными условиями (38.9) эквивалентна следующей системе интегральных уравнений:

$$x_n(t) = \frac{\varepsilon}{\omega_n}\int\limits_0^t \sin\omega_n(t-s)\left[\sum_{j=1}^{\infty} A_{nj}(\sigma)\,x_j(s,\varepsilon)\right] ds +$$

$$+\frac{\varepsilon^m}{\omega_n}\int\limits_0^t \sin\omega_n(t-s)\,r_n(\sigma,\varepsilon)\,ds \qquad (\sigma=\varepsilon s),\ n=1,2,\ldots \tag{38.10}$$

Используя неравенство Коши — Буняковского, а также его аналог для определенных интегралов, получим, в силу (38.10), оценку

$$x_n^2(t,\varepsilon) \leqslant 2\left\{\frac{\varepsilon L}{\omega_n^2}\int\limits_0^t\left[\sum_{j=1}^{\infty} A_{nj}(\sigma)\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2(s,\varepsilon)\right]ds + \frac{\varepsilon^{2m-1}L}{\omega_n^2}\int\limits_0^t r_n^2(\sigma,\varepsilon)\,ds\right\}. \tag{38.11}$$

Согласно равномерной ограниченности на $[0, L]$ выражения

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} A_{nj}^2(\tau)\right| \leqslant K = \mathrm{const}$$

(см. (36.12)) и сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n^2} = M$, из оценки (38.11) следует неравенство

$$\|X(t,\varepsilon)\|^2 \leqslant 2\varepsilon LMK\int\limits_0^t \|X(s,\varepsilon)\|^2\,ds + 2\varepsilon^{2m-1}LM\int\limits_0^t \|R(\sigma,\varepsilon)\|^2\,ds. \tag{38.12}$$

Теперь, используя результаты леммы I.1, получим

$$\|X(t,\varepsilon)\|^2 \leqslant 2\varepsilon^{2m-1}LM\int\limits_0^t e^{2\varepsilon LMK(t-s)}\|R(\sigma,\varepsilon)\|^2\,ds$$

или

$$\|X(t,\varepsilon)\| \leqslant C\varepsilon^{m-1}, \tag{38.13}$$

где

$$C = \sqrt{2e^{2L^2MK}L^2MR^*}, \qquad R^* = \max_{0\leqslant\tau\leqslant L}\left[\|R(\tau,\varepsilon)\|^2\right].$$

Согласно (38.4), неравенство (38.13) является искомым неравенством (38.7). Теорема VI.2 доказана, т. е. доказана асимптотическая сходимость приближенного решения к точному.

При отсутствии «резонанса» для частного решения однородной системы, а также при малой возмущающей силе: $\varepsilon p(x, \tau)\, e^{i\theta(t,\varepsilon)}$ (см. уравнение (36.1)) оценка (38.7) улучшается, ибо m-ое приближение в указанных случаях удовлетворяет исходной системе с точностью до величин порядка $O(\varepsilon^{m+1})$, а не порядка $O(\varepsilon^{m})$, как было получено нами при выполнении условий леммы VI.1.

В заключение заметим, что на практике, решая конкретно поставленную задачу, часто поступают следующим образом. Бесконечную систему (37.1) «обрывают» на некотором номере N, ограничиваясь исследованием решений конечной системы, состоящей из N дифференциальных уравнений 2-го порядка. Асимптотические решения этой «укороченной» системы строят по методу, описанному в данной главе. Сравнение результатов, полученных по такому способу, с результатами, найденными другими методами, обнаруживает хорошее совпадение.

Литература

1. Беллман Р. Теория устойчивости решеиий дифференциальных уравиений. ИЛ, М., 1954.
2. Боголюбов Н. Н. О иекоторых статистических методах в математической физике. Изд-во АН УССР, К., 1945.
3. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаиий. Физматгиз, М., 1958.
4. Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н. — УМЖ, 1955, **7**, 1.
5. Бреус К. А. — ДАН СССР, 1956, **108**, 6.
6. Бреус К. А. — УМЖ, 1958, **10**, 2.
7. Бреус К. А. — ДАН СССР, 1958, **123**, 1.
8. Бреус К. А. — УМЖ, 1960, **12**, 4.
9. Васильева А. Б. — Матем. сб., 1952, 31 (73), 3.
10. Васильева А. Б. — ДАН, 1960, **135**, 6.
11. Васильева А. Б. — Матем. сб., 1960, 50 (92), 1.
12. Вишик М. И., Люстерник Л. А. — УМН, 1957, **12**, 5.
13. Волосов В. М. Метод усреднения и некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Автореферат докторской диссертации. Изд-во АН УССР, К., 1961.
14. Волосов В. М. — УМН, 1962, **17**, 6.
15. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. ГИТТЛ, М., 1953.
16. Градштейн И. С. — Матем. сб., 1950, 27 (69), 1.
17. Градштейн И. С. — Матем. сб., 1956, 32 (74), 3.
18. Далецкий Ю. Л., Крейн С. Г. — УМЖ, 1950, **2**, 4.
19. Далецкий Ю. Л. — ДАН, 1953, **92**, 5.
20. Далецкий Ю. Л. — Изв. КПИ, 1956, **19**.
21. Далецкий Ю. Л. — УМН, 1959, **14**, 1 (85).
22. Далецкий Ю. Л. — ДАН СССР, 1962, **143**, 5.
23. Еругин Н. П. — В кн.: Труды матем. ииститута. им. В. А. Стеклова, 1946.
24. Еругии Н. П. — ПММ, 1948, 12, 2.
25. Еругин Н. П. — ПММ, 1959, **23**, **5**.
26. Задирака К. В. — ПММ, 1952, **16**, **6**.
27. Задирака К. В. — ДАН УРСР, 1954, **4**.
28. Задирака К. В. — УМЖ, 1958, 2.
29. Илюхин А. Г. — УМЖ, 1961, 13, 3.
30. Ілюхін А. Г. — ДАН УРСР, 1961, 8.
31. Илюхин А. Г. — УМЖ, 1962, **14**, 3.
32. Ишлинский А. Ю. — ДАН СССР, 1954, **95**,**5**.
33. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, М., 1959.
34. Ковтун І. І. — ДАН УРСР, 1962, 2.
35. Ковтуи І. І. — ДАН УРСР, 1962, **5**.
36. Ковтун И. И. — УМЖ, 1962, **14**, **2**.
37. Ковтуи І. І. — ДАН УРСР, 1963, 2.
38. Ковтун И. И. — В кн.: Приближеиные методы решения дифференциальных уравнений. Изд-во АН УССР, К., 1963.
39. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. ИЛ, М., 1958.

40. Кононенко В. О. — В кн.: Труды Междун. симпозиума по нелинейным колебаниям. Т. 3. Изд-во АН УССР, К., 1963.
41. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. Изд-во АН УССР, К., 1937.
42. Кужій А. І., Шевело В. М. —Прикладна механіка, 1955, 1.
43. Ладыженская О. А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. ГИТТЛ, М., 1953.
44. Лыкова О. Б. — УМЖ, 1957, 9, 2.
45. Ликова О. Б., Митропольський Ю. О.—Вісник КДУ, сер. матем. та мех., 1960, 3, 2.
46. Лыкова О. Б. — УМЖ, 1960, 12, 3.
47. Лященко Н. Я. — УМЖ, 1955, 7, 1.
48. Лященко Н. Я. — УМЖ, 1955, 7, 2.
49. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. Изд. 2. Гостехиздат, М., 1956.
50. Маркуш І. І. — ДАН УРСР, 1960, 1.
51. Маркуш І. І. — ДАН УРСР, 1960, 3.
52. Митропольский Ю. А. Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах. Изд-во АН УССР, К., 1955.
53. Митропольський Ю. О., Мосеєнков Б. І. Дослідження коливань в системах з розподільними параметрами (асимптотичні методи). Вид-во Київського університету, 1962.
54. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. «Наука», М., 1964.
55. Писаренко Г. С. Рассеяние энергии при механических колебаниях. Изд-во АН УССР, К., 1962.
56. Пугачев В. С. — В кн.: Труды Академии им. Жуковского. Вып. 70, 1940.
57. Пугачев В. С. — В кн.: Труды Академии им. Жуковского. Вып. 74, 1940.
58. Пугачев В. С. — Изв. АН СССР, Математика, 1941, 5, 1; 6.
59. Пугачев В. С. — Матем. сб., 1944, 15 (57), 1.
60. Пугачев В. С. — ПММ, 1946, 10, 1.
61. Рапопорт И. М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Изд-во АН УССР, К., 1954.
62. Савін Г. М. — ДАН УРСР, 1954, 2.
63. Савін Г. М., Шевело В. М. — ДАН УРСР, 1954, 2.
64. Савін Г. М., Шевело В. М., Кужій А. І. — Прикладна механіка, 1955, 1, 3.
65. Савін Г. М., Фещенко С. Ф. — ДАН УРСР, 1958, 6.
66. Савін Г. М., Фещенко С. Ф. — ДАН УРСР, 1960, 11.
67. Савин Г. Н., Горошко О. А. Динамика нити переменной длины. Изд-во АН УССР, К., 1962.
68. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. III, ч. 1, ГИТТЛ, М., 1949; т. III, ч. 2, ГИТТЛ, М., 1953.
69. Соколов Ю. Д. — Прикладна механіка, 1955, 1, 1.
70. Соломяк М. З. — Изв. вузов, Математика, 1960, 1.
71. Стеклов В. А. Задача об охлаждении неоднородного твердого стержня. — Сообщ. Харьков. матем. общ., 5, 1896.
72. Стоницький А. А. — ДАН УРСР, 1962, 1.
73. Стоницький А. А. — ДАН УРСР, 1962, 5.
74. Стоницький А. А. — УМЖ, 1962, 14, 3.
75. Стоницький А. А. — ДАН УРСР, 1963, 3.
76. Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Петроград, 1917.
77. Территин Х. Л. — Сб. перев., Математика, ИЛ, 1957, 1.
78. Тихонов А. Н. — Матем. сб., 1948, 22 (64), 2.

79. Тихонов А. Н. — Матем. сб., 1950, 27 (69), 1.
80. Тихонов А. Н. — Матем. сб., 1952, 31 (73), 5.
81. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Физматгиз, М., 1963.
82. Фещенко С. Ф. — ДАН УРСР, 1947, 2, 3.
83. Фещенко С. Ф. — ДАН УРСР, 1947, 2, 9.
84. Фещенко С. Ф. — Наукові записки Київського педагогічного інституту. Сер. фіз.-матем., 1948, 6, 3.
85. Фещенко С. Ф. — ДАН УРСР, 1949, 1.
86. Фещенко С. Ф. — Наукові записки Київського педагогічного інституту. Сер. фіз.-матем., 1949, 9, 4, 99.
87. Фещенко С. Ф. — Наукові записки Київського педагогічного інституту. Сер. фіз.-матем., 1949, 9, 4, 149.
88. Фещенко С. Ф. Автореферат докторской диссертации. Изд-во АН УССР, К., 1950.
89. Фещенко С. Ф. — ДАН УРСР, 1951, 3.
90. Фещенко С. Ф. — ДАН УРСР, 1954, 2.
91. Фещенко С. Ф., Кужій А. І. — ДАН УРСР, 1955, 2.
92. Фещенко С. Ф. — ДАН УРСР, 1955, 3.
93. Фещенко С. Ф. — УМЖ, 1955, 7, 2 и 4.
94. Фещенко С. Ф., Шкіль М. І. — Прикладна механіка, 1958, 4, 3.
95. Фещенко С. Ф., Шкіль М. І. — ДАН УРСР, 1958, 5.
96. Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И. — УМЖ, 1960, 12, 4.
97. Фещенко С. Ф. — Вісник КДУ. Сер. матем. та механіки, 1960, 2, 3.
98. Фещенко С. Ф., Ніколенко Л. Д. — ДАН УРСР, 1961, 8.
99. Фещенко С. Ф., Николенко, Л. Д. — УМЖ, 1961, 13, 3.
100. Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И. — УМЖ, 1964, 1.
101. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II, Физматгиз, М., 1959.
102. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. Физматгиз. М., 1963.
103. Шевело В. М., Кужій А. І. — ДАН УРСР, 1954, 6.
104. Шкіль М. І. — ДАН УРСР, 1958, 2.
105. Шкіль М. І. — Наукові записки Київського педагогічного інституту, 1958, 30, 3.
106. Шкіль М. І. — ДАН УРСР, 1961, 2.
107. Шкіль Н. И. — УМЖ, 1962, 14, 4.
108. Шкіль М. І. — ДАН УРСР, 1962, 9.
109. Шкіль М. І. — ДАН УРСР, 1963, 5.
110. Шкіль Н. И. — Изв. вузов, Математика, 1964, 2 (39).
111. Шкиль Н. И. — ДАН СССР, 1963, 150, 5.
112. Шкиль Н. И. — Матем. сб., 1965, 111 (15).
113. Шкіль М. І. — Вісник КДУ, 1965, 1.
114. Шкіль М. І. — ДАН УРСР, 1965, 6.
115. Шкіль М. І. — ДАН УРСР, 1965, 3.
116. Штокало И. З. — Матем. сб., 1946, 19 (61), 2.
117. Штокало И. З. — В кн.: Сб. трудов Ин-та математики, Изд-во АН УССР, К., 1947, 9.
118. Штокало И. З. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Изд-во АН УССР, К., 1960.
119. Birkhoff G. D. — Trans. Amer. Math. Soc., 1908, 9, 219—231.
120. Birkhoff G. D. — Trans. Amer. Math. Soc., 1908, 9, 373—395.
121. Horn J. — Math. Ann., 1897, 49.
122. Horn J. — Cryst. J., 1910, 198.

123. L i o u v i l l e J. — J. L., 1837, 2 (1), 16—35, 418—436.
124. L i o u v i l l e J. — J. L. 3 (1), 1838, 561—614 (VIII).
125. P o i n c a r e H. — Rend. Pal., 1894, **8**, X—XI.
126. S i b u y a R. — J. Faculty of Sci. Univ. Tokyo, sec. 1, 1958. **7**, **5**.
127. S p a r r e. Sur le monvement des proyectiles oblongs, Inp. Rational, 1893.
128. S t e k l o f f W. — Ann. Poc. Toul. 3 (2), 1901.
129. S t e k l o f f W. — Rend. r. acc. dei Lineei, 1910, **196**, 5.
130. T u r r i t t i n H. L. — Amer. J. Math., 1936, **58**, 364—376.
131. T r y i z i n s k i W. Y. — Acta math., 1936, **67**, 1—2.
132. F o w l e r R. H. et al. — Phil. Trans. Roy. Soc. Ld., 1920, **221**, 295—387.
133. F o w l e r a. L o c k — Proc. Ld. Math. Soc., 1921, 20, 2, 127—147.
134. P h i l l i p s R. — Trans. Amer. Math. Soc., 1953, **74**, 2.
135. H u k u h a r a M. — Jap. J. Math., 1950, **20**, 1—4.
136. S c h l e s i n g e r L. Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichung. Bd. 1., 1895.

Оглавление

СТЕПАН ФЕДОРОВИЧ ФЕЩЕНКО,
НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ ШКИЛЬ,
ЛАРИСА ДАНИЛОВНА НИКОЛЕНКО

Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений

Печатается по постановлению ученого совета Института математики АН УССР

Редактор *Т. С. Мельник*. Художественный редактор *И. П. Антонюк*. Оформление художника *В. А. Кононенко*. Технический редактор *А. М. Лисовец*. Корректор *Р. С. Борисова*. БФ 06182. Зак. № 298. Изд. № 4. Тираж 4000. Формат бумаги $60 \times 90^1/_{16}$. Печ. физ. листов 15,75. Условн. печ. листов 15.75. Учетно-изд. листов 11,94. Подписано к печати 16.11 1966 г. Цена 99 коп.

Издательство «Наукова думка», Киев, Репина, 3.

Киевская книжная типография № 5 Государственного комитета Совета Министров УССР по печати, Киев, Репина, 4.