С. П. ФИНИКОВ

МЕТОД ВНЕШНИХ ФОРМ КАРТАНА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ТЕОРИЯ СОВМЕСТНОСТИ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ И В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1948 ЛЕНИНГРАД

11-5-4

Редактор *Т. Л. Козьмина.* **Техн. редактор** *Н. Я. Мурашова.*

Подписано к печати 27/IX-1948 г. Печ. л. 27 **Уч.-изд. л.** 32,52.
Тип. зн. в печ. л. 48 185. Тираж 5000. А-07483. Цена 19 р. 50 к. Переплёт 2 р. Заказ № 3130.

4-я типография им. Евг. Соколовой треста «Полиграфкнига» ОГИЗа
при Совете Министров СССР, Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава IV

Характеристическая система и класс семейства внешних форм

Глава V

Приведение к каноническому виду

Глава VI

Система уравнений Пфаффа в инволюции

Глава VII

Система внешних дифференциальных уравнений

Глава VIII

Критерии регулярности цепи

Глава IX

Продолжение системы

Глава X

Теорема Картана о приведении системы в инволюцию

Глава XI

Характеристики

ПРЕДИСЛОВИЕ

Метод внешних форм и подвижного репера — одна из наиболее ярких, многообещающих теорий современной дифференциальной геометрии. Он применяется с одинаковой лёгкостью в классической теории поверхностей и в геометрии n-мерного кривого пространства; им особенно удобно пользоваться в геометриях Клейна с другой фундаментальной группой, а при доказательстве существований он незаменим.

В настоящее время, если не считать мемуаров самого Картана, не менее половины работ, основанных на применении его ω-исчисления, сделано в Москве. Докторские диссертации Д. И. Перепёлкина, С. В. Бахвалова и отчасти С. Д. Россинского написаны методом Картана. Этим методом пользуется С. С. Бюшгенс в своём последнем большом исследовании по геометрии стационарного потока. Им работает Г. Ф. Лаптев в своих исследованиях по геометрии пространств проективной и афинной связности. Диссертации К. Н. Тихотского, В. М. Прокофьева, Н. А. Алексеева, Т. Л. Козьминой и ряд статей других авторов (П. Н. Глаголевой, Т. А. Шульман, Г. М. Бам-Зеликовича, А. М. Васильева, М. А. Акивиса и т. д.) дают приложение метода внешних форм к разнообразным вопросам дифференциальной геометрии. Все эти работы докладывались в семинаре по классической дифференциальной геометрии Московского университета.

Применение метода Картана требует навыка, которого нельзя почерпнуть в имеющейся уже довольно большой литературе. Только этим можно объяснить сравнительную медленность в его распространении. Настоящая книга и ставит своей целью передать накопленный опыт применения метода Картана.

Как всякая большая идея, метод внешних форм уходит своими корнями и в алгебру, и в анализ, и, может быть, в особенности, в теорию групп непрерывных преобразований. В вопросах алгебры мне помогла книга Томаса, при доказательстве аналитических теорем — изложение Кэлера. В групповых вопросах, которых я слегка коснулся в последней главе и повсюду в остальных II—XI главах, я широко пользовался изложением самого Картана, но больше всего я обязан постоянному общению с аудиторией на лекциях и семинарах, где собственно и создавалась эта книга.

Мне особенно приятно теперь вспомнить те ценные указания, в частности, по поводу доказательства интегральных теорем, которые я получил от В. В. Степанова, прочитавшего всю книгу в рукописи, Много полезных замечаний мне передал Г. Ф. Лаптев. Наконец, следует отметить исключительно тщательную работу редактора издательства Т. Л. Козьминой, которая помогла мне выправить целый ряд неясных мест в рукописи. Всем им считаю приятным долгом выразить мою глубокую признательность.

Мне остаётся сказать несколько слов относительно чтения этой книги. Она даёт аналитические предпосылки дифференциальной геометрии — теорию совместности дифференциальных уравнений, и распадается на две неравные части. Первая часть состоит из одной первой главы и излагает теорию совместности уравнений в частных производных — именно, теорию ортономных систем Рикье с обобщениями Томаса. Вторую часть составляют остальные 13 глав, посвящённые картановской теории систем в инволюции. Обе части вполне самостоятельны и могут читаться независимо одна от другой. Их взаимоотношение показано на примере § 4 гл. XII.

Алгебраическая сторона картановской символики изложена во II и IV главах. Они разделены гл. III, посвящённой теории вполне интегрируемых систем, для того чтобы можно было изложить в IV главе теорию характеристических систем. Аналитическая теория изложена в главах VI — VII. Гл. VI содержит основную теорему существования Картана для пфаффовых систем в инволюции. Гл. VII распространяет её на произвольные системы внешних дифференциальных уравнений. Всё дальнейшее изложение построено так, чтобы читатель, интересующийся только пфаффовыми системами, мог гл. VII не читать.

Главы VIII и IX дают основной механизм исследования пфаффовых систем (приведение в инволюцию). Главы V и X стоят особняком и могут при чтении опускаться. Гл. XI заново выводит и дополняет теорию характеристических систем гл. IV. Здесь следует отметить два приложения к геометрии: редукцию переменных пфаффовой системы (§ 5) и метод Бам-Зеликовича при решении задачи Бианки (§ 8).

Главы XII и XIII посвящены классификации особых элементов и проблеме особых интегральных многообразий.

Наконец, гл. XIV содержит групповые предпосылки метода подвижного репера и приложения их к выбору канонического репера. Её можно читать непосредственно после глав II и III.

Для читателя, который хотел бы быстрее овладеть основами метода Картана (теорией систем в инволюции), можно рекомендовать проработать вторую и третью главы (§ 11 гл. II и §§ 1, 2 гл. III могут быть при первом чтении опущены). Затем следует познакомиться с построением цепи интегральных элементов и её характерами а также с формулировками основных теорем (гл. VI) и прочитать главы VIII и IX (доказательства в §§ 5, 6 можно опустить до второго чтения) и внимательно проделать приведённые примеры.

С. Фиников

По пфаффовым системам см. также
П. К. Рашевский Геометрическая теория уравнений
с частными производными [illegible] 1947 г. [illegible]

ГЛАВА I

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ИНТЕГРАЛОВ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

§ 1. Теорема Коши-Ковалевской

Теорема. *Если правые части уравнений системы* (*S*)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial z_1}{\partial x_1}=f_1\left(x_i, z_j; \frac{\partial z_j}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z_j}{\partial x_n}\right), \\
&\frac{\partial z_2}{\partial x_1}=f_2\left(x_i, z_j; \frac{\partial z_j}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z_j}{\partial x_n}\right), \qquad i=1,2,\ldots,n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad j=1,2,\ldots,s, \\
&\frac{\partial z_s}{\partial x_1}=f_s\left(x_i, z_j; \frac{\partial z_j}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z_j}{\partial x_n}\right)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

голоморфны в области точки

$$x_i=x_i^0, \quad z_j=z_j^0, \quad \frac{\partial z_j}{\partial x_i}=p_{ij}^0$$

и

$$\varphi_1(x_2, x_3, \ldots, x_n), \quad \varphi_2(x_2, x_3, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad \varphi_s(x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

— *s произвольных функций, голоморфных в области точки*

$$x_2=\overset{0}{x_2}, \quad x_3=\overset{0}{x_3}, \quad \ldots, \quad x_n=\overset{0}{x_n}$$

и в этой точке принимающих вместе со своими производными значения

$$\varphi_j=\overset{0}{z_j}, \quad \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}=p_{ij}^0,$$

то существует только одна система интегралов системы (*S*), *голоморфных в области точки* ($\overset{0}{x_i}$) *и для* $x_1=\overset{0}{x_1}$ *принимающих значения*

$$z_j=\varphi_j(x_2, x_3, \ldots, x_n), \qquad j=1, 2, \ldots, s. \tag{2}$$

Заметим прежде всего, что интегралы системы (*S*) удовлетворяют не только уравнениям самой системы (*S*), но и всем уравнениям, которые получаются последовательным дифференцированием уравнений (1) любое число раз по независимым переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Совокупность всех этих уравнений (сами уравнения (1) и все их дифференциальные следствия) называется *продолженной системой*; мы будем обозначать её символом (S'). Это замечание можно сделать и относительно начальных условий (2): интегралы системы (S), удовлетворяющие начальным условиям (2), будут удовлетворять и всем уравнениям, которые получаются из уравнений (2) последовательным дифференцированием произвольное число раз по переменным $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Распределим теперь все производные от z_j на классы по числу дифференцирований по переменной x_1, относя к производным нулевого класса сами функции z_j и все их производные по переменным $x_2, x_3, \ldots, x_n$, к производным первого класса — все те производные, которые получаются из производных нулевого класса однократным дифференцированием по x_1, к производным класса m — все те, которые получаются из производных класса $m-1$ однократным дифференцированием по x_1.

Если иметь в виду эту классификацию, то нетрудно заметить, что значения в точке (x_i^0) производных нулевого класса можно получить из уравнений (2) и всех их дифференциальных следствий, если туда внести значения $x_2 = x_2^0$, $x_3 = x_3^0$, $\ldots, x_n = x_n^0$. Уравнения системы (S) и те уравнения продолженной системы, которые получены дифференцированием их по переменным $x_2, x_3, \ldots, x_n$, будут содержать в левой части все производные первого класса, а в правой части — только производные нулевого класса. Внося сюда значения $x_i = x_i^0$, а также найденные уже значения производных нулевого класса, мы вычислим в точке (x_i^0) начальные значения производных первого класса. Дифференцируя все эти уравнения один раз по x_1, мы получим в левых частях все производные второго класса, а в правых — уже известные производные первого и нулевого классов и, следовательно, сумеем вычислить начальные значения производных второго класса и т. д. Мы можем таким образом вычислить производные любого класса; при этом каждая производная будет получаться только один раз; следовательно, никаких противоречий мы не можем встретить.

Таким образом, если существует система интегралов, голоморфных в области точки (x_i^0), то мы сумеем написать их разложения по формуле Тэйлора в степенные ряды по разностям $x_i - x_i^0$. Поставленными условиями интегралы, голоморфные в области точки (x_i^0), определяются единственным образом.

С другой стороны, если эти ряды сходятся и, следовательно, определяют некоторые функции z_j, то легко доказать, что они удовлетворяют всем уравнениям системы (1). Для этого достаточно показать, что после подстановки в уравнения (1) построенных разложений в левой и в правой частях каждого уравнения получится одна и та же функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, или, лучше, что при разложении левой и правой частей в степенные ряды по разностям $x_i - x_i^0$ коэффициенты при одинаковых степенях

$$(x_1 - x_1^0)^{\alpha_1}(x_2 - x_2^0)^{\alpha_2} \ldots (x_n - x_n^0)^{\alpha_n}$$

будут соответственно равны.

Так как каждый коэффициент в ряду Тэйлора равен значению в точке (x_i^0) соответствующей производной

$$\frac{1}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!}\cdot\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} f_k}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

то нам придётся вычислить эти производные от обеих частей уравнения и показать, что их значения для $x_i = x_i^0$ совпадают; но дифференцирование обеих частей уравнений (1) даёт уравнения продолженной системы (S'), а подстановка значений $x_i = x_i^0$ приводит к той самой алгебраической системе, из которой коэффициенты наших разложений и были вычислены. Эти уравнения, следовательно, удовлетворяются тождественно, а тем самым удовлетворяются и уравнения (1) после подстановки функций z_j.

Таким образом доказательство теоремы существования интегралов сводится к доказательству сходимости полученных разложений. С этой целью можно применить метод усиливающих (мажорантных) функций. Начнём с леммы.

Лемма. *Если функция*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}^{0, 1, \ldots, \infty} a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

определяется степенным рядом, абсолютно сходящимся для $x_i = \rho_i > 0$, *и* M — *положительное число, большее абсолютной величины любого члена этого ряда (например, верхняя граница членов ряда), то функции*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{M}{\left(1-\frac{x_1}{\rho_1}\right)\left(1-\frac{x_2}{\rho_2}\right)\ldots\left(1-\frac{x_n}{\rho_n}\right)}$$

и

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{M}{1-\left(\frac{x_1}{\rho_1}+\frac{x_2}{\rho_2}+\ldots+\frac{x_n}{\rho_n}\right)}$$

служат для неё усиливающими функциями.

По определению, функция F — *усиливающая* по отношению к функции f, если в её разложении в степенной ряд все коэффициенты положительны и больше абсолютных величин коэффициентов разложения в степенной ряд функции f.

Так как

$$\frac{1}{1-\frac{x_i}{\rho_i}} = 1 + \frac{x_i}{\rho_i} + \left(\frac{x_i}{\rho_i}\right)^2 + \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

то общий член разложения функции F имеет вид:

$$M\left(\frac{x_1}{\rho_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{x_2}{\rho_2}\right)^{\alpha_2}\ldots\left(\frac{x_n}{\rho_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Его коэффициент положителен, а так как M по условию больше абсолютной величины всякого члена разложения функции f в точке $x_i = \rho_i$, то

$$|a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}|\,\rho_1^{\alpha_1}\rho_2^{\alpha_2}\ldots\rho_n^{\alpha_n} < M$$

и

$$|a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}| < \frac{M}{\rho_1^{\alpha_1}\rho_2^{\alpha_2}\ldots\rho_n^{\alpha_n}}.$$

Между тем справа и стоит коэффициент разложения функции F, следовательно, для функции F лемма доказана. Так как для функции F_1 общий член разложения

$$M\left(\frac{x_1}{\rho_1} + \frac{x_2}{\rho_2} + \ldots + \frac{x_n}{\rho_n}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}$$

даёт коэффициент при $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ не меньший, чем в разложении функции F, то она доказана и для функции F_1.

Заметим ещё, что при отсутствии в разложении функции f свободного члена за усиливающую функцию можно взять разность $F - M$ или $F_1 - M$.

Обращаясь теперь к доказательству основной теоремы, заметим, что формулы для коэффициентов в разложениях интегралов системы, получаемые при решении уравнений продолженной системы (S'), образованы только действиями сложения и умножения из коэффициентов разложений функций f_j и φ_j по степеням их аргументов. Заменяя эти функции усиливающими функциями F_j и Φ_j, мы получим в разложении интегралов Z_j новой системы ряды, усиливающие по отношению к разложению z_j. Если будет доказана сходимость разложения интегралов Z_j *усиливающей* (мажорантной) *системы*, то тем самым будет доказана сходимость разложений интегралов z_j.

Прежде всего мы упростим начальные условия. Делая замену

$$\overline{x}_i = x_i - x_i^0, \quad \overline{z}_j = z_j - \varphi_j(x_2, x_3, \ldots, x_n) + a_j(x_1 - x_1^0)$$

и опуская затем черту над новыми переменными, мы придём к системе того же вида, как и система (1), но с начальными значениями

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_s = 0 \quad \text{для} \quad x_1 = 0,$$

и при этом мы можем воспользоваться произвольными коэффициентами a_j, чтобы обратить в нуль свободные члены разложений по степеням аргументов функций, стоящих в правых частях уравнений системы (S).

Строя усиливающие функции для правых частей f_j, мы придём к системе уравнений

$$(1^*) \quad \frac{\partial Z_j}{\partial x_1} = \frac{M}{\left(1 - \frac{\alpha x_1 + x_2 + \ldots + x_n + Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_s}{r}\right)\left(1 - \frac{\frac{\partial Z_1}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial Z_s}{\partial x_n}}{\rho}\right)} - M,$$

$$j = 1, 2, \ldots, s,$$

где α — положительное число, большее единицы, и M, r, ρ — определённые положительные числа (M — верхняя граница абсолютных величин членов в разложении функций f_j по степеням их аргументов для $x_i = Z_j = r$ и $\frac{\partial Z_j}{\partial x_i} = \rho$). Справа мы вычли M, ибо функции f_j теперь не имеют в своих разложениях свободных членов. Введение коэффициента $\alpha > 1$ не испортит усиливающую функцию, ибо он только увеличит коэффициенты разложений.

Будем искать решение системы (1^*), полагая все неизвестные функции равными между собой:

$$Z_1 = Z_2 = \ldots = Z_s = Z,$$

и отыскивая их как функции одного аргумента

$$X = \alpha x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Так как по правилу дифференцирования сложной функции $\frac{\partial Z}{\partial x_1} = \frac{dZ}{dX} \cdot \frac{\partial X}{\partial x_1} = \alpha \frac{dZ}{dX}$, то все уравнения системы (1^*) дадут теперь одно и то же уравнение

$$\alpha \frac{dZ}{dX} = \frac{M}{\left(1 - \frac{X + sZ}{r}\right)\left(1 - \frac{s(n-1)}{\rho} \cdot \frac{dZ}{dX}\right)} - M,$$

или

$$(a) \quad \left(\alpha - \frac{s(n-1)}{\rho}M\right)\frac{dZ}{dX} = \alpha \frac{s(n-1)}{\rho}\left(\frac{dZ}{dX}\right)^2 + \frac{M}{1 - \frac{X + sZ}{r}} - M.$$

Берём α настолько большим, чтобы коэффициент при $\frac{dZ}{dX}$ был положителен.

Все коэффициенты нашего уравнения голоморфны в области точки $X = 0$, $Z = 0$. Квадратное уравнение для $\frac{dZ}{dX}$ имеет в точке $X = 0$,

$Z=0$ различные корни, а именно: один корень равен нулю, ибо свободный член для $X=0$, $Z=0$ обращается в нуль, а другой отличен от нуля, ибо коэффициент при $\frac{dZ}{dX}$ не нуль. Выберем для $\frac{dZ}{dX}$ то значение, которое в точке $X=0$, $Z=0$ обращается в нуль; мы получим для Z определённое решение, голоморфное в области точки $X=0$.

Все коэффициенты разложения этого интеграла положительны. Действительно, нетрудно убедиться, что последовательные дифференцирования дадут для всех производных в точке $X=0$ положительные значения. Если записать уравнение (a) в виде

$$\frac{dZ}{dX}=A\left(\frac{dZ}{dX}\right)^2+\Phi(X,\ Z),$$

где A — положительно и

$$\Phi(X,\ Z)=\frac{M}{\alpha-\frac{s(n-1)}{\rho}M}\left(\frac{1}{1-\frac{X+sZ}{r}}-1\right)=$$

$$=\frac{M}{\alpha-\frac{s(n-1)}{\rho}M}\left(\frac{X+sZ}{r}+\frac{(X+sZ)^2}{r^2}+\ldots\right)$$

есть ряд с положительными коэффициентами, то первое дифференцирование даёт:

$$\frac{d^2Z}{dX^2}=2A\frac{dZ}{dX}\cdot\frac{d^2Z}{dX^2}+\frac{\partial\Phi}{\partial X}+\frac{\partial\Phi}{\partial Z}\cdot\frac{dZ}{dX}.$$

Полагая

$$X=0,\quad Z=0,\quad \frac{dZ}{dX}=0,$$

получим

$$\left(\frac{d^2Z}{dX^2}\right)_0=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial X}\right)_0>0,$$

ибо в правой части стоит один из положительных коэффициентов разложения функции Ф. Таким же образом обнаруживается положительность и следующих производных.

Итак, разложение полученного интеграла Z даёт для интегралов z_j системы (S) усиливающий ряд. По теореме Коши [1]) о существовании голоморфного интеграла обыкновенного дифференциального уравнения интеграл Z существует; следовательно, усиливающий ряд в области точки $X=0$ сходится, а потому сходятся в области точки (x_i^0) и разложения для интегралов z_j. Система (S) имеет систему интегралов, удовлетворяющих начальным условиям.

---

[1]) Гурса, Курс математического анализа, т. II, 1936, гл. XIX, стр. 303. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, 1945, гл. IV, стр. 130. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 1939, гл. III, стр. 48, гл. IV, стр. 77.

Теорема Ковалевской. *Пусть дана система s уравнений в частных производных с n независимыми переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и s неизвестными функциями $z_1, z_2, \ldots, z_s$, разрешённая относительно s производных высшего порядка по одной переменной от каждой неизвестной функции*

$$\frac{\partial^{p_j} z_j}{\partial {x_1}^{p_j}}=f_j\left(x_1\ x_2, \ldots, x_n, z_1, z_2, \ldots, z_s; \frac{\partial z_1}{\partial x_2}, \ldots\right), \tag{3}$$
$$j=1,\ 2, \ldots,\ s.$$

Если в правых частях стоят функции от независимых переменных x_i, неизвестных функций z_j и только тех производных от них, которые не входят в левые части уравнений системы, и если эти функции f_j голоморфны в области точки

$$x_i=x_i^0,\quad z_j=z_j^0,\quad \frac{\partial^{\alpha+\beta+\ldots+\zeta} z_j}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\beta \ldots \partial x_n^\zeta}=p^0_{j;\,\alpha,\,\beta,\,\ldots,\,\zeta}, \tag{4}$$

то существует только одна система интегралов, голоморфных в области точки (x_i^0) и удовлетворяющих начальным условиям:

$$\begin{aligned} &z_j=\varphi_j(x_2,\ x_3, \ldots, x_n),\\ &\frac{\partial z_j}{\partial x_1}=\varphi_{j;\,1}(x_2,\ x_3, \ldots, x_n), \qquad \textit{для}\ \ x_1=x^0_1,\ j=1,\ 2, \ldots, s,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\frac{\partial^{p_j-1} z_j}{\partial {x_1}^{p_j-1}}=\varphi_{j;\,p_j-1}(x_2,\ x_3, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{5}$$

где все φ — произвольные функции своих аргументов, голоморфные в области точки (x_i^0) и в этой точке принимающие вместе со своими производными значения (4).

Так же, как и раньше, мы убедимся, что начальные значения (5) достаточны, чтобы вычислить значения всех неизвестных функций z_i и их производных в точке (x_i^0). Действительно, уравнения (5) и их дифференциальные следствия (при дифференцировании по $x_2, x_3, \ldots, x_n$) позволят вычислить значения в точке (x_i^0) самих интегралов z_j и их производных до (p_j-1)-го класса включительно (т. е. содержащих не более p_j-1 дифференцирований по x_1). Дифференцируя уравнения (3) по $x_2, x_3, \ldots, x_n$, мы найдём значения в этой точке производных класса p_j. Дифференцируя все эти уравнения один раз по x_1, найдём значения производных класса p_j+1 и т. д. Каждую производную будем получать только один раз, не встречая противоречий.

Остаётся показать сходимость получаемых рядов. Преобразуем систему (3), введя в качестве дополнительных неизвестных все производные от каждой неизвестной z_j до (p_j-1)-го порядка включительно; именно, обозначим:

$$
(6)\quad \begin{aligned}
&z_{j;\,\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots,\,\alpha_n}=\frac{\partial}{\partial x_1}z_{j;\,\alpha_1-1,\,\alpha_2,\,\ldots,\,\alpha_n},\\
&z_{j;\,0,\,\alpha_2,\,\ldots,\,\alpha_n}=\frac{\partial}{\partial x_2}z_{j;\,0,\,\alpha_2-1,\,\ldots,\,\alpha_n},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&z_{j;\,0,\,0,\,\ldots,\,0,\,\alpha_n}=\frac{\partial}{\partial x_n}z_{j;\,0,\,0,\,\ldots,\,0,\,\alpha_n-1},
\end{aligned}
\qquad
\begin{gathered}
j=1,2,\ldots,s;\\
\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n<p_j\\
\text{и все указатели}\\
\text{не отрицательны.}
\end{gathered}
$$

$$z_{j;\,0,\,0,\,\ldots,\,0}=z_j.$$

Отсюда следует:

$$
(7)\quad \begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_1}z_{j;\,\alpha_1-1,\,\alpha_2,\,\ldots,\,\alpha_n}=\frac{\partial}{\partial x_2}z_{j;\,\alpha_1,\,\alpha_2-1,\,\ldots,\,\alpha_n},\\
&\frac{\partial}{\partial x_2}z_{j;\,\alpha_1,\,\alpha_2-1,\,\ldots,\,\alpha_n}=\frac{\partial}{\partial x_3}z_{j;\,\alpha_1,\,\alpha_2,\,\alpha_3-1,\,\ldots,\,\alpha_n},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}z_{j;\,\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_{n-1}-1,\,\alpha_n}=\frac{\partial}{\partial x_n}z_{j;\,\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_n-1},
\end{aligned}
\qquad
\begin{gathered}
j=1,2,\ldots,s;\\
\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n\leqslant p_j\\
\text{и все указатели}\\
\text{не отрицательны.}
\end{gathered}
$$

Присоединим все эти уравнения (6) и (7) к системе (3). Для новых неизвестных функций уравнения (3) станут уравнениями первого порядка:

$$
(3^*)\qquad \frac{\partial z_{j;\,p_j-1,\,0,\ldots,\,0,}}{\partial x_1}=f_j(x_1,x_2,\ldots,x_n;\,z_{j;\,0,\,\ldots,\,0,\,\ldots}).
$$

Уравнения (3*), (6) и (7) составят новую систему уравнений, которую мы обозначим буквой (S).

Система (S) допускает все интегралы системы (3). Действительно, всякая система интегралов z_j позволит вычислить по формулам (6) величины $z_{j;\,\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots,\,\alpha_n}$. Внося эти значения в уравнения (3*) системы (S), мы вернём их к виду уравнений (3), а так как z_j удовлетворяли системе (3), то они обратят в тождества и уравнения (3*). Наконец, уравнения (7) будут удовлетворены как простые следствия уравнений (6).

Выделим теперь из системы (S) те уравнения, которые содержат производные по x_1. Сюда войдут прежде всего все уравнения (3*), затем уравнения (6) первой строки и уравнения (7) первой строки; мы их обозначим соответственно (6_1) и (7_1). Разрешим эти уравнения относительно производных по x_1. При этом уравнения (6_1) определят производные по x_1 от всех $z_{j;\,\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots,\,\alpha_n}$, где сумма указателей $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$ меньше или равна p_j-2; уравнения (3*) дадут производные по x_1 от тех $z_{i;\,\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots,\,\alpha_n}$, у которых эта сумма

равна p_j-1 и все $\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n$ равны нулю, а уравнения (7_1) — от всех остальных $z_{j;\,\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots,\,\alpha_n}$ с суммой указателей, равной p_j-1. Мы получим, таким образом, систему уравнений первого порядка типа Коши: она разрешена относительно производных по x_1 от всех неизвестных функций. Назовём её системой (S_1), а все остальные уравнения (6) и (7) — системой (S_2).

Всякий интеграл системы (3), удовлетворяющий, как мы видели, системе (S), тем самым обращает в тождества и ту часть уравнений этой системы, которую мы обозначили (S_1), но не наоборот: не каждая система интегралов системы (S_1) удовлетворяет уравнениям (S_2) и тем более уравнениям системы (3).

Система (S_1), как система Коши, согласно предыдущей теореме, допускает голоморфные в области точки (x_i^0) интегралы, удовлетворяющие начальным условиям:

$$
(8)\qquad \begin{gathered}
z_{j;\,\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots,\,\alpha_n}=\Phi_{j;\,\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots,\,\alpha_n}(x_2,x_3,\ldots,x_n)\qquad \text{для } x_1=x_1^0,\\
j=1,\,2,\,\ldots,\,s;\ \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n<p_j.
\end{gathered}
$$

Функции Φ — произвольные функции своих аргументов, голоморфные в области точки (x_i^0) и в этой точке принимающие значения, лежащие в области голоморфности правых частей уравнений (3*). При подходящем выборе функций Φ мы получим и интегралы z_j системы (3). Действительно, если выбрать

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{j;\,\alpha_1,\,0,\,\ldots,\,0}=\varphi_{j;\,\alpha_1}, &&\alpha_1=0,\,1,\,2,\ldots,p_j-1,\\
&\Phi_{j;\,\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots,\,\alpha_n}=\frac{\partial^{\alpha_2+\ldots+\alpha_n}\varphi_{j;\,\alpha_1}}{\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}},
\end{aligned}
$$

где $\varphi_{j;\,\alpha_1}$ суть функции таблицы (5), то начальные условия (5) будут удовлетворены. Все производные от z_j нулевого и первых p_j-1 классов в точке (x_i^0) будут получаться дифференцированием уравнений (8), или, что то же самое, уравнений (5). Производные класса p_j и выше будут получаться из уравнений (3*) и их дифференциальных следствий, которые совпадут с уравнениями системы (3) и её продолженной системы.

Так как все интегралы системы (S_1) с начальными условиями (8) разлагаются в точке (x_i^0) в сходящиеся ряды, то будут сходиться и ряды для интегралов z_j системы (3). Таким образом существование интегралов системы Коши доказано.

§ 2. Теория Рикье.
Принцип экономии начальных условий

Системы уравнений Коши представляют частный случай гораздо более общих систем Рикье (Riquier) [1]. Здесь мы встретимся с теми же тремя вопросами, которые мы видели в доказательстве теоремы

---

[1] Riquier, Les systèmes d'équations aux derivées partielles, 1910.

Ковалевской: вычисление коэффициентов разложения интегралов в степенные ряды с последующим доказательством обращения уравнений системы в тождества после подстановки этих разложений, обеспечение отсутствия противоречий и, наконец, сходимость полученных рядов. Они только приобретают теперь более самостоятельное значение.

Мы будем предполагать, что система уравнений (S) нам дана в форме, решённой относительно различных производных всех неизвестных функций $z_1, z_2, \ldots, z_r$ $(r \leqslant s)$; причём будем предполагать, что ни одна из этих производных, ни производная от такой производной не встречаются в правых частях. Впоследствии нам придётся наложить более стеснительные требования. Производные, стоящие в левых частях, а также все производные от этих производных мы будем называть *главными производными*, все остальные — *параметрическими*.

Интегралы системы (S) удовлетворяют и всем уравнениям продолженной системы (S'). Эта система в левых частях содержит все главные производные, ибо мы будем рассматривать систему (S) как часть системы (S'). Так как уравнения системы (S) в правых частях не содержат главных производных, то простыми подстановками можно исключить главные производные из правых частей всех уравнений продолженной системы.

е верн

$A_2=\partial_2 A_1$

$A_3=\partial_3 A_2$

$A_1=\partial_1 A_3$

Могут представиться две возможности:

Может случиться, что среди уравнений системы (S') найдутся независимые уравнения с одной и той же главной производной в левой части. Сравнивая между собой правые части таких уравнений, мы должны получить не сводящуюся к тождеству зависимость между параметрическими производными, что противоречит представлению о параметрических производных как о свободно задаваемых в точке (x_i^0) величинах. Такое уравнение надо разрешить относительно одной из параметрических производных, которая тем самым станет главной, и присоединить к системе (S). Систему (S), таящую в себе возможность производить новые независимые уравнения, можно было бы назвать *активной*.

Может случиться, что продолженная система (S') разрешается алгебраически относительно главных производных так, что все параметрические производные (включая и сами неизвестные функции) останутся вполне произвольными; такая система называется *пассивной*. Слова «разрешается алгебраически» предполагают, что независимые переменные, неизвестные функции и все их производные, как главные, так и параметрические, рассматриваются как независимые величины, связанные только уравнениями системы (S'), которую мы разрешаем.

Начальное определение интегралов. Если система (S) — пассивна, то, внося заданные начальные значения неизвестных функций z_j и их параметрических производных в точке (x_i^0) в уравнения продолженной системы, мы найдём значения в той же точке всех главных производных и можем написать разложения интегралов z_j в степенные ряды по разностям $x_i - x_i^0$.

Так как для пассивной системы получаемые таким образом начальные значения всех параметрических и главных производных удовлетворяют всем уравнениям продолженной системы, то можно утверждать, что полученные разложения тождественно удовлетворяют системе (S). Действительно, внесём в уравнения (S) вместо неизвестных функций z_j найденные разложения. Если полученные равенства продифференцировать произвольное число раз по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и положить затем $x_i = x_i^0$, то полученный результат совпадёт с результатом подстановки начальных значений параметрических и главных производных в те уравнения продолженной системы, которые получатся теми же дифференцированиями из уравнений (S), а уравнениям продолженной системы эти значения по условию удовлетворяют. Так как равенство значений в некоторой точке всех производных двух голоморфных функций приводит к тождественному равенству функций, то равенства, получаемые после подстановки найденных разложений в уравнения (S), обращаются в тождества.

Таким образом, для пассивной системы знание начальных значений всех параметрических производных достаточно, чтобы определить единственную систему интегралов z_j, если таковая существует. Совокупность этих данных можно назвать *начальным определением интегралов*.

Начальному определению интегралов системы можно придать гораздо более удобную форму.

Принцип экономии начальных условий. Рассмотрим разложение какого-либо интеграла z_j в степенной ряд:

$$(9)\qquad z_j = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}^{0,1,\ldots,\infty} a_{j\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} (x_2 - x_2^0)^{\alpha_2} \ldots (x_n - x_n^0)^{\alpha_n}.$$

Здесь коэффициенты $a_{j\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ до числового множителя совпадают со значениями в точке (x_i^0) производных от интеграла z_j:

$$a_{j\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = \frac{1}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!} \left(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial \lambda_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} z_j \right)_{x_i = x_i^0}.$$

Чтобы выделить начальное определение интеграла, удалим из разложения (9) все члены с главными производными. Сделать это чрезвычайно просто.

Будем называть *буквенной частью* каждого члена в разложении (9) то произведение разностей

$$(x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} (x_2 - x_2^0)^{\alpha_2} \ldots (x_n - x_n^0)^{\alpha_n},$$

которое стоит множителем при коэффициенте $a_{j\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$, и допустим, что в левой части одного из уравнений системы (S) стоит производная

$$\frac{\partial^{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n}}{\partial x_1^{\beta_1}\partial x_2^{\beta_2}\ldots\partial x_n^{\beta_n}} z_j.$$

Тогда в разложении (9) надо будет вычеркнуть тот член, который имеет в своей буквенной части произведение

$$X_\beta = (x_1 - x_1^0)^{\beta_1}(x_2 - x_2^0)^{\beta_2}\ldots(x_n - x_n^0)^{\beta_n},$$

а также все те члены, буквенные части которых делятся на произведение X_β, ибо при дифференцировании нашего уравнения по какой-нибудь переменной x_i порядок производной по этой переменной β_i повысится на единицу, и соответствующий член в разложении z_j будет иметь в своей буквенной части произведение

$$X_\beta\cdot(x_i - x_i^0) = (x_1 - x_1^0)^{\beta_1}\ldots(x_i - x_i^0)^{\beta_i+1}\ldots(x_n - x_n^0)^{\beta_n},$$

которое делится на произведение X_β. Так же надо поступать по отношению к каждой главной производной.

Оставшаяся часть разложения содержит только параметрические производные; мы будем называть её *параметрической*. Коэффициенты этой части разложения — вполне произвольные числа с единственным условием, чтобы радиус сходимости оставшегося ряда не равнялся нулю. Параметрическая часть и составляет начальное определение интеграла. Все члены её можно разбить на группы так, чтобы каждая группа определяла разложение искомого интеграла или какой-нибудь его производной при начальных значениях некоторых независимых переменных.

Если, например, вычеркнуты только члены, кратные произведению X_β, и показатель степени β_1 не равен нулю, то параметрическая часть содержит:

a) все члены, которые не делятся на $x_1 - x_1^0$; они получатся, если в разложении z_j положить $x_1 = x_1^0$ и, следовательно, дают значение z_j для $x_1 = x_1^0$ в виде произвольной функции от $x_2, x_3, \ldots, x_n$;

b) все члены, содержащие $x_1 - x_1^0$ в первой степени; они получатся, если разложение для z_j продифференцировать по x_1 и затем положить $x_1 = x_1^0$; они составят значение $\frac{\partial z_j}{\partial x_1}$ для $x_1 = x_1^0$;

. . . .

e) все члены, содержащие $(x_1 - x_1^0)^{\beta_1-1}$, которые составят значение

$$\frac{1}{(\beta_1-1)!}\left(\frac{\partial^{\beta_1-1}}{\partial x^{\beta_1-1}} z_i\right)_{x_1=x_1^0},$$

ибо дифференцирование $\beta_1 - 1$ раз по x_1 уничтожит все члены, которые содержат $x_1 - x_1^0$ в более низкой степени, а члены с более высокой степенью $x_1 - x_1^0$ пропадут, когда мы подставим $x_1 = x_1^0$;

f) все члены, которые делятся на $(x_1 - x_1^0)^{\beta_1}$ и не содержат $x_2 - x_2^0$, если $\beta_2 \neq 0$; они получаются, если разложение для z_j продифференцировать β_1 раз по x_1, чтобы уничтожить все члены с низшей степенью $x_1 - x_1^0$, и подставить $x_2 = x_2^0$, чтобы уничтожить члены, содержащие $x_2 - x_2^0$. Эти члены дают значение производной

$$\frac{1}{\beta_1!}\left(\frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x^{\beta_1}} z_j\right)_{x_2=x_2^0};$$

. . . .

i) все члены, которые делятся на $(x_1 - x_1^0)^{\beta_1}(x_2 - x_2^0)^{\beta_2}$ и не содержат $x_3 - x_3^0$ или содержат в первой, второй и т. д., $(\beta_3 - 1)$-й степени (если β_3 не нуль); они равны

$$\frac{1}{\beta_1!\beta_2!}\left(\frac{\partial^{\beta_1+\beta_2}}{\partial x_1{}^{\beta_1}\partial x_2{}^{\beta_2}} z_j\right)_{x_3=x_3^0},$$

и т. д.

Этот метод определения произвольных функций в начальном определении интеграла называется принципом *экономии начальных условий.*

Пример. *Пассивная система (S) содержит две неизвестных функции z_1, z_2 при трёх независимых переменных x_1, x_2, x_3 и четыре уравнения, разрешённых относительно производных*

$$\frac{\partial^3 z_1}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3},\quad \frac{\partial z_2}{\partial x_1},\quad \frac{\partial^2 z_2}{\partial x_2\partial x_3},\quad \frac{\partial^3 z_2}{\partial x_2^3}.$$

Определить широту решения.

В разложении z_1 надо вычеркнуть члены, делящиеся на

$$(x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^0)(x_3 - x_3^0),$$

после чего все оставшиеся члены можно представить в виде

$$F_1(x_2, x_3) + (x_1 - x_1^0)F_2(x_1, x_3) + (x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^0)F_3(x_1, x_2).$$

Здесь все F_i суть произвольные функции своих аргументов и позволяют определить значения самой функции z_1 для $x_1 = x_1^0$ и производных $\frac{\partial z_1}{\partial x_1}$ для $x_2 = x_2^0$ и $\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1\partial x_2}$ для $x_3 = x_3^0$. Действительно, полагая в разложении

$$z_1 = F_1(x_2, x_3) + (x_1 - x_1^0)F_2(x_1, x_3) + (x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^0)F_3(x_1, x_2) + \\ + (x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^0)(x_3 - x_3^0)\,\Phi(x_1, x_2, x_3)$$

переменную $x_2=x_2^0$ и диффренцируя затем по x_1, мы получим

$$\left(\frac{\partial z_1}{\partial x_1}\right)_{x_2=x_2^0}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left[(x_1-x_1^0)\,F_2(x_1,\ x_3)\right].$$

В разложении z_2 надо вычеркнуть сначала члены, делящиеся на $x_1-x_1^0$, после чего останется произвольное разложение по степеням $x_2-x_2^0$ и $x_3-x_3^0$. Затем отсюда надо вычеркнуть члены, делящиеся на $(x_2-x_2^0)(x_3-x_3^0)$, после чего останутся члены, содержащие только x_3 или только x_2, т. е. разложение вида

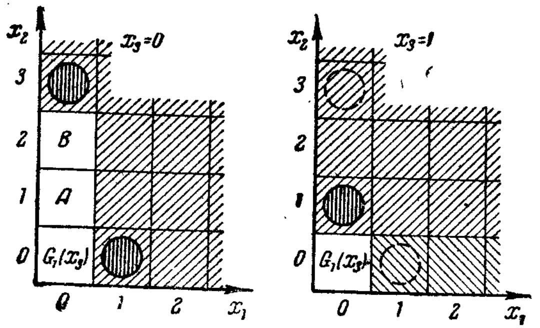
$$G_1(x_3)+(x_2-x_2^0)\,G_2(x_2),$$

где G_1 и G_2 — произвольные разложения по степеням своих аргументов. Наконец, отсюда надо вычеркнуть члены, делящиеся на $(x_2-x_2^0)^3$. Мы получим в остатке

$$G_1(x_3)+A\cdot(x_2-x_2^0)+\frac{1}{2}B\cdot(x_2-x_2)^2,$$

где A и B — постоянные.

Эти рассуждения получают большую наглядность, если воспользоваться *диаграммой* Н. Н. Лузина[1]). При двух независимых переменных она особенно удобна и представляет прямоугольную решётку, где столбцы и строки перенумерованы от 0 до ∞. Каждая производная из левых частей системы, например $\frac{\partial^{i+k}z}{\partial x_1^i\partial x_2^k}$, изображается кружком (двойной штриховки) в клетке за номерами i и k. При трёх независимых переменных решётка становится пространственной. Чтобы избежать трудности изображения на бумаге, можно дать отдельные чертежи для каждого горизонтального слоя, т. е. прямоугольные решётки по переменным x_1 и x_2 для $x_3=0$, для $x_3=1$ и т. д.



Черт. 1.

В нашем примере для неизвестной функции z_2 достаточно дать два чертежа — для $x_3=0$ и для $x_3=1$ (черт. 1), чтобы изобразить все производные (главные) системы. Вычеркнутые члены разложения представлены заштрихованными клетками. Кружками (без дополнительной штриховки) даны проекции на второй слой $x_3=1$ кружков первого слоя $x_3=0$.

Таким образом в слое $x_3=0$ вычёркиваются углы со сторонами, параллельными положительным осям x_1 и x_2, и вершинами в клетке (1, 0) и в клетке (0,3), после чего остаются только три свободные клетки (0, 0) (0,1) и (0,2). В слое $x_3=1$ вычёркивается угол с вершиной в клетке (0, 1) и, кроме того, удаляются проекции вычеркнутых клеток слоя $x_3=0$. Остаётся свободной только одна клетка (0, 0). Во всех остальных слоях $x_3>1$ вычёркиваются проекции заштрихованных клеток слоя $x_3=1$ и остаётся по одной клетке (0,0). Все клетки, проектирующиеся на клетку (0, 0) слоя $x_3=0$, т. е. весь бесконечный столб по оси x_3, стоящий на этой клетке, изображает произвольную функцию $G_1(x_3)$. Остальные две свободные клетки слоя $x_3=0$ соответствуют произвольным постоянным A и B или, лучше, членам $A\cdot(x_2-x_2^0)$ и $B\cdot(x_2-x_2^0)^2$ разложения.

Начальные условия представятся в виде таблицы:

$$\begin{aligned}
z_1&=F_1(x_2,\ x_3)\quad\text{для}\quad x_1=x_1^0,\\
\frac{\partial z_1}{\partial x_1}&=F_2(x_1,\ x_3)\quad\text{для}\quad x_2=x_2^0,\\
\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1\partial x_2}&=F_3(x_1,\ x_2)\quad\text{для}\quad x_3=x_3^0,\\
z_2&=G_1(x_3)\qquad\text{для}\quad x_1=x_1^0,\quad x_2=x_2^0,\\
\frac{\partial z_2}{\partial x_2}=A,\quad \frac{\partial^2 z_2}{\partial x_2^2}&=B\ \text{для}\ x_1=x_1^0,\ x_2=x_2^0,\ x_3=x_3^0.
\end{aligned}$$

При этом предполагается, что система пассивна. Это означает, что исключение главных производных из уравнений продолженной системы путём сравнения двух уравнений с одной и той же левой частью (например, после дифференцирования второго уравнения с левой частью $\frac{\partial z_2}{\partial x_1}$ по x_2 и x_3, а третьего с левой частью $\frac{\partial^2 z_2}{\partial x_2\partial x_3}$ по x_1) не приведёт к новому уравнению, содержащему только параметрические производные.

Исследование этого вопроса удобнее, однако, сделать, пользуясь теорией мономов Жане (Janet)[1])-Томаса (Thomas)[2]).

3. Теория мономов Томаса.
Продолжение системы по множителям

Семейство мономов системы. Положим для простоты записи начальные значения независимых переменных равными нулю, заменяя, например, $x_i-x_i^0$ через $\overline{x_i}$ и опуская затем черту над новыми переменными.

---

[1]) Лузин, Доказательство одной теоремы теории изгибания, Известия АН СССР, отд. тех. наук, №№ 2, 7, 10, 1939, стр. 118, 124. Автор называет свою диаграмму *геометрической схемой* системы.

[1]) Janet, Leçons sur les systèmes d'équations aux derivées partielles, 1929.

[2]) Thomas, Differential systems, 1937.

Каждой производной от неизвестной функции z_j соответствует определённый член в разложении z_j по степеням $x_1, x_2, \dots, x_n$. Буквенная часть этого члена $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$ называется *мономом* этой производной. Мы будем его записывать коротко:

$$\mathcal{M}_\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n.$$

Следовательно, производной $\dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n}} z_j$ принадлежит моном $\mathcal{M}_\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Умножению монома на x_i соответствует, с одной стороны, повышение показателя α_i на единицу, с другой стороны, дифференцирование присвоенной ему производной по переменной x_i.

Если дана система уравнений (S), то вся совокупность производных, стоящих в левых частях уравнений, делится на группы по функциям, от которых берутся эти производные. Каждой группе производных от одной функции z_j соответствует семейство мономов $(\mathcal{M}_\alpha)$.

Рассмотрим показатели $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ этих мономов $\mathcal{M}_\alpha$. Выберем наибольшее значение показателя α_i при степенях переменной x_i среди всех мономов $\mathcal{M}_\alpha$ семейства и обозначим это число буквой h_i. Совокупность чисел

$$H = (h_1, h_2, \dots, h_n)$$

Томас называет *индексом семейства*. Мы будем называть каждую компоненту его h_i *индексом* (абсолютным) *переменной* x_i в семействе. Для данного монома

$$\mathcal{M}_a = a_1, a_2, \dots, a_n$$

в семействе $(\mathcal{M}_\alpha)$ переменная x_i называется *умножающей* или коротко *множителем*, если показатель её a_i равен своему индексу h_i, и переменной-*немножителем*, если $a_i < h_i$. Если семейство $(\mathcal{M}_\alpha)$ содержит моном

$$\mathcal{M}_h = h_1, h_2, \dots, h_n = x_1^{h_1}x_2^{h_2}\dots x_n^{h_n},$$

все показатели которого равны индексам переменных семейства, то все его переменные суть переменные-множители. Такой моном мы будем называть *старшим мономом* данного индекса.

Пример. *Написать мономы и определить их переменные-множители для системы, разрешённой относительно производных*

$$\frac{\partial^3 z_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}, \quad \frac{\partial z_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial^2 z_2}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad \frac{\partial^3 z_2}{\partial x_2^3}.$$

Неизвестной функции z_1 соответствует семейство мономов, содержащее только одни моном:

$$\mathcal{M} = x_1x_2x_3 = 1, 1, 1.$$

Каждая переменная x_1, x_2 и x_3 — множитель, ибо индекс семейства совпадает с совокупностью его показателей.

Неизвестной функции z_2 соответствуют три монома:

$$\mathcal{M}_1 = 1, 0, 0; \quad \mathcal{M}_2 = 0, 1, 1; \quad \mathcal{M}_3 = 0, 3, 0.$$

Индексом семейства является

$$H = (1, 3, 1).$$

Следовательно, множители суть

$$x_1 \text{ для } \mathcal{M}_1, \quad x_3 \text{ для } \mathcal{M}_2, \quad x_2 \text{ для } \mathcal{M}_3.$$

Абсолютно полное семейство Томаса. Умножая мономы $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$ произвольное число раз на их переменные-множители, мы, очевидно, не получим все их кратные. Если дополнить наше семейство мономов так, чтобы все кратные мономов семейства можно было получить умножением только на переменные-множители, то новое семейство мономов будет называться *абсолютно полным*. Мы будем обозначать его звёздочкой $(\mathcal{M}_\alpha^*)$.

Будем называть *классом мономов* $(\mathfrak{M})$ семейства $(\mathcal{M}_\alpha)$ совокупность мономов этого семейства и всех тех, которые получаются умножением их на их переменные-множители; аналогично определяется класс $(\mathfrak{M}^*)$ для полного семейства $(\mathcal{M}_\alpha^*)$.

Теорема. *Каждый моном класса* $(\mathfrak{M})$ *семейства* $(\mathcal{M}_\alpha)$ *получается умножением на переменные-множители из одного и только одного монома этого семейства.*

Действительно, если $\mathcal{M}_c$ — какой-нибудь моном класса $(\mathfrak{M})$ и $\mathcal{M}_a$ — тот моном семейства $(\mathcal{M}_\alpha)$, из которого $\mathcal{M}_c$ получен умножением на переменные-множители,

$$\mathcal{M}_c = c_1, c_2, \dots, c_n, \quad \mathcal{M}_a = a_1, a_2, \dots, a_n,$$

то по определению делимости степеней каждый показатель делителя a_i не больше соответствующего показателя делимого c_i:

$$a_i \leqslant c_i;$$

так как переменная x_i является переменной-множителем только тех мономов, которые содержат её в степени, равной её индексу h_i, то возможны только два случая:

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} a_i &= h_i, \text{ если } c_i \geqslant h_i, \\ a_i &= c_i, \text{ если } c_i < h_i. \end{aligned}$$

Так как эти условия вполне определяют моном $\mathcal{M}_a$, то теорема доказана.

Таким образом, все мономы класса $(\mathfrak{M})$ можно разбить на разряды $(\mathfrak{M}_a)$, $(\mathfrak{M}_b)$, ... так, что каждый разряд происходит от одного монома $\mathcal{M}_a$, $\mathcal{M}_b$, ... семейства $(\mathcal{M}_\alpha)$. Этот моном можно назвать *образующим* для всех мономов его разряда.

Если семейство $(\mathcal{M}_\alpha)$ не содержит монома $\mathcal{M}_a$, определяемого условиями (a), то моном $\mathcal{M}_c$ не может принадлежать классу $(\mathfrak{M})$, хотя бы он делился на какой-нибудь моном семейства $(\mathcal{M}_\alpha)$. Следовательно, класс мономов $(\mathfrak{M})$ произвольного семейства $(\mathcal{M}_\alpha)$ не заключает в себе всех кратных мономам $(\mathcal{M}_\alpha)$.

Если не накладывать никаких ограничений на показатели c_i, т. е. придавать им всевозможные значения, то семейство мономов $(\mathcal{M}_\alpha^*)$, определяемых формулами (a), будет содержать старший моном индекса $\mathcal{M}_h = h_1, h_2, \ldots, h_n$ и все его делители. Если же мы поставим требованием, чтобы класс $(\mathfrak{M}^*)$ содержал только все кратные мономов семейства $(\mathcal{M}_\alpha)$, то совокупность мономов $(\mathcal{M}_\alpha^*)$ будет состоять, кроме монома $\mathcal{M}_h$, только из тех его делителей, которые сами делятся на мономы семейства $(\mathcal{M}_\alpha)$. Отсюда теорема:

Теорема. *Полное семейство мономов $(\mathcal{M}_\alpha^*)$ содержит старший моном индекса и все его делители, кратные мономам семейства $(\mathcal{M}_\alpha)$.*

Все главные производные одной неизвестной функции определяют семейство мономов $(\mathcal{M}_\alpha)$. Так как умножению монома на переменную x_i соответствует дифференцирование присвоенной ему производной по независимой переменной x_i, то главным производным продолженной системы (S') присвоены мономы, кратные мономам семейства $(\mathcal{M}_\alpha)$. Главные производные, присвоенные мономам класса $(\mathfrak{M})$, получаются при дифференцировании уравнений системы (S) по их переменным-множителям. Получаемая таким образом система (S'') называется *продолженной по множителям*.

Так как каждый моном класса $(\mathfrak{M})$ получается из определённого монома $\mathcal{M}_\alpha$ семейства $(\mathcal{M}_\alpha)$, то и каждая главная производная в уравнениях продолженной системы получится при дифференцировании уравнений (S) по их переменным-множителям и только один раз. Следовательно, доказанное предложение можно высказать ещё так:

Следствие. *Дифференцируя сколько угодно раз дифференциальные уравнения системы по их переменным-множителям, мы не встретим два дифференциальных уравнения с одной и той же главной производной.*

Если система (S) — полная, т. е. обладает полным семейством присвоенных её главным производным мономов, то мы получим таким образом все главные производные продолженной системы.

При дифференцировании полной системы (S) по всем независимым переменным мы получим те же главные производные, но каждая может получиться несколько раз при дифференцировании различных уравнений (S). Такую систему мы обозначали символом (S').

Пример. *Дополнить до полного семейства каждое из двух семейств мономов:*

1) $\mathcal{M} = 1, 1, 1;$

2) $\mathcal{M}_1 = 1, 0, 0;$ $\mathcal{M}_2 = 0, 1, 1,$ $\mathcal{M}_3 = 0, 3, 0.$

Первое семейство состоит из одного монома; тем самым он старший моном индекса, а вместе с тем и единственный моном полного семейства.

Старшим мономом второго семейства является моном

$$\mathcal{M}_h = 1, 3, 1.$$

Следовательно, полное семейство будет содержать

a) кратные монома $\mathcal{M}_1$:

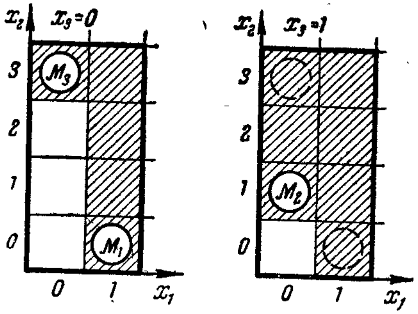
$$1, 1, 0; \quad 1, 2, 0; \quad 1, 3, 0; \quad 1, 0, 1; \quad 1, 1, 1; \quad 1, 2, 1; \quad 1, 3, 1;$$

b) кратные монома $\mathcal{M}_2$, состоящие, кроме того, из мономов

$$0, 2, 1; \quad 0, 3, 1.$$

Кратные монома $\mathcal{M}_3$ уже вошли в предыдущие группы.

На диаграмме Н. Н. Лузина каждый моном изображается буквой $\mathcal{M}_\alpha$ в кружке. Полное семейство содержит все кратные мономов семейства, которые на диаграмме заштрихованы и находятся внутри наименьшего прямоугольного параллелепипеда, заключающего в себе все мономы семейства. В сечениях плоскостями, параллельными основанию, параллелепипед изображается в каждом слое равными прямоугольниками, содержащими все $\mathcal{M}_\alpha$ (в кружке). Множителей имеют только те мономы, которые лежат на внешних границах параллелепипеда (со стороны возрастания переменных x_i), и множителями являются те переменные x_i, возрастание которых соответствует движению от монома $\mathcal{M}_\alpha$ (в кружке) через грань параллелепипеда. На черт. 2 дана диаграмма для второго семейства мономов разобранного выше примера.



Черт. 2.

Дополнительные мономы. Все мономы, которые делят старший моном индекса $\mathcal{M}_h$ и не принадлежат к полному семейству $(\mathcal{M}_\alpha^*)$, называются *дополнительными мономами* $(\mathcal{N})$.

Пример. *Написать дополнительные мономы предыдущего примера.* Первое полное семейство содержит только один старший моном индекса

$$\mathcal{M}_h = 1, 1, 1.$$

Все его делители являются дополнительными мономами

$$0, 1, 1; \quad 0, 0, 1; \quad 0, 1, 0; \quad 0, 0, 0; \quad 1, 0, 1; \quad 1, 0, 0; \quad 1, 1, 0.$$

Второе полное семейство $(\mathcal{M}^*)$ содержит все делители монома

$$\mathcal{M}_h = 1, 3, 1,$$

рые сами делятся на один из мономов $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ или $\mathcal{M}_3$. Дополнитель- мономами являются те делители монома $\mathcal{M}_h$, которые не делятся ни один из этих мономов. Чтобы моном $\mathcal{N}$ не делился на $\mathcal{M}_1$, он должен иметь первый показатель, равный нулю. Чтобы он не делился на $\mathcal{M}_3$, второй показатель должен быть меньше трёх. Наконец, чтобы он не делился на $\mathcal{M}_2$, или второй, или третий показатель должен быть нулём. Отсюда дополнительными мономами будут

$$0,\ 0,\ 0;\quad 0,\ 0,\ 1;\quad 0,\ 1,\ 0;\quad 0,\ 2,\ 0.$$

Определение. Переменная x_i называется переменной-множителем дополнительного монома полного семейства, если её показатель равен индексу переменной x_i семейства. Таким образом определение переменных-множителей для дополнительных мономов совпадает с таким же определением для мономов семейства.

Пример. *Определить множители дополнительных мономов предыдущего примера.*

Первое семейство имеет индекс $H=(1,\ 1,\ 1)$.

Множители дополнительных мономов первого семейства суть:

Дополнительные мономы	0, 1, 1	0, 0, 1	0, 0, 0	1, 0, 1	1, 0, 0	1, 1, 0	0, 1, 0
Множители	x_2, x_3	x_3	.	x_1, x_3	x_1	x_1, x_2	x_3

Второе семейство имеет индекс $\mathrm{H}=(1,\ 3,\ 1)$.

Множители дополнительных мономов второго семейства суть:

Дополнительные мономы	0, 0, 0	0, 0, 1	0, 1, 0	0, 2, 0
Множители		x_3		

На диаграмме Н. Н. Лузина дополнительные мономы остаются свободными клетками внутри прямоугольников, содержащих мономы полного семейства, после вычёркивания мономов $\mathcal{M}_\alpha$ и всех им кратных (заштрихованные клетки, черт. 2). Множителей имеют дополнительные мономы, лежащие на границах прямоугольного параллелепипеда полного семейства со стороны возрастания соответствующих переменных x_i.

Определение. Все мономы, не вошедшие в класс $(\mathfrak{M})$, образуют *дополнительный класс* $(\mathfrak{N})$.

Теорема. *Дополнительный класс* $(\mathfrak{N})$ *содержит все мономы, полученные из дополнительных мономов полного семейства* $(\mathcal{M}^*_\alpha)$ *умножением на их переменные-множители, и каждое такое произведение войдёт в класс* $(\mathfrak{N})$ *только один раз.*

Так как система $(\mathcal{M}^*_\alpha)$ — полная, то каждый моном из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ или входит в (семейство $\mathcal{M}^*_\alpha$), или является дополнительным мономом этого семейства, или делится на один из мономов семейства $(\mathcal{M}^*_\alpha)$, или дополнительного $(\mathcal{N})$.

Действительно, если все показатели произвольного монома

$$\mathcal{M}_c = c_1,\ c_2, \ldots, c_n$$

равны или меньше индекса:

$$c_i \leqslant h_i,$$

то моном $\mathcal{M}_c$ делит старший моном индекса $\mathcal{M}_h$ и, следовательно, принадлежит полному семейству $(\mathcal{M}^*_\alpha)$ или его дополнительному.

Если для некоторых указателей i

$$c_i > h_i,$$

то моном $\mathcal{M}_c$ делится на моном $\mathcal{M}_a = a_1,\ a_2, \ldots, a_n$, определяемый условиями

$$a_i = c_i, \quad \text{если} \quad c_i \leqslant h_i,$$
$$a_j = h_j, \quad \text{если} \quad c_j > h_j.$$

При этом частное от деления $\mathcal{M}_c$ на $\mathcal{M}_a$ будет содержать только переменные x_j, для которых имеет место вторая возможность. Эти переменные входят в моном $\mathcal{M}_a$ с показателем a_i, равным индексу h_i, и, следовательно, являются переменными-множителями монома $\mathcal{M}_a$.

Если вполне определённый нашими условиями образующий моном $\mathcal{M}_a$ принадлежит семейству $(\mathcal{M}^*_\alpha)$, то взятый нами моном $\mathcal{M}_c$ принадлежит классу $(\mathfrak{M}^*)$; если $\mathcal{M}_a$ — дополнительный моном, то моном $\mathcal{M}_c$ не может принадлежать классу $(\mathfrak{M}^*)$, ибо образующие мономы этого класса все принадлежат полному семейству $(\mathcal{M}^*_\alpha)$; поэтому такой моном $\mathcal{M}_c$ должен принадлежать к дополнительному классу $(\mathfrak{N})$.

Таким образом дополнительный класс $(\mathfrak{N})$ разбивается на разряды $(\mathfrak{N}_1)$, $(\mathfrak{N}_2)$, … по их образующим мономам $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$, …

Начальное определение системы. Будем исходить из предположения, что система (S) — полная и продолженная система (S') эквивалентна системе (S''), продолженной по множителям, следовательно, позволяет найти без противоречий начальные значения всех главных производных в точке (x_i^0), если даны значения в этой точке всех параметрических производных (пассивность системы).

Мы видели (стр. 26), что главным производным присвоены мономы класса $(\mathfrak{M})$; следовательно, параметрическим производным присвоены мономы дополнительного класса $(\mathfrak{N})$. Мономы дополнительного класса получаются из своих образующих мономов, т. е. дополнительных мономов полного семейства, умножением на их переменные-множители, а умножению монома на переменную x_i соответствует дифференцирование присвоенной моному производной по независимой переменной x_i.

Следовательно, чтобы получить начальные значения всех параметрических производных, т. е. производных, присвоенных мономам класса $(\mathfrak{N})$, необходимо и достаточно знать производные, присвоенные дополнительным мономам полного семейства в функциях тех переменных, по которым их надо будет дифференцировать, при начальных значениях всех остальных независимых переменных. Начальные значения следует брать из числа координат начальной точки (x_i^0), для которой пишется разложение интегралов в ряд Маклорена. Так как дифференцировать параметрические производные придётся по переменным-множителям присвоенных им мономов, то, сохраняя все оговорки относительно пассивности системы, мы можем высказать предыдущую теорему следующим образом:

Теорема. *Система (S) имеет не более одного решения, удовлетворяющего начальным условиям: производные неизвестных функций, присвоенные дополнительным мономам полного семейства мономов, соответствующего главным производным системы, принимают начальные значения как произвольные (голоморфные) функции своих переменных-множителей для начальных значений переменных-немножителей из числа координат точки* (x_i^0).

Это начальное определение будем называть *начальными условиями* I.

Например, система дифференциальных уравнений, разрешённых относительно производных

$$\frac{\partial^3 z_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}, \quad \frac{\partial z_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial^2 z_2}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad \frac{\partial^3 z_2}{\partial x_2^3},$$

имеет два семейства мономов, рассмотренных в примере на стр. 24, 26. Дополнительные мономы и их множители определены на стр. 27. Следовательно, при оговорках относительно пассивности системы, которые были сделаны в начале этого раздела настоящего параграфа, система имеет не более одного решения, принимающего начальные значения:

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_2 \partial x_3} = \varphi_1(x_2, x_3) \quad \text{для } x_1 = x_1^0; \qquad \frac{\partial z_1}{\partial x_3} = \varphi_4(x_3) \quad \text{для } x_1 = x_1^0,\ x_2 = x_2^0,$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1 \partial x_3} = \varphi_2(x_1, x_3) \quad \text{для } x_2 = x_2^0; \qquad \frac{\partial z_1}{\partial x_2} = \varphi_5(x_2) \quad \text{для } x_1 = x_1^0,\ x_3 = x_3^0,$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1 \partial x_2} = \varphi_3(x_1, x_2) \quad \text{для } x_3 = x_3^0; \qquad \frac{\partial z_1}{\partial x_1} = \varphi_6(x_1) \quad \text{для } x_2 = x_2^0,\ x_3 = x_3^0,$$

$$z_1 = \text{const.} \quad \text{для } x_1 = x_1^0,\ x_2 = x_2^0,\ x_3 = x_3^0,$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial x_3} = \psi(x_3) \quad \text{для } x_1 = x_1^0,\ x_2 = x_2^0,$$

$$z_2 = A, \quad \frac{\partial z_2}{\partial x_2} = B, \quad \frac{\partial^2 z_2}{\partial x_2^2} = C, \quad A,\ B,\ C = \text{const.},$$

$$\text{для } x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad x_3 = x_3^0.$$

Мы увидим в дальнейшем, что эти начальные условия можно представить в значительно более компактном виде.

§ 4. Ортономные системы Рикье

Чтобы высказанная выше теорема имела силу, надо быть уверенным, что продолженная система может быть алгебраически разрешена относительно главных производных. Для системы типа Коши это само собой понятно. В общем случае могут возникнуть трудности, и нам придётся ввести ограничения, чтобы установить те системы уравнений, для которых имеет место теория Рикье. Эти ограничения вызваны также требованием сходимости тех степенных рядов, которые могут быть написаны для каждой неизвестной функции после того, как получены из начальных условий значения в начальной точке $x_i = x_i^0$ всех параметрических производных и определены из продолженной системы значения всех главных производных.

Основанием для выделения круга уравнений, которые мы будем рассматривать, послужит особая классификация производных, которую Рикье устанавливает с помощью своей системы помет.

Каждой независимой переменной $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и каждой неизвестной функции $z_1, z_2, \ldots, z_r$ присваиваем *помету*[1]) в виде целого комплексного числа из произвольного числа m целых неотрицательных компонент (т. е. совокупность m целых, неотрицательных чисел):

$$\text{помета } x_i \sim \mathfrak{a}_i = (1, \mathfrak{a}_2^i, \mathfrak{a}_3^i, \ldots, \mathfrak{a}_m^i),$$

$$\text{помета } z_j \sim \mathfrak{b}_j = (\mathfrak{b}_1^j, \mathfrak{b}_2^j, \ldots, \mathfrak{b}_m^j).$$

Первая компонента пометы всякой независимой переменной равна единице (это ограничение вызывается, как мы увидим, требованием сходимости рядов).

Помета производной равна сумме пометы неизвестной функции и помет независимых переменных, повторённых каждая столько раз, сколько раз встречается дифференцирование по этой переменной:

$$\text{помета } \frac{\partial^{p_1+p_2+\ldots+p_n} z_j}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \ldots \partial x_n^{p_n}} \text{ равна } \mathfrak{g} = \mathfrak{b}_j + p_1 \mathfrak{a}_1 + \ldots + p_n \mathfrak{a}_n.$$

Пример. *Найти пометы производных по заданным пометам независимых переменных и неизвестных функций.*

Пусть дана таблица:

Независимые переменные	Пометы	Неизвестные функции	Пометы
x_1	(1, 1, 0)	z_1	(0, 3, 0)
x_2	(1, 2, 0)	z_2	(2, 1, 1)
x_3	(1, 0, 0)		

---

[1]) Терминология, принятая в тексте, принадлежит Томасу, см. Thomas, Differentialsystems, стр. 7. Сам Рикье говорит об $m+1$ сериях помет.

Тогда получаем таблицу помет производных:

Производные	$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2}$	$\frac{\partial^4 z_1}{\partial x_1^2\,\partial x_3^2}$	$\frac{\partial^4 z_1}{\partial x_1\,\partial x_2^2\,\partial x_3}$	$\frac{\partial^2 z_2}{\partial x_2^2}$	$\frac{\partial^3 z_2}{\partial x_2^3}$
Пометы	(2, 5,0)	(4, 5, 0)	(4, 8, 0)	(4, 5, 1)	(5, 7, 1)

Таким образом, всякое дифференцирование повышает помету производной на помету независимой переменной, по которой производится дифференцирование.

Расположим производные в порядке возрастающих помет и будем говорить, что производная D предшествует производной D', а производная D' следует за D:

$$D \prec D',$$

если помета D' больше пометы D:

$$\mathfrak{g}' > \mathfrak{g}.$$

При этом комплексное число $\mathfrak{g}'$ считается больше числа $\mathfrak{g}$, если первая из неравных нулю разностей

$$(10) \quad \mathfrak{g}_1' - \mathfrak{g}_1 = 0, \quad \mathfrak{g}_2' - \mathfrak{g}_2 = 0, \quad \ldots, \quad \mathfrak{g}_{i-1}' - \mathfrak{g}_{i-1} = 0, \quad \mathfrak{g}_i' - \mathfrak{g}_i > 0$$

положительна. Здесь $\mathfrak{g}_i$, $\mathfrak{g}_i'$ — компоненты помет $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$.

В приведённом примере производные располагаются в ряд

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2} \prec \frac{\partial^4 z_1}{\partial x_1 \partial x_3^2} \prec \frac{\partial^2 z_2}{\partial x_2^2} \prec \frac{\partial^4 z_1}{\partial x_1\,\partial x_2^2\,\partial x_3} \prec \frac{\partial^3 z_2}{\partial x_2^3}.$$

Это определение следования удовлетворяет требованиям:

1) транзитивности —

$$\text{если } D_1 \prec D_2 \text{ и } D_2 \prec D_3, \text{ то } D_1 \prec D_3;$$

2) инвариантности относительно дифференцирования —

$$\text{если } D \prec D', \text{ то } \frac{\partial D}{\partial x} \prec \frac{\partial D'}{\partial x},$$

ибо пометы производных D и D' увеличатся на одну и ту же помету независимой переменной;

3) повышения пометы при дифференцировании —

$$D \prec \frac{\partial D}{\partial x},$$

ибо уже первая из разностей (10) положительна, поскольку первая компонента пометы $\frac{\partial D}{\partial x}$ на единицу больше первой компоненты пометы D.

Определения. Уравнение называется *нормальным*, если помета производной, стоящей в левой части уравнения (главной производной), больше пометы каждой производной или неизвестной функции в правой части. Пометы независимых переменных при этом в расчёт не принимаются.

Система уравнений называется *ортономной* (правильно построенной), если:

1) она разрешена относительно различных производных и правые части уравнений не содержат главных производных,

2) при подходящем выборе помет все уравнения системы становятся нормальными.

Теорема единственности. *Ортономная система имеет не более одной системы интегралов, удовлетворяющих начальным условиям* I:

> *Параметрические производные, присвоенные дополнительным мономам, принимают значения, заданные как произвольные функции своих переменных-множителей, когда переменные-немножители принимают начальные значения из числа координат точки* (x_i^0).

Как мы видели (стр. 29), значения в очке (x_i^0) всех параметрических производных, присвоенных мономам дополнительного класса $(\mathfrak{N})$, могут быть получены дифференцированием этих начальных условий по переменным-множителям, что как раз соответствует процессу образования мономов класса $(\mathfrak{N})$ из дополнительных мономов $(\mathcal{N})$. Остаётся только показать возможность вычисления главных производных из продолженной системы.

Заметим прежде всего, что одновременное дифференцирование двух производных не нарушает неравенства их помет (в силу инвариантности порядка следования производных относительно операции дифференцирования). Поэтому почленное дифференцирование уравнения не нарушает его нормальности. Далее, нормальность уравнения, очевидно, не нарушится, если любую производную в правой части одного уравнения заменить её выражением в виде правой части другого тоже нормального уравнения, ибо при этом пометы производных в правой части не повысятся. Отсюда прямо следует, что все *уравнения продолженной системы будут нормальны.*

Распределим теперь все уравнения продолженной по множителям системы (S'') на группы по величине помет их главных производных. При продолжении по множителям в левых частях не будет двух одинаковых производных. Так как уравнения каждой группы содержат в своих правых частях производные, предшествующие производным в левой части, то, кроме параметрических,

[illegible] — может Рикье
[illegible] А как [illegible]

здесь могут быть главные производные только из предыдущих групп, если их расположить в порядке возрастания помет. Вычисляя шаг за шагом главные производные каждой группы, мы никогда не встретим затруднения и можем вычислить их все. Отсюда следует: если существует система интегралов, удовлетворяющих начальным условиям, то коэффициенты разложения их могут быть вычислены единственным способом. Значит, такая система единственная, что и доказывает теорему.

§ 5. Теория мономов Жане

Абсолютно полное семейство Томасе, как он сам замечает, содержит слишком много мономов. В сущности необходимо только, чтобы все мономы, кратные мономам заданного семейства, и каждый моном только один раз, получались умножением своего образующего монома из полного семейства на его переменные-множители. Для этого можно взять гораздо более узкое семейство, если ввести произвольную, но определённо выбранную нумерацию переменных x_i. При этом и начальное определение интеграла становится более компактным, и исследование пассивности системы требует поверки меньшего числа тождеств.

Итак, условимся в определённом порядке переменных x_i, который закреплён их нумерацией $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Будем называть *рангом монома* $\mathcal{M}_a = a_1, a_2, \ldots, a_n$ целое комплексное число с n компонентами из расположенных в *обратном* порядке показателей:

$$a = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1).$$

Будем считать ранг $a = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)$ больше чем ранг $b = (b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1)$, если первая из неравных нулю разностей

$$a_n - b_n = 0, \quad a_{n-1} - b_{n-1} = 0, \ldots, a_{i+1} - b_{i+1} = 0, \quad a_i - b_i > 0$$

положительна.

Располагаем мономы заданного семейства $(\mathcal{M}_a)$ в порядке убывающего ранга. Тогда рядом стоящие мономы образуют *группы*

$$[a^i] = [a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n]$$

с одинаковыми $n - i$ старшими показателями.

С каждой группой $[a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n]$ для переменной x_i связывается два числа: наибольшее и наименьшее значения показателя a_i при переменной x_i среди мономов группы; мы будем называть их *верхним* $h^i_{[a]}$ и *нижним* $k^i_{[a]}$ *индексами* переменной x_i относительно группы.

Для переменной x_n индексы $h^n_{[a]} = h_n$ и $k^n_{[a]} = k_n$ определяются относительно всего семейства $(\mathcal{M}_\alpha)$; следовательно, h_n совпадает с абсолютным индексом Томаса. Для других переменных абсолютные индексы h_i, k_i удовлетворяют неравенствам

$$k_i \leqslant k^i_{[a]} \leqslant h^i_{[a]} \leqslant h_i.$$

Если мономы группы $[a^i]$ не содержат переменную x_i, то оба индекса равны нулю. Если группы $[a^i]$ пустая, т. е. в семействе $(\mathcal{M}_a)$ нет ни одного монома с показателями $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n$ группы, то будем считать $h^i_{[a]} = 0$, $k^i_{[a]} = 1$.

Разделение переменных на переменные-множители и переменные-немножители для монома $\mathcal{M}_a$ совершается на прежних основаниях: переменная x_i называется переменной-множителем группы $[a^i]$, которой принадлежит моном $\mathcal{M}_a$, а вместе с тем и переменной-множителем (Жане) монома $\mathcal{M}_a$, если показатель a_i при x_i равен верхнему индексу $h^i_{[a]}$ переменной относительно группы; если $a_i < h^i_{[a]}$, то x_i называется переменной-немножителем.

Пример. *Определить переменные-множители мономов семейства*

$$\mathcal{M}_1 = 0, 1, 1; \quad \mathcal{M}_2 = 0, 3, 0; \quad \mathcal{M}_3 = 1, 0, 0.$$

Мономы расположены в порядке убывающего ранга. Переменная x_3 является переменной-множителем только для монома $\mathcal{M}_1$ с показателем при x_3, равным абсолютному индексу $h_3 = 1$. Относительно x_2 мономы семейства разбиваются на две группы:

$$[1]: \ \mathcal{M}_1 = 0, 1, 1; \quad [0]: \ \mathcal{M}_2 = 0, 3, 0,$$
$$\mathcal{M}_3 = 1, 0, 0.$$

В первой группе индекс равен $h^2_{[1]} = 1$, во второй — $h^2_{[0]} = 3$; переменная x_2 является переменной-множителем мономов $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$.

Относительно x_1 мономы разбиваются на три группы по одному моному в каждой:

$$[1,1]: \ \mathcal{M}_1 = 0, 1, 1; \quad [3,0]: \ \mathcal{M}_2 = 0, 3, 0; \quad [0,0]: \ \mathcal{M}_3 = 1, 0, 0.$$

В каждом мономе x_1 есть переменная-множитель.

Полное семейство мономов. Будем попрежнему называть классом $(\mathfrak{M})$ совокупность мономов, получаемых умножением мономов семейства $(\mathcal{M}_\alpha)$ на их переменные множители (Жане).

Семейство $(\mathcal{M}_\alpha)$ называется *полным семейством* Жане, если все кратные мономов семейства принадлежат классу $(\mathfrak{M})$.

Отсюда следует, что произведение любого монома полного семейства на какую угодно его переменную-немножитель принадлежит классу $(\mathfrak{M})$, т. е. или принадлежит самому семейству $(\mathcal{M}_\alpha)$, или может быть получено умножением одного из мономов семейства на его переменные-множители.

Полное семейство Жане составляет часть абсолютно полного семейства Томаса или совпадает с ним. Действительно, абсолютный индекс Томаса h_i не меньше индекса $h^i_{[a]}$ относительно группы $[a^i]$. Следовательно, каждая переменная-множитель по Томасу будет множителем и по Жане, но не наоборот. Значит, абсолютно полное семейство Томаса удовлетворяет требованиям полноты Жане, но может содержать лишние мономы, а именно — все те, которые получаются из мономов семейства $(\mathcal{M}_\alpha)$ или из присоединённых мономов при дополнении семейства умножением на те переменные, которые были немножителями в теории Томаса и являются множителями в теории Жане. Мы будем обозначать полное семейство Жане знаком $(\mathcal{M}^{\#}_\alpha)$ в отличие от абсолютно полного семейства $(\mathcal{M}^{*}_\alpha)$.

Сокращение лишних мономов абсолютно полного семейства $(\mathcal{M}^{*}_\alpha)$ можно произвести последовательным повторением одной операции: если мономы

$$\mathcal{M}_c = c_1, c_2, \ldots, c_n \text{ и } \mathcal{M}'_c = c_1, \ldots, c_{i-1}, c_i - 1, c_{i+1}, \ldots, c_n$$

содержатся в семействе $(\mathcal{M}^{*}_\alpha)$ и $\mathcal{M}_c$ не принадлежит заданному семейству $(\mathcal{M}_\alpha)$, а показатель степени c_i при переменной x_i больше индекса $h^i_{[c]}$ этой переменной в группе мономов $[c_{i+1}, c_{i+2}, \ldots, c_n]$ семейства $(\mathcal{M}_\alpha)$, то моном $\mathcal{M}_c$ можно сократить на x_i, т. е. можно вычеркнуть его из полного семейства, сохранив моном $\mathcal{M}'_c$, из которого он получается умножением на его переменную-множитель x_i.

Эту методу построения полного семейства Жане будем называть *вычёркиванием мономов по переменным-множителям*. Получаемое после всех сокращений семейство $(\mathcal{M}^{*}_\alpha)$ действительно является полным семейством Жане, что следует из теоремы:

Теорема. *Всякий моном абсолютно полного семейства $(\mathcal{M}^{*}_\alpha)$ принадлежит семейству $(\mathcal{M}^{\#}_\alpha)$ или получается из одного определённого монома этого семейства умножением на его переменные-множители.*

Действительно, сокращая последовательно любой моном $\mathcal{M}_c$ семейства $(\mathcal{M}^{*}_\alpha)$ на переменные $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1$, мы придём к моному $\mathcal{M}_a$, определяемому формулами

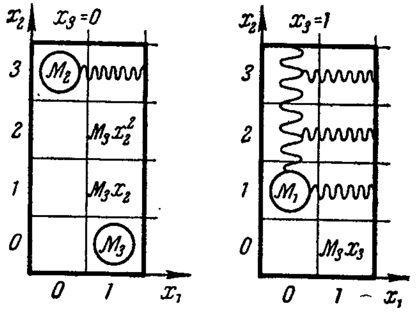
$$\begin{aligned} a_i &= c_i, && \text{если } c_i \leqslant h^i_{[c]}, \\ a_i &= h^i_{[c]}, && \text{если } c_i > h^i_{[c]}, \end{aligned} \tag{11}$$

где $h^i_{[c]}$, как всегда, — верхний индекс переменной x_i в группе мономов $[c^i]$ семейства $(\mathcal{M}_\alpha)$. Только в случае $c_i > h^i_{[c]}$ придётся умножить $\mathcal{M}_a$ на переменную x_i в степени $c_i - h^i_{[c]}$, но в этом случае в мономе $\mathcal{M}_a$ переменная x_i имеет показателем верхний индекс $h^i_{[c]}$ и, следовательно, является его переменной-множителем.

В диаграмме Н. Н. Лузина полное семейство Жане получается из абсолютно полного вычёркиванием мономов по переменным-множителям.

Для старшей переменной x_3 в предыдущем примере множителями Жане могут быть только множители Томаса; следовательно, сокращения мономов не произойдёт. На черт. 3 вычёркивание мономов обозначено волнистой чертой в направлении переменной-множителя (сначала x_2, потом x_1). Полное семейство Жане содержит, кроме мономов семейства $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$, ещё три монома, обозначенных записью их формул $\mathcal{M}_3 \cdot x_3$, $\mathcal{M}_3 \cdot x_2$, $\mathcal{M}_3 \cdot x_2^2$.

Теорема. *Произведение любого монома $\mathcal{M}_b$ полного семейства $(\mathcal{M}^{\#}_\alpha)$ на произвольную переменную-немножитель равно произведению одного определённого монома $\mathcal{M}_a$ этого семейства только на его переменные-множители. При этом ранг монома $\mathcal{M}_a$ больше ранга монома $\mathcal{M}_b$.*



Черт. 3.

Теорема прямо вытекает из предыдущей. Действительно, произведение любого монома $\mathcal{M}_b$ на его переменную-немножитель x_e не выйдет за пределы абсолютно полного семейства $(\mathcal{M}^{*}_\alpha)$, ибо показатель степени переменной-немножителя меньше верхнего индекса $h^e_{[b]}$, и, значит, произведение $\mathcal{M}_b \cdot x_e = \mathcal{M}_c$ содержит x_e в степени, не большей абсолютного индекса h_e, а потому принадлежит семейству $(\mathcal{M}^{*}_\alpha)$. Каждый такой моном, как мы видели, или принадлежит семейству $(\mathcal{M}^{\#}_\alpha)$ или получается умножением одного определённого монома $\mathcal{M}_a$ этого семейства на произведение только из его переменных-множителей λ:

$$\mathcal{M}_b \cdot x_e = \mathcal{M}_a \cdot \lambda. \tag{12}$$

Мы будем называть это равенство *формулой сравнения мономов*.

Остаётся доказать неравенство рангов.

Обозначим через $h^i_{[a]}$ и $h^i_{[b]}$ верхние индексы переменной x_i в группах $[a^i] = [a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n]$ и $[b^i] = [b_{i+1}, b_{i+2}, \ldots, b_n]$.

Моном $\mathcal{M}_a$, образующий монома $\mathcal{M}_c = \mathcal{M}_b x_e$, определяется формулами (11). Мономы $\mathcal{M}_b$ и $\mathcal{M}_c$ связаны формулами

$$\begin{aligned} c_i &= b_i, && \text{если } i \neq e, \\ c_e &= b_e + 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при равенстве индексов $h^i_{[a]} = h^i_{[b]} = h^i$ показатели a_i и b_i равны друг другу, если $i \neq e$, ибо, поскольку $b_i \leqslant h^i$, то и $c_i = b_i \leqslant h^i$, а тогда a_i равно c_i и, следовательно, равно b_i. Если же $i = e$, то $c_e = b_e + 1$, и, поскольку x_e для монома $\mathcal{M}_b$ есть переменная-немножитель, его показатель b_e меньше индекса h^e; следовательно, $a_e = c_e = b_e + 1$, т. е. a_e больше чем b_e.

Так как для $i = n$ оба индекса $h^i_{[a]}$ и $h^i_{[b]}$ совпадают с абсолютным индексом h_i, то во всяком случае $a_n \geqslant b_n$. Если же

$$a_n = b_n, \quad a_{n-1} = b_{n-1}, \ldots, a_{i+1} = b_{i+1},$$

то обе группы совпадают:

$$[a_{i+1}, \ldots, a_n] \equiv [b_{i+1}, \ldots, b_n],$$

индексы равны:

$$h^i_{[a]} = h^i_{[b]},$$

и мы получим:

$$a_i \geqslant b_i.$$

Значит, первая из неравных нулю разностей $a_i - b_i$ будет положительна, откуда и следует, что ранг монома $\mathcal{M}_a$ больше ранга монома $\mathcal{M}_b$.

Правило дополнения семейства. Для построения полного семейства мономов $(\mathcal{M}^{\#}_{\alpha})$ можно указать регулярный процесс присоединения мономов к семейству $(\mathcal{M}_{\alpha})$:

1. Расположив мономы данного семейства $(\mathcal{M}_{\alpha})$ в порядке убывающего ранга, разбиваем их на группы

$$[k_n], \quad [k_n + 1], \quad \ldots, \quad [h_n]$$

от нижнего k_n до верхнего h_n индекса переменной x_n.

Все мономы группы $[k_n]$ умножаем на x_n. Будем называть среди полученных произведений независимыми те, которые не делятся на другие произведения этой группы или на мономы следующей группы $[k_n + 1]$. Все независимые произведения присоединяем к группе $[k_n + 1]$. Умножаем мономы пополненной группы $[k_n + 1]$ на x_n и произведения, независимые между собой и от мономов следующей группы $[k_n + 2]$, присоединяем к группе $[k_n + 2]$. Таким образом по очереди пополняем все группы до последней $[h_n]$.

2. Разбиваем группу $[k_n]$ на подгруппы

$$[k, k_n], \quad [k + 1, k_n], \quad \ldots, \quad [h, k_n],$$

где

$$k = k^{n-1}_{[k_n]}, \; h = h^{n-1}_{[k_n]}.$$

Умножаем мономы первой подгруппы на x_{n-1} и независимые произведения присоединяем ко второй, мономы пополненной второй подгруппы умножаем на x_{n-1} и независимые произведения присоединяем к третьей и т. д., пока не исчерпаем все подгруппы. Повторяем этот процесс для каждой группы $[k_n + 1]$, $[k_n + 2]$, ..., $[h_n]$.

3. Разбиваем каждую из полученных после пополнения подгрупп на новые подгруппы по переменной x_{n-2}, умножаем мономы каждо

из новых подгрупп, начиная с низшей, на x_{n-2} и независимые произведения присоединяем к следующей подгруппе.

Повторяем этот процесс, пока исчерпаем все переменные до x_1 включительно.

Нетрудно заметить, что описанный выше процесс обеспечивает в каждой группе мономов $[a_{i+1}, a_{i+2}, \cdots, a_n]$ пополненной системы наличие всех тех кратных мономам семейства $(\mathcal{M}_{\alpha})$, которые не делятся на другие мономы этой группы, в частности, наличие в ней всех мономов абсолютно полного семейства $(\overset{*}{\mathcal{M}}_{\alpha})$, показатели которых для переменных $x_1, x_2, \ldots, x_i$ равны нижним индексам этих переменных (для каждой переменной относительно её группы). Мономы с верхними индексами войдут сами собой, ибо они всегда принадлежат семейству $(\mathcal{M}_{\alpha})$. Действительно, чтобы переменная x_i имела в группе $[a^i]$ верхний индекс $h^i_{[a]}$, необходимо, чтобы в семействе $(\mathcal{M}_{\alpha})$ подгруппа $[h_i, a_{i+1}, \cdots, a_n]$ не была пустая. Вместе с тем пополненное семейство будет содержать все промежуточные степени каждой переменной x_i, ибо после пополнения ни одна подгруппа не останется пустой.

Пример. *Дополнить группу мономов*

$$\mathcal{M}_1 = 0, 1, 1; \quad \mathcal{M}_2 = 0, 3, 0; \quad \mathcal{M}_3 = 1, 0, 0$$

до полного семейства (Жане).

Мономы расположены в порядке убывающего ранга. Относительно переменной x_3 они разбиваются на две группы:

$$\begin{array}{ll} [1]: \quad \mathcal{M}_1 = 0, 1, 1, & [0]: \quad \mathcal{M}_2 = 0, 3, 0, \\ \mathcal{M}_3 \cdot x_3 = \mathit{1, 0, 1}; & \mathcal{M}_3 = 1, 0, 0. \end{array}$$

В первую группу вносится только произведение $\mathcal{M}_3 \cdot x_3$, напечатанное курсивом; произведение $\mathcal{M}_2 \cdot x_3$ опущено, ибо делится на $\mathcal{M}_1$.

Относительно переменной x_2 группа $[0]$ разбивается на четыре подгруппы, из которых две пустые:

$$\begin{array}{llll} [3, 0]: \mathcal{M}_2 = 0, 3, 0; & [2, 0]: & [1, 0]: & [0, 0]: \mathcal{M}_3 = 1, 0, 0. \\ & \mathcal{M}_3 \cdot x_2^2 = \mathit{1, 2, 0}; & \mathcal{M}_3 \cdot x_2 = \mathit{1, 1, 0}; & \end{array}$$

Пустые подгруппы пополняем произведениями $\mathcal{M}_3 \cdot x_2$, $\mathcal{M}_3 \cdot x_2^2$; произведение $\mathcal{M}_3 \cdot x_2^3 = 1, 3, 0$ опущено, ибо делится на $\mathcal{M}_2$.

Группа $[1]$ относительно x_2 разбивается на две подгруппы:

$$[1, 1]: \; \mathcal{M}_1 = 0, 1, 1; \; [0, 1]: \; \mathcal{M}_3 \cdot x_3 = 1, 0, 1.$$

Дополнять первую из них не надо, ибо произведение $(1, 0, 1) \cdot x_2 = 1, 1, 1$ делится на $\mathcal{M}_1$.

Относительно переменной x_1 дополнять все полученные подгруппы не надо, ибо каждая подгруппа содержит только один моном.

Таким образом полное семейство содержит шесть мономов:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M}_1 = 0, 1, 1; & \mathcal{M}_2 = 0, 3, 0; & \mathcal{M}_3 \cdot x_2 = \mathit{1, 1, 0}, \\ \mathcal{M}_3 \cdot x_3 = \mathit{1, 0, 1}; & \mathcal{M}_3 \cdot x_2^2 = \mathit{1, 2, 0}; & \mathcal{M}_3 = 1, 0, 0, \end{array}$$

Дополнительные мономы. Мономы, не вошедшие в класс мономов $(\mathfrak{M})$, образуют дополнительный класс $(\mathfrak{N})$. Те мономы $(\mathcal{N})$, из которых образуется весь класс $(\mathfrak{N})$ посредством умножения на их переменные-множители, называются дополнительными мономами семейства $(\mathcal{M}_\alpha)$.

При этом разделение переменных на переменные-множители и переменные-немножители для дополнительного монома $\mathcal{N}$ производится так, как если бы этот моном принадлежал семейству $(\mathcal{M}_\alpha)$ или построенному для него полному семейству $(\mathcal{M}_\alpha^{\#})$.

Определение. Переменная x_i называется переменной-множителем дополнительного монома $\mathcal{N}$, если показатель степени a_i при переменной x_i в этом мономе не меньше верхнего индекса $h^i_{[a]}$ этой переменной относительно группы мономов $[a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n]$ семейства $(\mathcal{M}_\alpha)$.

Так как класс $(\mathfrak{M})$ состоит только из кратных мономам семейства $(\mathcal{M}_\alpha)$, то дополнительные мономы $(\mathcal{N})$ не должны делиться ни на один моном семейства $(\mathcal{M}_\alpha)$. Следовательно, хотя один показатель a_i при какой-нибудь переменной x_i дополнительного монома должен быть меньше нижнего индекса $k^i_{[a]}$ этой переменной в группе мономов $[a_{i+1}, \ldots, a_n]$.

При $a_i < k^i_{[a]}$ группа мономов $[a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n]$ в семействе $[\mathcal{M}_\alpha]$ — пустая, ибо каждый моном группы $[a^i]$ должен содержать переменную x_i в степени не ниже $k^i_{[a]}$. Поэтому для всех переменных x_j с указателем j меньшим, чем i, поскольку каждая подгруппа $[a^j]$ $(j = 1, 2, \ldots, i-1)$ из этой группы $[a^{i-1}]$ тоже пустая, верхние индексы $h^j_{[a]}$ считаются равными нулю. Все эти переменные, согласно определению, будут переменными-множителями рассматриваемого дополнительного монома, какую бы степень x_j ему ни приписывать. Так как все такие мономы получаются посредством умножения на переменные-множители из одного монома, содержащего каждую из переменных в нулевой степени, то этот моном и надо сохранить в качестве дополнительного монома. Отсюда вытекает следующий *способ построения дополнительных мономов*. Дополнительные мономы распределяются на n групп по числу n переменных x_i:

1. Для переменной x_n дополнительные мономы $\mathcal{N}^n$ состоят из k_n степеней x_n от нулевой до $(k_n - 1)$-й:

$$\mathcal{N}^n:\quad 1,\ x_n,\ x_n^2,\ \ldots,\ x_n^{k_n-1},$$

где k_n — нижний индекс переменной. Они имеют множителями все переменные, кроме x_n. Если $k_n = 0$, то эта группа дополнительных мономов будет пустой.

2. Для переменной x_{n-1} составляем группы мономов $[\alpha_n]$ из семейства $(\mathcal{M}_\alpha^{\#})$, где α_n меняется от нижнего индекса $k = k_n$ до верхнего $h = h_n$ старшей переменной x_n. Определяем индексы $k^{n-1}_{[k]}$, $k^{n-1}_{[k+1]}, \ldots, k^{n-1}_{[h]}$ переменной x_{n-1} в каждой группе $[\alpha^{n-1}]$. Дополнительные мономы образованы умножением степеней $x_n^{\alpha_n}$ переменной x_n на все степени x_{n-1} от нулевой до $(k' - 1)$-й, если $k' = k^{n-1}_{[\alpha_n]}$:

$$\mathcal{N}^{n-1}_{[\alpha_n]}:\quad x_n^{\alpha_n},\ x_{n-1}x_n^{\alpha_n},\ \ldots,\ x_{n-1}^{k'-1}x_n^{\alpha_n}.$$

Множителями служат переменные $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$ и переменная x_n, последняя — только для дополнительных мономов $\mathcal{N}^{n-1}_{[h]}$.

3. Для переменной x_i составляем все возможные группы мономов $[\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \ldots, \alpha_n]$, которые содержатся в семействе $(\mathcal{M}_\alpha^{\#})$. Определяем нижние индексы $k^i_{[\alpha]}$ переменной x_i в каждой группе $[\alpha^i]$. Дополнительные мономы для каждой группы $[\alpha^i] = [\alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n]$ состоят из произведений

$$\mathcal{N}^i_{[\alpha]}:\quad x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \cdot x_{i+2}^{\alpha_{i+2}} \ldots x_n^{\alpha_n},\quad x_i \cdot x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \ldots x_n^{\alpha n},$$
$$\ldots,\ x_i^{k'-1} \cdot x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \ldots x_n^{\alpha_n},\qquad k' = k^i_{[\alpha]}.$$

Множителями служат все переменные x_j, где $j < i$, а также все те переменные x_λ, у которых показатель α_λ равен верхнему индексу $h^\lambda_{[\alpha]}$.

Пример. *Написать дополнительные мономы и указать их множители для полного семейства* $(\mathcal{M}_\alpha^{\#})$:

$$\mathcal{M}_1 = 0,\ 1,\ 1;\qquad \mathcal{M}_2 = 0,\ 3,\ 0;\quad \mathcal{M}_3 \cdot x_2 = 1,\ 1,\ 0,$$
$$\mathcal{M}_3 \cdot x_3 = 1,\ 0,\ 1;\quad \mathcal{M}_3 \cdot x_2^2 = 1,\ 2,\ 0;\qquad \mathcal{M}_3 = 1,\ 0,\ 0.$$

Нижний индекс k_3 равен нулю; следовательно, дополнительных мономов $\mathcal{N}^3$ нет.

В обеих группах [1] и [0] нижние индексы $k^2_{[1]}$ и $k^2_{[0]}$ равны нулю; дополнительных мономов $\mathcal{N}^2$ нет.

Из групп $[\alpha_2, \alpha_3]$ в двух — [1, 1] и [3, 0] — нижние индексы $k^1_{[\alpha]}$ равны нулю, в остальных — равны еднице. Для этих последних групп дополнительные моиомы существуют, а именно:

$$\mathcal{N}^1_{[0,\ 1]} = x_3,\quad \mathcal{N}^1_{[2,\ 0]} = x_2^2,\quad \mathcal{N}^1_{[1,\ 0]} = x_2,\quad \mathcal{N}^1_{[0,\ 0]} = 1.$$

Так как дополнительные мономы строятся для переменной x_1, первой в ряду переменных, то переменными-множителями для дополнительных мономов могут быть только переменные-множители для соответствующих групп $[\alpha_2, \alpha_3]$. Это будет только x_3 для монома $\mathcal{N}^1_{[0,\ 1]}$.

Теорема. *Все мономы дополнительного класса $(\mathfrak{N})$ разбиваются на разряды $\mathfrak{N}^i_{[\beta]}$ так, что мономы каждого разряда $\mathfrak{N}^i_{[\beta]}$ получаются из образующего монома $\mathcal{N}^i_{[\beta]}$, и только из него одного, умножением на его переменные-множители.*

Возьмём произвольный моном $\mathcal{N}_c = c_1, c_2, \ldots, c_n$ класса $(\mathfrak{N})$. Если c_n меньше нижнего индекса k_n переменной x_n, то имеется дополнительный моном

$$\mathcal{N}^n = x_n^{c_n},$$

для которого все переменные, кроме x_n, являются переменными-множителями. Этот моном и будет образующим для монома $\mathcal{N}_c$, ибо отношение $\mathcal{N}_c : \mathcal{N}^n$ содержит только переменные-множители делителя. Если $c_n \geqslant k_n$, то берём группу мономов $[a_n]$ семейства $(\mathcal{M}_\alpha^\#)$, где

$$a_n = c_n, \quad \text{если} \quad c_n \leqslant h_n,$$
$$a_n = h_n, \quad \text{если} \quad c_n > h_n,$$

и повторяем рассуждения, заменив семейство $(\mathcal{M}_\alpha^\#)$ группой мономов $[a_n]$ и переменную x_n переменной x_{n-1}.

Допустим сразу, что для всякого указателя $j = i+1, i+2, \ldots, n$ показатель c_j при переменной x_j не меньше нижнего индекса $k_{[a]}^j$ относительно группы $[a_{j+1}, \ldots, a_n]$ семейства $(\mathcal{M}_\alpha^\#)$, где каждый из показателей $a_{j+1}, \ldots, a_n$ определяется формулами

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} a_l &= c_l, \quad \text{если} \quad c_l \leqslant h_{[a]}^l, \\ a_l &= h_{[a]}^l, \quad \text{если} \quad c_l > h_{[a]}^l, \end{aligned} \qquad l = j+1, \ldots, n.$$

Если $c_i \geqslant k_{[a]}^i$ для $i = n, n-1, \ldots, 2, 1$, то формулы (a) определят единственный моном $\mathcal{M}_a$, который делит моном $\mathcal{N}_c$ и в то же время принадлежит семейству $(\mathcal{M}_\alpha^\#)$; моном $\mathcal{N}_c$ будет, следовательно, принадлежать классу $(\mathfrak{M})$ вопреки предположению, что он принадлежит дополнительному классу $(\mathfrak{N})$.

Если же существует наибольший указатель i, для которого $c_i < k_{[a]}^i$, то найдётся дополнительный моном

$$\mathcal{N}_{[a]}^i = x_i^{c_i} x_{i+1}^{a_{i+1}} \ldots x_n^{a_n} = 0, 0, \ldots, 0, c_i, a_{i+1}, \ldots, a_n,$$

который делит моном $\mathcal{N}_c$ так, что частное $\mathcal{N}_c : \mathcal{N}_{[a]}^i$ может содержать только:

1) те переменные x_j, где $j < i$, каждая из которых тем самым есть переменная-множитель для монома $\mathcal{N}_{[a]}^i$, и

2) те из переменных x_j, где $j > i$ и для которых в мономе $\mathcal{N}_c$ показатель степени $c_j > a_j$, а для них по формулам (a) показатель a_j равен $h_{[a]}^j$, и переменная x_j есть переменная-множитель.

Следовательно,

$$\mathcal{N}_c = \mathcal{N}_{[a]}^i \cdot \lambda,$$

где λ — произведение только из переменных-множителей монома $\mathcal{N}_{[a]}^i$, и теорема доказана.

Следствие. *Теорема (§ 4) о единственности системы интегралов ортономной системы сохраняет силу, если при определении начальных условий дополнительные мономы и их переменные-множители определять по формулам Жане.*

Эти начальные условия мы будем называть *начальными условиями* II в отличие от начальных условий I, которые писались для дополнительных мономов Томаса. Те и другие начальные условия равносильны заданию значений в начальной точке всех параметрических производных, а потому новые условия II отличаются от прежних I только более компактной формой.

§ 6. Пассивные системы

Система уравнений (S) называется *пассивной*, если вся продолженная система (S') алгебраически эквивалентна системе (S''), полученной из системы (S) продолжением только по множителям, безразлично Томаса или Жане. Следовательно, система пассивна, если, дифференцируя уравнения системы (S) по любым переменным и исключая главные производные с помощью уравнений системы (S''), мы не получим нового соотношения на параметрические производные.

Пользуясь этим определением, можно основную теорему во всей теории Рикье формулировать так:

Теорема существования. *Ортономная пассивная система дифференциальных уравнений имеет систему интегралов и только одну, удовлетворяющую начальным условиям* I *или* II.

То определение пассивности системы, которое приведено выше, требует поверки всех уравнений системы (S'), не вошедших в систему (S''). Чтобы можно было пользоваться основной теоремой, надо иметь необходимое и достаточное условие пассивности в виде поверки конечного и, по возможности, небольшого числа тождеств. Нам удобно будет вести доказательство основной теоремы одновременно с доказательством достаточности того признака пассивности, который мы сейчас будем формулировать.

Пусть нам дана ортономная система (S). Будем обозначать символом $(\mathcal{M}_{j,\alpha})$ семейство мономов, присвоенных главным производным от неизвестной функции z_j. Дополним каждое семейство $(\mathcal{M}_{j,\alpha})$ до полного семейства Жане $(\mathcal{M}_{j,\alpha}^\#)$ и присоединим к системе (S) те уравнения продолженной системы (S'), главные производные которых соответствуют мономам семейств $(\mathcal{M}_{j,\alpha}^\#)$. Будем называть полученную систему *полной* и обозначать символом $(S^\#)$.

В теореме на стр. 37 мы формулировали условие полноты семейства $(\mathcal{M}_\alpha^\#)$ в виде ряда тождеств (12):

$$\mathcal{M}_b \cdot x_e = \mathcal{M}_a \cdot \lambda,$$

справедливых для любого монома $\mathcal{M}_b$ полного семейства $(\mathcal{M}_\alpha^\#)$ и всякой его переменной-немножителя x_e при подходящем выборе соответствующего монома $\mathscr{M}_a$ того же семейства и произведения $\lambda = \bar{x}_1^{p_1}\bar{x}_2^{p_2} \dots \bar{x}_m^{p_m}$ из его переменных-множителей. Это условие позволит нам высказать необходимое, а затем и достаточное условие пассивности.

Перенесём в каждом уравнении системы ($S\#$) все члены в левую часть и обозначим через $\mathscr{E}_a^j$ левую часть того уравнения, главная производная которого берётся от неизвестной функции z_j и имеет своим мономом $\mathscr{M}_a = a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$\mathscr{E}_a^j = \frac{\partial^{a_1+a_2+\dots+a_n} z_j}{\partial x_1^{a_1}\partial x_2^{a_2}\dots\partial x_n^{a_n}} - \Phi_{j,\,a}\left(x_i,\ z_k;\ \frac{\partial z_k}{\partial x_i}, \dots\right). \tag{13}$$

Присвоим уравнению $\mathscr{E}_a^j = 0$ помету её главной производной, её моном и переменные-множители.

Составим разность производных, соответствующую какому-нибудь из тождеств (12):

$$\frac{\partial \mathscr{E}_b^j}{\partial x_e} - \frac{\partial \mathscr{E}_a^j}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{\partial^{p_1+p_2+\dots+p_m}}{\partial \bar{x}_1^{p_1}\,\partial \bar{x}_2^{p_2} \dots \partial \bar{x}_m^{p_m}}. \tag{14}$$

Эта разность не будет содержать главных производных уменьшаемого и вычитаемого, ибо в силу равенства (12) они имеют один и тот же моном, берутся от одной неизвестной функции z_j и, следовательно, при вычитании взаимно уничтожаются. Если система (S) пассивна, то уравнение

$$\frac{\partial \mathscr{E}_b^j}{\partial x_e} - \frac{\partial \mathscr{E}_a^j}{\partial \lambda} = 0,$$

как разность двух уравнений системы (S'), должно быть алгебраическим следствием продолженной по множителям системы (S''). Иначе говоря, после исключения главных производных, которые могли появиться при дифференцировании функций $\Phi_{j,\,b}$ по переменной x_e и $\Phi_{j,\,a}$ по переменным произведения λ, с помощью уравнений системы (S''), разность (14) должна обратиться в нуль тождественно относительно параметрических производных и независимых переменных.

Признак пассивности. Теорема. *Для пассивности ортономной системы (S) необходимо и достаточно, чтобы для каждого уравнения $\mathscr{E}_b^j = 0$ её полной системы ($S\#$) и каждой его переменной-немножителя x_e уравнение*

$$\frac{\partial \mathscr{E}_b^j}{\partial x_e} - \frac{\partial \mathscr{E}_a^j}{\partial \lambda} = 0 \tag{15}$$

было алгебраическим следствием продолженной по множителям системы (S''); уравнение $\mathscr{E}_a^j = 0$ и его переменные-множители λ выбираются согласно тождеству (12), имеющему место в силу полноты системы.

Доказательство достаточности этого признака пассивности и теоремы существования Рикье проводится одновременно и распадается на две самостоятельные части:

1. По теореме единственности (стр. 33 или следствие на стр. 43) ортономная система (S) имеет не более одной системы интегралов, удовлетворяющих начальным условиям I или II. Эти интегралы мы можем написать в виде бесконечных степенных рядов. Чтобы можно было говорить о существовании интегралов, надо доказать сходимость этих разложений. Это мы сделаем в § 8.

2. После того как будет доказана сходимость построенных рядов, мы можем говорить о функциях z_j, определяемых этими рядами. По самому построению они удовлетворяют начальным условиям, а также в начальной точке (x_i^0) всем уравнениям продолженной по множителям системы (S'') или, что то же, удовлетворяют всем уравнениям системы ($S\#$) для произвольных значений каждой переменной-множителя этого уравнения, если переменным-немножителям дать постоянные значения из числа координат начальной точки (x_i^0).

Надо доказать, что при выполнении условия (15) эти функции z_j удовлетворяют уравнениям системы ($S\#$) при любых значениях всех независимых переменных. Тем самым будет доказано существование системы интегралов, т. е. основная теорема Рикье, и вместе с тем пассивность системы, т. е. достаточность выставленного признака пассивности. Действительно, коэффициенты в разложениях функций z_j определялись из уравнений системы (S''), если туда внести координаты начальной точки (x_i^0) и полученные уравнения алгебраически разрешить относительно главных производных. Теперь они будут удовлетворять уравнениям системы (S) при всех значениях переменных (x_i), а следовательно, удовлетворять и всем уравнениям продолженной системы (S'). Таким образом система (S') будет алгебраически эквивалентна системе (S'').

Мы сейчас перейдём к доказательству этой второй части и разобьём его на несколько отдельных шагов.

а). Лемма о сравнении голоморфных функций по модулю

Прежде всего мы докажем общую теорему о сравнении голоморфных функций, которая будет нам полезна и в дальнейшем.

Лемма. *Если функции*

$$F(u_1, u_2, \dots, u_n),$$
$$\varphi_i(u_1, u_2, \dots, u_n), \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

обращаются в нуль для $u_i = u_i^0$, голоморфны в окрестности точки (u_i^0) и якобиан $\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}$ в этой окрестности отличен *от нуля, то существует n голоморфных в той же области функций A_i таких, что*

$$F=\varphi_1 A_1+\varphi_2 A_2+\ldots+\varphi_n A_n, \tag{16}$$

или короче

$$F\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n).$$

Действительно, при сделанных предположениях система уравнений

$$\varphi_i(u_1, u_2, \ldots, u_n)=v_i, \qquad i=1, 2, \ldots, n,$$

разрешима относительно u_i и определяет голоморфные в окрестности точки $v_i=0$ функции, которые для $v_i=0$ принимают значения $u_1=\overset{0}{u_i}$. Если эти решения внести в функцию F, то получим функцию от аргументов $v_1, v_2, \ldots, v_n$, голоморфную в окрестности точки $v_i=0$ и, стало быть, разлагающуюся в сходящийся ряд

$$F=F_0+v_1\frac{\partial F}{\partial v_1}+v_2\frac{\partial F}{\partial v_2}+\ldots+v_n\frac{\partial F}{\partial v_n}+\ldots$$

Если сюда внести значения $u_i=\overset{0}{u_i}$, то по условию F обратится в нуль, но одновременно и все v_i будут равны нулю, и мы получим:

$$F_0=0.$$

Если теперь в разложении функции F собрать все члены, которые делятся на v_1, и вынести v_1 за скобку, из оставшихся членов выбрать те, которые делятся на v_2, и вынести v_2 за скобку и т. д., то мы получим:

$$F=v_1A_1+v_2A_2+\ldots+v_nA_n,$$

где $v_i=\varphi_i(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, а коэффициенты A_i — функции от переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n$, голоморфные в окрестности $u_i=\overset{0}{u_i}$.

b) Построение системы уравнений для e_k

По условию теоремы (признак пассивности) каждое из уравнений

$$\frac{\partial\mathscr{E}^j_b}{\partial x_{\mathrm{e}}}-\frac{\partial\mathscr{E}^j_a}{\partial\lambda}=0$$

должно быть алгебраическим следствием уравнений продолженной системы (S''). Слова «алгебраическим следствием» означают, что мы должны рассматривать независимые переменные x_i, неизвестные функции z_j и их производные как величины, связанные только уравнениями системы (S'').

Будем считать независимые переменные и параметрические производные произвольно заданными величинами (параметрами), главные производные — переменными (неизвестными). Левая часть каждого уравнения (15) обратится в нуль, если вместо главных производных, которые там могут быть, подставить их значения из уравнений системы (S''). Допустим, что при этом мы используем уравнения $\mathscr{E}''_1=0$, $\mathscr{E}''_2=0, \ldots, \mathscr{E}''_q=0$. Каждое из них получается дифференцированием каких-то уравнений $\mathscr{E}_1=0, \ldots, \mathscr{E}_q=0$ полной системы $(S^{\#})$ по их переменным-множителям. Применим для обозначения этих дифференцирований символы, введённые формулой (14), так что уравнения $\mathscr{E}''_i=0$ запишутся в виде

$$\frac{\partial\mathscr{E}_1}{\partial\lambda_1}=0, \quad \frac{\partial\mathscr{E}_2}{\partial\lambda_2}=0, \ldots, \quad \frac{\partial\mathscr{E}_q}{\partial\lambda_q}=0.$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ суть мономы из переменных-множителей.

Так как эти уравнения разрешимы относительно своих главных производных, то лемма о сравнении голоморфных функций по модулю приложима к функциям $F=\frac{\partial\mathscr{E}^i_b}{\partial x_{\mathrm{e}}}-\frac{\partial\mathscr{E}^j_a}{\partial\lambda}$, $\varphi_i=\frac{\partial\mathscr{E}_i}{\partial\lambda_i}$, и мы имеем тождество

$$\frac{\partial\mathscr{E}^j_b}{\partial x_{\mathrm{e}}}=\frac{\partial\mathscr{E}^j_a}{\partial\lambda}+A_1\frac{\partial\mathscr{E}_1}{\partial\lambda_1}+A_2\frac{\partial\mathscr{E}_2}{\partial\lambda_2}+\ldots+A_q\frac{\partial\mathscr{E}_q}{\partial\lambda_q}, \tag{17}$$

где A_k суть голоморфные функции от производных $\frac{\partial\mathscr{E}_1}{\partial\lambda_1}, \ldots, \frac{\partial\mathscr{E}_q}{\partial\lambda_q}$, параметрических производных и независимых переменных x_i.

Зададимся произвольными, но определённо выбранными голоморфными функциями

$$z_j=\varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{18}$$

Левая часть каждого уравнения системы $(S^{\#})$ после подстановки (18) обратится в некоторую функцию от x_i:

$$e^j_a=(\mathscr{E}^j_a)_{z_k=\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \tag{19}$$

которая вообще не будет равна нулю, поскольку функции (18) вообще не совпадают с интегралами системы $(S^{\#})$.

Все эти функции e^j_a удовлетворяют уравнениям (17), которые теперь принимают вид

$$\frac{\partial e^j_b}{\partial x_{\mathrm{e}}}=\frac{\partial e^j_a}{\partial\lambda}+A_1\frac{\partial e_1}{\partial\lambda_1}+A_2\frac{\partial e_2}{\partial\lambda_2}+\ldots+A_q\frac{\partial e_q}{\partial\lambda_q}, \tag{17'}$$

где e^j_a, e^j_b, $e_1, e_2, \ldots, e_q$ суть те функции, которые получаются, если в левые части соответствующих уравнений полной системы $(S^{\#})$ подставить значения (18).

c) Ортономность построенной системы

Чтобы доказать ортономность системы уравнений (17′), как уравнений относительно независимых переменных x_i и неизвестных функций e_a^j, e_b^j, ..., присвоим каждой независимой переменной ту помету, которую она имеет в системе $(S^\#)$, каждой неизвестной функции e_a^j — помету главной производной уравнения $\mathscr{E}_a^j = 0$ в системе $(S^\#)$.

Дополним теперь эти пометы ещё одной последней компонентой. С этой целью расположим неизвестные e_a^j в пределах одного указателя j по убывающему рангу мономов семейства $(\mathfrak{M}_a^\#)$, присвоенных главным производным уравнений $\mathscr{E}_a^j = 0$. Если k_a есть порядковый номер (*ординал*) функции e_a^j, то мы присваиваем ей помету

$$\mathfrak{g}_{j,\,a} = (\mathfrak{g}_1^j,\ \mathfrak{g}_2^j,\ \ldots,\ \mathfrak{g}_m^j,\ k_a),$$

каждой независимой переменной x_i — помету

$$\mathfrak{a}_i = (1,\ \mathfrak{a}_2^i,\ \ldots,\ \mathfrak{a}_m^i,\ 0).$$

Первые m компонент каждой пометы взяты из соответствующей пометы в системе $(S^\#)$.

Тогда, в силу нормальности всех уравнений продолженной системы (S'), помета каждой главной производной, которая после дифференцирования может оказаться в правой части такого уравнения, меньше пометы производной, стоящей в левой части уравнения. Уравнения $\frac{\partial \mathscr{E}_k}{\partial \lambda_k} = 0$ были введены, чтобы исключить те главные производные, которые могли получиться в уравнениях (15) при дифференцировании по x_{e} или по переменным произведения λ. Эти главные производные как производные, которые входят после дифференцирования в уравнения продолженной системы (S'), имеют пометы, меньшие помет главных производных в левых частях уравнений, т. е. меньшие чем помета главной производной, стоящей на первом месте в уравнении $\frac{\partial \mathscr{E}_b^j}{\partial x_{\mathrm{e}}} = 0$. Следовательно, помета главной производной $\frac{\partial \mathscr{E}_b^j}{\partial x_{\mathrm{e}}}$ в системе $(S^\#)$ больше пометы любой из главных производных уравнений $\frac{\partial \mathscr{E}_k}{\partial \lambda_k} = 0$, а значит, и помета производной $\frac{\partial e_b^j}{\partial x_{\mathrm{e}}}$ в системе (17′) больше пометы каждой производной $\frac{\partial e_k}{\partial \lambda_k}$ уже в силу выбора её первых m компонент.

Уравнения $\frac{\partial \mathscr{E}_b^j}{\partial x_{\mathrm{e}}} = 0$ и $\frac{\partial \mathscr{E}_a^j}{\partial \lambda} = 0$ имеют одну и ту же главную производную и, следовательно, одну и ту же помету в системе $(S^\#)$, но последние компоненты помет производных $\frac{\partial e_b^j}{\partial x_{\mathrm{e}}}$ и $\frac{\partial e_a^j}{\partial \lambda}$ в системе (17′) различны. Так как ранг монома $\mathfrak{M}_a$ больше ранга монома $\mathfrak{M}_b$ (согласно теореме § 5, стр. 37), а неизвестные e_a^j расположены в порядке убывающего ранга мономов, то ординал неизвестной e_b^j больше чем ординал e_a^j, следовательно, последняя компонента пометы производной $\frac{\partial e_b^j}{\partial x_{\mathrm{e}}}$ больше чем производной $\frac{\partial e_a^j}{\partial \lambda}$. Каждое уравнение (17′) нормально, и система ортономна.

Следовательно, *система* (17′) *имеет не более одной системы интегралов, удовлетворяющих начальным условиям* II.

d) Начальные условия на e_b^j

Чтобы установить начальные условия II, надо определить дополнительные мономы и их переменные-множители.

По условию система (17′) содержит в левых частях производные от левых частей всех уравнений полной системы $(S^\#)$, т. е. от всех неизвестных функций e_b^j, по переменным-немножителям каждого уравнения $\mathscr{E}_b^j = 0$. Следовательно, мономы данной системы $(\mathfrak{M}_a)$ для каждой неизвестной функции e_b^j совпадают с её переменными-немножителями.

Группы дополнительных мономов $\mathscr{N}^{\mathrm{e}_p}$ каждого номера — пустые, кроме группы последнего номера $\mathscr{N}^{\mathrm{e}_1}$, состоящей из одного монома $x_1^0 x_2^0 \ldots x_n^0 = 1$, ибо в семействе $(\mathfrak{M}_a)$ имеется единственный моном, не содержащий других переменных x_{e_p}, $x_{\mathrm{e}_{p-1}}$, ..., x_{e_2}, и этот моном содержит x_{e_1} в первой степени; нижний индекс $k_{[a]}^{\mathrm{e}_1} = 1$, и дополнительный моном содержит $x_{\mathrm{e}_1}^0 = 1$. Для него все переменные x_{e_1}, x_{e_2}, ..., x_{e_p} — немножители, так же как и для главной производной уравнения $\mathscr{E}_b^j = 0$; все остальные x_i — переменные-множители, так же как и для $\mathscr{E}_b^j = 0$.

Итак, начальные условия системы (17′) читаются так: каждая неизвестная e_a^j принимает начальное значение в виде произвольно заданной функции от переменных-множителей уравнения $\mathscr{E}_a^j = 0$ для начальных значений её переменных-немножителей из числа координат точки (x_i^0).

е) Пассивность системы (S)

Выберем в качестве функций (18) те решения, которые мы получили в виде сходящихся (в силу первой части нашего доказательства) степенных рядов. Эти функции обращают в нуль левые части всех уравнений системы (S'') в начальной точке (x_i^0). Значения, которые принимают левые части этих уравнений в начальной точке, можно получить, дифференцируя функции e_a^j произвольное число раз по переменным-множителям и внося затем $x_i = x_i^0$. Следовательно, все производные от e_a^j по переменным-множителям в начальной точке равны нулю. Так как все коэффициенты при разложении любой функции e_a^j в степенной ряд по переменным-множителям при начальных значениях немножителей равны нулю, то и сами функции e_a^j для начальных значений всех переменных-немножителей равны нулю.

Таким образом, после внесения в уравнения полной системы $(S^{\#})$ решений, построенных для z_j, левые части этих уравнений принимают вид функций e_a^j, которые удовлетворяют ортономной системе (17′) и начальным условиям: для начальных значений переменных-немножителей каждая неизвестная функция равна нулю.

Ортономная система имеет не более одного решения, удовлетворяющего таким начальным условиям, и это решение очевидно: система (17′) удовлетворяется значениями

$$e_a^j = 0.$$

Эти решения удовлетворят и выбранным начальным условиям. Другого решения с этими начальными условиями не может быть. Следовательно, подстановка в уравнения системы $(S^{\#})$ найденных разложений z_j обращает все уравнения в тождества, что и доказывает нашу теорему.

§ 7. Замечания об исследовании пассивности

Исследование пассивности требует дифференцирования уравнений и исключения главных производных, а потому представляет наиболее трудоёмкую операцию в процессе исследования системы. Желательно по возможности сократить число проверяемых тождеств. Все они вытекают из формул сравнения мономов: произведение любого монома полного семейства на каждую его переменную-немножитель должно равняться произведению образующего монома на его переменные-множители.

Однако далеко не все такие тождества независимы друг от друга; некоторые из них выполняются автоматически, если, например, сравниваемые уравнения были получены одно из другого при составлении полного семейства дифференцированием по переменной-немножителю. Поэтому рекомендуется перед началом дифференцирования выписать все формулы сравнения мономов (признак полноты семейства) и отобрать из них независимые.

Пример 1. *Исследовать пассивность системы*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_3} = \sin(x_1 + x_2x_3) + x_2x_3\cos(x_1 + x_2x_3),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x_2^3} = -x_3^3\sin(x_1 + x_2x_3),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \sin(x_1 + x_2x_3).$$

Расположим мономы семейства в порядке убывающего ранга (независимые переменные расположены в порядке нумерации):

$$\mathcal{M}_1 = 0,\ 1,\ 1;\quad \mathcal{M}_2 = 0,\ 3,\ 0;\quad \mathcal{M}_3 = 1,\ 0,\ 0.$$

Мономы полного семейства, их переменные-множители и немножители (по Жане) суть:

Мономы	Переменные-множители	Немножители
$\mathcal{M}_1 = 0,\ 1,\ 1$	3 2 1	— — —
$\mathcal{M}_3 \cdot x_3 = 1,\ 0,\ 1$	3 — 1	— 2 —
$\mathcal{M}_2 = 0,\ 3,\ 0$	— 2 1	3 — —
$\mathcal{M}_3 \cdot x_2^2 = 1,\ 2,\ 0$	— — 1	3 2 —
$\mathcal{M}_3 \cdot x_2 = 1,\ 1,\ 0$	— — 1	3 2 —
$\mathcal{M}_3 = 1,\ 0,\ 0$	— — 1	3 2 —

Формулы сравнения мономов (признак полноты) имеют вид

$$(\mathcal{M}_3 \cdot x_3)\,x_2 = \mathcal{M}_1 \cdot x_1, \qquad (1)$$

$$\mathcal{M}_2 \cdot x_3 = \mathcal{M}_1 \cdot x_2^2, \qquad (2)$$

$$(\mathcal{M}_3 \cdot x_2^2)\,x_3 = \mathcal{M}_1 \cdot x_1x_2, \qquad \text{Следствие из (1)}$$

$$(\mathcal{M}_3 \cdot x_2^2)\,x_2 = \mathcal{M}_2 \cdot x_1, \qquad (3)$$

$$(\mathcal{M}_3 \cdot x_2)\,x_3 = \mathcal{M}_1 \cdot x_1, \qquad \text{Следствие из (1)}$$

$$(\mathcal{M}_3 \cdot x_2)\,x_2 \equiv \mathcal{M}_3 \cdot x_2^2.$$

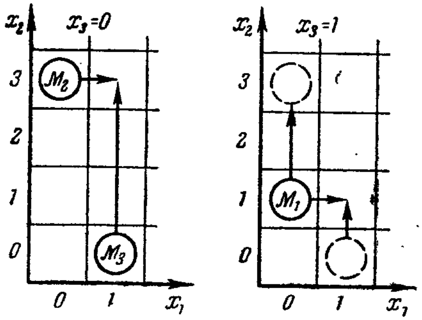
Независимых только три равенства: (1), (2) и (3).

На диаграмме Н. Н. Лузина (черт. 4) формулы сравнения обозначаются стрелками, идущими от каждого монома семейства параллельно осям диаграммы до встречи с такой же стрелкой другого монома.

Если оба монома помещаются на одной плоскости сечения (например $\mathcal{M}_2$ и $\mathcal{M}_3$), то эти стрелки непосредственно видны и дают формулу

$$\mathcal{M}_2 \cdot x_1 = \mathcal{M}_3 \cdot x_2^3. \qquad \text{Формула сравнения (3)}$$

Если они — в разных плоскостях, то приходится пользоваться проекциями мономов (пунктирные кружки) из первой плоскости на вторую. Так, для мономов $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ имеем формулу



Черт. 4.

$$\mathfrak{M}_2 \cdot x_3 = \mathfrak{M}_1 \cdot x_2^2, \qquad \text{Формула сравнения (2)}$$

где проектирование из первой плоскости на вторую соответствует умножению на x_3, или для мономов $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_3$:

$$\mathfrak{M}_1 \cdot x_1 = \mathfrak{M}_3 \cdot x_2 x_3. \qquad \text{Формула сравнения (1)}$$

Формулы сравнения в нашем примере содержат только три независимых равенства (1), (2), (3), которые приводят к уравнениям

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \sin(x_1 + x_2 x_3) = \frac{\partial}{\partial x_1} [\sin(x_1 + x_2 x_3) + x_2 x_3 \cos(x_1 + x_2 x_3)],$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} [-x_3^3 \sin(x_1 + x_2 x_3)] = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} [\sin(x_1 + x_2 x_3) + x_2 x_3 \cos(x_1 + x_2 x_3)],$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} \sin(x_1 + x_2 x_3) = \frac{\partial}{\partial x_1} [-x_3^3 \sin(x_1 + x_2 x_3)].$$

Система пассивна, ибо эти равенства удовлетворены тождественно.

Дополнительные мономы и их переменные-множители суть:

Дополнительные мономы	Переменные-множители	Немножители
$\mathcal{N}^1_{[0,1]} = 0, 0, 1$	3 — —	— 2 1
$\mathcal{N}^1_{[2,0]} = 0, 2, 0$	— — —	3 2 1
$\mathcal{N}^1_{[1,0]} = 0, 1, 0$	— — —	3 2 1
$\mathcal{N}^1_{[0,0]} = 0, 0, 0 = 1$	— — —	3 2 1

Начальные условия:

$$\frac{\partial z}{\partial x_3} = \varphi(x_3) \quad \text{для} \quad x_1 = x_1^0,\ x_2 = x_2^0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = A, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = B, \quad z = C \quad \text{для} \quad x_1 = x_1^0,\ x_2 = x_2^0,\ x_3 = x_3^0,$$

где A, B, C — постоянные и $\varphi(x_3)$ — произвольная функция от независимой переменной x_3.

Впрочем, непосредственно видно, что общий интеграл будет

$$z = -\cos(x_1 + x_2 x_3) + \frac{1}{2} A x_2^2 + B x_2 + \psi(x_3),$$

где $x_i^0 \doteq 0$ и $\psi'(x_3) = \varphi(x_3)$.

Пример 2. *Исследовать систему шести уравнений*

$$z_{45} = z_{11},\ z_{35} = z_{14},\ z_{25} = z_{13}, \qquad z_{ik} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k},$$
$$z_{44} = z_{13},\ z_{34} = z_{12},\ z_{33} = z_{24},$$

от одной неизвестной функции z и пяти независимых переменных x_i.

Система ортономна: она разрешена относительно различных производных, и все уравнения становятся нормальными при нижеследующем выборе независимых переменных и производных:

		z_{45}	(2, 3, 2),
x_1	(1, 1, 0),	z_{35}	(2, 3, 1),
x_2	(1, 0, 0),	z_{44}	(2, 2, 2),
x_3	(1, 1, 0),	z_{14}, z_{25}, z_{34} . . .	(2, 2, 1),
x_4	(1, 1, 1),	z_{11}, z_{13}, z_{33} . . .	(2, 2, 0),
x_5	(1, 2, 1),	z_{24}	(2, 1, 1),
		z_{12}	(2, 1, 0).

Расположим мономы, присвоенные главным производным, в порядке убывающего ранга (независимые переменные расположены в порядке нумерации):

Мономы	Перемен-ные-мно-жители	Формулы сравнения мономов
		$\mathfrak{M}_2 \cdot x_4 = \mathfrak{M}_1 \cdot x_3$
$\mathfrak{M}_1 = 0, 0, 0, 1, 1$	5 4 3 2 1	$\mathfrak{M}_3 \cdot x_4 = \mathfrak{M}_1 \cdot x_2$
$\mathfrak{M}_2 = 0, 0, 1, 0, 1$	5 — 3 2 1	$\mathfrak{M}_3 \cdot x_3 = \mathfrak{M}_2 \cdot x_2$
$\mathfrak{M}_3 = 0, 1, 0, 0, 1$	5 — — 2 1	$\mathfrak{M}_4 \cdot x_5 = \mathfrak{M}_1 \cdot x_4$
$\mathfrak{M}_4 = 0, 0, 0, 2, 0$	— 4 3 2 1	$\mathfrak{M}_5 \cdot x_5 = \mathfrak{M}_1 \cdot x_3$
$\mathfrak{M}_5 = 0, 0, 1, 1, 0$	— — 3 2 1	$\mathfrak{M}_5 \cdot x_4 = \mathfrak{M}_4 \cdot x_3$
$\mathfrak{M}_6 = 0, 0, 2, 0, 0$	— — 3 2 1	$\mathfrak{M}_6 \cdot x_5 = \mathfrak{M}_2 \cdot x_3$
		$\mathfrak{M}_6 \cdot x_4 = \mathfrak{M}_5 \cdot x_3$

Семейство мономов — полное. Все формулы сравнения независимы и приводят к уравнениям

$$\underline{z_{144}} - z_{113} = 0,\quad \underline{z_{134}} - z_{112} = 0,\quad \underline{z_{133}} - z_{124} = 0,\quad \underline{z_{135}} - z_{114} = 0,$$
$$\underline{z_{125}} - z_{113} = 0,\quad z_{124} - \underline{z_{133}} = 0,\quad \underline{z_{245}} - \underline{z_{134}} = 0,\quad \underline{z_{244}} - z_{123} = 0,$$

которые по исключении главных производных (подчёркнутых) с помощью уравнений продолженной системы приводятся к тождествам.

Дополнительные мономы суть:

Дополнительные мономы	Переменные-множители
$\mathcal{N}^3_{[1,\,0]} = x_4$	$---x_2\ x_1$
$\mathcal{N}^3_{[0,\,0]} = x_3$ и 1	$---x_2\ x_1$
$\mathcal{N}^2_{[0,\,0,\,1]} = x_5$	x_5---x_1

$\mathcal{N}^5$, $\mathcal{N}^4_{[\alpha]}$, $\mathcal{N}^1_{[\alpha]}$ — пустые группы.

Начальные условия:

$$z = \varphi_1(x_2,\ x_1),\quad \frac{\partial z}{\partial x_3} = \varphi_2(x_2\ x_1),\quad \frac{\partial z}{\partial x_4} = \varphi_3(x_2,\ x_1)$$
$$\text{для}\ \ x_3 = x_3^0,\ x_4 = x_4^0,\ x_5 = x_5^0;$$
$$\frac{\partial z}{\partial x_5} = \psi(x_1,\ x_5)\ \text{для}\ x_2 = x_2^0,\ x_3 = x_3^0,\ x_4 = x_4^0.$$

§ 8. Теорема существования

Мы переходим теперь к доказательству сходимости построенных разложений.

Теорема. *Существует одна система интегралов ортономной пассивной системы уравнений в частных производных* (S), *голоморфных в области точки* (x_i^0) *и удовлетворяющих начальным условиям:*

Частные производные, присвоенные дополнительным мономам главных производных, принимают значения произвольно заданных функций от их переменных-множителей для начальных значений переменных-немножителей из числа координат точки (x_i^0) *при условии, что все заданные функции голоморфны в области точки* (x_i^0) *и в этой точке принимают значения, лежащие в области голоморфности правых частей уравнений* (S).

Доказательство мы проведём в три приёма;

---

1. Система (S_1), линейная относительно старших производных

Теорема. *Всякую ортономную пассивную систему* (S) *можно заменить другой тоже ортономной пассивной системой* (S_1) *с той же системой интегралов и с теми же разложениями их в степенные ряды по разностям* $x_i - x_i^0$, *но так, что для каждой неизвестной функции все её главные производные будут одного и того же порядка и все уравнения системы линейны относительно производных этого порядка.*

Будем называть первую компоненту пометы производной *«порядком»* производной в системе. Обобщённый «порядок» больше порядка дифференцирования на первую компоненту неизвестной функции и переходит в обычный порядок, если эта компонента равна нулю.

Пусть δ — наименьший, а Δ — наибольший «порядок» главных производных в системе (S).

Продолжаем систему по множителям и разбиваем уравнения продолженной системы (S'') на разряды по возрастающим «порядкам» главных производных:

$$S''_\delta,\ S''_{\delta+1},\ \ldots,\ S''_\Delta,\quad S''_{\Delta+1},\ S''_{\Delta+2},\ \ldots$$

Каждый разряд S''_{g_i} содержит уравнения с «порядком» главной производной, равным g_i. В первой строке от S''_δ до S''_Δ записаны разряды первой группы.

Уравнения системы (S) необходимо содержатся в продолженной системе (S''): они входят только в уравнения первой группы. Поэтому, начиная с разряда $S''_{\Delta+1}$, каждый следующий разряд, с «порядком» на единицу больше предыдущего, получается однократным дифференцированием его уравнений.

Рассмотрим систему уравнений $(\Delta+1)$-го разряда

$$(S_1) \equiv S''_{\Delta+1}.$$

Эта система имеет [1]) ту же последовательность уравнений продолженной системы, начиная с уравнений $(\Delta+1)$-го разряда, что и система (S), но потеряла все уравнения первой группы. Поэтому все главные производные системы (S_1) будут главными производными системы (S), но не наоборот: главные производные уравнений первой группы от разряда S''_δ до S''_Δ для системы (S_1) будут параметрическими. Отсюда всякая система интегралов уравнений (S) удовлетво-

---

[1]) Нетрудно заметить, что мономы, присвоенные одновременно главным производным системы (S) и системы (S_1), имеют соответственно одни и те же переменные-множители.

ряет системе (S_1), но не наоборот. Чтобы получить интегралы системы (S), интегрируя систему (S_1), надо:

1) для всех параметрических производных системы (S_1), которые являются параметрическими и для системы (S), сохранить те же начальные значения, которые они имели в исходной системе;

2) параметрическим производным системы (S_1), которые были главными в системе (S), дать те начальные значения, которые получаются в исходной системе при решении уравнений первой группы от разряда S''_δ до S''_Δ.

При этих начальных условиях интегралы в обеих системах получат одни и те же разложения в степенные ряды по разностям $x_i - x_i^0$. Если сходятся одни, то сходятся и другие.

Между тем в системе (S_1) главные производные во всех уравнениях имеют один и тот же «порядок», равный $\Delta + 1$. Для каждой неизвестной функции все её главные производные — одного и того же порядка, равного разности между числом $\Delta + 1$ и первой компонентной пометы этой функции. Кроме того, уравнения новой системы $(S_1) = S''_{\Delta+1}$ получаются из уравнений предыдущего разряда S''_Δ однократным дифференцированием, а при этом правая часть уравнения дифференцируется как сложная функция (производная от правой части по каждому аргументу, умноженная на производную этого аргумента по переменной дифференцирования). Поэтому для каждой неизвестной функции её производные высшего порядка будут входить во все уравнения системы (S_1) линейно.

2. Система (S_2) первого порядка

Теорема. *Всякую ортономную пассивную систему (S) можно преобразовать, вводя дополнительные неизвестные функции, в ортономную пассивную систему (S_2) первого порядка; при этом каждая система интегралов (кроме дополнительных неизвестных) имеет в обеих системах одни и те же разложения в степенные ряды по разностям $x_i - x_i^0$.*

Пусть ортономная система (S) содержит независимые переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, неизвестные функции $z_1, z_2, \ldots, z_r$ и их производные до порядка p_j для каждой функции z_j. Будем предполагать для простоты записи, что преобразование 1 уже произведено и все главные производные имеют один и тот же обобщённый «порядок» $\Delta + 1$ так, что порядок старшей производной p_j связан с первой компонентной $\mathfrak{b}_1^j$ пометы неизвестной функции z_j соотношением

$$p_j + \mathfrak{b}_1^j = \Delta + 1.$$

Введём в качестве дополнительных неизвестных все производные для каждой функции z_j до порядка $p_j - 1$ включительно посредством

уравнений

$$(20)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_n} z_{j;\,\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n - 1} = z_{j;\,\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\frac{\partial}{\partial x_2} z_{j;\,\alpha_1, \alpha_2 - 1, 0, \ldots, 0} = z_{j;\,\alpha_1, \alpha_2, 0, \ldots, 0}, \\ &\frac{\partial}{\partial x_1} z_{j;\,\alpha_1 - 1, 0, \ldots, 0} = z_{j;\,\alpha_1, 0, \ldots, 0}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &j = 1, 2, \ldots, r, \\ &\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \\ &+ \alpha_n < p_j \end{aligned}$$

и все указатели не отрицательны,

где

$$z_{j;\,0, \ldots, 0} = z_j.$$

Присоединим к этим уравнениям ещё дифференциальные следствия их:

$$(21)\quad \frac{\partial}{\partial x_1} z_{j;\,\alpha_1 - 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} = \frac{\partial}{\partial x_2} z_{j;\,\alpha_1, \alpha_2 - 1, \ldots, \alpha_n} = \\ = \ldots = \frac{\partial}{\partial x_n} z_{j;\,\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n - 1},$$

$$j = 1, 2, \ldots, r;\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \leqslant p_j.$$

Сумму указателей $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ будем называть *индексом функции*.

Система (S) после замены (20) обратится в систему уравнений с частными производными первого порядка от функций $z_{j;\,\alpha}$ наибольшего индекса $p_j - 1$ (старших неизвестных). Они составят уравнения первой группы Σ_1. Уравнения (20) образуют вторую группу Σ_2. Уравнения (21) составят ещё три группы.

Если индекс функции $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ меньше чем $p_j - 1$ (младшие неизвестные), то одна из производных [которая стоит на последнем месте в ряду равенств (21)] может быть заменена по формулам (20) через другую неизвестную с индексом, на единицу большим. Полученные после такой подстановки уравнения (21) мы разрешим относительно всех остальных производных в ряду (21) и объединим в группу Σ_3.

Уравнения (21) для старших неизвестных функций надо рассматривать совместно с уравнениями Σ_1. Если в ряду производных (21) найдётся главная производная из системы Σ_1, то мы её исключаем с помощью уравнений Σ_1; совокупность полученных уравнений образует группу Σ_4. Если все производные из одного ряда (21) в системе Σ_1 окажутся параметрическими, то мы разрешаем эти уравнения относительно производных по независимым переменным x_i наибольших номеров i; эти уравнения составят последнюю группу Σ_5.

Все пять групп от Σ_1 до Σ_5 образуют систему (Σ), эквивалентную системе (S). Действительно, каждая система интегралов z_j системы (S) позволит вычислить по формулам (20) функции $z_{j;\,\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$

с индексами от 1 до $p_j - 1$, которые будут удовлетворять уравнениям (21) как дифференциальным следствиям уравнений (20) и уравнениям Σ_1, которые получаются из уравнений системы (S) заменой (20); следовательно, они будут интегралами системы (Σ). Обратно, всякая система интегралов $z_{j;\,\alpha}$ системы (Σ) удовлетворяет уравнениям (20) и (21), а потому будет системой частных производных до $(p_j - 1)$-го порядка включительно от функций $z_{j;\,0} = z_j$ и удовлетворяет системе (S), которая получится из системы Σ_1 обратной заменой $z_{j;\,\alpha}$ на z_j по формулам (20).

Значит, если система (S) пассивна, то и система (Σ) пассивна. Нетрудно обнаружить, что система (Σ) ортономна.

Действительно, все уравнения системы разрешены относительно главных производных. Уравнения Σ_2 и Σ_3 в правой части не содержат производных и тем самым нормальны. Если переменным x_i и z_j присвоить те самые пометы $\mathfrak{a}_i$ и $\mathfrak{b}_j$, которые они имели в системе (S), а каждой функции $z_{j;\,\alpha}$ помету

$$\mathfrak{b}_j + \alpha_1\mathfrak{a}_1 + \alpha_2\mathfrak{a}_2 + \ldots + \alpha_n\mathfrak{a}_n,$$

то каждая производная в системе (Σ) будет иметь ту же помету, которая была у равной ей производной в системе (S). Поэтому, если уравнения системы (S) были нормальны, то будут нормальны и уравнения групп Σ_1 и Σ_4.

Главные и параметрические производные в уравнениях группы Σ_5 будут иметь одну и ту же помету, ибо они равны одной и той же производной в системе (S). Дополним же все пометы ещё одной последней компонентной, равной нулю у всех неизвестных функций $z_{j;\,\alpha}$ и номеру i у каждой независимой переменной x_i. Так как уравнения группы Σ_5 разрешены относительно производных с большим номером, то и эти уравнения станут нормальны.

Так как системы (S) и (Σ) дают для неизвестных $z_{i;\,0} = z_j$ одни и те же разложения в степенные ряды по разностям $x_i - \overset{0}{x}_i$, то сходимость их доказывается одновременно. Между тем система (Σ) есть система линейных уравнений первого порядка (S_2). Для всех младших неизвестных функций все их производные — главные.

3. Теорема существования для системы первого порядка

В силу первых двух теорем мы можем ограничить себя рассмотрением ортономной пассивной системы линейных уравнений первого порядка относительно n независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и r неизвестных функций $z_1, z_2, \ldots, z_r$. Пусть уравнения системы имеют вид

$$\frac{\partial z_j}{\partial x_i} = \sum_{\alpha,\,\beta} a^{(ij)}_{\alpha\beta}\frac{\partial z_\beta}{\partial x_\alpha} + b^{(ij)}, \tag{22}$$

где $a^{(ij)}_{\alpha\beta}$ и $b^{(ij)}$ — функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $z_1, z_2, \ldots, z_r$, и суммирование распространяется на все параметрические производные.

Если

$$x_i = \overset{0}{x}_i, \quad z_j = \varphi_j(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_k})$$

составляют начальное определение системы интегралов, то заменой

$$\overline{x}_i = x_i - \overset{0}{x}_i, \quad \overline{z}_j = z_j - \varphi_j$$

мы приведём все начальные значения к нулю, не нарушая характера системы (22). Будем предполагать, что это преобразование уже сделано.

а) Лемма об умножении переменных. *Для семейства главных и параметрических производных ортономной системы и любого положительного числа ε можно найти положительные постоянные множители ξ_i, ζ_j так, чтобы подстановка*

$$\overline{x}_i = \xi_i x_i, \quad \overline{z}_j = \zeta_j^{-1} z_j \tag{23}$$

давала для производных

$$\frac{\partial z_j}{\partial x_i} = \xi_i\zeta_j\frac{\partial \overline{z}_j}{\partial x_i}$$

коэффициенты $\xi_i\zeta_j$, отношение которых для всяких двух производных, предшествующей[1] *$\xi_\alpha\zeta_\beta$ и последующей $\xi_i\zeta_j$, было бы меньше ε:*

$$\frac{\xi_\alpha\zeta_\beta}{\xi_i\zeta_j} < \varepsilon. \tag{24}$$

Лемма формулирована для системы первого порядка (22), хотя имеет место для любой ортономной системы.

Если переменным x_i, z_j присвоены пометы

$$\mathfrak{a}_i = (1, \overset{i}{\mathfrak{a}}_2, \overset{i}{\mathfrak{a}}_3, \ldots, \overset{i}{\mathfrak{a}}_m),$$
$$\mathfrak{b}_j = (\mathfrak{b}^j_1, \mathfrak{b}^j_2, \mathfrak{b}^j_3, \ldots, \mathfrak{b}^j_m),$$

то мы зададим множители ξ_i, ζ_j с помощью новых величин ϑ в виде

$$\xi_i = \vartheta_1\vartheta_2^{\overset{i}{\mathfrak{a}}_2}\ldots\vartheta_m^{\overset{i}{\mathfrak{a}}_m},$$
$$\zeta_j = \vartheta_1^{\mathfrak{b}^j_1}\vartheta_2^{\mathfrak{b}^j_2}\ldots\vartheta_m^{\mathfrak{b}^j_m},$$

так что множитель при производной

$$\xi_i\zeta_j = \vartheta_1^{\mathfrak{g}_1}\vartheta_2^{\mathfrak{g}_2}\ldots\vartheta_m^{\mathfrak{g}_m} \tag{25}$$

---

[1] Производная $\frac{\partial z_\beta}{\partial x_\alpha}$ предшествует производной $\frac{\partial z_j}{\partial x_i}$, если помета первой меньше пометы второй (см. § 4, стр. 32).

имеет в показателях компоненты пометы производной

$$\mathfrak{g}_k = \mathfrak{a}_k^i + \mathfrak{b}_k^j.$$

Если $m = 1$, т. е. пометы имеют одну компоненту, то все множители при производных будут степенями одной величины ϑ_1:

$$\xi_i \zeta_j = \vartheta_1^{\mathfrak{g}_1}, \quad \xi_\alpha \zeta_\beta = \vartheta_1^{\mathfrak{g}_1'}.$$

Если производная $\frac{\partial z_j}{\partial x_i}$ следует за производной $\frac{\partial z_\beta}{\partial x_\alpha}$, то помета первой $\mathfrak{g}_1$ больше пометы второй $\mathfrak{g}_1'$ и, следовательно,

$$\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_1' > 0.$$

Если мы положим

$$\vartheta_1 = 1 + \varepsilon^{-1} = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon},$$

то

$$\frac{\xi_\alpha \zeta_\beta}{\xi_i \zeta_j} = \vartheta_1^{\mathfrak{g}_1' - \mathfrak{g}_1} = \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_1'} < \varepsilon.$$

Допустим теперь, что лемма верна для помет с $(\mu - 1)$ компонентами, и рассмотрим случай помет с μ компонентами. Обозначим при этом буквой K совокупность множителей $\xi_i \zeta_j$, если положить в формулах (25) $\vartheta_1 = 1$.

Если первые компоненты $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_1'$ помет с μ компонентами совпадают, то требование (24) будет по условию удовлетворено, ибо при составлении отношения (24) буква ϑ_1 сократится.

Если первые компоненты различны, то $\mathfrak{g}_1$ больше чем $\mathfrak{g}_1'$, ибо производная $\frac{\partial z_j}{\partial x_i}$ следует за производной $\frac{\partial z_\beta}{\partial x_\alpha}$ и $\mathfrak{g} > \mathfrak{g}'$. Чтобы в этом случае неравенство (24) сохранялось, надо выбрать величину ϑ_1, удовлетворяющую всем неравенствам

$$\vartheta_1^{\mathfrak{g}_1' - \mathfrak{g}_1} q < \varepsilon, \tag{26}$$

где q — значение отношения (24) для множителей $\xi_i \zeta_j$ семейства K. Неравенства (26) написаны для каждой пары производных $\frac{\partial z_j}{\partial x_i}$, $\frac{\partial z_\beta}{\partial x_\alpha}$. Так как число производных главных и параметрических данной системы, сколько бы их ни было, конечно и все неравенства — одного смысла, то их можно заменить одним неравенством. Отсюда вытекает справедливость леммы.

Таким образом для всякого положительного числа ε после умножения (23) система (22) примет вид

$$\frac{\partial \bar{z}_j}{\partial \bar{x}_i} = \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}^{(ij)} \frac{\xi_\alpha \zeta_\beta}{\xi_i \zeta_j} \frac{\partial \bar{z}_\beta}{\partial \bar{x}_\alpha} + \frac{b^{(ij)}}{\xi_i \zeta_j}, \tag{22'}$$

причём для всех указателей

$$\frac{\xi_\alpha \zeta_\beta}{\xi_i \zeta_j} < \varepsilon.$$

b) Построение мажорантной системы. Допустим, что функции $a_{\alpha\beta}^{(ij)}$, $\frac{b^{(ij)}}{\xi_i \zeta_j}$, голоморфные в окрестности начала координат, разлагаются в точке $x_i = z_j = \rho > 0$ в абсолютно сходящиеся ряды. Пусть M и N — положительные числа, большие абсолютной величины любого члена соответствующего разложения. Тогда функции

$$A = \frac{M}{1 - \frac{X + Z_1 + \ldots + Z_r}{\rho}}, \quad B = \frac{N}{1 - \frac{X + Z_1 + \ldots + Z_r}{\rho}},$$

где

$$X = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \ldots + \bar{x}_n,$$

будут по лемме § 1 усиливающими для коэффициентов $a_{\alpha\beta}^{(ij)}$, $\frac{b^{(ij)}}{\xi_i \zeta_j}$, и система

$$\frac{\partial Z_j}{\partial \bar{x}_i} = \sum_{\alpha,\beta} A \frac{\xi_\alpha \zeta_\beta}{\xi_i \zeta_j} \frac{\partial Z_\beta}{\partial \bar{x}_\alpha} + B \tag{27}$$

будет усиливающей для системы (22').

Чтобы доказать существование интегралов усиливающей системы (27), будем искать решение

$$Z_1 = Z_2 = \ldots = Z_r = Z$$

в виде функции одного аргумента X. Мы сейчас же заметим, что при этих предположениях все уравнения (27) совпадут между собой и дадут только одно уравнение

$$\frac{dZ}{dX} = A \frac{dZ}{dX} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\xi_\alpha \zeta_\beta}{\xi_i \zeta_j} + B,$$

или, если внести значения A и B и освободиться от знаменателя,

$$\frac{dZ}{dX}\left(1 - M \sum_{\alpha, \beta} \frac{\xi_\alpha \zeta_\beta}{\xi_i \zeta_j} - \frac{X + rZ}{\rho}\right) = N. \tag{28}$$

В силу доказанной леммы коэффициент при производной $\frac{dZ}{dX}$ в начальной точке $X = 0$, $Z = 0$ удовлетворяет неравенству

$$1 - M \sum_{\alpha, \beta} \frac{\xi_\alpha \zeta_\beta}{\xi_i \zeta_j} > 1 - Mp\,\varepsilon,$$

где p — число всех параметрических производных системы и ε — произвольное положительное число. Если выбрать ε так, чтобы

$$1 - Mp\varepsilon > 0, \quad \text{т. е. } \varepsilon < \frac{1}{Mp},$$

то коэффициент при $\frac{dZ}{dX}$ в начальной точке будет положителен. Отсюда следует положительный знак производной любого порядка от Z в точке $X = Z = 0$. Ввиду выбора усиливающих функций эти начальные значения производных больше абсолютных величин коэффициентов разложения любой функции $\overline{z}_j$.

С другой стороны, в силу того, что коэффициент при $\frac{dZ}{dX}$ для $X = Z = 0$ положителен, стало быть отличен от нуля, уравнение (28) имеет голоморфный интеграл Z, принимающий значение $Z = 0$ для $X = 0$. Отсюда следует, что разложение Z по степеням X сходится, а тем самым сходятся и разложения неизвестных $\overline{z}_j$, а следовательно, и z_j по степеням x_i, и теорема существования системы интегралов доказана.

§ 9. Стандартные системы Томаса

Существенное дополнение к теории Рикье сделал Томас[1]), распространив её на уравнения, не решённые относительно главных производных. Наиболее хороших результатов он достиг для систем уравнений, алгебраических относительно неизвестных функций и их производных как главных, так и параметрических.

Рассмотрим такую систему уравнений ($f = 0$) и неравенств ($g \neq 0$); будем обозначать её буквой (S).

Присвоим независимым переменным x_i и неизвестным функциям z_j пометы из $n + 2$ компонент:

$$\mathfrak{a}_i = (1, 0, \delta_n^i, \ldots, \delta_1^i), \qquad \delta_k^i = \begin{cases} 1, \text{ если } k = i, \\ 0, \text{ если } k \neq i, \end{cases}$$

$$\mathfrak{b}_j = (1, j, 0, \ldots, 0), \; i = 1, 2, \ldots, n; \; j = 1, 2, \ldots, r.$$

Тогда все производные (и неизвестные z_j) распределятся:

1) по порядкам дифференцирования,

2) производные одного порядка по возрастающим номерам неизвестных функций z_j,

3) в пределах производных одного порядка от одной неизвестной функции по их рангу (см. § 5, стр. 34).

Таким образом не будет двух производных с одной и той же пометой.

---

[1]) Thomas, Differentialsystems.

Расположим все производные (и неизвестные функции) в порядке возрастающих помет, обозначая их на время алгебраических преобразований одной буквой: $y_1, y_2, \ldots, y_\alpha, \ldots, y_t$. Такое распределение назовём *каноническим*, а порядковый номер α — *ординалом производной* y_α.

Ординалом многочлена f (уравнения $f = 0$ или неравенства $f \neq 0$) назовём наивысший ординал производной y_α, которая содержится в многочлене f. Эту производную будем называть *лидером* многочлена (уравнения или неравенства); каждый многочлен f будем писать по убывающим степеням лидера y_α, а коэффициенты при степенях лидера — как многочлены по степеням следующей переменной $y_{\alpha-1}$, и т. д.

Все уравнения $f = 0$ и неравенства $g \neq 0$ системы (S) распределяем на разряды $S_1, S_2, \ldots, S_t$ так, что каждый разряд содержит уравнения (и неравенства) одного ординала α.

Алгебраические преобразования. Выполняем последовательно следующие пять алгебраических преобразований системы (S):

1. В каждом многочлене f (уравнении $f = 0$ или неравенстве $f \neq 0$) каждого разряда S_α, начиная с высшего ординала, рассматриваем коэффициент a_0 при высшей степени лидера y_α (*начальный коэффициент*), который вообще является многочленом относительно $y_{\alpha-1}$. Требуем, чтобы он был отличен от нуля, присоединяя к системе неравенство $a_0 \neq 0$, и выделяем в виде отдельного случая систему, дополненную уравнением $a_0 = 0$.

2. Составим результанты[1]) $R, R_1, \ldots, R_p$ первых двух коэффициентов a_0, a_1 как многочленов относительно их лидера. Если $R = R_1 = \ldots = R_{p-1} = 0$ в силу уравнений системы (S) и R_p — не нуль, то присоединяем к системе неравенство $R_p \neq 0$ и находим общий наибольший делитель ОНД (a_0, a_1), выделяя $R_p = 0$ в отдельный случай. Продолжая так дальше, находим ОНД $(a_0, a_1, \ldots)$ всех коэффициентов и сокращаем на него $f = 0$ (или $f \neq 0$), ибо в силу $a_0 \neq 0$ обращение общего наибольшего делителя в нуль исключено.

3. Определяем последовательно дискриминанты[2]) $D(f), D_1(f), \ldots, D_q(f)$. Если $D = D_1 = \ldots = D_{q-1} = 0$ в силу системы (S), а дискриминант D_q тождественно не равен нулю, то присоединяем к системе $D_q \neq 0$ и сокращаем уравнение $f = 0$ на ОНД (f, f'), чтобы

---

[1]) Здесь $R_p(a_0, a_1)$ получается из результанта $R(a_0, a_1)$, написанного в форме определителя Сильвестера (Ван-дер-Варден, Современная алгебра, 2-е изд., т. I, стр. 116), выбрасыванием p первых и p последних столбцов, p первых строк и p таких же первых строк для второго многочлена. Обращение R_{p-1} в нуль при $R_p \neq 0$ есть необходимое и достаточное условие существования общего наибольшего делителя ОНД $(a_0, a_1) = h$ степени p, причём $(R_p)^2 a_0 = h\varphi_1$, $(R_p)^2 a_1 = h\varphi_2$. Множитель $(R_p)^2$ необходим, чтобы h был многочленом относительно всех переменных y_k. См. Thomas, стр. 50 и след.

[2]) Здесь $D_q(f) = R_q(f, f')$, где f' — производная от многочлена f по его лидеру.

новое уравнение содержало каждый корень только по одному разу. Случай $D_q(f)=0$ выделяем.

Точно так же преобразуем каждое неравенство $f \neq 0$.

4. Если уравнение $f=0$ и уравнение $g=0$ (или неравенство $g \neq 0$) — одного ординала α (принадлежат одному разряду S_α), то составляем результанты $R(f,g)$, $R_1(f,g)$, $R_2(f,g), \ldots$ Пусть $R=R_1=\ldots=R_{p-1}=0$ в силу уравнений системы (S) и результант R_p тождественно не равен нулю, так что ОНД$(f, g)=\varphi$ — многочлен степени p и $(R_p)^2 f=\varphi f_1$, $(R_p)^2 g=\varphi g_1$, где f_1 и g_1 — многочлены ординала α.

Если $p=0$, т. е. общего делителя нет, то уравнения $f=0$ и $g=0$ несовместны, и этот случай (эту систему) надо исключить, а совокупность равенства $f=0$ и неравенства $g \neq 0$ равносильна одному уравнению $f=0$, ибо каждый корень $f=0$ не обращает g в нуль. Следовательно, неравенство $g \neq 0$ в системе (S) можно опустить. Если $p>0$ и общий делитель φ существует, то уравнения $f=0$ и $g=0$ равносильны одному уравнению $\varphi=0$, а уравнение $f=0$ и неравенство $g \neq 0$ — одному уравнению $f_1=0$.

Следовательно, все уравнения и неравенства одного разряда S_α могут быть заменены одним новым уравнением, если только этот разряд содержит хотя бы одно уравнение. Если же разряд S_α содержит только одни неравенства, то все их перемножаем, сводя таким образом весь разряд к одному новому неравенству.

Таким образом преобразуем все разряды от S_r до S_1. После преобразования новые разряды $s_1, s_2, \ldots, s_r$ имеют в каждом разряде или одно уравнение $f=0$, или одно неравенство $g \neq 0$.

Могут быть разряды s_α — пустые. Тогда производная этого ординала называется *свободной*. Производная y_α называется *главной производной* системы, если её разряд s_α содержит уравнение $f=0$. Все остальные производные (в том числе и свободные) называются *параметрическими*.

Следовательно, параметрическая производная является лидером неравенства или её разряд — пустой.

Степень уравнения $f=0$ относительно своего лидера y_α называется *степенью системы* (S) относительно производной y_α.

Наконец выполняем последнее преобразование.

5. Рассмотрим многочлен G, стоящий в левой части равенства $G=0$ или неравенства $G \neq 0$ разряда S_β. Расположим его по степеням букв $y_{\alpha+1}, y_{\alpha+2}, \ldots, y_\beta$. Каждый из коэффициентов этого разложения является многочленом лидера y_α с ординалом α (или ниже). Может случиться, что один из коэффициентов g является относительно своего лидера y_α многочленом более высокой степени, чем степень системы (S) относительно y_α, т. е. чем степень уравнения $f=0$, лидером которого служит y_α. Тогда мы можем привести многочлен g по модулю f, т. е. разделить g на f (по правилу деления многочленов, умножив предварительно G на подходящую степень начального коэффициента a_0 в многочлене f, чтобы не иметь дробей в коэффициентах) и заменить g остатком этого деления g_1 (степень g_1 относительно y_α ниже степени f).

Простые системы. После всех преобразований получаем систему (S), обладающую свойствами:

1. Система разбита на r разрядов $S_1, S_2, \ldots, S_\alpha, \ldots, S_r$; каждый непустой разряд S_α содержит одно уравнение $f=0$ или одно неравенство $f \neq 0$, не содержащее $y_{\alpha+1}, \ldots, y_r$ (в силу преобразования 4).

2. Начальный коэффициент и дискриминант D многочлена f из разряда S_α ($f=0$ или $f \neq 0$) не равны нулю в силу предыдущих разрядов $S_1, S_2, \ldots, S_{\alpha-1}$ (в силу преобразования 1, 3).

3. Многочлен f из разряда S_α ($f=0$ или $f \neq 0$) не имеет множителя, не содержащего y_α (в силу преобразования 2).

4. Если производная y_α — главная (разряд S_α содержит уравнение $f=0$), то во всей системе (S) (разряды $S_{\alpha+1}, \ldots, S_r$) производная y_α может содержаться только в степенях с показателями, меньшими степени многочлена f (в силу преобразования 5).

Такая система называется *простой системой*.

Из наших рассуждений следует:

Теорема. *Всякая непротиворечивая алгебраическая система распадается на конечное число простых систем. Различные простые системы, кроме первой, получаются при рассмотрении выделенных случаев (обращение в нуль a_0, дискриминанта и т. д.).*

Начальные условия алгебраической системы

Простая система может быть последовательно алгебраически разрешена от низших разрядов к высшим в порядке возрастающего ординала уравнений. Чтобы определить один корень системы как систему функций y_α от независимых переменных x_i, надо задать:

1. *Начальную точку*, т. е. совокупность числовых значений $y_\alpha=\overset{0}{y}_\alpha$, которые удовлетворяют системе для заданных значений независимых переменных $x_i=\overset{0}{x}_i$.

Такую систему значений можно получить последовательным решением уравнений системы $S(0)$, которая получится из системы (S), если туда внести $x_i=\overset{0}{x}_i$. Действительно, уравнение $f=0$ или неравенство $f \neq 0$ первого разряда S_1 содержит только одну неизвестную y_1. Для неё надо взять один из корней многочлена f, если S_1 содержит уравнение $f=0$, или любое число, не равное ни одному корню, если S_1 содержит неравенство $f \neq 0$, или вообще произвольное число, если разряд S_1 — пустой. Если же переменные $y_1, y_2, \ldots, y_{\alpha-1}$ уже определены из уравнений низших ординалов, то многочлен f из разряда S_α ($f=0$ или $f \neq 0$) обратится в многочлен относительно y_α с числовыми коэффициентами, откуда определение числового значения y_α совершается по прежнему правилу.

2. *Начальное определение*, т. е. значения всех параметрических производных y_α как произвольных функций от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, подчиняющихся единственному требованию — для $x_i = x_i^0$ принимать значения из числа координат начальной точки.

Так как уравнения системы не имеют кратных корней, то задание числового значения y_α^0 для $x_i = x_i^0$ вполне определяет однозначную функцию y_α, удовлетворяющую уравнению $f = 0$ разряда S_α, куда вместо перемененных $y_1, y_2, \ldots, y_{\alpha-1}$ внесены их значения из начального определения (для параметрических производных) или решения, полученные из уравнений предыдущих разрядов (для главных производных).

Таким образом имеем теорему:

Теорема. *Простая система может быть алгебраически разрешена, если её наименьший ординал не равен нулю.*

Если наименьший ординал равен нулю, то система содержит уравнение, в которое ни одна неизвестная y_α не входит. Такое уравнение противоречиво, ибо независимые переменные не могут быть связаны никаким соотношением. Следовательно, система с наименьшим ординалом, равным нулю, не совместна.

Если наименьший ординал не равен нулю, то начальная точка и начальное определение вполне определяют один корень системы.

Стандартная система. До сих пор мы рассматривали систему (S) как алгебраическую, предполагая, что величины $y_1, y_2, \ldots, y_r$ связаны только уравнениями (и неравенствами $f \neq 0$) системы. Если рассматривать её как систему дифференциальных уравнений, а величины y_α как производные различных порядков от неизвестных функций $z_1, z_2, \ldots, z_r$ по независимым переменным x_i, то, наряду с системой (S), надо рассматривать уравнения продолженной системы (S').

Дифференцируя какое-нибудь уравнение

$$f \equiv a_0 y^m + a_1 y^{m-1} + \ldots + a_m = 0$$

системы (S) по независимой переменной x, получим:

$$\delta f \equiv f' \delta y + \delta a_0 y^m + \ldots + \delta a_m = 0, \qquad \delta = \frac{\partial}{\partial x},\ f' = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Лидером нового уравнения будет производная δy с пометой, равной сумме помет переменных y и x; начальный коэффициент и дискриминант его совпадают с производной f', которая отлична от нуля, ибо система (S) — простая. Таким образом присоединение уравнений продолженной системы не нарушит первых двух условий простоты системы. Пользуясь этим, выполняем две операции:

1. Присоединяем к системе (S) уравнения продолженной системы (S'') так, чтобы семейство мономов, присвоенных главным производным системы, было полным $(\mathcal{M}_\alpha^{\#})$.

2. Уравнение $g = 0$ (или неравенство $g \neq 0$) новой системы $(S^{\#})$ может содержать производную δy, где y является лидером другого уравнения системы $f = 0$. Мы видели, что δy будет лидером уравнения $\delta f = 0$. Присоединяем к системе уравнение $\delta f = 0$.

Так как помета производной δy всегда меньше пометы лидера уравнения $g = 0$, то мы будем только пополнять пустые разряды в ряду $S_1, S_2, \ldots, S_r$. Конечным числом пополнений процесс закончится, и после приведения полученной системы к виду простой (если простота её будет нарушена) мы получим систему, называемую *стандартной* и обладающую свойствами:

1. В смысле алгебраическом система (S) — простая система.

2. Главным производным присвоено полное семейство мономов $(\mathcal{M}_\alpha^{\#})$.

3. Каждая главная производная впервые встречается в каноническом ряду разрядов $S_1, S_2, \ldots, S_r$ как лидер уравнения.

Начальные условия стандартной системы складываются из тех же двух частей, как и для алгебраической системы, но содержат меньше произвола, так как теперь переменные y_α стеснены новыми требованиями, вытекающими из дифференциальных свойств системы. Они состоят:

1) из задания *начальной точки*, т. е. совокупности числовых значений $y_\alpha = y_\alpha^0$, $x_i = x_i^0$, удовлетворяющих системе, и

2) из задания *начального определения*, т. е. значений параметрических производных, присвоенных мономам дополнительного семейства, как произвольных функций их переменных-множителей для начальных значений переменных-немножителей; произвол выбора функций подчиняется требованию, чтобы для $x_i = x_i^0$ они принимали значения из числа координат начальной точки.

Теорема. *Стандартная система имеет не более одного решения, удовлетворяющего начальным условиям.*

Действительно, при этих условиях не только система (S), но и все уравнения продолженной системы (S'') можно разрешить единственным образом в начальной точке.

Пассивная стандартная система. Сообразно формулам (12) сравнения мономов полного семейства (стр. 37)

$$\mathcal{M}_b \cdot x_e = \mathcal{M}_a \cdot \lambda,$$

можно написать условия пассивности.

Пусть мономы $\mathcal{M}_b$ и $\mathcal{M}_a$ соответствуют уравнениям $f_b = 0$ и $f_a = 0$ с лидерами y_b и y_a; дифференцируя эти уравнения соответственно по переменной x_e и по переменным из произведения $\lambda = \bar{x}_1^{p_1} \bar{x}_2^{p_2} \ldots \bar{x}_m^{p_m}$ [см. формулу (14)], получим

$$f_b' \frac{\partial y_b}{\partial x_e} + g_b = 0, \quad f_a' \frac{\partial y_a}{\partial \lambda} + g_a = 0,$$

где

$$f_a' = \frac{\partial f_a}{\partial y_a}, \quad f_b' = \frac{\partial f_b}{\partial y_b},$$

производные $\frac{\partial y_a}{\partial \lambda} = \frac{\partial y_b}{\partial x_e}$ (старшие производные) равны между собой в силу формулы сравнения (12) и многочлены g_a и g_b имеют ординалы, меньшие ординала общего лидера полученных уравнений. Исключая старшие производные, получим уравнение

$$f'_b q_a - f'_a q_b = 0. \tag{29}$$

Совокупность всех уравнений (29), соответствующих независимым формулам сравнения (12), составит условия пассивности (см. стр. 44).

Теорема. *Пассивная стандартная система обладает одной системой интегралов, удовлетворяющих начальным условиям.*

Теорема становится очевидной, если заметить что система непосредственно обращается в ортономную пассивную систему, если каждое уравнение разрешить относительно его лидера.

Приведение системы к пассивности. Если условия (29) обращаются в тождество уравнениями системы (S) и её продолженной системы, то система пассивна, и имеет место теорема существования интегралов. Если они не сводятся к тождеству в силу системы (S''), то независимые уравнения присоединяем к системе и новую систему преобразуем в стандартную. Совокупность лидеров новой системы содержит в себе все лидеры старой и, кроме того, некоторое число производных, которые в системе (S) были параметрическими и которые теперь будут главными.

Если новая система не будет пассивной, её надо продолжать ещё раз. При этом будут всё время появляться новые лидеры, которые берутся только из числа параметрических производных. Такой процесс должен закончиться конечным числом шагов, как это следует из леммы:

Лемма. *Невозрастающая последовательность $P(\alpha)$ целочисленных комплексных чисел $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ с неотрицательными компонентами конечна.*

Последовательность не возрастает при любом порядке компонент, если для всякого её члена b, следующего за a, по крайней мере одна из разностей

$$b_1 - a_1, \quad b_2 - a_2, \quad \ldots, \quad b_n - a_n$$

отрицательна.

Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — первый член последовательности $P(\alpha)$.

Лемма очевидна для $n = 1$, ибо, поскольку теперь компоненты α_1 монотонно убывают и все положительны, их не может быть больше числа единиц в компоненте a_1.

Образуем из членов нашей последовательности $P(\alpha)$ подпоследовательности P_l^k, содержащие только те числа α, у которых компонента α_k равна числу l. Число таких подпоследовательностей P_l^k, отчасти перекрывающихся, с указателями $l = 0, 1, 2, \ldots, a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ будет конечным.

Каждую подпоследовательность P_l^k можно рассматривать, как содержащую члены с $n-1$ компонентами, ибо все компоненты α_k у её членов равны l. Если допустить, что лемма верна для последовательности из членов с $n-1$ компонентами, то каждая подпоследовательность P_l^k содержит конечное число членов, а следовательно, и последовательность $P(\alpha)$ конечна.

Следствие. *Последовательность мономов, каждый из которых не делится ни на один предыдущий, конечна.*

Достаточно рассмотреть мономы $\mathcal{M}_\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ как целочисленные комплексные числа, чтобы убедиться в справедливости следствия, а отсюда прямо вытекает теорема:

Теорема. *Всякая стандартная система конечным числом операций или приводится к пассивной системе, или обнаруживается её несовместность.*

Действительно, поскольку при продолжении системы новые лидеры не могут быть производными от старых, то присвоенные им мономы не делятся на мономы семейства $(\mathcal{M}_\alpha)$ первоначальной системы.

Пример. *Исследовать систему*

$$f_1 \equiv p^2 - (x + y + 1)\, p + x + y = 0, \qquad p = \frac{\partial z}{\partial x},$$

$$f_2 \equiv q^2 - (x + 1)\, q + x = 0, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Система — простая. Действительно,

1) если расположить независимые переменные в алфавитном порядке $x_1 = x$, $x_2 = y$, то производная p имеет ординал, равный 1, q — ординал, равный 2, и два разряда $S_1(f_1)$, $S_2(f_2)$ содержат каждый по одному уравнению;

2) начальные коэффициенты и дискриминанты $D(f_1) = (x + y - 1)^2$, $D(f_2) = (x - 1)^2$ не равны нулю (независимые переменные не могут быть связаны уравнением);

3) так как начальные коэффициенты равны единице, то общего множителя коэффициенты уравнений не имеют;

4) в уравнение $f_2 = 0$ производная p совсем не входит.

Семейство мономов системы — полное. Имеем таблицу:

Мономы	Переменные-множители	Формулы сравнения мономов
$\mathcal{M}_1 = x = 1,0$	x —	$\mathcal{M}_1 \cdot y = \mathcal{M}_2 \cdot x$
$\mathcal{M}_2 = y = 0,1$	x y	

Дифференцируя многочлены f_1 и f_2 по переменным y и x, получим

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} \equiv [2p-(x+y+1)]\,s-p+1=0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} \equiv [2q-(x+1)]\,s-q+1=0, \qquad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},$$

откуда, исключая s, имеем единственное условие пассивности

$$f_3 \equiv (1-x)\,p+(x+y-1)\,q-y=0.$$

Так как это равенство не обращается в тождество в силу (S), то присоединяем его к системе.

После первого продолжения система разбивается в возрастающем порядке ординалов на разряды: $S_1(f_1)$, $S_2(f_2, f_3)$.

Второй разряд содержит два уравнения $f_2=0$ и $f_3=0$. Следовательно, по правилу преобразования 4 составляем результанты от f_2, f_3 как от многочленов с главной буквой q:

$$R(f_2, f_3)=\begin{vmatrix} 1 & -(x+1) & x \\ 0 & x+y-1 & (1-x)\,p-y \\ x+y-1 & (1-x)\,p-y & 0 \end{vmatrix}=-(1-x)^2 f_1,$$

$$R_1(f_2, f_3)=x+y-1.$$

Так как R равно нулю в силу $f_1=0$ и $R_1 \neq 0$, то ОНД(f_2, f_3) — первой степени, т. е. в силу $f_1=0$ многочлен f_2 делится на f_3. Значит, мы можем опустить уравнение $f_2=0$, сохранив только

$$S_1(f_1), \quad S_2(f_3).$$

Так как система $f_1=0$, $f_3=0$ алгебраически влечёт за собой систему $f_1=0$, $f_2=0$ (все корни первой удовлетворяют второй), а условие пассивности системы $f_1=0$, $f_2=0$ привело нас к уравнению $f_3=0$, то проверять пассивность системы $f_1=0$, $f_3=0$ нет надобности: условие пассивности приводится к тождеству в силу уравнений самой системы.

Дополнительные мономы
и их переменные-множители суть:

Дополнительные мономы	Переменные-множители
$\mathcal{N}^2$ — пустая гр. $\mathcal{N}^1_{[0]}=1=0,\,0$ $\mathcal{N}^1_{[1]}$—пустая гр.	— —

Начальное определение:

$$z=C=\text{const.} \quad \text{для } x=x_0,\ y=y_0.$$

Если выбрать начальные значения $x_0=y_0=0$, то уравнения принимают вид

$$f_1=p^2-p=0, \quad f_3=p-q=0,$$

откуда получаем начальную точку

$$(p,\ q,\ x,\ y)=(0,\ 0,\ 0,\ 0) \quad \text{или} \quad (p,\ q,\ x,\ y)=(1,\ 1,\ 0,\ 0),$$

Первой соответствует в уравнении $f_1=0$ корень $p=x+y$, после чего уравнение $f_3=0$ даст $q=x$; интегрируя, получим:

$$z=\frac{1}{2}x^2+xy+C.$$

Второй начальной точке соответствует корень $p=1$ и $q=1$; следовательно,

$$z=x+y+C.$$

Впрочем, многочлены f_1, f_2 разлагаются на множители

$$f_1=(p-x-y)(p-1), \quad f_2=(q-x)(q-1),$$

откуда тот же результат получается значительно быстрее, если рассмотреть четыре системы

$$\begin{matrix} p=x+y, & p=x+y, & p=1, & p=1, \\ q=x, & q=1, & q=x, & q=1, \end{matrix}$$

из которых только первая и четвёртая совместны.

§ 10. Обобщения

1. Функциональные системы Томаса. Томас обобщает понятие простой системы на случай системы уравнений, каждое из которых — алгебраическое относительно своего лидера y_α, но с коэффициентами в виде аналитических функций от $y_1, y_2, \ldots, y_{\alpha-1}$ и x_i.

Преобразования 1—4 применяются к такой системе без затруднения, только вводят неравенства, не имеющие вида полинома. Такие неравенства исключаются за счёт сокращения области изменения переменных.

Существование начальной точки постулируется, а тогда наличие единственного корня при заданном начальном определении следует из теоремы о существовании неявной функции.

Переход к дифференциальной системе не вызывает затруднений, причём соответственно расширяется понятие стандартной системы. Приведение к пассивной системе упирается в невозможность указать алгоритм к нахождению начальной точки для продолженной системы, если она существует.

2. Обобщение ортономных систем Рикье. Повидимому, ортономные системы Рикье являются наиболее общими системами, разрешёнными относительно главных производных, для которых можно доказать существование системы интегралов с начальным определением для параметрических производных (дополнительные мономы) в виде произвольных функций от переменных-множителей, не связанных никакими ограничениями.

Нетрудно заметить, что уравнения, разрешённые относительно производных более низкого порядка, чем те, которые остались в правой части, не дают возможности построить теорему существования интеграла. Формально построенные степенные ряды для интегралов могут не иметь конечного радиуса сходимости. Таково, например, рассмотренное Софьей Ковалевской ¹) уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Если считать главной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, то это — уравнение типа Коши и имеет единственный голоморфный интеграл, удовлетворяющий начальным условиям

$$z=\varphi(y),\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\psi(y)\quad \text{для}\quad x=x_0,$$

где $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ — произвольные аналитические функции своих аргументов.

Если же считать $\frac{\partial z}{\partial y}$ за главную производную, то уравнение не удовлетворяет требованию ортономности ни при каком выборе помет, ибо уже для помет с одной компонентой (обобщённый «порядок» производной в системе) главная производная имеет помету меньше пометы параметрической производной. Если существует интеграл уравнения, то разложение его в степенной ряд можно написать единственным образом по начальным условиям

$$z=f(x)\quad \text{для}\quad y=y_0,$$

где $f(x)$ — произвольная аналитическая функция от x. Такое разложение вообще не имеет конечного радиуса сходимости и только при совершенно специальном выборе функции $f(x)$ может определять интеграл.

Мерей (Méray) и Рикье первые обратили внимание на уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f\left(x,\ y,\ z;\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right).$$

Оно не ортономно, ибо при любом выборе помет переменных x, y помета главной производной не может быть больше помет параметрических производных $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ одновременно, но для одночленных помет (обобщённый «порядок») пометы левой и правой частей одинаковы. Начальные условия, которые пишутся согласно общей теории присоединённых мономов системы, имеют здесь вид

$$z=\varphi(x)\quad \text{для}\quad y=y_0,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\psi(y)\quad \text{для}\quad x=x_0.$$

---

[1] Kowalevsky, Zür Theorie der partiellen Differentialgleichungen, J. für Math. 20, 1875, стр. 1.

См. также Гурса, Курс математического анализа, т. III, ч. 1, 1933, стр. 247.

Построенное на этих начальных значениях разложение z в степенной ряд будет иметь конечный радиус сходимости, если в начальной точке $x=x_0$, $y=y_0$ модуль произведения частных производных от правой части уравнения по аргументам $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ не превышает $\frac{1}{4}$ ¹).

Рикье даёт общую теорему, определяющую условия, при которых можно утверждать существование решения и определить степень произвола его. Эти условия можно разбить на две части:

1. Все уравнения продолженной системы (S') можно разрешить относительно главных производных, не встречая противоречий, так что параметрические производные остаются вполне произвольными.

2. Обобщённый «порядок» главной производной не ниже «порядка» параметрических, т. е., присоединяя каждой неизвестной функции подходящее положительное число и полагая пометы независимых переменных равными единице, можно получить для главных производных каждого уравнения одночленную помету (одна компонента) не меньше пометы любой производной в правой части уравнения.

При этих условиях существует единственное разложение каждой неизвестной в степенной ряд с заданными значениями параметрических производных в виде произвольных функций от их переменных-множителей. Эти ряды имеют конечные радиусы сходимости, если заданные произвольные функции принимают в начальной точке значения, связанные некоторыми неравенствами ²).

Результат Мерей-Рикье относительно уравнения второго порядка был значительно улучшен Гюнтером ³). Дальнейшие работы Соболева для систем уравнений первого порядка установили в пространстве начальных значений (значений в начальной точке) неизвестных функций те купюры, которые надо было для данной системы исключить, чтобы определяемая система интегралов существовала ⁴).

---

[1] Méray et Riquier, Sur la convergence des développements des intégrales ordinaires d'un système d'équations différentielles partielles, Ann. de l'Ecole Normale Sup., 1890.

[2] Гюнтер показал, что неравенства, налагаемые на начальные значения коэффициентов уравнения и, вообще говоря, ограничивающие некоторыми неравенствами начальные значения произвольных функций, могут стеснять свободу выбора уравнений; см. Гюнтер, К теории характеристик систем уравнений в частных производных, 1913, гл. I.

[3] Гюнтер, Об аналитических решениях уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f\left(x, y, u; \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$, Матем. сборник, 32, вып. 1, 1924.

[4] Соболев, Об аналитических решениях систем уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными, Матем. сборник, 38, вып. 1—2, 1931.

[illegible] обобщение теории Рикье —
[illegible] — см., тж. [illegible]

ГЛАВА II

СИМВОЛИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ КАРТАНА. АЛГЕБРА ГРАССМАНА

§ 1. Геометрическое введение

Как известно, основу теории кривых составляют формулы Френе (Frenet). Если обозначить буквой M радиус-вектор точки M, которая описывает кривую, буквами τ, ν, β — единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали, а для кривизны, кручения и длины дуги кривой принять обозначения $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{r}$ и s, то формулы Френе напишутся в виде уравнений

$$\frac{dM}{ds} = \tau,$$

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{\nu}{\rho}, \quad \frac{d\nu}{ds} = -\frac{\tau}{\rho} - \frac{\beta}{r}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\nu}{r}.$$

Эти формулы определяют перемещения трёхгранника Френе, когда точка M двигается по кривой.

Эти формулы напишутся несколько более симметрично, если единичные векторы обозначить одной буквой I_j с указателями $j = 1, 2, 3$:

$$\text{(a)} \qquad \begin{gathered} dM = \omega_1 I_1, \\ dI_1 = \omega_{12} I_2, \quad dI_2 = \omega_{21} I_1 + \omega_{23} I_3, \quad dI_3 = \omega_{32} I_2, \end{gathered}$$

где

$$\omega_1 = ds, \quad \omega_{12} = -\omega_{21} = \frac{1}{\rho} ds, \quad \omega_{23} = -\omega_{32} = -\frac{1}{r} ds.$$

Дарбу (Darboux) и Рибокур (Ribaucour) перенесли метод подвижного трёхгранника на теорию поверхностей. Вершина M прямоугольного трёхгранника в таком случае описывает поверхность, две первые оси касаются поверхности, третья служит нормалью. Если воспользоваться векторными обозначениями: M — радиус-вектор точки M и

I_j — единичные векторы осей, то формулы Дарбу напишутся в виде уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial u} &= \xi I_1 + \eta I_2, & \frac{\partial M}{\partial v} &= \xi' I_1 + \eta' I_2, \\ \frac{\partial I_1}{\partial u} &= r I_2 - q I_3, & \frac{\partial I_1}{\partial v} &= r' I_2 - q' I_3, \\ \frac{\partial I_2}{\partial u} &= p I_3 - r I_1, & \frac{\partial I_2}{\partial v} &= p' I_3 - r' I_1, \\ \frac{\partial I_3}{\partial u} &= q I_1 - p I_2, & \frac{\partial I_3}{\partial v} &= q' I_1 - p' I_2. \end{aligned}$$

Обе колонны можно объединить, если вместо частных производных ввести полные дифференциалы:

$$\text{(b)} \qquad \begin{aligned} &dM = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2, \\ &dI_1 = \omega_{12} I_2 + \omega_{13} I_3, \quad dI_2 = \omega_{21} I_1 + \omega_{23} I_3, \\ &dI_3 = \omega_{31} I_1 + \omega_{32} I_2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \xi du + \xi' dv, & \omega_{12} &= -\omega_{21} = r du + r' dv, \\ \omega_2 &= \eta du + \eta' dv, & \omega_{23} &= -\omega_{32} = p du + p' dv, \\ & & \omega_{31} &= -\omega_{13} = q du + q' dv. \end{aligned}$$

Все эти формулы входят, как частные случаи, в уравнения, определяющие в трёхмерном пространстве наиболее общее движение прямоугольного трёхгранника с вершиной M и единичными векторами осей I_j:

$$dM = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3,$$

$$dI_i = \omega_{i1} I_1 + \omega_{i2} I_2 + \omega_{i3} I_3, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Эти формулы можно записать короче, если принять условие, что два одинаковых немых указателя означают суммирование:

$$\omega_{i1} I_1 + \omega_{i2} I_2 + \omega_{i3} I_3 = \omega_{ik} I_k.$$

Наши формулы примут теперь вид

$$\text{(1)} \qquad dM = \omega_k I_k, \quad dI_i = \omega_{ik} I, \qquad i, k = 1, 2, 3.$$

Здесь компоненты ω_k, ω_{ik} линейно зависят от дифференциалов независимых переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n$, т. е. являются линейными формами от $du_1, du_2, \ldots, du_n$:

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} \omega_i &= a_{ij} du_j, & i, k &= 1, 2, 3, \\ \omega_{ik} &= a_{ikj} du_j, & j &= 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Положение наиболее общего прямоугольного трёхгранника зависит от шести параметров, например, определяется тремя координатами вершины трёхгранника M и тремя эйлеровыми углами, определяющими поворот трёхгранника около неподвижной вершины. Поэтому в трёхмерном пространстве число независимых переменных n равно шести.

Так как все векторы I_i единичны и взаимно перпендикулярны, то

$$I_i^2 = 1, \quad I_i \cdot I_j = 0. \tag{c}$$

Дифференцируя эти тождества, получим:

$$I_i \cdot dI_i = 0, \quad I_j \cdot dI_i + I_i \cdot dI_j = 0, \qquad i \text{ фиксировано.}$$

Если же внести сюда значения дифференциалов (1), то получим:

$$I_i \cdot \omega_{ik} I_k = 0, \quad I_j \cdot \omega_{ik} I_k + I_i \cdot \omega_{jk} I_k = 0, \qquad i \text{ фиксировано.}$$

В силу равенств (c) мы имеем:

$$I_i \cdot I_k = \delta_i^k, \qquad \delta_i^k = \begin{cases} 1, \text{ если } k = i, \\ 0, \text{ если } k \neq i. \end{cases}$$

Следовательно, формы ω_{ij} при $j = i$ равны нулю и

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0. \tag{3}$$

Уравнения (1) охватывают, как частные случаи, и формулы Френе (a) и уравнения Дарбу (b). Есть, однако, существенная разница между случаем кривой, т. е. формами ω_i, ω_{ij} от одной независимой переменной, и случаем поверхности, когда эти формы зависят от двух независимых переменных. В первом случае кривизна и кручение могут быть заданы произвольными функциями от длины дуги s, т. е. при всяком выборе форм ω_i, ω_{ij} уравнения (a) имеют решение и определяют кривую вплоть до её положения в пространстве. Этого нельзя сказать относительно компонент ξ, η поступательного и p, q, r вращательного движения трёхгранника в формулах Дарбу. Уравнения (b) определяют поверхность, если эти компоненты удовлетворяют условиям совместности, которые известны под названием уравнений Гаусса и Кодацци и составляют основу теории поверхностей.

Эти уравнения приобретают гораздо более простую и симметричную форму уравнений структуры Картана, если обратиться к общим уравнениям (1) и требовать полной интегрируемости системы. Этот вопрос вводит нас уже в теорию совместности систем уравнение Пфаффа, которая значительно стройнее излагается в символике внешних форм Картана.

§ 2. Билинейный ковариант Фробениуса

Формой Пфаффа называется линейная форма от дифференциалов dx_i:

$$\omega(d) = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \ldots + a_n dx_n, \tag{4}$$

или короче:

$$\omega(d) = a_i \, dx_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

если воспользоваться установленным правилом записи суммы.

Такая форма зависит от двух рядов независимых переменных. Она задана линейной однородной функцией от n дифференциалов dx_1, dx_2, ..., dx_n. Кроме того, коэффициенты a_i являются функциями от n независимых переменных x_1, x_2, ..., x_n. Эти функции мы будем предполагать аналитическими.

Дифференциалы dx_i. Дифференциалы независимых переменных dx_i мы будем рассматривать как произвольно заданные, вообще, конечные величины, которые могут зависеть от группы значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и, подобно однородным координатам точки, имеют вполне произвольный общий множитель dt. Например, дифференциалы dx_i могут быть заданы в виде

$$dx_i = \xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \, dt, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

При заданных функциях ξ_i дифференциал любой функции f от переменных x_i или любая форма Пфаффа (4) найдутся по формулам

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \xi_i \; dt,$$

$$\omega(d) = a_i \xi_i \, dt.$$

Чтобы воспользоваться геометрическим языком, будем называть совокупность значений переменных (x_i), т. е. n чисел x_1, x_2, ..., x_n, *точкой*, а область изменения этих переменных (например, область, где коэффициенты a_i — аналитические функции от переменных x_1, x_2, ..., x_n) — *аналитическим пространством* $[x_i]$. В этом аналитическом пространстве совокупность значений дифференциалов dx_i, т. е. n чисел dx_1, $dx_2 \ldots dx_n$ в данной точке пространства (x_i), определяет *вектор* $\{dx_i\}$ с координатами dx_i, который мы будем мыслить присоединённым к той точке аналитического пространства $[x_i]$, в которой дифференциалы dx_i заданы формулами (5).

Произвольный множитель dt пропорционально меняет все дифференциалы dx_i, а следовательно, и длину вектора $\{dx_i\}$. Система функций ξ_i определяет, таким образом, только отношение дифференциалов, т. е. совокупность всех векторов одного направления или, если угодно, всех кривых аналитического пространства, которые касаются друг друга в данной точке.

Мы всё же будем говорить, что задание системы дифференциалов (5) определяет в аналитическом пространстве $[x_i]$ *векторное поле*, предполагая, что множитель dt принимает определённое значение.

Переместительность символов дифференцирования d и δ. Наряду с первой системой дифференциалов, которую мы обозначили символами dx_i и определили формулами (5), можно рассматривать вторую, определяемую другими функциями, с другим символом дифференцирования:

(5′) $$\delta x_i = \eta_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\delta t, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Она устанавливает в аналитическом пространстве $[x_i]$ второе векторное поле.

При таком задании двух систем дифференциалов каждый дифференциал dx_i или δx_i может быть снова продифференцирован в направлении вектора $\{\delta x_i\}$ или вектора $\{dx_i\}$. Ни откуда не видно, чтобы эти два дифференцирования были переместительны; при произвольном задании функции ξ_i и η_i дифференциалы $d(\delta f)$ и $\delta(df)$ будут вообще различны.

Мы можем, однако, наложить на функции ξ_i, η_i, кроме обычного требования аналитичности, добавочное условие: два символа дифференцирования d и δ должны быть *переместительны* при дифференцировании любой функции переменных x_i. Нетрудно заметить, что для этого достаточно, чтобы они обладали этим свойством по отношению к независимым переменным x_i.

Теорема. *Если системы дифференциалов dx_i и δx_i удовлетворяют равенствам*

(6) $$d(\delta x_i) = \delta(dx_i),$$

то символы дифференцирования d и δ переместительны в применении к дифференцированию любой функции переменных x_i.

Действительно, полный дифференциал от произвольной функции f подсчитывается по формуле

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i.$$

Следовательно,

$$d\cdot(\delta f) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i\right) = d\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f}{\partial x_i}d(\delta x_i),$$

но

$$d\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}dx_k$$

и

$$d(\delta f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}dx_k\,\delta x_i + \frac{\partial f}{\partial x_i}d(\delta x_i).$$

Переставляя здесь символы дифференцирования d и δ, получим

$$\delta(df) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\delta x_k\,dx_i + \frac{\partial f}{\partial x_i}\delta(dx_i,$$

или, меняя в первой сумме немые указатели суммирования i на k,

$$\delta(df) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}\delta x_i\,dx_k + \frac{\partial f}{\partial x_i}\delta(dx_i).$$

Имея в виду условие (6), а также независимость производной от порядка дифференцирования:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i},$$

мы сейчас же придём к искомому равенству

(6′) $$d(\delta f) = \delta(df).$$

Отсюда непосредственно вытекает:

Следствие. *Свойство переместительности символов дифференцирования инвариантно относительно замены переменных.*

Если вместо независимых переменных x_i ввести любые новые переменные f_i, то из равенств (6) получим условие (6′) для новых переменных.

Теперь нетрудно написать те условия, которым должны удовлетворять функции ξ_i и η_i, чтобы символы дифференцирования d и δ были переместительны. Так как

$$d(\delta x_i) = d(\eta_i \delta t) = \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k}dx_k\,\delta t = \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k}\xi_k\,dt\,\delta t,$$

$$\delta(dx_i) = \delta(\xi_i\,dt) = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}\delta x_k\,dt = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}\eta_k\,\delta t\,dt,$$

то

$$d(\delta x_i) - \delta(dx_i) = \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial x_k}\xi_k - \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}\eta_k\right)dt\,\delta t,$$

и искомое условие переместительности выразится системой уравнений

(7) $$\frac{\partial \eta_i}{\partial x_k}\xi_k - \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}\eta_k = 0, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Мы будем предполагать, что эти уравнения в дальнейшем будут всегда удовлетворены.

Билинейный ковариант. В применении к формам Пфаффа мы такой переместительности символов дифференцирования не обнаружим.

Обозначим

$$\omega(d) = a_i\,dx_i, \quad \omega(\delta) = a_i\,\delta x_i$$

и подсчитаем разность

$$d\omega(\delta) - \delta\omega(d).$$

Так как

$$d\omega(\delta) = d(a_i \delta x_i) = da_i\,\delta x_i + a_i\,d(\delta x_i),$$

причём

$$da_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_k}dx_k,$$

то

$$d\omega(\delta) = \frac{\partial a_i}{\partial x_k} dx_k \delta x_i + a_i d(\delta x_i).$$

Аналогично получим:

$$\delta\omega(d) = \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \delta x_k dx_i + a_i \delta(dx_i).$$

В силу условия (6) вторые члены в обеих формулах взаимно уничтожатся, и мы получим

$$d\omega(\delta) - \delta\omega(d) = \frac{\partial a_i}{\partial x_k} dx_k \delta x_i - \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \delta x_k dx_i,$$

или, переставляя немые указатели суммирования i и k во второй сумме,

$$d\omega(\delta) - \delta\omega(d) = \frac{\partial a_i}{\partial x_k} dx_k \delta x_i - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \delta x_i dx_k$$

и, вынося за скобку произведение $dx_k \delta x_i$,

$$(8) \qquad d\omega(\delta) - \delta\omega(d) = \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i}\right) dx_k \delta x_i.$$

Соберём вместе все члены с одной и той же парой указателей, например, с указателями 1 и 2. Таких членов, очевидно, будет два, со значениями $i = 1$, $k = 2$ и $i = 2$, $k = 1$:

$$\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_1}\right) dx_2 \delta x_1 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \delta x_2;$$

но вторая скобка равна с обратным знаком первой, следовательно, эти два члена можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_1}\right)(dx_2 \delta x_1 - dx_1 \delta x_2).$$

То же преобразование можно повторить над любыми двумя членами для одного сочетания указателей. Если обозначить суммирование по всем сочетаниям из указателей 1, 2, ..., n по два знаком суммы с подписанными под ним указателями (i, k) в скобках, то формулу (8) можно переписать в виде

$$d\omega(\delta) - \delta\omega(d) = \sum_{(i,\,k)}^{1,2,\ldots,n} \left\{\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i}\right) dx_k \delta x_i + \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_k}\right) \delta x_k dx_i\right\},$$

или, вынося за скобку разность $\frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i}$,

$$(8') \qquad d\omega(\delta) - \delta\omega(d) = \sum_{(i,\,k)}^{1,\,2,\,\ldots,\,n} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i}\right)(dx_k \delta x_i - \delta x_k dx_i).$$

Это выражение можно написать ещё в другой форме, если воспользоваться символом альтернирования:

$$\delta x_{[i} dx_{k]} = \frac{1}{2}(\delta x_i dx_k - \delta x_k dx_i).$$

Перепишем формулу (8), повторяя два раза каждое слагаемое. Если при этом во второй сумме изменить немые указатели суммирования, записывая k вместо i и i вместо k, то получим

$$d\omega(\delta) - \delta\omega(d) = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i}\right) dx_k \delta x_i + \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_k}\right) dx_i \delta x_k\right\},$$

или

$$d\omega(\delta) - \delta\omega(d) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i}\right)(dx_k \delta x_i - dx_i \delta x_k),$$

или с помощью символа альтернирования:

$$(8'') \qquad d\omega(\delta) - \delta\omega(d) = \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i}\right) \delta x_{[i} dx_{k]}.$$

В результате мы получим формулу (8), или (8′), или (8″), линейную относительно двух систем дифференциалов dx_i и δx_i (*билинейную*), *косо-симметричную*: при замене символа d на символ δ она меняет знак. Форма эта была введена Фробениусом (Frobenius)[1]) и называется *билинейным ковариантом* формы Пфаффа, ибо при всякой замене переменных сохраняет свой вид, как это явствует из следующей теоремы.

Теорема. *При замене переменных билинейный ковариант Фробениуса преобразуется в билинейный ковариант, вычисленный для преобразованной формы Пфаффа.*

Теорема очевидна, если иметь в виду левую часть равенства (8). Действительно, при замене переменных форма $\omega(\delta)$ переходит в равную ей преобразованную форму $\overline{\omega}(\delta)$, а полный дифференциал $d\omega(\delta)$ не зависит от выбора независимых переменных. Значит, разность

$$d\omega(\delta) - \delta\omega(d) = d\overline{\omega}(\delta) - \delta\overline{\omega}(d)$$

не зависит от выбора переменных и при замене переменных сохраняет своё значение.

Нетрудно подтвердить это прямым подсчётом, преобразуя правую часть формулы (8). Эту поверку мы предоставляем читателю.

Обращение билинейного ковариант в нуль. Мы видели, что символы дифференцирования d и δ переместительны при дифференцировании любой функции; следовательно, билинейный ковариант от полного дифференциала любой функции равен нулю. Легко показать справедливость и обратной теоремы.

---

[1]) Frobenius, Über das Pfaffsche Problem, J. für Math. 82, 1877, стр. 230—315.

Теорема. *Если билинейный ковариант пфаффовой формы тождественно равен нулю, то эта форма есть полный дифференциал.*

Если билинейный ковариант равен нулю:

$$\sum_{(i,\,k)}^{1,\,2,\,\dots,\,n}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_k}-\frac{\partial a_k}{\partial x_i}\right)(\delta x_i dx_k-\delta x_k dx_i)=0, \tag{a}$$

при любом выборе дифференциалов dx_j, δx_j (конечно, удовлетворяющих условию переместительности), то равенство (a) имеет следствием обращение в нуль каждой скобки

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_k}-\frac{\partial a_k}{\partial x_i}. \tag{b}$$

Действительно, чтобы доказать справедливость этого равенства, например, для $i=1$, $k=2$, возьмём две системы дифференцирования так, чтобы

$$dx_2=1,\quad \delta x_1=1$$

и все остальные dx_j, δx_j были равны нулю. Условию переместительности этот выбор удовлетворяет, ибо все вторые производные равны нулю; между тем из всех членов суммы (a) сохранится только первый, где $i=1$, $k=2$ (значения $i=2$, $k=1$ принимать в расчёт не придётся, ибо сумма берётся по *сочетаниям* указателей i, k), причём

$$\delta x_1 dx_2-\delta x_2 dx_1=1,$$

и мы прямо получим равенство (b) для $i=1$, $k=2$.

Условия (b), как известно, показывают, что форма

$$\omega(d)=a_i dx_i$$

есть полный дифференциал некоторой функции от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

§ 3. Билинейные алгебраические формы

Билинейная форма

$$F(u,v)=a_{ik}u_iv_k,\qquad i,k=1,2,\dots,n,$$

называется *симметричной*, если

$$F(u,v)=F(v,u).$$

Это равенство

$$a_{ik}u_iv_k=a_{ik}v_iu_k$$

или, после перестановки указателей i и k в правой части, равенство

$$a_{ik}u_iv_k=a_{ki}v_ku_i$$

является тождеством, т. е. справедливо при всех значениях букв u_j, v_j, следовательно, приводит к равенству коэффициентов

$$a_{ik}=a_{ki}.$$

Поэтому симметричную билинейную форму $F(u,v)$ всегда можно рассматривать как полярную форму от квадратичной формы

$$F(u,u)=a_{ik}u_iu_k.$$

Билинейная форма

$$F(u,v)=a_{ik}u_iv_k$$

называется *косо-симметричной* (или антисимметричной), если она меняет знак от перестановки букв u и v. Следовательно, форма косо-симметрична, если имеет место тождество

$$F(u,v)=-F(v,u),$$

или

$$a_{ik}u_iv_k=-a_{ik}v_iu_k.$$

Переставляя немые указатели i и k в правой части:

$$a_{ik}u_iv_k=-a_{ki}v_ku_i,$$

и сравнивая коэффициенты при одинаковых буквах u_iv_k, получим условие на коэффициенты:

$$\begin{aligned} &a_{ii}=0, &&\text{не суммировать!}\\ &a_{ik}=-a_{ki}. &&i,k=1,2,\dots,n. \end{aligned} \tag{9}$$

Эти условия не только необходимы, но и достаточны: если они удовлетворены, то форма косо-симметрична.

Нетрудно показать, что условия (9) инвариантны относительно линейной подстановки переменных.

Теорема. *Билинейная косо-симметричная форма при всякой линейной замене переменных остаётся косо-симметричной.* При этом оба ряда переменных u_i, v_i заменяются по одному и тому же закону на переменные U_i, V_i.

Допустим, что замена переменных определяется формулами

$$u_i=c_{ik}U_k,\quad v_i=c_{ik}V_k \tag{a}$$

с теми же самыми коэффициентами c_{ik} и определителем подстановки из коэффициентов матрицы $\|c_{ik}\|$, отличным от нуля.

Если при этом форма $F(u,v)$ преобразуется в форму $\Phi(U,V)$ то в силу равенств (a) имеем:

$$F(u,v)=\Phi(U,V).$$

При замене переменных U_i на V_i по формулам (а) произойдёт замена величин u_i на v_i; при этом косо-симметричная, по условию, форма $F(u, v)$ изменит знак, а следовательно, изменит знак и равная ей форма $\Phi(U, V)$. Отсюда прямо следует, что преобразованная форма в переменных U_i, V_i будет косо-симметричной.

Внешние формы[1]). Мы видели, что билинейную симметричную форму можно рассматривать как полярную форму от квадратичной. Присоединённая квадратичная форма получается из билинейной, если в ней оба ряда переменных u_i и v_i положить равными, т. е. подставить

$$v_i = u_i.$$

Обратно, полярная форма получается из квадратичной по известной формуле

$$F(u, v) = \frac{1}{2} v_i F_i(u, u), \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

где все $F_i(u, u)$ суть частные производные:

$$F_i = \frac{\partial F}{\partial u_i}.$$

Благодаря этому соответствию между билинейными симметричными и квадратичными формами все преобразования билинейной формы $F(u, v)$, например замену переменных, можно выполнять над одной серией переменных в квадратичной форме $F(u, u)$.

Такой же вопрос можно поставить для билинейной косо-симметричной формы, но там он не разрешается так просто. Косо-симметричная билинейная форма после замены $v_i = u_i$ тождественно обращается в нуль, и квадратичная форма, которая будет соответствовать билинейной косо-симметричной форме, составляется из произведений с другим законом умножения. Это будет *внешняя* (квадратичная) форма.

§ 4. Грассманово кольцо

Рассмотрим два рода величин: скаляры a, b, c, ... и векторы u, v, w, ...

Скаляры будут служить коэффициентами форм кольца. Они подчиняются обычным правилам четырёх действий алгебры. Поле скаляров, которое мы будем обозначать буквой $\mathfrak{R}$, может совпадать с областью всех действительных чисел или с областью комплексных чисел. В дальнейшем, когда мы перейдём к дифференциальным формам, поле скаляров будет совпадать с областью всех аналитических функций от независимых переменных задачи.

---

[1]) Cartan, Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff, Ann. de l'École Normale Sup., (3), 16, 1899.

К полю скаляров $\mathfrak{R}$ мы присоединяем *n символов* $u_1, u_2, \ldots, u_n$, которые можно называть неизвестными, или переменными, или векторами и которые впоследствии, когда мы перейдём к дифференциальным формам, мы отождествим с дифференциалами независимых переменных. Для символов u_i определяются только три действия: сложение, вычитание и умножение.

Выражения, получаемые конечным числом операций сложения и умножения из элементов поля $\mathfrak{R}$ и присоединённых символов $u_1, u_2, \ldots, u_n$, образуют *кольцо полиномов*, обозначаемое символом $\mathfrak{R}[u_1, u_2, \ldots, u_n]$ или коротко $\mathfrak{R}[u]$. Число присоединённых символов n называется *размерностью* кольца, а сами символы — его *базисом*.

Введённое название кольца полиномов оправдывается нижеследующими законами действий. Для сложения (и вычитания) символов u_i, а также для умножения символов u_i на скаляр сохраняются правила обычной алгебры.

Для сложения имеют место:

a) ассоциативность —

$$u_1 + (u_2 + u_3) = (u_1 + u_2) + u_3, \tag{10a}$$

b) коммутативность —

$$u_1 + u_2 = u_2 + u_1, \tag{10b}$$

c) разрешимость уравнения (вычитание) —

$$u_1 + x = u_2. \tag{10c}$$

Для умножения имеют место:

a) ассоциативность —

$$a(bu_1) = (ab)u_1, \tag{11a}$$

b) коммутативность —

$$au_1 = u_1 a, \tag{11b}$$

c) дистрибутивность —

$$\begin{aligned} a(u_1 + u_2) &= au_1 + au_2, \\ u_1(a + b) &= au_1 + bu_1. \end{aligned} \tag{11c}$$

Повторяя введённые операции над символами u_i, придём к линейным многочленам относительно символов u_i с коэффициентами из поля $\mathfrak{R}$.

Только однородные многочлены или линейные формы

$$v = a_i u_i = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n$$

будут иметь значение в дальнейшем. Для них мы сохраним название векторов. Очевидно, на них распространяются, так же как на символы u_i, все перечисленные правила действий.

Внешнее произведение. Для умножения символов u_i вводим новую операцию, которую будем называть *внешним умножением*. Внешнее произведение будем обозначать квадратными скобками[1]):

$$U = [u_1 \; u_2 \ldots \; u_p].$$

Внешнее произведение символов u_i с произвольным скалярным коэффициентом мы будем называть *мономом*. Число p линейных множителей (символов u_i) называется *степенью монома* (или числом измерений).

Мы сохраняем для мономов формулированные выше правила сложения, вычитания и умножения на скаляр. Для внешнего умножения вводим новые условия:

a) Ассоциативность —

$$[U\,[VW]] = [[UV]\,W]. \tag{12a}$$

Отсюда следует, что при внешнем умножении двух мономов

$$U = a\,[u_1 u_2 \ldots u_p], \quad V = b\,[v_1 v_2 \ldots v_q],$$

где все u_i и v_j — различные символы, например $v_j = u_{p+j}$, коэффициенты множатся, а буквы u_i, v_j переписываются *без изменения порядка*.

b) Дистрибутивность —

$$\begin{aligned} [U + V,\; W] &= [UW] + [VW], \\ [U,\; V + W] &= [UV] + [UW]. \end{aligned} \tag{12b}$$

Отсюда следует, что многочлены, получаемые сложением мономов, множатся по правилам обычной алгебры только с соблюдением *порядка линейных множителей*.

c) Антикоммутативность —

$$[u_1 u_2] = -[u_2 u_1]. \tag{12c}$$

При перестановке множителей внешнее произведение двух символов u_i умножается на — 1.

Отсюда имеем целый ряд следствий:

Следствие 1. *Внешнее произведение двух линейных множителей меняет знак при перестановке множителей.*

Перемножая две линейные формы

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n = a_i u_i,$$
$$v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n = b_j v_j$$

по правилу умножения многочленов, получим сумму произведений

$$[uv] = a_i b_j\,[u_i v_j], \qquad i,\, j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

При перестановке множителей u и v в каждом члене правой части переставятся множители u_i и v_j, каждый член изменит знак, и вся сумма изменит знак.

Следствие 2. *Внешнее произведение любой степени меняет знак при перестановке двух линейных множителей.*

Если линейные множители v_k, v_{k+1} стоят рядом, то, пользуясь принципом ассоциативности, мы представим произведение в виде

$$[v_1 v_2 \ldots v_k v_{k+1} \ldots v_m] = \big[[v_1 v_2 \ldots v_{k-1}]\,[v_k v_{k+1}]\,[v_{k+2} \ldots v_m]\big].$$

При перестановке множителей v_k, v_{k+1} произведение $[v_k v_{k+1}]$ меняет знак, а вместе с ним меняет знак и всё произведение.

Если множители v_k, v_{k+1} стоят в произведении не рядом, то, переставляя последовательно множитель v_{k+1} с соседними линейными множителями и каждый раз умножая одновременно произведение на —1, мы поставим эти множители рядом. При этом

$$[v_1 v_2 \ldots v_k \ldots v_{k+1} \ldots v_m] = [-1]^p [v_1 v_2 \ldots v_k v_{k+1} \ldots v_m], \tag{13}$$

где p равно числу транспозиций, которые приводят множитель v_{k+1} на его место рядом со множителем v_k.

Переставляя множители v_k и v_{k+1} одновременно в левой и правой частях равенства, мы изменим знак правой части, а следовательно, и левой части.

Следствие 3. *Если указатели i_1, $i_2, \ldots, i_p$ являются взятыми в произвольном порядке целыми числами,* $1, 2, \ldots, p$, *то*

$$[u_{i_1} u_{i_2} \ldots u_{i_p}] = (-1)^m\,[u_1 u_2 \ldots u_p],$$

где m равно числу транспозиций, которые приводят указатели i_1, $i_2, \ldots, i_p$ в натуральный порядок $1, 2, \ldots, p$.

Это прямо следует из изменения знака при каждой транспозиции множителей.

Следствие 4. *Внешнее произведение равно нулю, если содержит два равных линейных множителя.*

Действительно, переставляя эти множители, мы, очевидно, не изменим произведение, а в то же время в силу следствия 2 оно должно умножиться на — 1. Значит,

$$U = -U,$$

откуда

$$2U = 0 \quad \text{и} \quad U = 0.$$

Следствие 5. *Внешнее произведение равно нулю, если между его линейными множителями $v_1, v_2, \ldots, v_p$ существует соотношение*

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_p v_p = 0$$

с постоянными коэффициентами.

---

[1]) Многие авторы, например Кэлер, Томас, а в отдельных мемуарах и Картан, записывают внешнее произведение без квадратных скобок. Так как в дифференциальной геометрии нередко приходится писать, наряду с внешним, обычное произведение дифференциалов (например, квадратичные формы поверхности), то мы сохраним первоначальное обозначение Картана.

Действительно, исключая при помощи этого соотношения один из множителей, например v_p, и пользуясь законом дистрибутивности, мы получим сумму произведений только из первых $p-1$ букв v_i. Так как все произведения содержат по p множителей, то каждое имеет два одинаковых множителя, а потому равно нулю.

Следствие 6. *В кольце n измерений $\mathfrak{R}[u_1, u_2, \ldots, u_n]$ все произведения степени выше n равны нулю.*

Действительно, если все множители выразить через символы u_i и воспользоваться законом дистрибутивности, то получим сумму произведений только из n символов u_i. Так как число множителей (равное степени произведения) больше n, то каждое произведение содержит одинаковые множители u_i, а потому равно нулю.

Правила умножения мономов и форм. Для умножения мономов степени выше первой мы имеем предложения:

Теорема 1. *Перестановка двух рядом стоящих мономов сохраняет знак внешнего произведения, если хотя бы один из множителей — чётной степени, и меняет знак, если оба множителя — нечётной степени.*

Если один моном U_p — степени p, а другой U_q — степени q, то для перестановки на новое место каждого из q линейных множителей монома U_q потребуется сделать p транспозиций, чтобы перешагнуть через p множителей монома U_p. Следовательно, всего необходимо будет сделать $m = pq$ транспозиций. Каждая транспозиция меняет знак прозведения; отсюда и вытекает теорема.

Теорема 2. *Перестановка двух мономов, разделённых третьим сохраняет знак внешнего произведения, если степени переставляемых мономов чётны, меняет знак, если они обе нечётны; если одна степень чётна, а другая нечётна, то вопрос решается степенью среднего монома: знак сохраняется, если эта степень чётна, и меняется, если нечётна.*

Если обозначить мономы по их порядку цифрами 1, 2 и 3, то перестановка первого и третьего мономов $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$ может быть разложена в произведение транспозиций:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&3\\2&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3&1\\3&2&1\end{pmatrix}.$$

Каждая транспозиция правой части переставляет соседние множители (мономы) произведения. Следовательно, изменение знака внешнего произведения для каждой из них определяется теоремой 1. Таким образом знак произведения изменится, если все три степени нечётны, ибо тогда каждая из трёх транспозиций правой части меняет знак; знак произведения изменится, если по крайней мере две степени нечётны, ибо тогда две транспозиции (с одной чётной степенью) сохраняют знак, а третья (с двумя нечётными степенями) — меняет знак. Отсюда прямо следует теорема.

Сумма мономов называется *полиномом*. Если все мономы полинома — одной степени, то полином является однородным и называется *формой*. Форма, состоящая из произведений с внешним законом умножения, называется *внешней формой*.

Теорема. *Обе доказанные для произведения мономов теоремы справедливы и для форм.*

К внешнему произведению двух форм приложим закон дистрибутивности. Следовательно, при внешнем умножении двух форм каждый моном одной формы умножается на каждый моном другой, с соблюдением порядка множителей.

Если в таком внешнем произведении две формы поменять местами, то меняются местами мономы первой и второй форм в каждом произведении, из которых складывается произведение обеих форм. При этом, поскольку все мономы одной формы — одной и той же степени, все частные произведения одновременно меняют знак от перестановки множителей или не меняют согласно теореме 1. Поэтому и всё произведение обеих форм или изменит знак или не изменит. Следовательно, теорема 1 распространяется на внешние произведения форм.

Нетрудно убедиться, что и теорема 2 имеет место не только для мономов, но и для форм. Действительно, всё доказательство этой теоремы основывается на разложении транспозиции двух множителей, разделённых третьим, на произведение трёх транспозиций двух рядом стоящих множителей, после чего для подсчёта знаков используется теорема 1. Мы видели, что теорема 1 имеет место и для транспозиций форм, а разложение одной транспозиции на произведение последовательно выполняемых трёх транспозиций не зависит от характера множителей. Таким образом и эта теорема распространяется на произведение форм.

Теорема 3. *Внешнее произведение равно нулю, если оно содержит множителем два раза одну и ту же форму нечётной степени.*

При перестановке этих двух множителей произведение, согласно теореме 2, должно менять знак, и в то же время от перестановки двух тождественно равных множителей произведение не изменится. Следовательно, оно равно нулю.

Теорема не имеет места для формы чётной степени, ибо в этом случае перестановка двух множителей не меняет знака произведения. Конечно, произведение, содержащее два раза множителем один и тот же моном произвольной степени, равно нулю, но это уже зависит от того, что всякий моном разлагается на линейные множители. Произведение содержит множителем два раза одну и ту же линейную форму (каждый множитель нашего монома), а потому равно нулю в силу теоремы 3.

Следствие. *Квадрат формы нечётной степени равен нулю. Произвольная степень формы чётной степени вообще не равна нулю, если только степень всего произведения не превысит число измерений кольца $\mathfrak{R}[u]$.*

Здесь слово «вообще» означает, что степень чётной формы может обратиться в нуль при специальном выборе коэффициентов. Например, степень чётной формы всегда равна нулю, если форма имеет делителем форму нечётной степени, ибо тогда всё произведение будет содержать по крайней мере два раза множителем эту форму нечётной степени.

В заключение отметим постулат о линейной независимости символов u_i, составляющих базис кольца $\mathfrak{R}[u]$.

Постулат. *Внешнее произведение произвольного числа различных символов u_i базиса кольца $\mathfrak{R}[u]$ отлично от нуля*:

$$[u_1 u_2 \ldots u_m] \neq 0. \tag{14}$$

Такое произведение всегда степенью не превышает числа измерений кольца, ибо число различных символов базиса по определению равно числу измерений кольца.

§ 5. Геометрическая интерпретация и числовое значение внешнего произведения

Первый образ. При введении символов u_i, составляющих базис кольца $\mathfrak{R}[u]$, мы дали им название векторов в смысле абстрактной алгебры, ибо действия в кольце точно соответствуют действиям над векторами. На этом можно построить геометрическую интерпретацию форм кольца.

Возьмём пространство n измерений и в нём n линейно независимых векторов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$, которые можно принять за координатные векторы. Тогда каждой линейной форме кольца

$$v = a_i u_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

можно поставить в соответствие вектор

$$\mathbf{v} = a_i \mathbf{u}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

При этом сумме форм будет соответствовать сумма векторов, умножению формы на скаляр — умножение вектора на скаляр.

Внешнее произведение двух линейных форм

$$v = a_i u_i, \quad w = b_i u_i$$

определяется не только этими формами, но и любой их линейной комбинацией

$$[\alpha v + \beta w, \ \gamma v + \delta w] = (\alpha\delta - \beta\gamma)[vw],$$

лишь бы определитель $\alpha\delta - \beta\gamma$ равнялся единице.

Следовательно, внешнему произведению $[vw]$ надо поставить в соответствие фигуру из двух векторов $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, взятых в определённом порядке, или любых двух векторов

$$\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}, \ \gamma\mathbf{v} + \delta\mathbf{w}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Эти векторы лежат в плоскости векторов $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ и могут быть выбраны произвольно, ибо ограничение на коэффициенты α, β, γ, δ может быть всегда удовлетворено изменением длины (или знака) одного из векторов.

Чтобы выяснить геометрический смысл этого ограничения, выберем 1) координатные векторы $\mathbf{u}_i$ так, чтобы первые два вектора $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ лежали в плоскости векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$. Тогда формы v и w будут иметь только по два члена:

$$v = a_1 u_1 + a_2 u_2,$$
$$w = b_1 u_1 + b_2 u_2,$$

и внешнее произведение будет содержать только один член:

$$[vw] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} [u_1 u_2].$$

Если $\mathbf{u}_i$ — единичные ортогональные векторы, то определитель $a_1 b_2 - a_2 b_1$ равен площади параллелограма, построенного на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$. Это видно хотя бы из того, что площадь треугольника OAB, где O — начало, а A и B концы векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$, определяется по формуле

$$\text{площадь } \triangle\, OAB = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Кроме того, эта площадь положительна, если обход вершин треугольника $\overrightarrow{OAB}$, т. е. поворот от вектора $\mathbf{v}$ к вектору $\mathbf{w}$, совпадает с поворотом от $\mathbf{u}_1$ к $\mathbf{u}_2$.

Таким образом мы можем поставить в соответствие произведению $[vw]$ параллелограм, построенный на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$, или любой другой параллелограм в той же плоскости, той же площади и той же ориентации (такой же обход вершин параллелограма при повороте от первого множителя ко второму). Такая фигура называется *бивектором*.

Аналогично, внешнему произведению p линейных форм

$$[v_1 v_2 \ldots v_p],$$

где

$$v_k = a_k^i u_i, \qquad k = 1, 2, \ldots, p; \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

---

1) О замене базиса кольца см. § 6.

соответствует *p-вектор* (*поливектор*). Он представляет фигуру определяемую p векторами $v_1, v_2, \ldots, v_p$ или любыми p-линейны комбинациями этих векторов с определителем подстановки, равны единице.

Понятие p-вектора содержит:

1) линейное подпространство, определяемое p векторами $v_1, v_2, \ldots, v_p$, т. е. связку векторов, образованную их линейными комбинациями;

2) скаляр, равный «объёму» p-мерного параллелепипеда, построе ного на векторах $v_1, v_2, \ldots, v_p$, как на рёбрах; если первые p коо динатных векторов u_i выбрать в подпространстве p-вектора, т p-вектор будет иметь только одну компоненту, а внешнее произведени только один член; скалярный коэффициент при мономе $[u_1u_2\ldots u_p$ в этом члене даёт величину этого «объёма»;

3) ориентацию p-вектора, которая зависит от порядка следования p векторов поливектора; она определяется знаком скалярного коэффициента в приведённом[1] к одному члену внешнем произведении.

В заключение отметим: произвольная квадратичная форма представляется суммой бивекторов. При этом сумма бивекторов только в том случае равна одному бивектору, когда квадратичная форма разлагается на произведение двух линейных форм.

Числовое значение внешнего произведения. Всякое выражение обычной алгебры имеет числовое значение, которое получается, если всем буквам придать произвольные числовые значения и произвести над ними указанные в алгебраическом выражении действия. При этом все алгебраические преобразования устанавливаются так, чтобы имел место основной принцип алгебраического тождества:

Два алгебраических выражения равны, если равны их числовые значения при произвольном, но одинаковом для обоих выражений выборе числовых значений букв.

Такой же принцип можно установить и для преобразований внешних форм в грассмановом кольце $\mathfrak{R}[u]$. С этой целью надо распространить на внешнее произведение понятие числового значения.

Чтобы получить числовое значение[2] внешнего произведения степени p

$$[u_1u_2\ \ldots\ u_p],$$

---

[1] Внешнее произведение $[v_1v_2\ldots v_p]$ приведено к одному члену, если новый базис

$$v_k = a_k^i u_i, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n$$

есть система линейных форм с положительным определителем $\det|a_k^i|$ и единственный член внешнего произведения в своей буквенной части содержит произведение $[v_1v_2\ldots v_p]$.

[2] Картан называет его «valeur» (величина).

надо задать p серий числовых значений входящим сюда символам базиса u_i:

$$\begin{array}{l} u_1^{(1)},\ u_2^{(1)},\ \ldots,\ u_p^{(1)}; \\ u_1^{(2)},\ u_2^{(2)},\ \ldots,\ u_p^{(2)}; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_1^{(p)},\ u_2^{(p)},\ \ldots,\ u_p^{(p)}, \end{array}$$

где все величины $u_i^{(\alpha)}$ — произвольно заданные числа. При этом условии числовое значение внешнего произведения равняется определителю, составленному из этих p^2 чисел.

Так же как и в элементарной алгебре, мы будем писать равенство буквенного выражения и его числового значения:

$$[u_1u_2\ \ldots\ u_p] = \begin{vmatrix} u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & \ldots & u_p^{(1)} \\ u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & \ldots & u_p^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{(p)} & u_2^{(p)} & \ldots & u_p^{(p)} \end{vmatrix},$$

или коротко:

$$[u_1u_2\ \ldots\ u_p] = \det|u_i^{(\alpha)}|, \qquad i, \alpha = 1, 2, \ldots, p,$$

где справа записан тот же самый определитель.

Числовое значение монома равняется произведению числового значения внешнего произведения на коэффициент. Числовое значение формы равно сумме числовых значений её мономов.

Принцип равенства числовых значений. При таком определении числового значения нетрудно убедиться, что все установленные выше преобразования мономов и форм удовлетворяют принципу: *Две формы степени p равны, если равны их числовые значения при произвольном выборе p серий значений для символов базиса u_i.*

Для сложения, вычитания и умножения формы на скаляр правила действий грассмановой алгебры не отличаются от правил действий над числами. Следовательно, равенство форм повлечёт равенство их числовых значений и наоборот.

Нетрудно заметить, что и законам внешнего умножения можно поставить в соответствие теоремы преобразования определителей так, что числовые значения преобразованного выражения при всяких значениях u_i будут равны числовым значениям первоначального.

Действительно, закону антикоммутативности соответствует изменение знака определителя при перестановке столбцов, и при этом становятся очевидными следствия 1—6, § 4. Закону дистрибутивности в применении к линейным множителям соответствует преобразование определителя, у которого каждый элемент одного столбца равен сумме соответствующих элементов двух других определителей. Накнец, закону ассоциативности

$$[[u_1 u_2 \dots u_p][v_1 v_2 \dots v_q]] = [u_1 u_2 \dots u_p v_1 v_2 \dots v_q]$$

можно поставить в соответствие разложение определителя из $p+q$ строк и столбцов

$$\begin{vmatrix} u_1^{(1)} & u_2^{(1)} \dots & u_p^{(1)} & v_1^{(1)} \dots & v_q^{(1)} \\ u_1^{(2)} & u_2^{(2)} \dots & u_p^{(2)} & v_1^{(2)} \dots & v_q^{(2)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_1^{(p+q)} & u_2^{(p+q)} \dots & u_p^{(p+q)} & v_1^{(p+q)} \dots & v_q^{(p+q)} \end{vmatrix}$$

по правилу Лапласа на сумму произведений каждого минора из первых p столбцов на дополнительный минор из последних q столбцов.

При этом дополнительном условии, которое надо рассматривать как определение понятия числового значения внешнего произведения двух мономов, формулы (12a) и теоремы 1—3 относительно умножения форм становятся очевидными.

Наконец, постулат о неравенстве нулю внешнего произведения различных символов базиса кольца $\mathfrak{R}[u]$

$$[u_1 u_2 \dots u_p] \neq 0$$

прямо следует из того, что существуют определители порядка p, не равные нулю, и, следовательно, можно задать p серий значений $u_i^{(\alpha)}$ так, чтобы числовое значение произведения, т. е. определитель

$$\det |u_i^{(\alpha)}| \neq 0, \qquad i, \alpha = 1, 2, \dots, p,$$

был отличен от нуля.

Мы теперь можем доказать справедливость принципа равенства числовых значений.

Теорема. *Если при любом выборе значений $u_i^{(\alpha)}$ числовое значение формы равно нулю, то форма равна нулю, т. е. все коэффициенты при различных произведениях символов базиса равны нулю.*

Действительно, допустим, что коэффициент при внешнем произведении $[u_1 u_2 \dots u_p]$ не равен нулю. При этом форма не содержит другого члена с тем же произведением, т. е. все другие мономы формы имеют хотя один множитель u_{p+k}, отличный от множителей $u_1, u_2, \dots, u_p$ первого монома.

Мы зададимся p сериями значений

$$u_i^{(\alpha)} = \delta_i^\alpha, \qquad \delta_i^\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } i = \alpha, \\ 0, & \text{если } i \neq \alpha, \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, n; \ \alpha = 1, 2, \dots, p.$$

Тогда из всех внешних произведений по p символов базиса только первое равно единице:

$$[u_1 u_2 \dots u_p] = 1,$$

а все остальные равны нулю, ибо определитель из числовых значений будет содержать по крайней мере один столбец, все элементы которого равны нулю. Таким образом, при этом выборе значений $u_i^{(\alpha)}$ числовое значение формы сведётся к значению одного первого монома этой формы, а значение этого монома будет равно его коэффициенту. Так как все числовые значения формы равны нулю, то коэффициент при произведении $[u_1 u_2 \dots u_p]$ равен нулю.

Следствие. *Если все числовые значения двух форм равны, то формы после приведения подобных членов совпадут.*

Подобными называются члены, содержащие внешние произведения тех же самых символов базиса. Следовательно, подобные члены могут отличаться скалярными коэффициентами и порядком множителей внешнего произведения. Переставляя эти множители с изменением знака произведения, мы расположим их в одном порядке в каждом внешнем произведении из группы подобных членов формы. После этого общее внешнее произведение можно вынести за скобки, а коэффициенты, оставшиеся в скобках, сложить. Мы будем называть такой вид форм *приведённым*.

Итак, напишем обе наши формы, все числовые значения которых соответственно равны, в приведённом виде и составим их разность. Так как для новой формы все числовые значения равны нулю, то форма равна нулю, т. е. все коэффициенты её в приведённом виде равны нулю. При этом каждый коэффициент равен разности коэффициентов первых двух форм. Следовательно, в приведённом виде обе формы тождественно равны.

Заметим, что мы ввели определение: *Внешняя форма равна нулю, если после приведения подобных членов все коэффициенты её равны нулю.*

Второй образ. Числовые значения внешних произведений и форм позволяют построить новые векторные образы, соответствующие этим формам, — образы, которые получают особенно важное значение в теории дифференциальных уравнений.

Мы опять возьмём пространство n измерений и в нём декартову систему координат. Тогда каждой серии значений

$$u_1^{(\alpha)}, \ u_2^{(\alpha)}, \ \dots, \ u_n^{(\alpha)}$$

будет соответствовать вектор $u^{(\alpha)}$, который имеет этот ряд чисел своими координатами.

Система r линейных уравнений

$$\text{(a)} \qquad v_k \equiv a_k^i u_i = 0, \qquad k = 1, 2, \dots, r; \ i = 1, 2, \dots, n,$$

которые будем предполагать независимыми, наложит ограничение на произвол выбора числовых значений $u_i^{(\alpha)}$. Векторы $u^{(\alpha)}$ будут теперь помещаться в линейном подпространстве $n-r$ измерений, определяемом системой уравнений (a).

Две серии значений

$$u_1^{(1)},\ u_2^{(1)},\ \ldots,\ u_n^{(1)};$$
$$u_1^{(2)},\ u_2^{(2)},\ \ldots,\ u_n^{(2)}$$

позволят вычислить числовые значения всех внешних произведений $[u_i u_j]$, которые можно рассматривать как координаты бивектора, определяемого векторами $u^{(1)}$, $u^{(2)}$.

Таким же образом p серий $u_k^{(\alpha)}$ позволят определить все внешние произведения степени p, которые составят координаты p-вектора, определяемого векторами $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(p)}$. Само собой понятно, что эти p серий значений $u_k^{(\alpha)}$ позволяют вычислить числовые значения внешних произведений любой степени $m<p$ и даже ряд таких значений для различного выбора m серий из p заданных, т. е. они определяют целый ряд m-векторов. Все эти m-векторы принадлежат нашему p-вектору.

Если координаты $u_i^{(\alpha)}$ вектора $u^{(\alpha)}$ рассматривать как однородные координаты, т. е. допускать умножение всех координат $u_i^{(\alpha)}$ на произвольный множитель, то при сохранении направления длина становится произвольной. Одна серия значений

$$u_1^{(1)},\ u_2^{(1)},\ \ldots,\ u_n^{(1)}$$

определяет в таком случае направление прямой, выходящей из начала координат, т. е. линейный элемент. Две серии значений $u_i^{(1)}$, $u_i^{(2)}$ определяют до произвольного множителя числовые значения всех произведений $[u_i u_j]$, т. е. плоскость и ориентацию бивектора $\{u^{(1)}, u^{(2)}\}$, но не его площадь. Они определят, стало быть, однородные координаты ориентированной плоскости.

Вообще, p серий значений $u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, \ldots, u_i^{(p)}$ определяют однородные координаты ориентированного p-мерного линейного подпространства.

§ 6. Система линейных форм

Рассмотрим систему s форм Пфаффа

$$v_k = a_k^i u_i, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n; \quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ s$$

Напомним прежде всего признак линейной зависимости форм.

Теорема. *Если s форм Пфаффа линейно зависимы, то их внешнее произведение равно нулю.*

Эта теорема была доказана в § 4 как следствие 5.

Обратная теорема. *Если внешнее произведение s форм Пфаффа равно нулю, то формы линейно зависимы.*

Мы можем исходить из предположения, что произведения из $s-1$ таких форм не все равны нулю, иначе мы стали бы рассматривать произведение $(s-1)$-й степени. Итак, допустим, что внешнее произведение первых $s-1$ форм не равно нулю, т. е.

$$[v_1 v_2 \ldots v_s] = 0, \quad [v_1 v_2 \ldots v_{s-1}] \neq 0.$$

Если внешнее произведение равно нулю, то все его числовые значения равны нулю, а числовое значение внешнего произведения есть определитель из числовых значений форм $v_k^{(\beta)}$. Следовательно,

$$\text{(a)} \qquad \begin{vmatrix} v_1^{(1)} & v_2^{(1)} \ldots v_s^{(1)} \\ v_1^{(2)} & v_2^{(2)} \ldots v_s^{(2)} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_1^{(s)} & v_2^{(s)} \ldots v_s^{(s)} \end{vmatrix} = 0.$$

Выберем первые $s-1$ серий числовых значений символов базиса $u_i^{(\alpha)}$ так, чтобы числовое значение произведения $[v_1 v_2 \ldots v_{s-1}]$ было отлично от нуля:

$$[v_1 v_2 \ldots v_{s-1}] = A_s \neq 0.$$

Это возможно, так как рассматриваемое произведение по условию не равно нулю.

Разложим теперь определитель (a) по элементам последней строки. Мы получим

$$\text{(b)} \qquad A_1 v_1^{(s)} + A_2 v_2^{(s)} + \ldots + A_s v_s^{(s)} = 0,$$

где все A_k суть миноры матрицы, образованной из первых $s-1$ серий числовых значений форм v_k. Так как эти серии значений уже выбраны, то коэффициенты A_k — вполне определённые числа, не все равные нулю, ибо, например, A_s — не нуль.

Последняя серия значений $v_k^{(s)}$ осталась произвольной. Следовательно, равенство (b), справедливое при любом выборе числовых значений $u_i^{(s)}$, показывает, что линейная форма

$$A_1 v_1 + A_2 v_2 + \ldots + A_s v_s = 0$$

равна нулю, ибо все её числовые значения равны нулю. Формы v_k линейно зависимы, причём эту линейную зависимость можно разрешить относительно формы v_s, если произведение $[v_1 v_2 \ldots v_{s-1}]$ отлично от нуля.

Ранг системы. Ранг системы линейных форм v_k равен r, если все внешние произведения из $r+1$ форм системы равны нулю и хотя бы одно внешнее произведение из r форм отлично от нуля:

$$\begin{gathered}[v_{k_1}v_{k_2}\ldots v_{k_{r+1}}]=0,\\ [v_1v_2\ldots v_r]\neq 0,\end{gathered}\qquad k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_{r+1}=1,\ 2,\ \ldots,\ s.$$

Прежде всего покажем, что это определение ранга системы форм совпадает с обычным определением через ранг матрицы коэффициентов.

Теорема. *Ранг системы линейных форм равен рангу матрицы коэффициентов этих форм.*

Пусть ранг системы s форм

$$v_k=a_k^iu_i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ s;\quad i=1,\ 2,\ \ldots,n,$$

равен r. Нам надо показать, что ранг матрицы $\|a_k^i\|$ тоже равен r, т. е. все определители $(r+1)$-го порядка этой матрицы равны нулю и хотя бы один определитель порядка r — не нуль.

Выберем $r+1$ серий значений символов базиса u_i так, чтобы в каждой серии все значения, кроме одного, равнялись нулю и только значение того символа u_i, номер которого равен номеру серии, было равно единице:

$$u_i^{(\alpha)}=\delta_i^\alpha,\qquad \delta_i^\alpha=\begin{cases}1, & \text{если } i=\alpha,\\ 0, & \text{если } i\neq\alpha,\end{cases}$$
$$\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ r+1;\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Тогда числовые значения первой, второй и т. д. серий каждой формы v_k будут равняться соответственно первому, второму и т. д. коэффициенту этой формы:

$$v_k^{(1)}=a_k^1,\quad v_k^{(2)}=a_k^2,\quad \ldots,\quad v_k^{(r+1)}=a_k^{r+1},\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ r+1,$$

а числовое значение произведения — одному из определителей матрицы коэффициентов, именно:

$$[v_1v_2\ldots v_{r+1}]=\det|a_k^i|,\qquad i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,r+1.$$

Если все произведения $(r+1)$-й степени равны нулю, то и все определители $(r+1)$-го порядка матрицы коэффициентов равны нулю.

С другой стороны, по теореме Лапласа о произведении матриц, числовое значение произведения $[v_1v_2\ldots v_r]$ равно произведению матриц:

$$[v_1v_2\ldots v_r]=\begin{vmatrix}a_1^iu_i^{(1)} & a_2^iu_i^{(1)}\ldots & a_r^iu_i^{(1)}\\ a_1^iu_i^{(2)} & a_2^iu_i^{(2)}\ldots & a_r^iu_i^{(2)}\\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\ a_1^iu_i^{(r)} & a_2^iu_i^{(r)}\ldots & a_r^iu_i^{(r)}\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}a_1^1a_1^2\ldots a_1^n\\ a_2^1a_2^2\ldots a_2^n\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ a_r^1a_r^2\ldots a_r^n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_1^{(1)}u_2^{(1)}\ldots u_n^{(1)}\\ u_1^{(2)}u_2^{(2)}\ldots u_n^{(2)}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ u_1^{(r)}u_2^{(r)}\ldots u_n^{(r)}\end{pmatrix},$$

т. е. произведению попарно миноров порядка r первой и второй матрицы. Так как первая матрица есть матрица коэффициентов $\|a_k^i\|$, то все её определители порядка r не могут равняться нулю, иначе все числовые значения произведения $[v_1v_2\ldots v_r]$ равнялись бы нулю, что невозможно, так как $[v_1v_2\ldots v_r]\neq 0$.

Базис системы форм. Теорема. *Система линейных форм ранга r содержит ровно r линейно независимых форм; все остальные формы системы линейно выражаются через них.*

Первая половина теоремы прямо следует из того, что существует внешнее произведение r форм, не равное нулю:

$$[v_1v_2\ldots v_r]\neq 0.$$

В силу первой теоремы этого параграфа они линейно независимы. Мы будем говорить, что эти формы образуют *базис* системы линейных форм, а сами формы будем называть *формами базиса.*

Чтобы доказать вторую половину, заметим, что произведение любой формы v_k на первые r форм равно нулю, как произведение $r+1$ множителей. Следовательно, эти формы линейно зависимы:

$$A_1v_1+A_2v_2+\ldots+A_rv_r+Av_k=0.$$

При этом коэффициент A можно считать отличным от нуля, ибо он является числовым значением не равного нулю внешнего произведения $[v_1v_2\ldots v_r]$. Деля на A наше равенство, мы и представим любую форму v_k как линейную комбинацию форм $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_r$.

Эта совокупность линейно независимых форм $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_r$ удовлетворяет всем законам сложения, умножения на скаляр и внешнего умножения, наложенным на символы базиса u_i. Следовательно, мы можем их принять за основу при построении нового кольца форм $\mathfrak{R}[v]$. Присоединим к полю $\mathfrak{R}$ формы $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_r$. Мы получим r-мерное кольцо $\mathfrak{R}[v]$. Все формы его принадлежат кольцу $\mathfrak{R}[u]$, ибо после замены $v_k=a_k^iu_i$ они все будут линейно выражены через символы u_i. Следовательно, кольцо $\mathfrak{R}[v]$ является подкольцом n-мерного кольца $\mathfrak{R}[u]$.

Замена базиса кольца $\mathfrak{R}[u]$. Пусть $r=n$. Тогда присоединение к кольцу $\mathfrak{R}[v]$ символов u_i не изменит ранга системы форм. Действительно, внешнее произведение

$$[v_1v_2\ldots v_nu_i]=0$$

равно нулю, ибо в n-мерном кольце $\mathfrak{R}[u]$ все произведения выше n-й степени равны нулю. Между тем из равенства нулю внешнего произведения следует линейная зависимость форм, а так как

$$[v_1v_2\ldots v_n]\neq 0,$$

то u_i линейно выразятся через формы базиса v_k:

$$(c) \qquad u_i = A_i^k v_k, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Таким образом, не только формы кольца $\mathfrak{R}[v]$ принадлежат кольцу $\mathfrak{R}[u]$, но и наоборот, все формы кольца $\mathfrak{R}[u]$ принадлежат кольцу $\mathfrak{R}[v]$. Оба кольца форм совпадают, и второе кольцо отличается от первого только заменой базиса. Мы скажем, что формулы (c) определяют *замену базиса*. Имеем теорему:

Теорема. *Любые n линейно независимых форм Пфаффа кольца $\mathfrak{R}[u]$ можно принять за базис кольца.*

Вернёмся к системе r линейно независимых форм $v_1, v_2, \ldots, v_r$ кольца $\mathfrak{R}[u]$ n измерений. Допустим теперь, что

$$r < n.$$

Попрежнему имеем:

$$[v_1 v_2 \ldots v_r] \neq 0.$$

Будем умножать это произведение последовательно на $u_1, u_2, \ldots$, пока не найдём произведение $[v_1 v_2 \ldots v_r u_a]$, не равное нулю. Это произведение будем умножать на u_{a+1}, u_{a+2}, и т. д. Мы найдём ровно $r - n$ форм, например $u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_n$, которые вместе с $v_1, v_2, \ldots, v_r$ дадут произведение, не равное нулю:

$$[v_1 v_2 \ldots v_r u_{r+1} \ldots u_n] \neq 0.$$

Действительно, таких форм не может быть больше, ибо в кольце n измерений $\mathfrak{R}[u]$ все произведения из $n+1$ множителей равны нулю.

Таким образом ранг кольца $\mathfrak{R}[u]$ при замене базиса не может повыситься. С другой стороны, этих форм не может быть меньше, ибо тогда ранг кольца $\mathfrak{R}[u]$ при переходе к новому базису $v_1, v_2, \ldots, v_r, u_{r+1}, \ldots, u_{n-1}$ понизился бы. При обратном переходе он должен был бы повыситься, а мы только что видели, что это невозможно. Имеем теорему:

Теорема. *Всякую систему r линейно независимых форм*

$$v_1, v_2, \ldots, v_r$$

(систему ранга r) можно дополнить $n - r$ формами

$$v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_n$$

так, чтобы система всех n форм v_k была линейно независима.

§ 7. Лемма Картана

Существует целый ряд предложений, которые позволяют разрешить алгебраическое уравнение, в левой части которого стоит внешняя форма. За основу при этом мы будем брать принцип равенства форм: если внешняя форма равна нулю, то после приведения подобных членов коэффициенты при всех различных произведениях форм базиса кольца равны нулю.

Теорема 1 (лемма Картана). *Если между $2r$ линейными формами f_i, φ_i из n-мерного кольца $\mathfrak{R}[u]$ имеет место тождество*

$$(15) \qquad [f_1 \varphi_1] + [f_2 \varphi_2] + \cdots + [f_r \varphi_r] = 0$$

и система форм f_i — ранга r, то формы φ_k линейно выражаются через формы f_i с симметричной матрицей коэффициентов.

Дополним систему форм f_i формами $f_{r+1}, f_{r+2}, \ldots, f_n$ до полной системы n линейно независимых форм и примем её за новый базис кольца. Формы φ_k после замены базиса выразятся линейно через формы нового базиса $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Мы будем записывать отдельно заданные формы f_i и присоединённые f_λ:

$$(16) \qquad \varphi_k = c_{ki} f_i + c_{k\lambda} f_\lambda,$$

$$i, k = 1, 2, \ldots, r; \quad \lambda = r+1, r+2, \ldots, n.$$

Вносим эти выражения в заданное тождество (15). Так как

$$[f_k \varphi_k] = [f_k, c_{ki} f_i + c_{k\lambda} f_\lambda],$$

или

$$[f_k \varphi_k] = c_{ki} [f_k f_i] + c_{k\lambda} [f_k f_\lambda],$$

то равенство (15) примет вид

$$c_{ki} [f_k f_i] + c_{k\lambda} [f_k f_\lambda] = 0.$$

Только в первой сумме будут подобные члены. Во второй сумме все члены различны, ибо указатели k и λ пробегают различные значения: $k = 1, 2, \ldots, r$, а $\lambda = r+1, r+2, \ldots, n$. В первой сумме для любого сочетания по два из чисел $1, 2, \ldots, r$, например для сочетания 1, 2, найдётся два члена с указателями $k = 1$, $i = 2$ и $k = 2$, $i = 1$:

$$c_{12} [f_1 f_2] + c_{21} [f_2 f_1] = (c_{12} - c_{21}) [f_1 f_2].$$

Объединяя таким образом каждую пару подобных членов и пользуясь обозначением альтернирования

$$c_{[ki]} = \frac{1}{2} (c_{ki} - c_{ik}),$$

получим:

$$c_{[ki]} [f_k f_i] + c_{k\lambda} [f_k f_\lambda] = 0.$$

Так как подобные члены приведены, то коэффициенты равны нулю:

$$c_{k\lambda} = 0, \quad c_{[ki]} = \frac{1}{2} (c_{ki} - c_{ik}) = 0,$$

Первое равенство показывает, что формы f_λ совсем не встречаются в разложении форм φ_k:

$$\varphi_k = c_{ki} f_i, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, r.$$

Второе равенство показывает, что матрица коэффициентов симметрична:

$$c_{ki} = c_{ik}. \tag{17}$$

Для $r = 1$ получим следствие о делимости одной формы на другую.

Следствие. *Если внешнее произведение двух линейных форм f и φ равно нулю:*

$$[f\varphi] = 0,$$

то формы пропорциональны:

$$\varphi = cf, \qquad c \text{ — скаляр.}$$

Теорема 2. *Если внешняя квадратичная форма*

$$F = a_{[\alpha\beta]} [u_\alpha u_\beta], \qquad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n, \text{ сумма по сочетаниям}$$

равна нулю как следствие обращения в нуль линейно независимой системы r форм Пфаффа

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_r = 0,$$

то форма F разлагается на сумму внешних произведений:

$$F = [f_1\varphi_1] + [f_2\varphi_2] + \ldots + [f_r\varphi_r], \tag{18}$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ — подходяще подобранные линейные формы.

Дополним систему форм $f_1, f_2, \ldots, f_r$ до полной системы n линейно независимых форм $f_1, f_2, \ldots, f_n$ и примем её за базис. После замены базиса форма F примет вид

$$F = c_{[\alpha\beta]} [f_\alpha f_\beta], \qquad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n, \text{ сумма по сочетаниям.}$$

Разобъём слагаемые этой суммы на три группы:

1) слагаемые $c_{[ik]} [f_i f_k]$, где оба указателя не больше r;
2) слагаемые $c_{[\lambda\mu]} [f_\lambda f_\mu]$, где оба указателя больше r;
3) слагаемые $c_{i\mu} [f_i f_\mu]$, где один указатель меньше, другой больше r.

Только последняя сумма берётся по всем размещениям указателей, ибо с данным сочетанием i, μ может быть только один член. Форма F запишется теперь в виде

$$F = c_{[ik]} [f_i f_k] + c_{[\lambda\mu]} [f_\lambda f_\mu] + c_{i\mu} [f_i f_\mu], \tag{a}$$
$$i, k = 1, 2, \ldots, r; \; \lambda, \mu = r + 1, r + 2, \ldots, n.$$

Положим здесь

$$f_1 = f_2 = \ldots = f_r = 0.$$

Все формы f_i и f_k, где $i, k = 1, 2, \ldots, r$, обратятся в нуль; первая и последняя суммы исчезнут, а поскольку квадратичная форма F при этом обращается в нуль, мы получаем тождество

$$c_{[\lambda\mu]} [f_\lambda f_\mu] = 0, \qquad \lambda, \mu = r + 1, r + 2, \ldots, n.$$

Так как в левой части стоит квадратичная форма в приведённом виде (подобные члены приведены), то все коэффициенты равны нулю:

$$c_{[\lambda\mu]} = 0.$$

Вносим это в разложение (a) и получаем:

$$F = c_{[ik]} [f_i f_k] + c_{i\mu} [f_i f_\mu].$$

Если в первой сумме перейти к суммированию по размещениям:

$$F = c_{ik} [f_i f_k] + c_{i\mu} [f_i f_\mu],$$

и, собрав члены с одной формой f_i, вынести её за скобку:

$$F = [f_i, c_{ik} f_k + c_{i\mu} f_\mu],$$

то, обозначая

$$\varphi_i = c_{ik} f_k + c_{i\mu} f_\mu,$$

получим равенство (18).

Для $r = 1$ получим предложение из теории делимости форм.

Следствие. *Если внешняя квадратичная форма F обращается в нуль как следствие равенства нулю линейной формы $f = 0$, то она равна внешнему произведению формы f на линейную форму φ:*

$$F = [f\varphi].$$

§ 8. Внешняя форма и присоединённая косо-симметричная p-линейная форма

Числовое значение внешней формы степени p

$$F = a_{i_1 i_2 \ldots i_p} [u_{i_1} u_{i_2} \ldots u_{i_p}], \qquad i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n,$$

получится, если вместо каждого внешнего произведения подставить его числовое значение, т. е. определитель из p серий числовых значений множителей.

Если эти p серий значений символов базиса u_i оставить произвольными переменными

$$x_1^{(1)}, \; x_2^{(1)}, \; \ldots, \; x_n^{(1)};$$
$$x_1^{(2)}, \; x_2^{(2)}, \; \ldots, \; x_n^{(2)};$$
$$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$
$$x_1^{(p)}, \; x_2^{(p)}, \; \ldots, \; x_n^{(p)},$$

то значение внешней формы F примет вид формы с обычным законом умножения от p серий переменных:

$$(19)\quad {}_{j}\Phi = a_{i_1 i_2 \ldots i_p} \cdot \begin{vmatrix} x^{(1)}_{i_1} & x^{(1)}_{i_2} & \ldots x^{(1)}_{ip} \\ x^{(2)}_{i_1} & x^{(2)}_{i_2} & \ldots x^{(2)}_{ip} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ x^{(p)}_{i_1} & x^{(p)}_{i_2} & \ldots x^{(p)}_{ip} \end{vmatrix}, \quad i_1, i_2, \ldots, l_p = 1, 2, \ldots, n.$$

Форма Φ — линейная относительно каждой из p серий переменных

$$x_1^{(\alpha)},\ x_2^{(\alpha)}, \ldots, x_n^{(\alpha)}, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p,$$

при перестановке двух серий переменных каждый определитель изменит знак, а следовательно, переменит знак и форма Φ. Такая форма называется *косо-симметричной p-линейной присоединённой формой* внешней формы F.

Если форма F — квадратичная, то присоединённая ей форма Φ — билинейная косо-симметричная.

§ 9. Внешняя дифференциальная форма

Допустим теперь, что $\mathfrak{R}$ есть область всех аналитических[1] функций от независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Присоединим к области $\mathfrak{R}$ n символов $u_i = dx_i$, равных дифференциалам независимых переменных.

Тогда внешние формы кольца $\mathfrak{R}[u]$ обратятся во внешние дифференциальные формы *кольца дифференциалов* $\mathfrak{R}[dx]$:

$$(20)\quad \Omega = a_{i_1 i_2 \ldots i_p}[dx_{i_1}, dx_{i_2}, \ldots, dx_{ip}], \quad i_1 i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n,$$

где все коэффициенты — аналитические функции от независимых переменных.

Значение внешней дифференциальной формы. Понятие числового значения внешней формы распространяется и на внешние дифференциальные формы. Чтобы получить значение внешнего произведения p дифференциалов, надо задаться p сериями значений $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$. В каждой отдельной точке, т. е. для каждого ряда значений независимых переменных (x_i), значения дифференциалов (dx_i) могут быть взяты вполне произвольно. Во всём аналитическом пространстве $[x_i]$ эти значения нельзя брать произвольно. Они, очевидно, соответствуют различным символам дифференцирования и поэтому должны подчиняться требованиям переместительности [§ 2, (6)] символов дифференцирования.

---

[1] Во всей этой главе достаточно взять область всех непрерывных функций с непрерывными первыми частными производными.

Чтобы удовлетворить этим требованиям, мы можем, например рассматривать переменные x_i как функции p параметров $t_1, t_2, \ldots, t_p$, расположив эти последние в произвольном, но определённом порядке. Тогда p серий значений дифференциалов мы можем принять равными частным производным этих функций по каждому из параметров:

$$d_1 x_i = \frac{\partial x_i}{\partial t_1}, \quad d_2 x_i = \frac{\partial x_i}{\partial t_2}, \quad \ldots, \quad d_p x_i = \frac{\partial x_i}{\partial t_p}.$$

Дифференциалы параметров dt_i мы положили равными единице.

Значение внешнего произведения будет теперь равно функциональному определителю Якоби

$$[dx_{i_1}\, dx_{i_2} \ldots dx_{jp}] = \frac{\partial (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{ip})}{\partial (t_1, t_2, \ldots, t_p)}.$$

Так же строится значение внешнего произведения произвольных форм Пфаффа: подсчитав значение каждой формы для данной серии значений дифференциалов dx_i, составляем определитель из p серий этих p форм.

Значение внешней формы равно сумме значений её членов.

Геометрическая интерпретация. Первый образ. Рассмотрим аналитическое пространство переменных $[x_i]$, где каждая точка есть совокупность n координат (x_i). Присоединяем к каждой точке n-мерное векторное пространство с координатными векторами $\{dx_i\}$. Эти векторы мы можем, например, мыслить совпадающими с касательными к координатным линиям x_i нашего пространства, т. е. к линиям, вдоль которых все координаты, кроме одной x_i, сохраняют постоянное значение.

Тогда каждая форма Пфаффа

$$\omega = a_i\, dx_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

будет изображаться вектором с координатами a_i. Внешнее произведение p форм Пфаффа будет определять p-вектор, присоединённый к точке x_i и построенный на p векторах, определяемых множителями произведения. Внешняя форма, например квадратичная, представляет сумму бивекторов, определяемых членами формы.

Второй образ. Каждая серия значений, которые мы можем приписать дифференциалам dx_i, позволяет построить новый геометрический образ. Здесь значения дифференциалов $\{dx_i\}$ одной серии рассматриваются как координаты одного вектора.

Задание всех переменных x_i функциями произвольного параметра t:

$$x_i = f_i(t),$$

определяет в аналитическом пространстве $[x_i]$ линию. Совокупность дифференциалов

$$dx_i = \frac{d}{dt} f_i(t)\, dt$$

определяет вектор, касательный к этой линии.

Так как при дифференцировании постоянное слагаемое пропадает, то мы можем задать наши функции с произвольным постоянным слагаемым:

$$x_i = f_i(t) + C_i, \qquad C_i = \text{const}.$$

Они определят в аналитическом пространстве $[x_i]$ семейство линий так, что в известной области через каждую точку будет проходить одна линия с определённым направлением касательной. Таким образом задание дифференциалов $\{dx_i\}$ определяет в аналитическом пространстве векторное поле.

Если мы задаём переменные x_i как функции двух параметров:

$$x_i = f_i(t_1, t_2) + C_i,$$

то мы задаём семейство поверхностей. Полные дифференциалы

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_i}{\partial t_2} dt_2$$

при всяком выборе дифференциалов dt_j определяют вектор, касательный к некоторой линии на поверхности. В данной точке (x_i) все эти векторы принадлежат одному пучку, определяемому, например, векторами

$$d_1 x_i = \frac{\partial x_i}{\partial t_1} dt_1, \quad d_2 x_i = \frac{\partial x_i}{\partial t_2} dt_2$$

или любыми другими векторами пучка. Они все принадлежат бивектору, определяемому значениями внешних произведений для двух серий дифференциалов

$$[dx_i\, dx_k], \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

или, лучше, плоскому элементу $\mathcal{E}_2$ с этими координатами. Этот плоский элемент состоит из точки (x_i) и всех векторов $\{dx_i\}$ пучка. Так как все векторы пучка касаются поверхности, то плоский элемент называется *касательным элементом* поверхности.

Эти соображения распространяются на случай любого числа $p \leqslant n$ параметров. Уравнения

$$x_i = f_i(t_1, t_2, \ldots, t_p) + C_i$$

определяют семейство многообразий p измерений. Совокупность дифференциалов

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial t_\alpha} dt_\alpha, \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p,$$

определяет вектор, касательный к многообразию: он касается одной из его линий. Если здесь рассматривать dt_α как переменные параметры связки векторов, то вся связка векторов $\{dx_i\}$ в своей совокупности принадлежит p-вектору с координатами

$$[dx_{i_1}\, dx_{i_2} \ldots dx_{i_p}], \qquad i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n,$$

или, лучше, элементу $\mathcal{E}_p$ (p измерений), касательному к многообразию.

Элемент $\mathcal{E}_p$ содержит p независимых касательных линейных элементов и целый ряд элементов $\mathcal{E}_\nu$ (ν измерений, $\nu < p$), касательных к многообразию. Они получаются, если в полных дифференциалах dx_i наложить на дифференциалы параметров dt_α линейные зависимости в числе $p - \nu$, или, лучше, задать p параметров t_α функциями от новых параметров $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu$.

Замена переменных. Замена переменных x_i на новые независимые переменные $\overline{x}_i$ с помощью формул

$$x_i = x_i(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$$

имеет следствием преобразование дифференциалов dx_i:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_\alpha} d\overline{x}_\alpha, \qquad i, \alpha = 1, 2, \ldots, n,$$

откуда следует:

$$d\overline{x}_i = \frac{\partial \overline{x}_i}{\partial x_\alpha} dx_\alpha.$$

Новые переменные $\overline{x}_i$ должны быть выбраны так, чтобы система линейных форм $d\overline{x}_i$ имела ранг n, т. е. чтобы функциональный определитель Якоби

$$\frac{\partial(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

был отличен от нуля.

Внешнее произведение дифференциалов dx_i преобразуется во внешнюю дифференциальную форму

$$\text{(a)} \qquad [dx_{i_1} dx_{i_2} \ldots dx_{i_p}] = \frac{\partial x_{i_1}}{\partial \overline{x}_{\alpha_1}} \frac{\partial x_{i_2}}{\partial \overline{x}_{\alpha_2}} \ldots \frac{\partial x_{i_p}}{\partial \overline{x}_{\alpha_p}} [d\overline{x}_{\alpha_1} d\overline{x}_{\alpha_2} \ldots d\overline{x}_{\alpha_p}].$$

Если собрать члены с одним сочетанием указателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ и привести все произведения $[d\overline{x}_{\alpha_1} d\overline{x}_{\alpha_2} \ldots d\overline{x}_{\alpha_p}]$ к одному расположению множителей, то легко обнаружить, имея в виду изменение знака внешнего произведения при перестановке двух указателей α_i, α_k (т. е. двух множителей во внешнем произведении), что сумма произведений производных

$$\frac{\partial x_{i_1}}{\partial \overline{x}_{\alpha_1}} \cdot \frac{\partial x_{i_2}}{\partial \overline{x}_{\alpha_2}} \ldots \frac{\partial x_{i_p}}{\partial \overline{x}_{\alpha_p}} - \frac{\partial x_{i_1}}{\partial \overline{x}_{\alpha_2}} \cdot \frac{\partial x_{i_2}}{\partial \overline{x}_{\alpha_1}} \ldots \frac{\partial \overline{x}_{i_p}}{\partial x_{\alpha_p}} + \ldots,$$

которая окажется коэффициентом при внешнем произведении дифференциалов, есть функциональный определитель Якоби. Формула (a) примет вид

$$(21)\qquad [dx_{i_1}dx_{i_2}\ldots dx_{i_p}]=\frac{\partial(x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_p})}{\partial(\bar{x}_{\alpha_1},\bar{x}_{\alpha_2},\ldots,\bar{x}_{\alpha_p})}[d\bar{x}_{\alpha_1}d\bar{x}_{\alpha_2}\ldots d\bar{x}_{\alpha_p}],$$

$$\left.\begin{matrix} i_1 i_2,\ldots,i_p \\ \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p\end{matrix}\right\}=1,2,\ldots,\ n;\ \text{сумма по сочетаниям.}$$

Для $p=n$ это правило преобразования переменных во внешнем произведении дифференциалов можно формулировать в виде теоремы:

Теорема. *При преобразовании переменных внешнее произведение n дифференциалов умножается на функциональный определитель Якоби.*

Кратные интегралы. При преобразовании переменных

$$x_i=x_i(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)$$

в простом интеграле (например, криволинейном) надо заменить каждый дифференциал dx_i по формуле

$$(\mathrm{b})\qquad dx_i=\frac{\partial x_i}{\partial\bar{x}_\alpha}d\bar{x}_\alpha,\qquad i,\alpha=1,2,\ldots,n.$$

Так же заменяются дифференциалы при преобразовании переменных в линейной и во всякой обыкновенной дифференциальной форме. Например, линейный элемент пространства преобразуется простой заменой дифференциалов по формуле (b)

$$ds^2=g_{ik}dx_i dx_k=g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial\bar{x}_\alpha}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial\bar{x}_\beta}d\bar{x}_\alpha d\bar{x}_\beta.$$

Однако в кратном интеграле, например в интеграле по поверхности

$$\int\int a_{ik}\,dx_i\,dx_k,$$

квадратичная форма, стоящая под знаком интеграла, преобразуется по другому закону; каждое произведение дифференциалов умножается на якобиан подстановки:

$$\int\int a_{ik}\,dx_i\,dx_k=\int\int a_{ik}\frac{\partial(x_i,x_k)}{\partial(\bar{x}_\alpha,\bar{x}_\beta)}d\bar{x}_\alpha d\bar{x}_\beta,$$

подобно преобразованию внешней квадратичной формы. Следовательно, квадратичную форму, стоящую под знаком интеграла, надо рассматривать как внешнюю квадратичную форму. Перестановка двух дифференциалов dx_i, dx_k меняет знак произведения, ибо меняет знак якобиана под знаком интеграла в правой части равенства.

Таким образом устанавливается новое определение кратного интеграла, которое приписывает ему определённый знак в зависимости от выбранного порядка следования дифференциалов dx_i, dx_k. Чтобы связать с этим определением геометрический смысл интеграла, достаточно допустить, что выбранный порядок следования дифференциалов dx_i соответствует определённой ориентации поверхности (выбору положительной стороны поверхности), по которой берётся интеграл.

Эти соображения распространяются на кратные интегралы любой степени кратности.

Замена базиса. Кроме замены переменных, дифференциальная форма может преобразовываться заменой базиса.

Пусть нам даны n форм Пфаффа:

$$\omega_\alpha(d)=a^i_\alpha dx_i\qquad i,\alpha=1,2,\ldots,n.$$

Если ранг системы этих форм (как линейных алгебраических форм от букв dx_i) равен n, т. е. они линейно независимы, то, не меняя независимые переменные x_i, можно перейти к новому базису.

Пусть после разрешения относительно дифференциалов dx_i получаем систему формул

$$dx_i=A^\alpha_i\omega_\alpha(d).$$

Такое разрешение возможно, ибо определитель системы $\det|a^i_\alpha|$ при ранге системы, равном n, отличен от нуля, а A^α_i суть приведённые миноры определителя, т. е. миноры, делённые на определитель. Внося эти значения в дифференциальную форму Ω из кольца $\mathfrak{R}[dx_i]$, получим:

$$\Omega=a_{i_1i_2\ldots i_p}[dx_{i_1}dx_{i_2}\ldots dx_{i_p}]=$$
$$=a_{i_1i_2\ldots i_p}A^{\alpha_1}_{i_1}A^{\alpha_2}_{i_2}\ldots A^{\alpha_p}_{i_p}[\omega_{\alpha_1}\omega_{\alpha_2}\ldots\omega_{\alpha_p}].$$

Такой вид внешней дифференциальной формы представляет во многих случаях больше удобств, ибо не связывает с определённым выбором независимых переменных. При замене переменных формы ω_i преобразуются в равные им формы $\bar{\omega}_i$ от новых переменных.

§ 10. Внешнее дифференцирование

Повышение степени дифференциальных форм может быть следствием двух операций: внешнего умножения одной формы на другую форму и внешнего дифференцирования формы.

Определение. *Внешним дифференциалом* [1]) формы степени p

$$\Omega=a_{i_1i_2\ldots i_p}[dx_{i_1}dx_{i_2}\ldots dx_{i_p}],\qquad i_1i_2,\ldots,i_p=1,2,\ldots,n,$$

---

[1]) Картан не делает большого различия между производной и дифференциалом, ибо при произвольном задании дифференциала независимой переменной любым конечным числом ничто не мешает нам принять $dt=1$, и тогда

$$dx=\frac{dx}{dt}.$$

называется форма степени $p+1$

$$D\Omega = [da_{i_1 i_2 \ldots i_p}\, dx_{i_1} dx_{i_2} \ldots dx_{i_p}]. \tag{22}$$

Внешний дифференциал линейной формы. Если применить это правило дифференцирования к форме Пфаффа

$$\omega = a_i dx_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

то получим внешний дифференциал в виде

$$D\omega = [da_i\, dx_i]. \tag{a}$$

Для двух символов дифференцирования d и δ значение квадратичной формы (a) примет вид

$$D\omega = \Omega(d,\delta) = da_i \delta x_i - \delta a_i dx_i,$$

откуда

$$D\omega = d\,(a_i \delta x_i) - \delta\,(a_i dx_i) = d\omega(\delta) - \delta\omega(d). \tag{23}$$

Аналогично внешний дифференциал от квадратичной формы

$$\Omega = a_{ik}\,[dx_i dx_k]$$

имеет вид

$$D\Omega = [da_{ik}\, dx_i dx_k].$$

Для трёх символов дифференцирования d_1, d_2, d_3 присоединённая трилинейная форма напишется так:

$$D\Omega = \Theta\,(d_1,d_2,d_3) = d_1 a_{ik}\, d_2 x_i\, d_3 x_k - d_1 a_{ik}\, d_3 x_i\, d_2 x_k + $$
$$+ d_2 a_{ik}\, d_3 x_i\, d_1 x_k - d_2 a_{ik}\, d_1 x_i\, d_3 x_k + d_3 a_{ik}\, d_1 x_i\, d_2 x_k - d_3 a_{ik}\, d_2 x_i d_1 x_k.$$

Первая разность может быть представлена в виде

$$d_1\,\{a_{ik}\,(d_2 x_i\, d_3 x_k - d_3 x_i\, d_2 x_k)\} = d_1 \Omega\,(d_2,d_3),$$

где $\Omega\,(d_2, d_3)$ есть значение квадратичной формы Ω для двух символов дифференцирования d_2 и d_3. Преобразуя также две другие разности, получим:

$$D\Omega = \Theta\,(d_1,d_2,d_3) = d_1 \Omega\,(d_2,d_3) + d_2 \Omega\,(d_3,d_1) + d_3 \Omega\,(d_1,d_2). \tag{23'}$$

Аналогично пишется значение внешнего дифференциала (22).

Если в формулу (a) внести значение полного дифференциала

$$da_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_k}\, dx_k$$

Поэтому он всё время называл внешнюю квадратичную форму, соответствующую билинейному коварианту Фробениуса, внешней производной, обозначая её штрихом ω'. Кэлер (Kähler) отступил от этого, введя обозначение $d\omega$. Картан во втором издании «Espaces de Rieman» и в книге «Les systèmes diffèrentielles extérieurs et leurs applications géométriques», 1945, принял название внешнего дифференциала и обозначение $D\omega$.

и собрать вместе пары подобных членов, отличающихся только порядком множителей, получим:

$$D\omega = \frac{\partial a_i}{\partial x_k}\,[dx_k dx_i] = \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_k}\right)[dx_i dx_k] \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n; \tag{24}$$

сумма по сочетаииям.

Вводя два символа дифференцирования d и δ и выписывая значение квадратичной формы (24), т. е. присоединённую билинейную форму $D\omega = \Omega\,(d,\delta)$, мы получим:

$$D\omega = \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_k}\right)(dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i), \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n; \tag{24'}$$

сумма по сочетаниям.

Формулы (23), (24′) показывают, что значение внешнего дифференциала линейной формы совпадает с билинейным ковариантом Фробениуса. Таким образом имеем результат:

Следствие 1. *Внешний дифференциал линейной формы есть внешняя квадратичная форма, присоединённая к билинейному коварианту Фробениуса.*

Следствие 2. *Внешний дифференциал от полного дифференциала равен нулю.*

Это прямо вытекает из предыдущего: билинейный ковариант Фробениуса от полного дифференциала равен нулю, а поскольку присоединённая билинейная форма есть наиболее общее значение своей квадратичной формы, то обращение первой в нуль должно иметь следствием равенство нулю квадратичной формы; следовательно, внешний дифференциал как форма, присоединённая к билинейному коварианту, тоже будет равна нулю.

Это, впрочем, видно и непосредственно. Если

$$\omega = dy,$$

то ничто не мешает, меняя базис, включить y в число независимых переменных дифференциального кольца $\mathfrak{R}\,[dx]$. Тогда коэффициент при дифференциале есть единица: $a = 1$, $da = 0$, и внешний дифференциал $[da\, dy] = 0$ равен нулю.

Следствие 3 (теорема Пуанкаре). *Внешний дифференциал от внешнего дифференциала равен нулю.*

Действительно, по поводу каждого члена формы (22) можно сделать два предположения: или дифференциал коэффициента da линейно зависит от остальных дифференциалов dx_i, и тогда уже первый внешний дифференциал этого члена равен нулю, или все $p+1$ дифференциалов da, $dx_{i_1}, \ldots, dx_{i_p}$ линейно независимы, и тогда коэффициент a можно принять за новую независимую переменную, например, $a = x_{i_0}$, но в таком случае коэффициент внешнего дифференциала $[da\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_p}]$ равен единице и следующий внешний дифференциал равен нулю.

Правила дифференцирования. 1. *Внешний дифференциал суммы форм равен сумме внешних дифференциалов от слагаемых*

(25)
$$D(\Omega_1+\Omega_2)=D\Omega_1+D\Omega_2.$$

Ограничимся случаем форм одной степени. Тогда при сложении форм складываются коэффициенты подобных мономов. Если a есть коэффициент одного члена формы Ω_1, а b — подобного ему члена формы Ω_2, то соответствующий член суммы будет

$$(a+b)\,[dx_1,dx_2\ldots dx_p],$$

а его дифференциал —

$$[d(a+b)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_p]=[da\,dx_1\ldots dx_p]+[db\,dx_1\ldots dx_p].$$

Суммируя отдельно первые и вторые слагаемые, мы и придём к формуле (25).

2. *Если m — скалярная функция и Ω — форма любой степени, то*

(26)
$$D(m\Omega)=[dm,\Omega]+mD\Omega.$$

Достаточно рассмотреть один моном Ω_1 формы Ω:

$$\Omega_1=a\,[dx_1dx_2\ldots dx_p].$$

Тогда

$$\begin{aligned}D(m\Omega_1)&=D(ma\,[dx_1\,dx_2\ldots dx_p])=[d(ma)\,dx_1\ldots dx_p]=\\&=[a\,dm+m\,da,\ dx_1\ldots dx_p]=\\&=a\,[dm\,dx_1\ldots dx_p]+m\,[da\,dx_1\ldots dx_p],\end{aligned}$$

но

$$[da\,dx_1\ldots dx_p]=D\Omega_1,$$

$$a\,[dm\,dx_1\ldots dx_p]=[dm,\ a\,[dx_1\,dx_2\ldots dx_p]]=[dm\,\Omega_1],$$

откуда и следует формула (26).

3. *Если Ω — форма степени p и Θ — степени q, то*

(27)
$$D[\Omega\Theta]=[D\Omega,\ \Theta]+(-1)^p\,[\Omega\,D\Theta].$$

Достаточно рассмотреть произведение мономов

$$\Omega_1=a\,[dx_1\ldots dx_p],$$
$$\Theta_1=b\,[dy_1\ldots dy_q].$$

Если все переменные $x_1,\ldots,x_p,\ y_1,\ldots,y_q$ различны, то

$$[\Omega_1\,\Theta_1]=ab\,[dx_1\ldots dx_p\,dy_1\ldots dy_q]$$

и

$$\begin{aligned}D[\Omega_1\,\Theta_1]&=[d(ab)\,dx_1\ldots dx_p dy_1\ldots dy_q]=[b\,da+a\,db,\ dx_1\ldots dy_q]=\\&=b\,[da\,dx_1\ldots dx_p dy_1\ldots dy_q]+a\,[db\,dx_1\ldots dx_p\,dy_1\ldots dy_q].\end{aligned}$$

Так как скалярный коэффициент b можно внести за скобку внешнего произведения и поставить на любое место, то первое слагаемое прямо даёт произведение

$$[D\,\Omega_1,\Theta_1]=[[da\,dx_1\ldots dx_p]\cdot b\,[dy_1\ldots dy_q]].$$

Во втором слагаемом дифференциал db надо переместить с p дифференциалами dx_i; при каждой транспозиции произведение умножается на -1:

$$a\,[db\,dx_1\ldots dx_p\,dy_1\ldots dy_q]=(-1)^p\,[\Omega_1\,D\Theta_1],$$

откуда и вытекает формула (27).

§ 11. Интегральные теоремы

Теоремы Стокса (Stokes), Остроградского-Гаусса (Gauss) дают возможность взглянуть на внешние дифференциалы с новой точки зрения.

Теорема Стокса. *Если в аналитическом пространстве переменных $[x_i]$ двусторонняя поверхность S с непрерывной касательной плоскостью и её граница — линия L с непрерывной касательной, лежат в области непрерывности первых производных от коэффициентов линейной формы ω, то*

(28)
$$\oint\limits_L \omega=\int\limits_S D\omega,$$

причём направление интегрирования по кривой L и положительная сторона интеграции на поверхности S согласованы так, что любой вектор, касательный к поверхности S в какой-нибудь точке линии L и направленный вне области интеграции, и положительная касательная к линии L образуют положительный бивектор на поверхности S. Возможность однозначной ориентации поверхности S вдоль её границы L вытекает из её двусторонности.

Достаточно доказать формулу (28) для одного слагаемого

$$\omega_1=a\,dx.$$

Формула (28) примет теперь вид

(28′)
$$\oint\limits_L a\,dx=\int\limits_S [da\,dx].$$

Чтобы преобразовать интеграл по поверхности в двойной интеграл, надо задаться системой координатных линий на поверхности S и написать значение подинтегрального внешнего произведения, принимая, что две системы дифференциалов соответствуют дифференцированию вдоль этих линий.

Если на поверхности S коэффициент a есть функция одной переменной x, то da линейно зависит от dx, и интеграл по поверхности равен нулю, но тогда и интеграл по замкнутой кривой L — тоже нуль, ибо подинтегральное выражение $a\,dx$ будет полным дифференциалом.

Если же произведение $[da\,dx]$ на поверхности S не равно нулю, то переменные a и x независимы и их можно принять за криволинейные координаты на поверхности. Считая a за первую координату, а x — за вторую и присваивая символ d_1 дифференцированию вдоль линии a (линии $x = \text{const.}$), а символ d_2 — вдоль линии x, мы получим:

$$d_1 a = da, \quad d_2 a = 0,$$

$$d_1 x = 0, \quad d_2 x = dx$$

и

$$[da\,dx] = \begin{vmatrix} da & 0 \\ 0 & dx \end{vmatrix} = da\,dx,$$

и интеграл по поверхности примет вид

$$I = \iint\limits_R da\,dx,$$

где R — область интеграции на плоскости переменных a и x, которая соответствует куску поверхности S, ограниченному контуром L.

Допустим, что каждая линия a встречает контур l области R в двух точках, которые мы будем называть первой и второй в порядке возрастания параметра a. Если первую интеграцию производить по переменной a, то получим

$$I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} dx \int\limits_{(a)_1}^{(a)_2} da,$$

где $(a)_1$ и $(a)_2$ — значения параметра a в первой и второй точках пересечения прямой a с контуром l, а пределы интеграции α и β — наименьшее и наибольшее значения переменной x на контуре, которые соответствуют некоторым точкам A и B на кривой L.

Выполняя первую интеграцию и разбивая полученное выражение на два интеграла

$$I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (a)_2\,dx - \int\limits_{\alpha}^{\beta} (a)_1\,dx,$$

замечаем, что каждый из этих интегралов является криволинейным интегралом от функции a по контуру L от точки A до точки B соответственно по правой (геометрическое место вторых точек пересечения координатных линий a с контуром L) и по левой (геометрическое место первых точек) половине контура. Отсюда

$$I = \int\limits_{A2B} a\,dx - \int\limits_{A1B} a\,dx.$$

Меняя во втором интеграле порядок обхода и объединяя оба интеграла

$$I = \int\limits_{A2B} a\,dx + \int\limits_{B1A} a\,dx = \int\limits_{A2B1A} a\,dx,$$

получаем интеграл по замкнутому контуру, т. е. формулу (28′).

Таким образом формула (28) доказана. При этом положительный обход линии L и положительная сторона интеграции поверхности S удовлетворяют установленному правилу: положительная сторона поверхности S соответствует положительной стороне плоскости (a, x), которая в свою очередь определяется бивектором из единичных векторов первой a и второй x осей координат. Этот бивектор той же ориентации, как и бивектор, образованный внешней нормалью к изображению контура $A2B1A$ на плоскости и положительной касательной его.

Чтобы освободиться от ограничения, что контур L пересекает каждую линию $x = \text{const.}$ в двух точках, заметим, что всякая двусторонняя поверхность S может быть разбита на достаточно большое число достаточно малых частей S_1, S_2, ... так, чтобы ориентация вдоль всего контура удовлетворяла требованиям теоремы. Если при этом разбиение производится линиями $x = \text{const.}$ и $a = \text{const.}$, то каждая часть S_i, содержащая только внутренние точки области S, удовлетворяет ограничению на контур: каждая линия $x = \text{const.}$ (кроме тех двух, которые входят в состав её контура L_i) пересекает его в двух точках.

Чтобы распространить это ограничение и на те части S_k, которые прилегают к контуру L всей области S, заметим, что в силу непрерывности вращения касательной к линии L, а следовательно, и к её изображению l на плоскости (a, x), каждой точке P этой линии l можно присоединить число r так, что окружность радиуса r с центром P будет отсекать на линии l только один отрезок $P_1 P_2$, и на этом отрезке касательная в произвольной точке составит с касательной в точке P угол, не больший $\frac{\pi}{6}$. Поэтому каждая прямая плоскости (a, x), параллельная нормали к дуге $P_1 P_2$ в точке P, будет пересекать её не более чем в одной точке.

В силу той же непрерывности касательных нижняя граница всех чисел r для контура l есть положительное число $\rho > 0$.

Разобьём теперь плоскость (a, x) прямыми $a = \text{const.}$, $x = \text{const.}$ на квадраты со сторонами, не большими $\frac{\rho}{2}$. Каждый квадрат, содержащий точки контура l, будет лежать внутри одной из окружностей (P, r). Стоит только повернуть в этом квадрате оси координат так, чтобы ось $x=0$ стала параллельной нормали к линии l в центре окружности P, как пограничная область S_k, отрезанная контуром P_1P_2 от квадрата, будет удовлетворять всем требованиям. Формула (28') получится теперь в новых переменных; что же касается до равенства (28), то в силу инвариантности подинтегральных выражений, записанных в виде форм ω и $D\omega$, оно не зависит от выбора переменных и сохранит свой вид.

Складывая почленно равенства (28), записанные для каждой части S_i и S_k, заметим, что интегралы по поверхности в правых частях сложатся и дадут интеграл по всей поверхности S, а криволинейные интегралы по всем внутренним путям будут проходиться дважды в противоположных направлениях и взаимно уничтожаться, так что останется интеграл по контуру L.

Эта теорема обобщается на формы любой степени.

Теорема Остроградского-Гаусса. *Если в пространстве переменных $[x_i]$ аналитическое ориентируемое $(p+1)$-мерное многообразие $\mathfrak{M}_{p+1}$ и его p-мерная граница $\mathfrak{N}_p$ с непрерывно вращающейся касательной гиперплоскостью лежат в области непрерывности первых производных от коэффициентов формы Ω степени p, то*

$$\oint\limits_{\mathfrak{N}} \Omega = \int\limits_{\mathfrak{M}} D\Omega, \tag{29}$$

причём положительные ориентации многообразия $\mathfrak{M}_{p+1}$ и его границы $\mathfrak{N}_p$ согласованы так, что в каждой точке границы любой вектор многообразия $\mathfrak{M}_{p+1}$ с положительным направлением изнутри многообразия наружу и положительный p-вектор границы $\mathfrak{N}_p$ образуют положительный $(p+1)$-вектор многообразия $\mathfrak{M}_{p+1}$.

Для $p=1$ теорема Остроградского становится теоремой Стокса. Применим метод полной математической индукции: будем считать её доказанной для формы степени $p-1$ и обнаружим её справедливость для формы степени p.

Достаточно доказать теорему для одного слагаемого, чтобы, складывая полученные равенства, получить её для любой формы. Рассмотрим какой-нибудь моном и его внешний дифференциал

$$\Omega_1 = a[dx_1dx_2 \ldots dx_p], \quad D\Omega_1 = [da\, dx_1 \ldots dx_p]$$

и покажем справедливость тождества:

$$\oint\limits_{\mathfrak{N}} \Omega_1 = \int\limits_{\mathfrak{M}} D\Omega_1. \tag{29'}$$

1. Если коэффициент a на многообразии $\mathfrak{M}_{p+1}$ является функцией только переменных $x_1, x_2, \ldots, x_p$, то da линейно зависит от дифференциалов $dx_1, dx_2, \ldots, dx_p$, их внешнее произведение, а следовательно, и $D\Omega_1$ равны нулю; но тогда форма Ω_1 сама будет внешним дифференциалом другой формы ω степени $p-1$, и интеграл по замкнутому многообразию $\mathfrak{N}_p$ будет равен нулю.

Действительно, если y — какая-нибудь функция переменных x_i, то

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_\alpha} dx_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p,$$

и

$$[dy\, dx_2 \ldots dx_p] = \left[\frac{\partial y}{\partial x_\alpha} dx_\alpha\, dx_2 \ldots dx_p\right] = \frac{\partial y}{\partial x_1}\, [dx_1\, dx_2 \ldots dx_p].$$

Достаточно, следовательно, принять

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a,$$

чтобы получить

$$\Omega_1 = [dy\, dx_2 \ldots dx_p] = D\, \{y[dx_2 \ldots dx_p]\} = D\omega,$$

где ω — форма степени $p-1$:

$$\omega = y\, [dx_2 \ldots dx_p].$$

Для этой формы теорема по условию имеет место. Следовательно,

$$\int\limits_{\mathfrak{N}_p} \Omega_1 = \int\limits_{\mathfrak{N}_p} D\omega = \oint\limits_{\mathfrak{N}_{p-1}} \omega,$$

где $\mathfrak{N}_{p-1}$ — $(p-1)$-мерная граница многообразия $\mathfrak{N}_p$; но $\mathfrak{N}_p$ — замкнутое многообразие и границы (с числом измерений $p-1$) не имеет. Значит, $\mathfrak{N}_{p-1}$ равно нулю, и интеграл по этому многообразию — тоже нуль, т. е.

$$\int\limits_{\mathfrak{N}} \Omega_1 = 0,$$

и теорема доказана.

2. Если произведение

$$[da\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_p] \neq 0$$

на многообразии $\mathfrak{M}_{p+1}$ отлично от нуля, то переменные $a, x_1, \ldots, x_p$ на многообразии независимы и могут быть приняты за криволинейные координаты.

Так как многообразие $\mathfrak{M}_{p+1}$ по условию ориентируемо, то его можно разбить на достаточно малые части $\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \ldots$ так, что условие положительной ориентации на границе $\mathfrak{N}_p$ будет соблюдено. Если в пространстве переменных $a, x_1, x_2, \ldots, x_p$ это разбиение производить гиперплоскостями $a = \text{const.}$, $x_i = \text{const.}$, то каждый $(p+1)$-мерный куб $\mathfrak{m}$, не содержащий точек многообразия $\mathfrak{n}_p$, которое изображает в пространстве (a, x_i) границу $\mathfrak{N}_p$, будет, кроме того, удовлетворять ограничению: каждая линия a, т. е. $x_i = \text{const.}\,(i = 1, 2, \ldots, p)$, пересекает границу $\mathfrak{n}$ куба $\mathfrak{m}$ только в двух точках.

С другой стороны, в силу непрерывности вращения гиперплоскости, касательной к границе $\mathfrak{N}_p$, а следовательно, и гиперплоскости, касательной к её изображению $\mathfrak{n}_p$ в пространстве (a, x_i), каждой точке P многообразия $\mathfrak{n}_p$ можно присоединить число r так, чтобы: 1) гиперсфера (P, r) радиуса r с центром в точке P отсекала от многообразия $\mathfrak{n}_p$ только один кусок π; 2) нормаль ν' в произвольной точке многообразия π образовывала с нормалью ν в точке P угол, не больший $\frac{\pi}{6}$, и 3) все числа r для точек многообразия $\mathfrak{n}_p$ имели положительную нижнюю границу $\rho > 0$.

Если рёбра $(p+1)$-мерных кубов $\mathfrak{m}$ взять не больше $\frac{\rho}{2}$, то каждый куб $\mathfrak{m}'$, содержащий точки границы $\mathfrak{n}_p$, будет помещаться внутри хотя бы одной гиперсферы (P, r), и прямые пространства (a, x_i), параллельные нормали ν в точке P, могут пересекать соответствующий кусок π границы $\mathfrak{n}_p$ не более чем в одной точке, а всю границу $\mathfrak{n}''$ пограничной области $\mathfrak{m}''$, отсекаемой от куба $\mathfrak{m}'$ гиперповерхностью $\mathfrak{n}_p$, — в двух точках. Стоит только повернуть для куба $\mathfrak{m}''$ оси координат так, чтобы ось $x_i = 0$ была параллельна нормали ν, и область $\mathfrak{m}''$ будет удовлетворять ограничению на контур. Между тем в силу инвариантной записи уравнения (29′) замена перемеиных не изменит его вида.

Рассмотрим теперь одну из частей $\mathfrak{M}'$ области интеграции $\mathfrak{M}_{p+1}$ с границей $\mathfrak{N}'$, пересекающей линию $x_i = \text{const.}$ в двух точках M_1 и M_2, и пусть им соответствуют значения $(a)_1$ и $(a)_2$ параметра a, где $(a)_1 < (a)_2$. Интеграл по многообразию $\mathfrak{M}'$ от внешнего дифференциала $D\Omega_1$ можно представить в виде кратного интеграла

$$I = \int\limits_{\mathfrak{M}'} D\Omega_1 = \int\limits_{R'} dx_1 dx_2 \ldots dx_p \int\limits_{(a)_1}^{(a)_2} da,$$

где R' — проекция многообразия $\mathfrak{M}'$ на гиперплоскость $a = 0$ в пространстве переменных $a, x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Выполняя интегрирование по переменной a, мы получим два интеграла по области R':

$$I = \int\limits_{R'} (a)_2\, dx_1 \ldots dx_p - \int\limits_{R'} (a)_1\, dx_1 \ldots dx_p,$$

которые можно рассматривать как интегралы от монома Ω_1 по двум частям границы $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}'_1 + \mathfrak{N}'_2$, где $\mathfrak{N}'_2$ описывается точкой M_1, а $\mathfrak{N}'_2$ — точкой M_2. Тогда:

$$I = \int\limits_{\mathfrak{N}'_2} \Omega_1 - \int\limits_{\bar{\mathfrak{N}}'_1} \Omega_1.$$

Чертой $(\overline{\mathfrak{N}}'_1)$ отмечена другая ориентация многообразия $\mathfrak{N}'_1$: в обоих случаях (для $\mathfrak{N}'_2$ и для $\mathfrak{N}'_1$) p-вектор, определяющий ориентацию многообразия $\mathfrak{N}'_i$, получается из $(p+1)$-вектора с координатами

$$\{da, dx_1, \ldots, dx_p\},$$

который определяет ориентацию многообразия $\mathfrak{M}'$ посредством отбрасывания вектора, касательного к линии a и направленного в сторону возрастания параметра a. В точке M_2 вектор этого направления идёт вне многообразия $\mathfrak{M}'$, а в точке M_1 он направлен внутрь многообразия, ибо при возрастании параметра a линия a в точке M_1, пересекая границу $\mathfrak{N}'$, направлена внутрь многообразия $\mathfrak{M}'$, а в точке M_2, второй раз пересекая границу, направлена вне его.

Изменяя ориентацию многообразия $\overline{\mathfrak{N}}'_1$ с изменением знака интеграла и объединяя оба интеграла, мы получим:

$$I = \int\limits_{\mathfrak{N}'_2} \Omega_1 + \int\limits_{\mathfrak{N}'_1} \Omega_1 = \int\limits_{\mathfrak{N}'} \Omega_1.$$

Таким образом, для одной части $\mathfrak{M}'$ формула (29′) доказана.

Складывая интегралы (29′) для каждой части $\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \ldots$, мы получим в правой части интеграл по всему многообразию $\mathfrak{M}_{p+1}$. В левой части при интегрировании по всем внутренним перегородкам (разность между суммой $\mathfrak{N}' + \mathfrak{N}'' + \ldots$ и внешней границей $\mathfrak{N}_p$) каждая точка границы будет проходиться два раза с различной ориентацией, ибо вектор, касательный к линии a, будет направлен в противоположные стороны в зависимости от того, какую из двух смежных частей $\mathfrak{M}'$ или $\mathfrak{M}''$, разделённых общей частью границ $\mathfrak{N}'$ и $\mathfrak{N}''$, мы рассматриваем. Итак, интегралы по внутренним границам взаимно уничтожаются, и мы получаем:

$$\oint\limits_{\mathfrak{N}_p} \Omega_1 = \int\limits_{\mathfrak{M}_{p+1}} D\Omega_1.$$

После этого формула (29) получится простым сложением интегралов для отдельных мономов формы.

Приложение к отысканию внешнего дифференциала. Эти формулы позволяют найти внешний дифференциал, не отыскивая частных производных (которые могут и не существовать).

Всякий раз, как имеет место равенство

$$\oint\limits_{\mathfrak{N}_p} \Omega_1 = \int\limits_{\mathfrak{M}_{p+1}} \Omega_2 \tag{30}$$

для любого многообразия $\mathfrak{M}_{p+1}$ и его границы $\mathfrak{N}_p$, удовлетворяющих формулированным выше требованиям, мы можем считать:

$$D\Omega_1 = \Omega_2.$$

Между тем, формула (30) может быть установлена независимо от того вывода, который мы привели выше.

Например, из теории потенциала следует: если объём материальной массы V имеет границу S и ρ — плотность массы в какой-нибудь точке объёма V, а U — потенциал, то при непрерывности функции ρ потенциал U тоже непрерывен и допускает непрерывные первые производные. При этом

$$\oiint\limits_{S}\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\,dy\,dz + \frac{\partial U}{\partial y}\,dz\,dx + \frac{\partial U}{\partial z}\,dx\,dy\right\} = -4\pi \int\int\limits_{V}\int \rho\,dx\,dy\,dz.$$

Интеграл слева распространён на произвольную замкнутую поверхность S, а справа — на объём V, ограниченный этой поверхностью. Отсюда следует, что для формы

$$\Omega = \frac{\partial U}{\partial x}\,[dy\,dz] + \frac{\partial U}{\partial y}\,[dz\,dx] + \frac{\partial U}{\partial z}\,[dx\,dy]$$

внешний дифференциал будет:

$$D\Omega = -4\pi\rho\,[dx\,dy\,dz].$$

Если функция U допускает вторые частные производные, то

$$D\Omega = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)[dx\,dy\,dz],$$

и из сравнения правых частей последних двух равенств получается теорема Пуассона.

Но функция U может не допускать вторых производных, что, вообще говоря, будет иметь место, если не накладывать на функцию ρ дополнительных условий. В таком случае теорема Гаусса-Остроградского даёт возможность определить внешний дифференциал $D\Omega$.

ГЛАВА III

ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМАЯ СИСТЕМА ПФАФФА

§ 1. Условие полного дифференциала

Мы начнём эту главу со второго доказательства теоремы об обращении билинейного ковариантна в нуль. Пользуясь понятием внешнего дифференцирования, мы можем дать этой теореме более удобную формулировку [1]) (следствие 2, § 10, гл. II):

Теорема. *Линейная форма ω есть полный дифференциал, если её внешний дифференциал равен нулю.*

Так как криволинейный интеграл от полного дифференциала какой-либо функции равен разности значений функции в конце и начале пути и, следовательно, не зависит от пути интегрирования, то эту теорему можно высказать ещё в другой форме, вполне эквивалентной предыдущей.

Теорема. *Криволинейный интеграл*

$$u = \int\limits_{M_0 M_1} \omega \tag{1}$$

между точками M_0 и M_1 аналитического пространства $[x_i]$ не зависит от пути интегрирования, если внешний дифференциал подинтегральной формы равен нулю:

$$D\omega = 0.$$

Точнее говоря, мы докажем, что интеграл (1), взятый между точками M_0 и M_1 по кривым C_0 и C_1, имеет одну и ту же величину, если эти две кривые можно включить в семейство путей, соединяющих точки M_0 и M_1, так что во всей области этих путей коэффициенты формы ω и их частные производные первого порядка будут непрерывны. Именно: мы допустим, что семейство путей определяется уравнениями

(a) $$x_i = f_i(t, \lambda), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

---

[1]) В этой главе мы ограничимся требованием, чтобы коэффициенты форм были непрерывными функциями с непрерывными частными производными первого порядка.

где t—криволинейная координата на кривой и λ — параметр семейства, так что t принимает значение нуль в точке M_0 и единица в точке M_1 и λ — нуль на кривой C_0 и единица на кривой C_1; при этом форма $\omega(d)$, как форма от переменных t и λ, имеет коэффициентами при dt и $d\lambda$ непрерывные функции с непрерывными частными производными первого порядка в области значений $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. При этих допущениях мы докажем, что интеграл не зависит от параметра λ.

Введём два символа дифференцирования d и δ, полагая

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} dt, \quad \delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial \lambda} \delta\lambda,$$

что вполне удовлетворяет условию переместительности символов дифференцирования.

По условиям задачи, если (x_i^0) и (x_i^1)—координаты точек M_0 и M_1, то

$$\left.\begin{aligned} f_i(0, \lambda) = x_i^0 \\ f_i(1, \lambda) = x_i^1 \end{aligned}\right\} \text{независимо от значений } \lambda.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \delta x_i = 0 \\ \omega(\delta) = 0 \end{aligned} \text{ для } t = 0; \quad \begin{aligned} \delta x_i = 0 \\ \omega(\delta) = 0 \end{aligned} \text{ для } t = 1.$$

Форма $\omega(\delta)$ обращается в нуль вместе с δx_i, так как является однородным многочленом от δx_i.

Обозначим, кроме того,

$$u(t, \lambda) = \int\limits_0^t \omega(d),$$

если интеграл взят по пути λ. Тогда

$$\omega(d) = \frac{\partial u}{\partial t} dt = du,$$

как производная интеграла по верхнему пределу.

Так как при $t = 0$ пределы интеграции совпадают, то интеграл равен нулю: $u = 0$, а следовательно, и производная от него по λ равна нулю:

$$\delta u = 0 \text{ для } t = 0.$$

Напишем теперь значение внешнего дифференциала $D\omega = \Omega(d, \delta)$ для двух символов дифференцирования d и δ:

$$D\omega = \Omega(d, \delta) = d\omega(\delta) - \delta\omega(d).$$

Между тем

$$\delta\omega(d) = \delta\, du = d\delta u;$$

последнее преобразование законно в силу переместительности символов дифференцирования d и δ в применении к любой функции u. Значит, равенство нулю внешнего дифференциала

$$d\omega(\delta) - \delta\omega(d) = d\omega(\delta) - d\delta u$$

можно записать в виде равенства нулю полного дифференциала

$$d\{\omega(\delta) - \delta u\} = 0.$$

Это показывает, что разность $\omega(\delta) - \delta u$ не зависит от t, а так как при $t = 0$, как мы видели, и $\omega(\delta)$ и δu равны нулю, то, следовательно, при всех значениях t и λ

$$\omega(\delta) = \delta u.$$

Внесём сюда $t = 1$. Мы видели, что при $t = 1$ имеет место $\omega(\delta) = 0$. Значит,

$$\delta u = 0 \text{ при } t = 1, \quad \text{т. е. } \frac{\partial}{\partial \lambda} \int\limits_0^1 \omega(d) = 0,$$

а это и показывает, что интеграл (1) не зависит от пути интегрирования.

§ 2. Полный внешний дифференциал

Доказанная теорема обобщается на формы любой степени.

Мы начнём с леммы, которая сама по себе представляет интерес.

Лемма. *Если внешний дифференциал внешней формы Ω равен нулю и форма Ω не содержит дифференциала dx_n, то она не содержит переменной x_n и в своих коэффициентах.*

Действительно, пусть форма Ω написана в приведённом виде, т. е. в ней объединены вместе подобные члены, и

$$\Omega_1 = a\,[dx_1\, dx_2 \ldots dx_p]$$

— один из её мономов. Внешний дифференциал

$$D\Omega_1 = [da\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_p],$$

если заменить здесь

$$da = \frac{\partial a}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial a}{\partial x_i} dx_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

можно разбить на две части: члены, содержащие дифференциал dx_n (один член), и члены, не содержащие его:

$$D\Omega_1 = \frac{\partial a}{\partial x_n} [dx_n dx_1 \ldots dx_p] + \frac{\partial a}{\partial x_\lambda} [dx_\lambda dx_1 \ldots dx_p],$$
$$\lambda = p + 1, \ldots, n - 1.$$

Первый член не будет иметь себе подобных ни в одном члене внешнего дифференциала $D\Omega$, ибо ни в один член формы Ω не входит дифференциал dx_n, и имеется только один член, именно Ω_1, который содержит произведение $[dx_1 dx_2 \ldots dx_p]$.

Так как по условию $D\Omega$ равен нулю, то после приведения подобных членов коэффициенты при всех различных произведениях дифференциалов равны нулю. Равен нулю и коэффициент

$$\frac{\partial a}{\partial x_n} = 0.$$

Следовательно, коэффициент произвольного монома Ω_1 нашей формы не содержит x_n.

Теорема. *Если внешний дифференциал внешней формы Ω степени p равен нулю*:

$$(2) \qquad D\Omega = 0,$$

то она сама является внешним дифференциалом другой формы Θ степени $p-1$:

$$(3) \qquad D\Theta = \Omega.$$

Теорема очевидна, если форма Ω содержит только одну независимую переменную, ибо такая форма — линейная, и наша теорема составляет тривиальный случай теоремы о полном дифференциале; форма Θ становится формой нулевого измерения, а внешний дифференциал её — полным дифференциалом этой функции.

Если Ω — форма от двух независимых переменных, то она может быть или линейной, или квадратичной. В первом случае наша теорема составляет частный случай теоремы о полном дифференциале. Во втором случае форма Θ будет линейной, и можем положить

$$\Omega = [dx_2\Omega_1], \quad \Theta = B_1 dx_2 + \Theta_2,$$

где

$$\Omega_1 = A\,dx_1, \quad \Theta_2 = B\,dx_1.$$

Уравнение (3) даёт теперь условие

$$-[dx_2\,(dB_1)_0] + \left[dx_2\frac{\partial\Theta_2}{\partial x_2}\right] = [dx_2\,\Omega_1],$$

где $\frac{\partial\Theta_2}{\partial x_2} = \frac{\partial B}{\partial x_2}\,dx_1$ — производная от формы Θ_2 и $(dB_1)_0 = \frac{\partial B_1}{\partial x_1}\,dx_1$. Так как ни $(dB_1)_0$, ни Θ_2, ни Ω_1 не содержат dx_2, то отсюда следует

$$\frac{\partial\Theta_2}{\partial x_2} = \Omega_1 + (dB_1)_0,$$

или

$$\frac{\partial B}{\partial x_2} = A + \frac{\partial B_1}{\partial x_1}.$$

Мы можем, следовательно, задать произвольно B_1 как функцию от x_1, x_2 и найти B с произвольным начальным значением $B = B_0$ как функции от переменной x_1 для $x_2 = \overset{0}{x}_2$.

Применим метод полной математической индукции. Допустим, что теорема верна в кольце $(n-1)$-го измерения, и рассмотрим форму степени p от n переменных.

Внося в уравнение (2) произвольное постоянное значение $x_n = \overset{0}{x}_n$ и обозначая через Ω_0 значение формы Ω для $x_n = \overset{0}{x}_n$, получим:

$$D\Omega_0 = 0.$$

Так как форма Ω_0 содержит только $n-1$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, то уравнение

$$D\Theta_0 = \Omega_0$$

имеет решение, которое будем обозначать через Θ_0.

Разобьём заданную форму Ω и искомую Θ на члены, содержащие дифференциал dx_n, и члены, не содержащие его:

$$(\text{a}) \qquad \Omega = [dx_n\Omega_1] + \Omega_2, \quad \Theta = [dx_n\Theta_1] + \Theta_2.$$

Здесь Ω_2 и Θ_2 — формы той же степени, как Ω и Θ; формы Ω_1 и Θ_1 имеют степень на единицу ниже. Те и другие не содержат дифференциала dx_n, но могут содержать x_n в коэффициентах. Вносим эти значения Ω и Θ в уравнение (3).

Для этого составляем внешний дифференциал формы Θ и собираем отдельно члены, содержащие дифференциал dx_n. Такие члены могут явиться, прежде всего, при дифференцировании произведения $[dx_n\Theta_1]$. Следуя правилу внешнего дифференцирования произведения двух форм (стр. 112) и имея в виду, что внешний дифференциал от полного дифференциала равен нулю, получим:

$$D[dx_n\Theta_1] = -[dx_n D_0\Theta_1].$$

Знак минус возникает потому, что dx_n — форма нечётной степени. При этом внешний дифференциал берётся только по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, ибо член с дифференциалом dx_n при умножении на dx_n пропадёт. Это обстоятельство отмечено значком нуль в обозначении внешнего дифференциала D_0.

Затем члены, содержащие dx_n, могут появиться, когда будем брать производную по x_n от коэффициентов формы Θ_2. Обозначая частную производную от формы Θ_2 по переменной x_n при постоянных значениях всех остальных дифференциалов dx_i через $\frac{\partial\Theta_2}{\partial x_n}$, мы получим:

$$\left[dx_n\frac{\partial\Theta_2}{\partial x_n}\right].$$

Наконец, члены, не содержащие dx_n, получатся только при дифференцировании формы Θ_2 при постоянном x_n:

$$D_0\Theta_2.$$

Таким образом внешний дифференциал от Θ получит вид

$$D\Theta = -\left[dx_n D_0\Theta_1\right] + \left[dx_n \frac{\partial\Theta_2}{\partial x_n}\right] + D_0\Theta_2,$$

и уравнение (3) примет вид

$$\left[dx_n, \frac{\partial\Theta_2}{\partial x_n} - D_0\Theta_1\right] + D_0\Theta_2 = \left[dx_n\Omega_1\right] + \Omega_2. \tag{3'}$$

Форму Θ_1 мы выберем как произвольную форму от $n-1$ дифференциалов $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n-1}$. Что касается до формы Θ_2, то на неё придётся наложить три требования:

1. Для $x_n = x_n^0$ она должна обращаться в форму Θ_0:

$$(\Theta_2)_0 = \Theta_0, \tag{4}$$

ибо при постоянном x_n произведение $[dx_n\Theta_1]$ пропадает, и из уравнения (а) прямо следует формула (4).

2. Форма Θ_2 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\Theta_2}{\partial x_n} - D_0\Theta_1 = \Omega_1, \tag{5}$$

которое получится, если в уравнении (3′) сравнить члены, содержащие dx_n.

Из равенства нулю внешнего произведения $[dx_n, A] = 0$, где A есть левая часть уравнения (5), вообще следует: $A = \lambda\, dx_n$, но в данном случае ни Θ_2, ни $D_0\Theta_1$, ни Ω_1 членов с dx_n не содержат; следовательно, $\lambda = 0$, и мы получаем уравнение (5).

3. Форма Θ_2 удовлетворяет уравнению

$$D_0\Theta_2 = \Omega_2,$$

которое получится из того же уравнения (3′) сравнением остальных членов.

Покажем, что третье условие вытекает из первых двух. Действительно, из второго условия следует, что разность

$$\varphi = D\Theta - \Omega$$

не содержит дифференциала dx_n. С другой стороны, эта форма φ обращается в нуль, если внести туда $x_n = x_n^0$, ибо для постоянного x_n форма Θ обращается в $(\Theta_2)_0$, а по первому условию $(\Theta_2)_0$ удовлетворяет уравнению

$$D\Theta_0 - \Omega_0 = 0.$$

Так как внешний дифференциал от φ, очевидно, равен нулю:

$$D\varphi = D(D\Theta) - D\Omega = 0,$$

а форма φ не содержит dx_n, то в силу леммы она не содержит и переменной x_n и, равняясь нулю при $x_n = x_n^0$, будет равняться нулю тождественно. Следовательно, третье условие удовлетворяется автоматически в силу первых двух.

Таким образом, для определения формы Θ_2 или, собственно, всех её коэффициентов мы имеем дифференциальное уравнение первого порядка (5) и начальное условие (4). Произвольной остаётся форма Θ_1. Теорема доказана.

Общий произвол решения складывается из произвола формы Θ_1 степени $p-2$ и того произвола, с которым определяется форма Θ_0. Эта форма той же степени $p-1$, как и форма Θ, но принадлежит кольцу $\mathfrak{R}[dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n-1}]$, ибо теперь $x_n = x_n^0$. Она определяется из уравнений (а):

$$\Theta_0 = [dx_{n-1}\Theta_1'] + \Theta_2', \tag{a'}$$

совершенно аналогично, и её произвол складывается из произвола формы Θ_1' степени $p-2$ в новом кольце и произвола определения формы Θ_0', т. е. значения формы Θ для $x_n = x_n^0$, $x_{n-1} = x_{n-1}^0$, и т. д. Наконец, форма $\Theta_0^{(n-p)}$, как форма степени $p-1$ из кольца $\mathfrak{R}[dx_1, dx_2, \ldots, dx_{p-1}]$, будет состоять из одного члена, в разложении (а) второго члена $\Theta_2^{(n-p+1)}$ иметь не будет и, следовательно, останется вполне произвольной. Таким образом общий произвол решения сводится к произвольному заданию:

1) тех членов формы Θ, которые имеют множителем dx_n (произвол задания формы Θ_1),

2) значения для $x_n = x_n^0$ тех членов формы Θ, которые не содержат dx_n, но имеют множителем dx_{n-1} (произвол задания Θ_1'),

. . . .

$n-p$) значения для $x_n = x_n^0$, $x_{n-1} = x_{n-1}^0, \ldots, x_p = x_p^0$ тех членов формы Θ, которые не содержат $dx_n, dx_{n-1}, \ldots, dx_p$ [произвол задания $\Theta_1^{(n-p+1)}$].

Впрочем, непосредственно видно, что общее решение получится, если к одному частному решению прибавить внешний дифференциал произвольной формы степени $p-2$. Действительно, внешний дифференциал от разности любых двух решений равняется нулю, а этим свойством обладает только внешний дифференциал от произвольной формы, степень которой на единицу меньше. Следовательно, чтобы получить произвольное второе решение, надо прибавить к первому внешний дифференциал наиболее общей формы степени $p-2$.

§ 3. Система уравнений Пфаффа

Система уравнений Пфаффа есть совокупность линейных уравнений в полных дифференциалах. Она получается, если приравнять нулю систему линейных форм из кольца $\mathfrak{R}[dx]$. Такая система алгебраически эквивалентна совокупности уравнений, левые части которых образуют базис системы форм

$$\theta_k = a_k^i \, dx_i.$$

Эти уравнения мы будем иногда называть *уравнениями базиса* нашей системы.

Будем предполагать, что этот отбор уравнений уже произведён, и система r уравнений

$$(6) \qquad \theta_k \equiv a_k^i dx_i = 0, \qquad k = 1, 2, \dots, r, \; i = 1, 2, \dots, n,$$

содержит r линейно независимых уравнений

Интегральные многообразия. Если подстановка

$$(7) \qquad x_i = f_i(t_1, t_2, \dots, t_p), \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

приводит все уравнения (6) к тождеству, т. е. обращает в нуль все формы θ_k, то уравнения (7) определяют в аналитическом пространстве переменных $[x_i]$ интегральное многообразие p измерений $\mathfrak{M}_p$.

При этом предполагается, что функции (7) содержат свои аргументы $t_1, t_2, \dots, t_p$ существенно, т. е. что система форм dx_i в подкольце $\mathfrak{R}[dt_1, \dots, dt_p]$ имеет ранг p. Если базис этой системы образован дифференциалами $dx_1, dx_2, \dots, dx_p$, то

$$(8) \qquad [dx_1 dx_2 \dots dx_p] \neq 0.$$

Значение этого внешнего произведения в подкольце $\mathfrak{R}[dt_1, \dots, dt_p]$ совпадает с якобианом, который, следовательно, тоже отличен от нуля:

$$\frac{d(x_1, x_2, \dots, x_p)}{d(t_1, t_2, \dots, t_p)} \neq 0,$$

а отсюда следует возможность разрешения первых p уравнений (7) относительно параметров t_i. Внося эти значения t_i в остальные уравнения (7), получим для определения интегрального многообразия $\mathfrak{M}_p$ систему уравнений

$$(7') \qquad \begin{gathered} x_{p+1} = F_{p+1}(x_1, x_2, \dots, x_p), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = F_n(x_1, x_2, \dots, x_p). \end{gathered}$$

Мы будем называть переменные $x_1, x_2, \dots, x_p$ *независимыми переменными*, а $x_{p+1}, \dots, x_n$ — *неизвестными функциями*.

Две задачи интегрирования. Проинтегрировать систему уравнений Пфаффа — значит определить её интегральные многообразия. Эту задачу можно ставить двояким образом.

Поскольку все переменные x_i входят в уравнения системы (6) равноправно, естественно искать решение в виде уравнений (7), не делая различия между независимыми и зависимыми переменными. Это — первая постановка задачи.

Однако во многих случаях, например почти всегда в вопросах дифференциальной геометрии, уравнения Пфаффа заменяют систему уравнений в частных производных. При этом независимые переменные предписаны вплоть до любой замены между ними, т. е. вместо независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_p$ можно ввести y_i посредством формул

$$y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_p), \qquad i = 1, 2, \dots, p.$$

Вторая постановка задачи интегрирования формулируется тогда следующим образом: найти все интегральные многообразия системы (6), на которых формы Пфаффа $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ удовлетворяют неравенству (8).

Интегральные многообразия $\mathfrak{M}_1$. Всякая система уравнений Пфаффа допускает одномерные интегральные многообразия $\mathfrak{M}_1$.

Действительно, система (6) — ранга r, и, следовательно, матрица её коэффициентов $\|a_k^i\|$ — тоже ранга r; тогда существует определитель этой матрицы порядка r, не равный тождественно нулю. Пусть это будет определитель

$$(9) \qquad \det|a_k^j| \neq 0, \qquad k, j = 1, 2, \dots, r.$$

Мы зададим тогда все переменные x_ρ $(\rho > r)$ произвольными функциями от t:

$$(10) \qquad x_\rho = f_\rho(t), \qquad \rho = r + 1, \dots, n,$$

с единственным ограничением (кроме непрерывности функций и их первых двух производных), чтобы определитель (9) после замены (10) был отличен от нуля.

После подстановки функций (10) в систему (6) её можно рассматривать как систему обыкновенных уравнений с независимой переменной t и неизвестными функциями $x_1, x_2, \dots, x_r$. Так как определитель из коэффициентов при производных от независимых функций отличен от нуля, то систему можно разрешить относительно этих производных; она обратится при этом в систему Коши, и это обеспечит существование решения.

Сложнее дело обстоит с наличием интегральных многообразий двух и более измерений. Этот вопрос мы разрешим в гл. VI, а сейчас обратимся к вопросу о существовании интегральных многообразий наибольшего числа измерений.

Так как все уравнения системы алгебраически независимы, то число неизвестных функций не может быть меньше числа уравнений. Иначе мы могли бы исключить дифференциалы всех неизвестных функций, а так как дифференциалы независимых переменных не могут быть связаны никакими соотношениями, то придётся присоединить к системе конечные уравнения, полученные обращением в нуль коэффициентов. Если они удовлетворяются тождественно в силу уравнений системы, то ранг системы понижается, и некоторые уравнения системы будут следствием остальных. Если они содержат только независимые переменные, то приводят к противоречию. Если они содержат неизвестные функции, то позволят исключить одну или несколько неизвестных и приведут к новой системе уравнений.

Таким образом, чтобы получить интегральное многообразие наибольшего числа измерений, надо положить число независимых переменных равным разности между общим числом переменных и числом уравнений системы.

§ 4. Система Пфаффа, допускающая интегральные многообразия наибольшего числа измерений

Допустим, что система Пфаффа из r уравнений содержит n независимых переменных и r неизвестных функций. Обозначим независимые переменные буквами x_i, неизвестные функции буквами z_j, так что уравнения системы примут вид

$$(11) \quad \theta_k \equiv a_k^i\, dx_i + c_k^j\, dz_j = 0, \quad k, j = 1, 2, \ldots, r; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Мы должны предположить, что определитель системы не равен нулю:

$$\det|c_k^j| \neq 0, \qquad k, j = 1, 2, \ldots, r,$$

так что систему можно разрешить относительно дифференциалов dz_j.

Теорема 1. *Система* (11) *допускает не более одного решения с начальными значениями* x_i^0, z_j^0.

Рассмотрим аналитическое пространство переменных $[x_i]$. Возьмём в этом пространстве две точки M_0 и M_1 с координатами x_i^0 и x_i^1:

$$M_0(x_i^0), \quad M_1(x_i^1),$$

расположенные в одной односвязной области $\mathscr{D}$ непрерывности коэффициентов системы и их производных первого порядка. Покажем, что существует не более одного решения (z_j), принимающего в точке M_0 значения z_j^0; а именно: допустим, что такое решение существует, и покажем, что, зная (z_j^0), можно вычислить значения z_j, которые получатся, если с этим решением притти в точку M_1.

Зададимся некоторым путём интеграции, соединяющим точки M_0 и M_1 и всецело пролегающим внутри области $\mathscr{D}$. Пусть он определяется уравнениями

$$(12) \qquad x_i = f_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

причём $t = 0$ соответствует точке M_0, а $t = 1$ — точке M_1:

$$f_i(0) = x_i^0, \quad f_i(1) = x_i^1,$$

и все функции $f_i(t)$ и их производные первого порядка непрерывны в интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Так как система (11) удовлетворена в каждой точке области $\mathscr{D}$, а следовательно, и в каждой точке пути (12), то мы можем внести значения (12) в уравнения системы, полагая при этом параметр t независимой переменной. Получаемые уравнения

$$a_k^i f_i'(t) + c_k^j \frac{dz_j}{dt} = 0, \qquad k, j = 1, 2, \ldots, r; \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где штрихом обозначено дифференцирование по параметру t, можно разрешить относительно производных $\frac{dz_j}{dt}$, ибо определитель системы $\det|c_k^j|$ по условию не равен нулю. Мы получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений типа Коши

$$\frac{dz_j}{dt} = F_j(z_1, z_2, \ldots, z_r, t), \qquad j = 1, 2, \ldots, r,$$

которая при сделанных предположениях имеет только одну систему решений z_j, принимающих заданные значения $z_j = z_j^0$ в точке (x_i^0).

Отсюда, конечно, не следует существование решения системы (11), ибо, меняя путь интегрирования (12), мы будем получать, вообще говоря, другую систему обыкновенных уравнений, и решение с теми же начальными условиями будет приводить в точке M_1 к другим значениям z_j. Это будет показывать, что не существует однозначных функций z_j, удовлетворяющих системе (11) во всей области $\mathscr{D}$ и принимающих значения z_j^0 в точке (x_i^0).

Таким образом, мы можем установить только верхнюю границу степени произвола общего решения — r произвольных постоянных, именно: r значений z_j^0, принимаемых неизвестными функциями в начальной точке.

Вполне интегрируемая система. Теорема, которую мы доказали, даёт нам основание ввести определение.

Определение. Система Пфаффа *вполне интегрируема*, если существует решение для всякой системы начальных значений

$$x_i = x_i^0, \quad z_j = z_j^0$$

при условии, что в окрестности точки (x_i^0, z_j^0) коэффициенты a_k^i, c_k^j и их первые производные непрерывны и определитель $\det|c_k^j|$ отличен от нуля.

Мы теперь дадим необходимое (теорема 2) и достаточное (теорема 3) условия полной интегрируемости системы.

Необходимое условие

Теорема 2. *Если система Пфаффа* (11) *вполне интегрируема, то равенство нулю внешних дифференциалов*:

$$D\theta_k = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, r, \tag{13}$$

есть алгебраическое следствие системы (11).

Слова «алгебраическое следствие» означают, что система (13) будет удовлетворена, если рассматривать переменные x_i, z_j как независимые алгебраические величины так же, как и две системы дифференциалов dx_i, dz_j и δx_i, δz_j, при условии, что эти дифференциалы связаны уравнениями (11).

Закрепим начальные значения x_i^0 и будем рассматривать начальные значения z_j^0 как произвольные параметры. Так как для каждого выбора значений z_j^0 существует система решений z_j системы (11), то общее решение можно рассматривать как систему функций от двух рядов переменных x_i и z_j^0.

Эти решения по условию удовлетворяют системе (11) и всем её дифференциальным следствиям (продолженной системе), следовательно, в том числе и уравнениям

$$\Theta_k(d, \delta) = 0, \tag{13'}$$

которые получатся, если приравнять нулю коварианты Фробениуса, присоединённые к внешним производным (13).

Чтобы обратить все коварианты (13′) в нуль, надо подставить туда вместо (z_j) найденные общие решения, т. е. функции от переменных x_i и параметров z_j^0, а вместо dz_j и δz_j—дифференциалы этих функций по переменным x_i. Эту подстановку можно сделать двумя последовательными операциями.

Так как дифференциалы dz_j и δz_j, каждая система в отдельности, удовлетворяют системе (11) и могут быть отсюда определены, то мы можем сначала внести в уравнения (13′) значения dz_j и δz_j, найденные из системы (11) как функции от x_i, z_j и дифференциалов dx_i или, соответственно, δx_i; полученную таким образом систему обозначим номером (13*); она содержит четыре ряда переменных x_i, z_j, dx_i, δx_i. После этого мы можем внести вместо (z_j) общее решение системы (11), т. е. функции от x_i и z_j^0. Мы получим в левых частях функции от четырёх рядов переменных

$$x_i,\ z_j^0,\ \ dx_i \text{ и } \delta x_i.$$

Эти функции обращаются в нуль тождественно при всех значениях этих переменных.

Дадим величинам x_i, dx_i, δx_i произвольные, но определённые значения. Система (13*) будет содержать только одну серию переменных z_j и будет обращаться в тождество, если мы зададим произвольно величины z_j^0, из общих решений системы (11) подсчитаем соответствующие им (при заданных уже значениях переменных x_i) значения z_j и эти значения внесём в уравнения (13*). С другой стороны, эти числа z_j дают значения наших решений в точке (x_i) так же, как величины z^0 дают их в точке (x_i^0). Если z_j^0 при закреплённых значениях x_i^0, x_i определяют величины z_j, то и наоборот: можно произвольно задать z_j, и тогда общие решения системы (11) определят нам z_j^0. Это показывает, что уравнения (13*) обратятся в тождества при любых значениях четырёх рядов величин

$$x_i,\ dx_i,\ \delta x_i \text{ и } z_j.$$

Итак, все коварианты системы (13′) обратятся в нуль при любых значениях dx_i, δx_i, если исключить dz_j, δz_j с помощью системы (11), не применяя дифференцирования. Следовательно, система внешних дифференциалов обратится в нуль по исключении dz_j и δz_j с помощью уравнений (11). Это и значит, что система (13) есть алгебраическое следствие системы (11).

Достаточное условие

Теорема 3. *Если система* (13) *есть алгебраическое следствие системы* (11), *то эта последняя вполне интегрируема.*

При доказательстве теоремы 1 мы видели, что, задаваясь произвольно начальными значениями $z_j = z_j^0$ в точке $M_0\,(x_i^0)$ и некоторым путём интеграции M_0M_1, мы придём в точку $M_1\,(x_i^1)$ с определёнными значениями z_j. Покажем, что в условиях теоремы 3 эти значения не зависят от пути интегрирования.

Пусть нам даны два пути интегрирования C_0 и C_1 так, что их можно включить в непрерывное семейство путей C_λ:

$$x_i = f_i(t, \lambda), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{14}$$

где t — криволинейная координата на кривой C_λ, λ—параметр семейства, $t = 0$ соответствует точке M_0, $t = 1$ — точке M_1, $\lambda = 0$ — кривой C_0, $\lambda = 1$ — кривой C_1; все функции $f_i(t, \lambda)$ и их частные производные первого и второго порядков непрерывны в области $\mathscr{D}$, содержащей семейство путей (14).

Так как все кривые (14) проходят через точки M_0 и M_1, то

$$f_i(0, \lambda) = x_i^0; \quad f_i(1, \lambda) = x_i^1 \quad \text{независимо от } \lambda,$$

Вводим два символа дифференцирования: d — для дифференцирования по кривым C_λ при постоянном λ, δ — для перехода от одной кривой C_λ к другой при постоянном t:

$$d = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \delta = \frac{\partial}{\partial \lambda}, \qquad dt = d\lambda = 1.$$

В точках M_0 и M_1 значения x_i не зависят от λ; значит,

$$\delta x_i = 0 \text{ для } t = 0 \text{ и } t = 1.$$

В точке M_0 все z_j имеют начальное значение (z_j^0), не зависящее от λ, следовательно,

$$\delta z_j = 0 \qquad \text{для } t = 0.$$

Отсюда

$$\theta_k(\delta) = 0 \qquad \text{для } t = 0,$$

$$(15) \qquad \theta_k(\delta) = c_k^j \frac{\partial z_j}{\partial \lambda} \text{ для } t = 1.$$

Наконец, в любой точке пути

$$\theta_k(d) = 0,$$

ибо функции z_j удовлетворяют системе (11), если $d = \frac{\partial}{\partial t}$, так как они получены интегрированием системы обыкновенных уравнений, которые получаются из системы (11) при постоянном λ.

По условию система (13) есть алгебраическое следствие системы (11), т. е. каждая квадратичная форма $D\theta_k$ обращается в нуль в силу равенства нулю r линейных форм θ_j. Опираясь на теорему 2 § 7 гл. II, мы можем утверждать, что существуют линейные формы $\tilde{\omega}_{kj}$ так, что каждая форма $D\theta_k$ разлагается на сумму внешних произведений

$$D\theta_k = [\theta_j \tilde{\omega}_{kj}]; \qquad k, j = 1, 2, \ldots, r.$$

Напишем значение этой формы для двух символов дифференцирования d и δ:

$$d\theta_k(\delta) - \delta\theta_k(d) = \theta_j(d)\tilde{\omega}_{kj}(\delta) - \theta_j(\delta)\tilde{\omega}_{kj}(d).$$

Внося сюда

$$\theta_k(d) = 0, \quad \delta\theta_k(d) = 0, \quad d\theta_k(\delta) = \frac{\partial}{\partial t}\theta_k(\delta)$$

и обозначая при $\delta\lambda = 1$, $dt = 1$

$$\theta_k(\delta) = H_k, \quad \tilde{\omega}_{kj}(d) = -p_{kj},$$

получим:

$$(16) \qquad \frac{\partial H_k}{\partial t} = p_{kj} H_j, \qquad k, j = 1, 2, \ldots, r.$$

Величины H_k удовлетворяют, таким образом, системе обыкновенных уравнений (16) и, согласно формулам (15), имеют начальными условиями

$$(15') \qquad H_k = 0 \quad \text{при } t = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, r$$

В силу теоремы Коши этими условиями функции H_k вполне определены; существует только одно решение. Это единственное решение очевидно. Так как уравнения (16) однородны, то они удовлетворяются значениями

$$H_k = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, r.$$

Эти значения удовлетворяют и начальным условиям (15′). Они и будут единственным решением системы (16) при начальных условиях (15′).

Итак, при всяком t имеем $H_k = 0$, или

$$\theta_k(\delta) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, r.$$

Для $t = 1$ эта система по формулам (15) принимает вид

$$c_k^j \frac{\partial z_j}{\partial \lambda} = 0 \text{ при } t = 1, \qquad k, j = 1, 2, \ldots, r.$$

Так как по условию определитель из коэффициентов $\det|c_k^j|$ не равен нулю, то систему можно разрешить относительно производных

$$\frac{\partial z_j}{\partial \lambda} = 0 \text{ при } t = 1, \qquad j = 1, 2, \ldots, r,$$

это и означает, что в точке M_1, т. е. для $t = 1$, значения z_j не зависят от λ, т. е. от пути интегрирования.

Таким образом при начальных значениях z_j^0 существует единственная система функций, принимающих определённые значения в каждой точке области $\mathscr{D}$ аналитического пространства:

$$(17) \qquad z_j = \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Нетрудно убедиться, что эта система функций удовлетворяет системе Пфаффа $\theta_k = 0$. Действительно, для всякой точки M_1 области $\mathscr{D}$ и всякого пути (12), соединяющего её с начальной точкой M_0, уравнения (11) будут удовлетворены, если вместо переменных x_i, z_j внести их значения в точке M_1, а вместо дифференциалов dx_i, dz_j — дифференциалы их по параметру t. Эту подстановку можно сделать в два приёма: сначала внести вместо z_j функции (17), а вместо dz_j — полные дифференциалы их $dz_j = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx_i$; затем вместо x_i подставить координаты точки M_1, а вместо dx_i — дифференциалы $dx_i = f_i'(t)\,dt$. При этом в точке M_1, т. е. для $t = 1$, производные $f_i'(1)$ будут определять вектор касательной к кривой (12) в точке M_1. Так как путь интеграции (12) — произвольный, то и координаты вектора касательной к нему вполне произвольны. Следовательно, уравнения (11) будут удовлетворены для произвольных значений x_i (произвольность точки M_1) и произвольных значений dx_i (произвольность касательной), если вместо z_j внести функции (17), а вместо dz_j — их полные дифференциалы. Значит, функции (17) составляют решение системы.

Поскольку существует решение (z_j) при любых начальных значениях z_j^0, система (11) вполне интегрируема.

Интегрирование вполне интегрируемой системы. Приведённые рассуждения дают не только доказательство существования решения, но и метод получения этого решения.

В самом деле, выберем в качестве пути интегрирования, соединяющего точки M_0 и M_1, отрезок прямой M_0M_1 аналитического пространства. Такую прямую можно задать системой уравнений

$$x_i = x_i^0 + t(x_i^1 - x_i^0). \tag{18}$$

Очевидно, при $t=0$ имеем $x_i = x_i^0$, при $t=1$ имеем $x_i = x_i^1$; все функции x_i и их производные непрерывны.

Для определения z_j надо интегрировать систему обыкновенных уравнений

$$\bar{c}_k^j \frac{dz_j}{dt} + \bar{a}_k^i (x_i^1 - x_i^0) = 0, \qquad k, j = 1, 2, \ldots, r;\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\bar{a}_k^i$, $\bar{c}_k^j$ суть значения a_k^i, c_k^j после подстановки (18).

Интегралы этой системы обыкновенных уравнений с независимой переменной t при начальных условиях

$$z_j = z_j^0 \text{ для } t = 0$$

будут функциями от t и трёх рядов параметров z_j^0, x_i^0, x_i^1:

$$z_j = \varphi_j(t; z_k^0, x_i^0, x_i^1), \qquad j = 1, 2, \ldots, r.$$

Если сюда внести значение $t=1$, то получим искомое значение неизвестных функций z_j в точке $M_1(x_i^1)$:

$$z_j = \varphi_j(1; z_k^0, x_i^0, x_i^1), \qquad j = 1, 2, \ldots, r.$$

Здесь числа x_i^0 должны быть произвольны, но определённо выбраны. Постоянные z_k^0 суть r произвольных постоянных интеграции. Что касается величин x_i^1, то это — координаты точки M_1, т. е. той точки, в которой решение z_j подсчитывается. Следовательно, x_i^1 надо рассматривать как независимые переменные, и тогда функции φ_j будут давать общее решение системы.

§ 5. Приложение к геометрии. Уравнения структуры эвклидова пространства

Полученное условие, необходимое и достаточное для того, чтобы система Пфаффа была вполне интегрируема, находит себе хорошее приложение во многих вопросах дифференциальной геометрии и прежде всего при выводе уравнений структуры, определяющих компоненты бесконечно малых преобразований фундаментальной группы пространства.

Компоненты движений трёхгранника. Если мы возьмём обыкновенное метрическое пространство, то фундаментальной группой будет группа движений. Так как любой прямоугольный трёхгранник T может быть переведён подходящим движением пространства в любой другой, а при неподвижном трёхграннике пространство неподвижно, то бесконечно малые преобразования группы движений можно определять бесконечно малыми смещениями прямоугольного трёхгранника.

Если A — вершина трёхгранника, $\mathbf{A}$ — радиус-вектор точки A, $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$ — единичные векторы осей, то бесконечно малые перемещения трёхгранника определяются формулами

$$d\mathbf{A} = \omega_i \mathbf{I}_i, \quad d\mathbf{I}_k = \omega_{ki}\mathbf{I}_i, \qquad i, k = 1, 2, 3. \tag{19}$$

Формы Пфаффа ω_i, ω_{ki} называются *компонентами* движений трёхгранника. Они не могут быть выбраны произвольно.

Прежде всего трёхгранник T — прямоугольный, а векторы осей $\mathbf{I}_k$ — единичные. Следовательно, во всё время движения должны соблюдаться тождества

$$\mathbf{I}_k^2 = 1, \quad \mathbf{I}_i \cdot \mathbf{I}_k = 0. \tag{20}$$

Дифференцируя эти тождества, мы получили в § 1 гл. II

$$\omega_{ki} = -\omega_{ik}, \tag{20$'$}$$

откуда следует, что все компоненты ω_{ki} при $k=i$ равны нулю.

Однако это — не единственные и не самые важные условия, которым должны удовлетворять формы ω_i, ω_{ki}, чтобы их можно было принять за компоненты движения прямоугольного трёхгранника.

Уравнения структуры. Если существует движение трёхгранника T с компонентами ω_i, ω_{ki}, то существует семейство трёхгранников таких, что радиус-вектор вершины $\mathbf{A}$ и единичные векторы осей $\mathbf{I}_i$ удовлетворяют системе уравнений (19).

Эти уравнения имеют вид линейных однородных равенств между векторами. Каждое равенство распадается на три равенства для одноимённых координат этих векторов. Мы можем, следовательно, рассматривать равенства (19) как уравнения для любой из трёх координат этих векторов.

Каким условиям должны удовлетворять формы ω_i, ω_{ki}, чтобы система (19) допускала три системы решений $\mathbf{A}$, $\mathbf{I}_i$?

Если существует хотя бы одна система решений, то она удовлетворяет не только уравнениям системы, но и всем уравнениям продолженной системы, в том числе уравнениям, получаемым внешним дифференцированием уравнений системы (19).

Дифференцируя первое уравнение (19) согласно формуле (26) § 10, гл. II и помня, что внешний дифференциал от полного дифференциала равен нулю, получим

$$[dI_i\,\omega_i]+I_i\,D\omega_i=0,$$

или, после замены $dI_i=\omega_{ik}I_k$ из второй группы уравнений (19),

$$[\omega_{ik}\omega_i]\,I_k+I_i\,D\omega_i=0,$$

или, меняя во второй сумме указатель i на k и вынося I_k за скобку,

$$\text{(a)}\qquad \{D\,\omega_k+[\omega_{ik}\omega_i]\}\,I_k=0.$$

Так как три взаимно перпендикулярных вектора I_1, I_2, I_3 не лежат в одной плоскости, то они не могут быть связаны линейным соотношением. Если существует хотя бы одно решение системы (19), то коэффициенты при I_k в уравнении (a) должны равняться нулю:

$$D\,\omega_k+[\omega_{ik}\omega_i]=0.$$

Если здесь перенести внешнее произведение в правую часть и переставить множители, чтобы изменить знак, то получим:

$$D\,\omega_k=[\omega_i\omega_{ik}].$$

Вторые уравнения (19) точно так же дадут

$$D\,\omega_{ki}=[\omega_{kj}\omega_{ji}],$$

или, меняя обозначение указателей,

$$\text{(21)}\qquad \begin{aligned} D\omega_i&=[\omega_j\omega_{ji}],\\ D\,\omega_{ik}&=[\omega_{ij}\omega_{jk}].\end{aligned}$$

Эти уравнения называются *уравнениями структуры* эвклидова пространства.

Мы видели, что они имеют место, если существует хотя бы одно решение системы (19). С другой стороны, в силу уравнений (21) внешние дифференциалы обеих частей уравнений системы (19) равны между собой. Следовательно, по теореме 3 § 4 система вполне интегрируема. Имеем теорему:

Теорема. *Если существует хотя бы одно семейство прямоугольных трёхгранников, то компоненты ω_i, ω_{ik} движений его удовлетворяют уравнениям структуры* (21), *система* (19) ***вполне интегрируема и определяет единственное семейство для произвольно заданного начального положения трёхгранника,***

Действительно, чтобы определить вектор A или I_i, надо дать три координаты его. Мы и получим тройку решений системы (19), если зададим начальные значения всех трёх координат каждого вектора A, I_i, т. е. начальное положение трёхгранника.

Сохранение ортогональности трёхгранника. Чтобы завершить доказательство теоремы, надо показать, что трёхгранник при всех преобразованиях останется прямоугольным с единичными векторами осей, если в начальном положении векторы I_i заданы единичными и взаимно перпендикулярными.

Рассмотрим совокупность всех прямоугольных трёхгранников пространства. Каждый трёхгранник определяется тремя координатами своей вершины и тремя эйлеровыми углами, определяющими поворот его осей. Вся совокупность их зависит от шести параметров. Обозначим их через v_q. Компоненты бесконечно малых движений этих трёхгранников $\tilde{\omega}_i$, $\tilde{\omega}_{ik}$ — линейные формы от шести дифференциалов dv_q.

Определить движение трёхгранника T с компонентами ω_i, ω_{ik}, удовлетворяющими уравнениям (20′), (21), — значит выделить из всей совокупности трёхгранников пространства такое семейство, компоненты которого будут ω_i, ω_{ik}. Если формы ω_i, ω_{ik} зависят от дифференциалов du_j, то наша задача состоит в отыскании функций

$$v_q=\varphi_q(u_j),$$

удовлетворяющих системе уравнений

$$\text{(22)}\qquad \tilde{\omega}_i=\omega_i,\ \ \tilde{\omega}_{ik}=\omega_{ik}.$$

Формы ω_i, ω_{ik} по условию удовлетворяют уравнениям (20′), (21). Формы $\tilde{\omega}_i$, $\tilde{\omega}_{ik}$ удовлетворяют им, ибо они вычислены из действительных движений трёхгранника.

Дифференцируя внешним образом первые уравнения (22), получим, в силу уравнений (21):

$$[\tilde{\omega}_j\,\tilde{\omega}_{ji}]=[\omega_j\,\omega_{ji}].$$

Эти уравнения, очевидно, удовлетворены в силу уравнений системы (22). Точно так же убедимся, что внешние дифференциалы вторых уравнений (22) тоже являются следствием уравнений системы. Таким образом, условие полной интегрируемости системы (22) удовлетворено, и, следовательно, существует одна и только одна система решений, принимающих заданные начальные значения $v_q=v_q^0$ для $u_j=u_j^0$; т. е. из совокупности всех трёхгранников пространства выделяется одно и только одно семейство трёхгранников, удовлетворяющее двум условиям: компоненты перемещения трёхгранника определяются формами ω_i, ω_{ik} и для $u_j=u_j^0$ трёхгранник семейства совпадает с заданным трёхгранником пространства. Здесь всё время имеются в виду прямоугольные трёхгранники, хотя теорема сохраняет свою силу для любого семейства равных между собой трёхгранников.

Равенство двух семейств трёхгранников. Нетрудно заметить, что компоненты ω_i, ω_{ik} не зависят от выбора неподвижной системы координат. Действительно, при повороте осей декартовой системы координат координаты вектора меняются, но сам вектор A или I_i остаётся неизменным, а при переносе начала из этих векторов только радиус-вектор точки A получит постоянное слагаемое. Если начало координат O перенесено в точку O', то новый радиус-вектор $\overrightarrow{O'A}$ и старый — $\overrightarrow{OA}$ связаны соотношением

$$\overrightarrow{O'A}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{O'O}.$$

Однако, дифференцируя, получим:

$$d\overrightarrow{O'A}=d\overrightarrow{OA}.$$

Следовательно, в уравнениях (19) ни один из векторов dA, I_i или dI_i не изменится при преобразовании координат, останутся неизменными и компоненты ω_i, ω_{ik}.

Так как всякое движение пространства можно разложить на два преобразования: перенос пространства вместе с системой координат, не меняющий координат точек, и преобразование координат от новой системы координат к старой при неподвижном пространстве, то можно сказать, что компоненты ω_i, ω_{ik} инвариантны относительно группы движений. Отсюда сейчас же вытекает равенство двух семейств трёхгранников, соответствующих различным тройкам решений системы (19).

Действительно, пусть семейство трёхгранников (T_a) с начальным трёхгранником a_0 и семейство трёхгранников (T_b) с начальным трёхгранником b_0 определяются той же системой (19). Подвергнем всё семейство (T_b) преобразованию, именно: перенесём всё семейство так, чтобы начальный трёхгранник b_0 совпал с трёхгранником a_0. Так как при этом компоненты ω_i, ω_{ik} не изменятся, то после преобразования координаты всех векторов семейства будут удовлетворять той же самой системе уравнений (19), а поскольку начальный трёхгранник семейства совпал с трёхгранником a_0, а начальный трёхгранник определяет решение, то всё семейство (T_b) после переноса совпадёт с семейством (T_a). Таким образом имеем теорему:

Теорема. *Компоненты ω_i, ω_{ik}, удовлетворяющие условиям ортогональности (20′) и уравнениям структуры (21), определяют семейство трёхгранников до его положения в пространстве.*

Если формы ω_i, ω_{ik} содержат только две независимые переменные, то вершина трёхгранника описывает поверхность. Отсюда следствие:

Следствие. *Линейные формы ω_i, ω_{ik} от двух независимых переменных, удовлетворяющие условиям ортогональности и уравнениям структуры, определяют поверхность вплоть до её положения в пространстве.*

Так как две квадратичные формы поверхности определяют компоненты трёхгранника, связанного с поверхностью, например трёхгранника, образованного нормалью к поверхности и биссектрисами углов между касательными к координатным линиям, то две квадратичные формы поверхности определяют поверхность до её положения в пространстве. Уравнения структуры при этом переходят в уравнения Гаусса-Кодацци для коэффициентов двух квадратичных форм.

§ 6. Приложение к геометрии. Уравнения структуры афинного и проективного пространств

Афинное пространство. Афинное преобразование пространства вполне определено четырьмя парами соответствующих точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Такая четвёрка точек может быть задана радиусом-вектором A одной из этих точек A и тремя векторами $\mathbf{e}_i=\overrightarrow{AA_i}$, соединяющими эту точку (вершину трёхгранника) с тремя другими.

При бесконечно малом преобразовании все эти векторы получат бесконечно малые приращения, главную часть которых дают дифференциалы $d\mathbf{A}$, $d\mathbf{e}_i$. Эти дифференциалы, как всякие другие векторы пространства, определяются своими компонентами на три некомпланарных вектора:

$$d\mathbf{A}=\omega^i\mathbf{e}_i,\quad d\,\mathbf{e}_k=\omega_k^i\mathbf{e}_i,\qquad i,\,k=1,\,2,\,3. \tag{23}$$

Компоненты ω^i, ω_k^i суть формы Пфаффа от 12 параметров, от которых зависит общее афинное преобразование, например, 12 координат точек A, A_1, A_2, A_3.

Уравнения (23) совпадают с уравнениями (19), но теперь $\mathbf{e}_i$ — произвольные некомпланарные векторы пространства (не единичные и не ортогональные). Дифференцируя систему (23), мы получим уравнения

$$\left\{D\omega^i-[\omega^j\omega_j^i]\right\}\mathbf{e}_i=0,$$

$$\left\{D\omega_k^i-[\omega_k^j\omega_j^i]\right\}\mathbf{e}_i=0,$$

откуда, в силу линейной независимости векторов $\mathbf{e}_i$, получим опять уравнения структуры

$$\begin{aligned} D\omega^i&=[\omega^j\omega_j^i],\\ D\omega_k^i&=[\omega_k^j\omega_j^i]. \end{aligned} \tag{24}$$

Обратно, если формы ω^i, ω_k^j удовлетворяют системе (24), то система (23) вполне интегрируема и определяет единственное семейство трёхгранников, начальный трёхгранник которого совпадает с произвольно заданным трёхгранником.

Если формы ω^i, ω_k^i зависят от двух независимых переменных, то точка A (вершина трёхгранника) описывает поверхность. Система (23) будет тогда определять не только эту одну поверхность, но также и все те, которые из неё получаются произвольными афинными преобразованиями.

Проективное пространство. Проективное преобразование (коллинеация) пространства определяется пятью парами соответствующих точек. Удобнее, однако, ввести понятие *аналитической точки* [1]) A как совокупности четырёх однородных координат геометрической точки A. В однородных координатах x_1, x_2, x_3, x_4 проективное преобразование определяется линейными уравнениями

$$\overline{x_i} = a_i^k x_k, \qquad i, k = 1, 2, 3, 4,$$

где точка $(\overline{x_i})$ получается проективным преобразованием из точки (x_i). Нетрудно заметить теперь, что вершины координатного тетраэдра (0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) преобразуются в точки $A\,(a_i^4)$, $A_1\,(a_i^1)$, $A_2\,(a_i^2)$, $A_3\,(a_i^3)$. Так как коэффициенты a_i^k определяют преобразование, то проективное преобразование определяется заданием четырёх аналитических точек A_i, которые можно рассматривать как вершины тетраэдра, ибо они не лежат в одной плоскости.

Бесконечно малое преобразование такого тетраэдра определяется приращениями однородных координат вершин A_i, или, лучше, главной частью таких приращений, т. е. дифференциалами координат, которые можно рассматривать как аналитические точки dA_i. Как всякие аналитические точки, их можно разложить по четырём вершинам нашего тетраэдра:

$$(25) \qquad dA_i = \omega_i^k A_k, \qquad i, k = 1, 2, 3, 4.$$

Дифференцируя уравнения (25) внешним образом, получим

$$D\omega_i^k A_k + [dA_k, \omega_i^k] = 0,$$

или, исключая $dA_k = \omega_k^j A_j$ и заменяя в первом члене индекс суммирования k на j,

$$\{D\omega_i^j + [\omega_k^j \omega_i^k]\}\, A_j = 0.$$

---

[1]) Фиников, Проективно-дифференциальная геометрия, 1937, Введение.

Поскольку точки A_j не лежат в одной плоскости и, следовательно, линейно независимы, коэффициенты при A_j должны равняться нулю:

$$(26) \qquad D\omega_i^j = [\omega_i^k \omega_k^j].$$

Это — *уравнения структуры* проективного пространства.

Если компоненты ω_i^j удовлетворяют системе (26), то система (25) вполне интегрируема и определяет единственное семейство тетраэдров, начальный тетраэдр которого совпадает с произвольно заданным тетраэдром пространства.

Если формы ω_i^j зависят от двух независимых переменных, то любая из точек A_i описывает поверхность. Система (25) определяет, однако, не только эту поверхность, но и все те, которые получаются из неё произвольным проективным преобразованием.

ГЛАВА IV

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА И КЛАСС СЕМЕЙСТВА ВНЕШНИХ ФОРМ

§ 1. Внешняя алгебраическая форма

Нам придётся вернуться к теории внешней алгебраической формы, чтобы ввести понятие её ассоциированной системы.

Внешней формой степени p, как известно, называется сумма произведений по p множителей из форм базиса $\mathfrak{R}[u]$, взятых с произвольными скалярными коэффициентами

$$(1) \qquad F = a_{i_1 i_2 \cdots i_p} [u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_p}], \quad i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n.$$

Здесь каждый указатель пробегает, независимо от остальных, все значения 1, 2, ..., n. Следовательно, каждое слагаемое суммы соответствует некоторому размещению из n чисел 1, 2, ..., n по p. Среди этих слагаемых каждое имеет целый ряд себе подобных. Возьмём какое-нибудь сочетание $i_1, i_2, \ldots, i_p$ из n элементов $1, 2, \ldots, n$ по p; ему будет соответствовать внешнее произведение определённой группы форм базиса $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_p}$. Выполняя все возможные перестановки (в количестве $p!$), мы получим различные размещения указателей и, следовательно, различные члены формы F, но они будут содержать множителями те же самые формы базиса $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_p}$ только расположенные в другом порядке. Если переставить множители каждого внешнего произведения так, чтобы все буквы u_i были расположены в одном порядке (например, в порядке возрастания указателей i_k), то во всех членах формы, которые соответствуют одному сочетанию указателей $i_1, i_2, \ldots, i_p$, внешнее произведение форм базиса u_i будет одно и то же. Если его вынести за скобки, то в скобках будет содержаться сумма коэффициентов с переменными знаками, ибо при перестановке множителей внешнего произведения знак произведения сохраняется или меняется в зависимости от чётности или нечётности числа транспозиций этой перестановки.

Мы получаем таким образом сумму по всем сочетаниям указателей; её обозначают, подписывая под знаком суммы указатели суммирования в круглых скобках:

$$(1') \qquad F = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_p)}^{1,2,\ldots,n} \{a_{i_1 i_2 i_3 \cdots i_p} - a_{i_2 i_1 i_3 \cdots i_p} + \cdots\} [u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_p}].$$

Этот вид внешней формы мы называем приведённым. В приведённом виде все члены формы различаются по крайней мере одним множителем u_i. Следовательно, для неё имеет место предложение (стр. 94): *Если форма равна нулю, то все её коэффициенты в приведённом виде равны нулю.*

Возможна ещё другая запись этой суммы. Распространим на произвольное число p указателей $i_1, i_2, \ldots, i_p$ обозначение альтернации (стр. 101):

$$(2) \qquad a_{[i_1 i_2 \ldots i_p]} = \frac{1}{p!} \{a_{i_1 i_2 \ldots i_p} - a_{i_2 i_1 \ldots i_p} + a_{i_2 i_3 i_1 \ldots i_p} - \cdots\}.$$

В фигурных скобках стоит сумма всех коэффициентов $a_{i_1 i_2 \ldots i_p}$, которые получатся, если над указателями $i_1, i_2, \ldots, i_p$ выполнить все $p!$ возможных перестановок, причём слагаемые берутся с тем же знаком или с обратным в зависимости от чётности или нечётности перестановки. Очевидно, фигурная скобка в формулах (1′) и (2) содержит одну и ту же сумму.

Выполним теперь над формулой (1) последовательно две операции: совершим все возможные перестановки немых указателей $i_1, i_2, \ldots, i_p$, а затем переставим множители внешнего произведения так, чтобы буквы u_i расположились в порядке возрастания указателей, меняя знак члена, если перестановка содержит нечётное число транспозиций. Обе операции не изменят величины правой части: первая — потому, что изменение обозначений немых указателей суммирования не имеет значения, а вторая — потому, что перестановка множителей внешнего произведения с изменением знака в случае нечётности перестановки не меняет величины произведения. Поэтому, если мы сложим все полученные $p!$ равенств, то в левой части получим форму F, умноженную на $p!$, а в правой по вынесении за скобки одинаковых произведений $[u_{i_1} u_{i_2} \ldots u_{i_p}]$ — ту же самую сумму с чередующимися знаками p и коэффициентов $a_{i_1 i_2 \ldots i_p}$, которая стоит в фигурных скобках формулы (1′) и (2). Деля обе части на множитель $p!$, получим в каждом члене правой части коэффициентом выражение (2). Мы имеем таким образом формулу

$$(1'') \qquad F = a_{[i_1 i_2 \ldots i_p]} [u_{i_1} u_{i_2} \ldots u_{i_p}], \qquad i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n.$$

Здесь так же, как в формуле (1), все указатели независимо один от другого пробегают значения $1, 2, \ldots, n$. Коэффициенты (2) образуют косо-симметричную матрицу, ибо всякая транспозиция двух указателей i_k, i_{k+1} меняет знак коэффициента. Действительно, при этом в правой части выражения (2) число транспозиций, определяющих перестановку указателей в каждом члене суммы, увеличится на единицу; каждая чётная перестановка станет нечётной, сохранив свой знак. От этого вся сумма изменит знак.

Нетрудно заметить, что все члены суммы (1″), содержащие одни и те же буквы $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_p}$, но в различном порядке, равны между собой. Действительно, каждая транспозиция указателей i_k, i_{k+1} одновременно в произведении $[u_{i_1}u_{i_2}\ldots u_{i_p}]$ и у коэффициента $a_{[i_1i_2\ldots i_p]}$ меняет знак и внешнего произведения и коэффициента, следовательно, сохраняет знак всего члена. Так как число таких равных между собой членов составляет число перестановок из p элементов и, значит, равняется $p!$, то после приведения подобных членов этот множитель $p!$ сократится с таким же делителем, если коэффициент $a_{[i_1i_2\ldots i_p]}$ заменить по формуле (2), и мы вернёмся к сумме по сочетаниям (1′).

Мы будем говорить, что в формуле (1″) коэффициенты формы F *приведены к косо-симметричному виду.*

§ 2. Алгебраическое дифференцирование

В целом ряде преобразований внешней формы и, в частности, при построении ассоциированной системы удобно бывает пользоваться методом алгебраического дифференцирования внешних форм.

Определение. *Алгебраической производной* внешнего произведения или любого монома из кольца $\mathfrak{R}[u]$ по букве u_i называется результат двух операций: перенесения буквы u_i на первое место во внешнем произведении монома и замены этой буквы единицей. Производная от монома, не содержащего буквы u_i, равна нулю. Производная от полинома равна сумме производных его мономов.

Например,

$$\frac{\partial}{\partial u_1}[u_1u_2] = u_2, \quad \frac{\partial}{\partial u_2}[u_1u_2] = -u_1, \quad \frac{\partial}{\partial u_3}[u_1u_2] = 0.$$

Нетрудно убедиться, что алгебраическое дифференцирование форм подчиняется обычным правилам дифференцирования, если буква, по которой идёт дифференцирование, занимает во всех произведениях первое место.

Производные высших порядков (существуют только смешанные) строятся по обычным правилам, но изменение порядка дифференцирования двух последовательных дифференцирований меняет знак производной:

$$\frac{\partial^k}{\partial u_{i_1}\partial u_{i_2}\ldots\partial u_{i_k}} = -\frac{\partial^k}{\partial u_{i_2}\partial u_{i_1}\ldots\partial u_{i_k}}.$$

Рассмотрим производную формы степени p

$$F = a_{i_1i_2\ldots i_p}[u_{i_1}u_{i_2}\ldots u_{i_p}], \qquad i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n,$$

по какой-нибудь её переменной u_k. При суммировании каждый указатель, независимо от других, пробегает все значения от 1 до n, значит, принимает и значение k; при этом в зависимости от места, которое он занимает во внешнем произведении, производная будет иметь знак плюс или минус. Отсюда следует формула

$$\frac{\partial F}{\partial u_k} = a_{ki_2\ldots i_p}[u_{i_2}, \ldots u_{i_p}] - a_{i_1ki_3\ldots i_p}[u_{i_1}u_{i_3}\ldots u_{i_p}] + \ldots$$

Если коэффициенты приведены к косо-симметричному виду, то перестановка двух указателей изменит знак коэффициента:

$$-a_{[i_1ki_3\ldots i_p]} = +a_{[ki_1i_3\ldots i_p]},$$

а поскольку все указатели $i_1, i_2, \ldots, i_p$ — немые (указатели суммирования), их можно переименовать, обозначив так, чтобы в каждом произведении содержались буквы с указателями $i_2, i_3, \ldots, i_p$. Тогда, переставляя указатель k на первое место с изменением знака в случае нечётного числа транспозиций, мы обнаружим, что все члены в правой части будут равны. Следовательно,

$$\frac{\partial F}{\partial u_k} = pa_{[ki_2i_3\ldots i_p]}[u_{i_2}u_{i_3}\ldots u_{i_p}].$$

Умножая левую и правую части на u_k и суммируя по указателю k, получим:

$$\left[u_k\frac{\partial F}{\partial u_k}\right] = pa_{[ki_2\ldots i_p]}[u_ku_{i_2}\ldots u_{i_p}].$$

В правой части мы, очевидно, получаем первоначальную форму F, откуда и следует формула Эйлера

$$\left[u_k\frac{\partial F}{\partial u_k}\right] = pF. \tag{3}$$

Эта формула легко обобщается. Применяя её к производной $\frac{\partial F}{\partial u_{k_1}}$, получим:

$$\left[u_{k_1}\frac{\partial^2 F}{\partial u_{k_1}\partial u_{k_2}}\right] = (p-1)\frac{\partial F}{\partial u_{k_1}};$$

так можно продолжать и дальше до производной $(p-1)$-го порядка. Исключая из этих равенств производные, получим:

$$\left[u_{k_1}u_{k_2}\ldots u_{k_{p-1}}\frac{\partial^{p-1}F}{\partial u_k\,\partial u_{k_2}\ldots\partial u_{k_{p-1}}}\right] = p!\,F. \tag{3′}$$

§ 3. Присоединённая косо-симметричная p-линейная форма

В § 8 гл. II мы ввели понятие косо-симметричной p-линейной формы, присоединённой к внешней форме степени p

$$F=a_{[i_1 i_2 \ldots i_p]}\quad[u_{i_1}u_{i_2}\ \ldots\ u_{i_p}],\qquad i_1, i_2, \ldots, i_p=1, 2, \ldots, n.$$

Если задаться p сериями значений

$$x_1^{(\alpha)},\ x_2^{(\alpha)},\ \ldots,\ x_n^{(\alpha)},\qquad \alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ p,$$

где все $x_i^{(\alpha)}$ — произвольные переменные, то присоединённой формой называется соответствующее этому заданию значение внешней формы, т. е. косо-симметричная форма

$$(4)\qquad \Phi=a_{[i_1 i_2 \cdots i_p]}\cdot\det\left|x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(2)}\ \ldots\ x_{i_p}^{(p)}\right|,\quad i_1, i_2, \ldots, i_p=1, 2, \ldots, n,$$

где прямыми чертами с начальными буквами det обозначен определитель, для которого записано произведение элементов по главной диагонали.

Если внешняя форма F — квадратичная:

$$F(u)=a_{ik}[u_iu_k],\qquad a_{ik}=-a_{ki},\ i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

то присоединённая билинейная косо-симметричная форма имеет вид

$$\Phi(u,\ v)=a_{ik}(u_iv_k-u_kv_i),\qquad i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Если раскрыть скобки, затем во втором члене изменить немые указатели суммирования i и k на указатели k, i и, наконец, коэффициент a_{ki} заменить на $-a_{ik}$, то оба члена объединятся:

$$\Phi(u,\ v)=2a_{ik}u_iv_k.$$

Так как

$$\frac{\partial F}{\partial u_k}=-2a_{ik}u_i,$$

то

$$(5)\qquad \Phi(u,\ v)=-v_k\,\frac{\partial F}{\partial u_k},$$

и мы имеем теорему:

Теорема. *Билинейная косо-симметричная форма есть полярная форма своей внешней квадратичной.*

Формула (5) обобщается на формы любой степени.

Заметим прежде всего, что p-линейную косо-симметричную форму (4) можно записать, отбросив знак определителя, в виде

$$(4')\qquad \Phi\,(x^{(1)},\ x^{(2)},\ \ldots,\ x^{(p)})=a_{[i_1 i_2 \ldots i_p]}\,x_{i_1}^{(1)}\,x_{i_2}^{(2)}\ \ldots\ x_{i_p}^{(p)},$$

если только коэффициент $a_{[i_1 i_2 \ldots i_p]}$ приведён к косо-симметричному виду. Действительно, если собрать все члены с одним сочетанием указателей $i_1, i_2, \ldots, i_p$, то каждая перестановка указателей $i_1, i_2, \ldots i_p$ даёт одно из произведений элементов определителя по одному из каждой строки и каждого столбца, при этом в силу коммутативности произведения переменных $x_i^{(\alpha)}$ (не меняет знака при перестановках множителей) и косо-симметричности коэффициентов коэффициент при каждом из этих произведений будет одним и тем же (по абсолютной величине), но с разными знаками в зависимости от чётности или нечётности перестановки (числа необходимых транспозиций). Если его вынести за скобку, то в скобках будет стоять тот самый определитель, который записан в формуле (4).

С другой стороны, этот коэффициент, очевидно, равен алгебраической частной производной порядка p:

$$\frac{\partial^p F}{\partial u_{i_1}\ \partial u_{i_2}\ \ldots\ \partial u_{i_p}}=a_{[i_1 i_2 \ldots i_p]}.$$

Следовательно, p-линейная форма (4) определяется формулой

$$\Phi\,(x^{(1)},\ x^{(2)},\ldots,\ x^{(p)})=x_{i_1}^{(1)}\,x_{i_2}^{(2)}\ \ldots\ x_{i_p}^{(p)}\cdot\frac{\partial^p F}{\partial u_{i_1}\ \partial u_{i_2}\ \ldots\ \partial u_{i_p}}.$$

§ 4. Теоремы делимости

В § 7 гл. II мы рассмотрели целый ряд предложений, относящихся к теории делимости внешних квадратичных форм. Мы теперь распространим их на внешние формы любой степени в кольце n измерений $\mathfrak{R}\,[u]$.

Теорема. *Если форма F степени p обращается в нуль в силу равенства нулю системы линейных форм $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_r$ ранга r, то найдутся формы φ_ρ степени $p-1$ такие, что*

$$(6)\qquad F=[f_1\varphi_1]+[f_2\varphi_2]+\cdots+[f_r\varphi_r].$$

Дополним систему форм f_ρ до полной системы n линейно независимых форм $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n$ и примем её за базис кольца. Тогда форма F примет вид

$$(\mathrm{a})\qquad F=c_{[\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_p]}\ [f_{\alpha_1}f_{\alpha_2}\ \ldots\ f_{\alpha_p}],\qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p=1, 2, \ldots, n.$$

Вносим сюда $f_1=f_2=\ldots=f_r=0$. По условию форма F обращается в нуль, и мы получаем:

$$c_{[\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_p]}[f_{\lambda_1}f_{\lambda_2}\cdots f_{\lambda_p}]=0,$$

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ldots,\ \lambda_p=r+1,\ r+2,\ \ldots\ n.$$

Так как подобные члены приведены, то все коэффициенты равны нулю (стр. 95):

$$c_{[\lambda_1\ \lambda_2\ldots\ \lambda_p]}=0.$$

Теорема, пусть Ω – p-форма, $\gamma \leq p$. тогда $\Omega = \theta\wedge\omega_1\wedge$. где ω_i - заданные 1-формы лин. незав. $\Longleftrightarrow$ $\Omega \wedge \omega_i = 0$, $\forall i$

Следовательно, в формуле (a) каждый член будет содержать по крайней мере один из множителей $f_1, f_2, \ldots, f_r$.

Собираем в первую группу все члены, содержащие f_1, во вторую — те из оставшихся членов, которые содержат f_2, и т. д., в последнюю войдут все те члены, которые не содержат $f_1, f_2, \ldots, f_{r-1}$, но зато содержат f_r. Вынося в каждой группе общий множитель f_ρ за скобку и обозначая через φ_ρ ту сумму, которая останется в скобках, мы получим разложение (6).

Следствие. *В разложении формы F на сумму произведений (6) каждая форма $(p-1)$-й степени φ_ρ может содержать формы f_α только с указателем $\alpha > \rho$.*

Теорема 2. *Если внешнее произведение системы линейных форм $f_1, f_2, \ldots, f_r$ ранга r и формы F степени $p \leqslant n-r$ равно нулю:*

$$[f_1 f_2 \ldots f_r F] = 0,$$

то найдутся формы φ_ρ степени $p-1$ такие, что

$$F = [f_1\varphi_1] + [f_2\varphi_2] + \ldots + [f_r\varphi_r]. \tag{6}$$

Как и выше, включаем систему форм f_ρ в новый базис кольца; пусть после этого F примет вид (a). Умножим это выражение на $f_1 f_2 \ldots f_r$. При этом в правой части все члены с двумя одинаковыми множителями пропадут, и мы получим:

$$c_{[\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_p]} [f_{\lambda_1} f_{\lambda_2} \ldots f_{\lambda_p} f_1 f_2 \ldots f_r] = 0,$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p = r+1, r+2, \ldots, n.$$

Так как подобные члены приведены, то все коэффициенты равны нулю, что опять нас приведёт к равенству (6).

§ 5. Ассоциированная система линейных форм

Ассоциированной системой линейных форм называется совокупность всех (смешанных) алгебраических производных $(p-1)$-го порядка от внешней формы F степени p. Ранг этой системы линейных форм называется *рангом внешней формы F*.

Если $w_1, w_2, \ldots, w_r$ — базис ассоциированной системы форм, то подкольцо $\mathfrak{R}[w_1, w_2, \ldots, w_r]$ называется *подкольцом внешней формы F*.

Ассоциированная система произвольной заданной совокупности внешних форм F_k разных степеней получается объединением всех ассоциированных систем от каждой формы F_k. Её ранг и подкольцо называются рангом и подкольцом системы (F_k).

Теорема. *Ранг и подкольцо системы внешних форм инвариантны относительно замены базиса кольца, в котором дана эта система.*

Действительно, если ввести новый базис $v_1, v_2, \ldots, v_n$ посредством уравнений

$$u_j = A_j^i v_i, \qquad j, i = 1, 2, \ldots, n,$$

то производные по новому базису получатся по правилу дифференцирования сложной функции в виде

$$\frac{\partial^{p-1} F}{\partial v_{i_1} \partial v_{i_2} \ldots \partial v_{i_{p-1}}} = A_{j_1}^{i_1} A_{j_2}^{i_2} \ldots A_{j_{p-1}}^{i_{p-1}} \frac{\partial^{p-1} F}{\partial u_{j_1} \partial u_{j_2} \ldots \partial u_{j_{p-1}}},$$

а так как все производные $(p-1)$-го порядка по переменным u_j принадлежат подкольцу $\mathfrak{R}[w]$, то этому подкольцу принадлежат все формы новой ассоциированной системы, и ранг её r' не выше ранга r прежней системы.

Так как при обратном преобразовании ранг r не может оказаться выше ранга r' и формы старой системы будут принадлежать подкольцу форм новой, то инвариантность ранга и подкольца доказана.

Теорема. *Все формы конечной системы внешних форм принадлежат подкольцу её ассоциированной системы.*

Включим базис подкольца ассоциированной системы $w_1, w_2, \ldots, w_r$ в новый базис $w_1, w_2, \ldots, w_n$ кольца $\mathfrak{R}[u]$.

Если какая-нибудь форма F степени p из заданной системы не принадлежит подкольцу $\mathfrak{R}[w_1, w_2, \ldots, w_r]$, то она должна содержать букву w_α с указателем $\alpha > r$. Пусть это будет w_n и

$$a[w_{i_1} w_{i_2} \ldots w_{i_{p-1}} w_n]$$

— один из мономов формы F, который после приведения подобных членов имеет коэффициент a, отличный от нуля, и содержит букву w_n.

Тогда одна из форм ассоциированной системы, именно производная

$$\frac{\partial^{p-1} F}{\partial w_{i_1} \partial w_{i_2} \ldots \partial w_{i_{p-1}}} = a w_n + b_i w_i, \qquad i < n,$$

будет содержать w_n, что противоречит предположению, что все формы ассоциированной системы принадлежат подкольцу $\mathfrak{R}[w_1, w_2, \ldots, w_r]$.

Следствие 1. *Ранг ассоциированной системы равен наименьшему числу букв u_i, через которые можно выразить внешние формы данной системы.*

Действительно, алгебраическое дифференцирование не вводит новых букв. Если бы система внешних форм была выражена через буквы $v_1, v_2, \ldots, v_q$ $(q < r)$, то и ассоциированная система была бы выражена через эти буквы, что противоречит предположению, что её ранг равен r.

Следствие 2. *Всякая буква u_i входит в одну из внешних форм системы F_k в том и только в том случае, если она входит в одну из форм её ассоциированной системы.*

Так как формы F_k принадлежат подкольцу форм $\mathfrak{R}[u_1, u_2, \dots, u_r]$ ассоциированной системы, то каждая из них может содержать только буквы этого базиса, т. е. буквы, содержащиеся в формах ассоциированной системы. С другой стороны, поскольку дифференцирование не вводит новых букв, то и ассоциированная система содержит только те буквы, которые встречаются в формах системы F_k.

§ 6. Характеристическая система семейства внешних дифференциальных форм

По отношению к внешним дифференциальным формам может быть поставлен вопрос, аналогичный тому, который для системы внешних алгебраических форм разрешался ассоциированной системой линейных форм. Основная теорема для ассоциированной системы утверждает, что все внешние формы данной конечной системы принадлежат подкольцу её ассоциированной системы, откуда вытекает следствие: ранг ассоциированной системы равен наименьшему числу букв u_i, через которые можно выразить все внешние формы заданной системы.

Эти рассуждения можно было бы непосредственно перенести на внешние дифференциальные формы, поскольку это касается дифференциалов dx_i, но дифференциальная форма содержит, кроме того, сами переменные x_i в коэффициентах при дифференциалах. Можно сохранить название ранга системы для наименьшего числа дифференциалов dx_i или линейно независимых линейных форм, через которые можно выразить все внешние формы системы; но, наряду с этим, возникает новое более существенное понятие класса.

Определение. *Классом системы* внешних дифференциальных форм называется наименьшее число переменных x_i, через которые можно выразить все формы системы так, чтобы под знаком дифференциалов и в коэффициенты не входило других переменных.

Эти переменные называются *характеристическими*.

Если ранг системы внешних форм есть ранг ассоциированной системы, то класс также связан с рангом характеристической системы.

Определение. *Характеристической системой* семейства внешних дифференциальных форм Ω_i называется система линейных форм, ассоциированная совокупности форм Ω_i и их внешних дифференциалов $D\Omega_i$.

Лемма. *Если базис характеристической системы семейства форм Ω_i состоит из дифференциалов $dy_1, dy_2, \dots, dy_\rho$, то внешняя форма Ω семейства не содержит не только дифференциала $dy_n (n > \rho)$, она не содержит переменной y_n и в коэффициентах.*

Так как внешняя форма Ω принадлежит подкольцу своей ассоциированной системы, то после приведения подобных членов она имеет вид

$$\Omega = a_{[\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_p]}[dy_{\alpha_1} dy_{\alpha_2} \dots dy_{\alpha_p}],$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p = 1, 2, \dots, \rho; \ \rho < n.$$

Если бы коэффициенты содержали переменную y_n, то внешний дифференциал $D\Omega$ содержал бы члены

$$\frac{\partial a_{[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p]}}{\partial y_n} [dy_n dy_{\alpha_1} \dots dy_{\alpha_p}],$$

которые не могут взаимно уничтожиться, ибо подобные члены приведены и не принадлежат подкольцу $\mathfrak{R}[dy_1, dy_2, \dots, dy_\rho]$ ассоциированной системы, что противоречит условию.

Переходим теперь к основной теореме.

Теорема. *Характеристическая система вполне интегрируема. Первые интегралы её являются теми переменными, через которые можно выразить все формы исходной системы.*

Мы говорим: система линейных форм $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\rho$ вполне интегрируема, если вполне интегрируема система уравнений Пфаффа

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \dots, \theta_\rho = 0.$$

Первыми интегралами вполне интегрируемой системы $\theta_k = 0$ называются функции F_j, стоящие в левых частях уравнений интегрального многообразия системы

$$F_1 = C_1, \ F_2 = C_2, \dots, \ F_\rho = C_\rho, \qquad C_1, C_2, \dots, C_\rho = \text{const}.$$

Допустим, что дана система внешних форм Ω_k, и рассмотрим её характеристическую систему $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\rho$. Теорема очевидна, если ранг характеристической системы ρ равен числу измерений n кольца форм $\mathfrak{R}[dx]$, к которому принадлежат все формы Ω_k, ибо тогда система $\omega_j = 0 \, (j = 1, 2, \dots, \rho)$ алгебраически эквивалентна системе $dx_i = 0 \, (i = 1, 2, \dots, n)$ и имеет интегралами $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Если $\rho < n$, то мы включим базис характеристической системы $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\rho$ в новый базис $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\rho, \omega_{\rho+1}, \dots, \omega_n$ кольца $\mathfrak{R}[dx]$.

Отбросим последнюю форму ω_n; мы получим систему линейных форм ранга $n - 1$. Такая система

$$(7) \qquad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \dots, \quad \omega_{n-1} = 0$$

вполне интегрируема, ибо при $n - 1$ уравнениях и n переменных число независимых переменных не может быть больше одного, а всякая система допускает интегральные многообразия $\mathfrak{M}_1$ одного измерения (гл. III, § 3). Если

$$y_1 = C_1, \quad y_2 = C_2, \dots, y_{n-1} = C_{n-1}$$

— уравнения этого интегрального многообразия и, следовательно, $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ — интегралы системы, то $dy_1, dy_2, \dots, dy_{n-1}$ можно принять за базис подкольца.

Так как в кольце n измерений $\mathfrak{R}[dx]$ ранг форм dx_i равен n, то найдётся форма dx_n такая, что $[dy_1 dy_2 \dots dy_{n-1} dx_n] \neq 0$. Дифференциалы $dy_1, dy_2, \dots, dy_{n-1}, dx_n$ можно принять за базис кольца $\mathfrak{R}[dx]$. Полагая для единообразия $y_n = x_n$, принимаем $y_1, y_2, \dots y_n$ за новые переменные. После замены переменных все формы $\mathfrak{Q}_k$ будут содержать только дифференциалы $dy_1, dy_2, \dots, dy_{n-1}$ (базис системы форм $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$). В силу доказанной леммы переменная y_n не войдёт и в коэффициенты форм $\mathfrak{Q}_k$.

Так как ранг характеристической системы не изменится от замены переменных, то в кольце $\mathfrak{R}[dy_1, dy_2, \dots, dy_n]$ он будет тот же, что и в кольце $\mathfrak{R}[dx]$, а так как формы $\mathfrak{Q}_k$, $D\mathfrak{Q}_k$ совсем не содержат переменную y_n, то ранг характеристической системы будет равен ρ и в подкольце $\mathfrak{R}[dy_1, dy_2, \dots, dy_{n-1}]$.

Если $\rho < n - 1$, то мы можем повторить все рассуждения, отбросив дифференциал dy_{n-1}. Мы остановимся только тогда, когда дойдём до кольца $n - q = \rho$ измерений.

Система (7) теперь будет совпадать с характеристической, откуда будет следовать:

1) характеристическая система вполне интегрируема и

2) посредством интегралов этой системы можно выразить все формы системы $\mathfrak{Q}_k$ так, что ни под знаком интеграла, ни в коэффициентах не будут встречаться другие переменные.

Теорема. *Интегралы характеристической системы дают наименьшее число переменных, через которые можно выразить все формы исходной системы.*

Допустим, что формы $\mathfrak{Q}_k$, а следовательно, и $D\mathfrak{Q}_k$ могут быть выражены через переменные $z_1, z_2, \dots, z_{\rho_1}$, где $\rho_1 < \rho$.

Так как алгебраическое дифференцирование не вводит новых переменных, то ассоциированная система как базис совокупности всех производных $(p-1)$-го порядка от $\mathfrak{Q}_k$, $D\mathfrak{Q}_k$, где p — степень дифференцируемой формы, будет тоже выражена через переменные z_j; формы dy_i будут линейно зависеть от dz_j, и ранг характеристической системы будет $\rho_1 < \rho$, что противно предположению.

Отсюда вытекает такое следствие:

Следствие. *Класс системы внешних дифференциальных форм равен рангу её характеристической системы.*

§ 7. Характеристическая система уравнений Пфаффа

Понятие характеристической системы распространяется на систему уравнений Пфаффа. Характеристическими и в этом случае называются переменные в наименьшем числе, через которые можно выразить все уравнения системы так, чтобы ни под знаком дифференциала, ни в коэффициентах не встречалось других переменных. Характеристической называется система уравнений Пфаффа, первыми интегралами которой служат характеристические переменные. Есть, однако, некоторая особенность в постановке новой проблемы.

Система уравнений Пфаффа сохранит свои интегралы, если обе части уравнения умножить (или разделить) на любую функцию от переменных, но может при этом приобрести (или потерять) некоторые переменные. Поэтому характеристическая система должна попрежнему содержать все формы системы, ассоциированной левым частям θ_i заданной системы уравнений Пфаффа

$$\theta_i = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, s,$$

ибо умножение их на любую функцию g:

$$g\theta_i = 0,$$

не изменит базиса ассоциированной системы.

Иначе обстоит с внешним дифференциалом:

$$D(g\theta_i) \equiv [dg\,\theta_i] + gD\theta_i.$$

Дифференциалы новых переменных могут войти посредством дифференциала dg. Чтобы его отбросить, надо внешний дифференциал $D(g\theta_i)$ умножить внешним образом на все формы θ_i.

Определение. *Характеристической системой* (*характеристическая система* I) уравнений Пфаффа

$$\theta_i = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, s,$$

называется ассоциированная система внешних форм

$$\theta_i, \ [\theta_1\theta_2 \dots \theta_s D\theta_i].$$

Теорема. *Характеристическая система инвариантна при всяком преобразовании базиса исходной системы Пфаффа.*

Действительно, преобразуем базис системы форм θ_i по формулам

$$\bar{\theta}_i = b_i^j\theta_j, \qquad i, j = 1, 2, \dots, s.$$

Дифференцируя эти равенства внешним образом, имеем:

$$D\bar{\theta}_i = [db_i^j\theta_j] + b_i^j D\theta_j.$$

Следовательно,

$$[\bar{\theta}_1\bar{\theta}_2 \dots \bar{\theta}_s D\bar{\theta}_i] = b_1^{j_1} b_2^{j_2} \dots b_s^{j_s} [\theta_{j_1}, \theta_{j_2} \dots \theta_{j_s} db_i^j \theta_j] +$$
$$+ b_1^{j_1} b_2^{j_2} \dots b_s^{j_s} b_i^j [\theta_{j_1}\theta_{j_2} \dots \theta_{js} D\theta_j], \qquad j_1, j_2, \dots, j_s, j = 1, 2, \dots, s.$$

Первое слагаемое пропадает, ибо среди $s+1$ указателей $j_1, j_2, \dots, j_s$, j из s чисел $1, 2, \dots, s$ всегда будет два одинаковых.

Новые формы $[\bar{\theta}_1\bar{\theta}_2 \dots \bar{\theta}_s D\bar{\theta}_i]$ линейно зависят от старых $[\theta_1\theta_2 \dots \theta_s D\theta_i]$. Ассоциированная система, а следовательно, и характеристическая не изменяются.

Теперь нетрудно доказать основную теорему:

Теорема. *Характеристическая система уравнений Пфаффа вполне интегрируема. Интегралы её образуют группу переменных, через которые можно выразить базис системы уравнений Пфаффа.*

Базисом системы уравнений называется один из возможных базисов семейства форм, стоящих в левых частях системы Пфаффа (S) (ср. стр. 128).

Заметим прежде всего, что базис пфаффовой системы (S) ранга s в кольце $(n-1)$-го измерения $\mathfrak{R}[dy_1, dy_2, \ldots, dy_{n-1}]$ можно привести к виду

$$\theta_i = dy_i + b_i^\lambda dy_\lambda, \tag{8}$$
$$i = 1, 2, \ldots, s; \lambda = s+1, s+2, \ldots, n-1.$$

Действительно, s форм базиса $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \ldots, \tilde{\theta}_s$ системы (S) можно включить в новый базис кольца $\mathfrak{R}[dy]$, дополнив, например, формами $dy_{s+1}, dy_{s+2}, \ldots, dy_{n-1}$. Тогда всякий дифференциал dy_i линейно выразится через $\tilde{\theta}_j$ и dy_λ:

$$dy_i = c_i^j \tilde{\theta}_j - b_i^\lambda dy_\lambda,$$
$$i, j = 1, 2, \ldots, s; \lambda = s+1, s+2, \ldots, n-1,$$

причём определитель $\det |c_i^j| \neq 0$, ибо уравнения можно разрешить относительно $\tilde{\theta}_j$. Если теперь выполнить замену базиса системы (S), полагая

$$\theta_i = c_i^j \tilde{\theta}_j,$$

то и придём к формулам (8).

Переходим к доказательству теоремы и допустим, что ранг характеристической системы (Σ) равен $\rho < n$ (если $\rho = n$, то теорема тривиальна). Включаем базис системы (Σ) в новый базис кольца $\mathfrak{R}[dx]$. Отбрасываем одну из форм dx_n, которая была присоединена, и получаем систему линейных форм ранга $n-1$ в кольце n измерений, стало быть — вполне интегрируемую.

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ — её первые интегралы. Тогда базис системы (Σ) будет содержаться в подкольце $\mathfrak{R}[dy_1, dy_2, \ldots, dy_{n-1}]$. Если принять за новые переменные $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ и $y_n = x_n$, где x_n выбрано так, что $[dy_1 dy_2 \ldots dy_{n-1} dx_n] \neq 0$, то все формы θ_i $[\theta_1 \theta_2 \ldots \theta_s D\theta_i]$ не будут содержать дифференциала dy_n.

Покажем, что если формы θ_i выбрать в виде (8), то они не будут содержать y_n и в коэффициентах. Действительно, внешний дифференциал от обеих частей уравнения (8) будет:

$$D\theta_i = \frac{\partial b_i^\lambda}{\partial y_n}[dy_n dy_\lambda] + \frac{\partial b_i^\lambda}{\partial y_\alpha}[dy_\alpha dy_\lambda],$$
$$i = 1, 2, \ldots, s; \quad \lambda = s+1, s+2, \ldots, n-1; \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Умножим обе части на все θ_i и на все дифференциалы $dy_\sigma (\sigma > s)$, кроме dy_n и некоторого dy_λ. Тогда в левой части получится произведение формы $[\theta_1 \theta_2 \ldots \theta_s D\theta_i]$ на различные dy, кроме dy_n, т. е. произведение форм подкольца $(n-1)$-го измерения $\mathfrak{R}[dy_1, dy_2, \ldots, dy_{n-1}]$, а так как степень произведения равна n (s множителей θ_i, $n-s-2$ множителей dy_σ и квадратичная форма $D\theta_i$), то оно равно нулю. То же заключение приложимо и ко второму члену правой части, ибо там тоже нет дифференциала dy_n. Остаётся один член

$$\frac{\partial b_i^\lambda}{\partial y_n}[dy_1 dy_2 \ldots dy_n] = 0,$$

и так как произведение дифференциалов базиса — не нуль, то $\frac{\partial b_i^\lambda}{\partial y_n} = 0$, и ни один коэффициент b_i^λ не содержит y_n.

Если $\rho < n-1$, то рассуждение можно повторить. Как и в предыдущем параграфе, мы дойдём до кольца ρ изменений $\mathfrak{R}[dy]$. Базис его совпадает с базисом характеристической системы, которая тем самым вполне интегрируема; он будет вместе с тем базисом системы (S), точнее — базисом эквивалентной ей системы форм θ_i вида (8), которые могут быть выражены через переменные $y_1, y_2, \ldots, y_\rho$ [интегралы системы (Σ)] так, что ни под знаком дифференциала, ни в коэффициентах не будет других переменных.

Теорема. *Первые интегралы характеристической системы составляют наименьшую группу переменных, через которые можно выразить систему уравнений Пфаффа.*

Теорема доказывается в точности так, как аналогичная теорема для семейства форм Ω_i.

Следствие 1. *Класс системы уравнений Пфаффа равен рангу её характеристической системы.*

Следствие 2. *Система уравнений Пфаффа вполне интегрируема, если она совпадает со своей характеристической системой.*

ГЛАВА V

ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

§ 1. Приведение к каноническому виду внешней квадратичной формы

Мы начнём с алгебраической формы.

Теорема 1. *Ранг внешней квадратичной формы всегда чётен. Он равен $2k$, если*

$$[F]^k \neq 0, \quad [F]^{k+1} = 0. \tag{1}$$

Здесь k означает показатель степени, в которую возводится квадратичная форма F:

$$[F]^k = [\overbrace{F \cdot F \ldots F}^{k \text{ раз}}].$$

Так как F — квадратичная форма, следовательно, чётной степени, то произведение F самой на себя вообще не равно нулю (гл. II, § 4, стр. 89).

Выделим какую-нибудь букву u^h и рассмотрим алгебраические производные

$$u_1 = \frac{\partial F}{\partial u^h}, \quad v^1 = \frac{\partial F}{\partial u_1}.$$

Алгебраическая производная от формы F по символу базиса u^h, в силу своего определения (гл. IV, § 2), равна той сумме, которая будет стоять множителем при u^h, если во всех членах формы, которые её содержат, переставить эту букву на первое место и вынести за скобку. По той же причине v^1 будет стоять множителем при u_1, если линейную форму u_1 ввести в базис кольца ассоциированной системы формы F, в каждом члене, содержащем u_1, переставить её на первое место и вынести за скобку. Поэтому в разложении формы F на сумму произведений форм базиса линейные формы u_1 и v^1 будут входить только в виде произведения $[u_1 v^1]$, и символ u^h будет содержаться только в линейной форме v^1.

Если положить

$$F = [u_1 v^1] + \varphi_1, \tag{a}$$

то квадратичная форма φ_1 не будет содержать ни u_1, ни v^1. Отсюда прямо следует, что φ_1 удовлетворяет условиям теоремы (1) с показателем степени k, на единицу меньшим. Действительно, возвышая обе части равенства (a) в степень $k+1$, правую часть — по формуле бинома Ньютона, и опуская все произведения с двумя одинаковыми линейными множителями, получим в силу уравнения (1):

$$(k+1)\left[u_1 v^1 [\varphi_1]^k\right] + [\varphi_1]^{k+1} = 0.$$

Так как первое слагаемое содержит букву u_1, а второе не содержит, то каждое слагаемое в отдельности равно нулю. При этом ни u_1, ни v^1 не входят в форму φ_1; значит,

$$[\varphi_1]^k = 0.$$

С другой стороны, если бы выражение $[\varphi_1]^{k-1}$ равнялось нулю, то мы получили бы, возвышая обе части равенства (a) в степень k,

$$[F]^k = k\left[u_1 v^1 [\varphi_1]^{k-1}\right] + [\varphi_1]^k = 0,$$

что противоречит первому условию (1).

Повторяя эту операцию последовательно над формами φ_1, φ_2 и т. д., мы будем выделять одно за другим произведения $[u_i v^i]$, пока не доведём показатель k до нуля. Тогда форма F разложится на сумму k произведений из $2k$ линейно независимых форм u_i, v^i. Следовательно, ранг формы F равен $2k$.

Следствие. *При подходящем выборе базиса $u^1, u^2, \ldots, u^n$ внешняя квадратичная форма F ранга $r = 2k$ может быть представлена в виде*

$$F = [u_1 v^1] + [u_2 v^2] + \ldots + [u_k v^k]. \tag{2}$$

Этот вид алгебраической внешней квадратичной формы называется *каноническим*.

Теорема 2. *Если квадратичная форма F удовлетворяет равенству*

$$H \equiv \left[u_1 u_2 \ldots u_h [F]^{k-h+1}\right] = 0, \tag{3a}$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_h$ — линейно независимые линейные формы, то форма F может быть представлена в виде

$$F = [u_1 v^1] + [u_2 v^2] + \ldots + [u_h v^h] + \varphi_h, \tag{2'}$$

где φ_h — квадратичная форма, ранг которой не выше $2(k-h)$. Если при этом

$$K \equiv \left[u_1 u_2 \ldots u_h [F]^{k-h}\right] \neq 0, \tag{3b}$$

то ранг формы φ_h равен $2(k-h)$, а ранг формы F — $2k$.

Чтобы доказать первую половину теоремы, заметим, что, полагая

$$v^1 = \frac{\partial F}{\partial u_1}, \quad v^2 = \frac{\partial}{\partial u_2}\left\{F - [u_1 v^1]\right\}, \ \ldots,$$

$$v^h = \frac{\partial}{\partial u_h}\left\{F - [u_1 v^1] - \ldots - [u_{h-1} v^{h-1}]\right\},$$

мы, очевидно, придём к разложению вида (2′). Если его ввести в уравнение (3a), то все члены, содержащие множителями $u_1, u_2, \ldots, u_h$, сократятся, и мы получим:

$$H \equiv \left[u_1 u_2 \ldots u_h [\varphi_h]^{k-h+1}\right] = 0.$$

Так как по самому построению разложения (2′) формы $u_1, u_2, \ldots, u_h$ не зависят линейно от форм ассоциированной системы квадратичной формы φ_h, то уравнение (3a) принимает вид

$$\text{(b)} \qquad [\varphi_h]^{k-h+1} = 0,$$

откуда следует, что ранг формы φ_h не больше $2(k-h)$. Действительно, в каноническом виде (2) форма φ_h должна иметь меньше чем $k-h+1$ членов, ибо в противном случае после возвышения в $k-h+1$ степень каждый член левой части уравнения (b) представлял бы отличное от нуля произведение $2(k-h+1)$ различных форм базиса.

Если имеет место неравенство (3b), то такое же преобразование приведёт нас к неравенству

$$\text{(c)} \qquad [\varphi_h]^{k-h} \neq 0$$

и теорема 1 даст точное значение ранга формы φ_h в виде числа $2(k-h)$, откуда для ранга формы F получим число $2k$.

Теорема 3. *Если из квадратичной формы F ранга $2k$ выделено $h < k$ канонических произведений (2′), то неравное нулю произведение K есть моном, и каждый из его линейных множителей u_{h+1}, линейно не зависимый от первых $u_1, u_2, \ldots, u_h$, удовлетворяет условиям*

$$K' \equiv \left[u_1 u_2 \ldots u_h u_{h+1} [F]^{k-h-1}\right] \neq 0, \, H' \equiv \left[u_1 u_2 \ldots u_h u_{h+1} [F]^{k-h}\right] = 0$$

и позволяет выделить ещё одно каноническое произведение $[u_{h+1} v^{h+1}]$.

Так как форма F — ранга $2k$, то по выделении h канонических произведений остаток φ_h будет иметь ранг $2(k-h)$ и удовлетворит условиям (b), (c), откуда следуют условия (3a), (3b). Кроме того, форма $[\varphi_h]^{k-h}$, ранг которой равен её степени, т. е. числу измерений $2(k-h)$, есть моном, следовательно, мономом будет и произведение

$$K = \left[u_1 u_2 \ldots u_h [\varphi_h]^{k-h}\right].$$

Каждый делитель этого монома u_{h+1}, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$H' \equiv [K u_{h+1}] = 0,$$

откуда в силу первой части теоремы 2 следует возможность выделения канонического произведения $[u_{h+1} v^{h+1}]$. Если бы при этом произведение K' равнялось нулю, то ранг нового остатка φ_{h+1} был бы меньше $2(k-h-1)$, а ранг формы F меньше $2k$, что противоречит условию теоремы.

§ 2. Внешний дифференциал формы Пфаффа

Внешний дифференциал $D\omega$ произвольной формы Пфаффа ω, как квадратичная форма, — всегда чётного ранга. Согласно теореме 1, § 1, этот ранг равен $2p$, если

$$[D\omega]^p \neq 0, \quad [D\omega]^{p+1} = 0,$$

и при подходящем выборе базиса ассоциированной системы ω_i, $\tilde{\omega}^i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ формы $D\omega$ её можно представить в виде

$$D\omega = [\omega_1 \tilde{\omega}^1] + [\omega_2 \tilde{\omega}^2] + \ldots + [\omega_p \tilde{\omega}^p].$$

Мы хотим показать, что все формы ω_i можно выбрать в виде дифференциалов dx_i от подходяще подобранных характеристических переменных. Предварительно докажем лемму.

Лемма. *Ассоциированная система линейных форм произвольной внешней формы Ω вполне интегрируема, если внешний дифференциал её пропорционален самой форме*

$$\text{(4)} \qquad D\Omega = [\Omega\lambda].$$

Так как степень внешнего дифференциала всегда на единицу больше степени формы, то множитель пропорциональности λ — линейная форма из подкольца формы $D\Omega$.

Напомним ещё, что по определению (стр. 153) система линейных форм вполне интегрируема, если вполне интегрируема система уравнений Пфаффа, содержащая в левых частях формы данной системы.

Обращаясь к доказательству леммы, заметим, что в силу формулы (4) ассоциированная система внешнего дифференциала $D\Omega$ содержит все формы ассоциированной системы формы Ω:

$$\theta_1, \ \theta_2, \ \ldots, \ \theta_r,$$

и ещё только одну линейную форму λ. Отсюда прямо следует, что система уравнений

$$\theta_i = 0, \quad \lambda = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, r,$$

как ассоциированная система форм Ω и $D\Omega$, является характеристической системой формы Ω, а потому вполне интегрируема.

Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_{r+1}$ — характеристические переменные (первые интегралы системы $\theta_i = 0$, $\lambda = 0$). В кольце $r+1$ измерений $\mathfrak{R}[dv]$ система r уравнений

$$\theta_i = 0$$

вполне интегрируема, ибо число переменных на единицу больше числа уравнений, следовательно, независимая переменная — только одна, а интегральные многообразия $\mathfrak{M}_1$ одного измерения допускает всякая система Пфаффа.

Теперь обращаемся к нашей теореме.

Теорема 1. *При подходящем выборе характеристических переменных x_i внешний дифференциал произвольной формы Пфаффа $D\omega$ ранга $2p$ может быть представлен в полуканоническом виде*

$$D\omega = [dx_1\tilde{\omega}^1] + [dx_2\tilde{\omega}^2] + \ldots + [dx_p\tilde{\omega}^p]. \tag{5}$$

В качестве первого дифференциала dx_1 можно выбрать дифференциал любой характеристической переменной формы $D\omega$. Действительно, выделяя каноническое произведение $[dx_1\tilde{\omega}^1]$:

$$D\omega = [dx_1\tilde{\omega}^1] + \varphi_1, \qquad \tilde{\omega}^1 = \frac{\partial D\omega}{\partial(dx_1)},$$

мы получим в остатке квадратичную форму φ_1, следовательно, чётного ранга; так как она не содержит формы dx_1, то ранг её ниже, чем ранг формы $D\omega$, следовательно, не больше чем $2(p-1)$. Допустим теперь, что мы выделили h произведений:

$$D\omega = [dx_1\tilde{\omega}^1] + [dx_2\tilde{\omega}^2] + \ldots + [dx_h\tilde{\omega}^h] + \varphi_h, \tag{5'}$$

так, что все формы dx_i, $\tilde{\omega}^i$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$ линейно независимы и φ_h — квадратичная форма ранга $2(p-h)$, не содержащая dx_i.

Рассмотрим внешнюю дифференциальную форму

$$\Omega \equiv \left[[D\omega]^{p-h}\, dx_1\, dx_2\, \ldots\, dx_h\right] = \left[[\varphi_h]^{p-h} dx_1 dx_2 \ldots dx_h\right].$$

Её внешний дифференциал равен нулю, ибо равны нулю внешние дифференциалы каждого отдельного множителя dx_i и $D\omega$:

$$D\Omega = 0.$$

Это уравнение имеет вид уравнения (4) при множителе пропорциональности $\lambda = 0$. Следовательно, лемма имеет место, и ассоциированная система формы Ω вполне интегрируема. Она складывается из двух подсистем, не имеющих общих элементов: из ряда форм dx_i и из ассоциированной системы формы φ_h, которая по самому построению не содержит ни одной формы dx_i. Так как первая подсистема вполне интегрируема, то вполне интегрируема и вторая.

Любой дифференциал dx_{h+1} из дифференциального базиса подкольца формы φ_h позволит выделить произведение $[dx_{h+1}\tilde{\omega}^{h+1}]$ так, что ранг остатка φ_{h+1} понизится на две единицы. Последовательным выделением произведений $[dx_i\tilde{\omega}^i]$ придём к разложению (5).

Следствие. *Если выделено h произведений полуканонического разложения (5), то ассоциированная система остатка φ_h в формуле (5′) вполне интегрируема, и первый интеграл её x_{h+1} позволит выделить следующее произведение $[dx_{h+1}\tilde{\omega}^{h+1}]$, причём дифференциал dx_{h+1} определяется условиями*

$$[\Omega\, dx_{h+1}] = 0, \quad [dx_1\, dx_2\, \ldots\, dx_h dx_{h+1}] \neq 0.$$

Теорема 2. *Если форма Пфаффа ω принадлежит подкольцу своего внешнего дифференциала $D\omega$, то его можно представить в полуканоническом виде второго рода:*

$$D\omega = [\omega\tilde{\omega}] + [dx_1\tilde{\omega}^1] + \ldots + [dx_{p-1}\tilde{\omega}^{p-1}]. \tag{6}$$

Чтобы выделить первое произведение, мы введём форму ω в базис подкольца формы $D\omega$, дополнив её дифференциалами характеристических переменных до полной системы $2p$ линейно независимых линейных форм. Допустим, что мы выделили $h+1$ произведений:

$$D\omega = [\omega\tilde{\omega}] + [dx_1\tilde{\omega}^1] + \ldots + [dx_h\tilde{\omega}^h] + \varphi_h, \tag{6'}$$

так, что все формы $\omega, \tilde{\omega}, dx_i, \tilde{\omega}^i$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$ линейно независимы и φ_h — квадратичная форма ранга $2(p-h-1)$, не содержащая ни ω, ни dx_i.

Составляем произведение

$$\Omega \equiv [[D\omega]^{p-h-1}\, \omega\, dx_1 dx_2 \ldots dx_h] = [[\varphi_h]^{p-h-1}\, \omega\, dx_1 dx_2 \ldots dx_h].$$

Подсчитываем внешний дифференциал:

$$D\Omega = [[D\omega]^{p-h-1} D\omega\, dx_1 \ldots dx_h] = [[D\omega]^{p-h}\, dx_1 \ldots dx_h].$$

Если возвысить обе части разложения (6′) в степень $p-h$ по формуле бинома Ньютона и внести полученный результат в выражение $D\Omega$, то легко заметить, что при этом пропадут все члены, содержащие $dx_1, dx_2, \ldots, dx_h$, пропадут члены, содержащие два раза линейные множители $\omega, \tilde{\omega}$, и мы получим:

$$D\Omega = (p-h)\,[\omega\tilde{\omega}\,[\varphi_h]^{p-h-1}\, dx_1 dx_2 \ldots dx_h] + [[\varphi_h]^{p-h} dx_1 dx_2 \ldots dx_h].$$

Здесь второй член равен нулю, ибо форма φ_h имеет ранг $2(p-h)-2$, а внешнее произведение $[\varphi_h]^{p-h}$ имеет $2(p-h)$ измерений, но всякая форма степени $2(p-h)$ из подкольца $2(p-h)-2$ измерений равна нулю. Следовательно,

$$D\Omega = -(p-h)\,[\tilde{\omega}\Omega].$$

Таким образом условие (4) удовлетворено, и, согласно нашей лемме, ассоциированная система формы Ω вполне интегрируема.

Пусть

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_h,\ x_{h+1},\ \ldots,\ x_{2p-h-1}$$

— её первые интегралы. Дополняя форму $\tilde{\omega}$ дифференциалами dx_α до полной системы $2p-h-1$ линейно независимых форм, мы составим базис подкольца формы Ω в виде

$$\omega,\ dx_1,\ dx_2,\ \ldots,\ dx_h,\ dx_{h+1},\ \ldots,\ dx_{2p-h-2}.$$

При этом произведение

$$[\Omega\, dx_{h+1}]=0$$

обращается в нуль, как форма степени $2p-h$ из кольца $2p-h-1$ измерений. Следовательно, dx_{h+1} делит $[\varphi_h]^{p-h-1}$ и позволит выделить из квадратичной формы φ_h ещё одно произведение $[dx_{h+1}\tilde{\omega}^{h+1}]$ так, что ранг нового остатка φ_{h+1} понизится на две единицы.

Выделяя последовательно одно полуканоническое произведение за другим, придём к разложению (6).

Следствие. *Если выделено $h+1$ произведений полуканонического разложения второго рода* (6), *то ассоциированная система остатка φ_h в формуле* (6′) *вполне интегрируема, и каждый первый интеграл её x_{h+1} позволит выделить следующее произведение $[dx_{h+1}\tilde{\omega}^{h+1}]$, причём дифференциал dx_{h+1} определяется условиями*

$$[\Omega\, dx_{h+1}]=0,\quad [\omega\, dx_1 dx_2 \ldots dx_h dx_{h+1}]\neq 0.$$

§ 3. Класс формы Пфаффа

Так как внешний дифференциал от $D\omega$ равен нулю, то его ассоциированная система будет вместе с тем характеристической системой, и его ранг $2p$ будет его классом. После перехода к характеристическим переменным $x_1, x_2, \ldots, x_{2p}$ и под знаком дифференциала и в коэффициентах формы $D\omega$ будут стоять только эти переменные.

В гл. III, § 2 мы видели, каким образом определяется форма ω по её внешнему дифференциалу $D\omega$. Решение этой задачи не однозначно, но при подходящем выборе произвольных функций мы не выйдем из подкольца формы $D\omega$. Следовательно, существует линейная форма $\bar{\omega}$, внешний дифференциал которой равен $D\omega$, а класс не выше $2p$. Так как внешнее дифференцирование не вводит новых переменных, то он не может быть меньше $2p$. С другой стороны, поскольку

$$D(\omega-\bar{\omega})=0,$$

наиболее общее решение ω отличается от линейной формы $\bar{\omega}$ на дифференциал произвольной функции y от переменных дифференциального базиса всего кольца. Эту функцию можно считать за независимую переменную, которая увеличивает на единицу число характеристических переменных формы ω по сравнению с её дифференциалом $D\omega$. Имеем теорему:

Теорема. *Если класс внешнего дифференциала $D\omega$ равен $2p$, то класс линейной формы ω может быть равен $2p$ или $2p+1$.*

В первом случае форма ω принадлежит подкольцу своего внешнего дифференциала $D\omega$. Следовательно, класс формы ω равен $2p$, если

$$\text{(7a)}\qquad [D\omega]^p\neq 0,\quad [[D\omega]^p\omega]=0,\quad [D\omega]^{p+1}=0.$$

Во втором случае она содержит дифференциал новой переменной dy, и значит класс формы ω равен $2p+1$, если

$$\text{(7b)}\qquad [D\omega]^p\neq 0,\quad [[D\omega]^p\omega]\neq 0,\quad [D\omega]^{p+1}=0.$$

Здесь первое неравенство (7b) является следствием второго и, следовательно, может быть опущено. Точно так же, дифференцируя внешним образом равенство

$$[[D\omega]^p\omega]=0,$$

получим:

$$[D\omega]^{p+1}=0.$$

Следовательно, последнее равенство (7a) является следствием предпоследнего, а потому может быть опущено.

Этот критерий определения класса линейной формы получает более удобную формулировку, если ввести понятие внешних дифференциалов высших порядков.

Определение. *Внешними дифференциалами второго, третьего и т. д. порядков* от формы Пфаффа ω называются формы

$$D^2\omega=[\omega\, D\omega],\quad D^3\omega=\frac{1}{2}[D\omega]^2,\quad D^4\omega=[\omega\, D^3\omega]=\frac{1}{2}[\omega\,[D\omega]^2]$$

и т. д. Вообще,

$$\text{(8)}\quad D^{2m-1}\omega=\frac{1}{m!}[D\omega]^m,\qquad D^{2m}\omega=[\omega D^{2m-1}\omega]=\frac{1}{m!}[\omega\,[D\omega]^m].$$

Внешние дифференциалы высших порядков инвариантны относительно преобразования переменных, ибо этим свойством обладает внешнее умножение и внешнее дифференцирование.

Пользуясь этими обозначениями, мы можем высказать теорему.

Теорема. *Форма Пфаффа ω имеет класс ρ, если*

$$\text{(9)}\qquad D^{\rho-1}\omega\neq 0,\quad D^{\rho}\omega=0.$$

Действительно, если ρ чётно, например $\rho=2p$, то в силу формул (8) условия (9) совпадают с условиями (7a), и класс формы ω равен $\rho=2p$. Если же $\rho=2p+1$, т. е. нечётно, то условия (9) эквивалентны условиям (7b).

§ 4. Канонический вид формы Пфаффа чётного класса

Если форма Пфаффа ω — чётного класса $2p$, то она принадлежит подкольцу своего внешнего дифференциала $D\omega$. Следовательно, при подходящем выборе характеристических переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ внешний дифференциал $D\omega$ примет вид

$$D\omega = [\omega\tilde{\omega}] + [dx_1\tilde{\omega}'] + \ldots + [dx_{p-1}\tilde{\omega}^{p-1}].$$

Умножая обе части равенства на $\omega, dx_1, \ldots, dx_{p-1}$, получим:

$$[\omega\, dx_1 dx_2 \ldots dx_{p-1} D\omega] = 0.$$

Отсюда следует, что система Пфаффа

$$(10) \qquad \omega = 0, \; dx_1 = 0, \; dx_2 = 0, \; \ldots, \; dx_{p-1} = 0$$

вполне интегрируема, ибо равенство $D\omega = 0$ является алгебраическим следствием самой системы, а внешние дифференциалы остальных уравнений системы обращаются в нуль тождественно.

Пусть

$$x_1 = C_1, \; x_2 = C_2, \; \ldots, \; x_{p-1} = C_{p-1}, \; x_p = C_p$$

суть интегралы системы. Тогда дифференциальный базис подкольца системы будет:

$$dx_1, \; dx_2, \; \ldots, \; dx_p.$$

Левая часть каждого уравнения системы, в том числе и форма ω, линейно выражается через формы базиса. Следовательно,

$$(11) \qquad \omega = v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + \ldots + v_p dx_p.$$

Так как ω — форма класса $2p$, то все переменные $x_1, x_2, \ldots, x_p$; $v_1, v_2, \ldots, v_p$ — независимые переменные.

Этот вид формы ω называется *каноническим*.

Дифференцируя внешним образом равенство (11), получаем *каноническое представление* внешнего дифференциала:

$$D\omega = [dv_i\, dx_i], \qquad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Пример. *Привести к каноническому виду форму*

$$\omega = x_1 x_3\, dx_2 + x_1 x_2\, dx_3 + (x_1 + x_3 x_5)\, dx_4 + x_3 x_4\, dx_5.$$

Имеем:

$$D\omega = x_3 [dx_1 dx_2] + x_2 [dx_1 dx_3] + [dx_1 dx_4] + x_5 [dx_3 dx_4] + x_4 [dx_3 dx_5],$$

$$D^3\omega = \frac{1}{2} [D\omega]^2 =$$

$$= x_3 x_5 [dx_1 dx_2 dx_3 dx_4] + x_3 x_4 [dx_1 dx_2 dx_3 dx_5] - x_4 [dx_1 dx_3 dx_4 dx_5],$$

$$D^4\omega = 0.$$

Форма — четвёртого класса. Характеристическая система имеет вид

$$x_3 dx_2 + x_2 dx_3 + dx_4, \quad x_3 dx_1, \quad x_5 dx_4 + x_4 dx_5, \quad dx_1 + x_5 dx_3, \quad x_4 dx_3.$$

Если ввести в её базис форму ω, то она примет вид

$$\omega, \; dx_1, \; dx_3, \; x_4 dx_5 + x_5 dx_4$$

и

$$D\omega = \left[\omega, -\frac{dx_1}{x_1}\right] + [dx_3, \; x_5 dx_4 + x_4 dx_5] + \frac{x_3}{x_1} [x_5 dx_4 + x_4 dx_5, dx_1].$$

Выделяя первое произведение $[\omega\tilde{\omega}]$, получаем остаток

$$\varphi_1 = [dx_3, \; x_5 dx_4 + x_4 dx_5] + \frac{x_3}{x_1} [x_5 dx_4 + x_4 dx_5, \; dx_1].$$

Ассоциированная система его содержит формы

$$dx_3 - \frac{x_3}{x_1} dx_1, \quad x_5 dx_4 + x_4 dx_5.$$

Она вполне интегрируема в силу следствия из теоремы 2, § 2. Выбирая форму $d(x_4 x_5)$, получим полуканоническое представление $D\omega$:

$$D\omega = [\omega, -\frac{dx_1}{x_1}] + [d(x_4 x_5), \frac{x_3}{x_1} dx_1 - dx_3].$$

Система (10) принимает теперь вид

$$\omega = 0, \quad d(x_4 x_5) = 0$$

или

$$x_1 (x_3 dx_2 + x_2 dx_3) + x_1 dx_4 = 0, \quad d(x_4 x_5) = 0.$$

Она вполне интегрируема и её интегралы суть:

$$x_4 x_5 = \text{const.}, \quad x_4 + x_2 x_3 = \text{const.}$$

Относя форму ω к базису $dy_1 = d(x_4 x_5)$, $dy_2 = d(x_4 + x_2 x_3)$, получим:

$$\omega = x_3 dy_1 + x_1 dy_2.$$

Следовательно, канонический вид формы ω будет

$$\omega = v_1 dy_1 + v_2 dy_2,$$

где

$$v_1 = x_3, \quad v_2 = x_1, \quad y_1 = x_4 x_5, \quad y_2 = x_4 + x_2 x_3$$

— *канонические переменные*.

§ 5. Канонический вид формы Пфаффа нечётного класса

Если класс формы Пфаффа ω — нечётный, $2p + 1$, то форма ω не принадлежит подкольцу своего внешнего дифференциала $D\omega$. Класс квадратичной формы $D\omega$ равен $2p$. При подходящем выборе дифференциалов dx_i ($i = 1, 2, \ldots, p$) мы можем представить квадратичную форму $D\omega$ в полуканоническом виде (5):

$$D\omega = [dx_1\tilde{\omega}^1] + [dx_2\tilde{\omega}^2] + \ldots + [dx_p\tilde{\omega}^p].$$

Положим

$$x_1 = \text{const.}, \quad x_2 = \text{const.}, \quad \ldots, \quad x_p = \text{const.}$$

и обозначим значение формы ω при этом предположении через ω_0:

$$\omega_0 = \{\omega\}_{dx_1 = dx_2 = \ldots = dx_p = 0}.$$

Так как

$$D\omega_0 = \{D\omega\}_{dx_1 = dx_2 = \ldots = dx_p = 0} = 0,$$

то ω_0 есть полный дифференциал какой-то переменной y:

$$\omega_0 = dy,$$

и, следовательно,

$$\omega = dy + v_i dx_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, p. \tag{12}$$

Здесь все коэффициенты v_i надо рассматривать как независимые переменные, ибо класс формы ω равен $2p+1$ и она содержит под знаком дифференциала и в коэффициентах $2p+1$ независимых переменных $y, x_1, x_2, \ldots, x_p, v_1, v_1, \ldots, v_p$, не больше и не меньше.

Формула (12) даёт *каноническое представление* формы Пфаффа нечётного класса.

Пример. *Привести к каноническому виду форму Пфаффа*

$$\omega = x_2dx_1 + x_1dx_2 - x_3x_5dx_4 - x_3x_4dx_5 + x_2dx_6.$$

Имеем:

$$D\omega = [dx_2dx_6] - x_5[dx_3dx_4] - x_4[dx_3dx_5],$$
$$D^3\omega = \frac{1}{2}[D\omega]^2 = -x_5[dx_2dx_3dx_4dx_6] - x_4[dx_2dx_3dx_5dx_6],$$
$$D^4\omega = [\omega\, D^3\omega] = -x_2x_5[dx_1dx_2dx_3dx_4dx_6] - x_2x_4[dx_1dx_2dx_3dx_5dx_6],$$
$$D^5\omega = 0.$$

Форма ω — пятого класса, форма $D\omega$ — четвёртого класса.

Ассоциированная система формы $D\omega$ имеет базисом

$$dx_2, \quad dx_3, \quad x_4dx_5 + x_5dx_4, \quad dx_6.$$

В формах базиса дифференциал $D\omega$ прямо принимает полуканонический вид

$$D\omega = [dx_2dx_6] + [dx_3, -x_5dx_4 - x_4dx_5].$$

Следовательно, форму ω можно написать в каноническом виде, например, так:

$$\omega = dy + v_1dx_2 + v_2dx_3.$$

Чтобы найти dy, полагаем $dx_2 = dx_3 = 0$:

$$dy = \{\omega\}_{dx_2 = dx_3 = 0} = x_2dx_1 - x_3(x_4dx_5 + x_5dx_4) + x_2dx_6.$$

При постоянных x_2 и x_3 имеем:

$$y = x_2(x_1 + x_6) - x_3x_4x_5.$$

То же значение переменная y сохранит и при переменных x_2, x_3.

Из тождества

$$d\{x_2(x_1 + x_6) - x_3x_4x_5\} + v_1dx_2 + v_2dx_3 =$$
$$= x_2dx_1 + x_1dx_2 - x_3(x_4dx_5 + x_5dx_4) + x_2dx_6$$

находим:

$$v_1 = x_1 - (x_1 + x_6) = -x_6, \quad v_2 = x_4x_5.$$

Следовательно, получаем канонический вид формы ω:

$$\omega = d(x_1x_2 + x_2x_6 - x_3x_4x_5) - x_6dx_2 + x_4x_5dx_3,$$

где

$$y = x_1x_2 + x_2x_6 - x_3x_4x_5, \quad v_1 = -x_6, \quad v_2 = x_4x_5, \quad x_2, x_3$$

— канонические переменные.

§ 6. Присоединённая система уравнений

Картан[1]) даёт метод приведения формы Пфаффа к каноническому виду, не требующий предварительного определения характеристических переменных.

Определение. *Полной присоединённой системой уравнений* в частных производных для формы Пфаффа ω называется система линейных уравнений для неизвестной функции f, которая получится, если приравнять нулю все коэффициенты при произведениях независимых дифференциалов в уравнении

$$[D^{\rho-2}\omega, df] = 0, \tag{13}$$

где ρ — класс формы ω.

Следствие 1. *Полная присоединённая система инвариантна относительно замены переменных.*

Действительно, полный дифференциал df и внешний дифференциал $D^{\rho-2}\omega$ инвариантны относительно замены переменных. Этим свойством будет обладать и присоединённая система.

Следствие 2. *Полная присоединённая система допускает* $\rho - 1$ *независимых интегралов.*

---

[1]) Cartan, Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff, Ann. de l'Ecole Normale Sup., (3), **16**, 1899, стр. 259 и след.

Действительно, внешний дифференциал $D^m\omega$ есть внешняя форма степени $m+1$; следовательно, в левой части уравнения (13) стоит форма степени ρ. В характеристических переменных $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$, т. е. в подкольце ρ измерений, уравнение (13) равносильно одному уравнению, линейному однородному в частных производных первого порядка, которое не содержит самой неизвестной функции. Такое уравнение допускает $\rho-1$ независимых интегралов[1]). В силу инвариантности системы она допускает те же $\rho-1$ интегралов в произвольных переменных.

Нетрудно обнаружить, что каждое решение f уравнения (13) является той переменной x_1, которая позволяет выделить произведение $[dx_1\tilde{\omega}^1]$ в полуканоническом виде (5) или (6) формы $D\omega$.

Действительно, если $\rho=2p+1$, то по формуле (8)

$$D^{\rho-2}\omega=\frac{1}{p!}[D\omega]^p,$$

и уравнение (13) эквивалентно уравнению

$$[[D\omega]^p\,df]=0,$$

которое показывает, что df как делитель монома $[D\omega]^p$ принадлежит подкольцу формы $D\omega$ и может быть принят за дифференциал dx_1 в полуканоническом разложении (5).

Если $\rho=2p$, то по формуле (8) мы придём к уравнению

$$[\omega\,[D\omega]^{p-1}\,df]=0,$$

которое покажет, что дифференциал df может быть принят за дифференциал dx_1 в формуле (6).

Мы можем непосредственно притти к каноническому представлению формы ω посредством теоремы.

Теорема. *Класс линейной формы понижается на две единицы, если положить постоянным интеграл присоединённой полной системы.*

Если

$$z_1=f_1(x_1, x_2, \ldots, x_\rho)$$

— один из интегралов уравнения (13) и

$$\omega_1=\{\omega\}_{dz_1=0}$$

— значение формы ω при $z_1=\text{const.}$, то из уравнения (13) следует, что $D^{\rho-2}\omega$ делится на dz_1 и, следовательно,

$$D^{\rho-2}\omega_1=\{D^{\rho-2}\omega\}_{dz_1=0}=0,$$

а потому класс формы ω_1 не больше, чем $\rho-2$.

---

[1]) Степанов, Курс дифференциальных уравнений, 1945, гл. VIII, § 2.

Последовательно понижая класс формы, мы доведём класс формы ω до нуля, если он чётный: $\rho=2p$, или до единицы, если он нечётный; $\rho=2p+1$.

При этом преобразовании, так как

$$\omega_h=\{\omega\}_{dz_1=dz_2=\ldots=dz_h=0},$$

то

$$D^{\rho-2h}\omega_h=\{D^{\rho-2h}\omega\}_{dz_1=\ldots=dz_h=0}=0,$$

и уравнение

$$[D^{\rho-2h}\omega_h\,df]=0$$

эквивалентно уравнению

$$[D^{\rho-2h}\omega\,dz_1dz_2\ldots dz_h df]=0.$$

Пример 1 (§ 4). Класс формы ω, как мы видели, равен $\rho=4$. Присоединённая система получается из уравнения

$$[D^2\omega\,df]=0$$

и содержит два независимых уравнения

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}-x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial f}{\partial x_3}=0,$$

$$x_4\frac{\partial f}{\partial x_2}-x_3x_4\frac{\partial f}{\partial x_4}+x_3x_5\frac{\partial f}{\partial x_5}=0.$$

Если искать интеграл, не зависящий от x_2, x_4, x_5, то первое уравнение немедленно даст решение $f=\frac{x_1}{x_3}$. Введём каноническую переменную z_1 посредством формулы

$$x_1=z_1\,x_3.$$

Мы получим:

$$\omega=z_1x_3^2dx_2+z_1\,x_2\,x_3\,dx_3+x_3(z_1+x_5)\,dx_4+x_3\,x_4\,dx_5.$$

Вторая присоединённая система получается из уравнения

$$[\omega\,dz_1\,df]=0$$

при $z_1=\text{const.}$ в виде

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{z_1x_3^2}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x_3}}{z_1x_2x_3}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x_4}}{x_3(z_1+x_5)}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x_5}}{x_3x_4}.$$

Выбирая интеграл

$$z_2=z_1x_2x_3+x_4(z_1+x_5)$$

и исключая, например, x_5, получим каноническое представление формы ω:

$$\omega=-x_3(x_4+x_2x_3)\,dz_1+x_3\,dz_2,$$

где z_1 и z_2 — две канонические переменные, а две другие канонические переменные суть коэффициенты при dz_1 и dz_2.

Пример 2 (§ 5). Класс формы ω, как мы видели, равен $\rho = 5$. Присоединённая система получается из уравнения

$$[D^3\omega\, df] = 0$$

и содержит два независимых уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} - x_5 \frac{\partial f}{\partial x_5} = 0.$$

Если выбрать интеграл $f = x_2$ и ввести каноническую переменную $z_1 = x_2$, то получим:

$$\omega = x_1 dz_1 + z_1 dx_1 - x_3 x_5 dx_4 - x_3 x_4 dx_5 + z_1 dx_6.$$

Уравнение

$$[D\omega\, dz_1\, df] = 0$$

при $z_1 = \text{const.}$ приводит ко второй присоединённой системе

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_6} = 0, \quad x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} - x_5 \frac{\partial f}{\partial x_5} = 0.$$

Выбирая интеграл $f = x_3$ и внося $x_3 = z_2$ в форму ω, получим:

$$\omega = x_1 dz_1 + z_1\, dx_1 + z_1\, dx_6 - z_2 (x_5 dx_4 + x_4 dx_5).$$

При $z_1 = \text{const.}$, $z_2 = \text{const.}$ эта форма становится полным дифференциалом:

$$\omega_2 = d(x_1 z_1 + x_6 z_1 - x_4 x_5 z_2).$$

Полагая

$$z_3 = x_1 z_1 + x_6 z_1 - x_4 x_5 z_2,$$

получим каноническое разложение формы:

$$\omega = - x_6\, dz_1 + x_4 x_5 dz_2 + dz_3.$$

Здесь z_1, z_2, z_3 — первые три канонические переменные, коэффициенты при dz_1, dz_2 составляют остальные две.

§ 7. Класс уравнения Пфаффа

Характеристическая система одного уравнения Пфаффа

$$\theta = 0$$

по определению (гл. IV, § 7) совпадает с ассоциированной системой форм

$$\theta,\ [\theta\, D\theta].$$

Эта система является характеристической для формы Пфаффа, стоящей в левой части уравнения $q_1\theta = 0$, где q_1 — подходящая функция. Эта форма имеет наименьший класс среди всех форм $q\theta$, стоящих в левых частях всех уравнений, эквивалентных данному. Отсюда видно, что класс уравнения Пфаффа всегда нечётный.

Действительно, если класс формы θ — чётный, то после деления формы на коэффициент при одном из дифференциалов в каноническом представлении её число характеристических переменных, а следовательно, и класс формы уменьшатся на единицу.

Теорема. *Класс уравнения Пфаффа*

$$\theta = 0$$

равен $2m + 1$, *если*

$$(14) \qquad [\theta[D\theta]^m] \neq 0, \quad [\theta[D\theta]^{m+1}] = 0.$$

Действительно, если класс уравнения $\theta = 0$ равен $2m + 1$, то существует такой множитель q, что класс формы $\omega = q\theta$ равен $2m + 1$, а тогда по формулам (7b) имеем:

$$(15) \qquad [q\theta[D(q\theta)]^m] \neq 0, \quad [D(q\theta)]^{m+1} = 0.$$

Так как

$$D(q\theta) = [dq, \theta] + qD\theta,$$

то

$$[q\theta[D(q\theta)]^m] = q[\theta[[dq,\theta] + qD\theta]^m] = q^{m+1}[\theta[D\theta]^m],$$
$$[D(q\theta)]^{m+1} = [[dq,\theta] + qD\theta]^{m+1} =$$
$$= (m+1)\, q^m [dq, \theta[D\theta]^m] + q^{m+1}[D\theta]^{m+1},$$

и наши условия принимают вид

$$[\theta[D\theta]^m] \neq 0, \quad (m+1)[dq, \theta[D\theta]^m] + q[D\theta]^{m+1} = 0.$$

Умножая равенство внешним образом на θ, мы получим:

$$[\theta[D\theta]^{m+1}] = 0.$$

Таким образом приходим к условиям (14).

Обратно, допустим, что условия (14) имеют место. Если при этом

$$(\text{a}) \qquad [D\theta]^{m+1} = 0,$$

то неравенство (14) и равенство (a) совпадают с условиями (7b) при $p = m$, и, следовательно, класс формы θ равен $2m + 1$. Если же

$$(\text{b}) \qquad [D\theta]^{m+1} \neq 0,$$

то неравенство (b) и равенство (14) совпадут с условиями (7a) при $p = m + 1$, и, следовательно, класс формы θ равен $2m + 2$, а класс уравнения $\theta = 0$ — попрежнему $2m + 1$.

Н.Макеев „К вопросу об инволютивности системы Пф
„Изв. ВУЗ'ов. Матем." 1980, N1, стр.39-44, РЖМАТ80, 11А7
Доказано 1) Если ∃ регул. цепь интегр. элементов системы П
то эту систему и условие совместности $dw|_{w=0}=0$ можно ре
шить так, что выйдет ортон. пассивн. система Рикье
) Если сист. Пфаффа частично продолжить и это продол
жение будет в инволюции, то и полное продолжение
будет в инволюции

ГЛАВА VI

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ПФАФФА В ИНВОЛЮЦИИ

§ 1. Система Пфаффа в инволюции

В гл. III мы рассматривали вполне интегрируемые системы уравнений Пфаффа. Эта теория представляет весьма частый случай общей теоремы Картана о системе Пфаффа в инволюции[1]).

Так как теорема Картана о существовании решения опирается на теорему Коши-Ковалевской, то мы вынуждены ограничить область коэффициентов форм Пфаффа областью аналитических функций от всех переменных задачи.

Из двух задач интегрирования: найти все интегральные многообразия $\mathfrak{M}$ системы и найти интегральные многообразия при заданной системе независимых переменных, мы будем рассматривать вторую. Таким образом мы будем предполагать, что нам дана система уравнений Пфаффа

$$(1) \qquad \theta_1=0, \quad \theta_2=0, \ldots, \quad \theta_s=0,$$

содержащая s линейно независимых линейных форм с n независимыми переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и r неизвестными функциями $z_1, z_2, \ldots, z_r$. При этом мы можем полагать $r \geqslant s$, ибо в противоположном случае по исключении дифференциалов dz_j (что возможно, ибо система — ранга s) мы получили бы уравнение между дифференциалами независимых переменных dx_i, что противоречит условию (см. гл. III. § 3, стр. 130).

Возможна и другая, более общая постановка задачи. Кольцо форм $\mathfrak{R}[dx, dz]$, к которому принадлежат формы (1), может быть отнесено к базису в виде совокупности линейных форм, в числе которых мы можем считать систему форм θ_k, стоящих в левых частях уравнений (1). Тогда вся совокупность форм базиса должна быть разбита на три группы

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s; \quad \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n; \quad \tilde\omega_1, \tilde\omega_2, \ldots, \tilde\omega_q,$$

где θ_k—образуют базис системы (1), ω_i—система форм, имеющая базисом совокупность дифференциалов независимых переменных dx_i

и $\tilde\omega_g$—те $q=r-s$ форм, которые дополняют систему $s+n$ форм θ_k, ω_i до полной системы $n+r$ линейно независимых форм.

В такой постановке задача интегрирования сводится к нахождению интегрального многообразия n измерений $\mathfrak{M}_n$, на котором внешнее произведение форм ω_i было бы отлично от нуля:

$$(2) \qquad [\omega_1\omega_2\ldots\omega_n] \neq 0.$$

В аналитическом пространстве $n+r$ переменных x_i, z_j интегральное многообразие p измерений $\mathfrak{M}_p$ определяется $n+r$ уравнениями

$$(3) \qquad \begin{aligned} &x_i=\Phi_i(t_1, t_2, \ldots, t_p), \quad && z_j=F_j(t_1, t_2, \ldots, t_p), \\ &i=1, 2, \ldots, n; && j=1, 2, \ldots, r, \end{aligned}$$

которые удовлетворяют системе (1), т. е. обращают все формы θ_k в нули, если вместо x_i, z_j внести значения (3), а вместо дифференциалов — выражения

$$(3') \qquad dx_i=\frac{\partial\Phi_i}{\partial t_\alpha}dt_\alpha, \quad dz_j=\frac{\partial F_j}{\partial t_\alpha}dt_\alpha, \qquad \alpha=1, 2, \ldots, p.$$

При этом мы будем предполагать, что матрица производных

$$\left\| \frac{\partial\Phi_i}{\partial t_\alpha} \right\|, \qquad i=1, 2, \ldots, n, \quad \alpha=1, 2, \ldots, p,$$

— ранга $p<n$, так что, например, первые p уравнений системы (3) можно разрешить относительно параметров $t_1, t_2, \ldots, t_p$ и, внося найденные выражения в остальные уравнения системы, представить многообразие $\mathfrak{M}_p$ уравнениями

$$(4) \qquad \begin{aligned} &x_h=\varphi_h(x_1, x_2, \ldots, x_p), \qquad && h=p+1, p+2, \ldots, n, \\ &z_j=f_j(x_1, x_2, \ldots, x_p), && j=1, 2, \ldots, r. \end{aligned}$$

Если переменные $x_1, x_2, \ldots, x_p$ связать каким-нибудь соотношением, например,

$$(5) \qquad x_p=\bar\varphi_p(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}),$$

то, внося эти выражения в остальные уравнения (4), получим уравнения

$$(4') \qquad \begin{aligned} &x_{h'}=\bar\varphi_{h'}(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}), \qquad && h'=p, p+1, \ldots, n, \\ &z_j=\bar f_j(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}), && j=1, 2, \ldots, r, \end{aligned}$$

определяющие интегральное многообразие $(p-1)$-го измерения $\mathfrak{M}_{p-1}$. Это многообразие будет интегральным. Достаточно сделать подстановку выражений (4′) в формы θ_k двумя этапами: сначала внести значения (4), а потом заменить x_p формулой (5). Такая подстановка обратит формы θ_k в нули (уже на первом этапе), что и доказывает утверждение.

---

[1]) Cartan. Sur l'ntegration des systémes d'équations aux différentielles totales, Ann. de l'Ecole Normale Sup., (3), 18, 1901.

Мы будем говорить, что интегральное многообразие $\mathfrak{M}_{p-1}$ лежит на многообразии $\mathfrak{M}_p$ или содержится в нём, а интегральное многообразие $\mathfrak{M}_p$ содержит $\mathfrak{M}_{p-1}$ или проходит через него, наконец, что уравнение (5) высекает многообразие $\mathfrak{M}_{p-1}$ из многообразия $\mathfrak{M}_p$.

Пользуясь этой терминологией, можно дать следующее определение системы Пфаффа в инволюции.

Определение. Система уравнений Пфаффа (S) с n независимыми переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — в *инволюции*, если через каждую точку $x_i = x_i^0$, $z_j = z_j^0$ проходит по крайней мере одно интегральное многообразие одного измерения $\mathfrak{M}_1$, через каждое интегральное многообразие одного измерения $\mathfrak{M}_1^0$ — по крайней мере одно интегральное многообразие двух измерений $\mathfrak{M}_2$ и т. д., наконец, через каждое интегральное многообразие $(n-1)$-го измерения $\mathfrak{M}_{n-1}^0$ проходит по крайней мере одно интегральное многообразие n измерений $\mathfrak{M}_n$, на котором переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не связаны никаким уравнением. Мы будем говорить в таком случае, что система (S) — *жанра* n.

Если через каждое интегральное многообразие $\mathfrak{M}_{n'}$ проходит только одно интегральное многообразие $\mathfrak{M}_n$, а через $\mathfrak{M}_{n'-1}$ проходит несколько интегральных многообразий $\mathfrak{M}_{n'}$, то мы будем называть число n' *истинным жанром* системы (S).

Если $n' = n$, то система (S) — *нулевого рода*, если $n - n' = 1$, то система — *первого рода* и т. д.

§ 2. Система ковариантов

Интегральное многообразие $\mathfrak{M}_n$, удовлетворяя системе уравнений (1), должно удовлетворять и всем уравнениям продолженной системы, которая получается, если к системе (1) присоединить все её дифференциальные следствия, так же как это делается с уравнениями в частных производных. Однако здесь для уравнений в полных дифференциалах естественно ограничиться внешним дифференцированием, и тогда обнаруживается замечательное отличие продолженной системы уравнений Пфаффа.

Дифференцируя внешним образом уравнения (1), мы получаем систему квадратичных уравнений

$$D\theta_1 = 0, \quad D\theta_2 = 0, \ldots, \quad D\theta_s = 0, \tag{6}$$

которую будем называть *системой ковариантов* (S') системы Пфаффа (S).

На этом построение продолженной системы обрывается, система ковариантов — замкнутая относительно операции дифференцирования, ибо, согласно теореме Пуанкаре, внешний дифференциал от внешнего дифференциала тождественно равен нулю. Таким образом интегральное многообразие $\mathfrak{M}_n$, удовлетворяя системе (S), удовлетворяет и системе ковариантов (S').

Совокупность $n+r$ координат x_i, z_j точки в аналитическом пространстве переменных $[x, z]$ и $n+r$ числовых значений дифференциалов dx_i, dz_j определяют в этом пространстве точку и выходящий из этой точки вектор, т. е. то, что называется *линейным элементом*

$$e = e(x_i,\ z_j;\ dx_i,\ dz_j).$$

Определение 1. Линейный элемент называется *интегральным*, если $2(n+r)$ чисел — координат элемента $e(x_i,\ z_j;\ dx_i,\ dz_j)$, обращают в нуль все формы Пфаффа θ_k системы (S).

Билинейная форма, ассоциированная внешнему дифференциалу $D\theta_k$ — так называемый ковариант Фробениуса, — содержит два ряда дифференциалов и, следовательно, относится к двум линейным элементам, построенным в одной точке:

$$e_1 = e_1(x_i,\ z_j;\ dx_i,\ dz_j),$$
$$e_2 = e_2(x_i,\ z_j;\ \delta x_i,\ \delta z_j).$$

Определение 2. Два интегральных линейных элемента e_1 и e_2 находятся *в инволюции*, если их координаты x_i, z_j; dx_i, dz_j и x_i, z_j; δx_i, δz_j обращают в нуль не только формы θ_k системы (S), но и все коварианты системы (S').

Следствие. *Все линейные элементы интегрального многообразия $\mathfrak{M}_n$ — интегральные и попарно находятся в инволюции.*

§ 3. Интегральные элементы $\mathcal{E}_\nu$

Определению интегрального многообразия можно дать более геометрический вид.

Рассмотрим какое-нибудь аналитическое многообразие (хотя бы и не интегральное) $\mathfrak{M}_\nu$, определяемое $n+r$ уравнениями

$$x_i = \Phi_i(t_1,\ t_2, \ldots,\ t_\nu), \qquad z_j = F_j(t_1,\ t_2, \ldots, t_\nu),$$
$$i = 1,\ 2, \ldots,\ n; \qquad\qquad j = 1,\ 2, \ldots,\ r,$$

где все функции Φ_i, F_j — аналитические функции своих аргументов.

Возьмём произвольную точку $M(x_i,\ z_j)$ на этом многообразии и семейство кривых L, определяемых уравнениями

$$t_h = t_h(\tau) + C_h, \quad C_h = \text{const.}, \qquad h = 1, 2, \ldots, \nu. \tag{L}$$

При подходящем выборе постоянных C_h найдётся кривая, проходящая через точку M многообразия $\mathfrak{M}_\nu$. Дифференциалы

$$dx_1 = \frac{\partial \Phi_i}{\partial t_h} \cdot \frac{dt_h}{d\tau}\, d\tau, \qquad dz_j = \frac{\partial F_i}{\partial t_h} \cdot \frac{dt_h}{d\tau} d\tau, \qquad h = 1, 2, \ldots, \nu,$$

при произвольном $d\tau$ определяют вектор произвольной длины, касательный к кривой L, или, иначе, служат однородными координатами прямой, касательной к линии L в точке M. Мы будем говорить, что $2(n+r)$ чисел (x_i, z_j) и (dx_i, dz_j) определяют линейный элемент

$$e = e(x_i, z_j; dx_i, dz_j),$$

касательный к многообразию $\mathfrak{M}_\nu$. Он определяется точкой $M(x_i, z_j)$ и направлением, т. е. совокупностью векторов с одними и теми же отношениями координат dx_i, dz_j.

Уравнения

$$t_h = t_h(\tau_1, \tau_2) + C_h, \qquad h = 1, 2, \ldots, \nu,$$

определяют на многообразии $\mathfrak{M}_\nu$ семейство поверхностей. Дифференциалы

$$d_1x_i = \frac{\partial\Phi_i}{\partial t_h}\cdot\frac{\partial t_h}{\partial\tau_1}\,d\tau_1, \qquad d_1z_j = \frac{\partial F_j}{\partial t_h}\cdot\frac{\partial t_h}{\partial\tau_1}\,d\tau_1,$$

$$d_2x_i = \frac{\partial\Phi_i}{\partial t_h}\cdot\frac{\partial t_h}{\partial\tau_2}\,d\tau_2, \qquad d_2z_j = \frac{\partial F_j}{\partial t_h}\cdot\frac{\partial t_h}{\partial\tau_2}\,d\tau_2$$

определяют два линейных элемента

$$e_1 = e_1(x_i, z_j; d_1x_i, d_1z_j) \quad \text{и} \quad e_2 = e_2(x_i, z_j; d_2x_i, d_2z_j),$$

касательных к двум линиям τ_1 и τ_2 на поверхности.

Дифференциалы

$$dx_i = \frac{\partial\Phi_i}{\partial t_h}\cdot\frac{\partial t_h}{\partial\tau_\alpha}\,d\tau_\alpha, \qquad dz_j = \frac{\partial F_j}{\partial t_h}\cdot\frac{\partial t_h}{\partial\tau_\alpha}\,d\tau_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2,$$

при произвольном отношении $\lambda = d\tau_2 : d\tau_1$ определяют пучок линейных элементов

$$e_\lambda = e_1 + \lambda e_2,$$

касательных к линиям на поверхности и расположенных в её касательной плоскости. Они составляют касательный двумерный элемент

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_2(e_1, e_2).$$

Таким образом, можно построить касательный элемент любого числа измерений (конечно, не превышающего размерности многообразия).

Многообразие ν измерений $\mathfrak{M}_\nu$ содержит в данной точке ν линейно независимых касательных линейных элементов, например, соответствующих координатным линиям t_h:

$$e_h = e_h(x_i, z_j; d_hx_i, d_hz_j),$$

$$d_hx_i = \frac{\partial\Phi_i}{\partial t_h}, \qquad d_hz_j = \frac{\partial F_j}{\partial t_h}, \qquad h = 1, 2, \ldots, \nu.$$

Они определяют касательный элемент ν измерений

$$\mathcal{E}_\nu = \mathcal{E}_\nu(e_1, e_2, \ldots, e_\nu),$$

который содержит все касательные линейные элементы

$$e = \lambda_h e_h, \qquad h = 1, 2, \ldots, \nu,$$

при произвольных значениях параметров λ_h. Любые $\mu < \nu$ линейные соотношения между параметрами λ_h высекут из касательного элемента $\mathcal{E}_\nu$ новый касательный элемент $\mathcal{E}_{\nu-\mu}$, на μ измерений меньший.

Если многообразие $\mathfrak{M}_\nu$ — интегральное, то все его касательные элементы — интегральные, но можно дать определение интегрального элемента любого числа измерений независимо от интегрального многообразия, и это замечание имеет большое значение в теории Картана.

Определение 3. Элемент p измерений

$$\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p(e_1, e_2, \ldots, e_p)$$

называется *интегральным*, если все его линейные элементы e_h — интегральные и попарно находятся в инволюции между собой.

Все касательные элементы (любого числа измерений от 1 до ν) интегрального многообразия $\mathfrak{M}_\nu$ удовлетворяют этому определению, ибо координаты любой точки многообразия (3) и любого касательного вектора (3′) удовлетворяют уравнениям системы (S) и уравнениям системы ковариантов (S'), т. е. обращают в нуль все формы θ_k и $D\theta_k$. Обратно, аналитическое многообразие $\mathfrak{M}_\nu$ является интегральным, если все линейные элементы его — интегральные, ибо это означает, что формулы (3), (3′) тождественно удовлетворяют уравнениям системы (1).

Гораздо важнее, что интегральные элементы при известных условиях позволяют определить интегральное многообразие.

§ 4. Цепь интегральных элементов

Рассмотрим интегральный элемент p измерений

$$\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p(e_1, e_2, \ldots, e_p).$$

Он построен на p линейных элементах $e_1, e_2, \ldots, e_p$, каждый из которых — интегральный и каждая пара — в инволюции.

Такой p-мерный элемент $\mathcal{E}_p^0$ содержит $(p-1)$-мерное многообразие линейных элементов

$$e = \lambda_\alpha e_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \tag{7}$$

где p параметров λ_α можно рассматривать как однородные координаты линейного элемента e относительно координатной системы, образованной p линейно независимыми элементами $e_1, e_2, \ldots, e_p$.

Любое линейное соотношение между координатами λ_α

$$c_\alpha\lambda_\alpha = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \tag{8}$$

оставляет независимыми только $p-1$ линейных элементов. Если, например, c_p—не нуль, то уравнение (8) можно разрешить относительно λ_p и внести в формулу (7). Получится формула

$$e=\lambda_\beta(e_\beta-c'_\beta e_p),\quad c'_\beta=\frac{c_\beta}{c_p},\quad \beta=1,2,\ldots,p-1,$$

где

$$e'_\beta=e_\beta-c'_\beta e_p,\qquad \beta=1,2,\ldots,p-1,$$

—новые $p-1$ линейных элементов, определяющих интегральный элемент $(p-1)$-го измерения $\mathcal{E}_{p-1}$, который содержится в элементе $\mathcal{E}^0_p$, ибо все его линейные элементы принадлежат ему. Мы будем говорить, что элемент $\mathcal{E}_{p-1}$ вложен в элемент $\mathcal{E}^0_p$, а элемент $\mathcal{E}^0_p$ проходит через элемент $\mathcal{E}_{p-1}$, и писать:

$$\mathcal{E}_{p-1}\subset\mathcal{E}^0_p.$$

Налагая последовательно новые и новые независимые линейные однородные соотношения (8) на параметры λ_α, мы будем более и более стеснять многообразие линейных элементов (7), высекая из p-мерного интегрального элемента $\mathcal{E}^0_p$ последовательность вложенных один в другой интегральных элементов

$$\mathcal{E}_1\subset\mathcal{E}_2\subset\ldots\subset\mathcal{E}_{p-1}\subset\mathcal{E}^0_p,$$

каждый из которых содержит предыдущий и сам содержится в последующем. Такую последовательность будем называть *цепью интегральных элементов*.

Каждый интегральный элемент $\mathcal{E}_p$ несёт в себе множество таких цепей, но гораздо важнее построение цепи, исходя из произвольно заданного линейного элемента $\mathcal{E}^0_1$. Возникает проблема проведения через данный ν-мерный интегральный элемент $\mathcal{E}^0_\nu$ следующего интегрального элемента $\mathcal{E}_{\nu+1}$ $(\nu+1)$-го измерения.

Если интегральный элемент $\mathcal{E}^0_\nu$ определяется ν независимыми линейными элементами:

$$\mathcal{E}^0_\nu=\mathcal{E}^0_\nu(e^0_1, e^0_2, \ldots, e^0_\nu),$$

то проходящий через него элемент $\mathcal{E}_{\nu+1}$ можно искать как совокупность всех линейных элементов $\mathcal{E}^0_\nu$ и ещё одного линейного элемента $e_{\nu+1}$:

$$\mathcal{E}_{\nu+1}=\mathcal{E}_{\nu+1}(e^0_1, e^0_2, \ldots, e^0_\nu, e_{\nu+1}),$$

который, очевидно, и будет его определять. Из всех координат элемента

$$e_{\nu+1}=e_{\nu+1}(x_i, z_j; dx_i, dz_j)$$

координаты точки x_i, z_j уже известны: они — те же самые, что у всех предыдущих линейных элементов, а дифференциалы dx_i, dz_j должны удовлетворять уравнениям системы (1), а также всем тем, которые вытекают из требования, чтобы линейный элемент $e_{\nu+1}$ был в инволюции с каждым из предшествующих $e^0_h\,(h\leqslant\nu)$. Каждая пара линейных элементов $e_{\nu+1}$, e^0_h должна обращать в нуль коварианты $D\theta_k$.

Таким образом на неизвестные величины dx_i, dz_j накладываются $\nu+1$ систем линейных однородных уравнений [ν систем уравнений из требования обращения в нуль ковариантов $D\theta_k$ и ещё система уравнений (S)]. Все коэффициенты в этих уравнениях известны, и широта решения r_ν зависит от ранга ρ всей этой системы. Эта система называется *полярной* системой элемента $\mathcal{E}_\nu$.

Ранг системы ρ, вообще говоря, не зависит от выбора линейных элементов e^0_h, где $h\leqslant\nu$, и при малых изменениях их координат остаётся инвариантным, но для отдельных элементов $\mathcal{E}^0_\nu$ может понизиться, если все определители порядка ρ из матрицы коэффициентов обратятся в нуль. Через такой элемент $\mathcal{E}^0_\nu$ проходит больше интегральных элементов $\mathcal{E}_{\nu+1}$, чем через соседние элементы $\mathcal{E}_\nu$, координаты которых сколь угодно мало отличаются от координат $\mathcal{E}^0_\nu$.

Определения. Интегральный элемент $\mathcal{E}^0_\nu$ называется *особым*, если через него проходит больше интегральных элементов $\mathcal{E}_{\nu+1}$, чем через соседние элементы $\mathcal{E}_\nu$. Цепь интегральных элементов называется *особой*, если хотя бы один её элемент — особый. Интегральное многообразие $\mathfrak{M}_\nu$ называется *особым*, если все его касательные элементы (ν-го измерения) — особые.

Особые интегральные многообразия не подчиняются общей теории. Для определения их приходится строить новую систему уравнений Пфаффа. Что касается до неособых, то вопрос существования такого многообразия решается построением неособой (*регулярной*) цепи интегральных элементов

$$\mathcal{E}^0_1\subset\mathcal{E}^0_2\subset\ldots\subset\mathcal{E}^0_{n-1}\subset\mathcal{E}^0_n. \tag{9}$$

Построение неособой цепи интегральных элементов (9) представляет особую трудность в приложениях метода Картана, и нам придётся специально остановиться на критерии регулярности цепи (отсутствия особых элементов). Сейчас мы перейдём к основной теореме существования интегрального многообразия.

§ 5. Первая теорема существования

Первым шагом к доказательству основной теоремы о существовании и степени общности интегрального многообразия $\mathfrak{M}_n$ системы Пфаффа является следующая теорема Картана.

Первая теорема существования. *Если дано интегральное многообразие системы Пфаффа $\mathfrak{M}_\nu$, неособое, ν измерений,* *если даны обыкновенная точка этого многообразия* M_0 (x_i^0, z_j^0), *касательный к многообразию в этой точке* ν*-мерный элемент* $\mathfrak{E}_\nu^0$, *тоже неособый, и многообразие* $n+r-\rho$ *измерений* $\mathfrak{F}$, *содержащее* $\mathfrak{M}_\nu$ *так, что касательный в точке* M_0 *элемент его* G *выделяет только один интегральный элемент* $\nu+1$ *измерений* $\mathfrak{E}_{\nu+1}^0$, *проходящий через* $\mathfrak{E}_\nu^0$ *и содержащийся в* G, *то существует единственное интегральное многообразие* $(\nu+1)$*-го измерения* $\mathfrak{M}_{\nu+1}$, *которое содержит в себе* $\mathfrak{M}_\nu$, *само содержится в многообразии* $\mathfrak{F}$ *и в точке* M_0 *имеет* $\mathfrak{E}_{\nu+1}^0$ *своим касательным элементом.*

Мы разобьём доказательство на четыре части.

1. Постановка задачи

Разобьём все $n+r$ переменных x_i, z_j на три группы.

Выделим прежде всего те переменные, которые остаются независимыми на многообразиях $\mathfrak{M}_\nu$ и $\mathfrak{M}_{\nu+1}$. На первом многообразии таких переменных — ν, на втором $\nu+1$. Так как второе многообразие по условию содержит в себе первое, то независимые переменные на многообразии $\mathfrak{M}_\nu$ останутся независимыми и на многообразии $\mathfrak{M}_{\nu+1}$. Обозначим их буквами $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$. Кроме них на многообразии $\mathfrak{M}_{\nu+1}$ будет ещё одна лишняя независимая переменная, например, $x_{\nu+1}$.

Предполагая многообразие $\mathfrak{M}_\nu$ аналитическим, мы можем определить его, задавая все координаты функциями ν параметров $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$. В числе этих координат надо будет задать и координату $x_{\nu+1}$:

$$x_{\nu+1} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_\nu).$$

Это уравнение и будет определять на многообразии $\mathfrak{M}_{\nu+1}$ подпространство $\mathfrak{M}_\nu$. Делая замену переменных, введём новую независимую переменную x посредством уравнения

$$x = x_{\nu+1} - \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_\nu).$$

Тогда $\mathfrak{M}_\nu$ будет определяться на $\mathfrak{M}_{\nu+1}$ уравнением

$$x = 0.$$

Все остальные переменные на многообразии $\mathfrak{M}_{\nu+1}$ являются зависимыми. Разобьём их на две группы.

Оба многообразия $\mathfrak{M}_\nu$ и $\mathfrak{M}_{\nu+1}$ содержатся в некотором многообразии $\mathfrak{F}$ с числом измерений $n+r-\rho$. Оно определяется, следовательно, ρ независимыми уравнениями между всеми переменными x_i, z_j. Примем левые части этих уравнений за новые переменные. Обозначим их буквами $z_1, z_2, \ldots, z_\rho$. Это будет одна группа переменных; вторую группу составят все остальные переменные; мы обозначим их буквами

$$y_1, y_2, \ldots, y_q, \quad q = n+r-\rho-(n+1) = r-\rho-1.$$

При этих обозначениях многообразие $\mathfrak{F}$ будет определяться уравнениями

$$(\mathfrak{F}) \qquad z_h = 0, \qquad h = 1, 2, \ldots, \rho.$$

Эти уравнения сохранят свою силу и на многообразиях $\mathfrak{M}_\nu$ и $\mathfrak{M}_{\nu+1}$, которые оба содержатся в многообразии $\mathfrak{F}$.

Многообразие $\mathfrak{M}_\nu$ будет теперь определяться уравнениями

$$(\mathfrak{M}_\nu) \qquad \begin{aligned} &x = 0, \\ &y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_\nu), \\ &y_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_\nu), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_q = \varphi_q(x_1, x_2, \ldots, x_\nu), \\ &z_h = 0, \qquad\qquad h = 1, 2, \ldots, \rho, \end{aligned}$$

где все функции φ_g надо рассматривать как заданные.

Наконец, многообразие $\mathfrak{M}_{\nu+1}$, если оно существует, должно определяться уравнениями

$$(\mathfrak{M}_{\nu+1}) \qquad \begin{aligned} &y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_\nu; x), \\ &y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_\nu; x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_q = f_q(x_1, x_2, \ldots, x_\nu; x), \\ &z_h = 0, \qquad\qquad h = 1, 2, \ldots, \rho. \end{aligned}$$

Здесь функции f_g — искомые. Так как многообразие $\mathfrak{M}_\nu$ содержится в многообразии $\mathfrak{M}_{\nu+1}$ и определяется на нём уравнением

$$x = 0,$$

то для $x = 0$ уравнения обоих многообразий должны совпадать, т. е. искомые функции f_g должны удовлетворять начальным условиям

$$(10) \qquad f_g(x_1, x_2, \ldots, x_\nu; 0) = \varphi_g(x_1, x_2, \ldots, x_\nu).$$

Переходим к интегральным элементам $\mathfrak{E}_\nu^0$ и $\mathfrak{E}_{\nu+1}^0$.

Линейно независимые линейные элементы $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$, определяющие элемент $\mathfrak{E}_\nu$, можно выбрать касательными к координатным линиям многообразия $\mathfrak{M}_\nu$:

Линейный элемент	Символ дифференцирования	Дифференциалы
e_1	d_1	$dx_1 = 1,\ dx_2 = dx_3 = \ldots = dx_\nu = 0,\ dx = 0,$ $dy_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x_1},\quad dy_2 = \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \ldots,\quad dy_q = \frac{\partial y_q}{\partial x_1},$ $dz_h = 0.$
e_2	d_2	$dx_1 = 0,\ dx_2 = 1,\ dx_3 = \ldots = dx_\nu = 0,\ dx = 0,$ $dy_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x_2},\quad \partial y_2 = \frac{\partial y_2}{\partial x_2}, \ldots,\quad dy_q = \frac{\partial y_q}{\partial x_2},$ $dz_h = 0.$
. . . . . .	. . . . . .	. . . .
e_ν	d_ν	$dx_1 = dx_2 = \ldots = dx_{\nu-1} = 0,\ dx_\nu = 1,\ dx = 0,$ $dy_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x_\nu},\quad dy_2 = \frac{\partial y_2}{\partial x_\nu}, \ldots,\quad dy_q = \frac{\partial y_q}{\partial x_\nu},$ $dz_h = 0.$

Касательный элемент $\mathcal{E}_{\nu+1}$ многообразия $\mathfrak{M}_{\nu+1}$ проходит через элемент $\mathcal{E}_\nu$, следовательно, содержит все эти ν линейных элементов $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$ и, кроме того, ещё один ε. Мы можем выбрать его так, чтобы он касался линии x на многообразии $\mathfrak{M}_{\nu+1}$:

Линейный элемент	Символ дифференцирования	Дифференциалы
ε	δ	$dx_1 = dx_2 = \ldots = dx_\nu = 0,\ dx = 1,$ $dy_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x},\quad dy_2 = \frac{\partial y_2}{\partial x}, \ldots,\quad dy_q = \frac{\partial y_q}{\partial x},$ $dz_h = 0.$

Наконец, касательный элемент G многообразия $\mathfrak{F}$ определяется уравнениями

$$dz_h = 0, \qquad h = 1, 2, \ldots, p.$$

2. Построение системы уравнений типа Коши

Нам надо доказать, что можно выбрать функции f_g так, чтобы многообразие $\mathfrak{M}_{\nu+1}$ было интегральным, т. е. чтобы линейные элементы его удовлетворяли уравнениям (S) и (S'):

$$(S) \qquad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad \ldots, \quad \theta_s = 0,$$

$$(S') \qquad D\theta_1 = 0, \quad D\theta_2 = 0, \quad \ldots, \quad D\theta_s = 0,$$

и чтобы удовлетворялись начальные условия (10).

Естественно разбить все уравнения на две группы: уравнения (S) и (S'), написанные для линейных элементов e_i, где $i \leqslant \nu$, и те же уравнения для линейного элемента ε. Обозначая билинейный ковариант, ассоциированный внешнему дифференциалу $D\theta_k$, или, лучше, значение этой внешней формы для двух символов дифференцирования d_i и d_j буквами Θ_k:

$$D\theta_k = \Theta_k(d_i, d_j),$$

мы напишем эти уравнения в виде

$$\text{(11a)} \qquad \theta_k(d_i) = 0, \quad \Theta_k(d_i, d_j) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, s,$$

$$\text{(11b)} \qquad \theta_k(\delta) = 0, \quad \Theta_k(d_i, \delta) = 0, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, \nu.$$

Уравнения (11a) определяют в точке $M_0(x_i^0, z_j^0)$ интегральный элемент $\mathcal{E}_\nu^0$. Они заведомо имеют решение для $x = 0$, ибо при этом условии мы получаем интегральное многообразие $\mathfrak{M}_\nu$.

Уравнения (11b) в точке M_0 определяют тот линейный элемент ε, который вместе с $\mathcal{E}_\nu^0$ образует единственный интегральный элемент $\mathcal{E}_{\nu+1}^0$, содержащий $\mathcal{E}_\nu^0$ и содержащийся в касательном элементе G многообразия $\mathfrak{F}$. Следовательно, после внесения $z_h = 0$ среди уравнений системы (11b) в силу уравнений (11a) останется ровно q независимых, которые можно разрешить относительно дифференциалов

$$\delta y_1, \ \delta y_2, \ \ldots, \ \delta y_q.$$

Пусть базис этой линейной системы составляют уравнения

$$\text{(12)} \qquad \Psi_g(x, y; \delta y) = 0, \qquad g = 1, 2, \ldots, q$$

Определитель из коэффициентов при δy_g не равен нулю в точке M_0, а так как все коэффициенты непрерывны и сам определитель — непрерывная (аналитическая) функция координат, то он будет отличен от нуля и в окрестности точки M_0. Следовательно, решения системы (12) относительно $\delta y_g = \frac{\partial y_g}{\partial x}$ существуют в достаточно малой области около точки M_0:

$$\text{(13)} \qquad \frac{\partial y_g}{\partial x} = F_g\left(x, x_1, \ldots, x_\nu; \ \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial y_q}{\partial x_\nu}\right), \quad g = 1, 2, \ldots, q.$$

Все уравнения (13) первого порядка разрешены относительно производных по одной переменной. Следовательно, мы имеем систему типа Коши. При начальных значениях (10), именно, при условии

$$y_g = \varphi_g(x_1, x_2, \dots, x_\nu) \text{ для } x = 0, \qquad g = 1, 2, \dots, q,$$

она определяет решение и только одно:

$$(14) \qquad y_g = f_g(x_1, x_2, \dots, x_\nu; x).$$

Нам надо доказать, что функции (14) удовлетворяют всем уравнениям (11a, b).

3. Соотношения между формами θ_k, Θ_k

Формы Ψ_g составляют базис системы $\Theta_k(d,\delta)$, $\Theta_k(\delta)$ в точке M_0. Они составят базис этой системы и в окрестности точки M_0.

Действительно, мы уже видели, что в силу непрерывности определителя из коэффициентов ранг системы Ψ_g, а тем самым и системы Θ_k, θ_k в окрестности точки M_0 не может понизиться, но он не может и повыситься. Если бы в окрестности элемента $\mathcal{E}_\nu^0$ число независимых форм Θ_k было бы больше, то это означало бы, что через соседние элементы $\mathcal{E}_\nu$ проходит меньше интегральных элементов $\mathcal{E}_{\nu+1}$, чем через $\mathcal{E}_\nu^0$, а это имело бы следствием нерегулярность элемента $\mathcal{E}_\nu^0$, что мы исключаем. Таким образом, если воспользоваться уравнениями (11a), то во всей окрестности точки M_0 мы имеем линейные соотношения для ковариантов системы (11b):

$$(15) \qquad \Theta_k(d,\delta) = c_k^g \Psi_g, \qquad g = 1, 2, \dots, q.$$

Коэффициенты c_k^g не содержат δy и голоморфны в окрестности $\mathcal{E}_\nu^0$.

Разность левой и правой частей каждого уравнения (15) сохраняет смысл и в том случае, если не исключать $d_i y$ с помощью уравнений (11a), но тогда каждая такая разность будет линейной формой от δy_1, δy_2, ..., δy_q:

$$(15') \qquad \Theta_k(d,\delta) - c_k^g \Psi_g = f_{kh}(x, y, dy)\,\delta y_h,$$
$$k = 1, 2, \dots, s; \quad g, h = 1, 2, \dots, q.$$

Система (11a) вполне определяет в точке M_0 координаты интегрального элемента $\mathcal{E}_\nu^0$. Пусть уравнения

$$(16) \qquad \psi_\lambda = 0, \qquad \lambda = 1, 2, \dots, \sigma,$$

составляют базис системы (11a). В силу непрерывности коэффициентов система $\psi_\lambda = 0$ будет определять решения и в окрестности точки M_0. Если решения (16) внести в формулы (15′), то все коэффициенты f_{kh} обратятся в нули. В силу леммы о сравнении голоморфных функций (гл. I, стр. 45) получим:

$$(17) \qquad \Theta_k(d,\delta) \equiv c_k^g \Psi_g \,(\mathrm{mod}\, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_\sigma).$$

4. Найденные решения удовлетворяют всем уравнениям

Внесём в левые части уравнений (11a, b) найденные решения системы (12), именно, функции (14).

Уравнения (11a) дадут нам какие-то функции от x_1, x_2, ..., x_ν и x:

$$(18) \qquad \begin{aligned} \theta_k(d_i) &= H_{ki}(x_1, x_2, \dots, x_\nu; x), \qquad k = 1, 2, \dots, s, \\ \Theta_k(d_i, d_j) &= H_{kij}(x_1, x_2, \dots, x_\nu; x), \quad i, j = 1, 2, \dots, \nu. \end{aligned}$$

Что касается до уравнений (11b), то функции (14) получены решением уравнений системы (12), которые в свою очередь получались из системы (11b) с использованием уравнений (11a). Если иметь ещё в виду равенства (17), то мы придём к сравнениям

$$\theta_k(\delta) \equiv 0, \quad \Theta_k(d_i, \delta) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, H_{ki}, H_{kij}),$$

или в раскрытой форме:

$$(18') \qquad \begin{aligned} \theta_k(\delta) &= a_k^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} + a_k^{\alpha\beta\gamma} H_{\alpha\beta\gamma}, \qquad k, \alpha = 1, 2, \dots, s, \\ \Theta_k(d_i, \delta) &= a_{ki}^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} + a_{ki}^{\alpha\beta\gamma} H_{\alpha\beta\gamma}, \quad i, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, \nu, \end{aligned}$$

где все коэффициенты a_k, a_{ki} — голоморфные функции от x_1, x_2, ..., x_ν и x.

Форма Θ_k (d_i, δ) есть билинейная форма, ассоциированная внешнему дифференциалу $D\theta_k$, значит

$$\Theta_k(d_i, \delta) = \delta\theta_k(d_i) - d_i\theta_k(\delta);$$

с другой стороны, по теореме Пуанкаре $D(D\theta_k) = 0$, и, следовательно,

$$D\Theta_k = \delta\Theta_k(d_i, d_j) + d_i\Theta_k(d_j, \delta) + d_j\Theta_k(\delta, d_i) = 0.$$

Используя наши обозначения $\delta = \frac{\partial}{\partial x}$, $d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, а также формулы (18), (18′), получим уравнения, которым должны удовлетворять функции H_{ki}, H_{kij}:

$$(19) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} H_{ki} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{a_k^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} + a_k^{\alpha\beta\gamma} H_{\alpha\beta\gamma}\right\} + a_{ki}^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} + a_{ki}^{\alpha\beta\gamma} H_{\alpha\beta\gamma}, \\ \frac{\partial}{\partial x} H_{kij} &= -\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{a_{kj}^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} + a_{kj}^{\alpha\beta\gamma} H_{\alpha\beta\gamma}\right\} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{a_{ki}^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} + a_{ki}^{\alpha\beta\gamma} H_{\alpha\beta\gamma}\right\}. \end{aligned}$$

Изменение знака во втором члене второго уравнения произошло потому, что

$$\Theta_k(\delta, d_i) = -\Theta_k(d_i, \delta).$$

Система (19) определяет единственное решение для неизвестных H_{ki}, H_{kij}, если присоединить начальные условия:

$$H_{ki}=0,\ H_{kij}=0 \text{ для } x=0.$$

Это решение очевидно: ввиду однородности уравнений (19) им удовлетворяют значения $H_{ki}=0$, $H_{kij}=0$, а так как эти решения удовлетворяют и начальным условиям, то других не может быть.

Так как уравнение $x=0$ высекает на многообразии $\mathfrak{M}_{\nu+1}$ вложенное в него интегральное многообразие $\mathfrak{M}_\nu$, на котором все формы θ_k, Θ_k равны нулю, то наши функции (14) при $x=0$ удовлетворяют системе (11а). Они будут ей удовлетворять на всём многообразии $\mathfrak{M}_{\nu+1}$.

Таким образом теорема существования доказана.

Следствие. *Если исходное интегральное многообразие $\mathfrak{M}_\nu$ и определяющее решение многообразие $\mathfrak{F}$ зависят голоморфно от m произвольных параметров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ в окрестности точки (α^0), т. е. координаты произвольной точки того и другого многообразия суть голоморфные функции от криволинейных координат на многообразии (например $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$) и параметров (α), то и получаемое многообразие $\mathfrak{M}_{\nu+1}$ зависит голоморфно от (α).*

Действительно, теперь многообразие $\mathfrak{M}_\nu$ определяется уравнениями

$$\begin{aligned} &x=0, \\ &y_g=\varphi_g(x_1, x_2, \ldots, x_\nu;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m), && g=1, 2, \ldots, q, \\ &\bar{z}_h=0, && h=1, 2, \ldots, \rho, \end{aligned}$$

где все φ_g — голоморфные функции от (α) в окрестности точки (α^0). С другой стороны, формулы преобразования (стр. 182)

$$\bar{z}_h=\Phi_h(x_i, z_j;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m), \qquad h=1, 2, \ldots, \rho,$$

где Φ_h — левые части уравнений многообразия $\mathfrak{F}$ и x_i, z_j — первоначальные переменные системы, содержат (α) тоже голоморфно.

Мы придём, следовательно, к системе Коши, где коэффициенты — голоморфные функции переменных x, x_i, y_g и параметров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ и начальные условия

$$y_g=\varphi_g(x_1, x_2, \ldots, x_\nu;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \text{ для } x=0$$

голоморфно зависят от (α).

По известной теореме [1]) определяемое этими условиями решение системы

$$y_g=f_g(x_1, x_2, \ldots, x_\nu,\ x;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$$

голоморфно зависит от (α).

---

[1]) Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, ч. I, стр. 54.

§ 6. Вторая теорема существования

Начнём с видоизменения первой теоремы существования.

Вторая теорема существования. *Если дано интегральное многообразие $\mathfrak{M}_\nu$ системы (S), неособое, ν измерений, если даны на нём точка M_0, касательный к многообразию в этой точке интегральный элемент $\mathfrak{E}_\nu^0$ и зависящий от ρ параметров интегральный элемент $\mathfrak{E}_{\nu+1}$, проходящий через $\mathfrak{E}_\nu^0$, то с произволом ρ функций от $\nu+1$ переменных можно утверждать существование $(\nu+1)$-мерного интегрального многообразия $\mathfrak{M}_{\nu+1}$, проходящего через $\mathfrak{M}_\nu$ и имеющего своим касательным элементом в точке M_0 один из элементов $\mathfrak{E}_{\nu+1}$.*

Чтобы привести эту теорему к предыдущей, надо построить многообразие $\mathfrak{F}$, содержащее в себе многообразие $\mathfrak{M}_\nu$ и выделяющее в точке M_0 только один интегральный элемент $\mathfrak{E}_{\nu+1}$, проходящий через $\mathfrak{E}_\nu^0$.

Если многообразие $\mathfrak{M}_\nu$ дано, например, уравнениями

$$\begin{aligned} &x=0, \\ &y_g=\varphi_g(x_1, x_2, \ldots, x_\nu), && g=1, 2, \ldots, q, \\ &z_h=0, && h=1, 2, \ldots, \rho, \end{aligned}$$

то многообразие $\mathfrak{F}$ можно задать произвольными функциями

$$z_h=\Phi_h(x_1, x_2, \ldots, x_\nu;\ x;\ y_1, y_2, \ldots, y_q), \qquad h=1, 2, \ldots, \rho,$$

при условии, что все эти функции обращаются в нуль для $x=0$, $y_g=\varphi_g(x_i)$:

$$\Phi_h(x_i;\ x;\ y_g)\equiv 0 \ (\operatorname{mod} x,\ y_g-\varphi_g(x_i)).$$

На многообразии $\mathfrak{M}_{\nu+1}$ все эти функции будут произвольными функциями только $\nu+1$ аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ и x, связанные требованием обращаться в нуль для $x=0$. Действительно, безразлично, задавать ли многообразие $\mathfrak{M}_{\nu+1}$ уравнениями

$$\begin{aligned} &y_g=f_g(x_1, x_2, \ldots, x_\nu;\ x), && g=1, 2, \ldots, q, \\ &z_h=\Phi_h(x_i;\ x;\ y_g), && h=1, 2, \ldots, \rho, \end{aligned}$$

или уравнениями

$$y_g=f_g(x_i), \quad z_h=\Phi_h(x_i;\ x;\ f_g(x_i)).$$

Таким образом, если многообразие $\mathfrak{F}$ имеет $n+r-\rho$ измерений, то интегральное многообразие $\mathfrak{M}_{\nu+1}$ зависит от ρ произвольных функций $\nu+1$ аргументов.

Посмотрим теперь, как число измерений произвольного охватывающего многообразия $\mathfrak{F}$ связано с произволом интегрального элемента $\mathfrak{E}_{\nu+1}$, проходящего через данный элемент $\mathfrak{E}_\nu^0$.

Так как система (11b) при наличии уравнений (11a) содержит только q независимых уравнений, то она определит только q дифференциалов $\delta y_1, \delta y_2, \ldots, \delta y_q$; остальные ρ дифференциалов δz_h полагались равными нулю, когда все функции Φ_h, определяющие многообразие $\mathfrak{F}$, равнялись нулю. Теперь они будут оставаться в точке M_0 произвольными параметрами. Эти параметры войдут в определение интегрального элемента $\mathcal{E}_{\nu+1}$. Следовательно, число уравнений, определяющих многообразие $\mathfrak{F}$, совпадает с числом параметров, от которых зависит интегральный элемент $\mathcal{E}_{\nu+1}$, проходящий через заданный элемент $\mathcal{E}^0_\nu$.

Таким образом, число произвольных параметров, содержащихся в наиболее общем интегральном элементе $\mathcal{E}_{\nu+1}$, проходящем через заданный элемент $\mathcal{E}^0_\nu$, определяет число произвольных функций $\nu+1$ аргументов, от которых зависит интегральное многообразие $\mathfrak{M}_{\nu+1}$, проходящее через заданное интегральное многообразие $\mathfrak{M}_\nu$.

§ 7. Характеры системы Пфаффа

Рассмотрим систему уравнений Пфаффа (S), например, систему (1). Она содержит s линейно независимых уравнений, n независимых переменных x_i и r неизвестных функций $z_j (r > s)$.

Произвольная точка M_0, которую можно назвать элементом нулевого измерения $\mathcal{E}_0$, при заданных значениях независимых переменных x^0_i зависит от r параметров — значений $z^0_1, z^0_2, \ldots, z^0_r$.

Интегральный линейный элемент $\mathcal{E}_1 = e_1$ в данной точке M_0 (т. е. проходящий через элемент нулевого измерения $\mathcal{E}_0$) определяется значениями дифференциалов dx_i, dz_j, удовлетворяющих системе (S). Различный выбор дифференциалов dx_i будет высекать на многообразии $\mathfrak{M}_n$ различные линейные элементы, не меняя самого многообразия. Будем считать эти дифференциалы независимых переменных dx_i заданными. Тогда линейный элемент $\mathcal{E}_1$ будет определяться значениями r дифференциалов dz_j, а так как они связаны посредством s независимых уравнений, то число свободных параметров r_1 равно

$$r_1 = r - s.$$

Чтобы построить интегральный элемент двух измерений $\mathcal{E}_2$, проходящий через выбранный элемент $\mathcal{E}^0_1$, надо добавить к линейному элементу e_1 второй интегральный линейный элемент e_2, который находится в инволюции с элементом e_1. Линейный элемент

$$e_2 = e_2(x^0_i, z^0_j, dx_i, dz_j)$$

определяется своими дифференциалами dx_i, dz_j. Из них дифференциалы независимых переменных dx_i надо считать заданными — изменение системы чисел dx_i означало бы другой способ высечения

линейного элемента e_2 на одном и том же многообразии $\mathfrak{M}_n$. Дифференциалы dz_j, определяющие интегральный линейный элемент, как мы видели, зависят от r_1 произвольных параметров. Уравнения системы (S) тем самым будут уже удовлетворены. Так как линейный элемент e_2 должен быть в инволюции с выбранным уже элементом e_1, то дифференциалы их обращают в нуль ковarianты (S'):

$$\Theta_k(d_1, d_2) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, s. \tag{20}$$

При заданных дифференциалах $d_1 z_j$ (линейного элемента e_1) система (20) представляет систему линейных неоднородных уравнений относительно дифференциалов $d_2 z_j$ или после исключения с помощью уравнений (1) s дифференциалов, например, с последними s указателями — систему линейных уравнений относительно r_1 параметров, за которые можно принять дифференциалы

$$d_2 z_1, \ d_2 z_2, \ \ldots, \ d_2 z_{r_1}.$$

Пусть s_1 есть ранг системы (20), тогда она позволит определить s_1 параметров из общего числа r_1 и оставит свободными

$$r_2 = r_1 - s_1, \qquad s_1 \leqslant r_1,$$

параметров, и т. д.

Если интегральный элемент $\mathcal{E}_{\nu-1}$, проходящий через $\mathcal{E}^0_{\nu-2}$, зависит от $r_{\nu-1}$ произвольных параметров, то система уравнений

$$\begin{gathered}\theta_k(d_{\nu-1}) = 0, \quad \Theta_k(d_1, d_{\nu-1}) = 0, \quad \Theta_k(d_2, d_{\nu-1}) = 0, \ldots \\ \ldots, \quad \Theta_k(d_{\nu-2}, d_{\nu-1}) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, s,\end{gathered} \tag{21}$$

определяет дифференциалы $d_{\nu-1} z_j$ с $r_{\nu-1}$ произвольными параметрами.

Дифференциалы $d_\nu z_j$, определяющие линейный элемент e_ν, образующий вместе с $e_1, e_2, \ldots, e_{\nu-1}$ интегральный элемент $\mathcal{E}_\nu$, проходящий через выбранный элемент $\mathcal{E}^0_{\nu-1}$, должны удовлетворять всем уравнениям системы (21):

$$\theta_k(d_\nu) = 0, \quad \Theta_k(d_1, d_\nu) = 0, \ldots, \quad \Theta_k(d_{\nu-2}, d_\nu) = 0 \tag{22a}$$

и ещё одной системе уравнений:

$$\Theta_k(d_{\nu-1}, d_\nu) = 0. \tag{22b}$$

Уравнения (22a, b) определяют $d_\nu z_j$ с r_ν произвольными параметрами. Если система (22b) при условии, что дифференциалы $d_\nu z_j$ удовлетворяют системе (22a), имеет ранг $s_{\nu-1}$, то линейный элемент e_ν, а вместе с ним и элемент $\mathcal{E}_\nu$, будет определяться с r_ν произвольными параметрами, где

$$r_\nu = r_{\nu-1} - s_{\nu-1}.$$

Наконец, произвол интегрального элемента $\mathcal{E}_n$, проходящего через выбранный элемент $\mathcal{E}^0_{n-1}$, определяется с произволом r_n параметров, где

$$r_n = r_{n-1} - s_{n-1}$$

и s_{n-1} — ранг системы

$$\Theta_k(d_{n-1}, d_n) = 0,$$

если принять во внимание все предыдущие уравнения, определяющие $d_n z_j$.

Определение. Если в цепи последовательно вложенных один в другой интегральных элементов

$$\mathcal{E}^0_0 \subset \mathcal{E}^0_1 \subset \mathcal{E}^0_2 \subset \ldots \subset \mathcal{E}^0_n$$

системы Пфаффа через каждый элемент $\mathcal{E}^0_{\nu-1}$ проходит ∞^{r_ν} интегральных элементов $\mathcal{E}_\nu$ (с произволом r_ν параметров), то целые числа ряда

$$r > r_1 > r_2 > \ldots > r_n$$

называются *характеристическими числами цепи*, а разности

$$(23) \qquad s = r - r_1, \; s_1 = r_1 - r_2, \; \ldots, \; s_\nu = r_\nu - r_{\nu+1}, \; \ldots, \; s_n = r_n$$

— её *характерами*.

Если цепь — неособая, то её характеры называются *характерами системы* Пфаффа.

Следствие 1. *Сумма характеров равна числу неизвестных функций системы:*

$$s + s_1 + s_2 + \ldots + s_n = r.$$

Это прямо следует из сложения равенств (23).

Следствие 2. *Характеры системы, начиная с первого, не возрастают:*

$$s_1 \geqslant s_2 \geqslant s_3 \geqslant \ldots \geqslant s_n.$$

Действительно, линейный элемент e_ν должен быть в инволюции не только с элементом $e_{\nu-1}$, но и со всеми предшествующими элементами $e^0_1, e^0_2, \ldots, e^0_{\nu-2}$. Следовательно, он удовлетворяет всем условиям элемента $e_{\nu-1}$, который вместе с элементом $\mathcal{E}^0_{\nu-2}$ определяет наиболее общий интегральный элемент $\mathcal{E}_{\nu-1}$, проходящий через $\mathcal{E}^0_{\nu-2}$, и подчиняется ещё добавочным условиям (22b).

Характер s_ν есть число линейных относительно $d_\nu z_j$ форм системы (22b), которые независимы между собой и от формы (22a), причём дифференциалы $d_{\nu-1} z_j$, входящие в коэффициенты уравнений (22b), удовлетворяют всем уравнениям (21). Чтобы получить предыдущий характер $s_{\nu-1}$, надо брать формы $\Theta_k(d_{\nu-2}, d_{\nu-1})$, которые отличаются от группы форм $\Theta_k(d_{\nu-2}, d_\nu)$, стоящих на последнем месте в ряду уравнений (22a), только тем, что неизвестные вместо $d_\nu z$ обозначены через $d_{\nu-1} z$. Характер $s_{\nu-1}$ равен числу форм этой группы, линейно независимых между собой и от предыдущих форм системы (22a).

Две группы форм $\Theta_k(d_{\nu-1}, d_\nu)$ и $\Theta_k(d_{\nu-2}, d_\nu)$ различаются между собой только тем, что во второй дифференциалы $d_{\nu-1} z$, стоящие в коэффициентах при неизвестных $d_\nu z$, заменены дифференциалами $d_{\nu-2} z$. Это не может понизить ранга системы форм: ранг системы мог бы понизиться, если на коэффициенты наложить новые условия, но дифференциалы $d_{\nu-1} z$ удовлетворяют всем тем уравнениям, которым подчинены дифференциалы $d_{\nu-2} z$ (и, кроме того, ещё дополнительным). Следовательно, от замены $d_{\nu-1} z$ на $d_{\nu-2} z$ ранг $s_{\nu-1}$ не станет меньше чем s_ν.

Кроме того, при вычислении s_ν мы определяем число форм $\Theta_k(d_{\nu-1}, d_\nu)$, линейно независимых между собой и относительно всего ряда форм (22a), а при определении $s_{\nu-1}$ — число форм $\Theta_k(d_{\nu-2}, d_\nu)$, линейно независимых относительно того же ряда форм (22a) за исключением последней группы ряда. Уменьшение числа линейных форм, с которыми мы сравниваем данную систему форм для определения числа линейно независимых, не может понизить её ранга. Следовательно, $s_{\nu-1}$ не может быть меньше s_ν.

§ 8. Теорема Картана о системе Пфаффа в инволюции

Теорема. *Если для системы s уравнений Пфаффа (S) построена неособая цепь интегральных элементов*

$$\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{E}_{n-1} \subset \mathcal{E}_n$$

с характерами $s, s_1, s_2, \ldots, s_n$, то система (S) — в инволюции, существует n-мерное интегральное многообразие $\mathfrak{M}_n$, имеющее интегральный элемент $\mathcal{E}_n$ своим касательным элементом, и произвол решения зависит от

s_n *произвольных функций от* n *аргументов,*
s_{n-1} » » » $n-1$ »
. . . .
s_1 » » » 1 *аргумента*
и s *произвольных постоянных.*

Доказательство теоремы основано на n-кратном применении второй теоремы существования.

1. Мы уже видели, что всякая система Пфаффа допускает одномерное интегральное многообразие $\mathfrak{M}_1$. Надо задать независимые переменные функциями одной из них, что не влияет на произвол выбора интегрального многообразия $\mathfrak{M}_n$, ибо соответствует высечению многообразия $\mathfrak{M}_1$ на данном $\mathfrak{M}_n$. Затем надо задать в функциях этой одной независимой переменной $r_1 = r - s$ неизвестных функций z_j и

тогда остальные s неизвестных функций определятся интегрированием системы обыкновенных уравнений (S) при начальных условиях, определяемых координатами начальной точки $\mathfrak{E}_0$. Все произвольные функции должны быть заданы так, чтобы интегральное многообразие $\mathfrak{M}_1$ имело интегральный элемент $\mathfrak{E}_1^0$ своим касательным элементом.

Допустим теперь, что построено интегральное многообразие $\mathfrak{M}_\nu$, имеющее интегральный элемент $\mathfrak{E}_\nu^0$ своим касательным элементом. В силу второй теоремы существует интегральное многообразие $\mathfrak{M}_{\nu+1}$, проходящее через $\mathfrak{M}_\nu$ и имеющее интегральный элемент $\mathfrak{E}_{\nu+1}$ своим касательным элементом. Произвол многообразия $\mathfrak{M}_{\nu+1}$ определяется $r_{\nu+1}$ функциями от $\nu+1$ аргументов, которые составляют произвол выбора многообразия $\mathfrak{F}$, содержащего в себе многообразие $\mathfrak{M}_{\nu+1}$ и выделяющее только один интегральный элемент $\mathfrak{E}_{\nu+1}^0$ из всей совокупности элементов $\mathfrak{E}_{\nu+1}$, проходящих через $\mathfrak{E}_\nu^0$, — совокупности, которая зависит от $r_{\nu+1}$ параметров. Мы обозначим теперь это многообразие $\mathfrak{F}$ той же буквой с указателем — $\mathfrak{F}^{(\nu+1)}$.

Продолжая так дальше, мы построим, наконец, интегральное многообразие $\mathfrak{M}_n$, проходящее через $\mathfrak{M}_{n-1}$, с произволом r_n функций от всех n аргументов. Однако не все эти произвольные функции, использованные при построении цепи последовательно вложенных одно в другое интегральных многообразий

$$\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{M}_n,$$

действительно независимы между собой. Следовательно, для определения произвола интегрального многообразия $\mathfrak{M}_n$ системы (S) надо исследовать их независимость.

2. Число произвольных функций. Так как многообразие $\mathfrak{M}_{n-1}$ вложено в многообразие $\mathfrak{M}_n$, то и определяющее его многообразие $\mathfrak{F}^{(n-1)}$ можно без стеснения общности выбрать так, чтобы оно само было вложено в многообразие $\mathfrak{F}^{(n)}$, а в таком случае часть произвольных функций, необходимых для определения $\mathfrak{F}^{(n-1)}$, уже известна из уравнений многообразия $\mathfrak{F}^{(n)}$.

Пусть при подходящем выборе переменных многообразие $\mathfrak{F}^{(n)}$ определяется заданием следующих $s_n = r_n$ произвольных функций:

$$z_\alpha^{(n)} = \varphi_\alpha^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, s_n,$$

и многообразие $\mathfrak{M}_{n-1}$ высекается из $\mathfrak{M}_n$ уравнением $x_n = 0$. Тогда эти s_n неизвестных функций φ на многообразии $\mathfrak{F}^{(n-1)}$ уже заданы:

$$z_\alpha^{(n)} = \varphi_\alpha^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0), \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, s_n,$$

и остаётся задать $s_{n-1} = r_{n-1} - r_n$ произвольных функций от $n-1$ аргументов:

$$z_\beta^{(n-1)} = \varphi_\beta^{(n-1)}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \qquad \beta = 1, 2, \ldots, s_{n-1}.$$

Так же дело обстоит и дальше.

Без стеснения общности все многообразия $\mathfrak{F}$ можно выбрать так, чтобы они тоже образовали цепь последовательно вложенных одно в другое многообразий

$$\mathfrak{F}^{(1)} \subset \mathfrak{F}^{(2)} \subset \ldots \subset \mathfrak{F}^{(n-1)} \subset \mathfrak{F}^{(n)}.$$

Следовательно, при подходящем выборе независимых переменных x_i, если каждое многообразие $\mathfrak{F}^{(\nu)}$ высекается из многообразия $\mathfrak{F}^{(\nu+1)}$ уравнением $x_{\nu+1} = 0$, то вся совокупность $s_n + s_{n-1} + \ldots + s_{\nu+1}$ произвольных функций $z_\alpha^{(n)}, z_\beta^{(n-1)}, \ldots, z_\varepsilon^{(\nu+1)}$ будет уже известна из задания предыдущих многообразий $\mathfrak{F}^{(k)}$ с индексами $k = \nu+1, \ldots, n$, и останется добавить ещё s_ν произвольных функций от ν аргументов:

$$z_\zeta^{(\nu)} = \varphi_\zeta^{(\nu)}(x_1, x_2, \ldots, x_\nu), \qquad \zeta = 1, 2, \ldots, s_\nu.$$

Для определения многообразия $\mathfrak{F}^{(1)}$ надо задать только s_1 произвольных функций от одного аргумента. Начальные значения всех этих $s_1 + s_2 + \ldots + s_n$ переменных уже известны и, чтобы определить $\mathfrak{M}_1$, надо дать ещё начальные значения остальных s неизвестных, откуда и следует теорема.

Следствие. *Если система Пфаффа — в инволюции и*

$$s, s_1, s_2, \ldots, s_n$$

— характеры системы, то подходящая замена независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и нумерация неизвестных функций позволят представить начальные условия в виде:

Неизвестные функции $z_1, z_2, \ldots, z_{s_n}$ вполне произвольны (функции от n аргументов); остальные неизвестные z_α принимают значения

$$z_\alpha = \varphi_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \quad \textit{для} \quad x_n = \overset{0}{x}_n, \qquad s_n < \alpha \leqslant s_n + s_{n-1},$$

$$z_\beta = \varphi_\beta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}) \quad \textit{для} \quad x_n = \overset{0}{x}_n, \quad x_{n-1} = \overset{0}{x}_{n-1},$$
$$s_n + s_{n-1} < \beta \leqslant s_n + s_{n-1} + s_{n-2},$$

. . . .

$$z_\varepsilon = \varphi_\varepsilon(x_1) \qquad \textit{для} \quad x_n = \overset{0}{x}_n, \ldots, x_2 = \overset{0}{x}_2,$$
$$s_n + \ldots + s_2 < \varepsilon \leqslant s_n + \ldots + s_1,$$

$$z_\zeta = C_\zeta = \text{const.} \qquad \textit{для} \quad x_n = \overset{0}{x}_n, \ldots, x_1 = \overset{0}{x}_1,$$
$$s_n + \ldots + s_1 < \zeta \leqslant s_n + \ldots + s_1 + s.$$

§ 9. Дополнительные замечания

1. **Истинный жанр системы.** Мы теперь можем дать аналитический признак систем первого (и выше) рода (см. стр. 176).

Согласно второй теореме существования через интегральное многообразие $\mathfrak{M}_\nu$ системы (S) проходит интегральное многообразие $\mathfrak{M}_{\nu+1}$

с произволом $\rho = r_{\nu+1}$ функций от $\nu+1$ переменных, если через каждый касательный элемент $\mathcal{E}_\nu$ многообразия $\mathfrak{M}_\nu$ проходит интегральный элемент $\mathcal{E}_{\nu+1}$, который зависит от $\rho = r_{\nu+1}$ произвольных параметров.

Если через интегральное многообразие $\mathfrak{M}_\nu$ проходит только одно интегральное многообразие $\mathfrak{M}_n$, следовательно, только одно многообразие $\mathfrak{M}_{\nu+1}, \mathfrak{M}_{\nu+2}, \ldots, \mathfrak{M}_n$, то

$$r_{\nu+1} = r_{\nu+2} = \ldots = r_n = 0,$$

откуда по формуле (23) следует

$$s_{\nu+1} = s_{\nu+2} = \ldots = s_n = 0.$$

Следовательно, *система* (S) *имеет истинный жанр* $\nu < n$, *если последние* $n-\nu$ *характеров равны нулю и* $s_\nu > 0$. В частности система (S) — первого рода, если $s_n = 0$ и $s_{n-1} \neq 0$.

2. О присоединении к системе Пфаффа конечных уравнений. Если к системе Пфаффа (S) присоединено σ конечных (не дифференциальных) уравнений

$$(24) \qquad f_1(x_i, z_j) = 0, \quad f_2(x_i, z_j) = 0, \ldots, f_\sigma(x_i, z_j) = 0, \qquad \sigma < r,$$

то, предполагая, что эти уравнения независимы и непротиворечивы, следовательно, один из якобианов не равен нулю, например,

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_\sigma)}{\partial(z_1, z_2, \ldots, z_\sigma)} \neq 0,$$

мы могли бы разрешить систему (24) относительно переменных $z_1, z_2, \ldots, z_\sigma$ и исключить их из системы (S). Однако во многих случаях такое исключение весьма затруднительно. Удобнее выбрать другой путь.

Продифференцируем систему уравнений (24):

$$(24') \qquad df_1 = 0, \quad df_2 = 0, \ldots, \quad df_\sigma = 0,$$

и присоединим эти уравнения к системе Пфаффа (S). Число уравнений системы увеличится; будем предполагать, что общее число линейно независимых уравнений Пфаффа дойдёт до $s + \sigma_1 \leqslant r$.

Внешние дифференциалы левых частей уравнений (24′) — все тождественно нули в силу теоремы Пуанкаре. Следовательно, система ковариантов (S') не изменится и все характеры

$$s_1, \; s_2, \; \ldots, \; s_{n-1},$$

кроме нулевого s и последнего s_n, останутся те же, если только наложенные условия (24) не будут иметь следствием обращение в нуль тех определителей из матрицы коэффициентов системы (S'), от которых зависит понижение ранга матрицы и тем самым понижение соответствующего характера s_i.

Последний характер s_n определяется требованием, чтобы сумма всех характеров равнялась числу всех неизвестных функций r. Так как число уравнений Пфаффа увеличилось на σ_1 единиц, то на столько же единиц уменьшится s_n.

Допустим, что характеры новой системы уравнений (1), (24′) подсчитаны. Если система оказалась в инволюции, то произвол решения определяется по теореме § 8, но число произвольных постоянных, определяющих решение, должно быть снижено на σ единиц, ибо система (24′) обеспечивает только сохранение каждой функцией f_α постоянного значения. Чтобы привести это постоянное к нулю, как этого требуют уравнения (24), надо наложить σ условий на произвольные постоянные (начальные значения z_j в точке M_0).

3. О применении теорем существования. Мы видим, что решение вопроса о существовании и степени общности неособого интегрального многообразия для системы в инволюции разрешается построением неособой цепи интегральных элементов и определением её характеров. Всё построение сводится к арифметической задаче определения ранга матриц и решения линейных систем.

Основной вопрос, при каких условиях цепь интегральных элементов будет регулярна, решается просто, по крайней мере в принципе. Если все характеры системы определены для произвольной точки (x_i^0), для наиболее общего выбора n серий линейно независимых дифференциалов (чисел) $d_i x_1, d_i x_2, \ldots, d_i x_n$, где индексы i принимают значения $1, 2, \ldots, n$, и каждый раз — для наиболее общего интегрального элемента $\mathcal{E}_\nu$, проходящего через предыдущий $\mathcal{E}_{\nu-1}$, то тем самым обеспечена регулярность построенной цепи интегральных элементов.

Действительно, особые интегральные элементы — те, через которые проходит больше элементов следующего числа измерений, чем через соседние, отличающиеся сколь угодно малым изменением координат. Если определение характеров s_i ведётся для всех интегральных элементов $\mathcal{E}_i$, т. е. при любых x_i^0, z_j^0, $d_\alpha x_i$ и $d_\alpha z_j$, за исключением отдельных особых, для которых ранг матрицы коэффициентов понижается, то, очевидно, мы имеем дело с неособыми интегральными элементами.

Практически этот вопрос может представить большие трудности арифметического порядка, и мы ещё вернёмся к нему.

4. Первая задача интегрирования системы Пфаффа. Теоремы существования §§ 5, 6 позволяют разрешить и общий вопрос определения всех интегральных многообразий без ограничения на выбор независимых переменных. В этой задаче все дифференциалы dx_i, dz_j будут равноправны.

При построении каждого элемента $\mathcal{E}_\nu$ цепи интегральных элементов сумма характеров $s_1 + s_2 + \ldots + s_{\nu-1}$ будет равна рангу линейной однородной системы для дифференциалов $d_\nu x_i$, $d_\nu z_j$ линейного элемента e_ν, т. е. рангу *полярной* матрицы $\mathcal{E}_{\nu-1}$ из коэффициентов при всех $d_\nu x_i$, $d_\nu z_j$. Если при подсчёте ранга параметрические $d_k x_i$, $d_k z_j$ для $k < \nu$ остаются произвольными, то цепь регулярна и жанр p нашей системы определяется неравенствами

$$s_0 + s_1 + \ldots + s_{p-1} < n - p + 1,$$
$$s_0 + s_1 + \ldots + s_{p-1} + s_p \geqslant n - p,$$

где s_0 — число уравнений Пфаффа и n — число всех переменных задачи.

5. Об изменении базиса. Во многих случаях бывает удобнее не стеснять себя выбором независимых переменных или неизвестных функций, так как задача сохранит свой смысл, если сделать замену:

$$x_i = f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$z_j = \Phi_j(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_r, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n), \quad j = 1, 2, \ldots, r.$$

Тогда выгодно бывает выбрать за базис подкольца $\mathfrak{R}[dx]$ n подходяще-подобранных форм $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$.

Так как формы θ_k, стоящие в левых частях уравнений системы, не принадлежат подкольцу $\mathfrak{R}[dx]$ и линейно независимы, то их тоже можно включить в базис кольца $\mathfrak{R}[dx, dz]$ Дополняя эти две группы форм ещё $r - s = q$ формами $\tilde{\omega}_g$, получим базис в виде трёх групп форм

$$\begin{aligned} &\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n; \\ &\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s \qquad\qquad s + q = r. \\ &\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \ldots, \tilde{\omega}_q. \end{aligned}$$

Задание числовых значений этих $n + r$ форм равносильно заданию всех дифференциалов dx_i, dz_j. Следовательно, линейные элементы можно задавать значениями этих форм. Если мы хотим задать интегральный линейный элемент, то нам надо только положить $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_s = 0$, а так как задание так или иначе первой группы форм ω_i соответствует высечению того или другого линейного элемента на многообразии $\mathfrak{M}_n$ и не влияет на произвол самого многообразия $\mathfrak{M}_n$, то формы ω_i можно считать произвольно заданными, и выбор линейных элементов будет всецело определяться выбором форм $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \ldots, \tilde{\omega}_q$.

Построение интегральных линейных элементов и определение характеров цепи ведётся таким же образом, как и ранее.

§ 10. Примеры

1. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}$ уравнения Пфаффа

$$u\,dx + z\,dy + x\,dz = 0,$$

на котором $[dx\,dy] \neq 0$; определить широту решения, полагая z и u неизвестными функциями.

2. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_2$ системы

$$(\alpha) \qquad u\,dx - z_2\,dy - x\,dz_1 = 0,$$
$$(\beta) \qquad (z_1 - u)dx + y\,dz_2 = 0,$$

при пяти переменных x, y, z_1, z_2, u, причём $[dx\,dy] \neq 0$ на $\mathfrak{M}_2$. Определить широту решения.

3. Найти интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ системы

$$u_1\,dx_1 + u_2\,dz_1 = 0, \quad u_2\,dx_2 + u_3\,dz_2 = 0, \quad u_3\,dx_3 + u_1 dz_3 = 0,$$

на котором $[dx_1\,dx_2\,dx_3] \neq 0$.

4. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_2$ системы

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \ldots, \quad \theta_s = 0,$$

на котором $[\omega_1\omega_2] \neq 0$. При этом система внешних дифференциалов имеет вид

$$[\Omega_1\omega_1] + [\Omega_2\omega_2] = 0,$$
$$[\Omega_1\omega_2] - [\Omega_2\omega_1] = 0.$$

Все $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s, \Omega_1, \Omega_2, \omega_1, \omega_2$ — независимые линейные формы от $s + 4$ переменных, причём система $\omega_1 = \omega_2 = 0$ вполне интегрируема. Определить широту решения.

5. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ системы

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad \ldots, \quad \theta_s = 0,$$

на котором $[\omega_1\omega_2\omega_3] \neq 0$. Система внешних дифференциалов имеет вид

$$[\Omega_1\omega_1] = [\Omega_2\omega_2] = [\Omega_3\omega_3] = 0.$$

Все θ_k, Ω_j. ω_i — независимые линейные формы от $s + 6$ переменных, причём система $\omega_i = 0$ вполне интегрируема. Определить широту решения.

Решения

Пример 1. Дифференцируя внешним образом заданное уравнение, имеем

$$[du\,dx] + [dz\,dy] - [dz\,dx] = 0,$$

и, исключая dz,

$$x[du\,dx] - (u + z)[dx\,dy] = 0.$$

Число неизвестных функций равно $r = 2$, но дифференциал dz определяется из уравнения Пфаффа; следовательно, интегральный элемент $\mathfrak{E}_1$ зависит от одного параметра — значения du. Интегральный элемент $\mathfrak{E}_2$, проходящий через $\mathfrak{E}_1^0$, вполне определён, ибо для второго линейного элемента значение δz определяется из уравнения Пфаффа, а значение δu из квадратичного уравнения:

$$\delta u = \frac{du}{dx}\delta x + \frac{u + z}{x}\left(\frac{dy}{dx}\delta x - \delta y\right),$$

если только $dx \neq 0$.

Следовательно, $s = 1$, $s_1 = 1$, $s_2 = 0$. Интегральное многообразие $\mathfrak{M}_2$ зависит от одной произвольной функции одного аргумента.

Пример 2. Дифференцируя внешним образом заданную систему, имеем

$$[du\,dx] - [dz_2\,dy] + [dz_1\,dx] = 0,$$
$$[dz_1\,dx] - [du\,dx] - [dz_2\,dy] = 0,$$

или

$$(\gamma)\qquad [du\,dx]=0,$$

$$(\delta)\qquad [dz_1dx]-[dz_2\,dy]=0.$$

Исключая из последнего уравнения dz_1, dz_2, получим:

$$(xz_1+yz_2-ux)[dx\,dy]=0.$$

Так как $[dxdy]$ по условию — не нуль, то

$$(\varepsilon)\qquad ux=xz_1+yz_2.$$

Дифференцируя и исключая dz_1, dz_2, получим:

$$(\zeta)\qquad u\,dx-x\,du=0.$$

Внешний дифференциал левой части в силу (γ) равен нулю, и значение $d\,u$ обращает в тождество и уравнение (γ). Следовательно, система уравнений (α), (β), (ζ) вполне интегрируема.

Уравнение (ε) надо рассматривать как уравнение на три произвольных постоянных интеграции. Следовательно, интегральное многообразие существует и зависит от двух произвольных постоянных.

Нетрудно получить интеграл в конечном виде. Уравнение (ζ) непосредственно интегрируется:

$$u=Cx.$$

Чтобы проинтегрировать систему (α), (β), согласно § 4, гл. III, стр. 136, задаёмся путём интеграции из начала координат:

$$y=tx.$$

Подставляя значения u и y в (β) и используя (ε), получим при постоянном t

$$x\,dz_2=z_2\,dx,$$

откуда с помощью (ε):

$$z_2=C_1x,\quad u=Cx,\quad z_1=Cx-C_1y,$$

что удовлетворяет всем уравнениям.

Пример 3. Дифференцируя внешним образом заданную систему, имеем

$$[du_1\,dx_1]+[du_2\,dz_1]=0$$

и два других уравнения круговой заменой указателей; исключая $dz_1=-\frac{u_1}{u_2}dx_1$, получим

$$[d\ln u_1-d\ln u_2,\ dx_1]=0$$

и два других уравнения круговой заменой.

При построении интегрального элемента $\mathcal{E}_2$ из этих трёх уравнений надо определять du_i; они содержат их только в виде разностей

$$U_i=d\ln u_i-d\ln u_{i+1},$$

сумма которых равна нулю; следовательно, имеем только две независимые комбинации U_1, U_2, $U_3=-U_1-U_2$. Это показывает на невозможность построить неособую цепь интегральных элементов.

С другой стороны, разрешая алгебраически наши уравнения

$$[U_idx_i]=0,\qquad i=1,2,3,$$

получим

$$U_i=\lambda_i\,dx_i,\qquad \text{не суммировать!}$$

а так как сумма всех U_i равна нулю, то

$$\lambda_1\,dx_1+\lambda_2\,dx_2+\lambda_3\,dx_3=0,$$

откуда в силу независимости dx_i прямо следует

$$\lambda_i=0,$$

и значит

$$d\ln u_1=d\ln u_2=d\ln u_3.$$

Так как уравнения предложенной системы допускают сокращение всех u_i на общий множитель, то мы можем считать u_3 постоянной, а тогда все u_i будут постоянны, квадратичные уравнения будут удовлетворены тождественно, система вполне интегрируема и определит z_i с тремя произвольными постоянными:

$$z_i=-\frac{u_i}{u_{i+1}}x_i+C_i.$$

Пример 4. Интегральный линейный элемент определяется значениями всех $s+4$ форм; из них ω_1, ω_2 могут быть заданы произвольно, не стесняя общности интегрального многообразия; все θ_i равны нулю в силу заданной системы Пфаффа. Произвольными остаются Ω_1, Ω_2, т. е. интегральный линейный элемент зависит от двух произвольных параметров.

Если значения Ω_i, ω_i на первом линейном элементе обозначим штрихом Ω_i', ω_i', то квадратичные уравнения дадут для построения второго линейного элемента, определяющего $\mathcal{E}_2$, систему

$$\Omega_1\omega_1'+\Omega_2\omega_2'=\Omega_1'\omega_1+\Omega_2'\omega_2,$$
$$\Omega_1\omega_2'-\Omega_2\omega_1'=\Omega_1'\omega_2-\Omega_2'\omega_1,$$

откуда Ω_1, Ω_2 вполне определяются, если $(\omega_1')^2+(\omega_2')^2\neq 0$, что всегда можно предположить. Следовательно, интегральный элемент $\mathcal{E}_2$, проходящий через заданный $\mathcal{E}_1$, вполне определён. Значит,

$$s_1=2.$$

Интегральное многообразие $\mathfrak{M}_2$ зависит от двух произвольных функций одного аргумента.

Пример 5. Интегральный линейный элемент при произвольном задании ω_i определяется значениями $\theta_k=0$ и тремя произвольными параметрами Ω_1, Ω_2, Ω_3.

Второй линейный элемент интегрального элемента $\mathcal{E}_2$ определяется системой

$$\Omega_i=\frac{\omega_i}{\omega_i'}\,\Omega_i',\qquad i=1,2,3,\ \text{не суммировать!}$$

где Ω_i', ω_i' — значения форм Ω_i, ω_i на первом линейном элементе. Интегральный элемент $\mathcal{E}_2$ вполне определён.

Третий элемент $\mathcal{E}_3$, проходящий через данный $\mathcal{E}_2$, определяется системой

$$(\alpha)\qquad \Omega_i=\frac{\omega_i}{\omega_i'}\Omega_i',\quad \Omega_i=\frac{\omega_i}{\omega_i''}\ \Omega_i'',\qquad i=1,2,3,\ \text{не суммировать!}$$

где Ω_i', ω_i' — значения этих форм на первом линейном элементе и $\Omega_i'' = \frac{\omega_i''}{\omega_i'}\Omega_i'$, ω_i'' — значения их на втором линейном элементе.

Так как после подстановки $\Omega_i'' = \frac{\omega_i''}{\omega_i'}\Omega_i'$ второе уравнение (α) совпадает с первым, то система (α) совместна, и интегральный элемент $\mathcal{E}_3$ вполне определён.

Значит, $s_1 = 3$, $s_2 = s_3 = 0$, и интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ существует с тремя произвольными функциями от одного аргумента.

§ 11. Задача. Триортогональные системы

Так называются три семейства поверхностей

$$u_i = \text{const.}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

такие, что через всякую точку пространства проходит по одной поверхности каждого семейства и эти три поверхности пересекаются в этой точке под прямыми углами т. е. нормали их образуют прямоугольный трёхгранник.

Пусть A есть вершина этого трёхгранника и $\boldsymbol{I}_1$, $\boldsymbol{I}_2$, $\boldsymbol{I}_3$ — единичные векторы осей. Если бесконечно малые перемещения его определяются формулами

$$(25) \qquad d\boldsymbol{A} = \omega_i \boldsymbol{I}_i, \quad d\boldsymbol{I}_i = \omega_{ij}\boldsymbol{I}_j, \qquad i, j = 1, 2, 3,$$

то компоненты ω_i, ω_{ij}, кроме условия ортогональности

$$(26) \qquad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$$

и уравнений структуры

$$(27) \qquad \begin{aligned} D\omega_i &= [\omega_j \omega_{ji}], \\ D\omega_{ik} &= [\omega_{ij}\omega_{jk}], \end{aligned}$$

должны удовлетворять дополнительным требованиям.

Так как любой вектор $\boldsymbol{I}_i$ является нормалью к поверхности семейства, то бесконечно малые перемещения по этой поверхности должны удовлетворять условию

$$\boldsymbol{I}_i \cdot d\boldsymbol{A} = 0,$$

или, внося сюда $d\boldsymbol{A}$ из уравнений (25),

$$(28) \qquad \omega_i = 0.$$

Это уравнение следует рассматривать как дифференциальное уравнение семейства поверхностей $u_i = \text{const}$. Так как это семейство поверхностей зависит от одного параметра (через каждую точку

пространства проходит одна поверхность), то уравнение (28) должно быть вполне интегрируемо. Следовательно, внешний дифференциал обращается в нуль как следствие самого уравнения (28). Полагая $i = 1$, имеем

$$[D\omega_1, \omega_1] = 0,$$

или в силу уравнений структуры (27):

$$[\omega_2\omega_{21}\omega_1] + [\omega_3\omega_{31}\omega_1] = 0.$$

Переписывая это уравнение и делая круговую замену указателей 1, 2, 3, получим

$$\begin{aligned} [\omega_{12}\omega_1\omega_2] + [\omega_{31}\omega_3\omega_1] &= 0, \\ [\omega_{23}\omega_2\omega_3] + [\omega_{12}\omega_1\omega_2] &= 0, \\ [\omega_{31}\omega_3\omega_1] + [\omega_{23}\omega_2\omega_3] &= 0, \end{aligned}$$

откуда каждое из этих трёх произведений равно нулю (достаточно сложить два равенства и вычесть третье):

$$(29) \qquad [\omega_{12}\omega_1\omega_2] = [\omega_{23}\omega_2\omega_3] = [\omega_{31}\omega_3\omega_1] = 0.$$

Из обращения в нуль произведения следует линейная зависимость множителей, которая в силу линейной независимости ω_i примет вид

$$(30) \qquad \begin{aligned} \omega_{12} &= c_1\omega_1 - c_2\omega_2, \\ \omega_{23} &= a_2\omega_2 - a_3\omega_3, \\ \omega_{31} &= b_3\omega_3 - b_1\omega_1. \end{aligned}$$

Все a_i, b_i, c_i — новые неизвестные функции.

Систему (30) можно рассматривать как систему, определяющую триортогональные системы. Действительно, наиболее общий прямоугольный трёхгранник пространства удовлетворяет тождественно уравнениям (26) и (27). Если его компоненты удовлетворяют уравнениям (30), то каждое уравнение (28) будет вполне интегрируемо и определит семейство поверхностей, которые и составят триортогональную систему.

Наиболее общий трёхгранник пространства зависит от шести параметров. Это и будут переменные нашей системы. Кроме того, она содержит в явном виде шесть переменных: a_2, a_3, b_3, b_1, c_1, c_2. Из этих 12 переменных три надо считать независимыми переменными. За таковые можно принять координаты точки A.

Если эти координаты сохраняют постоянные значения, то точка A стоит на месте, дифференциал $d\boldsymbol{A}$ равен нулю, и первое уравнение (25) даёт:

$$\omega_i = 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Следовательно, формы ω_i содержат только дифференциалы независимых переменных. С другой стороны, если все ω_i равны нулю, то $dA = 0$, точка A не двигается, и все её координаты постоянны. Следовательно, формы ω_i линейно независимы, и дифференциалы независимых переменных можно линейно выразить через ω_i.

Нашу задачу можно, следовательно, формулировать так:

Найти интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ системы (30) так, чтобы на нём произведение

$$[\omega_1 \omega_2 \omega_3] \neq 0$$

было отлично от нуля.

Внешние дифференциалы системы (30) можно написать в виде

$$\begin{aligned} &[\Delta c_1, \omega_1] - [\Delta c_2, \omega_2] = 0, \\ &[\Delta a_2, \omega_2] - [\Delta a_3, \omega_3] = 0, \\ &[\Delta b_3, \omega_3] - [\Delta b_1, \omega_1] = 0, \end{aligned} \tag{31}$$

где Δa_i, Δb_i, Δc_i означают формы Пфаффа:

$$\begin{aligned} \Delta a_2 &= da_2 - a_2\,(a_2\omega_3 + c_2\omega_1) + b_1 c_2 \omega_1 - \frac{1}{2}\, b_3 c_2 \omega_3, \\ \Delta a_3 &= da_3 - a_3\,(a_3\omega_2 + b_3\omega_1) + b_3 c_1 \omega_1 - \frac{1}{2}\, b_3 c_2 \omega_2, \end{aligned} \tag{32}$$

Δb_i, Δc_i получаются круговой заменой. При выводе этих формул все формы ω_{ik} исключены при помощи системы (30). Как легко видеть, формы ω_i, ω_{ik}, Δa_i, Δb_i, Δc_i можно принять за базис кольца (базис характеристической системы линейных форм), ибо через них линейно выражаются дифференциалы da_i, db_i, dc_i, а также дифференциалы тех шести параметров, которые определяют положение трёхгранника. Следовательно, интегральные элементы можно определять значениями (в данной точке числовыми) этих форм, ибо значения дифференциалов отсюда уже могут быть получены по формулам, которые линейно выражают эти дифференциалы через формы базиса (§ 9, п. 5).

Уравнения (30) дают для всякого заданного ряда значений форм ω_i (в данной точке, т. е. для выбранных значений a_i, b_i, c_i) значения форм ω_{ik}. Таким образом, интегральные элементы будут определяться только значением форм Δa_i, Δb_i, Δc_i.

Интегральные линейные элементы определяются произвольным заданием этих шести форм. Следовательно, интегральный элемент, одномерный, $\mathcal{E}_1$ зависит от шести параметров:

$$r_1 = 6.$$

Если формы какого-либо линейного элемента $\mathcal{E}_1^0 = e_1$ обозначить цифрой один в скобках, то условие, что произвольный линейный элемент $e\,(\omega_i,\ \Delta a_i,\ \Delta b_i,\ \Delta c_i)$ будет в инволюции с элементом e_1, запишется тремя уравнениями

$$\begin{aligned} \Delta c_1 \cdot \omega_1^{(1)} - \Delta c_2 \cdot \omega_2^{(1)} &= (\Delta c_1)^{(1)} \cdot \omega_1 - (\Delta c_2)^{(1)} \cdot \omega_2, \\ \Delta a_2 \cdot \omega_2^{(1)} - \Delta a_3 \cdot \omega_3^{(1)} &= (\Delta a_2)^{(1)} \cdot \omega_2 - (\Delta a_3)^{(1)} \cdot \omega_1, \\ \Delta b_3 \cdot \omega_3^{(1)} - \Delta b_1 \cdot \omega_1^{(1)} &= (\Delta b_3)^{(1)} \cdot \omega_3 - (\Delta b_1)^{(1)} \cdot \omega_1. \end{aligned} \tag{33}$$

Зададимся произвольными значениями

$$\omega_i = \omega_i^{(2)},$$

и уравнения (33) дадут нам значения Δc_1, Δa_2, Δb_3, выраженные с помощью трёх произвольных параметров Δc_2, Δa_3, Δb_1. Конечно, при этом мы предполагаем, что ни одна из форм $\omega_i^{(1)}$ не равна нулю. Это мы можем сделать, ибо таким образом мы исключаем только отдельные линейные элементы, которые могли бы оказаться особыми, если бы дальнейшее исследование, которое нас сейчас не интересует, подтвердило бы особенность этих предположений.

Таким образом, если $\mathcal{E}_1^0$ — неособый элемент, то интегральный элемент $\mathcal{E}_2$, проходящий через него, зависит от трёх произвольных параметров, например, значений в начальной точке трёх форм Δc_2, Δa_3, Δb_1:

$$r_2 = 3.$$

Интегральный элемент $\mathcal{E}_3$ будет при этом вполне определён (до линейной замены e_1, e_2, e_3). Действительно, если мы обозначим через ω_i значение этой формы, соответствующей линейному элементу e_3, то условия, что он — в инволюции с первым — e_1, запишутся уравнениями (33). Условия, что он — в инволюции со вторым — e_2, будут иметь вид

$$\begin{aligned} \Delta c_1 \cdot \omega_1^{(2)} - \Delta c_2 \cdot \omega_2^{(2)} &= (\Delta c_1)^{(2)} \cdot \omega_1 - (\Delta c_2)^{(2)} \cdot \omega_2, \\ \Delta a_2 \cdot \omega_2^{(2)} - \Delta a_3 \cdot \omega_3^{(2)} &= (\Delta a_2)^{(2)} \cdot \omega_2 - (\Delta a_3)^{(2)} \cdot \omega_3, \\ \Delta b_3 \cdot \omega_3^{(2)} - \Delta b_1 \cdot \omega_1^{(2)} &= (\Delta b_3)^{(2)} \cdot \omega_3 - (\Delta b_1)^{(2)} \cdot \omega_1. \end{aligned} \tag{34}$$

Уравнения (33), (34) определят все шесть форм Δa_i, Δb_i, Δc_i, если определитель системы не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \omega_1^{(1)} & \omega_2^{(1)} \\ \omega_1^{(2)} & \omega_2^{(2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega_2^{(1)} & \omega_3^{(1)} \\ \omega_2^{(2)} & \omega_3^{(2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega_3^{(1)} & \omega_1^{(1)} \\ \omega_3^{(2)} & \omega_1^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Следовательно, за исключением отдельных особых элементов $\mathcal{E}_2$, у которых две формы ω_i, ω_k у всех линейных элементов e_1, e_2 пропорциональны, интегральный трёхмерный элемент $\mathcal{E}_3$, проходящий через $\mathcal{E}_2^0$, существует и вполне определён:

$$r_3 = 0.$$

Подсчитывая по формулам (23) характеры, имеем:

$$s = 3, \quad s_1 = 3, \quad s_2 = 3, \quad s_3 = 0.$$

Следовательно, интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ существует с произволом трёх функций от двух аргументов, трёх функций от одного аргумента и трёх произвольных постоянных.

Мы скажем, что произвольная триортогональная система зависит от трёх функций двух аргументов.

Заметим, что уравнения (30) позволяют выяснить геометрический смысл вспомогательных переменных a_i, b_i, c_i.

Если, например, внести туда

$$\omega_3 = 0,$$

т. е. рассмотреть поверхность, нормальную к вектору I_3, то получим:

$$\omega_{13} = b_1\omega_1, \quad \omega_{23} = a_2\omega_2.$$

Отсюда прямо следует, что линии $\omega_1 = 0$ и $\omega_2 = 0$ — линии кривизны на этой поверхности и параметры b_1 и a_2 — главные кривизны. Действительно, точка M, расположенная на нормали I_3 этой поверхности:

$$M = A + \frac{1}{b_1} I_3,$$

при движении вдоль линии $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$ описывает линию, которая касается нормали, ибо

$$dM = dA + \frac{1}{b_1} dI_3 + d\frac{1}{b_1} \cdot I_3 = d\frac{1}{b_1} \cdot I_3.$$

Следовательно, нормали I_3 вдоль этой линии образуют развёртывающуюся поверхность, и точка M описывает ребро возврата. Так как отрезок AM равен $\frac{1}{b_1}$, то $\frac{1}{b_1}$ — главный радиус кривизны и b_1 — главная кривизна поверхности. Следовательно, триортогональные поверхности пересекаются по линиям кривизны.

В дальнейшем мы увидим, что рассуждения, которые мы привели, чтобы построить неособую цепь интегральных элементов и подсчитать характеры, можно значительно сократить.

ГЛАВА VII

СИСТЕМА ВНЕШНИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Идеал, присоединённый к системе внешних форм

Теория Картана была распространена Томасом (Thomas) и Кэлером[1]) (Kähler) на системы уравнений, левые части которых представляют внешние формы произвольной степени.

Рассмотрим систему уравнений

$$\Theta_1 = 0, \; \Theta_2 = 0, \dots, \quad \Theta_s = 0, \tag{1}$$

где Θ_k — внешние формы произвольной степени из кольца

$$\mathfrak{R}\,[dx_1, dx_2, \dots, dx_n;\, dz_1, dz_2, \dots, dz_r].$$

Совокупность элементов вида

$$\Omega = [\Theta_k\, \Omega_k], \qquad k = 1, 2, \dots, s,$$

где Ω_k пробегает все формы кольца $\mathfrak{R}\,[dx;\, dz]$, называется *идеалом*, построенным на формах Θ_k в кольце $\mathfrak{R}\,[dx;\, dz]$. Если к обычным кольцевым операциям сложения и умножения присоединить операцию внешнего дифференцирования, то можно определить *дифференциальный идеал*, т. е. идеал, включающий в себя внешний дифференциал $D\Omega$ от всякой формы Ω, которая в нём содержится.

Наименьший дифференциальный идеал, содержащий формы Θ_k, очевидно, содержит и их внешние дифференциалы $D\Theta_k$. Он состоит из совокупности форм

$$\mathfrak{a} = [\Theta_k\, \Omega_k] + [D\Theta_k,\, \Omega'_k], \tag{2}$$

где Ω_k, Ω'_k — произвольные формы кольца $\mathfrak{R}\,[dx;\, dz]$.

Действительно, по формуле (27) гл. II имеем:

$$D\mathfrak{a} = [D\Theta_k,\, \Omega_k] \pm [\Theta_k\, D\Omega_k] \pm [D\Theta_k\, D\Omega'_k].$$

---

[1]) Kähler, Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen, 1934.

Здесь $D\Omega_k$ и $D\Omega'_k$ принадлежат кольцу $\mathfrak{R}[dx; dz]$, если, например, $\mathfrak{R}$ есть область всех аналитических функций от $(x; z)$. При этом условии $D\mathfrak{a}$, очевидно, входит как составная часть в совокупность форм $\mathfrak{a}$, заданную формулой (2). Мы будем называть идеал $\mathfrak{a}$ ***присоединённым*** к системе уравнений (1).

Уравнение (2) может быть записано ещё в форме сравнения:

$$\mathfrak{a} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \Theta_k,\ D\Theta_k). \tag{2'}$$

В пространстве переменных $[x; z]$ уравнения

$$x_i = \Phi_i(t_1, t_2, \ldots, t_p), \quad z_j = F_j(t_1, t_2, \ldots, t_p), \qquad i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, r, \tag{3}$$

определяют p-мерное интегральное многообразие $\mathfrak{M}_p$, если подстановка (3) обращает все формы Θ_k в нуль и не все произведения

$$[dx_{i_1}\, dx_{i_2} \ldots dx_{i_p}], \qquad i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n,$$

равны нулю.

Если уже произведение

$$[dx_1\, dx_2 \ldots dx_p] \neq 0 \tag{4}$$

не равно нулю, то первые p уравнений (3) можно разрешить относительно $t_1, t_2, \ldots, t_p$ и внести эти значения в остальные уравнения. Интегральное многообразие $\mathfrak{M}_p$ представится тогда уравнениями

$$\begin{aligned} x_\lambda &= \varphi_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_p), & \lambda &= p+1, p+2, \ldots, n, \\ z_j &= f_j(x_1, x_2, \ldots, x_p), & j &= 1, 2, \ldots, r. \end{aligned} \tag{3'}$$

Мы будем говорить, что $x_1, x_2, \ldots, x_p$ являются на многообразии $\mathfrak{M}_p$ независимыми переменными.

Если подстановка (3) или (3') удовлетворяет системе (1), то она обратит в нуль и все внешние дифференциалы:

$$D\Theta_k = 0. \tag{5}$$

Отсюда получаем

Следствие. *На интегральном многообразии $\mathfrak{M}_p$ системы внешних дифференциальных уравнений (S) обращаются в нуль все формы присоединённого к системе идеала.*

Разобьём идеал $\mathfrak{a}$ на части:

$$\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\nu, \ldots, \mathfrak{a}_n,$$

где $\mathfrak{a}_\nu$ означает совокупность всех форм ν-й степени, принадлежащих идеалу $\mathfrak{a}$.

В кольце n измерений нет форм степени выше n (все равны нулю). На многообразии $\mathfrak{M}_p$ все формы степени выше p тождественно равны нулю. Если на многообразии $\mathfrak{M}_p$ обращаются в нуль все формы $\mathfrak{a}_p$, то многообразие — интегральное, и на нём равны нулю все формы предыдущих частей присоединённого идеала $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{p-1}$. Действительно, по формуле (2) p-я часть идеала $\mathfrak{a}_p$ содержит все произведения $[\mathfrak{a}_{p-1}\, dx_i]$, где $i = 1, 2, \ldots, n$, но, если

$$[\mathfrak{a}_{p-1}\, dx_i] = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

то и $\mathfrak{a}_{p-1} = 0$. Таким образом по той же формуле (2) обращение в нуль всех форм $\mathfrak{a}_p$ означает обращение в нуль всех форм Θ_k, $D\Theta_k$ степени не выше p, а так как формы степени выше p обращаются в нуль автоматически, то $\mathfrak{M}_p$ — интегральное многообразие.

Будем обозначать через $(\mathfrak{S})$ совокупность всех уравнений *замкнутой* системы $\Theta_k = 0$, $D\Theta_k = 0$. Тогда можно заметить, что в ряду частей идеала $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_\nu, \ldots$ система $\mathfrak{a}_0 = 0$ содержит все конечные уравнения (S_0) системы (S), система $\mathfrak{a}_1 = 0$, кроме того, — все линейные уравнения $\mathfrak{S}_1$ системы $(\mathfrak{S})$, т. е. дифференциалы от конечных уравнений $\mathfrak{a}_0 = 0$ и уравнения Пфаффа (S_1) из системы (S); система $\mathfrak{a}_2 = 0$, кроме того, содержит все квадратичные уравнения $\mathfrak{S}_2$ системы $(\mathfrak{S})$, т. е. внешние дифференциалы от уравнений (S_1) и квадратичные уравнения (S_2) системы (S).

Вообще система $\mathfrak{a}_\nu = 0$ влечёт за собой равенство нулю всех форм предыдущих частей $\mathfrak{a}_0 = 0$, $\mathfrak{a}_1 = 0, \ldots, \mathfrak{a}_{\nu-1} = 0$, и, кроме того, обращение в нуль всех форм $\mathfrak{S}_\nu$ степени ν из системы $(\mathfrak{S})$, т. е. внешних дифференциалов от форм $(S_{\nu-1})$ системы (S), и всех форм (S_ν) этой системы. Обратно, если все формы $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{\nu-1}$ и $\mathfrak{S}_\nu$ равны нулю, то и $\mathfrak{a}_\nu = 0$, ибо $\mathfrak{a}_\nu$ есть идеал, построенный на формах $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{\nu-1}, D\mathfrak{a}_{\nu-1}$ и (S_ν).

§ 2. Построение цепи интегральных элементов

Разобьём все переменные на независимые переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и неизвестные функции $z_1, z_2, \ldots, z_r$. Область $\mathfrak{R}$ есть область всех аналитических функций этих $n + r$ переменных.

Пусть базис подкольца дифференциалов dx_i образован формами

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n,$$

а базис кольца $\mathfrak{R}[dx; dz]$ образован формами

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n; \quad \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{s_0}; \quad \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \ldots, \tilde{\omega}_q, \qquad s_0 + q = r,$$

где $\theta_k = 0$ — линейные формы системы $\mathfrak{S}_1$.

Мы ищем n-мерное интегральное многообразие $\mathfrak{M}_n$, на котором

$$[\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n] \neq 0. \tag{4'}$$

В цепи интегральных элементов

$$\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{E}_{n-1} \subset \mathcal{E}_n$$

все элементы получаются из последнего $\mathcal{E}_n$ высечением с помощью линейных соотношений, последовательно накладываемых на формы ω_i так, что число независимых форм при передвижении по цепи справа налево всё время уменьшается. Различный выбор этих соотношений, меняя цепь, оставляет без изменения элемент $\mathcal{E}_n$ и не отражается на многообразии $\mathfrak{M}_n$. Этих соотношений при подсчёте произвола элемента мы учитывать не будем.

Элемент $\mathcal{E}_0$, или интегральная точка, есть совокупность $n+r$ значений координат (x, z), удовлетворяющих конечным уравнениям идеала

$$\mathfrak{a}_0 = 0.$$

Пусть s' будет число независимых уравнений системы $\mathfrak{a}_0 = 0$, следовательно, $\mathcal{E}_0$ выбирается с произволом $r_0 = r - s'$ произвольных параметров.

Линейный элемент $\mathcal{E}_1$, проходящий через $\mathcal{E}_0$, получится, если к координатам точки $\mathcal{E}_0$ присоединить значения дифференциалов dx_i, dz_j, удовлетворяющих линейным уравнениям идеала $\mathfrak{a}$, т. е. уравнениям

$$\mathfrak{a}_1 = 0.$$

Пусть базис системы линейных форм $\mathfrak{a}_1$, т. е. базис форм $\mathfrak{S}_1$, состоит из $s' + s_0$ форм, которые стоят в левых частях уравнений

$$(\mathrm{a}_1) \qquad \theta_\alpha \equiv A_{1\alpha}(dz) = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, s_0 + s',$$

тогда

$$r_1 = r - (s_0 + s') = r_0 - s_0$$

определяет число произвольных параметров интегрального элемента $\mathcal{E}_1$.

Интегральный элемент $\mathcal{E}_2$, проходящий через $\mathcal{E}_1^0 = e_1$, определяется вторым линейным элементом e_2, который вместе с e_1 должен обращать в нуль все формы $\mathfrak{a}_2$. Это значит, что линейный элемент e_2 — сам интегральный, т. е. удовлетворяет уравнениям $A_{1\alpha}(dz) = 0$ и находится в инволюции с элементом e_1, т. е. вместе с ним обращает в нуль формы $\mathfrak{S}_2$. Выписывая значения квадратичных форм $\mathfrak{S}_2$ для двух систем дифференциалов

$$e_1 = e_1(d_1x; d_1z), \quad e_2 = e_2(d_2x; d_2z)$$

и приравнивая их нулю, получим вместе с уравнениями (a_1) систему линейных уравнений для неизвестных дифференциалов dz, которая образует *полярную* систему элемента e_1; допустим, что базис её состоит, кроме форм $A_{1\alpha}$, ещё из s_1 форм левых частей уравнений

$$(\mathrm{a}_2) \qquad A_{2\alpha}(d_1z; dz) = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, s_1.$$

Интегральный элемент $\mathcal{E}_2$ будет зависеть тогда от

$$r_2 = r_1 - s_1$$

произвольных параметров.

Так можно продолжать и дальше.

Пусть каждый интегральный элемент $\mathcal{E}_\nu(e_1, e_2, \ldots, e_\nu)$, где $\nu = 1, 2, \ldots, p-1$, проходящий через заданный элемент $\mathcal{E}_{\nu-1}^0$, зависит от

$$r_{\nu-1} = r_{\nu-2} - s_{\nu-2}$$

произвольных параметров.

Тогда интегральный элемент $\mathcal{E}_p$, проходящий через $\mathcal{E}_{p-1}^0$, или тот линейный элемент e_p, который вместе с $\mathcal{E}_{p-1}^0$ образует $\mathcal{E}_p$, должен удовлетворять всем уравнениям, определяющим e_{p-1}, и, кроме того, должен быть в инволюции с элементом e_{p-1}, т. е. должен удовлетворять ещё уравнениям *полярной* системы элемента $\mathcal{E}_{p-1}^0$:

$$\begin{gathered} A_2(d_{p-1}z, dz) = 0, \; A_3(d_iz, d_{p-1}z, dz) = 0, \ldots \\ \ldots, A_{p-1}(d_iz, \ldots, d_{p-1}z, dz) = 0, \\ (\mathrm{a}_p) \qquad A_p(d_1z, d_2z, \ldots, d_{p-1}z, dz) = 0, \end{gathered}$$

и кроме того всем уравнениям, которым удовлетворяют дифференциалы $dz = d_{p-1}z$. Только последняя группа уравнений получена из системы $\mathfrak{S}_p$.

Если эти уравнения добавят ещё s_{p-1} независимых линейных уравнений к тем, которые определяли e_{p-1}, т. е. если ранг всей системы линейных уравнений, определяющих e_p, равен $s_0 + s_1 + \ldots + s_{p-1}$, то линейный элемент e_p, а вместе с ним и элемент $\mathcal{E}_p$, проходящий через $\mathcal{E}_{p-1}^0$, будет зависеть от

$$r_p = r_{p-1} - s_{p-1}$$

произвольных параметров.

Определение. Если r_p есть число произвольных параметров, от которых зависит наиболее общий интегральный элемент $\mathcal{E}_p$, проходящий через заданный — $\mathcal{E}_{p-1}^0$, то система целых чисел

$$r_0 > r_1 > r_2 > \ldots > r_n$$

называется системой ***характеристических чисел цепи***, а неотрицательные разности

$$s_0 = r_0 - r_1, \quad s_1 = r_1 - r_2, \quad \ldots, \quad s_{n-1} = r_{n-1} - r_n, \quad s_n = r_n$$

— её ***характерами***.

Если цепь — неособая, то это — ***характеры системы***.

В отличие от характеров системы Пфаффа здесь ряд характеров $s_1, s_2, \ldots, s_n$ может возрастать. Достаточно допустить, что система содержит только уравнения степени p, чтобы все первые характеры $s_1, s_2, \ldots, s_{p-2}$ равнялись нулю, ибо система не накладывает никаких условий на интегральные элементы, число измерений которых меньше p, и характеристические числа $r_0=r_1=r_2=\ldots=r_{p-1}$ равны между собой; в то же время характер $s_{p-1}=r_{p-1}-r_p$ может быть отличен от нуля.

§ 3. Первая теорема существования

Теоремы, утверждающие существование интегрального многообразия по заданной неособой цепи интегральных элементов

$$\mathfrak{E}_0 \subset \mathfrak{E}_1 \subset \mathfrak{E}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{E}_{n-1} \subset \mathfrak{E}_n,$$

располагаются в той же последовательности, имеет ту же формулировку и тот же метод доказательства, как и аналогичные теоремы для системы Пфаффа.

Первая теорема. *Если дано интегральное многообразие системы внешних дифференциальных уравнений $\mathfrak{M}_\nu$, неособое, ν измерений, если даны обыкновенная точка его $M_0(x_i^0, z_j^0)$, касательный к многообразию в этой точке ν-мерный элемент $\mathfrak{E}_\nu^0$, тоже неособый, и многообразие $n+r-\rho$ измерений $\mathfrak{F}$, содержащее $\mathfrak{M}_\nu$ так, что касательный в точке M_0 элемент его G содержит только один интегральный элемент $\mathfrak{E}_{\nu+1}$, проходящий через $\mathfrak{E}_\nu^0$, то существует единственное интегральное многообразие $(\nu+1)$-го измерения $\mathfrak{M}_{\nu+1}$, которое содержит в себе $\mathfrak{M}_\nu$, содержится в многообразии $\mathfrak{F}$ и в точке M_0 имеет $\mathfrak{E}_{\nu+1}$ своим касательным элементом.*

1. Обозначения. Мы сохраняем те же обозначения, как и § 5 предыдущей главы

Многообразие $\mathfrak{M}_\nu$, заданное, определяется уравнениями

$$\begin{aligned} &x=0, && g=1,2,\ldots,q,\\ &y_g=\varphi_g(x_1, x_2, \ldots, x_\nu), && q=n+r-(\nu+1)-\rho,\\ &z_h=0 && h=1,2,\ldots,\rho. \end{aligned}$$

Многообразие $\mathfrak{M}_{\nu+1}$, искомое, определяется уравнениями

$$\begin{aligned} &y_g=f_g(x_1, x_2, \ldots, x_\nu; x),\\ &z_h=0. \end{aligned}$$

Многообразие $\mathfrak{F}$ определяется уравнениями

$$z_h=0.$$

Линейные элементы e_i из элемента $\mathfrak{E}_\nu^0$ (символ дифференцирования d_i) определяются уравнениями

$$dx=0,\ d_i x_\alpha=\delta_\alpha^i, \quad \delta_\alpha^i=\begin{cases}1, \text{ если } \alpha=i,\\ 0, \text{ если } \alpha\neq i,\end{cases} \alpha=1,2\ldots,\nu,$$

$$\text{(6a)} \qquad \begin{aligned} &d_i y_g=\frac{\partial y_g}{\partial x_i}, && g=1,2,\ldots,q;\\ & && i=1,2,\ldots,\nu,\\ &dz_h=0. && h=1,2,\ldots,\rho. \end{aligned}$$

Линейный элемент ε, дополнительный (символ дифференцирования δ), определяется уравнениями

$$\text{(6b)} \qquad \delta x_i=0, \quad \delta x=1, \quad \delta y_g=\frac{\partial y_g}{\partial x}, \quad \delta z_h=0.$$

2. Система Коши. Для построения системы Коши мы используем группу уравнений $\mathfrak{a}_{\nu+1}=0$. Так как многообразие $\mathfrak{F}$ по условию выделяет только один интегральный элемент $\mathfrak{E}_{\nu+1}$, проходящий через $\mathfrak{E}_\nu^0$, то после подстановки в $\mathfrak{a}_{\nu+1}=0$ значений $z_h=0$ те уравнения этой группы, которые содержат дифференциалы δy_g, в точке M_0 могут быть разрешены относительно дифференциалов $\delta y_g=\frac{\partial y_g}{\partial x}$.

Выделим базис этой системы; он содержит ровно q независимых линейных уравнений, а их определитель, не равный нулю в точке M_0, будет отличен от нуля и в соседних точках. Система из уравнений базиса может быть разрешена и в окрестности точки M_0. С другой стороны, так как элемент $\mathfrak{E}_\nu^0$ — регулярный, то ранг всей системы $\mathfrak{a}_{\nu+1}=0$ не может в соседних точках повыситься. Таким образом, мы опять приходим к системе уравнений типа Коши

$$\text{(7)} \qquad \frac{\partial y_g}{\partial x}=F_g\left(x, x_i; \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial y_q}{\partial x_\nu}\right), \quad g=1,2,\ldots,q,$$

которые вместе с начальными условиями

$$y_g=\varphi_g(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) \text{ для } x=0$$

определят единственное решение

$$\text{(8)} \qquad y_g=f_g(x_1, x_2, \ldots, x_\nu, x), \qquad g=1,2,\ldots,q.$$

Остаётся показать, что это решение удовлетворяет всем уравнениям $\mathfrak{a}_{\nu+1}=0$.

3. Линейная зависимость между формами из $\mathfrak{a}_{\nu+1}$. Линейные элементы $e_i (i=1, 2, \ldots, \nu)$ интегрального элемента $\mathfrak{E}_\nu^0$ удовлетворяют системе $\mathfrak{a}_\nu=0$. Так как элемент $\mathfrak{E}_\nu^0$ — неособый, то дифференциалы $d_i y$, которые служат координатами линейных

элементов e_i, могут быть получены последовательным разрешением системы $\mathfrak{a}_\nu = 0$, а именно:

(9)

Определяемый линейный элемент	Система	Обозначение
e_1	$A_{1\alpha}(dy) = 0$	$A_1 = 0$
e_2	$A_{1\alpha}(dy) = 0,\ A_{2\alpha}(d_1 y, dy) = 0$	$A_2 = 0$
. . . . .	. . . .	. . . . .
e_p	$A_{1\alpha}(dy) = 0, \ldots, A_{p\alpha}(d_1 y, \ldots, d_{p-1} y, dy) = 0$	$A_p = 0$
. . . . .	. . . .	. . . . .
e_ν	$A_{1\alpha}(dy) = 0, \ldots, A_{\nu\alpha}(d_1 y, \ldots, d_{\nu-1} y, dy) = 0$	$A_\nu = 0$

Если обозначить уравнения базиса каждой системы символами

$$A_1 = 0,\ A_2 = 0,\ \ldots,\ A_p = 0,\ \ldots,\ A_\nu = 0, \tag{10}$$

то определитель каждой системы $A_p = 0$, не равный нулю для $\mathcal{E}_\nu^0$, будет, как непрерывная функция, отличен от нуля и в окрестности $\mathcal{E}_\nu^0$, т. е. для элементов $\mathcal{E}_\nu$ с координатами, достаточно мало отличающимися от координат $\mathcal{E}_\nu^0$. С другой стороны, так как $\mathcal{E}_\nu^0$ — неособый элемент, то ранг всей системы (9) не может повыситься в окрестности $\mathcal{E}_\nu^0$, ибо это означало бы, что через соседние элементы $\mathcal{E}_p$ проходит больше элементов $\mathcal{E}_{p+1}$, чем через элемент $\mathcal{E}_p^0$, принадлежащий к $\mathcal{E}_\nu^0$.

Обозначим через

$$\psi_\lambda(d_i x; d_i y), \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, \sigma;\ i = 1, 2, \ldots, \nu,$$

формы, стоящие в левых частях уравнений (10). Тогда всякая форма ψ из ν-мерной части идеала $\mathfrak{a}_\nu$ во всей окрестности элемента $\mathcal{E}_\nu^0$ принадлежит к идеалу, построенному на формах ψ_λ, т. е. сравнима с нулём по модулю этих форм:

$$\psi \equiv 0 \pmod{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\sigma}.$$

По тем же соображениям всякая форма Ψ из $(\nu+1)$-мерной части идеала $\mathfrak{a}_{\nu+1}$, если она содержит дифференциалы δy_g, сравнима с нулём по модулю форм базиса Ψ_g системы A_i $(i = 1, 2, \ldots, \nu+1)$:

$$\Psi^0 \equiv 0 \pmod{\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_g},$$

по крайней мере на элементе $\mathcal{E}_\nu^0$ (что обозначено нуликом вверху — Ψ^0), или, если записать полностью:

$$\Psi^0 = B_g \Psi_g, \qquad g = 1, 2, \ldots, q,$$

где коэффициенты B_g содержат координаты $\mathcal{E}_\nu^0$.

Это соотношение останется справедливо и в окрестности $\mathcal{E}_\nu^0$, если принять во внимание уравнения $\psi_\lambda = 0$, которым удовлетворяют координаты элемента $\mathcal{E}_\nu$, соседнего с $\mathcal{E}_\nu^0$. Составляя разность $\Psi - B_g \Psi_g$ в окрестности $\mathcal{E}_\nu^0$ и прилагая к каждому коэффициенту при δy_g лемму о сравнении голоморфных функций (гл. I, стр. 45), получим:

$$\Psi(d_i y; \delta y) \equiv B_g(d_i y)\Psi_g(d_i y; \delta y) \pmod{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\sigma}. \tag{11}$$

4. **Решения (8) удовлетворяют всем уравнениям** $\mathfrak{a}_{\nu+1} = 0$. Внесём теперь в уравнения $\mathfrak{a}_{\nu+1} = 0$ вместо z_h — нули, а вместо y_g — полученные решения (8). Формы Ψ_g обратятся в нуль, ибо мы вносим решения системы $\Psi_g = 0$.

Формы ψ_λ на элементе $\mathcal{E}_\nu$, соседнем с $\mathcal{E}_\nu^0$, т. е. для определённых числовых значений дифференциалов $d_i y_g$, сколь угодно мало отличающихся от дифференциалов $d_i y_g$ элемента $\mathcal{E}_\nu^0$, примут вид функций

$$\tilde{\psi}_\lambda = H_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_\nu, x), \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, \sigma.$$

С другой стороны, всякая форма ψ_λ из $\mathfrak{a}_\nu$ как форма степени ν содержит в каждом члене произведение ν дифференциалов из базиса кольца $\mathfrak{R}[dx; dy, dz]$. После подстановки $z_h = 0$ и $y_g = f_g(x_1, x_2, \ldots, x_\nu, x)$ по формулам (8) эта форма ψ_λ обратится в форму $\tilde{\psi}_\lambda$ из подкольца $\mathfrak{R}[dx_1, dx_2, \ldots, dx_\nu, dx]$ тоже степени ν:

$$\begin{gathered}\tilde{\psi}_\lambda = H_{\lambda j}(x_i, x)[dx_1 \ldots dx_{j-1}\, dx_{j+1} \ldots dx_\nu\, dx] + \\ + H_\lambda(x_i, x)\,[dx_1 \ldots dx_\nu], \\ j = 1, 2, \ldots, \nu;\ \lambda = 1, 2, \ldots, \sigma.\end{gathered} \tag{12}$$

Последний член $H_\lambda[dx_1 \ldots dx_\nu]$ даёт значение этой формы на элементе $\mathcal{E}_\nu$, т. е. при $dx = 0$.

Умножая равенство (12) на dx_j, мы получим форму степени $\nu + 1$, которая принадлежит следующей части идеала $\mathfrak{a}_{\nu+1}$:

$$\Psi_{\lambda j} = [\tilde{\psi}_\lambda dx_j] = \pm H_{\lambda j}(x_i, x)\,[dx_1 \ldots dx_\nu dx].$$

При этом сохраняется только один член в правой части, именно тот, где нехватало дифференциала dx_j множителем во внешнем произведении.

Пользуясь для подсчёта $\Psi_{\lambda j}$ формулой (11) и помня, что для функций (8) все формы Ψ_g обращаются в нуль, получаем

$$H_{\lambda j} \equiv 0 \pmod{H_1, H_2, \ldots, H_\sigma}$$

или

$$H_{\lambda j} = A_{\lambda j}^{\mu} H_\mu, \quad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, \sigma;\ j = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{13}$$

где все $A_{\lambda j}^{\mu}$ — аналитические функции от $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ и x, Так же можно получить значение после подстановки (8) внешнего дифференциала $D\widetilde{\psi}_\lambda$ — формы, несомненно принадлежащей $(\nu+1)$-мерной части идеала $\mathfrak{a}_{\nu+1}$:

$$D\widetilde{\psi}_\lambda = A_\lambda^\mu H_\mu \, [dx_1 \ldots dx_\nu dx].$$

С другой стороны, непосредственное дифференцирование уравнения (12) (ибо, внешнее дифференцирование и подстановка (8) переместительны) даёт:

$$D\widetilde{\psi}_\lambda = \left(\frac{\partial H_{\lambda j}}{\partial x_j} + \frac{\partial H_\lambda}{\partial x}\right)[dx_1 \ldots dx_\nu dx],$$
$$\lambda = 1,\ 2,\ \ldots,\ \sigma;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ \nu.$$

Если теперь производную $\frac{\partial H_{\lambda j}}{\partial x_j}$ подсчитать, дифференцируя равенство (13), и сравнить два значения внешнего дифференциала $D\widetilde{\psi}_\lambda$, то получим по сокращении на $[dx_1 \ldots dx_\nu dx]$ уравнение

$$\frac{\partial H_\lambda}{\partial x} = -A_{\lambda j}^\mu \frac{\partial H_\mu}{\partial x_j} + \left(A_\lambda^\mu - \frac{\partial A_{\lambda j}^\mu}{\partial x_j}\right) H_\mu, \tag{14}$$
$$\lambda,\ \mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ \sigma;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ \nu,$$

которому удовлетворяют все функции H_λ.

Так как на многообразии $\mathfrak{M}_\nu$ все формы $\mathfrak{a}_\nu$, в том числе и ψ_λ равны нулю, поскольку $\mathfrak{M}_\nu$ — интегральное многообразие, то для $x = 0$ все наши функции H_λ обращаются в нуль. Между тем система (14) как система типа Коши допускает единственное решение для начальных условий

$$H_\lambda = 0 \quad \text{для } x = 0,$$

и это единственное решение очевидно:

$$H_\lambda = 0 \quad \text{для всех значений } x.$$

Следовательно, формы ψ_λ, а вместе с ними по формуле (13) и все формы из $\mathfrak{a}_{\nu+1}$ равны нулю на всём многообразии $\mathfrak{M}_{\nu+1}$, и это многообразие — интегральное.

§ 4. Вторая теорема существования

Подсчёт произвольных функций охватывающего многообразия $\mathfrak{F}$ и вторая теорема существования доказываются в точности так, как это проведено в предыдущей главе.

Таким образом, мы снова приходим к теореме:

Теорема. *Если для системы внешних дифференциальных уравнений построена неособая цепь интегральных элементов*

$$\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{E}_n,$$

то система — в инволюции и существует n-мерное интегральное многообразие $\mathfrak{M}_n$, имеющее $\mathcal{E}_n$ своим касательным элементом. Произвол решения зависит от

s_n *функций* n *аргументов,*
s_{n-1} » $n-1$ »
. . . .
s_1 » 1 *аргумента*
и s_0 *произвольных постоянных,*

где $s_0, s_1, \ldots s_n$ — характеры системы.

Более точно можно высказать её так:

Теорема. *Если*

$$\mathcal{E}_0^0 \subset \mathcal{E}_1^0 \subset \ldots \subset \mathcal{E}_n^0$$

— неособая цепь интегральных элементов системы (S), s' — число конечных уравнений системы,

$$s_0,\ s_1,\ \ldots,\ s_n$$

— её характеры, то можно так выбрать независимые переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и неизвестные функции $z_1, z_2, \ldots, z_r$, что вся цепь получается из интегрального элемента $\mathcal{E}_n^0$ последовательным высечением посредством наложения равенств $dx_n = 0, dx_{n-1} = 0, \ldots \ldots, dx_1 = 0$.

Если при этом на каждом линейном элементе $\mathcal{E}_\nu^0$ можно построить $(\nu+1)$-мерные элементы $\mathcal{E}_{\nu+1}$ с произволом

$$r_{\nu+1} = r_\nu - s_\nu$$

параметров, именно: остаются произвольными дифференциалы всех dz_j с индексами $r_\nu < j \leqslant r_{\nu+1}$, то интегральное многообразие $\mathfrak{M}_n$ существует и вполне определено заданием произвольных значений

$z_1, z_2, \ldots, z_{r_n}$ *как функций от* $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$,
$z_{r_n+1}, \ldots, z_{r_{n-1}}$ » » » $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}$ *для* $x_n = 0$,
. . . .
$z_{r_2+1}, \ldots, z_{r_1}$ *как функций от* x_1 *для* $x_n = x_{n-1} = \ldots x_2 = 0$,
$z_{r_1+1}, \ldots, z_{r-s'}$ *как произвольных постоянных для* $x_n = x_{n-1} = \ldots = x_1 = 0$.

При этом предполагается, что значения этих функций и постоянных для $x_i = 0$ достаточно малы, а их дифференциалы мало отличаются от соответствующих координат интегральных элементов $\mathcal{E}_i^0$.

§ 5. Замечание о приведении к системе Пфаффа

Эти теоремы широко раздвигают рамки теории Картана и в некоторых случаях могут сократить выкладки, но надо заметить, что всякая система внешних дифференциальных уравнений может быть приведена к системе Пфаффа.

Действительно, пусть нам дана система внешних дифференциальных уравнений (1)

$$\Theta_1 = 0, \quad \Theta_2 = 0, \quad \ldots, \quad \Theta_s = 0$$

с n независимыми переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и r неизвестными функциями $z_1, z_2, \ldots, z_r$.

Если существует интегральное многообразие $\mathfrak{M}_n$, то все его касательные элементы $\mathcal{E}_n$ должны удовлетворять системе (1). Следовательно, любой его линейный элемент

$$dz_j = l_{ji} dx_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \; j = 1, 2, \ldots, r, \tag{15}$$

должен обращать все формы Θ_k в нуль. Так как формы dx_i должны оставаться на многообразии $\mathfrak{M}_n$ независимыми, то после внесения значений (15) в Θ_k:

$$\Theta_k = a_k^{[i_1 i_2 \ldots i_p]} [dx_{i_1} dx_{i_2} \ldots dx_{i_p}], \quad i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n,$$

мы должны все коэффициенты a_k приравнять нулю. Мы получим, таким образом, ряд алгебраических уравнений относительно параметров l_{ji} с коэффициентами в виде аналитических функций от $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$F_\lambda (l_{ji}) = 0, \tag{16}$$

$$\lambda = 1, 2, \ldots, \sigma; \; j = 1, 2, \ldots, r; \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Обратно, всякое решение системы (15) и (16), очевидно, удовлетворяет системе (1).

Таким образом, систему внешних дифференциальных уравнений (1) можно заменить системой уравнений Пфаффа (15) вместе с конечными уравнениями (16). Новая система содержит те же независимые переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а в качестве неизвестных функций, кроме $z_1, z_2, \ldots, z_r$, ещё целый ряд новых вспомогательных неизвестных l_{ji}. Во многих случаях систему σ алгебраических уравнений (16) можно разрешить относительно каких-либо σ параметров l_{ji}. Тогда по исключении их получим систему Пфаффа (15) с неизвестными функциями z_j и теми l_{ji}, которые остались произвольными при разрешении уравнений (16). Если это разрешение затруднительно, то надо дифференцировать уравнения (16) и полученные уравнения Пфаффа присоединять к системе (15), как это делалось в п. 2, § 9 предыдущей главы.

Переход от системы (1) к системе (15), (16) называется *продолжением системы*,

§ 6. Примеры

1. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_2$ системы

$$u\,dx + y\,dz = 0,$$
$$v\,[dx\,dy] + x\,[dy\,dz] = 0$$

при пяти переменных x, y, z, u, v, причём $[dx\,dy] \neq 0$ на $\mathfrak{M}_2$. Определить широту решения.

2. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ системы

$$x\,[du\,dy] + y\,[dz\,dv] + w\,[dy\,dz] = 0, \qquad [dx\,dy\,dz] \neq 0$$

при шести переменных x, y, z, u, v, w.

Решения

Пример 1. Внешний дифференциал первого уравнения есть

$$[du\,dx] + [dy\,dz] = 0.$$

Второе дифференцировать не надо, ибо в кольце $\mathfrak{R}[dx, dy]$ все формы третьего измерения равны нулю.

Исключая $dz = -\frac{u}{y} dx$, получим:

$$\left(v + u\frac{x}{y}\right)[dx\,dy] = 0, \quad \left[du - \frac{u}{y}\,dy, dx\right] = 0.$$

Из первого равенства прямо имеем в силу $[dx\,dy] \neq 0$:

$$v = -u\frac{x}{y}.$$

В дальнейшем v исключаем и имеем только одно квадратичное уравнение.

Интегральный линейный элемент определяется с одним произвольным параметром $\left(\text{значение формы } du - \frac{u}{y}\,dy\right)$. Интегральный элемент $\mathcal{E}_2$ вполне определён. Следовательно,

$$s_1 = 1.$$

Интегральное многообразие $\mathfrak{M}_2$ существует с одной произвольной функцией от одного аргумента.

Пример 2. Дифференцируем внешним образом заданное уравнение:

$$-[dx\,dy\,du] + [dy\,dz\,dv] + [dy\,dz\,dw] = 0.$$

Интегральный элемент $\mathcal{E}_1$ вполне произволен, следовательно, зависит от $r_1 = 3$ параметров du, dv, dw. Интегральный элемент $\mathcal{E}_2$, проходящий через $\mathcal{E}_1^0$, стеснён одним квадратичным уравнением, следовательно, зависит от $r_2 = 2$ параметров, например, dv, dw. Интегральный элемент $\mathcal{E}_3$, проходящий через $\mathcal{E}_2^0$, связан двумя уравнениями, следовательно, вполне определён: $r_3 = 0$.

Действительно, если положить

$$du_i = l_{ik} dx_k,$$

$$u_1 = u, \; u_2 = v, \; u_3 = w, \; x_1 = x, \; x_2 = y, \; x_3 = z,$$

то интегральный элемент $\mathcal{E}_1$ может быть определён уравнениями

$$dx = dy = 0, \quad du_i = l_{i3}dz,$$

интегральный элемент $\mathcal{E}_2$ — уравнениями

$$dx = 0, \quad du_i = l_{i2}dy + l_{i3}dz, \quad yl_{22} = w - xl_{13},$$

интегральный элемент $\mathcal{E}_3$ — уравнениями

$$du_i = l_{ik}dx_k,$$

$$l_{11} = 0, \; yl_{22} = w - xl_{13}, \; l_{21} = 0, \; l_{21} + l_{31} = l_{13}.$$

Следовательно,

$$s_1 = r_1 - r_2 = 1, \quad s_2 = r_2 - r_3 = 2, \quad s_3 = r_3 = 0.$$

Интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ существует с произволом двух функций от двух аргументов, например, можно задать:

$$u = \varphi_1(y, z), \; w = \varphi_2(y, z) \text{ для } x = 0,$$
$$v = \varphi_3(z) \quad \text{ для } x = 0, \; y = 0.$$

Действительно, цепь построена по формам базиса dz, dy, dx. При этом на элементе $\mathcal{E}_2(dx = 0)$ остаются произвольными значения дифференциалов du и $dw\,(l_{12}, l_{32})$ и определено значение $dv\,(l_{22})$; на $\mathcal{E}_3$ все дифференциалы определены, а на $\mathcal{E}_1(dx = dy = 0)$ — все произвольны (см. стр. 217).

§ 7. Задачи

1. Триортогональные системы. В § 11 предыдущей главы мы решали задачу отыскания триортогональных систем. При этом мы получили систему внешних дифференциальных уравнений (29)

$$(17) \qquad [\omega_{12}\omega_1\omega_2] = 0, \quad [\omega_{23}\omega_2\omega_3] = 0, \quad [\omega_{31}\omega_3\omega_1] = 0,$$

которую мы заменили системой уравнений Пфаффа (30), дополнив новыми неизвестными функциями a_i, b_i, c_i. Это было то самое продолжение системы, о котором мы говорили в конце предыдущего параграфа (§ 5).

Можно, однако, и непосредственно рассматривать систему (17).

Здесь базисом подкольца дифференциалов независимых переменных служат формы ω_1, ω_2, ω_3. Базис кольца $\mathfrak{R}[dx; dz]$ содержит, кроме того, три формы ω_{12}, ω_{23}, ω_{31}. Следовательно, $n = 3$, $r = 3$.

Идеал $\mathfrak{a}$, присоединённый к системе, не содержит ни конечных уравнений, ни уравнений первых двух степеней. Группы $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ — пустые, базис системы $\mathfrak{a}_3 = 0$ состоит из трёх уравнений системы (S). Так как $n = 3$, то формы выше третьей степени нас не интересуют. Дифференцировать систему не придётся.

Интегральные элементы $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ произвольны, т. е. каждый зависит от трёх параметров:

$$r_0 = 3, \quad r_1 = 3, \quad r_2 = 3.$$

Интегральный элемент $\mathcal{E}_3$ вполне определён, ибо, если два линейных элемента, определяющие $\mathcal{E}_2^0$, суть

$$e_1 = e_1(\omega_i^{(1)}, \omega_{ij}^{(1)}), \quad e_2 = e_2(\omega_i^{(2)}, \omega_{ij}^{(2)}),$$

то для третьего элемента ε, определяющего интегральный элемент $\mathcal{E}_3$, при заданных формах ω_i, имеем уравнения

$$\omega_{12}\begin{vmatrix} \omega_1^{(1)} & \omega_2^{(1)} \\ \omega_1^{(2)} & \omega_2^{(2)} \end{vmatrix} = \omega_2^{(1)}\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_1^{(2)} & \omega_2^{(2)} \end{vmatrix} - \omega_{12}^{(2)}\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_1^{(1)} & \omega_2^{(1)} \end{vmatrix}$$

и аналогичные для ω_{23} и ω_{31}. Следовательно, число произвольных параметров $\mathcal{E}_3$ равно нулю:

$$r_3 = 0,$$

если только ни один минор матрицы $\begin{Vmatrix} \omega_1^{(1)} & \omega_2^{(1)} & \omega_3^{(1)} \\ \omega_1^{(2)} & \omega_2^{(2)} & \omega_3^{(2)} \end{Vmatrix}$ не нуль, что всегда можно предполагать. Отсюда

$$s_0 = r_0 - r_1 = 0, \quad s_1 = r_1 - r_2 = 0, \quad s_2 = r_2 - r_3 = 3, \quad s_3 = r_3 = 0,$$

и интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ зависит от трёх функций двух аргументов.

Интересно отметить, что одна и та же система (17) дала нам теперь произвол только трёх функций от двух аргументов, в то время как интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ продолженной системы (30) в § 11, гл. VI зависело, кроме того, ещё от трёх произвольных функций одного аргумента и от трёх произвольных постоянных. Это объясняется, конечно, введением дополнительных неизвестных, но во всяком случае существенными могут быть только произвольные функции наибольшего числа аргументов.

2. Трижды сопряжённая система поверхностей. Задача. *Найти три однопараметрические семейства поверхностей, которые взаимно пересекались бы по сопряжённым семействам линий.*

Задача — проективного характера, но, чтобы не осложнять её введением новых уравнений структуры, мы будем её решать в аффинном пространстве.

Соединим с каждой точкой пространства A трёхгранник с вершиной в этой точке. Через эту точку проходят три поверхности — по одной из каждого семейства; они попарно пересекаются по трём линиям, выходящим из точки A. Отложим на касательных к этим линиям векторы произвольной длины $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и будем рассматривать трёхгранник, определяемый радиусом-вектором вершины A и тремя векторами осей $\mathbf{e}_i$. Его движения можно определить уравнениями [гл. III, (23)]

$$(18) \qquad dA = \omega^i\mathbf{e}_i, \quad d\mathbf{e}_i = \omega_i^k\mathbf{e}_k, \qquad i, k = 1, 2, 3;$$

уравнения структуры имеют вид

$$(19)\qquad D\omega^i = [\omega^j \omega^i_j], \qquad D\omega^k_i = [\omega^j_i \omega^k_j], \qquad i, j, k = 1, 2, 3.$$

Если

$$(20)\qquad \omega^3 = 0,$$

то вектор перемещения dA точки A линейно зависит от векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и, следовательно, будет расположен в касательной плоскости одной из поверхностей семейства, ибо плоскость $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ содержит касательные к двум линиям пересечения одной из трёх поверхностей с двумя другими.

Следовательно, уравнение (20) определяет одно семейство поверхностей, а потому должно быть вполне интегрируемо. Внешний дифференицал должен обращаться в нуль в силу уравнения (20), т. е.

$$[D\omega^3, \omega^3] = 0,$$

или в силу уравнений структуры (19)

$$[\omega^j \omega^3_j \omega^3] \doteq 0.$$

Развёртывая сумму и опуская произведение с двумя множителями ω^3, как равное нулю, получим:

$$(21)\qquad [\omega^1 \omega^3_1 \omega^3] + [\omega^2 \omega^3_2 \omega^3] = 0.$$

Остаётся написать условие, что на этой поверхности касательные $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ сопряжены. Если они сопряжены, то на касательной $\mathbf{e}_1$ найдётся точка

$$M = A + t\mathbf{e}_1,$$

которая будет описывать линию, касательную к первой оси трёхгранника, когда точка A пойдёт в направлении второй оси, т. е. при условии

$$(22)\qquad \omega^1 = \omega^3 = 0.$$

Так как вектор касательной к линии (M)

$$dM = (dt + t\,\omega^1_1)\mathbf{e}_1 + (\omega^2 + t\,\omega^2_1)\mathbf{e}_2 + t\,\omega^3_1\,\mathbf{e}_3$$

должен совпадать по направлению с вектором $\mathbf{e}_1$, в силу уравнений (22), то

$$\omega^2 + t\,\omega^2_1 \equiv 0, \quad \omega^3_1 \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ \omega^1, \omega^3),$$

или

$$[\omega^2 + t\,\omega^2_1, \omega^1\omega^3] = 0, \ [\omega^3_1 \omega^1 \omega^3] = 0.$$

Первое из этих уравнений определяет скаляр t, а второе вместе с уравнением (21') и всеми теми, которые отсюда получаются круговой заменой указателей 1, 2, 3, составят все уравнения проблемы.

Мы получаем всего шесть уравнений, именно: для любых неравных, фиксированных указателей i и k имеем уравнение

$$(23)\qquad [\omega^i \omega^k_i \omega^k] = 0, \qquad i \neq k \ \text{фиксированы}$$

Радиус-вектор вершины трёхгранника A и каждый из векторов $\mathbf{e}_i$ определяются тремя координатами, т. е. всего 12 величинами, но три из них — длины векторов $\mathbf{e}_i$ — для определения трёхгранника не существенны. Таким образом, имеем девять переменных задачи, из них три — независимых (например, координаты точки A) и шесть — неизвестных функций. Этому соответствует число форм базиса характеристической системы уравнений (23). Он складывается из трёх форм ω^i (базис подкольца $\mathfrak{R}[dx]$ независимых переменных) и шести форм ω^k_i.

Так как идеал $\mathfrak{a}$, присоединённый к системе (23), содержит только формы третьей степени — формы более высокой степени нас не интересуют, то интегральные элементы $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ вполне произвольны; каждый зависит от шести параметров.

Выбирая произвольно линейные элементы

$$e_1:\ \ \omega^i = a^i, \quad \omega^k_i = a^k_i,$$
$$e_2:\ \ \omega^i = b^i, \quad \omega^k_i = b^k_i,$$

получим для определения третьего линейного элемента $\varepsilon(\omega^i, \omega^k_i)$ трёхмерного элемента $\mathcal{E}_3$ уравнения

$$\begin{vmatrix} \omega^i & \omega^k_i & \omega^k \\ a^i & a^k_i & a^k \\ b^i & b^k_i & b^k \end{vmatrix} = 0, \qquad i, k \ \text{фиксированы},$$

или

$$\omega^k_i \begin{vmatrix} a^i & a^k \\ b^i & b^k \end{vmatrix} = \omega^i \begin{vmatrix} a^k_i & a^k \\ b^k_i & b^k \end{vmatrix} + \omega^k \begin{vmatrix} a^i & a^k_i \\ b^i & b^k_i \end{vmatrix},$$

которые дают вполне определённое решение, ибо a^i, a^k можно считать непропорциональными b^i, b^k, таким образом

$$r_1 = 6, \ r_2 = 6, \ r_3 = 0, \ s_0 = s_1 = 0, \ s_2 = 6.$$

Интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ зависит от шести функций двух аргументов.

3. Поверхности J[1]. Четыре однородные координаты точки A, которая описывает сопряжённую сеть линий u, v, удовлетворяют одному уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 A}{\partial u\,\partial v}+\alpha\frac{\partial A}{\partial u}+\beta\frac{\partial A}{\partial v}+\gamma A=0.$$

При умножении четырёх координат A на общий множитель коэффициенты α, β, γ уравнения Лапласа меняются, но выражения (инварианты Дарбу)

$$h=\frac{\partial\alpha}{\partial u}+\alpha\beta-\gamma,\quad k=\frac{\partial\beta}{\partial v}+\alpha\beta-\gamma$$

остаются инвариантными.

Такому же уравнению Лапласа (с другими коэффициентами) удовлетворяют тангенциальные координаты касательной плоскости поверхности (A).

Если обозначить через $\bar{k}$, $\bar{h}$ тангенциальные инварианты Дарбу, то четыре инварианта h, k, $\bar{h}$, $\bar{k}$ определяют своими простейшими соотношениями три замечательные сети:

сеть с *равными инвариантами* (точечными и тангенциальными)

$$h=k,\quad \bar{h}=\bar{k},$$

сеть R —

$$h=\bar{k},\quad k=\bar{h},$$

сеть E —

$$h=\bar{h},\quad k=\bar{k}.$$

Поверхность, которая несёт первую из этих сетей, называется поверхностью Йонаса (Jonas), или поверхностью J.

Задача. *Найти поверхности J.*

Присоединим к точке $A=A_0$ поверхности тетраэдр с вершинами A_1 и A_2 во вторых фокусах касательных AA_1 и AA_2 к линиям сети и с вершиной A_3 — на линии пересечения касательных плоскостей AA_1A_3 и AA_2A_3 соответственно к поверхностям (A_1) и (A_2). Тогда все перемещения точек A, A_1 и A_2 лежат соответственно в касательных плоскостях AA_1A_2, AA_1A_3 и AA_2A_3. Следовательно, если

$$dA_i=\omega_i^k A_k, \tag{24}$$

то

$$\omega_0^3=\omega_1^2=\omega_2^1=0. \tag{25}$$

---

[1] Cartan, Sur une classe de surfaces apparentèes aux surfaces R et aux surfaces de Jonas, Bull. des Sciences Math., (2), 68, 1944.

Кроме того, если касательные AA_1 и AA_2 сопряжены, то прямая AA_1 касается на поверхности (A_1) линии $\omega_1^3=0$, которая соответствует линии $\omega_0^1=0$, огибаемой на поверхности (A) прямой AA_2. Отсюда

$$\omega_1^3-p\,\omega_0^1=0,\quad \omega_2^3-q\,\omega_0^2=0. \tag{26}$$

Если мы теперь положим

$$\omega_0^1=a_0^1du,\quad \omega_0^2=b_0^2dv,\quad \omega_i^j=a_i^jdu+b_i^jdv,$$

то из уравнения (24) получим:

$$\frac{\partial A}{\partial u}=a_0^0\,A+a_0^1A_1,\quad \frac{\partial A}{\partial v}=b_0^0\,A+b_0^2\,A_2,$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial v}=b_1^0\,A+b_1^1\,A_1,\quad \frac{\partial A_2}{\partial u}=a_2^0\,A+a_2^2\,A_2.$$

Новое дифференцирование даёт $\frac{\partial^2 A}{\partial u\,\partial v}$ и, следовательно,

$$\alpha=-b_0^0=-\left(b_1^1+\frac{\partial\log a_0^1}{\partial v}\right),\quad \beta=-a_0^0=-\left(a_2^2+\frac{\partial\log b_0^2}{\partial u}\right),$$

$$\gamma=-\frac{\partial b_0^0}{\partial u}-b_0^2a_2^0+\alpha\beta=-\frac{\partial a_0^0}{\partial v}-a_0^1b_1^0+\alpha\beta,$$

$$h=b_0^2\,a_2^0,\quad k=a_0^1b_1^0.$$

Мы получаем, следовательно, две инвариантные формы

$$h\,[du\,dv]=-[\omega_0^2\omega_2^0],\quad k\,[du\,dv]=[\omega_0^1\omega_1^0].$$

Если ввести тангенциальные координаты плоскостей тетраэдра, обозначая $\mathbf{a}_0=(A_0A_1A_2)$ и вообще через $\mathbf{a}_i$ плоскость, противолежащую вершине A_{3-i}, то компоненты $\bar{\omega}_i^j$ в уравнениях

$$d\mathbf{a}_i=\bar{\omega}_i^j\mathbf{a}_j$$

связаны с точечными компонентами ω_i^j соотношением

$$\bar{\omega}_i^j=-\omega_{3-j}^{3-i},$$

и тангенциальные инварианты будут:

$$\bar{h}\,[du\,dv]=-[\omega_2^3\,\omega_3^2],\quad \bar{k}\,[du\,dv]=[\omega_1^3\omega_3^1].$$

Следовательно, поверхность J определяется системой линейных уравнений (25), (26) и квадратичными

$$[\omega_0^1\omega_1^0]+[\omega_0^2\,\omega_2^0]=0,\quad p\,[\omega_0^1\,\omega_3^1]+q\,[\omega_0^2\,\omega_3^2]=0. \tag{27}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (25), (26), получим, кроме того,

$$[\omega_0^1, \Delta p] = 0, \quad [\omega_0^2, \Delta q] = 0,$$

$$(28) \qquad p\,[\omega_0^1\,\omega_3^2] - [\omega_0^2\,\omega_1^0] = 0,$$

$$-[\omega_0^1\,\omega_2^0] + q\,[\omega_0^2\,\omega_3^1] = 0,$$

где

$$\Delta p = dp + p\,(\omega_0^0 + \omega_3^3 - 2\omega_1^1), \quad \Delta q = dq + q\,(\omega_0^0 + \omega_3^3 - 2\omega_2^2).$$

Характеристическая система, кроме форм ω_0^1, ω_0^2, которые остаются независимыми на интегральном многообразии $\mathfrak{M}_2$, имеет базисом левые части уравнений (25), (26) и ещё шесть форм

$$(29) \qquad \omega_1^0,\ \omega_2^0,\ \omega_3^1,\ \omega_3^2,\ \Delta p,\ \Delta q.$$

На всяком $\mathfrak{M}_2$ формы (25), (26) равны нулю. Следовательно, интегральный линейный элемент $\mathcal{E}_1$ зависит от $r_1 = 6$ параметров — значений форм (29). На интегральном элементе $\mathcal{E}_2$ они все определены, если определитель из коэффициентов при них в уравнениях (27), (28)

$$\omega_0^1\omega_0^2\,\{p^2\,(\omega_0^1)^4 - q^2\,(\omega_0^2)^4\}$$

не равен нулю. Поэтому произвол элемента $\mathcal{E}_2$ равен $r_2 = 0$. Характеры —

$$s_0 = 5, \quad s_1 = r_1 - r_2 = 6, \quad s_2 = r_2 = 0.$$

Общее решение системы зависит от шести функций одного аргумента.

Мы предоставляем читателю подсчитать произвол поверхностей ***R*** и поверхностей ***E***.

ГЛАВА VIII

КРИТЕРИИ РЕГУЛЯРНОСТИ ЦЕПИ

§ 1. Характеристические переменные системы

Пусть дана система уравнений Пфаффа (S)

$$(1) \qquad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \ \ldots, \quad \theta_s = 0.$$

Чтобы задача интегрирования была вполне определена, надо указать независимые переменные или в конечном виде $x_1, x_2, \ldots, x_n$, или с помощью вполне интегрируемой системы

$$(2) \qquad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \ \ldots, \quad \omega_n = 0,$$

интегралами которой они будут. Формы ω_i составят базис подкольца дифференциалов $\mathfrak{R}\,[dx]$. Задача интегрирования теперь формулируется так: найти интегральное многообразие $\mathfrak{M}_n$ системы (S), на котором формы ω_i остаются линейно независимыми:

$$(3) \qquad [\omega_1\,\omega_2 \ldots \omega_n] \neq 0.$$

Пусть система (1) содержит под знаком дифференциала или в коэффициентах $r \geqslant s$ неизвестных функций $z_1, z_2, \ldots, z_r$. Тогда базис кольца $\mathfrak{R}\,[dx_i;\ dz_j]$ будет содержать не более $r + n$ независимых линейных форм.

Прежде всего в базис кольца можно включить n линейно независимых форм ω_i, которые составляют базис подкольца $\mathfrak{R}\,[dx]$. Затем надо включить s форм θ_k; они по условию независимы между собой, а также не зависят и от форм ω_i, ибо линейная зависимость форм θ_k и ω_i имела бы следствием линейную зависимость между формами ω_i на всяком интегральном многообразии, где $\theta_k = 0$, а это по условию исключено. Пусть, наконец,

$$\tilde{\omega}_1,\ \tilde{\omega}_2,\ \ldots,\ \tilde{\omega}_q, \qquad q = r - s,$$

— все остальные формы базиса кольца $\mathfrak{R}\,[dx_i;\ dz_j]$.

Система

$$(4) \qquad \omega_i = 0, \quad \theta_k = 0, \quad \tilde{\omega}_g = 0,$$

$$i = 1,\ 2, \ldots,\ n; \quad k = 1, 2, \ldots,\ s; \quad g = 1,\ 2, \ldots,\ q,$$

эквивалентна системе $dx_i = 0$, $dz_j = 0$, следовательно, вполне интегрируема, и её интегралы x_i, z_j являются характеристическими переменными системы (S)[1].

Так как внешнее дифференцирование не вводит новых переменных, то внешние дифференциалы $D\theta_1$, $D\theta_2, \ldots$, $D\theta_s$ могут быть представлены как сумма произведений из форм (4) с коэффициентами в виде функций от x_i, z_j.

С другой стороны, если квадратичные формы $D\theta_j$ выражаются через линейные формы (4), то система (1) не может содержать ни одной переменной z_{r+1} сверх интегралов[2]) системы (4).

Действительно, если бы она содержала z_{r+1} под знаком дифференциала, то система (4) не была бы базисом системы (1), ибо, полагая $dx_1 = \ldots = dx_n = dz_1 = \ldots = dz_r = 0$, $dz_{r+1} \neq 0$, мы обратили бы в нуль все формы (4), но не все формы (1).

Если же z_{r+1} содержится только в коэффициентах, например, в коэффициенте при dz_1 в первом члене формы

$$\theta = a_1 dz_1 + \ldots,$$

то внешний дифференциал её $D\theta$ содержал бы член с произведением $[dz_{r+1}\, dz_1]$:

$$D\theta = \frac{\partial a_1}{\partial z_{r+1}} [dz_{r+1}\, dz_1] + \ldots$$

Если форма θ не имеет другого члена, содержащего dz_1, то этот член не имеет себе подобных среди следующих членов, следовательно, не может уничтожиться; а это означало бы, что $D\theta$ нельзя выразить только через формы (4).

§ 2. Необходимое условие существования решения

Если существует интегральное многообразие $\mathfrak{M}_n$, на котором выполняется неравенство (3), то на нём все z_j суть функции от переменных x_i, все дифференциалы dz_j принадлежат подкольцу $\mathfrak{R}\,[dx]$ и все формы характеристической системы θ_k, $\tilde{\omega}_g$ линейно зависят от ω_i.

Так как формы θ_k на всяком интегральном многообразии равны нулю, то остаются соотношения

$$\omega_g = l_{gi}\omega_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n; g = 1, 2, \ldots, q, \tag{5}$$

которые вместе со значениями $\theta_k = 0$ обращают в нуль все формы $D\theta_k$.

---

[1]) Ср. с гл. XI, § 5.

[2]) Система (4), ассоциированная формам θ_k и их внешним дифференциалам $D\theta_k$, всегда вполне интегрируема. См. гл. IV, § 6.

Уравнения (5) определяют в каждой точке M многообразия $\mathfrak{M}_n$ систему n линейных элементов e_i. Каждый такой элемент, например e_1, определён значениями форм

$$\omega_1 = 1, \ \omega_2 = \ldots = \omega_n = 0, \ \theta_k = 0, \quad \tilde{\omega}_g = l_{g1}\omega_1, \quad g = 1, 2, \ldots, q.$$

Все вместе они определяют интегральный элемент $\mathcal{E}_n$, касательный к многообразию $\mathfrak{M}_n$. Отсюда вытекает необходимое условие:

Необходимое условие I. *Если система* (S) (*при n независимых переменных*) — *в инволюции, то она допускает интегральный элемент n измерений.*

Этому условию можно придать более отчётливую форму.

Внесём значения (5) в квадратичные уравнения $D\theta_k = 0$ системы. Каждая форма обратится после подстановки (5) в форму подкольца $\mathfrak{R}\,[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]$, а так как на многообразии $\mathfrak{M}_n$ формы ω_i линейно независимы, то все коэффициенты при произведениях $[\omega_{i_1}\, \omega_{i_2}]$ должны равняться нулю. Мы получим целый ряд уравнений вида

$$F_\alpha(x, z; l_{gi_1}, l_{gi_2}) = 0, \qquad i_1, i_2 = 1, 2, \ldots, n, \tag{6}$$

где каждая функция F_α линейна относительно любой серии величин l_{gi} с одним и тем же указателем i, если только она эти величины содержит. Коэффициенты при произведениях l_{gi} — функции от переменных x и z.

Могут представиться три возможности:

1. Система (6) имеет следствием уравнение, содержащее только независимые переменные x_i. Это показывает, что система (S) не допускает интегральных многообразий $\mathfrak{M}_n$, удовлетворяющих условию (3). Система (S) несовместна.

2. Система (6) имеет следствием уравнение между переменными x_i и z_j. Такое уравнение надо присоединить к системе (S) и пополненную систему подвергнуть новому исследованию.

3. Система (6) позволяет выразить все неизвестные l_{gi} в функциях от переменных x_i, z_j и некоторых вспомогательных переменных $y_1, y_2, \ldots, y_Q$. Получаем новый вид необходимого условия:

Необходимое условие II. *Если система Пфаффа $\theta_k = 0$ — в инволюции, то существует система величин l_{gi} таких, что $\tilde{\omega}_g = l_{gi}\omega_i$ обратят в нули все квадратичные формы $D\theta_k$.*

Необходимое условие не является достаточным. По теореме Картана интегральное многообразие существует, если можно построить неособую цепь интегральных элементов. Существование интегрального элемента $\mathcal{E}_n$, не достижимого регулярной цепью, не обеспечивает существования интегрального многообразия.

Заметим ещё, что система (5), где все l_{gi} выражены в функциях от $y_1, y_2, \ldots, y_Q$, заменяет систему ковариантов $D\theta_k = 0$. Система (S), пополненная уравнениями (5), называется *продолжением системы* (S).

§ 3. Построение цепи с наперёд заданным высечением

Если интегральный элемент $\mathcal{E}_n$ достижим регулярной цепью интегральных элементов

$$\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{E}_n,$$

то высечение каждого элемента $\mathcal{E}_\nu$ из элемента $\mathcal{E}_n$ производится наложением на формы ω_i ряда $n-\nu$ линейных однородных уравнений. Так как при движении по цепи справа налево каждый раз элемент $\mathcal{E}_\nu$ определяется из элемента $\mathcal{E}_{\nu+1}$ одним линейным уравнением между ω_i, то ничто не мешает нам ввести форму, стоящую в левой части этого уравнения, в базис подкольца $\mathfrak{R}[\omega_i]$. Тогда каждый элемент цепи $\mathcal{E}_\nu$ будет определяться уравнениями

$$\omega_{\nu+1} = \omega_{\nu+2} = \ldots = \omega_n = 0.$$

Мы будем говорить, что цепь *высечена по формам базиса* $[\omega_i]$.

Будет ли она свободна от особых элементов?

При построении каждого элемента $\mathcal{E}_\nu (\nu < n)$ придётся решать ту же задачу, что и при построении касательного к интегральному многообразию $\mathfrak{M}_n$ элемента $\mathcal{E}_n$, но при разрешении уравнений (6) теперь мы будем находиться в других условиях.

Прежде всего выбираем интегральную точку $\mathcal{E}_0(x^0, z^0)$ так, чтобы её координаты удовлетворили конечным уравнениям, если таковые имеются.

Для определения линейного элемента $\mathcal{E}_1$ полагаем равными нулю все формы ω_i, кроме первой — ω_1. Формула (5) примет вид

$$(5_1) \qquad \tilde{\omega}_g = l_{g1}\omega_1, \qquad g = 1, 2, \ldots, q.$$

Подстановка этих выражений в уравнения $D\theta_k = 0$ не даёт никаких условий на коэффициенты l_{g1}, ибо квадратичные формы для одной серии дифференциалов автоматически обращаются в нуль. Значит все коэффициенты l_{g1} произвольны (*параметрические*) и число их:

$$r_1 = r - s = q$$

определяет произвол наиболее общего элемента $\mathcal{E}_1$, проходящего через заданный элемент $\mathcal{E}_0^0$.

Если параметрическим l_{g1} дать произвольные, но определённые значения l_{g1}^0, то получим первый элемент цепи $\mathcal{E}_1^0$.

Чтобы построить второй элемент $\mathcal{E}_2$, надо в формулах (5) положить равными нулю все ω_i, кроме двух первых:

$$(5_2) \qquad \tilde{\omega}_g = l_{g1}\omega_1 + l_{g2}\omega_2, \qquad g = 1, 2, \ldots, q.$$

Так как элемент $\mathcal{E}_2$ должен проходить через $\mathcal{E}_1^0$, то в этой формуле все коэффициенты $l_{g1} = l_{g1}^0$ *уже известны*!

Вносим выражения (5_2) в квадратичные уравнения $D\theta_k = 0$ и получаем уравнения (6) в виде

$$(F_1) \qquad F_\alpha^{(1)}(x^0, z^0; l_{g1}^0, l_{g2}) = 0,$$

Все уравнения этой системы линейны относительно неизвестных l_{g2}. Пусть ранг её равен s_1, и базис составляют уравнения

$$(F_1') \qquad F_{\alpha'}^{(1)}(x^0, z^0; l_{g1}^0, l_{g2}) = 0;$$

она определит s_1 неизвестных l_{g2} (*главных*), например, $l_{12}, l_{22}, \ldots, l_{s_1 2}$; остальные $r_2 = r_1 - s_1$ коэффициентов (*параметрические*) остаются произвольными и определяют произвол элемента $\mathcal{E}_2$, проходящего через $\mathcal{E}_1^0$.

Выбирая произвольно параметрические l_{g2}^0, получаем второй элемент цепи $\mathcal{E}_2^0$.

Третий элемент $\mathcal{E}_3$, проходящий через $\mathcal{E}_2^0$, определяется формулами

$$(5_3) \qquad \tilde{\omega}_g = l_{g1}\omega_1 + l_{g2}\omega_2 + l_{g3}\omega_3, \qquad g = 1, 2, \ldots, q,$$

где $l_{g1} = l_{g1}^0$, $l_{g2} = l_{g2}^0$ надо считать уже известными, ибо они принадлежат $\mathcal{E}_2^0$. Внося выражения $\tilde{\omega}_g$ из формул (5_3) в формы $D\theta_k$, получим систему уравнений

$$(F_2) \qquad F_\alpha^{(1)}(x^0, z^0; l_{g1}^0, l_{g3}) = 0, \quad F_\beta^{(2)}(x^0, z^0; l_{g2}^0, l_{g3}) = 0.$$

Мы видим, что вся система уравнений (F_1) входит в состав системы (F_2). Пусть уравнения

$$(F_2') \qquad F_{\beta'}^{(2)}(x^0, z^0; l_{g2}^0, l_{g3}) = 0$$

вместе с уравнениями (F_1') составляют базис системы (F_2). При разрешении системы (F_2) относительно главных l_{g3} можно сначала решить систему (F_1') относительно неизвестных $l_{13}, l_{23}, \ldots, l_{s_1 3}$, а затем, исключив их из уравнений (F_2'), разрешить эти уравнения относительно следующих l_{g3}.

Если $s_1 + s_2$ есть ранг системы (F_2), то ранг системы (F_2') после исключения $l_{g3} (g \leqslant s_1)$ равен s_2; она позволит определить ещё s_2 главных l_{g3}:

$$l_{s_1+1,3}, l_{s_1+2,3}, \ldots, l_{s_1+s_2,3};$$

все остальные в количестве

$$r_3 = r_1 - s_1 - s_2 = r_2 - s_2$$

будут параметрическими и определят произвол интегрального элемента $\mathcal{E}_3$, проходящего через $\mathcal{E}_2^0$.

Выбирая параметрические l_{g3} произвольно, получим третий элемент цепи $\mathcal{E}_3^0$, и т. д.

Интегральный элемент $\mathcal{E}_\nu$, проходящий через $\mathcal{E}_{\nu-1}^0$ определяется формами

$$(5_\nu) \qquad \tilde{\omega}_g = l_{gi}\omega_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, \nu; g = 1, 2, \ldots, q,$$

где все $l_{gi} = l_{gi}^0$ при $i < \nu$ уже известны. Для остальных имеем систему линейных уравнений

$$(F_{\nu-1}) \quad F_\alpha^{(1)}(x^0, z^0; l_{g1}^0, l_{g\nu}) = 0, \ldots, F_\varepsilon^{(\nu-1)}(x^0, z^0; l_{g,\nu-1}^0, l_{g,\nu}) = 0,$$

которая получится, если внести выражения (5_ν) в формы $D\theta_k$ и приравнять нулю коэффициенты при всех произведениях $[\omega_j\omega_\nu]$.

Мы видим, что все уравнения предыдущих систем (F_j), где $j < \nu - 1$, принадлежат системе $(F_{\nu-1})$. Базис системы $(F_{\nu-1})$ состоит из всех уравнений (F'_j), где $j < \nu - 1$, и ещё, допустим, $s_{\nu-1}$ уравнений

$$(F'_{\nu-1}) \qquad F_{\varepsilon'}^{(\nu-1)}(x^0, z^0; l_{g,\nu-1}^0, l_{g\nu}) = 0.$$

Из уравнений базиса

$$(F'_1),\ (F'_2),\ \ldots,\ (F'_{\nu-2})$$

можно определить $s_1 + s_2 + \ldots + s_{\nu-2}$ главных $l_{g\nu}$; исключая их из уравнений системы $(F'_{\nu-1})$, мы не понизим её ранга. Следовательно, она позволит определить ещё $s_{\nu-1}$ главных $l_{g\nu}$. Все остальные $l_{g\nu}$ в количестве

$$r_\nu = r_1 - (s_1 + \ldots + s_{\nu-1}) = r_{\nu-1} - s_{\nu-1}$$

будут параметрическими и определят произвол интегрального элемента $\mathcal{E}_\nu$, проходящего через $\mathcal{E}_{\nu-1}^0$.

Определение. Система уравнений (6), определяющая коэффициенты l_{gi} интегрального элемента $\mathcal{E}_n$:

$$\tilde{\omega}_g = l_{gi}\omega_i, \qquad g = 1, 2, \ldots, q; i = 1, 2, \ldots, n,$$

разрешена *нормально* относительно цепи, построенной по формам базиса $[\omega_i]$, если в последовательном решении систем

$$F_\alpha^{(1)}(x, z; l_{g1}, l_{g2}) = 0,\ F_\beta^{(2)}(x, z; l_{g2}, l_{g3}) = 0, \ldots$$
$$\ldots, F_\zeta^{(n-1)}(x, z; l_{g,n-1}, l_{gn}) = 0$$

при определении каждого ряда коэффициентов $l_{g\nu}$ все параметрические l_{gi}, где $i < \nu$, остаются вполне произвольными. Иначе: формулы, получаемые при последовательном решении систем уравнений, составляющих по очереди базис системы (F'_j), где $j = 1, 2, \ldots, n-1$,

$$(\varphi_n^0) \quad \begin{gathered} F_{\alpha'}^{(1)}(x, z; l_{g1}, l_{g2}) = 0,\ F_{\beta'}^{(2)}(x, z; l_{g2}, l_{g3}) = 0, \ldots \\ \ldots, F_{\zeta'}^{(n-1)}(x, z; l_{g,n-1} l_{gn}) = 0 \end{gathered}$$

для определения главных $l_{g\nu}$ через параметрические, тождественно удовлетворяют всем уравнениям (6).

Пользуясь этой терминологией, мы можем высказать теорему, которая даёт новое необходимое условие регулярности цепи.

Теорема I. Необходимое условие. *Если интегральный элемент* $\mathcal{E}_n$:

$$(5') \qquad \theta_k = 0, \quad \tilde{\omega}_g = l_{gi}\omega_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

достижим регулярной (неособой) цепью интегральных элементов

$$\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{E}_n,$$

высеченной на $\mathcal{E}_n$ *по формам базиса* $[\omega_i]$, *то система уравнений*

$$(6') \qquad F_\alpha(x, z; l_{gi}) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

получаемая подстановкой форм (5) *в уравнения* $D\theta_k = 0$, *может быть разрешена нормально по элементам этой цепи.*

§ 4. Достаточное условие Кэлера

Кэлер доказал, что имеет место и обратная теорема. Таким образом, необходимое условие, которое мы получили, является и достаточным.

В силу теоремы Кэлера забота о наиболее общем высечении цепи отпадает. Можно задать высечение цепи произвольно, например, по формам базиса $[\omega_i]$: каждый элемент $\mathcal{E}_\nu$ определять уравнениями $\omega_{\nu+1} = \omega_{\nu+2} = \ldots = \omega_n = 0$. Если произвол параметрических $l_{gi}(i < \nu)$ при выборе $l_{g\nu}$ не стеснён, то цепь регулярна.

Дадим название *характеристики* Коши особому элементу $\mathcal{E}_p$, особенность которого зависит от способа высечения, т. е. от выбора уравнений между формами ω_i, которые его определяют на $\mathcal{E}_n$.

По теореме Кэлера характеристики всегда приводят к невозможности выбора коэффициентов $l_{g,p+1}$ при полном произволе параметрических $l_{gi}(i \leqslant p)$. Иными словами, если $\mathcal{E}_{p-1}$ — характеристика, то последовательное решение систем уравнений

$$(\varphi_p^0) \quad \begin{gathered} F_{\alpha'}^{(1)}(x, z; l_{g1}, l_{g2}) = 0, \quad F_{\beta'}^{(2)}(x, z; l_{g2}, l_{g3}) = 0, \quad \ldots \\ \ldots, F_{\varepsilon'}^{(p-1)}(x, z; l_{g,p-1}, l_{gp}) = 0 \end{gathered}$$

даёт для главных l_{gp} такие выражения через параметрические, что подстановка их в уравнения (F_{p-1}) приведёт к независимым уравнениям на параметрические $l_{gi}(i < p)$ (не сводящимся к тождествам).

Доказательство теоремы Кэлера мы начнём с рассмотрения леммы.

§ 5. Лемма о независимости произвола элемента $\mathcal{E}_p$ от способа его высечения

Лемма. *Если построен отрезок цепи*

$$\mathcal{E}_0^0 \subset \mathcal{E}_1^0 \subset \ldots \subset \mathcal{E}_p^0$$

последовательным разрешением систем уравнений

$$F_\alpha^{(\nu-1)}(l_{g\nu}^0) = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, p,$$

так, что при определении главных $l_{g\nu}$ параметрические $l_{gj} (j<\nu)$ остаются произвольными, то и система уравнений, определяющая главные l_{gi} любого соседнего элемента $\mathcal{E}_p$:

$$(7) \qquad \omega_j = \lambda_{ji}\omega_i, \quad \theta_k = 0, \quad \tilde{\omega}_g = l_{gi}\omega_i,$$
$$i = 1, 2, \ldots, p;\ g = 1, 2, \ldots, q;\ j = p+1, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, s,$$

может быть разрешена нормально по элементам своей цепи, и число параметрических $l_{gi} (i \leqslant p)$, т. е. произвол $\mathcal{E}_p$, не зависит от способа высечения этого элемента или элементов его цепи $e_1, e_2, \ldots, e_p$.

Внося формы (7) в уравнения $D\theta_k = 0$, получим систему

$$(8) \qquad G_{p-1}(x, z;\ l_{g\alpha}, l_{gp};\ \lambda) = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p-1,$$

которая и должна определять главные коэффициенты l_{gi} элемента $\mathcal{E}_p$ с заданными коэффициентами высечения λ_{ji}.

Выделим те формы $D\theta_k$, которые дали уравнения системы (φ_p^0). Пусть эти формы приводят в системе (8) к уравнениям

$$\{\varphi_p(\lambda)\} \qquad \begin{array}{l} F_{\alpha'}^{(1)}(x, z: l_{g1}, l_{g2}; \lambda) = 0,\ F_{\beta'}^{(2)}(x, z; l_{g2}, l_{g3}, \lambda) = 0, \ldots \\ \ldots,\ F_{\varepsilon'}^{(p-1)}(x, z; l_{g,p-1}, l_{gp}; \lambda) = 0, \end{array}$$

которые мы обозначим системой $\{\varphi_p(\lambda)\}$. Для $\lambda_{ji} = 0$ эта система совпадает с системой (φ_p^0), а следовательно, имеет решение. Это решение получается последовательно разрешением систем $F_{\alpha'}^{(1)} = 0$, $F_{\beta'}^{(2)} = 0, \ldots, F_{\varepsilon'}^{(p-1)} = 0$.

Каждая из систем $F_{\delta'}^{(\nu-1)}(\lambda) = 0$ представляет систему уравнений, линейных относительно $l_{g\nu}$. Так как главные $l_{g\nu}$ удовлетворяют всем тем уравнениям, которые определяют главные $l_{g,\nu-1}$, то для определения первых $s_1 + s_2 + \ldots + s_{\nu-2}$ неизвестных $l_{g\nu}$ можно воспользоваться готовыми формулами решений для главных $l_{g,\nu-1}$ через параметрические $l_{g,\nu-1}$, надо только те и другие заменить на $l_{g\nu}$ с теми же указателями g. Если эти выражения подставить в систему $F_{\delta'}^{(\nu-1)}(\lambda) = 0$, то определитель из коэффициентов при следующих $s_{\nu-1}$ неизвестных $l_{g\nu}$ (со следующими по порядку $s_{\nu-1}$ номерами указателя g) будет отличен от нуля и позволит выразить эти главные $l_{g\nu}$ через все остальные — параметрические.

Действительно, этот определитель как непрерывная функция от всех λ_{ji}, отличный от нуля в точке $\lambda_{ji} = 0$, будет отличен от нуля и в достаточно малой окрестности этой точки. Если рассмотреть пересечения таких окрестностей для каждой из $p-1$ частей системы $\{\varphi_p(\lambda)\}$, то в этой области вся система $\{\varphi_p(\lambda)\}$ может быть последовательно разрешена относительно тех же самых (с теми же указателями) главных l_{gi} $(i = 1, 2, \ldots, p)$, которые теперь будут получены в виде аналитических функций от всех x, z, λ и от параметрических l_{gi}.

Если эти решения удовлетворят всем остальным уравнениям (8), то наша лемма доказана: система (8) разрешена нормально относительно главных l_{gi} соседнего элемента $\mathcal{E}_p$, и число параметрических — обозначим его через $N_p(\lambda)$ — равно числу параметрических l_{gi} элемента $\mathcal{E}_p^0$ — обозначим его через N_p.

Если бы подстановка найденных решений системы $\{\varphi_p(\lambda)\}$ в уравнения (8) давала бы одно или несколько не сводящихся к тождеству уравнений на параметрические l_{gi}, то $N_p(\lambda)$ было бы меньше N_p. Следовательно, во всяком случае

$$(9a) \qquad N_p(\lambda) \leqslant N_p.$$

Нам надо показать, что здесь может иметь место только знак равенства.

С этой целью заметим, что построение интегрального элемента $\mathcal{E}_p$ можно вести иначе, исходя из наиболее общего интегрального элемента $\mathcal{E}_n$, который не зависит ни от какого высечения, ибо совокупность форм ω_i, остающихся на нём независимыми, предуказана неравенством (3). Интегральный элемент $\mathcal{E}_n$ определяется формулами

$$(10) \qquad \begin{array}{ll} z_k = z_k(x, z), & k = 1, 2, \ldots, s', \\ & i = 1, 2, \ldots, n, \\ \tilde{\omega}_g = l_{gi}\omega_i, & g = 1, 2, \ldots, q, \end{array}$$

где значения z_k получены решением s' конечных уравнений системы, и главные l_{gi} являются результатом последовательного решения систем (φ_n), полученных из квадратичных уравнений $D\theta_k = 0$. Главные l_{gi} для $i = 1, 2, \ldots, n$ будут аналитическими функциями от x и параметрических z и l_{gi}. Если теперь задаться формулами

$$\omega_j = \lambda_{ji}\omega_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, p;\ j = p+1, \ldots, n,$$

то уравнения (10) по исключении ω_j примут вид

$$\begin{array}{ll} z_k = z_k(x, z), & k = 1, 2, \ldots, s', \\ & i = 1, 2, \ldots, p, \\ \tilde{\omega}_g = L_{gi}(x, z; l; \lambda)\,\omega_i, & g = 1, 2, \ldots, q, \end{array}$$

и будут определять наиболее общий элемент $\mathcal{E}_p$, содержащийся в произвольном n-мерном интегральном элементе $\mathcal{E}_n$.

Чтобы определить число произвольных параметров, от которых зависит интегральный элемент $\mathcal{E}_p$, надо принять во внимание число произвольных (параметрических) координат z_j, получаемых при решении системы s' конечных уравнений,

$$r_0 = r - s',$$

и ранг матрицы из производных от функций $L_{gi}(x, z; l; \lambda)$ по параметрическим z_j, l_{gi}. Если этот ранг обозначить через $P(\lambda)$, то число произвольных параметров элемента будет равно сумме

$$N_p(\lambda) = r_0 + P(\lambda).$$

При $\lambda_{ji} = 0$ элемент $\mathcal{E}_p$ совпадает с элементом $\mathcal{E}_p^0$ и

$$N_p(0) = N_p.$$

Нетрудно заметить, что ранг этой матрицы $P(\lambda)$ в точке $\lambda_{ji} = 0$ может только понизиться, если все определители порядка $P(\lambda)$ обратятся в этой точке в нуль, но не может повыситься, ибо всякий определитель, не равный нулю в точке $\lambda_{ji} = 0$, в силу непрерывности будет отличен от нуля и в окрестности этой точки. Следовательно,

$$N_p(\lambda) \geqslant N_p. \tag{9b}$$

Сравнивая неравенства (9a), (9b), мы получаем:

$$N_p(\lambda) = N_p.$$

Произвол интегрального элемента $\mathcal{E}_p$ не зависит от способа его высечения и совпадает с произволом элемента $\mathcal{E}_p^0$. Иначе говоря, решение системы $\{\varphi_p(\lambda)\}$, которая переходит в базис системы линейных уравнений (F_{p-1}) в точке $\lambda_{ji} = 0$, будет удовлетворять всем уравнениям $\{F_{p-1}(\lambda)\}$ и в достаточной малой окрестности этой точки. Лемма доказана, а из неё вытекает и доказательство теоремы Кэлера.

§ 6. Теорема Кэлера[1]

Теорема II. Достаточное условие. *Если построена цепь интегральных элементов системы внешних дифференциальных уравнений*

$$\mathcal{E}_0^0 \subset \mathcal{E}_1^0 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_n^0$$

по формам базиса $[\omega_i]$ *и при вычислении координат* $l_{g\nu}$ *каждого интегрального элемента* $\mathcal{E}_\nu$ *произвол предшествующих параметрических* $l_{gj} (i < \nu)$ *ничем не стеснён, то цепь регулярна, система — в инволюции, и интегральное многообразие* $\mathfrak{M}_n$ *существует с произволом, определяемым характерами цепи.*

Заметим прежде всего, что, согласно доказанной лемме, в сколь угодно малой окрестности любого интегрального элемента цепи $\mathcal{E}_\nu^0$:

$$\omega_j = 0, \quad \theta_k = 0, \quad \tilde{\omega}_g = l_{gi}^0 \omega_i,$$

$$i = 1, 2, \ldots, \nu; k = 1, 2, \ldots, s; j = \nu + 1, \nu + 2, \ldots, n; \ g = 1, 2 \ldots, q,$$

существуют интегральные элементы $\mathcal{E}_\nu$:

$$\omega_j = \lambda_{ji} \omega_i, \quad \theta_k = 0, \quad \tilde{\omega}_g = l_{gi} \omega_i,$$

с тем же самым произволом параметрических l_{gi}.

Интегральный элемент $\mathcal{E}_{\nu+1}$, проходящий через один из этих элементов $\mathcal{E}_\nu$, можно определить уравнениями

$$\omega_j = \lambda_{ji} \omega_i, \quad \theta_k = 0, \quad \tilde{\omega}_g = l_{gi} \omega_i, \tag{11}$$

$$i = 1, 2, \ldots, \nu + 1; j = \nu + 2, \nu + 3, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots, s;$$
$$g = 1, 2, \ldots, q.$$

Коэффициенты l_{gi}, λ_{ji} должны удовлетворять системе уравнений

$$G_\nu(x, z; l_{gi}, l_{g, \nu+1}; \lambda) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, \nu,$$

которые получатся, если выражения (11) внести в уравнения $D\theta_k = 0$.

Если, кроме того, допустить, что заданный элемент $\mathcal{E}_\nu$ высекается на искомом $\mathcal{E}_{\nu+1}$ уравнении

$$\omega_{\nu+1} = 0,$$

то и добавочное требование принадлежности данного $\mathcal{E}_\nu$ искомому $\mathcal{E}_{\nu+1}$ выразится чрезвычайно просто: все коэффициенты

$$\lambda_{\beta i}, \ l_{gi}, \qquad i = 1, 2, \ldots, \nu; \quad \beta = \nu + 2, \nu + 3, \ldots, n,$$

обоих элементов $\mathcal{E}_\nu$ и $\mathcal{E}_{\nu+1}$ совпадают.

По доказанной лемме решения системы (G_ν) могут быть получены последовательным разрешением ν систем уравнений, совокупность которых мы обозначим символом $\{\varphi_{\nu+1}(\lambda)\}$:

$$\{\varphi_{\nu+1}(\lambda)\} \quad \begin{array}{ll} F_{\alpha'}^{(1)}(x, z; l_{g1}, l_{g2}; \lambda) = 0, & F_{\beta'}^{(2)}(x, z; l_{g2}, l_{g3}; \lambda) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ F_{\delta'}^{(\nu-1)}(x, z; l_{g, \nu-1}, l_{g\nu}; \lambda) = 0, & F_{\varepsilon'}^{(\nu)}(x, z; l_{g\nu}, l_{g, \nu+1}; \lambda) = 0. \end{array}$$

Первые $\nu - 1$ систем совпадают с уравнениями такой же совокупности $\{\varphi_\nu(\lambda)\}$, написанной для элемента $\mathcal{E}_\nu$. Мы можем, следовательно, выбрать для $l_{g1}, l_{g2}, \ldots, l_{g\nu}$ те же решения, которые определяли интегральный элемент $\mathcal{E}_\nu$.

Последняя система определяет все остальные главные $l_{g, \nu+1}$. При этом в силу той же самой леммы число параметрических $l_{g, \nu+1}$, т. е. произвол интегрального элемента $\mathcal{E}_{\nu+1}$, проходящего через выбран-

---

[1] Kähler, Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen.

ный $\mathcal{E}_\nu$, не зависит от способа высечения, т. е. от выбора λ_{ji} в достаточно малой окрестности элемента $\mathcal{E}_\nu^0$. Следовательно, этот произвол будет совпадать с произволом интегральных элементов $\mathcal{E}_{\nu+1}$, проходящих через $\mathcal{E}_\nu^0$.

Тем самым теорема Кэлера при сделанном допущении доказана, и нам остаётся освободиться от наложенного ограничения: мы потребовали, чтобы заданный элемент $\mathcal{E}_\nu$ получался из искомого $\mathcal{E}_{\nu+1}$ высечением посредством уравнения $\omega_{\nu+1} = 0$.

С этой целью мы выполним замену базиса подкольца $\mathfrak{R}$ $[dx]$ независимых переменных посредством уравнений

$$\bar{\omega}_\alpha = \rho_{\alpha\beta}\omega_\beta, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n.$$

Для тех же интегральных элементов $\mathcal{E}_\nu$, $\mathcal{E}_{\nu+1}$ коэффициенты λ_{ji}, l_g преобразуются в какие-то другие $\bar{\lambda}_{ji}$, $\bar{l}_{gi}$:

$$\begin{aligned} \omega_j &= \bar{\lambda}_{ji}\bar{\omega}_i, & i &= 1, 2, \ldots, \nu+1, \\ & & j &= \nu+2, \nu+3, \ldots, n, \\ \tilde{\omega}_g &= \bar{l}_{gi}\bar{\omega}_i, & g &= 1, 2, \ldots, q. \end{aligned}$$

Если при этом матрица коэффициентов подстановки $\|\rho_{\alpha\beta}\|$ мало отличается от единичной матрицы, то такие же рассуждения покажут нам, что уравнения

$$\bar{G}_\nu(x, z; \bar{l}_{g1}, \ldots, \bar{l}_{g,\nu+1}; \bar{\lambda}) = 0$$

для новых коэффициентов $\bar{l}_{gi}$, $\bar{\lambda}_{ji}$ можно разрешить так же, как решалась система (G_ν). Те же параметрические $\bar{l}_{g,\nu+1}$ останутся произвольными, и новое уравнение

$$\bar{\omega}_{\nu+1} = 0$$

определит интегральный элемент $\mathcal{E}_\nu$, через который будет проходить столько же интегральных элементов $\mathcal{E}_{\nu+1}$, как и ранее.

Таким образом, теорема Кэлера доказана во всей общности: через всякий элемент цепи $\mathcal{E}_\nu^0$ проходит не больше интегральных элементов $\mathcal{E}_{\nu+1}$, чем через любой соседний $\mathcal{E}_\nu$. Это показывает регулярность каждого элемента $\mathcal{E}_\nu^0$, а следовательно, и всей цепи.

§ 7. Распространение критерия регулярности на системы внешних дифференциальных уравнений

Предыдущие рассуждения распространяются на системы дифференциальных уравнений из внешних форм произвольного числа измерений.

1. Расширенная система. Пусть нам дана система внешних дифференциальных уравнений (S):

$$(1^*) \qquad \Theta_1 = 0, \quad \Theta_2 = 0, \quad \ldots, \quad \Theta_s = 0,$$

где каждая форма Θ_k есть внешняя форма $p_k \leqslant p$ измерений и p — наивысшая размерность формы Θ системы (1*).

Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_n$, на котором n форм ω_i остаются линейно независимыми [см. (3)]:

$$[\omega_1\omega_2\ldots\omega_n] \neq 0.$$

При этом система $\omega_i = 0$ вполне интегрируема и имеет n независимых интегралов x_i.

Присоединяя к уравнениям (1*) их внешние дифференциалы $D\Theta_k$, получим расширенную систему $(\mathfrak{S})$. Многообразие $\mathfrak{M}_n$, удовлетворяющее системе $(\mathfrak{S})$, обратит в нуль все формы присоединённого к системе (S) идеала $\mathfrak{a}$ и будет интегральным многообразием.

Систему $(\mathfrak{S})$ можно разбить на части $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_p, \mathfrak{S}_{p+1}$ из форм одного и того же измерения, начиная с конечных уравнений $\mathfrak{S}_0$ и до уравнений из форм $p+1$ измерений $\mathfrak{S}_{p+1}$. Сохраним теперь в каждой части $\mathfrak{S}_\nu$ только те уравнения, которые алгебраически независимы между собой и от форм предыдущих частей $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_{\nu-1}$. Обозначим получаемые системы штрихом: $\mathfrak{S}'_0, \mathfrak{S}'_1, \ldots, \mathfrak{S}'_{p+1}$. Только эти уравнения и придётся рассматривать при построении интегральных элементов.

Пусть характеристическая система семейства форм Θ_k имеет базисом $n+r$ форм. В этот базис можно прежде всего включить n форм ω_i, которые по условию линейно независимы. Затем можно включить все s_0 форм из системы $\mathfrak{S}'_1$. По построению они линейно независимы между собой и не могут зависеть от форм ω_i, иначе на интегральном многообразии, где все $\theta_k = 0$, между формами ω_i будет линейная зависимость, и неравенство (3) не будет иметь места. Система [см. (4)]

$$\omega_i = 0, \quad \theta_k = 0, \quad \tilde{\omega}_g = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n; \; k = 1, 2, \ldots, s_0; \, g = 1, 2, \ldots, q,$$

вполне интегрируема, и её интегралы x_i, z_j являются характеристическими переменными системы (S)[1].

2. Необходимое условие существования решения. Если существует интегральное многообразие $\mathfrak{M}_n$, то касательный элемент удовлетворяет всем уравнениям $\mathfrak{S}'$. Его можно задать уравнениями

$$(5^*) \qquad \begin{aligned} z_{k'} &= \varphi_{k'}(x_i, z_l), & k' &= 1, 2, \ldots, s'; \, l = 1, 2, \ldots, r_0, \\ & & k &= 1, 2, \ldots, s_0; \, g = 1, 2, \ldots, q, \\ \theta_k &= 0, \quad \tilde{\omega}_g = l_{gi}\omega_i, & i &= 1, 2, \ldots, n; \, r_0 + s' = r. \end{aligned}$$

Здесь функции $\varphi_{k'}$ получены решением системы $\mathfrak{S}'_0$ из конечных уравнений системы (S).

---

[1] Ср. с гл. XI. § 5.

Внося значения θ_k, $\tilde{\omega}_g$ в уравнения $\mathfrak{S}'$ и обращая в нуль коэффициенты при независимых произведениях $[\omega_{i_1}\omega_{i_2}\ldots\omega_{i_{p'}}]$, получим систему уравнений

$$F_\alpha(x, z;\, l_{gi_1},\, l_{gi_2},\, \ldots,\, l_{gi_{p'}}) = 0, \qquad (6^*)$$

$$i_1, i_2, \ldots, i_{p'} = 1, 2, \ldots,\, n;\; p' \leqslant p,$$

линейных относительно каждой серии величин l_{gi} с одним и тем же указателем i. Коэффициенты при произведениях l_{gi} — функции от переменных x и z.

Чтобы существовал касательный элемент многообразия $\mathfrak{M}_n$, система (6*) должна иметь решение. Отсюда вытекают необходимые условия I и II.

3. Цепь по формам базиса. Чтобы построить цепь по формам базиса $[\omega_i]$, выбираем прежде всего интегральную точку $\mathcal{E}_0(x^0, z^0)$ так, чтобы её координаты удовлетворяли системе конечных уравнений $\mathfrak{S}_0'$. Если среди них — s' независимых, то при заданных x_i^0 остаётся $r_0 = r - s'$ произвольных z_j^0. Мы их назовём *параметрическими*, а все остальные — *главными*.

Линейный элемент $\mathcal{E}_1$, проходящий через выбранный $\mathcal{E}_0^0$, определяется формулами

$$\tilde{\omega}_g = l_{g1}\omega_1, \qquad (5_1^*)$$

где все коэффициенты l_{g1} произвольны (*параметрические*), ибо уравнения $\mathfrak{S}_1'$ удовлетворены выбором $\theta_k = 0$, а формы выше первого измерения для одной серии дифференциалов исчезают тождественно. Произвол линейного элемента $\mathcal{E}_1$, проходящего через $\mathcal{E}_0^0$, равен

$$r_1 = r_0 - s_0 = q.$$

Давая всем l_{g1} произвольные, но определённые значения l_{g1}^0, получим первый элемент цепи $\mathcal{E}_1^0$.

Второй элемент цепи $\mathcal{E}_2$, проходящий через $\mathcal{E}_1^0$, определяется формулами

$$\tilde{\omega}_g = l_{g1}^0\omega_1 + l_{g2}\omega_2. \qquad (5_2^*)$$

Коэффициенты при ω_1 уже известны. Внося эти $\tilde{\omega}_g$ в уравнения $\mathfrak{S}_2'$, получаем линейные уравнения

$$F_\alpha^{(1)}(x^0,\, z^0;\, l_{g1}^0,\, l_{g2}) = 0 \qquad (F_1)$$

для определения l_{g2}. Если ранг системы (F_1) равен s_1, а базис состоит из уравнений

$$F_{\alpha'}^{(1)}(x^0,\, z^0;\, l_{g1}^0,\, l_{g2}) = 0, \qquad (F_1')$$

то s_1 главных l_{g2}, например $l_{12}, l_{22}, \ldots, l_{s_12}$, будет определено, а $r_2 = r_1 - s_1$ параметрических составят произвол элемента $\mathcal{E}_2$, проходящего через $\mathcal{E}_1^0$.

Третий элемент $\mathcal{E}_3$ определяется формулами

$$\tilde{\omega}_g = l_{g1}^0\omega_1 + l_{g2}^0\omega_2 + l_{g3}\omega_3, \qquad (5_3^*)$$

где l_{g1}^0, l_{g2}^0 уже известны, первые s_1 коэффициентов l_{g3} определяются из системы (F_1'), а на все остальные l_{g3} имеем уравнения

$$(F_2) \quad F_\alpha^{(1)}(x^0,\, z^0;\, l_{g2}^0,\, l_{g3}) = 0, \quad F_\beta^{(2)}(x^0,\, z^0;\, l_{g1}^0,\, l_{g2}^0,\, l_{g3}) = 0,$$

из которых первые получены из системы $\mathfrak{S}_1'$, если туда внести выражения (5$_3$*) и приравнять нулю коэффициенты при произведении $[\omega_2\omega_3]$, а вторые — из системы $\mathfrak{S}_2'$, если обратить в нуль коэффициенты при $[\omega_1\omega_2\omega_3]$. Если после исключения $l_{13}, l_{23}, \ldots, l_{s_13}$ останется s_2 независимых уравнений с базисом

$$F_{\beta'}^{(2)}(x^0,\, z^0;\, l_{g1}^0,\, l_{g2}^0,\, l_{g3}) = 0, \qquad (F_2')$$

то ещё s_2 главных l_{g3} будет определено и останется $r_3 = r_2 - s_2$ параметрических, которые и составят произвол элемента $\mathcal{E}_3$, проходящего через $\mathcal{E}_2^0$, и т. д.

При построении $\mathcal{E}_\nu$ коэффициенты при $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{\nu-1}$ в $\tilde{\omega}_g$:

$$\tilde{\omega}_g = l_{g1}^0\omega_1 + l_{g2}^0\omega_2 + \ldots + l_{g,\nu-1}^0\omega_{\nu-1} + l_{g\nu}\omega_\nu, \qquad (5_\nu^*)$$

уже известны, первые $s_1 + s_2 + \ldots + s_{\nu-2}$ из коэффициентов $l_{g\nu}$ определяются из систем (F_1'), (F_2'), ..., $(F_{\nu-2}')$, а на все остальные $l_{g\nu}$ имеем уравнения

$$(F_{\nu-1}) \quad \begin{aligned} &F_\alpha^{(1)}(x^0, z^0; l_{g,\nu-1}^0, l_{g\nu}) = 0, \quad F_\beta^{(2)}(x^0, z^0; l_{g,\nu-2}^0,\, l_{g,\nu-1}^0,\, l_{g\nu}) = 0, \ldots, \\ &F_\zeta^{(\nu-1)}(x^0,\, z^0,\, l_{g1}^0,\, \ldots,\, l_{g,\nu-1}^0,\, l_{g\nu}) = 0. \end{aligned}$$

Только последняя система получена из уравнений $\mathfrak{S}_{\nu-1}'$.

Произвол интегрального элемента $\mathcal{E}_\nu$, проходящего через $\mathcal{E}_{\nu-1}^0$, определяется $r_\nu = r_{\nu-1} - s_{\nu-1}$ параметрами, где $s_{\nu-1}$ — ранг системы $(F_{\nu-1})$.

4. Теорема Кэлера. Если система (6*) допускает нормальное разрешение, т. е. при определении каждого $l_{g\nu}$ параметрические $l_{gi}(i < \nu)$ остаются произвольными, то построенная цепь регулярна, и система — в инволюции.

Эта теорема для систем внешних дифференциальных уравнений доказывается совершенно так же, как и для систем Пфаффа.

Сначала доказывается лемма о возможности нормального разрешения уравнений для главных l_{gi} любого элемента $\mathcal{E}_\nu$, соседнего с последним элементом отрезка регулярной цепи $[\mathcal{E}_\nu^0]$.

Определяя $\mathcal{E}_\nu$ формулами (7)

$$\omega_j = \lambda_{ji}\omega_i, \quad \theta_k = 0, \quad \tilde{\omega}_g = l_{gi}\omega_i,$$

$$i = 1, 2, \ldots, \nu; j = \nu + 1, \nu + 2, \ldots, n; g = 1, 2, \ldots, q; k = 1, 2, \ldots, s_0,$$

и внося эти значения в уравнения $\mathfrak{S}_1'$, $\mathfrak{S}_2'$, $\ldots$, $\mathfrak{S}_{\nu-1}'$, получим систему

$$(8^*) \qquad G_{\nu-1}(x, z; l_{g1}, \ldots, l_{g\nu'}; \lambda) = 0, \qquad \nu' \leqslant \nu,$$

которая переходит в систему (6*) для $\lambda_{ji} = 0$. Система (6*) допускает нормальное разрешение, именно: она эквивалентна системам (F_1'), (F_2'), $\ldots$, $(F_{\nu-1}')$.

Выбирая те уравнения из $\mathfrak{S}_1'$, $\mathfrak{S}_2'$, $\ldots$, которые приводят к этим системам, мы выделим из системы (8*) уравнения (G_1'), (G_2'), $\ldots$, $(G_{\nu-1}')$, которые для $\lambda_{ji} = 0$ переходят в соответствующие уравнения (F). Не равный нулю для $\lambda = 0$ определитель каждой такой системы будет не равен нулю в достаточно малой окрестности этой точки (при достаточно малых λ). Следовательно, системы (G_i') могут быть разрешены относительно главных $l_{g\nu}$.

Если эти решения удовлетворяют всем остальным уравнениям (8*), то лемма доказана, число $N_\nu(\lambda)$ параметрических $l_{g\nu}$ равно числу параметрических $l_{g\nu}$ для $\lambda = 0$, т. е. $N_\nu(\lambda) = N_\nu(0)$. Если подстановка найденных решений в уравнения (8*) даёт уравнения на параметрические l_{gi}, то $N_\nu(\lambda)$ меньше, чем $N_\nu(0)$. Следовательно, во всяком случае

$$(9a^*) \qquad N_\nu(\lambda) \leqslant N_\nu(0).$$

С другой стороны, тот же элемент $\mathcal{E}_\nu$ можно получить из наиболее общего интегрального элемента $\mathcal{E}_n$, который определяется формулами (10)

$$z_l = z_l(x, z), \quad \tilde{\omega}_g = l_{gi}\omega_i, \qquad l = 1, 2, \ldots, s'; \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Здесь z_l получены решением s' конечных уравнений $\mathfrak{S}_0'$, а главные l_{gi} являются результатом последовательного решения систем (φ_n):

$$(\varphi_n) \qquad \begin{gathered} F_{\alpha'}^{(1)}(l_{g1}, l_{g2}) = 0, \quad F_{\beta'}^{(2)}(l_{g1}, l_{g2}, l_{g3}) = 0, \quad \ldots \\ \ldots, \quad F_{\zeta}^{(n-1)}(l_{g1}, \ldots, l_{g,n-1}, l_{gn}) = 0, \end{gathered}$$

полученных из уравнений $\mathfrak{S}_1'$, $\mathfrak{S}_2'$, $\ldots$, $\mathfrak{S}_{n-1}'$. Задаваясь опять формулами

$$\omega_j = \lambda_{ji}\omega_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, \nu; \; j = \nu + 1, \ldots, n,$$

получим для наиболее общего элемента $\mathcal{E}_\nu$ в интегральном элемечте $\mathcal{E}_n$

$$\tilde{\omega}_g = L_{gi}(x, z; l; \lambda)\omega_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, \nu; \; g = 1, 2, \ldots, q.$$

Произвол $\mathcal{E}_\nu$ будет определяться, кроме произвола $r_0 = r - s'$ интегральной точки $\mathcal{E}_0$, рангом $P(\lambda)$ дифференциальной матрицы из производных от L_{gi} по параметрическим z и l_{gi}, а так как ранг матрицы может только понизиться в точке $\lambda = 0$ (ибо всякий определитель, не равный нулю в точке $\lambda = 0$, в силу непрерывности будет отличен от нуля и в её окрестности), то

$$(9b^*) \qquad N_\nu(\lambda) \geqslant N_\nu(0).$$

Противоположного знака неравенства $(9\overset{*}{a}, b)$ могут иметь место только в том случае, если они переходят в равенство, откуда и следует лемма.

Мы не повторяем доказательство самой теоремы, которое следует без всяких изменений.

§ 8. Замечание о применении признака Кэлера

Не следует преувеличивать практическое значение теоремы Кэлера. Критерий Кэлера даёт необходимое и достаточное условие регулярности цепи, построенной на формах базиса $[\omega_i]$, но он не решает вопроса о необходимости продолжения системы.

Если признак Кэлера удовлетворён, то цепь регулярна, система — в инволюции, и произвол интегрального многообразия $\mathfrak{M}_n$ определяется характерами цепи, но если признак не удовлетворён, то мы можем только утверждать, что выбранная нами цепь по формам базиса $[\omega_i]$ — особая. Отсюда вовсе не следует, что после перехода к новому базису $[\overline{\omega}_i]$ мы не получим регулярной цепи, для которой тот же признак даст положительный ответ. Это будет означать только, что прежний базис $[\omega_i]$ соответствовал характеристикам Коши нашей системы. Между тем это обстоятельство, например в приложении к геометрии, вообще весьма вероятно.

Действительно, если избранная нами система отнесения, стало быть и формы ω_i, которые с ней связаны [1]), вполне произвольны, то переход от одной системы отнесения к другой не изменит системы уравнений; получив отрицательный ответ для цепи, построенной на формах базиса $[\omega_i]$, мы прямо можем заключить, что и любая другая цепь, построенная на формах нового базиса $[\overline{\omega}_i]$ — особая. Если всё же необходимый признак удовлетворён, т. е. интегральный элемент $\mathcal{E}_n$ существует, но не достижим регулярной цепью, то систему надо продолжать, и в этом смысле слова вопрос разрешён.

В этом случае, впрочем, и положительное решение вопроса может быть достигнуто без помощи теоремы Кэлера, ибо, поскольку система отнесения, а стало быть, и базис $[\omega_i]$ вполне произвольны, то всё то, что говорится об интегральном элементе $\mathcal{E}_\nu^0$, очевидно, может быть приложено к любому другому $\mathcal{E}_\nu$, полученному произвольным высечением.

---

[1]) См. гл. II, § 1; гл. XIV.

Если же система отнесения специализирована, так что без теоремы Кэлера утверждать регулярность затруднительно, то весьма вероятно, что цепь окажется особой. Действительно, когда система отнесения специализируется, то её, конечно, выбирают хорошо связанной с условиями задачи. Формы ω_i тоже внутренне связаны с проблемой, но именно этим и отличаются характеристики системы.

Между тем отрицательный ответ на вопрос о регулярности цепи заставит нас повторить все выкладки для нового базиса $[\bar{\omega}_i]$. Поэтому целесообразно с самого начала не связывать цепь с формами базиса $[\omega_i]$. Мы увидим, что в этом случае критерий Картана избавляет от необходимости фактически решать системы (φ_n), достаточно определять ранг матрицы коэффициентов каждой отдельной системы (F_ν), $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$.

§ 9. Примеры

1. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_2$ системы

$$\begin{aligned} &dz_1 + x_1du_1 + u_2dx_2 = 0, \\ &dz_2 + u_2dx_1 + x_2du_1 = 0. \end{aligned} \qquad [dx_1dx_2] \neq 0.$$

Определить широту решения.

2. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ системы

$$\begin{aligned} dz_1 + u_1dx_1 + x_3du_1 - x_2du_2 &= 0, \\ dz_2 - u_1dx_2 + u_2dx_3 + x_1du_2 &= 0, \\ dz_3 + u_1dx_1 + u_3dx_3 + x_1du_1 &= 0. \end{aligned} \qquad [dx_1dx_2dx_3] \neq 0.$$

Определить широту решения.

3. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ системы

$$\begin{aligned} dz_1 + u_1dx_1 - x_2du_2 &= 0, \\ dz_2 - u_1dx_2 + x_1du_2 &= 0, \\ dz_3 + u_1dx_1 + u_3dx_3 + x_1du_1 &= 0. \end{aligned} \qquad [dx_1dx_2dx_3] \neq 0.$$

Определить произвол решения.

Решения

Пример 1. Дифференцируя уравнения внешним образом, имеем:

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} [dx_1du_1] - [dx_2du_2] &= 0, \\ [dx_2du_1] - [dx_1du_2] &= 0. \end{aligned}$$

Так как дифференциалы dz_i определены системой Пфаффа, то интегральные элементы определяются заданием для произвольно выбранных dx_i дифференциалов

$$(\beta) \qquad du_g = l_{gi}dx_i, \qquad i, g = 1, 2.$$

Если строить цепь по формам базиса $[dx_i]$, то l_{g1} $(g = 1, 2)$ надо считать вполне произвольными. Эти два параметра определяют произвол интегрального элемента $\mathfrak{E}_1$. Значит $r_1 = 2$.

Для определения $\mathfrak{E}_2$ вносим формулы (β) в уравнения (α) и приравниваем нулю коэффициенты при $[dx_1dx_2]$:

$$\begin{aligned} l_{12} + l_{21} &= 0, \\ l_{22} + l_{11} &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения определяют l_{12}, l_{22}, не нарушая произвола l_{g1}. Следовательно, цепь регулярна, система — в инволюции. Так как все l_{g2} определены, то $r_2 = 0$.

Итак,

$$s = 2, \quad s_1 = r_1 - r_2 = 2, \quad s_2 = r_2 = 0.$$

Интегральное многообразие существует с произволом двух функций одного аргумента. Можно, например, задать значения

$$\begin{aligned} u_g &= \varphi_g(x_1) \ \text{для} \ x_2 = 0, \\ z_j &= C_j \ (C = \text{const.}) \ \text{для} \ x_1 = x_2 = 0. \end{aligned}$$

Пример 2. Дифференцируя внешним образом, имеем:

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} [dx_1du_1] + [dx_2du_2] - [dx_3du_1] &= 0, \\ [dx_1du_2] + [dx_2du_1] - [dx_3du_2] &= 0, \\ [dx_3du_3] &= 0. \end{aligned}$$

Дифференциалы dz_j определяются системой Пфаффа. Интегральные элементы определяются заданием дифференциалов

$$(\beta) \qquad du_g = l_{gi}dx_i, \qquad i, g = 1, 2, 3.$$

a) Строим цепь по формам базиса $[dx_1, dx_2, dx_3]$.

$\mathfrak{E}_1$ $(dx_2 = dx_3 = 0)$ определяется произвольным заданием l_{g1}. Произвол $r_1 = 3$.

Для определения $\mathfrak{E}_2$ $(dx_3 = 0)$ вносим выражения (β) в систему (α), полагая $dx_3 = 0$. Имеем только два уравнения

$$l_{12} - l_{21} = 0, \quad l_{22} - l_{11} = 0,$$

которые определяют l_{12}, l_{22}, не стесняя произвола l_{g1}. Остаётся произвольным l_{32}. Следовательно, $r_2 = 1$.

Для определения $\mathfrak{E}_3$ вносим формулы (β) в уравнения (α). Коэффициенты при $[dx_1dx_2]$ взаимно уничтожаются; коэффициенты при $[dx_1dx_3]$ и $[dx_2dx_3]$ суть:

$$\begin{aligned} [dx_1dx_3]:\quad l_{13} + l_{11} &= 0, & [dx_2dx_3]:\quad l_{23} + l_{12} &= 0, \\ l_{23} + l_{21} &= 0, & l_{13} + l_{22} &= 0, \\ l_{31} &= 0. & l_{32} &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения накладывают ограничения на параметрические l_{31}, l_{32}. Следовательно, цепь — особая, но это ещё не значит, что система — не в инволюции.

b) Строим цепь по формам базиса $[dx_3, dx_1, dx_2]$.

$\mathfrak{E}_1$ $(dx_1 = dx_2 = 0)$ определяется произвольными l_{g3}; $r_1 = 3$.

Для определения $\mathfrak{E}_2$ $(dx_2 = 0)$ вносим выражения (β) в систему (α), полагая $dx_2 = 0$. Имеем

$$(\gamma) \qquad l_{13} + l_{11} = 0, \quad l_{23} + l_{21} = 0, \quad l_{31} = 0,$$

откуда l_{11}, l_{21}, l_{31} определяются без стеснения произвола l_{g3}. Произвол $r_2 = 0$.

Для определения $\mathcal{E}_3$ вносим (β) в уравнения (α) и собираем члены при $[dx_1dx_2]$ и $[dx_2dx_3]$. Имеем уравнения

$$\begin{aligned} [dx_1dx_2]:\quad & l_{13}-l_{21}=0, & [dx_2dx_3]:\quad & l_{23}+l_{12}=0,\\ & l_{22}-l_{11}=0, & & l_{13}+l_{22}=0,\\ & & & l_{32}=0, \end{aligned}$$

которые определяют l_{12}, l_{22}, l_{32} без стеснения произвола l_{g3}, l_{g1}, как это показывают уравнения (γ). Произвол $r_3=0$. Цепь регулярна, система — в инволюции.

Характеры равны:

$$s=3,\ s_1=r_1-r_2=3,\ s_2=r_2-r_3=0,\ s_3=r_3=0.$$

Интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ существует с произволом трёх функций одного аргумента. Можно дать значения

$$\begin{aligned} u_g &= \varphi_g(x_3) && \text{для}\ \ x_1=x_2=0, \\ z_j &= C_j\ \ (C=\text{const.}) && \text{для}\ \ x_1=x_2=x_3=0, \end{aligned} \qquad g, j=1, 2, 3.$$

Пример 3. Цепь по формам базиса $[dx_1, dx_2, dx_3]$ или $[dx_3, dx_1, dx_2]$ и т. д. — особая. Если сделать замену базиса

$$dx_1=dy_1,\ dx_2=dy_2,\ dx_3=dy_1+dy_2+dy_3,$$

то система внешних дифференциалов примет вид

$$\begin{aligned} [du_1dy_1]+[du_2dy_2]&=0,\\ [du_1dy_2]+[du_2dy_1]&=0,\\ [du_3dy_1]+[du_3dy_2]+[du_3dy_3]&=0. \end{aligned}$$

Цепь по формам базиса $[dy_1, dy_2, dy_3]$ будет регулярна, $r_1=3$, $r_2=r_3=0$, система — в инволюции и определяет $\mathfrak{M}_3$ с произволом трёх функций одного аргумента.

Значительно проще воспользоваться критерием Картана.

§ 10. Задача. Трижды сопряжённая система

В конце предыдущей главы (стр. 221) мы привели решение этого вопроса к исследованию системы внешних дифференциальных уравнений

$$(12)\qquad [\omega^i\omega_i^k\omega^k]=0, \qquad i\neq k \text{ фиксированы.}$$

Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$, на котором $[\omega^1\omega^2\omega^3]\neq 0$. Три формы ω^i и шесть форм ω_i^k $(i\neq k=1, 2, 3)$ составляют базис характеристической системы.

Будем строить цепь по элементам базиса $[\omega^i]$; зададимся разложениями

$$(13)\qquad \omega_i^k=l_{ij}^k\omega^j, \qquad j=1, 2, 3.$$

Интегральные элементы $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ вполне произвольны, ибо система не содержит форм ниже третьей степени. Следовательно, все коэффициенты l_{i1}^k, l_{i2}^k — параметрические.

Чтобы построить $\mathcal{E}_3$, надо внести выражения (13) в уравнения (12). Мы получим:

$$l_{ij}^k[\omega^i\omega^j\omega^k]=0, \qquad i\neq k \text{ фиксированы.}$$

Произведения с одинаковыми множителями равны нулю, а поскольку $[\omega^1\omega^2\omega^3]\neq 0$, то

$$l_{ij}^k=0, \qquad i,\ j,\ k \text{ — три различные числа } 1,\ 2,\ 3.$$

Однако эти условия накладывают ограничения на произвол параметрических l_{i1}^k, l_{i2}^k, и цепь—особая, в то время как на стр. 223 мы видели, что все другие способы высечения приводили к регулярной цепи.

§ 11. Критерий Картана[1]

В примерах, которые мы до сих пор рассматривали, мы весьма добросовестно старались разрешить все уравнения, чтобы действительно найти все линейные элементы, которые определяют интегральные элементы цепи.

В этом совершенно нет необходимости. Единственно, что надо установить, это — ранг базиса каждой линейной системы $(F_{\nu-1})$, т. е. ранг матрицы коэффициентов при главных $l_{g\nu}$.

Определим прежде всего размерность многообразия, задаваемого конечными уравнениями системы (S). Пусть в выбранной точке (x_i^0) (неособой для многообразия, т. е. где размерность не больше чем в окрестности) число независимых уравнений равно s', так что число параметрических переменных z_j, через которые все главные z_j выражаются с помощью конечных уравнений, равно $r_0=r-s'$.

Продифференцируем конечные уравнения, присоединим полученные равенства к системе Пфаффа, и пусть ранг системы линейных форм в левых частях всех этих уравнений равен $s'+s_0$, так что произвол интегрального элемента $\mathcal{E}_1$ равен

$$\rho_1=r_0-s_0.$$

Пусть σ_1 есть ранг матрицы коэффициентов при неизвестных l_{g2} в системе линейных уравнений

$$(F_1)\qquad F_\alpha^{(1)}(x,\ z;\ l_{g1},\ l_{g2})=0,$$

если все l_{g1} произвольны. Если решение уравнений базиса (F_1') удовлетворит всем остальным уравнениям системы (F_1), то

$$\rho_2=\rho_1-\sigma_1$$

есть произвол интегрального элемента $\mathcal{E}_2$, проходящего через $\mathcal{E}_1$.

---

[1] Cartan, Sur la structure des groupes infinis de transformations, Ann. de l' Ecole Normale Sup., (3), 21, 1904.

Вообще, пусть $\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_{\nu-1}$ есть ранг матрицы коэффициентов при неизвестных $l_{g\nu}$ в системе линейных уравнений

$$(F_{\nu-1})\qquad \begin{gathered} F_\alpha^{(1)}(x,\,z;\;l_{g1},\,l_{g\nu})=0,\quad F_\beta^{(2)}(x,\,z;\;l_{g2},\,l_{g\nu})=0,\,\ldots\\ \ldots,\;F_\varepsilon^{(\nu-1)}(x,\,z;\;l_{g,\,\nu-1},\,l_{g\nu})=0,\end{gathered}$$

которая получается подстановкой $\tilde{\omega}_g=l_{gi}\,\omega_i$ $(i=1,\,2,\,\ldots,\nu)$ в уравнения $D\,\theta_k=0$. Если система $(F_{\nu-1})$ допускает нормальное разрешение, то

$$\rho_\nu=\rho_{\nu-1}-\sigma_{\nu-1}$$

есть произвол интегрального элемента $\mathcal{E}_\nu$, проходящего через $\mathcal{E}_{\nu-1}$.

Если условия нормального разрешения системы (F_{n-1}) выполнены, то

$$Q=r_0+\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_n \tag{14}$$

определяет произвол всей цепи

$$\mathcal{E}_0\subset\mathcal{E}_1\subset\ldots\subset\mathcal{E}_n.$$

Во всяком случае число Q не может быть меньше числа произвольных параметров N наиболее общего интегрального элемента $\mathcal{E}_n$, т. е. числа параметрических z_j^0 и l_{gi}, получаемых при решении системы (8)

$$G_\alpha(x,\,z;\;l_{gi},\,l_{gn})=0,\qquad i=1,\,2,\,\ldots,\,n-1,$$

в окрестности значений l_{gi}^0, выбранных для построения цепи.

Действительно, систему (G_α) тоже можно разрешать последовательно, выбирая те уравнения, которые составляли базис системы (F_{n-1}):

$$(\varphi_n)\qquad F_{\alpha'}^{(1)}=0,\quad F_{\beta'}^{(2)}=0,\quad\ldots,\quad F_{\zeta'}^{(n-1)}=0.$$

Решения этой системы выразят все l_{gi} через независимые x_i^0, через r_0 параметрических z_j^0 и

$$\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_n$$

параметрических l_{gi}. Если подстановка этих решений в уравнения $G_\alpha=0$ не приведёт к новым условиям на параметрические z^0, l_{gi}, то

$$N=Q,$$

цепь регулярна и система — в инволюции. Все числа ρ_i становятся характеристическими числами r_i, а σ_i — характерами системы и определяют произвол $\mathfrak{M}_n$.

Если же система $G_\alpha=0$ даёт новые соотношения на параметрические z_j^0, l_{gi}, то число произвольных z_j^0, l_{gi} уменьшается,

$$N<Q,$$

система $G_\alpha=0$ не разрешена нормально, цепь — особая и система — не в инволюции.

Определяемое формулой (14) число Q мы будем называть ***числом Картана*** для цепи.

Если система не содержит конечных уравнений и если при этом ввести число q независимых форм $\tilde{\omega}_g$:

$$q=r_0-s_0=r_1,$$

то для числа Картана Q можно дать ещё другую формулу. Именно, имеем:

$$\begin{aligned}&\rho_1=r_1=q,\\&\rho_2=q-\sigma_1,\\&\rho_3=q-\sigma_1-\sigma_2,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\rho_n=q-\sigma_1-\sigma_2-\ldots-\sigma_{n-1},\\\hline &Q=nq-(n-1)\,\sigma_1-(n-2)\,\sigma_2-\ldots-\sigma_{n-1}.\end{aligned}$$

Если же ввести ещё последний характер цепи σ_n посредством формулы

$$q=\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_n,$$

то для числа Картана Q получим более простое выражение:

$$Q=\sigma_1+2\sigma_2+\ldots+n\,\sigma_n.$$

Отсюда следует

Теорема. *Пусть* (S) *есть система уравнений Пфаффа*

$$\theta_1=0,\quad\theta_2=0,\quad\ldots,\quad\theta_s=0.$$

Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_n$, *на котором*

$$[\omega_1\omega_2\ldots\omega_n]\neq 0.$$

Пусть базис характеристической системы, кроме форм ω_i, θ_k, *содержит ещё* q *линейно независимых форм* $\tilde{\omega}_g$; *если при определении каждого элемента* $\mathcal{E}_\nu$ *цепи ранг системы линейных относительно* $l_{g\nu}$ *уравнений*

$$\begin{gathered}F_\alpha^{(1)}(x,\,z;\,l_{g1},\,l_{g\nu})=0,\quad F_\beta^{(2)}(x,\,z,\,l_{g2},\,l_{g\nu})=0,\;\ldots\\ \ldots,\;F_\varepsilon^{(\nu-1)}(x,\,z;\,l_{g,\,\nu-1},\,l_{g\nu})=0,\end{gathered}$$

которые получаются после подстановки

$$\tilde{\omega}_g=l_{gi}\omega_i,\qquad i=1,\,2,\,\ldots,\,\nu,$$

в уравнения $D\,\theta_k=0$ *расширенной системы, равен*

$$s_1+s_2+\ldots+s_{\nu-1},$$

то система (S) — *в инволюции и* s_i — *её характеры, если только число параметрических* l_{gi}, *определяющих наиболее общий интегральный элемент* $\mathcal{E}_n$ *системы, равно числу Картана*

$$Q = nq - (n-1)s_1 - (n-2)s_2 - \ldots - s_{n-1}, \tag{15}$$

или

$$Q = s_1 + 2s_2 + \ldots + ns_n. \tag{15'}$$

§ 12. Распространение критерия Картана на системы внешних дифференциальных уравнений

Доказанная теорема непосредственно распространяется на систему дифференциальных уравнений

$$\Theta_1 = 0, \quad \Theta_2 = 0, \quad \ldots, \quad \Theta_s = 0$$

из внешних форм любого числа измерений.

Пусть ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_n$, на котором

$$[\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n] \neq 0.$$

Присоединяя уравнения $D\Theta_k = 0$, полученные внешним дифференцированием, образуем расширенную систему $(\mathfrak{S})$ и из каждой однородной части её $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_{p+1}$ выделим алгебраически независимые системы уравнений $\mathfrak{S}'_0, \mathfrak{S}'_1, \ldots, \mathfrak{S}'_{p+1}$.

Пусть система $\mathfrak{S}'_1$ состоит из линейных форм $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{s_0}$ и базис характеристической системы, кроме всех форм ω_i, θ_k, содержит ещё q форм $\tilde{\omega}_g$. Каждый элемент $\mathcal{E}_\nu$ цепи

$$\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{E}_n$$

определяется решением системы линейных относительно $l_{g\nu}$ уравнений

$$\begin{gathered} F^{(1)}_{\alpha'}(x, z; l_{gi_1}, l_{g\nu}) = 0, \quad F^{(2)}_{\beta'}(x, z; l_{gi_1}, l_{gi_2}, l_{g\nu}) = 0, \quad \ldots \\ \ldots, \quad F^{(\nu-1)}_{\varepsilon'}(x, z; l_{gi_1}, \ldots, l_{g,i_{\nu-1}}, l_{g\nu}) = 0, \\ i_1, i_2, \ldots, i_{\nu-1} = 1, 2, \ldots, \nu-1, \end{gathered} \tag{φ_ν}$$

которые получаются после подстановки выражений

$$\tilde{\omega}_g = l_{gi}\omega_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, \nu,$$

в уравнения систем $\mathfrak{S}'_1, \mathfrak{S}'_2, \ldots, \mathfrak{S}'_{\nu-1}$, если приравнять нулю коэффициенты при $[\omega_{i_1}\omega_\nu]$, $[\omega_{i_1}\omega_{i_2}\omega_\nu]$, $\ldots$, $[\omega_{i_1}\omega_{i_2}\ldots\omega_{i_{\nu-1}}\omega_\nu]$.

Если ранг системы (φ_ν) (ранг матрицы коэффициентов при $l_{g\nu}$) для каждого $\nu \leqslant n$ равен

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{\nu-1},$$

то такой же подсчёт, как § 11, покажет, что произвол (число N параметрических l_{gi}, где $i = 1, 2, \ldots, n$) наиболее общего интегрального элемента $\mathcal{E}_n$ не может быть больше числа Картана Q, вычисляемого по формуле (15), но может быть меньше, чем Q, если при решении какой-нибудь системы (G_α) параметрические l_{gi} $(i<\nu)$ предыдущих элементов цепи окажутся связанными новыми уравнениями (если ранг расширенной матрицы системы будет больше ранга матрицы коэффициентов при $l_{g\nu}$).

Если

$$Q = N,$$

то при разрешении каждой системы (φ_ν) дополнительных соотношений на предыдущие параметрические l_{gi} $(i<\nu)$ не будет, система всех (φ_ν), где $\nu = 1, 2, \ldots, n$, разрешается нормально, заданная внешняя дифференциальная система (S) — в инволюции и полученные числа $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ — её характеры $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$.

§ 13. Применение критерия Картана

Предыдущая формулировка критерия Картана связывает его с высечением цепи интегральных элементов по формам базиса $[\omega_i]$, между тем, как мы видели, что цепь по формам базиса может быть особой, хотя бы система была в инволюции и допускала регулярную цепь с другим высечением. Поэтому с предписанным высечением признак Картана будет достаточным, но не будет необходимым.

Чтобы освободиться от этого стеснения, заметим, что если цепь высечена по формам базиса $[\omega_i]$, то линейные элементы e_α, из которых слагаются элементы цепи

$$\mathcal{E}_\nu = (e_1, e_2, \ldots, e_\nu),$$

определяются по формулам (5) или (5*) значениями форм

$$\omega_i = \delta^j_i, \quad \theta_k = 0, \quad \tilde{\omega}_g = l_{gj}, \qquad \delta^j_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \tag{e_j}$$

Если изменить произвольно базис $[\omega_i]$ посредством формул

$$\bar{\omega}_{i'} = u^i_{i'}\omega_i, \qquad i, i' = 1, 2, \ldots, n,$$

то тот же линейный элемент e_j будет определяться значениями форм

$$\bar{\omega}_{i'} = u^j_{i'}, \quad \theta_k = 0, \quad \tilde{\omega}_g = l_{gj}, \tag{e_j}$$

где $u^j_{i'}$ следует рассматривать как произвольно заданные числа (неопределённые величины), если мы не хотим себя связывать с определённым способом высечения цепи. Доказательство ведётся так же, как и выше, но поскольку высечение $\omega_i = u^j_i$ — произвольно, то результат не зависит от теоремы Кэлера и даёт одновременно необходимое и достаточное условие системы в инволюции.

Если задана система Пфаффа $\theta_k = 0$, то уравнения, определяющие $l_{g\nu}$ какого-нибудь элемента цепи $\mathcal{E}_\nu$, получатся, если написать значения ковариантов $D\theta_k = 0$ (билинейные формы) для каждой пары линейных элементов (e_1, e_ν), (e_2, e_ν), ..., $(e_{\nu-1}, e_\nu)$:

$$(\varphi_\nu)\quad \begin{gathered} F^{(1)}_{\alpha'}(x, z; l_{g1}, l_{g\nu}; \overset{1}{u}_i, \overset{\nu}{u}_i) = 0, \quad F^{(2)}_{\beta'}(x, z; l_{g2}, l_{g\nu}; \overset{2}{u}_i, \overset{\nu}{u}_i) = 0, \ \ldots \\ \ldots, \quad F^{(\nu-1)}_{\varepsilon'}(x, z; l_{g,\nu-1}, l_{g\nu}; \overset{\nu-1}{u_i}, \overset{\nu}{u}_i) = 0. \end{gathered}$$

Если дана система внешних дифференциальных уравнений $\Theta_k = 0$, то те же уравнения для $l_{g\nu}$ получаются, если написать значения всех форм из систем $\mathfrak{S}'_2, \mathfrak{S}'_3, \ldots, \mathfrak{S}'_\nu$ (присоединённых билинейных, трилинейных и т. д. форм) для всех сочетаний из $\nu-1$ линейных элементов $e_i\,(i<\nu)$ с линейным элементом e_ν:

$$(\psi_\nu)\quad \begin{aligned} &F^{(1)}_{\alpha'}(x, z; l_{gi_1}, l_{g\nu}; \overset{i_1}{u_i}, \overset{\nu}{u}_i) = 0, \\ &F^{(2)}_{\beta'}(x, z; l_{gi_1}, l_{gi_2}, l_{g\nu}; \overset{i_1}{u_i}, \overset{i_2}{u_i}, \overset{\nu}{u}_i) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F^{(\nu-1)}_{\varepsilon'}(x, z; l_{gi_1}, \ldots, l_{gi_{\nu-1}}, l_{gi_\nu}; \overset{i_1}{u_i}, \ldots, \overset{i_\nu-1}{u_i}, \overset{\nu}{u}_i) = 0. \end{aligned}$$

Если для каждого $\nu \leqslant n$ ранг системы (φ_ν) или (ψ_ν) будет равен

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_{\nu-1}$$

и число Картана

$$Q = nq - (n-1)s_1 - (n-2)s_2 - \ldots - s_{n-1} = s_1 + 2s_2 + \ldots + ns_n,$$
$$q = s_1 + s_2 + \ldots + s_n,$$

равно произволу (числу N всех параметрических l_{gi}, где $i = 1, 2, \ldots, n$) *наиболее общего интегрального элемента $\mathcal{E}_n$, то цепь регулярна, система — в инволюции, и $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ — её характеры. Если $Q > N$ для произвольных $\overset{j}{u}_i$, то система — не в инволюции.*

При этом, определяя ранг системы (φ_ν) или (ψ_ν), надо рассматривать все $\overset{j}{u}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j \leqslant \nu)$ как вполне произвольные величины, не связанные никакими условиями в форме равенств (неравенства $f(\overset{1}{u}, \overset{2}{u}_i, \ldots) \neq 0$ допускаются и исключают из рассмотрения отдельные линейные элементы — характеристики); параметрические l_{gi} $(i < \nu)$ вполне произвольны (неравенства $f \neq 0$ допускаются), главные l_{gi} связаны уравнениями предыдущих систем (φ_i) или (ψ_i).

Если система ковариантов — правильная, т. е. каждый член уравнения замкнутой системы $\Theta = 0$, $D\Theta_k = 0$ содержит формы $\tilde{\omega}_g$ не выше первой степени, то матрица коэффициентов при $\tilde{\omega}_g = l_{g\nu}$ в полярной системе интегрального элемента $\mathcal{E}_{\nu-1}$ будет содержать только вполне произвольные значения форм $\omega_i = \overset{j}{u}_i$.

Если уравнения замкнутой системы содержат $\tilde{\omega}_g$ выше первой степени, то полярная матрица будет содержать величины l_{gi} параметрические и главные; при этом только параметрические l_{gi} произвольны, а главные от них зависят.

Чтобы правильно подсчитать ранг матрицы, надо предварительно найти наиболее общий интегральный элемент $\mathcal{E}_n$:

$$\tilde{\omega}_g = l_{gi}\omega_i, \qquad i = 1, \ 2, \ldots, n,$$

выразив все l_{gi} функциями от N произвольных параметров $t_1, t_2, \ldots, t_N$. Поскольку уравнения для l_{gi} теперь выше первой степени, таких решений может быть несколько. Для каждого решения характеры системы подсчитываются отдельно, причём в коэффициенты полярной системы для каждого линейного элемента e_j вносятся значения форм

$$\omega_i = \overset{j}{u}_i, \quad \tilde{\omega}_g = f_{gi}(t_1, t_2, \ldots, t_N)\,\overset{j}{u}_i$$

и при подсчёте ранга полярной матрицы все $\overset{j}{u}_i$ и t_α считаются вполне произвольными.

§ 14. Примеры. Системы уравнений Пфаффа

1. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ системы

$$\begin{gathered} dz_1 + x_1du_2 - 2x_2x_1dx_1 + u_1dx_2 = 0, \\ dz_2 - x_3du_3 + x_1x_2dx_8 = 0. \end{gathered} \qquad [dx_1\,dx_2\,dx_3] \neq 0.$$

Определить широту решения.

2. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ системы

$$\begin{aligned} dz_1 &= x_1du_1 - u_2\,dx_2, \\ dz_2 &= x_2\,du_2 + x_8\,du_3, \\ dz_3 &= -u_3\,dx_3 + x_1\,du_1. \end{aligned} \qquad [dx_1\,dx_2\,dx_3] \neq 0.$$

Определить широту решения.

3. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ системы Пфаффа $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_8 = 0$, на котором $[\omega_1\omega_2\omega_3] \neq 0$. Определить широту решения, если система внешних диффереициалов имеет вид

$$\begin{gathered} [\Omega_1\omega_1] = 0, \quad [\Omega_3\omega_1] + [\Omega_4\omega_2] + [\Omega_5\omega_3] = 0, \\ [\Omega_2\omega_2] = 0, \quad [\Omega_3\omega_3] - [\Omega_4\omega_2] + [\Omega_5\omega_1] = 0. \end{gathered}$$

Все формы Ω_i линейно независимы.

4. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_2$ системы Пфаффа $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_8 = 0$, на котором $[\omega_1\omega_2] \neq 0$. Определить широту решения, если система внешних дифференциалов имеет вид

$$\begin{gathered} [\tilde{\omega}_1\omega_1] + [\tilde{\omega}_2\omega_2] = 0, \\ [\tilde{\omega}_1\omega_2] - [\tilde{\omega}_2\omega_1] = 0. \end{gathered}$$

Формы $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$ линейно независимы.

5. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ системы Пфаффа $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_s = 0$, на котором $[\omega_1\omega_2\omega_3] \neq 0$. Определить, будет ли система в инволюции, если система ковариантов (внешних дифференциалов) имеет вид

$$\begin{gathered}[\omega_{12}\omega_1] + [\omega_{23}\omega_3] = 0,\\ [\omega_{23}\omega_2] + [\omega_{31}\omega_1] = 0,\\ [\omega_{31}\omega_3] + [\omega_{12}\omega_2] = 0.\end{gathered}$$

Формы ω_{12}, ω_{23}, ω_{31} линейно независимы.

6. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ системы Пфаффа $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_s = 0$, на котором $[\omega_1\omega_2\omega_3] \neq 0$. Определить, будет ли система в инволюции, если система ковариантов имеет вид

$$\begin{gathered}[\tilde\omega_1\omega_1] + [\tilde\omega_2\omega_2] = 0,\\ [\tilde\omega_2\omega_2] + [\tilde\omega_3\omega_3] = 0.\end{gathered}$$

Формы $\tilde\omega_1$, $\tilde\omega_2$, $\tilde\omega_3$ линейно независимы.

7. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ системы Пфаффа $\theta_k = 0$, на котором $[\omega_1\omega_2\omega_3] \neq 0$. Определить, будет ли система в инволюции, если система ковариантов имеет вид

$$[\tilde\omega_1\omega_2] - [\tilde\omega_2\omega_1] = 0, \quad [\tilde\omega_3\omega_3] = 0, \quad [\tilde\omega_3\omega_1] - [\tilde\omega_2\omega_3] = 0.$$

Формы $\tilde\omega_1$, $\tilde\omega_2$, $\tilde\omega_3$ линейно независимы.

Решения

Пример 1. Дифференцируя заданные уравнения внешним образом, имеем

$$\begin{gathered}[dx_1\, du_2] + 2x_1\, [dx_1\, dx_2] - [dx_2\, du_1] = 0,\\ -[dx_3\, du_3] + [d(x_1x_2)\, dx_3] = 0\end{gathered}$$

или, полагая

$$\tilde\omega_1 = du_1 + x_1\, dx_1, \quad \tilde\omega_2 = du_2 + x_1\, dx_2, \quad \tilde\omega_3 = du_3 + d(x_1x_2),$$

имеем:

$$[dx_1\tilde\omega_2] - [dx_2\tilde\omega_1] = 0, \quad [dx_3\tilde\omega_3] = 0. \tag{α}$$

Здесь число независимых форм $\tilde\omega_g$ равно $q = 3$; число независимых переменных $n = 3$; число независимых квадратичных уравнений, очевидно, $s_1 = 2$, а так как

$$q = s_1 + s_2 + s_3,$$

то, следовательно,

$$s_1 = 2, \quad s_2 = 1, \quad s_3 = 0,$$

ибо при невозрастающих характерах, если $s_2 = 0$, то и $s_3 = 0$, а тогда имели бы $s_1 + s_2 + s_3 = 2$; итак,

$$Q = s_1 + 2s_2 + 3s_3 = 4.$$

С другой стороны, разрешая систему (α) по лемме Картана, имеем:

$$\begin{aligned}\tilde\omega_2 &= a\, dx_1 + b\, dx_2,\\ \tilde\omega_1 &= -b\, dx_1 + c\, dx_2,\end{aligned} \qquad \tilde\omega_3 = f\, dx_3.$$

Следовательно, наиболее общий интегральный элемент $\mathcal{E}_3$ зависит от четырёх параметров a, b, c, f, т. е.

$$N = 4.$$

Так как $Q = N$, то система — в инволюции. Интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ зависит от одной функции двух аргументов.

Пример 2. Дифференцируем внешним образом заданную систему:

$$\begin{gathered}[dx_1\, du_1] + [dx_2\, du_2] = 0,\\ [dx_2\, du_2] + [dx_3\, du_3] = 0,\\ [dx_3\, du_3] + [dx_1\, du_1] = 0.\end{gathered}$$

Система ковариантов содержит $q = 3$ независимые формы du_i. Число независимых квадратичных уравнений $s_1 = 3$; следовательно, $s_2 = q - s_1 = 0$ и число Картана

$$Q = s_1 + 2s_2 + 3s_3 = 3.$$

Разрешая квадратичные уравнения с помощью леммы Картана, видим из первого, что дифференциал du_2 не зависит от dx_3, а из второго, что он не зависит и от dx_1. Аналогично для du_1 и du_3. Следовательно,

$$du_1 = \alpha\, dx_1, \quad du_2 = \beta\, dx_2, \quad du_3 = \gamma\, dx_3$$

и $N = 3$, система — в инволюции. Интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ зависит от трёх функций одного аргумента.

Пример 3. Система ковариантов содержит $q = 5$ независимых форм Ω_i; число независимых квадратичных уравнений $s_1 = 4$; следовательно, $s_2 = q - s_1 = 1$.

С другой стороны, по лемме Картана из первых трёх уравнений имеем:

$$\begin{aligned}&\Omega_1 = \alpha\omega_1, \quad \Omega_2 = \beta\omega_2,\\ &\Omega_3 = a_{11}\,\omega_1 + a_{12}\,\omega_2 + a_{13}\,\omega_3,\\ &\Omega_4 = a_{21}\,\omega_1 + a_{22}\,\omega_2 + a_{23}\,\omega_3,\\ &\Omega_5 = a_{31}\,\omega_1 + a_{32}\,\omega_2 + a_{33}\,\omega_3.\end{aligned} \qquad a_{ik} = a_{ki}.$$

Внося эти значения в последнее уравнение, получим два независимых соотношения;

$$a_{11} - a_{33} = 0, \quad a_{12} + a_{23} = 0.$$

Следовательно, $N = 6$; система — в инволюции, интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ зависит от одной функции двух аргументов.

Пример 4. Сохраняя предыдущие обозначения, имеем:

$$n = 2, \quad q = 2, \quad s_1 = 2, \quad s_2 = 0, \quad Q = 2.$$

Разрешая по лемме Картана квадратичные уравнения, получим:

$$\begin{aligned}\tilde\omega_1 &= \alpha\omega_1 + \beta\omega_2,\\ \tilde\omega_2 &= \beta\omega_1 - \alpha\omega_2.\end{aligned}$$

Следовательно, $N = 2$, система — в инволюции; произвол — две функции одного аргумента.

Пример 5. Сохраняя обозначения, имеем:

$$n = 3, \quad q = 3, \quad s_1 = 3, \quad s_2 = s_3 = 0, \quad Q = 3.$$

Наиболее общее решение квадратичных уравнений:

$$\omega_{12} = \alpha\omega_3, \quad \omega_{23} = \alpha\omega_1, \quad \omega_{31} = \alpha\omega_2.$$

Следовательно, $N = 1$; система — не в инволюции.

Пример 6. Сохраняя обозначения, имеем:

$$n = 3, \quad q = 3, \quad s_1 = 2, \quad s_2 = 1, \quad s_3 = 0, \quad Q = 4$$

Наиболее общее решение системы ковариантов:

$$\tilde{\omega}_1 = \alpha\omega_1, \ \tilde{\omega}_2 = \beta\omega_2, \ \tilde{\omega}_3 = \gamma\omega_3.$$

Следовательно, $N = 3$; система — не в инволюции.

Пример 7. Сохраняя те же обозначения, имеем:

$$n = 3, \ q = 3, \ s_1 = 3, \ s_2 = s_3 = 0, \ Q = 3.$$

Наиболее общее решение системы ковариантов:

$$\tilde{\omega}_1 = \alpha\omega_2, \ \tilde{\omega}_2 = \beta\omega_1, \ \tilde{\omega}_3 = -\beta\omega_3.$$

Следовательно, $N = 2$; система — не в инволюции.

§ 15. Примеры. Системы внешних дифференциальных уравнений

1. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ системы

$$[du - w\,dz, \ dx] + [dv + 2dz, \ dy] = 0,$$

на котором $[dx\,dy\,dz] \neq 0$. Определить широту решения.

2. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ системы

$$[z\,du + dx, \ dy] + [w\,dy - dv, \ dx] = 0,$$

на котором $[dx\,dy\,dz] \neq 0$. Определить широту решения.

3. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ системы

$$dt + u\,dy + y\,du - z\,d\rho = 0,$$
$$[du\,dx] + x\,[dv\,dy] + [dw\,dz] = 0,$$
$$x\,[dv\,dy\,dz] + [du\,dx\,dz] = 0,$$

на котором $[dx\,dy\,dz] \neq 0$. Определить широту решения.

Исследовать, будут ли системы внешних уравнений в инволюции, если их расширенные системы $(\mathfrak{S})$ определяются нижеследующими уравнениями и в кольце $\mathfrak{R}\,[dx, \ dz]$ все формы независимы:

4. $[\tilde{\omega}_1\ \omega_2] + [\tilde{\omega}_2\ \omega_1] + [\tilde{\omega}_3\ \omega_3] = 0,$
$[\tilde{\omega}_1\ \omega_1] + [\tilde{\omega}_2\ \omega_2] + [\tilde{\omega}_3\ \omega_3] = 0,$ $\qquad [\omega_1\ \omega_2\ \omega_3] \neq 0.$
$[\tilde{\omega}_1\ \omega_2\ \omega_3] + [\tilde{\omega}_2\ \omega_1\ \omega_3] = 0.$

5. $[\tilde{\omega}_1\ \omega_1] + [\tilde{\omega}_2\ \omega_2] + 2\,[\tilde{\omega}_3\ \omega_3] = 0,$ $\qquad [\omega_1\ \omega_2\ \omega_3] \neq 0.$
$[\tilde{\omega}_1\ \omega_2\ \omega_3] = [\tilde{\omega}_2\ \omega_3\ \omega_1] = [\tilde{\omega}_3\ \omega_1\ \omega_2].$

6. $[\tilde{\omega}_1\ \omega_2\ \omega_3] + [\tilde{\omega}_2\ \omega_3\ \omega_1] + [\tilde{\omega}_3\ \omega_1\ \omega_2] = 0,$ $\qquad [\omega_1\ \omega_2\ \omega_3] \neq 0.$
$[\tilde{\omega}_1\ \omega_1] + [\tilde{\omega}_2\ \omega_2] + [\tilde{\omega}_3\ \omega_3] = 0.$

7. $[\tilde{\omega}_1\ \omega_1] + [\tilde{\omega}_2\ \omega_2] + [\tilde{\omega}_3\ \omega_4] + [\tilde{\omega}_4\ \omega_3] = 0,$
$[\tilde{\omega}_1\ \omega_2] + [\tilde{\omega}_2\ \omega_1] + [\tilde{\omega}_3\ \omega_3] + [\tilde{\omega}_4\ \omega_4] = 0,$ $\qquad [\omega_1\ \omega_2\ \omega_3\ \omega_4] \neq 0.$
$[\tilde{\omega}_1\ \omega_2\ \omega_3] + [\tilde{\omega}_2\ \omega_1\ \omega_3] - [\tilde{\omega}_4\ \omega_3\ \omega_4] = 0.$

8. $[\tilde{\omega}_1\ \omega_1] + [\tilde{\omega}_2\ \omega_2] = 0,$
$[\tilde{\omega}_3\ \omega_3] + [\tilde{\omega}_4\ \omega_4] = 0,$ $\qquad [\omega_1\ \omega_2\ \omega_3\ \omega_4] \neq 0$
$[\tilde{\omega}_1\ \omega_1\ \omega_3] + [\tilde{\omega}_3\ \omega_2\ \omega_4] = 0.$

Решения

Пример 1. Дифференцируя внешним образом заданное уравнение, имеем:

$$[dw\ dx\ dz] = 0.$$

Расширенная система $(\mathfrak{S})$ состоит из двух уравнений. Уравнений Пфаффа нет, $s_0 = 0$. Характеристическая система содержит 6 форм: dx, dy, dz, du, dv, dw, причём на $\mathfrak{M}_3$ остаются независимыми $n = 3$. Значит $q = 3$. $\mathfrak{E}_1$ вполне произволен, $r_1 = q = 3$. $\mathfrak{E}_2$ определяется квадратичным уравнением, $s_1 = 1$. $\mathfrak{E}_3$ определяется и квадратичным и кубичным уравнениями, причём они независимы, ибо dw содержится только во втором, $s_2 = 2$. Значит, $s_3 = q - s_1 - s_2 = 0$,

$$Q = s_1 + 2s_2 + 3s_3 = 5.$$

Наиболее общий интегральный элемент $\mathfrak{E}_3$ определяется формулами

$$du - w\,dz = \alpha\,dx + \beta\,dy,$$
$$dv + 2dz = \beta\,dx + \gamma\,dy,$$
$$dw = a\,dx + c\,dz.$$

Следовательно, $N = 5$; система — в инволюции; произвол решения — две функции от двух аргументов.

Пример 2. Внешнее дифференцирование даёт:

$$[du\ dy\ dz] - [dw\ dx\ dy] = 0.$$

Следовательно, система $(\mathfrak{S})$ содержит два уравнения, распадаясь на $\mathfrak{S}_2$ и $\mathfrak{S}_3$. Характеристическая система содержит 6 форм: dx, dy, dz, du, dv, dw, из которых первые $n = 3$ остаются независимыми на $\mathfrak{M}_3$. Так как уравнений Пфаффа нет, то остальные $q = 3$ формы определяют произвол элемента $\mathfrak{E}_1$. Второй элемент $\mathfrak{E}_2$ определяется квадратичными уравнениями $\mathfrak{S}_2$; следовательно, $s_1 = 1$. Третий элемент цепи $\mathfrak{E}_3$ определяется уравнениями $\mathfrak{S}_2$ и $\mathfrak{S}_3$. Эти уравнения независимы, ибо последнее содержит dw, которого нет в первом. Следовательно, $s_2 = 2$, а так как $s_1 + s_2 + s_3 = q$, то $s_3 = 0$, $Q = s_1 + 2s_2 + 3s_3 = 5$.

Наиболее общий элемент $\mathfrak{E}_3$ определяется уравнениями

$$z\,du = (\beta - 1)\,dx + \alpha\,dy,$$
$$dv = \gamma\,dx + (w - \beta)\,dy,$$
$$z\,dw = a\,dx + b\,dy + (\beta - 1)\,dz$$

с пятью параметрами α, β, γ, a, b. Значит, $N = 5$; система — в инволюции; произвол решения — две функции от двух аргументов.

Пример 3. Дифференцируем внешним образом первое и второе уравнения:

$$[d\rho\ dz] = 0, \quad [dv\ dx\ dy] = 0.$$

Система $(\mathfrak{S})$ содержит одно уравнение Пфаффа, два квадратичных и два третьего измерения. Характеристическая система содержит 8 форм: dt, du, dv, dw, $d\rho$, dx, dy, dz, из которых $n = 3$ последних остаются независимыми на $\mathfrak{M}_3$; так как $s_0 = 1$, то $q = 4$. Два квадратичных уравнения независимы: одно содержит dw, другое $d\rho$. Ранг полярной системы элемента $\mathfrak{E}_2$ равен 4. Следовательно,

$$s_1 = 2, \ s_2 = 2, \ s_3 = 0, \ Q = s_1 + 2s_2 + 3s_3 = 6.$$

Наиболее общий элемент $\mathfrak{E}_3$ определяется, кроме уравнения Пфаффа, формулами

$$\begin{aligned} du &= \alpha dx + \beta dy + \gamma dz, \\ x\,dv &= \beta dx + a dy, \\ dw &= \gamma dx + b dz, \\ d\rho &= c\,dz. \end{aligned}$$

Следовательно, $N=6$, и система — в инволюции, произвол решения — две функции от двух аргументов.

Пример 4. В принятых обозначениях

$$n=3,\ q=3,\ s_1=2,\ s_2=1,\ Q=4.$$

Наиболее общий элемент $\mathfrak{E}_3$ определяется формулами

$$\begin{aligned} \tilde\omega_1 &= a\omega_1 + \alpha\omega_2 + \beta\omega_3, \\ \tilde\omega_2 &= \alpha\omega_1 + a\omega_2 + \beta\omega_3, \\ \tilde\omega_3 &= \beta\omega_1 + \beta\omega_2 + b\omega_3. \end{aligned}$$

Следовательно, $N=4$, и система — в инволюции. Произвол решения — одна функция двух аргументов.

Пример 5. В принятых обозначениях

$$n=3,\ q=3,\ s_1=1,\ s_2=2,\ Q=5.$$

Наиболее общий элемент $\mathfrak{E}_3$ определяется формулами

$$\begin{aligned} \tilde\omega_1 &= a\omega_1 + \alpha\omega_2 + \beta\omega_3, \\ \tilde\omega_2 &= \alpha\omega_1 + a\omega_2 + \gamma\omega_3, \\ 2\tilde\omega_3 &= \beta\omega_1 + \gamma\omega_2 + 2a\omega_3. \end{aligned}$$

Следовательно, $N=4$. Система — не в инволюции.

Пример 6. В принятых обозначениях

$$n=3,\ q=3,\ s_1=1,\ s_2=2,\ Q=5.$$

Наиболее общий элемент $\mathfrak{E}_3$ определяется формулами

$$\begin{aligned} \tilde\omega_1 &= a\omega_1 + \alpha\omega_2 + \beta\omega_3, \\ \tilde\omega_2 &= \alpha\omega_1 + b\omega_2 + \gamma\omega_3, \\ \tilde\omega_3 &= \beta\omega_1 + \gamma\omega_2 - (a+b)\,\omega_3. \end{aligned}$$

Следовательно, $N=5$, и система — в инволюции. Произвол решения — две функции от двух аргументов.

Пример 7. В принятых обозначениях

$$n=4,\ q=4,\ s_1=2,\ s_2=2,\ s_3=s_4=0,\ Q=6.$$

Наиболее общий элемент $\mathfrak{E}_4$:

$$\begin{aligned} \tilde\omega_1 &= a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3 + e\omega_4, \\ \tilde\omega_2 &= b\omega_1 + a\omega_2 + e\omega_3 + c\omega_4, \\ \tilde\omega_3 &= e\omega_1 + c\omega_2 + g\omega_3 + h\omega_4, \\ \tilde\omega_4 &= c\omega_1 + e\omega_2 + h\omega_3 + g\omega_4. \end{aligned}$$

Следовательно, $N=6$, система — в инволюции. Произвол решения — две функции от двух аргументов.

Пример 8. В принятых обозначениях

$$n=4,\ q=4,\ s_1=2,\ s_2=2,\ s_3=s_4=0,\ Q=6.$$

Наиболее общий элемент $\mathfrak{E}_4$:

$$\tilde\omega_1 = a\omega_1,\ \tilde\omega_2 = c\omega_2,\ \tilde\omega_3 = g\omega_4,\ \tilde\omega_4 = g\omega_3 + h\omega_4.$$

Следовательно, $N=4$, и система — не в инволюции.

§ 16. Задача. Изгибание поверхности с сохранением главных радиусов кривизны

Пусть S и $\bar S$ — пара налагающихся поверхностей, A и $\bar A$ — пара соответствующих точек их. Перенесём поверхность $\bar S$ так, чтобы точка $\bar A$ совпала с точкой A, касательные плоскости в этих точках тоже совпали и каждая касательная в точке $\bar A$ к поверхности $\bar S$ совпала с соответствующей ей касательной поверхности S в точке A. По условию главные радиусы кривизны поверхностей S и $\bar S$ в каждой паре соответствующих точек A и $\bar A$ равны друг другу. Поскольку нормали в точках $A \equiv \bar A$ совпали, возможны два случая: или главные центры кривизны поверхности $\bar S$ совпадут с главными центрами кривизны поверхности S в этой точке, или они расположатся на общей нормали симметрично относительно касательной плоскости. При этом, если одна пара центров совпадёт, то совпадёт и другая, ибо по теореме Гаусса произведение главных радиусов кривизны при изгибании поверхности остаётся инвариантным, и сохранение знака одного главного радиуса влечёт за собой сохранение знака и другим. Замена поверхности $\bar S$ на симметричную относительно общей касательной плоскости приведёт второй случай к первому, ибо если главные центры после перенесения поверхности $\bar S$ совпадут в одной паре точек A, $\bar A$, то они будут совпадать после соответствующего перенесения и в каждой другой паре в силу непрерывности главных радиусов кривизны.

Присоединим к поверхности S в каждой её точке A один из прямоугольных трёхгранников T, у которого третья ось совпадает с нормалью к поверхности, а две первые лежат в касательной плоскости. Пусть его перемещения определяются формулами

$$\begin{aligned} dA &= \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2, \\ dI_k &= \omega_{ki} I_i, \end{aligned} \qquad \omega_{ik} = -\omega_{ki},\ i, k = 1, 2, 3.$$

Обозначим через $\bar T$ такой же трёхгранник, присоединённый к поверхности $\bar S$ в каждой её точке $\bar A$ и выбранный так, чтобы после описанного выше перенесения поверхности $\bar S$, когда точки $\bar A$ и A и касательные плоскости в этих точках совпадают, трёхгранник $\overline{T}$ совпадал бы с трёхгранником T поверхности S. Пусть бесконечно малые перемещения его определяются формулами

$$d\overline{A} = \overline{\omega}_1 \overline{I}_1 + \overline{\omega}_2 \overline{I}_2, \qquad \overline{\omega}_{ik} = -\overline{\omega}_{ki}, \ i, k = 1, 2, 3.$$
$$d\overline{I}_k = \overline{\omega}_{ki} \overline{I}_i$$

Так как линейные элементы

$$ds^2 = dA^2 = (\omega_1 I_1 + \omega_2 I_2)^2 = (\omega_1)^2 + (\omega_2)^2,$$
$$d\overline{S}^2 = d\overline{A}^2 = (\overline{\omega}_1)^2 + (\overline{\omega}_2)^2$$

совпадают, а линия $\omega_i = 0$ соответствует линии $\overline{\omega}_i = 0$ на поверхности $\overline{S}$, то обе формы $\overline{\omega}_i$ должны быть равны формам ω_i:

$$\overline{\omega}_1 = \omega_1, \quad \overline{\omega}_2 = \omega_2.$$

Дифференцируя внешним образом и пользуясь уравнениями структуры, получим

$$[\overline{\omega}_{12} \overline{\omega}_2] = [\omega_{12} \omega_2],$$
$$[\overline{\omega}_{21} \overline{\omega}_1] = [\omega_{21} \omega_1]$$

или в силу предыдущих равенств:

$$[\overline{\omega}_{12} - \omega_{12}, \omega_1] = 0, \quad [\overline{\omega}_{12} - \omega_{12}, \omega_2] = 0.$$

Следовательно,

$$\overline{\omega}_{12} = \omega_{12}.$$

Дифференцируя внешним образом уравнение

$$\omega_3 = 0,$$

имеем:

$$[\omega_{13} \omega_1] + [\omega_{23} \omega_2] = 0.$$

Следовательно, развёртывая это квадратичное уравнение с помощью леммы Картана, получим:

$$\omega_{13} = a\omega_1 + b\omega_2,$$
$$\omega_{23} = b\omega_1 + c\omega_2.$$

Отсюда нормальная кривизна $\frac{1}{R}$ равна

$$-\frac{1}{R} = \frac{-dA \cdot dI_3}{ds^2} = \frac{\omega_1 \omega_{13} + \omega_2 \omega_{23}}{(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2} = \frac{a(\omega_1)^2 + 2b\omega_1\omega_2 + c(\omega_2)^2}{(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2},$$

или

$$R\{a(\omega_1)^2 + 2b\omega_1\omega_2 + c(\omega_2)^2\} + (\omega_1)^2 + (\omega_2)^2 = 0.$$

Меняя ω_1 или ω_2, мы будем получать радиусы нормальной кривизны различных кривых в данной точке A поверхности S. Главные радиусы кривизны соответствуют экстремальным значениям этой функции, т. е. обращению в нуль производных $\frac{\partial R}{\partial \omega_1}$ или $\frac{\partial R}{\partial \omega_2}$. Дифференцируя последнее уравнение по ω_1 при постоянном ω_2 или наоборот и полагая производную от R равной нулю, мы получим два уравнения:

$$R(a\omega_1 + b\omega_2) + \omega_1 = 0,$$
$$R(b\omega_1 + c\omega_2) + \omega_2 = 0,$$

откуда, исключая ω_1, ω_2, имеем для главных кривизн уравнение

$$\begin{vmatrix} a + \frac{1}{R} & b \\ b & c + \frac{1}{R} \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\frac{1}{R^2} + \frac{a + c}{R} + ac - b^2 = 0.$$

Так как произведение главных радиусов кривизны (гауссова кривизна поверхности) при изгибании всегда сохраняется, то достаточно потребовать сохранения средней кривизны

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -(a + c).$$

Этого можно достигнуть проще всего, если заметить, что квадратичная форма

$$[\omega_1 \omega_{23}] - [\omega_2 \omega_{13}] = (a + c)[\omega_1 \omega_2]$$

при нашем изгибании должна сохранять своё значение.

Таким образом все уравнения нашей проблемы напишутся в виде

$$\omega_3 = 0, \quad \overline{\omega}_3 = 0,$$
$$(16) \qquad \overline{\omega}_1 - \omega_1 = 0, \quad \overline{\omega}_2 - \omega_2 = 0, \quad \overline{\omega}_{12} - \omega_{12} = 0,$$
$$[\omega_1, \overline{\omega}_{23} - \omega_{23}] - [\omega_2, \overline{\omega}_{13} - \omega_{13}] = 0.$$

Дифференцируя внешним образом уравнения Пфаффа, мы дополним нашу систему уравнениями

$$[\omega_1 \omega_{13}] + [\omega_2 \omega_{23}] = 0,$$
$$(17) \qquad [\omega_1 \overline{\omega}_{13}] + [\omega_2 \overline{\omega}_{23}] = 0,$$
$$[\overline{\omega}_{13} \overline{\omega}_{23}] - [\omega_{13} \omega_{23}] = 0.$$

Последнее (квадратичное) уравнение (16) не дифференцируем, ибо мы ищем интегральное многообразие $\mathfrak{M}_2$ двух измерений.

На интегральном многообразии $\mathfrak{M}_2$ формы ω_1, ω_2 должны оставаться независимыми. Кроме них система уравнений (16), (17) содержит ещё пять форм, стоящих в левых частях линейных уравнений системы (16), и четыре: ω_{13}, ω_{23}, $\overline{\omega}_{13}$, $\overline{\omega}_{23}$, содержатся в квадратичных уравнениях. Конечных уравнений система не содержит.

Интегральный элемент $\mathcal{E}_1$ зависит от $r_1 = 4$ параметров, именно: значений форм ω_{13}, ω_{23}, $\bar{\omega}_{13}$, $\bar{\omega}_{23}$ в выбранной точке $\mathcal{E}_0$, ибо линейные формы (16), конечно, равны нулю.

Обозначая значения форм ω для первого и второго линейных элементов $\mathcal{E}_2$ буквами u и v, получим из квадратичных уравнений (16), (17) следующие четыре уравнения для определения v_{13}, v_{23}, $\bar{v}_{13}$, $\bar{v}_{23}$:

$$\begin{aligned} u_2 v_{13} - u_1 v_{23} - u_2 \bar{v}_{13} + u_1 \bar{v}_{23} &= \dots, \\ u_1 v_{13} + u_2 v_{23} &= \dots, \\ u_1 \bar{v}_{13} + u_2 \bar{v}_{23} &= \dots, \\ u_{23} v_{13} - u_{13} v_{23} - \bar{u}_{23} \bar{v}_{13} + \bar{u}_{13} \bar{v}_{23} &= \dots, \end{aligned}$$

где правые части нас не интересуют.

При произвольном задании форм u определитель системы

$$(u_1^2 + u_2^2)\ \{u_1(\bar{u}_{13} - u_{13}) + u_2(\bar{u}_{23} - u_{23})\}$$

не равен нулю; следовательно, ранг системы $s_1 = 4$. Число Картана равно

$$Q = 2q - s_1 = 4.$$

С другой стороны, первые два уравнения (17) дают по лемме Картана:

$$\omega_{13} = a\omega_1 + b\omega_2, \quad \bar{\omega}_{13} = \bar{a}\omega_1 + \bar{b}\omega_2,$$
$$\omega_{23} = b\omega_1 + c\omega_2, \quad \bar{\omega}_{23} = \bar{b}\omega_1 + \bar{c}\omega_2.$$

Внося эти выражения в последние уравнения (16) и (17), получим на шесть коэффициентов a, b, c, $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ два независимых соотношения:

$$\bar{c} - c + \bar{a} - a = 0, \quad \bar{a}\bar{c} - \bar{b}^2 = ac - b^2.$$

Следовательно, наиболее общий интегральный элемент $\mathcal{E}_2$ зависит от $N = 4$ параметров. Так как

$$Q = N,$$

то система — в инволюции. Интегральное многообразие $\mathfrak{M}_2$ зависит от четырёх функций одного аргумента.

ГЛАВА IX

ПРОДОЛЖЕНИЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Первое продолжение. Приведённая система ковариантов

Мы видели в § 5 гл. VII, что первое же продолжение преобразует систему внешних дифференциальных уравнений в систему Пфаффа. Заметим, что это не будет произвольная система Пфаффа.

Действительно, для продолжения системы мы задаёмся уравнениями

$$\tilde{\omega}_g = l_{gi}\,\omega_i, \qquad i = 1, 2, \dots, n;\, g = 1, 2, \dots, q, \tag{1}$$

которые выражают все формы характеристической системы (кроме форм θ_k, которые равны нулю на интегральном многообразии) через формы ω_i. Внося эти выражения, а также $\theta_k = 0$ во все уравнения системы ($\mathfrak{S}$), получим ряд уравнений

$$G_{n-1}(x, z;\, l_{g1}, l_{g2}, \dots, l_{gn}) = 0, \tag{2}$$

которые позволяют определить главные l_{gi} через параметрические. Допустим, что это определение выполнено и в формулах (1) все l_{gi} суть функции от q' параметров $y_1, y_2, \dots, y_{q'}$.

Присоединяя уравнения (1) к системе (S), где y_h рассматриваются как вспомогательные неизвестные, получаем *первое продолжение* системы (S). Так как все формы выше первой степени в системе (S) обратятся в нуль в силу уравнений (1) и (2), то система обратится в систему Пфаффа, содержащую линейные уравнения $\theta_k = 0$ системы (S) и уравнения (1).

Так как при этом сведутся к тождеству и все внешние дифференциалы $D\Theta_k$, то после продолжения квадратичные уравнения системы $\mathfrak{S}_2'$ будут содержать только внешние дифференциалы от уравнений (1). Они имеют вид

$$D\tilde{\omega}_g - l_{gi}\, D\omega_i + [\omega_i\, dl_{gi}] = 0. \tag{3}$$

Квадратичные формы $D\tilde{\omega}_g$, $D\omega_i$ как формы кольца $\mathfrak{R}\,[dx,\ dz]$ могут быть выражены через формы характеристического базиса ω_i, θ_k, $\tilde{\omega}_g$, причём в силу уравнений системы (S) все $\theta_k = 0$, а в силу (1) и

$\tilde{\omega}_g = l_{gi}\,\omega_i$. Кроме форм ω_i, в уравнения (3) войдут только дифференциалы вспомогательных переменных y_h при дифференцировании dl_{gi}. После приведения подобных членов квадратичные уравнения (3) принимают вид

$$A_g^{ih}\,[\omega_i\,dy_h] + C_g^{[ij]}\,[\omega_i\,\omega_j] = 0, \tag{3'}$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, n; g = 1, 2, \ldots, q;\ h = 1, 2, \ldots, q'.$$

Если левые части уравнений (1) обозначить буквой θ с указателями от $s_0 + 1$ до $s_0 + q$:

$$\theta_{s_0+g} = \tilde{\omega}_g - l_{gi}\omega_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n;\ g = 1, 2, \ldots, q,$$

то все линейные уравнения продолженной системы (S') запишутся в виде

$$\theta_j = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, r_0;\ r_0 = s_0 + q. \tag{4}$$

Чтобы преобразовать к *приведённому виду* систему ковариантов (3′), заметим, что интегральный элемент $\mathcal{E}_n$ определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \theta_j &= 0, & i &= 1, 2, \ldots, n,\\ dy_h &= l_{hi}\,\omega_i, & j &= 1, 2, \ldots, r_0,\\ && h &= 1, 2, \ldots, q', \end{aligned} \tag{5}$$

которые удовлетворяют всем уравнениям (3′). Возьмём одно из возможных решений $\bar{l}_{hi}$ этой системы. Такое решение существует, если система не противоречива (необходимое условие).

Если изменить базис кольца $\mathfrak{R}\,[\omega_i, \theta_j, dy_h]$, вводя вместо dy_h

$$\bar{\omega}_h = dy_h - \bar{l}_{hi}\;\omega_i,$$

то уравнения (3′) примут вид

$$a_g^{ih}\,[\omega_i\,\bar{\omega}_h] + c_g^{[ij]}\,[\omega_i\,\omega_j] = 0, \tag{3''}$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, n;\ g = 1, 2, \ldots, q;\ h = 1, 2, \ldots, q',$$

а так как уравнения (3″) удовлетворяются значениями $\bar{\omega}_h = 0$, то все коэффициенты

$$c_g^{[ij]} = 0$$

равны нулю, т. е. коварианты (3″) не содержат членов с произведениями $[\omega_i\,\omega_j]$.

Отсюда новая форма необходимого условия:

Необходимое условие. *Если система внешних дифференциальных уравнений (S) допускает интегральное многообразие $\mathfrak{M}_n$, на котором формы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ остаются независимыми, то после первого продолжения системы при подходящем выборе базиса характеристической системы*

$$\omega_i,\ \theta_j,\ \bar{\omega}_h, \qquad i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, r_0; h = 1, 2, \ldots, q',$$

система (S) обратится в систему Пфаффа (4)

$$\theta_j = 0,$$

а квадратичные уравнения расширенной системы (внешние дифференциалы) примут вид

$$a_g^{ih}\,[\omega_i\,\bar{\omega}_h] = 0, \tag{6}$$

$$i = 1, 2, \ldots; n;\ h = 1, 2, \ldots, q';\ g = 1, 2, \ldots, q.$$

Мы будем говорить, что система Пфаффа (4) имеет *приведённую систему ковариантов* (6).

§ 2. Определение характеров приведённой системы

Определение характеров системы Пфаффа с приведённой системой ковариантов принимает совершенно стандартный вид.

Всякий линейный элемент определяется своей точкой приложения (x^0, z^0, y^0), произвол выбора которой мы для простоты записи не будем учитывать, и значениями в этой точке форм ω_i, θ_j, $\bar{\omega}_h$. На всяком интегральном элементе формы θ_j равны нулю в силу уравнений системы (4). Произвол выбора форм ω_i, так называемое *«высечение»*, на произволе интегрального многообразия не отражается, и мы его учитывать не будем. Следовательно, произвол линейного элемента будет определяться произвольными значениями параметрических форм $\bar{\omega}_h$.

На первом линейном элементе e_1 все формы $\bar{\omega}_h$ могут быть взяты произвольно. Он зависит от $r_1 = q'$ параметров и может быть задан уравнениями

$$\omega_i = u_i, \quad \bar{\omega}_h = v_h, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,\ h = 1, 2, \ldots, q'. \tag{e_1}$$

Проходящий через него интегральный элемент $\mathcal{E}_2$ определяется вторым линейным элементом e_2. Это — интегральный элемент; следовательно, на нём $\theta_j = 0$ и, кроме того, он находится в инволюции с первым, а так как все уравнения системы $\mathfrak{S}_2'$ сводятся к системе (6), то значения форм ω_i, $\bar{\omega}_h$ для e_2 должны удовлетворять системе

$$a_g^{ih} u_i \bar{\omega}_h = a_g^{ih} v_h \omega_i. \tag{7}$$

Здесь неизвестными являются $\bar{\omega}_h$. Ранг s_1 этой системы равен рангу матрицы коэффициентов

$$\left\| a_g^{ih} u_i \right\|.$$

Если обозначим значения форм ω_i, $\bar{\omega}_h$ на линейном элементе e_2 через

$$\omega_i = u_i', \ \bar{\omega}_h = v_h', \tag{e_2}$$

где u_i' вполне произвольны, а v_h' должны удовлетворять системе (7), то третий линейный элемент e_3, который вместе с e_1, e_2 определяет интегральный элемент $\mathcal{E}_3$, проходящий через $\mathcal{E}_2^0$, должен быть в инволюции с e_1 и e_2. Следовательно, значения форм ω_i, $\overline{\omega}_h$ на нём удовлетворяют уравнениям (7) и уравнениям

$$a_g^{ih} u_i' \overline{\omega}_h = a_g^{ih} v_h' \omega_i. \tag{7'}$$

Ранг системы (7), (7′) не меньше s_1; обозначим его через $s_1 + s_2$. Это — ранг матрицы коэффициентов

$$\begin{Vmatrix} a_g^{ih} u_i \\ a_g^{ih} u_i' \end{Vmatrix},$$

и т. д.

Характер s_ν определяется из условия, что $s_1 + s_2 + \ldots + s_\nu$ есть ранг матрицы

$$\begin{Vmatrix} a_1^{i1} u_i & a_1^{i2} u_i & \ldots & a_1^{iq'} u_i \\ a_2^{i1} u_i & a_2^{i2} u_i & \ldots & a_2^{iq'} u_i \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_1^{i1} u_i' & a_1^{i2} u_i' & \ldots & a_1^{iq'} u_i' \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_1^{i1} u_i^{(\nu-1)} & a_1^{i2} u_i^{(\nu-1)} & \ldots & a_1^{iq'} u_i^{(\nu-1)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_q^{i1} u_i^{(\nu-1)} & a_q^{i2} u_i^{(\nu-1)} & \ldots & a_q^{iq'} u_i^{(\nu-1)} \end{Vmatrix}, \tag{8}$$

где все $u_i, u_i', \ldots, u_i^{(\nu-1)}$ — произвольные, ничем не связанные неопределённые величины.

Наконец,

$$s_n = q' - (s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1}).$$

Если критерий Картана удовлетворён — произвол наиболее общего интегрального элемента $\mathcal{E}_n$, т. е. число произвольных параметров N, которые получатся, если разрешать по лемме Картана уравнения (6), равно числу Q:

$$\begin{aligned} Q &= nq' - (n-1) s_1 - (n-2) s_2 - \ldots - s_{n-1} = \\ &= s_1 + 2s_2 + \ldots + ns_n, \end{aligned} \tag{9}$$

то система — в инволюции и все s_ν действительно будут её характерами.

Если $Q > N$, то систему надо продолжать.

§ 3. Последовательное продолжение системы

Общая схема исследования совместности системы внешних дифференциальных уравнений может быть намечена в следующих чертах.

Все уравнения данной системы (S) дифференцируем. От конечных[1]) уравнений берём полный дифференциал, от дифференциальных — внешний дифференциал и полученные уравнения, если они независимы от предыдущих, присоединяем к системе (S). Таким образом получаем расширенную систему ($\mathfrak{S}$).

Строим характеристическую систему, составляя её базис из линейных форм

$$\omega_i, \quad \theta_j, \quad \tilde{\omega}_g, \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \; j = 1, 2, \ldots, s_0,$$

где ω_i остаются линейно независимыми на интегральном многообразии $\mathfrak{M}_n$ и θ_j составляют базис линейных форм системы $\mathfrak{S}_1$.

Полагая в уравнениях системы

$$\theta_j = 0, \quad \tilde{\omega}_g = l_{gi} \omega_i, \tag{10}$$

ищем наиболее общий интегральный элемент $\mathcal{E}_n$.

Исследование получаемых таким образом уравнений (2) для коэффициентов l_{gi} может дать:

1) несовместность системы, если получаются уравнения между одними независимыми переменными,

2) новые конечные соотношения между x и z, которые надо присоединить к системе,

3) совместную систему, определяющую для произвольных x и z все l_{gi} с N произвольными параметрами.

В последнем случае интегральный элемент $\mathcal{E}_n$ существует, и надо строить регулярную цепь.

Если, говоря геометрическим языком, система отнесения не специализирована, то цепь можно строить по формам базиса $[\omega_i]$. Линейные элементы e_i определяются значениями форм

$$\omega_\alpha = \delta_\alpha^i, \quad \theta_j = 0, \quad \tilde{\omega}_g = l_{gi}, \qquad \delta_\alpha^i = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = i, \\ 0, & \text{если } \alpha \neq i. \end{cases} \tag{e_i}$$

Все линейные элементы — интегральные. Чтобы линейные элементы e_ν были в инволюции, они должны удовлетворять уравнениям $\mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3, \ldots, \mathfrak{S}_\nu$. Если мы обозначим уравнения для $l_{g\nu}$, получаемые из системы $\mathfrak{S}_\nu$, символом

$$F_\alpha^{(\nu-1)}(l_{g1}, \ldots, l_{g,\nu-1}, l_{g\nu}) = 0,$$

---

[1]) Всегда выгодно, если возможно, разрешить конечные уравнения системы (S) относительно части неизвестных функций и подставить найденные выражения во все остальные уравнения системы.

то координаты линейного элемента e_ν удовлетворяют системе уравнений

$$(F_{\nu-1}) \qquad F_\alpha^{(1)}(l_{g1}, l_{g\nu}) = 0, \quad F_\beta^{(2)}(l_{g1}, l_{g2}, l_{g\nu}) = 0, \ \ldots$$
$$\ldots, \ F_\varepsilon^{(\nu-1)}(l_{g1}, \ldots, l_{g, \nu-1}, l_{g\nu}) = 0.$$

Пусть ранг матрицы коэффициентов при $l_{g\nu}$ в этих уравнениях при полном произволе параметрических l_{gi} $(i < \nu)$ равен $s_1 + s_2 + \ldots + s_{\nu-1}$. Если признак Картана удовлетворён и число Картана

$$Q = nq - (n-1)s_1 - (n-2)s_2 - \ldots - s_{n-1}$$

равно N, то система — в инволюции и характеры $s_0, s_1, \ldots, s_n$ определяет широту решения.

Если система отнесения специализирована, то целесообразнее не связывать цепь с формами базиса $[\omega_i]$. Линейные элементы e_i можно определить значениями форм

$$\omega_\alpha = u_\alpha^{(i-1)}, \quad \theta_j = 0, \quad \tilde{\omega}_g = v_g^{(i-1)},$$
$$\alpha = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, s_0; \quad g = 1, 2, \ldots, q.$$

Всё дальнейшее протекает так же, как и выше. Строим системы $(G_{\nu-1})$, определяем ранги матриц и, если критерий Картана удовлетворяется, получаем систему в инволюции.

Если признак Картана не удовлетворён, то надо систему продолжать. Для этого служат уравнения (10).

Допустим, что все l_{gi} выражены через $N = q'$ новых вспомогательных неизвестных $y_1, y_2, \ldots, y_{q'}$. Система (10) эквивалентна системе (S). Мы будем называть её *первым продолжением* и обозначать штрихом — (S'). Это будет система Пфаффа с приведённой системой ковариантов вида (6). Если внешние дифференциалы уравнений (10) не удаётся представить в приведённом виде, то это показывает, что не существует интегрального элемента $\mathcal{E}_n$.

Продолженную систему трактуем как первоначальную, т. е. определяем произвол наиболее общего интегрального элемента $\mathcal{E}_n$, ищем характеры s_i и проверяем регулярность цепи признаком Картана. Единственное отличие в том, что благодаря приведённой системе ковариантов всё исследование протекает в более стройной форме, изложенной в прошлом параграфе. Если новая система — не в инволюции, то ещё раз продолжаем. При каждом продолжении характеры цепи уменьшаются. В следующей главе мы увидим, что сохранение характеров при продолжении системы есть признак того, что система — в инволюции. Впрочем, обыкновенно довольно скоро появляются при решении системы (2) новые конечные уравнения на неизвестные функции, которые приходится присоединять к системе и для новой системы начинать исследование сначала. В следующей главе мы докажем, что такое продолжение системы конечным числом шагов приводит или к несовместности или к системе в инволюции.

§ 4. Примеры. Системы уравнений Пфаффа

1. Ищется интегральиое многообразие $\mathfrak{M}_2$ системы Пфаффа

$$\begin{array}{l} dz_1 + x\,du + v\,dy = 0, \\ dz_2 + v\,dx + y\,du = 0, \end{array} \quad dz_3 + u\,dv = 0,$$

на котором $[dx\,dy] \neq 0$. Показать существование решения и обнаружить его произвол.

2. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_2$ системы Пфаффа

$$xy\,dz + uy\,dx + vx\,dy = 0,$$
$$du + dv - z\,dx = 0,$$

на котором $[dx\,dy] \neq 0$. Показать существование решения и обнаружить его произвол.

3. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ системы Пфаффа

$$dt_1 + u\,dy + x\,dv = 0,$$
$$dt_2 + z\,dw = 0,$$
$$dt_3 + w\,dx + z\,dv = 0,$$

на котором $[dx\,dy\,dz] \neq 0$. Показать существование решения и обнаружить его произвол.

4. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ системы Пфаффа

$$dt_1 + y\,du = 0,$$
$$dt_2 + x\,dv + z\,du - \rho\,dy = 0,$$
$$dt_3 + x\,du - v\,dy + z\,dw = 0,$$
$$dt_4 + x\,dw - \rho\,dz = 0,$$

на котором $[dx\,dy\,dz] \neq 0$. Показать существование решения и обнаружить его произвол.

5. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ системы Пфаффа

$$dt_1 + u\,dx - y\,dv = 0,$$
$$dt_2 + w\,dx + z\,dv = 0,$$
$$dt_3 + y\,du = 0,$$

на котором $[dx\,dy\,dz] \neq 0$. Показать существование решения и обнаружить его произвол.

6. Дана та же система Пфаффа; ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_2$, на котором $[dx\,dy] \neq 0$.

Решения

Пример 1. Дифференцируя внешним образом уравнения заданной системы, имеем:

$$\begin{array}{l} [dx\,du] - [dy\,dv] = 0, \\ [dy\,du] - [dx\,dv] = 0, \end{array} \quad [du\,dv] = 0.$$

В принятых обозначениях, поскольку $s_1 \leqslant q$,

$$n = 2, \ q = 2, \ s_1 = 2, \ s_2 = 0, \ Q = 2.$$

Наиболее общий интегральный элемент $\mathcal{E}_2$ определяется формулами

$$\begin{array}{l} du = a\,dx + b\,dy, \\ dv = -b\,dx - a\,dy, \end{array} \quad a^2 - b^2 = 0;$$

отсюда вытекают два случая:

$$b = \pm a.$$

Таким образом $N = 1$, и система — не в инволюции

Присоединяем уравнения

$$(\alpha)\qquad \begin{aligned} du &= a\,(dx + \varepsilon\, dy), \\ dv &= -\varepsilon a\,(dx + \varepsilon\, dy), \end{aligned} \qquad = \pm 1.$$

Дифференцируя внешним образом, имеем:

$$(\beta)\qquad [da,\ dx + \varepsilon\, dy] = 0.$$

Заданная система Пфаффа вместе с присоединёнными уравнениями (α) образует систему $s = 5$ уравнений с одним только квадратичным уравнением (β). Следовательно, $n = 2$, $q = 1$ (неизвестная функция a), $s_1 = 1$, $Q = 1$.

Наиболее общий элемент $\mathcal{E}_2$ определяется формулами

$$da = \alpha\,(dx + \varepsilon\, dy).$$

Следовательно, $N = 1$ (параметр α), система — в инволюции, произвол решения — одна функция одного аргумента.

Пример 2. Дифференцируем внешним образом уравнения заданной системы и исключаем dz:

$$\begin{gathered} y\,[du\,dx] + x\,[dv\,dy] = 0, \\ vx\,[dx\,dy] = 0. \end{gathered}$$

Так как по условию $[dx\,dy] \neq 0$ на $\mathfrak{M}_2$ и x как независимая переменная не может быть связана уравнением $x = 0$, то

$$v = 0.$$

Присоединяем это конечное уравнение к системе Пфаффа. Она принимает вид (по сокращении на $y \neq 0$)

$$(\alpha)\qquad \begin{gathered} x\,dz + u\,dx = 0, \\ du - z\,dx = 0. \end{gathered}$$

Система ковариантов (внешних дифференциалов)

$$[dz\,dx] = 0, \quad [du\,dx] = 0$$

есть алгебраическое следствие системы Пфаффа. Следовательно, эта система вполне интегрируема и определяет решение с двумя произвольными постоянными.

При этом система (α) совсем не содержит переменную y. К каждой тройке значений x, z, u, лежащих на интегральном многообразии $\mathfrak{M}_1$, можно присоединить любое значение y. Следовательно, $\mathfrak{M}_2$ в пространстве четырёх переменных x, y, z, u есть линейчатая поверхность с образующими, параллельными оси y. См. гл. XI — Характеристики.

Пример 3. Система ковариантов (внешних дифференциалов) имеет вид

$$\begin{aligned} [du\,dy] - [dv\,dx] &= 0, \\ [dv\,dz] - [dw\,dx] &= 0, \end{aligned} \quad [dw\,dz] = 0.$$

Здесь $n = 3$, $q = 3$, $s_1 = 3$, $s_2 = 0$, $Q = 3$.

Наиболее общий интегральный элемент $\mathcal{E}_3$ определяется формулами

$$(\alpha)\qquad du = a\,dy, \quad dv = b\,dx, \quad dw = -b\,dz.$$

Следовательно, $N = 2$, и система — не в инволюции.

Присоединяем уравнения (α). Внешние дифференциалы их суть:

$$[da\,dy] = 0, \quad [db\,dx] = 0, \quad [db\,dz] = 0.$$

Два последних уравнения прямо дают:

$$db = 0.$$

Присоединяя это уравнение к системе (α), получаем систему ковариантов

$$[da\,dy] = 0.$$

Для новой системы имеем:

$$n = 3,\ q = 1\ \text{(неизвестная функция } a\text{)},\ s_1 = 1, Q = 1.$$

Наиболее общий интегральный элемент $\mathcal{E}_3$ определяется формулой

$$da = \alpha\,dy.$$

Следовательно, $N = 1$ (параметр α), система — в инволюции. Произвол решения — одна функция одного аргумента.

Пример 4. Система ковариантов (внешних дифференциалов) имеет вид

$$\begin{gathered} [dy\,du] = 0, \quad [dz\,du] + [dx\,dv] + [dy\,d\rho] = 0, \\ [dx\,du] + [dy\,dv] + [dz\,dw] = 0, \quad [dx\,dw] + [dz\,d\rho] = 0. \end{gathered}$$

В принятых обозначениях получаем:

$$n = 3, \ q = 4, \ s_1 = 4, \ s_2 = 0, \ Q = 4.$$

Наиболее общий интегральный элемент $\mathcal{E}_3$ определяется формулами

$$(\alpha)\qquad du = a\,dy, \quad dv = a\,dx + b\,dy, \quad dw = b\,dz, \quad d\rho = b\,dx + a\,dz.$$

Следовательно, $N = 2$, и система — не в инволюции.

Присоединяем к системе Пфаффа уравнения (α). Система ковариантов принимает вид

$$[da\,dy] = 0, \quad [da\,dx] + [db\,dy] = 0, \quad [db\,dz] = 0, \quad [db\,dx] + [da\,dz] = 0.$$

Из первого и последнего уравнений следует: $da = 0$, ибо в силу первого da зависит только от dy, а в силу последнего — только от dx и dz. Из двух средних уравнений следует: $db = 0$. Присоединяя уравнения

$$(\beta)\qquad da = 0, \quad db = 0$$

к системе Пфаффа, видим, что система ковариантов удовлетворена тождественно. Система Пфаффа вполне интегрируема, а так как она содержит теперь $s = 10$ уравнений [четыре — первоначальной системы, четыре уравнения (α) и два уравнения (β)], то решение зависит от 10 произвольных постоянных.

Пример 5. Система ковариантов имеет вид

$$\begin{gathered} [du\,dx] + [dv\,dy] = 0, \\ [dv\,dz] - [dw\,dx] = 0, \\ [du\,dy] = 0. \end{gathered}$$

Значит $n = 3$, $q = 3$, $s_1 = 3$, $Q = 3$.

Наиболее общий интегральный элемент $\mathfrak{E}_3$ определяется формулами

$$(\alpha) \qquad du = a\,dy, \quad dv = a\,dx, \quad dw = b\,dx - a\,dz.$$

Следовательно, $N = 2$, и система — не в инволюции.

Присоединяем к системе Пфаффа уравнения (α). Система ковариантов примет вид

$$[da\,dy] = 0, \quad [da\,dx] = 0, \quad [db\,dx] - [da\,dz] = 0.$$

Из первых двух уравнений следует:

$$da = 0.$$

Присоединяя это уравнение к системе Пфаффа, получим систему ковариантов в виде

$$[db dx] = 0.$$

Для новой системы

$$n = 3, \ q = 1 \text{ (неизвестная функция } b), \ s_1 = 1, \ Q = 1.$$

Наиболее общее решение системы ковариантов:

$$db = \lambda\,dx.$$

Следовательно, $N = 1$ (параметр λ), система — в инволюции, произвол решения — одна функция от одного аргумента.

Пример 6. Система ковариантов сохраняет тот же вид, что и в примере 5, но теперь она не будет правильной, ибо произведение $[dv\,dz]$ содержит в обоих множителях дифференциалы неизвестных функций. Она допускает два семейства интегральных элементов $\mathfrak{E}_2$ — (α) и (β):

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} du &= ab\,dy, \quad dv = b\,(a\,dx + dy), \\ dw &= (\alpha - a\beta)\,dx + (\beta - a\gamma)\,dy, \\ b dz &= \beta\,dx + \gamma\,dy, \end{aligned}$$

где $b \neq 0$. Для этого семейства имеем:

$$N = 5, \quad s_1 = 3, \quad s_2 = 1.$$

Система — в инволюции; произвол решения — одна функция двух аргументов.

$$(\beta) \qquad \begin{aligned} du &= a\,dy, \quad dv = a\,dx, \\ dw &= (\alpha - a\beta)\,dx - a\gamma\,dy, \\ dz &= \beta\,dx + \gamma\,dy. \end{aligned}$$

Теперь

$$N = 4, \quad s_1 = 3, \quad s_2 = 1.$$

Система — не в инволюции.

Дифференцируя первые два уравнения (β), получим

$$[da\,dy] = 0, \quad [da\,dx] = 0,$$

откуда

$$(\gamma) \qquad da = 0,$$

и система ковариантов после присоединения уравнений (β) и (γ) принимает вид:

$$\begin{gathered} [d\beta\,dx] + [d\gamma\,dy] = 0, \\ [d\alpha - a\,d\beta, \ dx] - a\,[d\gamma\,dy] = 0. \end{gathered}$$

Имеем:

$$N = 4, \quad s_1 = 2, \quad s_2 = 1.$$

Система — в инволюции, и произвол решения — одна функция двух аргументов.

§ 5. Примеры. Системы внешних дифференциальных уравнений

1. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_8$ системы

$$\begin{gathered} dt - x\,du + v\,dy = 0, \\ [du\,dy] - [dv\,dz] + z\,[dw\,dx] = 0, \end{gathered}$$

на котором $[dx\,dy\,dz] \neq 0$. Показать существование решения и определить его произвол.

2. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ системы

$$\begin{gathered} z\,[du\,dy] - y\,[dv\,dx] = 0, \\ z\,[du\,dy\,dz] + x\,[dw\,dx\,dy] = 0, \\ y\,[dv\,dx\,dz] + x\,[dw\,dx\,dy] = 0, \end{gathered}$$

на котором $[dx\,dy\,dz] \neq 0$. Показать существование решения и определить его произвол.

3. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_8$ системы

$$\begin{gathered} dt + x\,du + y\,dv - 2w\,dz = 0, \\ [du\,dy\,dz] = [dv\,dz\,dx] = [dw\,dx\,dy], \end{gathered}$$

на котором $[dx\,dy\,dz] \neq 0$. Показать существование решения и определить его произвол.

4. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_4$ системы

$$\begin{gathered} df + w\,dz - t\,d\rho = 0, \\ z\,[du\,dx] + [dv - w\,dt, \ dy] = 0, \end{gathered}$$

на котором $[dx\,dy\,dz\,dt] \neq 0$. Показать существование решения и определить его произвол.

Решения

Пример 1. Дифференцируем внешним образом уравнения заданной системы:

$$\begin{gathered} [dx\,du] + [dy\,dv] = 0, \\ [dx\,dz\,dw] = 0. \end{gathered}$$

Система $\mathfrak{S}$ содержит одно уравнение Пфаффа, два квадратичных и одно третьего измерения. Характеристическая система состоит из семи форм: dt, du, dv, dw, dx, dy, dz, из которых последние три остаются на $\mathfrak{M}_8$ независимыми. В принятых обозначениях

$$n = 3, \ q = 3, \ s_1 = 2, \ s_2 = 1, \ Q = 4.$$

Наиболее общий интегральный элемент $\mathfrak{E}_3$ определяется формулами

$$(\alpha) \qquad du = a\,dy, \quad dv = a\,dx, \quad z\,dw = b\,dx - a\,dz.$$

Следовательно, $N = 2$, и система — не в инволюции.

Присоединяем к системе уравнения (α). Все уравнения выше первой степени удовлетворены тождественно. Система ковариантов принимает вид

$$[da\,dy] = 0, \quad [da\,dx] = 0, \quad [dz\,dw] = [db\,dx] - [da\,dz].$$

Из первых двух уравнений следует

$$(\beta) \qquad da = 0.$$

Присоединяя это уравнение, заметим, что система ковариантов будет содержать только одно уравнение, которое по исключении dw примет вид

$$\left[db - \frac{b}{z}dz,\ dx\right] = 0.$$

Для новой системы $n = 3$, $q = 1$, $s_1 = 1$, $s_2 = s_3 = 0$, $Q = 1$.

Наиболее общий интегральный элемент $\mathcal{E}_3$ определяется формулой

$$db = \frac{b}{z}dz + \lambda dx.$$

Следовательно, $N = 1$ (параметр λ), и система — в инволюции. Произвол решения — одна функция от одного аргумента.

Пример 2. Дифференцируем внешним образом заданную систему:

$$[du\, dy\, dz] - [dv\, dx\, dy] = 0.$$

Базис характеристической системы состоит из шести форм, из которых три остаются на $\mathfrak{M}_3$ независимыми. В принятых обозначениях

$$n = 3,\ q = 3,\ s_1 = 1,\ s_2 = 2,\ Q = 5.$$

Наиболее общий интегральный элемент $\mathcal{E}_3$ определяется формулами

$$du = a\, dy,\quad dv = b\, dx,\quad dw = c\, dx + e\, dy. \tag{α}$$

Следовательно, $N = 4$, и система — не в инволюции.

Присоединяем уравнения (α). Все уравнения заданной системы удовлетворены. Система ковариантов принимает вид

$$[da\, dy] = 0,\quad [db\, dx] = 0,\quad [dc\, dx] + [de\, dy] = 0.$$

Наиболее общий интегральный элемент $\mathcal{E}_3$ определяется формулами

$$da = \alpha\, dy,\quad db = \beta\, dx,\quad dc = \gamma\, dx + \varepsilon dy,\quad de = \varepsilon\, dx + \zeta dy.$$

Следовательно, $N = 5$, а так как теперь

$$n = 3,\ q = 4,\ s_1 = 3,\ s_2 = 1,$$

то $Q = 5$, и система — в инволюции. Произвол решения — одна функция от двух аргументов.

Пример 3. Дифференцируем внешним образом заданную систему:

$$[dx\, du] + [dy\, dv] + 2[dz\, dw] = 0.$$

Базис характеристической системы состоит из шести форм, из которых три остаются независимыми на $\mathfrak{M}_3$. В принятых обозначениях

$$n = 3,\ q = 3,\ s_1 = 1,\ s_2 = 2,\ Q = 5.$$

Наиболее общий интегральный элемент $\mathcal{E}_3$ определяется формулами

$$\begin{aligned} du &= a\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz,\\ dv &= \beta\, dx + a\, dy + \alpha\, dz,\\ 2dw &= \gamma\, dx + \alpha\, dy + 2a\, dz. \end{aligned} \tag{α}$$

Следовательно, $N = 4$, и система — не в инволюции.

Присоединяя уравнения (α), мы удовлетворим все уравнения выше первой степени. Система ковариантов примет вид

$$\begin{aligned} &[da\, dx] + [d\beta\, dy] + [d\gamma\, dz] = 0,\\ &[d\beta\, dx] + [da\, dy] + [d\alpha\, dz] = 0,\\ &[d\gamma\, dx] + [d\alpha\, dy] + 2[da\, dz] = 0. \end{aligned}$$

Для новой системы имеем:

$$n = 3,\ q = 4,\ s_1 = 3,\ s_2 = 1,\ Q = 5.$$

Наиболее общий интегральный элемент $\mathcal{E}_3$ определяется формулами

$$\begin{aligned} da &= \xi\, dx + \eta\, dy + \zeta\, dz,\\ d\alpha &= \vartheta\, dx + \zeta\, dy + 2\eta\, dz,\\ d\beta &= \eta\, dx + \xi\, dy + \vartheta\, dz,\\ d\gamma &= \zeta\, dx + \vartheta\, dy + 2\xi\, dz. \end{aligned} \tag{β}$$

Следовательно, $N = 4$, и система — не в инволюции.

Присоединяем систему (β). Квадратичные уравнения удовлетворены. Новая система ковариантов имеет вид

$$\begin{aligned} &[d\xi\, dx] + [d\eta\, dy] + [d\zeta\, dz] = 0,\\ &[d\vartheta\, dx] + [d\zeta\, dy] + 2[d\eta\, dz] = 0,\\ &[d\eta\, dx] + [d\xi\, dy] + [d\vartheta\, dz] = 0,\\ &[d\zeta\, dx] + [a\vartheta\, dy] + 2[d\xi\, dz] = 0. \end{aligned}$$

Наиболее общее решение:

$$\begin{aligned} d\xi &= A dx + B dy + C dz,\\ d\eta &= B dx + A dy + D dz,\\ d\zeta &= C dx + D dy + 2A dz,\\ d\vartheta &= D dx + C dy + 2B dz. \end{aligned}$$

Значит $N = 4$. Для новой системы ковариантов имеем:

$$n = 3,\ q = 4,\ s_1 = 4,\ s_2 = s_3 = 0,\ Q = 4.$$

Система — в инволюции и определяет решение с четырьмя произвольными функциями одного аргумента.

Пример 4. Дифференцируем внешним образом заданную систему:

$$\begin{aligned} &[dw\, dz] + [d\rho\, dt] = 0,\\ &[du\, dx\, dz] + [dw\, dy\, dt] = 0. \end{aligned}$$

Базис характеристической системы содержит девять форм, из которых четыре остаются независимыми на $\mathfrak{M}_4$. Так как система содержит одно уравнение Пфаффа, то $q = 4$.

Наиболее общий интегральный элемент $\mathcal{E}_4$ определяется формулами

$$du = a\, dx,\quad dv = b\, dy + w\, dt,\quad dw = c\, dt,\quad d\rho = c\, dz + h\, dt. \tag{a}$$

Следовательно, $N = 4$. С другой стороны,

$$n = 4,\ q = 4,\ s_1 = 2,\ s_2 = 2,\ Q = 6.$$

Система — не в инволюции.

Присоединяем уравнения (α). Уравнения выше первой степени расширенной системы $(\mathfrak{S})$ удовлетворены. Система ковариантов получится дифференцированием системы (α):

$$[da\,dx]=0,\quad [db\,dy]=0,\quad [dc\,dt]=0,\quad [dc\,dz]+[dh\,dt]=0.$$

Наиболее общее решение:

$$da=\alpha\,dx,\quad db=\beta\,dy,\quad dc=\gamma\,dt,\quad dh=\gamma\,dz+\varepsilon\,dt.$$

Следовательно, $N=4$. С другой стороны, для новой системы

$$n=4,\quad q=4,\quad s_1=4,\quad s_2=s_3=s_4=0,\quad Q=4.$$

Система — в инволюции и определяет решение с произволом четырёх функций одного аргумента.

§ 6. Задачи

1. Найти[1]) поверхности (минимальные), у которых асимптотические линии образуют ортогональную сеть.

2. Найти поверхности (постоянной гауссовой кривизны), у которых произведение главных радиусов кривизны постоянно.

3. Найти поверхности (Фосса), у которых есть сопряжённая система геодезических линий.

Указание. При движении по геодезической линии касательная поворачивается в плоскости, проходящей через нормаль к поверхности.

4. Дана поверхность и на ней два семейства линий. Найти конгруэнцию так, чтобы её лучи, пересекающие любую линию первого или второго семейства, образовали развёртывающуюся поверхность.

Указание. Развёртывающаяся поверхность образована касательными некоторой пространственной кривой.

5. Дана конгруэнция. Найти поверхность, которую развёртывающиеся поверхности конгруэнции пересекают по двум семействам линий сопряжённой сети.

Указание. Конгруэнцию с действительными развёртывающимися поверхностями можно рассматривать как совокупность общих касательных двух (фокальных) поверхностей. Развёртывающиеся поверхности соответствуют тем линиям этих поверхностей, которые касаются лучей конгруэнции.

6. В каждой касательной плоскости поверхности S проведены окружность радиуса ρ с центром в точке касания и через радиусы окружности семейство плоскостей под одним и тем же углом α к касательной плоскости. Найти поверхность S так, чтобы эти плоскости служили касательными плоскостями семейства ∞^1 поверхностей в точках их пересечения с проведённой окружностью.

---

[1]) Во всех задачах под словом «найти» подразумевается доказать существование и определить произвол решения.

7. Найти четвёрку поверхностей, составляющих замкнутый цикл так, чтобы прямые, соединяющие соответствующие точки каждой пары последовательных поверхностей, касались обеих поверхностей и каждая пара прямых, которые касаются одной поверхности, была бы на ней сопряжена.

8. Найти поверхность и на ней сопряжённую сеть линий так, чтобы в каждой точке A этой поверхности касательные AA_1 и AA_2 к линиям сети вместе с двумя другими прямыми образовали замкнутый косой четырёхугольник $AA_1A_2A_3$, пары прямых AA_i, A_iA_3 $(i=1,\,2)$ касались в точках A_i двух новых поверхностей и на каждой из этих поверхностей были сопряжены (сеть Слотника).

Решения

Задача 1. К каждой точке A искомой поверхности присоединяем прямоугольный трёхгранник, образованный касательными I_1, I_2 к асимптотическим линиям и нормалью I_3 в этой точке. Движения трёхгранника определяются уравнениями

$$\begin{aligned} dA&=\omega_i I_i, \\ dI_i&=\omega_{ik} I_k. \end{aligned}\qquad \omega_{ik}=-\omega_{ki},\quad i,\ k=1,\,2,\,3.$$

Так как все перемещения точки A перпендикулярны к I_3, то

$$\omega_3=0. \tag{11}$$

Соприкасающаяся плоскость к асимптотической линии совпадает с касательной плоскостью поверхности. Значит при перемещении вдоль линии $\omega_2=0$ вектор I_1 вращается в касательной плоскости, и дифференциал его dI_1 перпендикулярен к I_3:

$$I_3\cdot dI_1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \omega_2),$$

или

$$\omega_{13}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \omega_2),$$

или

$$[\omega_{13}\omega_2]=0,\quad [\omega_{23}\omega_1]=0. \tag{11a}$$

Второе уравнение получено по аналогии для линии $\omega_1=0$.

Уравнения (11), (11a) суть все уравнения проблемы. Надо найти интегральное многообразие $\mathfrak{M}_2$, на котором ω_1, ω_2 линейно независимы [иначе поверхность (A) выродится в линию].

Дифференцируя уравнение (11) внешним образом, получим по формулам структуры [гл. III, (21)]:

$$[\omega_1\omega_{13}]+[\omega_2\omega_{23}]=0. \tag{11b}$$

Наиболее общее решение уравнений (11a, b):

$$\omega_{13}=a\omega_2,\quad \omega_{23}=a\omega_1 \tag{12}$$

зависит от $N=1$ параметра. С другой стороны, характеристическая система содержит пять форм: ω_1, ω_2, ω_3, ω_{13}, ω_{23}; из них две: ω_1, ω_2 остаются независимыми на $\mathfrak{M}_2$, ω_3 определена уравнением Пфаффа (11). Значит $q=2$. Имеем в принятых обозначениях:

$$n=2,\ q=2,\ s_1=2\ (\text{ибо } q=s_1+s_2),\ s_2=0,\ Q=2.$$

Следовательно, система — не в инволюции.

Присоединяем уравнения (12). Уравнения (11a, b) удовлетворены. Система ковариантов получится дифференцированием уравнений (12):

$$[da\omega_1]+2a[\omega_{12}\omega_2]=0,$$
$$[da\omega_2]-2a[\omega_{12}\omega_1]=0.$$

Наиболее общее решение

$$\frac{da}{a}=\alpha\omega_1+\beta\omega_2,\quad 2\omega_{12}=\beta\omega_1-\alpha\omega_2$$

зависит от $N=2$ параметров, а так как для новой системы

$$n=2,\ q=2\ (\text{формы } da \text{ и } \omega_{12}),\ s_1=2,\ s_2=0,\ Q=2,$$

то система — в инволюции и определяет решение с произволом двух функций одного аргумента.

Задача 2. Присоединяем к каждой точке A поверхности трёхгранник, образованный касательными к линиям кривизны и нормалью,

$$\begin{aligned} d\mathbf{A}&=\omega_i\mathbf{I}_i,\\ d\mathbf{I}_i&=\omega_{ik}\mathbf{I}_k, \end{aligned}\qquad \omega_{ik}=-\omega_{ki},\ i,\ k=1,2,3.$$

Так как все перемещения точки A лежат в касательной плоскости, то

(11) $$\omega_3=0.$$

С другой стороны, по формулам Родрига для движений по главным направлениям на поверхности, т. е., например, для $\omega_2=0$

$$d\mathbf{A}\equiv R_1 d\mathbf{I}_3\quad(\mathrm{mod}\ \omega_2),$$

где R_1 — главный радиус кривизны поверхности, или

$$\left.\begin{aligned}\omega_2&\equiv R_2\omega_{32}\\ \omega_{31}&\equiv 0\end{aligned}\right.(\mathrm{mod}\ \omega_1),\qquad \left.\begin{aligned}\omega_1&\equiv R_1\omega_{31}\\ \omega_{32}&\equiv 0\end{aligned}\right.(\mathrm{mod}\ \omega_2),$$

откуда следует, что ω_{31} не зависит от ω_2, а ω_{32} — от ω_1, и, значит,

(13a) $$\omega_1+R_1\omega_{13}=0,\quad \omega_2+R_2\omega_{23}=0.$$

Если присоединить требование

(13b) $$R_1R_2=\mathrm{const.},$$

то получим все уравнения проблемы.

Дифференцируя уравнения (11), (13a, b) и исключая ω_{13}, ω_{23}, получим только два квадратичных уравнения

(13c) $$\begin{aligned}&[\omega_1 d\ln R_1]+\left(\frac{R_1}{R_2}-1\right)[\omega_2\omega_{12}]=0,\\ &[\omega_2 d\ln R_2]-\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)[\omega_1\omega_{12}]=0,\end{aligned}$$

(13d) $$d\ln R_1+d\ln R_2=0.$$

Характеристическая система, кроме форм в левых частях уравнений Пфаффа (11), (13a, d) и форм ω_1, ω_2, независимых на $\mathfrak{M}_2$, содержит только две формы $d\ln R_1$ и ω_{12}. Следовательно,

$$n=2,\ q=2,\ s_1=2,\ s_2=0,\ Q=2.$$

С другой стороны, наиболее общее решение уравнений (13c) определяется формулами

$$d\ln R_1=a\omega_1+b\omega_2,$$
$$\omega_{12}=\frac{bR_2\omega_1+aR_1\omega_2}{R_1-R_2}.$$

Следовательно, $N=2$, система — в инволюции и определяет решение с произволом двух функций одного аргумента.

Задача 3. Присоединяем к каждой точке A поверхности трёхгранник, образованный нормалью $\mathbf{e}_3$ и касательными к геодезическим линиям сопряжённой системы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$,

$$\begin{aligned} dA&=\omega^i\mathbf{e}_i,\\ d\mathbf{e}_i&=\omega_i^k\mathbf{e}_k,\end{aligned}\qquad i,\ k=1,\ 2,\ 3.$$

Если выбрать векторы $\mathbf{e}_i$ единичными и обозначить буквой φ угол двух первых осей, то

$$(\mathbf{e}_1)^2=(\mathbf{e}_2)^2=(\mathbf{e}_3)^2=1,\quad \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3=0,\quad \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2=\cos\varphi.$$

Следовательно, дифференцируя, получим:

(a) $$\begin{aligned}&\omega_3^3=0,\quad \omega_1^1+\omega_1^2\cos\varphi=0,\quad \omega_2^2+\omega_2^1\cos\varphi=0,\\ &\omega_3^1+\omega_3^2\cos\varphi=-\omega_1^3,\quad \omega_3^1\cos\varphi+\omega_3^2=-\omega_2^3,\\ &(\omega_1^1+\omega_2^2)\cos\varphi+\omega_1^2+\omega_2^1=-\sin\varphi\, d\varphi.\end{aligned}$$

Все перемещения точки A перпендикулярны к нормали $\mathbf{e}_3$; значит

$$\omega^3 = 0. \tag{11}$$

Так как ось $\mathbf{e}_1$ касается геодезической $\omega^2 = 0$, то

$$(d\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3) \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} \omega^2),$$

где круглыми скобками обозначено скалярное произведение трёх векторов. Отсюда

$$\omega_1^2 \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} \omega^2),$$

или

$$[\omega_1^2\omega^2] = 0, \quad [\omega_2^1\omega^1] = 0. \tag{14a}$$

Второе уравнение получено из условия, что линия $\omega^1 = 0$ — геодезическая.

Наконец, в силу сопряжённости осей $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, при перемещении вдоль $\omega^1 = 0$ касательная $\mathbf{e}_1$ описывает развёртывающуюся поверхность и вращается в касательной плоскости. Следовательно,

$$\mathbf{e}_3 \cdot d\mathbf{e}_1 \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} \omega^1),$$

или

$$\omega_1^3 \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} \omega^1),$$

или

$$[\omega_1^3\omega^1] = 0, \quad [\omega_2^3\omega^2] = 0. \tag{14b}$$

Второе уравнение пишется по аналогии.

Уравнения (11), (14a, b) составляют все уравнения проблемы. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_2$, на котором

$$[\omega^1\omega^2] \neq 0.$$

Дифференцируя внешним образом уравнение (11), заметим, что получаемое уравнение удовлетворено в силу (14b). В принятых обозначениях

$$n = 2, \quad q = 4, \quad s_1 = 4, \quad Q = 4.$$

Наиболее общее решение уравнений (14a,b)

$$\omega_1^2 = \alpha\omega^2, \quad \omega_2^1 = \beta\omega^1, \quad \omega_1^3 = \gamma\omega^1, \quad \omega_2^3 = \varepsilon\omega^2$$

зависит от $N = 4$ параметров. Система — в инволюции. Произвол решения — четыре функции от одного аргумента.

Задача 4. Присоединим к каждой точке A заданной поверхности трёхгранник, образованный касательными $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ к линиям того и другого семейства и лучом конгруэнции $\mathbf{e}_3$.

По условию ось $\mathbf{e}_3$ описывает развёртывающуюся поверхность при движении вдоль линии $\omega^i = 0$ $(i = 1, 2)$. Следовательно, $\mathbf{e}_3$ вращается при этом в плоскости $\mathbf{e}_k$, $\mathbf{e}_3$, где $i \neq k$:

$$(d\mathbf{e}_3\,\mathbf{e}_3\mathbf{e}_k) \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} \omega^i), \qquad i \neq k = 1, 2,$$

или

$$\omega_3^i \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} \omega^i),$$

или

$$[\omega_3^1\omega^1] = 0, \quad [\omega_3^2\omega^2] = 0. \tag{b}$$

Допустим теперь, что поверхность дана, но ось $\mathbf{e}_3$ не совпадает с лучом конгруэнции, определяемым вектором

$$\mathbf{e} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

Тогда, дифференцируя и исключая $\mathbf{e}_3$, получим:

$$\begin{aligned} d\mathbf{e} = \{\, dx + x(\omega_1^1 - \omega_3^3) + y\omega_2^1 + \omega_3^1 - x^2\omega_1^3 - xy\omega_2^3 \,\}\,\mathbf{e}_1 + \\ + \{\, dy + y(\omega_2^2 - \omega_3^3) + x\omega_1^2 + \omega_3^2 - xy\omega_1^3 - y^2\omega_2^3 \,\}\,\mathbf{e}_2 + \\ + \{\, x\omega_1^3 + y\omega_2^3 + \omega_3^3 \,\}\,\mathbf{e}. \end{aligned}$$

Следовательно, для трёхгранника $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde\omega_3^1 &= dx + x(\omega_1^1 - \omega_3^3) + y\omega_2^1 + \omega_3^1 - x(x\omega_1^3 + y\omega_2^3), \\ \tilde\omega_3^2 &= dy + y(\omega_2^2 - \omega_3^3) + x\omega_1^2 + \omega_3^2 - y(x\omega_1^3 + y\omega_2^3), \end{aligned}$$

и система (b) примет вид

$$[\tilde\omega_3^1\omega^1] = 0, \quad [\tilde\omega_3^2\omega^2] = 0. \tag{15}$$

Уравнения (15) составляют все уравнения проблемы. Ищется многообразие $\mathfrak{M}_2$, на котором $[\omega^1\omega^2] \neq 0$.

В наших обозначениях

$$n = 2, \quad q = 2 \ (\text{формы } \tilde\omega_3^1, \tilde\omega_3^2), \quad s_1 = 2, \quad s_2 = 0, \quad Q = 2.$$

Так как наиболее общее решение уравнений (15) определяется формулами

$$\tilde\omega_3^1 = \alpha\omega^2, \quad \tilde\omega_3^2 = \beta\omega^1,$$

то $N = 2$; система — в инволюции и определяет решение с произволом двух функций одного аргумента.

Задача 5. Присоединяем к каждому лучу A_1A_2 данной конгруэнции тетраэдр, две вершины которого A_1 и A_2 лежат в точках прикосновения луча к фокальным поверхностям, а две другие A_3 и A_4 — произвольные точки в фокальных плоскостях луча (в касательных плоскостях фокальных поверхностей в точках A_1, A_2). Проективные перемещения тетраэдра определяются системой

$$dA_i = \omega_i^k A_k, \qquad i, k = 1, 2, 3, 4.$$

Из построения тетраэдра следует, что все перемещения точки $\boldsymbol{A}_1$ лежат в плоскости $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3$, и аналогично для $\boldsymbol{A}_2$. Следовательно,

$$\omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^3 = 0, \tag{c}$$

и внешние дифференциалы суть:

$$\begin{aligned}
&[\omega_1^2\omega_2^4] + [\omega_1^3\omega_3^4] = 0,\\
&[\omega_2^1\omega_1^3] + [\omega_2^4\omega_4^3] = 0.
\end{aligned} \tag{c'}$$

Кроме того, если $\omega_1^3 = 0$, то точка $\boldsymbol{A}_1$ будет перемещаться по ребру $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2$. Следовательно, линии $\omega_1^3 = 0$ касаются лучей конгруэнции и соответствуют одному семейству развёртывающихся поверхностей; уравнение $\omega_2^4 = 0$ определяет другое семейство. Если точка

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A}_1 + \lambda \boldsymbol{A}_2$$

описывает искомую поверхность, то на ней линии $\omega_1^3 = 0$ и $\omega_2^4 = 0$ должны образовать сопряжённую систему.

Так как

$$d\boldsymbol{M} = (\omega_1^1 + \lambda\omega_2^1)\boldsymbol{M} + \tilde{\omega}\boldsymbol{A}_2 + \omega_1^3\boldsymbol{A}_3 + \lambda\omega_2^4\boldsymbol{A}_4,$$

где

$$\tilde{\omega} = d\lambda + \omega_1^2 + \lambda(\omega_2^2 - \omega_1^1) - \lambda^2\omega_2^1, \tag{d}$$

то, считая формы ω_1^3, ω_2^4 линейно независимыми на $\mathfrak{M}_2$, можно положить

$$\tilde{\omega} = x\omega_1^3 + y\lambda\omega_2^4, \tag{16a}$$

где x, y — неизвестные функции, и

$$M_1 = xA_2 + A_3, \quad \boldsymbol{M}_2 = y\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_4;$$

тогда будем иметь

$$d\boldsymbol{M} = (\omega_1^1 + \lambda\omega_2^1)\boldsymbol{M} + \omega_1^3\boldsymbol{M}_1 + \lambda\omega_2^4\boldsymbol{M}_2,$$

где, например, точка $\boldsymbol{M}_1$ лежит на касательной к линии $\omega_2^4 = 0$ поверхности $(\boldsymbol{M})$.

Если линии $\omega_1^3 = 0$, $\omega_2^4 = 0$ сопряжены, то касательная к линии $\omega_2^4 = 0$ описывает развёртывающуюся поверхность при движении вдоль линии $\omega_1^3 = 0$; $d\boldsymbol{M}_1$ (при $\omega_1^3 = 0$) будет лежать в касательной плоскости этой развёртывающейся поверхности, одной и той же вдоль всего луча $\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}_1$, а так как в точке $\boldsymbol{M}$ она касается поверхности $(\boldsymbol{M})$, то

$$(d\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^3),$$

или, полагая

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_1 &= dx + x(\omega_2^2 - \omega_3^3) + \omega_3^2 - y\omega_3^4 - xy\omega_2^4 - x^2\omega_2^3 - \lambda(x\omega_2^1 + \omega_3^1),\\
\tilde{\omega}_2 &= dy + y(\omega_2^2 - \omega_4^4) + \omega_4^2 - x\omega_4^3 - xy\omega_2^3 - y^2\omega_2^4 - \lambda(y\omega_2^1 + \omega_4^1),
\end{aligned} \tag{e}$$

имеем:

$$[\tilde{\omega}_1\omega_1^3] = 0, \quad [\tilde{\omega}_2\omega_2^4] = 0. \tag{16b}$$

Второе уравнение получено по соображению симметрии заменой $\boldsymbol{M}_1$ на $\boldsymbol{M}_2$, следовательно, $\boldsymbol{A}_3$ на $\boldsymbol{A}_4$, т. е. заменой указателя 3 на указатель **4**.

Уравнения (16a, b) составляют все уравнения проблемы. Они содержат три неизвестные функции x, y, λ. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_2$, на котором $[\omega_1^3\omega_2^4] \neq 0$.

Дифференцируя внешним образом уравнение (16a), получим с помощью (d), (e), (c′) и (16b) полное тождество. В принятых обозначениях

$$n = 2, \ q = 2 \ (\text{формы } \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2), \ s_1 = 2, \ s_2 = 0, \ Q = 2.$$

Наиболее общее решение системы (16b)

$$\tilde{\omega}_1 = \alpha\omega_1^3, \quad \tilde{\omega}_2 = \beta\omega_2^4$$

зависит от $N = 2$ параметров. Система — в инволюции и определяет решение с произволом двух функций одного аргумента.

Задача 6. Присоединяем к каждой точке A поверхности S произвольный прямоугольный трёхгранник, третья ось которого $\boldsymbol{I}_3$ совпадает с нормалью,

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{A} &= \omega_i\boldsymbol{I}_i \\ d\boldsymbol{I}_i &= \omega_{ik}\boldsymbol{I}_k, \end{aligned} \qquad \omega_{ik} = -\omega_{ki}, \ i, k = 1, 2, 3.$$

Следовательно,

$$\omega_3 = 0, \tag{11}$$

$$[\omega_1\omega_{13}] + [\omega_2\omega_{23}] = 0. \tag{11b}$$

Если точка окружности

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A} + \rho(\boldsymbol{I}_1\cos\varphi + \boldsymbol{I}_2\sin\varphi)$$

описывает одну из поверхностей семейства, то касательная плоскость её определяется векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\boldsymbol{I}_3\sin\alpha + \boldsymbol{I}_3 \times \frac{1}{\rho}\overrightarrow{AM}\cos\alpha$, где косой крест означает векторное умножение. Значит

$$(d\boldsymbol{M}, \ \boldsymbol{I}_1\cos\varphi + \boldsymbol{I}_2\sin\varphi, \ \boldsymbol{I}_3\sin\alpha - \boldsymbol{I}_1\sin\varphi\cos\alpha + \boldsymbol{I}_2\cos\varphi\cos\alpha) = 0,$$

или

$$d\varphi + \omega_{12} - \left(\omega_{13}\,\mathrm{ctg}\,\alpha - \frac{\omega_2}{\rho}\right)\cos\varphi - \left(\omega_{23}\,\mathrm{ctg}\,\alpha + \frac{\omega_1}{\rho}\right)\sin\varphi = 0. \tag{f}$$

При заданной поверхности S и заданных переменных ρ и α уравнение (f) должно определять ∞^1 поверхностей системы, т. е. должно быть относительно φ вполне интегрируемым. Следовательно, внешний дифференциал левой части уравнения (f) по исключению $d\varphi$ должен обращаться в нуль относительно φ тождественно. Дифференцируя внешним образом (f) и обращая в нуль коэффициенты при $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ и свободный член, получим:

$$\text{(17a)}\qquad \frac{[d\rho,\ \omega_1]}{\rho^2}+\frac{[d\alpha,\ \omega_{23}]}{\sin^2\alpha}=0,\quad \frac{[d\rho,\ \omega_2]}{\rho^2}-\frac{[d\alpha,\ \omega_{13}]}{\sin^2\alpha}=0,$$

$$\text{(17b)}\qquad \rho^2[\omega_{13}\omega_{23}]+\sin^2\alpha\,[\omega_1\omega_2]=0.$$

Так как

$$K=\frac{[\omega_{13}\omega_{23}]}{[\omega_1\omega_2]}$$

есть гауссова кривизна поверхности [1], то уравнение (17b) даёт:

$$\text{(18)}\qquad \rho=R\sin\alpha,\quad K=-\frac{1}{R^2}.$$

Система (17a), (18) для произвольной поверхности относительно ρ и α несовместна, как это, впрочем, видно и из дальнейшего.

Если будем искать поверхность и величины ρ и α одновременно, то к уравнениям (17a, b) надо присоединить уравнения (11), (11b).

Кроме $\omega_3=0$ и форм ω_1, ω_2, которые остаются на $\mathfrak{M}_2$ независимыми, уравнения системы содержат четыре формы: ω_{13}, ω_{23}, $d\alpha$ и $d\rho$. Значит

$$n=2,\ q=4,\ s_1=4,\ s_2=0,\ Q=4.$$

Наиболее общее решение системы уравнений (11b) (17a, b):

$$\begin{array}{l}\omega_{13}=a\omega_1+b\omega_2,\\ \omega_{23}=b\omega_1+c\omega_2,\end{array}\quad ac-b^2=-\frac{\sin^2\alpha}{\rho^2},$$

$$\frac{d\alpha}{\sin^2\alpha}=g\omega_1+h\omega_2,\quad \frac{d\rho}{\rho^2}=(bg-ah)\,\omega_1+(cg-bh)\,\omega_2,$$

зависит от $N=4$ параметров. Следовательно, система — в инволюции и определяет решение с четырьмя произвольными функциями одного аргумента.

Замечателен частный случай $K=\text{const.}$, когда α и ρ — произвольные постоянные, связанные только уравнением (18).

Задача 7. Берём тетраэдр с вершинами A_i (в порядке нумерации) в соответствующих точках четвёрки поверхностей:

$$dA_i=\omega_i^k A_k,\qquad i,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Каждая поверхность (A_i) касается плоскости $A_{i+1}A_iA_{i+3}$. Следовательно,

$$\text{(19a)}\qquad \omega_i^{i+2}=0,\qquad i=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Так как линии, огибаемые на двух фокальных поверхностях одним лучом, сопряжены, то линии, касающиеся луча A_iA_{i+1} на каждой поверхности (A_i), соответствуют:

$$\text{(19b)}\qquad [\omega_i^{i+1}\omega_1^2]=0,\quad [\omega_i^{i+3}\omega_1^4]=0,\qquad i=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Уравнения (19a, b) составляют все уравнения проблемы. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_2$, на котором $[\omega_1^2\omega_1^4]\neq 0$.

Дифференцируя систему (19a), получаем уравнения

$$\text{(g)}\qquad [\omega_i^{i+1}\omega_{i+1}^{i+2}]+[\omega_i^{i+3}\omega_{i+3}^{i+2}]=0,$$

которые являются следствием системы (19b).

Характеристическая система, кроме форм (19a), содержит восемь форм: ω_1^2, ω_1^4, ω_2^3, ω_2^1, ω_3^4, ω_3^2, ω_4^1, ω_4^3, из которых две первые остаются на $\mathfrak{M}_2$ независимыми. Следовательно,

$$n=2,\ q=6,\ s_1=6,\ s_2=0,\ Q=6.$$

Наиболее общее решение системы (19b)

$$\omega_i^{i+1}=a_i\omega_1^2,\quad \omega_i^{i-1}=b_i\omega_1^4,\qquad i=2,\ 3,\ 4,$$

зависит от $N=6$ параметров. Система — в инволюции и определяет решение с шестью произвольными функциями одного аргумента.

Задача 8. Присоединяем к каждой точке $A\equiv A_0$ заданной поверхности тетраэдр, вершины которого A_1 и A_2 лежат на касательных к линиям искомой сети в точках пересечения с двумя другими прямыми, а вершина A_3 есть точка пересечения этих последних,

$$dA_i=\omega_i^k A_k,\qquad i,\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Три поверхности (A), (A_1), (A_2) касаются своих прямых A_0A_1, A_0A_2, A_0A_i, A_iA_3, $(i=1,\ 2)$. Следовательно,

$$\text{(20a)}\qquad \omega_0^3=\omega_1^2=\omega_2^1=0.$$

---

[1] Чтобы обнаружить справедливость этой формулы, достаточно заметить, что произведение главных радиусов кривизны (гауссова кривизна поверхности) равно (см. стр. 261)

$$\frac{1}{R_1R_2}=ac-b^2,$$

где

$$\omega_{13}=a\omega_1+b\omega_2,\quad \omega_{23}=b\omega_1+c\omega_2.$$

Внося эти значения форм ω_{13}, ω_{23} в формулу текста, мы немедленно получим $K=\dfrac{1}{R_1R_2}$.

Условие сопряжённости каждой пары касательных на своей поверхности (A), (A_1) или (A_2) даст уравнения

$$[\omega_1^0\omega^2] = [\omega_2^3\omega^2] = [\omega_1^3\omega^1] = [\omega_2^0\omega^1] = 0. \tag{20b}$$

Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_2$, на котором $[\omega^1\omega^2] \neq 0$.

Дифференцируя уравнения (20a), получим в силу (20a, b):

$$[\omega_1^3\omega_3^2] = 0, \quad [\omega_2^3\omega_3^1] = 0. \tag{20c}$$

Характеристическая система, кроме форм (20a) и форм, которые остаются независимыми на $\mathfrak{M}_2$, содержит шесть форм ω_i^0, ω_i^3, ω_3^i $(i = 1, 2)$. Следовательно,

$$n = 2, \ q = 6, \ s_1 = 6, \ s_2 = 0, \ Q = 6.$$

Наиболее общее решение системы (20b, c) тоже зависит от шести параметров; следовательно, система — в инволюции и определяет решение с шестью произвольными функциями одного аргумента.

Так как задание поверхности зависит от произвольной функции двух аргументов, то на произвольно заданной поверхности вообще ни одной сети Слотника нет.

ГЛАВА X

ТЕОРЕМА КАРТАНА О ПРИВЕДЕНИИ СИСТЕМЫ В ИНВОЛЮЦИЮ

§ 1. Семейство ковариантов нормального вида

Обращаемся к основной теореме о возможности привести всякую непротиворечивую систему внешних дифференциальных уравнений в инволюцию конечным числом продолжений [1].

Так как всякая система внешних дифференциальных уравнений после первого продолжения становится системой Пфаффа, то достаточно доказать эту теорему для системы Пфаффа. По тем же основаниям мы можем считать, что система обладает приведённой системой ковариантов

$$D\theta_k = a_k^{ig}[\omega_i\bar{\omega}_g], \tag{1}$$

$$k = 1, 2, \ldots, s; \ i = 1, 2, \ldots, n; \ g = 1, 2, \ldots, q.$$

Будем предполагать, что все формы $\bar{\omega}_g$ входят сюда существенно, т. е. что число q (число форм) равно рангу матрицы (8) гл. IX, где ν надо заменить буквой n:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n = q.$$

Будем предполагать, что система — не в инволюции, следовательно, число параметров N, от которых зависит наиболее общий интегральный элемент $\mathcal{E}_n$, меньше числа Картана Q:

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + n\sigma_n > N,$$

которое мы записали в форме (9) гл. IX; итак, критерий Картана не удовлетворён, система — не в инволюции.

Доказательство теоремы Картана основывается на особой организации семейства ковариантов [внешних дифференциалов уравнений системы (S)], которую будем называть *нормальным видом семейства*.

Мы сначала постулируем существование нормального семейства ковариантов, затем покажем, что при продолжении системы семей-

---

[1] Cartan, Sur la structure des groupes infinis de transformations, Ann. de l'École Normale Sup., (3), 21, 1904, стр. 159 и след.

ство её ковариантов сохраняет нормальный вид, и, наконец, обнаружим возможность приведения к нормальному виду семейства ковариантов любой системы Пфаффа.

Заметим прежде всего, что замена

$$\tilde{\omega}_k^i = a_k^{ig}\bar{\omega}_g \tag{2}$$

приведёт все коварианты (1) к виду

$$D\theta_k = [\omega_i \tilde{\omega}_k^i], \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n; \\ k = 1, 2, \ldots, s. \end{matrix} \tag{3}$$

Не все формы $\tilde{\omega}_k^i$ здесь линейно независимы. Число независимых (*параметрических*) форм $\tilde{\omega}_k^1$ равно рангу матрицы коэффициентов $\|a_k^{1g}\|$. Если формы ω_i выбраны так, что цепь строится по формам базиса $[\omega_i]$, то этот ранг равен первому характеру цепи σ_1. Мы всегда можем выбрать нумерацию форм θ_k так, чтобы параметрическими были формы $\tilde{\omega}_k^1$ с указателями $k \leqslant \sigma_1$.

Если ранг матрицы из $2q$ строк $\|a_k^{1g};\ a_k^{2g}\|$ равен $\sigma_1 + \sigma_2$, то σ_2 форм $\tilde{\omega}_k^2$ — параметрические. Все они будут принадлежать к числу форм с первыми $k \leqslant \sigma_1$ указателями.

Действительно, если поменять местами ω_2 и ω_1, не изменяя нумерации форм θ_k (т. е. принять за первый линейный элемент цепи — e_2, а за второй — e_1), то число независимых форм $\tilde{\omega}_k^2$ будет равняться σ_1 потому, что не принимается во внимание зависимость их от $\tilde{\omega}_k^1$. Если принять во внимание формы $\tilde{\omega}_k^1$, то среди первых σ_1 форм $\tilde{\omega}_k^2$ найдётся $\sigma_1 - \sigma_2$ линейно зависимых, остальные σ_2 останутся параметрическими. Мы всегда можем так распорядиться нумерацией форм θ_k, чтобы параметрические $\tilde{\omega}_k^2$ были с указателями $k \leqslant \sigma_2$.

Вообще среди форм $\tilde{\omega}_k^i$ параметрическими будут формы с указателями $k \leqslant \sigma_i$, где σ_i — характеры цепи. Все остальные — *главные*.

Теперь установим определение нормального семейства ковариантов.

Определение. Семейство ковариантов $D\theta_k$ системы Пфаффа $\theta_k = 0$ приведено к *нормальному виду*, если каждому из ковариантов присвоена система указателей $D\theta = \Pi_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$, позволяющая разбить их на группы со следующими свойствами:

1. Каждой группе присвоено два целых положительных числа — *индекс группы* $\mathscr{N}$ и *показатель группы* $h \leqslant n$.

2. Группа $(\mathscr{N}, h)$ содержит все без пропуска коварианты $\Pi_{[\alpha_i]}$, сумма указателей которых равна индексу:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \mathscr{N},$$

при любых неотрицательных целых числах α_i.

3. Каждый ковариант группы имеет вид

$$\Pi_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} = [\omega_1 \tilde{\omega}_{\alpha_1 + 1, \alpha_2 \ldots \alpha_n}] + [\omega_2 \tilde{\omega}_{\alpha_1, \alpha_2 + 1, \ldots \alpha_n}] + \ldots + \\ + [\omega_n \tilde{\omega}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n + 1}]. \tag{4}$$

4. Формы $\tilde{\omega}$ группы $(\mathscr{N}, h)$ — *параметрические*, если последние $n - h$ указателей равны нулю, все остальные — *главные*.

Заметим, что различные коварианты одной группы содержат одну и ту же систему выражений $\tilde{\omega}$, но они могут встречаться с другими обозначениями и в других группах.

Один и тот же ковариант может встречаться с разными обозначениями несколько раз — первый раз с параметрическими $\tilde{\omega}$, а затем с главными.

Возможно существование нескольких групп с одними и теми же параметрами $(\mathscr{N}, h)$, но с разными ковариантами (одинаково обозначенными).

§ 2. Понижение показателя группы при дополнении системы (S) конечным уравнением

Из определения нормального семейства ковариантов следует ряд свойств, которые мы запишем в форме лемм. Одни из них почти очевидны, другие требуют доказательства.

Лемма I. *Произвольная линейная подстановка над формами ω_i не нарушает нормальности семейства, но вызывает линейную подстановку над формами каждой группы.*

Это прямо вытекает из канонической формы ковариантов (3) нормального семейства. Произвольная подстановка над формами ω_i и подходящая подстановка над формами $\tilde{\omega}$, а также одновременная замена ковариантов $\Pi_{[\alpha]}$ группы $(\mathscr{N}, h)$ их линейными комбинациями сохранит для каждого нового коварианта $\Pi_{[\alpha]}$ вид (4). Так как число параметрических $\tilde{\omega}$ каждого коварианта после подстановки не уменьшится, то мы можем выбрать такую нумерацию новых форм ω_i, чтобы параметрическими были те формы $\tilde{\omega}$, у которых $n - h$ указателей равны нулю.

Лемма II. *Конечное соотношение между переменными понижает на единицу число групп с некоторым показателем h, одновременно увеличивая число групп с показателем $h - 1$.* Точнее можно сказать, что для сохранения нормальности семейства ковариантов, при наличии одного конечного соотношения между переменными, приходится заменить одну из групп $(\mathscr{N}, h)$ на $\mathscr{N} + 1$ более мелких групп с различными индексами от 0 до $\mathscr{N}$ и показателем $h - 1$, на единицу меньшим.

Действительно, всякое конечное уравнение между x_i и z_j, если его продифференцировать, даёт линейное соотношение $\mathscr{E}$ между дифференциалами dx_i, dz_j, или между формами $\tilde{\omega}$ и ω_i. Оно, очевидно, не может содержать одни только ω_i, ибо ω_i линейно независимы, а так как главные $\tilde{\omega}$ можно заменить их выражениями через параметрические, то уравнение $\mathscr{E}$ всегда содержит параметрические $\tilde{\omega}$.

Если сюда входят параметрические $\tilde{\omega}$ из разных групп, то мы выделим среди них группу с наименьшим показателем. Обозначим его буквой h, и пусть он принадлежит группе $(\mathscr{N}, h)$.

Выполним линейную подстановку над $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_h$ так, чтобы соотношение $\mathscr{E}$ содержало параметрическую форму группы $(\mathscr{N}, h)$ с наибольшим указателем $\beta_h = \mathscr{N} + 1$. Все остальные β_i по смыслу индекса $\mathscr{N}$ будут нулями:

$$\tilde{\omega}_{0\ldots0\ \beta_h 0\ldots0}, \qquad \beta_h = \mathscr{N} + 1.$$

При этом не только это выражение $\tilde{\omega}$ перестаёт быть параметрическим (ибо соотношение $\mathscr{E}$ линейно выражает его через другие), но можно считать главными все $\tilde{\omega}$ первой группы, которые стоят множителями при ω_h.

Действительно, пусть

$$\tilde{\omega}_{\beta_1 \beta_2 \ldots \overline{\beta}_h 0\ldots0}$$

— одна из форм $\tilde{\omega}$ первой группы, стоящая множителем при ω_h. Здесь $\beta_h \leqslant \mathscr{N}$, ибо сумма указателей для форм одной группы постоянна; значит $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_h = \mathscr{N} + 1$, а поскольку уже была форма с указателем $\beta_h = \mathscr{N} + 1$, то другой не найдётся. Так как для параметрической формы $\tilde{\omega}$ все $\beta_\lambda = 0$ $(\lambda > h)$, то найдётся β_p $(p < h)$, отличное от нуля, а в таком случае та же самая форма $\tilde{\omega}$ встретится ещё раз, как множитель при ω_p, в разложении по формам ω_i другого коварианта $\Pi_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_p - 1 \ldots \beta_h 0 \ldots 0}$. Остаётся переменить обозначения так, чтобы эти два выражения $\tilde{\omega}$ стали различными, но равными между собой. Одно остаётся параметрическим (второе), а первое станет главным.

Чтобы сохранить нормальность семейства ковариантов, мы разобьём теперь первую группу $(\mathscr{N}, h)$ на ряд подгрупп с показателем h, на единицу меньшим:

a) Прежде всего выделяем в отдельную группу $(0, h-1)$ ковариант с указателями $\alpha_i = \delta_i^h \mathscr{N}$, где $\delta_i^h = \begin{cases} 1, & \text{если } i = h, \\ 0, & \text{если } i \neq h, \end{cases}$

$$\Pi_{0\ldots0\alpha_h 0\ldots0}, \qquad \alpha_h = \mathscr{N},$$

изменяя его обозначение на $\Pi_{00\ldots0}$ и присваивая этой группе индекс $\mathscr{N}' = 0$ и показатель $h' = h - 1$. Её параметрические формы

$$\tilde{\omega}_{10\ldots0}, \tilde{\omega}_{010,\ldots0\ldots}, \tilde{\omega}_{0,\ldots010\ldots0}, \qquad \text{в последней форме } 1 = \alpha_{h-1},$$

не будут считаться параметрическими ни в какой другой группе; например, выражение $\tilde{\omega}_{10\ldots0\beta_h 0\ldots0}$ $(\beta_h = \mathscr{N})$ в разложении $\Pi_{10\ldots0\,\alpha_h\ldots0}$ (где $\alpha_h = \mathscr{N} - 1$) мы будем считать главным.

b) Все коварианты с указателем $\alpha_h = \mathscr{N} - 1$ объединим в одну группу $(1, h-1)$, заменяя этот указатель α_h нулём и присваивая группе индекс $\mathscr{N}' = 1$ и показатель $h' = h - 1$.

Так как коварианты группы $(\mathscr{N}, h)$ имеют сумму указателей, равную $\mathscr{N}$, то коварианты с указателем $\alpha_h = \mathscr{N} - 1$ будут иметь по очереди один из указателей α_i $(i \neq h)$ равным единице; если $i < h$, то первые $h - 1$ форм $\tilde{\omega}$ ковариантa — параметрические, а остальные — главные; если $i > h$, то все формы $\tilde{\omega}$ ковариантa — главные. После замены α_h нулём, мы получим полную систему ковариантов группы $(1, h - 1)$ за исключением ковариантa $\Pi_{0\ldots010\ldots0}$ $(1 = \alpha_h)$; при показателе группы $h' = h - 1$ все формы такого ковариантa должны быть главными. Итак, дополним группу ковариантом $\Pi_{0\ldots010\ldots0}$ $(1 = \alpha_h)$, который мы положим тождественно равным тому $\Pi_{0\ldots0\alpha_h 0\ldots0}$ $(\alpha_h = \mathscr{N})$, который мы только что выделили в группу $(0, h - 1)$ и обозначили через $\Pi_{0\ldots0\ldots0}$. Повторяя его ещё раз, мы будем считать все его формы $\tilde{\omega}$ главными.

Все параметрические $\tilde{\omega}$ этой группы могут встретиться только в разложении ковариантов $\Pi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_h 0\ldots0}$ $(\alpha_h = \mathscr{N} - 2)$ как множители при ω_h, но там мы будем полагать их главными [считая, что они линейно выражаются через $\tilde{\omega}$ из $(1, h-1)$, будучи равны им].

c) В следующую группу $(2, h-1)$ объединяются все коварианты с указателем $\alpha_h = \mathscr{N} - 2$. Этот указатель заменяется нулём, чтобы сумма указателей (индекс группы) равнялась двум вместо $\mathscr{N}$. Сюда же вторично помещаются коварианты с указателем $\alpha_h = \mathscr{N} - 1$ с заменой его единицей и коварианты с указателем $\alpha_h = \mathscr{N}$ с заменой его двойкой, ибо надо понизить индекс группы на $\mathscr{N} - 2$ единиц, уменьшая на это число единиц указатель α_h этих ковариантов; все формы $\tilde{\omega}$ этих ковариантов считаются главными. Параметры группы суть $\mathscr{N}' = 2$, $h' = h - 1$ и т. д.

d) Наконец, все коварианты с указателем $\alpha_h = 0$ объединяются в последнюю группу $(\mathscr{N}, h - 1)$; сюда же вторично идут все предыдущие, причём все формы $\tilde{\omega}$ в них считаются главными, ибо тождественно равны таким же формам, только с другой нумерацией, в предыдущих подгруппах.

Таким образом, семейство ковариантов в своём новом виде останется нормальным, одна из групп $(\mathscr{N}, h)$ разобьётся на $\mathscr{N} + 1$ групп $(0, h - 1)$, $(1, h - 1)$, $\ldots$, $(\mathscr{N}, h - 1)$, но показатель каждой группы станет меньше на единицу.

§ 3. Сохранение нормального вида семейства ковариантов при продолжении системы

Лемма III. *Если систему Пфаффа с нормальным семейством ковариантов продолжить введением дополнительных неизвестных* $y_1, y_2, \ldots, y_{q'}$ *и новых уравнений*

$$\tilde{\omega}_g = l_{gi}\omega_i, \qquad g = 1, 2, \ldots, q;\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

где l_{gi} суть функции от y, обращающие в нуль все коварианты первоначальной системы, то семейство ковариантов после продолжения системы сохранит нормальный вид с тем же числом групп, с теми же показателями их и с индексами, увеличенными на единицу. При этом возможно некоторое число линейных соотношений между новыми параметрическими $\tilde{\omega}$, которые преобразуют семейство ковариантов согласно лемме II.

Доказательство леммы разбиваем на две части.

1. Введение системы обозначений. Введём для коэффициентов l_{gi} систему обозначений:

группа $(\mathscr{N}, h)$:

$$\tilde{\omega}_{[\alpha_i]} = t_{\sigma_1+1,\, \alpha_2 \ldots \alpha_n}\omega_1 + t_{\alpha_1,\, \alpha_2+1 \ldots \alpha_n}\omega_2 + \ldots + t_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n+1}\omega_n, \tag{5}$$

группа $(\mathscr{N}', h')$:

$$\tilde{\omega}_{[\beta_i]} = t'_{\beta_1+1,\, \beta_2 \ldots \beta_n}\omega_1 + t'_{\beta_1,\, \beta_2+1 \ldots \beta_n}\omega_2 + \ldots + t'_{\beta_1\beta_2 \ldots \beta_n+1}\omega_n.$$

По поводу этих обозначений заметим:

a) *Они удовлетворяют требованию обращать все коварианты $\Pi_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n}$ в нуль, как это бывает при продолжении системы.*

Если значения (5) внести в выражения (4), то получим два члена с произведением $[\omega_i\omega_j]$: один происходит из произведения $[\omega_i\tilde{\omega}_{\alpha_1 \ldots \alpha_i+1 \ldots \alpha_n}]$, другой — из произведения $[\omega_j\tilde{\omega}_{\alpha_1 \ldots \alpha_j+1 \ldots \alpha_n}]$. В первом $\tilde{\omega}$ надо взять коэффициент при ω_j, следовательно, надо увеличить на единицу указатель a_j, во втором придётся увеличить указатель a_i. В обоих случаях получим один и тот же коэффициент $t_{a_1 \ldots a_i+1 \ldots a_j+1 \ldots a_n}$. Эти члены отличаются порядком множителей $[\omega_i\omega_j]$ и $[\omega_j\omega_i]$, следовательно, взаимно уничтожаются.

b) *Величины t, t' и т. д. подчиняются тем же уравнениям, что и формы $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}'$ и т. д. с теми же указателями, кроме одного* (который при переходе от $\tilde{\omega}$ к t увеличивается на единицу).

Действительно, если внести выражения (5) в те уравнения, которым должны удовлетворять главные $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}'$ и т. д., то, поскольку ω_i независимы, после приведения подобных членов коэффициенты при каждом ω_i должны обратиться в нуль. Это даёт для каждого коэффициента t те же соотношения, что и для его формы $\tilde{\omega}$.

c) *Среди коэффициентов t из группы $(\mathscr{N}, h)$ параметрическими являются только те, у которых последние $n—h$ указателей равны нулю.*

Действительно, в силу предыдущего замечания параметрическими могут быть только коэффициенты t, не принадлежащие главным $\tilde{\omega}$. Следовательно, если коэффициент t имеет один из последних указателей α_i $(i>h)$, большим единицы, то, поскольку при переходе от форм $\tilde{\omega}$ к коэффициентам t один из указателей увеличивается на единицу, та форма $\tilde{\omega}$, которая содержит этот коэффициент t, будет иметь указатель α_i-1, больший нуля, значит тем самым будет главной, и коэффициент t тоже — главный. С другой стороны, так как все указатели форм $\tilde{\omega}$ не могут равняться нулю (при переходе к ней от её ковариантa один указатель α_i увеличивается на единицу), а при переходе к коэффициентам t ещё один из указателей увеличивается на единицу, то коэффициент t, у которого хотя один указатель α_i $(i>h)$ равняется единице, всегда имеет по крайней мере ещё какой-то указатель $\alpha_j>0$. Если $j>h$, то положение доказано, ибо после уменьшения на единицу одного из указателей α_i или α_j форма $\tilde{\omega}$ будет иметь всё же один указатель, например α_j $(j>h)$, неравный нулю, и тем самым будет главной. Если $j<h$, то коэффициент t будет принадлежать не только форме $\tilde{\omega}_{\alpha_1 \ldots \alpha_j \ldots \alpha_i-1 \ldots \alpha_n}$ (параметрической), но и форме $\tilde{\omega}_{\alpha_1 \ldots \alpha_j-1 \ldots \alpha_i \ldots \alpha_n}$, которая является главной, ибо указатель α_i $(i>h)$ — не нуль; тем самым коэффициент t будет главным.

2. Приведение семейства ковариантов продолженной системы к нормальному виду. Выберем в качестве параметрических форм продолженной системы дифференциалы параметрических коэффициентов t, добавляя в случае надобности подходящие линейные комбинации форм ω_i, и припишем каждому такому выражению $\tilde{\omega}^*$, $\tilde{\omega}^{*\prime}, \ldots$ указатели того коэффициента t, $t', \ldots$, дифференциал которого оно содержит.

Каждый ковариант новой системы происходит от дифференцирования одного из уравнений (5). Мы ему припишем указатели того выражения $\tilde{\omega}_{[\alpha_i]}$, которое в этом уравнении содержится. Полученная система ковариантов будет иметь нормальный вид, как это мы сейчас покажем:

a) *Деление на группы сохранится то же, какое было для выражений* $\tilde{\omega}$, т. е. сохранятся группы первоначальной системы. При этом сумма указателей новых форм $\tilde{\omega}^*$ одной группы будет постоянна. Это число на единицу больше индекса $\mathscr{N}$ той же группы в исходной системе, ибо один из указателей каждой формы $\tilde{\omega}$ увеличен на единицу.

b) *Все коварианты будут иметь форму* (4). Действительно, при дифференцировании коэффициентов t в уравнении (5) будет получаться в точности разложение вида (4), а внешние дифференциалы от $\tilde{\omega}_{[\alpha_i]}$, и от каждого ω_i, как от форм кольца $\mathfrak{R}[\omega_i, \theta_k, \tilde{\omega}_g]$, будут принадлежать этому же кольцу, т. е. будут равняться сумме внешних произведений из форм ω_i, $\tilde{\omega}_g$, а поскольку $\tilde{\omega}_g$ линейно зависят от параметрических $\tilde{\omega}$ и с помощью формул (5) будут выражены через ω_i, то внешние дифференциалы от $\tilde{\omega}_{[\alpha_i]}$ и от каждого ω_i дают только сумму внешних произведений вида $[\omega_i\omega_j]$ со скалярными коэффициентами. Все эти произведения можно включить (необходимый признак, § 1, гл. IX) в стандартную форму вида (4), добавляя к дифференциалам dt подходящие линейные комбинации из форм ω_i.

c) *Каждый ковариант группы имеет параметрическими те* $\tilde{\omega}^*$, *которые содержат дифференциалы параметрических* t, т. е. те, у которых последние $n—h$ указателей равны нулю. Следовательно, показатели сохраняют свои значения.

Остаётся рассмотреть возможность линейных соотношений между параметрическими $\tilde{\omega}^*$.

§ 4. Понижение показателей групп при продолжении системы

Если система (S) была в инволюции, то семейство ковариантов сохранит все группы, все показатели, и только индексы всех групп будут неуклонно расти, что соответствует увеличению числа неизвестных функций введением дополнительных неизвестных $y_1, y_2, \ldots, y_{q'}$.

Если она не была в инволюции, то нельзя удовлетворить всем уравнениям системы (F) выбором коэффициентов l_{gi}, если сохранять все параметрические l_{gi} произвольными. В переводе на новые обозначения это означает, что параметрические $t, t', \ldots$ будут связаны некоторым числом конечных уравнений. Отсюда (лемма II) следует

Теорема. *При продолжении системы с нормальным семейством ковариантов все группы новых ковариантов сохраняются с теми же показателями и повышением индексов на единицу, но наличие конечных уравнений между параметрическими* l_{gi}, *если исходная система не была в инволюции, разбивает некоторые из групп с понижением показателя на единицу.*

§ 5. Приведение семейства ковариантов заданной системы Пфаффа к нормальному виду

В заключение докажем теорему:

Теорема. *Семейство ковариантов произвольной системы Пфаффа можно привести к нормальному виду.*

Мы видели (стр. 288), что коварианты непротиворечивой системы после одного продолжения можно привести к виду (3)

$$D\theta_k=[\omega_i\tilde{\omega}_k^i], \qquad i=1, 2, \ldots, n;\ k=1, 2, \ldots, s,$$

причём формы $\tilde{\omega}_k^i$ с указателями $k \leqslant \sigma_i$—параметрические. Числа σ_i суть характеры цепи.

Так как числа σ_i не возрастают $(\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_n)$, то у ковариантов $D\theta_k$ с указателем $k \leqslant \sigma_n$ все $\tilde{\omega}_k^i$—параметрические. Коварианты с заданным указателем k в пределах

$$\sigma_{p+1} < k \leqslant \sigma_p$$

имеют p параметрических $\tilde{\omega}_k^i$, именно тех, которые соответствуют указателям $i=1, 2, \ldots, p$, ибо, если $k < \sigma_p$, то $i < p$ (см. стр. 288). Будем называть $h=p$ *показателем каждого из этих ковариантов*.

Отнесём теперь каждый ковариант в отдельную группу, присвоив ей индекс $\mathcal{N}=0$ и показатель h, равный показателю ковариантa,— мы получим нормальную систему ковариантов.

§ 6. Стабилизация числа групп каждого показателя при достаточном продолжении системы

Приведём систему уравнений Пфаффа к виду системы с нормальным семейством ковариантов и распределим группы ковариантов на *классы* по величине показателя h. Например, для первоначальной системы Пфаффа, когда все индексы $\mathcal{N}$ равны нулю, каждый ковариант образует отдельную группу; в один класс с указателем h попадут все $\sigma_h—\sigma_{h+1}$ групп, содержащих по одному коварианту $D\theta_k=[\omega_i\tilde{\omega}_k^i]$, где указатель k удовлетворяет неравенству $\sigma_{h+1} < k \leqslant \sigma_h$.

Пусть $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$— числа групп в каждом классе (ν_p—число групп в классе с показателем $h=p$).

Покажем, что при последовательных продолжениях системы наступит момент, когда все числа ν стабилизируются.

Будем наблюдать изменение числа групп ν_n с наивысшим показателем $h=n$. Так как при продолжении системы группы сохраняются и показатель группы не растёт, но может понижаться при распадении группы, то увеличение числа групп в классе может происходить только от распадения групп из класса с показателем, на единицу большим. Поэтому число групп в наивысшем классе ν_n не может увеличиваться. Оставаясь целым неотрицательным, оно не может и неограниченно уменьшаться. Наступит момент, когда ν_n более меняться не будет.

Если $\nu_{p+1}, \ldots, \nu_n$ стабилизировались, то ν_p не может расти. Наступит момент, когда все числа $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ стабилизируются, но тогда при продолжении системы ни одна группа не распадается. Следовательно, при построении цепи интегральных элементов параметрические l_{gi} предыдущих указателей i не будут связаны никаким соотношением. Цепь будет регулярна, и система Пфаффа — в инволюции. Таким образом имеем теорему:

Теорема. *Всякую непротиворечивую систему Пфаффа можно привести в инволюцию конечным числом продолжений.*

§ 7. Изменение характеров при продолжении системы

Рассуждения, которые мы только что провели, доказывают и обратную теорему:

Если система — не в инволюции, то при продолжении её по крайней мере одна из групп нормального семейства ковариантов распадается с понижением показателя на единицу.

Как меняются при этом характеры?

С системой Пфаффа, как мы видели, связано три рода образований: ковариантны системы (билинейные формы), линейные формы $\tilde{\omega}$ и скалярные коэффициенты l. Они связаны уравнениями

$$\Pi_k = [\omega_i \tilde{\omega}_k^i], \tag{6}$$

$$\tilde{\omega}_k^i = l_k^{ij} \omega_j, \tag{7}$$

причём формы $\tilde{\omega}_k^i$ с указателями $k \leqslant \sigma_i$ — параметрические, остальные — главные.

Так как выражения (7) обращают в нуль все коварианты Π_k, то

$$l_k^{[ij]} [\omega_i \omega_j] = 0,$$

откуда, поскольку подобные члены приведены, имеем:

$$l_k^{[ij]} = \frac{1}{2}\left(l_k^{ij} - l_k^{ji}\right) = 0.$$

Следовательно, коэффициенты l_k^{ij} симметричны относительно верхних указателей, а так как при постоянном j они удовлетворяют тем же соотношениям, что и формы $\tilde{\omega}_k^i$, то параметрическими будут только те l_k^{ij}, у которых одновременно

$$k \leqslant \sigma_i, \quad k \leqslant \sigma_j.$$

Выполним одно продолжение системы. Допустим, что система (S) была в инволюции. Все параметрические l_g^{ij} станут дополнительными неизвестными продолженной системы (S'), система пополнится уравнениями (7). Все коварианты Π_k обратятся в нули. Если ввести новые формы

$$\omega_k^{ij} = dl_k^{ij} + c_k^{ijl} \omega_l,$$

то при подходящем выборе коэффициентов c_k^{ijl} новые коварианты [внешние дифференциалы от форм (7)] примут вид

$$\Pi_k^i = [\omega_j \tilde{\omega}_k^{ij}]. \tag{6'}$$

Параметрические $\tilde{\omega}_k^{ij}$ соответствуют параметрическим l_k^{ij}. Характеры новой системы σ_i' определят число их: число параметрических $\tilde{\omega}_k^{ij}$ с данным указателем j равно σ_j'.

С другой стороны, параметрические l_k^{ij} имеют указатель $k \leqslant \sigma_i$ и, кроме того, $l_k^{ij} = l_k^{ji}$. Всё это переносится на $\tilde{\omega}_k^{ij}$. Значит, чтобы не повторять те параметрические $\tilde{\omega}_k^{ij}$, которые уже встречались при меньших значениях указателя j, надо полагать $i = j, j+1, \ldots, n$. Отсюда вытекает формула

$$\sigma_j' = \sigma_j + \sigma_{j+1} + \ldots + \sigma_n, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

которая даёт правило изменения характеров системы, если она продолжается уже после того, как приведена в инволюцию.

Если система (S) ещё не была в инволюции, то параметрические l_k^{ij} будут связаны одним или несколькими конечными уравнениями. Эти параметрические коэффициенты для продолженного уравнения являются дополнительными неизвестными. Мы обратимся поэтому к доказательству теоремы:

Теорема. *Если на переменные системы наложить m произвольных конечных уравнений $(m \leqslant \sigma_n)$, то все характеры цепи сохранятся и только последний характер σ_n уменьшится на m единиц.*

Слово «произвольных» понимается в том смысле, что наложение этих условий не изменит ранга матриц, составленных из коэффициентов a_k^{ig} форм (1), которые могут содержать переменные.

Действительно, полные дифференциалы от присоединённых конечных уравнений пополнят систему уравнений Пфаффа, но, поскольку внешний дифференциал от полного дифференциала равен нулю, не изменят числа квадратичных уравнений расширенной системы. Подсчёт харектеров σ_i будет вестись определением рангов тех же матриц и, по договорённости, наложенные условия этот подсчёт не меняют.

Последний характер равняется разности

$$\sigma_n = q - \sigma_1 - \sigma_2 - \ldots - \sigma_{n-1}. \tag{a}$$

Так как число неизвестных функций q уменьшается на m функций в силу наложенных условий, то σ_n уменьшится на m единиц, если $\sigma_n > m$.

Если система была в инволюции и число добавленных соотношений не больше σ_n, то система останется в инволюции. Если система была не в инволюции, как это мы имеем при продолжении системы, когда на параметрические l_k^{ij} наложены дополнительные конечные соотношения, то и в этом случае критическая разность $Q - N$ от наложенных соотношений, вообще говоря, не изменится, ибо, хотя число Картана

$$Q = \sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + n\sigma_n$$

и уменьшится на mn единиц из-за уменьшения σ_n на m единиц, но и произвол N интегрального элемента $\mathcal{E}_n$ станет меньше на то же число. Действительно, в силу m конечных уравнений возникнет m линейных соотношений на формы $\tilde{\omega}_k^i$, и если они независимы от уравнений системы (S), то m параметрических форм станут главными; при этом, так как последний характер σ_n убавляется на m единиц, то уменьшается именно число параметрических форм $\tilde{\omega}_k^n$ с указателями $k \leqslant \sigma_n$. Следовательно, все потерянные формы принадлежат к классу с показателем $h = n$; каждая из этих форм имеет по n параметрических коэффициентов l_k^{ij}, и потеря m этих форм влечёт уменьшение числа параметрических l_k^{ij} на mn единиц.

Высказанное положение потеряет силу, если новые линейные формы вполне или отчасти будут следствиями форм Пфаффа системы (S). Точно так же, если наложенные конечные уравнения изменят ранги матриц, определяющие характеры цепи, то для частных значений переменных эти ранги могут только понизиться, и, следовательно, некоторые σ_i могут стать меньше, что в свою очередь задержит уменьшение σ_n, согласно формуле (а).

Во всяком случае можно утверждать[1]):

Если при продолжении системы старший характер σ_n остаётся неизменным, то система — в инволюции.

§ 8. Пример

Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_2$ системы Пфаффа

$$\begin{aligned} dz_1 &= u_1\,dx_1 - u_2\,dx_2\,,\\ dz_2 &= u_2\,dx_1 + u_1\,dx_2\,,\\ dz_3 &= u_3\,dx_1\,,\\ dz_4 &= u_4\,dx_1 - u_3\,dx_2\,,\\ dz_5 &= (u_1+u_2)\,dx_1 + u_4\,dx_2\,, \end{aligned}$$

на котором $[dx_1\,dx_2] \neq 0$. Показать существование решения и определить его произвол.

Решение. Дифференцируем уравнения внешним образом:

$$\text{(a)}\qquad \begin{aligned} \Pi_{00} &\equiv [du_1\,dx_1] - [du_2\,dx_2] = 0,\\ \Pi'_{00} &\equiv [du_2\,dx_1] + [du_1\,dx_2] = 0,\\ \Pi''_{00} &\equiv [du_3\,dx_1] = 0,\\ \Pi'''_{00} &\equiv [du_4\,dx_1] - [du_8\,dx_2] = 0,\\ \Pi^{IV}_{00} &\equiv [du_1 + du_2,\, dx_1] + [du_4 dx_2] = 0. \end{aligned}$$

Характеристическая система, кроме пяти дифференциалов dz_k и двух дифференциалов dx_1, dx_2, содержит ещё четыре формы du_i. Следовательно,

$$n = 2,\quad q = 4,\quad s_1 = 4\ ^{2)},\quad s_2 = 0;\quad Q = 4.$$

---

[1]) Cartan, Sur la structure des groupes infinis de transformations, Ann. de l'École Normale Sup., (3), 21, 1904, стр. 159 и след.

[2]) Ибо при четырёх неизвестных du_i ранг матрицы коэффициентов системы билинейных ковариантов, присоединённых к формам (а), не может быть больше четырёх.

Наиболее общее решение системы (а)

$$\text{(b)}\qquad \begin{aligned} du_1 &= v_1\,dx_1 - v_2\,dx_2\,,\\ du_2 &= v_2\,dx_1 + v_1\,dx_2\,,\\ du_3 &= v_3\,dx_1\,,\\ du_4 &= (v_1 - v_2)\,dx_1 - v_3 dx_2 \end{aligned}$$

зависит от $N = 3$ параметров. Следовательно, система — не в инволюции.

Чтобы привести систему ковариантов (а) к нормальному виду, мы их разбиваем на пять групп по одному коварианту в группе, полагая индекс каждой группы равным нулю: $\mathcal{N} = 0$, как это и обозначено в формулах (а). При этом, сохраняя обозначения (4) для форм $\tilde{\omega}$, имеем четыре параметрические формы:

$$\tilde{\omega}_{10} = du_1,\quad \tilde{\omega}'_{10} = du_2,\quad \tilde{\omega}''_{10} = du_3,\quad \tilde{\omega}'''_{10} = du_4\,.$$

Остальные связаны с ними соотношениями

$$\tilde{\omega}^{IV}_{10} = \tilde{\omega}_{10} + \tilde{\omega}'_{10}\,,\ \tilde{\omega}_{01} = -\tilde{\omega}'_{10},\ \tilde{\omega}'_{01} = \tilde{\omega}_{10}\,,\ \tilde{\omega}''_{01} = 0\,,$$
$$\tilde{\omega}'''_{01} = -\tilde{\omega}''_{10},\ \tilde{\omega}^{IV}_{01} = \tilde{\omega}'''_{10}.$$

Следовательно, первые четыре группы Π_{00}, Π'_{00}, Π''_{00}, Π'''_{00} имеют показатель $h = 1$, для последней $h = 0$.

Все группы делятся по величине указателя на два класса с числом групп ν_h показателя h:

$$\nu_1 = 4,\quad \nu_0 = 1.$$

Сохраняя обозначения (5) для коэффициентов t разложения форм $\tilde{\omega}$, мы видим, что между параметрическими коэффициентами

$$t_{20} = v_1,\ t'_{20} = v_2,\ t''_{20} = v_8,\ t'''_{20} = v_1 - v_2,$$

у которых последние $n - h$ указателей — нули, существует соотношение

$$t'''_{20} = t_{20} - t'_{20}\,.$$

При продолжении системы для новых форм $\rho_{ik} = dt_{ik}$ мы получим линейное соотношение

$$\rho'''_{20} = \rho_{20} - \rho'_{20}.$$

Следовательно, четвёртая группа P''' для продолженной системы разбивается с понижением показателя. Если в каждой группе сохранить только один ковариант, поскольку все остальные будут содержать только главные $\tilde{\omega}$, то при $\mathcal{N} = 0$ и $h = 1$ число новых групп $(0, h - 1)$,

$(1, h-1), \ldots, (\mathcal{N}, h-1)$, которые возникают при разбиении группы $P''' = (0, 1)$, будет равно $\mathcal{N}+1=1$. Следовательно, число групп не изменится, только после продолжения системы число ν_1 понизится, а ν_0 возрастёт на единицу:

$$\nu_1 = 3, \quad \nu_0 = 2.$$

Опуская главные $\tilde{\omega}$, поскольку они выражаются через параметрические и ничего нового не дают, мы можем дифференцировать прямо систему $(\mathfrak{b})$:

$$(\mathfrak{a}_1) \qquad \begin{aligned} \mathrm{P}_{00} &\equiv [dv_1\,dx_1] - [dv_2\,dx_2] = 0, \\ \mathrm{P}'_{00} &\equiv [dv_2\,dx_1] + [dv_1\,dx_2] = 0, \\ \mathrm{P}''_{00} &\equiv [dv_3\,dx_1] = 0, \\ \mathrm{P}'''_{00} &\equiv [dv_1 - dv_2, dx_1] - [dv_3\,dx_2] = 0. \end{aligned}$$

Так как из каждой группы мы сохраняем только по одному коварианту, то в новых обозначениях индекс принят равным нулю. При этом последняя группа P^{IV} выброшена целиком, а это уменьшает число ν_0 на единицу. Следовательно,

$$\nu_1^{(1)} = 3, \quad \nu_0^{(1)} = 1.$$

Группа P''' содержит только главные ρ.

Как и следовало ожидать, произойдёт понижение старшего из неравных нулю характеров s_i; теперь

$$n = 2, \;\; q = 3, \;\; s_1 = 3, \;\; s_2 = 0, \;\; Q = 3.$$

Наиболее общее решение системы $(\mathfrak{a}_1)$ запишется в виде

$$(\mathfrak{b}_1) \qquad \begin{aligned} \rho_{10} &\equiv dv_1 = w_1\,dx_1 - w_2\,dx_2, \\ \rho'_{10} &\equiv dv_2 = w_2\,dx_1 + w_1\,dx_2, \\ \rho''_{10} &\equiv dv_3 = (w_2 + w_1)dx_1. \end{aligned}$$

Значит, наиболее общий интегральный элемент $\mathcal{E}_2$ зависит от двух параметров: $N = 2$, и система всё ещё — не в инволюции.

Между параметрическими коэффициентами $\bar{t}$ для новых форм ρ (которые мы теперь записываем с индексом, на единицу бо́льшим)

$$\bar{t}_{20} = w_1, \quad \bar{t}'_{20} = w_2, \quad \bar{t}''_{20} = w_2 + w_1$$

имеется соотношение

$$\bar{t}''_{20} = \bar{t}'_{20} + \bar{t}_{20},$$

что приводит к линейному соотношению на формы $\lambda_{ik} = d\bar{t}_{ik}$:

$$\lambda''_{20} = \lambda'_{20} + \lambda_{20}.$$

Третья группа ковариантов Λ'' для продолженной системы разбивается с понижением показателя. Сохраняя в каждой группе только один ковариант с параметрическими λ_{ik}, мы можем считать её индекс равным нулю. При $\mathcal{N} = 0$ и $h = 1$ число групп не возрастает:

$$\nu_1 = 2, \quad \nu_0 = 2.$$

Опуская главные ρ, мы можем дифференцировать прямо систему $(\mathfrak{b}_1)$:

$$(\mathfrak{a}_2) \qquad \begin{aligned} \Lambda_{00} &\equiv [dw_1\,dx_1] - [dw_2\,dx_2] = 0, \\ \Lambda'_{00} &\equiv [dw_2\,dx_1] + [dw_1\,dx_2] = 0, \\ \Lambda''_{00} &\equiv [dw_2 + dw_1, dx_1] = 0. \end{aligned}$$

Так как в каждой группе оставлен только один ковариант с параметрическими $\bar{\bar{t}}$ (т. е. с параметрическими w_i), а последняя группа Λ''' выброшена целиком, то в новых обозначениях индекс равен нулю, а ν_0 уменьшится на единицу:

$$\nu_1^{(2)} = 2, \quad \nu_0^{(2)} = 1.$$

Для новой системы

$$n = 2, \;\; q = 2, \;\; s_1 = 2, \;\; s_2 = 0, \;\; Q = 2,$$

т. е. первый не равный нулю характер s_1 при продолжении системы ещё раз уменьшился на единицу. Наиболее общее решение

$$(\mathfrak{b}_2) \qquad \begin{aligned} \lambda_{10} &\equiv dw_1 = p_1\,dx_1 - p_1\,dx_2, \\ \lambda'_{10} &\equiv dw_2 = p_1\,dx_1 + p_1\,dx_2 \end{aligned}$$

содержит только один параметр p_1; значит $\mathcal{E}_2$ зависит от одного параметра: $N = 1$, и система — не в инволюции.

Среди параметрических

$$\bar{\bar{t}}_{20} = p_1, \quad \bar{\bar{t}}'_{20} = p_1$$

есть соотношение

$$\bar{\bar{t}}'_{20} = \bar{\bar{t}}_{20},$$

откуда для новых форм $\mu = d\bar{\bar{t}}$ следует линейное соотношение

$$\mu'_{20} = \mu_{20}.$$

Группа M' для продолженной системы распадается с понижением показателя (но без увеличения числа групп, если, сохраняя только существенно различные коварианты, положить $\mathcal{N} = 0$ и $h = 1$):

$$\nu_1 = 1, \quad \nu_0 = 2.$$

Опуская главные λ, можем дифференцировать систему $(\mathfrak{b}_2)$:

$$(\mathfrak{a}_8)\qquad \begin{aligned} M_{00} &\equiv [dp_1,\ dx_1 - dx_2] = 0, \\ M'_{00} &\equiv [dp_1,\ dx_1 + dx_2] = 0. \end{aligned}$$

Так как каждая группа содержит теперь только один ковариант, а последняя группа M'' (после разбиения) выброшена целиком, то индекс $\mathcal{N} = 0$ и

$$\nu_1^{(3)} = 1, \quad \nu_0^{(3)} = 1.$$

Здесь

$$n = 2,\ q = 1,\ s_1 = 1,\ s_2 = 0,\ Q = 1,$$

т. е. характер s_1 ещё уменьшился на единицу. Наиболее общее решение имеет вид

$$(\mathfrak{b}_8)\qquad \mu_{20} \equiv dp_1 = 0;$$

число параметров $N = 0$, и система — не в инволюции.

Новая система, пополненная уравнением $(\mathfrak{b}_8)$, вполне интегрируема. Все ковarианты равны нулю тождественно, нет групп с показателем выше нуля. Все характеры равны нулю: $s_1 = s_2 = 0$.

Так как система Пфаффа содержит, кроме первоначальных пяти уравнений, всю систему $(\mathfrak{b})$, $(\mathfrak{b}_1)$, $(\mathfrak{b}_2)$, $(\mathfrak{b}_3)$, то $s = 15$, и решение зависит от 15 произвольных постоянных.

ГЛАВА XI

ХАРАКТЕРИСТИКИ

§ 1. Характеристические элементы

Обратимся к рассмотрению особых интегральных элементов системы Пфаффа.

Интегральный элемент $\mathcal{E}_p^0$ называется *особым*, если через него проходит больше интегральных элементов $\mathcal{E}_{p+1}$, чем через соседние элементы $\mathcal{E}_p$.

Это значит, что линейные элементы $e_1^0, e_2^0, \ldots, e_p^0$, определяющие вместе с точкой (x_i^0, z_j^0) интегральный элемент $\mathcal{E}_p^0$, находятся в инволюции с бо́льшим числом интегральных линейных элементов e_i системы, чем линейные элементы соседних элементов $\mathcal{E}_p$. В частности, интегральный линейный элемент e_1^0 — особый, если он допускает больше интегральных линейных элементов в инволюции, чем соседние интегральные линейные элементы.

Среди всех особых интегральных элементов наиболее замечательны характеристические линейные элементы.

Определение. Интегральный линейный элемент называется *характеристическим*, если он находится в инволюции со всеми интегральными линейными элементами системы. Интегральный элемент p измерений — *характеристический*, если все его линейные элементы — характеристические.

Непосредственно из определения вытекает целый ряд замечательных свойств характеристических элементов.

Следствие 1. *Если система жанра n обладает характеристическим элементом p измерений E_p, то он принадлежит всем неособым интегральным элементам высшей размерности $\mathcal{E}_n$.*

Напомним, что число n называется жанром системы, если существует неособый интегральный элемент $\mathcal{E}_n$, через который не проходит ни одного интегрального элемента $\mathcal{E}_{n+1}$.

Допустим, что какой-то неособый интегральный элемент $\mathcal{E}_n$ не содержит хотя бы одного линейного элемента ε, принадлежащего данному характеристическому элементу E_p. Элемент ε, как принадлежащий характеристическому элементу E_p, — сам характеристический и находится в инволюции со всеми линейными элементами рассматриваемого неособого элемента $\mathcal{E}_n$. Поэтому он образует с ним интегральный элемент $(n+1)$-го измерения

$$\mathcal{E}_{n+1}=\{\mathcal{E}_n, \varepsilon\},$$

который пройдёт через элемент $\mathcal{E}_n$, противно предположению.

Следствие 2. *Если система Пфаффа жанра n обладает характеристическим элементом E_p, то найдутся неособые интегральные элементы $\mathcal{E}_{n-p}$, не имеющие ни одного линейного элемента, общего с элементом E_p.*

Возьмём любой неособый интегральный элемент $\mathcal{E}_n$ и откинем от него все линейные элементы, принадлежащие заданному характеристическому элементу E_p. Мы получим, очевидно, интегральный элемент $\mathcal{E}_{n-p}$, не имеющий общих линейных элементов с характеристическим элементом E_p. Если бы все такие элементы $\mathcal{E}_{n-p}$ были особыми, а неособые содержали элемент E_p, то особые элементы встречались бы как правило, а неособые были бы исключением, ибо определялись бы добавочным требованием: содержать элемент E_p. Это противоречит самому определению особого элемента: особые элементы те, которые имеют больше линейных элементов в инволюции, т. е. те, для которых число независимых уравнений в системе условий инволюционности понижается.

Теорема. *Если через всякую неособую точку пространства проходит характеристический линейный элемент, то система Пфаффа — первого рода.*

Напомним, что системой первого рода называется система Пфаффа с последним характером, равным нулю:

$$s_n=0,$$

т. е. система с истинным жанром n', не большим $n-1$.

Пусть ε — характеристический линейный элемент и n — жанр системы; всякий неособый интегральный элемент $\mathcal{E}_n$ содержит ε, и существует неособый интегральный элемент $\mathcal{E}_{n-1}$, не содержащий ε.

Сколько элементов $\mathcal{E}_n$ пройдёт через $\mathcal{E}_{n-1}$? Во всяком случае один — тот, который получится присоединением к нему элемента ε:

$$\mathcal{E}_n=(\mathcal{E}_{n-1}, \varepsilon).$$

Допустим, что найдётся и другой, получаемый присоединением линейного элемента e:

$$\mathcal{E}'_n=(\mathcal{E}_{n-1}, e).$$

Так как ε — характеристический элемент и, следовательно, находится в инволюции со всеми интегральными линейными элементами, то элемент $(n+1)$-го измерения

$$\mathcal{E}_{n+1}=(\mathcal{E}'_n, \varepsilon)=(\mathcal{E}_{n-1}, \varepsilon, e)=(\mathcal{E}_n, e)$$

— тоже интегральный и проходит через элемент $\mathcal{E}_n$, т. е. система Пфаффа, по крайней мере, $(n+1)$-го жанра, противно предположению. Следовательно, через неособый интегральный элемент $\mathcal{E}_{n-1}$ проходит только один интегральный элемент $\mathcal{E}_n$, а это и означает, что последний характер равен нулю:

$$s_n=0.$$

Таким образом, только системы первого рода (или выше) могут иметь характеристические элементы. Мы увидим далее, что не все системы первого рода имеют характеристические элементы.

Теорема эта легко обобщается.

Теорема. *Если во всякой неособой точке пространства переменных системы Пфаффа жанра n существует характеристический интегральный элемент E_p, то истинный жанр n' системы не выше $n-p$.*

Действительно, всякий неособый элемент $\mathcal{E}_n$ проходит через E_p и есть неособый элемент $\mathcal{E}_{n-p}$, не содержащий ни одного линейного элемента из E_p. Через элемент $\mathcal{E}_{n-p}$ пройдёт интегральный элемент

$$\mathcal{E}_n=(\mathcal{E}_{n-p}, E_p);$$

если бы проходил ещё один интегральный элемент

$$\mathcal{E}'_n=(\mathcal{E}_{n-p}, \mathcal{E}_p),$$

где элемент $\mathcal{E}_p$ отличается от характеристического элемента E_p хотя одним линейным элементом e_p, то существовал бы интегральный элемент по меньшей мере $n+1$-го измерения

$$\mathcal{E}=(\mathcal{E}_{n-p}, e_p, E_p)=(\mathcal{E}_n, e_p),$$

который проходил бы через $\mathcal{E}_n$, т. е. жанр системы был бы выше n, противно предположению.

Итак, через $\mathcal{E}_{n-p}$ проходит только один элемент $\mathcal{E}_n$, все p высших характеров равны нулю:

$$s_{n-p+1}=s_{n-p+2}=\ldots=s_n=0,$$

и истинный жанр n' равен $n-p$.

Следствие. *Если существует характеристический элемент p измерений E_p и неособый интегральный элемент $\mathcal{E}_{n-1}$, содержащий элемент E_p, то истинный жанр системы понижается ещё на единицу, до $n'=n-p-1$, где n — жанр системы.*

Действительно, откидывая от элемента $\mathcal{E}_{n-1}$ все линейные элементы характеристического E_p, мы получим интегральный элемент $\mathcal{E}_{n-p-1}$, содержащийся в элементе $\mathcal{E}_{n-1}$ и не имеющий ни одного общего линейного элемента с характеристическим E_p, а так как существует (как мы видели) только один интегральный элемент $\mathcal{E}_n$, проходящий через $\mathcal{E}_{n-1}$, то наш интегральный элемент $\mathcal{E}_{n-p-1}$ вместе с характеристическим элементом E_p вполне определяет неособый интегральный элемент $\mathcal{E}_n$. Если бы через элемент $\mathcal{E}_{n-p-1}$ проходил другой неособый интегральный элемент $\mathcal{E}'_n$, то он, как и всякий интегральный элемент n измерений, содержал бы E_p, а следовательно, включая в себя $\mathcal{E}_{n-p-1}$ и E_p, содержал бы и $\mathcal{E}_{n-1}$, противно утверждению, что через $\mathcal{E}_{n-1}$ проходит только один элемент $\mathcal{E}_n$.

Так как через $\mathcal{E}_{n-p-1}$ проходит только один элемент $\mathcal{E}_n$, то $p+1$ высших характеров равны нулю, и истинный жанр n' равен $n-p-1$.

Из всего предыдущего прямо вытекает

Теорема. *Если через каждую неособую точку пространства переменных системы Пфаффа жанра n проходит характеристический элемент p измерений, то все неособые интегральные многообразия $\mathfrak{M}_n$, проходящие через общую им неособую точку, имеют в этой точке общий элемент p измерений, и обратно: общий элемент $\mathcal{E}_p$ всех интегральных многообразий $\mathfrak{M}_n$ системы жанра n в их общей точке есть характеристический элемент.*

Прямая теорема следует из того, что касательный элемент любого интегрального многообразия $\mathfrak{M}_n$ системы жанра n, как всякий интегральный элемент $\mathcal{E}_n$, содержит характеристический элемент E_p, если этот последний существует; обратная теорема непосредственно вытекает из определения характеристического элемента: общий элемент p измерений всех интегральных многообразий $\mathfrak{M}_n$ в общей точке, очевидно, состоит из линейных элементов, которые находятся в инволюции со всеми интегральными линейными элементами.

§ 2. Характеристическая система заданной системы Пфаффа

Обратимся теперь к вопросу, какими уравнениями определяются характеристические элементы системы Пфаффа.

Возьмём систему уравнений Пфаффа

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \ldots, \theta_s = 0, \tag{1}$$

с приведённым семейством ковариантов (гл. IX, § 1)

$$\Theta_k = a_k^{ig}[\omega^i \bar{\omega}_g] = 0, \tag{2}$$

$$k = 1, 2, \ldots, s; \; i = 1, 2, \ldots, n; \; g = 1, 2, \ldots, q,$$

где ω_i — линейные формы, которые остаются независимыми на интегральном многообразии $\mathfrak{M}_n$ и $\bar{\omega}_g$ — те формы Пфаффа, которые вместе с формами θ_k и ω_i составляют базис кольца $\mathfrak{R}[dx, dz]$.

Характеристический элемент системы (1) прежде всего — интегральный элемент и как таковой удовлетворяет системе (1). Кроме того, он должен быть в инволюции со всеми интегральными элементами системы.

Каждый интегральный линейный элемент определяется значениями форм

$$\theta_k = 0, \; \omega_i, \; \bar{\omega}_g.$$

Два линейных элемента: характеристический $\varepsilon(\omega_i, \bar{\omega}_g)$ и произвольный интегральный $e(v_i, \bar{v}_g)$ находятся в инволюции, если они обращают в нуль ковариаиты (2). Выписывая значения внешних произведений для этих двух линейных элементов, получим:

$$a_k^{ig}(\omega_i \bar{v}_g - v_i \bar{\omega}_g) = 0.$$

Так как v_i, $\bar{v}_g$ могут принимать любые значения, то коэффициенты при них равняются нулю:

$$\begin{aligned} a_k^{ig}\omega_i &= 0, \\ a_k^{ig}\bar{\omega}_g &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Система уравнений (1), (3) определяет все характеристические элементы системы (1) и носит название *характеристической*.

Нетрудно заметить, что система (3) в левых частях содержит все алгебраические производные от ковариантов Θ_k, заданных уравнениями (2). Следовательно, система (1), (3) является ассоциированной системой форм (1), (2), и построенная нами характеристическая система совпадает с характеристической системой совокупности форм Пфаффа θ_k, как мы её определяли в § 6, гл. IV.

Более того, ввиду линейной независимости форм θ_k, ω_i, $\bar{\omega}_g$ левые части уравнений (3) можно рассматривать как алгебраические производные порядка $s+1$ от произведений

$$[\theta_1\theta_2 \ldots \theta_s\Theta] = a_k^{ig}[\theta_1\theta_2 \ldots \theta_s\omega_i\bar{\omega}_g],$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; \; g = 1, 2, \ldots, q; \; k = 1, 2, \ldots, s.$$

Следовательно, характеристическая система (1), (3) удовлетворяет определению § 7, гл. IV для характеристической системы пфаффовой системы уравнений (1). Отсюда вытекает, что система уравнений (1), (3) всегда вполне интегрируема и интегралы её образуют группу переменных, через которые можно выразить все уравнения системы так, что под знаком дифференциала и в коэффициенты будут входить только переменные этой группы, причём через меньшее число переменных систему (1) выразить нельзя.

а) Система нулевого рода. Система уравнений Пфаффа с приведённой системой ковариантов позволит нам глубже войти в построение характеристических элементов.

Введём выражения

$$\tilde{\omega}_k^i = a_k^{ig}\bar{\omega}_g,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; \; k = 1, 2, \ldots, s; \; g = 1, 2, \ldots, q,$$

и перенумеруем уравнения системы (1) так, чтобы параметрическими были те формы $\tilde{\omega}_k^i$, у которых указатель $k \leqslant s_i$, где s_i есть i-й характер системы (см. гл. X, § 1, стр. 288). В новых обозначениях уравнения второй строки системы (3) примут вид

$$\tilde{\omega}_k^i = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \; k = 1, 2, \ldots, s. \tag{4}$$

Чтобы иметь дело только с независимыми уравнениями, мы должны считать $k \leqslant s_i$.

Коварианты системы теперь разлагаются в сумму произведений вида

$$\Theta_k = [\omega_i \tilde{\omega}_k^i],$$

и условие, что линейные элементы $e(\omega_i, \tilde{\omega}_k^i)$ и $e(v_i, \tilde{v}_k^i)$ находятся в инволюции, примет в силу равенств (4) вид

$$\omega_1 \tilde{v}_k^1 + \omega_2 \tilde{v}_k^2 + \ldots + \omega_n \tilde{v}_k^n = 0. \tag{5}$$

Если старший характер $s_n \geqslant 1$ и все остальные тем более не меньше единицы, то в уравнении (5) при $k = 1$ все формы $\tilde{v}_1^i$ — параметрические, значит могут быть заданы произвольно. Коэффициенты при них в этом уравнении (5) должны равняться нулю, и мы имеем в дополнение к уравнениям (4) систему

$$\omega_i = 0. \tag{6}$$

Совокупность линейно независимых форм, обращающихся в нуль, составляется из s форм θ_k, n форм ω_i и

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_n = q$$

параметрических форм $\tilde{\omega}_k^i$, а всего из

$$s + n + q = n + r$$

форм, т. е. число линейно независимых уравнений характеристической системы (1), (4), (6) равно числу всех переменных задачи. Характеристическая система имеет следствием

$$dx_i = 0, \; dz_j = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, r,$$

и характеристические элементы отсутствуют, ибо все дифференциалы переменных равны нулю.

b) Система первого рода. Если система Пфаффа — точно первого рода, т. е.

$$s_n = 0, \quad s_{n-1} \geqslant 1,$$

то все формы $\tilde{\omega}_k^n$ — главные, т. е. линейно зависят от параметрических. Пусть для первой из этих форм $\tilde{\omega}_1^n$ такая зависимость имеет

вид

$$\tilde{\omega}_1^n = g_\alpha^\lambda \tilde{\omega}_\lambda^\alpha,$$
$$\alpha = 1, 2, \ldots, n-1; \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, s_\alpha,$$

где в правой части могут встречаться все параметрические формы $\tilde{\omega}_k^i$.

Сделаем линейную подстановку над формами ω_i:

$$\bar{\omega}_\alpha = \omega_\alpha + g_\alpha^1 \omega_n, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n-1.$$
$$\bar{\omega}_n = \omega_n.$$

Первый ковариант примет вид

$$\Theta_1 = [\bar{\omega}_\alpha \tilde{\omega}_1^\alpha] + [\bar{\omega}_n, \tilde{\omega}_1^n - g_\alpha^1 \tilde{\omega}_1^\alpha], \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Единственный результат подстановки тот, что новое выражение $\bar{\omega}_1^n$, т. е. $\tilde{\omega}_1^n - g_\alpha^1 \tilde{\omega}_1^\alpha$, не будет содержать параметрических $\tilde{\omega}_1^\alpha$ из разложения первого коварианта.

Допустим, что это преобразование уже выполнено, вернёмся к прежнему обозначению форм ω_i и запишем формулу линейной зависимости $\tilde{\omega}_1^n$ в виде

$$\tilde{\omega}_1^n = g_\beta^\lambda \tilde{\omega}_\lambda^\beta,$$
$$\beta = 1, 2, \ldots, n-1; \qquad \lambda = 2, 3, \ldots, s_\beta.$$

Мы можем теперь произвольно задать не только $\tilde{v}_1^1, \tilde{v}_1^2, \ldots, \tilde{v}_1^{n-1}$, но и $\tilde{v}_1^n$, ибо эта форма от предыдущих не зависит. Уравнение (5) даёт нам попрежнему

$$\omega_i = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

и характеристических элементов существовать не будет.

Рассуждения падают, если после подстановки форма $\tilde{\omega}_1^n$ тождественно обратится в нуль. Тогда для всякого линейного элемента $e(v_i, v_k^i)$ форма $\bar{v}_1^n$ равна нулю, и ω_n из первого уравнения (5) для $k = 1$ останется произвольной, когда все остальные ω_i обратятся в нуль:

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_{n-1} = 0. \tag{6'}$$

Внося значения (4), (6′) в остальные коварианты системы, получим

$$\omega_n \tilde{v}_k^n = 0, \qquad n \text{ — число независимых переменных,}$$

откуда попрежнему получим

$$\omega_n = 0,$$

если только не обращаются тождественно в нуль все параметрические формы

$$\tilde{\omega}_k^n = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, s.$$

Если же $\tilde{\omega}_k^n = 0$, то характеристическая система принимает вид

$$\theta_1 = 0,\ \theta_2 = 0,\ \ldots,\ \theta_s = 0,$$
$$(7)\qquad \omega_1 = 0,\ \omega_2 = 0,\ \ldots,\ \omega_{n-1} = 0,$$
$$\tilde{\omega}_k^i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1; \quad k = 1, 2, \ldots, s_i.$$

Так как она содержит

$$s + n - 1 + q = n + r - 1$$

уравнений на $n + r$ переменных, то система вполне интегрируема. Пусть

$$y_1 = C_1,\ y_2 = C_2,\ \ldots,\ y_{r+n-1} = C_{r+n-1}, \qquad C_i = \text{const.},$$

— её первые $r + n - 1$ интегралов; они определяют характеристические кривые, которые в каждой точке касаются характеристических линейных элементов.

Присоединим к системе функций $y_1, y_2, \ldots, y_{r+n-1}$ ещё одну функцию y_{r+n}, независимую от предыдущих, и примем их за новые переменные. Тогда, очевидно, все формы θ_k будут линейно выражены через первые $r + n - 1$ дифференциалов dy, а также и формы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}, \tilde{\omega}_k^i$. Наоборот, ω_n необходимо содержит последний дифференциал dy_{r+n}, иначе форма ω_n обращалась бы в нуль как следствие системы (7), что невозможно, ибо по условию ω_n линейно не зависит от форм (7). Так как ни один ковариант Θ_k не содержит ω_n, то ни одна внешняя производная не содержит дифференциала dy_n. Это значит, что левые части уравнений системы Пфаффа $\theta_k = 0$ не содержат переменную y_n ни под знаком дифференциала dy_n, ни в коэффициентах. Итак, если принять за переменные первые интегралы характеристической системы (характеристические переменные), то система Пфаффа будет содержать одной переменной меньше.

Чтобы найти интегральное многообразие $\mathfrak{M}_n$ первоначальной системы, достаточно найти интегральное многообразие $\mathfrak{M}_{n-1}$ новой системы. Новая система имеет те же характеры, кроме последнего, который равен нулю; её жанр n' ниже на единицу:

$$s' = s,\ s'_1 = s_1,\ \ldots,\ s'_{n-1} = s_{n-1}, \qquad n' = n - 1.$$

Так как переменная y_{r+n} совсем не входит в уравнения системы, то она остаётся совершенно произвольной. Меняя y_{r+n}, мы перемещаемся по характеристике:

$$(8)\qquad y_1 = \text{const.},\ y_2 = \text{const.},\ \ldots,\ y_{r+n-1} = \text{const.},$$

и из интегрального многообразия $\mathfrak{M}_{n-1}$ редуцированной системы получаем интегральное многообразие $\mathfrak{M}_n$. Следовательно, всякое интегральное многообразие $\mathfrak{M}_n$ нашей системы есть геометрическое место характеристических кривых (8).

c) Система истинного жанра $n' = n - p$. Допустим, что последние p характеров системы равны нулю:

$$s_{n-p+1} = s_{n-p+2} = \ldots = s_n = 0, \qquad s_{n-p} \geqslant 1,$$

все формы $\tilde{\omega}_k^n, \tilde{\omega}_k^{n-1}, \ldots, \tilde{\omega}_k^{n-p+1}$ — главные, т. е. линейно зависят от параметрических. Обозначим для удобства записи истинный жанр системы n' буквой $\nu = n - p$, и пусть уравнения этих линейных зависимостей имеют вид

$$(9)\qquad \tilde{\omega}_k^{\nu+l} = g_{k\gamma}^{l\lambda}\,\tilde{\omega}_\lambda^\gamma,$$
$$k = 1,\ 2, \ldots, s;\ l = 1,\ 2, \ldots, p;\ \gamma = 1,\ 2, \ldots, \nu,\ \lambda = 1,\ 2, \ldots, s_\gamma.$$

Сделаем линейную подстановку над формами ω_i:

$$\bar{\omega}_\gamma = \omega_\gamma + g_{1\ \gamma}^{l\ 1}\,\omega_{\nu+l},$$
$$\bar{\omega}_{\nu+l} = \omega_{\nu+l}.$$

После подстановки коварианты системы сохранят свой вид:

$$\Theta_k = [\bar{\omega}_i\,\bar{\omega}_k^i],$$

причём новые формы с индексом $k = 1$ будут иметь вид:

$$\bar{\omega}_1^{\nu+l} = \tilde{\omega}_1^{\nu+l} - g_{1\ \gamma}^{l\ 1}\,\tilde{\omega}_1^\gamma,$$

следовательно, не будут зависеть от параметрических $\bar{\omega}_1^i$ первого коварианта. Будем считать, что это преобразование выполнено, и вернёмся к прежним обозначениям $\omega_i, \tilde{\omega}_k^i$.

Так как в первом коварианте формы $\tilde{\vartheta}_1^{\nu+l}$ теперь не зависят от параметрических $\tilde{\vartheta}_1^\gamma (\gamma = 1,\ 2, \ldots, \nu)$, то мы можем дать им произвольные значения, например, положить равными нулю, а формы $\tilde{\vartheta}_1^\gamma$ — равными нулю, кроме одной; это приведёт нас к уравнениям для характеристических элементов

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_\nu = 0,$$

и у нас останутся ещё равенства вида

$$\omega_{\nu+l}\tilde{\vartheta}_k^{\nu+l} = 0,$$
$$k = 1,\ 2, \ldots, s; \qquad l = 1,\ 2, \ldots, p.$$

Если сюда внести выражения $\tilde{\vartheta}_k^{\nu+l}$ через параметрические по формулам (9) и приравнять нулю коэффициенты при параметрических $\tilde{\vartheta}_\lambda$, то получим несколько уравнений на $\omega_{\nu+l}$.

Если число независимых уравнений не меньше p, то все $\omega_{\nu+l}$ равны нулю, и характеристических элементов нет, ибо на таком элементе все формы ω_i должны быть равны нулю. Если число независимых уравнений равно $p-\rho$, то существует ρ произвольных форм $\omega_{\nu+l}$, и, следовательно, в каждой неособой точке существует характеристический элемент ρ измерений.

Число ρ достигает наибольшего значения $\rho=p$, если все уравнения на $\omega_{\nu+l}$ обращаются в тождества, а все $\tilde{\upsilon}_k^{\nu+l}$ равны нулю, т. е. все формы $\tilde{\omega}_k^{\nu+l}$ равны нулю тождественно. Тогда все формы $\omega_{\nu+1}, \omega_{\nu+2}, \ldots, \omega_n$ произвольны. В каждой точке существует характеристический элемент p измерений.

Характеристическая система будет иметь вид

$$\begin{aligned}
&\theta_1=0,\ \ \theta_2=0, \ldots,\ \theta_s=0,\\
(10)\qquad &\omega_1=0,\ \ \omega_2=0, \ldots,\ \omega_\nu=0,\\
&\tilde{\omega}_\lambda^\gamma=0, \qquad \gamma=1, 2, \ldots, \nu; \quad \lambda=1, 2, \ldots, s_\gamma.
\end{aligned}$$

Характеристическая система будет вполне интегрируема, и наименьшее число переменных, которое будет содержать система (1) в дифференциалах и коэффициентах после подходящей замены, будет равно числу независимых уравнений характеристической системы (10). Этими переменными могут служить первые интегралы системы (10). Более того, если система Пфаффа (1) может быть представлена в двух видах: через переменные $t_1, t_2, \ldots, t_m$ и через переменные $y_1, y_2, \ldots, y_m$, то характеристическая система (10) может быть приведена к виду

$$dt_1=dt_2=\ldots=dt_m=0$$

или

$$dy_1=dy_2=\ldots=dy_m=0,$$

откуда прямо следует, что переменные $t_1, t_2, \ldots, t_m$ суть функции от переменных y_j. Система, полученная после редукции переменных к минимуму, будет состоять из тех же самых уравнений (1) с теми же самыми ковариантами и, следовательно, с теми же самыми характерами, только отпадут последние равные нулю p характеров, а число независимых переменных и жанр системы уменьшится на p единиц:

$$s'=s, \quad s_1'=s_1, \quad \ldots, \quad s_{n-p}'=s_{n-p}, \qquad n'=n-p.$$

Для вполне интегрируемой системы все характеры $s_1, s_2, \ldots, s_n$ равны нулю, истинный жанр равен нулю, и характеристическая система совпадает с системой Пфаффа; все интегральные элементы — характеристические.

Отметим, наконец, свойства интегральных многообразий:

Если в каждой неособой точке пространства переменных системы Пфаффа существует характеристический элемент p измерений, то

1) через всякую точку проходит *характеристическое многообразие p* измерений $\mathbf{M}_p$, которое в каждой точке имеет такой характеристический элемент своим касательным элементом;

2) всякое неособое интегральное многообразие $\mathfrak{M}_n$ системы Пфаффа жанра n образовано семейством характеристических многообразий $\mathbf{M}_p$, зависящим от $n-p$ параметров; через всякую точку многообразия $\mathfrak{M}_n$ проходит одно такое характеристическое многообразие;

3) если два многообразия $\mathfrak{M}_n$ и $\mathfrak{M}'_n$ имеют общую точку, то они имеют общее характеристическое многообразие, проходящее через эту точку.

§ 3. Характеристические элементы системы внешних дифференциальных уравнений

Построенная теория легко распространяется на дифференциальные уравнения с внешними формами любой степени.

Рассмотрим систему внешних дифференциальных уравнений

$$(11)\qquad \Theta_1=0,\ \ \Theta_2=0, \ldots,\ \Theta_s=0,$$

где каждая форма Θ_k есть внешняя дифференциальная форма степени π_k, свободная от общего (во всех членах формы) функционального множителя. Этого, например, можно достигнуть, если привести к единице коэффициент при внешнем произведении дифференциалов у одного из членов формы.

Расширенная система $(\mathfrak{S})$ получается присоединением к системе (11) внешних дифференциалов

$$(12)\qquad D\Theta_1=0,\ \ D\Theta_2=0, \ldots,\ D\Theta_s=0.$$

Характеристическая система (Σ) для системы (S) состоит из уравнений $2s$ ассоциированных систем к формам расширенной системы $(\mathfrak{S})$. Первые интегралы характеристической системы (Σ) составят группу переменных (в наименьшем числе), через которые можно выразить все уравнения системы (S) так, что под знаком дифференциала и в коэффициентах будут только переменные этой группы.

Характеристическая система и в этом случае определяет характеристические линейные элементы, т. е. интегральные элементы, которые находятся в инволюции со всеми интегральными линейными элементами.

Действительно, интегральным элементом $\mathcal{E}_p$ называется p-мерный элемент, обращающий в нуль все формы присоединённого к системе (S) идеала $\mathfrak{a}$. Для этого достаточно, чтобы p линейно независимых линейных элементов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots \boldsymbol{e}_p$, определяющих $\mathcal{E}_p$, удовлетворяли уравнениям $p+1$ систем $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_p$, где каждая система $\mathfrak{S}_i$ содержит все уравнения расширенной системы $(\mathfrak{S})$ с формами степени i. Характеристический элемент $\varepsilon(\delta)$ по определению должен быть в инволюции со всеми интегральными элементами $e_i\,(d_i)$, т. е. должен удовлетворять уравнениям системы ($\mathfrak{S}$) вместе с любыми интегральными элементами.

Рассмотрим же какую-нибудь форму Φ из системы $\mathfrak{S}_p$ и один член её

$$A\,[\omega_1\,\omega_2\ldots\omega_p].$$

Значение его для p систем дифференциалов δ, d_1, d_2, $\ldots$, d_{p-1} имеет вид определителя

$$A\,[\omega_1\,\omega_2\ldots\omega_p] = A\begin{vmatrix} \omega_1(\delta) & \omega_2(\delta)\ldots & \omega_p\,(\delta) \\ \omega_1(d_1) & \omega_2(d_1)\ldots & \omega_p\,(d_1) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \omega_1(d_{p-1}) & \omega_2(d_{p-1})\ldots & \omega_p(d_{p-1}) \end{vmatrix}.$$

Если мы выберем элементы $e_i(d_i)$ так, чтобы $\omega_p = \omega_{p+1} = \ldots = \omega_n = 0$, а определитель $\det|\,\omega_1\;\omega_2\ldots\omega_{p-1}\,| = H$ был отличен от нуля, то рассматриваемый член получит значение

$$\pm AH\omega_p(\delta),$$

а вся форма Φ значение

$$\Phi = \left(\frac{\partial^{p-1}\Phi}{\partial\omega_1\,\partial\omega_2\ldots\partial\omega_{p-1}}\right)_{\delta} H, \tag{13}$$

где в скобках записана алгебраическая производная от формы, а указатель δ означает, что линейная форма, полученная в результате алгебраического дифференцирования, написана для символа дифференцирования δ.

При произвольной величине H значение формы Φ будет равно нулю, если $\varepsilon(\delta)$ удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial^{p-1}\Phi}{\partial\omega_1\,\partial\omega_2\ldots\partial\omega_{p-1}} = 0.$$

Такие же равенства получим для всех других сочетаний по $p-1$ указателей из чисел 1, 2, ..., N, где $\mathrm{N} = n + r_0$.

Быстрее этот результат можно получить, если обратиться к формуле (3′) § 2, гл. IV, которая в наших обозначениях напишется в виде

$$p!\,\Phi = \left[\frac{\partial^{p-1}\Phi}{\partial\omega_{\alpha_1}\,\partial\omega_{\alpha_2}\ldots\partial\omega_{\alpha_{p-1}}}\,\omega_{\alpha_1}\;\omega_{\alpha_2}\ldots\omega_{\alpha_{p-1}}\right],$$

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\ \alpha_{p-1} = 1,\ 2,\ldots,\ \mathrm{N},\ \ \mathrm{N} = n + r_0.$$

Отсюда следует, что характеристические элементы должны удовлетворять всем уравнениям $2s$ ассоциированных систем для форм Θ_k, $D\Theta_k$.

Обратно, если все смешанные алгебраические производные порядка $p-1$ обращаются в нуль, то по формуле (13) форма Φ обратится в нуль, каковы бы ни были остальные $p-1$ линейных элементов e_1, $e_2, \ldots, e_{p-1}$. Следовательно, каждый линейный элемент, удовлетворяющий характеристической системе гл. IV, является характеристическим элементом ε.

Если общее число переменных системы (11) равно N и ранг m характеристической системы меньше N: $m < \mathrm{N}$, то в каждой неособой точке существует характеристический элемент $\mathrm{N} - m$ измерений. Характеристическая система вполне интегрируема; следовательно, через каждую интегральную точку пространства M_0 [удовлетворяющую системе (S_0)] будет проходить характеристическое многообразие $\mathrm{N} - m = h$ измерений $\mathbf{M}_h$. Если жанр системы (11) равен n, то всякое неособое интегральное многообразие $\mathfrak{M}_n$, проходящее через точку M_0, будет содержать целиком характеристическое многообразие $\mathbf{M}_h$.

Действительно, допустим, что система (S), определяемая уравнениями (11), содержала N переменных x_1, $x_2, \ldots, x_{\mathrm{N}}$, а после перехода к характеристическим переменным y_1, $y_2, \ldots, y_m$ (интегралы характеристической системы) преобразовалась в систему (S^*), которая имеет те же уравнения, но содержит только m переменных. Жанр новой системы (S^*) понизился на h единиц, и интегральное многообразие $\mathfrak{M}_n$ в переменных y_j стало многообразием $\mathfrak{M}^*_{n-h}$ только $n-h$ измерений. Если в точке M_0 переменные y_j принимают значения (y_j^0), удовлетворяющие уравнениям, которые определяют $\mathfrak{M}^*_{n-h}$, то, возвращаясь к переменным x_i, мы найдём, что все точки $M(x_i)$, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$y_j(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_{\mathrm{N}}) = y_j^0, \qquad j = 1,\ 2,\ldots,\ m,$$

будут составлять характеристическое многообразие $\mathbf{M}_h$ и вместе с тем будут лежать на многообразии $\mathfrak{M}_n$, которое в переменных y_j определяется теми же уравнениями, что и $\mathfrak{M}^*_{n-h}$.

Таким образом каждое интегральное многообразие $\mathfrak{M}_n$ образовано характеристическими многообразиями $\mathbf{M}_h$, проходящими через все точки любого интегрального многообразия $\mathfrak{M}^*_{n-h}$, не содержащего характеристических элементов.

При переходе от системы (S) к системе (S^*) все первые $n-h$ характеров остаются неизменными, только число переменных и жанр системы понижаются на h единиц. Последние h характеров системы (S) должны равняться нулю, ибо через всякий неособый касательный элемент $\mathfrak{E}_{n-h}$ многообразия $\mathfrak{M}^*_{n-h}$ (не содержащего характеристических элементов) проходит единственный интегральный элемент $\mathfrak{E}_n$, именно: касательный элемент интегрального многообразия $\mathfrak{M}_n$, получаемый присоединением к элементу $\mathfrak{E}_{n-h}$ всех линейных элементов характеристического элемента E_h.

§ 4. Пример

Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ системы Пфаффа

$$\text{(a)}\qquad \begin{aligned} dz_1 &= u\,dx + v\,dy - z\,dv, \\ dz_2 &= u\,dz - y\,du + v\,dx, \end{aligned}$$

на котором $[dx\,dy\,dz] \neq 0$. Показать существование решения, определить его произвол и исследовать характеристические многообразия.

Решение. Дифференцируя систему внешним образом, получим:

$$\text{(b)}\qquad \begin{aligned} &[du\,dx] + [dv\,dy] + [dv\,dz] = 0, \\ &[du\,dz] + [du\,dy] + [dv\,dx] = 0. \end{aligned}$$

Наиболее общее решение системы (b) зависит от $N = 2$ параметров:

$$\begin{aligned} du &= a\,dx + b(dy + dz), \\ dv &= b\,dx + a(dy + dz). \end{aligned}$$

С другой стороны, кроме неизвестных функций z_i, дифференциалы которых определяются системой (a), она содержит ещё $q = 2$ неизвестных u, v. Развёртывая квадратичные уравнения для двух линейных элементов $e_1(d)$ и $e_2(\delta)$, мы увидим, что при заданном первом линейном элементе и при заданном высечении (определяемом дифференциалами δx, δy, δz) второго дифференциалы δu, δv будут определены, если не равен нулю определитель

$$\begin{vmatrix} dx & dy + dz \\ dy + dz & dx \end{vmatrix} = dx^2 - (dy + dz)^2.$$

При этом условии $s_1 = 2$, а так как $q = 2$, то $s_2 = s_3 = 0$, и признак Картана удовлетворён:

$$Q = s_1 + 2s_2 + 3s_3 = 2, \quad N = 2.$$

Система — в инволюции. Интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ зависит от трёх функций одного аргумента.

Характеристическая система содержит, кроме уравнений (a), ещё алгебраические производные от квадратичных уравнений (b) по всем дифференциалам du, dv, dx, dy, dz. Мы получаем систему

$$\text{(c)}\qquad \begin{aligned} &dx = 0, \quad du = 0, \quad dv = 0, \quad dy + dz = 0, \\ &dz_1 = v\,dy, \quad dz_2 = u\,dz. \end{aligned}$$

Принимая её первые интегралы за новые переменные

$$x,\ u,\ v,\quad \xi = y + z,\quad \zeta_1 = z_1 + vz,\quad \zeta_2 = z_2 + uy,$$

получим систему Пфаффа и её систему ковариантов в виде

$$\text{(a}'\text{)}\qquad d\zeta_1 = u\,dx + v\,d\xi, \quad d\zeta_2 = v\,dx + u\,d\xi,$$

$$\text{(b}'\text{)}\qquad [du\,dx] + [dv\,d\xi] = 0, \quad [dv\,dx] + [du\,d\xi] = 0.$$

Здесь независимых переменных только $n' = 2$; попрежнему имеем: $q' = 2$, $s' = 2$, $s'_1 = 2$ и $s'_2 = 0$. Интегральное многообразие $\mathfrak{M}^*_2$ (не содержащее характеристических элементов) существует с произволом двух функций от одного аргумента.

Характеристический элемент определяется системой (c). При этом дифференциал dy может принимать произвольные значения, лишь бы

$$dz = -dy \quad \text{и} \quad dz_1 = v\,dy.$$

Иными словами, сохраняя характеристические переменные x, u, v, ξ, ζ_1, ζ_2 неизменными, мы можем произвольно менять y, не выходя из интегрального многообразия $\mathfrak{M}_3$. Это многообразие можно рассматривать как образованное прямыми, параллельными оси y в пространстве всех переменных (семи измерений), проведёнными из всех точек многообразия $\mathfrak{M}^*_2$. Эти прямолинейные образующие суть характеристики.

Система (a′) легко интегрируется. В самом деле, из неё следует

$$u = \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} = \frac{\partial \zeta_2}{\partial \xi}, \qquad v = \frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi} = \frac{\partial \zeta_2}{\partial x};$$

значит,

$$\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial \xi^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial \xi^2} = 0,$$

и общий интеграл, который определяет интегральное многообразие $\mathfrak{M}^*_2$, запишется в виде

$$\begin{aligned} &\zeta_1 = \varphi(x + \xi) + \psi(x - \xi), \quad \zeta_2 = \varphi(x + \xi) - \psi(x - \xi), \\ &u = \varphi'(x + \xi) + \psi'(x - \xi), \quad v = \varphi'(x + \xi) - \psi'(x - \xi), \end{aligned}$$

где штрихом обозначена производная функции по её аргументу.

Интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ определяется относительно независимых переменных x, y, z уравнениями

$$\begin{aligned} &u = \varphi'(x + y + z) + \psi'(x - y - z), \quad v = \varphi'(x + y + z) - \psi'(x - y - z), \\ &z_1 = \varphi(x + y + z) + \psi(x - y - z) - z\,\{\varphi'(x + y + z) - \psi'(x - y - z)\}, \\ &z_2 = \varphi(x + y + z) - \psi(x - y - z) - y\,\{\varphi'(x + y + z) + \psi'(x - y - z)\}. \end{aligned}$$

§ 5. Редукция числа переменных системы Пфаффа

При выводе характеристической системы и установлении наименьшего числа переменных в § 2 мы молчаливо предполагали, что число независимых форм $\overline{\omega}_g$ уже приведено к минимуму. Между тем этого могло и не быть, и своим предположением мы существенно ограничили поле приложений характеристической системы.

Одним из очень важных и часто встречающихся в геометрии приложений систем Пфаффа является задача интегрирования системы уравнений в частных производных первого порядка. В самом деле, такая система устанавливает некоторые зависимости между частными производными первого порядка от r неизвестных функций z_j. Вводя вспомогательные переменные $u_1, u_2, \ldots, u_q$, мы можем выразить все частные производные от r функций z_j по независимым переменным x_i и, следовательно, можем написать полные дифференциалы dz_j. Мы получаем таким образом систему s уравнений Пфаффа, содержащую r неизвестных функций z_j и n независимых переменных x_i под знаком дифференциала, причём коэффициенты могут зависеть от всех этих переменных и ещё от q вспомогательных переменных $u_1, u_2, \ldots, u_q$. Интегрирование заданной системы уравнений в частных производных равносильно отысканию интегрального многообразия $\mathfrak{M}_n$, на котором n форм ω_i, линейно выражающих дифференциалы dx_i, остаются независимыми. Обратно, задача определения интегрального многообразия $\mathfrak{M}_n$ системы Пфаффа, на котором заданные n форм $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ остаются независимыми, эквивалентна интегрированию системы уравнений в частных производных. Отыскивая наиболее общий интегральный элемент n измерений, мы представим дифференциалы всех неизвестных функций dz_j линейными комбинациями форм ω_i с коэффициентами в виде функций от переменных x_i, z_j и известного числа вспомогательных параметров $u_1, u_2, \ldots, u_q$. Если выразить формы ω_i через дифференциалы dx_i, то эти уравнения определят все частные производные от неизвестных z_j по независимым переменным x_i в функциях от x_i, z_j и вспомогательных параметров $u_1, u_2, \ldots, u_q$. Исключая эти последние, мы и получим систему уравнений в частных производных первого порядка.

Возможно, что при переходе от системы уравнений в частных производных к системе Пфаффа мы выбрали параметры $u_1, u_2, \ldots, u_q$ в большем числе, чем это требуется, т. е. что систему (1)

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad \ldots, \quad \theta_s = 0$$

можно заменить алгебраически эквивалентной системой, содержащей те же неизвестные функции z_j, те же независимые переменные и меньшее число $q' < q$ вспомогательных переменных $u'_1, u'_2, \ldots, u'_{q'}$.

Задача определения наименьшего числа параметров q' имеет большое значение в геометрических приложениях систем Пфаффа. Геометрический образ — поверхность, конгруэнция, пара поверхностей с определённым соответствием точек, триортогональная система поверхностей и т. д. — определяется при пользовании методом Картана компонентами бесконечно малых перемещений системы отнесения — прямоугольного или косоугольного трёхгранника, тетраэдра и т. д., присоединённой к каждому элементу — точке, лучу и т. д. — нашего образа. При этом может возникнуть сомнение, выбрана ли система отнесения, связанная с данным элементом геометрического образа, единственным способом, или она зависит от некоторого числа вспомогательных параметров, при изменении которых система отнесения перемещается, не покидая того элемента, к которому она присоединена. В последнем случае степень произвола интегрального многообразия $\mathfrak{M}_n$ может относиться не к геометрическому образу, рассматриваемому как многообразие присоединённых к его элементам систем отнесения, а к многообразию способов выбора этой системы отнесения.

Этот вопрос может быть решён из рассмотрения характеристической системы.

Пусть нам дана система Пфаффа (1) и n линейных форм $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, которые должны оставаться независимыми на всяком интегральном многообразии, т. е. будем рассматривать задачу интегрирования системы Пфаффа в её второй постановке (см. гл. III, § 3, стр. 129) так, как это мы обычно и делаем. Тогда мы должны прежде всего включить в характеристическую систему линейных форм все формы ω_i. Система

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \ldots, \quad \omega_n = 0 \tag{a}$$

должна быть вполне интегрируема. Аналитически это следует из того, что первые интегралы этой системы и являются теми независимыми переменными, которые условиями задачи предуказаны для интегрального многообразия $\mathfrak{M}_n$. Геометрически это вытекает из невысказанного предположения, что независимые переменные являются теми главными параметрами семейства реперов (см. гл. XIV, § 4), при закреплении которых элемент искомого многообразия (точка поверхности, луч конгруэнции и т. д.), к которому присоединён репер, остаётся неподвижным. Следовательно, вполне интегрируемая система (а) по существу определяет ∞^n элементов искомого многообразия.

К системе (а) мы присоединяем ассоциированную систему для $2s$ форм θ_k, $\Theta_k = D\theta_k$. Мы получаем таким образом характеристическую систему (*характеристическая система* II) уравнений Пфаффа в виде совокупности уравнений

$$\begin{gathered}
\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad \ldots, \quad \theta_s = 0, \\
\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \ldots, \quad \omega_n = 0, \\
\frac{\partial\Theta_k}{\partial\omega_1} = 0, \quad \frac{\partial\Theta_k}{\partial\omega_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\Theta_k}{\partial\omega_n} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, s.
\end{gathered} \tag{14}$$

Формы Θ_k $(k = 1, 2, \ldots, s)$ образуют семейство ковариантов пфаффовой системы (1). Символом $\frac{\partial\Theta_k}{\partial\omega_i}$ обозначается, как обычно, алгебраическая производная от ковариaнта (2) по форме ω_i.

Система Пфаффа (14) вполне интегрируема, ибо она получена соединением двух вполне интегрируемых систем: характеристической системы I, т. е. ассоциированной системы $2s$ форм θ_k и Θ_k, и системы уравнений, полученных обращением в нуль форм ω_i, по условию независимых на интегральном многообразии. Характеристическая система II не может нам дать характеристики на интегральном многообразии $\mathfrak{M}_n$, ибо уравнения (a), включённые в эту систему, закрепляют точку на интегральном многообразии $\mathfrak{M}_n$, а характеристики определяются, как мы видели, некоторым числом $n' < n$ линейных уравнений между формами ω_i, причём остальные формы ω_i остаются произвольными; зато эта система выделяет те переменные, которые существенны для поставленной задачи.

Система (14) не зависит от выбора переменных или от выбора форм θ_k, ω_i, $\overline{\omega}_g$, лишь бы новые формы θ_k' были независимыми линейными комбинациями старых форм θ_k, новые формы ω_i' были независимыми от предыдущих линейными комбинациями форм θ_k и ω_i и все остальные формы $\overline{\omega}_g'$ были независимыми от предыдущих линейными комбинациями θ_k, ω_i и $\overline{\omega}_g$.

Семейство $s+n$ форм θ_k и ω_i всегда линейно независимо. Если среди уравнений третьей строки системы (14) найдётся q линейно независимых, то характеристическая система будет содержать $s+n+q$ независимых уравнений и, следовательно, будет иметь $s+n+q$ первых интегралов. Эти интегралы (характеристические переменные) образуют совокупность переменных в наименьшем числе, посредством которых можно выразить левые части уравнений (1) так, чтобы и под знаком дифференциала и в коэффициентах стояли только эти переменные.

Если уравнения (1) выражают все условия задачи, то все остальные переменные, сверх характеристических, не существенны для задачи и могут быть просто отброшены.

В частности, если уравнения (1) содержат в левых частях под знаком дифференциала ровно s неизвестных функций z_j и n независимых переменных x_i, то мы всегда можем предположить, что формы θ_k, ω_i и $\overline{\omega}_q$ имеют вид

$$\theta_k = dz_k - a_k^i\, dx_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\omega_i = dx_i,\ \overline{\omega}_g = du_g, \qquad k = 1, 2, \ldots, s,$$
$$g = 1, 2, \ldots, q,$$

где u_g — те дополнительные переменные в наименьшем числе q, которые входят в коэффициенты a_k^i уравнений $\theta_k = 0$. Коварианты Θ_k системы (S'), т. е. внешние дифференциалы $D\theta_k$, очевидно, будут вида

$$\Theta_k = c_k^{[ij]}\,[dx_i\, dx_j] + [dx_i\, \frac{\partial a_k^i}{\partial u_g} du_g],$$
$$i, j = 1, 2, \ldots, n;\ g = 1, 2, \ldots, q;\ k = 1, 2, \ldots, s,$$

где состав коэффициентов $c_k^{[ij]}$ не имеет значения. Характеристическая система (14) примет вид

$$(14')\qquad \begin{gathered} dx_1 = dx_2 = \ldots = dx_n = 0, \\ dz_1 = dz_2 = \ldots = dz_s = 0, \\ \frac{\partial a_k^i}{\partial u_g} du_g = 0, \\ i = 1, 2, \ldots, n;\ g = 1, 2, \ldots, q;\ k = 1, 2, \ldots, s. \end{gathered}$$

Эта система содержит ровно $s+n+q$ независимых уравнений; за формы $\overline{\omega}_g$ можно принять линейно независимые левые части уравнений последней строки.

Таким образом, при пользовании методом Картана нет надобности выбирать, например, определённым образом ориентированный прямой трёхгранник, связанный с данной точкой поверхности. Если задача, которую мы ставим, не зависит от поворота трёхгранника около нормали, то полученные уравнения и их коварианты автоматически отбросят параметр поворота трёхгранника или включат его в одну из предыдущих дифференциальных форм так, что число форм будет в точности равняться числу существенных параметров задачи.

§ 6. Задача. Конгруэнция W

Найти конгруэнции, у которых на фокальных поверхностях соответствуют асимптотические линии (конгруэнции W).

Задача, очевидно, — проективного характера, ибо проективное преобразование переводит конгруэнцию в конгруэнцию, фокальные поверхности в фокальные поверхности новой конгруэнции и асимптотические линии на них в асимптотические линии. Поэтому будет целесообразно воспользоваться однородными координатами и за систему отнесения принять тетраэдр.

Выберем тетраэдр, присоединённый к лучу конгруэнции. Вершины A_1 и A_2 поместим в фокусах луча, а вершины A_3 и A_4 — в касательной плоскости соответственно поверхности (A_1) или поверхности (A_2) — в фокальных плоскостях луча A_1A_2.

Так как четыре точки A_1, A_2, A_3, A_4 не лежат в одной плоскости, то определитель из всех их 16 координат не равен нулю, и мы можем любую аналитическую точку разложить по четырём вершинам тетраэдра отнесения A_1, A_2, A_3, A_4. В частности, существуют 16 форм Пфаффа ω_i^k так, что

$$(15)\qquad dA_i = \omega_i^k A_k, \qquad i, k = 1, 2, 3, 4.$$

Они удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства [см. гл. III, (26)]:

$$(16)\qquad D\omega_i^k = [\omega_i^j \omega_j^k].$$

Кроме этих уравнений компоненты ω_i^k должны удовлетворять специальным условиям задачи.

Если $A_1A_2A_3$ — касательная плоскость поверхности (A_1), то все бесконечно малые перемещения точки A_1 лежат в этой плоскости, и аналогично для точки A_2. Следовательно,

$$\omega_1^4=0, \quad \omega_2^3=0. \tag{17}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (17) и пользуясь уравнениями структуры (16), получим:

$$\begin{aligned}&[\omega_1^2\omega_2^4]+[\omega_1^3\omega_3^4]=0,\\ &[\omega_2^1\omega_1^3]+[\omega_2^4\omega_4^3]=0.\end{aligned} \tag{18}$$

Так как точки A_1 и A_2 будут двигаться вдоль луча A_1A_2, а луч будет стоять на месте, если

$$\omega_1^3=0, \quad \omega_2^4=0, \tag{19}$$

то формы ω_1^3, ω_2^4 должны оставаться линейно независимыми на интегральном многообразии $\mathfrak{M}_2$. Применяя лемму Картана к равенствам (18), получим:

$$\begin{aligned}&\omega_1^2=\alpha\omega_2^4-\beta\omega_1^3, \quad \omega_2^1=\alpha'\omega_1^3-\beta'\omega_2^4,\\ &\omega_3^4=\beta\omega_2^4-\gamma\omega_1^3, \quad \omega_4^3=\beta'\omega_1^3-\gamma'\omega_2^4,\end{aligned} \tag{20}$$

где α, β, γ, α', β', γ' — подходящие переменные.

Теперь остаётся только написать условия соответствия асимптотических на поверхностях (A_1) и (A_2).

Асимптотическая линия определяется требованием, чтобы соприкасающаяся плоскость кривой совпадала с касательной плоскостью поверхности. Соприкасающаяся плоскость определяется первыми и вторыми производными от текущих координат, следовательно, содержит точки A_1, dA_1 и d^2A_1. Точки A_1 и dA_1 всегда лежат в касательной плоскости $A_1A_2A_3$. Точка

$$\begin{aligned}d^2A_1=(d\omega_1^1+\omega_1^2\omega_2^1+\omega_1^3\omega_3^1)A_1+(d\omega_1^2+\omega_1^2\omega_2^2+\omega_1^3\omega_3^2)A_2+\\ +(d\omega_1^3+\omega_1^3\omega_3^3)A_3+\omega_1^1\,dA_1+(\omega_1^2\omega_2^4+\omega_1^3\omega_3^4)A_4\end{aligned}$$

будет там лежать, если она не будет иметь слагающей по A_4. Мы получим, таким образом, уравнение асимптотических в виде

$$\omega_1^2\omega_2^4+\omega_1^3\omega_3^4=0,$$

или, в силу (20),

$$\alpha(\omega_2^4)^2-\gamma(\omega_1^3)^2=0.$$

Аналогично асимптотические на поверхности (A_2) определяются уравнением

$$\alpha'(\omega_1^3)^2-\gamma'(\omega_2^4)^2=0.$$

Асимптотические соответствуют, если

$$\alpha\alpha'=\gamma\gamma'. \tag{21}$$

Уравнения (17), (20) и (21) составляют все уравнения нашей проблемы.

Наиболее общий тетраэдр пространства зависит от 16 координат своих вершин. Дифференциалы этих переменных линейно выражаются через 16 форм Пфаффа ω_i^k. Они не все существенны, ибо тетраэдр, присоединённый к лучу, нашими условиями не вполне определён, но об этом мы можем не заботиться, ибо уравнения сами выбросят излишние формы.

Система уравнений (17), (20), (21) содержит $s=6$ уравнений Пфаффа и одно конечное уравнение. Они содержат, кроме 16 координат вершин A_i, ещё шесть величин α, β, γ, α', β', γ' в конечном виде.

Коварианты системы получаются внешним дифференцированием. Внешние дифференциалы уравнений (17) удовлетворены тождественно в силу уравнений (20). Если ввести новую переменную φ так, чтобы уравнения (21) удовлетворялись посредством равенств

$$\gamma=\alpha\varphi; \quad \gamma'=\frac{\alpha'}{\varphi},$$

то внешние дифференциалы системы (20) примут вид

$$\begin{aligned}&[\omega_2^4\,\Delta\alpha]-[\omega_1^3\,\Delta\beta]=0, \quad [\omega_2^4\,\Delta\beta]-\varphi[\omega_1^3\,\Delta\alpha]-\varphi\alpha[\omega_1^3\,\Delta\varphi]=0,\\ &[\omega_1^3\,\Delta\alpha']-[\omega_2^4\,\Delta\beta']=0, \quad [\omega_1^3\,\Delta\beta']-\frac{1}{\varphi}[\omega_2^4\,\Delta\alpha']+\frac{\alpha'}{\varphi}[\omega_2^4\,\Delta\varphi]=0,\end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\begin{aligned}&\Delta\alpha=d\alpha+\alpha(2\omega_2^2-\omega_1^1-\omega_4^4), \quad \Delta\alpha'=d\alpha'+\alpha'(2\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3),\\ &\Delta\beta=d\beta+\beta(\omega_2^2-\omega_3^3)-\omega_3^2, \quad \Delta\beta'=d\beta'+\beta'(\omega_1^1-\omega_4^4)-\omega_4^1,\\ &\Delta\varphi=d\ln\varphi+2(\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3+\omega_4^4).\end{aligned} \tag{23}$$

Система содержит $s=6$ независимых форм Пфаффа, которые стоят в левых частях уравнений (17), (20), $n=2$ форм ω_1^3, ω_2^4, независимых на интегральном многообразии, и пять форм $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, $\Delta\alpha'$, $\Delta\beta'$, $\Delta\varphi$. Следовательно, система может быть приведена к 13 переменным. Из них пять переменных входит явно α, β, α', β', φ. Остальные восемь составляются из шести неоднородных координат точек A_1 и A_2 и каждого из двух параметров, определяющих положение плоскостей $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$ в пучке плоскостей с осью A_1A_2.

Интегральный линейный элемент определяется значениями форм $\Delta\alpha$, $\Delta\alpha'$, $\Delta\beta$, $\Delta\beta'$, $\Delta\varphi$. Условие инволюционности (22) налагает на эти пять параметров четыре независимых уравнения. Следовательно, характеры системы суть:

$$s=6, \quad s_1=4, \quad s_2=1.$$

Так как из уравнения (22) формы (23) определяются с $N=6$ произвольными параметрами, то $Q=N$. Система — в инволюции и определяет $\mathfrak{M}_2$ с одной произвольной функцией от двух аргументов, что вполне согласуется с хорошо известным результатом о возможности построить конгруэнции W с произвольно заданной фокальной поверхностью.

§ 7. Задача. Система Бианки из проективно-эквивалентных конгруэнций W

В этой задаче мы даём пример интегрального многообразия, которое несёт семейство характеристик.

Системой Бианки называется совокупность двух однопараметрических семейств поверхностей (Σ) и (Σ') и одного двупараметрического семейства (C) конгруэнций W, если между точками всех поверхностей (Σ) и (Σ') установлено однозначное соответствие, сохраняющее асимптотические линии так, что прямая, соединяющая соответствующие точки любой пары поверхностей Σ и Σ', касается их, описывая одну из конгруэнций C. Следовательно, ∞^2 конгруэнций (C) имеет поверхности (Σ), (Σ') своими фокальными поверхностями.

Так как любая поверхность Σ связана конгруэнциями (C) со всеми поверхностями (Σ'), то точки M' этих поверхностей, соответствующие точке M поверхности Σ, лежат в её касательной плоскости, проведённой в точке M, и по тем же соображениям лежат в касательной плоскости любой поверхности семейства (Σ), если её провести в точке, соответствующей точке M. Так как две плоскости пересекаются по прямой, то все соответствующие друг другу точки M' лежат на одной прямой d'; точно так же все соответствующие им точки M поверхностей (Σ) лежат на другой прямой d. Перемещая точку M по поверхности Σ, мы заставим прямые d, d' описать две конгруэнции, которые образуют *«расслояемую пару»*.

Мы ставим задачу:

Задача. *Найти систему Бианки, все конгруэнции W которой проективно-эквивалентны.*

a) Выбор тетраэдра отнесения. Присоединим к каждому лучу нашей системы тетраэдр, так же как мы это делали в предыдущей задаче: A_1 и A_2 будут фокусами луча, $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$ — его фокальными плоскостями. Так как при неподвижности точки A_1 поверхности Σ соответствующая ей точка A_2 поверхности семейства (Σ') перемещается по прямой d', лежащей в касательной плоскости $A_1A_2A_3$ поверхности (A_1), то, пользуясь произволом выбора вершины A_3, мы совместим ребро A_2A_3 с прямой d' и аналогично ребро A_1A_4 — с прямой d.

Наконец, мы можем выбрать точку A_3 на прямой A_2A_3 так, чтобы касательные A_1A_2 и A_1A_3 на поверхности (A_1) были сопряжены, и аналогично сделать для касательных A_2A_1 и A_2A_4 поверхности (A_2).

b) Выбор форм, независимых на $\mathfrak{M}_4$. Так как мы ищем ∞^2 конгруэнций, а каждая конгруэнция содержит ∞^2 лучей, то мы будем предполагать, что луч нашей системы зависит от четырёх параметров. Если эти параметры сохраняют постоянные значения, то луч A_1A_2 неподвижен и точки A_1, A_2 двигаются только вдоль луча. Значит,

$$\text{(a)} \qquad \overset{3}{\omega}_1=\overset{4}{\omega}_1=\overset{3}{\omega}_2=\overset{4}{\omega}_2=0.$$

Обратно, если равенства (a) удовлетворены, то луч A_1A_2 стоит на месте, и дифференциалы четырёх параметров равны нулю. Отсюда следует, что эти дифференциалы линейно выражаются через формы (a) и наоборот. Все формы (a) — линейно независимы на каждом интегральном многообразии $\mathfrak{M}_4$ нашей задачи.

c) Составление уравнений системы. Уравнения (17) определяют теперь на нашей системе Бианки ∞^2 конгруэнций (C). Следовательно, система (17) вполне интегрируема, а внешние дифференциалы её (18) — алгебраические следствия системы (17). Значит равенства (20) на интегральном многообразии $\mathfrak{M}_4$ будут справедливы только как сравнения по модулю $\overset{4}{\omega}_1$, $\overset{3}{\omega}_2$, т. е. каждое равенство может содержать в правой части добавочные члены в виде форм $\overset{4}{\omega}_1$, $\overset{3}{\omega}_2$ с произвольными функциональными множителями. Более того, уравнение $\overset{4}{\omega}_1=0$ определяет теперь семейство поверхностей (Σ), следовательно, должно быть вполне интегрируемо, и первое уравнение (18) должно быть его алгебраическим следствием. Значит уравнения (20) первого столбца имеют место как сравнения только по модулю $\overset{4}{\omega}_1$, и аналогично, уравнения второго столбца — как сравнения только по модулю $\overset{3}{\omega}_2$.

Так как при неподвижности точки A_1 точка A_2 перемещается по прямой A_2A_3, то из уравнений $\overset{2}{\omega}_1=\overset{3}{\omega}_1=\overset{4}{\omega}_1=0$ следуют уравнения $\overset{1}{\omega}_2=0$, $\overset{4}{\omega}_2=0$ и аналогичные с заменой точки A_1 на A_2 и A_3 на A_4. Отсюда вытекает, что первые два уравнения (20) будут иметь место на интегральном многообразии $\mathfrak{M}_4$ без всяких добавочных членов. Уравнение для $\overset{4}{\omega}_3$ содержит ещё член с $\overset{4}{\omega}_1$, уравнение для $\overset{3}{\omega}_4$ — член с $\overset{3}{\omega}_2$, т. е.

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{b}_1) & \overset{2}{\omega}_1\equiv 0, \quad \overset{1}{\omega}_2\equiv 0 \\ (\mathrm{b}_2) & [\overset{4}{\omega}_1\overset{4}{\omega}_3]\equiv 0, \quad [\overset{3}{\omega}_2\overset{3}{\omega}_4]\equiv 0 \end{array} \qquad (\operatorname{mod} \overset{3}{\omega}_1, \overset{4}{\omega}_2).$$

Уравнения (19) определяют на каждой конгруэнции системы один луч, который и устанавливает на фокальных поверхностях (A_1), (A_2) соответствие точек $A_1 \rightleftarrows A_2$. Так как на всех поверхностях (Σ), (Σ') установлено взаимно однозначное соответствие точек, то можно выбрать криволинейные координаты луча на каждой конгруэнции так, чтобы все соответствующие лучи имели одни и те же координаты. Постоянные значения их будут обращать в нуль формы (19) на всех конгруэнциях системы, т. е. система (19) вполне интегрируема и первыми интегралами её будет пара универсальных координат луча. Так как внешние дифференциалы от форм (19) обращаются в нуль в силу уравнений самой системой (19), то

$$\text{(c)} \qquad \begin{aligned} &[\omega_1^2\omega_2^3]+[\omega_1^4\omega_4^3]\equiv 0 \\ &[\omega_2^1\omega_1^4]+[\omega_2^3\omega_3^4]\equiv 0 \end{aligned} \quad (\operatorname{mod}\ \omega_1^3,\ \omega_2^4).$$

В силу сравнений ($\mathfrak{b}_1$) первые члены обоих сравнений (c) пропадают, а вторые члены

$$[\omega_1^4\omega_4^3]\equiv[\omega_2^3\omega_3^4]\equiv 0 \quad (\operatorname{mod}\ \omega_1^3,\ \omega_2^4)$$

вместе со сравнениями ($\mathfrak{b}_2$) показывают, что в силу $\omega_1^3=\omega_2^4=0$ и формы ω_3^4, ω_4^3 обращаются в нуль. Следовательно, уравнения (20) имеют место на каждом интегральном многообразии $\mathfrak{M}_4$ без добавочных членов.

Нам остаётся потребовать, чтобы касательные A_1A_2 и A_1A_3 были на поверхности (A_1) сопряжены, и аналогичное для поверхности (A_2). Так как фокальные сети на обеих фокальных поверхностях конгруэнции сопряжены[1]), то линия $\omega_1^3=0$, касающаяся луча A_1A_2 на поверхности (A_1), сопряжена линии $\omega_2^4=0$, которая касается того же луча на поверхности (A_2). С другой стороны, линия $\omega_1^2=0$, касающаяся луча A_1A_3, тоже сопряжена линии $\omega_1^3=0$. Так как каждая линия на поверхности имеет в данной точке только одно сопряжённое направление, то $\omega_1^2=0$ и $\omega_2^4=0$ определяют на поверхности (A_1) одну и ту же линию, т. е.

$$[\omega_1^2\omega_2^4]\equiv 0 \quad (\operatorname{mod}\ \omega_1^4).$$

Уравнения (20) немедленно дадут $\beta=0$, и аналогично условие сопряжённости касательных A_2A_1 и A_2A_4 на поверхности (A_2) приводит к уравнению $\beta'=0$.

Вводя опять вспомогательную переменную φ так, чтобы

$$\gamma=\alpha\varphi, \quad \gamma'=\frac{\alpha'}{\varphi},$$

ибо в силу конгруэнции W должно иметь место уравнение (21), мы запишем все уравнения задачи в виде

$$\text{(24)} \qquad \begin{aligned} &\omega_1^2=\alpha\omega_2^4, &&\omega_2^1=\alpha'\omega_1^3, \\ &\omega_3^4=-\alpha\varphi\omega_1^3, &&\omega_4^3=-\frac{\alpha'}{\varphi}\omega_2^4. \end{aligned}$$

---

[1]) **Ф и н и к о в**, Теория поверхностей, гл, VII, § 3, стр. 161,

Нам надо найти интегральное многообразие $\mathfrak{M}_4$ системы (24), на котором $[\omega_1^3\omega_2^4\omega_1^4\omega_2^3]\neq 0$.

d) Система ковариантов и цепь интегральных элементов. Дифференцируя систему (24) внешним образом, получим

$$\text{(25)} \qquad \begin{aligned} &[\omega_2^4\Delta\alpha]+[\omega_1^3\Omega_3^2]+[\omega_1^4\Omega_4^2]=0, \\ &[\omega_2^4\Omega_3^2]+\varphi[\omega_1^3\Delta\alpha]+\alpha\varphi[\omega_1^3\Delta\varphi]+[\omega_1^4\Omega_3^1]=0, \\ &[\omega_1^3\Delta\alpha']+[\omega_2^4\Omega_4^1]+[\omega_2^3\Omega_3^1]=0, \\ &[\omega_1^3\Omega_4^1]+\frac{1}{\varphi}[\omega_2^4\Delta\alpha']-\frac{\alpha'}{\varphi}[\omega_2^4\Delta\varphi]+[\omega_2^3\Omega_4^2]=0, \end{aligned}$$

где $\Delta\alpha$, $\Delta\alpha'$, $\Delta\varphi$ сохраняют свои значения (23), а формы Ω_i^k суть:

$$\text{(26)} \qquad \begin{aligned} &\Omega_3^1=\omega_3^1+\alpha\alpha'\omega_2^4, &&\Omega_4^2=\omega_4^2+\alpha\alpha'\omega_1^3, \\ &\Omega_3^2=\omega_3^2-(\alpha)^2\varphi\omega_2^3, &&\Omega_4^1=\omega_4^1-\frac{(\alpha')^2}{\varphi}\omega_1^4. \end{aligned}$$

Разрешая систему (25) последовательным применением леммы Картана, получим для определения наиболее общего интегрального элемента $\mathcal{E}_4$ следующие формулы:

$$\text{(27)} \qquad \begin{aligned} &\Delta\alpha=a_1\omega_2^4+a_2\omega_1^3+a_3\omega_1^4, &&\Delta\alpha'=b_1\omega_1^3+b_2\omega_2^4+\varphi a_3\omega_2^3, \\ &\Omega_3^2=a_2\omega_2^4+\varphi(a_1+\alpha a)\omega_1^3+c\omega_1^4, &&\Omega_4^1=b_2\omega_1^3+\frac{1}{\varphi}(b_1+\alpha' b)\omega_2^4+c\omega_2^3, \\ &\Omega_4^2=a_3\omega_2^4+c\omega_1^3, &&\Omega_3^1=a_3\varphi\omega_1^3+c\omega_2^4, \\ &&&\Delta\varphi=a\omega_2^4-b\omega_1^3. \end{aligned}$$

Здесь $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, a, b, c$ составляют $N=8$ произвольных параметров.

Характеристическая система, кроме форм (a), линейно независимых на интегральном многообразии $\mathfrak{M}_4$, и форм нашей системы (24), содержит ещё $q=7$ форм $\Delta\alpha$, $\Delta\alpha'$, $\Delta\varphi$, Ω_4^1, Ω_3^2, Ω_3^1, Ω_4^2. Определитель из коэффициентов при неизвестных $\Delta\alpha, \Delta\alpha', \Omega_3^2, \Omega_4^1$ на втором линейном элементе в билинейных ковариантах, присоединённых к системе (25), равен

$$\frac{1}{\varphi}\{(\omega_2^4)^2-\varphi(\omega_1^3)^2\}^2;$$

так как он вообще отличен от нуля, то первый характер $s_1=4$. Поскольку $q=7$, второй не может быть больше $s_2=3$, и все остальные характеры равны нулю; следовательно,

$$Q=s_1+2s_2=10>N.$$

Система — не в инволюции, и её надо продолжать,

e) Продолжение системы. Присоединяем к системе уравнения (27), рассматривая a_i, b_i, c как дополнительные неизвестные. Если ввести обозначения

$$\begin{aligned}
\Delta a_1 &= da_1 + a_1(3\omega_2^2 - \omega_1^1 - 2\omega_4^4) + \\
&\qquad + [3c\alpha - 7(\alpha)^2\alpha' - a_1 b\alpha' - \alpha a' ab]\omega_1^3 - \\
&\quad - 3\alpha a_2\omega_2^3 + [3\alpha a_3 + 2a_1 a + \alpha(a)^2]\omega_2^4 + \left(-\frac{\alpha' a_2}{\varphi} + a_3 a - \frac{\alpha b}{\varphi}\right)\omega_1^4, \\
\Delta a_2 &= da_2 + a_2(2\omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4) - \alpha\varphi a_3\omega_1^3 - [3\alpha\varphi a_1 + 2(\alpha)^2 a]\omega_2^3 + \\
&\qquad + [(\alpha)^2\alpha' - \alpha c - a_1 b - \alpha ab]\omega_2^4 - \alpha'(a_1 + \alpha a)\omega_1^4, \\
\Delta a_3 &= da_3 + 2a_3(\omega_2^2 - \omega_4^4) - \alpha\alpha' a\omega_1^3 + \left(aa_3 - \frac{\alpha\alpha' b}{\varphi}\right)\omega_2^4, \\
\Delta a &= da + a(\omega_2^2 - \omega_4^4) - (a + 3c + 6\alpha\alpha')\omega_1^3 + \\
&\qquad + \alpha b\omega_2^3 - 4a_3\omega_2^4 + b\omega_1^4, \\
\Delta c &= dc + c(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4) - 2a_3\alpha\varphi\omega_2^3 - 2a_3\alpha'\omega_1^4
\end{aligned} \tag{28}$$

и для Δb_i такие же обозначения, но с заменой a_i на b_i, α на α', φ на $\frac{1}{\varphi}$ и указателей 1 на 2 и 3 на 4 в формах ω_i^k, то система ковариантов напишется в виде

$$\begin{gathered}
[\omega_2^4\Delta a_1] + [\omega_1^3\Delta a_2] + [\omega_1^4\Delta a_3] = 0, \\
[\omega_1^3\Delta b_1] + [\omega_2^4\Delta b_2] + \varphi[\omega_2^3\Delta a_3] = 0, \\
[\omega_2^4\Delta a_2] + \varphi[\omega_1^3\Delta a_1] + \alpha\varphi[\omega_1^3\Delta a] + [\omega_1^4\Delta c] = 0, \\
[\omega_1^3\Delta b_2] + \frac{1}{\varphi}[\omega_2^4\Delta b_1] + \frac{\alpha'}{\varphi}[\omega_2^4\Delta b] + [\omega_2^3\Delta c] = 0, \\
[\omega_2^4\Delta a_3] + [\omega_1^3\Delta c] = 0, \quad \varphi[\omega_1^3\Delta a_3] + [\omega_2^4\Delta c] = 0, \\
[\omega_2^4\Delta a] - [\omega_1^3\Delta b] = 0.
\end{gathered} \tag{29}$$

Наиболее общий интегральный элемент $\mathcal{E}_4$ определяется отсюда формулами

$$\begin{aligned}
\Delta a_1 &= x_1\omega_2^4 + x_2\omega_1^3 + \frac{x_3}{\varphi}\omega_1^4, & \Delta b_1 &= y_1\omega_1^3 + y_2\omega_2^4 + \varphi y_3\omega_2^3, \\
\Delta a_2 &= x_2\omega_2^4 + \varphi(x_1 + \alpha x)\omega_1^3 + & \Delta b_2 &= y_2\omega_1^3 + \frac{1}{\varphi}(y_2 + \alpha' y)\omega_2^4 + x_3\omega_2^3, \\
&\qquad + y_3\omega_1^4, \\
\Delta a_3 &= \frac{x_3}{\varphi}\omega_2^4 + y_3\omega_1^3, & \Delta c &= x_3\omega_1^3 + y_3\omega_2^4, \\
\Delta a &= x\omega_2^4 - z\omega_1^3, & \Delta b &= y\omega_1^3 + z\omega_2^4
\end{aligned} \tag{30}$$

с $N = 9$ произвольными параметрами x_i, y_i и z. Так как система

(29) содержит $q = 8$ независимых форм Δa_i, Δb_i и Δc и только семь независимых уравнений, то $s_1 = 7$, $s_2 = 1$, и остальные характеры равны нулю. Число Картана равно числу N:

$$Q = s_1 + 2s_2 = 9, \text{ т. е. } Q = N.$$

Система — в инволюции и определяет интегральное многообразие $\mathfrak{M}_4$ с одной произвольной функцией от двух аргументов.

f) Характеристики. Так как старшие характеры s_3, s_4 равны нулю, то можно поставить вопрос о существовании характеристик. Для существования характеристик надо, чтобы характеристическая система уравнений, образованная присоединением к системе Пфаффа (24), (27) тех уравнений, которые получаются обращением в нуль алгебраических производных от ковариантов (29) по всем линейно независимым формам, оставляла произвольной, по крайней мере, одну из четырёх форм ω_1^3, ω_2^4, ω_1^4, ω_2^3. Это может иметь место только при наличии линейных зависимостей между формами Δa_i, Δb_i. Мы можем облегчить себе задачу, потребовав, чтобы характеристическая система не содержала форм ω_1^4, ω_2^3. Тогда мы должны положить:

$$\Delta a_3 = 0, \quad \Delta c = 0.$$

Чтобы избавить себя от необходимости исследовать совместность этих уравнений с нашей системой, мы потребуем:

$$a_3 = a = b = c = 0. \tag{31}$$

Таблица формул (28) покажет, что при этом условии

$$\Delta a_3 = 0, \quad \Delta c = 0, \quad \Delta a = -6\alpha\alpha'\omega_1^3, \quad \Delta b = 6\alpha\alpha'\omega_2^4.$$

Последние три уравнения системы (29) удовлетворены тождественно Первые четыре уравнения примут вид

$$\begin{aligned}
&[\omega_2^4\Delta a_1] + [\omega_1^3\Delta a_2] = 0, && [\omega_1^3\Delta b_1] + [\omega_2^4\Delta b_2] = 0, \\
&[\omega_2^4\Delta a_2] + \varphi[\omega_1^3\Delta a_1] = 0, && [\omega_1^3\Delta b_2] + \frac{1}{\varphi}[\omega_2^4\Delta b_1] = 0.
\end{aligned} \tag{29'}$$

Система содержит $q = 4$ форм Δa_1, Δa_2, Δb_1, Δb_2. Интегральный элемент $\mathcal{E}_4$ определяется формулами (30), если там положить

$$x_3 = y_3 = x = y = 0, \quad z = 6\alpha\alpha',$$

с $N = 4$ произвольными параметрами x_1, x_2, y_1, y_2. Так как уравнения (29′) независимы, то $s_1 = 4$ и остальные характеры равны нулю; $Q = N = 4$, система — в инволюции и определяет $\mathfrak{M}_4$ с произволом четырёх функций одного аргумента.

Характеристическая система I [система, ассоциированная формам (24), (27) и (29′) при наличии конечных уравнений (31)] содержит уравнения

$$\begin{gathered}\omega_1^3 = \omega_2^4 = 0, \quad \omega_1^2 = \omega_2^1 = \omega_3^4 = \omega_4^3 = 0,\\ \omega_3^2 - (\alpha)^2\varphi\omega_2^3 = 0, \quad \omega_4^1 - \frac{(\alpha')^2}{\varphi}\omega_1^4 = 0,\\ \Delta\alpha = \Delta\alpha' = \Delta\varphi = 0, \quad \Delta a_1 = \Delta a_2 = \Delta b_1 = \Delta b_2 = 0.\end{gathered} \tag{32}$$

Так как ω_1^4, ω_2^3 остаются произвольными, то система уравнений (24), (27), (31) допускает характеристики двух измерений. Так как при наличии уравнений (32) точки A_1 и A_2 могут описывать только две прямые A_1A_4, A_2A_3 (пару соответствующих лучей расслояемой пары конгруэнций), то характеристическое многообразие M_2 образовано лучами линейной конгруэнции с директрисами A_1A_4, A_2A_3, образованной соответствующими лучами всех ∞^2 конгруэнций (C) системы Бианки.

Если за независимые переменные задачи принять первые интегралы двух вполне интегрируемых систем

$$\omega_1^3 = \omega_2^4 = 0 \quad \text{и} \quad \omega_1^4 = \omega_2^3 = 0,$$

то последняя пара интегралов не войдёт в систему уравнений (24), (27), (29′), ни в коэффициенты, ни под знаком дифференциалов. Интегрируя систему при условии $\omega_1^4 = \omega_2^3 = 0$, мы получим одну из конгруэнций C системы Бианки, но так как уравнения системы не содержат переменных, дифференциалы которых линейно выражаются через формы ω_1^4, ω_2^3, то при любом значении этих переменных каждая конгруэнция системы будет определяться теми же самыми уравнениями. Следовательно, все конгруэнции системы *проективно-эквивалентны.*

§ 8. Задача Бианки

Следующие две задачи имеют целью показать, как, опираясь на понятие характеристических переменных, можно разбить уравнения системы на две группы так, чтобы первая группа определяла, например, некоторый класс поверхностей, а вторая группа — какое-либо построение, связанное с одной из поверхностей этого класса. При этом, в силу инвариантности характеристических переменных, системы отнесения (реперы) при решении первой и второй задач могут быть различными[1].

Как мы только что видели (см. предыдущий параграф), две конгруэнции образуют расслояемую пару, если лучи этих конгруэнций можно поставить во взаимно однозначное соответствие и к паре конгруэнций присоединить два семейства поверхностей так, чтобы касательные плоскости поверхности первого семейства в точках пересечения с произвольным лучом первой конгруэнции проходили через соответствующий луч второй конгруэнции и наоборот.

Пользуясь этой терминологией, можно формулировать задачу Бианки так:

Задача. *Найти поверхность, в каждой касательной плоскости которой можно выбрать прямую l так, чтобы построенная таким образом конгруэнция и конгруэнция нормалей образовали расслояемую пару.*

Присоединим к поверхности в каждой её точке A прямоугольный трёхгранник с вершиной в этой точке так, чтобы третья ось совпадала с нормалью к поверхности, а первая была перпендикулярна к выбранной в касательной плоскости прямой l. Движения трёхгранника определяются уравнениями

$$\begin{aligned} dA &= \omega_i I_i,\\ dI_i &= \omega_{ik} I_k,\end{aligned} \quad \omega_{ik} = -\omega_{ki}, \ i, k = 1, 2, 3,$$

причём

$$\omega_3 = 0, \tag{33}$$

так как ось I_3 перпендикулярна к касательной плоскости поверхности (A).

Обозначим буквой a отрезок AA_1, отсекаемый на первой оси присоединённой прямой l. Пусть точка

$$M = A + zI_3$$

есть точка пересечения нормали I_3 с одной из поверхностей первого семейства, а

$$M' = A + aI_1 + yI_2$$

— точка пересечения присоединённой прямой l с одной из поверхностей второго семейства.

Так как касательная плоскость поверхности (M) проходит через точку M и прямую l, то все перемещения dM лежат в одной плоскости с векторами $\overrightarrow{M'A_1}$ и $\overrightarrow{MA_1}$, и скалярное произведение этих трёх векторов равно нулю:

$$(dM,\ I_2,\ aI_1 - zI_3) = 0.$$

Аналогично все перемещения dM' компланарны с векторами I_3 и $\overrightarrow{AM'}$:

$$(dM';\ I_3,\ aI_1 + yI_2) = 0.$$

Внося сюда

$$\begin{aligned} dM &= (\omega_1 - z\omega_{13})\,I_1 + (\omega_2 - a\omega_{23})\,I_2 + dzI_3,\\ dM' &= (\omega_1 + da - y\omega_{12})\,I_1 + (\omega_2 + dy + a\omega_{12})\,I_2 + (a\omega_{13} + y\omega_{23})\,I_3\end{aligned}$$

---

[1] Метод решения был доложен в семинаре по дифференциальной геометрии на III курсе Московского Университета студентом Г. М. Бам-Зеликович.

и развёртывая скалярные произведения, мы получим два уравнения в полных дифференциалах для неизвестных функций z и y:

$$adz + z\omega_1 - z^2\omega_{13} = 0,$$
$$a\,dy + a\omega_2 + a^2\omega_{12} - y(\omega_1 + da) + y^2\omega_{12} = 0.$$

Каждое из этих уравнений определяет семейство поверхностей, следовательно, должно быть вполне интегрируемо. Дифференцируя их внешним образом и исключая dy и dz, получим:

$$z^2\{[\omega_1 + da,\ \omega_{13}] - a[\omega_{12}\omega_{23}]\} - z\{[\omega_1 + da,\ \omega_1] - a[\omega_{12}\omega_2]\} = 0,$$
$$y^2\{[\omega_1\omega_{12}] - a[\omega_{13}\omega_{23}]\} + y\{[\omega_1 + da,\ \omega_1] + a[\omega_{12}\omega_2]\} -$$
$$- a\{\omega_1 + da, \omega_2] + a^2[\omega_{13}\omega_{23}]\} = 0.$$

Эти уравнения должны быть алгебраическими следствиями системы. Следовательно, все коэффициенты при степенях y и z должны исчезать:

(33a) $$[\omega_{12}\omega_2] = 0, \quad [\omega_1 + da, \omega_1] = 0,$$

(33b) $$[\omega_1\omega_{12}] = a[\omega_{13}\omega_{23}], \quad [\omega_1 + da,\ \omega_2] = -a^2[\omega_{13}\omega_{23}],$$

(33c) $$[\omega_1 + da,\ \omega_{13}] = a[\omega_{12}\omega_{23}].$$

Присоединяя сюда ещё уравнение (33), мы получаем все уравнения проблемы. Расширенная система будет содержать ещё внешний дифференциал от уравнения (33):

(33d) $$[\omega_1\omega_{13}] + [\omega_2\omega_{23}] = 0.$$

Формы ω_1, ω_2 должны оставаться линейно независимыми на интегральном многообразии $\mathfrak{M}_2$, иначе точка A будет описывать линию, а не поверхность. Система (S) содержит одну форму Пфаффа ω_3. Кроме этих форм, характеристическая система содержит только четыре формы

$$\omega_{12},\ \omega_{13},\ \omega_{23},\ \omega_1 + da,$$

которые получатся, если квадратичные формы (33a — d) алгебраически продифференцировать по ω_1, ω_2. Следовательно, $q = 4$, и интегральный элемент $\mathcal{E}_1$ зависит от четырёх произвольных параметров — значений этих четырёх форм. Между тем наиболее общий интегральный элемент $\mathcal{E}_2$ зависит только от трёх произвольных параметров.

Действительно, уравнения (33a, d) дают по лемме Картана:

$$\omega_{12} = \lambda\omega_2, \quad \omega_1 + da = \mu\omega_1,$$
$$\omega_{13} = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2,$$
$$\omega_{23} = \beta\omega_1 + \gamma\omega_2.$$

Внося эти значения в уравнения (33b, c), получим:

$$\lambda = aK, \quad \mu = -a^2K, \quad K = \alpha\gamma - \beta^2.$$

Произвольными остаются только параметры α, β, γ.

Следовательно, система (33), (33a—d) — не в инволюции, и её надо продолжать.

Исключая λ и μ из предыдущих уравнений, получим:

(34a) $$\omega_{12} = aK\omega_2, \quad \omega_1 + da = -a^2K\omega_1,$$

(34b) $$\begin{aligned}\omega_{13} &= \alpha\omega_1 + \beta\omega_2,\\ \omega_{23} &= \beta\omega_1 + \gamma\omega_2,\end{aligned} \qquad K = \alpha\gamma - \beta^2.$$

Присоединяем эти уравнения к системе (33), (33a—d), рассматривая α, β, γ как дополнительные неизвестные.

Квадратичные уравнения (33a—d) будут удовлетворены. Дифференцируя уравнения (34a, b) внешним образом, получим:

(35a) $$[dK\omega_1] = 0, \quad [dK\omega_2] = 0,$$

(35b) $$\begin{aligned}&[d\alpha\omega_1] + [d\beta\omega_2] + 2\beta aK[\omega_1\omega_2] = 0,\\ &[d\beta\omega_1] + [d\gamma\omega_2] - (\alpha - \gamma)aK[\omega_1\omega_2] = 0.\end{aligned}$$

Уравнения (35a) сейчас же дают:

$$dK = 0, \quad K = \text{const}.$$

Если исключить $d\beta$ посредством уравнения $d(\alpha\gamma - \beta^2) = 0$ или

$$2\beta\,d\beta = \alpha\,d\gamma + \gamma\,d\alpha$$

и ввести новые формы

$$\Delta\alpha = d\alpha - 2\beta aK\omega_2,$$
$$\Delta\gamma = d\gamma + 2\beta aK\omega_2,$$

то уравнения (35b) примут приведённый вид:

(36) $$\begin{aligned}&2\beta[\omega_1\Delta\alpha] + \gamma[\omega_2\Delta\alpha] + \alpha[\omega_2\Delta\gamma] = 0,\\ &\gamma[\omega_1\Delta\alpha] + \alpha[\omega_1\Delta\gamma] + 2\beta[\omega_2\Delta\gamma] = 0.\end{aligned}$$

Квадратичные уравнения (36), кроме ω_1, ω_2, содержат только две формы $\Delta\alpha$, $\Delta\gamma$. Следовательно, $q = 2$, интегральный элемент $\mathcal{E}_1$ зависит от двух параметров.

Ранг матрицы

$$\begin{vmatrix} 2\beta u_1 + \gamma u_2 & \alpha u_2 \\ \gamma u_1 & \alpha u_1 + 2\beta u_2 \end{vmatrix} = 2\beta\{\alpha(u_1)^2 + 2\beta u_1u_2 + \gamma(u_2)^2\},$$

очевидно, равен двум, если

$$\alpha(u_1)^2 + 2\beta u_1u_2 + \gamma(u_2)^2 \neq 0;$$

следовательно, линейные уравнения, вытекающие из (36) для определения значения форм $\Delta\alpha$, $\Delta\gamma$ на втором линейном элементе e_2, независимы и

$$s_1 = 2,$$

а так как наиболее общее решение системы (36)

$$\gamma\Delta\alpha = (2\beta p - \alpha q)\,\omega_1 + \gamma p\omega_2,$$
$$\alpha\Delta\gamma = \alpha q\omega_1 + (2\beta q - \gamma p)\,\omega_2$$

зависит от двух произвольных параметров p и q и число Картана

$$Q = 2q - s_1 = 2$$

тоже равно двум, то критерий регулярности цепи удовлетворён, система — в инволюции, и интегральное многообразие $\mathfrak{M}_2$ зависит от двух произвольных функций одного аргумента.

Систему (34a, b) можно расчленить, выделив уравнения, определяющие поверхность, от уравнений, определяющих прямую l, присоединённую к нормали на заданной поверхности.

Подсчитывая квадратичные формы поверхности (A):

$$ds^2 = dA^2 = (\omega_1)^2 + (\omega_2)^2,$$
$$-dA \cdot dI_3 = \omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23} = \alpha\,(\omega_1)^2 + 2\beta\omega_1\omega_2 + \gamma\,(\omega_2)^2,$$

мы видим, что

$$K = \alpha\gamma - \beta^2$$

есть гауссова кривизна поверхности. Таким образом искомая поверхность — всегда постоянной кривизны.

С другой стороны, произвольная поверхность постоянной гауссовой кривизны определяется уравнениями (33), (34b). Внешний дифференциал уравнения (33) обращается в тождество в силу уравнений (34b). Внешние дифференциалы уравнений (34b) сохранят вид уравнений (36), если обозначить

$$\Delta\alpha = d\alpha - 2\beta\omega_{12}, \quad \Delta\gamma = d\gamma + 2\beta\omega_{12}.$$

Характеристическая система уравнений (33), (34b), (36) содержит формы ω_1, ω_2, ω_3, ω_{13}, ω_{23}, $\Delta\alpha$, $\Delta\gamma$; следовательно, $q = 2$, $s_1 = 2$, $Q = 2$, а так как наиболее общее решение системы (36) зависит от двух произвольных параметров, то система — в инволюции и определяет поверхность с двумя произвольными функциями одного аргумента.

Заметим, что характеристическая система не содержит формы ω_{12}; это объясняется тем, что положение трёхгранника не вполне определено: его можно произвольно повернуть около нормали. Характеристическая система уравнений (33), (34a, b), (36) содержит все формы первой системы и ещё две формы ω_{12} и da. Следовательно, интегралы её можно составить из интегралов первой системы, добавив к ним ещё две переменные. За одну из них можно принять величину a, за другую — угол φ поворота трёхгранника около нормали. Если уравнения (33), (34b), (36) уже проинтегрированы, то уравнения (34a) можно рассматривать как уравнения на эти неизвестные a и φ.

Эти уравнения теперь образуют вполне интегрируемую систему, ибо при постоянном K внешние дифференциалы обращаются в нуль. Следовательно, в касательной плоскости произвольной поверхности постоянной кривизны можно выбрать ∞^2 прямых так, чтобы образовалась конфигурация Бианки.

Первое уравнение (34a) показывает, что при $\omega_2 = 0$ и форма ω_{12} равна нулю, т. е. при движении вдоль линии $\omega_2 = 0$ касательный к этой линии вектор I_1 в касательной плоскости не поворачивается и, следовательно, огибает геодезическую [1]. Эта геодезическая не произвольна, ибо то же уравнение даёт для ортогональной траектории $\omega_1 = 0$ этих геодезических отношение угла поворота касательной к длине дуги, т. е. *геодезическую кривизну*, в виде

$$\frac{\omega_{12}}{\omega_2} = aK.$$

§ 9. Задача. Конфигурация T

Замкнутый косой четыреугольник описывает конфигурацию T, если каждая вершина его описывает поверхность, которая касается прилегающих сторон четыреугольника. Найти конфигурацию T, если дана одна из её четырёх поверхностей.

Присоединим к каждому положению четыреугольника $A_1A_2A_3A_4$, описывающего конфигурацию, одноимённый тетраэдр. Проективные движения его определяются формулами

$$dA_i = \omega_i^k A_k, \qquad i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Так как каждая поверхность (A_i) касается сторон A_iA_{i+1}, A_iA_{i-1}, то все перемещения dA_i лежат в плоскости $A_{i-1}A_iA_{i+1}$, следовательно,

$$\omega_i^{i+2} = 0, \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{37a}$$

где указатели сравнимы по модулю 4.

Эти уравнения (37a) определяют наиболее общую конфигурацию T. Дифференцируя их, получим с помощью формул структуры четыре уравнения

$$[\omega_i^{i+1}\omega_{i+1}^{i+2}] + [\omega_i^{i+3}\omega_{i+3}^{i+2}] = 0. \tag{37b}$$

Характеристическая система, кроме четырёх форм (37a), содержит восемь форм $\omega_i^{i+1}, \omega_i^{i-1}$ (ибо по закону сравнения $\omega_i^{i+3} \equiv \omega_i^{i-1}$), из которых две, например ω_1^4, ω_2^3, остаются независимыми на интегральном многообразии $\mathfrak{M}_2$. Действительно, при наличии линейной зависимости форм ω_1^4 и ω_2^3 из уравнения $\omega_1^4 = 0$ будет вытекать уравнение $\omega_2^3 = 0$, а так как система (37a) содержит уравнения $\omega_1^3 = \omega_2^4 = 0$,

---

[1] Фиников, Теория поверхностей, 1934, гл. V, стр. 115, 122.

то, дифференцируя в этом предположении аналитическую прямую $[A_1A_2]$, получим:

$$d\,[A_1A_2] = (\omega_1^1 + \omega_2^2)\,[A_1A_2].$$

Таким образом, луч A_1A_2 при $\omega_1^4 = 0$ будет стоять на месте, а для произвольных значений ω_1^4 описывать линейчатую поверхность (∞^1 лучей), а не конгруэнцию.

Возвращаясь к нашей системе, имеем:

$$n = 2,\ q = 6,\ s_1 = 4,\ s_2 = 2,\ Q = 8.$$

Наиболе общее решение системы (37b) зависит от $N = 8$ параметров:

$$(38)\qquad \begin{aligned} &\omega_1^2 = a\omega_2^3 + b\omega_1^4, \\ &\omega_4^3 = -b\omega_2^3 + c\omega_1^4, \\ &\omega_3^4 = e\omega_2^3 + f\omega_1^4, && bA - aB - cC - bD = 0, \\ &\omega_2^1 = -f\omega_2^3 + g\omega_1^4, && fA - eB - gC - fD = 0, \\ &\omega_4^1 = A\omega_2^3 + B\omega_1^4, \\ &\omega_3^2 = C\omega_2^3 + D\omega_1^4, \end{aligned}$$

если только $a:b:c \neq e:f:g$. Система — в инволюции и определяет $\mathfrak{M}_2$ с двумя произвольными функциями от двух аргументов. Поэтому нам удобно будет задать не только поверхность (A_1), но и конгруэнцию (A_1A_2).

Действительно, тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$ определяет конгруэнцию (A_1A_2), для которой (A_1), (A_2) суть фокальные поверхности, а $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$ — фокальные плоскости луча A_1A_2, если

$$(39\text{a})\qquad \omega_1^3 = 0, \quad \omega_2^4 = 0.$$

Дифференцируя, имеем:

$$(39\text{b})\qquad \begin{aligned} &[\omega_1^2\omega_2^3] + [\omega_1^4\omega_4^3] = 0, \\ &[\omega_2^1\omega_1^4] + [\omega_2^3\omega_3^4] = 0. \end{aligned}$$

Характеристическая система для уравнений (39a, b) содержит, кроме двух форм (39a), ещё шесть форм, из которых ω_1^4, ω_2^3 остаются независимыми на интегральном многообразии $\mathfrak{M}_2'$ системы (39a, b). Так как здесь

$$n = 2,\ q = 4,\ s_1 = 2,\ s_2 = 2,\ Q = 6,\ N = 6,$$

то система — в инволюции и определяет конгруэнцию с двумя произвольными функциями от двух аргументов.

Кольцо форм, имеющих базисом характеристическую систему форм (39a,b), входит как подкольцо в кольцо характеристической системы форм (37a,b).

Обе характеристические системы вполне интегрируемы, и первые интегралы их могут быть приняты за характеристические переменные. Так как все формы характеристического подкольца (39a,b) принадлежат кольцу (37a,b), то восемь первых интегралов подкольца являются функциями от 12 характеристических переменных кольца (37a,b). Так как они независимы, то мы можем просто включить их в число переменных кольца. Таким образом характеристические переменные большего кольца разбиваются на три группы: две независимые переменные x_1, x_2 задачи (первые интегралы системы $\omega_1^4 = \omega_2^3 = 0$); шесть переменных z_j (неизвестные функции в задаче определения конгруэнции), которые на $\mathfrak{M}_2'$ являются функциями от x_1, x_2, обращающими в нуль левые части уравнений (39a,b); наконец, остальные четыре переменные y_k, которые позволят вместе с восемью предыдущими выразить все уравнения (37a,b) так, что ни под знаком дифференциала, ни в коэффициентах не будет никаких других переменных.

Если конгруэнция (A_1A_2) дана, то z_j известны как функции от x_1, x_2. Внося их в уравнения (37a,b), мы заметим, что часть этих уравнений, именно все уравнения (39a,b) обратятся в тождество и останутся только уравнения

$$(40\text{a})\qquad \omega_3^1 = 0,\ \omega_4^2 = 0,$$

$$(40\text{b})\qquad \begin{aligned} &[\omega_3^2\omega_2^1] + [\omega_3^4\omega_4^1] = 0, \\ &[\omega_4^1\omega_1^2] + [\omega_4^3\omega_3^2] = 0, \end{aligned}$$

которые, кроме независимых переменных x_1, x_2, будут содержать только четыре неизвестные функции y_k. Дифференциалы первых представлены формами ω_1^2, ω_2^1, ω_3^4, ω_4^3, которые теперь (после подстановки интегралов z_j) линейно зависят от ω_2^3, ω_1^4. Дифференциалы вторых представлены, кроме форм (40a), ещё формами ω_3^2, ω_4^1. В принятых обозначениях

$$q = 2,\ s_1 = 2,\ s_2 = 0,\ Q = 2.$$

Будем предполагать, что конгруэнция (A_1A_2), определяемая интегралами z_j, такова, что в формулах (38) коэффициенты a, b, c и e, f, g непропорциональны. Наиболее общее решение квадратичных уравнений (40b) зависит тогда от $N = 2$ параметров, ибо по формулам (38) четыре параметра A, B, C, D связаны двумя независимыми уравнениями. Система — в инволюции и определяет $\mathfrak{M}_2$ с двумя произвольными функциями от одного аргумента.

Если конгруэнция (A_1A_2), т. е. соответствующие интегралы z_j даны так, что

$$(41) \qquad a:b:c=e:f:g,$$

то уравнения (40b) не будут независимы. Мы будем иметь

$$n=2,\ q=2,\ s_1=1,\ s_2=1,\ Q=3,\ N=3,$$

т. е. произвол решения — одна функция от двух аргументов. Следовательно, на заданной поверхности (A_1) мы можем произвольно выбрать семейство линий, огибаемых лучами конгруэнции (A_1A_2). В общем случае, т. е. при отсутствии пропорциональности (41), конфигурация T, включающая конгруэнцию (A_1A_2), зависит от двух функций одного аргумента. В специальном случае, т. е. при наличии равенств (41), она зависит от одной функции двух аргументов.

Так как равенство (41) равносильно уравнениям

$$[\omega_1^2\omega_3^4]=0, \quad [\omega_2^1\omega_4^3]=0$$

и уравнения $\omega_1^2=0$, $\omega_4^3=0$ определяют развёртывающиеся поверхности конгруэнции (A_1A_4), а уравнения $\omega_3^4=0$, $\omega_2^1=0$ — развёртывающиеся поверхности конгруэнции (A_2A_3), то геометрический смысл его для конфигурации — соответствие развёртывающихся поверхностей противоположных конгруэнций (A_1A_4) и (A_2A_3).

Можно показать, что пропорциональность (41) равносильна требованию, чтобы конгруэнция (A_1A_2) принадлежала линейному комплексу [1]).

---

[1]) Фиников, Проективно-дифференциальная геометрия, 1937, гл. X, стр. 177—180.

ГЛАВА XII

ОСОБЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

§ 1. Классификация особых элементов

Характеристические элементы представляют только особенный, исключительный случай особых элементов. Всякий раз, как интегральный линейный элемент находится в инволюции с бо́льшим числом интегральных линейных элементов, чем элементы, соседние с ним, его надо считать особым. Если через интегральный элемент p измерений $\mathcal{E}_p^0$ проходит больше элементов $(p+1)$-го измерения, чем через соседние интегральные элементы p-го измерения, то элемент $\mathcal{E}_p^0$ — особый.

Начнём с более простого случая системы Пфаффа с приведённым семейством ковариантов:

$$(1) \qquad \theta_1=0, \quad \theta_2=0, \quad \ldots, \quad \theta_s=0,$$

$$(2) \qquad a_1^{ig}[\omega_i\overline{\omega}_g]=0, \quad a_2^{ig}[\omega_i\overline{\omega}_g]=0, \quad \ldots, \quad a_s^{ig}[\omega_i\overline{\omega}_g]=0,$$
$$i=1,\ 2,\ldots,\ n;\ g=1,\ 2,\ldots,\ q.$$

Пусть линейный элемент e_α определяется значениями форм

$$\theta_k=0, \quad \omega_i=u_i^{(\alpha)}, \quad \overline{\omega}_g=v_g^{(\alpha)}.$$

Тогда для определения e_p мы имеем систему $s(p-1)$ линейных уравнений

$$(3) \qquad a_k^{ig}u_i^{(\alpha)}\overline{\omega}_g=a_k^{ig}v_g^{(\alpha)}\omega_i, \qquad \alpha=1,2,\ldots,p-1;\ k=1,\ 2,\ldots,s.$$

Здесь все величины $u_i^{(\alpha)}$, $v_g^{(\alpha)}$ известны, ибо элементы $e_1, e_2, \ldots, e_{p-1}$ уже построены. Формы ω_i мы тоже можем считать известными, предполагая, что высечение элемента e_p на интегральном элементе $\mathcal{E}_n$ дано. Ранг матрицы коэффициентов

$$(4) \qquad \| a_k^{ig}u_i^{(\alpha)} \|,$$

где указатель g даёт номер столбца, а указатели k и α — номер строки (для каждого значения указателя α нижний указатель k пробегает ряд значений $k=1, 2, \dots, s$), определяет сумму первых $p-1$ характеров:

$$s_1+s_2+\dots+s_{p-1}=P.$$

Изменение числа интегральных элементов $\mathcal{E}_p$, которые проходят через данный элемент $\mathcal{E}^0_{p-1}$, происходит в силу различных причин и приводит к особым элементам разной природы.

Случай системы не в инволюции. Прежде всего возможно, что ранг матрицы (4) для наиболее общего высечения $u^{(\alpha)}_i$, т. е. при вполне произвольных $n(p-1)$ числах $u^{(\alpha)}_i$, равен P и для выбранного интегрального элемента $\mathcal{E}^0_{p-1}$ не понижается, но ранг матрицы (4), расширенной дополнением столбца $a^{ig}_k v^{(\alpha)}_g \omega_i$ больше чем P. Тогда при произвольном выборе чисел $v^{(\alpha)}_g$, т. е. значений параметрических форм $\bar{\omega}_g$ на элементе $\mathcal{E}^0_{p-1}$, система (3) не имеет решения, и надо специально подбирать их, чтобы она была совместна и позволила построить интегральный элемент $\mathcal{E}_p$, проходящий через $\mathcal{E}^0_{p-1}$.

В этом случае все цепи, достигающие какой бы то ни было линейный элемент $\mathcal{E}_n$, — особые, ибо цепи из регулярных элементов обрываются, не достигая $\mathcal{E}_n$. Система — не в инволюции, и её надо продолжать; мы видели, что конечным числом продолжений можно привести систему в инволюцию или обнаружить её несовместность.

Характеристики (Коши). Другой вид особых элементов получится, если для таких элементов уже ранг матрицы (4), т. е. число P, понижается. Это означает, что все определители порядка P из этой матрицы равны нулю. В общем случае это накладывает условия на числа $u^{(\alpha)}_i$, т. е. на значения форм ω_i, определяющих высечение элемента $\mathcal{E}^0_{p-1}$.

Будем называть такой особый элемент *характеристическим* (в смысле Коши), а многообразие, которое имеет такие элементы касательными, *характеристикой* (Коши).

Мы имеем здесь, следовательно, обобщение тех характеристических элементов, которыми мы занимались в предыдущей главе. И те и другие всецело определяются высечением элемента, т. е. условиями на формы ω_i, которые остаются независимыми на интегральном многообразии $\mathfrak{M}_n$. Разница между ними в том, что в гл. XI мы рассматривали линейные элементы, находящиеся в инволюции со всеми интегральными элементами, а теперь мы не делаем ограничений на число измерений элемента, лишь бы он был в инволюции с бо́льшим числом (но не со всеми) интегральных элементов, чем его соседние элементы.

В силу теоремы Кэлера (гл. VIII, § 4) характеристика (Коши) всегда влечёт за собой конечные соотношения на предыдущие параметрические $\bar{\omega}_g$, т. е. понижение ранга матрицы (4) для отдельных значений $u^{(\alpha)}_i$ не имеет следствием автоматического понижения

ранга расширенной матрицы, и надо суживать произвол параметрических $v^{(\alpha)}_g$, чтобы цепь существовала.

Такого рода особенности не разрешаются продолжением системы, как мы это увидим на примере трижды сопряжённых систем. Зато их можно легко избежать, если выбрать другое высечение элемента $\mathcal{E}^0_{p-1}$. Именно для того, чтобы избежать характеристик, и рекомендуется вести построение цепи интегральных элементов для наиболее общего высечения, т. е. при построении цепи сохранять полный произвол чисел $u^{(\alpha)}_i$.

Характеристики всегда определяют на интегральном многообразии $\mathfrak{M}_n$ замечательные подмногообразия $\mathfrak{M}_\nu$ $(\nu<n)$.

Особые элементы особых интегральных многообразий. Наконец, и в первом и во втором случаях система уравнений, полученная из требования понижения ранга расширенной матрицы (4) или первоначальной, может являться следствием уравнения или системы уравнений, не содержащих форм ω_i, $\bar{\omega}_g$ или их значений $u^{(\alpha)}_i$, $v^{(\alpha)}_g$. Если одно из этих конечных уравнений содержит только независимые переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$, то оно противоречит требованию независимости дифференциалов $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ на интегральном многообразии $\mathfrak{M}_n$ и потому должно быть отброшено. Если это — уравнения на неизвестные функции z_j, то они могут привести к интегральным многообразиям.

Надо присоединить к системе (S) те конечные уравнения между x_i, z_j, которые определяют особый элемент, и рассматривать новую систему (S^*) сначала. Все интегральные элементы новой системы (S^*) будут особыми для старой, но для системы (S^*) они могут быть регулярны. Конечным числом продолжений можно привести систему (S^*) к противоречию, и тогда система (S) не будет иметь особых интегральных многообразий, или получить систему в инволюции. Каждое интегральное многообразие системы (S^*), удовлетворяя уравнениям системы (S^*), тем самым удовлетворяет системе (S), ибо все уравнения системы (S) включены в систему (S^*). Мы получаем, следовательно, интегральное многообразие $\mathfrak{M}_n$ системы (S), все касательные элементы которого одного и того же измерения — особые. Такое интегральное многообразие называется *особым интегральным многообразием*.

Если система ковариантов не имеет приведённого вида, то матрица (4) из коэффициентов при определяемых формах $\bar{\omega}_g$ в уравнениях (3) будет содержать не только формы $u^{(\alpha)}_i$, но формы $v^{(\alpha)}_g$. В этом случае условие понижения ранга матрицы (4) может зависеть не от высечения элемента $\mathcal{E}^0_{p-1}$ на интегральном элементе $\mathcal{E}_n$, а от выбора самого интегрального многообразия $\mathfrak{M}_n$, т. е. рассматриваемое условие понижения ранга может записываться в виде одного или нескольких уравнений на формы ω_i и $\bar{\omega}_g$ на элементе $\mathcal{E}^0_{p-1}$. Присоединяя эти уравнения к системе (S), мы получим систему (S^*), каждый элемент $\mathcal{E}_{p-1}$ которой будет особым элементом системы (S), а интегральное многообразие $\mathfrak{M}_n^*$ системы (S^*), если оно существует, будет особым интегральным многообразием системы (S). Подробнее мы остановимся на этом в гл. XIII.

§ 2. Особые элементы системы внешних дифференциальных уравнений

Эта классификация особых элементов распространяется на любые системы внешних дифференциальных уравнений, в том числе на произвольные системы Пфаффа.

Если дана система внешних дифференциальных уравнений

$$\Theta_1 = 0, \quad \Theta_2 = 0, \quad \ldots, \quad \Theta_s = 0, \tag{5}$$

то, присоединяя сюда внешние дифференциалы

$$D\Theta_1 = 0, \quad D\Theta_2 = 0, \quad \ldots, \quad D\Theta_s = 0, \tag{6}$$

получим расширенную систему $(\mathfrak{S})$. Она делится на части $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_n$ по числу измерений тех форм, которые содержатся в левых частях уравнений $\mathfrak{S}_i$. Уравнения степени выше n нас не интересуют, ибо на многообразии $\mathfrak{M}_n$ они все удовлетворены автоматически.

Чтобы элемент $\mathcal{E}_p$ был интегральным он должен удовлетворять системе $\mathfrak{a}_p = 0$. Для этого достаточно, чтобы его линейные элементы удовлетворяли всем уравнениям $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_p$.

Чтобы не связывать себя цепью, построенной на формах базиса $[\omega_i]$, сделаем замену базиса, полагая:

$$\omega_i = \lambda_i^\alpha \omega_\alpha', \qquad i, \alpha = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

где ранг матрицы $\|\lambda_i^\alpha\|$ равен n.

Так как на всяком интегральном многообразии линейные формы θ_k системы $\mathfrak{S}_1$ равны нулю, то интегральные элементы $\mathcal{E}_\nu$, построенные на формах базиса $[\omega_i']$, будут определяться значениями форм $\bar{\omega}_g$, которые вместе с формами θ_k и ω_i составляют базис характеристической системы

$$\bar{\omega}_g = l_g^\alpha \omega_\alpha', \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n; \quad g = 1, 2, \ldots, q. \tag{8}$$

Внося выражения (7) и (8) в уравнения $\mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3, \ldots, \mathfrak{S}_n$ и обращая в нуль коэффициенты при независимых произведениях форм базиса ω_α', мы получим систему уравнений

$$F(x_i^0, z_j^0; \lambda_i^\alpha, l_g^\alpha) = 0. \tag{9}$$

Чтобы построить регулярную цепь интегральных элементов по формам базиса $[\omega_\alpha']$, надо разрешить систему (9) нормальным образом, последовательно определяя при заданных λ_i^α значения $l_g^1, l_g^2, \ldots, l_g^n$ так, чтобы при определении l_g^p из уравнений

$$F_{p-1}(x_i^0, z_j^0; \lambda_i^\nu, \lambda_i^p, l_g^\nu, l_g^p) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, p-1,$$

все $\lambda_i^\nu, \lambda_i^p$ оставались произвольно заданными и параметрические l_g^ν $(\nu < p)$ не были связаны никакими соотношениями.

Эти условия могут нарушаться:

1. Если по исключении из уравнений $F_{p-1} = 0$ неизвестных l_g^p получаются уравнения на параметрические l_g^ν $(\nu < p)$, которые не будут иметь следствием уравнения между одними λ_i^ν, то все интегральные элементы $\mathcal{E}_{p-1}$, независимо от способа их высечения, — особые [1]). Система — не в инволюции и последовательными продолжениями может быть приведена в инволюцию, если не содержит внутренних противоречий.

2. Если уравнения $F_{p-1} = 0$ по исключении l_g^p имеют следствием уравнения только на одни λ_i^ν или если при наличии таких соотношений система допускает решения с большим числом параметрических l_g^p, то эти соотношения определяют характеристики (в смысле Коши). Эти особые элементы будут в таком случае на всех интегральных многообразиях системы, которые будут построены на регулярных цепях с другим неособым высечением.

3. Наконец, может случиться, что уравнения на l_g^ν, λ_i^ν будут иметь следствием уравнения только между переменными x_i, z_j. Такие уравнения надо присоединить к системе (S). Каждое интегральное многообразие $\mathfrak{M}_n$ новой системы (S^*) является интегральным и для системы (S), но все его касательные элементы $\mathcal{E}_{p-1}$ — особые, а потому оно называется особым интегральным многообразием системы (S).

Точно так же присоединение к системе (S) тех уравнений на параметрические $l_g^\nu (\nu < p)$, которые получаются как условие понижения ранга матрицы коэффициентов при l_g^p в уравнениях $F_{p-1} = 0$, приводит к системе (S^*), у которой все интегральные элементы $\mathcal{E}_{p-1}$ будут особыми интегральными эламентами для системы (S), а каждое интегральное многообразие $\mathfrak{M}_n^*$ — особым интегральным многообразием системы (S).

Весь этот процесс решения системы (9) соответствует образованию простых систем Томаса (гл. I, § 9). Так как при заданном p уравнения $F_{p-1} = 0$ линейны относительно l_g^p, то весь процесс при-

---

[1]) Неособые элементы $\mathcal{E}_{p-1}$ не допускают проходящих через них $\mathcal{E}_p$ и потому не могут служить для построения цепи.

ведения к простой системе сводится к выделению случаев обращения в нуль определителей матрицы коэффициентов или расширенной матрицы. Эти дополнительные уравнения и дают все категории особых элементов.

§ 3. Характеристики при продолжении системы

Простой пример может обнаружить, что характеристики могут сохраняться при неограниченном продолжении системы.

При определении трижды сопряжённых систем поверхностей мы имели систему внешних дифференциальных уравнений

$$(10)\qquad [\omega_i^j\omega^i\omega^j]=0,\qquad i, j \text{ фиксированы.}$$

Здесь и далее i, j — любые различные числа 1, 2, 3. Характеристическая система имеет базисом формы

$$\omega^1,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \omega_i^j,\qquad i, j=1, 2, 3;\ i\neq j,$$

где $[\omega^1\omega^2\omega^3]\neq 0$ на всяком интегральном многообразии $\mathfrak{M}_3$.

Мы видели, что цепь, построенная по формам базиса $[\omega^i]$ — особая. Продолжая систему, полагаем

$$(11)\qquad \omega_i^j=l_{ii}^j\omega^i+l_{ij}^j\omega^j,\qquad i, j \text{ фиксированы,}$$

все 12 коэффициентов l_{ii}^j, l_{ij}^j независимы. Уравнения (10) удовлетворены. Внешние дифференциалы имеют вид

$$(12)\qquad [\omega_{ii}^j\omega^i]+[\omega_{ij}^j\omega^j]=0,$$

где каждая форма ω_{ii}^j и ω_{ij}^j содержит соответственно dl_{ii}^j и dl_{ij}^j и некоторую линейную комбинацию из форм ω^k, ω_k^k.

Уравнение (12) показывает, что каждая форма $\omega_{ii}^j, \omega_{ij}^j$ разлагается только по формам ω^i, ω^j. Значит, если $i=2$, $j=3$, то для элемента $e_1\,(\omega_1=1, \omega_2=\omega_3=0)$ эти формы будут равны нулю. Между тем для первого линейного элемента, определяемого только пфаффовой системой (11), которая этих форм совсем не содержит, они должны быть произвольны. Следовательно, элемент e_1 — особый.

Это замечание сохраняет силу при любом числе продолжений, ибо всякая новая форма ω, отсюда происходящая, будет иметь указателями только числа 2, 3 и будет разлагаться только по формам ω^2, ω^3. Так как система — в инволюции и при любом продолжении остаётся таковой, то она всегда будет допускать регулярную цепь интегральных элементов, построенную не по формам базиса $[\omega^i]$. Поэтому появление при продолжении системы конечных соотношений, которые могут возникнуть только из требования существования хотя одного интегрального элемента $\mathcal{E}_n$, здесь исключено. При всяком продолжении система будет иметь вид уравнений (11), только число нижних указателей у форм ω_i^j будет возрастать, и каждый раз мы будем приходить к заключению, что цепь, построенная по формам базиса $[\omega^i]$ — особая.

§ 4. Определение интегрального многообразия по характеристике

Такое определение, если бы оно было необходимо, не может быть сделано на основании теории Картана. Согласно первой теореме существования (гл. VI, § 5), если даны неособое интегральное многообразие $\mathfrak{M}_\nu$ системы Пфаффа, обыкновенная точка его M_0 и касательный в этой точке к многообразию неособый элемент $\mathcal{E}_\nu^0$, через который проходит интегральный элемент системы $\mathcal{E}_{\nu+1}^0$, то существует интегральное многообразие $\mathfrak{M}_{\nu+1}$, проходящее через $\mathfrak{M}_\nu$ и имеющее в точке M_0 элемент $\mathcal{E}_{\nu+1}^0$ своим касательным элементом. В условии этой теоремы существенно требование регулярности элемента $\mathcal{E}_\nu^0$. Тогда построение интегрального многообразия $\mathfrak{M}_{\nu+1}$ сводится к интегрированию системы уравнений типа Коши, причём начальные условия определяются из уравнений многообразия $\mathfrak{M}_\nu$.

Действительно, задание единственного интегрального элемента системы $\mathcal{E}_{\nu+1}^0$, который проходит через $\mathcal{E}_\nu^0$ и высекается из совокупности всех интегральных элементов системы в точке M_0 посредством некоторого многообразия $\mathfrak{F}$, содержащего $\mathfrak{M}_\nu$, позволяет разрешить в точке M_0 линейную систему $\psi_\nu(x, y, \delta y)=0$, которая определяет единственным образом $(\nu+1)$-й линейный элемент интегрального элемента $\mathcal{E}_{\nu+1}^0$ и приводит к системе типа Коши. Ранг системы (ψ_ν) в соседних точках не может понизиться, ибо все определители из матрицы коэффициентов—непрерывные функции координат точки. Чтобы доказать, что этот ранг в окрестности точки M_0 не повысится, надо апеллировать к регулярности элемента $\mathcal{E}_\nu^0$.

Если элемент $\mathcal{E}_\nu^0$ — особый, то доказательство падает, ибо через $\mathcal{E}_\nu^0$ проходит больше интегральных элементов $\mathcal{E}_{\nu+1}$, чем через соседние элементы $\mathcal{E}_\nu$; ранг системы (ψ_ν) в окрестности точки повышается, появляются добавочные уравнения, и мы получаем систему уравнений в частных производных, вообще не принадлежащую к типу систем Коши. Для неё надо заново доказывать пассивность и ортономность (гл. I, §§ 4, 6).

В следующем примере мы покажем, что в некоторых случаях теория ортономных систем Рикье позволяет разрешить нашу задачу.

Задача. Расслояемая пара линейчатых поверхностей. Две конгруэнции C и C' образуют *расслояемую пару*, если можно присоединить к ним два семейства ∞^1 поверхностей (Σ) и (Σ') так, чтобы касательная плоскость каждой поверхности Σ в точке пересечения её с лучом l конгруэнции C проходила через соответствующий луч l' второй конгруэнции и наоборот.

Сообразно этому, две линейчатые поверхности L и L', образующие которых l и l' находятся во взаимно однозначном соответствии, образуют *расслояемую пару*, если каждая поверхность несёт семейство линий σ и σ' так, что соприкасающаяся плоскость к каждой кривой σ в точке пересечения её с образующей l проходит через соответствующую образующую l' второй поверхности и наоборот.

Нетрудно заметить, что расслояемая пара конгруэнций может быть разбита на ∞^1 расслояемых пар поверхностей (L, L').

Действительно, по основной теореме[1] теории расслояемых пар конгруэнций на всех поверхностях (Σ), (Σ') соответствуют асимптотические линии. Возьмём какую-нибудь асимптотическую на одной поверхности Σ_0 и проведём через её точки лучи l первой конгруэнции C. Они образуют линейчатую поверхность L. Эта поверхность будет пересекать все другие поверхности (Σ) по асимптотическим линиям σ — в силу теоремы о соответствии асимптотических на всех поверхностях (Σ), (Σ'). По той же теореме лучи l' второй конгруэнции C', соответствующие лучам l, образуют поверхность L', которая на каждой поверхности Σ' высекает асимптотическую линию σ'.

Соприкасающаяся плоскость к асимптотической линии σ в точке её пересечения с лучом l совпадает с касательной плоскостью к поверхности Σ, а потому проходит через соответствующий луч l', и наоборот. Следовательно, пара линейчатых поверхностей L, L' — расслояемая.

Возникает вопрос, получим ли мы таким образом *все* расслояемые пары. Иными словами, можно ли всякую расслояемую пару линейчатых поверхностей включить в пару конгруэнций.

Остановимся, чтобы быть определёнными, на случае пары развёртывающихся поверхностей. Так как линейчатая поверхность L из лучей конгруэнции — теперь развёртывающаяся, то асимптотические линии σ на поверхностях (Σ) соответствуют одной из линий фокальной сети. Это возможно только для параболической конгруэнции[2]. Следовательно, наша задача формулируется таким образом[3]:

Дана расслояемая пара развёртывающихся поверхностей (L, L'). Найти расслояемую пару параболических конгруэнций (C, C') так, чтобы одна пара соответствующих развёртывающихся поверхностей конгруэнций C, C' совпадала с парой (L, L').

1. **Уравнения расслояемой пары конгруэнций.** Допустим, что конгруэнция $(A_1 A_2)$ расслояемой пары конгруэнций (A_1A_2), (A_3A_4) — параболическая, точка A_1 — единственный фокус луча A_1A_2

---

[1] Фиников, Проективно-дифференциальная геометрия, гл. X, стр. 192.

[2] Фиников, Проективно-дифференциальная геометрия, гл. XI, стр. 207.

[3] Фиников, Пара линейчатых поверхностей, расслояемых двумя семействами кривых, Изв. АН СССР, серия матем., 9, 1945, стр. 79.

и плоскость $A_1A_2A_3$ — фокальная плоскость. Пусть проективные перемещения тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ определяются формулами

$$dA_i = \omega_i^k A_k, \qquad i, k = 1, 2, 3, 4. \tag{13}$$

Так как плоскость $A_1A_2A_3$ одновременно — касательная плоскость поверхности (A_1) и соприкасающаяся плоскость кривой (A_1), огибаемой лучом A_1A_2 [асимптотической на поверхности (A_1)], то для всякого перемещения на поверхности dA_1 лежит в этой плоскости:

$$(dA_1A_1A_2A_3) = 0,$$

а для перемещения, касательного к лучу A_1A_2 $(\omega_1^3 = 0)$, там лежит и d^2A_1:

$$(d^2A_1A_1A_2A_3) \equiv 0 \pmod{\omega_1^3}.$$

Первое уравнение даёт $\omega_1^4 = 0$, а второе —

$$\omega_1^2\, \omega_2^4 \equiv 0 \pmod{\omega_1^3}.$$

Если первый множитель линейно зависит от ω_1^3, то поверхность (A_1) вырождается в линию. Следовательно, имеем:

$$\omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^4 = a\,\omega_1^3. \tag{14}$$

Из уравнения

$$d(A_1A_2) = (\omega_1^1 + \omega_2^2)(A_1A_2) + \omega_1^3\{(A_3A_2) + a(A_1A_4)\} + \omega_2^3(A_1A_3)$$

следует, что при $\omega_1^3 = \omega_2^3 = 0$ луч (A_1A_2) стоит на месте. Следовательно, формы ω_1^3, ω_2^3 должны оставаться линейно независимыми на интегральном многообразии $\mathfrak{M}_2$.

Если точки

$$M = A_1 + \lambda A_2, \quad M' = A_3 + \mu A_4$$

описывают поверхности Σ и Σ', то по свойству их касательных плоскостей

$$(dM, A_1 + \lambda A_2, A_3A_4) = 0, \quad (dM', A_3 + \mu A_4, A_1A_2) = 0,$$

откуда с помощью формул (13) получаем

$$d\lambda = \lambda^2\omega_2^1 + \lambda(\omega_1^1 - \omega_2^2) - \omega_1^2,$$
$$d\mu = \mu^2\omega_4^3 + \mu(\omega_3^3 - \omega_4^4) - \omega_3^4,$$

а так как каждое уравнение определяет семейство поверхностей и, следовательно, вполне интегрируемо, то внешние дифференциалы суть алгебраические следствия самих уравнений. Дифференцируя их внешним образом, исключая дифференциалы $d\lambda$, $d\mu$ и обращая в нуль коэффициенты при степенях λ и μ, получим систему уравнений

$$(15)\quad \begin{gathered} [\omega_2^3\omega_3^1]+a[\omega_1^3\omega_4^1]=0,\quad [\omega_1^3\omega_3^2]=0,\quad [\omega_1^3\omega_3^1]-a[\omega_1^3\omega_4^2]=0,\\ a[\omega_3^2\omega_1^3]=0,\quad [\omega_4^1\omega_1^3]+[\omega_4^2\omega_2^3]=0,\quad [\omega_2^3\omega_3^2]=0, \end{gathered}$$

где мы уже использовали уравнения (14), чтобы исключить ω_1^4 и ω_2^4. Так как ω_1^3 и ω_2^3 линейно независимы, то второе уравнение первой строки и третье второй строки дают:

$$(16)\qquad \omega_3^2=0.$$

Остаются только три уравнения

$$(15')\quad \begin{gathered} [\omega_2^3\omega_3^1]+a[\omega_1^3\omega_4^1]=0,\\ [\omega_2^3\omega_4^2]+[\omega_1^3\omega_4^1]\ =0. \end{gathered}\qquad [\omega_1^3\omega_3^1]-a[\omega_1^3\omega_4^2]=0.$$

Исключая $[\omega_1^3\omega_4^1]$, получим:

$$[\omega_1^3,\ \omega_3^1-a\omega_4^2]=0,\quad [\omega_2^3,\ \omega_3^1-a\omega_4^2]=0,$$

откуда

$$(17)\qquad \omega_3^1=a\omega_4^2.$$

Следовательно, конгруэнция (A_3A_4) — тоже параболическая, точка A_3 — единственный фокус луча A_3A_4 и плоскость $A_3A_4A_1$ — его фокальная плоскость.

Внешние дифференциалы $\omega_1^4=0$, $\omega_3^2=0$ дают:

$$[\omega_1^3,\ \omega_3^4-a\omega_1^2]=0,\quad [\omega_4^2,\ \omega_3^4-a\omega_1^2]=0.$$

Если ω_1^3, ω_4^2 линейно независимы, то $\omega_3^4=a\omega_1^2$. Тогда конгруэнция (A_1A_3) вырождается, ибо луч A_1A_3 касается на поверхности (A_1) линии $\omega_1^2=0$, а на поверхности (A_3) — линии $\omega_3^4=0$, а поскольку ω_3^4 и ω_1^2 пропорциональны, эти линии соответствуют и в соответствующих точках имеют одни и те же касательные. Это противоречие разрешается, если допустить, что обе линии—прямые, совпадающие со своей единственной общей касательной. Следовательно, обе конгруэнции C и C' имеют одну и ту же линейчатую фокальную поверхность и описаны касательными к криволинейным асимптотическим её. Соответствуют друг другу пары касательных к различным асимптотическим в точках пересечения с одной прямолинейной образующей.

Если оставить этот случай в стороне, то получим:

$$(18)\qquad \omega_4^2=b\omega_1^3.$$

Рассматриваемая пара будет определяться уравнениями

$$(19)\quad \begin{gathered} \omega_1^4=0,\quad \omega_3^2=0,\\ \omega_2^4=a\omega_1^3,\quad \omega_4^2=b\omega_1^3,\quad \omega_3^1=ab\omega_1^3,\\ [\omega_4^1-b\omega_2^3,\ \omega_1^3]=0,\quad [\omega_3^4-a\omega_1^2,\ \omega_1^3]=0. \end{gathered}$$

Внешние дифференциалы имеют вид

$$(20)\quad \begin{gathered} [\Delta a\omega_1^3]+[a\omega_1^2+\omega_3^4,\ \omega_2^3]=0,\\ [\Delta b\omega_1^3]-[\omega_4^1+b\omega_2^3,\ \omega_1^2]=0,\\ [\omega_4^1+b\omega_2^3,\ \omega_3^4+a\omega_1^2]=0, \end{gathered}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta a&=da+a(\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3+\omega_4^4),\\ \Delta b&=db+b(\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4). \end{aligned}$$

Характеристическая система содержит 12 форм: ω_1^3, ω_2^3 (независимые на $\mathfrak{M}_2$), ω_1^4, ω_3^2, $\omega_2^4-a\omega_1^3$, $\omega_4^2-b\omega_1^3$, $\omega_3^1-ab\omega_1^3$ (равны нулю на $\mathfrak{M}_2$), ω_4^1, ω_3^4, ω_1^2, Δa и Δb. Следовательно, $q=5$.

Разрешая систему (19), (20), получим для наиболее общего интегрального элемента $\mathcal{E}_2$

$$\begin{gathered} \Delta a=a_1\omega_1^3+\mu a_2\omega_2^3,\\ \Delta b=b_1\omega_1^3+2ba_2\omega_2^3,\\ \omega_3^4+a\omega_1^2=\mu(a_2\omega_1^3+\omega_2^3),\ \omega_3^4-a\omega_1^2=-2aa_2\omega_1^3,\\ \omega_4^1+b\omega_2^3=2b(a_2\omega_1^3+\omega_2^3),\quad \omega_4^1-b\omega_2^3=2ba_2\omega_1^3. \end{gathered}$$

Следовательно, $N=5$.

Если обозначить буквами u и v значения форм ω_1^3 и ω_2^3 на первом линейном элементе e_1, то квадратичные уравнения (19), (20) дают для определения форм ω_4^k на e_2 линейную систему

$$\begin{gathered} u\,\omega_4^1=\ldots;\quad u\omega_3^4-au\omega_1^2=\ldots,\\ u\,\Delta a+av\omega_1^2+v\omega_3^4=\ldots,\\ u\,\Delta b+2b(a_2u+v)\omega_1^2-\left(\frac{\mu+2a}{2a}\,a_2u+\frac{\mu}{2a}\,v\right)\omega_4^1=\ldots,\\ \mu(a_2u+v)\,\omega_4^1-2\,b(a_2u+v)\,\omega_3^4-2ab\,(a_2u+v)\,\omega_1^2=\ldots, \end{gathered}$$

где правые части опущены.

Определитель системы обращается в нуль, если

$$(21)\qquad 4abu^4(a_2u+v)=0.$$

За этим исключением (характеристики), ранг системы $s_1 = 5$. Следовательно, число Картана $Q = 2q - s_1 = 5$, а так как $N = 5$, то система — в инволюции и определяет $\mathfrak{M}_2$ с пятью произвольными функциями одного аргумента.

Если задать интегральное многообразие $\mathfrak{M}_1$ формами, не удовлетворяющими уравнению (21), то многообразие $\mathfrak{M}_2$, проходящее через это $\mathfrak{M}_1$, вполне определено, ибо через неособый элемент $\mathcal{E}_1^0$ проходит только один элемент $\mathcal{E}_2$.

2. Уравнения расслояемой пары линейчатых поверхностей. Пусть B_1B_2 и B_3B_4 — пара соответствующих образующих развёртывающихся поверхностей L и L'. Пусть B_1 описывает ребро возврата поверхности L и $B_1B_2B_3$ — касательная плоскость поверхности L вдоль образующей B_1B_2.

Пусть проективные перемещения тетраэдра $B_1B_2B_3B_4$ определяются формулами

$$dB_i = \upsilon_i^k B_k.$$

Так как точка B_1 может перемещаться только вдоль луча B_1B_2, а точка B_2 — в плоскости $B_1B_2B_3$, то

$$(dB_1, B_1B_2) = 0, \quad (dB_2, B_1B_2B_3) = 0,$$

откуда следует:

$$\upsilon_1^3 = \upsilon_1^4 = \upsilon_2^4 = 0. \tag{22}$$

С другой стороны, если точки

$$M = B_1 + \lambda B_2, \quad M' = B_3 + \mu B_4$$

описывают кривые σ и σ', то их соприкасающиеся плоскости суть MB_3B_4, $M'B_1B_2$; следовательно,

$$(dM, MB_3B_4) = 0, \quad (dM', M'B_1B_2) = 0,$$
$$(d^2M, MB_3B_4) = 0, \quad (d^2M', M'B_1B_2) = 0.$$

Первая пара уравнений даёт

$$\begin{aligned} d\lambda &= \lambda^2\upsilon_2^1 + \lambda(\upsilon_1^1 - \upsilon_2^2) - \upsilon_1^2, \\ d\mu &= \mu^2\upsilon_4^3 + \mu(\upsilon_3^3 - \upsilon_4^4) - \upsilon_3^4. \end{aligned} \tag{23}$$

Вторая пара, если исключить $d\lambda$, $d\mu$ с помощью уравнений (23), приведёт к двум квадратным уравнениям соответственно относительно λ или μ. Так как каждая точка $M = B_1 + \lambda B_2$ и $M' = B_3 + \mu B_4$ должна описывать соответственно семейство кривых σ или σ', то координаты λ и μ определяются каждая с произвольным параметром, следовательно, не могут удовлетворять конечному уравнению. Обращая

в нуль коэффициенты при степенях λ и μ и свободные члены, мы получим уравнения

$$\upsilon_2^3\upsilon_3^1 = 0, \quad \upsilon_4^2\upsilon_2^3 = 0, \quad \upsilon_2^3\upsilon_3^2 = 0, \tag{24}$$

где мы уже положили, согласно уравнениям (22), $\upsilon_1^3 = \upsilon_1^4 = \upsilon_2^4 = 0$. Если форма υ_2^3 не равна нулю (равенство $\upsilon_2^3 = 0$ приводило бы к неподвижности прямой B_1B_2), то система (24) равносильна системе

$$\upsilon_3^1 = 0, \quad \upsilon_3^2 = 0, \quad \upsilon_4^2 = 0. \tag{24'}$$

Эти равенства вполне симметричны уравнениям (22) и получаются из них заменой $\binom{1\,2}{3\,4}$. Они показывают, что поверхность (B_3B_4) — тоже развёртывающаяся, и точка B_3 описывает её ребро возврата. Обе поверхности расположены так, что прямая B_1B_3, соединяющая соответствующие точки их рёбер возврата, является вместе с тем линией пересечения соприкасающихся плоскостей.

Уравнения (22), (24′) составляют все уравнения нашей задачи. Так как система содержит только одну независимую переменную, то она всегда — в инволюции.

Из 16 форм υ_i^k в силу уравнений (22), (24′) шесть равны нулю; четыре формы υ_i^i зависят от нормирования вершин тетраэдра и для конфигурации не существенны; также не существенны формы υ_2^1, υ_4^3, перемещающие точки B_2 и B_4 по лучам B_2B_1 и B_4B_3. Остаются четыре формы, из которых одну, например υ_2^3 (заведомо отличную от нуля), можно привести к виду полного дифференциала $\upsilon_2^3 = d\sigma$. Следовательно, расслояемая пара развёртывающихся поверхностей зависит от трёх функций одного аргумента.

3. Пара (L, L') как интегральное многообразие $\mathfrak{M}_1$. Решение системы (22), (24′) определяется интегральным линейным элементом $\mathcal{E}_1^0(\upsilon)$, т. е. точкой (числовыми значениями переменных) и числовыми значениями форм в этой точке:

$$\upsilon_1^3 = \upsilon_1^4 = \upsilon_2^4 = \upsilon_3^1 = \upsilon_3^2 = \upsilon_4^2 = 0, \quad \upsilon_2^3 = 1, \quad \upsilon_i^k,$$

где υ_2^1, υ_4^3 не существенны.

Нетрудно заметить, что линейный элемент $\mathcal{E}_1^0(\upsilon)$ является тем интегральным элементом системы (19), который соответствует $\omega_1^3 = 0$, и при этом условии уравнения Пфаффа (19) совпадут с системой уравнений (22), (24′).

Однако именно требование $\upsilon_1^3 = 0$ удовлетворяет условию (21), и, следовательно, элемент $\mathcal{E}_1^0(\upsilon)$ будет особым элементом системы (19) — характеристикой (Коши). Теорема существования Картана здесь не имеет силы, и на этом пути мы не сумеем доказать, что пару (L, L') можно рассматривать как интегральное многообразие $\mathfrak{M}_1$ системы (19), через которое проходит многообразие $\mathfrak{M}_2$ в виде расслояемой пары конгруэнций.

4. Эквивалентная система уравнений в частных производных. Будем определять пары (L, L') и (C, C') компонентами проективных перемещений их тетраэдров.

Для тетраэдра пары (L, L') это — компоненты υ_i^k элемента $\mathcal{E}_1(\upsilon)$ которые надо рассматривать как функции одной переменной u. Для тетраэдра пары (C, C') это — компоненты двух линейных элементов $e_1(\omega)$ и $e_2(\pi)$; их надо рассматривать как функции двух переменных u и v:

$$(e_1) \qquad \omega_1^4=0, \quad \omega_3^2=0, \quad \omega_1^3=0, \quad \omega_i^k=\lambda_i^k\,du, \quad \lambda_2^3\neq 0,$$

$$(e_2) \qquad \pi_1^4=0, \quad \pi_3^2=0, \quad \pi_2^3=0, \quad \pi_i^k=l_i^k dv, \quad l_1^3\neq 0.$$

При этом мы можем нормировать вершины A_i так, чтобы всюду было

$$\lambda_1^1=\lambda_2^2=\lambda_3^3=\lambda_4^4=0$$

и, кроме того,

$$l_1^1=l_2^2=l_3^3=l_4^4=0 \text{ для } u=0.$$

Введём для удобства точки $B_2=A_2+\nu A_1$, $B_4=A_4+\nu' A_3$ так, чтобы всюду

$$\lambda_2^1=\lambda_4^3=0$$

и, кроме того,

$$l_2^1=l_4^3=0 \text{ для } u=0.$$

Всё это одновременно для тетраэдра (L, L') и тетраэдра (C, C').

Выберем параметры u, v так, чтобы

$$\lambda_2^3=1 \text{ для } v=0, \quad l_2^4\,l_1^3=1 \text{ для } u=0.$$

Наконец, чтобы $\mathfrak{M}_2$ проходило через $\mathfrak{M}_1$, потребуем: все функции λ_i^k для $v=0$ принимают для обоих тетраэдров одни и те же значения.

Расслояемая пара параболических конгруэнций в общем случае определяется системой уравнений (19), (20), но эта система содержит вспомогательные неизвестные a, b. Чтобы не вводить новых величин a и b, обратимся к первоначальной системе уравнений (14), (15′), (16):

$$(25) \qquad \begin{aligned} \omega_1^4&=0, & \omega_3^2&=0,\\ [\omega_2^4\omega_1^3]&=0, & [\omega_2^3\omega_3^1]+[\omega_2^4\omega_4^1]&=0,\\ [\omega_1^3\omega_3^1]-[\omega_2^4\omega_4^2]&=0, & [\omega_2^3\omega_4^2]+[\omega_1^3\omega_4^1]&=0,\\ [\omega_1^2\omega_2^4]+[\omega_1^3\omega_3^4]&=0, & [\omega_3^1\omega_1^2]+[\omega_3^4\omega_4^2]&=0. \end{aligned}$$

Последние два уравнения суть внешние дифференциалы от $\omega_1^4=0$, $\omega_3^2=0$.

Внося сюда значения компонент (e_1) и (e_2), получаем соотношения

$$\lambda_2^4=0,\ \lambda_3^1=\lambda_4^2\frac{l_2^4}{l_1^3}, \quad \lambda_3^4=\lambda_1^2\,\frac{l_2^4}{l_1^3},$$

$$l_3^1=l_2^4\frac{\lambda_4^1}{\lambda_2^3}, \qquad l_4^2=l_1^3\,\frac{\lambda_4^1}{\lambda_2^3},$$

$$\lambda_4^2\,l_3^4=\lambda_3^1\,l_1^2;$$

последнее по исключении λ_3^1 даёт

$$(26) \qquad \lambda_4^2\left(l_3^4-\frac{l_2^4}{l_1^3}\,l_1^2\right)=0.$$

Обращение λ_4^2 в нуль приводит к пропорциональности ω_4^2 и ω_1^3, ибо $\lambda_1^3=0$, и, следовательно, обе формы пропорциональны дифференциалу dv. Это соответствует первому из рассмотренных выше (стр. 348) двух случаев расслояемой пары параболической конгруэнции, когда пара образована из одной, дважды взятой, конгруэнции касательных к криволинейным асимптотическим одной линейчатой поверхности. Полагая $\lambda_4^2=0$ и вводя новые неизвестные α, β, γ, φ и x, получим:

$$\lambda_2^4=\lambda_4^2=\lambda_3^1=\lambda_1^3=\lambda_2^1=\lambda_4^3=\lambda_1^4=\lambda_3^2=0, \quad \lambda_i^i=0,$$

$$\lambda_2^3=\alpha, \quad \lambda_1^2=\alpha\beta, \quad \lambda_4^1=\alpha\gamma, \quad \lambda_3^4=\alpha\beta\varphi,$$

$$l_1^4=l_3^2=l_2^3=0, \quad l_1^3=x, \quad l_2^4=x\varphi, \quad l_4^2=x\gamma, \quad l_3^1=x\gamma\varphi.$$

Из уравнений структуры, содержащих внешние дифференциалы $D\omega_2^4$, $D\omega_4^2$, $D\omega_3^1$, $D\omega_1^3$, найдём:

$$l_4^1=\frac{\gamma x}{\alpha\beta}\cdot\frac{\partial\ln\varphi}{\partial u}, \quad l_1^2=\frac{x}{2\alpha}\cdot\frac{\partial\ln\gamma\varphi}{\partial u}, \quad l_3^4=\frac{\varphi x}{2\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\ln\frac{\varphi}{\gamma}\right).$$

Остальные уравнения структуры дают систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial\alpha}{\partial v}&=\ldots,\\ \frac{\partial\beta}{\partial v}&=\frac{x}{2\alpha^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial u^2}(\ln\gamma\varphi)+\ldots,\\ \frac{\partial\gamma}{\partial v}&=\frac{x\gamma}{\alpha^2\beta}\cdot\frac{\partial^2}{\partial u^2}(\ln\varphi)+\ldots,\\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}&=-\frac{x\varphi}{\alpha^2\beta}\cdot\frac{\partial^2}{\partial u^2}(\ln\gamma)+\ldots,\\ \frac{\partial x}{\partial u}&=\ldots,\ \frac{\partial l_i^i}{\partial u}=\ldots,\ \frac{\partial l_2^1}{\partial u}=\ldots,\ \frac{\partial l_4^3}{\partial u}=\ldots, \end{aligned}$$

где в правой части сохранены только производные второго порядка.

Эта система не ортономна. Если первую компоненту пометы функций γ, φ обозначить через γ_1, φ_1 и иметь в виду, что первая компонента пометы независимых переменных u, v всегда равна единице, то первые компоненты пометы производных $\frac{\partial\gamma}{\partial v}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 \ln\gamma}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 \ln\varphi}{\partial u^2}$ будут соответственно γ_1+1, φ_1+1, γ_1+2, φ_1+2, и, следовательно, необходимое условие ортономности (помета производной в правой части не больше, чем в левой) даёт систему несовместных неравенств

$$\gamma_1 \geqslant \varphi_1+1, \quad \varphi_1 \geqslant \gamma_1+1.$$

Это показывает, что при произвольном задании начальных значений неизвестных λ_1^2, λ_4^1, λ_3^2 для $v=0$ не существует интегрального многообразия $\mathfrak{M}_2$, проходящего через заданное $\mathfrak{M}_1$. Значит, произвольную пару (L, L') нельзя включить в пару конгруэнций (C, C'), составленную из дважды взятой конгруэнции касательных к криволинейным асимптотическим одной линейчатой поверхности.

Обратимся теперь ко второму из возможных случаев, когда равен нулю второй множитель в левой части уравнения (26). Вводя новые неизвестные функции α, β, γ, φ, δ, x, получим:

$$\lambda_1^4=\lambda_3^2=\lambda_1^3=\lambda_2^4=\lambda_2^1=\lambda_4^3=0, \quad \lambda_i^i=0,$$

$$\lambda_2^3=\alpha, \quad \lambda_4^2=\gamma, \quad \lambda_3^1=\frac{\gamma\varphi}{x}, \quad \lambda_1^2=\beta, \quad \lambda_3^4=\frac{\beta\varphi}{x}, \quad \lambda_4^1=\delta,$$

$$l_2^3=l_1^4=l_3^2=0, \quad l_1^3=x, \quad l_2^4=\varphi, \quad l_4^2=\frac{\delta x}{\alpha}, \quad l_3^1=\frac{\varphi\delta}{\alpha}, \quad l_3^4=\frac{\varphi l_1^2}{x}.$$

Уравнения структуры дадут

$$\frac{\partial}{\partial u}(x\varphi)=0, \quad \frac{\partial l_1^1}{\partial u}=\frac{\partial l_2^2}{\partial u}=-\frac{\partial l_3^3}{\partial u}=-\frac{\partial l_4^4}{\partial u}, \quad \frac{\partial l_2^1}{\partial u}=0, \quad \frac{\partial l_4^3}{\partial u}=0,$$

а так как $x\varphi=1$, $l_i^i=0$, $l_2^1=l_4^3=0$ для $u=0$, то и для всех значений u, v

$$x\varphi=1, \quad l_1^1=l_2^2=-l_3^3=-l_4^4, \quad l_2^1=l_4^3=0,$$

и тогда из той же системы уравнений структуры получим:

$$l_1^2=-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad l_4^1=-3\frac{\delta x}{\alpha\beta}\frac{\partial \ln x}{\partial u}-2\frac{\gamma x}{\alpha\beta^2}\left(\frac{\partial \ln x}{\partial u}\right)^2.$$

Остальные уравнения структуры дают теперь систему

$$\frac{\partial \ln\alpha}{\partial v}=2l_1^1,$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial v}=-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \ln\alpha}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial u},$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\delta}{\alpha x}\right)-2\frac{\gamma x}{\alpha\beta}\left(\frac{\partial \ln x}{\partial u}\right)^2-2\gamma l_1^1,$$

$$\tag{27} \begin{aligned} \frac{\partial\delta}{\partial v}=-\frac{1}{\alpha\beta}\left(3\delta+4\frac{\gamma}{\beta}\frac{\partial \ln x}{\partial u}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+2\frac{\gamma x^2}{\alpha\beta^2}\left(\frac{\partial \ln x}{\partial u}\right)^3-\\ -2x\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\gamma}{\alpha\beta^2}\right)\cdot\left(\frac{\partial \ln x}{\partial u}\right)^2-3\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\delta}{\alpha\beta}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial u}-2\delta l_1^1, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{1}{\alpha\beta}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2,$$

$$\frac{\partial l_1^1}{\partial u}=-\gamma\varphi.$$

Система ортономна. Если переменным присвоить пометы

$$u\sim(1,0), \quad v\sim(1,2), \quad \alpha\sim(0,0), \quad \beta\sim(2,0), \quad \gamma\sim(2,0), \quad \delta\sim(2,0),$$
$$x\sim(0,0), \quad l_1^1\sim(0,0),$$

то все уравнения становятся нормальными. Так как каждое неизвестное входит в виде главной производной только в одно уравнение, то система пассивна. Существует решение системы (27) и только одно, определяемое начальными условиями:

α, β, γ, δ и x для $v=0$ принимают начальные значения как произвольные функции от u,

l_1^1 для $u=0$ — произвольная функция от v.

Начальное значение l_1^1 для $u=0$ надо положить равным нулю согласно условию нормирования. Начальное значение $\alpha=\lambda_2^3$ для $v=0$ по условию равно единице. Начальные значения β, γ, δ и x при $v=0$ позволят включить в пару конгруэнций заданную пару развёртывающихся поверхностей. Следовательно, произвольная расслояемая пара развёртывающихся поверхностей входит в одну и только одну расслояемую пару параболических конгруэнций.

ГЛАВА XIII

ОСОБЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

§ 1. Особые интегральные элементы особого интегрального многообразия $\mathfrak{M}_n$

Особым интегральным многообразием называется многообразие $\mathfrak{M}_n$, у которого касательные элементы $\mathcal{E}_n$ недостижимы регулярной цепью интегральных элементов, т. е. все касательные элементы многообразия $\mathcal{E}_p$ какого-то определённого числа измерений $p(1 \leqslant p < n)$ — особые интегральные элементы системы уравнений (S).

Не выходя из заданной системы (S), особых интегральных многообразий, очевидно, нельзя получить, ибо теорема существования Картана требует построения регулярной цепи интегральных элементов, между тем из произвольного касательного элемента $\mathcal{E}_n$ такого многообразия при любом высечении нельзя получить неособой цепи.

Рассмотрим какой-нибудь особый элемент $\mathcal{E}_p$ системы (S). Он определяется рядом уравнений между координатами его линейных элементов $e_\nu(x_i, z_j; \omega_i, \overline{\omega}_g)(1 \leqslant \nu \leqslant p)$. Присоединим все такие уравнения к системе (S). Мы получим тогда систему уравнений (S^*), которая обладает тем свойством, что каждый интегральный элемент её $\mathcal{E}_p$ будет интегральным для системы (S) и притом особым элементом. Для системы (S^*) он может быть регулярным и дать возможность построить регулярную цепь интегральных элементов, которая позволит с помощью теоремы Картана доказать существование интегрального многообразия $\mathfrak{M}_n^*$. Это многообразие, будучи интегральным для системы (S^*), тем самым будет интегральным и для системы (S), ибо все уравнения (S) включены в систему (S^*).

Если для системы (S^*) многообразие $\mathfrak{M}_n^*$ — неособое и получено применением теоремы Картана, то в системе (S) многообразие $\mathfrak{M}_n^*$ — особое интегральное многообразие, ибо все касательные элементы его $\mathcal{E}_p$, как интегральные элементы системы (S^*), по самому построению её являются особыми для системы (S).

Если особый элемент $\mathcal{E}_p$ системы (S) — линейный, т. е. $p = 1$, то условие нерегулярности элемента выражается одним или несколькими уравнениями на формы ω_i, $\overline{\omega}_g$ этого элемента. Если эти уравнения — линейные или левые части их разлагаются на линейные множители, то система (S) дополняется одним или несколькими уравнениями Пфаффа. Вообще говоря, исследование системы приходится разбивать на различные случаи в зависимости от того, какой из множителей, на которые разлагается левая часть уравнения, мы приравниваем нулю.

Если присоединённое уравнение не разлагается на множители, то мы преобразуем его в совокупность линейных уравнений, вводя дополнительные неизвестные. Например, равенство нулю определителя (условие понижения ранга линейной системы) эквивалентно линейной зависимости между соответствующими элементами всех строк или всех столбцов. Коэффициенты этой линейной зависимости надо рассматривать как дополнительные неизвестные.

Если при этом одна из наших систем (S_1^*), на которые распалось исследование системы (S^*), содержит уравнение только между формами ω_i, которые должны оставаться независимыми на интегральном многообразии $\mathfrak{M}_n$, то система по общим правилам не допускает такого интегрального многообразия. Надо обращать в нуль коэффициенты при формах ω_i, если только это не приведёт к противоречию.

Сложнее дело обстоит с особыми элементами $\mathcal{E}_p$, если $p > 1$. Тогда условие нерегулярности элемента $\mathcal{E}_p$ напишется в виде одного или нескольких уравнений на формы ω_i, $\overline{\omega}_g$ для различных линейных элементов $e_1, e_2, \ldots, e_p$, образующих элемент $\mathcal{E}_p$. Можно предложить такой метод исследования этой системы:

Так как система (S) допускает интегральный элемент $\mathcal{E}_n$, то всем уравнениям системы (S) можно удовлетворить, полагая

$$(1) \qquad \overline{\omega}_g = l_{gi}\omega_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где l_{gi} являются функциями какого-то числа N произвольных параметров y_h. Вносим выражения (1) в уравнения, которые выражают условие нерегулярности элемента $\mathcal{E}_p$. Мы получим уравнения между p сериями форм $\omega_i^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$, причём каждая форма $\omega_i^{(j)}$ с одним указателем j относится к линейному элементу e_j. Так как все интегральные элементы $\mathcal{E}_p$ должны быть особыми на особом интегральном многообразии $\mathfrak{M}_n^*$, то все эти значения форм $\omega_i^{(j)}$ должны оставаться произвольными. Приводя подобные члены и обращая в нуль коэффициенты при различных произведениях форм $\omega_i^{(j)}$, мы придём к системе уравнений на коэффициенты l_{gi}, или, что то же самое, на параметры y_h. Присоединяя эти уравнения и уравнения (1) к системе (S), мы построим такое проложение (S^*) системы (S), которое будет определять особые интегральные многообразия системы (S).

Эти выкладки можно сократить¹), если заметить, что условие нерегулярности элемента $\mathcal{E}_p$ есть условие понижения ранга полярной

---

¹) Этот приём был показан студ. М. А. Акивисом на семинаре Московского университета.

матрицы, т. е. равенства нулю её определителей определённого порядка. При этом элементы определителей составлены из значений форм $\omega_i^{(j)}, \bar{\omega}_g^{(j)}$ на p линейных элементах e_j базиса элемента $\mathcal{E}_p$, и все p серий этих значений для $j = 1, 2, \ldots, p$ входят равноправно. Так как на особом интегральном многообразии все элементы $\mathcal{E}_p$ должны быть особыми, то и линейные элементы e_j вполне произвольны, а поскольку равенство, справедливое для всех значений внешней формы, имеет место и для самой формы, то p-линейную форму из $\omega_i^{(j)}, \bar{\omega}_g^{(j)}$ можно заменить присоединённой внешней формой.

Если система ковариантов содержит только квадратичные формы, то элементами определителя будут служить линейные комбинации из $\omega_i^{(j)}, \bar{\omega}_g^{(j)}$. Если $\nu \leqslant p$ строк определителя содержат значения одних и тех же линейных форм на различных элементах e_j, то определители ν-го порядка матрицы из элементов этих строк можно заменить внешними произведениями линейных форм. Развёртывая их по правилу Лапласа, мы применим тот же метод к преобразованию определителей, которые будут стоять множителями при этих внешних произведениях, пока не приведём весь определитель к виду суммы (алгебраической) произведений внешних форм.

Если же система содержит внешние уравнения степени $m > 2$, то коэффициентами при определяемых формах элемента e_{p+1} будут определители $(m-1)$-го порядка из $\omega_i^{(j)}, \bar{\omega}_g^{(j)}$, которые мы прямо можем заменить внешними произведениями из $m-1$ множителей. Таким образом задача будет приведена к исследованию нелинейных алгебраических однородных уравнений между внешними формами различных степеней.

Разобранные в следующих параграфах примеры покажут, как можно применять эти общие указания.

§ 2. Примеры

1. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_2$ системы Пфаффа

$$dz_1 = 2vy\,dv - u\,dx,$$
$$dz_2 = y\,du - v\,dx,$$

на котором $[dx\,dy] \neq 0$. Исследовать совместность системы и указать особые решения.

2. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_2$ системы Пфаффа

$$dz_1 = v\,du + u\,dx,$$
$$dz_2 = y\,dv - v\,dx + u\,dy,$$

на котором $[dx\,dy] \neq 0$. Исследовать совместность и определить особые решения.

3. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_2$ системы Пфаффа

$$dz_1 = u\,dv - v\,dy,$$
$$dz_2 = 2v\,dx + u\,dy,$$

на котором $[dx\,dy] \neq 0$. Исследовать совместность и определить особые решения.

4. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ системы Пфаффа

$$dt_1 = 2u\,dv + (v^2 - w^2)\,dx,$$
$$dt_2 = x\,du - y\,dv + z\,dw + v\,dx - w\,dy + u\,dz,$$
$$dt_3 = (v - w)\,dy + (v - u)\,dz,$$

на котором $[dx\,dy\,dz] \neq 0$. Исследовать совместность системы и определить особые решения.

5. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ системы Пфаффа

$$dt_1 = u\,dx - v\,du + t\,dw,$$
$$dt_2 = v\,dx - y\,dw + u\,dz,$$

на котором $[dx\,dy\,dz] \neq 0$. Исследовать совместность системы и определить особые решения.

6. Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ системы внешних дифференциальных уравнений

$$dt = u\,dx + v\,dy + w\,dz,$$
$$[du\,dv\,dw] = 0,$$

на котором $[dx\,dy\,dz] \neq 0$. Исследовать совместность и определить особые решения.

Решения

Пример 1. Дифференцируем внешним образом уравнения заданной системы

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} u[du\,dx] + v[dv\,dy] &= 0, \\ [du\,dy] + [dv\,dx] &= 0. \end{aligned}$$

Если обозначить через d и δ символы дифференцирования для двух линейных элементов интегрального элемента $\mathcal{E}_2$, то билинейные коварианты, присоединённые к формам (α), напишутся в виде

$$u\,dx\,\delta u + v\,dy\,\delta v = u\,\delta x\,du + v\,\delta y\,dv,$$
$$dy\,\delta u + dx\,\delta v = \delta y\,du + \delta x\,dv.$$

Определитель системы (относительно неизвестных δu, δv) равен

$$\Delta = u(dx)^2 - v(dy)^2.$$

Если $\Delta \neq 0$, то $s_1 = 2$. Значит

$$n = 2, \quad q = 2, \quad s_1 = 2, \quad s_2 = 0, \quad Q = 2,$$

а так как наиболее общее решение системы (α)

$$du = a\,dx + bv\,dy,$$
$$dv = bu\,dx + a\,dy$$

зависит от двух параметров, то $N=2$, и система — в инволюции. Произвол решения — две функции одного аргумента.

Обращение определителя Δ в нуль:

$$(\beta) \qquad u(dx)^2 - v(dy)^2 = 0,$$

определяет в каждой точке интегрального многообразия $\mathfrak{M}_2$ два направления $dx:dy$, т. е. два линейных элемента $\mathcal{E}_1$, для которых теорема существования Картана теряет силу. Это — характеристики (Коши). Следовательно, уравнение (β) на каждом интегральном многообразии $\mathfrak{M}_2$ определяет два семейства характеристик.

Наконец, определитель Δ обращается в нуль тождественно (относительно dx, dy), если

$$(\gamma) \qquad u = 0, \quad v = 0.$$

Присоединяя эти уравнения к заданной системе Пфаффа, мы получаем вполне интегрируемую систему

$$dz_1 = 0, \quad dz_2 = 0,$$

которая определяет особые интегральные многообразия.

Пример 2. Дифференцируем внешним образом заданную систему

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} &[du\,dx] + [dv\,du] = 0,\\ &[du\,dy] - [dv, dx + dy] = 0. \end{aligned}$$

Присоединённая система билинейных ковариантов для двух линейных элементов с символами дифференцирования d и δ имеет вид

$$(\alpha') \qquad \begin{aligned} (dx - dv)\delta u + du\,\delta v &= \delta x\,du,\\ dy\,\delta u - (dx + dy)\delta v &= \delta y\,du - (\delta x + \delta y)\,dv. \end{aligned}$$

Если определитель системы (относительно δu, δv)

$$\Delta = \begin{vmatrix} dx - dv & du \\ dy & -dx - dy \end{vmatrix},$$

где дифференциалы относятся к первому линейному элементу, не равен нулю, то уравнения (α') определяют δu, δv. В принятых обозначениях имеем:

$$n = 2, \quad q = 2, \quad s_1 = 2, \quad s_2 = 0, \quad Q = 2.$$

Наиболее общее решение системы (α) или

$$(\beta) \qquad \begin{aligned} du &= a\,dx + \frac{ab}{a+b-1}dy,\\ dv &= (a+b)dx + b\,dy \end{aligned}$$

или

$$(\gamma) \qquad \begin{aligned} du &= c\,dy,\\ dv &= dx + dy, \end{aligned} \qquad \text{или} \qquad \begin{aligned} du &= dx + c\,dy,\\ dv &= dx. \end{aligned}$$

Первое зависит от двух параметров. Следовательно, $N=2$; система — в инволюции, и произвол решения — две функции одного аргумента. Вторые зависят от одного параметра; системы — не в инволюции.

Присоединяя те или другие уравнения (γ), получим систему ковариантов

$$[dc\,dy] = 0,$$

обе системы — в инволюции и определяют решение с произволом одной функции одного аргумента.

Если $\Delta = 0$, то интегральный элемент $\mathcal{E}_1$ становится особым. Присоединяем уравнение $\Delta = 0$ к системе. Чтобы не иметь дело с уравнением второй степени, вводим вспомогательную неизвестную λ:

$$(\delta) \qquad \begin{aligned} dv - dx &= \lambda\,dy,\\ du &= \lambda(dx + dy). \end{aligned}$$

Заданная система Пфаффа вместе с уравнениями (α), (δ) определяет особые интегральные многообразия первоначальной системы Пфаффа. Внося du, dv из уравнений (δ) в квадратичные уравнения (α), получаем несовместную систему

$$\lambda^2[dx\,dy] = 0, \quad (2\lambda - 1)[dx\,dy] = 0.$$

Следовательно, заданная система Пфаффа не допускает особых интегральных многообразий. Мы получим тот же результат, если будем вычислять определитель Δ отдельно для систем (β) или (γ).

Пример 3. Дифференцируем заданные уравнения внешним образом:

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} &[du\,dv] - [dv\,dy] = 0,\\ &[du\,dy] + 2[dv\,dx] = 0. \end{aligned}$$

Для двух линейных элементов d и δ система присоединённых билинейных ковариантов имеет вид

$$\begin{aligned} dv\,\delta u - (du + dy)\,\delta v &= -\delta y\,dv,\\ dy\,\delta u + 2\,dx\,\delta v &= \delta y\,du + 2\delta x\,dv. \end{aligned}$$

Если определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} dv & -du - dy \\ dy & 2dx \end{vmatrix}$$

не равен нулю, то в принятых обозначениях

$$n = 2, \quad q = 2, \quad s_1 = 2, \quad s_2 = 0, \quad Q = 2.$$

Наиболее общее решение системы (α) или

$$(\beta) \qquad \begin{aligned} du &= a\,dx + b\,dy,\\ dv &= \frac{a^2}{2(b+1)}\,dx + \frac{a}{2}\,dy, \end{aligned}$$

или

$$(\gamma) \qquad du = -dy, \quad dv = a\,dx.$$

Первое зависит от двух параметров: $N = 2$, система — в инволюции, и произвол решения — две функции одного аргумента. Второе зависит от одного параметра. Система — не в инволюции. Присоединяя уравнения (γ), получим систему ковариантов

$$[da\,dx] = 0.$$

Новая система — в инволюции, и произвол решения — одна функция одного аргумента.

Если $\Delta = 0$, то интегральный элемент — особый. Присоединяя $\Delta = 0$ к системе, будем иметь особые решения. Вводя вспомогательную переменную λ, записываем уравнение $\Delta = 0$ в виде системы

$$(\delta) \qquad \begin{aligned} du &= -2\lambda\,dx - dy, \\ dv &= \lambda\,dy. \end{aligned}$$

Внося эти значения du, dv в уравнения (α), имеем $\lambda = 0$, и система принимает вид

$$dz_1 = -v\,dy, \qquad du = -dy,$$
$$dz_2 = 2v\,dx + u\,dy, \quad dv = 0.$$

Система вполне интегрируема и определяет особое интегральное многообразие $\mathfrak{M}_2$ с четырьмя произвольными постоянными:

$$z_1 = -v_0 y + z_1^0, \quad z_2 = -\frac{1}{2}y^2 + 2v_0 x + u_0 y + z_2^0, \quad u = -y + u_0,$$

где нуликом отмечены начальные значения переменных.

Пример 4. Система внешних дифференциалов имеет вид

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} [du\,dv] + v\,[dv\,dx] - w\,[dw\,dx] &= 0, \\ [du, dz - dx] + [dv, dx + dy] - [dw, dy + dz] &= 0, \\ [du\,dz] - [dv, dy + dz] + [dw\,dy] &= 0. \end{aligned}$$

Разрешая систему (α), имеем из последнего уравнения по лемме Картана:

$$dw - dv = a\,dy + b\,dz,$$
$$du - dv = b\,dy + c\,dz.$$

Исключая du, dw из второго уравнения (α), получим:

$$b[dx\,dy] + c[dx\,dz] + (2b - a)[dy\,dz] = 0.$$

Следовательно, $a = b = c = 0$, т. е.

$$du = dv = dw,$$

и первое уравнение принимает вид

$$(v - w)\,[dv\,dx] = 0.$$

Обращение первого множителя в нуль приводит к особому решению (если оно существует). Следовательно, наиболее общее решение системы (α)

$$(\beta) \qquad du = dv = dw = \alpha\,dx$$

зависит от одного параметра: $N = 1$. Если для линейного элемента $\mathcal{E}_1(d)$ определитель полярной матрицы — не нуль, то в принятых обозначениях

$$n = 3, \ q = 3, \ s_1 = 3, \ s_2 = s_3 = 0, \ Q = 3,$$

и система — не в инволюции.

Присоединяя к заданной системе Пфаффа уравнения (β), получим для продолженной системы только одно квадратичное уравнение

$$(\alpha') \qquad [d\alpha\,dx] = 0.$$

Значит, теперь

$$n = 3, \ q = 1, \ s_1 = 1, \ s_2 = s_3 = 0, \ Q = 1 \text{ и } N = 1,$$

ибо общее решение уравнения (α') имеет вид

$$d\alpha = \beta\,dx.$$

Система — в инволюции и определяет $\mathfrak{M}_3$ с одной произвольной функцией одного аргумента.

Особое интегральное многообразие определяется системой

$$(\gamma) \qquad du = dv, \quad v - w = 0.$$

Система (α) удовлетворена. После присоединения уравнений (γ) к заданной системе Пфаффа базис системы будет содержать только четыре формы

$$dt_1 - 2u\,dv = 0, \quad dt_3 + (u - v)\,dz = 0, \quad du - dv = 0,$$
$$dt_2 - (x - y + z)\,dv - v\,(dx - dy) - u\,dz = 0.$$

Система вполне интегрируема, и в общем интеграле

$$u - v = C, \quad t_1 + v^2 - 2uv = C_1, \quad t_2 - uz + (y - x)\,v = C_2,$$
$$t_3 + (u - v)\,z = C_3$$

можно рассматривать u как произвольную функцию x, y, z.

Пример 5. Дифференцируем заданные уравнения внешним образом, полагая $v_1 = v + x$:

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} [du\,dv_1] + [dt\,dw] &= 0, \\ [du\,dz] + [dv_1 dx] + [dw\,dv] &= 0. \end{aligned}$$

В принятых обозначениях

$$n=3,\quad q=4,\quad s_1=2,\quad s_2=2,\quad Q=6.$$

Нетрудно увидеть, что наиболее общее решение системы (α) зависит тоже от $N=6$ параметров. Действительно, если формы dv_1 и dw линейно независимы, то, прилагая лемму Картана к каждому уравнению, имеем:

$$(\beta)\qquad \begin{aligned} du &= a\,dv_1 + b\,dw, & dv_1 &= a_{11}dx + a_{12}dy + a_{13}dz, \\ & & dw &= a_{21}dx + a_{22}dy + a_{23}dz,\quad a_{ik} = a_{ki}, \\ dt &= b\,dv_1 + c\,dw, & du &= a_{31}dx + a_{32}dy + a_{33}dz. \end{aligned}$$

Внося значения du, dv_1, dw из уравнений правого столбца в первое уравнение левого и сравнивая коэффициенты, немедленно определим a_{13}, a_{23}, a_{33}. Останутся независимыми параметрами a, b, c, a_{11}, a_{12}, a_{22}.

Следовательно, система — в инволюции, и произвол решения — две функции от двух аргументов.

Особое решение 1. Ранг может понижаться в двух случаях. При определении второго линейного элемента $e_2(\delta)$ ранг системы есть ранг матрицы коэффициентов при δu, δv_1, δw, δt в билинейных ковариантах, присоединённых формам (α):

$$\left\|\begin{matrix} dv_1 & -du & -dt & dw. \\ dz & dx & dy & 0 \end{matrix}\right\|.$$

Ранг матрицы $s_1=2$, но он может понизиться, если элементы первой и второй строки пропорциональны:

$$dw=0,\quad dv_1=\lambda\,dz,\quad du=-\lambda\,dx,\quad dt=-\lambda\,dy.$$

Присоединяем эти уравнения к заданной системе. Первое уравнение (α) даст

$$\lambda^2[dx\,dz]=0,$$

откуда $\lambda=0$, что удовлетворит всем уравнениям (α). Новая система вполне интегрируема и определяет особое интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3^*$ с шестью произвольными постоянными.

Особое решение 2. Если ранг $s_1=2$ не понижается, то может понизиться ранг $s_2=2$. Это будет иметь место, если обращается в нуль определитель

$$(\gamma)\qquad \begin{vmatrix} dv_1 & -du & -dt & dw \\ dz & dx & dy & 0 \\ \delta v_1 & -\delta u & -\delta t & \delta w \\ \delta z & \delta x & \delta y & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

написанный для двух линейных элементов $e_1(d)$ и $e_2(\delta)$. Мы будем иметь особое интегральное многообразие, если равенство (γ) будет иметь место для каждой пары интегральных линейных элементов.

Для удобства речи воспользуемся геометрическим языком и будем рассматривать элементы одной строки определителя (γ) как однородные координаты некоторой точки $M(dv_1, -du, -dt, dw)$ или $L(dz, dx, dy, 0)$ в трёхмерном пространстве. Если мы обозначим через M' и L' такие же точки для символа дифференцирования δ, то равенство (γ) будет означать, что четыре точки M, L, M' и L' лежат в одной плоскости или, другими словами, что прямые ML и $M'L'$ пересекаются.

На интегральном многообразии $\mathfrak{M}_3$ все формы линейно зависят от dx, dy, dz, но так как существенны только отношения их, то в данной точке (x, y, z) многообразия $\mathfrak{M}_3$ имеется ∞^2 линейных элементов, а следовательно, ∞^2 прямых ML (или $M'L'$). Чтобы интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ было особым, надо, чтобы все элементы $\mathcal{E}_2$ были особыми, т. е. чтобы каждая прямая ML этой конгруэнции (∞^2 прямых) пересекала любую другую прямую её $M'L'$.

Это может быть только в двух случаях:

1. Три прямые могут пересекаться, образуя треугольник; тогда все остальные прямые, чтобы пересекать три стороны треугольника, должны лежать в одной плоскости — в плоскости этого треугольника.

2. Три прямые, не расположенные в одной плоскости, пересекаются попарно, только при условии, что они проходят через одну точку. Через ту же точку пройдут и все остальные прямые.

Рассмотрим эти случаи отдельно.

1. Пусть уравнение плоскости в текущих координатах ξ, η, ζ, θ имеет вид

$$A\xi + B\eta + C\zeta + D\theta = 0;$$

ему должны удовлетворять координаты точки M и точки L при любых dx, dy, dz. Следовательно,

$$\begin{gathered} A\,dv_1 - B\,du - C\,dt + D\,dw = 0, \\ A\,dz + B\,dx + C\,dy = 0. \end{gathered}$$

Здесь коэффициенты A, B, C от дифференциалов dx, dy, dz не зависят, следовательно, в силу линейной независимости этих дифференциалов получим: $A=B=C=0$, и уравнение плоскости будет:

$$dw=0.$$

Уравнения (α) принимают вид

$$(\alpha')\qquad [du\,dv_1]=0,\quad [du\,dz]+[dv_1\,dx]=0.$$

Характеристическая система содержит, кроме трёх форм новой системы Пфаффа, только dx, dz, du, dv_1, так как y и t теперь пропадают. Следовательно,

$$n=2,\quad q=2,\quad s_1=2,\quad s_2=0,\quad Q=2.$$

Наиболее общее решение системы (α')

$$\begin{aligned} du &= a\,dz + ab\,dx,\\ dv_1 &= ab\,dz + ab^2\,dx \end{aligned}$$

зависит от $N=2$ параметров. Система — в инволюции; произвол решения — две функции от одного аргумента.

2. Допустим теперь, что все прямые ML проходят через одну точку $A(a, b, c, h)$; координаты точки A не зависят от параметров прямой dx, dy, dz. Тогда одноимённые координаты точек M, L и A должны удовлетворять одному линейному уравнению, коэффициенты которого зависят от выбора прямой ML:

$$(\beta')\qquad \begin{aligned} dv_1 &= \lambda\,dz + a\tilde{\omega},\\ -du &= \lambda\,dx + b\tilde{\omega},\\ -dt &= \lambda\,dy + c\tilde{\omega},\\ dw &= h\tilde{\omega}. \end{aligned}$$

В силу однородности этих уравнений относительно дифференциалов коэффициент $\tilde{\omega}$ надо рассматривать как форму Пфаффа.

Если $h=0$, то последнее уравнение даёт $dw=0$, и мы возвращаемся к предыдущему случаю. Если $h\neq 0$, то, полагая $h\tilde{\omega}=\tilde{\omega}_1$ и изменяя соответственно a, b, c, мы можем считать $h=1$. Исключая $\tilde{\omega}$, мы присоединим к заданной системе Пфаффа уравнения

$$(\delta)\qquad \begin{aligned} dv_1 &= \lambda\,dz + a\,dw,\\ du &= -\lambda\,dx - b\,dw,\\ dt &= -\lambda\,dy - c\,dw. \end{aligned}$$

Внося это в уравнения (α), получим

$$(\varepsilon)\qquad \begin{aligned} \lambda\,[dw, a\,dx + dy - b\,dz] &= \lambda^2\,[dx\ dz],\\ [dw,\ a\,dx + dy - b\,dz] &= 2\lambda\,[dx\,dz], \end{aligned}$$

откуда $\lambda^2\,[dx\,dz]=0$ и, значит, $\lambda=0$.

Уравнения (δ), (ε) принимают вид

$$(\delta')\qquad du=-b\,dw,\quad dv_1=a\,dw,\quad dt=-c\,dw,$$

$$(\varepsilon')\qquad [dw, a\,dx + dy - b\,dz]=0.$$

Дифференцируя внешним образом (δ') и (ε'), получим только три уравнения

$$(\zeta)\qquad [da\,dw]=0,\quad [db\,dw]=0,\quad [dc\,dw]=0.$$

Система ковариантов (ε'), (ζ) содержит четыре формы da, db, dc, dw, кроме dx, dy, dz, независимых на $\mathfrak{M}_3$. Имеем:

$$n=3,\ q=4,\ s_1=4,\ s_2=s_3=0,\ Q=4.$$

Так как наиболее общее решение системы (ε'), (ζ)

$$\begin{gathered} dw=\alpha\theta,\quad da=\alpha_1\theta,\quad db=\alpha_2\theta,\quad dc=\alpha_3\theta,\\ \theta=a\,dx+dy-b\,dz \end{gathered}$$

зависит от четырёх параметров α_i, то $N=4$, система — в инволюции, и произвол особого интегрального многообразия — четыре функции одного аргумента.

Если итти алгебраическим путём, то мы могли бы, разлагая определитель по правилу Лапласа, заменить уравнение (γ) следующим алгебраическим уравнением между внешними произведениями:

$$[dv_1 dw]\cdot[dx\,dy] + [dw\,du]\cdot[dy\,dz] + [dw\,dt]\cdot[dz\,dx]=0,$$

откуда, внося (β), получим:

$$[dv_1 dw]=[dw\,du]=[dw\,dt]=0$$

и те же два случая.

Пример 6. Присоединяя внешний дифференциал уравнения Пфаффа, получим расширенную систему ($\mathfrak{S}$) в виде трёх уравнений, из которых два — степени выше первой:

$$(\alpha)\qquad \begin{gathered} [du\,dx]+[dv\,dy]+[dw\,dz]=0,\\ [du\,dv\,dw]=0. \end{gathered}$$

В общем случае имеем:

$$n=3,\ q=3,\ s_1=1,\ s_2=2,\ Q=5.$$

Первое уравнение (α) разрешается по лемме Картана с шестью произвольными параметрами:

$$(\beta)\qquad \begin{aligned} du &= a_{11}\,dx + a_{12}\,dy + \alpha_{13}\,dz,\\ dv &= a_{21}\,dx + a_{22}\,dy + a_{23}\,dz,\\ dw &= a_{31}\,dx + a_{32}\,dy + a_{33}\,dz. \end{aligned}\qquad a_{ik}=a_{ki}.$$

Так как второе уравнение (α) накладывает на a_{ik} одно соотношение, то $N=5$, система — в инволюции, и произвол решения — две функции от двух аргументов.

При определении особых интегральных многообразий надо искать особые интегральные элементы, т. е. случаи понижения ранга s_1 или s_1+s_2.

Ранг $s_1=1$ не может быть понижен, ибо в билинейном коварианте, присоединённом к первому уравнению (α), коэффициентами при неизвестных δu, δv, δw будут dx, dy, dz, где $e_1(d)$ и $e_2(\delta)$ — два интегральных линейных элемента. Так как dx, dy, dz на интегральном многообразии ничем не связаны, то ранг s_1 не понизится. Остаётся исследовать понижение s_2. Сумма s_1+s_2 является рангом линейной относительно Δu, Δv, Δw системы

$$(\gamma)\quad \begin{gathered} dx\,\Delta u+dy\,\Delta v+dz\,\Delta w=\Delta x\,du+\Delta y\,dv+\Delta z\,dw, \\ \delta x\,\Delta u+\delta y\,\Delta v+\delta z\,\Delta w=\Delta x\,\delta u+\Delta y\,\delta v+\Delta z\,\delta w, \\ \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v & \Delta w \\ du & dv & dw \\ \delta u & \delta v & \delta w \end{vmatrix}=0, \end{gathered}$$

где $e_1(d)$, $e_2(\delta)$, $e_3(\Delta)$ — три линейных элемента цепи.

Воспользуемся геометрическим языком и введём векторы в трёхмерном пространстве

$$X=dx\,i+dy\,j+dz\,k,\quad U=du\,i+dv\,j+dw\,k$$

и аналогично X' и U' для символа дифференцирования δ.

Система (γ) не определит Δu, Δv, Δw, если векторы X, X' и векторное произведение $U\times U'$ компланарны, т. е. векторные произведения $X\times X'$ и $U\times U'$ перпендикулярны. В силу формулы Лапласа для скалярного произведения двух векторных произведений

$$(X\times X')(U\times U')=(XU)(X'U')-(XU')(X'U)$$

наше условие запишется в виде одного равенства

$$(\delta)\qquad (XU)(X'U')-(XU')(X'U)=0,$$

которое должно иметь место для всех интегральных элементов $e_1(d)$, $e_2(\delta)$ особого интегрального многообразия, т. е. при всяком выборе векторов X, X'.

Фиксируем произвольно вектор X и рассматриваем δx, δy, δz как переменные. Пользуясь формулами (β), переписываем (δ) в виде

$$(\delta')\ a_{\alpha\beta}\,dx_\alpha\,dx_\beta\cdot a_{ik}\,\delta x_i\,\delta x_k=a_{\alpha k}\,dx_\alpha\,\delta x_k\cdot a_{i\beta}\,\delta x_i\,dx_\beta,\ \alpha,\beta,i,k=1,2,3,$$
$$x=x_1,\ y=x_2,\ z=x_3.$$

Сравнивая члены при $\delta x_i\,\delta x_k$, получим

$$a_{\alpha\beta}\,dx_\alpha\,dx_\beta\cdot a_{ik}=a_{\alpha k}\,dx_\alpha\cdot a_{i\beta}\,dx_\beta,\qquad \alpha,\beta,i,k=1,2,3,$$

или

$$a_{\alpha\beta}\,a_{ik}=a_{\alpha k}\,a_{i\beta}.$$

Следовательно, полагая $i=k=1$,

$$a_{12}=pa_{11},\ a_{13}=qa_{11},\ a_{22}=p^2a_{11},\ a_{23}=pq\,a_{11},\ a_{33}=q^2a_{11},$$

где p, q и a_{11} — произвольные параметры.

Присоединяем к заданной системе Пфаффа уравнения

$$(\beta')\quad \begin{gathered} du=\alpha(dx+p\,dy+q\,dz), \\ dv=p\,du,\ dw=q\,du. \end{gathered}\qquad \alpha=a_{11}.$$

Система (α) удовлетворена. Внешнее дифференцирование уравнений (β') даёт:

$$(\varepsilon)\quad \begin{gathered} [d\ln\alpha,\ dx+p\,dy+q\,dz]+[dp\,dy]+[dq\,dz]=0, \\ [dp,\ dx+p\,dy+q\,dz]=0,\quad [dq,\ dx+p\,dy+q\,dz]=0. \end{gathered}$$

Здесь

$$n=3,\ q=3,\ s_1=3,\ s_2=s_3=0,\ Q=3,$$

а так как общее решение системы (ε)

$$\begin{gathered} dp=a(dx+p\,dy+q\,dz), \\ dq=b(dx+p\,dy+q\,dz), \\ d\ln\alpha=a\,dy+b\,dz+c(dx+p\,dy+q\,dz) \end{gathered}$$

зависит от $N=3$ параметров, то система — в инволюции и определяет особое интегральное многообразие с тремя произвольными функциями одного аргумента.

Если итти алгебраическим путём, то условие понижения ранга системы (γ) можно записать в виде равенства

$$\begin{vmatrix} dx & \delta x & [dv\,dw] \\ dy & \delta y & [dw\,du] \\ dz & \delta z & [du\,dv] \end{vmatrix}=0,$$

или, если разложить по элементам последнего столбца:

$$[du\,dv]\cdot[dx\,dy]+[dv\,dw]\cdot[dy\,dz]+[dw\,du]\cdot[dz\,dx]=0.$$

Если сюда внести значения (β), то немедленно получим:

$$[du\,dv]=0,\quad [dv\,dw]=0,\quad [dw\,du]=0,$$

откуда в силу (α) следуют формулы (β').

§ 3. Задача. Определение поверхности по заданной второй квадратичной форме[1])

Мы ограничимся здесь только случаем мнимых асимптотических линий; тогда вторая квадратичная форма Φ — положительная, дефи-

---

[1]) Cartan, Les surfaces qui admettent une seconde forme fondamentale donnée, Bull. des Sciences Math. (2), 67, январь — февраль 1943, стр. 1.

нитная и может быть разложена на сумму двух квадратов:

$$\Phi = (\theta_1)^2 + (\theta_2)^2.$$

Задача формулируется так:

Дана квадратичная форма Ф. *Найти поверхность, для которой она служит второй квадратичной формой Гаусса.*

Присоединим к каждой точке $M(u, v)$ поверхности прямой (но не прямоугольный) трёхгранник с вершиной в точке M, двумя касательными векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и третьим вектором $\mathbf{e}_3$, нормальным к поверхности. Вектор $\mathbf{e}_3$ выбираем единичным; длину и направление касательных к поверхности векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ выбираем так, чтобы координаты бесконечно близкой точки $M'(u+du, v+dv)$ относительно выбранного трёхгранника в точке M были θ_1, θ_2, 0. Если движения трёхгранника определяются формулами

$$d\mathbf{M} = \omega^i \mathbf{e}_i, \quad d\mathbf{e}_i = \omega_i^k \mathbf{e}_k, \qquad i, k = 1, 2, 3,$$

то по условию

$$\text{(2a)} \qquad \omega^3 = 0, \quad \omega^1 = \theta_1, \quad \omega^2 = \theta_2.$$

Из формы самого трёхгранника следует:

$$\text{(a)} \qquad (\mathbf{e}_3)^2 = 1, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0.$$

Дифференцируя эти уравнения, получим

$$\text{(b)} \qquad \omega_3^3 = 0, \quad E\omega_3^1 + F\omega_3^2 + \omega_1^3 = 0, \quad F\omega_3^1 + G\omega_3^2 + \omega_2^3 = 0,$$

где $(\mathbf{e}_1)^2 = E$, $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = F$, $(\mathbf{e}_2)^2 = G$ — три функции от u, v. Так как мы рассматриваем наиболее общий трёхгранник пространства, удовлетворяющий условиям (a) с произвольно выбранными значениями E, F, G, то компоненты его движений тождественно удовлетворяют системе (b).

Поскольку Ф есть вторая квадратичная форма поверхности: $\Phi = \mathbf{e}_3 \cdot d^2\mathbf{M}$, то имеем:

$$\text{(2b)} \qquad \theta_1\omega_1^3 + \theta_2\omega_2^3 = (\theta_1)^2 + (\theta_2)^2.$$

Надо найти по заданным формам θ_1, θ_2 интегральное многообразие $\mathfrak{M}_2$ системы (2a,b), на котором $[\theta_1\theta_2] \neq 0$.

Дифференцируя внешним образом первое уравнение (2a), получим:

$$[\theta_1\omega_1^3] + [\theta_2\omega_2^3] = 0.$$

Разрешая по лемме Картана и внося полученные выражения ω_1^3, ω_2^3 в (2b), получим после сравнения коэффициентов при θ_i:

$$\text{(2c)} \qquad \omega_1^3 = \theta_1, \quad \omega_2^3 = \theta_2.$$

Внешнее дифференцирование остальных уравнений (2a) и (2c) и преобразование полученных равенств посредством сложения и вычитания даёт

$$\text{(3a)} \qquad \begin{aligned} &[\omega_2^1 - \omega_1^2, \ \theta_1] = 2k\,[\theta_1\theta_2], \\ &[\omega_1^2 - \omega_2^1, \ \theta_2] = 2h\,[\theta_1\theta_2], \end{aligned}$$

$$\text{(3b)} \qquad \begin{aligned} &2\,[\omega_1^1\theta_1] + [\omega_1^2 + \omega_2^1, \ \theta_2] = 0, \\ &[\omega_1^2 + \omega_2^1, \ \theta_1] + 2\,[\omega_2^2\theta_2] = 0, \end{aligned}$$

где

$$D\,\theta_1 = h\,[\theta_1\theta_2], \quad D\,\theta_2 = k\,[\theta_1\theta_2].$$

Поскольку θ_1 и θ_2 известны, если дана форма Ф, то h и k надо рассматривать как известные функции от u и v.

Система (3a) равносильна уравнению Пфаффа

$$\text{(2d)} \qquad \omega_1^2 - \omega_2^1 = 2h\,\theta_1 + 2\,k\,\theta_2,$$

внешний дифференциал которого имеет вид

$$\text{(3c)} \qquad [\omega_1^1 - \omega_2^2, \ \omega_1^2 + \omega_2^1] = \left(\frac{E+G}{EG-F^2} - 2\,R\right)[\theta_1\theta_2],$$

где

$$D\,(h\,\theta_1 + k\,\theta_2) = -R\,[\theta_1\theta_2].$$

Так как h, k — заданные функции от u, v, то и R надо считать известной функцией от u, v. R является римановой кривизной квадратичной формы Ф, т. е. единственной компонентой тензора Римана-Кристоффеля (см. § 6) двумерного риманова пространства, линейный элемент которого определяется формой Ф.

Таким образом система, замкнутая относительно операции внешнего дифференцирования [расширенная система ($\mathfrak{S}$)], состоит из шести уравнений Пфаффа (2a,c,d) и трёх квадратичных (3b,c). Характеристическая система содержит, кроме θ_1, θ_2 и шести форм, стоящих в левых частях уравнений Пфаффа (2a, c, d), ещё только три формы ω_1^1, ω_2^2, $\omega_1^2 + \omega_2^1$.

Наиболее общее решение системы (3b,c)

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} &\omega_1^1 = \alpha\theta_1 + \beta\theta_2, \quad \omega_2^2 = \gamma\theta_1 + \delta\theta_2, \\ &\omega_1^2 + \omega_2^1 = 2\,(\beta\theta_1 + \gamma\theta_2), \\ &\gamma\,(\alpha - \gamma) - \beta\,(\beta - \delta) = \frac{1}{2}\,\frac{E+G}{EG-E^2} - R \end{aligned}$$

зависит от $N = 3$ параметров (α, β, γ, δ связаны одним уравнением).

В общем случае

$$n = 2, \quad q = 3, \quad s_1 = 3, \quad s_2 = 0, \quad Q = 3.$$

Система — в инволюции и определяет $\mathfrak{M}_2$ с тремя произвольными функциями одного аргумента.

Ранг s_1 понизится, если определитель из коэффициентов при $\omega_1^1(\delta)$, $\omega_1^2(\delta)+\omega_2^1(\delta)$, $\omega_2^2(\delta)$ в билинейных ковариантах, присоединённых к квадратичным формам (3b,c), равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 2\theta_1 & \theta_2 & 0 \\ 0 & \theta_1 & 2\theta_2 \\ -(\omega_1^2+\omega_2^1) & \omega_1^1-\omega_2^2 & \omega_1^2+\omega_2^1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$2\{(\theta_1)^2 - \theta_2)^2\}(\omega_1^2+\omega_2^1) - 4\theta_1\theta_2(\omega_1^1-\omega_2^2) = 0.$$

Внося сюда значения (4) для ω_1^1, ω_2^2, $\omega_1^2+\omega_2^1$, мы получим уравнение

(c) $\{(\theta_1)^2-(\theta_2)^2\}(\beta\theta_1+\gamma\theta_2)-\theta_1\theta_2\{(\alpha-\gamma)\theta_1+(\beta-\delta)\theta_2\}=0,$

определяющее характеристики на всякой интегральной поверхности.

Если уравнение (c) исчезает тождественно относительно θ_1, θ_2, то все интегральные элементы — особые и интегральное многообразие $\mathfrak{M}_2$ — особое. Тогда $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$; следовательно, особое интегральное многообразие определяется присоединением к системе (2a,c,d) уравнений

(5) $$\omega_1^1=0, \quad \omega_2^2=0, \quad \omega_1^2+\omega_2^1=0.$$

Внешнее дифференцирование даёт

$$[\omega_1^3\omega_3^1]=0, \quad [\omega_2^3\omega_3^2]=0, \quad [\omega_1^3\omega_3^2]+[\omega_2^3\omega_3^1]=0$$

или в силу (b):

$$E=G, \quad F=0.$$

Так как первая и вторая квадратичные формы

$$ds=dM^2=E(\theta_1)^2+2F\theta_1\theta_2+G(\theta_2)^2, \quad \mathbf{e}_3\cdot d^2M=(\theta_1)^2+(\theta_2)^2$$

теперь пропорциональны, то поверхность — сфера, и множитель пропорциональности E равен радиусу сферы. Форма Ф не произвольна, ибо, например, из уравнений (4) при $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$ следует: $R=\frac{1}{E}$. Следовательно, в задаче определения поверхности по второй квадратичной форме сфера является особым решением. Особые решения системы (2a,c,d) существуют только в том случае, когда форма Ф имеет постоянную, не равную нулю, риманову кривизну.

§ 4. Задача. Проективное изгибание поверхностей[1]

По определению поверхность (B) *проективно налагается* (наложение второго порядка) на поверхность (A), если между точками их установлено взаимно однозначное соответствие и каждой паре

---

[1] Cartan, Sur la dèformation projective des surfaces, Ann. de l'Ecole Normale Sup., (3), **37**, 1920, стр. 279.

соответствующих точек A_0, B_0 присоединено проективное преобразование T, которое преобразует поверхность (B) в (B') так, что точка B_0' совпадает с A_0, а все бесконечно близкие точки B' совпадают с соответствующими точками A до бесконечно малых второго порядка включительно, если за бесконечно малые первого порядка принять приращения криволинейных координат на поверхности при переходе от точки B_0 к точке B.

Будем обозначать буквой $\boldsymbol{A}$ четыре однородных координаты точки A. Тогда соседние точки

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_0+d\boldsymbol{A}_0+\frac{1}{2}d^2\boldsymbol{A}_0+\ldots \text{ и } B'=B_0'+dB_0'+\frac{1}{2}d^2B_0'+\ldots$$

совпадают, если координаты их пропорциональны, т. е. если равенство

$$\boldsymbol{B}_0'+d\boldsymbol{B}_0'+\frac{1}{2}d^2\boldsymbol{B}_0'+\ldots = \\ =\left(\rho+\rho_1+\frac{1}{2}\rho_2+\ldots\right)\left(\boldsymbol{A}_0+d\boldsymbol{A}_0+\frac{1}{2}d^2\boldsymbol{A}_0+\ldots\right)$$

справедливо до бесконечно малых второго порядка включительно. При этом ρ — скалярная функция криволинейных координат u, v, а ρ_1 и ρ_2 — линейная и квадратичная формы от du, dv. Сравнивая бесконечно малые одного порядка, имеем:

(6) $$\begin{aligned} \boldsymbol{B}_0' &= \rho\boldsymbol{A}_0, \\ d\boldsymbol{B}_0' &= \rho_1\boldsymbol{A}_0+\rho\, d\boldsymbol{A}_0, \\ d^2\boldsymbol{B}_0' &= \rho_2\boldsymbol{A}_0+2\rho_1 d\boldsymbol{A}_0+\rho d^2\boldsymbol{A}_0. \end{aligned}$$

Присоединим к точке $\boldsymbol{A}$ поверхности $(\boldsymbol{A})$ тетраэдр $[\boldsymbol{A}_i]\equiv \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3$, где $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ расположены в касательной плоскости поверхности, к точке $\boldsymbol{B}$ поверхности $(\boldsymbol{B})$ — тот тетраэдр $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_3$, который после преобразования T совпадёт (для пары точек $\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{B}_0$) с тетраэдром $[\boldsymbol{A}_i]$, т. е. все $\boldsymbol{B}_\alpha'=\boldsymbol{A}_\alpha$. Проективные перемещения их определяются формулами вида

(7) $$d\boldsymbol{A}_\alpha=\omega_\alpha^\beta\boldsymbol{A}_\beta, \quad d\boldsymbol{B}_\alpha=\Omega_\alpha^\beta\boldsymbol{B}_\beta, \qquad \alpha, \beta=0, 1, 2, 3,$$

где $\omega^3=0$, ибо только при этом условии $d\boldsymbol{A}_\alpha$, в силу выбора $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, будет лежать в касательной плоскости.

Так как преобразование T не меняет компонент Ω_α^β (см. гл. XIV, § 2), то те же формы Ω_α^β служат компонентами проективных перемещений тетраэдра $[\boldsymbol{B}_i']$:

$$d\boldsymbol{B}_\alpha'=\Omega_\alpha^\beta\boldsymbol{B}_\beta'.$$

Так как по условию для пары точек $\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{B}_0$ тетраэдры $[\boldsymbol{A}_i]$ и $[\boldsymbol{B}_i]$ совпадают: $\boldsymbol{B}_\alpha' = \boldsymbol{A}_\alpha$, то первое уравнение (6) даст $\rho = 1$, второе —

$$\Omega_0^0 = \omega_0^0 + \rho_1, \quad \Omega^i = \omega^i, \qquad i = 1, 2, 3,$$

и третье, если опустить коэффициенты при $\boldsymbol{A}$, чтобы не писать ρ_2,

$$d\Omega^i + \Omega_0^\beta \Omega_\beta^i = d\omega^i + \omega_0^\beta \omega_\beta^i + 2\rho_1 \omega^i,$$

откуда, исключая ρ_1, получим для $i = 1, 2, 3$:

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} &\omega^1\tilde{\omega}_1 + \omega^2\tilde{\omega}_2^1 = 0, && \text{где } \tilde{\omega}_i^k = \Omega_i^k - \omega_i^k,\\ &\omega^1\tilde{\omega}_1^2 + \omega^2\tilde{\omega}_2 = 0, && \tilde{\omega}_1 = \Omega_1^1 - \Omega_0^0 - \omega_1^1 + \omega_0^0,\\ &\omega^1\tilde{\omega}_1^3 + \omega^2\tilde{\omega}_2^3 = 0, && \tilde{\omega}_2 = \Omega_2^2 - \Omega_0^0 - \omega_2^2 + \omega_0^0. \end{aligned}$$

Так как, например, дифференциал $D(\Omega^1 - \omega^1)$ имеет вид $[\omega^1\tilde{\omega}_1] + [\omega^2\tilde{\omega}_2^1]$, то, дифференцируя внешним образом уравнение $\Omega^1 = \omega^1$ и применяя лемму Картана, получим

$$\tilde{\omega}_1 = a_{1i}\omega^i, \quad \tilde{\omega}_2^1 = a_{2i}\omega^i,$$

и первое уравнение (a) покажет, что все $a_{ik} = 0$. То же получим, дифференцируя остальные уравнения $\Omega^i = \omega^i$ и рассматривая последующие уравнения (a).

Таким образом, система (S), определяющая пары налагающихся поверхностей, имеет вид

$$\text{(8)} \qquad \begin{gathered} \omega^3 = 0, \quad \Omega^3 = 0, \quad \Omega^1 - \omega^1 = 0, \quad \Omega^2 - \omega^2 = 0,\\ \tilde{\omega}_1^3 = \tilde{\omega}_2^3 = \tilde{\omega}_1^2 = \tilde{\omega}_2^1 = 0, \quad \tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = 0. \end{gathered}$$

Последнее уравнение получено в результате внешнего дифференцирования уравнений $\tilde{\omega}_1^3 = 0$, $\tilde{\omega}_2^3 = 0$.

Внешние квадратичные уравнения можно написать в виде

$$\text{(9)} \qquad \begin{aligned} &[\omega^1\omega_1^3] + [\omega^2\omega_2^3] = 0,\\ &[\omega^2\tilde{\omega}_1^0] - [\omega_1^8\tilde{\omega}_3^2] = 0, \quad [\omega^1\tilde{\omega}_2^0] - [\omega_2^3\tilde{\omega}_3^1] = 0,\\ &[\tilde{\omega}_1^0\omega^1] + [\omega_1^3\tilde{\omega}_3^1] = 0, \quad [\tilde{\omega}_2^0\omega^2] + [\omega_2^3\tilde{\omega}_3^2] = 0,\\ &[\tilde{\omega}_1^0\omega^1] + [\tilde{\omega}_2^0\omega^2] = 0. \end{aligned}$$

Характеристическая система содержит, кроме форм ω^1, ω^2, которые остаются независимыми на $\mathfrak{M}_2$ (ибо при $\omega^1 = \omega^2 = 0$ точка $\boldsymbol{A}$ стоит на месте), и 11 форм (8), заданных на $\mathfrak{M}_2$, ещё 6 форм, определяемых квадратичными уравнениями (9),

$$\omega_1^3, \ \omega_2^3, \ \tilde{\omega}_1^0, \ \tilde{\omega}_2^0, \ \tilde{\omega}_3^1, \ \tilde{\omega}_3^2.$$

Так как положение точек $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$ в касательной плоскости не специализировано, то цепь можно строить по формам базиса ω^1, ω^2. Если положить

$$\omega_i^3 = l_{ij}^3\omega^j, \quad \tilde{\omega}_\alpha^\beta = \lambda_{\alpha j}^\beta \omega^j, \quad i, j = 1, 2; \ \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3,$$

и внести в уравнения (9), считая равными 0 и 1 следующие формы на $\mathbf{e}_1$: $\omega^1 = 1$, $\omega^2 = 0$, а на e_2 — формы $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 1$, то получим:

$$\text{(b)} \qquad \begin{gathered} l_{12}^3 = l_{21}^3, \quad \lambda_{12}^0 = \lambda_{21}^0, \quad \lambda_{32}^2 l_{11}^3 = -\lambda_{11}^0 + \lambda_{31}^2 l_{21}^3,\\ \lambda_{32}^1 l_{11}^3 = \lambda_{31}^1 l_{21}^3 + \lambda_{21}^0, \quad \lambda_{32}^2 l_{21}^3 - l_{22}^3 \lambda_{31}^2 = -\lambda_{21}^0,\\ \lambda_{22}^0 = \lambda_{32}^1 l_{21}^3 - \lambda_{31}^1 l_{22}^3. \end{gathered}$$

Эту систему можно разрешить относительно l_{i2}^3, $\lambda_{\alpha 2}^\beta$, если $l_{11}^3 \neq 0$, $\lambda_{31}^2 \neq 0$. Так как при определении l_{i2}^3, $\lambda_{\alpha 2}^\beta$ предыдущие параметрические l_{i1}^3, $\lambda_{\alpha 1}^\beta$ ничем не стеснены, то система — в инволюции, а так как $s_1 = 6$, то она определяет общее решение с шестью произвольными функциями одного аргумента.

Если определитель системы (b) относительно неизвестных l_{i2}^3 и $\lambda_{\alpha 2}^\beta$ равен нулю: $l_{11}^3 \lambda_{31}^2 = 0$, то линейный элемент $\omega^1 = 1$, $\omega^2 = 0$ — особый. Это возможно двумя способами:

1. Если обращается в нуль l_{11}^3, то особый элемент определяется уравнениями

$$\omega^2 = 0, \quad \omega_1^3 = 0.$$

Нетрудно заметить, что эти равенства удовлетворяют уравнению асимптотических на поверхности $(\boldsymbol{A})$:

$$(d^2\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2) = 0 \quad \text{или} \quad \omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3 = 0,$$

и, следовательно, наша характеристика совпадает с асимптотической линией поверхности $(\boldsymbol{A})$, а также и $(\boldsymbol{B})$.

2. Если $\lambda_{31}^2 = 0$, то

$$\omega^2 = 0, \quad \Omega_3^2 - \omega_3^2 = 0,$$

при этом, если поверхность $(\boldsymbol{B}')$ катится по поверхности $(\boldsymbol{A})$ так, что общая точка обеих поверхностей (точка касания их) перемещается по направлению оси $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1$, то скорость точки $\boldsymbol{B}_3$ по отношению к поверхности $(\boldsymbol{A})$, определяемая разностью

$$d\boldsymbol{B}_3 - d\boldsymbol{A}_3 = (\Omega_3^0 - \omega_3^0)\boldsymbol{A} + (\Omega_3^1 - \omega_3^1)\boldsymbol{A}_1 + (\Omega_3^3 - \omega_3^8)\boldsymbol{A}_3,$$

будет направлена по прямой, пересекающей эту ось.

Особые интегральные многообразия возникают, если все интегральные элементы будут особыми. Это тоже может осуществиться двумя способами:

1. В первом случае все линейные элементы поверхности (*A*) или (*B*) должны быть асимптотическими. Тогда обе поверхности будут плоскостями.

2. Во втором случае для всех перемещений по поверхности (*A*) скорость точки B_3 должна пересекать эту касательную. Следовательно,

(10a) $$\Omega_3^1-\omega_3^1=0,\quad \Omega_3^2-\omega_3^2=0,$$

но из $\tilde{\omega}_3^1=\tilde{\omega}_3^2=0$ в силу (9) следует

$$[\tilde{\omega}_1^0\,\omega^1]=[\tilde{\omega}_1^0\,\omega^2]=0,\ [\tilde{\omega}_2^0\,\omega^1]=[\tilde{\omega}_2^0\,\omega^2]=0,$$

т. е.

(10b) $$\Omega_1^0-\omega_1^0=0,\quad \Omega_2^0-\omega_2^0=0,$$

а внешнее дифференцирование уравнений (10a) даст

$$[\tilde{\omega}_3^0\,\omega^1]=[\tilde{\omega}_3^0\,\omega^2]=0,$$

т. е.

(10c) $$\Omega_3^0-\omega_3^0=0.$$

Присоединяя уравнения (10a,b,c) к системе (8), заметим, что теперь все формы Ω_α^β равны соответствующим формам ω_α^β, а при равенстве компонент ω_i^k две поверхности (*A*) и (*B*) проективно-тождественны (см. гл. III, § 6, стр. 143).

Таким образом, и в этом случае особое решение тривиально.

§ 5. Задача. Проективное изгибание конгруэнций

Понятие проективного изгибания распространяется на конгруэнции без какого-либо изменения при условии, что порядок малости расстояния двух лучей (элементов конгруэнции) определяется порядком малости приращений проективных координат прямой. Проективными координатами прямой A_1A_2 называются шесть миноров матрицы из однородных координат точек $[A_1A_2]$, которые мы обозначаем символом внешнего произведения в смысле Грассмана.

Будем предполагать, что с каждым лучом конгруэнций (A_1A_2) и (B_1B_2) связаны тетраэдры $[A_\alpha]$, $[B_\alpha]$, где $\alpha=1, 2, 3, 4$. Проективные перемещения их определяются формулами (7), в которых $\alpha, \beta=1, 2, 3, 4$. Если A_1, A_2 — фокусы и $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$ — фокальные плоскости, то

$$(dA_1,\ A_1A_2A_3)=0,\quad (dA_2,\ A_1A_2A_4)=0,$$

откуда

(11a) $$\omega_1^4=0,\quad \omega_2^3=0.$$

Условия касания конгруэнций (A_1A_2) и $(B_1'B_2')$ [полученной проективным преобразованием *T* из конгруэнции (B_1B_2)] напишутся в виде уравнений (6), где вместо координат точки A_0 надо подставить координаты луча $[A_1A_2]$:

(6′) $$\begin{aligned}&[B_1'B_2']=\rho[A_1A_2],\\ &d[B_1'B_2']=\rho_1\,[A_1A_2]+\rho\, d[A_1A_2],\\ &d^2[B_1'B_2']=\rho_2\,[A_1A_2]+2\rho_1\, d[A_1A_2]+\rho\, d^2[A_1A_2].\end{aligned}$$

Так как после преобразования *T* тетраэдры совпадают: $B_\alpha'=A_\alpha$, то $\rho=1$. Дифференцируя внешнее произведение двух аналитических точек $[B_1'B_2']$ как определитель, имеем

(a) $$\begin{aligned}&d\,[B_1'B_2']=[dB_1',\ B_2']+[B_1'\ dB_2']=\\ &=(\Omega_1^1+\Omega_2^2)\,[B_1'B_2']+\Omega_2^3\,[B_1'B_3']+\Omega_2^4\,[B_1'B_4']+\Omega_1^3\,[B_3'B_2']+\Omega_1^4\,[B_4'B_2']\end{aligned}$$

и такую же формулу для $d\,[A_1A_2]$. Внося это во второе уравнение (6′) и сравнивая коэффициенты при одинаковых произведениях $[A_iA_k]$, получим:

(11b) $$\Omega_1^1+\Omega_2^2-\omega_1^1-\omega_2^2=\rho_1,\quad \tilde{\omega}_2^3=\tilde{\omega}_2^4=\tilde{\omega}_1^3=\tilde{\omega}_1^4=0,$$

где $\tilde{\omega}_i^k=\Omega_i^k-\omega_i^k$. Наконец, третье уравнение (6′), если опустить члены с $[A_1A_2]$, чтобы не писать ρ_2, даст в силу (a) и (11b)

(b) $$\begin{aligned}&\omega_2^4\tilde{\omega}_4^3-\omega_1^3\,\tilde{\omega}_2^1=0,\quad \omega_2^4\,(\tilde{\omega}_4^4-\tilde{\omega}_2^2)=0,\\ &\omega_1^3\,\tilde{\omega}_3^4-\omega_2^4\,\tilde{\omega}_1^2=0,\quad \omega_1^3(\tilde{\omega}_3^3-\tilde{\omega}_1^1)=0.\end{aligned}$$

Из формулы (a) следует, что луч A_1A_2 стоит на месте, если $\omega_2^3=\omega_2^4=\omega_1^3=\omega_1^4=0$, а так как $\omega_1^4=\omega_2^3=0$ в силу уравнений (11a), то $\omega_1^3=\omega_1$, $\omega_2^4=\omega_2$ должны быть линейно независимы на всяком интегральном многообразии $\mathfrak{M}_2$. Следовательно, уравнения (b) можно переписать в виде

(11c) $$\begin{aligned}&\tilde{\omega}_4^3=a\omega_1,\ \tilde{\omega}_2^1=a\omega_2,\ \tilde{\omega}_1^2=b\omega_1,\quad \tilde{\omega}_3^4=b\omega_2,\\ &\tilde{\omega}_4^4-\tilde{\omega}_2^2=0,\quad \tilde{\omega}_3^3-\tilde{\omega}_1^1=0.\end{aligned}$$

Дифференцируя внешним образом $\tilde{\omega}_2^3=0$, $\tilde{\omega}_1^4=0$ и внося значения (11c), получим:

$$a\,[\omega_1\,\omega_2]=0,\quad b\,[\omega_1\,\omega_2]=0.$$

Следовательно, $a=b=0$, и уравнения (11a, b, c) примут вид

(11) $$\begin{aligned}&\omega_1^4=\omega_2^3=0,\\ &\tilde{\omega}_1^3=\tilde{\omega}_2^3=\tilde{\omega}_1^4=\tilde{\omega}_2^4=\tilde{\omega}_1^2=\tilde{\omega}_2^1=\tilde{\omega}_3^4=\tilde{\omega}_4^3=0,\\ &\tilde{\omega}_3^3-\tilde{\omega}_1^1=0,\quad \tilde{\omega}_4^4-\tilde{\omega}_2^2=0.\end{aligned}$$

Эта система определяет пару налагающихся конгруэнций.

Внешние дифференциалы в силу уравнений системы дадут систему квадратичных уравнений

$$(12)\qquad \begin{gathered} [\omega_1\,\omega_3^4]-[\omega_2\,\omega_1^2]=0, \quad [\omega_1\,\omega_2^1]-[\omega_2\,\omega_4^3]=0, \\ [\omega_1\,\tilde\omega_3^2]+[\omega_1^2,\tilde\omega_2^2-\tilde\omega_1^1]=0, \quad [\omega_2\tilde\omega_4^1]+[\omega_2^1,\tilde\omega_1^1-\tilde\omega_2^2]=0, \\ [\omega_2\,\tilde\omega_3^2]+[\omega_3^4,\tilde\omega_1^1-\tilde\omega_2^2]=0, \quad [\omega_1\,\tilde\omega_4^1]+[\omega_4^3,\tilde\omega_2^2-\tilde\omega_1^1]=0, \\ [\omega_1\,\tilde\omega_3^1]=0, \quad [\omega_2\,\tilde\omega_4^2]=0. \end{gathered}$$

Характеристическая система содержит, кроме двух форм ω_1, ω_2, которые остаются на $\mathfrak{M}_2$ независимыми, и 12 форм (11), ещё девять форм

$$(\text{c})\qquad \omega_1^2,\ \omega_2^1,\ \omega_3^4,\ \omega_4^3,\ \tilde\omega_3^1,\ \tilde\omega_3^2,\ \tilde\omega_4^1,\ \tilde\omega_4^2,\ \tilde\omega_2^2-\tilde\omega_1^1.$$

Следовательно, $q=9$.

Так как уравнениями (11a) тетраэдр специализирован, то лучше строить цепь, не связывая её с формами базиса. Пусть первый линейный элемент $\boldsymbol{e}_1$ определяется произвольными значениями форм (c):

$$\omega_i=u_i, \quad \omega_i^j=u_i^j, \quad \tilde\omega_k^l=\tilde u_k^l.$$

Система (12) даст для значений ω_i^j, $\tilde\omega_k^l$ форм второго линейного элемента $\boldsymbol{e}_2$ уравнения

$$(12')\qquad \begin{gathered} u_1\omega_3^4-u_2\omega_1^2=\omega_1u_3^4-\omega_2u_1^2, \\ u_1\omega_2^1-u_2\omega_4^3=\omega_1u_2^1-\omega_2u_4^3, \\ u_1\tilde\omega_3^2+u_1^2(\tilde\omega_2^2-\tilde\omega_1^1)-(\tilde u_2^2-\tilde u_1^1)\,\omega_1^2=\omega_1u_3^2, \\ u_2\tilde\omega_3^2-u_3^4(\tilde\omega_2^2-\tilde\omega_1^1)+(\tilde u_2^2-\tilde u_1^1)\,\omega_3^4=\omega_2u_3^2, \\ u_2\tilde\omega_4^1-u_2^1(\tilde\omega_2^2-\tilde\omega_1^1)+(\tilde u_2^2-\tilde u_1^1)\,\omega_2^1=\omega_2u_4^1, \\ u_1\tilde\omega_4^1+u_4^3(\tilde\omega_2^2-\tilde\omega_1^1)-(\tilde u_2^2-\tilde u_1^1)\,\omega_4^3=\omega_1u_4^1, \\ u_1\tilde\omega_3^1=\omega_1\tilde u_3^1, \quad u_2\tilde\omega_4^2=\omega_2\tilde u_4^2. \end{gathered}$$

Ранг матрицы коэффициентов при формах (c) в системе уравнений (12′) равен $s_1=8$, если определители

$$u_1u_2(\tilde u_2^2-\tilde u_1^1)(u_1^2u_2\pm u_3^4u_1),\ u_1u_2(\tilde u_2^2-\tilde u_1^1)(u_2^1u_1\pm u_4^3u_2),\ u_1u_2(\tilde u_2^2-\tilde u_1^1),$$

где мы опустили показатели степеней при различных множителях, не равны нулю одновременно. Так как $q=9$, то $s_2=q-s_1=1$. Система — в инволюции, ибо при произвольно заданном первом линейном элементе (формы u_i^j, $\tilde u_k^l$) система (12′) определяет все

формы ω_i^j, $\tilde\omega_k^l$ (см. гл. VI, § 9, п. 5), т. е. второй линейный элемент с одним произвольным параметром, например, значением формы $\tilde\omega_2^2-\tilde\omega_1^1$. Общий интеграл системы (11) зависит от одной произвольной функции двух аргументов.

Ранг системы (12′) понижается в трёх случаях:

$$1)\ \omega_1=0, \quad 2)\ \omega_2=0, \quad 3)\ \tilde\omega_2^2-\tilde\omega_1^1=0.$$

Первые два уравнения определяют характеристики (Коши). Если $\omega_1=\omega_1^3=0$, то $dA_1=\omega_1^1A_1+\omega_1^2A_2$, точка A_1 описывает кривую, имеющую касательной ось A_1A_2, т. е. луч конгруэнции. Линии $\omega_1=0$ или $\omega_2=0$ соответствуют, следовательно, развёртывающимся поверхностям конгруэнции.

Третье уравнение на каждом интегральном многообразии $\mathfrak{M}_2$ определяет особые элементы. Присоединим уравнение

$$(13\text{a})\qquad \tilde\omega_2^2-\tilde\omega_1^1=0$$

к системе (11); все линейные элементы интегрального многообразия системы (11), (13a) будут особыми в системе (11). Следовательно, система (11), (13a) определяет особые интегральные многообразия системы (11).

В силу уравнения (13a) система (12) даёт:

$$(13\text{b})\qquad \tilde\omega_3^2=0, \quad \tilde\omega_4^1=0.$$

Внешний дифференциал уравнения (13a) обращается в нуль в силу (12). Присоединяя к системе (12) внешние дифференциалы уравнений (13b), получим новую систему ковариантов

$$(14)\qquad \begin{gathered} [\omega_1\omega_3^4]-[\omega_2\omega_1^2]=0, \quad [\omega_1\omega_2^1]-[\omega_2\omega_4^3]=0, \\ [\omega_1^2\tilde\omega_3^1]-[\omega_3^4\tilde\omega_4^2]=0, \quad [\omega_2^1\tilde\omega_4^2]-[\omega_4^3\tilde\omega_3^1]=0, \\ [\omega_1\tilde\omega_3^1]=0, \qquad [\omega_2\tilde\omega_4^2]=0. \end{gathered}$$

Так как число уравнений Пфаффа увеличилось на три, именно на уравнения (13a), (13b), то число q убавится на три: $q'=6$. Уравнения (14) приводят к следующей системе линейных уравнений для форм линейных элементов $\boldsymbol{e}_1(u_i^k)$ и $\boldsymbol{e}_2(\omega_i^k)$:

$$(14')\qquad \begin{gathered} u_1\omega_3^4-u_2\omega_1^2=u_3^4\omega_1-u_1^2\omega_2, \\ u_1\omega_2^1-u_2\omega_4^3=u_2^1\omega_1-u_4^3\omega_2, \\ u_1^2\tilde\omega_3^1-u_3^4\tilde\omega_4^2-\tilde u_3^1\omega_1^2+\tilde u_4^2\omega_3^4=0, \\ u_2^1\tilde\omega_4^2-u_4^3\tilde\omega_3^1-\tilde u_4^2\omega_2^1+\tilde u_3^1\omega_4^3=0, \\ u_1\tilde\omega_3^1=\tilde u_3^1\omega_1, \quad u_2\tilde\omega_4^2=\tilde u_4^2\omega_2. \end{gathered}$$

Если определитель системы отличен от нуля:

$$u_1 u_2 (\tilde{u}_4^2 u_2 - \tilde{u}_3^1 u_1)^2 \neq 0,$$

то $s_1 = 6$. Система — в инволюции, ибо при произвольном задании первого линейного элемента (форм u_i^j, $\tilde{u}_k^l$) система (14′) определит все формы ω_i^j, $\tilde{\omega}_k^l$, т. е. второй линейный элемент. Интегральное многообразие $\mathfrak{M}_2$ зависит от шести произвольных функций одного аргумента.

Чтобы выяснить геометрический смысл полученного решения, выберем произвольную ещё точку A_3 в касательной плоскости поверхности (A_1) так, чтобы касательные A_1A_2 и A_1A_3 были сопряжены и точка A_3 была вторым фокусом луча A_1A_3. Выберем точку A_4 в плоскости $A_1A_2A_4$ так, чтобы плоскость $A_1A_3A_4$ касалась поверхности (A_3). Тогда $(dA_3, A_1A_3A_4) = 0$ и, следовательно, $\omega_3^2 = 0$. С другой стороны, при $\omega_1^3 = 0$ не только точка A_1 описывает линию, касающуюся ребра A_1A_2 но и точка A_3 должна перемещаться в направлении A_3A_1, следовательно, $\omega_3^4 = 0$. Значит, формы $\omega_1^3 = \omega_1$ и ω_3^4 пропорциональны и $[\omega_1 \omega_3^4] = 0$; точно так же в силу сопряжённости касательных A_1A_2 и A_1A_3 при $\omega_1^2 = 0$ не только точка A_1 описывает линию, касающуюся ребра A_1A_3, но и точка A_2 описывает линию, касающуюся ребра A_2A_1, следовательно, из $\omega_1^2 = 0$ следует $\omega_2^4 = 0$, и значит $[\omega_2 \omega_1^2] = 0$.

Развёртывая по лемме Картана квадратичные уравнения (14), получим:

$$\begin{gathered} \omega_1^2 = py\omega_2, \quad \omega_3^4 = -px\omega_1, \quad \tilde{\omega}_3^1 = x\omega_1, \quad \tilde{\omega}_4^2 = y\omega_2, \\ \omega_2^1 = \alpha\omega_2 + \beta x\omega_1, \quad \omega_4^3 = -\alpha\omega_1 - \beta y\omega_2. \end{gathered} \tag{15}$$

Дифференцируя внешним образом первые четыре уравнения, получим после элементарных преобразований:

$$\begin{gathered} [\omega_1, dx + 2x(\omega_1^1 - \omega_3^3)] = 0, \quad [\omega_2, dy + 2y(\omega_2^2 - \omega_4^4)] = 0, \\ [\omega_1, dp + p(\omega_1^1 - \omega_4^4)] = 0, \quad [\omega_2, dp + p(\omega_1^1 - \omega_4^4)] = 0. \end{gathered}$$

Два последних уравнения имеют следствием

$$dp + p(\omega_1^1 - \omega_4^4) = 0.$$

Внешнее дифференцирование этого уравнения и уравнения $\omega_3^2 = 0$ даёт, если воспользоваться уравнениями (15),

$$\begin{gathered} [\omega_1 \omega_3^1] + [\omega_2 \omega_4^2] = 0, \\ y[\omega_2 \omega_3^1] + x[\omega_1 \omega_4^2] = 0, \end{gathered}$$

откуда, развёртывая по лемме Картана, имеем:

$$\omega_3^1 = \lambda x\omega_1 + \mu\omega_2, \quad \omega_4^2 = \mu\omega_1 + \lambda y\omega_2. \tag{16}$$

Асимптотические линии на поверхностях (A_1), (A_2), (A_3) определяются уравнениями

$$(d^2A_1, A_1A_2A_3) = 0, \quad (d^2A_2, A_1A_2A_4) = 0, \quad (d^2A_3, A_1A_3A_4) = 0,$$

или

$$\omega_1^2\omega_2 + \omega_3^4\omega_1 = 0, \quad \omega_2^1\omega_1 + \omega_4^3\omega_2 = 0, \quad \omega_3^1\omega_1^2 + \omega_3^4\omega_4^2 = 0.$$

Если внести значения ω_1^2, ω_3^4, ω_2^1, ω_4^3, ω_3^1, ω_4^2 из уравнений (15), (16), то получим одно и то же уравнение

$$x(\omega_1)^2 - y(\omega_2)^2 = 0. \tag{17}$$

Следовательно, асимптотические на всех трёх фокальных поверхностях соответствуют, и обе конгруэнции (A_1A_2) и (A_1A_3) — конгруэнции W, а поскольку касательные A_1A_2, A_1A_3 на поверхности (A_1) сопряжены, то обе являются конгруэнциями R[1]. При этом налагаются не только конгруэнции (A_1A_2), (B_1B_2), но и фокальные поверхности (A_1) на (B_1), (A_2) на (B_2), как это будет видно, если переписать уравнения (8) предыдущего параграфа, заменяя индексы 0, 1, 2, 3 на 1, 2, 3, 4 или на 2, 1, 4, 3.

Ранг системы (14′) понижается в следующих трёх случаях:

$$1)\ \omega_1 = 0, \quad 2)\ \omega_2 = 0, \quad 3)\ \tilde{\omega}_4^2\omega_2 - \tilde{\omega}_3^1\omega_1 = 0.$$

Первые два уравнения приводят к знакомым уже характеристикам (Коши).

Последнее уравнение определит на поверхностях асимптотические линии. Действительно, внося сюда $\tilde{\omega}_3^1 = x\omega_1$, $\tilde{\omega}_4^2 = y\omega_2$, получим уравнение (17).

Если оно выполнено для всех линейных элементов поверхности, то $x = y = 0$, т. е.

$$\tilde{\omega}_3^1 = \tilde{\omega}_4^2 = 0,$$

но тогда все формы равны: $\Omega_i^k = \omega_i^k$, и две конгруэнции проективно тождественны.

§ 6. Задача. Погружение риманова многообразия в эвклидово пространство

Если компоненты ω_i, $\tilde{\omega}_{ik}$ бесконечно малых перемещений трёхгранника $AI_1I_2I_3$

$$dA = \omega_i I_i, \quad dI_i = \omega_{ik} I_k, \qquad i, k = 1, 2, 3, \tag{18}$$

---

[1] Фиников, Проективно-дифференциальная геометрия, гл. VII, стр. 140.

кроме условий ортогональности $\omega_{ik} = -\omega_{ki}$, удовлетворяют уравнениям структуры эвклидова пространства

$$
(19) \qquad \begin{aligned} D\omega_i &= [\omega_k \omega_{ki}], \\ D\omega_{ik} &= [\omega_{ij}\omega_{jk}], \end{aligned} \qquad i, j, k = 1, 2, 3,
$$

то система (18) вполне интегрируема и определяет движения трёхгранника в эвклидовом пространстве.

Пространство называется римановым, если компоненты ω_i, ω_{ik} удовлетворяют только уравнениям первой строки (19). Чтобы записать равенства второй строки, нам придётся добавить в правой части с произвольными коэффициентами внешние произведения основных форм:

$$
(20) \qquad \begin{aligned} D\omega_i &= [\omega_k \omega_{ki}], \\ D\omega_{ik} &= [\omega_{ij}\omega_{jk}] - R_{ik,\,[hl]}\,[\omega_h \omega_l], \end{aligned} \qquad i, j, k, h, l = 1, 2, 3.
$$

Коэффициенты $R_{ik,\,hl}$ называются компонентами тензора Римана-Кристоффеля. Они не вполне произвольны. Кроме дифференциальных уравнений, они удовлетворяют конечным соотношениям

$$
(21) \qquad \begin{gathered} R_{ik,\,hl} = -R_{ki,\,hl} = -R_{ik,\,lh} = R_{hl,\,ik}, \\ (i) \equiv R_{ik,\,hl} + R_{ih,\,lk} + R_{il,\,kh} = 0. \end{gathered}
$$

Первые два прямо следуют из антисимметричности форм $\omega_{ik} = -\omega_{ki}$ и внешнего произведения $[\omega_h \omega_l] = -[\omega_l \omega_h]$. Для того чтобы получить последнее $(i) = 0$, надо продифференцировать внешним образом первое уравнение (20). Так как внешний дифференциал от внешнего дифференциала равен нулю, то первый член пропадёт, и мы будем иметь:

$$
[D\omega_k \omega_{ki}] + [D\omega_{ik} \omega_k] = 0.
$$

Внося сюда $D\omega_k$, $D\omega_{ki}$ и помня, что должны сохраняться только члены, содержащие R (ибо в эвклидовом пространстве мы, очевидно, придём к тождеству), мы без труда получим

$$
-R_{ik,\,hl}\,[\omega_h \omega_l \omega_k] = 0
$$

или, альтернируя по последним трём указателям и приравнивая нулю коэффициенты,

$$
R_{i\,[khl]} = 0,
$$

что прямо даёт последнее равенство (21). Наконец, сумма $(i) + (k) - (h) - (l) = 0$ даёт последнее равенство первой строки.

Шлэфли[1]) опубликовал теорему, что всякое риманово пространство n измерений можно погрузить в эвклидово пространство

---

[1]) Schlaefli, Nota alla memoria del Beltrami, Ann. di Math. (2), 5, 1871, стр. 170—193.

$\mathrm{N} = \dfrac{n(n+1)}{2}$ измерений. Для $n = 3$ имеем $\mathrm{N} = 6$. Эту задачу погружения риманова многообразия в эвклидово пространство можно формулировать следующим образом:

Задача. *Дано произвольное риманово многообразие n измерений (A) с линейным элементом*

$$
(22) \qquad ds^2 = (\omega_1)^2 + (\omega_2)^2 + \ldots + (\omega_n)^2.
$$

Найти в эвклидовом пространстве N *измерений многообразие* $\mathfrak{M}_n$, *имеющее тот же линейный элемент* (22).

Присоединим к каждой точке B искомого многообразия $\mathfrak{M}_n$ систему отнесения (репер), состоящую из точки B и N единичных взаимно перпендикулярных векторов I_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, \mathrm{N})$,

$$
(23) \qquad \begin{aligned} dB &= \Omega_\alpha I_\alpha \\ dI_\alpha &= \Omega_{\alpha\beta} I_\beta, \end{aligned} \qquad \Omega_{\alpha\beta} = -\Omega_{\beta\alpha}, \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, \mathrm{N}.
$$

Выберем векторы $I_1, I_2, \ldots, I_n$ в касательном подпространстве многообразия $\mathfrak{M}_n$, притом так, чтобы они соответствовали одноимённым векторам репера $AI_1I_2\ldots I_n$, присоединённого к точке риманова многообразия (A), т. е. так, чтобы линии, касательные к осям репера на обоих многообразиях, определялись одними и теми же уравнениями. Остальные векторы $I_{n+1}, \ldots, I_{\mathrm{N}}$ нормальны к касательному подпространству многообразия $\mathfrak{M}_n$. Мы будем иметь для определения $\mathfrak{M}_n$ систему уравнений

$$
(24) \qquad \Omega_i = \omega_i, \quad \Omega_\lambda = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \ \lambda = n + 1, \ldots, \mathrm{N}.
$$

Эти уравнения обеспечивают совпадение линейных элементов $dA^2 = dB^2$ и представляют все уравнения проблемы.

Дифференцируя внешним образом уравнения (24), получим

$$
(25) \qquad \begin{aligned} [\omega_k, \Omega_{ki} - \omega_{ki}] &= 0, \\ [\omega_k, \Omega_{k\lambda}] &= 0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} i, k &= 1, 2, \ldots, n, \\ \lambda &= n + 1, \ldots, \mathrm{N}. \end{aligned}
$$

Применяя к первому из этих уравнений лемму Картана, получим для разностей $\tilde{\omega}_{ki} = \Omega_{ki} - \omega_{ki}$ разложения с симметричной матрицей коэффициентов

$$
\tilde{\omega}_{ki} = c_{kih}\,\omega_h, \qquad c_{kih} = c_{hik}.
$$

С другой стороны, в силу антисимметричности $\tilde{\omega}_{ki} = -\tilde{\omega}_{ik}$ имеем:

$$
c_{kih} = -c_{ikh}.
$$

Повторяя три раза эти две перестановки, получим

$$
c_{kih} = c_{hik} = -c_{ihk} = -c_{khi} = c_{hki} = c_{ikh} = -c_{kih}.
$$

Следовательно, все $c_{kih} = 0$, и мы имеем добавочное уравнение

$$
\Omega_{ij} = \omega_{ij}.
$$

Итак, имеем систему Пфаффа

$$\text{(I)} \qquad \Omega_i - \omega_i = 0, \quad \Omega_\lambda = 0, \quad \Omega_{ij} - \omega_{ij} = 0,$$
$$i, j = 1, 2, \ldots, n; \; \lambda = n+1, \ldots, \mathrm{N},$$

и систему ковариантов

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} &[\omega_k \Omega_{k\lambda}] = 0, && i, j, k, h = 1, 2, \ldots, n, \\ &[\Omega_{i\lambda} \Omega_{j\lambda}] = R_{ij,\,kh}\,[\omega_k \omega_h], && \lambda = n+1, \ldots, \mathrm{N}. \end{aligned}$$

Характеристическая система состоит из форм ω_i, линейно независимых на $\mathfrak{M}_n$, левых частей уравнения Пфаффа (I) и форм $\Omega_{i\lambda}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $\lambda = n+1, \ldots, \mathrm{N}$).

Ввиду полного произвола выбора осей $\boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2, \ldots, \boldsymbol{I}_n$ будем строить цепь по формам базиса $[\omega_i]$. Так как на всяком интегральном элементе формы (I) равны нулю, то линейные элементы будут определяться значениями форм $\Omega_{i\lambda}$. Если положить

$$\text{(a)} \qquad \Omega_{i\lambda} = l_{ki\lambda}\omega_k,$$

то линейный элемент $\boldsymbol{e}_k$ определится значениями форм

$$(\boldsymbol{e}_k) \qquad \omega_i = \delta_i^k, \quad \Omega_{i\lambda} = l_{ki\lambda}, \qquad \delta_i^k = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases}$$

Для удобства речи будем говорить, что $\mathrm{N} - n$ значений $l_{ki\lambda}$ ($\lambda = n+1, \ldots$ $\ldots, \mathrm{N}$) служат компонентами вектора $\boldsymbol{l}_{ki}$. Эти векторы расположены во вспомогательном пространстве $\mathrm{N} - n = \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}$ измерений.

Первое уравнение (II), написанное для двух линейных элементов $\boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{e}_k$, даёт:

$$[\omega_j \Omega_{j\lambda}] \equiv \delta_j^i l_{hj\lambda} \delta_h^k - \delta_j^k l_{hj\lambda} \delta_h^i = 0.$$

Так как $\delta_j^i l_{hj\lambda} \delta_h^k = l_{ki\lambda}$, то уравнение показывает равенство компонент $l_{ki\lambda} = l_{ik\lambda}$, т. е. вектор $\boldsymbol{l}_{ik}$ симметричен относительно своих указателей:

$$\text{(b)} \qquad \boldsymbol{l}_{ik} = \boldsymbol{l}_{ki}.$$

Отсюда следует, что первый элемент $\boldsymbol{e}_1$ имеет n параметрических векторов

$$\boldsymbol{l}_{11}, \; \boldsymbol{l}_{12}, \; \ldots, \; \boldsymbol{l}_{1n}.$$

Второй элемент $\boldsymbol{e}_2$ удовлетворяет двум уравнениям, проистекающим из уравнений (II):

$$\boldsymbol{l}_{21} = \boldsymbol{l}_{12},$$

$$\text{(26)} \qquad \{ij; 12\} \equiv \boldsymbol{l}_{1i} \cdot \boldsymbol{l}_{2j} - \boldsymbol{l}_{1j} \cdot \boldsymbol{l}_{2i} - R_{ij,\,12} = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\boldsymbol{l}_{1i} \cdot \boldsymbol{l}_{2j} = l_{1i\lambda} l_{2j\lambda}$ есть скалярное произведение векторов. Мы видим, что вектор $\boldsymbol{l}_{21} = \boldsymbol{l}_{12}$ уже известен; уравнение

$$\{12; 12\} = 0$$

определяет проекцию $\boldsymbol{l}_{22}$ на $\boldsymbol{l}_{11}$. Уравнения

$$\{13; 12\} = 0, \quad \{23; 12\} = 0$$

определяют проекции $\boldsymbol{l}_{23}$ на $\boldsymbol{l}_{11}$ и на $\boldsymbol{l}_{12}$ и т. д. Для вектора $\boldsymbol{l}_{2n}$ будут известны проекции на $\boldsymbol{l}_{11}, \boldsymbol{l}_{12}, \ldots, \boldsymbol{l}_{1,\,n-1}$.

Существование $\boldsymbol{e}_2$ обеспечено, если векторы $\boldsymbol{l}_{11}, \boldsymbol{l}_{12}, \ldots, \boldsymbol{l}_{1,\,n-1}$ линейно независимы, ибо проекции вектора на линейно независимые направления можно задавать произвольно. Независимость этих векторов при произвольном выборе их мы можем предполагать, если только размерность вспомогательного пространства $\frac{n(n-1)}{2}$ (пространства векторов $\boldsymbol{l}_{ik}$) не меньше чем $n-1$. При этом векторы $\boldsymbol{l}_{1i}, \boldsymbol{l}_{2i}$ ($i = 1, 2, \ldots, n-1$) можно выбрать линейно независимыми, ибо задание проекций вектора на некоторое число независимых направлений, очевидно, не стеснит свободу выбора независимых векторов, если только общее число их не превысит размерность вспомогательного пространства векторов.

Допустим теперь, что мы построили интегральный элемент $\mathcal{E}_{\nu+1}$, проходящий через $\mathcal{E}_\nu$ для $\nu = 1, 2, \ldots, p-1$. Все эти интегральные элементы определяются векторами $\boldsymbol{l}_{hk}$ ($h = 1, 2, \ldots, \nu+1$, $k = 1, 2, \ldots n$), которые удовлетворяют условию симметрии $\boldsymbol{l}_{hk} = \boldsymbol{l}_{ki}$ и линейной независимости всех векторов $\boldsymbol{l}_{hi}$ ($i = 1, 2, \ldots, n-1$).

Будем строить интегральный элемент $\mathcal{E}_{p+1}$, проходящий через $\mathcal{E}_p$. Он определяется векторами $\boldsymbol{l}_{p+1,i}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). При этом мы имеем из условия симметрии:

$$\boldsymbol{l}_{p+1,\,\nu} = \boldsymbol{l}_{\nu,\,p+1}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, p.$$

Кроме того, надо удовлетворить условиям

$$\{kh; \nu, p+1\} \equiv \boldsymbol{l}_{\nu k} \cdot \boldsymbol{l}_{p+1,\,h} - \boldsymbol{l}_{\nu h} \cdot \boldsymbol{l}_{p+1,\,k} - R_{kh;\,\nu,\,p+1} = 0,$$
$$h, k = 1, 2, \ldots, n; \; \nu = 1, 2, \ldots, p.$$

Если $k < p+1$ и $h < p+1$, то эти условия содержат только уже известные векторы. Такие условия удовлетворяются автоматически, ибо в силу симметрии векторов $\boldsymbol{l}_{\nu k} = \boldsymbol{l}_{k\nu}$ и компонент тензора кривизны $R_{kh;\,\nu,\,p+1} = R_{\nu,\,p+1;\,kh}$ мы имеем:

$$\text{(c)} \qquad \{kh; \nu, p+1\} = \{\nu, p+1; k\,h\}.$$

Далее, два уравнения на один вектор $\boldsymbol{l}_{p+1,g}$ ($p+1 \leqslant g \leqslant n$)

$$\text{(27)} \qquad \begin{aligned} &\{ig; \nu, p+1\} \equiv \boldsymbol{l}_{\nu i} \cdot \boldsymbol{l}_{p+1,\,g} - \boldsymbol{l}_{\nu g} \cdot \boldsymbol{l}_{p+1,\,i} - R_{ig;\,\nu,\,p+1} = 0, \\ &\{\nu g; i, p+1\} \equiv \boldsymbol{l}_{i\nu} \cdot \boldsymbol{l}_{p+1,\,g} - \boldsymbol{l}_{ig} \cdot \boldsymbol{l}_{p+1,\,\nu} - R_{\nu g;\,i,\,p+1} = 0, \\ &\qquad i = 1, 2, \ldots, p; \; g = p+1, \ldots, n, \end{aligned}$$

эквивалентны. Они оба содержат одно и то же скалярное произведение $\boldsymbol{l}_{\nu i}\cdot\boldsymbol{l}_{p+1,\,g}$ (проекцию на вектор $\boldsymbol{l}_{\nu i}$); между тем

$$\begin{aligned}
&\{ig;\nu,p+1\}-\{\nu g;i,p+1\}-\{g,p+1;i\nu\}\equiv\\
&\qquad\equiv\boldsymbol{l}_{\nu i}\cdot\boldsymbol{l}_{p+1,\,g}-\boldsymbol{l}_{\nu g}\cdot\boldsymbol{l}_{p+1,\,i}-R_{ig;\,\nu,\,p+1}-\\
&\qquad-\boldsymbol{l}_{i\nu}\cdot\boldsymbol{l}_{p+1,\,g}+\boldsymbol{l}_{ig}\cdot\boldsymbol{l}_{p+1,\,\nu}+R_{\nu g;\,i,\,p+1}-\\
&\qquad-\boldsymbol{l}_{ig}\cdot\boldsymbol{l}_{\nu;\,p+1}+\boldsymbol{l}_{i,\,p+1}\cdot\boldsymbol{l}_{\nu g}+R_{g,\,p+1;\,i\nu}=\\
&\qquad=R_{ig;\,p+1,\,\nu}+R_{i,\,p+1;\,\nu g}+R_{i\nu;\,g,\,p+1}\equiv 0,
\end{aligned}\tag{d}$$

где скалярные произведения векторов просто взаимно уничтожатся, если воспользоваться симметрией $\boldsymbol{l}_{\nu i}=\boldsymbol{l}_{i\nu}$, а сумма компонент тензора кривизны приводится к нулю с помощью соотношений (21). Так как уравнение $\{g,p+1;i\nu\}=0$ уже было удовлетворено при выборе проекций векторов $\boldsymbol{l}_{ig}\cdot\boldsymbol{l}_{\nu,\,p+1}$, $\boldsymbol{l}_{\nu g}\cdot\boldsymbol{l}_{i,\,p+1}$ $(i,\nu\leqslant p)$, то два равенства (27) дадут одно и то же значение произведения $\boldsymbol{l}_{\nu i}\cdot\boldsymbol{l}_{p+1,\,g}$.

Пользуясь соотношениями (c) и (d), мы можем ограничиться для каждого $g=p+1,p+2,\ldots,n$ только уравнениями с указателями

$$\begin{array}{lll}
g=p+1, & \nu\leqslant i<p+1, & \nu\leqslant p,\\
g=p+2, & \nu\leqslant i<p+2, & \nu\leqslant p,\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\
g=n, & \nu\leqslant i<n, & \nu\leqslant p.
\end{array}$$

Каждое уравнение будет определять проекцию вектора $\boldsymbol{l}_{p+1,\,g}$ на линейно независимые векторы $\boldsymbol{l}_{\nu i}$. Разные уравнения будут определять различные проекции. По этим условиям мы можем выбрать векторы $\boldsymbol{l}_{p+1,\,g}$ независимыми от предыдущих $\boldsymbol{l}_{\nu i}$.

Если $p=n-1$, то останется только один неизвестный вектор $\boldsymbol{l}_{nn}$ и для него будут определены все проекции, т. е. проекции на все $\dfrac{n(n-1)}{2}$ линейно независимых векторов $\boldsymbol{l}_{\nu i}$ $(i,\nu\leqslant n-1)$ вспомогательного пространства. Вектор $\boldsymbol{l}_{nn}$ вполне определён, и через интегральный элемент $\mathcal{E}_{n-1}$ проходит один и только один интегральный элемент $\mathcal{E}_n$.

Если $p=n-2$, то имеется два неизвестных вектора $\boldsymbol{l}_{n-1,\,n-1}$ и $\boldsymbol{l}_{n-1,\,n}$. Для первого будут определены проекции на векторы $\boldsymbol{l}_{\nu i}$ $(i,\nu\leqslant n-2)$, для второго — на векторы $\boldsymbol{l}_{\nu i}$, где $i\leqslant n-1$, $\nu\leqslant n-2$. Можно задать произвольно для первого проекции на векторы $\boldsymbol{l}_{\nu,\,n-1}$, где $\nu=1,2,\ldots,n-1$, всего $n-1$ проекций, для второго — проекции на вектор $\boldsymbol{l}_{n-2,\,n-1}$, т. е. одну проекцию. Таким образом, интегральный элемент $\mathcal{E}_{n-1}$, проходящий через заданный $\mathcal{E}_{n-2}$, зависит от n произвольных параметров. Отсюда следует, что последний характер, не равный нулю, $s_{n-1}=n$. Система Пфаффа (I) — в инволюции и определяет интегральное многообразие $\mathfrak{M}_n$ с произволом n функций от $n-1$ аргументов.

Теорема Шлэфли доказана. Мы видим те специфические трудности при построении неособой цепи в пространстве произвольного числа n измерений, которые, например, до сих пор оставили открытым вопрос об исследовании особых интегральных многообразий.

Для риманова многообразия $n=3$ измерений таблица уравнений (26) становится обозримой. Уравнения (21) показывают, что тензор Римана-Кристоффеля имеет только шесть различных компонент

$$R_{12,12},\ R_{12,23},\ R_{12,31},\ R_{13,13},\ R_{13,23},\ R_{23,23}.$$

Сообразно этому мы имеем шесть различных уравнений (26).

При построении интегрального элемента $\mathcal{E}_2$ используются первые три из этих уравнений:

$$\begin{array}{ll}
\{12;\ 12\}=0, & \boldsymbol{l}_{11}\cdot\boldsymbol{l}_{22}=\boldsymbol{l}_{12}\cdot\boldsymbol{l}_{12}+R_{12,12},\\
\{13;\ 12\}=0, & \boldsymbol{l}_{11}\cdot\boldsymbol{l}_{23}=\boldsymbol{l}_{12}\cdot\boldsymbol{l}_{13}+R_{13,12},\\
\{23;\ 12\}=0, & \boldsymbol{l}_{12}\cdot\boldsymbol{l}_{23}-\boldsymbol{l}_{13}\cdot\boldsymbol{l}_{22}=R_{23,12}.
\end{array}$$

Они содержат четыре неизвестные проекции $\boldsymbol{l}_{11}\cdot\boldsymbol{l}_{22}$, $\boldsymbol{l}_{13}\cdot\boldsymbol{l}_{22}$; $\boldsymbol{l}_{11}\cdot\boldsymbol{l}_{23}$, $\boldsymbol{l}_{12}\cdot\boldsymbol{l}_{23}$.

Так как первые два уравнения содержат неизвестными проекции различных векторов $\boldsymbol{l}_{22}$ и $\boldsymbol{l}_{23}$, то ранг системы может понизиться только в том случае, когда третье уравнение будет следствием двух первых, т. е. если векторы $\boldsymbol{l}_{12}$ и $\boldsymbol{l}_{13}$ будут параллельны вектору $\boldsymbol{l}_{11}$. В таком случае линейный элемент $\boldsymbol{e}_1$ будет особым. Если для всякого указателя $j=1,\ 2,\ 3$ векторы $\boldsymbol{l}_{ji}$ параллельны, т. е. координаты их пропорциональны:

$$l_{ji\lambda}=\rho_i l_{j\lambda},$$

то все линейные элементы — особые, и интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ — особое.

Так как $l_{ij\lambda}=l_{ji\lambda}$, то это условие можно написать в виде

$$l_{ij\lambda}=\rho_i l_{j\lambda}=\rho_j l_{i\lambda},$$

откуда отношения $\dfrac{l_{i\lambda}}{\rho_i}=\dfrac{l_{j\lambda}}{\rho_j}$ не зависят от указателей i или j. Обозначая их через l_λ, имеем:

$$l_{ij\lambda}=\rho_i\rho_j l_\lambda.$$

Отсюда

$$d\boldsymbol{I}_i=\omega_{ij}\boldsymbol{I}_j+\Omega_{i\lambda}\boldsymbol{I}_\lambda=\omega_{ij}\boldsymbol{I}_j+\rho_j\omega_j\rho_i l_\lambda\boldsymbol{I}_\lambda$$

и

$$d^2\boldsymbol{B}=d(\omega_i\boldsymbol{I}_i)=d\omega_i\boldsymbol{I}_i+\omega_i\omega_{ij}\boldsymbol{I}_j+(\rho_i\omega_i)^2 l_\lambda\boldsymbol{I}_\lambda.$$

Следовательно, соприкасающееся подпространство многообразия (B) в эвклидовом пространстве шести измерений, определяемое векторами $d\boldsymbol{B}$, $d^2\boldsymbol{B}$ для всех перемещений внутри многообразия и совпадающее обычно со всем эвклидовым пространством, теперь, имея базисом векторы $\boldsymbol{I}_1$, $\boldsymbol{I}_2$, $\boldsymbol{I}_3$ и $l_\lambda\boldsymbol{I}_\lambda$, будет только четырёхмерным.

Если линейный элемент e_1 — регулярный, то интегральный элемент $\mathcal{E}_2$ может быть особым, если через него проходит больше элементов $\mathcal{E}_3$, чем через соседние. Третий линейный элемент e_3 определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \{13,\ 13\} &= 0, \quad l_{11} \cdot l_{33} = l_{13} \cdot l_{13} + R_{13,\ 13}, \\ \{13,\ 23\} &= 0, \quad l_{12} \cdot l_{33} = l_{13} \cdot l_{23} + R_{13,\ 23}, \\ \{23,\ 23\} &= 0, \quad l_{22} \cdot l_{33} = l_{23} \cdot l_{23} + R_{23,\ 23}, \end{aligned}$$

которые определяют три проекции вектора l_{33}. Они не определят вектор l_{33}, если три вектора l_{11}, l_{12}, l_{22} компланарны.

Обозначим через a_λ координаты вектора, перпендикулярного к трём векторам l_{11}, l_{12}, l_{22}; мы получим условие перпендикулярности их в виде трёх тождеств

$$\text{(e)} \qquad a_\lambda l_{ij\lambda} = 0, \qquad \lambda = 4,\ 5,\ 6.$$

Если эти равенства имеют место для всех указателей $i, j = 1,\ 2,\ 3$, то всякий интегральный элемент $\mathcal{E}_2$ — особый. Следовательно, присоединяя уравнения (e) к системе уравнений задачи, можно определить особое интегральное многообразие.

Чтобы выяснить геометрический смысл условия особого решения, умножим равенство (e) на ω_i и просуммируем по указателю $i = 1, 2, 3$. Так как $l_{ji\lambda}\omega_i = \Omega_{j\lambda}$, то получим:

$$a_\lambda \Omega_{j\lambda} = 0, \qquad j = 1, 2, 3;\ \lambda = 4, 5, 6.$$

Значит, умножая вектор

$$d^2B = d\omega_i I_i + \omega_i \omega_{ij} I_j + \omega_i \Omega_{i\lambda} I_\lambda$$

скалярно на вектор $J = a_\mu I_\mu$ ($\mu = 4,\ 5,\ 6$) и помня, что $I_i \cdot I_\mu = 0$, $I_\lambda \cdot I_\mu = \delta_\lambda^\mu$, получим:

$$J \cdot d^2B = \omega_i \Omega_{i\lambda} a_\mu \delta_\lambda^\mu = \omega_i a_\lambda \Omega_{i\lambda} = 0.$$

Если принять направление вектора J, например, за шестую ось репера I_6, то соприкасающееся подпространство многообразия (B) будет иметь базисом векторы I_i, I_4, I_5, следовательно, будет пятимерным. Система уравнений

$$I_\lambda \cdot d^2B = 0,$$

определяющая асимптотические направления многообразия (B), будет содержать только два независимых уравнения

$$I_4 \cdot d^2B = 0, \quad I_5 \cdot d^2B = 0$$

на три формы ω_1, ω_2, ω_3, следовательно, будет определять ∞^1 асимптотических касательных многообразия.

§ 7. Особые решения одного уравнения Пфаффа

Теория особых интегральных многообразий для одного уравнения Пфаффа получила полную законченность ещё в первой работе Картана [1]).

Если система состоит из одного уравнения Пфаффа

$$\theta = 0,$$

то и система ковариантов будет содержать только одно уравнение

$$D\theta = 0,$$

которое не обращается тождественно в нуль, если уравнение не будет вполне интегрируемым. Следовательно, $s = 1$, $s_1 \leqslant 1$ и, если $s_1 = 1$, как мы будем предполагать, то следующие характеры от s_2 до некоторого s_p могут равняться единице, а все остальные s_{p+1}, s_{p+2} и т. д. равны нулю.

Будем рассматривать задачу интегрирования в её первой постановке (стр. 129, 197), т. е. будем искать интегральное многообразие, не связывая себя выбором тех форм, которые должны оставаться на нём независимыми.

Класс уравнения Пфаффа (см. гл. V, § 7) равен $2m + 1$, где число m определяется условиями

$$[\theta\,[D\theta]^m] \neq 0, \quad [\theta\,[D\theta]^{m+1}] = 0.$$

Будем предполагать, что мы умножили уравнение на подходящий множитель так, что класс формы θ тоже равен $2m + 1$. Нетрудно показать, что уравнение $\theta = 0$ не допускает интегрального многообразия более чем m измерений.

Приведём форму θ к каноническому виду. Наше уравнение примет вид

$$\text{(28)} \qquad \theta \equiv dz - y_\alpha dx_\alpha = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, m,$$

где x_α, y_α и z суть $2m + 1$ канонических переменных системы. Система ковариантов будет состоять из уравнения

$$\text{(29)} \qquad [dy_\alpha\, dx_\alpha] = 0.$$

Из первого уравнения непосредственно вытекает, что все x_α и z не могут быть одновременно независимыми переменными, ибо это уравнение устанавливает между дифференциалами dx_α, dz линейную зависимость. Так как эта зависимость всегда содержит dz, то мы можем считать z функцией от остальных переменных.

---

[1]) Cartan, Sur certaines expressions différentielles et le probléme de Pfaff, Ann. de l'École Normale Sup. (3), **16**, 1899, стр. 239—332.

Допустим теперь, что среди независимых переменных имеется пара переменных x_α, y_α с одним и тем же указателем α, например, x_1 и y_1. Уравнение (29) для этих двух независимых переменных примет вид суммы якобианов (стр. 105):

$$\frac{\partial(x_1, y_1)}{\partial(x_1, y_1)} + \frac{\partial(x_2, y_2)}{\partial(x_1, y_1)} + \ldots + \frac{\partial(x_m, y_m)}{\partial(x_1, y_1)} = 0,$$

из которых первый равен единице. Так как по крайней мере один ещё якобиан, например второй, не равен нулю, то x_2 и y_2 являются функциями от x_1, y_1, и, в частности, из двух производных $\frac{\partial x_2}{\partial y_1}$, $\frac{\partial y_2}{\partial y_1}$ по крайней мере одна, например $\frac{\partial x_2}{\partial y_1}$, не равна нулю. Мы можем, следовательно, выразить y_1 как функцию от x_2 и других переменных и вместо y_1 ввести в качестве независимой переменной x_2. Повторяя это преобразование независимых переменных, мы достигнем того, что для каждого указателя α будет не больше одной независимой переменной x_α или y_α. Значит, число независимых переменных не превышает m.

Допустим, что независимыми являются переменные $x_1, x_2, \ldots, x_h$, $y_{h+1}, \ldots, y_m$. Полагая

$$\begin{aligned} dx_\mu &= -l_\mu^j dx_j - l_\mu^\lambda dy_\lambda, & i, j &= 1, 2, \ldots, h, \\ dy_i &= l_i^j dx_j + l_i^\lambda dy_\lambda, & \lambda, \mu &= h+1, \ldots, m, \end{aligned}$$

и внося эти значения в уравнение (29), мы найдём для каждого линейного элемента цепи, построенной по формам базиса $dx_1, dx_2, \ldots$, $dx_h, dy_{h+1}, \ldots, dy_m$, единственное условие на коэффициенты

$$l_\alpha^\beta = l_\beta^\alpha, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m.$$

В первом линейном элементе e_1 все коэффициенты l_α^1 — параметрические; значит, произвол его равен $r_1 = m$ параметрам; во втором параметрическими будут все l_α^2, кроме $l_1^2 = l_2^1$, т. е. $r_2 = m - 1$, и т. д. Для элемента e_i параметрическими будут l_k^i для $k = i$, $i+1, \ldots, m$, значит $r_i = m - i + 1$. Отсюда характеры системы следующие:

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_m = 1.$$

Следовательно, интегральное многообразие $\mathfrak{M}_m$ существует с произволом одной функции от m переменных. Это решение нетрудно указать. Если

$$w = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_h; y_{h+1}, \ldots, y_m)$$

есть произвольная функция своих аргументов, то

$$z = w - y_\lambda \frac{\partial w}{\partial y_\lambda}, \quad y_i = \frac{\partial w}{\partial x_i}, \quad x_\lambda = -\frac{\partial w}{\partial y_\lambda}, \tag{30}$$
$$i = 1, 2, \ldots, h; \ \lambda = h+1, \ldots, m,$$

удовлетворяют уравнению (28). Действительно, дифференцируя и внося в уравнение (28) значения

$$dz = \frac{\partial w}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial w}{\partial y_\lambda} dy_\lambda - dy_\lambda \frac{\partial w}{\partial y_\lambda} - y_\lambda d \frac{\partial w}{\partial y_\lambda},$$
$$dx_\lambda = -d \frac{\partial w}{\partial y_\lambda}, \quad y_i = \frac{\partial w}{\partial x_i},$$

мы получим очевидное тождество.

Обратимся теперь к особым решениям уравнения $\theta = 0$.

Теорема. *Особое решение уравнения Пфаффа* $\theta = 0$ *класса* $2m+1$ *обращает в нуль все коэффициенты произведения в приведённом виде*

$$[\theta [D\theta]^m] = 0. \tag{31}$$

Допустим, что линейная форма θ выражена в каких-то переменных $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ $(n \geqslant 2m+1)$, и рассмотрим интегральное многообразие $\mathfrak{M}_m$. Если в некоторой точке его $(\bar{x}_i^0)$ условие (31) удовлетворено, то в этой точке класс уравнения Пфаффа $\theta = 0$ понижается, и точка будет особая.

Действительно, в силу нечётности класса уравнения Пфаффа $\theta = 0$ из равенства (31) вытекает обращение в нуль $[D\theta]^m$. Следовательно, ранг квадратичной формы $D\theta$ равен $2m' < 2m$, и форму $D\theta$ в точке $(\bar{x}_i^0)$ можно, в силу теоремы § 2, гл. V, привести алгебраически к виду суммы произведений

$$D\theta = [u_k v_k], \qquad k = 1, 2, \ldots, m'; \quad m' < m,$$

где u_k и v_k — линейные формы от дифференциалов $d\bar{x}_1, d\bar{x}_2, \ldots, d\bar{x}_n$ с числовыми коэффициентами, и число слагаемых m' меньше, чем m.

Интегральные элементы уравнения $\theta = 0$ в точке $(\bar{x}_i^0)$ определяются значениями в точке $(\bar{x}_i^0)$ форм u_k, v_k. Следовательно, среди них на многообразии $\mathfrak{M}_m$ должно быть m линейно независимых. Ввиду произвола обозначений u_k и v_k мы можем считать все формы u_k независимыми, но тогда должно быть ещё $m - m'$ независимых v_k, например, $v_1, v_2, \ldots, v_{m-m'}$, и мы приходим к противоречию, ибо для двух линейных элементов, на которых все независимые u_k, v_k равны нулю, кроме $u_1 = 1$ на первом и $v_1 = 1$ на втором элементе, ковариант $D\theta$ сведётся к значению одного первого произведения и будет равен 1. В такой точке приведение формы θ к каноническому виду (28) становится иллюзорным. Отсюда следует, что интегральное многообразие $\mathfrak{M}_m$, во всех точках которого имеет место равенство (31), — особое, и мы получаем следующее **правило** для отыскания особых решений:

Составляем произведение $[\theta[D\theta]^{m+1}]$, выбирая наименьшее число m, при котором оно тождественно обращается в нуль. Приравниваем нулю все коэффициенты приведённой формы $[\theta\,[D\,\theta]^m]$. Полученную систему конечных уравнений разбиваем путём разложения на множители левых частей уравнений на ряд уже неразложимых систем. Если каждая система несовместна, то особых решений нет. Если какая-нибудь система совместна и содержит h уравнений, левые части которых голоморфны в окрестности точки $(\bar{x}_i^0)$ и функциональный определитель по отношению к каким-то переменным — не нуль, то мы исключаем эти переменные из уравнения $\theta=0$ и получаем уравнение $\theta_1=0$, класс которого не выше чем $2m$. Оно определяет особое решение для уравнения $\theta=0$.

Если в точке $(\bar{x}_i^0)$ функциональный определитель присоединяемой системы h конечных уравнений по отношению ко всяким h переменным $\bar{x}_i$ равен нулю, то точка для системы $\theta_1=0$ — особая. Следовательно, чтобы получить особое решение новой системы $\theta_1=0$, надо к полученным h конечным уравнениям присоединить ещё уравнения, полученные обращением в нуль их функциональных определителей по отношению к каждой группе h переменных $\bar{x}_i$. Если уравнение $\theta=0$ совместно с системой новых конечных уравнений и имеет решение, то это снова — особое решение системы $\theta=0$, но с более высокой степенью нерегулярности, и т. д.

§ 8. Примеры

1. *Найти особые решения уравнения*

$$\theta \equiv x_5dx_1+x_3dx_2+x_1dx_4+x_1dx_5=0.$$

Имеем:

$$D\theta=[dx_1dx_4]+[dx_3dx_2],$$

$$[\theta\,D\theta]=-x_5\,[dx_1dx_2\,dx_3]-x_3\,[dx_1dx_2\,dx_4]-x_1\,[dx_2dx_3dx_4]+$$
$$+x_1\,[dx_1dx_4dx_5]-x_1\,[dx_2dx_3dx_5],$$

$$[\theta\,[D\,\theta]^2]=-x_1\,[dx_1dx_2dx_3dx_4dx_5],$$

$$[\theta\,[D\,\theta]^3]=0.$$

Следовательно, $m=2$, и класс уравнения равен 5. Особые решения получаются присоединением уравнения

$$x_1=0.$$

Уравнение $\theta=0$ принимает вид

$$\theta_1\equiv x_3dx_2=0.$$

Класс уравнения $\theta_1=0$ равен 1. Общее решение уравнения:

$$x_2=a=\text{const},$$

Класс уравнения $\theta_1=0$ понижается, и мы получим особое решение, если

$$x_3=0.$$

Итак, имеем два особых решения:

1) $x_1=0,\quad x_2=a,$

2) $x_1=0,\quad x_3=0.$

К этим уравнениям можно добавить любые соотношения на другие переменные; при этом будут получаться особые решения меньшего числа измерений.

2. *Найти особое решение уравнения*

$$\theta\equiv(x_1x_3dx_2+x_1x_2dx_3+(x_1+x_3x_5)\,dx_4+x_3x_4dx_5=0.$$

Имеем:

$$[\theta\,[D\theta]]=(x_3)^2x_5\,[dx_1dx_2dx_4]-(x_3)^2x_4[dx_1dx_2dx_5]+x_2x_3x_5[dx_1dx_3dx_4]+$$
$$+x_2x_3x_4\,[dx_1dx_3dx_5]+x_3x_4\,[dx_1dx_4dx_5]+x_1x_3x_5\,[dx_2dx_3dx_4]+$$
$$+x_1x_3x_4\,[dx_2dx_3dx_5]-x_1x_4\,[dx_3dx_4dx_5],\ \ [\theta\,[D\theta]^2\,]=0.$$

Здесь $m=1$, и класс уравнения равен 3. Особые решения удовлетворяют уравнениям

$$x_1x_4=x_3x_4=x_3x_5=0.$$

Эта система распадается на три:

$$\text{(a)}\ \begin{matrix}x_1=0,\\ x_3=0;\end{matrix}\qquad \text{(b)}\ \begin{matrix}x_3=0,\\ x_4=0;\end{matrix}\qquad \text{(c)}\ \begin{matrix}x_4=0,\\ x_5=0.\end{matrix}$$

Системы (a) и (b) обращают θ в нуль, следовательно, они уже составляют особые решения. Система (c) даёт:

$$\theta_1\equiv x_1x_3dx_2+x_1x_2dx_3=0.$$

Класс уравнения $\theta_1=0$ равен 1. Общее решение:

$$x_2x_3=\text{const}.$$

Класс уравнения $\theta_1=0$ понижается, и мы получаем особое решение, если

$$x_1x_3=x_1x_2=0,$$

откуда или $x_1=0$, или $x_2=x_3=0$. Каждое даёт особое решение уравнения $\theta_1=0$:

1) $x_4=x_5=0,\quad x_2x_3=\text{const}.;$

2) $x_4=x_5=x_1=0;$

3) $x_4=x_5=x_2=x_3=0,$

ГЛАВА XIV

МЕТОД ПОДВИЖНОГО РЕПЕРА

§ 1. Геометрия данной группы преобразований

По идее Клейна (Klein) каждой непрерывной группе преобразований G с n переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответствует в пространстве n измерений геометрия, изучающая свойства фигур, инвариантных относительно преобразований группы. Эта группа называется *фундаментальной группой* пространства.

Так, элементарная геометрия есть геометрия группы движения, аффинная — группы аффинных преобразований и т. д.

Напомним *основные определения*:

Определение 1. *Преобразованием* S некоторой области D пространства n измерений с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ самой в себя называется соответствие, которое каждой точке M области D указывает единственную точку M' той же области:

$$M' = SM.$$

Аналитически это преобразование определяется уравнениями между координатами точек $M(x_i)$ и $M'(x'_i)$:

$$x'_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Например, всякое перемещение трёхмерного эвклидова пространства есть преобразование.

Определение 2. Если преобразование устанавливает взаимно однозначное соответствие точек $M \to M'$, то существует *обратное преобразование*, которое точке M' ставит в соответствие точку M. Оно обозначается символом S^{-1}:

$$M = S^{-1}M'.$$

Например, всякое перемещение эвклидова пространства имеет обратное преобразование, которое тоже будет перемещением.

Определение 3. *Произведением преобразований* S и S' одной и той же области D называется преобразование S'', получаемое как результат последовательного выполнения сначала преобразования S, а затем преобразования S'; такое произведение обозначают символом $S'S$:

$$\text{если } \begin{matrix} M' = SM \\ M'' = S'M' \end{matrix}, \quad \text{то } M'' = S''M, \quad \text{где } S'' = S'S.$$

Например, произведение любых двух перемещений эвклидова пространства есть перемещение. Произведение двух параллельных переносов (все точки пространства перемещаются на равные векторы) есть перенос, но произведение двух вращений не всегда будет вращением (не будет вращением, если оси множителей находятся в косом положении).

Определение 4. *Группой преобразований* называется совокупность преобразований одной и той же области, если:

a) обратное преобразование существует для каждого преобразования группы и принадлежит группе;

b) произведение любых преобразований группы принадлежит группе.

Следствие. Группа содержит *тождественное преобразование*, ибо произведение любого преобразования S на обратное S^{-1} каждой точке области D ставит в соответствие ту же самую точку.

Например, совокупность перемещений эвклидова пространства есть группа, совокупность переносов есть группа (подгруппа группы движения), но совокупность вращений пространства не образует группы, ибо произведение двух вращений не всегда является вращением и, значит, может не принадлежать группе.

Определение 5. Группа называется *транзитивной*, если существует по крайней мере одно преобразование группы, переводящее произвольную точку M в любую другую точку M' области. Если существует только одно такое преобразование, то группа — *просто транзитивна*.

Например, группа перемещений эвклидова пространства, группа переносов — транзитивны, при этом группа переносов — просто транзитивна, ибо существует только один перенос, переводящий точку M в точку M', именно, определяемый вектором $\overrightarrow{MM'}$.

Группа винтовых движений с двумя параметрами α, c:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha, \\ z' &= z + c, \end{aligned}$$

— *интранзитивна*, ибо, например, начало координат не может быть совмещено с какой-нибудь точкой, не лежащей на оси z.

Будем предполагать, что группа G зависит от конечного числа параметров и транзитивна. Аналитически такая группа определяется уравнениями

$$(1) \qquad x'_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_r), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

которые содержат r параметров a_k. Чтобы группа была транзитивна, число параметров r должно быть не меньше, чем число координат n. Число r называется *порядком группы*.

Система реперов группы. Семейство фигур образует *систему реперов*, если две фигуры семейства можно привести к совпадению одним и только одним преобразованием группы G.

Например, семейство всех тетраэдров пространства образует систему реперов для группы всех коллинеаций (проективных преобразований пространства), ибо существует только одна коллинеация, которая переводит четыре точки пространства в четыре другие точки (в общем положении). При этом под тетраэдром мы подразумеваем совокупность четырёх *аналитических* точек, т. е. каждая вершина тетраэдра задана всеми четырьмя однородными координатами.

Если группа G — просто транзитивна, т. е. существует только одно преобразование группы, приводящее в совпадение две точки, то уже сами точки пространства представляют совокупность реперов.

Построение системы реперов. Допустим теперь, что группа транзитивна, но существует семейство преобразований (подгруппа), приводящих к совпадению две заданные точки. Тогда, очевидно, порядок группы (число параметров) r больше числа переменных n. Начнём с произвольной точки A_0. По предположению существует ∞ преобразований группы G, оставляющих её неподвижной. Они образуют подгруппу g_1 с $r_1 = r - n$ параметрами.

Существуют точки, неинвариантные относительно g_1. Пусть B_0 — одна из таких точек. Преобразования группы g_1, оставляющие неподвижной точку B_0, образуют подгруппу g_2 порядка $r_2 < r_1$. Если r_2 — не нуль, то существуют точки, неинвариантные относительно g_2. Пусть C_0 — такая точка. Преобразования группы g_2, оставляющие неподвижной точку C_0, образуют подгруппу g_3, и т. д. Если порядок g_3 равен нулю, т. е. она сводится к тождественному преобразованию, то фигура из трёх точек A_0, B_0, C_0 может служить начальным репером (R_0).

Так как порядки последовательных подгрупп g_1, g_2, ... монотонно убывают, то процесс должен закончиться, и мы придём к реперу из конечного числа точек, расположенных в определённом порядке. Преобразования группы G образуют из начального репера (R_0) систему реперов (R).

Например, в эвклидовой геометрии нашего пространства с фундаментальной группой всех перемещений и зеркальных отображений пространства порядок группы $r = 6$ больше числа переменных $n = 3$.

Если в качестве произвольной точки A_0 выбрать начало координат, то подгруппа g_1, оставляющая A_0 неподвижной, будет группой всех вращений пространства около начала координат вместе с зеркальными отображениями относительно плоскостей, проходящих через начало. Аналитически она определяется уравнениями

$$(g_1) \qquad x'_i = a_{ik}x_k, \qquad i, k = 1, 2, 3,$$

где a_{ik} есть косинус угла между осью Ox_k и новым положением оси Ox'_i. Подгруппа g_1 зависит от $r_1 = 6 - 3 = 3$ параметров.

Существуют точки, неинвариантные относительно g_1 — все точки, не совпадающие с началом. Выберем, например, точку $B_0(1, 0, 0)$ на оси Ox. Подгруппа g_2, оставляющая неподвижной и точку A_0, и точку B_0, состоит из группы вращений около оси Ox и зеркальных отображений относительно плоскостей, проходящих через ось Ox:

$$(g_2) \qquad \begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y\cos\alpha - z\sin\alpha, \\ z' &= \pm(y\sin\alpha + z\cos\alpha), \end{aligned}$$

с $r_2 = 1$ параметром.

Существуют точки, неинвариантные относительно g_2 — все точки, не лежащие на оси Ox, например, точка $C_0(0, 1, 0)$. Подгруппа g_3, оставляющая неподвижной три точки A_0, B_0, C_0, кроме тождественного преобразования, содержит только зеркальное отображение относительно плоскости xy.

Существуют точки, неинвариантные относительно g_3 — все точки, не лежащие в плоскости xy, например, точка $D_0(0, 0, 1)$. Только тождественное преобразование сохраняет инвариантными четыре точки A_0, B_0, C_0, D_0. Фигура $A_0B_0C_0D_0$ образует начальный репер (R_0), а все его преобразования — систему реперов (R). Прямоугольный трёхгранник декартовой системы координат и есть фигура из четырёх точек: его вершины и концов трёх единичных векторов по осям координат.

В эвклидовой геометрии прямой трёхгранник служит подвижной системой координат. В общем случае дело обстоит таким же образом. Действительно, присоединим к некоторому реперу (R_0), который будем называть начальным, первоначально заданную систему координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть (R_a) — какой-нибудь репер, M — произвольная точка пространства и M' — точка, полученная из M преобразованием S_a^{-1}, переводящим (R_a) в (R_0). Первоначальные координаты точки M' мы условимся называть координатами точки M относительно репера (R_a). Тогда фигура, состоящая из репера (R) и точки M, равна фигуре, образованной из репера (R') и точки N, если координаты точки M относительно репера (R) равны координатам точки N относительно репера (R').

Например, в эквиафинной геометрии на плоскости фундаментальная группа

$$(a) \qquad \begin{aligned} x' &= ax + by + c, \\ y' &= a'x + b'y + c', \end{aligned} \qquad ab' - a'b = 1,$$

зависит от пяти параметров. Закрепляя начало координат A_0, получаем подгруппу g_1:

$$\begin{aligned} x' &= ax + by, \\ y' &= a'x + b'y, \end{aligned} \qquad ab' - a'b = 1,$$

с тремя параметрами. Закрепляя ещё точку $B_0(1, 0)$, получаем подгруппу g_2:

$$\begin{aligned} x' &= x + by, \\ y' &= y, \end{aligned}$$

с одним параметром. Наконец, третья точка $C_0(0, 1)$ вполне определяет репер (R_0), который, следовательно, состоит из вершины A_0 и единичных взаимно перпендикулярных векторов $\mathbf{e}_1^0=\overrightarrow{A_0B_0}$, $\mathbf{e}_2^0=\overrightarrow{A_0C_0}$. Семейство реперов (R) образовано всеми преобразованиями репера (R_0); каждый репер (R) есть совокупность вершины A и двух произвольных векторов $\mathbf{e}_1=\overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{e}_2=\overrightarrow{AC}$.

Если преобразование (a) переводит точку $M_0(x, y)$ в точку $M(x', y')$ и репер (R_0) в репер (R_a), то те же числа x, y суть координаты M относительно репера (R_a). Это совпадает с определением афинных координат точки как координат её радиуса-вектора

$$\overrightarrow{A_0M_0}=x\mathbf{e}_1^0+y\mathbf{e}_2^0 \quad \text{или} \quad \overrightarrow{AM}=x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_{.}.$$

Действительио, преобразование (a) переводит точки $A_0(0, 0)\equiv 0$, $B_0(1, 0)$, $C_0(0, 1)$ в точки $A(c, c')$, $B(a+c,\ a'+c')$, $C(b+c,\ b'+c')$, откуда

$$\overrightarrow{OA}=c\mathbf{e}_1^0+c'\mathbf{e}_2^0,\quad \overrightarrow{OB}=(a+c)\,\mathbf{e}_1^0+(a'+c')\,\mathbf{e}_2^0$$

и

$$\mathbf{e}_1=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=a\mathbf{e}_1^0+a'\mathbf{e}_2^0,\quad \mathbf{e}_2=b\mathbf{e}_1^0+b'\mathbf{e}_2^0.$$

Следовательно, для точки $M(x', y')$

$$\overrightarrow{OM}=x'\mathbf{e}_1^0+y'\mathbf{e}_2^0=(ax+by+c)\,\mathbf{e}_1^0+(a'x+b'y+c')\,\mathbf{e}_2^0$$

и

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=(ax+by)\,\mathbf{e}_1^0+(a'x+b'y)\,\mathbf{e}_2^0=$$
$$=x\,(a\mathbf{e}_1^0+a'\mathbf{e}_2^0)+y\,(b\mathbf{e}_1^0+b'\mathbf{e}_2^0)=x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2.$$

§ 2. Компоненты инфинитезимального преобразования

Если параметры $a_1, a_2, \ldots, a_r$ группы преобразований

$$(S_a) \qquad x_i'=\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ a_1, a_2, \ldots, a_r),\quad i=1, 2, \ldots, n,$$

рассматривать как функции одной переменной α, то дифференциалы от функций φ_i

$$(S_{da}) \qquad \delta x_i=\frac{\partial\varphi_i}{\partial a_k}\,da_k,\qquad i=1, 2, \ldots, n;\ k=1, 2, \ldots, r,$$

определяют новое преобразование, которое называется *инфинитезимальным*.

Его можно рассматривать как главную часть *бесконечно малого преобразования*, именно: если в формулы преобразования (S_a) вместо параметров a_k внести бесконечно малые приращения da_k и взять главную часть бесконечно малой

$$\Delta x_i=\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ da_1, da_2, \ldots, da_r),$$

то получим в точности формулу инфинитезимального преобразования δx_i в точке $a_1=a_2=\ldots=a_r=0$. Ниже мы распространим этот метод на получение всех инфинитезимальных преобразований группы в любой точке (a_k) пространства параметров.

В применении к функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ инфинитезимальное преобразование определяется формулой

$$\delta f=\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\varphi_i}{\partial a_k}\,da_k.$$

Например, бесконечное малое перемещение эвклидова пространства при переносе его по осям координат на отрезки ε_1, ε_2, ε_3 и повороте около осей координат на углы ε_{23}, ε_{31}, ε_{12} можно представить формулами

$$x'=x\cos\alpha_{11}+y\cos\alpha_{12}+z\cos\alpha_{13}+\varepsilon_1,$$
$$y'=x\cos\alpha_{21}+y\cos\alpha_{22}+z\cos\alpha_{23}+\varepsilon_2,$$
$$z'=x\cos\alpha_{31}+y\cos\alpha_{32}+z\cos\alpha_{33}+\varepsilon_3,$$

где до бесконечно малых первого порядка включительно

$$\alpha_{ik}\sim\frac{\pi}{2}+\varepsilon_{ik},\quad \alpha_{ii}=\varepsilon_{i,\,i+1}+\varepsilon_{i,\,i-1}.$$

Следовательно, до бесконечно малых второго порядка

$$\cos\alpha_{ii}\sim 1-\frac{(\alpha_{ii})^2}{2},\quad \cos\alpha_{ik}\sim-\sin\varepsilon_{ik}\sim-\varepsilon_{ik},$$

откуда главная часть бесконечно малого приращения координат имеет вид

$$\delta x=x'-x=\varepsilon_1-\varepsilon_{12}y-\varepsilon_{13}z,$$
$$\delta y=y'-y=\varepsilon_2-\varepsilon_{21}x-\varepsilon_{23}z, \qquad \varepsilon_{ik}=-\varepsilon_{ki},$$
$$\delta z=z'-z=\varepsilon_3-\varepsilon_{31}x-\varepsilon_{32}y,$$

и

$$\delta f=\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=\varepsilon_1\frac{\partial f}{\partial x}+\varepsilon_2\frac{\partial f}{\partial y}+\varepsilon_3\frac{\partial f}{\partial z}+$$
$$+\varepsilon_{23}\left(y\frac{\partial f}{\partial z}-z\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\varepsilon_{31}\left(z\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial z}\right)+\varepsilon_{12}\left(x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Здесь

$$X_1f=\frac{\partial f}{\partial x},\quad X_2f=\frac{\partial f}{\partial y},\quad X_3f=\frac{\partial f}{\partial z},$$
$$X_{23}f=y\frac{\partial f}{\partial z}-z\frac{\partial f}{\partial y},\quad X_{31}f=z\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial z},\quad X_{12}f=x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}$$

называются *символами инфинитезимальных перемещений*: трёх переносов и трёх вращений, величины ε_i, ε_{ik} называются *компонентами инфинитезимального преобразования* репера.

Чтобы определить компоненты инфинитезимального преобразования репера при переходе от (R_a) к (R_{a+da}), надо сначала построить бесконечно малое преобразование группы, переводящее репер (R_a) в репер (R_{a+da}).

Переход от репера (R_a) к бесконечно близкому (R_{a+da}) может совершаться двумя преобразованиями: $(R_a)\to(R_0)$ и $(R_0)\to(R_{a+da})$, т. е. произведением двух преобразований

$$S_\varepsilon=S_{a+da}S_a^{-1},$$

из которых первое S_a^{-1} — обратно преобразованию S_a, приводящему репер (R_0) в положение (R_a), а второе переводит репер (R_0) в положение (R_{a+da}); при этом мы получаем все преобразования в координатах относительно начального репера (R_0).

Если мы хотим выразить это бесконечно малое преобразование в координатах относительно репера (R_a), то надо сначала переместить всю фигуру, состоящую из двух реперов (R_a), (R_{a+da}), так, чтобы репер (R_a) совпадал с начальным (R_0); если (R_ε) есть новое положение репера (R_{a+da}), то преобразование $(R_a)\to(R_{a+da})$, равное преобразованию $(R_0)\to(R_\varepsilon)$, достигается двумя преобразованиями: $(R_0)\to(R_{a+da})\to(R_\varepsilon)$. Первый переход совершается преобразованием S_{a+da}, которое переводит начальный репер (R_0) в репер (R_{a+da}), второй — тем самым преобразованием S_a^{-1}, которое переводит (R_a) в (R_0), а весь переход $(R_0)\to(R_\varepsilon)$ будет совершаться произведением

$$S_\varepsilon=S_a^{-1}S_{a+da}.$$

Например, в группе эквиафинных преобразований на плоскости преобразование S_a можно определить формулами

$$(S_a)\qquad \begin{aligned} x'&=ax+by+c,\\ y'&=a'x+b'y+c', \end{aligned}\qquad ab'-a'b=1.$$

Обратное преобразование получается разрешением этой системы относительно x, y, которые теперь обозначим $\overline{x}$, $\overline{y}$:

$$(S_a^{-1})\qquad \begin{aligned} \overline{x}&=b'(x'-c)-b(y'-c'),\\ \overline{y}&=-a'(x'-c)+a(y'-c'). \end{aligned}$$

Наконец, преобразование S_{a+da} определяется формулами

$$(S_{a+da})\qquad \begin{aligned} x'&=(a+da)x+(b+db)y+c+dc,\\ y'&=(a'+da')x+(b'+db')y+c'+dc'. \end{aligned}$$

Отсюда формулы для преобразования $S_\varepsilon=S_a^{-1}S_{a+da}$ получаются исключеинем x', y'.

Если обозначить через $\overline{x}$, $\overline{y}$ значения x, y, полученные преобразованием S_ε, и воспользоваться соотношением $ab'-a'b=1$, то получим:

$$(S_\varepsilon)\qquad \begin{aligned} \delta x&=\overline{x}-x=b'(xda+ydb+dc)-b(xda'+ydb'+dc'),\\ \delta y&=\overline{y}-y=-a'(xda+dyb+dc)+a(xda'+ydb'+dc'). \end{aligned}$$

Так как правая часть содержит приращения da, db, … только в первой степени, то, совпадая со своей главной частью, она и определяет инфинитезимальное преобразование.

Теперь нетрудно определить компоненты произвольного инфинитезимального преобразования репера. Для этого надо только выделить главную часть бесконечно малого преобразования

$$S_\varepsilon=S_a^{-1}S_{a+da}.$$

Как всякое произведение двух преобразований группы, бесконечно малое преобразование S_ε само принадлежит группе и, следовательно, определяется формулой (1), если туда внести подходящие (бесконечно малые) значения параметров, которые мы обозначаем через ε_k:

$$(S_\varepsilon)\qquad x_i'=\varphi_i(x_1,x_2,\ldots,x_n;\ \varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_r),\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Разлагая правую часть по формуле Маклорена и сохраняя только первый член разложения (главную часть), мы получим для определения соответствующего инфинитезимального преобразования формулу

$$\delta x_i=\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\varepsilon_k}\right)_0\varepsilon_k,\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ r.$$

При этом производные $\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\varepsilon_k}\right)_0$ можно вычислить, дифференцируя общее уравнение (1) с заменой аргументов a_k нулём: $\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\varepsilon_k}\right)_0=\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial a_k}\right)_0$; таким образом эти производные зависят только от переменных x_1, x_2, …, x_n:

$$\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial a_k}\right)_0=\xi_{ik}(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Что же касается величин ε_k, то параметры произведения преобразований могут зависеть только от параметров a_k, a_k+da_k тех преобразований, которые были множителями. Так как мы выбираем только главную часть приращения $x_i'-x_i$, то каждое ε_k будет линейной формой дифференциалов da_k:

$$\varepsilon_k=\omega_k(a,da).$$

Следовательно, наиболее общее инфинитезимальное преобразование группы аналитически представляется формулой

$$\delta x_i=\xi_{ik}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\omega_k(a,da)$$

для координат точки пространства. Таким образом мы снова получим формулу (S_{da}) (стр. 398) с производными $\frac{\partial\varphi_i}{\partial a_k}$ при произвольном значении аргументов a_k, но теперь эти функции от двух рядов переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$ и $a_1,a_2,\ldots,a_r$ разбиты на суммы произведений функций от одних x_i на функции от одних a_k так, что дифференциал δx_i представляется в виде суммы произведений функций $\xi_k(x_i)$ на формы ω_k, зависящие только от параметров a_k и их дифференциалов da_k.

Для произвольной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ инфинитезимальное преобразование имеет вид

$$\delta f = X_k f \cdot \omega_k(a, da), \quad X_k f = \xi_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = 1,2, \ldots, n; \; k = 1,2, \ldots, r.$$

Выражения $X_k f$ мы будем называть, как выше *символами инфинитезимальных преобразований*, а формы $\omega_k(a, da)$ — *компонентами* (относительными) *инфинитезимального преобразования* репера в фундаментальной группе пространства.

Различные инфинитезимальные преобразования данной группы G отличаются между собой значением компонент. Следовательно, компоненты инфинитезимального преобразования группы вполне определяют его.

Пример. *Найти компоненты проективного репера на плоскости.*

Проективный репер (R_a) на плоскости образован тремя точками A_1, A_2, A_3. Каждую точку A_i рассматриваем как аналитическую точку, т. е. совокупность трёх однородных координат геометрической точки A_i.

Проективный репер (R_{a+da}), бесконечно близкий к (R_a), образован точками A'_i, координаты которых по отношению к реперу (R_a) бесконечно мало отличаются от координат точек A_i, образующих единичную матрицу. Сохраняя только главную часть бесконечно малых, мы получим для точек A'_i формулы

$$A'_1\,(1+\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3), \quad A'_2(\omega_2^1, 1+\omega_2^2, \omega_2^3), \quad A'_3(\omega_3^1, \omega_3^2, 1+\omega_3^3),$$

где все $\omega_i^k(a, da)$ — некоторые линейные формы от da_k. При этом, если мы хотим, чтобы определнтель из координат A'_i равнялся единице до бесконечно малых второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 1+\omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ \omega_2^1 & 1+\omega_2^2 & \omega_2^3 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & 1+\omega_3^3 \end{vmatrix} \sim 1+\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3 = 1,$$

то надо положить

$$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3 = 0.$$

По формулам преобразования проективных координат аналитические точки A'_i, т. е. координаты относительно начального репера (R_0), определяются в виде

$$A'_i = (1+\omega_i^i)A_i + \omega_i^{i+1}A_{i+1} + \omega_i^{i+2}A_{i+2},$$

и, следовательно, инфинитезимальное преобразование репера определяется формулами

$$dA_i = \omega_i^k A_k, \qquad i, k = 1, 2, 3,$$

где dA_i есть главная часть разности $A'_i - A_i$.

Если известны координаты A_i в функциях параметров a_k, то эти формулы позволяют легко вычислить компоненты ω_i^k.

Лемма. *Каковы бы ни были два преобразования S_a, S_c, если существуют обратные преобразования S_a^{-1}, S_c^{-1}, то имеет место формула*

$$(S_c S_a)^{-1} = S_a^{-1} S_c^{-1}.$$

Действительно, если обозначить

$$T = (S_c S_a)^{-1},$$

то по определению обратного преобразования произведение T на $S_c S_a$ должно быть тождественным преобразованием:

$$T S_c S_a = 1.$$

Умножая справа на S_a^{-1}, получим

$$T S_c = S_a^{-1}$$

и, умножая ещё справа на S_c^{-1},

$$T = S_a^{-1} S_c^{-1}.$$

Теорема. *Компоненты инфинитезимального преобразования не изменятся, если оба репера (R_a), (R_{a+da}) подвергнуть одновременно одному и тому же преобразованию S_c группы G.*

Действительно, после замены преобразования S_a на $S_c S_a$ и преобразования S_{a+da} на $S_c S_{a+da}$ бесконечно малое преобразование $S_a^{-1}\,S_{a+da}$ примет вид

$$(S_c S_a)^{-1}(S_c S_{a+da}) = S_a^{-1} S_c^{-1} S_c S_{a+da} = S_a^{-1} S_{a+da},$$

где для вычисления $(S_c S_a)^{-1}$ использована предыдущая лемма и $S_c^{-1} S_c$ заменено единицей.

Теорема. *Если два непрерывных семейства реперов (R_u) и (R_v) одной группы G зависят от одного и того же числа параметров $u_1, u_2, \ldots, u_p$ и $v_1, v_2, \ldots, v_p$ и при подходящем взаимно однозначном соответствии между реперами (R_u) и (R_v) относительные компоненты $\omega_i(u, du)$ бесконечно малого преобразования репера (R_u) равняются соответственным компонентам $\omega_i(v, dv)$ преобразования репера (R_v), то существует преобразование той же группы G, которое приведёт к совпадению все реперы (R_u) с соответствующими реперами (R_v).*

Действительно, пусть S_u и S_v переводят начальный репер (R_0) в реперы (R_u) и (R_v). Так как бесконечно малые преобразования $(R_u) \to (R_{u+du})$ и $(R_v) \to (R_{v+dv})$, определяемые равными компонентами $\omega_i(u, du) = \omega_i(v, dv)$, равны, то

$$S_u^{-1} S_{u+du} = S_v^{-1} S_{v+dv}.$$

Если умножить это равенство слева на S_v, справа на S_{u+du}^{-1}:

$$S_vS_u^{-1}S_{u+du}S_{u+du}^{-1}=S_vS_v^{-1}S_{v+dv}S_{u+du}^{-1},$$

и заменить произведения взаимно обратных преобразований единицей:

$$S_{u+du}S_{u+du}^{-1}=1,\quad S_vS_v^{-1}=1,$$

то получим:

$$S_vS_u^{-1}=S_{v+dv}S_{u+du}^{-1}=S_c.$$

Мы обозначили это произведение символом S_c. Как произведение двух преобразований группы G, это — тоже одно из преобразований этой группы. Так как теперь

$$S_v=S_cS_u,\quad S_{v+dv}=S_cS_{u+du},$$

то одно и то же преобразование S_c переводит репер (R_u) в (R_v) и всякий репер (R_{u+du}) в репер (R_{v+dv}).

§ 3. Уравнения структуры

Компоненты инфинитезимального [1] преобразования репера для $S_a^{-1}S_{a+da}$, т. е. формы $\omega_i(a,\ da)$, линейно зависят от дифференциалов параметров, и ранг этой системы форм в точности равняется размерности кольца $\mathfrak{R}[da]$, ибо формы ω_i вполне определяют наиболее общее инфинитезимальное преобразование группы. Отсюда следует, что их можно принять за базис кольца. Поэтому внешний дифференциал $D\omega_i$, как любая квадратичная форма кольца $\mathfrak{R}[da]$, будет выражен через внешние произведения форм ω_i:

$$D\,\omega_i=c_i^{jk}\,[\omega_j\omega_k],\qquad i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ r. \tag{2}$$

Коэффициенты принадлежат полю $\mathfrak{R}$, т. е. являются функциями от параметров $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_r$.

Однако произвольное преобразование S_c группы G не меняет компонент ω_i. В формулах (2) как в левых частях, так и в правых компоненты ω_i после такого преобразования не изменятся, не изменятся и коэффициенты c_i^{jk}. Для репера (R_a) и для преобразованного репера $(R_{a'})$ коэффициенты c_i^{jk} сохранят своё значение.

Так как подходящим преобразованием S_c можно перевести репер (R_a) в любой репер $(R_{a'})$, то c_i^{jk} — абсолютные постоянные.

Уравнения (2) называются *уравнениями структуры группы.*

Например, в афинном пространстве репер (R_a) состоит из вершины трёхгранника A (определяемой радиусом-вектором $\boldsymbol{A}$) и трёх произвольных векторов $\mathbf{e}_i$ (по осям трёхгранника).

---

[1] В гл. III, §§ 5, 6, и в последующих параграфах мы называли инфинитезимальное преобразоваие бесконечно малым, как это встречается в геометрической литературе.

Бесконечно близкий репер (R_{a+da}) определяется приращением радиуса-вектора $\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A}$ и приращениями векторов $\mathbf{e}'_i-\mathbf{e}_i$. Эти разности, как любой вектор пространства, могут быть разложены по некомпланарным векторам $\mathbf{e}_i$. Сохраняя только главные части бесконечно малых разложений, получим инфинитезимальное преобразование репера:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{A}&=\omega^i\mathbf{e}_i,\\ d\mathbf{e}_i&=\omega_i^k\mathbf{e}_k, \end{aligned}\qquad i,\ k=1,\ 2,\ 3. \tag{a}$$

Эти формулы в свою очередь определяют компоненты афинного репера ω^i, ω_i^k через $\mathbf{e}_i$, $\boldsymbol{A}$. Дифференцируя внешним образом уравнения (а), получим

$$D\omega^i\mathbf{e}_i+[d\mathbf{e}_i\omega^i]=0,$$

$$D\omega_i^k\mathbf{e}_k+[d\mathbf{e}_k\omega_i^k]=0$$

или, исключая дифференциалы $d\mathbf{e}_i$ и меняя немые индексы суммирования, как это делалось на стр. 138,

$$\{D\omega^i-[\omega^k\omega_k^i]\}\mathbf{e}_i=0,$$

$$\{D\omega_i^k-[\,\omega_i^j\omega_j^k]\}\mathbf{e}_k=0.$$

Так как векторы $\mathbf{e}_i$ не компланарны, то линейное соотношение должно исчезать тождественно, откуда и получаются уравнения структуры

$$\begin{aligned} D\omega^i&=[\omega^k\omega_k^i],\\ D\omega_i^k&=[\omega_i^j\omega_j^k]. \end{aligned} \tag{2'}$$

Обратно, если формы ω^i, ω_i^k удовлетворяют системе (2′), то система (а) вполне интегрируема (система ковариантов есть алгебраическое следствие системы Пфаффа) и определяет векторы $\boldsymbol{A}$, $\mathbf{e}_i$, т. е. семейство реперов (R_a), а формы ω_i, ω_i^k служат для них компонентами инфинитезимальных преобразоваиий.

Формулы (2′), очевидно, имеют вид уравнений (2).

В проективном пространстве репер состоит из четырёх аналитических точек $\boldsymbol{A}_i$ (вершин тетраэдра), где под аналитической точкой $\boldsymbol{A}$ понимаем совокупность четырёх однородных координат геометрической точки A. Бесконечно малые преобразования репера определяются формулами

$$d\boldsymbol{A}_i=\omega_i^k\boldsymbol{A}_k. \tag{b}$$

Внешнее дифференцирование, в силу линейной независимости точек $\boldsymbol{A}_i$, приводит нас к системе [см. гл. III, (26)]

$$D\omega_i^j=[\omega_i^k\omega_k^j]. \tag{2''}$$

Это — уравнения структуры проективного пространства.

Во всех случаях система, определяющая инфинитезимальное преобразование, в силу уравнений структуры, вполне интегрируема и общий интеграл даёт координаты репера вплоть до его начального положения (R_0).

Это предложение содержит, как частный случай, теорему Дарбу, в силу которой всегда существует движение трёхгранника с двумя параметрами, в котором компонентами инфинитезимальных перемещений служат формы, удовлетворяющие уравнениям Гаусса-Кодацци.

Дифференцируя внешним образом уравнения (2) и исключая внешние дифференциалы $D\omega_j$ с помощью уравнений (2), получим после замены обозначений индексов суммирования, поскольку $c_i^{jk} = -c_i^{kj}$,

$$c_i^{j\gamma} c_j^{\alpha\beta} [\omega_\alpha \omega_\beta \omega_\gamma] = 0,$$

или, собирая подобные члены и приравнивая нулю коэффициенты при произведениях $[\omega_\alpha \omega_\beta \omega_\gamma]$:

$$(3) \qquad c_i^{j\alpha} c_j^{\beta\gamma} + c_i^{j\beta} c_j^{\gamma\alpha} + c_i^{j\gamma} c_j^{\alpha\beta} = 0.$$

Уравнения (3) представляют все условия на коэффициенты структуры $c_i^{jk} = -c_i^{kj}$.

§ 4. Канонический репер многообразия

Будем рассматривать пространство n измерений с фундаментальной группой G и в нём многообразие V p измерений. Можно ли построить в каждой точке многообразия один репер, внутренним образом связанный с многообразием?

Заметим прежде всего, что к каждому реперу (R_a) можно присоединить по определённому закону точку, которую будем называть началом репера. Например, можно присоединить одну из точек, составляющих репер. Совокупность реперов с общим началом A можно, в известном смысле, отождествить с точкой A. Такие реперы зависят, очевидно, от $r-n$ параметров, и компоненты ω_i инфинитезимального преобразования внутри совокупности связаны n линейными соотношениями, так как ω_i зависят только от $r-n$ дифференциалов da. Все эти соотношения содержат только постоянные коэффициенты.

Действительно, пусть они имеют вид

$$\omega_k = A_k^\lambda \omega_\lambda, \quad k = 1, 2, \ldots, n; \ \lambda = n+1, \ldots, r.$$

Если два бесконечно близких репера подвергнуть любому преобразованию группы G, то формы ω_k, ω_λ не изменятся, а следовательно, коэффициенты A_k^λ не зависят ни от точки A, ни от рассматриваемых реперов, т. е. это — абсолютные постоянные.

Выполняя над формами ω_i подстановку с постоянными коэффициентами, мы сведём эти уравнения к виду

$$(4) \qquad \omega_k = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Обратно, если система (4) удовлетворена, то начало репера A остаётся неподвижным. Следовательно, постоянные значения координат произвольной точки пространства определяют n первых интегралов системы (4). Интегральное многообразие $\mathfrak{M}_n$ этой системы зависит от n произвольных постоянных, и система вполне интегрируема.

Дифференцируя уравнения (4) и пользуясь уравнениями структуры (2), мы сейчас же получим:

$$c_k^{\lambda\mu} [\omega_\lambda \omega_\mu] = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n; \ \lambda, \mu = n+1, \ldots, r.$$

Следовательно, все $c_k^{\lambda\mu} = 0$, что характеризует построение уравнений структуры пространства n измерений.

Присоединим к каждой точке A многообразия V семейство реперов с началом A. Эти реперы — *реперы нулевого порядка* — зависят от $r-n$ параметров, которые не перемещают точки A и которые мы будем называть *вторичными*.

Например, если дана поверхность в эвклидовом пространстве, то $n = 3$, $p = 2$, а число параметров группы движений пространства равно $r = 6$. Следовательно, при неподвижности начала A формы ω_i, ω_{ik} связаны $n = 3$ соотношениями.

В эвклидовом пространстве можно выбрать репер (R_a) в виде прямоугольного трёхгранника. Тогда естественно присоединить к нему в качестве начала A его вершииу. Уравнения (4) примут вид

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = 0.$$

Реперы нулевого порядка зависят от $r - n = 3$ вторичных параметров.

Так как формы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ равны нулю, если точка A остаётся неподвижной, то они принадлежат подкольцу дифференциалов от p *главных параметров*, определяющих положение точки на многообразие V, и будут называться *главными компонентами*. Следовательно, мы имеем соотношения

$$(5) \qquad \omega_g = a_{gj}\omega_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, p; \ g = p+1, \ldots, n,$$

где коэффициенты a_{gj} могут зависеть и от главных и от вторичных параметров. Выбираем вторичные параметры так, чтобы дать определённые числовые значения возможно большему числу коэффициентов a_{gj}. Остальные коэффициенты сделаются тогда функциями только от главных параметров и образуют для многообразия V *дифференциальные инварианты первого порядка*, ибо это — функции от координат текущей точки многообразия и их производных первого порядка, которые не зависят от выбора системы отнесения. Полученные реперы образуют *семейство реперов первого порядка*.

Для поверхности в эвклидовом пространстве формы ω_1, ω_2, ω_3, принадлежащие подкольцу $\mathfrak{R}[du, dv]$ двух главных параметров (криволинейных координат на поверхности), должны быть связаны одним соотношением. Уравнение (5) приводится к простейшему виду

$$\omega_3 = 0,$$

если выбрать вторичные параметры так, чтобы ось I_3 репера была перпендикулярна к касательной плоскости и, следовательно, вектор $d\boldsymbol{A}$ не имел бы проекции на третью ось.

Так как все коэффициенты a_{gj} приведены к нулю, то поверхность не имеет дифференциальных инвариантов первого порядка.

Если реперы первого порядка зависит от ρ_1 параметров $(0<\rho_1<r-n)$, то компоненты инфинитезимального преобразования репера первого порядка $\omega_{n+1}, \omega_{n+2}, \ldots, \omega_r$ при закреплённой точке A будут связаны $r-n-\rho_1$ соотношениями с коэффициентами, зависящими от инвариантов первого порядка. Выполняя линейную подстановку, мы их запишем в виде

$$\omega_{n+1}=\omega_{n+2}=\ldots=\omega_{n_1}=0, \qquad n_1=r-\rho_1.$$

Следовательно, при изменении главных параметров имеем:

$$(6) \qquad \omega_h=a_{hj}\omega_j, \quad j=1, 2, \ldots, p; \; h=n+1, n+2, \ldots, n_1;$$

все формы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n_1}$ являются главными компонентами инфинитезимальных преобразований репера первого порядка (*главные компоненты первого порядка*). Коэффициенты a_{hj} зависят и от главных и от вторичных параметров. Применяя к ним тот же процесс, получим *реперы второго порядка*. После этого преобразования все те коэффициенты a_{hj}, которые действительно будут содержать главные параметры, представляют *дифференциальные инварианты второго порядка*. Число главных компонент инфинитезимальных преобразований этих реперов (*главные компоненты второго порядка*) увеличилось, ибо число *вторичных параметров второго порядка* меньше, чем число *вторичных параметров первого порядка*, а, следовательно, число компонент, линейно зависящих от дифференциалов этих параметров, уменьшилось.

В нашем примере поверхности после выбора нормали в качестве третьей оси трёхгранника при закреплённой точке A он может только вращаться около третьей оси. Следовательно, для реперов первого порядка в данной точке A формы

$$\omega_{13}=0, \quad \omega_{23}=0$$

равны нулю, а при изменении главных параметров имеют вид

$$\omega_{13}=a_{11}\omega_1+a_{12}\omega_2.$$
$$\omega_{23}=a_{21}\omega_1+a_{22}\omega_2.$$

Выбирая вторичный параметр (поворачивая трёхгранник около нормали) так, чтобы две первые оси имели главные направления, мы приведём a_{12}, a_{21} к нулю, ибо, например, по формулам Родрига для главных направлений вектор dI_3 параллелен вектору $d\boldsymbol{A}$.

Нетрудно заметить, что выбранный репер характеризуется уравнениями

$$[\omega_{13}\omega_1]=0, \quad [\omega_{23}\omega_2]=0,$$

Оставшиеся коэффициенты a_{11}, a_{22}—дифференциальные инварианты второго порядка, именно: главные кривизны поверхности, ибо кривизна нормального сечения

$$-\frac{1}{R}=-\frac{d\boldsymbol{I}_3 d\boldsymbol{A}}{dA^2}=\frac{\omega_{13}\omega_1+\omega_{23}\omega_2}{(\omega_1)^2+(\omega_2)^2}=\frac{a_{11}(\omega_1)^2+a_{22}(\omega_2)^2}{(\omega_1)^2+(\omega_2)^2}$$

для $\omega_2=0$ или $\omega_1=0$ равняется соответственно $-a_{11}$ или $-a_{22}$.

Приведение репера к каноническому виду можно вести ещё иначе. Вместо того чтобы рассматривать уравнения (6), можно продифференцировать дифференциальные инварианты первого порядка K_α. Так как инварианты K_α суть функции только главных параметров, то dK_α принадлежит подкольцу $\mathfrak{R}[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p]$ и, следовательно,

$$(7) \qquad dK_\alpha=a'_{\alpha j}\omega_j, \quad j=1, 2, \ldots, p; \; \alpha=1, 2, \ldots, m_1,$$

где m_1—число дифференциальных инвариантов первого порядка Коэффициенты $a'_{\alpha j}$ могут зависеть не только от главных, но и от вторичных параметров; к ним можно применить прежний процесс.

Применяя первый или второй метод приведения репера к каноническому виду, т. е. отправляясь от линейных зависимостей между компонентами инфинитезимальных преобразований реперов $(\nu+1)$-го порядка

$$(6') \qquad \omega_h=a_{hj}\omega_j, \qquad j=1, 2, \ldots, p; \; n_\nu<h\leqslant n_{\nu+1},$$

или от уравнений, которые линейно выражают дифференциалы от дифференциальных инвариантов $K_\alpha^{(\nu)}$ порядка ν:

$$(7') \qquad dK_\alpha^{(\nu)}=a_{\alpha j}^{(\nu)}\omega_j, \qquad j=1, 2, \ldots, p; \; \alpha=m_{\nu-1}+1, \ldots, m_\nu,$$

мы последовательно понижаем число вторичных параметров репера, выбирая их так, чтобы дать определённые числовые значения возможно большему числу коэффициентов a_{hj} и $a_{\alpha j}^{(\nu)}$. Могут представиться две возможности:

1. Мы исчерпаем все вторичные параметры и, следовательно, закрепим в каждой точке многообразия V один репер, который по определению будет *каноническим*.

2. Наш процесс приведения репера к каноническому виду остановится, не дойдя до конца. Это будет иметь место при выполнении двух условий:

a) для реперов некоторого порядка q все коэффициенты a_{hj}, $a_{\alpha j}^{(q)}$ не зависят от вторичных параметров; следовательно, реперы $(q+1)$-го порядка совпадают с реперами порядка q;

b) коэффициенты $a_{\alpha j}^{(q)}$, которые при выполнении первого условия будут дифференциальными инвариантами $(q+1)$-го порядка, при дифференцировании приводят к линейным зависимостям того же типа, т. е. коэффициенты в разложении их дифференциалов по формам

$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ будут тоже дифференциальными инвариантами. Так как число независимых дифференциальных инвариантов ограничено (не больше размерности многообразия V), то они все исчерпаются, и новые инварианты будут функциями от предыдущих.

Многообразия с неопределённым каноническим репером.

Следующая теорема покажет, что в последнем случае многообразие не допускает единого канонического репера, ибо существует группа преобразований, которая переводит каждый репер порядка q в любой другой репер того же порядка, сохраняя неизменным многообразие.

Теорема. *Если последовательной специализацией получены реперы порядка q, причём*

a) *реперы порядка $q+1$ совпадают с реперами порядка q,*

b) *дифференциальные инварианты порядка $q+1$ — функции от предыдущих, то для каждой пары точек A и A' с одинаковыми значениями инвариантов порядка $k \leqslant q$ и реперами (R) и (R') порядка q преобразование $(R) \rightarrow (R')$ оставляет многообразие V инвариантным. Многообразие допускает группу преобразований g, порядок которой больше числа вторичных параметров порядка q на разность между размерностью многообразия p и числом независимых дифференциальных инвариантов.*

Если система

$$\text{(a)} \qquad \omega_h = a_{hj}\omega_j, \quad j=1, 2, \ldots, p; \; h=p+1, \ldots, n_q,$$

содержит все линейные соотношения между компонентами инфинитезимальных преобразований реперов порядка q, то подгруппа g_q, переводящая при неподвижном начале A один репер порядка q в другой, зависит от $r-n_q$ параметров. Если реперы $(q+1)$-го порядка совпадают с реперами порядка q, то все коэффициенты a_{hj} не зависят от вторичных параметров и являются дифференциальными инвариантами.

Обозначим через $\omega_i(u, du)$, $\omega_i(v, dv)$ компоненты инфинитезимальных преобразований реперов (R) и (R') нашей теоремы. Среди уравнений системы

$$\text{(b)} \qquad \omega_i(u, du) = \omega_i(v, dv), \qquad i=1, 2, \ldots, r,$$

найдётся $n_q - p$ уравнений, которые будут следствиями других уравнений этой системы в силу линейных зависимостей (a), ибо по условию теоремы все дифференциальные инварианты, в том числе все коэффициенты a_{hj}, имеют в точках A, A' одни и те же значения.

Дифференцируя внешним образом уравнения (b), а также уравнения (a), следствиями которых они отчасти являются, мы придём к системе ковариантов, которая будет тождественно удовлетворена в силу уравнений системы. Действительно, внешние дифференциалы от формы ω_i с помощью уравнений структуры (2) будут выражены в виде суммы с постоянными коэффициентами c_i^{jk} из внешних произведений форм ω_i, причём дифференциалы от коэффициентов a_{hj}, как дифференциалы от дифференциальных инвариантов порядка q, линейно зависят от ω_j с коэффициентами $a_{\alpha j}^{(q+1)}$ в виде дифференциальных инвариантов $(q+1)$-го порядка. Так как все такие инварианты являются функциями от предыдущих, а те принимают в точках A и A' одни и те же числовые значения, то все ковcovarianты системы (b) являются алгебраическими следствиями самой системы. Система (b), следовательно, вполне интегрируема. Общий интеграл содержит $r-(n_q-p)$ произвольных постоянных по числу независимых уравнений системы. Эти постоянные должны, однако, удовлетворять системе m_q конечных уравнений по числу независимых дифференциальных инвариантов (до порядка q включительно). Они не изменяют числа уравнений Пфаффа, ибо дифференциалы от инвариантов в силу уравнений (7') являются следствием системы (b), но уменьшают число произвольных постоянных. Таким образом общее решение будет зависеть только от $r-n_q+p-m_q$ произвольных постоянных, где m_q — число всех независимых дифференциальных инвариантов.

Каждое решение $v=\varphi(u)$ системы (b) устанавливает соответствие между точками $A \rightarrow A'$ или лучше между реперами $(R) \rightarrow (R')$ таким образом, что компоненты инфинитезимальных преобразований их соответственно равны. По теореме § 2 о двух семействах реперов с соответственно равными компонентами существует преобразование фундаментальной группы

$$S_c = S_v S_u^{-1},$$

которое приводит все реперы (R_u) к совпадению с реперами (R_v). Так как при этом начало A каждого репера (R_u) совпадает с началом A' второго, то многообразие V переходит само в себя. Совокупность всех таких преобразований образует подгруппу g, которая зависит от $(r-n_q)+(p-m_q)$ параметров по числу произвольных постоянных общего решения $v=\varphi(u)$ системы (b). Так как $r-n_q$ есть число вторичных параметров репера порядка q, p — размерность многообразия V и m_q — число независимых дифференциальных инвариантов его, то порядок группы g удовлетворяет условиям теоремы.

Канонический репер многообразия по существу остаётся неопределённым, ибо существуют преобразования фундаментальной группы G пространства, именно: все преобразования её подгруппы g, которые, сохраняя многообразие неизменным, переводят всякий репер порядка q в любой другой репер того же семейства реперов порядка q в той же точке A или во всякой другой точке A многообразия V, удовлетворяющей необходимому требованию равенства m_q дифференциальных инвариантов.

§. 5. Выбор канонического репера

Самый процесс выбора вторичных параметров для выделения канонического репера чрезвычайно облегчается уравнениями структуры.

Чтобы определить, например, реперы второго порядка, дифференцируем внешним образом уравнения (6) и (7), используя уравнения структуры, и исключаем ω_h и dK_α с помощью уравнений (6), (7), а также все предыдущие главные компоненты (первого порядка) ω_g $(g\leqslant n)$, если они были. Мы получим уравнения вида

$$\begin{aligned}(8)\qquad &[da_{hj}+A^{i}_{hj}\omega_i+B^{\mu}_{hj}\omega_\mu,\ \omega_j]=0, && i,j=1,2,\ldots,p,\\ & && h=n+1,\ldots,n_1,\\ &[da'_{\alpha j}+C^{i}_{\alpha j}\omega_i+D^{\mu}_{\alpha j}\omega_\mu,\ \omega_j]=0, && \mu=n_1+1,\ldots,r,\end{aligned}$$

где коэффициенты A, B, C, D — линейные функции от a_{hj}, $a'_{\alpha j}$ и, кроме того, содержат коэффициенты структуры.

Например, для поверхности в эвклидовом пространстве, дифференцируя внешним образом уравнение

$$\omega_3=0,$$

имеем

$$[\omega_1\omega_{13}]+[\omega_2\omega_{23}]=0,$$

откуда по лемме Картана получаем уравнения (6) в виде

$$\text{(a)}\qquad \begin{aligned}\omega_{13}&=\alpha\omega_1+\beta\omega_2,\\ \omega_{23}&=\beta\omega_1+\gamma\omega_2.\end{aligned}$$

Дифференцируя ещё раз и исключая ω_{13}, ω_{23}, получим уравнения (8):

$$\text{(b)}\qquad \begin{aligned}&[d\alpha-2\beta\omega_{12},\omega_1]+[d\beta+(\alpha-\gamma)\omega_{12},\ \omega_2]=0,\\ &[d\beta+(\alpha-\gamma)\omega_{12},\omega_1]+[d\gamma+2\beta\omega_{12},\ \omega_2]=0.\end{aligned}$$

Выписывая значение квадратичных форм (8) для двух систем дифференцирований

$$1)\ \ \omega_1(d)=1,\quad \omega_2=\ldots=\omega_p=0,\quad \omega_\mu(d)=\omega_\mu$$

и

$$2)\ \ \omega_\mu(\delta)=\pi_\mu,\quad \omega_1=\ldots=\omega_p=0,$$

получим уравнения

$$(9)\qquad \begin{aligned}&\delta a_{h1}+B^{\mu}_{h1}\pi_\mu=0,\\ &\delta a'_{\alpha 1}+D^{\mu}_{\alpha 1}\pi_\mu=0\end{aligned}$$

и аналогичные для a_{hj}, $a'_{\alpha j}$, которые дают закон изменения коэффициентов a_{hj}, $a'_{\alpha j}$ под действием преобразований подгруппы g_1, сохраняющей реперы первого порядка, т. е. получим инфинитезимальные преобразования подгруппы g_1 над коэффициентами a_{hj}, $a'_{\alpha j}$.

В нашем примере для поверхности в эвклидовом пространстве уравнения (b) приведут к уравнениям

$$\text{(c)}\qquad \begin{aligned}\delta\alpha-2\beta\pi_{12}&=0,\\ \delta\beta+(\alpha-\gamma)\pi_{12}&=0,\\ \delta\gamma+2\beta\pi_{12}&=0,\end{aligned}$$

где, например, первое уравнение получается, если первое уравнение (b) написать в виде билинейной формы для двух линейных элементов

$$1)\ \ \omega_1=1,\ \omega_2=0,\quad \omega_{12}(d)=\omega_{12},$$

$$2)\ \ \omega_1=\omega_2=0,\qquad \omega_{12}(\delta)=\pi_{12}.$$

В пространстве W коэффициентов a_{hj}, $a'_{\alpha j}$ эти уравнения позволяют построить траекторию $v(b)$, которую описывает какая-нибудь точка b этого пространства под действием преобразований подгруппы g_1 с компонентами инфинитезимальных преобразований π_μ.

Проведём теперь в пространстве W простейшее многообразие w (может быть, составленное из нескольких частей), которое пересекало бы каждую траекторию $v(b)$ в одной и только одной точке. Тогда каждая точка b пространства W будет иметь на w сходственную точку и только одну, именно: точку пересечения многообразия w с траекторией $v(b)$. Эта точка соответствует определённому выбору вторичных параметров, который и определяет выбор реперов второго порядка.

В нашем примере в пространстве W коэффнциентов α, β, γ траектории $v(b)$ определяются системой уравнений (c), где можно положить $\pi_{12}=d\tau$, ибо форма от одного параметра всегда есть полный дифференциал:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\tau}=2\beta,\quad \frac{\partial\beta}{\partial\tau}=\gamma+\alpha,\quad \frac{\partial\gamma}{\partial\tau}=-2\beta.$$

Интегральные кривые суть:

$$\begin{aligned}\alpha&=C_1\sin 2\tau-C_2\cos 2\tau+C_3,\\ \beta&=C_1\cos 2\tau+C_2\sin 2\tau,\\ \gamma&=-C_1\sin 2\tau+C_2\cos 2\tau+C_3.\end{aligned}$$

Многообразие w может быть построено различными способами: можно взять $\alpha=0$, или $\gamma=0$, или $\beta=0$, и т. д. Нельзя брать $\alpha+\gamma=0$, ибо эта плоскость будет геометрическим местом кривых $v(b)$. По соображениям симметрии естественнее выбрать $\beta=0$. Чтобы точка пересечения $v(b)$ с многообразием w была определённой, лучше взять $\beta=0$ и $\alpha>\gamma$. Полученный репер будет построен на главных касательиых.

Такой выбор неопределёнен, если всегда $\alpha=\gamma$. Два крайиих уравнения (c) дают

$$\delta(\alpha-\gamma)=4\beta\pi_{12},$$

т. е. при $\pi_{12}\neq 0$ непременно $\beta=0$. Так как система (c) принимает теперь вид

$$\delta\alpha=\delta\beta=\delta\gamma=0,$$

то α, $\beta=0$, γ — инвариантны, и репер второго порядка совпадает с репером первого порядка. Мы имеем случай, предусмотренный теоремой предыдущего параграфа о многообразии с неопределённым каноническим репером. Поверхность — сфера, ибо кривизна всякого нормального сечения поверхности (стр. 260)

$$-\frac{1}{R}=\frac{\omega_{13}\omega_1+\omega_{23}\omega_2}{(\omega_1)^2+(\omega_2)^2}$$

теперь будет равна α. Существует группа движений g, которая оставляет поверхность инвариантной. Согласно цитированной теореме, порядок группы g равен сумме числа вторичных параметров (здесь одна форма π_{12}, т. е. один вторичный параметр) и числа p (две независимые переменные на поверхности) минус число независимых дифференциальных инвариантов (один инвариант $\alpha=\gamma$, ибо $\beta=0$). Легко доказать, что эта группа второго порядка есть группа вращений около центра сферы.

Возвращаясь к общей теории, заметим, что формулы (6) и (7) дадут после выбора вторичных параметров выражения главных компонент второго порядка и дифференциалов от инвариантов первого порядка через главные формы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ и инварианты второго порядка, а уравнения (9), если там положить $\delta a_{kj}=\delta a'_{\alpha j}=0$, дадут соотношения на формы π_μ, которые выделят компоненты инфинитезимальных преобразований репера подгруппы g_2, которые оставляют точку A неподвижной и не выводят репер за пределы семейства реперов второго порядка.

Внося во второе уравнение (c) $\beta=0$ и отвлекаясь от случая сферы $\beta=0$, $\alpha=\gamma$, получим немедленно: $\pi_{12}=0$, т. е. все вторичные параметры будут закреплены. Следовательно, репер второго порядка будет каноническим.

После того как вторичные параметры закреплены и репер становится каноническим, все компоненты становятся главными, ибо они теперь зависят только от дифференциалов главных параметров. Само собой понятно, что главные компоненты $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ должны удовлетворять уравнениям структуры.

§ 6. Задача. Канонический трёхгранник конгруэнции прямых в эвклидовом пространстве

Построить канонический трёхгранник конгруэнции прямых в эвклидовом пространстве.

Присоединим к каждому лучу конгруэнции прямоугольный трёхгранник, третья ось которого совпадала бы с лучом конгруэнции:

$$\begin{aligned} dA&=\omega_i I_i,\\ dI_i&=\omega_{ik}I_k, \end{aligned}\qquad \omega_{ik}=-\omega_{ki};\ i, k=1, 2, 3. \tag{10}$$

Если луч стоит на месте, то $\omega_1=\omega_2=\omega_{13}=\omega_{23}=0$; следовательно, эти формы принадлежат подкольцу дифференциалов от двух главных параметров, а в таком кольце между четырьмя формами должны быть две линейные зависимости.

Если формы ω_{13}, ω_{23} линейно зависимы, то линейный элемент сферического изображения конгруэнции

$$(dI_3)^2=(\omega_{13})^2+(\omega_{23})^2$$

вырождается, а конгруэнция распадается на ∞^1 цилиндров, ибо вдоль линии $\omega_{13}=0$ луч конгруэнции остаётся сам себе параллелен. Оставляя этот случай в стороне, мы можем считать $[\omega_{13}\omega_{23}]\neq 0$ и основные линейные соотношения конгруэнции разрешить относительно ω_1, ω_2:

$$\begin{aligned} \omega_1&=\alpha\omega_{13}+\beta\omega_{23},\\ \omega_2&=\alpha'\omega_{13}+\beta'\omega_{23}. \end{aligned}\tag{11}$$

Дифференцируя эти уравнения внешним образом, получим

$$\begin{aligned} &[d\alpha-(\alpha'+\beta)\,\omega_{12}+\omega_3,\ \omega_{13}]+[d\beta+(\alpha-\beta')\,\omega_{12},\ \omega_{23}]=0,\\ &[d\alpha'+(\alpha-\beta')\,\omega_{12},\ \omega_{13}]+[d\beta'+(\alpha'+\beta)\,\omega_{12}+\omega_3,\ \omega_{23}]=0, \end{aligned}\tag{12}$$

откуда обычными рассуждениями получим:

$$\begin{aligned} &\delta\alpha=(\alpha'+\beta)\,\pi_{12}-\pi_3, && \delta\beta'=-(\alpha'+\beta)\,\pi_{12}-\pi_3,\\ &\delta\alpha'=(\beta'-\alpha)\,\pi_{12}, && \delta\beta=(\beta'-\alpha)\,\pi_{12}, \end{aligned}\tag{13}$$

и

$$\delta(\alpha+\beta')=-2\pi_3. \tag{a}$$

Так как формы π_{12} и π_3 линейно независимы (поворот трёхгранника около луча и перенос вершины A вдоль луча), то можно положить $\pi_{12}=0$, сохраняя π_3 отличным от нуля; а поскольку π_3 теперь зависит от одного вторичного параметра, то при подходящем выборе его имеем $\pi_3\doteq d\tau$ и, интегрируя (a), получим:

$$\alpha+\beta'=-2\tau+C.$$

При всяком значении C можно выбрать $\tau=\frac{1}{2}C$ и тогда

$$\alpha+\beta'=0.$$

Обратно, если вторичные параметры выбраны так, что это равенство имеет место, то из (a) имеем:

$$\pi_3=0.$$

Теперь из (13) следует:

$$\delta(\alpha-\beta')=2(\alpha'+\beta)\,\pi_{12},\quad \delta(\alpha'+\beta)=-2(\alpha-\beta')\,\pi_{12}. \tag{b}$$

Так как теперь остался только один вторичный параметр, то можно положить $\pi_{12}=d\varphi$; интегрируя систему (b) в этом предположении, получим:

$$\alpha-\beta'=C_1\cos 2\varphi+C_2\sin 2\varphi.$$

Следовательно, выбирая $\operatorname{tg}2\varphi=-\frac{C_1}{C_2}$, приведём $\alpha-\beta'$ к нулю.

Обратно, если

$$\alpha=\beta'=0,$$

то $\pi_{12}=0$, и все вторичные параметры закреплены.

Коэффициенты α' и β — дифференциальные инварианты конгруэнции.

Так как теперь для произвольной точки луча $F = A + tI_3$ имеем

$$dF = (\beta\omega_{23} - t\omega_{13}) I_1 + (\alpha'\omega_{13} - t\omega_{23}) I_2 + (\omega_3 + dt) I_3,$$

то при условии

$$t\omega_{13} - \beta\omega_{23} = 0,$$
$$\alpha'\omega_{13} - t\omega_{23} = 0$$

луч касается в точке $F = A + tI_3$ поверхности (F). Отсюда

$$F = A \pm \sqrt{\alpha'\beta}\, I_3$$

суть фокусы луча и A — его центр, а

$$\alpha' (\omega_{13})^2 - \beta (\omega_{23})^2 = 0$$

— уравнение развёртывающихся поверхностей.

§ 7. Задача. Канонический трёхгранник комплекса прямых в эвклидовом пространстве

В эвклидовом пространстве семейство реперов состоит из всех прямоугольных трёхгранников.

Присоединим к каждому лучу комплекса все трёхгранники $AI_1I_2I_3$, третья ось которых совпадает с лучом. Они образуют семейство трёхгранников нулевого порядка. Бесконечно малые перемещения трёхгранника определяются уравнениями (10):

$$dA = \omega_i I_i, \quad dI_i = \omega_{ik} I_k, \qquad \omega_{ik} = -\omega_{ki}, \; i, k = 1, 2, 3.$$

Луч комплекса стоит на месте, если

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_{31} = \omega_{32} = 0. \tag{14}$$

Эта система вполне интегрируема, как легко заметить, если продифференцировать уравнения (14) внешним образом, и её интегралы служат координатами произвольной прямой пространства. Так как луч комплекса зависит только от трёх независимых параметров, то четыре координаты луча связаны одним уравнением, а четыре формы (14) удовлетворяют одному линейному соотношению. Если это соотношение не содержит форм ω_1, ω_2, то линейное соотношение между ω_{31} и ω_{32} покажет, что сферическое изображение комплекса вырождается в линию. Исключая этот случай, мы можем написать основное соотношение в виде

$$\omega_2 = a\omega_{31} + b\omega_{32} + c\omega_1. \tag{15}$$

Дифференцируя это уравнение внешним образом, получим:

$$\begin{gathered}[da + (ac - b)\omega_{12} + c\omega_3, \omega_{31}] + \\ + [db + (a + bc)\omega_{12} - \omega_3, \omega_{32}] + [dc + (c^2 + 1)\omega_{12}, \omega_1] = 0.\end{gathered} \tag{16}$$

Присвоим символ дифференцирования δ изменению только вторичных параметров и обозначим $\omega_{12}(\delta) = \pi_{12}$, $\omega_3(\delta) = \pi_3$. Присвоим символ дифференцирования d изменению только главных параметров, сохраняя обозначение $\omega_{ik}(d) = \omega_{ik}$. Выписывая квадратичную форму (16) для двух линейных элементов: одного, определяемого формами π_{ik}, т. е. $\omega_{31} = \omega_{32} = \omega_1 = 0$, и другого, определяемого нулевыми значениями форм ω_{31}, ω_{32}, ω_1, кроме одной, по очереди первой, второй или третьей, мы получим уравнения

$$\begin{aligned}\delta a &= (b - ac)\pi_{12} - c\pi_3, \\ \delta b &= -(a + bc)\pi_{12} + \pi_3, \\ \delta c &= -(c^2 + 1)\pi_{12},\end{aligned} \tag{16'}$$

которые определяют бесконечно малые преобразования коэффициентов a, b, c из той подгруппы g фундаментальной группы пространства G, которая сохраняет третью ось трёхгранника неподвижной.

Подгруппа g зависит от двух параметров, определяющих перенос вершины A вдоль третьей оси и поворот трёхгранника около неё. Следовательно, формы π_{12}, π_3 линейно независимы. Мы можем положить $\pi_{12} = 0$, сохраняя π_3 независимой (перенос вершины A вдоль оси). Это преобразование транзитивно и меняет b по формуле

$$\delta b = \pi_3,$$

придавая этому коэффициенту любые значения. Выбирая подходящее положение вершины A на луче, мы приведём b к нулю. Тогда второе уравнение (16′) даст линейное соотношение на формы π_{12}, π_3:

$$\pi_3 = a\pi_{12},$$

которое показывает, что после закрепления одного вторичного параметра преобразования оставшейся подгруппы g' будут зависеть только от одного параметра. Одну из форм, например π_{12}, мы можем считать независимой.

Последнее уравнение (16′)

$$\delta \operatorname{arc\,tg} c = -\pi_{12}$$

показывает, что преобразования транзитивной подгруппы g' меняют $\operatorname{arc\,tg} c$, придавая ему любое значение. Мы можем привести $\operatorname{arc\,tg} c$ к нулю и положить $c = 0$. Тогда уравнения (16′) дадут не только $\pi_{12} = \pi_3 = 0$, но и $\delta a = 0$.

Основное соотношение (15) примет вид

$$\omega_2 = a\omega_{31}. \tag{15'}$$

Так как $\delta a = 0$ и, следовательно, при изменении вторичных параметров a не меняется, то коэффициент a становится инвариантом [*кривизна* [1]) комплекса].

Полученный трёхгранник (первого порядка) вполне закреплён. Вершина A называется *центром* [2]) луча, первая ось — *главной нормалью*, вторая — *бинормалью* [1]).

Для какой-нибудь точки

$$M = A + tI_3$$

на луче имеем:

$$dM = (\omega_1 + t\omega_{31}) I_1 + (a\omega_{31} + t\omega_{32}) I_2 + (\omega_3 + dt) I_3.$$

Если луч описывает развёртывающуюся поверхность, а точка M — ребро возврата её, то вектор dM параллелен вектору I_3 и, значит,

$$\omega_1 + t\omega_{31} = 0, \quad a\omega_{31} + t\omega_{32} = 0.$$

С другой стороны, нормаль к развёртывающейся поверхности, как бинормаль ребра возврата, определяется векторным произведением

$$I_3 \times dI_3 = \omega_{31} I_2 - \omega_{32} I_1$$

и, следовательно, образует с главной нормалью комплекса I_1 угол φ, определяемый формулой

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\omega_{31}}{\omega_{32}} = \frac{t}{a}.$$

Эта формула аналогична формуле Шаля распределения нормалей к линейчатой поверхности вдоль её образующей, и кривизна комплекса занимает место параметра распределения. При перемещении точки M вдоль луча нормаль поворачивается на 180°. В центре $t = 0$ она совпадает с главной нормалью комплекса.

§ 8. Задача. Канонический трёхгранник поверхности в афинном пространстве

Мы можем сразу же ограничить произвол выбора координатных векторов $\mathbf{e}_i$, потребовав, чтобы скалярное произведение их равнялось единице (эквиафинное преобразование):

$$(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) = 1.$$

Дифференцируя это тождество и пользуясь уравнениями инфинитезимальных преобразований репера

$$dA = \omega^i \mathbf{e}_i, \quad d\mathbf{e}_i = \omega_i^k \mathbf{e}_k, \tag{17}$$

получим:

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0. \tag{a}$$

Кроме того, естественно расположить два вектора $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ в касательной плоскости поверхности, а третий $\mathbf{e}_3$ — вне её. Тогда все перемещения dA:

$$dA = \omega^i \mathbf{e}_i, \qquad i = 1, 2, 3,$$

будут лежать в плоскости векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и

$$\omega^3 = 0. \tag{18}$$

Мы получаем таким образом реперы первого порядка.

Дифференцируя уравнение (18) внешним образом, имеем

$$[\omega^1 \omega_1^3] + [\omega^2 \omega_2^3] = 0,$$

откуда по лемме Картана

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= \alpha\omega^1 + \beta\omega^2, \\ \omega_2^3 &= \beta\omega^1 + \gamma\omega^2. \end{aligned} \tag{19}$$

Новое дифференцирование даёт:

$$\begin{aligned} &[d\alpha - 2\beta\omega_1^2 + \alpha(\omega_3^3 - 2\omega_1^1), \ \omega^1] + [d\beta - \alpha\omega_2^1 - \gamma\omega_1^2 + \\ &\qquad\qquad + \beta(\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2), \ \omega^2] = 0, \\ &[d\beta - \alpha\omega_2^1 - \gamma\omega_1^2 + \beta(\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2), \ \omega^1] + [d\gamma - 2\beta\omega_2^1 + \\ &\qquad\qquad + \gamma(\omega_3^3 - 2\omega_2^2), \ \omega^2] = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Выписывая значения этих форм для двух линейных элементов

$$1)\ \omega^1(d) = 1, \ \omega^2(d) = 0, \quad 2)\ \omega^1(\delta) = \omega^2(\delta) = 0, \ \omega_i^k(\delta) = \pi_i^k$$

или

$$1)\ \omega^1(d) = 0, \quad \omega^2(d) = 1, \quad 2)\ \omega^1(\delta) = \omega^2(\delta) = 0, \ \omega_i^k(\delta) = \pi_i^k$$

получим

$$\begin{aligned} \delta\alpha &= 2\beta\pi_1^2 + \alpha(2\pi_1^1 - \pi_3^3), \\ \delta\beta &= \alpha\pi_2^1 + \gamma\pi_1^2 + \beta(\pi_1^1 + \pi_2^2 - \pi_3^3), \\ \delta\gamma &= 2\beta\pi_2^1 + \gamma(2\pi_2^2 - \pi_3^3), \end{aligned} \tag{21}$$

где π_1^2, π_2^1 — значения форм ω_i^k при дифференцировании по вторичным параметрам.

Нетрудно заметить, что при $\beta \neq 0$ и подходящем выборе вторичных параметров можно привести α и γ к нулю.

---

[1]) Haak, Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe, Math. Zeitschrift 40, 1935, стр. 560, 703.

[2]) Zindler, Liniengeometrie, ч. II, 1906.

Действительно, из формул (19) следует, что $\pi_1^3 = \pi_2^3 = 0$, а единственные формы, не обращающиеся в нуль при $\omega^1 = \omega^2 = 0$, суть формы ω_1^2, ω_2^1, ω_3^1, ω_3^2, ω_i^i, связанные уравнением (a), следовательно, всего шесть линейно независимых форм. С другой стороны, мы можем каждую из первых двух осей поворачивать в касательной плоскости (два параметра) и независимо от этого произвольно выбирать третью ось (ещё два параметра). Наконец, можно произвольно менять длину двух векторов (ещё два параметра). Следовательно, при закреплённой точке A репер зависит от шести параметров. Значит, все шесть форм π_1^2, π_2^1, π_3^1, π_3^2, π_1^1, π_2^2 линейно независимы. Полагая пять из них равными нулю $\pi_2^1 = \pi_3^1 = \pi_3^2 = \pi_i^i = 0$, мы можем считать, что π_1^2 — произвольная форма от одного параметра; можно положить, например, $\pi_1^2 = \delta\tau$. Уравнения (21) примут тогда вид

$$\delta\alpha = 2\beta\,\delta\tau, \quad \delta\beta = \gamma\,\delta\tau, \quad \delta\gamma = 0,$$

откуда

$$\alpha = \gamma\tau^2 + C_1\tau + C_2.$$

Каковы бы ни были постоянные (в данной точке A) величины γ, C_1, C_2, мы можем выбрать τ (действительным или комплексным) так, чтобы α обратилось в нуль. С другой стороны, если $\alpha = 0$ и $\beta \neq 0$, то система (20) даёт

$$\pi_1^2 = 0,$$

и при этом условии, как бы ни менять остальные вторичные параметры, α останется равным нулю.

Таким же образом мы приведём к нулю γ за счёт нового стеснения в выборе вторичных параметров, именно, за счёт

$$\pi_2^1 = 0,$$

и система (21) примет вид

$$\delta \ln \beta = \pi_1^1 + \pi_2^2 - \pi_3^3.$$

Такими же рассуждениями мы придём к заключению, что выбором вторичных параметров можно привести к нулю $\ln\beta$, и тогда

$$\pi_1^1 + \pi_2^2 - \pi_3^3 = 0. \tag{b}$$

Внося $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$, $\omega_3^3 = -\omega_1^1 - \omega_2^2$ в уравнения (20), получим

$$[\omega_1^2\omega^1] + [\omega_1^1 + \omega_2^2,\ \omega^2] = 0,$$
$$[\omega_1^1 + \omega_2^2,\ \omega^1] + [\omega_2^1\omega^2] = 0,$$

откуда двукратным применением леммы Картана имеем:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= u\omega^1 + v\omega^2, \\ \omega_1^1 + \omega_2^2 &= v\omega^1 + w\omega^2, \\ \omega_2^1 &= w\omega^1 + t\omega^2. \end{aligned} \tag{19'}$$

Эти формулы определяют компоненты инфинитезимальных преобразований репера второго порядка.

Внешнее дифференцирование даёт

$$\begin{aligned} &[du + u(\omega_2^2 - 2\omega_1^1) - v^2\omega^2,\ \omega^1] + [dv - v\omega_1^1 - w\,\omega_1^2 + \omega_3^2,\ \omega^2] = 0, \\ &[dv - v\omega_1^1 - w\,\omega_1^2 + \omega_3^2,\ \omega^1] + [dw - w\omega_2^2 - v\omega_2^1 + \omega_3^1,\ \omega^2] = 0, \\ &[dw - w\omega_2^2 - v\,\omega_2^1 + \omega_3^1,\ \omega^1] + [dt + t\,(\omega_1^1 - 2\omega_2^2) - w^2\omega^1,\ \omega^2] = 0, \end{aligned} \tag{20'}$$

откуда, выписывая значения для двух пар линейных элементов, получим уравнения для инфинитезимальных преобразований коэффициентов:

$$\begin{aligned} \delta u &= u(2\pi_1^1 - \pi_2^2), & \delta t &= t(2\pi_2^2 - \pi_1^1), \\ \delta v &= v\pi_1^1 - \pi_3^2, & \delta w &= w\pi_2^2 - \pi_3^1. \end{aligned} \tag{21'}$$

Два уравнения второй строки показывают, что при повороте третьей оси (формы π_3^1, π_3^2) коэффициенты v и w получают независимые приращения, и поэтому как тот, так и другой могут быть приведены к нулю, если воспользоваться такими же рассуждениями, как мы привели выше.

Что касается до первых двух уравнений, то они содержат только одну независимую форму π, ибо, в силу уравнения (b) и уравнения $\pi_1^1 + \pi_2^2 + \pi_3^3 = 0$, имеем:

$$\pi_1^1 + \pi_2^2 = 0.$$

Чтобы не нарушить симметрии, составим разность

$$\delta \ln \frac{u}{t} = 3\,(\pi_1^1 - \pi_2^2)$$

и приведём к нулю $\ln\frac{u}{t}$. Тогда, внося $v = w = 0$, $u = t$ в систему (21′), заметим, что все формы π_i^k будут равны нулю. Репер будет полностью нормирован. Таблица компонент примет вид

$$\begin{aligned} dA &= \omega^1\mathbf{e}_1 + \omega^2\mathbf{e}_2, & \omega_3^2 &= 3\,(\xi\omega^1 + \eta\omega^2), \\ d\mathbf{e}_1 &= \omega_1^1\mathbf{e}_1 + u\omega^1\mathbf{e}_2 + \omega^2\mathbf{e}_3, & \omega_3^1 &= 3\,(\eta\omega^1 + \zeta\omega^2), \\ d\mathbf{e}_2 &= u\omega^2\mathbf{e}_1 - \omega_1^1\mathbf{e}_2 + \omega^1\mathbf{e}_3, & \omega_1^1 &= -\omega_2^2 = a\omega^1 - b\omega^2, \\ d\mathbf{e}_3 &= \omega_3^1\mathbf{e}_1 + \omega_3^2\mathbf{e}_2. & du &= 3(\zeta - ua)\,\omega^1 + 3\,(\xi - ub)\,\omega^2. \end{aligned}$$

Выражения для компонент ω_3^1, ω_3^2, ω_1^1 получены, развёртывая по лемме Картана уравнения (20′), которые можно написать в виде

$$\begin{aligned}&[du - 3u\omega_1^1,\ \omega^1] + [\omega_3^2\omega^2] = 0,\\ &[du - 3u\omega_2^2, \omega^2] + [\omega_3^1\omega^1] = 0,\end{aligned} \qquad [\omega_3^2\omega^1] + [\omega_3^1\omega^2] = 0.$$

Инварианты u, a, b, ξ, η, ζ удовлетворяют требованиям

$$D\omega^1 = -b\,[\omega^1\omega^2], \quad D\omega^2 = a\,[\omega^1\omega^2],$$

$$[d\xi\omega^1] + [d\eta\omega^2] + (\zeta u - 2\xi b)\,[\omega^1\omega^2] = 0$$

$$[d\eta\omega^1] + [d\zeta\omega^2] + (2\zeta a - \xi u)\,[\omega^1\omega^2] = 0,$$

$$[da\omega^1] - [db\omega^2] + (3\eta - u^2 - 2ab)\,[\omega^1\omega^2] = 0,$$

$$[d\zeta\omega^1] + [d\xi\omega^2] - u\,[da\omega^1] - u[db\,\omega^2] + 4(a\xi - b\zeta)\,[\omega^1\omega^2] = 0.$$

Первые две оси направлены по асимптотическим касательным, третья — по *афинной нормали* [1]).

§ 9. Задача. Канонический тетраэдр поверхности в проективном пространстве [2])

Можно прямо начать с реперов первого порядка, присоединяя к каждой точке поверхности A тетраэдр, три вершины которого $A_0 = A$, A_1, A_2 лежат в касательной плоскости поверхности. Уравнения

$$dA_i = \omega_i^k A_k, \qquad i,k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \tag{22}$$

сейчас же дадут:

$$\omega_0^3 = 0. \tag{23}$$

Так как при $\omega^1 = \omega_0^1 = 0$, $\omega^2 = \omega_0^2 = 0$ имеем теперь $dA_0 = \omega_0^0 A_0$ и точка A стоит на месте и наоборот, то формы ω^1, ω^2 можно принять за базис подкольца дифференциалов от главных параметров.

1. Тетраэдр второго порядка. Асимптотические касательные. Дифференцируя внешним образом равенство (23), получим:

$$[\omega^1\omega_1^3] + [\omega^2\omega_2^3] = 0. \tag{24}$$

Согласно лемме Картана, формы ω_1^3, ω_2^3 являются линейными комбинациями только от главных форм ω^1, ω^2 (следовательно, от дифференциалов главных параметров) с *симметричной* матрицей коэффициентов:

---

[1]) Blaschke, Affine Differentialgeometrie, 1923, ч. I, стр. 15.

[2]) Cartan, Sur la déformation des surfaces, Ann. de l'Ecole Normale Sup., 37, 1920, стр. 397—406.

$$\omega_1^3 = \alpha\omega^1 + \beta\omega^2,$$

$$\omega_2^3 = \beta\omega^1 + \gamma\omega^2.$$

Это наводит на мысль рассмотреть квадратичную форму с обыкновенным законом умножения

$$\varphi = \omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3$$

или

$$\varphi = \alpha\,(\omega^1)^2 + 2\beta\omega^1\omega^2 + \gamma\,(\omega^2)^2,$$

где, следовательно, ω_1^3 и ω_2^3 являются алгебраическими производными:

$$\omega_1^3 = \frac{1}{2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\omega^1}, \qquad \omega_2^3 = \frac{1}{2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\omega^2}.$$

Геометрический смысл её очевиден. Так как имеем равенство определителей (произведение четырёх аналитических точек)

$$(A_0A_1A_2d^2A_0) = \varphi\,(A_0A_1A_2A_3),$$

то уравнение $\varphi = 0$ показывает, что соприкасающая плоскость кривой, определяемая точками A, dA, d^2A, совпадает с касательной плоскостью поверхности AA_1A_2; следовательно, $\varphi = 0$ определяет асимптотические линии поверхности.

Если присвоить символ δ (линейный элемент ε) дифференцированию по вторичным параметрам, обозначая $\omega^k\,(\delta) = \pi_i^k$, так что

$$\pi^1 = \pi^2 = \pi_1^3 = \pi_2^3 = 0, \tag{25}$$

и сохранить обозначения $\omega_i^k(d) = \omega_i^k$ для дифференцирования по главным параметрам (линейные элементы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$), то уравнения структуры

$$\begin{aligned}D\omega^1 &= [\omega^1, \omega_1^1 - \omega_0^0] + [\omega^2\omega_2^1],\\ D\omega^2 &= [\omega^1\omega_1^2] + [\omega^2, \omega_2^2 - \omega_0^0],\\ D\omega_1^3 &= [\omega_1^3,\ \omega_3^3 - \omega_1^1] + [\omega_1^2\omega_2^3],\\ D\omega_2^3 &= [\omega_2^1\omega_1^3] + [\omega_2^3,\ \omega_3^3 - \omega_2^2]\end{aligned}$$

примут вид

$$\begin{aligned}\delta\omega^1 &= (\pi_0^0 - \pi_1^1)\,\omega^1 - \pi_2^1\omega^2,\\ \delta\omega^2 &= -\pi_1^2\omega^1 + (\pi_0^0 - \pi_2^2)\omega^2,\\ \delta\omega_1^3 &= (\pi_1^1 - \pi_3^3)\,\omega_1^3 + \pi_1^2\omega_2^3,\\ \delta\omega_2^3 &= \pi_2^1\omega_1^3 + (\pi_2^2 - \pi_3^3)\,\omega_2^3.\end{aligned} \tag{26}$$

Следовательно,

$$\delta\varphi = (\pi_0^0 - \pi_3^3)\,\varphi.$$

Если положить $\pi_0^0 - \pi_3^3 = \delta \ln \lambda$ (легко проверить, что λ равно отношению $\rho_0 : \rho_3$, где ρ_i есть тот множитель, на который умножаются четыре однородных координаты точки A_i), то из уравнения

$$\delta \ln \varphi = \delta \ln \lambda$$

получим посредством интегрирования

$$\varphi = \varphi_0 \lambda,$$

где φ_0 есть значение формы для $\lambda = 1$. Отсюда вытекает, что при изменении системы отнесения форма φ переходит сама в себя и только при изменении нормирования умножается на скалярный множитель, следовательно, является *относительным инвариантом*. Меняя направления осей AA_1, AA_2 в касательной плоскости, мы можем привести её к виду любой квадратичной формы (развёртывающиеся поверхности, для которых φ есть полный квадрат, исключаются), например формы

$$\varphi = 2\omega^1\omega^2,$$

откуда $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$ и

$$\omega_1^3 = \omega^2, \ \omega_2^3 = \omega^1. \tag{27}$$

При этом $\omega^1 = 0$ и $\omega^2 = 0$ суть асимптотические линии, т. е. рёбра тетраэдра AA_1, AA_2 касаются асимптотических.

Если бы мы выбрали $\varphi = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$, то мы совместили бы ребра AA_1, AA_2 с произвольной парой сопряжённых касательных. Если форму φ оставить произвольной, то первые две оси тетраэдра сохранят произвольное положение в касательной плоскости поверхности.

Сделанный нами выбор (27) коэффициентов в разложении форм ω_1^3, ω_2^3 по формам базиса ω^1, ω^2 выделяет реперы второго порядка. Внося значения (27) в уравнения (26), получаем:

$$\pi_1^2 = \pi_2^1 = \pi_1^1 + \pi_2^2 - \pi_0^0 - \pi_3^3 = 0, \tag{28}$$

что выделяет из группы преобразований тетраэдра g_1, сохраняющих касательную плоскость и точку касания, подгруппу g_2, сохраняющую реперы второго порядка.

2. Тетраэдр третьего порядка. Дифференцируем внешним образом равенства (27):

$$\begin{aligned} &[\omega^1\omega_1^2] + \frac{1}{2}[\omega^2\Omega] = 0, \\ &\frac{1}{2}[\omega^1\Omega] + [\omega^2\omega_2^1] = 0; \end{aligned} \qquad \Omega = \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_0^0 - \omega_3^3,$$

отсюда по лемме Картана следует:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \lambda\omega^1 + \mu\omega^2, \\ \frac{1}{2}\Omega &= \mu\omega^1 + \nu\omega^2, \\ \omega_2^1 &= \nu\omega^1 + \rho\omega^2. \end{aligned}$$

Это приводит нас к рассмотрению кубичной формы

$$\psi = (\omega^1)^2\omega_1^2 + \omega^1\omega^2\Omega + (\omega^2)^2\omega_2^1$$

или

$$\psi = \lambda(\omega^1)^3 + 3\mu(\omega^1)^2\omega^2 + 3\nu\omega^1(\omega^2)^2 + \rho(\omega^2)^3.$$

Уравнения структуры

$$\begin{aligned} D\omega_1^2 &= [\omega_1^2, \omega_2^2 - \omega_1^1] + [\omega_1^0 - \omega_3^2, \omega^2], \\ D\Omega &= 2\{[\omega_1^0 - \omega_3^2, \omega^1] + [\omega_2^0 - \omega_3^1, \omega^2]\}, \\ D\omega_2^1 &= [\omega_2^1, \omega_1^1 - \omega_2^2] + [\omega_2^0 - \omega_3^1, \omega^1] \end{aligned}$$

для прежних двух линейных элементов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ примут вид

$$\begin{aligned} \delta\omega_1^2 &= (\pi_1^1 - \pi_2^2)\,\omega_1^2 + (\pi_1^0 - \pi_3^2)\,\omega^2, \\ \frac{1}{2}\delta\Omega &= (\pi_1^0 - \pi_3^2)\,\omega^1 + (\pi_2^0 - \pi_3^1)\,\omega^2, \\ \delta\omega_2^1 &= (\pi_2^2 - \pi_1^1)\,\omega_2^1 + (\pi_2^0 - \pi_3^1)\,\omega^1. \end{aligned}$$

Следовательно, если принять во внимание последнее уравнение (28), то получим:

$$\delta\psi = (\pi_0^0 - \pi_3^3)\,\psi + 3(\pi_1^0 - \pi_3^2)\,(\omega^1)^2\omega^2 + 3(\pi_2^0 - \pi_3^1)\,\omega^1(\omega^2)^2.$$

Мы видим, что инфинитезимальные преобразования подгруппы g_2 сообщают коэффициентам μ и ν при произведениях $(\omega^1)^2\omega^2$ и $\omega^1(\omega^2)^2$ формы ψ независимые приращения, пропорциональные разностям $\pi_1^0 - \pi_3^2$ и $\pi_2^0 - \pi_3^1$. Если положить все формы π_i^k равными нулю, кроме $\pi_1^0 - \pi_3^2$ и $\pi_2^0 - \pi_3^1$, то получим:

$$\delta\mu = \pi_1^0 - \pi_3^2, \quad \delta\nu = \pi_2^0 - \pi_3^1.$$

Следовательно, μ и ν могут принимать все значения. В частности, их можно положить равными нулю. Тогда преобразования группы g_2 будут связаны уравнениями

$$\pi_1^0 - \pi_3^2 = 0, \quad \pi_2^0 - \pi_3^1 = 0, \quad \delta\psi = (\pi_0^0 - \pi_3^3)\psi, \tag{29}$$

и наши формулы примут вид

$$\omega_1^2 = \lambda\omega^1, \quad \omega_2^1 = \rho\omega^2,$$
$$\psi = \lambda(\omega^1)^3 + \rho(\omega^2)^3.$$

Так как дифференциал $\delta\frac{\psi}{\varphi}$ теперь будет равен нулю, то отношение $\frac{\psi}{\varphi}$, инвариантное относительно преобразований подгруппы g_2, станет *абсолютным инвариантом*. Фубини, назвал его *проективным линейным элементом* поверхности [1].

Дифференцируя внешним образом уравнения $\omega_1^2 = \lambda\omega^1$, $\omega_2^1 = \rho\omega^2$ и выписывая значение полученных квадратичных форм для линейных элементов ε и e_1 или ε и e_2, мы получим:

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} \delta\lambda &= (2\pi_1^1 - \pi_0^0 - \pi_2^2)\lambda, \\ \delta\rho &= (2\pi_2^2 - \pi_0^0 - \pi_1^1)\rho. \end{aligned}$$

Эти уравнения показывают, что преобразования группы g_2 могут сообщить коэффициентам λ, ρ любые значения, кроме значений $\lambda=0$, $\rho=0$.

Следовательно, равенства $\lambda=0$ или $\rho=0$ имеют инвариантный смысл. Если $\lambda = 0$, то $\omega_1^2 = 0$, а тогда

$$\left.\begin{aligned} dA &\equiv \omega_0^0 A + \omega^1 A_1, \\ dA_1 &\equiv \omega_1^0 A + \omega_1^1 A_1 \end{aligned}\right. \pmod{\omega^2},$$

т. е. при $\omega^2 = 0$ прямая AA_1 неподвижна. Следовательно, поверхность — линейчатая.

Исключая из рассмотрения линейчатые поверхности, мы можем положить $\lambda = 1$, $\rho = 1$. На компоненты инфинитезимальных преобразований группы g_2 наложатся новые ограничения, именно: уравнения (a) дадут теперь:

$$2\pi_1^1 - \pi_0^0 - \pi_2^2 = 0, \quad 2\pi_2^2 - \pi_0^0 - \pi_1^1 = 0.$$

Если допустить, что координаты четырёх вершин A_i нормированы так, что определитель из 16 координат всегда равен единице:

$$(A_0 A_1 A_2 A_3) = 1,$$

то, дифференцируя это равенство, получим для всех преобразований репера

$$\text{(b)} \qquad \omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0.$$

Принимая во внимание это уравнение, получим:

$$\text{(30)} \qquad \pi_1^1 = \pi_2^2 = \pi_3^3 = \pi_0^0 = 0.$$

---

[1] Фиников, Проективно-дифференциальная геометрия, гл. II, стр. 43.

Наши формулы примут вид

$$\text{(31)} \qquad \begin{aligned} &\omega_1^2 = \omega^1, \quad \Omega = 0, \quad \omega_2^1 = \omega^2, \\ &\psi = (\omega^1)^3 + (\omega^2)^3. \end{aligned}$$

Эти равенства определяют компоненты инфинитезимальных преобразований репера третьего порядка. Геометрически тетраэдры третьего порядка характеризуются требованием, чтобы рёбра AA_1, AA_2 были асимптотическими касательными, а рёбра AA_3 и A_1A_2 были *полярно сопряжены* относительно семейства соприкасающихся поверхностей Дарбу [1].

3. Тетраэдр четвёртого порядка. Дифференцируя внешним образом уравнения (31) первой строки, получим:

$$[\omega^1, \omega_0^0 + \omega_2^2 - 2\omega_1^1] + [\omega^2, \omega_3^2 - \omega_1^0] = 0,$$
$$[\omega^1, \omega_3^2 - \omega_1^0] + [\omega^2, \omega_3^1 - \omega_2^0] = 0,$$
$$[\omega^1, \omega_3^1 - \omega_2^0] + [\omega^2, \omega_0^0 + \omega_1^1 - 2\omega_2^2] = 0.$$

Так как лемма Картана для каждого уравнения даёт разложения входящих туда форм через ω^1, ω^2 с симметричной матрицей коэффициентов, то все четыре выражения тесно связаны с формой четвёртой степени

$$\chi = (\omega^1)^3(\omega_0^0 + \omega_2^2 - 2\omega_1^1) + 3(\omega^1)^2\omega^2(\omega_3^2 - \omega_1^0) + \\ + 3\omega^1(\omega^2)^2(\omega_3^1 - \omega_2^0) + (\omega^2)^3(\omega_0^0 + \omega_1^1 - 2\omega_2^2),$$

являясь от неё алгебраическими производными третьего порядка.

Из наших уравнений знакомым путём получается:

$$\delta\chi = -4\pi_1^0(\omega^1)^4 + 8\pi_2^0(\omega^1)^3\omega^2 + 12\pi_3^0(\omega^1)^2(\omega^2)^2 + \\ + 8\pi_1^0\omega^1(\omega^2)^3 - 4\pi_2^0(\omega^2)^4.$$

Мы видим, что инфинитезимальные преобразования группы g_3, сохраняющие реперы третьего порядка, дают приращения всем пяти коэффициентам формы χ, но не все эти приращения независимы, ибо инфинитезимальные преобразования группы имеют только три независимые компоненты π_1^0, π_2^0 и π_3^0. Мы можем привести к нулю коэффициенты при произведениях $(\omega^1)^3\omega^2$, $(\omega^1)^2(\omega^2)^2$ и $\omega^1(\omega^2)^3$; после этого все формы, содержащие дифференциалы вторичных параметров, π_i^k будут равны нулю, все вторичные параметры закреплены. Следовательно, репер четвёртого порядка является каноническим репером поверхности. Геометрически он определяется требованием, чтобы рёбра AA_3 и A_1A_2 были директрисами Вильчинского (директрисы соприкасающейся линейной конгруэнции), а точка A_3 была

---

[1] Фиников, Проективно-дифференциальная геометрия, гл. IV, § 2.

точкой пересечения ребра AA_3 с соприкасающейся поверхностью Софуса Ли [1]).

4. Компоненты инфинитезимальных преобразований канонического тетраэдра. Если обозначить через -3α и -3β новые коэффициенты формы χ:

$$\chi = -3\alpha(\omega^1)^4 - 3\beta(\omega^2)^4,$$

то мы получим, очевидно,

$$\begin{aligned} &\omega_0^0 + \omega_2^2 - 2\omega_1^1 = -3\alpha\omega^1, \quad \omega_3^2 = \omega_1^0, \\ &\omega_0^0 + \omega_1^1 - 2\omega_2^2 = -3\beta\omega^2, \quad \omega_3^1 = \omega_2^0. \end{aligned} \tag{32}$$

Тогда из условия (b) и равенства $\Omega = \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_0^0$ нулю следует:

$$\omega_0^0 = -\omega_3^3 = -\frac{3}{2}\alpha\omega^1 - \frac{3}{2}\beta\omega^2, \quad \omega_1^1 = -\omega_2^2 = \frac{1}{2}\alpha\omega^1 - \frac{1}{2}\beta\omega^2.$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (32) (второй столбец), получим:

$$[\omega_3^1\omega^1] + [\omega_3^0\omega^2] = 0, \quad [\omega_3^0\omega^1] + [\omega_3^2\omega^2] = 0,$$

откуда по лемме Картана имеем:

$$\begin{aligned} \omega_3^1 &= a\,\omega^1 + A\,\omega^2, \\ \omega_3^0 &= A\,\omega^1 + B\,\omega^2, \\ \omega_3^2 &= B\,\omega^1 + b\,\omega^2. \end{aligned}$$

Таблица компонент принимает вид:

$$\left|\begin{array}{cccc} \omega_0^0 & \omega^1 & \omega^2 & 0 \\ \omega_3^2 & \omega_1^1 & \omega^1 & \omega^2 \\ \omega_3^1 & \omega^2 & -\omega_1^1 & \omega^1 \\ \omega_3^0 & \omega_3^1 & \omega_3^2 & -\omega_0^0 \end{array}\right|$$

$$\begin{aligned} \omega_0^0 &= -\frac{3}{2}\alpha\omega^1 - \frac{3}{2}\beta\omega^2, \\ \omega_1^1 &= \frac{1}{2}\alpha\omega^1 - \frac{1}{2}\beta\omega^2, \\ \omega_3^1 &= a\omega^1 + A\omega^2, \\ \omega_3^0 &= A\omega^1 + B\omega^2, \\ \omega_3^2 &= B\omega^1 + b\omega^2. \end{aligned}$$

Уравнения структуры накладывают на инварианты $\alpha, \beta, a, b, A, B$ соотношения

$$\begin{gathered} D\omega^1 = \beta[\omega^1\omega^2], \quad D\omega^2 = -\alpha[\omega^1\omega^2], \\ [d\alpha + \{1 - \alpha\beta - \frac{2}{3}(2b + a)\}\omega^2, \omega^1] = 0, \\ [d\beta + \{1 - \alpha\beta - \frac{2}{3}(2a + b)\}\omega^1, \omega^2] = 0, \\ [da\omega^1] + [dA\omega^2] + (3a\beta - 2A\alpha)[\omega^1\omega^2] = 0, \\ [dA\omega^1] + [dB\omega^2] + 4(A\beta - B\alpha)[\omega^1\omega^2] = 0, \\ [dB\omega^1] + [db\omega^2] + (2B\beta - 3b\alpha)[\omega^1\omega^2] = 0. \end{gathered}$$

---

[1]) Фиников, Проективно-диффереициальная геометрия, гл. II, §§ 3, 5.

Упражнения

1. Построить канонический трёхгранник конгруэнции прямых в афинном пространстве.

2. Построить канонический тетраэдр конгруэнции прямых в проективном пространстве.

3. Построить канонический трёхгранник поверхности в афинном пространстве, если первые две оси являются касательными к линиям заданной сопряжённой сети на поверхности.

4. Построить канонический тетраэдр поверхности в проективном пространстве, два ребра которого касаются линий заданной на поверхности сопряжённой сети.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ