С. П. ФИНИКОВ

ТЕОРИЯ КОНГРУЭНЦИЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1950 ЛЕНИНГРАД

11-5-4

Редактор *М. В. Ауссем.* Техн. редактор *С. Н. Ахламов.*

Подписано к печати 8/III 1949 г. 33 печ. л. 38,81. уч.-изд. л. 47 040 типогр. зн. в печ. л. Т-00246. Тираж 3 000 экз. Цена книги 23 руб. 25 коп. Переплёт 2 руб. Заказ № 1038.

4-я типография им. Евг. Соколовой Главполиграфиздата при Совете Министров СССР. Ленинград, Измайловский пр. 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

МЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КОНГРУЭНЦИИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ СООТВЕТСТВИЙ, УСТАНАВЛИВАЕМЫХ МЕЖДУ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

ГЛАВА ЧЕТВЁРТАЯ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МУТАРА И КОНГРУЭНЦИИ W

ГЛАВА ПЯТАЯ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ГЛАВА ШЕСТАЯ

СОПРЯЖЁННЫЕ СЕТИ И КОНГРУЭНЦИИ В n-МЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ТЕОРИЯ КОНГРУЭНЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРЯМЫХ. ОТОБРАЖЕНИЕ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТЬ 2-го ПОРЯДКА Q_4^2

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ КОНГРУЭНЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРЯМЫХ

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ИНВАРИАНТЫ И ИНВАРИАНТНЫЕ ФОРМЫ КОНГРУЭНЦИИ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ P_3

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ Ф

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

КОНГРУЭНЦИЯ С ПРОЕКТИВНО НАЛАГАЮЩИМИСЯ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

КОНГРУЭНЦИИ А. М. ВАСИЛЬЕВА

ГЛАВА ТРИНАДЦАТАЯ

ИЗГИБАНИЕ КОНГРУЭНЦИИ

ПРИЛОЖЕНИЕ

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК РАЗВИТИЯ УЧЕНИЯ О КОНГРУЭНЦИИ ПРЯМЫХ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория конгруэнций прямых появилась на свет почти одновременно с теорией поверхностей. Вопросы геометрической оптики подводили непосредственно к исследованию нормальной конгруэнции, например, к задаче отражения или преломления нормальной конгруэнции лучей. Проблема прохождения света через кристаллы вводит уже конгруэнцию общего типа.

Впоследствии развитие теории поверхностей и в особенности так широко развернувшаяся на рубеже двух столетий теория преобразования поверхностей сделали главу теории конгруэнции необходимой принадлежностью всякого курса дифференциальной геометрии. Однако эти сведения по теории конгруэнций не исчерпывают и в малой мере той работы, которая проводилась в этой области разными методами, с различных точек зрения, в разных направлениях. Всё это разнообразие методов и проблематики представляет особенно привлекательную сторону нашей теории, которая ещё не нашла себе достойного отражения в учебной литературе. Это побудило меня в конце тридцатых годов предложить издание книги по теории конгруэнций. Работа над ней взяла у меня много времени, и окончательный текст я представил только весной 1941 г.

Когда после окончания войны зашла речь о печатании этой книги, я мог посмотреть на эту публикацию как на переиздание. С тех пор, как я писал свою рукопись, прошло более десяти лет. За это время изменился не только весь мир, изменилось и состояние той области, которую я рассматриваю. Работы С. В. Бахвалова и С. Д. Россинского по метрической теории расслояемых пар, инвариантная теория проективно-дифференциальной геометрии, построенная Г. Ф. Лаптевым, общая теория пар конгруэнций как образов симметрии Б. А. Розенфельда, работы по теории комплексов А. М. Васильева, и В. И. Коровина, по теории p-сопряжённых систем Т. Л. Козьминой и Р. В. Смирнова создали новые главы дифференциальной геометрии, или при-

надлежащие теории конгруэнций или непосредственно к ней примыкающие. Я принял решение сократить изложение классических результатов эпохи Бианки-Дарбу, чтобы поместить эти новые работы, дать результаты, полученные в наши дни Московской школой геометров.

Мне пришлось отказаться от изложения «изгибания» конгруэнции при перемещении её лучей, неразрывно связанных с касательными плоскостями изгибаемой поверхности. В частности, я опустил теорию конгруэнций качения, лучи которой подходящим изгибанием присоединённой поверхности приводятся к совпадению с неподвижной прямой, а из всей теории преобразования поверхностей, налагающихся на поверхности 2-го порядка, я ограничился задачей изгибания комплекса касательных. Впрочем, эти работы уже нашли себе место в последних изданиях Лекций по дифференциальной геометрии Бианки и, следовательно, отчасти доступны читателю.

Теория пар конгруэнций: пары T, расслояемые пары конгруэнций и общая проблема расслояемости, системы W, метрическая теория пар вместе с распространением этих идей на комплексы и p-сопряжённые системы, может составить содержание другой книги.

В первой главе этой книги даны общие сведения о конгруэнциях в элементарном изложении. Во второй главе — компоненты движений трёхгранника и элементы теории внешних форм, достаточные для понимания текста. С помощью теории вариации трёхгранника около луча выводятся основные квадратичные формы конгруэнции в евклидовом пространстве.

Третья глава содержит основную метрическую теорию конгруэнций как инструмента для преобразования поверхностей. Изложение ведётся методом внешних форм. Следующая глава даёт теорию конгруэнции W в классической форме мутаровских преобразований.

Пятая глава вводит в теорию асимптотических преобразований поверхностей в проективном пространстве. Она начинается построением канонического тетраэдра поверхности, но быстро приводится к фубиниевской теории конгруэнций W. Шестая глава даёт классическую теорию сопряжённых сетей в P_n, определяемых $n+1$ решением уравнения Лапласа. Следующие две главы дают теорию конгруэнций в пространстве прямых.

Девятая глава даёт общую теорию конгруэнций в проективном пространстве методом внешних форм посредством отыскания ивариантов. Десятая и одиннадцатая дают приложение этой теории к двум замечательным конгруэнциям R. Двенадцатая глава посвящена конгруэнциям А. М. Васильева, которые имеют непосредственную связь и с седьмой и с девятой главами.

Наконец, в XIII главе рассматривается проективное изгибание конгруэнции и его обобщения[1]).

Считаю приятным долгом выразить мою признательность Л. Н. Сретенскому, который прочёл мою книгу в рукописи и сделал ряд весьма ценных указаний.

Особенно я должен отметить большую работу, проделанную над рукописью редактором издательства М. В. Ауссем, которая не только проверила все выкладки, но и внесла ряд улучшений в текст книги. Пользуюсь случаем выразить ей мою искреннюю благодарность.

Москва
декабрь 1949 г.

С. Фиников

1) Ссылки на список литературы по теории конгруэнций, находящийся в конце книги, даны цифрами в квадратных скобках.

В тексте сокращённо цитируются следующие книги автора: Т. П. — «Теория поверхностей», ГТТИ, М. — Л., 1934; П. Д. Г. — «Проективно-дифференциальная геометрия», ОНТИ, М. — Л., 1937; М. В. Ф. — «Метод внешних форм Картана», Гостехиздат, 1948.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ОКРЕСТНОСТЬ ЛУЧА

I. СТРОЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ОКРЕСТНОСТИ ЛУЧА

1. Семейство прямых в пространстве. Прямая в пространстве определяется системой двух уравнений первой степени

$$\begin{aligned} Ax+By+Cz+D&=0,\\ A'x+B'y+C'z+D'&=0, \end{aligned} \tag{1}$$

если матрица коэффициентов при текущих координатах x, y, z

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$$

имеет ранг два, т. е. хотя бы один из определителей матрицы не равен нулю. Если отличен от нуля первый определитель

$$AB'-A'B\neq 0,$$

то систему (1) можно разрешить относительно координат x, y:

$$\begin{aligned} x&=az+b,\\ y&=a'z+b'. \end{aligned} \tag{2}$$

Таким образом, произвольная прямая пространства зависит от четырёх существенных параметров a, b, a', b'. Эти параметры определяют прямую; их можно назвать координатами прямой в пространстве.

Если параметры a, b, a', b' связаны уравнением так, что произвольными остаются только три из них, то этим выделяется трёхпараметрическое семейство прямых, которое называется *комплексом* прямых.

Если параметры a, b, a', b' связаны двумя независимыми уравнениями так, что произвольными остаются только два параметра, то получается двухпараметрическое семейство прямых, которое называется *конгруэнцией* прямых.

Если параметры a, b, a', b' связаны тремя независимыми уравнениями так, что произвольным остаётся только один параметр, то уравнения (2) будут определять координаты x, y в функциях от двух независимых переменных, именно: координаты z и того произвольного параметра, от которого зависят коэффициенты уравнения a, b, a', b'. Если эти две переменные входят существенно (функциональный определитель от координат x, y по этим переменным отличен от нуля), то уравнения (2) определяют поверхность, а поскольку при любых постоянных a, b, a', b' уравнения (2) определяют прямую, то полученная поверхность будет *линейчатой поверхностью*.

Различие между этими тремя семействами прямых становится более наглядным, если рассмотреть совокупность прямых семейства, проходящих через заданную точку пространства (x_1, y_1, z_1). Внося эти значения в уравнения (2), получим систему

$$\begin{aligned} x_1 &= az_1 + b, \\ y_1 &= a'z_1 + b'. \end{aligned} \tag{3}$$

Эти уравнения при заданных x_1, y_1, z_1 связывают параметры прямой a, b, a', b'. Их надо присоединить к уравнениям, определяющим семейство прямых.

Если мы рассматриваем комплекс прямых, то два уравнения (3) уравнение комплекса составят систему трёх уравнений на четыре параметра a, b, a', b'. Если эти уравнения независимы и непротиворечивы, то они определяют подсемейство прямых с одним произвольным параметром, т. е. линейчатую поверхность. Поскольку все образующие этой поверхности проходят через одну точку, поверхность — коническая и вершина конуса — точка (x_1, y_1, z_1).

Лучи комплекса, проходящие через общую точку пространства, образуют конус с вершиной в этой точке.

Если мы будем рассматривать конгруэнцию прямых, то лучи (прямые) конгруэнции, проходящие через точку (x_1, y_1, z_1), должны удовлетворять, кроме уравнений (3), ещё двум уравнениям конгруэнции, следовательно, всего системе четырёх уравнений. Если эти уравнения независимы, то они могут допускать только конечное число решений. Следовательно, *через общую точку пространства проходит только конечное число лучей конгруэнции.*

Координаты прямой a, b, a', b' выбраны недостаточно симметрично. Если разрешить систему (1) относительно координат x, z или y, z, то коэффициенты в тех выражениях, которые при этом получатся, будут другие. Все они, очевидно, будут равняться отношениям определителей расширенной матрицы системы (1):

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Эти определители определены только до общего множителя, ибо каждое из уравнений (1) можно умножить на произвольное число.

Замена одного из уравнений (1) линейной комбинацией обоих уравнений, т. е. уравнением произвольной плоскости пучка с базисом (1), не отразится на отношениях определителей матрицы (4), ибо в каждом определителе элементы одной строки при этом заменятся линейной комбинацией с одними и теми же коэффициентами из соответствующих элементов первой и второй строк.

Шесть линейно независимых определителей матрицы (4) и называются *однородными тангенциальными координатами прямой.*

Если уравнения прямой взять в форме системы (2), то матрица (4) примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & -b \\ 0 & 1 & -a' & -b' \end{pmatrix}$$

и шесть линейно независимых определителей будут

$$1, \ a', \ -b', \ a, \ -b, \ ab' - a'b. \tag{5}$$

Мы видим, что шестой определитель связан с предыдущими квадратичной зависимостью. Для матрицы (4) эту зависимость можно получить, если в очевидном тождестве

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix} = 0$$

определитель в левой части равенства развернуть по правилу Лапласа:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} C & D \\ C' & D' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} B & D \\ B' & D' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & D \\ A' & D' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix} = 0.$$

Если прямую пространства задать однородными координатами двух её точек $M(x, y, z, t)$, $M'(x', y', z', t')$, то шесть линейно независимых определителей матрицы координат

$$\begin{pmatrix} x & y & z & t \\ x' & y' & z' & t' \end{pmatrix} \tag{6}$$

называются *точечными координатами прямой*. Они определены только до общего множителя, ибо каждую четвёрку однородных координат можно умножить на произвольное число. Замена точки M' какой-нибудь другой точкой прямой не отразится на отношениях определителей, ибо координаты всякой точки прямой MM' являются линейными комбинациями с одними и теми же коэффициентами из координат точек M и M'.

Для неоднородных координат, т. е. при $t=1$, $t'=1$, определители матрицы

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \end{pmatrix}$$

равны

$$x-x', \quad y-y', \quad z-z', \quad xy'-x'y, \quad -xz'+x'z, \quad yz'-y'z. \tag{7}$$

Это — три координаты вектора направления прямой $\overrightarrow{MM'}$ и векторного произведения $\overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{OM'}$, где O — начало координат. Поскольку координаты обеих точек M и M' удовлетворяют уравнениям прямой (2), мы можем исключить координаты x и y, x' и y' из выражений (7) с помощью уравнений (2), что приведёт нас к соотношениям

$$\frac{x-x'}{a}=\frac{y-y'}{a'}=\frac{z-z'}{1}=\frac{yz'-y'z}{-b'}=\frac{x'z-xz'}{b}=\frac{xy'-x'y}{ab'-a'b}.$$

Эти соотношения показывают, что точечные координаты (7) прямой совпадают до общего множителя с тангенциальными координатами (5) и точно так же определяют прямую.

Комплекс прямых, определяемый линейным однородным уравнением между однородными координатами прямой, называется *линейным комплексом*. Конгруэнция, определяемая двумя линейными уравнениями, называется *линейной конгруэнцией*.

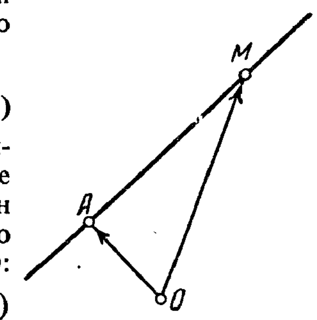
Мы вернёмся к теории линейных конгруэнций и комплексов в первых параграфах главы VII. В настоящей главе мы рассмотрим простейшие свойства конгруэнции прямых в евклидовом пространстве E_3. Луч конгруэнции мы будем определять с помощью двух независимых параметров, которые можно назвать криволинейными координатами луча в конгруэнции. Мы будем изучать свойства конгруэнции в окрестности её произвольного луча (в общем положении, не исключительного). Под *дифференциальной окрестностью* первого порядка луча конгруэнции мы подразумеваем совокупность точек самого луча, а также тех прямых пространства, координаты которых отличаются от координат рассматриваемого луча на дифференциалы первого порядка. Чтобы получить эти прямые, мы должны дать криволинейным координатам луча u, v произвольно малые приращения du и dv, разложить все функции, связанные с лучом, например координаты луча a, b, a', b', по степеням приращений du, dv и сохранить в разложении, кроме свободного, только члены первого порядка. Если сохранить члены до n-го порядка включительно, то получим дифференциальную окрестность n-го порядка.

2. Конгруэнция прямых. Мы видели, что *конгруэнцией прямых* называется многообразие прямых, зависящее от двух существенных параметров.

Луч конгруэнции будет задан, если даны какая-либо точка его $A(x, y, z)$, которую будем называть *началом* луча, и единичный

вектор $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{i}X+\boldsymbol{j}Y+\boldsymbol{k}Z$, определяющий направление луча. Радиус-вектор произвольной точки M луча определится тогда из ломаной OAM (черт. 1), где O — начало координат, как сумма радиуса-вектора $\boldsymbol{A}$ и вектора $\overrightarrow{AM}$. Если обозначить буквой $t=AM$ длину этого вектора так, что $\overrightarrow{AM}=\boldsymbol{e}t$, то получим:

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{e}t. \tag{8}$$



Черт. 1.

При переходе от луча к лучу внутри конгруэнции положение точки A и направление вектора $\boldsymbol{e}$ меняются так, что шесть величин x, y, z, X, Y, Z или векторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{e}$ надо считать функциями двух параметров u, v:

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(u, v), \quad \boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}(u, v). \tag{9}$$

Мы будем предполагать, что в той области конгруэнции, которую мы будем рассматривать, шесть скалярных функций, определяемых равенствами (9), непрерывны и обладают достаточным числом непрерывных производных (в том количестве, которое нам понадобится). Кроме того, мы будем предполагать, что параметры u, v входят в формулы (9) существенно, т. е. три функциональных определителя

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$$

не равны нулю одновременно и то же самое справедливо для производных от X, Y, Z. При этих условиях точка A описывает поверхность (A), которую мы будем называть *исходной поверхностью*; параметры u, v, очевидно, будут криволинейными координатами на исходной поверхности.

Поскольку $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор, точка m, определяемая радиусом-вектором

$$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{e}, \tag{10}$$

лежит на сфере радиуса единицы с центром в начале координат и при сделанных предположениях описывает на сфере двумерную область. Говорят, что точка m изображает на единичной сфере луч AM, описывая *сферическое изображение конгруэнции*.

3. Расстояние лучей дифференциальной окрестности. Рассмотрим дифференциальную окрестность луча AM с координатами (u, v), т. е. совокупность лучей $A'M'$, определяемых координатами $(u+du, v+dv)$, если приращения du, dv считать бесконечно малыми и рассматривать главные части приращений функций (9).

В метрической геометрии естественно прежде всего поставить вопрос о расстоянии двух лучей AM и $A'M'$ дифференциальной окрестности. Пусть это расстояние измеряется отрезком MM'.

Так как радиус-вектор точки M' получается из радиуса-вектора точки M, если параметрам u, v и координате точки на луче t дать приращения du, dv, dt, то главная часть бесконечно малого вектора $\overrightarrow{MM'} = \boldsymbol{M}' - \boldsymbol{M}$ получится простым дифференцированием формулы (8):

$$\overrightarrow{MM'} \sim d\boldsymbol{M} = d\boldsymbol{A} + t\, d\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e}\, dt. \tag{11}$$

Как известно, вектор $\overrightarrow{MM'}$ должен быть общим перпендикуляром обоих лучей AM и $A'M'$. Следовательно, скалярные произведения

$$\overrightarrow{MM'} \cdot \boldsymbol{e} = 0, \quad \overrightarrow{MM'} \cdot (\boldsymbol{e} + d\boldsymbol{e}) = 0 \tag{12}$$

должны равняться нулю.

Внося сюда значение $\overrightarrow{MM'}$ из формулы (11), получим:

$$\boldsymbol{e} \cdot d\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{e} \cdot d\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e}^2\, dt = 0,$$
$$d\boldsymbol{e} \cdot d\boldsymbol{A} + t\,(d\boldsymbol{e})^2 + \boldsymbol{e} \cdot d\boldsymbol{e}\, dt = 0,$$

но модуль вектора $\boldsymbol{e}$ равен единице; значит,

$$\boldsymbol{e}^2 = 1, \quad \boldsymbol{e} \cdot d\boldsymbol{e} = 0,$$

и мы будем иметь:

$$dt = -\boldsymbol{e} \cdot d\boldsymbol{A}, \tag{13}$$

$$t = -\frac{d\boldsymbol{e} \cdot d\boldsymbol{A}}{(d\boldsymbol{e})^2}. \tag{14}$$

Знаменатель в формуле (14), очевидно, определяет линейный элемент сферы, заданной уравнением (10), т. е. линейный элемент сферического изображения конгруэнции:

$$ds^2 = (d\boldsymbol{e})^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{15}$$

где

$$E = (\boldsymbol{e}_u)^2, \quad F = \boldsymbol{e}_u \cdot \boldsymbol{e}_v, \quad G = (\boldsymbol{e}_v)^2. \tag{16}$$

Для конгруэнции он будет иметь значение первой квадратичной формы. Если ввести обозначения

$$e = \boldsymbol{A}_u \cdot \boldsymbol{e}_u, \quad f = \boldsymbol{A}_v \cdot \boldsymbol{e}_u, \quad f' = \boldsymbol{A}_u \cdot \boldsymbol{e}_v, \quad g = \boldsymbol{A}_v \cdot \boldsymbol{e}_v, \tag{17}$$

то числитель в формуле (14) примет вид:

$$d\boldsymbol{e} \cdot d\boldsymbol{A} = e\,du^2 + (f + f')\,du\,dv + g\,dv^2. \tag{18}$$

Обозначая буквой r абсциссу на луче основания общего перпендикуляра двух лучей (u, v) и $(u + du,\ v + dv)$ дифференциальной окрестности, мы напишем формулу (14) в виде

$$r = -\frac{e\,du^2 + (f + f')\,du\,dv + g\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}. \tag{14'}$$

На линейчатой поверхности геометрическое место этих точек образует *линию сжатия* (стрикционную линию). Следовательно, если через луч конгруэнции AM провести линейчатую поверхность конгруэнции (поверхность, образованную лучами конгруэнции) так, чтобы она содержала луч $A'M'$, определяемый отношением дифференциалов $du : dv$, то линия сжатия этой линейчатой поверхности пересечёт луч AM в точке с абсциссой, определяемой формулой (14′).

Направление вектора $\overrightarrow{MM'}$ как общего перпендикуляра лучей $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e} + d\boldsymbol{e}$ можно искать, как направление вектора

$$\delta\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_u \delta u + \boldsymbol{e}_v \delta v,$$

касательного к сфере (10) и ортогонального к направлению вектора

$$d\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_u du + \boldsymbol{e}_v\, dv.$$

Поскольку касательные $\delta\boldsymbol{e}$ и $d\boldsymbol{e}$ к сфере (10) образуют прямой угол, дифференциалы $du{:}dv$ и $\delta u{:}\delta v$ удовлетворяют условию ортогональности

$$E\,du\,\delta u + F\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = 0,$$

откуда

$$\delta u : \delta v = -(F\,du + G\,dv) : (E\,du + F\,dv).$$

Внося величины, пропорциональные дифференциалам δu, δv, в выражение для вектора $\delta\boldsymbol{e}$, мы получим вектор, параллельный общему перпендикуляру $\overrightarrow{MM'}$:

$$-\boldsymbol{e}_u (F\,du + G\,dv) + \boldsymbol{e}_v (E\,du + F\,dv) =$$
$$= (E\boldsymbol{e}_v - F\boldsymbol{e}_u)\,du + (F\boldsymbol{e}_v - G\boldsymbol{e}_u)\,dv. \tag{19}$$

Так как квадрат его, в силу формул (16), равен

$$(EG - F^2)(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2),$$

то единичный вектор $\boldsymbol{n}$, коллинеарный общему перпендикуляру двух лучей (u, v) и $(u + du,\ v + dv)$ дифференциальной окрестности, будет равен:

$$\boldsymbol{n} = \frac{(E\boldsymbol{e}_v - F\boldsymbol{e}_u)\,du + (F\boldsymbol{e}_v - G\boldsymbol{e}_u)\,dv}{\sqrt{EG - F^2}\,\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}} =$$
$$= \frac{\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \\ \boldsymbol{e}_u & \boldsymbol{e}_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}\,\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}}. \tag{20}$$

Теперь само кратчайшее расстояние между лучами AM и $A'M'$ получится проектированием любого вектора, соединяющего точки первой и второй прямой, например вектора $\overrightarrow{AA'}$, на направление общего перпендикуляра $\boldsymbol{n}$. Для этого достаточно вычислить их скалярное произведение. Пользуясь для вектора $\overrightarrow{AA'}$ формулой $dA = A_u du + A_v dv$, получим главную часть искомого расстояния в виде

$$n \cdot dA = \frac{\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \\ e\,du + f\,dv & f'\,du + g\,dv \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}\,\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}}. \tag{21}$$

Полученная формула содержит существенно два слагаемых f и f' коэффициента при произведении дифференциалов $du\,dv$ в квадратичной форме (18). Следовательно, знание двух форм (15) и (18), т. е. их коэффициентов E, F, G, e, $f + f'$, g недостаточно для определения конгруэнции. Необходимо задать отдельно f и f'.

4. Строение окрестности луча. Формула (14′) как отношение двух квадратичных форм конгруэнции имеет много общего с основной формулой теории поверхностей, определяющей кривизну нормального сечения поверхности. Она допускает поэтому такую же трактовку.

Знаменатель формулы (14′) — линейный элемент сферы, значит, положительная, определённая форма ($E > 0$, $EG - F^2 > 0$). Следовательно, существует система координатных линий u, v на сфере так, что отнесённые к ним обе формы (15), (18) станут прямоугольными:

$$F = 0, \quad f + f' = 0. \tag{22}$$

Для доказательства можно построить индикатрису формулы (14′), откладывая по каждой касательной $du : dv$ в точке m сферы (10) отрезок, равный $\frac{1}{\sqrt{|r|}}$, и апеллировать к действительности главных направлений получаемой кривой 2-го порядка. Можно просто сослаться на теорему о совместном приведении к прямоугольному виду двух квадратичных форм, из которых одна положительная, определённая, или обратиться к теореме проективной геометрии о существовании общей пары сопряжённых элементов у двух инволюций, из которых одна эллиптическая: инволюции взаимно перпендикулярных касательных к сфере в точке m и инволюции, определяемой обращением в нуль полярной формы от квадратичной формы (18).

Если мы отнесём конгруэнцию к такой системе координат и, следовательно, внесём в формулу (14′) значения (22), то получим:

$$r = -\frac{e\,du^2 + g\,dv^2}{E\,du^2 + G\,dv^2};$$

отсюда, полагая $r = r_1$ для координатной поверхности $v = \text{const.}$ и $r = r_2$ для координатной поверхности $u = \text{const.}$, имеем:

$$r_1 = -\frac{e}{E}, \quad r_2 = -\frac{g}{G}$$

и, исключая e и g:

$$r = r_1 \frac{E\,du^2}{E\,du^2 + G\,dv^2} + r_2 \frac{G\,dv^2}{E\,du^2 + G\,dv^2}.$$

С другой стороны, для единичных векторов, определяющих направление общего перпендикуляра двух лучей дифференциальной окрестности, лежащих в координатных поверхностях $v = \text{const.}$ или $u = \text{const.}$, формула (20) даёт значения

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{G}} e_v, \quad n_2 = -\frac{1}{\sqrt{E}} e_u.$$

Значит, для угла α, образуемого общим перпендикуляром лучей (u, v) и $(u + du, v + dv)$ с перпендикуляром лучей (u, v) и $(u + du, v)$, мы получим, принимая во внимание допущение (22):

$$\cos\alpha = n \cdot n_1 = \frac{Ee_v\,du - Ge_u\,dv}{\sqrt{EG}\sqrt{E\,du^2 + G\,dv^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{G}} e_v = \frac{\sqrt{E}\,du}{\sqrt{E\,du^2 + G\,dv^2}},$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{G}\,dv}{\sqrt{E\,du^2 + G\,dv^2}}$$

и, значит,

$$r = r_1 \cos^2\alpha + r_2 \sin^2\alpha. \tag{23}$$

Эта формула показывает, что абсцисса основания общего перпендикуляра r меняется между значениями r_1 и r_2.

Действительно, допустим, что $r_1 > r_2$; заменяя

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \quad \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2},$$

мы представим формулу (23) в виде:

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2} + \frac{r_1 - r_2}{2}\cos 2\alpha. \tag{23′}$$

Так как оба коэффициента положительны, то наибольшее значение $r = r_1$ будет при $\cos 2\alpha = 1$, например при $\alpha = 0$. При повороте общего перпендикуляра около луча AM на угол $\frac{\pi}{2}$ от $\alpha = 0$ до $\alpha = \frac{\pi}{2}$ абсцисса r уменьшается до наименьшего значения $r = r_2$. При дальнейшем увеличении α от $\alpha = \frac{\pi}{2}$ до $\alpha = \pi$ абсцисса r возвращается к значению r_1.

Таким образом, основание общего перпендикуляра пробегает на луче AM отрезок M_1M_2 длиной $r_1 - r_2$ между точками M_1 и M_2:

$$M_1 = A + r_1 e, \quad M_2 = A + r_2 e.$$

Эти точки M_1 и M_2 называются *граничными* точками луча, середина C отрезка M_1M_2

$$C = A + \frac{r_1 + r_2}{2} e$$

называется серединой или *центром* луча.

Направления векторов кратчайших расстояний (общих перпендикуляров) в граничных точках взаимно перпендикулярны. При перемещении основания общего перпендикуляра от точки M_1 до точки M_2 и обратно этот перпендикуляр поворачивается на $180°$ и по возвращении в точку M_1 совпадает с исходным положением.

В граничных точках проходит только по одному такому перпендикуляру; в каждую внутреннюю точку отрезка M_1M_2 падает два перпендикуляра, равнонаклонённых к перпендикулярам в граничных точках. В центре луча направления векторов расстояний совпадают с биссектрисами угла между перпендикулярами в граничных точках и, следовательно, между собой взаимно перпендикулярны. По мере приближения точки M к границам отрезка M_1M_2 угол между парой перпендикуляров в точке M уменьшается и в граничных точках обращается в нуль. Плоскости, перпендикулярные к направлению общего перпендикуляра в граничных точках, называются *главными плоскостями*; линейчатые поверхности конгруэнции, линии сжатия которых пересекают лучи в их граничных точках, называются *главными поверхностями*. При выводе формулы (23) мы относили конгруэнцию к главным поверхностям.

Геометрическое место каждой из граничных точек луча называется *граничной поверхностью*, место центров луча — *средней поверхностью* конгруэнции.

5. Уравнение главных поверхностей и абсцисс граничных точек. Для вывода формул для абсцисс r_1, r_2 граничных точек и уравнения главных поверхностей при произвольном выборе координатных поверхностей u, v надо искать экстремум величины r, определяемой формулой (14′), принимая за независимое переменное отношение дифференциалов $du : dv$.

Освобождаясь от знаменателя в уравнении (14′), получим:

$$r\,(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2) + e\,du^2 + (f+f')\,du\,dv + g\,dv^2 = 0.$$

Менять отношение $du:dv$ можно, изменяя только числитель при постоянном знаменателе или только знаменатель при постоянном числителе. Дифференцируя обе части нашего равенства по переменному $\xi = du$, а затем по переменному $\eta = dv$, считая E, F, G, e, $f+f'$, g постоянными, ибо луч (u, v) не меняется, и полагая, чтобы найти экстремум r, производные $\frac{dr}{d\xi}$ или соответственно $\frac{dr}{d\eta}$ равными нулю, получим:

$$\begin{aligned} &r\,(E\,du + F\,dv) + e\,du + \frac{f+f'}{2}\,dv = 0,\\ &r\,(F\,du + G\,dv) + \frac{f+f'}{2}\,du + g\,dv = 0, \end{aligned} \qquad (24)$$

откуда, исключая $du:dv$, найдём квадратное уравнение для абсцисс граничных точек r_1, r_2:

$$(EG - F^2)\,r^2 + [gE + eG - (f+f')\,F]\,r + eg - \frac{(f+f')^2}{4} = 0, \quad (25)$$

и абсциссу центра луча

$$r_0 = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{(f+f')\,F - eG - gE}{EG - F^2}. \quad (26)$$

Исключая r из уравнений (24), получим дифференциальное уравнение главных поверхностей

$$\left(\frac{f+f'}{2}E - eF\right)du^2 + (gE - eG)\,du\,dv + \left(gF - \frac{f+f'}{2}G\right)dv^2 = 0. \quad (27)$$

6. Фокусы. Формула (21) даёт главную часть бесконечно малого расстояния MM' между лучами (u, v) и $(u+du, v+dv)$ дифференциальной окрестности.

Если главная часть расстояния (21) обращается в нуль, то лучи дифференциальной окрестности пересекаются и порядок малости расстояния MM' бесконечно приближающихся лучей повышается. Это будет иметь место, если числитель в выражении (21) обращается в нуль:

$$\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \\ e\,du + f\,dv & f'\,du + g\,dv \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\begin{aligned} (f'E - eF)\,du^2 + [gE + (f' - f)\,F - eG]\,du\,dv +\\ + (gF - fG)\,dv^2 = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Мы получили квадратное уравнение для отношения дифференциалов $du:dv$. Следовательно, в окрестности луча AM существует два луча — действительных и различных, комплексно сопряжённых или совпадающих, которые до бесконечно малых второго порядка пересекают луч. В зависимости от того, будут ли эти два луча действительны и различны, мнимы, или они будут совпадать, луч будет называться гиперболическим, эллиптическим или параболическим.

Обозначим буквой F и будем называть *фокусом луча* точку пересечения данного луча с лучом его дифференциальной окрестности или точку, расстояние которой от соседнего луча $(u+du, v+dv)$ является бесконечно малой второго порядка по отношению к приращению параметров du, dv.

Чтобы составить уравнение для определения абсциссы фокуса F, достаточно исключить отношение дифференциалов $du:dv$ из уравнений (28) и (14′).

Мы сейчас покажем, что фокус можно определить как точку прикосновения луча конгруэнции к огибающей, если из конгруэнции выделить такое однопараметрическое семейство лучей $\mathscr{H}$, которое допускает огибающую.

Действительно, если точка

$$F = A + \rho e$$

есть точка прикосновения луча семейства к огибающей, то при перемещении луча внутри семейства точка F должна описывать линию, касательная к которой совпадает с лучом и вектор касательной коллинеарен вектору направления луча e. Следовательно, при подходящем множителе пропорциональности должно иметь место равенство

$$dF = \lambda e, \tag{29}$$

или

$$dA + \rho\, de + e\, d\rho = \lambda e, \tag{29'}$$

или

$$(A_u + \rho e_u)\, du + (A_v + \rho e_v)\, dv + e\, d\rho = \lambda e,$$

где отношение дифференциалов $du:dv$ соответствует перемещению луча внутри семейства $\mathscr{H}$, имеющего огибающую.

Умножая обе части этого равенства на векторы e_u или e_v, чтобы исключить множитель пропорциональности λ, получим, пользуясь формулами (16) и (17):

$$\begin{aligned} e\, du + f\, dv + \rho\,(E\, du + F\, dv) &= 0, \\ f'\, du + g\, dv + \rho\,(F\, du + G\, dv) &= 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Умножая первое уравнение на du, второе на dv и складывая, получим уравнение (14′) с заменой абсциссы r на ρ. С другой стороны, исключение абсциссы фокуса ρ из уравнений (30) приводит к уравнению (28). Следовательно, линейчатые поверхности конгруэнции, определяемые уравнением (28), обладают огибающей: их прямолинейные образующие (лучи конгруэнции) касаются линии, описываемой фокусом. Такие линейчатые поверхности называются развёртывающимися, а огибающая их образующих — ребром возврата развёртывающейся поверхности.

Следовательно, лучи конгруэнции можно двумя способами разложить на однопараметрическое семейство развёртывающихся поверхностей (действительных в области гиперболических лучей и мнимых в области эллиптических), а фокусы суть точки касания луча с рёбрами возврата двух развёртывающихся поверхностей конгруэнции, которые проходят через этот луч.

Исключая из уравнений (30) дифференциалы du, dv, получим квадратное уравнение для абсцисс фокусов ρ:

$$(EG - F^2)\,\rho^2 + [gE - (f + f')\,F + eG]\,\rho + eg - ff' = 0. \tag{31}$$

На каждом луче лежат два фокуса. Гиперболический луч несёт два действительных и различных фокуса, эллиптический — два мнимых

фокуса, параболический луч имеет только один фокус, который считается за пару совпавших фокусов.

Сравнивая уравнение (31) с уравнением (25), определяющим абсциссы r_1, r_2 граничных точек, мы видим, что первые два коэффициента квадратных уравнений совпадают. Поскольку отношение коэффициента при первой степени неизвестного к коэффициенту при квадрате его равно с обратным знаком сумме корней квадратного уравнения, оба уравнения имеют одну и ту же сумму корней:

$$\rho_1 + \rho_2 = r_1 + r_2.$$

Значит, середина расстояния между фокусами F_1, F_2 совпадает с серединой отрезка между граничными точками M_1, M_2. Иначе говоря, *фокусы расположены симметрично относительно центра луча.*

С другой стороны, сравнение свободных членов в уравнениях (25) и (31) даёт соотношение

$$\rho_1\rho_2 = r_1 r_2 + \frac{1}{4}\,\frac{(f - f')^2}{EG - F^2},$$

откуда

$$(\rho_1 - \rho_2)^2 = (r_1 - r_2)^2 - \frac{(f - f')^2}{EG - F^2}. \tag{32}$$

Следовательно, расстояние между фокусами F_1, F_2 меньше, чем расстояние между граничными точками M_1, M_2, т. е. фокусы лежат внутри отрезка, отсекаемого граничными точками луча.

Плоскость двух пересекающихся лучей дифференциальной окрестности или плоскость, проходящая через луч (u, v) перпендикулярно к вектору n того общего перпендикуляра, который соответствует бесконечно малому второго порядка расстоянию этого луча от его соседнего, называется *фокальной плоскостью луча.* Её положение можно определить по формуле (23), если известна абсцисса фокуса.

Если начало луча A поместить в центр, то будем иметь одновременно:

$$r_1 + r_2 = 0, \quad \rho_1 + \rho_2 = 0.$$

Формула (23′) примет вид

$$r = r_1 \cos 2\alpha \tag{33}$$

и для фокусов $r = \rho_1$, $r = \rho_2 = -\rho_1$ даст:

$$\rho_1 = r_1 \cos 2\alpha_1, \quad -\rho_1 = r_1 \cos 2\alpha_2,$$

где α_1, α_2 — углы, образованные перпендикулярами к фокальным плоскостям с общим перпендикуляром бесконечно близких лучей, проходящим через граничную точку M_1.

Так как

$$\cos 2\alpha_1 + \cos 2\alpha_2 = 0, \text{ т. е. } \alpha_1 \pm \alpha_2 = \frac{\pi}{2},$$

то фокальные плоскости одинаково наклонены к главным плоскостям (см. § 4).

7. Распределение касательных плоскостей к поверхностям конгруэнции вдоль луча. Всякое уравнение между координатами

$$\varphi(u, v) = 0 \tag{34}$$

выделяет из двумерного многообразия лучей конгруэнции одномерное подмногообразие, т. е. определяет линейчатую поверхность конгруэнции. Касательная плоскость к поверхности (34) в некоторой точке её M содержит, конечно, тот луч конгруэнции AM, который принадлежит поверхности (34) и через эту точку проходит. Касательная плоскость содержит касательные ко всем линиям на поверхности в точке M, в том числе, например, касательную к линии, которую описывает точка, определяемая формулой (8), при постоянном значении параметра t.

Вектор направления луча $\boldsymbol{e}$ и вектор $d\boldsymbol{A} + t\,d\boldsymbol{e}$ касательной к линии $t = \text{const}$. определяют касательную плоскость, проходящую через луч AM. Их векторное произведение

$$\boldsymbol{e} \times d\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{e} \times d\boldsymbol{e} \tag{35}$$

даёт вектор нормали к поверхности. В раскрытой форме вектор нормали имеет вид

$$(\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{A}_u + t\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{e}_u)\,du + (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{A}_v + t\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{e}_v)\,dv. \tag{35'}$$

Здесь дифференциалы $du:dv$ находятся из уравнения (34).

Если закрепить на луче AM точку M и менять поверхность (34), проходящую через луч AM, т. е. в формуле (35′) менять отношение дифференциалов $du:dv$, то нормали (35′) образуют пучок векторов с базисом из векторов

$$\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{A}_u + t\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{e}_u, \quad \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{A}_v + t\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{e}_v. \tag{36}$$

Пучок нормалей вырождается, и все поверхности конгруэнции имеют одну касательную плоскость, если векторы (36) коллинеарны. Обозначая множитель пропорциональности буквой λ и вынося общий множитель $\boldsymbol{e}$ за скобку, мы можем написать условие коллинеарности векторов (36) в виде равенства

$$\boldsymbol{e} \times \{\boldsymbol{A}_u + t\boldsymbol{e}_u - \lambda(\boldsymbol{A}_v + t\boldsymbol{e}_v)\} = 0.$$

Так как векторное произведение равно нулю, то множители параллельны и скалярные произведения второго множителя на векторы $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, перпендикулярные к первому множителю, равны нулю

$$\boldsymbol{e}_u \cdot \{\boldsymbol{A}_u - \lambda\boldsymbol{A}_v + t(\boldsymbol{e}_u - \lambda\boldsymbol{e}_v)\} = 0,$$
$$\boldsymbol{e}_v \cdot \{\boldsymbol{A}_u - \lambda\boldsymbol{A}_v + t(\boldsymbol{e}_u - \lambda\boldsymbol{e}_v)\} = 0.$$

Раскрывая скобки и пользуясь формулами (16) и (17), мы прямо придём к уравнениям (30), если заменить

$$t = \rho, \quad \lambda = -\frac{dv}{du}.$$

Первое из этих равенств показывает, что это может иметь место только в фокусах.

Итак, *касательные плоскости линейчатых поверхностей конгруэнции, проходящих через один луч, образуют в каждой точке луча пучок. Этот пучок сжимается в одну плоскость, и все поверхности касаются друг друга в фокусах луча.*

8. Развёртывающиеся поверхности конгруэнции. Если мы потребуем, чтобы вектор нормали (35′) к линейчатой поверхности конгруэнции не зависел от абсциссы t точки касания, то мы придём к линейчатым поверхностям с одной и той же касательной плоскостью вдоль образующей, т. е. к развёртывающимся поверхностям конгруэнции.

Мы должны теперь потребовать, чтобы векторы

$$\boldsymbol{e} \times (\boldsymbol{A}_u\,du + \boldsymbol{A}_v\,dv), \quad \boldsymbol{e} \times (\boldsymbol{e}_u\,du + \boldsymbol{e}_v\,dv)$$

были коллинеарны. Обозначая множитель пропорциональности буквой λ и вынося множитель $\boldsymbol{e}$ за скобку, мы должны потребовать, чтобы векторное произведение

$$\boldsymbol{e} \times \{\boldsymbol{A}_u\,du + \boldsymbol{A}_v\,dv - \lambda(\boldsymbol{e}_u\,du + \boldsymbol{e}_v\,dv)\} = 0$$

равнялось нулю. Отсюда опять будет следовать коллинеарность множителей и обращение в нуль скалярных произведений второго множителя на векторы $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, перпендикулярные к первому

$$\boldsymbol{e}_u \cdot \{\boldsymbol{A}_u\,du + \boldsymbol{A}_v\,dv - \lambda(\boldsymbol{e}_u\,du + \boldsymbol{e}_v\,dv)\} = 0,$$
$$\boldsymbol{e}_v \cdot \{\boldsymbol{A}_u\,du + \boldsymbol{A}_v\,dv - \lambda(\boldsymbol{e}_u\,du + \boldsymbol{e}_v\,dv)\} = 0.$$

Раскрывая скобки, мы придём с помощью формул (16) и (17) к уравнениям (30) на этот раз с заменой

$$\lambda = -\rho.$$

Это снова доказывает, что уравнение (30) или, по исключении ρ, уравнение (28) *определяют развёртывающиеся поверхности конгруэнции.*

Здесь следует остановиться на противоречии, возникающем из двух последних теорем, именно: в фокусах все линейчатые поверхности конгруэнции имеют общую касательную плоскость, в то время как развертывающаяся поверхность конгруэнции имеет одну и ту же касательную плоскость во всех точках луча и, следовательно, не может в двух фокусах луча иметь общую касательную плоскость со всеми другими линейчатыми поверхностями конгруэнции. Противоречие разъясняется тем, что развёртывающаяся поверхность имеет особую линию — ребро возврата; один из фокусов луча лежит на этой линии, и здесь развёртывающаяся поверхность не касается других линейчатых поверхностей конгруэнции, в другом фокусе её касательная плоскость совпадает с общей касательной плоскостью всех других линейчатых поверхностей.

Так как касательная плоскость развёртывающейся поверхности совпадает с соприкасающейся плоскостью ребра возврата, то она содержит две прямолинейные образующие дифференциальной окрестности, т. е. два бесконечно близких луча конгруэнции, расстояние между которыми — бесконечно малое второго порядка по отношению к приращениям координат. Следовательно, касательная плоскость развёртывающейся поверхности является фокальной плоскостью луча. При этом фокальная плоскость служит общей касательной плоскостью всех линейчатых поверхностей конгруэнции во втором фокусе F_2, а в первом фокусе F_1 является соприкасающейся плоскостью к ребру возврата, описанному фокусом F_1.

9. Фокальные поверхности конгруэнции. Геометрическое место рёбер возврата или, что то же, геометрическое место фокусов, образует *фокальную поверхность* конгруэнции, которая в области гиперболических лучей действительна и состоит из двух полостей по числу фокусов. Следует заметить, что одна полость может непосредственно переходить в другую. Поскольку мы всегда будем рассматривать конгруэнцию в некоторой области, где две полости фокальной поверхности можно различить одну от другой, мы будем говорить о двух фокальных поверхностях конгруэнции.

Касательная плоскость к фокальной поверхности

$$F = A + \rho e \tag{37}$$

определяется касательными к двум кривым на поверхности

$$dF = dA + \rho\, de + e\, d\rho. \tag{38}$$

Мы уже видели [формула (29) стр. 26], что при подходящем выборе дифференциалов $du : dv$ эта касательная совпадает с лучом конгруэнции e. *В гиперболической области всякий луч касается обеих фокальных поверхностей в своих фокусах.*

Умножая векторно вектор направления луча e на вектор касательной (38), получим вектор нормали фокальной поверхности:

$$N = e \times dF = e \times dA + \rho e \times de.$$

Он в точности совпадает с вектором нормали произвольной линейчатой поверхности в фокусе, определяемом по формуле (35), если там положить $t = \rho$.

Таким образом, в фокусе *все линейчатые поверхности конгруэнции касаются фокальной поверхности*. Исключение составляет та развёртывающаяся поверхность конгруэнции, которая имеет на этой фокальной поверхности своё ребро возврата.

Развёртывающиеся поверхности высекают на каждой фокальной поверхности сеть линий (28), которая называется *фокальной сетью* конгруэнции. *Фокальная сеть линий на каждой фокальной поверхности сопряжена.*

Действительно, рассмотрим, например, первую фокальную поверхность. Одно из двух семейств линий этой поверхности (28), как мы видели, состоит из рёбер возврата одного семейства развёртывающихся поверхностей конгруэнции. Касательные к этим линиям — лучи конгруэнции.

Возьмём какую-нибудь линию другого семейства (28). Если мы будем итти вдоль этой линии и посылать касательные к линиям первого семейства, то получим линейчатую поверхность конгруэнции, ибо все наши касательные — лучи конгруэнции. Эта линейчатая поверхность — развёртывающаяся, ибо удовлетворяет уравнению развёртывающихся поверхностей конгруэнции (28), а отсюда прямо следует по определению сопряжённых направлений на поверхности (Т. П., стр. 75), что система линий (28) на первой фокальной поверхности сопряжена. Точно так же доказывается, что она сопряжена и на второй фокальной поверхности.

II. СПЕЦИАЛЬНЫЕ КОНГРУЭНЦИИ

10. Параболическая конгруэнция. Изложенная теория имеет целый ряд особых случаев и исключений.

Мы видели, что в гиперболической области (в области гиперболических лучей) конгруэнция представляет совокупность общих касательных двух фокальных поверхностей (или часть этой совокупности: может случиться, что вся совокупность общих касательных пары поверхностей распадается на две конгруэнции, обладающие различными свойствами; лучи таких конгруэнций, имея первым фокусом одну и ту же точку первой поверхности, касаются второй поверхности в различных точках).

В эллиптической области дело обстоит точно так же, с той разницей, что фокусы мнимы, и мы имеем здесь действительные общие касательные двух сопряжённых мнимых поверхностей.

Как обстоит дело в параболической области?

Допустим, что в рассматриваемом многообразии лучей конгруэнции фокусы на каждом луче совпадают. Квадратное уравнение (31) § 6 имеет равные корни. Уравнение (28) § 6 определяет только одно семейство развёртывающихся поверхностей конгруэнции. На единственной фокальной поверхности два семейства линий (28) § 6 совпадают. Это сдвоенное семейство линий будет сопряжено само себе, т. е. будет семейством асимптотических линий.

Параболическая конгруэнция образована касательными одного семейства асимптотических линий произвольной поверхности.

Это нетрудно проверить непосредственным подсчётом.

Совместим начало луча A с единственным фокусом. Выберем координатные линии в сферическом изображении конгруэнции так, чтобы уравнение $v = \text{const}$. определяло единственное семейство развёртывающихся поверхностей, а линии $u = \text{const}$. пересекали на сфере линии $v = \text{const}$. ортогонально. Мы будем иметь:

$$F = 0. \tag{39}$$

Затем уравнения (30) § 6, если туда внести $\rho = 0$ и $dv = 0$, дадут:

$$e = 0, \quad f' = 0. \tag{40}$$

Наконец, условие равенства корней уравнения (31) § 6 даёт:

$$g = 0. \tag{41}$$

Из уравнений $f' = 0$, $g = 0$, которые, в силу формул (17) § 3, запишутся в виде

$$\boldsymbol{A}_u \cdot \boldsymbol{e}_v = 0, \quad \boldsymbol{A}_v \cdot \boldsymbol{e}_v = 0,$$

следует, что вектор $\boldsymbol{e}_v$ является нормалью фокальной поверхности (A) и, следовательно, единичный вектор этой нормали будет

$$\boldsymbol{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{G}}\, \boldsymbol{e}_v. \tag{42}$$

С другой стороны, так как касательная к линии u поверхности (A) совпадает с лучом конгруэнции, то векторы $\boldsymbol{A}_u$ и $\boldsymbol{e}$ коллинеарны:

$$\boldsymbol{A}_u = \lambda \boldsymbol{e},$$

где λ — множитель пропорциональности, а поскольку теперь

$$\boldsymbol{A}_{uu} = \lambda_u \boldsymbol{e} + \lambda \boldsymbol{e}_u,$$

то соприкасающаяся плоскость линии u перпендикулярна к вектору

$$\boldsymbol{A}_u \times \boldsymbol{A}_{uu} = \lambda \boldsymbol{e} \times (\lambda_u \boldsymbol{e} + \lambda \boldsymbol{e}_u) = \lambda^2 \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{e}_u.$$

Между тем линии u и v на сфере ортогональны и, следовательно, вектор касательной к линии v на сфере перпендикулярен и к вектору нормали к сфере $\boldsymbol{e}$ и к вектору касательной линии u на сфере $\boldsymbol{e}_u$; тем самым вектор $\boldsymbol{e}_v$ коллинеарен векторному произведению $\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{e}_u$. Значит, соприкасающаяся плоскость линии u перпендикулярна к вектору $\boldsymbol{e}_v$, который служит нормалью поверхности (A). Отсюда вытекает, что соприкасающаяся плоскость линии u совпадает с касательной плоскостью к поверхности (A), и линия u на поверхности (A) — асимптотическая (Т. П., стр. 77), что и требовалось доказать.

Далее, уравнение (25) § 5 для абсцисс граничных точек теперь принимает вид

$$r^2 = \frac{f^2}{4EG}; \tag{43}$$

следовательно, граничные точки расположены симметрично относительно начала A и единственный фокус совпадает с центром луча, что, конечно, и следовало ожидать.

С другой стороны, для фокальной поверхности (A) вектор касательной $\boldsymbol{A}_v$, как лежащий в касательной плоскости, перпендикулярен к нормали $\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{e}_u$, т. е. линейно выражается через векторы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}_u$, а вектор нормали $\boldsymbol{n}_1$, как мы видели, коллинеарен вектору $\boldsymbol{e}_v$. Значит,

$$\boldsymbol{A}_u = \lambda \boldsymbol{e}, \quad \boldsymbol{A}_v = \mu \boldsymbol{e} + \nu \boldsymbol{e}_u, \quad \boldsymbol{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{G}} \boldsymbol{e}_v,$$

где μ, ν — подходящие функции от u, v и множитель $\frac{1}{\sqrt{G}}$ выбран так, чтобы вектор $\boldsymbol{n}_1$ оказался единичным.

Формулы (17) дают теперь

$$f = \nu E, \quad \text{т. е.} \quad \nu = \frac{f}{E}.$$

По этим данным легко подсчитаем коэффициенты первой E_1, F_1, G_1 и второй квадратичной форм (для нас достаточно D_1 и D_1') фокальной поверхности (A):

$$E_1 = \lambda^2, \quad F_1 = \lambda\mu, \quad G_1 = \mu^2 + \frac{f^2}{E}, \quad E_1 G_1 - F_1^2 = \lambda^2 \frac{f^2}{E},$$

$$D_1 = 0, \quad D_1' = \lambda \sqrt{G},$$

откуда кривизна поверхности равна

$$K_1 = \frac{D_1 D_1'' - D_1'^2}{E_1 G_1 - F_1^2} = -\frac{EG}{f^2},$$

и формула (43) принимает вид

$$K_1 = -\frac{1}{(2r)^2}. \tag{43'}$$

Кривизна фокальной поверхности равна с отрицательным знаком обратной величине квадрата расстояния между граничными точками луча.

Эта теорема представляет замечательный специальный случай общего предложения о кривизне фокальных поверхностей конгруэнций W, у которых асимптотические линии на фокальных поверхностях соответствуют друг другу (гл. III, § 42).

11. Нормальная конгруэнция. Мы рассмотрели тот случай, когда фокусы на каждом луче совпадают между собой и, следовательно, совпадают с центром луча.

3 Зак. 1038. С. П. Фиников.

Другой замечательный случай представляет конгруэнция, на лучах которой фокусы совпадают с граничными точками. В этом случае фокальные плоскости совпадают с главными плоскостями и, следовательно, взаимно перпендикулярны. Такая конгруэнция называется *нормальной.*

Уравнение (32) § 6 даёт необходимое и достаточное условие нормальной конгруэнции

$$f = f'. \tag{44}$$

Чтобы придать новый геометрический смысл этому условию и вместе с тем оправдать название нормальной конгруэнции, поставим задачу: *найти поверхность, ортогональную к лучам конгруэнции.*

Чтобы поверхность (M), определяемая уравнением

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A} + t\boldsymbol{e},$$

была ортогональна к лучам конгруэнции, необходимо и достаточно, чтобы неизвестная функция t удовлетворяла уравнению

$$\boldsymbol{e} \cdot d\boldsymbol{M} = 0,$$

или, пользуясь выражением (11) § 3 для $d\boldsymbol{M}$,

$$\boldsymbol{e} \cdot d\boldsymbol{A} + dt = 0$$

или

$$\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{A}_u du + \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{A}_v dv + dt = 0. \tag{45}$$

Условие интегрируемости имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial u}(\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{A}_v) = \frac{\partial}{\partial v}(\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{A}_u),$$

или, если выполнить дифференцирование и сократить члены с $\boldsymbol{A}_{uv}$,

$$\boldsymbol{e}_u \cdot \boldsymbol{A}_v = \boldsymbol{e}_v \cdot \boldsymbol{A}_u,$$

а это по формулам (17) § 3 и является условием (44).

Если оно удовлетворено, то уравнение (45) вполне интегрируемо и определяет t с произвольным постоянным

$$t = -\int [\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{A}_u du + \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{A}_v dv] + \text{const}. \tag{46}$$

Отсюда теорема:

Если конгруэнция допускает поверхность, ортогонально пересекающую ее лучи, то конгруэнция — нормальна. Каждая нормальная конгруэнция допускает однопараметрическое семейство нормальных поверхностей.

Для каждой из этих ортогональных поверхностей лучи конгруэнции служат нормалями, развёртывающиеся поверхности её соответствуют линиям кривизны, а фокальные поверхности служат поверхностями центров кривизны (Т. П., стр. 72).

Нетрудно заметить, что лучи нормальной конгруэнции огибают на фокальных поверхностях геодезические линии. Действительно, если конгруэнция — нормальная, то фокальные плоскости перпендикулярны, и касательная плоскость второй фокальной поверхности проходит через нормаль первой фокальной поверхности. С другой стороны, касательная плоскость второй фокальной поверхности всегда служит соприкасающейся плоскостью линии, огибаемой лучами конгруэнции на первой фокальной поверхности. Значит, соприкасающаяся плоскость ребра возврата проходит через нормаль к поверхности, т. е. (Т. П., стр. 115) эта линия — геодезическая.

Обратно, если ребро возврата — геодезическая, то соприкасающаяся плоскость содержит нормаль к поверхности. Следовательно, касательная плоскость второй фокальной поверхности проходит через нормаль первой, фокальные плоскости перпендикулярны и конгруэнция — нормальная.

12. Изгибание нормальной конгруэнции. Формула (46) допускает очень красивое истолкование, если ввести понятие метрического изгибания конгруэнции.

Рассмотрим некоторую поверхность S и присоединим к каждой точке её прямоугольный трёхгранник T, два ребра которого касаются некоторых линий на поверхности, а третье служит для неё нормалью. Присоединим к каждому трёхграннику T некоторую прямую d произвольным, но определённым образом связанную с трёхгранником. Семейство прямых (d) образует конгруэнцию, присоединённую к поверхности. Подвергнем теперь поверхность S изгибанию и будем предполагать, что каждый трёхгранник T увлекается вместе с той касательной плоскостью поверхности, которой он присоединён, так, что первые рёбра трёхгранника продолжают касаться тех же линий на поверхности, и каждая прямая d перемещается в пространстве, неразрывно связанная со своим трёхгранником T. При этих условиях изгибание поверхности S будет производить преобразование конгруэнции прямых (d).

Преобразование конгруэнции, вызванное изгибанием поверхности, с трёхгранниками которой неразрывно связаны лучи конгруэнции, называется *изгибанием конгруэнции.*

Очевидно, такое изгибание конгруэнции сильно зависит от того, каким образом лучи конгруэнции присоединены к соответствующим трёхгранникам T. Простейший случай тот, когда каждый луч d проходит через вершину трёхгранника T.

Примем поверхность S, производящую изгибание, за исходную поверхность (A) конгруэнции, и пусть

$$ds_1^2 = E_1 du^2 + 2F_1 du\, dv + G_1 dv^2$$

— её линейный элемент. Обозначим буквами α и β углы, образованные лучом конгруэнции с касательными к линиям u и v. Тогда, очевидно, будем иметь

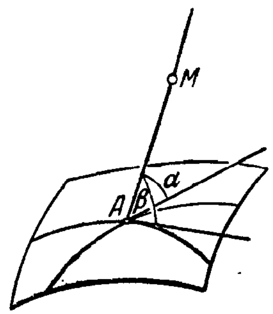
$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{E_1}}\, e \cdot A_u, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{G_1}}\, e \cdot A_v,$$

откуда

$$e \cdot A_u = \sqrt{E_1}\cos\alpha, \quad e \cdot A_v = \sqrt{G_1}\cos\beta,$$

и формула (46) для абсциссы точки M поверхности, нормальной к лучам конгруэнции, принимает вид

$$t = -\int [\sqrt{E_1}\cos\alpha\, du + \sqrt{G_1}\cos\beta\, dv] + \text{const}. \qquad (46')$$



Черт. 2.

Будем изгибать исходную поверхность (A): каждый луч d по условию увлекается вместе с соответствующей точкой A поверхности без изменения углов α и β. При изгибании коэффициенты линейного элемента E_1, G_1 тоже не меняются. Следовательно, в формуле (46′) всё останется без изменения. Если конгруэнция была нормальная и допускала однопараметрическое семейство нормальных к ней поверхностей, то те же точки лучей будут описывать нормальные поверхности и после изгибания, т. е. *конгруэнция останется нормальной при всяком изгибании поверхности.*

13. Изотропная конгруэнция. Если граничные точки совпадают, то уравнение (25) § 5 имеет равные корни, но, в силу тождества

$$[gE + eG - F(f+f')]^2 - 4(EG - F^2)\left[eg - \frac{(f+f')^2}{4}\right] \equiv$$
$$\equiv EG(EG - F^2)\left(\frac{e}{E} - \frac{g}{G}\right)^2 + EG\left[f + f' - F\left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G}\right)\right]^2, \quad (47)$$

дискриминант уравнения (25) представляет сумму двух положительных чисел, ибо для действительной конгруэнции величины E, G, $EG - F^2$ существенно положительны. Он может обратиться в нуль только при обращении в нуль каждого слагаемого в отдельности

$$\frac{e}{E} - \frac{g}{G} = 0, \quad f + f' - F\left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G}\right) = 0.$$

Внося $\frac{e}{E} = \frac{g}{G}$ во второе уравнение, мы приведём наши уравнения к виду

$$\frac{e}{E} = \frac{f+f'}{2F} = \frac{g}{G}. \qquad (47')$$

Уравнение (27) § 5 теперь пропадает тождественно; следовательно, главные поверхности неопределённы.

Коэнгруэнция с неопределёнными главными поверхностями называется *изотропной.*

Так как коэффициенты двух квадратичных форм, стоящих в числителе и знаменателе формулы (14′) § 3, теперь пропорциональны, то абсцисса r точки, ближайшей к соседнему лучу дифференциальной окрестности, не зависит от отношения дифференциалов $du : dv$, определяющих этот луч, и всегда равна отношению

$$r = -\frac{e}{E}.$$

Значит, *линии сжатия всех линейчатых поверхностей изотропной конгруэнции пересекают луч в одной и той же точке — в центре луча.*

Если начало отсчёта абсцисс на луче, точку A, поместить в центре луча, то все коэффициенты второй квадратичной формы (18) § 3 обратятся в нуль:

$$e = 0, \quad g = 0, \quad f' = -f,$$

и уравнение (28) § 6 для развёртывающихся поверхностей принимает вид

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0. \qquad (48)$$

Развёртывающиеся поверхности изотропной конгруэнции мнимы и соответствуют линиям нулевой длины на сфере.

Так как из уравнения (48) следует

$$(F\,du + G\,dv) : (E\,du + F\,dv) = -du : dv,$$

то общий перпендикуляр двух бесконечно близких лучей в фокусе или вектор нормали к фокальной плоскости по формуле (20) § 3 будет параллелен дифференциалу

$$e_u\,du + e_v\,dv = de.$$

Между тем, в силу (48), для этих направлений

$$de^2 = 0.$$

Мнимые прямые, принадлежащие конусу

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

который проходит через мнимую несобственную линию (абсолютный круг) всякой сферы

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2,$$

называются *изотропными* прямыми пространства, Следовательно, фокальные плоскости конгруэнции имеют изотропные направления, чем и объясняется название изотропной конгруэнции.

Поскольку вторая квадратичная форма (18) § 3 тождественно равна нулю, для всякой пары соответствующих перемещений с одним и тем же соотношением дифференциалов $du:dv$ на единичной сфере сферического изображения конгруэнции и на исходной поверхности (A) имеем соотношение

$$dA \cdot de = 0; \tag{49}$$

значит, касательная dA к любой линии средней поверхности конгруэнции (A) перпендикулярна соответствующей касательной сферического изображения de. Говорят, что *средняя поверхность изотропной конгруэнции соответствует сфере ортогональностью линейных элементов*. Это, очевидно, необходимый и достаточный признак изотропной конгруэнции.

14. Бесконечно малое изгибание поверхности. Условию (49) можно дать ещё другую геометрическую интерпретацию.

Рассмотрим две поверхности S и S', определяемые радиусами-векторами их произвольных точек

$$M = M(u, v), \quad M' = M + \varepsilon m,$$

где ε — произвольный постоянный параметр и

$$m = m(u, v) \tag{50}$$

— вектор, заданный как функция от криволинейных координат u, v. Линейные элементы этих поверхностей имеют вид

$$ds^2 = dM^2, \; ds'^2 = (dM + \varepsilon\, dm)^2 = dM^2 + 2\varepsilon\, dM \cdot dm + \varepsilon^2 dm^2. \tag{51}$$

Поверхность S' называется *бесконечно малым изгибанием* поверхности S, если её линейный элемент отличается от линейного элемента поверхности S только на члены, содержащие квадрат параметра ε.

Мы видим из сравнения линейных элементов (51), что поверхность S' будет бесконечно малым изгибанием поверхности S, если имеет место равенство

$$dM \cdot dm = 0, \tag{52}$$

т. е. если поверхность S соответствует вспомогательной поверхности (m), определяемой радиусом-вектором (50), ортогональностью линейных элементов.

В приложении к изотропной конгруэнции мы видели, что средняя поверхность изотропной конгруэнции соответствует сфере ортогональностью линейных элементов. Следовательно, мы можем принять сферу радиуса единицы за поверхность S. Если бесконечно малое изгибание сферы определяется смещением произвольной точки её M на вектор εm, то надо принять поверхность (A), определяемую уравнением

$$A = m,$$

за исходную поверхность конгруэнции, радиус-вектор соответствующей точки M сферы

$$M = e$$

— за вектор направления луча конгруэнции, и мы получим изотропную конгруэнцию со средней поверхностью (A).

Иначе говоря, если сдвинуть каждую точку сферы бесконечно мало в направлении радиуса-вектора центра изотропной конгруэнции пропорционально длине этого вектора, то получим поверхность, линейный элемент которой равен линейному элементу сферы до бесконечно малых второго порядка относительно бесконечно малого множителя пропорциональности ε.

Задачу бесконечно малого изгибания можно связать с проблемой наложимости пары поверхностей, именно: если параметру ε дать два постоянных значения, отличающихся между собой только знаком, то в силу соотношения (52) линейный элемент ds'^2 в обоих случаях будет иметь одно и то же значение. Следовательно, две поверхности

$$M' = M + \varepsilon m, \quad M'' = M - \varepsilon m, \tag{53}$$

при условии (52), имея один и тот же линейный элемент, налагаются друг на друга.

В приложении к изотропной конгруэнции мы можем принять среднюю поверхность (A) изотропной конгруэнции за поверхность S, а вектор смещения m — за радиус-вектор e соответствующей точки единичной сферы. Уравнения (53) примут вид

$$M' = A + \varepsilon e, \quad M'' = A - \varepsilon e.$$

Соответствующие точки пары поверхностей (M') и (M'') расположены на одном и том же луче изотропной конгруэнции на одинаковом постоянном расстоянии от средней точки луча.

Следовательно, откладывая на каждом луче изотропной конгруэнции по обе стороны от центра A один и тот же произвольный постоянный отрезок ε, получим пары точек M', M'', которые принадлежат двум налагающим поверхностям (M') и (M'').

Обратно, *если существует пара налагающихся поверхностей с постоянным расстоянием между соответствующими точками, то прямые, соединяющие пары этих точек, образуют изотропную конгруэнцию*.

Заметим ещё, что в силу предыдущего *средняя поверхность изотропной конгруэнции допускает бесконечно малое изгибание, при котором каждая точка смещается на один и тот же отрезок по лучу конгруэнции*.

15. Литературные указания. Изложенную в §§ 2—9 теорию конгруэнций в основном дал Куммер [1]. Она почти без изменения вошла в курс лекций по дифференциальной геометрии Бианки (итальянское и немецкое издания) [8]. За 80 лет до Куммера Монж [2] уже рассматривал развёртывающиеся поверхности конгруэнции.

К § 4. Формула (23) дана Гамильтоном [1] за 30 лет до Куммера как естественное развитие геометрической оптики. Маннхейм [1] построил аналогичную формулу для параметра распределения линейчатых поверхностей конгруэнции, проходящих через луч: $\frac{1}{a}=\frac{1}{a_1}\cos^2\alpha+\frac{1}{a_2}\sin^2\alpha$. В наши дни Дельглейз [1] показал, что сумма параметров распределения двух линейчатых поверхностей конгруэнции с общим центром на луче равна среднему параметру конгруэнции. Гензель [1], продолжая работу Куммера, показывает, что лучи дифференциальной окрестности произвольного луча конгруэнции распадаются на четвёрки «связанных» между собой лучей так, что расстояние от основного луча одно и то же у всех лучей четвёрки. Линии сжатия их попарно пересекаются, и точки пересечения расположены симметрично относительно середины луча.

Изложенная в § 10 теория дана Дарбу [1].

К § 11. Нормальную конгруэнцию рассматривал уже Монж [2]. Его ученик Малюс [1] вернулся к ней с точки зрения оптики. Теорема о перпендикулярности фокальных плоскостей впервые строго доказана Бертраном [1]. Малюс публикует [1] теорему о сохранении нормальной конгруэнции при отражении и преломлении. Доказательство дано Дюпеном [1], а также Кэтеле и Жергони (см. истор. справку Дарбу [2], стр. 293). Леви-Чивита [1] показал, что посредством преломления всякую нормальную конгруэнцию можно перевести в любую другую тоже нормальную конгруэнцию.

О связи теории конгруэнций с задачами геометрической оптики см. в конце книги стр. 509.

Относительно метрического изгибания конгруэнции см. Литературные указания к главе XIII.

К § 13. Изотропная конгруэнция введена Рибокуром [5], который дал все основные теоремы. Связь с общей теорией конгруэнций установил Бианки [5]. Изотропные конгруэнции хорошо связаны с минимальными поверхностями. Литература по этому вопросу будет указана в конце гл. II.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНГРУЭНЦИИ КОМПОНЕНТАМИ ДВИЖЕНИЙ ТРЁХГРАННИКА

I. СИМВОЛИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ КАРТАНА

16. Квадратичные формы конгруэнции. Формы Куммера, которыми мы пользовались в предыдущей главе, позволили определить основные элементы конгруэнции: фокусы, граничные точки, развёртывающиеся и главные поверхности. Они страдают, однако, целым рядом существенных недостатков.

Прежде всего они не инвариантны. Квадратичные формы (15) § 3, (18) § 3, конечно, не зависят от выбора неподвижной системы координат в пространстве, ибо уже векторы de, dA, из которых они построены, не меняются при преобразовании декартовой системы координат. Две формы Куммера инвариантны относительно выбора независимых переменных u, v в том смысле слова, что при замене переменных обе формы непосредственно переходят в новые формы простой подстановкой вместо du, dv их выражений через du^*, dv^*, ибо уже дифференциалы de, dA, как дифференциалы первого порядка, обладают этим свойством.

Это не относится, однако, отдельно к двум слагаемым f, f', составляющим средний коэффициент второй формы (18) § 3.

Далее, вторая форма Куммера существенно зависит от выбора исходной поверхности (A). В сущности, она относится не к конгруэнции как таковой, а к конгруэнции вместе с исходной поверхностью. При замене поверхности (A) другой поверхностью форма (18) § 3 существенно меняется.

Наконец, здесь не поставлен вопрос о возможности определения конгруэнции по заданным семи коэффициентам форм (15) § 3, (18) § 3, точнее, не поставлен вопрос об уравнениях, которым эти семь коэффициентов должны удовлетворять.

Чтобы рационально поставить вопрос о выборе инвариантных форм конгруэнции, будет целесообразно начать с определения конгруэнции компонентами движений трёхгранника, связанного с лучом конгруэнции, подобно тому, как кривая может определяться компонентами движений сопровождающего трёхгранника (Френе) или поверхность — компонентами движений трёхгранника (метод Дарбу).

17. Компоненты движений трёхгранника. Присоединим к начальной точке A каждого луча конгруэнции два единичных вектора $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, перпендикулярных к лучу $\boldsymbol{e}$ и взаимно перпендикулярных между собой так, чтобы три вектора $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}$ образовали прямоугольный трёхгранник T с тем же расположением осей, как и координатный трёхгранник выбранной системы координат $Oxyz$. Допустим, что три единичных вектора $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}$ и радиус-вектор $\boldsymbol{A}$ нам даны как функции от криволинейных координат u, v. Тогда мы можем вычислить дифференциалы dA, $d\boldsymbol{e}_1$, $d\boldsymbol{e}_2$, $d\boldsymbol{e}_3$ и определить их слагающие по осям $\boldsymbol{e}_i$ трёхгранника T

$$\begin{aligned} dA &= \omega^1\boldsymbol{e}_1+\omega^2\boldsymbol{e}_2+\omega^3\boldsymbol{e}_3,\\ d\boldsymbol{e}_i &= \overset{1}{\omega}_i\boldsymbol{e}_1+\overset{2}{\omega}_i\boldsymbol{e}_2+\overset{3}{\omega}_i\boldsymbol{e}_3, \end{aligned} \tag{1}$$

или, короче,

$$\begin{aligned} dA &= \omega^k\boldsymbol{e}_k,\\ d\boldsymbol{e}_i &= \overset{k}{\omega}_i\boldsymbol{e}_k, \end{aligned} \qquad i,\ k=1,\ 2,\ 3, \tag{1'}$$

где, согласно установившемуся уже обычаю, два одинаковых указателя k — один верхний, другой нижний (немые указатели) — означают суммирование так, что формулы (1′), по определению, означают то же, что и формулы (1).

Если рассматривать дифференциалы dA, $d\boldsymbol{e}_i$ как дифференциальные перемещения (главные части бесконечно малых перемещений трёхгранника T или инфинитезимальные преобразования группы движений трёхгранника в пространстве), то величины ω^k, $\overset{k}{\omega}_i$ будут компонентами этих перемещений по осям трёхгранника T или относительными компонентами. В левой части каждого уравнения (1) стоит полный дифференциал, т. е. линейная форма относительно дифференциалов du, dv. Отсюда следует, что компоненты ω^k, $\overset{k}{\omega}_i$, стоящие в правой части, будут тоже линейными формами от дифференциалов du, dv:

$$\begin{aligned} \omega^k &= a^k\,du+b^k\,dv,\\ \overset{k}{\omega}_i &= a_i^k\,du+b_i^k\,dv. \end{aligned} \tag{2}$$

Действительно, умножая обе части уравнений (1′) скалярно на вектор $\boldsymbol{e}_j$ и помня, что в силу ортогональности векторов $\boldsymbol{e}_j$, $\boldsymbol{e}_k$ все произведения $\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_k$ обратятся в нуль, кроме того, которое получится при $k=j$ и которое равно единице, получим

$$\omega^j=\boldsymbol{e}_j\cdot dA,\quad \overset{j}{\omega}_i=\boldsymbol{e}_j\cdot d\boldsymbol{e}_i, \tag{2'}$$

откуда следуют формулы (2).

Если дифференциалам du, dv дать конечные значения, то определяемый по формулам (1) вектор dA будет конечным вектором касательной к кривой, описываемой точкой A, в том движении

$$u=\varphi(t),\quad v=\psi(t),$$

в котором отношение производных $\varphi'(t):\psi'(t)$ в рассматриваемой точке равно отношению выбранных значений дифференциалов $du:dv$.

Нетрудно заметить, что формы (2) не могут быть взяты произвольно. Уже требование ортогональности трёхгранника T и единичности его векторов накладывает на них целый ряд ограничений.

Действительно, дифференцируя тождества

$$\boldsymbol{e}_i^2=1,\quad \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=0,\qquad i\neq j,$$

и пользуясь формулами (1′), получим для второго из этих равенств:

$$d(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j)=\boldsymbol{e}_j\cdot d\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_i\cdot d\boldsymbol{e}_j=\overset{k}{\omega}_i\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_k+\overset{k}{\omega}_j\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_k=0,$$

но произведение $\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_k$ равно нулю, если $k\neq j$, и равно единице, если $k=j$. Следовательно, в каждой из двух сумм $\overset{k}{\omega}_i\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_k$, $\overset{k}{\omega}_j\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_k$ останется только по одному члену: в первой сумме для $k=j$ и во второй для $k=i$. Мы получим:

$$\overset{j}{\omega}_i+\overset{i}{\omega}_j=0. \tag{3a}$$

Такой же результат получится, если $j=i$, но тогда оба слагаемых $\overset{j}{\omega}_i$ и $\overset{i}{\omega}_j$ будут равны между собой, а поскольку их сумма равна нулю, то компоненты $\overset{j}{\omega}_i$ с одинаковыми указателями i и j равны нулю

$$\overset{i}{\omega}_i=0 \qquad \text{не суммировать!} \tag{3b}$$

Уравнения (3a), (3b) не исчерпывают всех ограничений, накладываемых на компоненты $\overset{k}{\omega}_i$. Другие и несравненно более важные условия вытекают из требования, чтобы определяемые по формулам (1) выражения для дифференциалов dA, $d\boldsymbol{e}_i$ действительно были точными дифференциалами.

18. Билинейный ковариант линейной формы. Зададимся двумя семействами кривых, например положим

$$u=\varphi(\alpha,\beta),\quad v=\psi(\alpha,\beta),$$

и будем считать за первое семейство кривых линии $\beta=\text{const.}$, присваивая дифференцированию по этим кривым символ дифференцирования d, за второе — линии $\alpha=\text{const.}$, присваивая дифференцированию по этим линиям символ δ

$$\begin{aligned} du &= \varphi_\alpha d\alpha, & dv &= \psi_\alpha d\alpha,\\ \delta u &= \varphi_\beta\delta\beta, & \delta v &= \psi_\beta\delta\beta, \end{aligned}$$

где $d\alpha$ и $\delta\beta$ надо рассматривать как произвольно заданные постоянные величины. Ввиду полного произвола постоянных $d\alpha$, $\delta\beta$ мы их можем для простоты положить равными единице.

Тогда при вторичном дифференцировании получим:

$$\begin{matrix} d(\delta u) = d(\varphi_\beta) = \varphi_{\alpha\beta}, \\ \delta(du) = \delta(\varphi_\alpha) = \varphi_{\alpha\beta} \end{matrix} \quad \text{и} \quad d(\delta u) = \delta(du).$$

Точно так же для любой функции от переменных u, v

$$dA = \frac{\partial}{\partial\alpha} A, \quad \delta A = \frac{\partial}{\partial\beta} A$$

и

$$d(\delta A) = \delta(dA) = \frac{\partial^2 A}{\partial\alpha\,\partial\beta},$$

т. е. *для любой функции символы дифференцирования переместительны.*

Иначе дело обстоит с произвольной линейной формой

$$\omega = a\,du + b\,dv.$$

Её значения для первого и второго символа дифференцирования

$$\omega(d) = a\varphi_\alpha + b\psi_\alpha,$$
$$\omega(\delta) = a\varphi_\beta + b\psi_\beta,$$

тоже допускают вторичное дифференцирование

$$d\omega(\delta) = \frac{\partial a}{\partial\alpha}\varphi_\beta + \frac{\partial b}{\partial\alpha}\psi_\beta + a\varphi_{\alpha\beta} + b\psi_{\alpha\beta},$$

$$\delta\omega(d) = \frac{\partial a}{\partial\beta}\varphi_\alpha + \frac{\partial b}{\partial\beta}\psi_\alpha + a\varphi_{\alpha\beta} + b\psi_{\alpha\beta},$$

но разность этих дифференциалов по сокращении вторых производных можно представить в виде суммы двух функциональных определителей

$$d\omega(\delta) - \delta\omega(d) = \frac{\partial(a,\varphi)}{\partial(\alpha,\beta)} + \frac{\partial(b,\psi)}{\partial(\alpha,\beta)}, \quad \frac{\partial(a,\varphi)}{\partial(\alpha,\beta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial\alpha} & \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} \\ \frac{\partial a}{\partial\beta} & \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} \end{vmatrix}, \qquad (4')$$

которая вообще будет отлична от нуля.

Билинейная форма

$$\Omega(d,\delta) = d\omega(\delta) - \delta\omega(d) = da\,\delta u - \delta a\,du + db\,\delta v - \delta b\,dv \qquad (4)$$

инвариантна относительно замены переменных u, v, ибо выражена через дифференциалы первого порядка, которые по основной теореме анализа при замене переменных преобразуются сами в себя. Форма (4) носит название *билинейного коварианта.*

Билинейный ковариант формы ω равен нулю тогда и только тогда, когда линейная форма ω есть полный дифференциал (М. В. Ф., стр. 82).

19. Внешние произведения и внешние дифференциалы. Билинейные коварианты в форме (4′) и (4) вводят в рассмотрение определители вида

$$\begin{vmatrix} da & du \\ \delta a & \delta u \end{vmatrix} = da\,\delta u - \delta a\,du.$$

Для таких определителей можно ввести символическое обозначение:

$$[\omega_1\omega_2] = \begin{vmatrix} \omega_1(d) & \omega_2(d) \\ \omega_1(\delta) & \omega_2(\delta) \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Выражение, стоящее в левой части, называется *внешним произведением* двух форм ω_1, ω_2, выражение в правой части — его значением для двух символов дифференцирования d и δ. Дифференциальные формы, составленные из внешних произведений, называются *внешними дифференциальными* формами. Значение внешней дифференциальной формы получится, если каждое внешнее произведение линейных форм заменить определителем (5); следовательно, значением внешней квадратичной формы является билинейная форма.

Как в обыкновенной алгебре два многочлена равны, если равны их числовые значения, вычисленные для произвольных, но одинаковых для обоих многочленов значений букв, так в алгебре внешних форм (алгебре Грассмана) две внешние дифференциальные формы считаются равными, если равны их значения при любом выборе дифференцирований, соответствующих символам d и δ.

Отсюда можно вывести такие правила действий (М. В. Ф., стр. 86): *Внешние произведения и внешние дифференциальные формы преобразуются по правилам обычной алгебры за одним исключением: перестановка двух линейных множителей меняет знак внешнего произведения* (ибо при этом в определителе (5) переставляются два столбца).

Например, имеем:

$$[\omega_1\omega_2] = -[\omega_2\omega_1],$$
$$[a\omega_1\omega_2] = a[\omega_1\omega_2]. \qquad (6)$$

Внешняя квадратичная форма, присоединённая билинейному коварианту (4) линейной формы ω, называется *внешним дифференциалом* её и обозначается $D\omega$.

Следовательно, для формы

$$\theta = a_i\,du^i = a_1\,du^1 + a_2\,du^2 + \ldots + a_n\,du^n \qquad (7)$$

внешний дифференциал равен

$$D\theta = [da_i\,du^i], \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (8)$$

В частности, *внешний дифференциал от полного дифференциала равен нулю.*

Правила внешнего дифференцирования вполне сходны с правилами обычного дифференцирования, но требуют сохранения порядка множителей, как при дифференцировании векторных произведений

$$D(d\varphi)=0,$$
$$D(\omega_1+\omega_2)=D\omega_1+D\omega_2, \tag{9}$$
$$D(a\omega)=[da\,\omega]+aD\omega,$$

где a — любая функция (не содержит дифференциалов). Они доказываются простой проверкой (М. В. Ф., стр. 112).

20. Лемма Картана. Для квадратичных форм существует замечательное предложение, известное под именем *леммы Картана*:

Если два ряда форм θ_i и ω^i $(i=1, 2, \ldots, m)$ удовлетворяют тождеству

$$[\theta_1\omega^1]+[\theta_2\omega^2]+\ldots+[\theta_m\omega^m]=0 \tag{10}$$

и формы ω^i — линейно независимы, то формы θ_i линейно выражаются через ω^i с симметричной матрицей коэффициентов

$$\theta_i=a_{ik}\omega^k, \quad a_{ik}=a_{ki}.$$

Действительно, если формы ω^i линейно независимы, то равенства вида (7), определяющие формы ω^i, можно разрешить относительно m дифференциалов, например $du^1, du^2, \ldots, du^m$. Внося эти значения в выражения вида (7), определяющие формы θ_i, мы их линейно выразим через ω^i и остальные du^α:

$$\theta_i=a_{ik}\omega^k+b_{i\alpha}du^\alpha \quad i, k=1, 2, \ldots, m; \ \alpha=m+1, \ldots, n.$$

Внося эти выражения в уравнение (10), мы получим равенство вида

$$a_{ik}[\omega^k\omega^i]+b_{i\alpha}[du^\alpha\omega^i]=0. \tag{11}$$

Так как здесь формам ω^i и дифференциалам du^α можно давать любые значения, то, полагая все $\omega^i(d)$ и $\omega^i(\delta)$, du^α и δu^α равными нулю, кроме du^n и $\omega^1(\delta)$, и выписывая значение квадратичной формы, стоящей в левой части равенства (11), для этих двух символов дифференцирования, мы получим в левой части только один член

$$b_{1n}\,du^n\,\omega^1(\delta)=0,$$

откуда в силу неравенств $du^n\neq 0$, $\omega^1(\delta)\neq 0$ получим $b_{1n}=0$; точно так же найдём все остальные равенства $b_{i\alpha}=0$.

Полагая теперь все $\omega^i(d)$ и $\omega^i(\delta)$ равными нулю, кроме $\omega^1(d)$ и $\omega^2(\delta)$, и выписывая значение квадратичной формы (11), мы сохраним два члена

$$a_{12}\omega^1(d)\,\omega^2(\delta)-a_{21}\omega^2(\delta)\,\omega^1(d)=0,$$

откуда в силу неравенств $\omega^1(d)\neq 0$, $\omega^2(\delta)\neq 0$, имеем:

$$a_{12}=a_{21},$$

и также получим $a_{ik}=a_{ki}$.

Для $m=1$ имеем следствие:

Если внешнее произведение линейных форм θ и ω равно нулю

$$[\theta\omega]=0,$$

то формы пропорциональны

$$\theta=\lambda\omega, \qquad \lambda \text{ — функция (скаляр).}$$

II. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНГРУЭНЦИИ КОМПОНЕНТАМИ ДВИЖЕНИЙ ТРЁХГРАННИКА

21. Уравнения структуры евклидова пространства. Вернёмся к уравнениям (1′) § 17

$$d\boldsymbol{A}=\omega^k\boldsymbol{e}_k, \qquad d\boldsymbol{e}_i=\omega_i^k\boldsymbol{e}_k, \qquad i, k=1, 2, 3, \tag{1′}$$

и, чтобы не связывать себя специальным случаем, будем предполагать, что линейные формы ω^k, ω_i^k зависят от произвольного числа r независимых переменных $u^1, u^2, \ldots, u^r$. В трёхмерном пространстве это число r не больше шести, ибо наиболее общий прямоугольный трёхгранник зависит от шести параметров: трёх координат его вершины A и трёх эйлеровых углов, определяющих поворот трёхгранника из его начального положения.

Если существует хотя бы одно семейство трёхгранников, координаты которых удовлетворяют системе (1′), то эти координаты будут удовлетворять любым уравнениям, полученным из уравнений (1′) дифференцированием по любым независимым переменным, в том числе и внешним дифференциалам их.

Дифференцируя уравнения (1′) внешним образом, получим в левой части нуль, ибо внешний дифференциал от полного дифференциала равен нулю. Правую часть дифференцируем как сумму произведений по формулам (9) § 19 и получаем:

$$[d\boldsymbol{e}_k\omega^k]+\boldsymbol{e}_kD\omega^k=0, \qquad [d\boldsymbol{e}_k\omega_i^k]+\boldsymbol{e}_kD\omega_i^k=0, \qquad i, k=1, 2, 3.$$

Если сюда подставить по формуле (1′)

$$d\boldsymbol{e}_k=\omega_k^j\boldsymbol{e}_j, \qquad j, k=1, 2, 3$$

и вынести конечный множитель e_j (не содержащий дифференциалов) за знак внешнего произведения, то получим:

$$[\omega^j_k\omega^k]\, e_j + e_k D\omega^k = 0, \qquad\qquad i, j, k = 1, 2, 3.$$
$$[\omega^j_k\omega^k_i]\, e_j + e_k D\omega^k_i = 0,$$

Наконец, заменяя во второй сумме немой индекс суммирования k на j (тот и другой пробегает при суммировании ряд значений 1, 2, 3), переставляя во внешнем произведении два множителя с изменением знака и вынося за скобку e_j, получим:

$$\begin{aligned} &\{D\omega^j - [\omega^k\omega^j_k]\}\, e_j = 0, \\ &\{D\omega^j_i - [\omega^k_i\omega^j_k]\}\, e_j = 0. \end{aligned} \qquad (12)$$

Эти уравнения, если их развернуть, имеют вид суммы

$$A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3 = 0,$$

но векторы e_1, e_2, e_3 как взаимно перпендикулярные векторы осей трёхгранника T, не параллельны одной плоскости и не могут быть связаны линейной зависимостью. Следовательно, все коэффициенты A_i равны нулю, и мы получаем, как необходимые следствия уравнений (1′):

$$D\omega^j = [\omega^k\omega^j_k], \qquad (13a)$$

$$D\omega^j_i = [\omega^k_i\omega^j_k]. \qquad (13b)$$

Эти уравнения называются *уравнениями структуры* евклидова пространства.

22. Теорема существования. Если система s уравнений в полных дифференциалах (пфаффова система)

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \ldots, \theta_s = 0 \qquad (14)$$

относительно s неизвестных функций z_j и n независимых переменных x_i допускает решение, зависящее от s произвольных постоянных вида

$$f_1(x; z) = C_1,\ f_2(x; z) = C_2, \ldots, f_s(x; z) = C_s,$$

где буквами $f(x; z)$ обозначены функции от всех переменных x_1, $x_2, \ldots, x_n$, $z_1, z_2, \ldots z_s$, то система называется *вполне интегрируемой*. Очевидно, *вполне интегрируемая система допускает решение и только одно, принимающее для* $x_i = x_i^0$ *заданные начальные значения* $z_j = z_j^0$, где все x_i^0, z_j^0 — постоянные.

Для вполне интегрируемой системы имеет место следующая теорема существования и единственности решения (М. В. Ф., стр. 132).

Теорема. *Необходимое и достаточное условие полной интегрируемости системы* (14) *состоит в том, чтобы система внешних дифференциалов*

$$D\theta_1 = 0,\ D\theta_2 = 0, \ldots, D\theta_s = 0 \qquad (15)$$

была алгебраическим следствием системы (14). Система (15) есть алгебраическое следствие системы (14), если уравнения (15) обращаются в нуль при условии, что переменные x_i, z_j, dx_i, dz_j, δx_i, δz_j рассматриваются как независимые алгебраические величины, связанные только уравнениями (14).

Эту теорему можно приложить к системе (1′), если её написать для скалярных функций — одноимённых (четырёх первых, четырёх вторых или четырёх третьих) координат A, e_i векторов A, e_i:

$$\begin{aligned} dA &= \omega^k e_k, \\ de_i &= \omega^k_i e_k. \end{aligned} \qquad (16)$$

Если компоненты ω^k, ω^k_i удовлетворяют уравнениям структуры (13a), (13b), то внешние дифференциалы уравнений (16) по исключении de_k с помощью уравнений (16) приводятся к виду (12) и в силу уравнений (13a) и (13b) исчезают тождественно при всяких значениях e_j. Следовательно, система (16) вполне интегрируема и допускает единственное решение A, e_i, принимающее произвольно заданные значения для $u^\alpha = (u^\alpha)_0$.

Если взять три четвёрки таких решений A, e_i и принять три решения A за координаты вектора A, три тройки решений e_i — за координаты векторов e_i, то у нас получится семейство трёхгранников, зависящее от r параметров u^α и содержащее для $u^\alpha = (u^\alpha)_0$ произвольно заданный трёхгранник T_0. Надо показать, что можно выбрать эти решения так, чтобы все трёхгранники были прямоугольными.

Очевидно, для этого необходимо выбрать начальный трёхгранник T_0 прямоугольным. Покажем, что этого условия будет и достаточно.

Рассмотрим совокупность всех прямоугольных трёхгранников пространства. Как мы видели, они образуют семейство, содержащее шесть независимых параметров v^1, v^2, v^3, v^4, v^5, v^6. Подсчитаем для этого семейства компоненты дифференциальных движений $\tilde\omega^k$, $\tilde\omega^k_i$. Они будут содержать дифференциалы dv^β, и коэффициенты при них будут функциями от v^β.

Если найденное нами решение состоит из прямоугольных трёхгранников, то оно должно содержаться в семействе всех прямоугольных трёхгранников $T(v)$. Следовательно, можно найти такие функции

$$v^\beta = v^\beta(u),$$

что будут удовлетворены уравнения

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^i(v,\, dv) &= \omega^i(u,\, du), \\ \tilde{\omega}_i^j(v,\, dv) &= \omega_i^j(u,\, du). \end{aligned} \tag{17}$$

Это действительно возможно, ибо система (17) вполне интегрируема. В самом деле, формы ω^k, ω_i^k, по услозию, удовлетворяют уравнениям структуры (13a) и (13b), а формы $\tilde{\omega}^k$, $\tilde{\omega}_i^k$ будут им удовлетворять, ибо подсчитаны из действительных движений трёхгранника по формулам (1′), откуда уравнения (13a) и (13b) непосредственно вытекают. Следовательно, внешнее дифференцирование уравнений (17) приведёт к системе уравнений

$$[\tilde{\omega}^k \tilde{\omega}_k^i] = [\omega^k \omega_k^i],$$

$$[\tilde{\omega}_i^k \tilde{\omega}_k^j] = [\omega_i^k \omega_k^j],$$

которые обращаются в тождество после подстановки $\tilde{\omega}^k$, $\tilde{\omega}_k^i$ по формулам (17).

Чтобы получить требуемое решение, надо только выбрать начальные условия $v^\beta = (v^\beta)_0$ для $u^\alpha = (u^\alpha)_0$ так, чтобы при $v^\beta = (v^\beta)_0$ получался трёхгранник T_0.

Итак, формы ω^i, $\omega_i^j = -\omega_j^i$, удовлетворяющие уравнениям структуры, позволяют определить из вполне интегрируемой системы (1′) единственное семейство трёхгранников, содержащее для $u^\alpha = (u^\alpha)_0$ трёхгранник T_0.

23. Единственность конгруэнции до положения в пространстве. Нетрудно заметить теперь, что *различные тройки решений системы* (16) определяют конгруэнтные семейства трёхгранников (T).

Действительно, пусть мы имеем две тройки решений системы (16) с теми же самыми формами ω^k, ω_i^k. Одна из них даёт семейство трёхгранников (T) с начальным трёхгранником T_0, другая — семейство (T') с начальным трёхгранником T_0'.

Перенесём в пространстве всё семейство трёхгранников (T) вместе с системой координат так, чтобы трёхгранник T_0' совпал с трёхгранником T_0, а затем преобразуем систему координат так, чтобы иметь старую систему координат.

Первая операция не изменит форм ω^i, ω_i^j, ибо при этом все координаты точек трёхгранников сохраняют свои значения.

Преобразование координат тоже их не изменит. Действительно, как векторы e_i, так и дифференциал от радиуса-вектора dA не зависят от выбора неподвижной декартовой системы координат. Следовательно, и компоненты ω^k, ω_i^k, определяемые уравнениями (2′), тоже не меняются при преобразовании координат.

Значит, уравнения (16) сохраняются неизменными, и общий интеграл системы останется неизменным, а так как начальный трёхгранник T_0' теперь совпал с трёхгранником T_0, то начальные условия для первой и второй тройки решений совпадут. Следовательно, совпадут и решения. Значит, всё семейство трёхгранников (T') почленно совпадёт с соответствующими трёхгранниками семейства (T).

Отсюда прямо вытекает фундаментальная теорема:

Теорема. *Компоненты дифференциальных движений трёхгранника* ω^i, ω_i^j, *удовлетворяющие уравнениям структуры* (13a) и (13b), *определяют конгруэнцию, описанную третьей осью, вплоть до положения в пространстве.*

III. ГЛАВНЫЕ И ВТОРИЧНЫЕ ФОРМЫ

24. Вторичные параметры семейства трёхгранников. Наиболее общий прямоугольный трёхгранник пространства зависит от шести параметров v^β, и уравнения (1) § 17 содержат шесть компонент ω^1, ω^2, ω^3, ω_1^2, ω_1^3, ω_2^3. Если все параметры $v^\beta = \text{const.}$ и $dv^\beta = 0$, то трёхгранник неподвижен, и $dA = 0$, $de_i = 0$; из уравнений (2′) § 17 получим тогда, что все компоненты ω^i, ω_i^j равны нулю. Это естественно, ибо компоненты ω^i, ω_i^j линейно зависят от dv^β.

Обратно, если все компоненты ω^i, ω_i^j равны нулю, то уравнения (1′) § 17 дадут $dA = 0$, $de_i = 0$; следовательно, векторы A, e_i постоянны

$$A = \text{const.}, \quad e_i = \text{const.}$$

и трёхгранник неподвижен, а, значит,

$$v^\beta = \text{const.} \text{ и } dv^\beta = 0.$$

Поскольку дифференциалы dv^β обращаются в нуль при обращении в нуль форм ω^i, ω_i^j, они линейно зависят от форм ω^i, ω_i^j. Мы видели, что параметры v^β независимы, следовательно, дифференциалы их dv^β линейно независимы, но тогда и *формы* ω^i, ω_i^j *линейно независимы, если рассматривать дифференциальные перемещения наиболее общего прямоугольного трёхгранника пространства.*

Если мы рассматриваем семейство трёхгранников, связанных с лучами конгруэнции, то дело обстоит иначе. Присоединим к каждому лучу конгруэнции семейство трёхгранников, у которых третья ось совпадает с лучом. Движения трёхгранника в пределах этого семейства не перемещают луч и образуют так называемую *стационарную подгруппу* луча.

Если луч неподвижен, то вектор e_3 сохраняет постоянное значение, следовательно, $de_3 = 0$, и точка A может перемещаться только по лучу, т. е. вектор dA имеет компоненту только по оси e_3. Значит, при неподвижном луче равны нулю четыре формы

$$\omega^1 = 0, \ \omega^2 = 0, \ \omega_1^3 = 0, \ \omega_2^3 = 0. \tag{18}$$

Поскольку при неподвижном луче, т. е. при постоянных значениях криволинейных координат u, v формы (18) обращаются в нуль, эти четыре формы зависят линейно только от двух дифференциалов du, dv. Значит, среди них независимых может быть только две. Будем предполагать, что конгруэнция не состоит из цилиндров; следовательно, сферическое изображение рассматриваемой области конгруэнции покрывает двумерную область на сфере; дифференциал de_3 зависит от двух независимых форм; значит, *формы*

$$\omega_1^3, \ \omega_2^3 \tag{19}$$

линейно независимы и могут служить базисом подкольца дифференциалов du, dv.

Остальные две формы (18) линейно выражаются через дифференциалы du, dv, а следовательно, и через формы (19)

$$\begin{aligned} \omega^1 &= a\omega_1^3 + b\omega_2^3, \\ \omega^2 &= b'\omega_1^3 + c\omega_2^3. \end{aligned} \tag{20}$$

Формы (18) будем называть *главными формами.*

Кроме этих форм, имеется ещё две компоненты ω^3 и ω_1^2. Эти компоненты определяют движение трёхгранника, не перемещающее луч AM.

Если все формы равны нулю, кроме формы ω^3, то уравнения (1) § 17 принимают вид

$$dA = \omega^3 e_3, \ de_1 = de_2 = de_3 = 0.$$

Последние три уравнения показывают, что трёхгранник T не вращается. Первое уравнение показывает, что скорость перемещения точки A, определяемая вектором dA, направлена по третьей оси e_3, т. е. по лучу конгруэнции. Форму ω^3 можно считать равной дифференциалу отрезка, пройденного точкой A по лучу AM.

Если все формы равны нулю, за исключением формы ω_1^2, то уравнения (1) § 17 дают:

$$dA = 0, \ de_1 = \omega_1^2 e_2, \ de_2 = -\omega_1^2 e_1.$$

Первое уравнение показывает, что вершина трёхгранника A неподвижна. Следовательно, трёхгранник T вращается около оси e_3. Последние два уравнения показывают, что форма ω_1^2 равна скорости вращения трёхгранника, умноженной на элемент времени, т. е. равна дифференциалу угла поворота.

Эти два инфинитезимальных преобразования группы движений порождают двупараметрическую стационарную подгруппу. Формы ω^3, ω_1^2, кроме главных параметров u, v, будут зависеть и от вторичных параметров. Таких вторичных параметров два: длина отрезка, пройденного точкой A по оси AM, и угол поворота трёхгранника около оси e_3. Значения форм ω^3, ω_1^2 при обращении в нуль форм (19) мы будем называть *вторичными* формами, ибо они содержат только дифференциалы вторичных параметров.

25. Основные формулы теории конгруэнций. Пользуясь формулами (15) и (18) § 3, мы можем легко выразить эти квадратичные формы Куммера через независимые формы ω_1^3, ω_2^3:

$$ds^2 = (de_3)^2 = (-e_1\omega_1^3 - e_2\omega_2^3)^2 = (\omega_1^3)^2 + (\omega_2^3)^2, \tag{21}$$

$$\varphi = de_3 \cdot dA = (-e_1\omega_1^3 - e_2\omega_2^3)\cdot(e_1\omega^1 + e_2\omega^2 + e_3\omega^3) = \\ = -\omega^1\omega_1^3 - \omega^2\omega_2^3. \tag{22}$$

или, если воспользоваться формулами (20),

$$-\varphi = a(\omega_1^3)^2 + (b + b')\omega_1^3\omega_2^3 + c(\omega_2^3)^2. \tag{22'}$$

Отсюда видно, что коэффициенты a, b, b', c аналогичны коэффициентам e, f, f', g формы (18) § 3 и отличаются от них только множителями α, β

$$a = e\alpha^2, \ b = f\alpha\beta, \ b' = f'\alpha\beta, \ c = g\beta^2,$$

если $\omega_1^3 = \alpha\, du$, $\omega_2^3 = \beta\, dv$.

Теперь формула (14′) § 3 для абсциссы кратчайшего расстояния двух лучей дифференциальной окрестности примет вид

$$r = \frac{a(\omega_1^3)^2 + (b + b')\omega_1^3\omega_2^3 + c(\omega_2^3)^2}{(\omega_1^3)^2 + (\omega_2^3)^2}. \tag{23}$$

Освобождаясь от знаменателя, будем иметь:

$$(a - r)(\omega_1^3)^2 + (b + b')\omega_1^3\omega_2^3 + (c - r)(\omega_2^3)^2 = 0.$$

Дифференцируя по переменному ω_1^3 или ω_2^3, чтобы получить экстремальные значения абсциссы r при изменении отношения $\omega_1^3 : \omega_2^3$, подобно тому, как мы делали в § 5 гл. I, получим:

$$\begin{aligned} (a - r)\,\omega_1^3 + \frac{(b + b')}{2}\,\omega_2^3 &= 0, \\ \frac{b + b'}{2}\,\omega_1^3 + (c - r)\,\omega_2^3 &= 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Отсюда, исключая отношение $\omega_1^3:\omega_2^3$, имеем квадратное уравнение для абсцисс граничных точек:

$$r^2-(a+c)\,r+ac-\frac{(b+b')^2}{4}=0 \tag{25}$$

и абсциссу центра

$$r_0=\frac{a+c}{2}; \tag{26}$$

с другой стороны, исключая r из уравнений (24), получим уравнение главных поверхностей:

$$\frac{b+b'}{2}\left\{(\omega_1^3)^2-(\omega_2^3)^2\right\}+(c-a)\,\omega_1^3\omega_2^3=0. \tag{27}$$

Чтобы найти фокусы

$$F=A+\rho e$$

и развёртывающиеся поверхности, надо найти такие значения ρ и $\omega_1^3:\omega_2^3$, чтобы вектор касательной dF был коллинеарен лучу e:

$$dF=\lambda e.$$

Дифференцируя F с помощью формул (1) § 17 и внося в это уравнение, имеем:

$$(\omega^1-\rho\omega_1^3)\,e_1+(\omega^2-\rho\omega_2^3)\,e_2+(\omega^3+d\rho)\,e_3=\lambda e_3.$$

Умножая скалярно на e_1 и на e_2, получим:

$$\begin{aligned}\omega^1-\rho\omega_1^3&=0,\\ \omega^2-\rho\omega_2^3&=0,\end{aligned} \tag{28}$$

или, заменяя ω^1, ω^2 по формулам (20):

$$\begin{aligned}(a-\rho)\,\omega_1^3+b\omega_2^3&=0,\\ b'\omega_1^3+(c-\rho)\,\omega_2^3&=0,\end{aligned}$$

откуда, исключая отношение $\omega_1^3:\omega_2^3$, имеем квадратное уравнение для абсцисс фокусов:

$$\rho^2-(a+c)\,\rho+ac-bb'=0, \tag{29}$$

а, исключая ρ, получим уравнения развёртывающихся поверхностей

$$b'\,(\omega_1^3)^2+(c-a)\,\omega_1^3\omega_2^3-b\,(\omega_2^3)^2=0. \tag{30}$$

Конгруэнция будет параболической, если уравнение (29) имеет равные корни;

$$(a-c)^2+4bb'=0, \tag{31}$$

нормальной, если уравнения (25) и (29) совпадут:

$$b'-b=0, \tag{32}$$

изотропной, если формы, стоящие в числителе и знаменателе формулы (23), пропорциональны:

$$a=c,\quad b+b'=0. \tag{33}$$

Коэффициенты a, b, b', c, которые играют такую важную роль в предыдущих формулах, должны удовлетворять уравнениям, которые получатся, если продифференцировать внешним образом уравнения (20), пользуясь уравнениями структуры. Первое уравнение даёт:

$$[\omega^k\omega_k^1]=[da\,\omega_1^3]+a\,[\omega_1^k\omega_k^3]+[db\,\omega_2^3]+b\,[\omega_2^k\omega_k^3];$$

выписывая полностью суммы и заменяя ω^1 и ω^2 по формулам (20), получим:

$$[b'\omega_1^3+c\omega_2^3,\ \omega_2^1]-[\omega^3\omega_1^3]=[da\,\omega_1^3]+a\,[\omega_1^2\omega_2^3]+[db\,\omega_2^3]+b\,[\omega_2^1\omega_1^3]$$

или, перенося все члены в правую часть и собирая члены с ω_1^3 и ω_2^3,

$$[da-(b+b')\,\omega_1^2+\omega^3,\ \omega_1^3]+[db+(a-c)\,\omega_1^2,\ \omega_2^3]=0. \tag{34a}$$

Аналогично напишется второе уравнение:

$$[db'+(a-c)\,\omega_1^2,\ \omega_1^3]+[dc+(b+b')\,\omega_1^2+\omega^3,\ \omega_2^3]=0. \tag{34b}$$

26. Вариация главных форм преобразованиями стационарной подгруппы. В § 24 мы выделили в группе движений трёхгранника T двупараметрическую стационарную подгруппу, преобразования которой не перемещают луча конгруэнции. Эти движения трёхгранника зависят от двух параметров, которые мы назвали вторичными. Один из них определяет положение вершины A трёхгранника на луче, другой — поворот трёхгранника около луча. Им соответствуют две вторичные формы, которые зависят только от дифференциалов вторичных параметров и сами могут линейно представить эти дифференциалы. Это — единственные компоненты трёхгранника, не обращающиеся в нуль при закреплённом луче. Значения этих форм ω^3, ω_1^2 при обращении в нуль главных форм мы назвали вторичными формами. Теперь мы введём для них особые обозначения, именно: изменению этих вторичных параметров мы присвоим символ дифференцирования δ, а сами формы будем обозначать буквой π:

$$\omega^3(\delta)=\pi^3,\quad \omega_1^2(\delta)=\pi_1^2.$$

Все остальные формы, т. е. все формы (18) для символа дифференцирования δ равны нулю, но если формы (18) не содержат вторичных параметров под знаком дифференциала, то они содержат их в коэффициентах при дифференциалах главных параметров. Следовательно, можно поставить вопрос, как меняются формы ω^1, ω^2, ω_1^3, ω_2^3 и коэффициенты a, b, b', c при изменении вторичных параметров, т. е. при вариации трёхгранника около луча конгруэнции.

Этот вопрос разрешается чрезвычайно просто для вариации коэффициентов. Квадратичные уравнения (34a) и (34b) содержат, кроме форм ω_1^3, ω_2^3, составляющих базис подкольца дифференциалов главных параметров, ещё четыре формы

$$\Delta a = da - (b + b')\,\omega_1^2 + \omega^3, \quad \Delta c = dc + (b + b')\,\omega_1^2 + \omega^3,$$
$$\Delta b = db + (a - c)\,\omega_1^2, \qquad \Delta b' = db' + (a - c)\,\omega_1^2.$$

Все эти формы — главные формы, ибо, по лемме Картана, они линейно выражаются только через формы ω_1^3, ω_2^3. Поэтому для изменения только вторичных параметров они все равны нулю. Вводя символ дифференцирования δ и переходя к обозначениям π_i^k, получим:

$$\begin{aligned} \delta a &= (b + b')\,\pi_1^2 - \pi^3, & \delta c &= -(b + b')\,\pi_1^2 - \pi^3, \\ \delta b &= (c - a)\,\pi_1^2, & \delta b' &= (c - a)\,\pi_1^2. \end{aligned} \tag{35}$$

Чтобы определить вариацию главной формы ω^1 для преобразований стационарной подгруппы, т. е. для изменений вторичных параметров, пишем её внешний дифференциал

$$D\omega^1 = [\omega^2\omega_2^1] + [\omega^3\omega_3^1]$$

и выписываем присоединённую билинейную форму для символов дифференцирования d и δ: первый — для изменения только главных параметров, второй — для изменения только вторичных

$$d\omega^1(\delta) - \delta\omega^1(d) = \omega^2(d)\,\omega_2^1(\delta) - \omega^2(\delta)\,\omega_2^1(d) + \omega^3(d)\,\omega_3^1(\delta) - \omega^3(\delta)\,\omega_3^1(d).$$

Заменяя

$$\omega^1(\delta) = \omega^2(\delta) = \omega_3^1(\delta) = 0, \quad \omega_2^1(\delta) = -\pi_1^2, \ \omega^3 = \pi^3,$$
$$\omega^1(d) = \omega^1, \ \omega^2(d) = \omega^2, \qquad \omega_3^1(d) = -\omega_1^3,$$

получим:

$$\delta\omega^1 = -\omega_1^3\pi^3 + \omega^2\pi_1^2.$$

Применяя тот же приём к формам ω^2, ω_1^3, ω_2^3, получим таблицу

$$\begin{aligned} \delta\omega_1^3 &= \omega_2^3\pi_1^2, & \delta\omega_2^3 &= -\omega_1^3\pi_1^2, \\ \delta\omega^1 &= -\omega_1^3\pi^3 + \omega^2\pi_1^2, & \delta\omega^2 &= -\omega_2^3\pi^3 - \omega^1\pi_1^2. \end{aligned} \tag{36}$$

Формулы (35), (36) определяют закон изменения главных форм и их коэффициентов при изменении вторичных параметров.

IV. ПОСТРОЕНИЕ ИНВАРИАНТОВ И ИНВАРИАНТНЫХ ФОРМ

27. Инвариантные квадратичные формы. В первой главе мы построили две квадратичные формы, для которых мы теперь получили выражения (21) и (22) § 25:

$$ds^2 = (\omega_1^3)^2 + (\omega_2^3)^2, \tag{37}$$
$$\varphi = -\omega^1\omega_1^3 - \omega^2\omega_2^3.$$

Квадратичные формы инвариантны, если они не зависят от вторичных параметров. Следовательно, чтобы исследовать инвариантность форм (37), надо продифференцировать формы (37) по вторичным параметрам, пользуясь таблицей (36) § 26. Мы получим:

$$\delta(ds^2) = 2\omega_1^3\delta\omega_1^3 + 2\omega_2^3\delta\omega_2^3 = 2(\omega_1^3\omega_2^3\pi_1^2 - \omega_2^3\omega_1^3\pi_1^2) = 0,$$

$$\delta\varphi = -\omega_1^3\delta\omega^1 - \omega^1\delta\omega_1^3 - \omega_2^3\delta\omega^2 - \omega^2\delta\omega_2^3 = \omega_1^3(\omega_1^3\pi^3 - \omega^2\pi_1^2) -$$
$$- \omega^1\omega_2^3\pi_1^2 + \omega_2^3(\omega_2^3\pi^3 + \omega^1\pi_1^2) + \omega^2\omega_1^3\pi_1^2 = \{(\omega_1^3)^2 + (\omega_2^3)^2\}\,\pi^3.$$

Так как производная от формы ds^2 по вторичным параметрам равна нулю, то форма ds^2 не зависит от вторичных параметров и, следовательно, инвариантна относительно преобразований стационарной подгруппы. Форма φ меняется при изменении вторичных параметров, а потому — не инвариантна.

Чтобы получить вторую инвариантную форму, надо составить комбинацию главных форм ω^1, ω^2, ω_1^3, ω_2^3 (ибо только они не содержат дифференциалов вторичных параметров) так, чтобы она не содержала вторичных параметров, т. е. чтобы дифференциал от формы по вторичным параметрам равнялся нулю.

Для этого нам надо исключить из уравнений (36) вторичные формы π_1^2, π^3. Так как мы имеем четыре уравнения и две величины, подлежащие исключению, то должны получить два алгебраически независимых выражения, не содержащих величин π_1^2, π^3. Одно из них, как мы видели, приводит к форме (21) § 25 и получается исключением π_1^2 из первых двух уравнений (36) § 26. Чтобы получить другую независимую комбинацию, мы должны использовать последние два уравнения. Исключая из них π^3, имеем:

$$\omega_2^3\delta\omega^1 - \omega_1^3\delta\omega^2 = (\omega^2\omega_2^3 + \omega^1\omega_1^3)\,\pi_1^2.$$

Так как первые два уравнения (36) § 26 дают

$$\omega^2\delta\omega_1^3 - \omega^1\delta\omega_2^3 = (\omega^2\omega_2^3 + \omega^1\omega_1^3)\,\pi_1^2,$$

то по исключении π_1^2 получим:

$$\omega_2^3\delta\omega^1 + \omega^1\delta\omega_2^3 - \omega_1^3\delta\omega^2 - \omega^2\delta\omega_1^3 = 0,$$

или

$$\delta(\omega^1\omega_2^3-\omega^2\omega_1^3)=0$$

и новая инвариантная форма —

$$\psi=\omega^1\omega_2^3-\omega^2\omega_1^3 \qquad (38)$$

или с помощью формул (20) § 24

$$\psi=-b'(\omega_1^3)^2+(a-c)\,\omega_1^3\omega_2^3+b(\omega_2^3)^2. \qquad (38')$$

Чтобы выяснить геометрический смысл этой формы, заметим, что она получается из векторов

$$dA=\omega^1 e_1+\omega^2 e_2+\omega^3 e_3,$$

$$de_3=-\omega_1^3 e_1-\omega_2^3 e_2$$

такими операциями:

1) чтобы уничтожить компоненту ω^3, умножим dA векторно на $e=e_3$

$$dA\times e=-\omega^1 e_2+\omega^2 e_1;$$

2) полученное произведение умножаем скалярно на вектор $de=de_3=-\omega_1^3 e_1-\omega_2^3 e_2$

$$(dA\times e)\cdot de=\omega^1\omega_2^3-\omega^2\omega_1^3=\psi.$$

Итак, форма ψ равна скалярному произведению трёх векторов:

$$\psi=(e\,de\,dA),$$

или скалярному произведению вектора dA на векторное произведение e и de; но

$$e\times de=e\times(e+de), \qquad (39)$$

следовательно, направление этого векторного произведения перпендикулярно к двум бесконечно близким лучам e и $e+de$ и совпадает с направлением их общего перпендикуляра n. Отсюда форма ψ равна проекции вектора dA на направление общего перпендикуляра n двух бесконечно близких лучей, умноженной на модуль вектора (39). Проекция вектора dA на общий перпендикуляр n есть кратчайшее расстояние между двумя лучами [(21) § 3], а модуль векторного произведения (39) равен произведению модулей множителей на синус угла между ними. Модуль первого множителя e равен единице, модуль второго равен

$$\sqrt{(e+de)^2}=\sqrt{e^2+2e\cdot de+(de)^2}=[1+ds^2]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=1+\frac{1}{2}ds^2-\frac{1}{8}ds^4+\ldots,$$

где $2e\cdot de=d(e)^2=0$, и при разложении в ряд применена формула бинома Ньютона с дробным показателем $\frac{1}{2}$.

Ограничиваясь главной частью скалярного произведения, получим:

$$\psi=\sin\chi\,dk,$$

где dk — бесконечно малое расстояние соседних лучей e и $e+de$, а χ — угол между ними.

Отсюда вытекает, что *форма ψ равна моменту двух лучей дифференциальной окрестности.*

28. Инвариантные внешние квадратичные формы. Ограничиваясь дифференциальной окрестностью первого порядка луча конгруэнции, т. е. первыми производными от координат точки A и вектора e, мы не найдём других инвариантных квадратичных форм, но можем строить инвариантные внешние квадратичные формы.

Уже внешнее умножение первых двух уравнений (36) § 26 соответственно на ω_2^3 или на ω_1^3 обращает правую часть в нуль и, следовательно, исключает π_1^2:

$$[\delta\omega_1^3\omega_2^3]=0, \quad [\omega_1^3\delta\omega_2^3]=0.$$

Чтобы получить интегрируемую комбинацию, надо сложить эти два уравнения

$$[\delta\omega_1^3\omega_2^3]+[\omega_1^3\delta\omega_2^3]=\delta[\omega_1^3\omega_2^3]=0.$$

Следовательно, внешняя квадратичная форма

$$\Phi=[\omega_1^3\omega_2^3] \qquad (40)$$

инвариантна.

Другие, не содержащие вторичных форм π^3 и π_1^2 уравнения получим, составляя комбинации

$$[\omega_1^3\delta\omega^1]-[\omega^2\delta\omega_2^3]=[\omega_1^3\omega^2]\,\pi^2+[\omega^2\omega_1^3]\,\pi^2=0,$$

$$[\omega_2^3\delta\omega^2]-[\omega^1\delta\omega_1^3]=0,$$

откуда получаем интегрируемую комбинацию

$$[\omega_1^3\delta\omega^1]-[\omega^2\delta\omega_2^3]+[\omega_2^3\delta\omega^2]-[\omega^1\delta\omega_1^3]=\delta\left\{[\omega_1^3\omega^1]+[\omega_2^3\omega^2]\right\}=0.$$

Следовательно, внешняя квадратичная форма

$$\Psi=[\omega^1\omega_1^3]+[\omega^2\omega_2^3] \qquad (41)$$

инвариантна.

Если воспользоваться формулами (20) § 24, то эта форма примет вид

$$\Psi=(b'-b)\,[\omega_1^3\omega_2^3]. \qquad (41')$$

Чтобы выяснить геометрический смысл формы Φ, надо обратиться к её «значению», т. е., задавшись двумя направлениями $du:dv$, $\delta u:\delta v$, написать для этих двух векторов (символы дифференцирования d и δ) присоединённую билинейную форму

$$\Phi=\omega_1^3(d)\,\omega_2^3(\delta)-\omega_2^3(d)\,\omega_1^3(\delta).$$

Этот определитель получается, если взять векторное произведение дифференциалов $d\boldsymbol{e}_3$, $\delta\boldsymbol{e}_3$, т. е. векторное произведение векторов касательных к единичной сфере по двум выбранным направлениям

$$d\boldsymbol{e}_3\times\delta\boldsymbol{e}_3=\{\omega_1^3(d)\,\boldsymbol{e}_1+\omega_2^3(d)_2\boldsymbol{e}_2\}\times\{\omega_1^3(\delta)\,\boldsymbol{e}_1+\omega_2^3(\delta)\,\boldsymbol{e}_2\}=\Phi\boldsymbol{e}_3.$$

Так как модуль этого векторного произведения даёт элемент площади сферы (площадь параллелограмма, построенного на векторах $d\boldsymbol{e}$ и $\delta\boldsymbol{e}$), то геометрический смысл формы Φ есть *элемент площади сферического изображения конгруэнции*, т. е. мера телесного угла, который получится, если из центра сферы провести все лучи дифференциальной окрестности луча.

Для выяснения геометрического смысла формы Ψ заметим, что отношение двух инвариантных внешних форм (40) и (41′) есть инвариант

$$\mathcal{A}=\frac{\Psi}{\Phi}=b'-b,$$

что, впрочем, непосредственно видно из формулы (35) § 26.

Инвариант $\mathcal{A}$ равен нулю для нормальной конгруэнции.

Если конгруэнция не является нормальной, то из уравнений для абсцисс граничных точек и фокусов (25) и (29) § 25, так же как в § 6 гл. I, получим:

$$\rho_1\rho_2=r_1r_2+\frac{(b-b')^2}{4},$$

откуда

$$(r_1-r_2)^2-(\rho_1-\rho_2)^2=(b-b')^2. \tag{42}$$

Следовательно, инвариант $\mathcal{A}$ является катетом прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза равна расстоянию между граничными точками, а второй катет — фокальному отрезку.

Инвариант $\mathcal{A}$ меряет величину отступления конгруэнции от нормальной и может быть назван *анормальностью* конгруэнции.

V. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНГРУЭНЦИИ ДВУМЯ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

29. Определение компонент трёхгранника конгруэнции по двум её квадратичным формам. Мы теперь можем определить конгруэнцию двумя квадратичными формами подобно тому, как поверхность определяется линейным элементом и второй квадратичной формой Гаусса. За первую квадратичную форму естественно принять линейный элемент сферического изображения

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2, \tag{43}$$

за вторую форму — нашу новую форму ψ:

$$\psi=(\boldsymbol{e}\,d\boldsymbol{e}\,dA)=\delta\,du^2+2\delta'\,du\,dv+\delta''dv^2. \tag{44}$$

Линейный элемент (43) должен удовлетворять условию, что он принадлежит сфере, т. е. его гауссова кривизна равна единице (Т. П., стр. 95). На коэффициенты второй квадратичной формы ψ наложатся новые условия, о которых мы сейчас будем говорить.

Прежде всего, представляя положительную определённую форму (43) в виде суммы двух квадратов, мы получим линейные формы ω_1^3, ω_2^3:

$$ds^2=(\omega_1^3)^2+(\omega_2^3)^2. \tag{43′}$$

Будем предполагать, что мы уже разложили линейный элемент на сумму квадратов вида (43′) и, следовательно, знаем формы ω_1^3, ω_2^3. Подсчитывая внешние дифференциалы $D\omega_1^3$, $D\omega_2^3$, мы их получим как квадратичные формы с одним членом, содержащим произведение $[du\,dv]$. Делая замену базиса, мы выразим du, dv через ω_1^3, ω_2^3 и получим:

$$D\omega_1^3=h\,[\omega_1^3\omega_2^3],\quad D\omega_2^3=k\,[\omega_1^3\omega_2^3], \tag{45}$$

где h и k надо рассматривать как известные функции от u и v. Сравнивая формулы (45) с уравнениями структуры

$$D\omega_1^3=[\omega_1^2\omega_2^3],\quad D\omega_2^3=[\omega_2^1\omega_1^3],$$

мы получим квадратичные уравнения

$$[\omega_1^2\omega_2^3]-h\,[\omega_1^3\omega_2^3]=0,\quad [\omega_1^2\omega_1^3]+k\,[\omega_1^3\omega_2^3]=0$$

или

$$[\omega_1^2-h\omega_1^3,\ \omega_2^3]=0,\quad [\omega_1^2-k\omega_2^3,\ \omega_1^3]=0, \tag{46}$$

откуда в силу следствия из леммы Картана (§ 20) множители в каждом внешнем произведении пропорциональны; следовательно,

$$\omega_1^2-h\omega_1^3=\lambda\omega_2^3,\quad \omega_1^2-k\omega_2^3=\mu\omega_1^3,$$

где λ и μ — неизвестные множители пропорциональности. Для совместности обоих уравнений необходимо выбрать $\lambda=k$, $\mu=h$, и мы будем иметь:

$$\omega_1^2=h\omega_1^3+k\omega_2^3. \tag{47}$$

Теперь следующее уравнение структуры

$$D\omega_1^2=[\omega_1^3\omega_3^2]$$

наложит на коэффициенты h и k дифференциальное уравнение первого порядка, эквивалентное уравнению Гаусса (кривизна сферы равна единице)

$$[dh\omega_1^3] + [dk\omega_2^3] + (h^2 + k^2 + 1)\,[\omega_1^3\omega_2^3] = 0. \tag{47'}$$

Вторую квадратичную форму (44) мы теперь можем пересчитать, подставив вместо du и dv их выражения через ω_1^3 и ω_2^3. Мы получим выражение вида (38′) § 27:

$$\psi = -b'(\omega_1^3)^2 + (a-c)\,\omega_1^3\omega_2^3 + b(\omega_2^3)^2. \tag{44'}$$

От нас зависит выбор начальной точки A на луче. Если мы совместим её с центром луча, то абсцисса центра r_0 обратится в нуль, и формула (26) § 25 даст нам:

$$a + c = 0.$$

Так как коэффициенты формы (44′) нам известны, то мы знаем все коэффициенты

$$a = -c,\ b,\ b'.$$

Тем самым формы ω^1, ω^2 нам известны. Неизвестная ещё форма

$$\omega^3 = p\omega_1^3 + q\omega_2^3, \tag{48}$$

где p и q — новые неизвестные функции, должна удовлетворять уравнению структуры (13a) § 21 для $j = 3$. Дифференцируя уравнение (48) внешним образом и пользуясь уравнениями структуры (13a) и (13b) § 21 и обозначениями (45), получим:

$$[\omega^k\omega_k^3] = [dp\omega_1^3] + ph\,[\omega_1^3\omega_2^3] + [dq\omega_2^3] + qk\,[\omega_1^3\omega_2^3]$$

или, выписывая суммы полностью и заменяя ω^1, ω^2, ω_1^2, ω^3 по формулам (20) § 24, (47) и (48),

$$[dp\,\omega_1^3] + [dq\,\omega_2^3] + (b - b' + ph + qk)\,[\omega_1^3\omega_2^3] = 0. \tag{49}$$

Уравнение (49) и два уравнения (34a) и (34b) § 25, которые теперь после подстановки ω_1^2 и ω^3 по формулам (47), (48) примут вид

$$\begin{aligned} &[da\,\omega_1^3] + [db\,\omega_2^3] + \{(b + b')\,k - q + 2ah\}\,[\omega_1^3\omega_2^3] = 0,\\ &[db'\,\omega_1^3] - [da\,\omega_2^3] + \{-2ak + (b + b')\,h + p\}\,[\omega_1^3\omega_2^3] = 0 \end{aligned} \tag{50}$$

дадут все уравнения на коэффициенты второй квадратичной формы b', a, b (и неизвестные p и q).

Уравнения (50) позволяют выразить неизвестные функции p и q через коэффициенты данной формы a, b, b' и их производные.

Действительно, дифференцируя функции a, b, b' и заменяя дифференциалы du, dv их выражениями через формы ω_1^3, ω_2^3, мы получим уравнения:

$$\begin{aligned} da &= a_1\omega_1^3 + a_2\omega_2^3,\\ db &= b_1\omega_1^3 + b_2\omega_2^3,\\ db' &= b'_1\omega_1^3 + b'_2\omega_2^3, \end{aligned} \tag{51}$$

где все «ковариантные производные» a_i, b_i, b'_i надо считать известными. Внося эти выражения в уравнения (50), мы приведём их к виду

$$\{(b + b')\,k - q + 2ah - a_2 + b_1\}\,[\omega_1^3\omega_2^3] = 0,$$
$$\{(b + b')\,h + p - 2ak - a_1 - b'_2\}\,[\omega_1^3\omega_2^3] = 0.$$

Поскольку формы ω_1^3, ω_2^3 линейно независимы и внешнее произведение их отлично от нуля, обращаются в нуль фигурные скобки, и мы получаем неизвестные p и q в конечном виде:

$$\begin{aligned} p &= 2ak + a_1 + b'_2 - (b + b')\,h,\\ q &= 2ah - a_2 + b_1 + (b + b')\,k. \end{aligned} \tag{52}$$

Внося эти выражения в уравнение (49), мы получим внешнее дифференциальное уравнение на коэффициенты a, b, b' формы ψ, которое надо рассматривать совместно с уравнением (47′) и уравнениями (45).

Таким образом, по заданным коэффициентам двух форм (43), (44) или (43′), (44′) все компоненты форм могут быть определены, а тогда конгруэнция определяется вплоть до положения в пространстве. Коэффициенты квадратичных форм (43′), (44′) должны удовлетворять системе уравнений (47′), (49), (50), где p и q надо рассматривать как дополнительные неизвестные.

Отсюда теорема:

Две квадратичные формы (43′), (44′), *удовлетворяющие уравнению Гаусса для сферы и системе уравнений* (49), (50), *определяют конгруэнцию вплоть до её положения в пространстве.*

30. Пример. Допустим, что сфера отнесена к ортогональной системе координатных линий

$$ds^2 = A^2\,du^2 + B^2\,dv^2.$$

Мы можем положить

$$\omega_1^3 = A\,du, \quad \omega_2^3 = B\,dv.$$

Так как

$$D\omega_1^3 = A_v\,[dv\,du] = -\frac{A_v}{AB}\,[\omega_1^3\omega_2^3],$$
$$D\omega_2^3 = B_u\,[du\,dv] = \frac{B_u}{AB}\,[\omega_1^3\omega_3^2],$$

то

$$h = -\frac{(\ln A)_v}{B}, \quad k = \frac{(\ln B)_u}{A}.$$

Уравнение Гаусса для сферы (47′) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{A_v}{B}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{B_u}{A}\right) + AB = 0. \tag{53}$$

Сравнение выражений (44) и (44′) даст коэффициенты

$$a = \frac{\delta'}{AB}, \quad b = \frac{\delta''}{B^2}, \quad b' = -\frac{\delta}{A^2}.$$

Теперь из уравнений (51) получим:

$$a_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\delta'}{AB}\right), \quad a_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\delta'}{AB}\right),$$

$$b_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\delta''}{B^2}\right), \quad b_2' = -\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\delta}{A^2}\right)$$

и уравнения (52) примут вид

$$Ap = -\frac{1}{AB}\left\{\delta_v - \delta_u' - \delta(\ln A)_v + \delta'\left(\ln\frac{A}{B}\right)_u - \delta''\frac{A^2}{B^2}(\ln A)_v\right\},$$

$$Bq = \frac{1}{AB}\left\{\delta_u'' - \delta_v' - \delta''(\ln B)_u + \delta'\left(\ln\frac{B}{A}\right)_v - \delta\frac{B^2}{A^2}(\ln B)_u\right\}.$$

Уравнение (49) напишется:

$$(Bq)_u - (Ap)_v + \frac{B}{A}\delta + \frac{A}{B}\delta'' = 0,$$

и после подстановки p и q получим линейное уравнение второго порядка для коэффициентов δ, δ', δ'' формы ψ:

$$\begin{aligned}
&\delta_{uu}'' - 2\delta_{uv}' + \delta_{vv} - \delta_u\frac{B^2}{A^2}(\ln B)_u + 2\delta_u'(\ln B)_v - \delta_u''(\ln AB^2)_u - \\
&\quad - \delta_v(\ln A^2B)_v + 2\delta_v'(\ln A)_u - \delta_v''\frac{A^2}{B^2}(\ln A)_v - 2\frac{\delta'}{AB}(A_uB_v - A_vB_u) + \\
&\quad + \delta\left\{B^2 + A\left(\frac{1}{A}\right)_{vv} - \frac{BB_{uu}}{A^2} + 3\frac{B}{A^3}A_uB_u + \frac{A_vB_v}{AB}\right\} + \\
&\qquad + \delta''\left\{A^2 + B\left(\frac{1}{B}\right)_{uu} - \frac{AA_{vv}}{B^2} + 3\frac{A}{B^3}A_vB_v + \frac{A_uB_u}{AB}\right\}.
\end{aligned} \tag{54}$$

Таким образом, уравнение (54) — единственное уравнение, которому должны удовлетворять коэффициенты формы ψ, чтобы эта форма вместе с линейным элементом сферы определяла конгруэнцию.

31. Средняя огибающая изотропной конгруэнции. Чтобы дать приложение построенной теории, докажем теорему.

Средняя огибающая изотропной конгруэнции есть минимальная поверхность.

Средней огибающей называется огибающая плоскостей, перпендикулярных к лучам конгруэнции в их центрах.

Выберем начальную точку A в центре луча. Так как теперь r_0 равно нулю, то по формуле (26) § 25 получим:

$$a + c = 0.$$

Условие изотропности (33) § 25 даст теперь

$$a = c = 0, \quad b + b' = 0. \tag{55}$$

Плоскость, перпендикулярная к лучу e_3 в его центре, будет плоскостью Ae_1e_2. Пусть точка P этой плоскости с радиусом-вектором

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} + x'\boldsymbol{e}_1 + y'\boldsymbol{e}_2,$$

где x', y' — координаты относительно подвижного трёхгранника T, является точкой прикосновения плоскости Ae_1e_2 к её огибающей. Так как плоскость Ae_1e_2 является касательной плоскостью поверхности (P), то e_3 есть вектор нормали, и для всех перемещений точки P по поверхности имеет место равенство

$$\boldsymbol{e}_3 \cdot d\boldsymbol{P} = 0. \tag{56}$$

Вычисляя дифференциал

$$d\boldsymbol{P} = (dx' + \omega^1 + y'\omega_2^1)\,\boldsymbol{e}_1 + \\ + (dy' + \omega^2 + x'\omega_1^2)\,\boldsymbol{e}_2 + (\omega^3 + x'\omega_1^3 + y'\omega_2^3)\,\boldsymbol{e}_3$$

и внося в уравнение (56), получим:

$$\omega^3 = -(x'\omega_1^3 + y'\omega_2^3) \tag{57}$$

для всех перемещений точки P.

Уравнения (34a) и (34b) § 25, если туда внести значения (55), принимают вид

$$[\omega^3\omega_1^3] + [db\,\omega_2^3] = 0,$$

$$[db\,\omega_1^3] - [\omega^3\omega_2^3] = 0$$

или, если внести выражение ω^3 из уравнения (57),

$$[db + y'\omega_1^3,\ \omega_2^3] = 0, \quad [db - x'\omega_2^3,\ \omega_1^3] = 0.$$

Если внешнее произведение двух линейных форм равно нулю, то формы пропорциональны; значит,

$$db = -y'\omega_1^3 + \lambda\omega_2^3, \quad db = x'\omega_2^3 + \mu\omega_1^3$$

при множителях пропорциональности λ и μ. Чтобы не было противоречия, надо положить $\lambda = x'$, $\mu = -y'$ и

$$db = -y'\omega_1^3 + x'\omega_2^3. \tag{58}$$

Дифференцируя внешним образом уравнение (57) и пользуясь уравнениями структуры, получим:

$$[\omega^k\omega_k^3] + [dx'\omega_1^3] + x'[\omega_1^2\omega_2^3] + [dy'\omega_2^3] + y'[\omega_2^1\omega_1^3] = 0$$

или, развёртывая первую сумму и собирая члены с ω_1^3, ω_2^3,

$$[dx' + \omega^1 - y'\omega_1^2,\ \omega_1^3] + [dy' + \omega^2 + x'\omega_1^2,\ \omega_2^3] = 0. \tag{59}$$

Точно так же внешнее дифференцирование уравнения (58) даст

$$[dx' + \omega^1 - y'\omega_1^2,\ \omega_2^3] - [dy' + \omega^2 + x'\omega_1^2,\ \omega_1^3] = 0. \tag{60}$$

Здесь в первую скобку введён лишний член ω^1, а во вторую ω^2, ибо по формулам (20) § 24

$$\omega^1 = b\omega_2^3, \quad \omega^2 = -b\omega_1^3$$

и

$$[\omega^1\omega_2^3] = b[\omega_2^3\omega_2^3] = 0$$

как внешнее произведение с пропорциональными множителями, и по тем же основаниям

$$[\omega^2\omega_1^3] = 0.$$

Применим лемму Картана (§ 20) к уравнению (59), мы получим:

$$dx' + \omega^1 - y'\omega_1^2 = \alpha\omega_1^3 + \beta\omega_2^3,$$
$$dy' + \omega^2 + x'\omega_1^2 = \beta\omega_1^3 + \gamma\omega_2^3.$$

Внося эти значения в уравнение (60), получим:

$$\alpha[\omega_1^3\omega_2^3] - \gamma[\omega_2^3\omega_1^3] = 0, \text{ т. е. } \gamma = -\alpha$$

и

$$\Delta x' = \alpha\omega_1^3 + \beta\omega_2^3, \qquad \Delta y' = \beta\omega_1^3 - \alpha\omega_2^3, \tag{61}$$

где для краткости мы обозначили

$$\Delta x' = dx' + \omega^1 - y'\ {}_1^2, \quad \Delta y' = dy' + \omega^2 + x'\omega_1^2. \tag{62}$$

Так как дифференциал dP теперь принимает вид

$$dP = (\alpha\omega_1^3 + \beta\omega_2^3)\,e_1 + (\beta\omega_1^3 - \alpha\omega_2^3)\,e_2,$$

то для конгруэнции нормалей поверхности (P), отмечая её формы чертой наверху: $\bar{\omega}^1$, $\bar{\omega}^2$, будем иметь:

$$\bar{\omega}^1 = \alpha\omega_1^3 + \beta\omega_2^3, \quad \bar{\omega}_1^3 = \omega_1^3,$$
$$\bar{\omega}^2 = \beta\omega_1^3 - \alpha\omega_2^3, \quad \bar{\omega}_2^3 = \omega_2^3.$$

Значит, по формулам (20) § 24, новые величины $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{b}'$, $\bar{c}$ равны

$$\bar{a} = -\bar{c} = \alpha, \quad \bar{b} = \bar{b}' = \beta,$$

и уравнение (29) § 25 для абсцисс фокусов $\bar{\rho}$ примет вид:

$$\bar{\rho}^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

а так как фокусы конгруэнции нормалей служат главными центрами кривизны поверхности, их абсциссы $\bar{\rho}_1$ $\bar{\rho}_2$ — главными радиусами кривизны, то сумма главных кривизн поверхности (P) равна нулю и поверхность — минимальная.

32. Литературные указания. Понятие внешнего произведения было введено Грассманом (Grassman, Ausdehnungslehre) как метод последовательного построения пространственных образов и послужило источником для построения понятия векторного произведения векторов. Внешний дифференциал под видом билинейного коварианта введён Фробениусом (Frobenius, Ueber Pfaffsche Problem. *Journ. für Math.* 82, 230—315, 1877).

Алгоритм внешних форм введён Картаном (Cartan, Sur certaines expressions différentielles *Ann. Ec. Norm. Sup.* том 16, стр. 239—332, 1899). Систематическое изложение, педагогически обработанное со многими примерами, дано Картаном (Sur les systèmes différentiels extérieurs et leur application géometrique, 1945). Краткое, но очень строгое изложение — Kähler, Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen, 1934. На русском языке имеется оригинальная книга Рашевского «Геометрическая теория дифференциальных уравнений», 1947 и более близко следующая за Картаном книга Финикова «Метод внешних форм в дифференциальной геометрии», на которую в тексте делаются ссылки. Приложение метода внешних форм к теории конгруэнций в проективном пространстве очень коротко, почти без формул дано Картаном: Sur le problème général de la déformation, [2]; см. также La théorie des groupes finis et continus et la géometrie différentielle, traitées par la méthode du repère mobile, 1937. К ней возвращается тоже в проективном пространстве Чех Fubini-Čech, Introduction à la théorie des surfaces. Теория граничных точек и фокусов в подвижном репере появляется в тексте впервые.

К § 26. Метод вариации вторичных параметров для построения инвариантных форм применён Картаном в литографированной записи Сорбоннских лекций по римановой геометрии. К метрической теории конгруэнций он был применён Бам-Зеликовичем на докладе в семинаре Московского университета. Введение второй квадратичной формы ψ как момента бесконечно близких лучей принадлежит Саннию [1], [2], [5], [6].

К § 28. Инвариант $\mathcal{A}$ введён Леви-Чивита [1]. К нему возвращались Рам Бехари [1], [2], [3], связывая его с интегральным инвариантом, и Террачини [5], который показал зависимость его от плотности конгруэнций.

К § 29. Уравнения (49), (50) в виде уравнений в частных производных построены Санния. О других теориях конгруэнций см. справку в конце книги, стр. 508.

К § 31. Теорема о средней огибающей изотропной конгруэнции принадлежит Рибокуру [5]; Коммерелль [1] и Санния [5] обратили теорему Рибокура, отыскивая все конгруэнции, у которых средняя огибающая — минимальная; кроме изотропной, этим свойством обладают конгруэнции с постоянным средним параметром распределения.

Востер [1], исследуя соответствие между конгруэнцией и поверхностью, нормали которой параллельны лучам конгруэнции, показал, что изотропная конгруэнция остается изотропной, если каждый луч, не меняя его направления, повернуть на прямой угол около нормали её средней огибающей. Винченсини [5] получает новую изотропную конгруэнцию, поворачивая каждый луч с сохранением направления на постоянный угол около прямой, параллельной лучу в начале координат. Он же показал [4], обобщая теорему Рибокура, что огибающая плоскостей, перпендикулярных лучам изотропной конгруэнции и отстоящих от неподвижной точки на расстояниях, равных модулям фокальных отрезков, есть минимальная поверхность. С. Д. Россинский [1], [2], [4], [5], рассматривая конгруэнцию, лучи которой, перпендикулярные к касательным плоскостям некоторой поверхности S, уносятся этими плоскостями при изгибании поверхности S, и, требуя, чтобы при этом преобразовании (изгибание конгруэнции) конгруэнция оставалась изотропной, приходит к заключению, что поверхность S должна быть минимальной и оставаться минимальной во время изгибания, т. е. изгибание должно происходить на главном основании из линий нулевой длины. Развёртывающиеся поверхности конгруэнции всё время соответствуют линиям этого основания.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

МЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КОНГРУЭНЦИИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ СООТВЕТСТВИЙ, УСТАНАВЛИВАЕМЫХ МЕЖДУ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

I. КАНОНИЧЕСКИЙ ТРЁХГРАННИК КОНГРУЭНЦИИ

33. Выбор канонического трёхгранника. Теория вторичных параметров, которую мы излагали в § 24 предыдущей главы, позволяет рационально выбрать канонический трёхгранник конгруэнции. Действительно, выбрать трёхгранник — значит выбрать значения вторичных параметров, которые определяют положение трёхгранника на луче; основанием же для выбора может служить бóльшая или меньшая простота матрицы компонент ω^i, ω_i^j дифференциальных перемещений трёхгранника.

Мы разделили все шесть компонент ω^i, ω_i^j на главные и вторичные. Только первые имеют существенное значение для конгруэнции. Вторичные формы порождают стационарную подгруппу луча, преобразующую трёхгранник при неподвижном луче. При наличии только двух независимых дифференциалов главных переменных du и dv между четырьмя главными формами существует два линейных соотношения (20) § 24:

$$\omega^1 = a\omega_1^3 + b\omega_2^3,$$

$$\omega^2 = b'\omega_1^3 + c\omega_2^3,$$

коэффициенты которых, как мы видели, определяют все величины первого порядка, связанные с конгруэнцией. При различном выборе трёхгранника четвёрка коэффициентов a, b, b', c меняется.

Мы видели (§ 26), что закон изменения коэффициентов a, b, b', c инфинитезимальными преобразованиями стационарной подгруппы луча определяется уравнениями (35) § 26:

$$\begin{aligned} \delta a &= (b + b')\pi_1^2 - \pi^3, & \delta c &= -(b + b')\pi_1^2 - \pi^3, \\ \delta b &= (c - a)\pi_1^2, & \delta b' &= (c - a)\pi_1^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Эти уравнения содержат две линейно независимые вторичные формы π_1^2, π^3, которые соответствуют двум вторичным параметрам трёхгранника; один определяет положение вершины трёхгранника A на луче и дифференциал его отличается только скалярным множителем от формы π^3; другой определяет поворот трёхгранника около луча; ему соответствует вторичная форма π_1^2.

Чтобы найти конечные преобразования подгруппы и подобрать канонический трёхгранник, надо выделить из стационарной подгруппы однопараметрическое семейство преобразований. С этой целью мы наложим условие на компоненты подгруппы

$$\pi_1^2 = 0.$$

Поскольку дифференциалы вторичных параметров теперь связаны линейным соотношением, единственная оставшаяся вторичная форма π^3 и под знаком дифференциала и в коэффициентах будет содержать только одно независимое переменное (абсциссу точки A на луче)

$$\pi^3 = f(t)\,dt.$$

Делая замену переменных

$$\tau = \int_0^t f(t)\,dt,$$

мы приведём форму π^3 к виду полного дифференциала

$$\pi^3 = d\tau.$$

Внося значения π_1^2 и π^3 в уравнения (1), получим:

$$\delta a + \delta\tau = 0, \quad \delta c + \delta\tau = 0, \quad \delta b = \delta b' = 0,$$

откуда, интегрируя, имеем:

$$a + \tau = C_1, \quad c + \tau = C_2, \quad b = C_3, \quad b' = C_4, \qquad C_i = \text{const}.$$

Эти уравнения определяют закон изменения величин a, b, b', c преобразованиями однопараметрической подгруппы с параметром τ. Постоянные интеграции C_i не зависят от τ, но могут меняться при изменении главных параметров и второго вторичного. Каждое значение τ выделяет один из трёхгранников семейства.

Выбирая значения $\tau = C_1$ или $\tau = C_2$, мы можем привести к нулю коэффициент a или c; и то и другое имеет хороший геометрический смысл, но нарушает симметрию форм относительно указателей 1 и 2. Поэтому сейчас мы выберем $\tau = \frac{C_1 + C_2}{2}$, чтобы обратилась в нуль сумма

$$a + c = 0. \tag{2}$$

Для всякой конгруэнции мы можем выбрать трёхгранник (т. е. его вершину A) так, чтобы уравнение (2) имело место. Дифференцируя это равенство и внося значение δa, δc из формул (1), получим:

$$2\pi^3 = 0.$$

Следовательно, условие (2) ограничит выбор вторичных параметров так, что форма π^3 будет тождественно равна нулю. При этом форма π_1^2 остаётся независимой. Эта форма теперь может зависеть только от одного вторичного параметра (угол поворота трёхгранника около луча). Делая замену переменных, мы можем положить

$$\pi_1^2 = d\sigma.$$

Внося $c = -a$, $\pi^3 = 0$, $\pi_1^2 = d\sigma$ в уравнения (1), получим:

$$\delta a = (b + b')\,\delta\sigma, \quad \delta b + 2a\delta\sigma = 0, \quad \delta b' + 2a\,\delta\sigma = 0.$$

Эту систему обыкновенных дифференциальных уравнений при одном независимом переменном σ можно написать в виде

$$\frac{da}{d\sigma} = b + b', \quad \frac{db}{d\sigma} = -2a, \quad \frac{db'}{d\sigma} = -2a,$$

где введение специального знака дифференцирования δ излишне, поскольку независимое переменное явно указано. Интегрируя эту систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами, получим:

$$a = C_1 \sin 2\sigma + C_2 \cos 2\sigma, \quad b = C_1 \cos 2\sigma - C_2 \sin 2\sigma + C_3,$$
$$b' = C_1 \cos 2\sigma - C_2 \sin 2\sigma - C_3, \qquad C_i = \text{const}.$$

Эти уравнения определяют закон изменения коэффициентов a, b, b' преобразованиями однопараметрической подгруппы, которая осталась от стационарной двупараметрической подгруппы после закрепления параметра τ.

Различным выбором значения вторичного параметра σ можно, сохраняя симметрию, обратить в нуль коэффициент a или сумму $b + b'$. Разность $b - b'$ от σ не зависит и является инвариантом конгруэнции (см. § 28).

Геометрический смысл первого или второго выбора канонического трёхгранника нетрудно увидеть, если обратиться к формулам § 25 гл. II. Уравнение (26) § 25 показывает, что выбор первого вторичного параметра τ, который привёл к равенству (2), помещает начальную точку A в центр луча. Обращение коэффициента a (стало быть и c) в нуль означает, как это показывает уравнение (27) § 25, что главные поверхности будут определяться уравнениями

$$\omega_1^3 + \omega_2^3 = 0, \quad \omega_1^3 - \omega_2^3 = 0,$$

т. е. сферическое изображение главных поверхностей имеет координатные векторы осей e_1, e_2 своими биссектрисами. Обращение суммы $b+b'$ в нуль означало бы, согласно тому же уравнению (27) § 25, отнесение конгруэнции к главным поверхностям.

Имея целью исследование фокальных поверхностей и фокальных сетей, высекаемых на них развёртывающимися поверхностями, и помня, что углы касательных к тем линиям сферы, которые изображают главные поверхности, и тем, которые изображают развёртывающиеся поверхности, имеют одни и те же биссектрисы, мы выберем канонический трёхгранник так, чтобы имели место равенства

$$a=0, \quad c=0.$$

34. Основные формулы конгруэнции, отнесённой к каноническому трёхграннику. После того, как вторичные параметры выбраны и трёхгранник стал каноническим, все коэффициенты в уравнениях, связывающих его компоненты, становятся инвариантами.

Уравнения (20) § 24 дают теперь

$$\omega^1 = b\,\omega_2^3, \quad \omega^2 = b'\,\omega_1^3. \tag{3}$$

Следовательно, b и b' — инварианты конгруэнции.

Уравнение (23) § 25 даёт теперь для абсциссы общего перпендикуляра двух лучей дифференциальной окрестности формулу

$$r = (b+b')\frac{\omega_1^3\,\omega_2^3}{(\omega_1^3)^2+(\omega_2^3)^2}. \tag{4}$$

Следовательно, *линии сжатия координатных поверхностей* $\omega_2^3=0$, $\omega_1^3=0$ *пересекают луч в центре.*

Уравнения (25) и (29) § 25 дают абсциссы граничных точек и фокусов

$$r_{1,2} = \pm\frac{b+b'}{2}, \qquad \rho_{1,2} = \pm\sqrt{bb'}. \tag{5}$$

Уравнения главных и развёртывающихся поверхностей получаем из уравнений (27) и (30) § 25 в виде

$$(\omega_1^3)^2-(\omega_2^3)^2=0, \qquad b'(\omega_1^3)^2-b(\omega_2^3)^2=0. \tag{6}$$

Нетрудно увидеть, что фокусу

$$F_1 = A+\rho e_3$$

соответствует развёртывающаяся поверхность, определяемая любым из двух равносильных уравнений

$$b\omega_2^3-\rho\omega_1^3=0, \quad b'\omega_1^3-\rho\omega_2^3=0. \tag{7}$$

Действительно, дифференцируя радиус-вектор фокуса F_1 и пользуясь уравнениями (3), получим:

$$dF_1 = (b\omega_2^3-\rho\omega_1^3)\,e_1+(b'\omega_1^3-\rho\omega_2^3)\,e_2+(\omega^3+d\rho)\,e_3. \tag{8}$$

При дифференцировании вдоль линии (7) вектор касательной dF_1 коллинеарен лучу e_3, следовательно, фокус F_1 описывает ребро возврата развёртывающейся поверхности (7).

Если обозначить буквой φ угол наклона к оси e_1 касательной к той линии на сфере, которая изображает развёртывающуюся поверхность (7), то тангенс этого угла равен отношению компонент вектора касательной к сфере de_3 по осям e_2 и e_1, т. е. отношению $\omega_2^3:\omega_1^3$ или в силу уравнений (7)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\rho}{b} = \frac{b'}{\rho},$$

откуда

$$b=\rho\operatorname{ctg}\varphi, \quad b'=\rho\operatorname{tg}\varphi. \tag{9}$$

Для второго фокуса F_2 и второй развёртывающейся поверхности мы должны взять координату на луче равной $-\rho$ и угол наклона касательной к оси e_1 равным $-\varphi$.

Отсюда следует, что угол между сферическим изображением развёртывающихся поверхностей конгруэнции равен 2φ. Поскольку касательная плоскость к сфере перпендикулярна к лучу и, следовательно, сечёт ортогонально фокальные плоскости, а эти плоскости как касательные плоскости развёртывающихся поверхностей конгруэнции содержат касательные к сферическому изображению (или параллельны им), то угол 2φ равен углу фокальных плоскостей. Наконец, поскольку расстояние между граничными точками луча — $d=r_1-r_2=b+b'$, из уравнений (9) получим:

$$2\rho = d\sin 2\varphi, \tag{10}$$

а формулы (3) примут вид

$$\omega^1 = \omega_2^3\rho\operatorname{ctg}\varphi, \quad \omega^2=\omega_1^3\rho\operatorname{tg}\varphi. \tag{3'}$$

35. Формулы для фокальных поверхностей. Если в разложение (8) для дифференциала dF_1 внести значения коэффициентов b, b' из уравнений (9), то получим:

$$dF_1 = \frac{\rho}{\sin\varphi\cos\varphi}(\omega_1^3\sin\varphi-\omega_2^3\cos\varphi)(e_2\sin\varphi-e_1\cos\varphi)+(\omega^3+d\rho)\,e_3. \tag{11}$$

Отсюда вытекает, что единичный вектор нормали n_1 к первой фокальной поверхности (F_1) равен векторному произведению двух касательных векторов $e_2\sin\varphi-e_1\cos\varphi$ и e_3

$$n_1 = (e_2\sin\varphi-e_1\cos\varphi)\times e_3 = e_1\sin\varphi+e_2\cos\varphi.$$

Его дифференциал равен

$$dn_1 = (\omega_1^2 - d\varphi)(e_2 \sin\varphi - e_1 \cos\varphi) + (\omega_1^3 \sin\varphi + \omega_2^3 \cos\varphi) e_3. \quad (12)$$

Введём теперь новые формы

$$\tilde\omega_1 = \omega_2^3 \cos\varphi - \omega_1^3 \sin\varphi, \quad \tilde\omega_2 = \omega_2^3 \cos\varphi + \omega_1^3 \sin\varphi. \quad (13)$$

Нулевые линии их соответствуют первой ($\tilde\omega_1 = 0$) и второй ($\tilde\omega_2 = 0$) развёртывающимся поверхностям конгруэнции. Формулы (11), (12) теперь принимают вид

$$dF_1 = \frac{\rho}{\sin\varphi\cos\varphi}\tilde\omega_1 (e_1 \cos\varphi - e_2 \sin\varphi) + (\omega^3 + d\rho) e_3, \quad (11')$$

$$dn_1 = (d\varphi - \omega_1^2)(e_1 \cos\varphi - e_2 \sin\varphi) + \tilde\omega_2 e_3, \quad (12')$$

а внешние дифференциалы форм (13) подсчитываются в виде

$$D\tilde\omega_1 = \left[\omega_1^2 + d\varphi, \quad \tilde\omega_1 \operatorname{ctg} 2\varphi - \tilde\omega_2 \frac{1}{\sin 2\varphi}\right], \quad (14)$$

$$D\tilde\omega_2 = \left[\omega_1^2 - d\varphi, \quad \tilde\omega_1 \frac{1}{\sin 2\varphi} - \tilde\omega_2 \operatorname{ctg} 2\varphi\right].$$

Следовательно, линейный элемент и вторая квадратичная форма первой фокальной поверхности будут

$$ds_1^2 = \frac{\rho^2}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}(\tilde\omega_1)^2 + (\omega^3 + d\rho)^2,$$

$$\psi_1 = -dn_1 \cdot dF_1 = -\frac{\rho}{\sin\varphi\cos\varphi}\tilde\omega_1 (d\varphi - \omega_1^2) - \tilde\omega_2(\omega^3 + d\rho). \quad (15)$$

В формулах (11′), (12′) векторы e_3 и $e_1 \cos\varphi - e_2 \sin\varphi$ являются единичными векторами касательной плоскости, которые вместе с нормалью n_1 образуют нормальный трёхгранник, присоединённый к точкам первой фокальной поверхности. Его компоненты суть

$$\Omega_1 = \omega^3 + d\rho, \quad \Omega_2 = \frac{\rho}{\sin\varphi\cos\varphi}\tilde\omega_1,$$

$$\Omega_1^3 = -\tilde\omega_2, \quad \Omega_2^3 = \omega_1^2 - d\varphi. \quad (16)$$

Отсюда кривизна, как отношение элемента площади сферического изображения поверхности посредством вектора нормали n_1 к элементу площади самой поверхности (Т. П., стр. 70), равна [1]

$$K = \frac{[\Omega_1^3 \Omega_2^3]}{[\Omega_1 \Omega_2]} = \frac{-[\tilde\omega_2, \omega_1^2 - d\varphi]\sin\varphi\cos\varphi}{\rho\,[\omega^3 + d\rho, \tilde\omega_1]}. \quad (17)$$

[1]) Векторное произведение векторов, касательных к поверхности (A)

$$dA \times \delta A = \{\omega_1(d)\, e_1 + \omega_2(d)\, e_2\} \times \{\omega_1(\delta)\, e_1 + \omega_2(\delta)\, e_2\} =$$
$$= \{\omega_1(d)\,\omega_2(\delta) - \omega_2(d)\,\omega_1(\delta)\}\, e_3 = [\omega_1\,\omega_2]\, e_3,$$

имеет модулем площадь параллелограма, построенного на векторах dA и δA, т. е. элемент площади поверхности.

Линии кривизны соответствуют развёртывающимся поверхностям конгруэнции нормалей (Т. П., стр. 71). Выписывая уравнения (28) § 25 для компонент (16) и заменяя ρ главным радиусом кривизны R фокальной поверхности (отрезок нормали от точки поверхности F до фокуса нормали, т. е. до главного центра кривизны), получим:

$$\omega^3 + d\rho + R\tilde\omega_2 = 0,$$

$$\frac{\rho}{\sin\varphi\cos\varphi}\tilde\omega_1 + R(d\varphi - \omega_1^2) = 0, \quad (18a)$$

откуда, исключая R, получаем уравнение линий кривизны первой фокальной поверхности

$$(\omega_1^2 - d\varphi)(\omega^3 + d\rho) + \frac{\rho}{\sin\varphi\cos\varphi}\tilde\omega_1 \tilde\omega_2 = 0. \quad (18b)$$

36. Уравнения структуры для фокальных поверхностей. Формулы (16) вводят компоненты нового трёхгранника, присоединённого к точке F_1 фокальной поверхности с единичными векторами осей

$$E_1 = e_3, \quad E_2 = e_1 \cos\varphi - e_2 \sin\varphi, \quad E_3 = n_1 = e_1 \sin\varphi + e_2 \cos\varphi. \quad (19)$$

Уравнения дифференциальных перемещений его имеют вид

$$dF_1 = \Omega_1 E_1 + \Omega_2 E_2,$$

$$dE_1 = \Omega_1^2 E_2 + \Omega_1^3 E_3, \quad dE_2 = \Omega_2^1 E_1 + \Omega_2^3 E_3, \quad dE_3 = \Omega_3^1 E_1 + \Omega_3^2 E_2. \quad (20)$$

Поскольку

$$dE_2 = d(e_1 \cos\varphi - e_2 \sin\varphi) =$$
$$= e_3(\omega_1^3 \cos\varphi - \omega_2^3 \sin\varphi) + (\omega_1^2 - d\varphi)(e_2 \cos\varphi + e_1 \sin\varphi),$$

мы имеем

$$\Omega_1^2 = -\omega_1^3 \cos\varphi + \omega_2^3 \sin\varphi = \frac{\tilde\omega_1 - \tilde\omega_2 \cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}. \quad (16b)$$

Из уравнений структуры нас будет интересовать то уравнение, которое не содержит новых внешних дифференциалов, т. е. уравнение $D\Omega^3 = 0$. Оно имеет вид

$$[\Omega_1 \Omega_1^3] + [\Omega_2 \Omega_2^3] = 0,$$

или, если внести выражения (16),

$$\frac{\rho}{\sin\varphi\cos\varphi}[\omega_1^2 - d\varphi, \tilde\omega_1] + [\omega^3 + d\rho, \tilde\omega_2] = 0. \quad (21)$$

Это уравнение и такое же для второй фокальной поверхности эквивалентны уравнениям (34a) и (34b) § 25. Раскрывая уравнение (21) с помощью леммы Картана, получаем:

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{\sin\varphi\cos\varphi}(\omega_1^2 - d\varphi) &= A\tilde\omega_1 + B\tilde\omega_2,\\ \omega^3 + d\rho &= B\tilde\omega_1 + C\tilde\omega_2.\end{aligned}\tag{22a}$$

Если рассмотреть трёхгранник, присоединённый ко второй фокальной поверхности $F_2 = A - \rho e_3$, то получим такие же формулы с обычным изменением знаков у параметров ρ и φ и заменой коэффициентов A, B, C на A', B', C'

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{\sin\varphi\cos\varphi}(\omega_1^2 + d\varphi) &= A'\tilde\omega_2 + B'\tilde\omega_1,\\ \omega^3 - d\rho &= B'\tilde\omega_2 + C'\tilde\omega_1.\end{aligned}\tag{22b}$$

Теперь уравнения (14) принимают вид

$$\begin{aligned}D\tilde\omega_1 &= -\frac{A'\cos 2\varphi + B'}{2\rho}[\tilde\omega_1\,\tilde\omega_2],\\ D\tilde\omega_2 &= -\frac{A\cos 2\varphi + B}{2\rho}[\tilde\omega_1\,\tilde\omega_2],\end{aligned}\tag{14'}$$

а формула (17) для кривизн первой и второй фокальной поверхности даст

$$K_1 = -\frac{A}{C}\,\frac{\sin^2 2\varphi}{4\rho^2}, \quad K_1 = -\frac{A'}{C'}\,\frac{\sin^2 2\varphi}{4\rho^2}.\tag{17'}$$

Линейный элемент и вторая квадратичная форма первой фокальной поверхности будут

$$\begin{aligned}ds_1^2 &= \left(\frac{4\rho^2}{\sin^2 2\varphi} + B^2\right)(\tilde\omega_1) + 2BC\tilde\omega_1\tilde\omega_2 + C^2(\tilde\omega_2)^2,\\ \psi_1 &= -dn_1\cdot dF_1 = A(\tilde\omega_1)^2 - C(\tilde\omega_2)^2.\end{aligned}\tag{15'}$$

37. Определение конгруэнции по заданному сферическому изображению развёртывающихся поверхностей. Формулам предыдущих параграфов можно придать новый вид, если явно ввести независимые переменные u, v, которые соответствуют линиям фокальной сети $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$

Если воспользоваться формулами (16), (19), (20) § 36, то в силу $E_1 = e_3$ дифференциал de_3 можно написать в виде

$$de_3 = \Omega_1^2 E_2 + \Omega_1^3 E_3 = \frac{\tilde\omega_1 - \tilde\omega_2\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}(e_1\cos\varphi - e_2\sin\varphi) - \\ - \tilde\omega_2(e_1\sin\varphi + e_2\cos\varphi).$$

Линейный элемент сферического изображения конгруэнции теперь напишется в виде

$$de_3^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = \frac{(\tilde\omega_1 - \tilde\omega_2\cos 2\varphi)^2}{\sin^2 2\varphi} + (\tilde\omega_2)^2 = \\ = \frac{(\tilde\omega_1)^2}{\sin^2 2\varphi} - 2\frac{\tilde\omega_1\tilde\omega_2\cos 2\varphi}{\sin^2 2\varphi} + \frac{(\tilde\omega_2)^2}{\sin^2 2\varphi}.$$

Поскольку уравнения $\tilde\omega_1 = 0$, $\tilde\omega_2 = 0$, так же как уравнения $du = 0$, $dv = 0$, определяют развёртывающиеся поверхности, мы должны иметь

$$E\,du^2 = \frac{(\tilde\omega_1)^2}{\sin^2 2\varphi}, \quad G\,dv^2 = \frac{(\tilde\omega_2)^2}{\sin^2 2\varphi}, \quad F\,du\,dv = -\frac{\cos 2\varphi}{\sin^2 2\varphi}\tilde\omega_1\tilde\omega_2, \tag{a}$$

откуда

$$\tilde\omega_1 = \sqrt{E}\sin 2\varphi\,du, \quad \tilde\omega_2 = \sqrt{G}\sin 2\varphi\,dv \tag{a'}$$

и

$$de_3 = \sqrt{E}(e_1\cos\varphi - e_2\sin\varphi)\,du - \sqrt{G}(e_1\cos\varphi + e_2\sin\varphi)\,dv.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial e_3}{\partial u} = \sqrt{E}(e_1\cos\varphi - e_2\sin\varphi), \quad \frac{\partial e_3}{\partial v} = -\sqrt{G}(e_1\cos\varphi + e_2\sin\varphi).$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (a') и пользуясь формулами (14) § 35, получим:

$$[\omega_1^2 - m_1\tilde\omega_4,\ \tilde\omega_3] = 0, \quad [\omega_1^2 - m_2\tilde\omega_3,\ \tilde\omega_4] = 0, \tag{b}$$

где

$$\begin{aligned}m_1 &= \frac{1}{\sqrt{EG}\sin 2\varphi}\left(\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\sqrt{G}}{\sin 2\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \sqrt{E}\operatorname{ctg} 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right),\\ m_2 &= \frac{1}{\sqrt{EG}\sin 2\varphi}\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\sqrt{E}}{\sin 2\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \sqrt{G}\operatorname{ctg} 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right),\end{aligned}\tag{c}$$

$$\tilde\omega_3 = \sqrt{E}\cos 2\varphi\,du - \sqrt{G}\,dv, \quad \tilde\omega_4 = \sqrt{E}\,du - \sqrt{G}\cos 2\varphi\,dv.$$

Уравнения (b) можно переписать в виде

$$[\omega_1^2 - m_1\tilde\omega_4 - m_2\tilde\omega_3,\ \tilde\omega_3] = 0, \quad [\omega_1^2 - m_1\tilde\omega_4 - m_2\tilde\omega_3,\ \tilde\omega_4] = 0.$$

Первое из этих уравнений требует, чтобы форма $\omega_1^2 - m_1\tilde\omega_4 - m_2\tilde\omega$ в своём разложении по формам $\tilde\omega_3$, $\tilde\omega_4$ не содержала компоненты с $\tilde\omega_4$, второе — чтобы она не содержала компоненты с $\tilde\omega_3$. Отсюда вытекает, что эта форма должна равняться нулю:

$$\omega_1^2 = m_1\tilde\omega_4 + m_2\tilde\omega_3,$$

или, если внести значения (c), а также $\theta = \pi - 2\varphi$ и собрать члены с дифференциалами du и dv,

$$\omega_1^2 = \left(p\sqrt{\frac{E}{G}}\sin\theta + \frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)du - \left(q\sqrt{\frac{G}{E}}\sin\theta + \frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)dv, \quad \text{(d)}$$

где

$$p = \frac{\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cos\theta}{\sqrt{E}\sin^2\theta}, \quad q = \frac{\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cos\theta}{\sqrt{G}\sin^2\theta} \quad \text{(e)}$$

суть скобки Кристоффеля $\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}$ и $\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}$ для линейного элемента сферического изображения конгруэнции и θ — угол между координатными линиями на сфере, как это видно из формул (a) и (a′).

Уравнение (21) и аналогичные для второй фокальной поверхности теперь принимают вид

$$\left[\omega^3 + \rho\left(\frac{\partial \ln\rho}{\partial u} + 2q\right)du,\ dv\right] = 0, \quad \left[\omega^3 - \rho\left(\frac{\partial\ln\rho}{\partial v} + 2p\right)dv,\ du\right] = 0,$$

откуда так же, как выше, получим:

$$\omega^3 = -\rho\left(\frac{\partial\ln\rho}{\partial u} + 2q\right)du + \rho\left(\frac{\partial\ln\rho}{\partial v} + 2p\right)dv. \quad \text{(f)}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (d), (f), получим:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{G}{E}}\,q\sin\theta\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{E}{G}}\,p\sin\theta\right) + \sqrt{EG}\sin\theta = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,dv} + p\frac{\partial\rho}{\partial u} + q\frac{\partial\rho}{\partial v} + (p_u + q_v + \sqrt{EG}\cos\theta)\rho = 0. \quad (24)$$

Это — единственные два уравнения, которые наложены на неизвестные функции E, G, θ и ρ. Первое из этих уравнений есть уравнение Гаусса для сферы. Оно требует, чтобы кривизна линейного элемента

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\sqrt{EG}\cos\theta\,du\,dv + G\,dv^2$$

равнялась единице. Если сферическое изображение конгруэнции, отнесённой к развёртывающимся поверхностям, задано, т. е. известны функции E, G, θ, удовлетворяющие уравнению (23), то фокальное расстояние конгруэнции 2ρ определится из уравнения (24) с произволом двух функций одного аргумента. Компоненты движения трёхгранника будут известны и конечные уравнения конгруэнции получатся из вполне интегрируемой системы (1) § 17.

II. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ИНВОЛЮЦИИ

38. Системы уравнений в полных дифференциалах в инволюции. Теорема существования решений системы дифференциальных уравнений, которую мы сформулировали в § 22 гл. II, для вполне интегрируемой системы представляет частный случай несравненно более важной теоремы существования решения системы уравнений в полных дифференциалах линейных или с внешними произведениями, если она приведена к виду системы в инволюции. Заметим сейчас же, что всякая непротиворечивая система может быть приведена регулярным процессом в инволюцию.

Чтобы определить, каким условиям должна удовлетворять система в инволюции, мы должны предварительно ввести некоторые понятия.

Ограничимся случаем двух независимых переменных, который только и будет нас интересовать в этой главе.

Система уравнений может содержать линейные уравнения в полных дифференциалах или внешние квадратичные. Уравнения выше второй степени в кольце двух дифференциалов теряют смысл (М. В. Ф., стр. 88).

Следовательно, наша система имеет вид:

$$\begin{aligned} &\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \ \ldots, \ \theta_s = 0, \\ &\Theta_1 = 0, \quad \Theta_2 = 0, \ \ldots, \Theta_\sigma = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

где θ_i — линейные формы от дифференциалов r неизвестных функций dz_1, dz_2, ..., dz_r и двух независимых переменных du, dv, а Θ_α — квадратичные формы от тех же дифференциалов.

Определение. Система уравнений называется *замкнутой* относительно операции дифференцирования, если полные дифференциалы конечных уравнений системы и внешние дифференциалы дифференциальных уравнений удовлетворены в силу уравнений системы.

Поскольку наша система не содержит конечных уравнений, а внешние дифференциалы квадратичных уравнений приводят к уравнениям выше второй степени, которые в кольце двух независимых дифференциалов удовлетворяются тождественно, то нам надо только продифференцировать внешним образом линейные уравнения и полученные квадратичные присоединить к системе. Допустим, что это уже сделано и система (25) — замкнутая.

Определение. *Интегральным линейным элементом* $e\,(d)$ называется совокупность точки, т. е. $r+2$ числовых значений переменных z_j, u, v и вектора, т. е. $r+2$ числовых значений дифференциалов dz_j, du, dv, которые после подстановки в левые части линейных уравнений θ_i обращают их в нуль.

Интегральным двумерным элементом $\mathfrak{E}_2$ называется совокупность двух линейных элементов с общей точкой, т. е. совокупность $r+2$ чисел z_j, u, v; $r+2$ чисел dz_j, du, dv и $r+2$ чисел δz_j, δu, δv, которые удовлетворяют не только линейным уравнениям θ_i (как вектор dz_j, du, dv, так и вектор δz_j, δu, δv), но и квадратичным, именно: билинейные формы, присоединенные к тем квадратичным формам Θ_α, которые стоят в левых частях квадратичных уравнений (25), должны обратиться в нуль, если туда подставить вместо переменных z_j, u, v координаты точки, а вместо дифференциалов dz_j, du, dv и δz_j, δu, δv координаты первого и второго базисного вектора двумерного элемента $\mathcal{E}_2$.

Определение. Система в *инволюции*, если через каждый неособый интегральный линейный элемент проходит по крайней мере один двумерный, т. е. существует двумерный интегральный элемент, составленный из заданного линейного $e_1(d)$ и ещё второго $e_2(\delta)$ с общей точкой приложения. Интегральный линейный элемент называется *особым*, если через него проходит больше двумерных, чем через соседние.

Чтобы исследовать замкнутую систему на инволютивность, надо разрешить линейные уравнения θ_i относительно s дифференциалов $dz_1, dz_2, \ldots, dz_s$ (если ранг системы θ_i равен s) и полученные значения внести в квадратичные уравнения $\Theta_\alpha = 0$ (как заданные, так и полученные дифференцированием линейных).

В присоединённых к ним билинейных уравнениях $\Theta_\alpha(d,\delta) = 0$ дифференциалы dz_j, du, dv $(j = s+1, s+2, \ldots r)$ считаем заданными (не специализируя их, чтобы не выбрать случайно особый элемент), заданными считаем и дифференциалы δu, δv независимых переменных на втором линейном элементе $e_2(\delta)$ и при этих условиях определяем ранг относительно неизвестных δz_j полученной линейной системы. Если ранг равен s_1 и систему можно разрешить относительно s_1 дифференциалов $\delta z_{s+1}, \delta z_{s+2}, \ldots, \delta z_{s+s_1}$, то система — в *инволюции*.

Определение. *Характерами* s, s_1, s_2 системы в инволюции называются: число s линейно независимых линейных уравнений системы (ранг системы форм θ_i), число s_1 независимых квадратичных уравнений (ранг системы билинейных форм, присоединённых к квадратичным Θ_α относительно неизвестных δz_j), число s_2, равное разности

$$s_2 = r - s - s_1,$$

где r — число неизвестных функций z_j, которые входят существенно.

Переменные входят существенно, если нельзя заменой переменных преобразовать систему уравнений так, чтобы новая система содержала меньше неизвестных функций (см. М. В. Ф., характеристические переменные).

Система в инволюции с характерами s, s_1, s_2 имеет решение и только одно, определяемое начальными условиями: если $s_2 > 0$, то все s_2 функции $z_{s+s_1+1}, z_{s+s_1+2}, \ldots, z_r$ сверх первых $s + s_1$ следует задать произвольными функциями двух независимых переменных u, v, если $s_1 > 0$, то s_1 неизвестных функций $z_{s+1}, z_{s+2}, \ldots, z_{s+s_1}$ принимают начальные значения как произвольные функции одного независимого переменного для начального значения (значения в начальной точке) другого; остальные s неизвестных функций $z_1, z_2, \ldots, z_s$ принимают произвольное начальное значение (произвольное постоянное) в начальной точке. При этом начальной точкой называется точка приложения всех интегральных элементов (М. В. Ф., стр. 193), и все произвольные функции для начальных значений обеих переменных принимают значения, равные соответствующим координатам начальной точки.

Пример. Дана система дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} dz_1 + z_2\,du - z_3\,dv = 0, \\ [dz_2\,dz_3] = 0. \end{gathered} \tag{a}$$

Определить произвол решения, если u, v суть независимые переменные, а z_1, z_2, z_3 — неизвестные функции.

Решение. Дифференцируем внешним образом линейное уравнение:

$$[dz_2\ du] - [dz_3\ dv] = 0. \tag{b}$$

Система уравнений (a) и (b) — замкнута относительно операции внешнего дифференцирования, ибо внешнее дифференцирование уравнений (a), (b) приводит к тождествам.

Первый линейный интегральный элемент задаётся точкой $(u, v; z_1, z_2, z_3)$, где все пять чисел произвольны, и пятью дифференциалами, из которых дифференциалы du, dv; dz_2, dz_3 — произвольные числа и $dz_1 = -z_2\,du + z_3\,dv$.

Двумерный интегральный элемент, проходящий через этот линейный элемент $e_1(d)$, определяется ещё вторым линейным элементом с той же точкой и с дифференциалами δu, δv, δz_2, δz_3 и $\delta z_1 = -z_2\delta u + z_3\delta v$ так, чтобы удовлетворялись билинейные уравнения, присоединённые к квадратичным уравнениям (a) и (b):

$$\begin{gathered} \delta z_3\,dz_2 - \delta z_2\,dz_3 = 0, \\ \delta z_3\,dv - \delta z_2\,du = dz_3\,\delta v - dz_2\,\delta u. \end{gathered} \tag{c}$$

Здесь все дифференциалы dz_i, du, dv и δu, δv заданы, дифференциалы δz_2, δz_3 подлежат определению.

Если определитель системы (c) относительно неизвестных $\delta z_2\,\delta z_3$ не равен нулю

$$dz_2\,du - dz_3\,dv \neq 0, \tag{d}$$

то из системы (c) находим

$$\delta z_3 = -\frac{dz_3\,(dz_3\,\delta v - dz_2\,\delta u)}{dz_2\,du - dz_3\,dv}, \quad \delta z_2 = -\frac{dz_2\,(dz_3\,\delta v - dz_2\,\delta u)}{dz_2\,du - dz_3\,dv},$$

и система — в инволюции. Так как линейное уравнение — одно, $s = 1$, а квадратичных уравнений замкнутая система содержит два, притом независимых (ранг линейной системы (с) равен двум), то характеры системы $s=1$, $s_1=2$. Все δz_i определены, следовательно, $s_2=0$, произвольных функций от двух аргументов начальные условия не содержат; решение зависит от двух произвольных функций одного аргумента и одного произвольного постоянного.

Если начальную точку задать значениями $z_1=z_2=z_3=1$, $u=v=0$, на первом линейном элементе считать $dz_2=dz_3=1$, $du=1$, $dv=0$; на втором — $\delta u=0$, $\delta v=1$, то условие (с) удовлетворено.

Произвольными функциями одного аргумента будут начальные значения $z_2=\varphi(u)$, $z_3=\psi(u)$ для $v=0$, которые для $u=0$ должны принимать значения $z_2=z_3=1$, а произвольным постоянным — значение z_1 для $u=v=0$.

Особое решение. Если

$$dz_2\,du-dz_3\,dv=0 \tag{d'}$$

для всякого выбора дифференциалов du, dv, то система (а), (b) — не в инволюции. Чтобы исследовать её, надо присоединить к системе линейные уравнения

$$dz_2=\lambda\,dv,\quad dz_3=\lambda\,du, \tag{e}$$

где λ — новое, вспомогательное неизвестное. Эти уравнения, очевидно, равносильны квадратичному равенству (d').

Внося эти значения в квадратичные уравнения (а), (b), получим:

$$\lambda^2\,[dv\,du]=0,\quad 2\lambda\,[du\,dv]=0.$$

Следовательно, $\lambda=0$, и уравнения (е) принимают вид

$$dz_2=0,\quad dz_3=0.$$

Система

$$dz_1+z_2\,du-z_3\,dv=0,\quad dz_2=0,\quad dz_3=0$$

вполне интегрируема, и общее решение зависит от трёх постоянных. Для системы (а) это решение называется особым.

39. Теорема существования для системы в инволюции. При двух независимых переменных доказательство теоремы существования решения системы дифференциальных уравнений в инволюции не представляет затруднений.

Если s, s_1, s_2 — характеры системы, то совокупность линейных уравнений системы может быть разрешена относительно s дифференциалов $dz_1, dz_2, \ldots, dz_s$, совокупность билинейных уравнений, присоединённых к квадратичным уравнениям системы, может быть разрешена относительно s_1 дифференциалов $dz_{s+1}, dz_{s+2}, \ldots, dz_{s+s_1}$. Все остальные s_2 неизвестных функций $z_{s+s_1+1}, \ldots, z_r$, если таковые существуют, могут быть заданы произвольными функциями двух аргументов, лишь бы в начальной точке они принимали полагающиеся им начальные значения. Эти функции мы с самого начала внесём

вместо s_2 неизвестных $z_{s+s_1+1}, \ldots, z_r$ в уравнения системы. Переменные $z_{s+1}, z_{s+2}, \ldots, z_{s+s_1}$ обозначим буквами $y_1, y_2, \ldots, y_{s_1}$.

Без ограничения общности можно предположить (М. В. Ф., стр. 183), что независимые переменные u, v выбраны так, что первый линейный элемент $e_1(d)$ определяется значениями дифференциалов $du=1$, $dv=0$, а второй $e_2(\delta)$ — значениями $\delta u=0$, $\delta v=1$. Тогда будем иметь

$$dy_\alpha=\frac{\partial y_\alpha}{\partial u},\qquad \delta y_\alpha=\frac{\partial y_\alpha}{\partial v}.$$

В начальной точке все билинейные уравнения разрешены относительно дифференциалов δy_α ($\alpha=1, 2, \ldots, s_1$). В окрестности начальной точки ранг этой линейной системы не может понизиться, ибо определители функциональной матрицы коэффициентов, не равные нулю в начальной точке, в силу непрерывности будут отличны от нуля и в достаточно малой окрестности её. Ранг матрицы не может повыситься, ибо это означало бы, что в начальной точке множество интегральных элементов $\mathcal{E}_2$, проходящих через выбранный линейный элемент $e(d)$, больше, чем в соседних точках, и элемент $e(d)$ был бы особым. Значит, в окрестности начальной точки квадратичные уравнения системы равносильны системе уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial y_\alpha}{\partial v}=F_\alpha\left(u, v; y; z; \frac{\partial y}{\partial u}\right),\quad \alpha=1, 2, \ldots, s_1, \tag{26}$$

где y, z и $\frac{\partial y}{\partial u}$, стоящие в скобках, означают все переменные $y_1, y_2, \ldots, y_{s_1}, z_1\,z_2, \ldots, z_s, \frac{\partial y_1}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial y_{s_1}}{\partial u}$, которые являются аргументами функций F_α.

Линейные уравнения системы разрешены относительно дифференциалов dz_i. Сравнивая коэффициенты при дифференциалах du и dv, мы заменим эти уравнения двумя системами уравнений в частных производных

$$\frac{\partial z_i}{\partial u}=\Phi_i\left(u, v; y; z; \frac{\partial y}{\partial u}\right),\ \frac{\partial z_i}{\partial v}=\Psi_i\left(u, v; y; z; \frac{\partial y}{\partial u}\right), i=1, 2, \ldots, s. \tag{27}$$

Нам надо доказать, что система уравнений (26), (27) допускает решение и только одно, удовлетворяющее начальным условиям

$$\left.\begin{array}{llll} y_\alpha=f_\alpha(u) & \text{для } v=v_0, & & \alpha=1, 2, \ldots, s_1, \\ z_i=z_i^0=\text{const.} & \text{для } u=u_0, & v=v_0, & i=1, 2, \ldots, s. \end{array}\right\} \tag{28}$$

Все функции мы будем предполагать аналитическими функциями своих аргументов в окрестности начальной точки.

Для построения решения мы разобьём уравнения системы на две подсистемы, которые будем последовательно интегрировать. Первая подсистема состоит из уравнений (27) левого столбца, если туда внести значения $v=v_0$, $y_\alpha=f_\alpha(u)$

$$\frac{\partial z_i}{\partial u}=\Phi_i[u,v_0;f(u);z;f'(u)]. \tag{27'}$$

Это — система уравнений с одним только независимым переменным u. Она допускает вполне определённое решение

$$z_i=\varphi_i(u), \tag{29}$$

удовлетворяющее начальным условиям (28):

$$\varphi_i(u_0)=z_i^0.$$

Вторая подсистема образована уравнениями (26) и уравнениями (27) правого столбца

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_\alpha}{\partial v}&=F_\alpha\left(u,\,v;\,y;\,z;\,\frac{\partial y}{\partial u}\right),\\ \frac{\partial z_i}{\partial v}&=\Psi_i\left(u,\,v;\,y;\,z;\,\frac{\partial y}{\partial u}\right).\end{aligned} \tag{30}$$

Это — система Коши. По теореме Ковалевской она допускает единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y_\alpha=f_\alpha(u),\quad z_i=\varphi_i(u)\quad \text{для } v=v_0.$$

Докажем теперь, что построенное решение удовлетворяет всем уравнениям системы (26), (27). Уравнениям (30) оно удовлетворяет по построению. Следовательно, надо показать, что оно удовлетворяет и уравнениям (27) левого столбца.

По условию внешние дифференциалы линейных уравнений $\theta_i=0$ системы (26), (27) удовлетворены в силу уравнений системы. Уравнения (27) позволят написать линейные уравнения $\theta_i=0$ в виде

$$dz_i=\Phi_i\,du+\Psi_i\,dv,\quad i=1,2,\ldots,s. \tag{31}$$

Внешние дифференциалы имеют вид

$$[d\Phi_i\,du]+[d\Psi_i\,dv]=0,$$

или, поскольку $[du\,dv]\neq 0$

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial v}=\frac{\partial\Psi_i}{\partial u},\qquad i=1,2,\ldots,s. \tag{32}$$

Уравнение (32) есть следствие уравнений (26), (27), причём дифференцирование по u или v производится в предположении, что

все аргументы y_α, z_i суть функции от u, v, удовлетворяющие системе (26), (27).

Уравнения (32) можно заменить эквивалентной системой

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\partial z_i}{\partial u}-\Phi_i\right\}=\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\partial z_i}{\partial v}-\Psi_i\right\}. \tag{32'}$$

Внесём сюда найденные решения системы (30). Они обратят правые части уравнений (32′) в нуль в силу уравнений (30) второй строки.

Следовательно, для найденного решения системы (30) имеем:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{\partial z_i}{\partial u}-\Phi_i\right\}=0,$$

т. е. фигурные скобки не зависят от значения переменного v. Для $v=v_0$ фигурные скобки обращаются в нуль, ибо для $v=v_0$ имеем $y_\alpha=f_\alpha(u)$, $z_i=\varphi_i(u)$ и эти функции удовлетворяют системе (27′). Поскольку разности $\frac{\partial z_i}{\partial u}-\Phi_i$ не зависят от v и обращаются в нуль при $v=v_0$, они равны нулю при всяком v, а это и означает, что построенные для системы (30) решения являются решениями первоначальной системы (27).

Таким образом, теорема существования решения для системы в инволюции с двумя независимыми переменными доказана.

III. ПСЕВДОСФЕРИЧЕСКАЯ КОНГРУЭНЦИЯ

40. Теорема существования. Определение. *Конгруэнции, у которых фокальное расстояние и угол фокальных плоскостей постоянны*

$$\rho=\text{const.},\quad \varphi=\text{const.},$$

носят название *псевдосферических*.

Прилагая формулы §§ 34—36, получим прежде всего по формуле (10) § 34, что расстояние между граничными точками тоже постоянно.

Затем среди уравнений (22a) и (22b) § 36 теперь будет только два независимых. Отсюда вытекает соотношение между коэффициентами

$$A=C=B',\quad A'=C'=B. \tag{a}$$

Вводя новые неизвестные

$$\alpha=(B'-B)\sin\varphi,\quad \beta=(B+B')\cos\varphi, \tag{b}$$

мы напишем уравнения (22a) и (22b) в виде

$$\begin{aligned}\omega^3&=\alpha\omega_1^3+\beta\omega_2^3,\\ \frac{\rho}{\sin\varphi\cos\varphi}\,\omega_1^3&=-\alpha\omega_1^3+\omega\beta_2^3.\end{aligned} \tag{33}$$

К этим уравнениям надо присоединить уравнения (3′) § 34

$$\omega^1 = \rho \operatorname{ctg} \varphi\, \omega_2^3, \quad \omega^2 = \rho \operatorname{tg} \varphi\, \omega_1^3 \tag{34}$$

и мы получим все уравнения для определения псевдосферической конгруэнции.

Дифференцируя внешним образом разность уравнений (33), получим:

$$[\omega^1\omega_1^3] + [\omega^2\omega_2^3] + \frac{\rho}{\sin\varphi\cos\varphi}[\omega_1^3\omega_2^3] = 2[d\alpha\omega_1^3] + 2\alpha[\omega_1^2\omega_2^3].$$

Внося сюда значения (33), (34) и собирая члены, будем иметь:

$$\left[d\alpha + \frac{\alpha^2\cos^2\varphi + \rho^2}{\rho}\operatorname{tg}\varphi\omega_2^3,\ \omega_1^3\right] = 0,$$
$$\left[d\beta + \frac{\beta^2\sin^2\varphi + \rho^2}{\rho}\operatorname{ctg}\varphi\omega_1^3,\ \omega_2^3\right] = 0. \tag{35}$$

Второе уравнение получается внешним дифференцированием суммы уравнений (33); внешние дифференциалы уравнений (34) удовлетворены в силу уравнений (33), (34). Следовательно, система (33), (34), (35) — замкнутая.

Чтобы представить себе те переменные, которые она содержит, рассмотрим наиболее общее движение трёхгранника в евклидовом пространстве и подсчитаем все формы ω^i, ω_i^j в функциях от шести независимых параметров $w^1, w^2, \ldots, w^6$ и их дифференциалов. Они по самому построению удовлетворяют уравнениям структуры. Внося эти выражения в уравнения (33), (34), (35), получим систему уравнений, содержащую восемь переменных: шесть параметров w^k и два коэффициента α и β; величины ρ и φ — произвольно заданные постоянные.

Два из параметров w^k являются независимыми переменными, именно те, дифференциалы которых представлены формами ω_1^3, ω_2^3. Дифференциалы остальных четырёх линейно зависят от форм ω^1, ω^2, ω^3, ω_1^2 (и от двух первых, поскольку в последние четыре формы могут входить и дифференциалы независимых переменных). Дифференциалы $d\alpha$, $d\beta$ входят явно; их можно линейно выразить через формы ω_1^3, ω_2^3 и две новые

$$\Delta\alpha = d\alpha + \frac{\alpha^2\cos^2\varphi + \rho^2}{\rho}\operatorname{tg}\varphi\omega_2^3,$$
$$\Delta\beta = d\beta + \frac{\beta^2\sin^2\varphi + \rho^2}{\rho}\operatorname{ctg}\varphi\omega_1^3. \tag{36}$$

Дифференциалы четырёх параметров w^i (кроме независимых переменных) уже исключены из квадратичных уравнений (35), которые теперь имеют вид:

$$[\Delta\alpha,\ \omega_1^3] = 0,\ [\Delta\beta,\ \omega_2^3] = 0. \tag{35′}$$

Интегральный элемент $e_1(d)$ определяется произвольно заданной точкой (w^k, α, β), произвольно заданными значениями дифференциалов независимых переменных, т. е. значений форм ω_1^3, ω_2^3, произвольными значениями форм $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ и значениями форм ω^1, ω^2, ω^3, ω_1^2, подсчитанными из уравнений (33), (34).

Этот элемент $e_1(d)$ в то же время должен быть первым линейным элементом двумерного интегрального элемента $\mathcal{E}_2$. Второй линейный элемент $e_2(\delta)$ этого двумерного $\mathcal{E}_2$ удовлетворяет тем же линейным уравнениям (33), (34), откуда вычисляются значения форм ω^1, ω^2, ω^3, ω_1^2 на линейном элементе e_2, если известны значения дифференциалов независимых переменных, т. е. значения форм ω_1^3, ω_2^3 на элементе e_2. Эти значения мы будем предполагать произвольно заданными и все значения форм на втором линейном элементе $e_2(\delta)$ будем отмечать чертой наверху. Чтобы определить элемент $e_2(\delta)$ остаётся выбрать значения форм $\overline{\Delta\alpha}$, $\overline{\Delta\beta}$ так, чтобы они удовлетворяли билинейным уравнениям, присоединённым к системе (35′). Эти уравнения имеют вид

$$\overline{\Delta\alpha}\omega_1^3 = \overline{\omega}_1^3\Delta\alpha,\quad \overline{\Delta\beta}\omega_2^3 = \overline{\omega}_2^3\Delta\beta. \tag{37}$$

Они определяют значения форм $\overline{\Delta\alpha}$, $\overline{\Delta\beta}$, если ни одна из форм ω_1^3, ω_2^3 на первом линейном элементе не равна нулю.

Обращение в нуль ω_1^3 или ω_2^3 на линейном элементе e_1 приводит к *особому интегральному элементу*, для которого теорема существования § 39 теряет силу. Линии $\omega_1^3 = 0$ или $\omega_2^3 = 0$ существуют на каждой интегральной поверхности аналитического пространства переменных w^k, α, β и называются *характеристиками* системы (33), (34), (35). Им соответствуют координатные поверхности конгруэнции, именно те поверхности конгруэнции [см. формулу (4) § 34], линии сжатия которых пересекают каждый луч в центре. Эти поверхности поэтому тоже носят название *характеристик* в задаче определения псевдосферической конгруэнции.

Так как система содержит $s = 4$ линейно независимых линейных уравнений, а система билинейных ковариантов (35′) имеет ранг $s_1 = 2$ и $s_2 = r - s - s_1 = 0$, то наиболее общая псевдосферическая конгруэнция зависит от двух функций одного аргумента.

41. Основные свойства псевдосферической конгруэнции. Формулы §§ 34—36 дают теперь основные свойства нашей конгруэнции.

Если в формулы (17′) внести $A = C$, $A' = C'$ согласно уравнениям (а) § 40, то они примут вид

$$K_1 = -\frac{\sin^2 2\varphi}{4\rho^2},\quad K_2 = -\frac{\sin^2 2\varphi}{4\rho^2}.$$

Мы видим, что *обе фокальные поверхности псевдосферической конгруэнции в соответствующих точках имеют одну и ту же постоянную кривизну.*

Следовательно, фокальные поверхности конгруэнции — псевдосферические, чем и объясняется название конгруэнции.

Так как по формуле (10) § 35 $d = \frac{2\rho}{\sin 2\varphi}$, то

$$K_1 = K_2 = -\frac{1}{d^2}.$$

Следовательно, *кривизна каждой фокальной поверхности равна с отрицательным знаком обратной величине квадрата расстояния между граничными точками.*

Поскольку из уравнений (a, b) § 40 следует

$$\begin{aligned} A' = C' = B &= \frac{\beta\sin\varphi - \alpha\cos\varphi}{\sin 2\varphi}, \\ A = C = B' &= \frac{\beta\sin\varphi + \alpha\cos\varphi}{\sin 2\varphi}; \end{aligned} \tag{a}$$

то вторая квадратичная форма (15′) § 36 первой фокальной поверхности принимает вид

$$\begin{aligned} -d\boldsymbol{n}_1 \cdot d\boldsymbol{F}_1 &= \\ = \left\{ (\omega_2^3\cos\varphi - \omega_1^3\sin\varphi)^2 - (\omega_2^3\cos\varphi + \omega_1^3\sin\varphi)^2 \right\} &\frac{\beta\sin\varphi + \alpha\cos\varphi}{\sin 2\varphi} = \\ &= -2(\beta\sin\varphi + \alpha\cos\varphi)\,\omega_1^3\omega_2^3; \end{aligned}$$

для второй фокальной поверхности надо изменить знак φ.

Следовательно, *асимптотические линии первой и второй фокальной поверхности соответствуют друг другу и высекаются на фокальных поверхностях координатными поверхностями конгруэнции* (линии сжатия которых пересекают каждый луч в центре). Отсюда вытекает, что *сферическое изображение асимптотических линий ортогонально.*

Линейные элементы фокальных поверхностей (15′) принимают теперь вид

$$\begin{aligned} ds_1^2 &= \frac{4\rho^2}{\sin^2 2\varphi}(\omega_2^3\cos\varphi - \omega_1^3\sin\varphi)^2 + (\alpha\omega_1^3 + \beta\omega_2^3)^2, \\ ds_2^2 &= \frac{4\rho^2}{\sin^2 2\varphi}(\omega_2^3\cos\varphi + \omega_1^3\sin\varphi)^2 + (\alpha\omega_1^3 + \beta\omega_2^3)^2. \end{aligned}$$

Следовательно, соответствующие дуги асимптотических $\omega_1^3 = 0$ или $\omega_2^3 = 0$ на обеих поверхностях равны.

Наконец, *линии кривизны на обеих фокальных поверхностях* определяются одним и тем же уравнением (18b) § 36

$$\omega_1^2\omega^3 + \frac{\rho}{\sin\varphi\cos\varphi}\left\{(\omega_2^3)^2\cos^2\varphi - (\omega_1^3)^2\sin^2\varphi\right\} = 0$$

и, следовательно, *соответствуют друг другу.*

Далеко не все эти свойства характерны для псевдосферической конгруэнции.

Так, сейчас же видно, что существуют конгруэнции с постоянной и одной и той же кривизной фокальных поверхностей, но не обладающие другими свойствами псевдосферической конгруэнции. Достаточно взять две поверхности заданной постоянной отрицательной кривизны, чтобы общие касательные их определили требуемую конгруэнцию. Так как каждая поверхность постоянной отрицательной кривизны зависит от двух произвольных функций одного аргумента (Т. П., стр. 111), то конгруэнция с двумя фокальными поверхностями постоянной кривизны будет зависеть от четырёх произвольных функций одного аргумента в то время, как псевдосферическая зависит только от двух.

Если добавить требование, чтобы эта постоянная кривизна равнялась с отрицательным знаком обратной величине квадрата расстояния между граничными точками, то получим псевдосферическую конгруэнцию.

Действительно, теперь уравнения (17′) § 36 дадут

$$A = C, \quad A' = C';$$

при этом в силу формулы (10) мы будем иметь:

$$\rho = \frac{d}{2}\sin 2\varphi, \quad d = \lambda = \text{const}.$$

Вносся $d\rho = \lambda\cos 2\varphi\, d\varphi$ в уравнения (22a) и (22b) и исключая ω_1^2, ω^3, получим:

$$\begin{aligned} 2\lambda\, d\varphi &= (B' - A)\,\tilde{\omega}_1 - (B - A')\,\tilde{\omega}_2, \\ 2\lambda\cos 2\varphi\, d\varphi &= (B - A')\,\tilde{\omega}_1 - (B' - A)\,\tilde{\omega}_2, \end{aligned} \tag{a}$$

откуда, исключая $d\varphi$ и приравнивая нулю коэффициенты при линейно независимых формах $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, будем иметь:

$$\begin{aligned} (B' - A)\cos 2\varphi - (B - A') &= 0, \\ (B' - A) - (B - A')\cos 2\varphi &= 0. \end{aligned} \tag{b}$$

Если $B' - A = 0$, $B - A' = 0$, то уравнения (a) дают $d\varphi = 0$, значит, и $d\rho = 0$ и конгруэнция — псевдосферическая. Если же определитель линейной системы (b) равен нулю, т. е. $\cos^2 2\varphi = 1$, то будем иметь $\varphi = 0$ или $\varphi = \frac{\pi}{2}$; в обоих случаях $\rho = 0$, конгруэнция становится параболической. Фокальные поверхности совпадают, и теорема теряет смысл.

IV. КОНГРУЭНЦИЯ W

42. Основные свойства конгруэнции W. Псевдосферическая конгруэнция представляет частный случай несравненно более общего и важного класса конгруэнций W.

Определение. *Конгруэнция называется конгруэнцией W, если асимптотические линии на её фокальных поверхностях соответствуют.*

По формулам (15′) § 36 уравнения асимптотических линий на фокальных поверхностях (равенство нулю второй квадратичной формы) напишутся

$$A(\tilde{\omega}_1)^2 - C(\tilde{\omega}_2)^2 = 0,$$
$$A'(\tilde{\omega}_2)^2 - C'(\tilde{\omega}_1)^2 = 0,$$

откуда для конгруэнции W имеем условие:

$$AA' - CC' = 0. \tag{38}$$

Из равенства (38) по формулам (17′) § 36 сейчас же вытекает

$$K_1K_2 = \frac{\sin^4 2\varphi}{16\rho^4} = \frac{1}{d^4}, \tag{39}$$

где d — расстояние между граничными точками. Отсюда теорема:

Произведение кривизн двух фокальных поверхностей конгруэнции W в точках касания одного луча равно обратной величине четвёртой степени расстояния между граничными точками луча.

Это свойство характеризует конгруэнции W. Действительно, из уравнения (39) в силу общих уравнений (17′) § 36 прямо следует равенство (38).

43. Теорема существования для конгруэнции W. Для определения конгруэнции W надо проинтегрировать уравнения (22a) и (22b) § 36, предполагая, что неизвестные функции A, A', C, C' связаны конечным соотношением (38).

Продифференцируем внешним образом уравнения (22a). Так как для $d\varphi$, $d\rho$, ω_1^2, ω^3 формулы (22a) и (22b) дают линейные выражения через $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, то после дифференцирования все дифференциалы, кроме дифференциалов dA, dB, dC, можно выразить через $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$.

Мы получим уравнения

$$\begin{aligned} &[dA\,\tilde{\omega}_1] + [dB\,\tilde{\omega}_2] + m[\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2] = 0,\\ &[dB\,\tilde{\omega}_1] + [dC\,\tilde{\omega}_2] + n[\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2] = 0, \end{aligned} \tag{40}$$

где m и n известные функции от ρ, φ, A, B, C, A', B', C'. Если ввести новые формы

$$\Delta B = dB + m\tilde{\omega}_1 - n\tilde{\omega}_2,$$
$$\Delta B' = dB' + m'\tilde{\omega}_2 - n'\tilde{\omega}_1,$$

то внешние дифференциалы от уравнений (22a) и (22b) § 36 запишутся в виде четырёх квадратичных уравнений

$$\begin{aligned} &[dA\,\tilde{\omega}_1] + [\Delta B\,\tilde{\omega}_2] = 0, \quad [dA'\,\tilde{\omega}_2] + [\Delta B'\,\tilde{\omega}_1] = 0,\\ &[\Delta B\,\tilde{\omega}_1] + [dC\,\tilde{\omega}_2] = 0, \quad [\Delta B'\,\tilde{\omega}_2] + [dC'\,\tilde{\omega}_1] = 0. \end{aligned} \tag{40′}$$

К ним надо присоединить дифференциал (обыкновенный) от уравнения (38)

$$A'\,dA + A\,dA' - C'\,dC - C\,dC' = 0. \tag{38′}$$

Рассмотрим компоненты движений наиболее общего прямоугольного трёхгранника пространства ω^i, ω_i^k в функциях шести параметров w^k. Внесём их в линейные дифференциальные уравнения (3′) § 34, (22a), (22b) § 36 и квадратичные (40) и присоединим к ним уравнения (38), (38′). Мы получим систему дифференциальных уравнений относительно переменных w^k, ρ, φ и шести коэффициентов A, B, C, A', B', C'. Из этих переменных независимыми переменными задачи мы будем считать те два параметра w^k, дифференциалы которых линейно представлены формами ω_1^3, ω_2^3 или, что то же самое, формами $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$ (предполагая φ не равным нулю или $\frac{\pi}{2}$, что привело бы к совпадению фокусов).

Система замкнута относительно операции внешнего дифференцирования, ибо внешние дифференциалы от уравнений (3′), которые представляют специальный случай уравнений (20) § 24, пишутся в форме (34a), (34b) § 25 и для нашего тетраэдра принимают вид уравнений (4) § 34, следовательно, тождественно удовлетворяются в силу уравнений (22a), (22b) § 36. Внешний дифференциал от уравнения (38′) тождественно равен нулю, ибо левая часть этого уравнения есть полный дифференциал от левой части (38).

Формы ω^1, ω^2, ω^3, ω_1^2 и дифференциалы $d\rho$, $d\varphi$ для всех интегральных линейных элементов системы определяются линейными уравнениями (3′) § 34, (22a), (22b) § 36.

На первом линейном элементе $e_1(d)$ произвольно задаём дифференциалы независимых переменных, т. е. формы ω_1^3, ω_2^3 или даже формы $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, ибо в начальной точке (точке приложения всех интегральных линейных элементов системы) значения всех переменных, в том числе угла φ, даны, и значения $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$ определяют значения ω_1^3, ω_2^3. На первом линейном элементе $e_1(d)$ формы ΔB, $\Delta B'$ произвольны, а из четырёх дифференциалов dA, dA', dC, dC' произвольны три, четвёртый определяется из уравнения (38′).

На втором интегральном элементе $e_2(\delta)$, который вместе с $e_1(d)$ определяет двумерный интегральный элемент $\mathcal{E}_2$, проходящий через $e_1(d)$, значения форм ΔB, $\Delta B'$ и дифференциалов dA, dA', dC, dC' связаны билинейными уравнениями, присоединёнными к квадратичным уравнениям (40), и уравнением (38′):

$$\begin{aligned} &\delta A\tilde{\omega}_1(d) + \nabla B\tilde{\omega}_2(d) = dA\,\tilde{\omega}_1(\delta) + \Delta B\tilde{\omega}_2(\delta),\\ &\nabla B\tilde{\omega}_1(d) + \delta C\tilde{\omega}_2(d) = \Delta B\tilde{\omega}_1(\delta) + dC\tilde{\omega}_2(\delta),\\ &\delta A'\tilde{\omega}_2(d) + \nabla B'\tilde{\omega}_1(d) = dA\,\tilde{\omega}_2(\delta) + \Delta B'\tilde{\omega}_1(\delta),\\ &\nabla B'\tilde{\omega}_2(d) + \delta C'\tilde{\omega}_1(d) = \Delta B\tilde{\omega}_2(\delta) + dC'\,\tilde{\omega}_1(\delta),\\ &A'\delta A + A\delta A' - C'\delta C - C\delta C' = 0, \end{aligned} \tag{41}$$

где значение формы ΔB для символа дифференцирования δ обозначено символом ∇B. Система (41) содержит пять уравнений и шесть неизвестных значений форм ∇B, $\nabla B'$, δA, $\delta A'$, δC, $\delta C'$.

Следовательно, одно из неизвестных остаётся произвольным. Мы можем задать одну из неизвестных, например C', как произвольную функцию от двух переменных u, v. Тогда система (41) определит остальные пять форм ∇B, $\nabla B'$, δA, $\delta A'$, δC, если определитель системы не равен нулю. Этот определитель равен

$$(\tilde{\omega}_2)^2 \{A'(\tilde{\omega}_1)^2 - C'(\tilde{\omega}_1)^2\} \tag{42}$$

и обращается в нуль только при специальном выборе значений $\tilde{\omega}_1 : \tilde{\omega}_2$. Следовательно, система в инволюции и решение существует. Оно зависит от одной произвольной функции двух аргументов, например C', а при заданной функции C', от четырёх функций одного аргумента, ибо система содержит $s_1 = 4$ квадратичных уравнения и они приводят к независимым билинейным уравнениям, если определитель (42) не равен нулю.

Кроме того, начальные условия содержат ещё $s = 6$ произвольных постоянных по числу линейных дифференциальных уравнений (3′) § 34, (22a) и (22b) § 36. Уравнение (38′) в счёт не идёт, ибо начальные значения переменных A, A', C, C', которые туда входят, связаны конечным уравнением (38), из которого это дифференциальное уравнение и получилось.

Итак, *произвольная конгруэнция W зависит от одной функции двух аргументов.*

Конгруэнция W занимает большое место в теории конгруэнций. Мы будем к ней не один раз возвращаться. Сейчас мы в первый раз встретились с ней и не только не исчерпали важнейших свойств её, но даже не могли коснуться наиболее существенных из них.

44. Конгруэнция V, двойственная конгруэнции W. Этот заголовок не надо понимать буквально. Речь идёт о *конгруэнции, у которой произведение кривизн фокальных поверхностей в соответствующих точках удовлетворяет уравнению*

$$K_1 K_2 = -\frac{1}{d^4}. \tag{43}$$

Изменение знака в уравнении (39), если воспользоваться формулами (17′) § 36, приведёт к уравнению (38) с изменённым знаком

$$AA' + CC' = 0. \tag{44}$$

Система дифференциальных уравнений, определяющая конгруэнцию W, сохранит и здесь свой вид; только в уравнении (38′) вместо двух минусов будут стоять везде плюсы. Это не отразится на исследовании системы (40), (38′) и мы получим тот же результат. Конгруэнция (44) существует и произвол её определяется *одной произвольной функцией от двух аргументов.*

Так как величины A, C, A', C' служат коэффициентами при формах $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$ во вторых квадратичных формах фокальных поверхностей

$$\psi_1 = A(\tilde{\omega}_1)^2 - C(\tilde{\omega}_2)^2,$$
$$\psi_2 = A'(\tilde{\omega}_2)^2 - C'(\tilde{\omega}_1)^2,$$

то уравнение (44) получает новый геометрический смысл.

Асимптотические линии на первой фокальной поверхности из уравнения $\psi_1 = 0$ определяются отношением форм

$$\frac{\tilde{\omega}_1(d)}{\tilde{\omega}_2(d)} = \sqrt{\frac{C}{A}}; \quad \frac{\tilde{\omega}_1(\delta)}{\tilde{\omega}_2(\delta)} = -\sqrt{\frac{C}{A}}. \tag{a}$$

С другой стороны, сопряжённая система линий на второй фокальной поверхности определяется уравнением, которое получится, если обратить в нуль полярную форму второй квадратичной формы ψ_2

$$A'\tilde{\omega}_2(d)\,\tilde{\omega}_2(\delta) - C'\tilde{\omega}_1(d)\,\tilde{\omega}_1(\delta) = 0. \tag{b}$$

Если в уравнение (b) внести значения форм (a), то придём к условию (44). Следовательно, конгруэнции (44) обладают характеристическим свойством.

Асимптотическим линиям каждой фокальной поверхности на другой фокальной поверхности соответствует сопряжённая система.

V. КОНГРУЭНЦИИ И ПОВЕРХНОСТИ B

45. Конгруэнции B. Чтобы получить этот класс конгруэнций, поставим задачу: *найти конгруэнцию, на фокальных поверхностях которой главные поверхности высекают сопряжённые системы линий.*

Задача становится тривиальной, если конгруэнция — нормальная, ибо в этом случае главные поверхности совпадают с развёртывающимися, а развёртывающимся на фокальных поверхностях соответствуют фокальные сети, которые всегда сопряжены.

Если конгруэнция не нормальная, то на фокальных поверхностях теперь имеется уже две соответствующие сопряжённые сети: фокальная сеть и сеть, соответствующая главным линейчатым поверхностям. По теореме Петерсона (Т. П., стр. 103) в таком случае все сопряжённые системы первой поверхности соответствуют сопряжённым системам второй, и асимптотические линии тоже соответствуют друг другу.

Следовательно, конгруэнция B является специальным видом конгруэнций W.

Уравнение главных поверхностей по формулам (6) § 34 имеет вид

$$(\omega_1^3)^2 - (\omega_2^3)^2 = 0.$$

Внесём значения форм $\omega_1^3 : \omega_2^3 = \pm 1$ или лучше по формулам (13) значения форм $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$:

$$\tilde{\omega}_1(d) = \cos\varphi - \sin\varphi = \tilde{\omega}_2(\delta),\ \tilde{\omega}_2(d) = \cos\varphi + \sin\varphi = \omega_1(\delta) \quad \text{(a)}$$

в условие сопряжённости линий на фокальных поверхностях. Это условие имеет вид равенства нулю полярной формы от квадратичной формы ψ (15') § 36 для первой фокальной поверхности

$$A\tilde{\omega}_1(d)\tilde{\omega}_1(\delta) - C\tilde{\omega}_2(d)\tilde{\omega}_2(\delta) = 0,$$

и после подстановки значений (a) принимает вид

$$(A - C)(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0,$$

а для второй фокальной поверхности —

$$(A' - C')(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0.$$

Следовательно, конгруэнция B характеризуется равенствами

$$A = C, \quad A' = C'. \tag{45}$$

Так как отсюда прямо следует равенство (38) § 29, то мы опять видим, что конгруэнция B принадлежит к классу конгруэнций W. Более того по формулам (17') § 36 получим для кривизны фокальных поверхностей выражения

$$K_1 = K_2 = -\frac{\sin^2 2\varphi}{4\rho^2} = -\frac{1}{d^2}.$$

Имеем теорему, подобную аналогичной теореме в теории псевдосферических конгруэнций.

Кривизна фокальных поверхностей конгруэнции B в точках одного луча одна и та же и равна с противоположным знаком обратной величине квадрата расстояния между граничными точками луча.

Эта теорема допускает обратную.

Конгруэнция W с равной отрицательной кривизной фокальных поверхностей в точках одного луча есть конгруэнция B.

Действительно, в силу равенства кривизн K_1 и K_2 из формулы (39) § 42, справедливой для всякой конгруэнции W, получаем при отрицательном знаке кривизны

$$K_1 = K_2 = -\frac{\sin^2 2\varphi}{4\rho^2},$$

откуда в силу формул (17') § 36 немедленно имеем:

$$A = C, \quad A' = C'.$$

Таким образом, эту теорему можно принять за определение конгруэнции B.

Конгруэнцией B называется конгруэнция W с равной отрицательной кривизной фокальных поверхностей в точках, лежащих на одном луче.

Интересно отметить, что возможны конгруэнции W с мнимыми асимптотическими линиями на фокальных поверхностях и, следовательно, с положительной кривизной; при равенстве кривизн фокальных поверхностей мы придём к равенствам

$$A = -C, \quad A' = -C', \tag{45'}$$

и теорема о высечении сопряжённой системы главными поверхностями на обеих фокальных поверхностях теряет силу.

Возвращаясь к конгруэнциям (45), мы получаем по формуле (15') § 36 для асимптотических обеих фокальных поверхностей уравнение

$$(\tilde{\omega}_1)^2 - (\tilde{\omega}_2)^2 = 0,$$

которое в силу тождеств

$$\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2 = 2\omega_1^3 \sin\varphi, \quad \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2 = 2\omega_2^3 \cos\varphi$$

совпадает с уравнением

$$\omega_1^3\omega_2^3 = 0,$$

определяющим координатную сеть.

Следовательно, *асимптотические линии фокальных поверхностей конгруэнции B изображаются лучами конгруэнции в виде ортогональной системы на сфере. Линейчатые поверхности конгруэнции, секущие фокальные поверхности по асимптотическим, имеют линии сжатия на средней поверхности конгруэнции.*

46. Поверхности B. Отметим замечательное свойство фокальных поверхностей конгруэнции B.

Продифференцируем расстояние между граничными точками луча $\frac{2\rho}{\sin 2\varphi}$; мы получим:

$$d\,\frac{2\rho}{\sin 2\varphi} = \frac{2}{\sin 2\varphi}\,d\rho - \frac{4\rho}{\sin 2\varphi}\operatorname{ctg} 2\varphi\,d\varphi.$$

Если заметить, что из уравнений (22a) и (22b) § 36 для нашей конгруэнции вытекают соотношения

$$\begin{aligned} 2\,d\rho &= x\sin\varphi\omega_1^3 + y\cos\varphi\omega_2^3, \\ \frac{4d\varphi}{\sin 2\varphi} &= \frac{1}{\rho}\{x\sin\varphi\omega_1^3 - y\cos\varphi\omega_2^3\}, \end{aligned} \tag{46}$$

где

$$x = (A' - B) + (A - B'), \quad y = (A - B') - (A' - B),$$

то дифференциал граничного расстояния примет вид

$$d\,\frac{2\rho}{\sin 2\varphi} = x\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\,\omega_1^3 + y\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\,\omega_2^3. \tag{47}$$

Покажем, что каждое слагаемое правой части есть полный дифференциал. Для этого достаточно доказать, что внешние дифференциалы их равны нулю. Внешнее дифференцирование даёт:

$$D\left\{x\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\,\omega_1^3\right\}=\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\,\mathscr{X},\quad D\left\{y\,\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\,\omega_2^3\right\}=\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\,\mathscr{Y},$$

где $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ суть квадратичные формы:

$$\mathscr{X}=[dx+x\,\mathrm{ctg}\,\varphi\,d\varphi,\ \omega_1^3]+x\,[\omega_1^2\omega_2^3]+xy\,\frac{\cos\varphi}{2\rho}\,[\omega_1^3\omega_2^3],$$

$$\mathscr{Y}=[dy-y\,\mathrm{tg}\,\varphi\,d\varphi,\ \omega_2^3]-y\,[\omega_1^2\omega_1^3]-xy\,\frac{\sin\varphi}{2\rho}\,[\omega_1^3\omega_2^3].$$

Между тем внешнее дифференцирование уравнения (46) приводит к квадратичным уравнениям

$$\sin\varphi\,\mathscr{X}+\cos\varphi\,\mathscr{Y}=0,$$

$$\sin\varphi\,\mathscr{X}-\cos\varphi\,\mathscr{Y}=0.$$

Следовательно, если $\sin 2\varphi\neq 0$, то $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ равны нулю. Обращение $\sin 2\varphi$ в нуль приводит к параболическим конгруэнциям, которые мы здесь исключаем. Таким образом, правая часть уравнения (47) содержит два полных дифференциала, которые можно обозначить dU и dV. После интеграции при подходящем выборе функций U, V получим для граничного расстояния $d=\frac{2\rho}{\sin 2\varphi}$ выражение

$$\frac{2\rho}{\sin 2\varphi}=U+V,$$

причём $U=\mathrm{const.}$ имеет следствием равенство $\omega_1^3=0$, $V=\mathrm{const.}$ — равенство $\omega_2^3=0$, а поскольку уравнения $\omega_1^3=0$, $\omega_2^3=0$ определяют на фокальной поверхности соответственно асимптотические линии $u=\mathrm{const.}$ или $v=\mathrm{const.}$, то $U=F_1(u)$, $V=F_2(v)$. Итак, имеем теорему:

Фокальные поверхности конгруэнции B характеризуются требованием: кривизна поверхности в параметрах асимптотических линий u, v имеет вид

$$K=-\frac{1}{(U+V)^2},\qquad U=F_1(u),\quad V=F_2(v).\tag{48}$$

Поверхности, обладающие кривизной вида (48), называются *поверхностями B*.

47. Трёхгранник, присоединённый к точкам поверхности *B*. Как легко видеть, каждое из доказанных выше свойств конгруэнции B её характеризует.

Впрочем, для последней теоремы (кривизна фокальной поверхности) обратная теорема формулируется ограничительно. Не всякая конгруэнция W, имеющая первой фокальной поверхностью поверхность кривизны (48), имеет и вторую фокальную поверхность той же кривизны.

Теорема. *Каждая поверхность B служит фокальной поверхностью двупараметрического семейства конгруэнций B.*

Для доказательства этой теоремы заметим прежде всего, что при заданной поверхности с кривизной вида (48) мы уже знаем расстояние между граничными точками $d=\lambda$ той конгруэнции B, которая имеет её своей первой фокальной поверхностью:

$$\lambda=U+V.$$

Отсюда, сравнивая $d\lambda$ с его выражением (47), получим:

$$x\,\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\,\omega_1^3=dU,\quad y\,\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\,\omega_2^3=dV,\tag{a}$$

и, значит, по исключении $\rho=\lambda\sin\varphi\cos\varphi$ второе уравнение (46) даёт

$$2\,d\varphi=\frac{dU}{U+V}\,\mathrm{ctg}\,\varphi-\frac{dV}{U+V}\,\mathrm{tg}\,\varphi,\tag{46'}$$

или

$$-(U+V)\,2\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi+\cos^2\varphi\,d(U+V)-dV=0,$$

или после интеграции

$$(U+V)\cos^2\varphi-V=C,\quad \cos^2\varphi=\frac{V+C}{U+V}$$

и

$$\mathrm{tg}\,\varphi=\sqrt{\frac{U-C}{V+C}}.\tag{49}$$

Присоединим теперь к каждой точке M поверхности (48) прямоугольный трёхгранник, у которого третья ось $\boldsymbol{I}_3$ совпадает с нормалью к поверхности, а две первые $\boldsymbol{I}_1$, $\boldsymbol{I}_2$ параллельны биссектрисам углов между изображениями асимптотических линий на сфере посредством нормалей $\boldsymbol{I}_3$. Пусть дифференциальные перемещения трёхгранника определяются формулами

$$d\boldsymbol{M}=\overline{\omega}^k\boldsymbol{I}_k,$$

$$d\boldsymbol{I}_i=\overline{\omega}_i^k\boldsymbol{I}_k.$$

Так как $\boldsymbol{I}_3$ есть нормаль к поверхности и, следовательно, $\boldsymbol{I}_3\cdot d\boldsymbol{M}=0$, то

$$\overline{\omega}^3=0.\tag{50}$$

Внешнее дифференцирование этого уравнения даёт:

$$[\overline{\omega}^1\overline{\omega}_1^3]+[\overline{\omega}^2\overline{\omega}_2^3]=0,$$

откуда по лемме Картана, в силу линейной независимости форм $\bar\omega_1^3$, $\bar\omega_2^3$,

$$\bar\omega^1 = \alpha\bar\omega_1^3 + \beta\bar\omega_2^3,$$
$$\bar\omega^2 = \beta\bar\omega_1^3 + \gamma\bar\omega_2^3, \tag{b}$$

и уравнение асимптотических поверхности будет

$$-dM \cdot dI_3 = \alpha(\bar\omega_1^3)^2 + 2\beta\bar\omega_1^3\bar\omega_2^3 + \gamma(\bar\omega_2^3)^2 = 0. \tag{c}$$

Если обозначить буквой θ угол между линиями на сфере, которые в сферическом изображении посредством параллельности нормалей I_3 соответствуют асимптотическим $U = \text{const.}$ и $V = \text{const.}$, то уравнения асимптотических напишутся в виде

$$\bar\omega_1^3 \sin\frac{\theta}{2} + \bar\omega_2^3 \cos\frac{\theta}{2} = 0, \quad \bar\omega_1^3 \sin\frac{\theta}{2} - \bar\omega_2^3 \cos\frac{\theta}{2} = 0. \tag{d}$$

Значит, первое уравнение должно быть следствием равенства $dU = 0$, а второе — уравнения $dV = 0$, или

$$\left[\bar\omega_1^3 \sin\frac{\theta}{2} + \bar\omega_2^3 \cos\frac{\theta}{2},\ dU\right] = 0,$$
$$\left[\bar\omega_1^3 \sin\frac{\theta}{2} - \bar\omega_2^3 \cos\frac{\theta}{2},\ dV\right] = 0; \tag{51}$$

с другой стороны, поскольку уравнения (d) определяют два решения уравнения (c), мы должны иметь:

$$\alpha = \mu \sin^2\frac{\theta}{2}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -\mu\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

Множитель пропорциональности μ определяется условием

$$K = -\frac{1}{\lambda^2} = \frac{[\bar\omega_1^3\bar\omega_2^3]}{[\bar\omega^1\bar\omega^2]}.$$

Внося сюда $\bar\omega^1$, $\bar\omega^2$ по формулам (b), получаем:

$$\mu^2 \sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} = \lambda^2.$$

Два знака μ соответствуют двум выборам положительного направления нормали.

Мы можем, следовательно, положить

$$\bar\omega^1 = \lambda \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\bar\omega_1^3, \qquad \bar\omega^2 = -\lambda\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\bar\omega_2^3, \tag{52}$$

и внешнее дифференцирование даст:

$$\left[d\ln\lambda + \frac{d\theta}{\sin\theta},\ \bar\omega_1^3\right] + \frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}[\bar\omega_1^2\bar\omega_2^3] = 0,$$
$$\left[d\ln\lambda - \frac{d\theta}{\sin\theta},\ \bar\omega_2^3\right] - \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}[\bar\omega_1^2\bar\omega_1^3] = 0. \tag{53}$$

48. Построение конгруэнции B по заданной фокальной поверхности B. Допустим, что луч конгруэнции B образует с осью I_1 угол ψ так, что вектор направления луча e равен

$$e = I_1\cos\psi + I_2\sin\psi.$$

Тогда второй фокус M_1 этого луча определяется радиусом-вектором

$$M_1 = M + \lambda\sin 2\varphi\,(I_1\cos\psi + I_2\sin\psi), \tag{54a}$$

ибо фокальное расстояние равно

$$MM_1 = 2\rho = \lambda\sin 2\varphi,$$

а вектор нормали n_1 поверхности (M_1), перпендикулярный к лучу e и образующий с нормалью I_3 угол 2φ, равен

$$n_1 = I_3\cos 2\varphi - \sin 2\varphi\,(I_2\cos\psi - I_1\sin\psi). \tag{54b}$$

Дифференцируя уравнение (54a), получим:

$$dM_1 = I_1\{\bar\omega^1 + \cos\psi(\sin 2\varphi\, d\lambda + 2\lambda\cos 2\varphi\, d\varphi) - \lambda\sin 2\varphi\sin\psi(\bar\omega_1^2 + d\psi)\} +$$
$$+ I_2\{\bar\omega^2 + \sin\psi(\sin 2\varphi\, d\lambda + 2\lambda\cos 2\varphi\, d\varphi) + \lambda\sin 2\varphi\cos\psi(\bar\omega_1^2 + d\psi)\} +$$
$$+ I_3\lambda\sin 2\varphi(\bar\omega_1^3\cos\psi + \bar\omega_2^3\sin\psi).$$

Потребуем, чтобы вектор dM_1 был перпендикулярен к нормали n_1; мы получим уравнение для неизвестной функции ψ

$$d\psi = \operatorname{ctg} 2\varphi\,(\bar\omega_1^3\cos\psi + \bar\omega_2^3\sin\psi) + \frac{\bar\omega_1^3\sin\psi\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \bar\omega_2^3\cos\psi\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}}{\sin 2\varphi} - \bar\omega_1^2. \tag{55}$$

Условия полной интегрируемости этого уравнения удовлетворяются тождественно в силу предыдущих уравнений (46′), (53). Действительно, свободный член, коэффициенты при квадратах $\sin^2\psi$, $\cos^2\psi$

и произведении $\sin\psi\cos\psi$ сокращаются, а обращение в нуль коэффициентов при $\cos\psi$, $\sin\psi$ приводит к уравнениям

$$\left[d\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{\sin\theta}\bar{\omega}_1^2,\ \bar{\omega}_1^3\right]+\left[\cos 2\varphi\,\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta,\ \bar{\omega}_2^3\right]=0,$$

$$\left[d\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{\sin\theta}\bar{\omega}_1^2,\ \bar{\omega}_2^3\right]+\left[\cos 2\varphi\,\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,d\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{4\cos\frac{\theta}{2}}\,d\theta,\ \bar{\omega}_1^3\right]=0,$$

которые с помощью уравнений (53) и (46′) приводятся к тождествам (51). Уравиение (55), следовательно, определяет угол ψ с произвольным постоянным. Тем самым конгруэнция определена.

Непосредственной поверкой устанавливаем соответствие асимптотических на фокальных поверхностях (M) и (M_1), а тогда по теореме о произведении кривизн K и K_1 фокальных поверхностей конгруэнции W имеем:

$$KK_1=\frac{1}{\lambda^4},$$

но кривизна поверхности (M) по условию равна $K=-\frac{1}{\lambda^2}$, следовательно, и кривизна поверхности (M_1) равна

$$K_1=-\frac{1}{\lambda^2}.$$

Кривизны обеих фокальных поверхностей равны обратной величине с отрицательным знаком квадрата расстояния между граничными точками луча. Значит, конгруэнция (MM_1) будет конгруэнцией B.

Таким образом, построение конгруэнции B по её фокальной поверхности зависит от интеграции уравнения (55), которое приводится к уравнению Рикатти. Так как конгруэнция зависит ещё от произвольного постоянного, которое входит в уравнение (49) для определения угла 2φ фокальных плоскостей, то совокупность конгруэнций B с заданной первой фокальной поверхностью составляет семейство, зависящее от двух параметров (в начальной точке можно задать произвольно угол фокальных плоскостей и угол луча с осью I_1). Определение самой поверхности B с кривизной (48) зависит от интегрирования замкнутой системы (50), (51), (52), (53). Она содержит два дифференциала независимых переменных dU, dV, три формы $\bar{\omega}^1$, $\bar{\omega}^2$, $\bar{\omega}^3$, определяемые линейными уравнениями (50), (52), и четыре формы $\bar{\omega}_1^3$, $\bar{\omega}_2^3$, $\bar{\omega}_1^2$ и $d\theta$, входящие в квадратичные уравнения (51), (53).

На первом линейном элементе значения этих четырёх форм остаются произвольными, иа втором они определяются из системы билинейных уравнений, присоединённых к квадратичным уравнениям (51), (53), именно уравнения (51) позволят определить значения $\bar{\omega}_1^3$, $\bar{\omega}_2^3$ с определителем системы, равным $\sin\theta$, а уравнения (53) позволят определить значения $\bar{\omega}_1^2$, $d\theta$ с определителем $(\bar{\omega}_1^3)^2\sin^2\frac{\theta}{2}+(\bar{\omega}_2^3)^2\cos^2\frac{\theta}{2}$.

Система — в инволюции и общее решение зависит от четырёх функций одного аргумента. Этим и определяется общий произвол конгруэнций B.

VI. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

49. Рибокуровская конгруэнция. Рассмотрим задачу: *найти конгруэнцию, развёртывающиеся поверхности которой секут её среднюю поверхность по сопряжённой системе.* Такую конгруэнцию будем называть *рибокуровской*.

Пользуясь формулами (3) § 34 для компонент ω^1, ω^2 и вводя обозначения

$$\begin{aligned}\omega^3&=b'\eta\omega_1^3+b\xi\omega_2^3,\\ \omega_1^2&=\xi'\omega_1^3+\eta'\omega_2^3,\end{aligned}\qquad(56)$$

можно написать дифференциал радиуса-вектора центра луча в виде:

$$d\boldsymbol{A}=b'\omega_1^3(\boldsymbol{e}_2+\eta\boldsymbol{e}_3)+b\omega_2^3(\boldsymbol{e}_1+\xi\boldsymbol{e}_3).$$

Отсюда вектор нормали (не единичный) средней поверхности (A) равен

$$\boldsymbol{N}=(\boldsymbol{e}_2+\eta\boldsymbol{e}_3)\times(\boldsymbol{e}_1+\xi\boldsymbol{e}_3)=\xi\boldsymbol{e}_1+\eta\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$$

и

$$d\boldsymbol{N}=\boldsymbol{e}_1(d\xi-\eta\omega_1^2+\omega_1^3)+\boldsymbol{e}_2(d\eta+\xi\omega_1^2+\omega_2^3)+\boldsymbol{e}_3(\xi\omega_1^3+\eta\omega_2^3).$$

Вторая квадратичная форма средней поверхности будет пропорциональна форме

$$\begin{aligned}d\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{N}=b\,(d\xi-\eta\omega_1^2+\omega_1^3)\,\omega_2^3+b'\,(d\eta+\xi\omega_1^2+\omega_2^3)\,\omega_1^3+\\ +(\xi\omega_1^3+\eta\omega_2^3)(b'\eta\omega_1^3+b\xi\omega_2^3).\end{aligned}\qquad(\mathrm{a})$$

Если её написать в виде

$$D(\omega_1^3)^2+2D'\omega_1^3\omega_2^3+D''(\omega_2^3)^2,$$

то условие сопряжённости двух направлений $\omega_1^3(d):\omega_2^3(d)$ и $\omega_1^3(\delta):\omega_2^3(\delta)$ запишется в виде равенства нулю полярной формы

$$D\omega_1^3(d)\,\omega_1^3(\delta)+D'\{\omega_1^3(d)\,\omega_2^3(\delta)+\omega_1^3(\delta)\,\omega_2^3(d)\}+D''\omega_2^3(d)\,\omega_2^3(\delta)=0.$$

Внесём сюда два решения уравнения развёртывающихся поверхностей (16) § 34:

$$\omega_1^3(d):\omega_2^3(d)=\sqrt{b}:\sqrt{b'},\quad \omega_1^3(\delta):\omega_2^3(\delta)=\sqrt{b}:-\sqrt{b'};$$

мы получим:

$$Db-D''b'=0.\qquad(\mathrm{b})$$

Обозначим теперь коэффициенты при ω_1^3 и ω_2^3 в разложении дифференциалов $d\xi$, $d\eta$ указателями 1 и 2:

$$d\xi = \xi_1\omega_1^3 + \xi_2\omega_2^3, \quad d\eta = \eta_1\omega_1^3 + \eta_2\omega_2^3.$$

Тогда из уравнения (a) мы найдём для коэффициентов D и D'' выражения

$$D = b'(\eta_1 + \xi\xi' + \xi\eta),$$
$$D'' = b(\xi_2 - \eta\eta' + \xi\eta).$$

Если внести эти выражения в равенство (b) и сократить на bb', то получим искомое условие пересечения средней поверхности конгруэнции её развертывающимися поверхностями по сопряжённой системе в виде равенства

$$\eta_1 - \xi_2 + \xi\xi' + \eta\eta' = 0. \tag{57}$$

Ему можно придать гораздо более удобную форму. Умножим обе части равенства на неравное нулю внешнее произведение $[\omega_1^3\ \omega_2^3]$. Так как

$$\eta_1[\omega_1^3\omega_2^3] = [\eta_1\omega_1^3 + \eta_2\omega_2^3,\ \omega_2^3] = [d\eta\,\omega_2^3],$$
$$\xi\xi'[\omega_1^3\omega_2^3] = \xi[\xi'\omega_1^3 + \eta'\omega_2^3,\ \omega_2^3] = \xi[\omega_1^2\omega_2^3],$$
$$\xi_2[\omega_1^3\omega_2^3] = [\omega_1^3\,d\xi], \quad \eta\eta'[\omega_1^3\omega_2^3] = \eta[\omega_1^3\omega_1^2],$$

то уравнение (57) равносильно равенству

$$[d\xi - \eta\omega_1^2,\ \omega_1^3] + [d\eta + \xi\omega_1^2,\ \omega_2^3] = 0. \tag{57'}$$

50. Конгруэнция, присоединённая к паре поверхностей, соответствующих ортогональностью линейных элементов. Полученное нами условие (57′) имеет ещё другой геометрический смысл.

Будем искать поверхность (B), которая соответствует средней поверхности конгруэнции (A) ортогональностью линейных элементов

$$d\boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

так, что в паре соответствующих точек нормаль к поверхности (B) параллельна лучу конгруэнции $\boldsymbol{e}_3$, проходящему через точку A.

Так как для поверхности (B) вектор $\boldsymbol{e}_3$ является вектором нормали, то дифференциал $d\boldsymbol{B}$ имеет только две компоненты: по векторам $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$. Из условия перпендикулярности $d\boldsymbol{B}$ и $d\boldsymbol{A}$ прямо следует:

$$d\boldsymbol{B} = \lambda(\omega^2\boldsymbol{e}_1 - \omega^1\boldsymbol{e}_2). \tag{58}$$

Множитель пропорциональности λ должен быть выбран так, чтобы правая часть этого равенства была полным дифференциалом. Необходимое и достаточное условие этого есть обращение в нуль внешнего

дифференциала. Итак, дифференцируем внешним образом уравнение (58). Получаем по делении на λ

$$[d\ln\lambda,\ \omega^2\boldsymbol{e}_1 - \omega^1\boldsymbol{e}_2] + \{[\omega^1\omega_1^2] + [\omega^3\omega_3^2]\}\,\boldsymbol{e}_1 - \{[\omega^2\omega_2^1] + [\omega^3\omega_3^1]\}\,\boldsymbol{e}_2 +$$
$$+ [\boldsymbol{e}_2\omega_1^2 + \boldsymbol{e}_3\omega_1^3,\ \omega^2] - [\boldsymbol{e}_1\omega_2^1 + \boldsymbol{e}_3\omega_2^3,\ \omega^1] = 0. \tag{c}$$

Это уравнение устанавливает линейную связь между тремя взаимно ортогональными векторами $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Так как это невозможно, то коэффициенты при векторах $\boldsymbol{e}_i$ должны равняться нулю. Внося сюда значение форм ω^1, ω^2, ω^3 по формулам (3) § 34, (56) и собирая коэффициенты при ω_1^3, ω_2^3, получим, таким образом, два уравнения; третье — коэффициент при $\boldsymbol{e}_3$ — исчезает тождественно,

$$\left.\begin{aligned} b'[d\ln\lambda + \eta\omega_2^3,\ \omega_1^3] &= 0,\\ b[d\ln\lambda + \xi\omega_1^3,\ \omega_2^3] &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Пользуясь леммой Картана, почти непосредственно получаем:

$$d\ln\lambda = -\xi\omega_1^3 - \eta\omega_2^3. \tag{59'}$$

Для того чтобы существовала функция λ, удовлетворяющая этому уравнению, и, следовательно, существовала поверхность (B), необходимо и достаточно, чтобы правая часть была полным дифференциалом, т. е. чтобы внешний дифференциал её равнялся нулю. Дифференцируя уравнение (59′), приходим в точности к уравнению (57′).

Таким образом, если развёртывающиеся поверхности конгруэнции секут среднюю поверхность по сопряжённой системе, то существует семейство поверхностей, которые соответствуют средней поверхности конгруэнции ортогональностью линейных элементов, и в каждой паре соответствующих точек имеют нормаль, параллельную лучу конгруэнции.

Следовательно, *рибокуровская конгруэнция присоединена к паре поверхностей, соответствующих ортогональностью линейных элементов.*

Такую пару поверхностей мы будем называть *парой О.*

Из формул (58) и (3) § 34 следует

$$\left.\begin{aligned} d\boldsymbol{B} &= \lambda(b'\omega_1^3\boldsymbol{e}_1 - b\omega_2^3\boldsymbol{e}_2),\\ d\boldsymbol{e}_3 &= -\omega_1^3\boldsymbol{e}_1 - \omega_2^3\boldsymbol{e}_2. \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Так как для $\omega_2^3 = 0$ или $\omega_1^3 = 0$ касательная $d\boldsymbol{B}$ к линии на поверхности (B) параллельна касательной к её сферическому изображению $d\boldsymbol{e}_3$, то (Т. П., стр. 72) эти линии являются линиями кривизны на поверхности (B). Следовательно, *линии кривизны поверхности (B) соответствуют тем линейчатым поверхностям конгруэнции, линии* *сжатия которых пересекают луч в центре.* При этом коэффициенты b' и $-b$ пропорциональны главным радиусам кривизны поверхности

$$R_1 = \lambda b', \quad R_2 = -\lambda b,$$

где R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны поверхности (B).

С другой стороны, если перейти к формам $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$ развёртывающихся поверхностей, то, пользуясь формулами (9) § 34, (13) § 35, получим:

$$dB = \frac{\lambda\rho}{\sin 2\varphi}\{-\tilde{\omega}_1(\boldsymbol{e}_1 \sin\varphi + \boldsymbol{e}_2 \cos\varphi) + \tilde{\omega}_2(\boldsymbol{e}_1 \sin\varphi - \boldsymbol{e}_2 \cos\varphi)\},$$

$$d\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sin 2\varphi}\{\tilde{\omega}_1(\boldsymbol{e}_1 \cos\varphi - \boldsymbol{e}_2 \sin\varphi) - \tilde{\omega}_2(\boldsymbol{e}_1 \cos\varphi + \boldsymbol{e}_2 \sin\varphi)\}.$$

Так как

$$(\boldsymbol{e}_1 \sin\varphi - \boldsymbol{e}_2 \cos\varphi)\cdot(\boldsymbol{e}_1 \cos\varphi + \boldsymbol{e}_2 \sin\varphi) = 0,$$

$$(\boldsymbol{e}_1 \sin\varphi + \boldsymbol{e}_2 \cos\varphi)\cdot(-\boldsymbol{e}_1 \cos\varphi + \boldsymbol{e}_2 \sin\varphi) = 0,$$

то касательные к линиям $\tilde{\omega}_1 = 0$ или $\tilde{\omega}_2 = 0$ на поверхности (B) перпендикулярны к касательным к их сферическому изображению. Это является признаком асимптотических линий (Т. П., стр. 78). Следовательно, *развёртывающимся поверхностям конгруэнции соответствуют асимптотические линии поверхности (B).*

51. Построение произвольной пары O. Обратно, если взять произвольную поверхность (B), отнесённую к линиям кривизны, и задаться произвольной (аналитической) функцией λ, то для дифференциалов радиуса-вектора dB и единичного вектора нормали $d\boldsymbol{e}_3$ будем иметь уравнения (60). При подходящем выборе λ уравнение

$$dA = b\omega_2^3\boldsymbol{e}_1 + b'\omega_1^3\boldsymbol{e}_2 + \omega^3\boldsymbol{e}_3, \tag{61}$$

где ω^3 взято по формуле (56), будет определять наиболее общую поверхность (A), соответствующую поверхности (B) ортогональностью линейных элементов. Выбор функции λ определяется требованием, чтобы выражение для дифференциала dA одновременно с выражением (60) для dB были полными дифференциалами. Внешнее дифференцирование первого уравнения (61) даёт уравнение:

$$\boldsymbol{e}_1\{[\omega^3 - (b+b')\omega_1^2, \omega_1^3] + [db\,\omega_2^3]\} + \boldsymbol{e}_2\{[db'\,\omega_1^3] +$$
$$+ [\omega^3 + (b+b')\omega_1^2, \omega_2^3]\} + \boldsymbol{e}_3\{\xi([db\,\omega_2^3] - b[\omega_1^2\omega_1^3]) +$$
$$+ \eta([db'\,\omega_1^3] + b'[\omega_1^2\omega_2^3]) + b[d\xi + \omega_1^3, \omega_2^3] + b'[d\eta + \omega_2^3, \omega_1^3]\} = 0$$

которое в силу линейной независимости векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ распадается на три уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &[\omega^3 - (b+b')\omega_1^2, \omega_1^3] + [db\,\omega_2^3] = 0,\\ &[db'\,\omega_1^3] + [\omega^3 + (b+b')\omega_1^2, \omega_2^3] = 0,\end{aligned}\right\} \tag{62}$$

$$b'[d\eta + \xi\omega_1^2 + \omega_2^3(1+\eta^2), \omega_1^3] + b[d\xi - \eta\omega_1^2 + \omega_1^3(1+\xi^2), \omega_2^3] = 0, \tag{63}$$

где третье уравнение преобразовано с помощью первых двух.

С другой стороны, внешнее дифференцирование первого уравнения (60), если пользоваться уравнениями (62), приводит к уравнению

$$\boldsymbol{e}_1\{b'[d\lambda\,\omega_1^3] - \lambda[\omega^3\omega_1^3]\} - \boldsymbol{e}_2\{b[d\lambda\,\omega_2^3] - \lambda[\omega^3\omega_1^3]\} = 0,$$

которое распадается на два уравнения (59). Отсюда следует уравнение (59′) и после нового внешнего дифференцирования — (57′). Внесём в уравнение (62) выражения $b = -\frac{R_2}{\lambda}$, $b' = \frac{R_1}{\lambda}$. Тогда функция λ с помощью уравнений (59′) и первого (56) из уравнений (62) совершенно исключится, и мы получим уравнение на главные радиусы кривизны R_1, R_2, которое удовлетворяется тождественно, если заданная поверхность (B) существует. Уравнение (63) теперь принимает вид:

$$R_1[d\eta + \xi\omega_1^2 + \omega_2^3(1+\eta^2), \omega_1^3] - R_2[d\xi - \eta\omega_1^2 + \omega_1^3(1+\xi^2), \omega_2^3] = 0. \tag{63′}$$

Таким образом, при произвольном задании поверхности (60) определение поверхности (61) соответствующей ортогональностью линейных элементов приводится к определению трёх неизвестных функций λ, ξ, η из трёх уравнений (59′), (57′), (63′), которые можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} &d\ln\lambda = -\xi\omega_1^3 - \eta\omega_2^3; \quad [\Delta\xi, \omega_1^3] + [\Delta\eta, \omega_2^3] = 0;\\ &R_1[\Delta\eta, \omega_1^3] - R_2[\Delta\xi, \omega_2^3] = 0,\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

где

$$\Delta\xi = d\xi - \eta\omega_1^2 + \omega_1^3(1+\xi^2); \; \Delta\eta = d\eta + \xi\omega_1^2 + \omega_3^2(1+\eta^2).$$

Формы ω_1^3, ω_2^3 представляют дифференциалы независимых переменных, форму ω_1^2 надо считать известной как компоненту вращения трёхгранника $\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3$, присоединённого к поверхности (B).

Так как уравнение (57′) является внешним дифференциалом уравнения (59′), то система замкнута. Первый интегральный линейный элемент определяется заданием дифференциалов $d\xi$, $d\eta$ или форм $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, ибо $d\ln\lambda$ определено из уравнения (59′). Второй линейный элемент двумерного интегрального элемента $\mathfrak{E}_2$, проходящего через первый, полностью определён, ибо $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ определяются из билинейных уравнений, присоединённых к квадратичным уравнениям (57′), (63′).

Следовательно, система (64) — в инволюции, а поскольку она содержит $s_1 = 2$ независимых квадратичных уравнения, то поверхность (A), соответствующая ортогональностью линейных элементов заданной поверхности (B), определяется с произволом двух функций одного аргумента.

52. Специальные виды рибокуровских конгруэнций. Из наших формул вытекает, что к произвольной паре поверхностей (A) и (B), соответствующих ортогональностью линейных элементов, присоединена конгруэнция, называемая рибокуровской, которая получается, если в каждой точке одной из этих поверхностей, например (A), провести прямую, параллельную нормали в соответствующей точке другой поверхности (B).

Первая поверхность (A) будет тогда средней поверхностью конгруэнции, вторая (B) называется её *образующей поверхностью*. Общий произвол рибокуровской конгруэнции определяется произволом выбора образующей поверхности и, следовательно, зависит от одной функции двух аргументов.

Развёртывающиеся поверхности конгруэнции соответствуют асимптотическим линиям образующей и сопряжённой системе средней поверхности. Ввиду полной симметрии поверхностей (A) и (B) в задаче соответствия ортогональностью линейных элементов асимптотическим линиям поверхности (A) должна соответствовать на поверхности (B) сопряжённая система.

Изотропная конгруэнция (§ 13) является специальным случаем рибокуровской, когда образующая поверхность — сфера.

Среди рибокуровских конгруэнций существуют нормальные. Развёртывающиеся поверхности такой конгруэнции изображаются на сфере ортогональной системой линий, а так как эта система линий изображает асимптотические линии образующей поверхности, то у нормальных рибокуровских конгруэнций образующая поверхность будет минимальной (Т. П., стр. 142). Сферическое изображение асимптотических линий минимальной поверхности и только её одной — изотермично. Так как для поверхностей, нормальных к лучам конгруэнции, эта система служит изображением линий кривизны, то наша конгруэнция образована нормалями поверхности с изотермическим сферическим изображением линий кривизны.

Среди конгруэнций Рибокура с заданной образующей поверхностью (B) всегда существуют такие, у которых средняя поверхность — плоскость. Действительно, достаточно спроектировать точки поверхности (B) ортогонально на плоскость и затем эту плоскость вместе с проекциями повернуть около произвольной точки плоскости на прямой угол. Нетрудно заметить, что в новом положении плоскости каждое перемещение будет перпендикулярно к соответствующему перемещению до поворота и, следовательно, к перемещению на поверхности (B). Если через точки плоскости провести лучи, параллельные нормалям поверхности (B), то мы получим конгруэнцию Рибокура, для которой эта плоскость будет служить средней поверхностью.

VII. ЦИКЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

53. Циклическая система, присоединённая к конгруэнции. Двумерное многообразие окружностей (конгруэнция окружностей) образует *циклическую систему*, если она допускает семейство ортогональных поверхностей, подобно нормальной конгруэнции прямых.

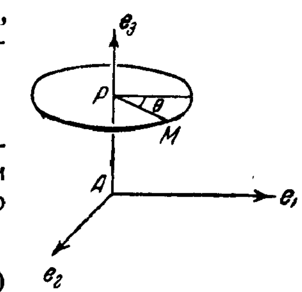
Система прямых, проходящих через центр каждой окружности циклической системы перпендикулярно к её плоскости (система *осей циклов*), образует конгруэнцию, которая называется *циклической*.

Пусть нам дана конгруэнция прямых, заданная компонентами движений канонического трёхгранника. Можно ли присоединить к её лучам окружности циклической системы так, чтобы каждый луч стал осью одной окружности? Пусть (черт. 3)

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{e}_3$$

— центр окружности и R — её радиус. Обозначая буквой θ угол, образуемый радиусом PM с осью $\boldsymbol{e}_1$, получим радиус-вектор $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{M}$ точки M окружности в виде

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{e}_3+R(\boldsymbol{e}_1\cos\theta+\boldsymbol{e}_2\sin\theta). \qquad \text{(a)}$$



Черт. 3.

Если точка M описывает поверхность Σ, ортогональную ко всем окружностям циклической системы, то всякое перемещение $d\boldsymbol{M}$ по поверхности должно быть ортогонально к касательной $\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial\theta}$ окружности

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial\theta}\cdot d\boldsymbol{M}=0. \qquad \text{(b)}$$

Дифференцирование уравнения (a) даёт:

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial\theta}=R(-\boldsymbol{e}_1\sin\theta+\boldsymbol{e}_2\cos\theta),$$

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{M}=\boldsymbol{e}_1\{\omega^1+\cos\theta\, dR-R\sin\theta\,(d\theta+\omega_1^2)-t\omega_1^3\}+{}\\ +\boldsymbol{e}_2\{\omega^2+\sin\theta\, dR+R\cos\theta\,(d\theta+\omega_1^2)-t\omega_2^3\}+{}\\ +\boldsymbol{e}_3\{\omega^3+dt+R(\omega_1^3\cos\theta+\omega_2^3\sin\theta)\}. \end{aligned}$$

Внося это в уравнение (b), имеем:

$$d\theta+\omega_1^2-\frac{\sin\theta}{R}(\omega^1-t\omega_1^3)+\frac{\cos\theta}{R}(\omega^2-t\omega_2^3)=0. \qquad (65)$$

Это уравнение надо рассматривать как уравнение относительно неизвестной функции θ, которая определяет положение точки M поверхности на окружности циклической системы. Если система допускает однопараметрическое семейство ортогональных поверхностей, то уравнение (65) должно быть вполне интегрируемо, т. е. внешний дифференциал левой части должен быть равен нулю в силу самого уравнения (65). Дифференцируя уравнение (65) внешним образом и исключая $d\theta$ с помощью самого уравнения, получаем:

$$\frac{\sin\theta}{R}\left\{[d\ln R,\ \omega^1 - t\omega_1^3] + [\omega^3\omega_1^3] + [dt\,\omega_1^3]\right\} +$$
$$+\frac{\cos\theta}{R}\left\{-[d\ln R,\ \omega^2 - t\omega_2^3] - [\omega^3\omega_2^3] - [dt,\ \omega_2^3]\right\} -$$
$$-[\omega_1^3\omega_2^3] + \frac{1}{R^2}[\omega^2 - t\omega_2^3,\ \omega^1 - t\omega_1^3] = 0.$$

Так как это уравнение должно удовлетворяться тождественно относительно θ, то коэффициенты при $\sin\theta$, $\cos\theta$ и свободный член должны равняться нулю. Если внести сюда значения $\omega^1 = b\omega_2^3$, $\omega^2 = b'\omega_1^3$ по формулам (3) § 34, то получим:

$$\begin{aligned}
&[d\ln R,\ b\omega_2^3 - t\omega_1^3] + [\omega^3 + dt,\ \omega_1^3] = 0,\\
&[d\ln R,\ b'\omega_1^3 - t\omega_2^3] + [\omega^3 + dt,\ \omega_2^3] = 0,\\
&[\omega_1^3\omega_2^3]\left\{-1 + \frac{bb' - t^2}{R^2}\right\} = 0.
\end{aligned} \tag{66}$$

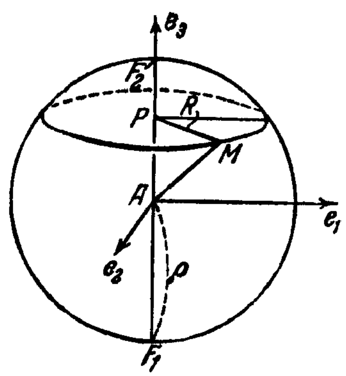
Последнее уравнение даёт конечное соотношение. Поскольку произведение $[\omega_1^3\omega_2^3]$ не равно нулю, а по формуле (9) § 34 $bb' = \rho^2$, то имеем:

$$\rho^2 = R^2 + t^2. \tag{67}$$

Геометрический смысл этого соотношения чрезвычайно прост. Так как $t = AP$ есть абсцисса точки P на луче (черт. 4), а $R = PM$ есть расстояние точки M от оси, то уравнение (67) показывает, что в прямоугольном треугольнике APM гипотенуза AM равна половине расстояния между фокусами:

$$AM = \rho.$$

Окружность циклической системы всегда лежит на сфере, построенной на фокальном отрезке оси, как на диаметре.



Черт. 4.

54. Теорема существования циклической конгруэнции. Если ввести вспомогательную функцию ψ так, чтобы

$$R = \rho\sin\psi,\quad t = \rho\cos\psi, \tag{67a}$$

и внести эти выражения и значения $b = \rho\,\mathrm{ctg}\,\varphi$, $b' = \rho\,\mathrm{tg}\,\varphi$ в два первых уравнения (66), то получим:

$$[\sin\psi\, d\rho + \rho\cos\psi\, d\psi,\ \omega_2^3]\cos\varphi - [\rho\, d\psi - \omega^3\sin\psi,\ \omega_1^3]\sin\varphi = 0,$$
$$[\sin\psi\, d\rho + \rho\cos\psi\, d\psi,\ \omega_1^3]\sin\varphi - [\rho\, d\psi - \omega^3\sin\psi,\ \omega_2^3]\cos\varphi = 0.$$

Если сложить эти уравнения или вычесть и ввести обозначения (13) § 35, то получим:

$$\left[\rho\,\mathrm{tg}\frac{\psi}{2}d\psi - d\rho - \omega^3,\ \tilde\omega_2\right] = 0,$$
$$\left[\rho\,\mathrm{ctg}\frac{\psi}{2}d\psi + d\rho - \omega^3,\ \tilde\omega_1\right] = 0,$$

или в силу (22a) и (22b) § 36

$$\left[\rho\, d\psi - B'\,\mathrm{tg}\frac{\psi}{2}\tilde\omega_2,\ \tilde\omega_1\right] = 0,\quad \left[\rho\, d\psi - B\,\mathrm{ctg}\frac{\psi}{2}\tilde\omega_1,\ \tilde\omega_2\right] = 0,$$

откуда, пользуясь леммой Картана, почти немедленно имеем:

$$d\psi = \frac{B}{\rho}\mathrm{ctg}\frac{\psi}{2}\tilde\omega_1 + \frac{B'}{\rho}\mathrm{tg}\frac{\psi}{2}\tilde\omega_2. \tag{68}$$

Если воспользоваться формулами (14′) § 36 и очевидным тождеством $\frac{2}{\sin\psi} = \mathrm{tg}\frac{\psi}{2} + \mathrm{ctg}\frac{\psi}{2}$, то внешний дифференциал уравнения (68) легко приводится к виду:

$$\mathrm{tg}\frac{\psi}{2}\left\{[dB'\tilde\omega_2] - \frac{B'}{2\rho}(A\cos 2\varphi - C')[\tilde\omega_1\tilde\omega_2]\right\} +$$
$$+\mathrm{ctg}\frac{\psi}{2}\left\{[dB\tilde\omega_1] - \frac{B}{2\rho}(A'\cos 2\varphi - C)[\tilde\omega_1\tilde\omega_2]\right\} = 0. \tag{69}$$

Если присоединить уравнения (68) и (69) к уравнениям (3′) § 34, (22a, b) § 36, то получим систему, которая определяет циклическую конгруэнцию вместе с присоединённой циклической системой. Она ещё не замкнута. Мы уже видели в § 36, что внешние дифференциалы уравнений (3′) обращаются в тождество в силу уравнений (22a) и (22b) § 36. Дифференцируя внешним образом уравнения (22a) и (22b) § 36, получаем систему (40) § 43. Введём обозначения

$$\begin{aligned}
\Delta B &= dB + \frac{B}{2\rho}(A'\cos 2\varphi - C)\tilde\omega_2,\\
\Delta B' &= dB' - \frac{B'}{2\rho}(A\cos 2\varphi - C')\tilde\omega_1,\\
\Delta A &= dA - m\tilde\omega_2,\\
\Delta A' &= dA' - m'\tilde\omega_1,\\
\Delta C &= dC + n\tilde\omega_1 + \frac{B}{2\rho}(A'\cos 2\varphi - C)\tilde\omega_2,\\
\Delta C' &= dC' + n'\tilde\omega_2 - \frac{B'}{2\rho}(A\cos 2\varphi - C')\tilde\omega_1,
\end{aligned}$$

где коэффициенты m' и n' получаются из функций m и n изменением знака ρ и φ и заменой A, B, C на A', B', C'.

В этих обозначениях уравнение (69) и внешние дифференциалы от уравнений (22a) и (22b) примут стандартный вид:

$$\begin{gathered}
\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}[\Delta B'\tilde{\omega}_2]+\operatorname{ctg}\frac{\psi}{2}[\Delta B\tilde{\omega}_1]=0,\\
[\Delta A\,\tilde{\omega}_1]+[\Delta B\tilde{\omega}_2]=0,\quad [\Delta B\tilde{\omega}_1]+[\Delta C\,\tilde{\omega}_2]=0,\\
[\Delta A'\tilde{\omega}_2]+[\Delta B'\tilde{\omega}_1]=0,\quad [\Delta B'\tilde{\omega}_2]+[\Delta C'\tilde{\omega}_1]=0.
\end{gathered}\tag{70}$$

Система (3') § 34, (22a, b) § 36, (68), (70) замкнута. Кроме форм ω_i^k, она содержит дифференциалы $d\varphi$, $d\rho$, $d\psi$ и шесть форм ΔA, ΔB, ΔC, $\Delta A'$, $\Delta B'$, $\Delta C'$. Формы ω_1^3, ω_2^3 или эквивалентные им формы $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$ линейно представляют дифференциалы независимых переменных. Все остальные формы ω^i, ω_i^k и три дифференциала $d\varphi$, $d\rho$, $d\psi$ на всяком интегральном элементе определяются через формы $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$ линейными уравнениями (3') § 34, (22a), (22b) § 36, (68). Остаётся шесть форм ΔA, ΔB, ΔC, $\Delta A'$, $\Delta B'$, $\Delta C'$, связанных пятью квадратичными уравнениями (70). Одну из них, например $\Delta B'$, можно оставить вообще произвольной, остальные пять форм сохраняют произвольное решение на первом интегральном элементе $e_1(d)$. На втором интегральном элементе $e_2(d)$ значения их определяются из билинейных уравнений, присоединённых к квадратичным уравнениям (70): первое уравнение позволит определить значение ΔB, а четыре других — значения ΔA, ΔC, $\Delta A'$, $\Delta C'$, если только на интегральном элементе $e_1(d)$ значения форм $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$ выбраны отличными от нуля.

Следовательно, *система* — в инволюции с характерами $s_1=5$, $s_2=1$ и *определяет циклическую конгруэнцию с произволом одной функции двух аргументов.*

55. Вполне циклическая конгруэнция. Если взять одно из решений системы (3') § 34, (22a), (22b) § 36, (68), (70), то величины ρ, φ, A, B, C, A', B', C' определяют компоненты ω_i^k канонического тетраэдра конгруэнции, следовательно, определяют конгруэнцию и сами определяются однозначно, если конгруэнция дана. Параметр ψ по формулам (67a) определяет на каждом луче координату центра окружности t и её радиус R, т. е. определяет присоединённую циклическую систему. Параметр ψ входит только в уравнения (68), (69), но второе из этих уравнений содержит ψ в конечном виде. Оно определяет $\operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2}$, следовательно, в интервале $(0, 2\pi)$ даёт только два значения ψ, отличающихся между собой знаком. Так как радиус окружности R следует считать величиной положительной, то из этих двух значений ψ пригодно будет только одно.

Следовательно, *каждой циклической конгруэнции, вообще говоря, присоединена одна циклическая система.*

Исключение составляют только те конгруэнции, для которых уравнение (69) исчезает тождественно относительно ψ, т. е. при условии обращения в нуль коэффициентов при $\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\psi}{2}$

$$[\Delta B\tilde{\omega}_2]=0\quad [\Delta B',\ \tilde{\omega}_1]=0.\tag{70a}$$

В таком случае уравнение (68) будет вполне интегрируемо и определит ψ с произвольным постоянным. Следовательно, с конгруэнцией (70a) будет связано однопараметрическое семейство циклических систем. Окружности этих систем, присоединённые к одному лучу, образуют сферу, построенную на фокальном отрезке луча, как на диаметре.

Конгруэнцию, несущую на своих лучах семейство циклических систем, мы будем называть *вполне циклической.*

Вполне циклическая конгруэнция определяется системой (3') § 34, (22a), (22 b) § 36, 70, (70a). Эта система не содержит переменной ψ и уравнения (68); в остальном она сохраняет те же переменные и те же формы, линейно выражающие дифференциалы независимых переменных и неизвестных, что и система § 54. Число квадратичных уравнений увеличилось на единицу, ибо вместо одного уравнения (69) система содержит два уравнения (70a). Все $s_1=6$ квадратичных уравнений независимы. Присоединённые к ним билинейные уравнения определяют значения всех шести форм ΔA, ΔB, ΔC, $\Delta A'$, $\Delta B'$, $\Delta C'$ на втором линейном элементе $e_2(\delta)$. Следовательно, $s_2=0$.

Система — в инволюции и определяет вполне циклические конгруэнции с шестью произвольными функциями одного аргумента.

56. Циклическая конгруэнция Рибокура. Нетрудно показать, что вполне циклическая конгруэнция (70a) является рибокуровской. Действительно, по формулам (60) § 50 поверхность (B), которая имеет сферическим изображением своих асимптотических изображение развёртывающихся поверхностей конгруэнции, определяется уравнением

$$d\boldsymbol{B}=\lambda\rho\,(\omega_1^3\operatorname{tg}\varphi\boldsymbol{e}_1-\omega_2^3\operatorname{ctg}\varphi\boldsymbol{e}_2).$$

Если это уравнение продифференцировать внешним образом и в полученном уравнении приравнять нулю коэффициенты при независимых векторах $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, то получим два уравнения:

$$\begin{gathered}
\sin\varphi\,[d\ln(\lambda\rho),\ \omega_1^3]+\frac{1}{\cos\varphi}[d\varphi,\ \omega_1^3]+\frac{1}{\sin\varphi}[\omega_1^2,\ \omega_2^3]=0,\\
\cos\varphi\,[d\ln(\lambda\rho),\ \omega_2^3]-\frac{1}{\sin\varphi}[d\varphi,\ \omega_2^3]-\frac{1}{\cos\varphi}[\omega_1^2,\ \omega_1^3]=0.
\end{gathered}$$

Сумма и разность их составит систему

$$\begin{gathered}
[d\ln(\lambda\rho),\ \tilde{\omega}_2]+\frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi}[\omega_1^2-d\varphi,\ \tilde{\omega}_1]=0,\\
[d\ln(\lambda\rho),\ \tilde{\omega}_1]-\frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi}[\tilde{\omega}_1^2+d\varphi,\ \tilde{\omega}_2]=0,
\end{gathered}$$

или, если воспользоваться формулами (22a) и (22b) § 36,

$$\left[d\ln(\lambda\rho)-\frac{B}{\rho}\tilde{\omega}_1,\ \tilde{\omega}_2\right]=0,\qquad \left[d\ln(\lambda\rho)+\frac{B'}{\rho}\tilde{\omega}_2,\ \tilde{\omega}_1\right]=0.$$

Откуда, пользуясь леммой Картана, имеем:

$$d\ln(\lambda\rho)=\frac{B}{\rho}\tilde{\omega}_1-\frac{B'}{\rho}\tilde{\omega}_2. \tag{71}$$

Новое внешнее дифференцирование с помощью формул (14′) § 36 даёт:

$$\left[dB+\frac{B}{2\rho}(A'\cos 2\varphi-C)\tilde{\omega}_2,\ \tilde{\omega}_1\right]-$$
$$-\left[dB'-\frac{B'}{2\rho}(A\cos 2\varphi-C')\tilde{\omega}_1,\ \tilde{\omega}_2\right]=0. \tag{72}$$

Уравнение (72) равносильно уравнению (57′) § 49 и определяет рибокуровскую конгруэнцию. Мы видим, что условие (72) является непосредственным следствием уравнений (70a). Следовательно, конгруэнция (70a) — рибокуровская.

Обратно, если циклическая конгруэнция (57) удовлетворяет уравнению (72), то совокупность уравнений (57) § 49, (72) непосредственно приведёт к системе (70a), следовательно, вполне циклическая конгруэнция (70a) — единственная циклическая конгруэнция, у которой сферическое изображение развёртывающихся поверхностей вместе с тем является изображением асимптотических линий образующей поверхности (B).

Это даёт нам возможность подойти к определению вполне циклической конгруэнции с новой точки зрения.

57. Связь вполне циклических конгруэнций с поверхностями B. По формулам (60) § 50 кривизна образующей поверхности может быть определена как отношение элементов площади сферического изображения и площади поверхности. Мы получим:

$$K=\frac{[\omega_1^3\ \omega_2^3]}{-\lambda^2 bb'[\omega_1^3\ \omega_2^3]}=-\frac{1}{\lambda^2 bb'}=-\frac{1}{\lambda^2\rho^2}.$$

Отсюда по формулам (71)

$$d\frac{1}{\sqrt{-K}}=d(\lambda\rho)=\lambda B\tilde{\omega}_1-\lambda B'\omega_2. \tag{a}$$

Составим внешний дифференциал первого слагаемого правой части. Пользуясь формулами (14′) § 36, получаем:

$$D(\lambda B\tilde{\omega}_1)=$$
$$=\lambda[dB,\ \tilde{\omega}_1]+B[d\lambda,\ \tilde{\omega}_1]-\frac{B\lambda}{2\rho}(A'\cos 2\varphi+B')[\tilde{\omega}_1\ \ \tilde{\omega}_2]=$$
$$=\lambda\left[dB-B\,d\ln\rho+B\,d\ln(\lambda\rho)+\frac{B}{2\rho}(A'\cos 2\varphi+B')\tilde{\omega}_2,\ \tilde{\omega}_1\right]=$$
$$=\lambda\left[dB+\frac{B}{2\rho}(A'\cos 2\varphi-C)\tilde{\omega}_2,\ \tilde{\omega}_1\right]=0.$$

Последнее внешнее произведение обращается в нуль в силу уравнений (70a). Аналогично имеем:

$$D(\lambda B'\tilde{\omega}_2)=0.$$

Следовательно, оба слагаемых правой части уравнения (a) суть полные дифференциалы, которые мы обозначим dU и dV. Так как при $dU=0$ обращается в нуль форма $\tilde{\omega}_1$, а уравнение $\tilde{\omega}_1=0$ определяет развёртывающуюся поверхность $u=\text{const.}$ конгруэнции, то новое переменное U есть функция параметра u, $U=f(u)$ и аналогично $V=F(v)$.

Кривизна образующей поверхности принимает вид

$$K=-\frac{1}{(U+V)^2}. \tag{73}$$

Это — необходимое и достаточное условие того, чтобы рибокуровская конгруэнция была циклической, ибо из условия (73) и формул (a) вытекают уравнения (70a). Так как уравнение (73) определяет поверхности B (фокальные поверхности конгруэнции B), то можем высказать теорему:

Рибокуровская конгруэнция с образующей поверхностью B и только при такой образующей поверхности *является вполне циклической конгруэнцией.*

Так как общая поверхность B зависит от четырёх функций одного аргумента, а рибокуровская конгруэнция при заданной образующей поверхности зависит от двух функций одного аргумента, то снова приходим к заключению, что общий произвол циклической конгруэнции вполне зависит от шести функций одного аргумента.

VIII. СООТВЕТСТВИЕ ЛИНИЙ КРИВИЗНЫ НА ФОКАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

58. Конгруэнция Г с фокальными сетями из линий кривизны. Другой специальный случай рибокуровской конгруэнции получается, если поставить задачу: найти конгруэнцию с ортогональными фокальными сетями, иначе: конгруэнцию, развертывающиеся поверхности которой пересекают фокальные поверхности по линиям кривизны. Такую конгруэнцию мы будем называть *конгруэнцией* Г.

Условия, которым удовлетворяет конгруэнция Г, записываются чрезвычайно просто. В формулах § 35 уравнения $\tilde{\omega}_1 = 0$ или $\tilde{\omega}_2 = 0$ определяют развёртывающиеся поверхности конгруэнции. Значит, в формулах (15′) § 36 фокальная поверхность отнесена к фокальной сети. Так как она всегда сопряжена, то достаточно потребовать, чтобы она была ортогональна, а для этого надо, чтобы в линейном элементе ds_1^2 не было члена с произведением линейных форм $\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2$. Это может быть или при $C=0$ или при $B=0$, но в первом случае квадратичная форма сводится к одному квадрату, и фокальная поверхность становится развёртывающейся. Оставляя этот случай в стороне, имеем для нашей конгруэнции необходимое и достаточное условие:

$$B=0, \quad B'=0. \tag{74}$$

Следовательно, конгруэнция Г определяется линейными уравнениями (3′) § 34 (22а) и (22b) § 36 и конечными уравнениями (74). Внешние дифференциалы уравнений (3′) § 34 удовлетворены в силу уравнений (22а), (22b) § 36. Внешнее дифференцирование уравнений (22а), (22b) § 36 при $B=B'=0$, т. е. уравнений

$$\frac{2\rho}{\sin 2\varphi}(\omega_1^3 - d\varphi) = A\tilde{\omega}_1, \ \tilde{\omega}^3 + d\rho = C\tilde{\omega}_2,$$

$$\frac{2\rho}{\sin 2\varphi}(\omega_1^2 + d\varphi) = A'\tilde{\omega}_2, \ \omega^3 - d\rho = C'\tilde{\omega}_1,$$

удобно произвести, используя формулы (14′) § 36 и соотношения

$$\omega_1^3 = \frac{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2}{2\sin\varphi}, \quad \omega_2^3 = \frac{\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2}{2\cos\varphi}. \tag{75}$$

Мы получаем после некоторых переделок:

$$\begin{aligned}
&\left[dA - \frac{1}{2\rho}\left(AC - 2AA'\cos 2\varphi - \frac{4\rho^2}{\sin^2 2\varphi}\right)\tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_1\right] = 0,\\
&\left[dC + \frac{\cos 2\rho}{2\rho}\left(AC + \frac{4\rho^2}{\sin^2 2\varphi}\right)\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2\right] = 0,\\
&\left[dA' + \frac{1}{2\rho}\left(A'C' - 2AA'\cos 2\varphi - \frac{4\rho^2}{\sin^2 2\varphi}\right)\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2\right] = 0,\\
&\left[dC' + \frac{\cos 2\varphi}{2\rho}\left(A'C' + \frac{4\rho^2}{\sin^2 2\varphi}\right)\tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_1\right] = 0.
\end{aligned} \tag{76}$$

Система (3′) § 34, (22а) и (22b) § 36, (76) — замкнутая. Дифференциалы независимых переменных представлены формами $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$. Интегральный линейный элемент $e_1(d)$ зависит от произвольных значений четырёх дифференциалов dA, dA', dC, dC'. Второй линейный элемент, определяющий вместе с первым, двумерный элемент $\mathcal{E}_2$, вполне определён билинейными уравнениями, присоединёнными к квадратичным (76). Система в инволюции с характерами $s_2=0$, $s_1=4$, так как она содержит четыре независимых квадратичных уравнения. Она определяет решение с четырьмя произвольными функциями одного аргумента.

Остаётся показать, что конгруэнция Г есть специальный случай рибокуровской. Для этого можно было бы, получив из сравнения формулы (56) § 49 с уравнениями (22а), (22b) § 36 значения

$$\xi = \frac{C+C'}{\rho}\sin\varphi, \quad \eta = \frac{C-C'}{\rho}\cos\varphi,$$

подставить их в уравнение (57′) § 49, но проще непосредственно убедиться, что сферическое изображение развёртывающихся поверхностей конгруэнции является изображением асимптотических линий поверхности постоянной отрицательной кривизны.

Так как линейный элемент сферического изображения конгруэнции равен

$$ds^2 = (\omega_1^3)^2 + (\omega_2^3)^2 = \frac{(\tilde{\omega}_1)^2 - 2\cos 2\varphi\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2 + (\tilde{\omega}_2)^2}{\sin^2 2\varphi}, \tag{77}$$

то достаточно показать, что формы

$$\frac{\tilde{\omega}_1}{\sin 2\varphi}, \quad \frac{\tilde{\omega}_2}{\sin 2\varphi}$$

суть точные дифференциалы, ибо, полагая первую форму равной du, а вторую dv, мы приведём линейный элемент сферы к виду

$$ds^2 = du^2 + 2\cos 2\varphi\, du\, dv + dv^2,$$

а это — сферическое изображение асимптотических линий поверхности постоянной отрицательной кривизны (Т. П., стр. 111).

Непосредственный подсчёт даёт по формуле (14′) § 36

$$D\frac{\tilde{\omega}_1}{\sin 2\varphi} = -\frac{2}{\sin 2\varphi}\operatorname{ctg} 2\varphi\,[d\varphi\tilde{\omega}_1] - \frac{A'\operatorname{ctg} 2\varphi}{2\rho}[\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2] = 0,$$

ибо теперь

$$2d\varphi = \frac{A'\tilde{\omega}_2 - A\tilde{\omega}_1}{2\rho}\sin 2\varphi;$$

аналогично

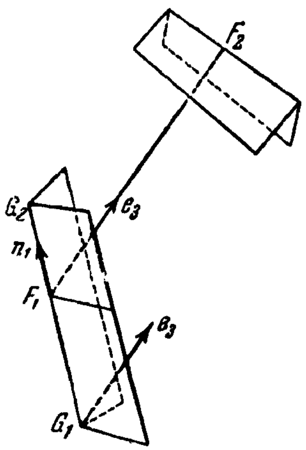
$$D\frac{\tilde{\omega}_2}{\sin 2\varphi} = 0.$$

Таким образом, конгруэнция Г имеет образующей поверхностью произвольную поверхность постоянной отрицательной кривизны. Так как произвольная поверхность постоянной отрицательной кривизны зависит от двух произвольных функций одного аргумента, а рибокуровская конгруэнция с заданной образующей поверхностью тоже зависит от двух произвольных функций одного аргумента, то общий произвол конгруэнции Г составит, как мы и получили выше, четыре функции одного аргумента.

59. Поверхности центров кривизны фокальной поверхности конгруэнции Г. Рассмотрим конгруэнцию нормалей n_1 одной из фокальных поверхностей конгруэнции Г, например (F_1). Пусть (G_1) и (G_2) — фокальные поверхности этой нормальной конгруэнции, т. е. поверхности центров для (F_1).

Так как фокальные плоскости нормальной конгруэнции проходят через нормаль n_1 (луч этой конгруэнции) и касательные к линиям кривизны поверхности (F_1), то нормали фокальных поверхностей (G_1) и (G_2), как перпендикуляры к фокальным плоскостям, сами будут параллельны касательным линий кривизны поверхности (F_1), в том числе той касательной, которая совпадает с лучом e_3 конгруэнции (F_1F_2).

Рассмотрим ту поверхность центров, скажем (G_1), нормаль к которой параллельна e_3. Одна касательная к линии сети совпадает с нормалью $n_1 = e_1 \sin\varphi + e_2 \cos\varphi$ поверхности (F_1), следовательно, описывает нормальную конгруэнцию, а поэтому (§ 11) касается на поверхности (G_1) геодезической линии.



Черт. 5.

Чтобы определить вектор касательной к другой линии сети в точке G_1, достаточно заметить, что фокальная сеть сопряжена, а касательная любой линии поверхности перпендикулярна к касательной сферического изображения её сопряжённой (Т. П., стр. 76). Поскольку нормаль поверхности (G_1) параллельна лучу конгруэнции, её сферическое изображение совпадает со сферическим изображением конгруэнции. При этом фокальная сеть поверхности (G_1) соответствует линиям кривизны поверхности (F_1), т. е. развёртывающимся поверхностям конгруэнции (F_1F_2), а потому в сферическом изображении соответствует линиям $\tilde\omega_1 = 0$ и $\tilde\omega_2 = 0$. При этом поскольку на поверхности (F_1) луч F_1F_2 касается линии $\tilde\omega^1 = 0$, а этой линии кривизны на поверхности (G_1) соответствует линия, касающаяся нормали n_1, то она определяется тоже уравнением $\tilde\omega_1 = 0$.

Пользуясь формулами (75), мы напишем дифференциал вектора нормали e_3 в виде

$$de_3 = -e_1\omega_1^3 - e_2\omega_2^3 = -\tilde\omega_1 \frac{e_1\cos\varphi + e_2\sin\varphi}{\sin 2\varphi} + \tilde\omega_2 \frac{e_1\cos\varphi - e_2\sin\varphi}{\sin 2\varphi}. \quad (78)$$

Так как векторы n_1 и $e_1\cos\varphi - e_2\sin\varphi$ перпендикулярны (скалярное произведение равно нулю), то вектор n_1 касается на поверхности (G_1) линии $\tilde\omega_1 = 0$ и вектор n_1', касательный ко второй линии фокальной сети $\tilde\omega_2 = 0$, должен быть перпендикулярен к вектору $e_1\cos\varphi + e_2\sin\varphi$. Отсюда

$$n_1' = e_1\sin\varphi - e_2\cos\varphi.$$

Его дифференциал равен

$$dn_1' = (\omega_1^2 + d\varphi)(e_1\cos\varphi + e_2\sin\varphi) + e_3(\omega_1^3\sin\varphi - \omega_2^3\cos\varphi),$$

или по формулам (22a), (22b) § 36

$$dn_1' = \frac{A'\sin 2\varphi}{2\rho}\,\tilde\omega_2(e_1\cos\varphi + e_2\sin\varphi) - e_3\tilde\omega_1.$$

Отсюда следует, что при движении вдоль линии $\tilde\omega_2 = 0$ вектор касательной n_1' в касательной плоскости (e_1, e_2) не поворачивается, а это означает (Т. П., стр. 113), что вторая линия сети будет тоже геодезической.

Таким образом, одна из поверхностей центров каждой фокальной поверхности конгруэнции Г обладает фокальной сетью из геодезических линий.

Мы доказали больше: *если сопряжённая система имеет своим сферическим изображением изображение асимптотических линий поверхности постоянной отрицательной кривизны, то оба семейства линий сети состоят из геодезических линий.*

60. Конгруэнция T с соответствием линий кривизны на минимальных фокальных поверхностях. Поставим теперь общий вопрос: найти конгруэнцию, у которой линии кривизны на фокальных поверхностях соответствуют друг другу.

С помощью формул (22a), (22b) § 36 уравнения линий кривизны (18b) § 35 на первой и на второй фокальных поверхностях принимают вид:

$$\begin{aligned}(A\tilde\omega_1 + B\tilde\omega_2)(B\tilde\omega_1 + C\tilde\omega_2) + \frac{4\rho^2}{\sin^2 2\varphi}\tilde\omega_1\tilde\omega_2 &= 0,\\ (A'\tilde\omega_2 + B'\tilde\omega_1)(B'\tilde\omega_2 + C'\tilde\omega_1) + \frac{4\rho^2}{\sin^2 2\varphi}\tilde\omega_1\tilde\omega_2 &= 0,\end{aligned} \quad \text{(a)}$$

Собирая коэффициенты при степенях $\tilde\omega_1$, $\tilde\omega_2$ и требуя их пропорциональности, получаем:

$$\frac{AB}{B'C'}=\frac{BC}{A'B'}=\frac{AC+B^2+\frac{4\rho^2}{\sin^2 2\varphi}}{AC'+B'^2+\frac{4\rho^2}{\sin^2 2\varphi}}. \tag{79}$$

Непосредственно видно, что уравнения (а) совпадают, если

$$B=0, \quad B'=0.$$

Мы получаем тогда конгруэнцию предыдущего параграфа.

Если $B'=0$, то и $B=0$, ибо обращение A или C в нуль приводит к вырождению конгруэнции: согласно формулам (15′) § 36 вырождается вторая или даже первая квадратичная форма фокальной поверхности (F_1). Если же B и B' не равны нулю, то первое из равенств (79) даёт:

$$AA'=CC'.$$

Следовательно, *если линии кривизны на фокальных поверхностях не совпадают с фокальной сетью, то конгруэнция с соответствием линий кривизны — всегда конгруэнция W*. Этот результат можно было предвидеть. Линии кривизны образуют сопряжённую сеть, и если эта сеть не совпадает с фокальной, то соответствие линий кривизны приводит к двум парам соответствующих сопряжённых сетей на фокальных поверхностях (первая сеть — фокальная), а тогда, по теореме Петерсона, каждая сопряжённая сеть первой фокальной поверхности соответствует сопряжённой сети второй; асимптотические линии тоже соответствуют, и конгруэнция будет конгруэнцией W.

Другой специальный случай получится, если положить

$$A'=\varepsilon C,\quad C'=\varepsilon A,\quad B'=\varepsilon B, \qquad \varepsilon=\pm 1. \tag{79′}$$

Уравнения (79) тогда будут удовлетворены.

Из уравнений (22a), (22b) § 36 будет следовать:

$$\begin{aligned}\omega^3-d\rho&=\varepsilon\frac{2\rho}{\sin 2\varphi}(\omega_1^2-d\varphi),\\ \omega^3+d\rho&=\varepsilon\frac{2\rho}{\sin 2\rho}(\omega_1^2+d\varphi),\end{aligned} \tag{80}$$

откуда, складывая и вычитая, имеем:

$$\omega^3=\varepsilon\frac{2\rho}{\sin 2\varphi}\omega_1^2,\ d\rho=\varepsilon\frac{2\rho}{\sin 2\varphi}d\varphi.$$

Второе уравнение интегрируется, и мы получаем при $\varepsilon=1$:

$$\begin{aligned}\rho&=a\operatorname{tg}\varphi,\\ \omega^3&=\frac{a}{\cos^2\varphi}\omega_1^2, \qquad a=\text{const}.\end{aligned} \tag{80′}$$

Уравнение (21) § 36 теперь принимает вид:

$$[\omega_1^2-d\varphi,\tilde\omega_1]+[\omega_1^2+d\varphi,\tilde\omega_2]=0,$$

или в силу (13) § 35

$$\sin\varphi[d\varphi\ \omega_1^3]+\cos\varphi[\omega_1^2\omega_2^3]=0, \tag{81a}$$

а внешнее дифференцирование второго уравнения (80′) приводит к квадратичному уравнению

$$[d\varphi\ \omega_1^2]-\sin\varphi\cos\varphi[\omega_1^3\ \omega_2^3]=0. \tag{81b}$$

Система (3′) § 34 (80′), (81a), (81b) — замкнутая. Линейные уравнения (3′) § 34 (80′) определяют значения форм ω^1, ω^2, ω^3; квадратичные (81a), (81b) содержат две формы $\omega_1^2, d\varphi$, представляющие дифференциалы неизвестных функций; на первом линейном элементе они произвольны, на втором определены из билинейных уравнений, присоединённых к квадратичным (81a), (81b), если только определитель системы в начальной точке отличен от нуля:

$$\sin\varphi\omega_1^3d\varphi+\cos\varphi\omega_2^3\omega_1^2\neq 0. \tag{b}$$

Система в инволюции и определяет конгруэнцию с произволом двух функций одного аргумента. Мы будем называть такую конгруэнцию конгруэнцией T. Обращение в нуль определителя (b) на всём интегральном многообразии не даёт особого решения. Действительно, из равенства нулю определителя (b) при $\omega_2^3=0$ следует обращение в нуль $d\varphi$. Значит, можно положить

$$d\varphi=t\cos\varphi\omega_2^3,\quad \omega_1^2=-t\sin\varphi\omega_1^3,$$

но тогда уравнения (81a), (81b) приводят к конечным соотношениям

$$2t\sin\varphi\cos\varphi=0,\quad \sin\varphi\cos\varphi(t^2-1)=0,$$

откуда $\sin 2\varphi=0$, и конгруэнция вырождается.

61. Фокальные поверхности конгруэнции T. Внося значения (22a), (22b) § 36 в уравнения (18a) § 35, получим для главных радиусов кривизны R первой фокальной поверхности уравнения

$$\begin{gathered}B\tilde\omega_1+(R+C)\tilde\omega_2=0,\\ \left(\frac{4\rho^2}{\sin^2 2\varphi}-AR\right)\tilde\omega_1-BR\tilde\omega_2=0,\end{gathered}$$

откуда, исключая $\tilde\omega_1$, $\tilde\omega_2$, имеем:

$$AR^2-R\left(\frac{4\rho^2}{\sin^2 2\varphi}+B^2-AC\right)-C\frac{4\rho^2}{\sin^2 2\varphi}=0.$$

Отсюда средняя кривизна поверхности

$$H=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{\frac{4\rho^2}{\sin^2 2\varphi}+B^2-AC}{C\frac{4\rho^2}{\sin^2 2\varphi}}.$$

Средняя кривизна равна нулю и первая фокальная поверхность — минимальная, если

$$\frac{4\rho^2}{\sin^2 2\varphi}+B^2=AC. \tag{82}$$

Так как по формулам (22a), (22b) § 36

$$\frac{2\rho}{\sin 2\varphi}[\omega_1^2-d\varphi,\ \omega^3+d\rho]=(AC-B^2)[\tilde{\omega}_1\ \tilde{\omega}_2]=(B^2-AC)\sin 2\varphi[\omega_1^3\ \omega_2^3],$$

то условие (82) равносильно равенству

$$\frac{2\rho}{\sin 2\varphi}[\omega_1^2-d\varphi,\ \omega^3+d\rho]=-\frac{4\rho^2}{\sin 2\rho}[\omega_1^3\ \omega_2^3]. \tag{82'}$$

Рассматривая это уравнение совместно с уравнениями (80), (81a), (81b), нетрудно обнаружить, что оно вытекает из них как алгебраическое следствие. Действительно, внося в уравнение (82′) значение $\omega^3+d\rho$, взятое из второго уравнения (80), получаем при $\varepsilon=1$ уравнение

$$[\omega_1^3-d\varphi,\ \omega_1^2+d\varphi]=-2\sin\varphi\cos\varphi[\omega_1^3\ \omega_2^3],$$

которое совпадает с (81b).

С другой стороны, при условии (82) для конгруэнции (79) и вторая фокальная поверхность будет минимальной. Обратно, если конгруэнция (79) имеет фокальными поверхностями две минимальные поверхности, то получим условия (79′). Действительно, внося значение (82) и такое же для второй фокальной поверхности в уравнения (79), получим:

$$\frac{AB}{B'C'}=\frac{BC}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'},$$

откуда

$$\frac{B}{B'}=\frac{A}{C'}=\frac{C}{A'}=t, \tag{83}$$

где t — вспомогательное неизвестное. Рассматривая разность уравнения (82) и такого же для второй фокальной поверхности, получим, исключая A', B', C' с помощью соотношения (83)

$$(AC-B^2)(1-t^2)=0.$$

Так как обращение в нуль первого множителя приводит к вырождению конгруэнции (равенство нулю граничного расстояния), то имеем $t^2=1$, т. е. условие (79′).

Итак, *обе фокальные поверхности конгруэнции* (79′) *являются минимальными поверхностями.*

Теорема. *Фокальные поверхности конгруэнции T находятся в конформном соответствии.*

Действительно, по формуле (15′) § 36 линейные элементы фокальных поверхностей равны

$$ds_1^2=\left(\frac{4\rho^2}{\sin^2 2\varphi}+B^2\right)(\tilde{\omega}_1)^2+2BC\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2+C^2(\tilde{\omega}_2)^2,$$

$$ds_2^2=C'^2(\tilde{\omega}_1)^2+2B'C'\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2+\left(\frac{4\rho^2}{\sin^2 2\varphi}+B'^2\right)(\tilde{\omega}_2)^2$$

и фокальные поверхности — в конформном соответствии, если они пропорциональны, т. е. если

$$\frac{C^2}{\frac{4\rho^2}{\sin^2 2\varphi}+B^2}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{\frac{4\rho^2}{\sin^2 2\varphi}+B'^2}{C^2}. \tag{84}$$

Если сюда внести значение (79′), то эти условия непосредственно перейдут в уравнение (82) и аналогичное для второй фокальной поверхности.

62. Теорема существования конгруэнций с соответствием линий кривизны на фокальных поверхностях.

Возвращаясь к общей конгруэнции (79), заметим, что доказательство существования её сводится к теореме существования решения системы дифференциальных уравнений (3′) § 34, (22a), (22b) § 36, (40′) § 43, к которым надо присоединить конечные уравнения (79). Эти конечные уравнения при условии $BB'\neq 0$ можно записать в виде

$$AA'-CC'=0,$$

$$A'B'\left(AC+B^2+\frac{4\rho^2}{\sin^2 2\varphi}\right)-BC\left(A'C'+B'^2+\frac{4\rho^2}{\sin^2 2\varphi}\right)=0. \tag{a}$$

Введём формы

$$\Delta A=dA+pA\tilde{\omega}_1,\quad \Delta A'=dA'+qA'\tilde{\omega}_2,$$

$$\Delta C=dC+qC\tilde{\omega}_2,\quad \Delta C'=dC'+qC'\tilde{\omega}_1,$$

где p и q — пока неопределённые коэффициенты. Тогда дифференциал первого уравнения (a) примет вид:

$$A'\Delta A+A\Delta A'-C'\Delta C-C\Delta C'=0. \tag{b$_1$}$$

Чтобы дифференциал второго имел вид

$$A'B'C\Delta A+(B'M-BCC')\Delta A'+(2A'BB'-CN)\Delta B+$$

$$+(A'M-2BB'C)\Delta B'+(AA'B'-BN)\Delta C-A'BC\Delta C'=0, \tag{b$_2$}$$

где
$$M = AC + B^2 + \frac{4\rho^2}{\sin^2 2\varphi}, \quad N = A'C' + B'^2 + \frac{4\rho^2}{\sin^2 2\varphi},$$
достаточно выбрать p и q так, чтобы удовлетворялись уравнения
$$\begin{aligned} &AA'(B'C - A'B)\,p = \ldots, \\ &AA'(B'C - A'B)\,q = \ldots, \end{aligned} \tag{85}$$
где точками обозначены известные функции. Если коэффициенты при p и q не равны нулю тождественно, то это преобразование возможно, ибо можно выбрать начальные условия так, чтобы в начальной точке они были отличны от нуля, и в силу непрерывности они будут отличны от нуля в её окрестности. Уравнения (40) § 43 принимают теперь вид:
$$\begin{aligned} &[\Delta A, \tilde\omega_1] + [\Delta B, \tilde\omega_2] = 0, \quad [\Delta A', \tilde\omega_2] + [\Delta B', \tilde\omega_1] = 0, \\ &[\Delta B, \tilde\omega_1] + [\Delta C, \tilde\omega_2] = 0, \quad [\Delta B', \tilde\omega_2] + [\Delta C', \tilde\omega_1] = 0. \end{aligned} \tag{40''}$$

Выписывая билинейные уравнения, присоединённые к квадратичным (40''), присовокупляя сюда уравнения (b_1), (b_2), мы получим шесть линейных уравнений для определения значений шести форм ΔA, $\Delta A'$, ΔB, $\Delta B'$, ΔC, $\Delta C'$ на втором линейном элементе.

На первом четыре из этих форм произвольны, значения остальных двух определяются из уравнений (b_1), (b_2). Определитель этой системы шести линейных уравнений с помощью уравнений (a) может быть приведён к виду:
$$(A'(\tilde\omega_2)^2 - C'(\tilde\omega_1)^2\left\{A(\tilde\omega_1)^2 + \frac{M}{B}\tilde\omega_1\tilde\omega_2 + C(\tilde\omega_2)^2\right\}(B'C - A'B). \tag{86}$$
Он обращается в нуль на четырёх характеристиках, но не может обращаться в нуль на всём интегральном многообразии, если исключить отдельные специальные случаи. Следовательно, система в инволюции и общее решение зависят от четырёх функций одного аргумента, поскольку система содержит $s_1 = 4$ независимых квадратичных уравнения.

Особые случаи зависят от обращения в нуль коэффициентов при p и q в уравнениях (85) или тождественного (независимо от выбора $\tilde\omega_1 : \tilde\omega_2$) исчезновения определителя (86) и сводятся к равенству
$$B'C - A'B = 0.$$
Это приводит нас к конгруэнции T. Действительно, поскольку в силу (79) $AA' = CC'$, имеем:
$$\frac{A'}{C} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{A},$$
и мы возвращаемся к уравнениям (83)
$$\frac{4\rho^2}{\sin^2 2\varphi}(t^2 - 1) = 0.$$

IX. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ, НАЛАГАЮЩИХСЯ НА ПОВЕРХНОСТИ 2-го ПОРЯДКА

63. Изгибание комплекса касательных к поверхности. Рассмотрим некоторую поверхность S и комплекс её касательных. Можно ли на каждой касательной задать точку M и через каждую касательную провести плоскость m так, чтобы при всяком изгибании поверхности S комплекс разлагался на однопараметрическое семейство конгруэнций, для которых точки M были фокусами, а плоскости m — фокальными плоскостями?

Присоединяем к точкам A поверхности S произвольный трёхгранник T, у которого третья ось e_3 совпадает с нормалью. Пусть дифференциальные перемещения трёхгранника по поверхности определяются формулами
$$dA = \omega^i e_i, \quad de_i = \omega_i^k e_k, \qquad i, k = 1, 2, 3. \tag{87}$$

Поскольку плоскость $(e_1 e_2)$ является касательной плоскостью поверхности, имеем:
$$\omega^3 = 0, \tag{88}$$
и внешний дифференциал этого уравнения даёт:
$$[\omega^1\omega_1^3] + [\omega^2\omega_2^3] = 0,$$
откуда по лемме Картана имеем
$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= a\omega^1 + b\omega^2, \\ \omega_2^3 &= b\omega^1 + c\omega^2. \end{aligned} \tag{89}$$

Если этот трёхгранник повернуть около нормали e_3 на угол α, то для нового трёхгранника $\tilde T$ компоненты $\tilde\omega^i$, $\tilde\omega_i^k$ будут иметь значения
$$\begin{aligned} &\tilde\omega^1 = \omega^1\cos\alpha + \omega^2\sin\alpha, \quad \tilde\omega^2 = -\omega^1\sin\alpha + \omega^2\cos\alpha, \\ &\tilde\omega_1^3 = \omega_1^3\cos\alpha + \omega_2^3\sin\alpha, \quad \tilde\omega_2^3 = -\omega_1^3\sin\alpha + \omega_2^3\cos\alpha, \\ &\tilde\omega_1^2 = \omega_1^2 + d\alpha. \end{aligned} \tag{90}$$

Рассмотрим конгруэнцию, описанную первой осью трёхгранника $\tilde T$, и пусть фокус M лежит на расстоянии
$$AM = t^{-1},$$
так что
$$M = A + t^{-1}\tilde e_1$$
$$dM = \tilde e_1(dt^{-1} + \tilde\omega^1) + \tilde e_2(\tilde\omega^2 + t^{-1}\tilde\omega_1^2) + \tilde e_3 t^{-1}\tilde\omega_1^3.$$

Поскольку плоскость m должна быть касательной плоскостью поверхности (M), все перемещения dM должны лежать в этой плоскости. Обозначая буквой φ угол этой плоскости с плоскостью $(e_1 e_2)$, будем иметь:

$$t^{-1}\tilde{\omega}_1^3 = (\tilde{\omega}^2 + t^{-1}\tilde{\omega}_1^2)\operatorname{tg}\varphi,$$

или

$$\omega_1^3 + d\alpha = -t\tilde{\omega}^2 + \tilde{\omega}_1^3 \operatorname{ctg}\varphi. \qquad (91)$$

Здесь t и φ надо рассматривать как функции трёх аргументов u, v и α.

Уравнение (91) определяет α, если известны функции t и φ. Так как каждое решение α определяет конгруэнцию нашего комплекса, удовлетворяющую поставленным требованиям, а комплекс разлагается на однопараметрическое семейство конгруэнций, то уравнение (91) должно быть вполне интегрируемо и внешний дифференциал его должен быть алгебраическим следствием самого уравнения.

Дифференцируя внешним образом уравнение (91) и исключая форму $\tilde{\omega}_1^2$, которая содержит дифференциал $d\alpha$, получим:

$$[d_1 t\tilde{\omega}^2] + \frac{1}{\sin^2\varphi}[d_1\varphi\tilde{\omega}_1^3] - t_\alpha[\omega_1^2 - \tilde{\omega}_1^3\operatorname{ctg}\varphi,\ \tilde{\omega}^2] -$$
$$- \frac{\varphi_\alpha}{\sin^2\varphi}[\omega_1^2 + t\tilde{\omega}^2,\ \tilde{\omega}_1^3] + t[\tilde{\omega}^1,\ \tilde{\omega}_1^3\operatorname{ctg}\varphi - t\tilde{\omega}^2] -$$
$$- \operatorname{ctg}\varphi[\tilde{\omega}_1^3\operatorname{ctg}\varphi - t\tilde{\omega}^2,\ \tilde{\omega}_2^3] - [\omega_1^3\omega_2^3] = 0. \qquad (92)$$

Здесь мы ввели обозначения

$$dt = d_1 t + t_\alpha d\alpha, \qquad d\varphi = d_1\varphi + \varphi_\alpha d\alpha,$$
$$d_1 t = \frac{\partial t}{\partial u}du + \frac{\partial t}{\partial v}dv, \quad d_1\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv, \qquad (93)$$
$$t_\alpha = \frac{\partial t}{\partial\alpha}, \quad \varphi_\alpha = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}.$$

Уравнения (89) для компонент трёхгранника $\tilde{T}$ напишутся

$$\tilde{\omega}_1^3 = \tilde{a}\tilde{\omega}^1 + \tilde{b}\tilde{\omega}^2, \quad \tilde{\omega}_2^3 = \tilde{b}\tilde{\omega}^1 + \tilde{c}\tilde{\omega}^2, \qquad (89')$$

откуда две квадратичные формы поверхности имеют вид

$$ds^2 = (\tilde{\omega}^1)^2 + (\tilde{\omega}^2)^2,$$
$$-de_3 \cdot dA = \tilde{\omega}^1\tilde{\omega}_1^3 + \tilde{\omega}^2\tilde{\omega}_2^3 = \tilde{a}(\tilde{\omega}^1)^2 + 2\tilde{b}\tilde{\omega}^1\tilde{\omega}^2 + \tilde{c}(\tilde{\omega}^2)^2.$$

При изгибании поверхности линейный элемент и формы $\tilde{\omega}^1$, $\tilde{\omega}^2$ сохраняются, вторая квадратичная форма и коэффициенты $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ меняются с сохранением кривизны поверхности

$$K = \frac{[\tilde{\omega}_1^3\tilde{\omega}_2^3]}{[\tilde{\omega}^1\tilde{\omega}^2]} = \tilde{a}\tilde{c} - \tilde{b}^2.$$

Внося выражение (89′) в уравнение (92), получим:

$$[d_1 t\tilde{\omega}^2] + \frac{1}{\sin^2\varphi}[d_1\varphi,\ \tilde{a}\tilde{\omega}^1 + \tilde{b}\tilde{\omega}^2] - \left(t^2 + \frac{K}{\sin^2\varphi}\right)[\tilde{\omega}^1\tilde{\omega}^2] -$$
$$- t_\alpha[\omega_1^2\tilde{\omega}^2] + t_\alpha\operatorname{ctg}\varphi[\tilde{a}\tilde{\omega}^1\tilde{\omega}^2] - \frac{\varphi_\alpha}{\sin^2\varphi}[\omega_1^2 + t\tilde{\omega}^2,\ \tilde{a}\tilde{\omega}^1 + \tilde{b}\tilde{\omega}^2] = 0. \qquad (92')$$

Это уравнение является тождеством относительно u, v и α. Вместе с тем оно должно иметь место при всяком изгибании поверхности. Так как при изгибании поверхности меняются только величины $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, а функции t и φ от изгибания не зависят, то уравнение (92′) распадается на три:

$$\left[d_1 t - t_\alpha\omega_1^2 - \left(t^2 + \frac{K}{\sin^2\varphi}\right)\tilde{\omega}^1,\ \tilde{\omega}^2\right] = 0, \qquad (94a)$$
$$\left[\frac{1}{\sin^2\varphi}d_1\varphi - t_\alpha\operatorname{ctg}\varphi\tilde{\omega}^2 - \frac{\varphi_\alpha}{\sin^2\varphi}(\omega_1^2 + t\tilde{\omega}^2),\ \tilde{\omega}^1\right] = 0, \qquad (94b)$$
$$[d_1\varphi - \varphi_\alpha\omega_1^2,\ \tilde{\omega}^2] = 0. \qquad (94c)$$

Уравнения (94a)—(94c) образуют систему уравнений, которые определяют величины t и φ как функции переменных u, v, α. После этого вполне интегрируемое уравнение (91) определит α как функцию u, v.

Уравнение (94c) по лемме Картана имеет следствием

$$d_1\varphi = \varphi_\alpha\omega_1^2 + \lambda\tilde{\omega}^2.$$

Внося это значение в уравнение (94b), получим:

$$(\lambda - t\varphi_\alpha - t_\alpha\sin\varphi\cos\varphi)[\tilde{\omega}^1\tilde{\omega}^2] = 0.$$

Поскольку произведение $[\tilde{\omega}^1\tilde{\omega}^2]$ отлично от нуля, круглая скобка обращается в нуль. Определяя отсюда неизвестный коэффициент λ и внося в предыдущее уравнение, получим для полного дифференциала $d\varphi$ уравнение

$$d\varphi = \varphi_\alpha\tilde{\omega}_1^2 + \{t\varphi_\alpha + t_\alpha\sin\varphi\cos\varphi\}\tilde{\omega}^2. \qquad (95a)$$

Аналогично, уравнение (94a) можно переписать в виде

$$dt = t_\alpha\tilde{\omega}_1^2 + \left(t^2 + \frac{K}{\sin^2\varphi}\right)\tilde{\omega}^1 + \nu\tilde{\omega}^2, \qquad (95b)$$

где ν — новая неизвестная функция.

64. Приведение системы в инволюцию. Уравнения (95a), (95b) надо рассматривать как систему уравнений с неизвестными функциями t, φ, ν относительно трёх независимых переменных u, v и α, дифференциалы которых линейно представлены формами $\tilde{\omega}^1$, $\tilde{\omega}^2$, $\tilde{\omega}_1^2$.

Дифференцируя их внешним образом, получим:

$$[d\varphi_\alpha \tilde{\omega}_1^2] + t[d\varphi_\alpha \tilde{\omega}^2] + \sin\varphi\cos\varphi\,[dt_\alpha \tilde{\omega}^2] +$$
$$+ (t\varphi_\alpha + t_\alpha \sin\varphi\cos\varphi)\,[\tilde{\omega}^1\tilde{\omega}_1^2] - 2\varphi_\alpha t_\alpha \cos^2\varphi\,[\tilde{\omega}^2\tilde{\omega}_1^2] +$$
$$+ \varphi_\alpha (t^2 + K\,\mathrm{ctg}^2\varphi)\,[\tilde{\omega}^1\tilde{\omega}^2] = 0, \qquad (95\mathrm{a}')$$

$$[dt_\alpha \tilde{\omega}_1^2] + [d\nu\tilde{\omega}^2] + \left(\nu - 2tt_\alpha + 2K\varphi_\alpha \frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\right)[\tilde{\omega}^1\tilde{\omega}_1^2] -$$
$$- \left(t^2 + \frac{K}{\sin^2\varphi}\right)[\tilde{\omega}^2\tilde{\omega}_1^2] +$$
$$+ \left\{-2t\nu + Kt_\alpha(2\,\mathrm{ctg}^2\varphi - 1) + 2Kt\varphi_\alpha \frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi} - 4\frac{KK_2}{\sin^2\varphi}\right\}[\tilde{\omega}^1\tilde{\omega}^2] = 0, \quad (95\mathrm{b}')$$

где мы ввели обозначение

$$dK = 4K(K_1\tilde{\omega}^1 + K_2\tilde{\omega}^2). \qquad (96)$$

Уравнения (95a′), (95b′) содержат только три формы $d\varphi_\alpha$, $d(t^{-1})_\alpha$, $d\nu$ из подкольца дифференциалов неизвестных функций. Вводя обозначения

$$\begin{aligned} d\varphi_\alpha &= a_1\tilde{\omega}^1 + a_2\tilde{\omega}^2 + a_3\tilde{\omega}_1^2, \\ dt_\alpha &= b_1\tilde{\omega}^1 + b_2\tilde{\omega}^2 + b_3\tilde{\omega}_1^2, \\ d\nu &= \nu_1\tilde{\omega}^1 + \nu_2\tilde{\omega}^2 + \nu_3\tilde{\omega}_1^2 \end{aligned} \qquad (\alpha)$$

и внося эти величины в уравнения (95a′), (95b′), мы получим систему шести уравнений, определяющих коэффициенты a_i, b_i, ν_i наиболее общего интегрального элемента третьего порядка. Нас будут интересовать уравнения, которые получаются обращением в нуль коэффициентов при произведениях, содержащих формы $[\tilde{\omega}^1\tilde{\omega}_1^2]$ и $[\tilde{\omega}^1\tilde{\omega}^2]$ в уравнениях (95a′), (95b′):

$$a_1 + t\varphi_\alpha + t_\alpha \sin\varphi\cos\varphi = 0, \qquad (\alpha_1)$$

$$ta_1 + b_1 \sin\varphi\cos\varphi + \varphi_\alpha(t^2 + K\,\mathrm{ctg}^2\varphi) = 0, \qquad (\alpha_2)$$

$$b_1 + \nu - 2tt_\alpha + 2K\varphi_\alpha \frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi} = 0, \qquad (\beta_1)$$

$$\nu_1 - 2t\nu + Kt_\alpha(2\,\mathrm{ctg}^2\varphi - 1) + 2Kt\varphi_\alpha \frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi} - 4\frac{KK_2}{\sin^2\varphi} = 0. \qquad (\beta_2)$$

Умножая уравнение (α_1) на t, а уравнение (β_1) на $\sin\varphi\cos\varphi$ и вычитая из уравнения (α_2), получим:

$$\nu = tt_\alpha - K\varphi_\alpha \frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}. \qquad (97)$$

Это — новое конечное уравнение на неизвестные функции.

Рассматривая систему (95a), (95b), (95a′), (95b′) совместно с конечным уравнеиием (97), мы должны присоединить к ней полный дифференциал уравнения (97):

$$d\nu = t\,dt_\alpha - K\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}d\varphi_\alpha + \left\{\left(t^2 + \frac{K}{\sin^2\varphi}\right)t_\alpha - 4KK_1\varphi_\alpha\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\right\}\tilde{\omega}^1 +$$
$$+ \left\{\nu t_\alpha - 4KK_2\varphi_\alpha\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi} - K\varphi_\alpha\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\right)(t\varphi_\alpha + t_\alpha\sin\varphi\cos\varphi)\right\}\tilde{\omega}^2 +$$
$$+ \left\{t_\alpha^2 - K\varphi_\alpha^2\frac{d}{d\varphi}\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\right\}\tilde{\omega}_1^2. \qquad (97')$$

При определении интегрального элемента $\mathscr{E}_3$ мы можем воспользоваться уравнениями (α_i), (β_i), присоединяя к ним такие же уравнения, полученные из дифференциального уравнения (97′). Собирая коэффициенты при членах с формой $\tilde{\omega}^1$, пользуясь системой (α), получим:

$$\nu_1 = tb_1 - K\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}a_1 + \left(t^2 + \frac{K}{\sin^2\varphi}\right)t_\alpha - 4KK_1\varphi_\alpha\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}. \qquad (98)$$

Теперь комбинация уравнений

$$(\alpha_2) - t(\alpha_1) - (\beta_1)\sin\varphi\cos\varphi = 0,$$

где (α_i), (β_i) означают левые части соответствующих уравнений, после подстановки значения (97) обращается в тождество. Составляя новую комбинацию

$$(\beta_2) - t(\beta_1) + K\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}(\alpha_1) = 0$$

и внося значения ν и ν_1 по формулам (97), (98), получим конечное уравнение между неизвестными $(t^{-1})_\alpha$, φ_α

$$t\varphi_\alpha + t_\alpha \sin\varphi\cos\varphi = K_1\varphi_\alpha + K_2\,\mathrm{tg}\,\varphi. \qquad (99)$$

Исключая из уравнения (95a) переменное $t\varphi_\alpha + t_\alpha\sin\varphi\cos\varphi$, получим:

$$d\ln\sin\varphi = (\ln\sin\varphi)_\alpha\tilde{\omega}_1^2 + \{K_1(\ln\sin\varphi)_\alpha + K_2\}\,\tilde{\omega}^2. \qquad (100)$$

Это уравнение теперь можно рассматривать независимо от уравнений на переменное t^{-1}.

65. Исследование уравнения для угла φ. Нам надо дифференцировать уравнение (100) внешним образом. При этом следует иметь в виду, что введённые нами величины K_1, K_2 зависят от угла α. Действительно, из уравнений (90) следует

$$\omega^1 = \tilde{\omega}^1\cos\alpha - \tilde{\omega}^2\sin\alpha, \quad \omega^2 = \tilde{\omega}^1\sin\alpha + \tilde{\omega}^2\cos\alpha.$$

Вводя новые обозначения посредством равенств

$$\frac{1}{4}d\ln K = K_1\tilde{\omega}^1 + K_2\tilde{\omega}^2 = (\ln K)_1\omega^1 + (\ln K)_2\omega^2, \qquad (101)$$

где величины $(\ln K)_1$, $(\ln K)_2$, очевидно, не зависят от α, будем иметь:

$$\begin{aligned} K_1 &= (\ln K)_1 \cos\alpha + (\ln K)_2 \sin\alpha, \\ K_2 &= -(\ln K)_1 \sin\alpha + (\ln K)_2 \cos\alpha, \end{aligned} \tag{102}$$

откуда

$$dK_1 = d_1 K + K_2 d\alpha, \quad dK_2 = d_1 K_2 - K_1 d\alpha. \tag{103}$$

Введём обозначения

$$d(\ln K)_1 = (\ln K)_{11}\omega^1 + (\ln K)_{12}\omega^2, \quad d(\ln K)_2 = (\ln K)_{21}\omega^1 + (\ln K)_{22}\omega^2. \tag{104}$$

При этом величины $(\ln K)_{12}$ и $(\ln K)_{21}$ связаны между собой. Дифференцируя внешним образом уравнение (101), получим:

$$[d(\ln K)_1 - (\ln K)_2\,\omega_1^2,\ \omega^1] + [d(\ln K)_2 + (\ln K)_1\,\omega_1^2,\ \omega^2] = 0.$$

Если положить

$$\omega_1^2 = h\omega^1 + k\omega^2,$$

то получим:

$$(\ln K)_{12} - k(\ln K)_2 = (\ln K)_{21} + h(\ln K)_1.$$

Следовательно, мы можем обозначить

$$\begin{aligned} a_{11} &= (\ln K)_{11} - h(\ln K)_2 - (\ln K)_1(\ln K)_1 - K, \\ a_{12} &= (\ln K)_{12} - k(\ln K)_2 - (\ln K)_1(\ln K)_2, \\ a_{21} &= (\ln K)_{21} + h(\ln K)_1 - (\ln K)_1(\ln K)_2, \\ a_{22} &= (\ln K)_{22} + k(\ln K)_1 - (\ln K)_2(\ln K)_2 - K, \quad a_{12} = a_{21}. \end{aligned} \tag{104}$$

В этих обозначениях формулы (103) запишутся

$$\begin{aligned} dK_1 &= \tilde\omega^1(M + K_1^2 + K) + \tilde\omega^2(N + K_1K_2) + K_2\tilde\omega_1^2, \\ dK_2 &= \tilde\omega^1(N + K_1K_2) + \tilde\omega^2(M' + K_2^2 + K) - K_1\tilde\omega_1^2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} M &= a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\sin^2\alpha, \\ M' &= a_{11}\sin^2\alpha - 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\cos^2\alpha, \\ N &= a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + (a_{22} - a_{11})\sin\alpha\cos\alpha. \end{aligned}$$

Теперь внешний дифференциал уравнения (100) напишется в виде

$$\begin{aligned} &[d(\ln\sin\varphi)_\alpha\,\tilde\omega_1^2] + K_1[d(\ln\sin\varphi)_\alpha\,\tilde\omega^2] + \{K_1(\ln\sin\varphi)_\alpha + K_2\}[\tilde\omega^1\tilde\omega_1^2] + \\ &\quad + \{K_1 - K_2(\ln\sin\varphi)_\alpha\}[\tilde\omega^2\tilde\omega_1^2] + \\ &\quad + \{(\ln\sin\varphi)_\alpha(M + K_1^2) + N + K_1K_2\}[\tilde\omega^1\tilde\omega^2] = 0. \end{aligned} \tag{100'}$$

Будем искать интегральный элемент в виде разложения

$$d(\ln\sin\varphi)_\alpha = A\tilde\omega^1 + B\omega^2 + C\tilde\omega_1^2.$$

Внося в уравнение (100′) и требуя, чтобы исчезали коэффициенты при независимых произведениях $[\tilde\omega^1\tilde\omega_1^2]$, $[\tilde\omega^2\tilde\omega_1^2]$, $[\tilde\omega^1\tilde\omega^2]$, получим систему уравнений

$$A + K_1(\ln\sin\varphi)_\alpha + K_2 = 0, \tag{γ_1}$$

$$B - K_1C - K_2(\ln\sin\varphi)_\alpha + K_1 = 0, \tag{γ_2}$$

$$K_1A + (M + K_1^2)(\ln\sin\varphi)_\alpha + N + K_1K_2 = 0. \tag{γ_3}$$

Исключая коэффициент A из уравнений (γ_1), (γ_3), получаем новое конечное уравнение

$$M(\ln\sin\varphi)_\alpha + N = 0. \tag{105}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \ln\sin\varphi}{\partial\alpha} = \frac{(a_{11} - a_{22})\sin\alpha\cos\alpha + a_{12}(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)}{a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\sin^2\alpha}. \tag{106}$$

66. Изгибание комплекса из псевдосферических конгруэнций. Уравнение (105) исчезает тождественно, если

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = 0.$$

Составляя комбинации $a_{11}\omega^1 + a_{12}\omega^2$, $a_{21}\omega^1 + a_{22}\omega^2$, получим:

$$\begin{aligned} d(\ln K)_1 - \omega_1^2(\ln K)_2 - \frac{1}{4}(\ln K)_1\,d\ln K &= K\omega^1, \\ d(\ln K)_2 + \omega_1^2(\ln K)_1 - \frac{1}{4}(\ln K)_2\,d\ln K &= K\omega^2. \end{aligned}$$

Дифференцируя внешним образом и исключая дифференциалы $d(\ln K)_1$, $d(\ln K)_2$, получим:

$$K(\ln K)_1[\omega^1\omega^2] = 0, \quad K(\ln K)_2[\omega^1\omega^2] = 0,$$

следовательно, если $K \neq 0$

$$(\ln K)_1 = 0 \quad (\ln K)_2 = 0$$

и

$$dK = 0, \text{ т. е. } K = \text{const}.$$

Теперь уравнение (100) принимает вид

$$d\varphi = \varphi_\alpha\tilde\omega_1^2$$

и вместо уравнения (100′) в качестве внешнего дифференциала получим:

$$[d\varphi_\alpha\tilde\omega_1^2] - K[\tilde\omega^1\tilde\omega^2]\varphi_\alpha = 0,$$

откуда, умножая внешним образом на $\tilde{\omega}_1^2$, имеем:

$$-K[\tilde{\omega}^1\tilde{\omega}^2\tilde{\omega}_1^2]\,\varphi_\alpha=0, \text{ т. е. } \varphi_\alpha=0,$$

значит, $d\varphi=0$ и $\varphi=\text{const}$. и уравнение (99) даст:

$$t_\alpha=0,$$

а уравнения (95b′), (95b) и (97):

$$K=-t^2\sin^2\varphi,\quad dt=0, \text{ т. е. } t=\text{const}.$$

Поскольку расстояние между фокусами t^{-1} и угол фокальных плоскостей φ постоянны, то все конгруэнции, на которые расслаивается комплекс касательных — псевдосферические.

Из тех же уравнений следует, что каждый раз, когда фокальные отрезки t^{-1} и угол фокальных плоскостей не зависят от угла α, т. е. точки M в каждой касательной плоскости образуют окружность и все фокальные плоскости составляют с одной касательной плоскостью поверхности S один и тот же угол φ, мы приходим к расслоению комплекса касательных на псевдосферические конгруэнции.

67. Комплекс касательных поверхности 2-го порядка. Если a_{ik} не все равны нулю, то, поворачивая трёхгранник T на подходящий угол β, можно привести коэффициент a_{12} к нулю.

Действительно, поворот трёхгранника T равносилен переходу от трёхгранника T к трёхграннику $\tilde{T}$ с заменой угла α на угол β. При этом, как показывают формулы (102), новые величины $\overline{(\ln K)}_1$, $\overline{(\ln K)}_2$ связаны со старыми так же, как с ними связаны величины K_1 и K_2. Для величин $\overline{(\ln K)}_{ij}$ формулы преобразования получаются из уравнений

$$\overline{(\ln K)}_{11}\,\overline{\omega}^1+\overline{(\ln K)}_{12}\overline{\omega}^2=$$
$$=d(\ln K)_1\cos\beta+d(\ln K)_2\sin\beta+\{(\ln K)_2\cos\beta-(\ln K)_1\sin\beta\}\,d\beta.$$

Внося в уравнения (104) значения $\overline{(\ln K)}_i$, $\overline{(\ln K)}_{ij}$ и новые коэффициенты $\overline{h}$, $\overline{k}$, из уравнений

$$\overline{h}\overline{\omega}^1+\overline{k}\overline{\omega}^2=h\omega^1+k\omega^2$$

получим для нового коэффициента $\overline{a}_{12}$ выражение

$$\overline{a}_{12}=a_{12}(\cos^2\beta-\sin^2\beta)+(a_{11}-a_{22})\sin\beta\cos\beta.$$

Мы всегда можем подобрать такой угол β, чтобы иметь:

$$\overline{a}_{12}=0.$$

Допустим, что это преобразование сделано и уже трёхгранник T обладает этим свойством

$$a_{12}=0.$$

Тогда уравнение (106) интегрируется. Обозначая через L^2 произвольную функцию от переменных u, v (не содержащую α), получим:

$$\sin^2\varphi=\frac{L^2}{a_{11}\cos^2\alpha+a_{22}\sin^2\alpha}. \tag{107}$$

Внося это выражение в уравнение (100), получим:

$$d\ln L-\frac{\sin^2\alpha\,da_{22}+\cos^2\alpha\,da_{11}}{2(a_{22}\sin^2\alpha+a_{11}\cos^2\alpha)}=\frac{(a_{11}-a_{22})\sin\alpha\cos\alpha}{a_{22}\sin^2\alpha+a_{11}\cos^2\alpha}\,\omega_1^2-$$
$$-(-\omega^1\sin\alpha+\omega^2\cos\alpha)\frac{(\ln K)_1 a_{22}\sin\alpha-(\ln K)_2 a_{11}\cos\alpha}{a_{22}\sin^2\alpha+a_{11}\cos^2\alpha}.$$

Так как величины a_{11}, a_{22} и L не зависят от α, то, сравнивая коэффициенты при степенях $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, получим систему:

$$d\ln L-\frac{1}{2}d\ln a_{22}=(\ln K)_1\omega^1, \tag{a_1}$$

$$d\ln L-\frac{1}{2}d\ln a_{11}=(\ln K)_2\omega^2, \tag{a_2}$$

$$(\ln K)_1 a_{22}\omega^2+(\ln K)_2 a_{11}\omega^1+(a_{22}-a_{11})\,\omega_1^2=0. \tag{a_3}$$

Складывая уравнения (a_1) и (a_2), получим:

$$2d\ln L-\frac{1}{2}d\ln(a_{11}a_{22})=\frac{1}{4}d\ln K,$$

откуда, интегрируя, имеем:

$$L^2=c\sqrt{a_{11}a_{22}}\sqrt[4]{K},\qquad c=\text{const}.$$

С другой стороны, умножая внешним образом уравнение (a_1) на ω^1, а уравнение (a_2) на ω^2, получим:

$$\left[d\ln\frac{L}{\sqrt{a_{22}}},\ \omega^1\right]=0,\quad \left[d\ln\frac{L}{\sqrt{a_{11}}},\ \omega^2\right]=0.$$

Если ввести криволинейные координаты на поверхности S посредством равенств

$$\omega^1=a\,du,\quad \omega^2=b\,dv, \tag{108}$$

то увидим, что функция $\frac{L}{\sqrt{a_{22}}}$ не зависит от переменного v, а $\frac{L}{\sqrt{a_{11}}}$ от переменного u

$$L^2=\frac{ca_{22}}{U}=\frac{ca_{11}}{V},\qquad U=\varphi(u),\quad V=\psi(v), \tag{109}$$

и, следовательно,

$$K=\frac{1}{U^2V^2}. \tag{110}$$

Отсюда

$$(\ln K)_1 = -\frac{1}{2a}\frac{U'}{U}, \quad (\ln K)_2 = -\frac{1}{2b}\frac{V'}{V},$$

а поскольку

$$\frac{a_{11}}{V} = \frac{a_{22}}{U}$$

уравнение (a_8) даёт:

$$\omega_1^2 = \frac{b}{2a}\frac{U'\,dv}{(U-V)} + \frac{a}{2b}\frac{V'du}{(U-V)}.$$

Дифференцируя внешним образом уравнение (108), получим теперь:

$$[da\,du] = [\omega_1^2\omega^2], \quad [db\,dv] = [\omega^1\omega_1^2],$$

или

$$\frac{\partial a}{\partial v} = -\frac{a}{2}\frac{V'}{(U-V)}; \quad \frac{\partial b}{\partial u} = \frac{b}{2}\frac{U'}{(U-V)},$$

откуда, интегрируя, имеем:

$$a = U_1\sqrt{U-V}, \quad b = V_1\sqrt{U-V},$$

где U_1 и V_1 — произвольные функции одного u или одного v, которые выбором параметров u, v можно привести к единице, как это следует из формул (108).

Линейный элемент поверхности S принимает вид

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 = a^2\,du^2 + b^2\,dv^2 = (U-V)(du^2 + dv^2), \quad (111)$$

где функции U и V подчинены требованию, чтобы кривизна линейного элемента удовлетворяла уравнению (110).

Это — линейный элемент поверхности 2-го порядка, отнесённый к линиям кривизны (Т. П., стр. 133). Следовательно, *поверхность S налагается на поверхность 2-го порядка.*

68. Окончание доказательства теоремы существования. Нам осталось доказать, что при изгибании любой поверхности 2-го порядка комплекс касательных разлагается на конгруэнции с заданными на каждой касательной фокусом и фокальной плоскостью.

Внося в уравнения (107) по формулам (109)

$$a_{22} = \frac{UL^2}{c}, \quad a_{11} = \frac{VL^2}{c},$$

получим:

$$\sin^2\varphi = \frac{c}{V\cos^2\alpha + U\sin^2\alpha}. \quad (107')$$

Это выражение удовлетворяет уравнению (100), если кривизна K определяется по формуле (110). Внося его в уравнение (99), получим после интегрирования:

$$t = -\frac{1}{2\sqrt{U-V}}\left\{\frac{d\ln(U-c)}{du}\cos\alpha + \frac{d\ln(V-c)}{dv}\sin\alpha\right\} + \\ + Q\sqrt{(U-c)\sin^2\alpha + (V-c)\cos^2\alpha},$$

где Q — произвольная функция переменных u, v.

Внося φ и t в уравнения (94а) — (94с) и обращая в нуль коэффициенты при степенях $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, получим после некоторых выкладок с использованием уравнения Гаусса для линейного элемента (111):

$$\frac{\partial^2\ln\sqrt{U-V}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\ln\sqrt{U-V}}{\partial v^2} = \frac{1}{U^2V^2}$$

выражение для функции Q

$$Q = \frac{C_1}{(U-c)(V-c)},$$

где постоянная C_1 вполне определена, если даны значения постоянной c и функций U, V.

Таким образом, с изгибанием поверхности 2-го порядка можно связать систему $\sum$ заданных на её касательных точек M и проходящих через эти касательные плоскостей m так, чтобы для каждого изгибания поверхности комплекс касательных разбивался на семейство конгруэнций, для которых точки M служат фокусами, а плоскости m — фокальными плоскостями. При этом при заданной поверхности 2-го порядка построенная система $\sum$ зависит от произвольной постоянной c.

Прямым подсчётом убеждаемся, что произведение кривизн поверхности S и второй фокальной поверхности S' равно

$$KK' = -\frac{\sin^4\varphi}{(t^{-1})^4}.$$

Следовательно (§ 42), каждая конгруэнция (AM) есть конгруэнция W.

Когда поверхность S наложится на поверхность 2-го порядка Q_2, все фокальные поверхности S' конгруэнций семейства выродятся в линии, лежащие на одной поверхности 2-го порядка Q_2', конфокальной поверхности Q_2.

Для всякой невырожденной конгруэнции (AM), т. е. при условии, что поверхность S не совпадает с поверхностью 2-го порядка, на которую она налагается, фокальные поверхности конгруэнции налагаются друг на друга.

В этом наложении фокальных поверхностей S и S' соответствующие точки не принадлежат одному лучу конгруэнции. Чтобы установить это соответствие, надо вернуться к софокусным поверхностям 2-го порядка Q_2 и Q_2'. Эти поверхности принадлежат одному семейству поверхностей триортогональной системы. Такое семейство допускает конгруэнцию кривых линий, пересекающих ортогонально все поверхности семейства. При этом каждой точке поверхности S будет соответствовать определённая точка поверхности S', принадлежащая одной и той же ортогональной траектории.

Чтобы найти, на какую точку поверхности S налагается точка M поверхности S', надо изогнуть поверхность S так, чтобы она обратилась в поверхность 2-го порядка Q_2. Увлекаемый касательной плоскостью отрезок касательной AM займёт теперь положение $A'M'$, где конец отрезка точка M' расположится на поверхности 2-го порядка Q_2'. Ортогональная траектория семейства софокусных поверхностей Q_2, Q_2', проходящая через точку M', пересечёт поверхность Q в некоторой точке A_0'. Возвращаясь назад к поверхности S, мы переведём точку A_0' поверхности Q в точку A_0 поверхности S, которая и будет соответствовать точке M в наложении поверхности S на поверхность S'.

69. Литературные указания. К § 33. Теория выбора канонического репера (в частности, прямоугольного трёхгранника) принадлежит Картану. Обстоятельно со всеми её основами из теории непрерывных групп преобразований она изложена в его книге Théorie des groupes et géometrie differentielle traitées par la méthode du repère mobile. Paris, 1937. Там же разобраны многочисленные примеры. См. также М. В. Ф., гл. XIV.

Построенный в тексте трёхгранник в координатной форме был введён из геометрических соображений Гишаром [1]. Его формулы широко использовались в геометрии конгруэнций. Формулы текста § 34 развиваются параллельно теории Гишара, но значительно отступают от неё в силу существенного изменения метода. Связь нашей теории с теорией Гишара дана в § 37, где уравнение (24) принадлежит Гишару.

К § 38. Теория систем в инволюции принадлежит Картану Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales. *Ann. Ec. Norm.* (3) 16, стр. 239—332 (1899). Литература указана в § 32 гл. II.

К § 40. Псевдосферическая конгруэнция введена в науку Бианки [2] как метод преобразования поверхностей постоянной отрицательной кривизны. Позднее [4] он же показал, что всякая конгруэнция с постоянным расстоянием между фокусами и постоянным углом фокальных плоскостей — псевдосферическая.

Эту же конгруэнцию Бианки находит [10] как ту исключительную конгруэнцию, которую можно получить бесчисленным числом способов, как геометрическое место ∞^2 положений прямой, неразрывно связанной с поверхностью, которая катится по своему изгибанию (также Фиников [3]). К псевдосферической конгруэнции пришёл Йонас в целом ряде своеобразных проблем. Ещё Бианки отметил, что изогональные траектории однопараметрического семейства поверхностей S постоянной отрицательной кривизны $K=-1$ суть кривые Бертрана, радиусы кривизны и кручения которых связаны линейным соотношением. Для каждой кривой Бертрана существует сопряжённая кривая Бертрана с общими главными нормалями, постоянным углом касательных и постоянным расстоянием между соответствующими точками. Йонас [8] рассматривает поверхности, образованные однопараметрическим семейством этих траекторий; для каждой такой поверхности (B_1) существует вторая, ассоциированная (B_2), составленная из сопряжённых кривых Бертрана. Если эти линии принять за линии v, то существуют линии u на обеих поверхностях, касательные к которым пересекают касательные к линиям v присоединённой поверхности.

Допустим теперь, что точки пересечения этих касательных A_1 и A_2 служат вторыми фокусами конгруэнции касательных к линиям v так, что в косом четырёхугольнике $B_1A_1B_2A_2$, образованном касательными к линиям u и v обеих поверхностей, вершины служат фокусами сторон. Такие поверхности (B) образованы траекториями вдоль асимптотических линий поверхностей постоянной кривизны S. Линии u (асимптотические на поверхности S) суть кривые постоянного кручения. Совокупность главных нормалей $B_1^*B_2^*$, общих у сопряжённых кривых Бертрана, для всех поверхностей (B_1^*), (B_2^*) распадается на однопараметрическое семейство псевдосферических конгруэнций. Обе прямые, проходящие через центр луча $B_1^*B_2^*$ (центр делит пополам отрезок $B_1^*B_2^*$) и делящие пополам угол между касательными кривых Бертрана, описывают тоже однопараметрическое семейство псевдосферических конгруэнций с теми же центрами; их фокальные поверхности — сопряжённые мнимые.

Тот же автор замечает [11], что прямые, проведённые через центр луча S псевдосферической конгруэнции (S) перпендикулярно к нему так, что они делят пополам угол фокальных плоскостей, описывают конгруэнции W, и асимптотические их фокальных полостей соответствуют асимптотическим фокальных полостей (S). Если применить к ним преобразование Бэклунда, то фокальные полости новых конгруэнций преобразуются с помощью конгруэнций W.

Прекрасные результаты Ермолаева и Бахвалова о псевдосферической конгруэнции в теории расслояемых пар должны отойти к книге «Теория пар».

К § 42. Название конгруэнции W утвердилось в науке после Бианки, который связывал его с именем Вейнгартена (Über die Oberflächen, für welche einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser eine Function des anderen ist., *J. für Math.* 65, 160—173, 1861). Занимаясь вопросами изгибания поверхностей, этот автор ввёл новый класс их — поверхности W, главные радиусы кривизны которых являются функциями один от другого, а поверхности центров налагаются на одну и ту же поверхность вращения. На этой основе им и была построена теория изгибания поверхностей вращения. Рибокур [2] показал, что на поверхностях центров кривизны поверхности W соответствуют асимптотические линии и это свойство характеризует поверхность W.

Так как поверхности центров служат фокальными поверхностями для конгруэнции нормалей, то Рибокур тем самым нашёл все нормальные конгруэнции W. Альфан [1] для той же нормальной конгруэнции W отметил фундаментальное свойство: произведение четырёх главных радиусов кривизны поверхностей центров поверхности W равно четвёртой степени расстояния между этими центрами кривизны. Рибокур [5] перенёс эту теорему на общую конгруэнцию W, заменив расстояние между центрами кривизны расстоянием между граничными точками. Полное доказательство дал Бианки [5]. Демулен [2] и Коссера [3] её снова доказывают, а последний, кроме того, показывает, что это свойство характеризует конгруэнцию W.

Конгруэнция § 44 была введена Вэльшем [1], [3], который построил общую формулу для произведения кривизн фокальных поверхностей произвольной конгруэнции и выделил наряду с конгруэнцией W замечательный случай § 44.

Конгруэнции B (§ 45) введены в науку Бианки [5]. В том же мемуаре, где он впервые говорит о конгруэнции W и строит теорию рибокуровских конгруэнций, он приходит двумя способами к новому классу поверхностей B и даёт их преобразования. Отправляясь от циклических систем Рибокура, он находит эти поверхности как образующие рибокуровских конгруэнций, которые могут нести круги циклической системы. С другой стороны, требования равенства кривизн фокальных поверхностей конгруэнции W приводят его к конгруэнции B. Эти результаты доказывает методом векторов Кэмпбелл [1].

С. С. Бюшгенс даёт инвариантную характеристику конгруэнции B в произвольной системе координат [3].

Бианки [13] отмечает характеристическое свойство поверхностей B: в каждой касательной плоскости такой поверхности можно провести окружность с центром в точке касания p переменного от точки к точке радиуса и через точки окружности и точку p можно провести ∞^1 плоскостей под одним и тем же углом к одной касательной плоскости так, чтобы ∞^3 плоских элементов, состоящих из точки (центр элемента), взятой на окружности, и плоскости, через неё проходящей, можно было расслоить на ∞^1 семейств по ∞^2 плоских элементов, плоскости которых огибают поверхности — геометрическое место центров.

Теорема о пересечении фокальных поверхностей конгруэнции B главными поверхностями по сопряжённой системе принадлежит С. П. Финикову [1], [2].

Конгруэнции, присоединённые к паре поверхностей, соответствующих ортогональностью линейных элементов, введены Рибокуром [5]. Ему же принадлежит теорема о пересечении средней поверхности этой конгруэнции её развёртывающимися поверхностями по сопряжённой системе. Обратная теорема дана Гишаром [1]. Связь рибокуровских нормальных конгруэнций с минимальными поверхностями отметил Бианки [5]. Демулен [5], Драш [1], [2], Воло [1] ищут рибокуровские конгруэнции W. Эйзенхарт [1] дал изящную теорему о последовательностях Лапласа, содержащих рибокуровские конгруэнции: если в последовательности Лапласа рядом стоят две рибокуровские конгруэнции, то все конгруэнции последовательности этого рода. Дельглейз [1] показывает, что распределительные поверхности конгруэнции Рибокура характеризуются свойством: два семейства распределительных поверхностей конгруэнции (т. е. линейчатые поверхности, линии сжатия которых помещаются на средней поверхности конгруэнции) соответствуют линиям кривизны той поверхности, нормали которой параллельны лучам конгруэнции.

Следует отметить ещё работы Пето [1] и Матисовой [1], по-своему подошедших к определению рибокуровских конгруэнций.

К § 53. Теория циклических систем принадлежит Рибокуру [1], [4], [6], [7]. Как и его преобразование поверхностей переходом от одной полости огибающей ∞^2 сфер к другой с сохранением линий кривизны, эта теория принадлежит конформной геометрии. Циклические конгруэнции введены Бианки [5]. Он же обнаружил связь циклической бесконечным числом способов конгруэнции с поверхностями B, Коссера [1] обнаружил неожиданную связь этой конгруэнции с изгибанием поверхности на главном основании (см. монографию: **Фиников** С. П., Изгибание на главном основании и т. д., ОНТИ. М. — Л., 1937, стр. 121). Огибающая плоскостей циклов является одной из таких поверхностей. Так как с одной конгруэнцией связано теперь ∞^1 циклических систем, то один луч служит осью совокупности ∞^1 циклов. Плоскость каждого цикла огибает поверхность, главное основание которой соответствует развёртывающимся поверхностям циклической конгруэнции, а точки касания всех этих параллельных плоскостей с их огибающими лежат на одной прямой. Эта прямая описывает конгруэнцию, развёртывающиеся поверхности которой соответствуют развёртывающимся поверхностям циклической конгруэнции. Инвариантную характеристику циклической бесконечным числом способов конгруэнции даёт С. С. Бюшгенс [2], [3]. Своеобразное преобразование циклических конгруэнций даёт Калапсо [2]. Ещё Рибокур показал, что система ∞^2 сфер (A), определяющая между двумя полостями огибающей (P) и (P') преобразование с сохранением линий кривизны, хорошо связана с циклической конгруэнцией; касательные плоскости в точках P и P' пересекаются по лучу g циклической конгруэнции. Проведём через точку P две сферы (R) и (S) с центрами в фокусах R и S луча g циклической конгруэнции, и пусть (A') — сфера ортогональная к сферам (A), (P) и (S) и сфера (A'') — ортогональная ко всем четырём (A), (A'), (R) и (S). Тогда обратные величины диаметров (A), (A'), (A'') являются направляющими параметрами луча новой циклической конгруэнции.

К § 59. Конгруэнция с фокальными сетями из линий кривизны дана Гишаром [1]. Поверхности с сопряжённой системой геодезических линий введены Фоссом. Подробнее см. монографию Финикова, Изгибание на главном основании и т. д., ОНТИ, М. — Л. 1937.

К § 60. Общий вопрос о конгруэнциях с соответствием линий кривизны на фокальных поверхностях рассмотрен Калапсо [1], [3]. Конгруэнция T

с двумя минимальными фокальными поверхностями значительно раньше была введена в науку Тибо [1] из следующих соображений.

Будем называть катанием поверхности по её изгибанию совокупность ∞^2 положений поверхности так, что совпадает пара точек соответствующих в изгибании и любая пара касательных в этих точках к соответствующим линиям. Тогда можно высказать теорему (Гишар): если параболоид вращения катается по своему изгибанию (произвольному), то его фокус описывает минимальную поверхность.

Этой теореме можно придать другой вид. Пусть (M) — параболоид, (M') — его изгибание. В каждой точке M' строим сферу (A) с центром в M' и радиусом, равным расстоянию MF, где M — соответствующая (в изгибании) точка параболоида и F — его фокус. Семейство ∞^2 сфер (A) имеет две полости огибающей (P_1) и (P_2).

Обе поверхности (P_1), (P_2) — минимальные и сохраняют это свойство при всех изгибаниях (M'). Каждой сопряжённой системе поверхности (M) соответствуют ортогональные системы на (P_1), (P_2), в том числе общей сопряжённой системе (M), (M') соответствуют линии кривизны. Очевидно, соответствие между точками (P_1), (P_2) — конформное.

Тибо строит новую пару минимальных поверхностей (P_1'), (P_2'), налагающихся на (P_1), (P_2) и соответствующих им ортогональностью линейных элементов. Их можно разместить в пространстве так, что прямые, соединяющие соответствующие точки, будут общими касательными. Так как линиям кривизны (P_i) на (P_i') соответствуют асимптотические линии, то прямые $P_1'P_2'$ образуют конгруэнцию W, а так как отображение (P_1') на (P_2') конформно, то линии кривизны тоже соответствуют друг другу.

Какова бы ни была минимальная поверхность (P_1') с тремя произвольными постоянными, можно построить конгруэнцию T, переводящую (P_1') в новую минимальную поверхность (P_2'). К этому вопросу вернулся затем Гамбье [1].

К § 63. Преобразование поверхностей, налагающихся на поверхности 2-го порядка, построено Бианки [6], [7], [8]. Третий том второго издания «Lezioni», целиком посвящённый теории этих преобразований, полон весьма тяжёлых формул, в которых было бы трудно разобраться, если бы не изумительно красивое введение, где автор путём смелой индукции приходит к этим преобразованиям как к естественному обобщению преобразований B.

У псевдосферической конгруэнции обе фокальные поверхности суть поверхности одной и той же постоянной отрицательной кривизны, следовательно, налагаются на псевдосферу. Рассматривая псевдосферу как сферу мнимого радиуса, автор переходит к поверхностям, налагающимся на действительную сферу, откуда уже только один шаг до конгруэнции с фокальными поверхностями, налагающимися на одну и ту же произвольную поверхность 2-го порядка.

Поверхность 2-го порядка Q Бианки рассматривает как совокупность ∞^2 плоских элементов f, состоящих из касательной плоскости π (плоскость элемента) и точки касания F (центр элемента). С каждым элементом f он связывает ∞^1 производных элементов f_1. Центры F_1 этих элементов расположены в плоскости π и образуют в ней коническое сечение C — сечение плоскостью π софокусной поверхности 2-го порядка Q_1. Плоскость π_1 каждого элемента f_1 проходит через центр F элемента f и, кроме того, содержит одну из прямолинейных образующих Q_1, проходящих через F_1. При изгибании Q вся совокупность ∞^3 производных элементов f_1 преобразуется, увлекаясь вместе с присоединёнными к f_1 касательными к Q плоскостями f; при этом во всякий момент эта совокупность может быть расслоена на ∞^1 поверхностей S_1, точки которых являются центрами F_1 тех плоских элементов f_1, плоскости которых касаются S_1 в точке F_1. Все поверхности S_1 налагаются на поверхность 2-го порядка Q и соответствуют асимптотическими линиями той поверхности S, которая получилась при изгибании поверхности 2-го порядка Q. Таким образом, прямая FF_1, касаясь S и S_1 в точках F и F_1, описывает конгруэнцию W, ибо на её фокальных поверхностях S, S_1 асимптотические линии соответствуют друг другу. Эта конгруэнция и является той конгруэнцией W, которая осуществляет асимптотические преобразования поверхности S в поверхности S_1, налагающиеся на одну и ту же поверхность 2-го порядка Q. Для этих преобразований Бианки доказал теорему переместительности, как для преобразований Бэклюнда.

В § 63—68 текста доказывается обратная теорема: если комплекс касательных некоторой поверхности S при всех изгибаниях её можно разложить на ∞^1 конгруэнций так, что при изгибании S на каждом луче фокус и фокальная плоскость остаются неизменно связанными с соответствующей касательной плоскостью S, то все эти конгруэнции суть конгруэнции W, а поверхность S и все вторые фокальные поверхности полученных конгруэнций налагаются на одну и ту же поверхность 2-го порядка. Эта теорема доказана Финиковым [4].

В двух работах [9], [10] Йонас соединяет с преобразованиями Бианки более сложное преобразование поверхностей центров.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МУТАРА И КОНГРУЭНЦИИ W

I. ПОСТРОЕНИЕ КОНГРУЭНЦИИ W ПОСРЕДСТВОМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МУТАРА

70. Уравнение Мутара. Так как касательная к асимптотической линии поверхности перпендикулярна к касательной её сферического изображения, то для асимптотических u, v поверхности (M) имеем:

$$\boldsymbol{M}_u \cdot \boldsymbol{n}_u = 0, \quad \boldsymbol{M}_v \cdot \boldsymbol{n}_v = 0,$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали. С другой стороны, касательные $\boldsymbol{M}_u$, $\boldsymbol{M}_v$ перпендикулярны и к нормали $\boldsymbol{n}$; следовательно, каждую из них можно представить в виде векторного произведения:

$$\boldsymbol{M}_u = \lambda \boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{M}_v = \mu \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}_v, \tag{a}$$

где λ, μ — скалярные множители пропорциональности.

Дифференцируя первое уравнение по v, второе по u и сравнивая вторые производные, получим:

$$\lambda_v (\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}) + \lambda (\boldsymbol{n}_{uv} \times \boldsymbol{n}) + \lambda (\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v) = \\ = \mu_u (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}_v) + \mu (\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v) + \mu (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}_{uv}), \tag{b}$$

откуда, умножая скалярно на $\boldsymbol{n}$ и отбрасывая все члены, содержащие множителем вектор $\boldsymbol{n}$ и тем самым перпендикулярные к нему, получим после сокращения на неравное нулю скалярное произведение трёх множителей $(\boldsymbol{n}_u \boldsymbol{n}_v \boldsymbol{n})$

$$\lambda = \mu.$$

Полагая

$$\xi = \boldsymbol{n} \sqrt{\lambda}, \tag{c}$$

мы будем иметь, как это легко проверить, формулы

$$\boldsymbol{M}_u = \xi_u \times \xi, \quad \boldsymbol{M}_v = \xi \times \xi_v. \tag{1}$$

Теперь дифференцирование и исключение $\boldsymbol{M}_{uv}$ даст нам по сокращении подобных членов

$$\xi_{uv} \times \xi = 0.$$

Следовательно,

$$\xi_{uv} = Q\xi. \tag{2}$$

Такое уравнение называется уравнением Мутара. Для него известно нижеследующее преобразование.

Пусть дано уравнение Мутара

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = Q\theta, \tag{3}$$

где Q — функция переменных u, v, и некоторое решение его R

$$\frac{\partial^2 R}{\partial u\, \partial v} = QR.$$

Если исключить отсюда функцию Q, то получим:

$$\theta \frac{\partial^2 R}{\partial u\, \partial v} - R\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial v}\begin{vmatrix} \theta & R \\ \theta_u & R_u \end{vmatrix} + \frac{\partial}{\partial u}\begin{vmatrix} \theta & R \\ \theta_v & R_v \end{vmatrix} = 0.$$

Значит, существует функция θ_1 такая, что

$$\frac{\partial}{\partial u}(R\theta_1) = \begin{vmatrix} \theta & R \\ \theta_u & R_u \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial v}(R\theta_1) = -\begin{vmatrix} \theta & R \\ \theta_v & R_v \end{vmatrix}, \tag{4}$$

или

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial u}(R\theta_1) = -\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\theta}{R}\right), \quad \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial v}(R\theta_1) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\theta}{R}\right) \tag{4'}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial v}(R\theta_1)\right\} + \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial u}(R\theta_1)\right\} = 0.$$

Выполняя дифференцирование, мы приведём это уравнение к виду уравнения Мутара для новой неизвестной функции θ_1 с новым коэффициентом Q_1 в правой части

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial u\, \partial v} = Q_1\theta_1, \tag{5a}$$

где

$$Q_1 = R\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v}\left(\frac{1}{R}\right). \tag{5b}$$

Таким образом, уравнение Мутара (3) преобразовано в уравнение Мутара (5a) с помощью какого-то заданного решения R первоначального уравнения (3). Каждому решению уравнения (3) соответствует по формулам (4), (4′) решение θ_1 уравнения (5a).

С точки зрения Мутара интерес его преобразования заключался в возможности по заданным решениям уравнения (3) находить решения нового уравнения (5a). Последующее развитие геометрии придало преобразованию Мутара совершенно неожиданное геометрическое значение, интерес которого намного превзошёл первоначальный замысел автора.

71. Построение конгруэнции W. Применим преобразование Мутара к трём координатам вектора ξ, удовлетворяющего уравнению Мутара (2). Мы получим три координаты нового вектора ξ_1, который удовлетворит преобразованному уравнению (5a) и по формулам вида (1) определит новую поверхность (M_1), отнесённую тоже к асимптотическим линиям u, v.

При интегрировании системы (1) войдут произвольные постоянные слагаемые, которые для радиуса-вектора M_1 составят произвольный постоянный вектор; прибавление его параллельно переносит поверхность (M_1). Покажем, что *выбор этого произвольного слагаемого позволит расположить поверхности (M) и (M_1) так, что они будут служить фокальными поверхностями конгруэнции лучей MM_1*, соединяющих соответствующие точки обеих поверхностей. Составим разность соответствующих уравнений (1), написанных для векторов M и M_1; мы получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}(M_1 - M) &= \xi_{1u} \times \xi_1 - \xi_u \times \xi, \\ \frac{\partial}{\partial v}(M_1 - M) &= \xi_1 \times \xi_{1v} - \xi \times \xi_v. \end{aligned} \tag{6}$$

С другой стороны, выполняя дифференцирование в уравнениях (4), мы можем переписать их в виде

$$R\frac{\partial}{\partial u}(\theta + \theta_1) = (\theta - \theta_1)\frac{\partial R}{\partial u}, \quad R\frac{\partial}{\partial v}(\theta_1 - \theta) = -(\theta + \theta_1)\frac{\partial R}{\partial v}. \tag{7}$$

Отсюда следует пропорциональность производной от суммы векторов $\frac{\partial}{\partial u}(\xi + \xi_1)$ и их разности $\xi - \xi_1$, производной от разности $\frac{\partial}{\partial v}(\xi - \xi_1)$ и их суммы $\xi + \xi_1$, т. е. равенство нулю векторных произведений

$$\frac{\partial}{\partial u}(\xi + \xi_1) \times (\xi - \xi_1) = 0, \quad (\xi + \xi_1) \times \frac{\partial}{\partial v}(\xi - \xi_1) = 0. \tag{8}$$

Вычитая их соответственно из уравнений (6), мы преобразуем эти уравнения к интегрируемому виду:

$$\frac{\partial}{\partial u}(M_1 - M) = \frac{\partial}{\partial u}(\xi_1 \times \xi), \quad \frac{\partial}{\partial v}(M_1 - M) = \frac{\partial}{\partial v}(\xi_1 \times \xi),$$

откуда при подходящем выборе постоянных интеграции получим:

$$M_1 - M = \xi_1 \times \xi. \tag{9}$$

Так как вектор

$$M_1 - M = \overrightarrow{MM_1}$$

соединяет соответствующие точки M, M_1 наших поверхностей, а векторное произведение $\xi \times \xi_1$ перпендикулярно к обоим множителям ξ, ξ_1, т. е. к нормалям и первой и второй поверхности, то прямая MM_1, согласно формуле (9) лежит в касательных плоскостях обеих поверхностей (M) и (M_1), т. е. является их общей касательной, а сами поверхности (M), (M_1) служат фокальными поверхностями конгруэнции (MM_1). *Эта конгруэнция есть конгруэнция W*, ибо та и другая поверхности отнесены к асимптотическим линиям u, v и, следовательно, асимптотические на фокальных поверхностях соответствуют.

Имеем теорему:

Если поверхность S, отнесённая к асимптотическим линиям, задана формулами (1), где вектор ξ удовлетворяет уравнению Мутара (2), то всякое решение этого уравнения преобразует по формулам Мутара каждую координату вектора ξ, а следовательно, и сам вектор в новый вектор ξ_1, который по формулам вида (1) определит вторую фокальную поверхность конгруэнции W, у которой первой фокальной поверхностью служит поверхность S.

Таким образом, формулы Мутара определяют конгруэнцию W по заданной её фокальной поверхности.

72. Обратная теорема. Имеет место и обратная теорема:

Всякая конгруэнция W может быть получена посредством преобразования Мутара.

Действительно, пусть (M) и (M_1) — две фокальные поверхности конгруэнции W, заданные по формулам (1) посредством векторов ξ и ξ_1, координаты которых являются решениями соответственно уравнений Мутара (2) и (5a). Нам надо показать, что вторая тройка координат получается преобразованием Мутара из первой.

Так как поверхности (M) и (M_1) служат фокальными поверхностями одной конгруэнции, то прямая MM_1, соединяющая пару соответствующих точек, должна касаться и той и другой поверхности, значит, будет перпендикулярна к обеим нормалям ξ, ξ_1 и, следовательно, параллельна их векторному произведению, т. е.

$$M_1 - M = m(\xi_1 \times \xi),$$

где m — множитель пропорциональности.

Дифференцируя это уравнение по u и по v и пользуясь для производных от разности радиусов-векторов $M_1 - M$ формулами (6), получим:

$$(\xi_{1u} \times \xi_1) - (\xi_u \times \xi) = m_u(\xi_1 \times \xi) + m(\xi_{1u} \times \xi) + m(\xi_1 \times \xi_u) \quad \text{(a)}$$

и такое же уравнение при дифференцировании по v.

Умножая скалярно на ξ или ξ_1, мы обратим в нуль все члены, содержащие в векторном произведении множитель ξ (в первом случае) или ξ_1 (во втором) и получим:

$$\begin{gathered}(\xi_{1u}\xi_1\xi) = m(\xi\xi_1\xi_u), \\ -(\xi_u\xi\xi_1) = m(\xi_{1u}\xi\xi_1).\end{gathered} \quad \text{(b)}$$

Теперь почленное умножение обоих уравнений, если иметь в виду перемену знаков при изменении порядка множителей, приведёт к равенству

$$(\xi\xi_1\xi_{1u})(\xi\xi_1\xi_u)(1 - m^2) = 0.$$

Если $1 - m^2 \neq 0$, то равен нулю один из двух первых множителей; если же равен нулю первый множитель, то в силу (b) равен и второй. Между тем из равенства его нулю следует

$$(\xi\xi_1\xi_u) = \xi_1 \cdot (\xi_u \times \xi) = \xi_1 \cdot M_u = 0,$$

а из таких же уравнений, полученных дифференцированием по v, имеем:

$$\xi_1 \cdot M_v = 0.$$

Следовательно, вектор нормали второй поверхности ξ_1 будет перпендикулярен к касательной плоскости поверхности (M), что, очевидно, невозможно. Значит, надо положить

$$m^2 = 1,$$

а так как изменение направления нормали ξ_1 меняет знак множителя m, то всегда можно считать

$$m = 1.$$

Теперь уравнение (a), если все члены перенести в правую часть, принимает вид:

$$(\xi_u \times \xi) - (\xi_u \times \xi_1) + (\xi_{1u} \times \xi) - (\xi_{1u} \times \xi_1) = 0,$$

откуда по вынесении за скобки ξ_u и ξ_{1u} получаем первое уравнение (8). Второе уравнение получается простой заменой u на v в уравнении (a). Между тем из равенства нулю векторного произведения следует параллельность множителей. Имеем равенства

$$\frac{\partial}{\partial u}(\xi + \xi_1) = \alpha(\xi - \xi_1), \quad \frac{\partial}{\partial v}(\xi - \xi_1) = \beta(\xi + \xi_1), \quad \text{(c)}$$

где α, β — подходящие множители пропорциональности.

Дифференцируя первое уравнение по v, второе по u, исключая первые производные от ξ, ξ_1 и пользуясь уравнениями Мутара для вторых производных, получим:

$$Q\xi + Q_1\xi_1 = \alpha_v(\xi - \xi_1) + \alpha\beta(\xi + \xi_1);$$
$$Q\xi - Q_1\xi_1 = \beta_u(\xi + \xi_1) + \alpha\beta(\xi - \xi_1);$$

откуда, сравнивая коэффициенты при векторах ξ и ξ_1, имеем:

$$\alpha_v = \beta_u = Q - \alpha\beta = \alpha\beta - Q_1.$$

Из первого уравнения следует, что существует такая функция R, что

$$\alpha = \frac{\partial \ln R}{\partial u}, \quad \beta = \frac{\partial \ln R}{\partial v},$$

а остальные дают:

$$\frac{\partial^2 \ln R}{\partial u\, \partial v} = Q - \frac{\partial \ln R}{\partial u}\frac{\partial \ln R}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 \ln R}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial \ln R}{\partial u}\frac{\partial \ln R}{\partial v} - Q_1.$$

Эти уравнения непосредственно переходят в уравнения Мутара (3) и (5b). Следовательно, R есть решение уравнения Мутара (2), и уравнение (5a) получается из уравнения (2) преобразованием посредством этого решения R. Уравнения (c) теперь переходят в уравнения (7), откуда следуют уравнения (4) и, значит, решение ξ_1 является преобразованием Мутара от решения ξ.

Таким образом, формулы Мутара решают задачу определения конгруэнции W по заданной её фокальной поверхности. Так как уравнение (2) в частных производных второго порядка имеет общий интеграл, зависящий от двух функций одного аргумента, то именно этот произвол и определяет многообразие конгруэнций W *с заданной первой фокальной поверхностью.*

Если переход от первой фокальной поверхности (M) конгруэнции W ко второй (M_1) назвать *асимптотическим* преобразованием поверхности (M), то можно сказать, что преобразование Мутара решает задачу асимптотического преобразования поверхности.

73. Конгруэнция W и бесконечно малое изгибание поверхности. Полученные формулы допускают неожиданное геометрическое истолкование. Рассмотрим поверхность $(\overline{M})$, соответствующую ортогональностью линейных элементов поверхности (M), которая определяется формулами (1). Условие

$$dM \cdot d\overline{M} = 0, \tag{a}$$

справедливое для всех перемещений на поверхности, имеет очевидные следствия

$$M_u \cdot \overline{M}_u = 0, \quad M_v \cdot \overline{M}_v = 0,$$

откуда, внося значения (1), будем иметь:

$$(\overline{M}_u \xi_u \xi) = 0, \ (\overline{M}_v \xi \xi_v) = 0,$$

а поскольку обращение в нуль скалярного произведения трёх множителей влечёт за собой их компланарность, то

$$\overline{M}_u = R(\xi_u + \alpha\xi), \quad \overline{M}_v = R'(\xi_v + \beta\xi). \tag{b}$$

Внося теперь эти выражения в уравнение (a), получим:

$$\{R(\xi_u + \alpha\xi)\, du + R'(\xi_v + \beta\xi)\, dv\} \cdot \{(\xi_u \times \xi)\, du + (\xi \times \xi_v)\, dv\} = 0$$

или, раскрывая фигурные скобки и опуская члены, где встречаются два одинаковых множителя (ибо при этом скалярное произведение трёх множителей равно нулю), получим:

$$R(\xi_u \xi \xi_v)\, du\, dv + R'(\xi_v \xi_u \xi)\, du\, dv = 0$$

или, поскольку

$$(\xi_u \xi \xi_v) = -(\xi_v \xi_u \xi),$$
$$R' = -R.$$

Вносим теперь это значение в уравнения (b), дифференцируем первое из них по v, второе по u и исключаем вторую производную $\overline{M}_{uv}$. Пользуясь уравнением (2) для второй производной ξ_{uv}, получим:

$$(\alpha R_v + RQ + R\alpha_v)\xi + R_v\xi_u + R\alpha\xi_v =$$
$$= -(R_u\beta + R\beta_u + RQ)\xi - R\beta\xi_u - R_u\xi_v,$$

а поскольку векторы ξ, ξ_u, ξ_v линейно независимы,

$$R\alpha = -R_u, \quad R\beta = -R_v, \quad (R\alpha)_v + (R\beta)_u + 2RQ = 0.$$

Исключая $R\alpha$, $R\beta$, видим, что функция R удовлетворяет тому же самому уравнению Мутара (2), что и координаты вектора ξ поверхности (M), а уравнения (b) принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial u}\overline{M} = -\begin{vmatrix} \xi & R \\ \xi_u & R_u \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial v}\overline{M} = \begin{vmatrix} \xi & R \\ \xi_v & R_v \end{vmatrix}.$$

Сравнение этих формул с уравнениями (4) показывает, что текущий радиус-вектор точки $\overline{M}$ поверхности, которая соответствует поверхности (M) ортогональностью линейных элементов, связан с вектором ξ_1, получаемым из вектора ξ преобразованием Мутара посредством решения R, простой формулой

$$\overline{M} = -R\xi_1.$$

Значит, радиус-вектор $\overline{M}$ параллелен нормали второй фокальной поверхности (M_1) конгруэнции (MM_1), построенной посредством решения R и, следовательно, перпендикулярен к лучу этой конгруэнции MM_1.

Если же вспомнить (§ 14), что поверхность (M'), получаемая бесконечно малым изгибанием из поверхности (M), определяется текущим радиусом-вектором

$$M' = M + \varepsilon\overline{M},$$

и, следовательно, вектор $\varepsilon\overline{M}$ есть вектор смещения точки M при бесконечно малом изгибании поверхности (M), то можно дать такое правило построения произвольной конгруэнции W:

Чтобы построить конгруэнцию W по заданной её фокальной поверхности (M), надо через каждую точку M этой поверхности в её касательной плоскости провести прямую, перпендикулярную к бесконечно малому смещению этой точки при произвольном бесконечно малом изгибании поверхности (M).

74. Пример. Конгруэнции W, связанные с поверхностями переноса. Рассмотрим конгруэнции W, определяемые уравнением Мутара

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = 0. \tag{a}$$

Общее решение его

$$\theta = f(u) + \varphi(v)$$

есть сумма функций, каждая от одного аргумента. Выбирая любую тройку значений θ, получаем вектор

$$\xi(u) + \eta(v)$$

как сумму двух векторов, где каждый вектор есть функция одного аргумента. Этот вектор по формулам (1) приводит к поверхности (M), определяемой уравнениями

$$M_u = -(\xi(u) + \eta(v)) \times \xi'(u),\quad M_v = (\xi(u) + \eta(v)) \times \eta'(v), \tag{b}$$

где штрихом обозначены производные от векторов по их аргументам.

Принимая $R = 1$ в качестве преобразующего решения уравнения (a), получим уравнения (7) для преобразованного решения θ_1 в виде системы

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial u} = -\frac{\partial\theta}{\partial u},\quad \frac{\partial\theta_1}{\partial v} = \frac{\partial\theta}{\partial v},$$

откуда при подходящем выборе постоянных интеграции преобразованный вектор от вектора $\xi(u) + \eta(v)$ будет

$$\eta(v) - \xi(u),$$

а преобразованная поверхность (M_1) определится по формуле (9) уравнением

$$M_1 = M + 2\eta(v) \times \xi(u). \tag{9'}$$

Средняя поверхность конгруэнции (M_0)

$$M_0 = \frac{M + M_1}{2} = M + \eta(v) \times \xi(u)$$

удовлетворяет в силу уравнений (b) условиям

$$(M_0)_u = -\xi(u) \times \xi'(u),\quad (M_0)_v = \eta(v) \times \eta'(v). \tag{c}$$

Значит, вектор M_0 равен сумме функции одного u и функции одного v, а поверхность (M_0) будет поверхностью переноса (Т. П. стр. 77). Поскольку, очевидно,

$$\xi(u) \cdot (M_0)_u = 0,\quad \xi(u) \cdot (M_0)_{uu} = 0,$$

то вектор $\xi(u)$ есть (не единичный) вектор бинормали линии u средней поверхности (M_0), вектор $\eta(v)$ — линии v, а луч конгруэнции MM_1, перпендикулярный в силу (9′) к обеим бинормалям, лежит на пересечении соприкасающихся плоскостей двух линий переноса поверхности (M_0), проходящих через точку M_0.

Обратно:

Прямые пересечения соприкасающихся плоскостей линий переноса произвольной поверхности переноса (M_0) образуют конгруэнцию W, для которой поверхность (M_0) служит средней поверхностью, и асимптотические линии фокальных поверхностей соответствуют линиям переноса.

Действительно, допустим, что за параметры u и v приняты длины дуг линий переноса. Из уравнений (c) тогда следует

$$\xi(u) = \beta_1\sqrt{r_1},\quad \eta(v) = \beta_2\sqrt{-r_2},$$

где β_1 и β_2 — единичные векторы бинормалей, а $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_2}$ — кручение линии u и линии v. В самом деле, дифференцируя, например, первое из уравнений по длине дуги u и пользуясь формулами Френе, получим:

$$\xi'(u) = \frac{\nu_1}{r_1}\sqrt{r_1} + \beta_1\frac{d\sqrt{r_1}}{du},$$

а поскольку

$$\beta_1 \times \nu_1 = -\tau_1,$$

то

$$\xi(u) \times \xi'(u) = \beta_1\sqrt{r_1} \times \left(\frac{\nu_1}{\sqrt{r_1}} + \beta_1\frac{d\sqrt{r_1}}{du}\right) = -\tau_1,$$

что удовлетворяет уравнению (c), ибо производная радиуса-вектора M по длине дуги u равна единичному вектору касательной τ_1.

Таким образом, если поверхность переноса (M_0) дана, то векторы $\xi(u)$ и $\eta(v)$ определяются немедленно, а, следовательно, определяются и фокальные поверхности (M), (M_1), из которых каждая служит асимптотическим преобразованием другой. Для действительности фокальных поверхностей необходимо, чтобы радиусы кручения r_1 и r_2 были противоположных знаков.

II. ТЕОРЕМА ПЕРЕМЕСТИТЕЛЬНОСТИ

75. Теорема переместительности преобразований Мутара. Если решение R_1 преобразует уравнение (2) § 70 в уравнение (5a) § 70, то каждое решение θ уравнения (2) преобразуется в решение θ_1 уравнения (5a), в том числе решение R_2 преобразуется в какое-то решение R_{21} уравнения (5a).

По формулам (4) § 70 имеем вполне интегрируемую систему:

$$\frac{\partial}{\partial u}(R_1R_{21}) = R_2R_{1u} - R_1R_{2u}, \quad \frac{\partial}{\partial v}(R_1R_{21}) = R_1R_{2v} - R_2R_{1v}, \tag{10}$$

определяющую преобразованное решение R_{21}, которое удовлетворяет уравнению Мутара (5a) и само преобразует его в новое уравнение Мутара

$$\frac{\partial^2\theta_{21}}{\partial u\,\partial v} = Q_{21}\theta_{21};$$

коэффициент уравнения Q_{21} определяется по формуле (5b):

$$Q_{21} = R_{21}\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{1}{R_{21}}\right), \tag{a}$$

или

$$Q_{21} = \frac{\nu}{R_1}\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{R_1}{\nu}\right), \tag{a'}$$

если ввести новую функцию $\nu = R_1R_{21}$. Эта функция ν, очевидно, служит решением системы (10):

$$\frac{\partial\nu}{\partial u} = R_2R_{1u} - R_1R_{2u}, \quad \frac{\partial\nu}{\partial v} = R_1R_{2v} - R_2R_{1v}. \tag{10'}$$

Пользуясь уравнениями (10′) для производных от ν и уравнением Мутара (2) для R_1, мы преобразуем формулу (a′) к виду:

$$Q_{21} = Q + \nu\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{1}{\nu}\right) + \frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial R_1}{\partial v}\frac{\partial R_2}{\partial u} - \frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial R_2}{\partial v}\right). \tag{11}$$

Поменяем теперь местами R_1 и R_2, т. е. преобразуем сначала уравнение (2) посредством его решения R_2, а затем полученное уравнение посредством решения R_{12}, которое получается из решения R_1 преобразованием Мутара с помощью решения R_2. Система (10′) не изменится, если поменять R_1 и R_2 и одновременно изменить знак ν. Следовательно, в наших обозначениях

$$\nu = R_1R_{21} \text{ и } \nu = -R_2R_{12}. \tag{12}$$

При этом условии формула (11) даст значение Q_{12}, в точности равное Q_{21}

$$Q_{12} = Q_{21}. \tag{13}$$

Таким образом, получаем теорему переместительности для преобразований Мутара. Уравнения (10) определяют $\nu = R_1R_{21}$ с произвольным постоянным; каждому решению R_{21} соответствует по формуле (12) решение R_{12}, так что имеет место теорема переместительности:

Для двух заданных решений R_1 и R_2 уравнения Мутара Q существует ∞^1 уравнений Мутара, получаемых подходящими преобразованиями Мутара как из уравнения Q_1, так и из уравнения Q_2, полученных из уравнения Q преобразованиями Мутара посредством решений соответственно R_1 и R_2.

Этой теореме можно придать более сильную форму, именно: можно доказать, что получаемые решения θ_{12} и θ_{21} не только удовлетворяют одному и тому же уравнению Мутара, но и совпадают между собой.

Действительно, рассмотрим определённое решение θ первоначального уравнения (2) и подвергнем его последовательно преобразованиям посредством решений сначала R_1, потом R_{21} или сначала R_2, потом R_{12}. Допустим, что существует общее решение

$$\theta_{12} = \theta_{21}.$$

Оно должно удовлетворять системе уравнений, получаемых последовательным применением формул (7) § 71 для θ, θ_1, R_1; θ, θ_2, R_2; θ_1, θ_{12}, R_{21} и θ_2, θ_{21}, R_{12}:

$$\frac{\partial(\theta_1+\theta)}{\partial u} = (\theta - \theta_1)\frac{\partial \ln R_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial(\theta_1-\theta)}{\partial v} = -(\theta+\theta_1)\frac{\partial \ln R_1}{\partial v}, \tag{α}$$

$$\frac{\partial(\theta_2+\theta)}{\partial u} = (\theta - \theta_2)\frac{\partial \ln R_2}{\partial u}, \quad \frac{\partial(\theta_2-\theta)}{\partial v} = -(\theta+\theta_2)\frac{\partial \ln R_2}{\partial v}, \tag{β}$$

$$\frac{\partial(\theta_{12}+\theta_1)}{\partial u} = (\theta_1 - \theta_{12})\frac{\partial \ln R_{21}}{\partial u}, \quad \frac{\partial(\theta_{12}-\theta_1)}{\partial v} = -(\theta_1+\theta_{12})\frac{\partial \ln R_{21}}{\partial v}, \tag{γ}$$

$$\frac{\partial(\theta_{21}+\theta_2)}{\partial u} = (\theta_2 - \theta_{21})\frac{\partial \ln R_{12}}{\partial u}, \quad \frac{\partial(\theta_{21}-\theta_2)}{\partial v} = -(\theta_2+\theta_{21})\frac{\partial \ln R_{12}}{\partial v}. \tag{δ}$$

Вычитая в левом столбце из уравнения (α) уравнение (β), а из уравнения (γ) уравнение (δ) и исключая производные от $\theta_1 - \theta_2$, получим, если $\theta_{12} = \theta_{21}$:

$$\theta\frac{\partial}{\partial u}\ln\frac{R_1}{R_2} + \theta_2\frac{\partial \ln R_2}{\partial u} - \theta_1\frac{\partial \ln R_1}{\partial u} =$$
$$= \theta_{12}\frac{\partial}{\partial u}\ln\frac{R_{12}}{R_{21}} + \theta_1\frac{\partial \ln R_{21}}{\partial u} - \theta_2\frac{\partial \ln R_{12}}{\partial u},$$

а поскольку в силу (12)

$$\frac{\partial \ln(R_1R_{21})}{\partial u} = \frac{\partial \ln(R_2R_{12})}{\partial u},$$

то будем иметь

$$\left\{\theta_{12}-\theta-\frac{\theta_2-\theta_1}{\nu}R_1R_2\right\}\frac{\partial}{\partial u}\ln\frac{R_1}{R_2}=0$$

и аналогично для правого столбца уравнений (α — δ)

$$\left\{\theta_{12}-\theta-\frac{\theta_2-\theta_1}{\nu}R_1R_2\right\}\frac{\partial}{\partial v}\ln\frac{R_1}{R_2}=0.$$

Отсюда, поскольку R_1 и R_2 предполагаются линейно независимыми, получим:

$$\theta_{12}-\theta=\frac{R_1R_2}{\nu}(\theta_2-\theta_1). \tag{14}$$

Дифференцируя это уравнение по u и по v и пользуясь уравнениями (10), (α), (β) и самим уравнением (14), мы убедимся, что найденное значение θ_{12} удовлетворяет системе (γ), (δ). Поскольку функция ν содержит произвольное постоянное, имеем теорему:

Для заданных двух преобразований θ_1 и θ_2 одного решения θ уравнения Мутара существует ∞^1 (так как ν содержит произвольное постоянное) решений $\theta_{12}=\theta_{21}$, получаемых подходящими преобразованиями Мутара, как из решения θ_1, так и из решения θ_2.

76. Пучок преобразований Мутара. Каждое решение R уравнения Мутара (3) § 70 определяет некоторое преобразование уравнения и всех его решений. Если дано два решения R_1 и R_2, то в силу однородности уравнения (3) линейная комбинация с постоянными коэффициентами m, n

$$R^*=mR_1+nR_2 \tag{15}$$

является тоже решением этого уравнения и при произвольных параметрах m, n определяет совокупность ∞^1 преобразований Мутара, которую естественно назвать *пучком преобразований*.

Если обозначить буквами θ_1, θ_2 решения, полученные преобразованием θ посредством решения R_1 и R_2, то в силу линейной однородности формул (4) § 70 относительно R для решения θ^*, полученного из решения θ преобразованием посредством решения R^* из пучка (15), получим вплоть до постоянных слагаемых, которые мы опустили для решения θ^*, преобразованного от θ, формулу:

$$R^*\theta^*=mR_1\theta_1+nR_2\theta_2. \tag{16}$$

Эта формула получает особое значение в теории асимптотических преобразований.

Напомним, что асимптотическое преобразование осуществляется посредством конгруэнции W и состоит в переходе от одной фокальной поверхности её к другой.

Выписывая формулу (9) § 71 для произвольного преобразования пучка (16), получим

$$M^*=M+(\xi^*\times\xi)=M+\frac{1}{mR_1+nR_2}(mR_1\xi_1+nR_2\xi_2)\times\xi,$$

или

$$M^*=\frac{mR_1M+mR_1(\xi_1\times\xi)+nR_2M+nR_2(\xi_2\times\xi)}{mR_1+nR_2},$$

или, в силу того же уравнения (9) § 71,

$$M^*=\frac{mR_1M_1+nR_2M_2}{mR_1+nR_2}.$$

Отсюда вытекает заключение: *при различных значениях постоянного отношения $m:n$ точки M^* будут лежать на одной прямой*, которая лежит в касательной плоскости поверхности (M), соединяя точки M_1 и M_2 её двух преобразований. Любая прямая MM^* (при различных значениях $m:n$) при изменении u, v описывает конгруэнцию W, касаясь в своих фокусах M и M^* поверхностей (M) и (M^*). Мы получаем пучок конгруэнций с общей фокальной поверхностью (M), соответствующие лучи которых образуют пучок с центром в первом фокусе M, с общей фокальной плоскостью MM_1M_2 и со вторыми фокусами M^* на прямой M_1M_2. Вторые фокальные плоскости сами образуют пучок плоскостей. Действительно, формула (16), справедливая для векторов нормали в точках M^* вторых фокальных поверхностей

$$R^*\xi^*=mR_1\xi_1+nR_2\xi_2,$$

показывает, что они все перпендикулярны к вектору $\xi_1\times\xi_2$, а так как каждая касательная плоскость проходит через луч MM^*, то следовательно, все они имеют общую точку M и общую прямую (ось пучка), проходящую через точку M параллельно вектору $\xi_1\times\xi_2$.

Мы ещё раз найдём эту ось, обращаясь к истолкованию теоремы переместительности преобразований Мутара.

77. Теорема переместительности для асимптотических преобразований. Пусть

$$M_1=M+(\xi_1\times\xi),\quad M_2=M+(\xi_2\times\xi) \tag{17}$$

— два фокуса, описывающие поверхности (M_1), (M_2), которые соответствуют преобразованиям Мутара с помощью решений R_1 и R_2. Теорема переместительности преобразований Мутара позволяет построить для решений ξ_1, ξ_2 общее преобразованное решение

$$\xi_{12}=\xi_{21}=\xi+\frac{R_1R_2}{\nu}(\xi_2-\xi_1).$$

Оно получается подходящими преобразованиями Мутара и из ξ и из ξ_2.

Это решение нового уравнения Мутара определяет новую поверхность (и даже семейство поверхностей, если иметь в виду произвольное постоянное, содержащееся в функции ν); её точка $M_{12} \equiv M_{21}$, соответствующая точкам M, M_1, M_2, определяется формулой

$$\boldsymbol{M}_{12} = \boldsymbol{M}_1 + (\boldsymbol{\xi}_{12} \times \boldsymbol{\xi}_1)$$

или после замены $\boldsymbol{M}_1$ по формуле (17)

$$\boldsymbol{M}_{12} = \boldsymbol{M} + (\boldsymbol{\xi}_1 \times \boldsymbol{\xi}) + (\boldsymbol{\xi}_{12} \times \boldsymbol{\xi}_1),$$

а поскольку по формуле (14)

$$\boldsymbol{\xi}_{12} = \boldsymbol{\xi} + \frac{R_1 R_2}{\nu}(\boldsymbol{\xi}_2 - \boldsymbol{\xi}_1), \tag{14'}$$

то после подстановки и приведения подобных членов получим:

$$\boldsymbol{M}_{12} = \boldsymbol{M} + \frac{R_1 R_2}{\nu}(\boldsymbol{\xi}_2 \times \boldsymbol{\xi}_1). \tag{18}$$

Эта формула допускает одновременную замену R_1 на R_2, ξ_1, ξ_2 на ξ_2, ξ_1 и ν на $-\nu$. Следовательно, одна и та же поверхность (M_{12}) связана и с поверхностью (M_1) и с поверхностью (M_2) конгруэнциями W, для которых (M_1), (M_{12}) или (M_2), (M_{12}) служат фокальными поверхностями.

Четыре поверхности (M_2), (M), (M_1), (M_{12}) образуют цикл, где каждая последующая получается асимптотическим преобразованием из предыдущей. Иначе говоря, поверхность (M_{12}) может быть получена двумя способами произведением двух асимптотических преобразований из поверхности M через поверхность (M_1) или через (M_2).

Поскольку ν получается из вполне интегрируемой системы (10') § 75 с произвольным постоянным слагаемым, то этих четвёртых поверхностей (M_{12}), получаемых асимптотическим преобразованием и из (M_1) и из (M_2) — бесконечное множество. Формула (18) показывает (ν входит линейно), что соответствующие точки M_{12} всех этих поверхностей (M_{12}) располагаются на одной прямой MM^*, которая проходит через точку M поверхности (M) параллельно вектору $\boldsymbol{\xi}_1 \times \boldsymbol{\xi}_2$.

Касательные плоскости всех поверхностей (M_{12}) проходят через точки M_1, M_2 поверхностей (M_1), (M_2), с которыми M_{12} связана асимптотическими преобразованиями. Таким образом, имеем теорему переместительности асимптотических преобразований:

Если дана поверхность (M) и два её асимптотических преобразования (M_1) и (M_2), то одними квадратурами (определение ν) можно найти однопараметрическое семейство поверхностей (M_{12}), связанных асимптотическими преобразованиями и с поверхностью (M_1) и с поверхностью (M_2). Соответствующие точки их лежат на прямой MM^*, а соответствующие касательные плоскости проходят через прямую M_1M_2.

Если в четвёрке поверхностей (M), (M_1), (M_{12}), (M_2) принять за исходную поверхность (M_1), то первыми асимптотическими преобразованиями её будут (M) и (M_{12}). Строя к ним четвёртую поверхность по только что доказанной теореме переместительности, мы получим, кроме M_2 и, конечно, M_1, ещё однопараметрическое семейство поверхностей M_2^*, соответствующие точки которых расположатся на прямой M_1M_2, соединяющей точки M_1 и M_2 поверхностей (M_1), (M_2), а касательные плоскости образуют пучок с осью MM_{12}.

Таким образом, на двух прямых MM^* и M_1M_2 располагаются соответствующие точки двух однопараметрических семейств поверхностей (S) и (Σ). Любые две поверхности S и Σ связаны конгруэнцией W, фокальными поверхностями которой они служат. Любые две пары поверхностей S_1, S_2 и Σ_1 и Σ_2 образуют четвёрку поверхностей из теоремы переместительности, которые в точности повторяют соотношения, связывающие поверхности (M), (M_{12}), (M_1), (M_2). Эта четвёрка поверхностей образует *конфигурацию Бианки*.

Конгруэнции, описанные прямыми MM^* и M_1M_2, обладают замечательными свойствами. К ним присоединено два однопараметрических семейства поверхностей (S) и (Σ). Поверхности (S) пересекаются лучом MM^* так, что касательные плоскости, проведённые к ним в точках пересечения, проходят через соответствующий луч M_1M_2, и, наоборот, пучок плоскостей с осью MM^* касается поверхностей (Σ) в точках их пересечений с лучом M_1M_2. Такая совокупность двух конгруэнций называется *расслояемой парой*.

78. Теорема переместительности для конгруэнций B. Мы видели, что конгруэнции W с равной кривизной фокальных поверхностей в соответствующих точках (конгруэнции B) обладают фокальными поверхностями особого класса (поверхности B), именно: кривизна их в параметрах асимптотических линий u, v имеет вид

$$K = -\frac{1}{(U+V)^2}, \tag{19}$$

где $U = f(u)$, $V = F(v)$. Обратно, каждая поверхность B служит фокальной поверхностью двупараметрического семейства конгруэнций B.

Так как вторая фокальная поверхность такой конгруэнции — снова поверхность B с той же самой кривизной, то построение конгруэнции B по заданной фокальной поверхности можно рассматривать как метод преобразования поверхностей B. Выполнение этого преобразования, т. е. построение конгруэнции B по заданной фокальной поверхности, зависит, как мы видели, при заданной постоянной C в формуле (49) § 47, от интегрирования уравнения (55) § 48, которое приводится к уравнению Рикатти.

Теорема переместительности асимптотических преобразований (§ 77) принимает для поверхностей B особый вид. Если (M_1) и (M_2) — две поверхности B, полученные преобразованием (54a), (54b) § 48 из (M)

(поверхности B) с различными значениями C_1 и C_2 постоянной C, то, применяя теорему переместительности § 77, мы получим однопараметрическое семейство поверхностей (M_{12}), которые могут быть получены асимптотическим преобразованием и из (M_1) и из (M_2), т. е. связаны с ними конгруэнциями W. Однако эти конгруэнции, будучи конгруэнциями W, не будут, вообще говоря, конгруэнциями B, и поверхности (M_{12}) не будут поверхностями B с кривизной вида (19).

Замечательно, что *среди всего этого однопараметрического семейства поверхностей* (M_{12}) *найдётся*, если не считать исходную поверхность (M), *только одна поверхность* (M_{12}), *которая связана с поверхностями* (M_1) *и* (M_2) *преобразованиями* B и, следовательно, имеет ту же кривизну (19). Она получается из поверхности (M_1) преобразованием B с постоянной C_2, а из поверхности (M_2) таким же преобразованием с постоянной C_1. Следовательно, фокальный угол конгруэнции (MM_1), определяемый формулой (49) § 47

$$\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{\frac{U-C}{V+C}}$$

с постоянной $C=C_1$, должен быть равен фокальному углу конгруэнции (M_2M_{12}) и также равны фокальные углы конгруэнций (MM_2) и (M_1M_{12}). Обращаясь к доказательству теоремы, мы заметим (§ 70), что вектор ξ параллелен нормали n поверхности (M)

$$\xi=n\sqrt{\lambda}$$

и модуль его $\sqrt{\lambda}$ просто связан с кривизной поверхности (M), именно (Т. П. стр. 82): кривизна поверхности равна

$$K=-\frac{1}{\lambda^2}. \tag{19'}$$

Следовательно,

$$\lambda=U+V.$$

Обращаясь к формуле (17), мы должны теперь положить

$$\xi^2=\xi_1^2=\xi_2^2=\lambda,\quad \xi\cdot\xi_1=\lambda\cos 2\varphi_1,\quad \xi\cdot\xi_2=\lambda\cos 2\varphi_2, \tag{20a}$$

ибо поверхности (M), (M_1), (M_2) суть поверхности B с одной и той же кривизной вида (19'); $2\varphi_1$ и $2\varphi_2$ суть углы фокальных плоскостей конгруэнций (MM_1) и (MM_2).

Кроме того, мы потребуем, чтобы поверхность (M_{12}) была тоже поверхностью B с той же кривизной, а конгруэнции (M_1M_{12}), (M_2M_{12}) имели те же углы между фокальными плоскостями, что и конгруэнции (MM_2), (MM_1):

$$\xi_{12}^2=\lambda,\quad \xi_1\cdot\xi_{12}=\lambda\cos 2\varphi_2,\quad \xi_2\cdot\xi_{12}=\lambda\cos 2\varphi_1. \tag{20b}$$

Умножая теперь скалярно уравнение (14') почленно на вектор ξ_1, получим:

$$\xi_1\cdot\xi_{12}=\xi\cdot\xi_1+\frac{R_1R_2}{\nu}(\xi_1\cdot\xi_2-\xi_1^2),$$

откуда по формулам (20a), (20b)

$$\begin{gathered}\lambda\cos 2\varphi_2=\lambda\cos 2\varphi_1+\frac{R_1R_2}{\nu}(\xi_1\cdot\xi_2-\lambda)\\ \text{и}\\ \nu=R_1R_2\frac{\xi_1\cdot\xi_2-\lambda}{\lambda(\cos 2\varphi_2-\cos 2\varphi_1)}.\end{gathered} \tag{a}$$

Воспользуемся трёхгранником $\{MI_1I_2I_3\}$, присоединённым к поверхности (см. формулы § 47). Тогда по формуле (54b) § 48 и (20) будем иметь:

$$\begin{aligned}\xi_1&=\sqrt{\lambda}\{I_3\cos 2\varphi_1-\sin 2\varphi_1(I_2\cos\psi_1-I_1\sin\psi_1)\},\\ \xi_2&=\sqrt{\lambda}\{I_3\cos 2\varphi_2-\sin 2\varphi_2(I_2\cos\psi_2-I_1\sin\psi_2)\}.\end{aligned}$$

Вносим эти выражения во вторую формулу (a), получим:

$$\nu=R_1R_2\frac{\cos 2\varphi_1\cos 2\varphi_2-1+\sin 2\varphi_1\sin 2\varphi_2\cos(\psi_1-\psi_2)}{\cos 2\varphi_2-\cos 2\varphi_1}. \tag{21}$$

Если поверхность (M_{12}) существует, то формулами (18), (21) она определена однозначно. Для доказательства существования поверхности надо показать, что выражение (21) является решением системы (10'), ибо только на этом основывались формулы преобразования (14), следовательно, и (18).

Это доказывается простой проверкой. Обращаемся к формулам (7) § 71, которые устанавливают связь между преобразующим решением R и парой решений θ, θ_1, преобразуемым и результатом преобразования. Вносим сюда вместо θ, θ_1 векторы ξ, ξ_1, ибо линейное однородное соотношение, справедливое для каждой координаты вектора, справедливо и для вектора. Поскольку $\xi=\sqrt{\lambda}\,I_3$, имеем:

$$\begin{aligned}\xi+\xi_1&=2\sqrt{\lambda}\cos\varphi_1\{I_3\cos\varphi_1-\sin\varphi_1(I_2\cos\psi_1-I_1\sin\psi_1)\},\\ \xi-\xi_1&=2\sqrt{\lambda}\sin\varphi_1\{I_3\sin\varphi_1+\cos\varphi_1(I_2\cos\psi_1-I_1\sin\psi_1)\}.\end{aligned} \tag{b}$$

С другой стороны, полагая линейный элемент изображения поверхности (M) на сфере посредством параллельности нормалей равным:

$$ds'^2=E'\,du^2+2\sqrt{E'G'}\cos\theta\,du\,dv+G'\,dv^2,$$

получим согласно формулам (51) § 47:

$$\begin{aligned}\bar\omega_1^3\sin\frac{\theta}{2}+\bar\omega_2^3\cos\frac{\theta}{2}&=-\sqrt{E'}\sin\theta\,du,\\ \bar\omega_1^3\sin\frac{\theta}{2}-\bar\omega_2^3\cos\frac{\theta}{2}&=-\sqrt{G'}\sin\theta\,dv.\end{aligned}$$

Внося теперь выражения (b) в уравнения

$$\frac{\partial \ln R_1}{\partial u}(\xi-\xi_1)=\frac{\partial}{\partial u}(\xi+\xi_1),\quad \frac{\partial \ln R_1}{\partial v}(\xi+\xi_1)=\frac{\partial}{\partial v}(\xi-\xi_1)$$

и отбирая, например, коэффициенты при I_3, получим:

$$2\sqrt{\lambda}\sin^2\varphi_1\frac{\partial \ln R_1}{\partial u}=\sqrt{\lambda}\cos^2\varphi_1\frac{\partial \ln\lambda}{\partial u}-2\sin 2\varphi_1\sqrt{\lambda}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}-$$
$$-\sqrt{E'}\sqrt{\lambda}\sin\varphi_1\cos\varphi_1\sin\left(\varphi_1+\frac{\theta}{2}\right)$$

или, используя уравнение (46′) § 47:

$$\frac{\partial \ln R_1}{\partial u}=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\varphi_1\frac{\partial\ln\lambda}{\partial u}-\sqrt{E'}\operatorname{ctg}\varphi_1\sin\left(\varphi_1+\frac{\theta}{2}\right),$$
$$\frac{\partial \ln R_1}{\partial v}=-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\varphi_1\frac{\partial\ln\lambda}{\partial v}-\sqrt{G'}\operatorname{tg}\varphi_1\sin\left(\varphi_1-\frac{\theta}{2}\right)$$

и аналогично с заменой указателя *1* на указатель *2* для производных от R_2.

Эти уравнения и формулы (46) § 46 и (55) § 48, которые можно написать теперь в виде

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\varphi_1\frac{\partial\ln\lambda}{\partial u},\quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}=-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi_1\frac{\partial\ln\lambda}{\partial v},$$
$$\frac{\partial(\psi_1-\psi_2)}{\partial u}=\sqrt{E'}\left\{\operatorname{tg}\varphi_1\cos\left(\psi_1+\frac{\theta}{2}\right)-\operatorname{tg}\varphi_2\cos\left(\psi_2+\frac{\theta}{2}\right)\right\},$$
$$\frac{\partial(\psi_1-\psi_2)}{\partial v}=-\sqrt{G'}\left\{\operatorname{ctg}\varphi_1\cos\left(\psi_1+\frac{\theta}{2}\right)-\operatorname{ctg}\varphi_2\cos\left(\psi_2+\frac{\theta}{2}\right)\right\}$$

позволяют без больших сложностей провести проверку, которую мы предоставляем читателю.

Таким образом, определение поверхности (M_{12}) не требует даже квадратур. Если получены все первые преобразования поверхности B, то получение вторых преобразований и всех следующих совершается посредством дифференцирований и алгебраических преобразований.

Поверхности B содержат в себе, как специальный случай, поверхности, у которых гауссова кривизна вдоль асимптотических одного семейства постоянна (если одна из функций U или V становится постоянной) и поверхности постоянной отрицательной кривизны (если обе функции U и V — постоянные). Следовательно, на них распространяются все теоремы о преобразовании поверхностей B.

79. Литературные указания. Преобразование Мутара опубликовано им в статье «Sur la construction des équations de la forme

$$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\lambda(x, y),$$

qui admettent une intégrale général explicite». *J. Ec. Pol.* **45**, 1, 1878 г. Десятью годами позднее Лельёвр дал формулы (1), которые сводят определение поверхности к отысканию вектора ξ, т. е. трёх решений уравнения Мутара: L e l i e u v r e, Sur les lignes asymptotiques et leur représentation sphérique. *Bull. Sc. Math.* **12**, 126, 1888 г.

Гишар [3] первый использует преобразование Мутара для определения конгруэнции W. Ему же принадлежит обратная теорема: если две тройки решений двух различных уравнений Мутара определяют две поверхности так, что прямые, соединяющие пары соответствующих точек, касаются обеих поверхностей (и, следовательно, описывают конгруэнцию W), то каждое из этих уравнений Мутара может быть получено из другого уравнения подходящим преобразованием Мутара, которое вместе с тем переведёт первую тройку решений (первого уравнения) во вторую (второго уравнения). Бианки [5] широко использовал формулы Гишара. Ему принадлежит установление связи этого построения с бесконечно малым изгибанием: каждая из фокальных поверхностей допускает бесконечно малое изгибание, при котором её точки перемещаются в направлении, перпендикулярном к лучу конгруэнции. Сама теорема принадлежит Рибокуру, который определял конгруэнцию W как совокупность прямых, которые касаются поверхности и перпендикулярны к направлению смещения точки касания при бесконечно малом ее изгибании.

К § 74. Пример конгруэнций W, связанных с поверхностями переноса, дан Дарбу (Leçons sur la théorie des surfaces, 3, 372).

К § 76. Понятие пучка преобразований Мутара и пучка асимптотических преобразований (пучка конгруэнций W) принадлежит Торторичи [1]. Теорема переместительности была доказана Бианки [3] сначала для преобразований поверхностей постоянной отрицательной кривизны посредством нормальных псевдосферических конгруэнций (дополнительные преобразования). Ещё раньше Софус Ли [1] заметил, что последовательное применение дополнительных преобразований требует только дифференцирований и алгебраических преобразований, если известны все первые преобразования. Затем теорема переместительности много раз распространялась на новые объекты самим Бианки и другими авторами.

Дарбу [2] показал, что косой четырёхугольник с вершинами в четырёх соответствующих точках четырёх поверхностей постоянной отрицательной кривизны, участвующих в построении теоремы переместительности, — единственный, который может деформироваться, сохраняя неизменными величины своих плоских и двугранных углов.

К § 78. Теорема переместительности для преобразований поверхностей B установлена Бианки (см. также Торторичи [1]) и позволяет получить без квадратур все преобразования поверхностей B, если известны преобразования первого порядка. А. Ф. Маслов [1], [2] показал, что, принимая ось z за выродившуюся начальную поверхность B, можно построить все её первые преобразования; значит, все остальные получаются без квадратур.

ГЛАВА ПЯТАЯ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

I. КАНОНИЧЕСКИЙ ТЕТРАЭДР ПОВЕРХНОСТИ

80. Аналитические точки и действия над ними. Теория асимптотических преобразований поверхности (преобразований посредством конгруэнций W) переносится и в проективное пространство, приводя здесь к новым задачам и новым замечательным классам конгруэнций.

Совокупность четырёх однородных координат точки M называется *аналитической* точкой M. Аналитические точки надо рассматривать как векторы с четырьмя компонентами (в смысле абстрактной алгебры). Они допускают, следовательно, линейные операции: сложение, вычитание, умножение на скаляр.

Умножение вектора на скаляр не меняет геометрической точки и носит название *нормирования* аналитической точки. Линейная комбинация двух или трёх аналитических точек

$$M = x^0 A_0 + x^1 A_1, \qquad M = x^0 A_0 + x^1 A_1 + x^2 A_2$$

определяет геометрическую точку прямой $A_0 A_1$ или плоскости $A_0 A_1 A_2$. Всякая точка пространства может быть представлена линейной комбинацией четырёх независимых точек (не лежащих в одной плоскости)

$$M = x^i A_i, \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Скалярные коэффициенты x^i называются координатами точки относительно координатного тетраэдра $\{A_i\}$.

Кроме этих действий, мы введём внешнее произведение точек по Грассману. В отличие от внешнего произведения дифференциальных форм мы будем обозначать его круглыми скобками. Оно подчиняется тем же законам алгебраических действий, как и внешнее произведение форм.

Внешнее произведение двух точек

$$(A_0 A_1) = \left\| \begin{matrix} A_0^0 & A_0^1 & A_0^2 & A_0^3 \\ A_1^0 & A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 \end{matrix} \right\|$$

есть совокупность (вектор с шестью компонентами) шести линейно независимых определителей второго порядка матрицы, составленной из координат A_0^k, A_1^k аналитических точек A_0, A_1. Так как эти определители являются однородными проективными координатами (геометрической) прямой $A_0 A_1$, то это внешнее произведение называется *аналитической прямой*.

Внешнее произведение трёх точек

$$(A_0 A_1 A_2) = \left\| \begin{matrix} A_0^0 & A_0^1 & A_0^2 & A_0^3 \\ A_1^0 & A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 \\ A_2^0 & A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 \end{matrix} \right\|$$

есть совокупность четырёх определителей третьего порядка матрицы координат точек A_i. Так как они являются тангенциальными координатами плоскости $A_0 A_1 A_2$, то это произведение называется *аналитической плоскостью*.

Внешнее произведение четырёх точек равно определителю из 16 координат

$$(A_0 A_1 A_2 A_3) = \begin{vmatrix} A_0^0 & A_0^1 & A_0^2 & A_0^3 \\ A_1^0 & A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 \\ A_2^0 & A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 \\ A_3^0 & A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \end{vmatrix}.$$

Если, сохраняя координаты x^i, изменить координатный тетраэдр $\{A_i\}$, то всякая точка M пространства изменит своё положение. Такое преобразование пространства называется *проективным преобразованием*. Таким образом, проективное преобразование вполне определяется тем тетраэдром $\{\bar{A}_i\}$, в который оно переводит начальный тетраэдр $\{A_i\}$.

Проективной геометрией называется геометрия, теоремы которой инвариантны относительно группы проективных преобразований. Из сказанного выше следует, что все результаты, которые выражены в проективных координатах точек, прямых или плоскостей и не зависят от выбора координатного тетраэдра, принадлежат проективной геометрии, ибо инвариантны относительно любого проективного преобразования.

Если все координаты точки M заданы функциями параметра u, то мы будем говорить, что аналитическая точка M задана функцией от переменного u. При изменении переменного u геометрическая точка описывает линию (при этом предполагается, что координаты аналитической точки и их производные непрерывны в интервале изменения переменного u; пропорциональное изменение координат аналитической точки исключается). Следовательно,

$$M = M(u)$$

есть уравнение линии в проективном пространстве.

Производной от аналитической точки $M(u)$ называется предел отношения

$$\frac{dM}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{M(u+\Delta u) - M(u)}{\Delta u};$$

координаты производной равны производным от одноимённых координат точки $M(u)$.

Так как точка

$$\frac{M(u+\Delta u) - M(u)}{\Delta u}$$

лежит на прямой, соединяющей точки $M(u)$ и $M(u+\Delta u)$, то вместе с точкой $M(u)$ она определяет секущую. При переходе к пределу $\Delta u \to 0$ секущая обращается в касательную; следовательно, производная $\frac{dM}{du}$ и дифференциал dM $\left(\text{отличающийся от производной только скалярным множителем } dM = \frac{Md}{du}\,du\right)$ определяют одну и ту же геометрическую точку, лежащую на касательной, а аналитическая прямая $(M\,dM)$ является касательной. Точно так же аналитическая плоскость

$$(M\,dM\,d^2M)$$

определяет соприкасающуюся плоскость кривой.

Если аналитическая точка M есть функция от двух независимых переменных

$$M = M(u,\ v),$$

то геометрическая точка M при изменении переменных u, v описывает поверхность при условии, что в области изменения переменных u, v координаты точки $M(u)$ и её частных производных M_u, M_v непрерывны и их грассманово произведение не равно нулю

$$(M_u M_v) \neq 0.$$

81. Уравнения структуры проективного пространства. Если все четыре вершины тетраэдра $\{A_i\}$ суть функции от каких-то переменных u^1, $u^2, \ldots, u^n$, то дифференциалы dA_i тоже являются аналитическими точками. Обозначим их координаты относительно тетраэдра $\{A_i\}$ буквами ω_i^k:

$$dA_i = \omega_i^k A_k, \qquad i, k = 0, 1, 2, 3. \qquad (1)$$

Величины ω_i^k называются *компонентами* дифференциальных проективных перемещений тетраэдра. Как легко видеть, это — линейные формы от дифференциалов du^α:

$$\omega_i^k = a_{i\alpha}^k du^\alpha, \qquad i,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,$$
$$\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Число переменных u^α может колебаться от одного, когда каждая вершина описывает линию, до шестнадцати, когда тетраэдр занимает всевозможные положения в пространстве.

Дифференцируя внешним образом систему (1), получим:

$$D\omega_i^k A_k + [dA_k \omega_i^k] = 0,$$

или, подставляя значения $dA_k = \omega_k^j A_j$,

$$D\omega_i^k A_k + [\omega_k^j \omega_i^k]\,A_j = 0.$$

Указатель k в первом (и во втором) члене есть указатель суммирования и в различных слагаемых суммы принимает по очереди значения $k = 0, 1, 2, 3$; следовательно, величина суммы не изменится, если этот указатель обозначить другой буквой, лишь бы она принимала те же значения 0, 1, 2, 3. Если в первом члене заменить обозначение буквы k на букву j, то мы сумеем вынести общий множитель A_j за скобку.

Если, кроме того, переставить множители внешнего произведения с изменением знака произведения, то получим:

$$\{D\omega_i^j - [\omega_i^k \omega_k^j]\}\,A_j = 0.$$

Четыре точки A_j, как вершины тетраэдра, не лежат в одной плоскости и, следовательно, линейно независимы, поэтому коэффициенты при точках A_j должны равняться нулю:

$$D\omega_i^j = [\omega_i^k \omega_k^j] \qquad i,\ j,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3. \qquad (2)$$

Уравнения (2) называются *уравнениями структуры* проективного пространства. Если формы ω_i^j удовлетворяют уравнениям структуры (2), то система (1) вполне интегрируема (внешние дифференциалы — алгебраические следствия системы) и определяет семейство тетраэдров с произвольным начальным (для $u^i = u_0^i$) тетраэдром $\{A_i\}_0$.

При этом произвольное проективное преобразование точек dA_i и координатного тетраэдра $\{A_k\}$ не меняет координат ω_i^k, т.е. *компоненты дифференциальных проективных движений тетраэдра являются инвариантами группы проективных преобразований пространства.* Допустим, что формы ω_i^k удовлетворяют уравнениям структуры, и мы имеем две четвёрки решений системы (1); они определяют два семейства тетраэдров с различными начальными тетраэдрами $\{A_i\}_0$ и $\{A_i^*\}_0$. Применяя подходящее проективное преобразование ко всем тетраэдрам второго семейства, можно перевести его в новое семейство тетраэдров так, чтобы начальный тетраэдр $\{A_i^*\}_0$ совпал (как четыре аналитические точки) с тетраэдром $\{A_i\}_0$ первого семейства. При этом компоненты ω_i^k не изменятся, и координаты вершин тетраэдров нового семейства будут удовлетворять той же системе уравнений (1). Между тем при заданном начальном тетраэдре $\{A_i\}_0$ система (1) определяет единственное семейство тетраэдров; следовательно, после проективного преобразования второе семейство совпадёт с первым так, что каждый тетраэдр второго семейства совпадёт с соответствующим тетраэдром первого.

Следовательно, *компоненты* ω_i^k, *удовлетворяющие уравнениям структуры, определяют единственное семейство тетраэдров вплоть до произвольного проективного преобразования пространства.*

В частности, если число независимых переменных n равно двум, то каждая вершина, например A_0, тетраэдра описывает поверхность, каждое ребро, например A_0A_1, описывает конгруэнцию. Следовательно, *компоненты проективных перемещений тетраэдра* ω_i^k, *удовлетворяющие уравнениям структуры* (2), *определяют в проективном пространстве поверхность* (A_0), *конгруэнцию* (A_0A_1) *и т. д. и только одну.*

Действительно, различные семейства тетраэдров, получаемых при различном выборе начального тетраэдра $\{A_i\}_0$, — проективно эквивалентны; следовательно, и поверхности (A_0), и конгруэнции (A_0A_1) и т. д., получаемые при различном выборе начального тетраэдра в проективном пространстве, должны считаться тождественно равными, как совпадающие после проективного преобразования.

82. Тетраэдр, присоединённый к точке поверхности. Присоединим к каждой точке A поверхности (A) все тетраэдры $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, у которых геометрическая точка A_0 совпадает с геометрической точкой A поверхности. Такие тетраэдры называются *тетраэдрами нулевого порядка.*

Если закрепим геометрическую точку A_0, то аналитическая точка A_0 всё же может изменяться, пропорционально меняя все свои координаты, т. е.

$$A_0 = \lambda A_0',$$

где A_0' — одна из аналитических точек геометрической точки A_0 и λ — произвольный параметр. Так как, по условию, точка A_0' при неподвижности геометрической точки A_0 не меняется, то

$$dA_0 = A_0' \, d\lambda$$

или, по исключении точки A_0',

$$dA_0 = A_0 \, d\ln\lambda.$$

Сравнивая это равенство с первым уравнением (1)

$$dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega_0^1 A_1 + \omega_0^2 A_2 + \omega_0^3 A_3, \tag{1a}$$

видим, что при неподвижности геометрической точки A_0 компоненты ω_0^k имеют вид:

$$\omega_0^0 = d\ln\lambda, \quad \omega_0^1 = \omega_0^2 = \omega_0^3 = 0.$$

При неподвижности точки A_0 поверхности криволинейные координаты на поверхности u^1, u^2 постоянны, а их дифференциалы равны нулю. Наоборот, закрепление криволинейных координат, т. е. обращение в нуль дифференциалов $du^1 = du^2 = 0$, влечёт за собой неподвижность точки A_0 и, следовательно, обращение в нуль форм ω_0^1, ω_0^2, ω_0^3. Значит, эти три формы зависят только от дифференциалов du^1, du^2, хотя в коэффициентах могут содержать и другие параметры v^1, $v^2, \ldots$

Параметры u^1, u^2 называются *главными*, v^1, $v^2, \ldots$ — *вторичными.* Формы ω_0^1, ω_0^2, ω_0^3 называются *главными формами нулевого порядка.* Не все они линейно независимы. Действительно, так как они принадлежат подкольцу двух независимых дифференциалов du^1, du^2, то между ними, несомненно, есть одна линейная зависимость; эту зависимость можно получить, исключая du^1, du^2 из трёх уравнений, выражающих ω_0^1, ω_0^2, ω_0^3 линейно через du^1, du^2.

Так как при $\omega_0^1 = \omega_0^2 = \omega_0^3 = 0$ точка A_0 стоит на месте и du^1, du^2 равны нулю, то и, обратно, du^1, du^2 могут быть выражены через ω_0^i. Следовательно, среди форм ω_0^1, ω_0^2, ω_0^3 имеются две и только две линейно независимых.

Мы прямо можем указать их, если совместить грань $A_0A_1A_2$ с касательной плоскостью к поверхности (A). Как известно, всякая касательная к поверхности в точке A лежит в её касательной плоскости, значит, точка dA_0 при всяком выборе дифференциалов du^1, du^2 должна лежать в плоскости $A_0A_1A_2$ и, следовательно, может линейно зависеть только от A_0, A_1, A_2. Значит, для всех допустимых перемещений тетраэдра имеем:

$$\omega_0^3 = 0. \tag{3}$$

Это и есть та линейная зависимость, которая должна существовать между формами ω_0^1, ω_0^2, ω_0^3. Так как другой зависимости не может быть, то формы ω_0^1, ω_0^2 линейно независимы. Мы нередко будем опускать у них нижний указатель и указатель у точки A_0, записывая ω^1, ω^2, A.

Наложенное условие уменьшает многообразие тетраэдров, присоединённых к точке A поверхности. Тетраэдры, удовлетворяющие условию (3), называются *тетраэдрами первого порядка.*

Дифференцируя внешним образом уравнение (3), получим в силу уравнений структуры (2):

$$[\omega^1\omega_1^3] + [\omega^2\omega_2^3] = 0,$$

откуда по лемме Картана

$$\omega_1^3 = a\omega^1 + b\omega^2, \quad \omega_2^3 = b\omega^1 + c\omega^2. \tag{4}$$

Формулы (4) показывают, что ω_1^3, ω_2^3 зависят только от дифференциалов главных параметров. Компоненты ω^1, ω^2, ω_1^3, ω_2^3 называются *главными компонентами первого порядка.*

83. Тетраэдры 2-го порядка. Как известно, асимптотической линией поверхности называется такая линия, соприкасающаяся плоскость которой совпадает с касательной плоскостью поверхности. Так как соприкасающаяся плоскость какой-нибудь линии $\omega^1 : \omega^2$ на поверхности (A) определяется точками

$$A,\ dA,\ d^2A,$$

где дифференцирование производится в выбранном направлении $\omega^1 : \omega^2$, то уравнение асимптотической линии получится, если мы выразим условие, что точки A, dA и d^2A лежат в плоскости AA_1A_2. Для точек A и dA в силу равенства (3) это условие выполняется тождественно; поэтому уравнение асимптотических должно вытекать из условия

$$(d^2AAA_1A_2) = 0.$$

Дифференцируя равенство (1а) и помня, что A, dA, A_1, A_2 уже лежат в касательной плоскости, мы получим для асимптотических линий уравнение

$$(\omega^1 dA_1 + \omega^2 dA_2,\ A,\ A_1,\ A_2) = 0.$$

Внося сюда dA_1, dA_2 по формулам (1) и перемножая почленно, заметим, что сохранятся только члены с неравным нулю произведением четырёх точек

$$(AA_1A_2A_3) \neq 0.$$

Обращая в нуль коэффициент при этом произведении, получим:

$$\omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3 = 0, \tag{5'}$$

или в силу (4)

$$a(\omega^1)^2 + 2b\omega^1\omega^2 + c(\omega^2)^2 = 0. \tag{5}$$

Воспользуемся теперь понятием асимптотических линий, чтобы наложить новое ограничение на выбор тетраэдров, присоединённых

к точке A поверхности. Потребуем, чтобы рёбра AA_1 и AA_2 были направлены по асимптотическим направлениям поверхности. При этом мы исключаем случай совпадения асимптотических направлений, т. е. развёртывающиеся поверхности. В эллиптических точках поверхности, где асимптотические направления мнимы, нам придётся ввести тетраэдр с парой мнимых сопряжённых вершин A_1, A_2.

Так как точка dA при условии

$$\omega^2 = 0$$

лежит на оси AA_1, то уравнение (5) должно иметь решениями $\omega^2 = 0$ и соответственно для второй оси AA_2 решение $\omega^1 = 0$. Это требование приводит нас к равенствам

$$a = 0, \quad c = 0.$$

Формулы (4) принимают, следовательно, вид

$$\omega_1^3 = b\omega^2, \quad \omega_2^3 = b\omega^1. \tag{4'}$$

Если коэффициент b равен нулю, то поверхность (A) становится плоскостью. Действительно, теперь три формы равны нулю:

$$\omega_0^3 = 0, \quad \omega_1^3 = 0, \quad \omega_2^3 = 0,$$

и по формулам (1)

$$d(AA_1A_2) = (\omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2)(AA_1A_2).$$

Отсюда вытекает, что аналитическая плоскость AA_1A_2 при изменении переменных u, v только умножается на переменный множитель; следовательно, геометрическая плоскость AA_1A_2 неподвижна, а так как ей принадлежат все точки A, то поверхность (A) совпадает с этой плоскостью.

В дальнейшем случай плоскости $b = 0$ мы будем исключать.

Тетраэдры, удовлетворяющие условиям (4′), называются *тетраэдрами второго порядка.*

Дифференцируя внешним образом уравнения (4′), получим:

$$\begin{aligned} -2[\omega_1^2\omega^1] + [d\ln b + \omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3,\ \omega^2] &= 0, \\ [d\ln b + \omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3,\ \omega^1] - 2[\omega_2^1\omega^2] &= 0, \end{aligned} \tag{6}$$

откуда по лемме Картана имеем:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \beta\omega^1 + \beta'\omega^2, \\ d\ln b + \omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 &= -2(\beta'\omega^1 + \gamma'\omega^2), \\ \omega_2^1 &= \gamma'\omega^1 + \gamma\omega^2. \end{aligned} \tag{6'}$$

Значит, ω_1^2, ω_2^1 и

$$\Delta b = d\ln b + \omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3$$

— новые главные формы уже 2-го порядка.

84. Тетраэдры 3-го порядка. Дифференцируя уравнения (6′), получим:

$$
\begin{aligned}
&[\Delta\beta\omega^1] + [\Delta\beta'\omega^2] = 0,\\
&[\Delta\beta'\omega^1] + [\Delta\gamma'\omega^2] = 0,\\
&[\Delta\gamma'\omega^1] + [\Delta\gamma\omega^2] = 0,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\Delta\beta &= d\beta + \beta\,(\omega_0^0 - 2\omega_1^1 + \omega_2^2) - \beta'\omega_1^2,\\
\Delta\beta' &= d\beta' + \beta'\,(\omega_0^0 - \omega_1^1) - \gamma'\omega_1^2 + b\omega_3^2 - \omega_1^0,\\
\Delta\gamma' &= d\gamma' + \gamma'\,(\omega_0^0 - \omega_2^2) - \beta'\omega_2^1 + b\omega_3^1 - \omega_2^0,\\
\Delta\gamma &= d\gamma + \gamma\,(\omega_0^0 - 2\omega_2^2 + \omega_1^1) - \gamma'\omega_2^1.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Если закрепить точку A, то формы ω^1, ω^2 будут равны нулю; вместе с ними обратятся в нуль и формы ω_1^2, ω_2^1 в силу уравнений (6′) и все $\Delta\beta$, $\Delta\gamma$, $\Delta\beta'$, $\Delta\gamma'$, ибо по лемме Картана, как следствие уравнений (7), они линейно зависят от ω^1, ω^2. Присваивая дифференцированию по вторичным параметрам символ δ и обозначая для этого дифференцирования значения форм ω_i^k через π_i^k, мы получим из уравнений (8) систему

$$
\begin{aligned}
&\delta\beta = \beta\,(2\pi_1^1 - \pi_0^0 - \pi_2^2), &&\delta\gamma = \gamma\,(2\pi_2^2 - \pi_0^0 - \pi_1^1),\\
&\delta\beta' = \beta'\,(\pi_1^1 - \pi_0^0) + \pi_1^0 - b\pi_3^2, &&\delta\gamma' = \gamma'\,(\pi_2^2 - \pi_0^0) + \pi_2^0 - b\pi_3^1.
\end{aligned}
\tag{8′}
$$

Полагая все формы π_i^k равными нулю, кроме $\pi_1^0 - b\pi_3^2$, мы увидим, что сохранится переменным только один вторичный параметр. Мы всегда можем его выбрать так, чтобы

$$\pi_1^0 - b\pi_3^2 = dt.$$

Уравнение для $\delta\beta'$ будет интегрироваться

$$\beta' = t + \text{const.},$$

и, выбирая $t = -\text{const.}$, мы приведём β' к нулю. Аналогично, приведём к нулю γ'. Раскрывая по лемме Картана одно за другим уравнения (7) и пользуясь формулами (8) при $\beta' = 0$, $\gamma' = 0$ для значения форм $\Delta\beta$, $\Delta\gamma$, $\Delta\beta'$, $\Delta\gamma'$, получим:

$$
\begin{aligned}
&\Delta\beta = d\beta + \beta\,(\omega_0^0 - 2\omega_1^1 + \omega_2^2) = p\omega^1 + p'\omega^2,\\
&b\omega_3^2 - \omega_1^0 = p'\omega^1 + r\omega^2,\\
&b\omega_3^1 - \omega_2^0 = r\omega^1 + q'\omega^2,\\
&\Delta\gamma = d\gamma + \gamma\,(\omega_0^0 - 2\omega_2^2 + \omega_1^1) = q'\omega^1 + q\omega^2.
\end{aligned}
\tag{7′}
$$

Полученный тетраэдр 3-го порядка характеризуется тем, что оси AA_3 и A_1A_2 полярно сопряжены относительно любой поверхности 2-го порядка Дарбу (П. Д. Г., стр. 74).

Матрица компонент тетраэдра 3-го порядка имеет вид

$$
\begin{pmatrix}
\omega_0^0 & \omega^1 & \omega^2 & 0\\
\omega_1^0 & \omega_1^1 & \beta\omega^1 & b\omega^2\\
\omega_2^0 & \gamma\omega^2 & \omega_2^2 & b\omega^1\\
\omega_3^0 & \omega_3^1 & \omega_3^2 & \omega_3^3
\end{pmatrix},
\tag{9}
$$

где формы ω_i^k связаны соотношением (6′), которое теперь принимает вид

$$d\ln b + \omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0 \tag{6″}$$

и соотношениями (7′).

Дифференцируя уравнения (7′) внешним образом, получим:

$$
\begin{aligned}
&[\Delta p\,\omega^1] + [\Delta p'\omega^2] = 0, &&[\Delta q'\omega^1] + [\Delta q\omega^2] = 0,\\
&[\Delta p'\,\omega^1] + [\Delta r\omega^2] = 0, &&[\Delta r\omega^1] + [\Delta q'\omega^2] = 0,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\Delta p &= dp + p\,(2\omega_0^0 - 3\omega_1^1 + \omega_2^2) + 2\beta\,(b\omega_3^2 + \omega_1^0) - 3\beta^2\gamma\omega^2,\\
\Delta p' &= dp' + 2p'\,(\omega_0^0 - \omega_1^1) - \beta\,(b\omega_3^1 + \omega_2^0),\\
\Delta r &= dr + r\,(2\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2) - 2b\omega_3^0,\\
\Delta q' &= dq' + 2q'\,(\omega_0^0 - \omega_2^2) - \gamma\,(b\omega_3^2 + \omega_1^0),\\
\Delta q &= dq + q\,(2\omega_0^0 - 3\omega_2^2 + \omega_1^1) + 2\gamma\,(b\omega_3^1 + \omega_2^0) - 3\beta\gamma^2\omega^1.
\end{aligned}
\tag{10′}
$$

Теперь главными, кроме предыдущих, будут разности $b\omega_3^2 - \omega_1^0$, $b\omega_3^1 - \omega_2^0$ и все новые формы (10′). Полагая равными нулю, кроме всех главных форм (неподвижность точки A), также все формы π_i^i с одинаковыми указателями (нормирование вершин A_i), мы получим из уравнений (10′) закон изменения коэффициентов p, q, r при вариации тетраэдров 3-го порядка около неподвижной вершины A:

$$
\begin{aligned}
&\delta p = 4\beta\pi_1^0, \quad \delta q = 4\gamma\pi_2\\
&\delta p' = 2\beta\pi_2^0, \quad \delta r = 2b\pi_3^0, \quad \delta q' = 2\gamma\pi_1^0.
\end{aligned}
$$

Если ни β, ни γ не равны нулю, то уравнения последней строки покажут, что p', q' и r могут быть приведены к нулю.

Обращение β в нуль означало бы, что форма ω_1^2 равна нулю. Тогда дифференциал аналитической прямой (AA_1) будет

$$
\begin{aligned}
d\,(AA_1) &= (dA,\, A_1) + (A\,dA_1) =\\
&= (AA_1)\,(\omega_0^0 + \omega_1^1) + \{b\,(AA_3) - (A_1A_2)\}\,\omega^2 + (AA_2)\,\omega_1^2,
\end{aligned}
$$

для перемещения вдоль линии $\omega^2=0$ он будет пропорционален самой прямой (AA_1); следовательно, касательная вдоль этой линии не меняется; асимптотические $\omega^2=0$ суть прямые. Аналогично, при $\gamma=0$, т. е. при условии, что компонента ω_2^1 тождественно равняется нулю, асимптотические $\omega^1=0$ становятся прямыми. Следовательно, для произвольной нелинейчатой поверхности матрица компонент ω_i^k может быть приведена к виду:

$$\begin{pmatrix} \omega_0^0 & \omega^1 & \omega^2 & 0 \\ b\omega_3^2 & \omega_1^1 & \beta\omega^1 & b\omega^2 \\ b\omega_3^1 & \gamma\omega^2 & \omega_2^2 & b\omega^1 \\ \omega_3^0 & \omega_3^1 & \omega_3^2 & \omega_3^3 \end{pmatrix}, \tag{11a}$$

причём

$$\begin{gathered} d\ln b=\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_0^0-\omega_3^3, \\ d\beta+\beta(\omega_0^0-2\omega_1^1+\omega_2^2)=p\omega^1, \\ d\gamma+\gamma(\omega_0^0-2\omega_2^2+\omega_1^1)=q\omega^2 \end{gathered} \tag{11b}$$

и

$$\begin{gathered} [\Delta p\omega^1]-2b\beta[\omega_3^1\omega^2]=0,\ 2b\gamma[\omega_3^2\,\omega^1]-[\Delta q\omega^2]=0, \\ \beta[\omega_3^1\omega^1]+[\omega_3^0\omega^2]=0, \qquad [\omega_3^0\,\omega^1]+\gamma[\omega_3^2\omega^2]=0, \end{gathered} \tag{11c}$$

откуда

$$\begin{gathered} \Delta p=p_1\omega^1-2b\beta k\omega^2, \quad \Delta q=-2b\gamma h\omega^1+q_2\omega^2, \\ \omega_3^1=k\omega^1+A\omega^2,\ \omega_3^0=\beta A\omega^1+\gamma B\omega^2,\ \omega_3^2=B\omega^1+h\omega^2. \end{gathered} \tag{11d}$$

Полученный тетраэдр 4-го порядка геометрически определяется условием, что рёбра AA_3 и A_1A_2 совпадают с первой и второй директрисами поверхности, а четвёртая вершина A_3 лежит во второй точке пересечения директрисы AA_3 с соприкасающейся поверхностью 2-го порядка Ли (П. Д. Г., стр. 37, 39). Этот тетраэдр мы будем называть *полуканоническим*, ибо нормирование вершин тетраэдра осталось ещё произвольным.

Инвариантные формы (относительные инварианты 2-го и 3-го порядка) суть

$$\begin{aligned} \varphi_2&=\omega^1\omega_1^3+\omega^2\omega_2^3=2b\omega^1\omega^2, \\ \psi_3&=(\omega^1)^2b\omega_1^2+2b\omega^1\omega^2\Delta b+(\omega^2)^2\,b\omega_2^1= \\ &=b\beta(\omega^1)^3+b\gamma(\omega^2)^3. \end{aligned} \tag{12}$$

Справа дано значение этих форм для тетраэдра 3-го порядка. Их отношение есть *абсолютный инвариант*

$$\frac{\psi_3}{\varphi_2}=\frac{\beta(\omega^1)^3+\gamma(\omega^2)^3}{2\omega^1\omega^2}. \tag{12'}$$

Действительно, выписывая билинейную форму для линейных элементов символа дифференцирования $d(\pi_i^k=0)$ и $\delta(\omega^1=\omega^2=0)$ от квадратичных форм

$$\begin{gathered} D\omega^1=[\omega^1,\omega_1^1-\omega_0^0]+[\omega^2\,\omega_2^1], \\ D\omega^2=[\omega^2,\omega_2^2-\omega_0^0]+[\omega^1\,\omega_1^2], \end{gathered}$$

получим:

$$\begin{gathered} d\omega^1(\delta)-\delta\omega^1=\omega^1(\pi_1^1-\pi_0^0)-(\omega_1^1-\omega_0^0)\,\omega^1(\delta)+\omega^2\omega_2^1(\delta)-\omega_2^1\omega^2(\delta), \\ d\omega^2(\delta)-\delta\omega^2=\omega_2^2(\pi_2^2-\pi_0^0)-(\omega_2^2-\omega_0^0)\,\omega^2(\delta)+\omega^1\omega_1^2(\delta)-\omega_1^2\omega^1(\delta), \end{gathered}$$

но поскольку ω^1, ω^2, а также ω_1^2, ω_2^1 — главные формы, их значения для символа дифференцирования δ равны нулю:

$$\omega^1(\delta)=0,\ \omega^2(\delta)=0,\ \omega_1^2(\delta)=0,\ \omega_2^1(\delta)=0,$$

и мы получим:

$$\delta\omega^1=\omega^1(\pi_0^0-\pi_1^1), \quad \delta\omega^2=\omega^2(\pi_0^0-\pi_2^2);$$

точно так же, пользуясь уравнениями (6′) и (7′), будем иметь:

$$\begin{gathered} \delta\beta=\beta(2\pi_1^1-\pi_0^0-\pi_2^2),\ \delta\gamma=\gamma(2\pi_2^2-\pi_0^0-\pi_1^1) \\ \delta\ln b=-\pi_0^0+\pi_1^1+\pi_2^2-\pi_3^3, \end{gathered}$$

откуда

$$\delta\varphi_2=\varphi_2(\pi_0^0-\pi_3^3), \quad \delta\psi_3=\psi_3(\pi_0^0-\pi_3^3)$$

и

$$\delta\frac{\psi_3}{\varphi_2}=0.$$

Абсолютный инвариант $\frac{\psi_3}{\varphi_2}$ называется *проективным линейным элементом* поверхности. Нулевые линии квадратичной формы φ_2 — асимптотические линии, нулевые линии кубичной формы ψ_3 — линии Дарбу (П. Д. Г., стр. 72).

85. Канонический тетраэдр. Уравнения (11b) показывают, что при $\omega^1=\omega^2=0$ коэффициенты b, β, γ в зависимости от изменения нормирования вершин A_i получают вариации

$$\begin{gathered} \delta\ln b=\pi_1^1+\pi_2^2-\pi_0^0-\pi_3^3, \\ \delta\ln\beta=2\pi_1^1-\pi_0^0-\pi_2^2, \\ \delta\ln\gamma=2\pi_2^2-\pi_0^0-\pi_1^1. \end{gathered}$$

Поскольку четыре формы ω_i^i линейно независимы, правые части в этих уравнениях тоже линейно независимы. Значит, подходящим выбором нормирования вершин каждый из трёх коэффициентов b, β, γ можно привести к единице (если он не равен нулю).

Действительно, полагая $2\pi_1^1-\pi_0^0-\pi_2^2=dt$ и все остальные формы равными нулю, мы проинтегрируем второе уравнение

$$\ln\beta=t+c,$$

где c — произвольная постоянная интеграции. Полагая теперь $t=-c$, мы получим:

$$\ln\beta=0 \text{ и } \beta=1.$$

Это приведение теряет смысл, если

$$\beta=0.$$

При этом условии, как мы видели, линия $\omega^2=0$ поверхности (A) становится прямолинейной.

Итак, исключая *линейчатые поверхности*, мы можем считать

$$b=\beta=\gamma=1.$$

Если ещё наложить условие

$$(AA_1A_2A_3)=1,$$

то, дифференцируя, получим:

$$\omega_0^0+\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3=0,$$

и все формы ω_i^i будут определены, именно: уравнения (11b) дадут теперь

$$\begin{aligned}&\omega_1^1+\omega_2^2=\omega_0^0+\omega_3^3=0,\\&\omega_0^0-3\omega_1^1=p\omega^1,\\&\omega_0^0+3\omega_1^1=q\omega^2,\end{aligned}\tag{13}$$

откуда получаем:

$$\omega_0^0=-\omega_3^3=\frac{p\omega^1+q\omega^2}{2},\qquad \omega_1^1=-\omega_2^2=-\frac{p}{6}\omega^1+\frac{q}{6}\omega^2.$$

Можно иначе нормировать канонический тетраэдр. Если u, v — параметры асимптотических линий поверхности (A), и, следовательно,

$$\omega^1=a\,du,\quad \omega^2=b\,dv,$$

то мы введём вместо A_1 и A_2 точки

$$A_1^*=A_1a,\quad A_2^*=A_2b.$$

Предполагая, что эта замена уже выполнена, мы можем считать формы ω^1, ω^2 полными дифференциалами $\omega^1=du$, $\omega^2=dv$. Выбирая попрежнему

$$b=1,\ (AA_1A_2A_3)=1,$$

будем иметь:

$$\omega_1^1+\omega_2^2=0,\quad \omega_0^0+\omega_3^3=0.$$

Матрица компонент примет вид:

$$\begin{pmatrix}\omega_0^0 & \omega^1 & \omega^2 & 0\\ \omega_3^2 & \omega_1^1 & \beta\omega^1 & \omega^2\\ \omega_3^1 & \gamma\omega^2 & -\omega_1^1 & \omega^1\\ \omega_3^0 & \omega_3^1 & \omega_3^2 & -\omega_0^0\end{pmatrix},\tag{14a}$$

причём

$$\begin{aligned}&\omega_0^0=\frac{p}{2\beta}\omega^1+\frac{q}{2\gamma}\omega^2-\frac{1}{2}\,d\ln\beta\gamma=-\omega_3^3,\\&\omega_1^1=-\frac{p}{6\beta}\omega^1+\frac{q}{6\gamma}\omega^2+\frac{1}{6}\ln\frac{\beta}{\gamma}=-\omega_2^2.\end{aligned}\tag{14b}$$

86. Голономный тетраэдр. Тетраэдр, у которого компоненты ω^1, ω^2 перемещения вершины A — полные дифференциалы, называется *голономным*. Иногда удобнее бывает обратиться к тетраэдру 3-го порядка, который был построен на асимптотических касательных и паре прямых AA_3, A_1A_2 полярно сопряжённых относительно поверхности Дарбу, чтобы несколько иначе выбрать положение точек A_1, A_2.

Полный дифференциал точки dA линейно зависит от дифференциалов независимых переменных (криволинейных координат точки), а поскольку эти дифференциалы сами линейно зависят от форм ω^1, ω^2, то и дифференциал dA можно разложить по формам ω^1, ω^2, т. е. представить дифференциал dA в виде суммы произведений форм ω^1, ω^2 на подходящие коэффициенты.

Поскольку дифференциал dA есть аналитическая точка, а формы ω^1, ω^2 являются скалярами, то коэффициенты при формах ω^1, ω^2 сами должны быть аналитическими точками. Примем их за вершины A_1, A_2 тетраэдра. Тогда первое уравнение (1) получит вид

$$dA=A_1\omega^1+A_2\omega^2,\tag{a}$$

т. е. форма ω_0^0 будет приведена к нулю.

При этом тетраэдр остаётся тетраэдром 3-го порядка, в частности, уравнения $\omega^1=0$ или $\omega^2=0$ будут попрежнему определять асимптотические линии поверхности.

Теперь, не меняя геометрических точек A_1, A_2, мы изменим нормирование точек A_1, A_2.

С этой целью прежде всего заметим, что при двух независимых переменных каждое уравнение $\omega^i=0$ допускает общий интеграл, который можно обозначить по-старому буквами $u = \text{const.}$ или $v = \text{const}$. Тогда формы ω^i примут вид

$$\omega^1 = a_1\,du, \quad \omega^2 = a_2\,dv.$$

Введём теперь новые точки

$$\bar{A}_1 = a_1 A_1, \quad \bar{A}_2 = a_2 A_2.$$

В новых обозначениях уравнение (a) сохранит свой вид

$$dA = \bar{A}_1 \bar{\omega}^1 + \bar{A}_2 \bar{\omega}^2,$$

новые формы $\bar{\omega}^i$ будут равны дифференциалам du, dv. Мы будем предполагать, что это преобразование уже выполнено и в уравнении (a) формы ω^i имеют вид

$$\omega^1 = du, \quad \omega^2 = dv. \tag{15}$$

Очевидно, мы могли бы достигнуть той же цели, если, вводя асимптотические параметры u, v, положить точки A_1, A_2 равными частным производным

$$A_1 = A_u, \quad A_2 = A_v.$$

Из уравнений (15) можно получить важное следствие. Поскольку теперь формы ω^i являются полными дифференциалами, их внешние дифференциалы равны нулю

$$D\omega^1 = [\omega^1 \omega_1^1] = 0, \quad D\omega^2 = [\omega^2 \omega_2^2] = 0.$$

Отсюда, пользуясь леммой Картана, получим:

$$\omega_1^1 = m\,\omega^1, \quad \omega_2^2 = n\omega^2. \tag{b}$$

Воспользуемся теперь произволом выбора нормирования вершины A_3, чтобы привести не равный нулю коэффициент b к единице.

Уравнение (6′) при закреплённой точке A принимает вид

$$\delta \ln b + \pi_3^3 = 0;$$

оно показывает, что нормированием точки A_3 можно привести $\ln b$ к нулю, а b к единице. Тогда уравнение (6″) вместе с уравнениями (b) даст:

$$\omega_3^3 = m\omega^1 + n\omega^2.$$

Матрица компонент (9) примет теперь вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega^1 & \omega^2 & 0 \\ \omega_1^0 & m\omega^1 & \beta\omega^1 & \omega^2 \\ \omega_2^0 & \gamma\omega^2 & n\omega^2 & \omega^1 \\ \omega_3^0 & \omega_3^1 & \omega_3^2 & m\omega^1 + n\omega^2 \end{pmatrix}. \tag{16a}$$

Уравнения структуры будут

$$\begin{aligned} [\omega_1^0\omega^1] + [\omega_2^0\omega^2] = 0, \quad [\omega_3^2\omega^1] + [\omega_3^1\omega^2] &= 0, \\ [dm - \omega_1^0 + \beta\gamma\omega^2, \omega^1] + [\omega_3^1\omega^2] &= 0, \\ [dn - \omega_2^0 + \beta\gamma\omega^1, \ \omega^2] + [\omega_3^2\omega^1] &= 0, \\ [d\beta + n\beta\omega^2, \omega^1] + [\omega_3^2 - \omega_1^0, \omega^2] &= 0, \\ [d\gamma + m\gamma\omega^1, \omega^2] + [\omega_3^1 - \omega_2^0, \ \omega^1] &= 0. \end{aligned} \tag{16b}$$

Первые два уравнения после развёртывания по лемме Картана дают:

$$\begin{aligned} \omega_1^0 &= A\omega^1 + B\omega^2, & \omega_3^2 &= A'\omega^1 + B'\omega^2, \\ \omega_2^0 &= B\omega^1 + C\omega^2, & \omega_3^1 &= B'\omega^1 + C'\omega^2. \end{aligned} \tag{16c}$$

Остальные уравнения, если иметь в виду формулы (15), приводятся к виду

$$B + B' = \beta\gamma + m_v, \quad A' - A = \beta_v + \beta n, \quad C' - C = \gamma_u + \gamma m. \tag{16d}$$

87. Тетраэдр, построенный на проективной нормали. Матрица компонент (16a) допускает дальнейшее упрощение. Следует иметь в виду, что приведение формы ω_0^0 к нулю было достигнуто выбором точек A_1, A_2 на асимптотических касательных.

Мы могли бы предварительно умножить аналитическую точку A на произвольную функцию ρ. Выбором точек A_1, A_2 мы снова приведём форму ω_0^0 к нулю, но произведение четырёх вершин $(AA_1A_2A_3)$ умножится на ρ^4.

Действительно, если новые вершины A_i^* отметим звёздочкой, то мы будем иметь:

$$A^* = A\rho, \quad A_1^* = A_u^* = A_u\rho + A\rho_u = A_1\rho + A\rho_u, \quad A_2^* = A_2\rho + A\rho_v. \tag{a}$$

С другой стороны, если иметь в виду формулы (15), то матрица компонент (16a) и первая формула (16c) позволят написать производную A_{1v} в виде

$$A_{1v} = BA + A_3. \tag{b}$$

Отсюда, умножая слева на AA_1A_2, получим:

$$(AA_1A_2A_3) = (AA_1A_2A_{1v}).$$

Для преобразованных точек получим:

$$(A^*A_1^*A_2^*A_3^*) = (A^*A_1^*A_2^*A_{1v}^*) = (\rho A, \rho A_1, \rho A_2, \rho A_{1v}) = \rho^4 (AA_1A_2A_3).$$

Выбирая этот множитель ρ так, чтобы для нового тетраэдра имело место равенство

$$(AA_1A_2A_3) = 1,$$

получим после дифференцирования:

$$\omega_0^0+\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3=0,$$

или в силу значений (16a) для форм ω_i^i

$$2m\omega^1+2n\omega^2=0.$$

Следовательно, m и n будут приведены к нулю.

Матрица компонент примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega^1 & \omega^2 & 0 \\ \omega_1^0 & 0 & \beta\omega^1 & \omega^2 \\ \omega_2^0 & \gamma\omega^2 & 0 & \omega^1 \\ \omega_3^0 & \omega_3^1 & \omega_3^2 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (16a')$$

Уравнения (16c) сохранятся. Уравнения (16d) примут вид

$$B+B'=\beta\gamma,\quad A'-A=\beta_v,\quad C'-C=\gamma_u. \qquad (16d')$$

Мы можем теперь воспользоваться произволом выбора точки A_3 на прямой AA_3 и ввести вместо вершины A_3 точку

$$A_3^*=A_3-B'A.$$

Тогда, дифференцируя, получим:

$$dA_3^*=dA_3-A\,dB'-B'\,dA=$$

$$=(\omega_3^0-dB')\,A+(\omega_3^1-B'\omega^1)\,A_1+(\omega_3^2-B'\omega^2)\,A_2.$$

Новые формы

$$(\omega_3^1)^*=\omega_3^1-B'\omega^1=C'\omega^2,\quad (\omega_3^2)^*=A'\omega^1$$

не содержат B', т. е. этим преобразованием, не нарушая формул (16a'), (16d'), мы приведём B' к нулю.

Возвращаясь к старым обозначениям, мы напишем уравнения (16c) в виде:

$$\omega_1^0=A\omega^1+\beta\gamma\omega^2,\quad \omega_2^0=\beta\gamma\omega^1+C\omega^2,\quad \omega_3^2=A'\omega^1,\quad \omega_3^1=C'\omega^2. \qquad (16c')$$

Внешнее дифференцирование приводит к квадратичным уравнениям:

$$\begin{aligned} &[d(A+A')-(\beta_u\gamma+2\beta\gamma_u)\,\omega^2,\ \omega^1]=0,\\ &[d(C+C')-(\gamma_v\beta+2\gamma\beta_v)\,\omega^1,\ \omega^2]=0,\\ &\left[2\omega_3^0+d(\beta\gamma)-\beta\left(C+C'-\frac{\beta_{vv}}{\beta}\right)\omega^1,\ \omega^2\right]=0,\\ &\left[2\omega_3^0+d(\beta\gamma)-\gamma\left(A+A'-\frac{\gamma_{uu}}{\gamma}\right)\omega^2,\ \omega^1\right]=0, \end{aligned} \qquad (16e')$$

откуда

$$2\omega_3^0=\beta\left(C+C'-\frac{\beta_{vv}}{\beta}\right)\omega^1+\gamma\left(A+A'-\frac{\gamma_{uu}}{\gamma}\right)\omega^2-d(\beta\gamma). \qquad (16f')$$

Матрица компонент (16a') определяет тетраэдр, у которого рёбра AA_3 и A_1A_2 являются первой и второй проективной нормалью (П. Д. Г., стр. 101).

II. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ

88. Фокусы и фокальные плоскости касательной к поверхности. Отнесём поверхность (A) к голономному тетраэдру с матрицей компонент (16a) § 86 и рассмотрим точку M в её касательной плоскости

$$M=\mu A+2(A_1x+A_2y). \qquad (17)$$

Так как

$$dA=A_1\omega^1+A_2\omega^2,$$

то точка M лежит на касательной к линии

$$\frac{\omega^1}{x}=\frac{\omega^2}{y} \qquad (18a)$$

поверхности (A). Если, сохраняя коэффициенты x, y, изменять параметр μ, то точка M пробежит всю касательную; положение этой касательной зависит только от отношения $x:y$. При изменении криволинейных координат u, v точки A эта касательная опишет конгруэнцию, для которой первой фокальной поверхностью будет служить поверхность (A). Как выбрать координату μ на касательной, чтобы точка M была вторым фокусом луча AM?

Если точка M служит вторым фокусом луча AM, то на поверхности (M) касательная к кривой, сопряжённой линии (18a), т. е. касательная, определяемая уравнением

$$\frac{\omega^1}{x}+\frac{\omega^2}{y}=0, \qquad (18b)$$

должна совпадать с лучом AM. Следовательно,

$$(dM,\ A,\ A_1x+A_2y)\equiv 0 \qquad \left(\mathrm{mod}\ \frac{\omega^1}{x}+\frac{\omega^2}{y}\right)$$

или

$$\begin{aligned} &(\{2(dx+x\omega_1^1)+\mu\omega^1+2\gamma y\omega^2\}\,A_1+\\ &+\{2(dy+y\omega_2^2)+2\beta x\omega^1+\mu\omega^2\}\,A_2,\ A,\ A_1x+A_2y)\equiv 0\\ &\qquad\qquad \left(\mathrm{mod}\ \frac{\omega^1}{x}+\frac{\omega^2}{y}\right). \end{aligned}$$

Введём теперь обозначения посредством формул

$$\begin{aligned} dx+x\omega_1^1&=x_1\omega^1+x_2\omega^2,\\ dy+y\omega_2^2&=y_1\omega^1+y_2\omega^2 \end{aligned} \qquad (19)$$

и заменим форму ω^1 через x, форму ω^2 через $-y$, ибо при сравнении по модулю $\frac{\omega^1}{x}+\frac{\omega^2}{y}$ этот двучлен надо полагать равным нулю, откуда следует пропорция

$$\omega^1 : x = \omega^2 : (-y),$$

наше уравнение перепишется в виде:

$$(\{2(xx_1 - yx_2 - \gamma y^2) + \mu x\} A_1 + \\ + \{2(xy_1 - yy_2 + \beta x^2) - \mu y\} A_2,\ A,\ A_1 x + A_2 y) = 0,$$

откуда

$$\mu = -x_1 - y_2 + x\frac{y_1 + \beta x}{y} + y\frac{x_2 + \gamma y}{x}. \tag{20}$$

При этом значении μ формула (17) определяет второй фокус касательной к линии (18a) на поверхности (A). Чтобы определить вторую фокальную плоскость луча AM, т. е. касательную плоскость поверхности (M) в точке M, можно просто повторить наши рассуждения, заменяя везде по принципу двойственности точку A касательной плоскостью $\boldsymbol{a} = (AA_1A_2)$. Если поверхность (A) рассматривать в пространстве плоскостей и к касательной плоскости $\boldsymbol{a}$ присоединить четырёхгранник в виде четырёх аналитических плоскостей

$$\boldsymbol{a} = [012],\quad \boldsymbol{a}_1 = -[013],\quad \boldsymbol{a}_2 = [023],\quad \boldsymbol{a}_3 = -[123], \tag{a}$$

где

$$[ikl] = (A_iA_kA_l),$$

то для дифференциальных проективных смещений аналитических плоскостей построятся формулы, аналогичные формулам (1) § 81. Например, дифференцируя первое уравнение (a), получим:

$$d\boldsymbol{a} = (dAA_1A_2) + (A\,dA_1A_2) + (AA_1\,dA_2) = \\ = [012](\omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2) + [013]\,\omega_2^3 - [023]\,\omega_1^3.$$

Чтобы сократить запись, мы будем в дальнейшем всегда относить поверхность (A) к тетраэдру с компонентами (16a′). Тогда

$$\omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 = 0,\quad \omega_2^3 = \omega^1,\quad \omega_1^3 = \omega^2,$$

и мы получим:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{a} &= -\boldsymbol{a}_1\omega^1 - \boldsymbol{a}_2\omega^2,\\ d\boldsymbol{a}_1 &= -\boldsymbol{a}\omega_3^2 - \boldsymbol{a}_2\beta\omega^1 - \boldsymbol{a}_3\omega^2,\\ d\boldsymbol{a}_2 &= -\boldsymbol{a}\omega_3^1 - \boldsymbol{a}_1\gamma\omega^2 - \boldsymbol{a}_3\omega^1,\\ d\boldsymbol{a}_3 &= -\boldsymbol{a}\omega_3^0 - \boldsymbol{a}_1\omega_2^0 - \boldsymbol{a}_2\omega_1^0. \end{aligned} \tag{21}$$

Три последних уравнения получены таким же пересчётом. Теперь произвольная аналитическая плоскость $\boldsymbol{m}$, проходящая через касательную $(A\,dA)$ к линии (18a), запишется в полной аналогии с точкой M, определяемой формулой (17), в виде

$$\boldsymbol{m} = \lambda\boldsymbol{a} + 2(\boldsymbol{a}_1 x - \boldsymbol{a}_2 y). \tag{17′}$$

Действительно, все произведения $(\boldsymbol{a}_iA_k)$, очевидно, равны нулю, кроме четырёх произведений

$$(\boldsymbol{a}A_3) = (\boldsymbol{a}_1A_2) = (\boldsymbol{a}_2A_1) = (\boldsymbol{a}_3A_0) = 1,$$

равных единице, поскольку для тетраэдра (16a) § 87 всегда

$$(AA_1A_2A_3) = 1.$$

Значит,

$$(\boldsymbol{m}A) = \lambda(\boldsymbol{a}A) + 2x(\boldsymbol{a}_1A) - 2y(\boldsymbol{a}_2A) = 0,$$

$$(\boldsymbol{m}M) = 4(\boldsymbol{a}_1x - \boldsymbol{a}_2y)(A_1x + A_2y) = 4xy(\boldsymbol{a}_1A_2) - 4xy(\boldsymbol{a}_2A_1) = 0,$$

и плоскость $\boldsymbol{m}$ действительно содержит прямую AM.

Меняя параметр λ при закреплённых переменных x, y, мы получим все плоскости пучка с осью (AM).

Чтобы получить вторую фокальную плоскость луча AM, надо выбрать λ так, чтобы характеристика $(\boldsymbol{m}, d\boldsymbol{m})$ семейства плоскостей $(\boldsymbol{m})$ при движении по линии, сопряжённой с линией (18b), т. е. по линии (18a), совпадала бы с лучом (AM). Для этого параметр λ должен удовлетворять сравнению

$$(d\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}_1x - \boldsymbol{a}_2y) \equiv 0 \quad \left(\operatorname{mod} \frac{\omega^1}{x} - \frac{\omega^2}{y}\right).$$

Если обратиться к таблице (21) и продифференцировать уравнение (17′), то получим:

$$(\{2\,dx - \lambda\omega^1 + 2\gamma y\omega^2\}\,\boldsymbol{a}_1 + \{-2\,dy - \lambda\omega^2 - 2\beta x\omega^1\}\,\boldsymbol{a}_2, \\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}_1x - \boldsymbol{a}_2y) \equiv 0 \quad \left(\operatorname{mod} \frac{\omega^1}{x} - \frac{\omega^2}{y}\right),$$

или, если воспользоваться для дифференциалов dx, dy формулами (19) и заменить формы ω^1, ω^2 пропорциональными им выражениями x и y,

$$(\{2(xx_1 + yx_2 + \gamma y^2) - \lambda x\}\,\boldsymbol{a}_1 + \\ + \{-2(xy_1 + yy_2 + \beta x^2) - \lambda y\}\boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}_1x - \boldsymbol{a}_2y) = 0,$$

и окончательно, перемножая по правилу умножения многочленов и сокращая на $(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2)$,

$$\lambda = x_1 - y_2 - x\frac{y_1 + \beta x}{y} + y\frac{x_2 + \gamma y}{x}. \tag{20′}$$

При этом значении λ формула (17′) определяет вторую фокальную плоскость касательной к линии (18a) на поверхности (A).

Сравнивая формулы (17) и (17′); (20) и (20′) и матрицы (16a′) § 87 и (21), нетрудно заметнть, что переход от точек к плоскостям совершается подстановками

$$\begin{pmatrix} \mu & x & y & x_i & y_i & \beta & \gamma \\ \lambda & x & -y & -x_i & y_i & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} \omega^1 & \omega^2 & \omega_1^0 & \omega_2^0 & \omega_3^0 \\ -\omega^1 & -\omega^2 & -\omega_3^2 & -\omega_3^1 & -\omega_3^0 \end{pmatrix}.$$

89. Соответствие асимптотических иа фокальных поверхностях. Теперь нам надо написать требования соответствия асимптотических линий на фокальных поверхностях (A) и (M) конгруэнции (AM). Для этого мы начнём строить тетраэдр 3-го порядка, присоединённый к точке M второй фокальной поверхности (M).

Введём прежде всего для функций λ и μ ковариантные производные λ_i, μ_i посредством формул

$$\begin{aligned} d\mu + 2(x\omega_1^0 + y\omega_2^0) &= \mu_1\omega^1 + \mu_2\omega^2, \\ d\lambda + 2(y\omega_3^1 - x\omega_3^2) &= \lambda_1\omega^1 + \lambda_2\omega^2. \end{aligned} \tag{22}$$

Дифференцируя равенство (17) и пользуясь ковариантными производными (19), (22), мы представим дифференциал dM в виде

$$dM = A(\mu_1\omega^1 + \mu_2\omega^2) + 2(A_1x + A_2y)\left(\frac{y_1 + \beta x}{y}\omega^1 + \frac{x_2 + \gamma y}{x}\omega^2\right) + \\ + \lambda(A_1\omega^1 - A_2\omega^2) + 2(x\omega^2 + y\omega^1)A_3.$$

Введём теперь первые две вершины тетраэдра $\{M_i\}$, присоединённого к поверхности (M), посредством формул

$$\begin{aligned} M_1 &= \left(\mu_1 - \mu\frac{y_1 + \beta x}{y}\right)A + \lambda A_1 + 2yA_3, \\ M_2 &= \left(\mu_2 - \mu\frac{x_2 + \gamma y}{x}\right)A - \lambda A_2 + 2xA_3. \end{aligned} \tag{23}$$

Тогда дифференциал dM примет выражение, сходное с первой формулой (1) для тетраэдра $\{A_i\}$:

$$dM = M\left(\frac{y_1 + \beta x}{y}\omega^1 + \frac{x_2 + \gamma y}{x}\omega^2\right) + M_1\omega^1 + M_2\omega^2, \tag{24}$$

при этом

$$(MM_1M_2) = \left(-\lambda\mu - 2\mu x\frac{y_1 + \beta x}{y} + 2\mu y\frac{x_2 + \gamma y}{x} + 2x\mu_1 - 2y\mu_2\right)m.$$

Поскольку точки M и dM лежат в касательной плоскости m, уравнение асимптотических линий на поверхности (M) напишется в виде

$$(\omega^1 dM_1 + \omega^2 dM_2,\ m) = 0, \tag{a}$$

но дифференциалы dM_i можно представить в форме

$$\begin{aligned} dM_1 &= A\zeta + M_1\zeta_1 + M_2\zeta_2 + \frac{A_3}{\lambda}\tilde{\omega}_1^3, \\ dM_2 &= A\eta + M_1\eta_1 + M_2\eta_2 + \frac{A_3}{\lambda}\tilde{\omega}_2^3, \end{aligned} \tag{24′}$$

где ζ_i, η_i — некоторые линейные формы и

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1^3 &= -2y(d\lambda + 2y\omega_3^1 - 2x\omega_3^2) - 2y\left\{\mu_1 - (\lambda + \mu)\frac{y_1 + \beta x}{y}\right\}\omega^1 + \\ &\quad + 2x\left\{\mu_1 - \mu\frac{y_1 + \beta x}{y} + \lambda\frac{y_2}{x} + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{x}\right\}\omega^2, \\ \tilde{\omega}_2^3 &= -2x(d\lambda + 2y\omega_3^1 - 2x\omega_3^2) - 2y\left\{\mu_2 - \mu\frac{x_2 + \gamma y}{x} - \lambda\frac{x_1}{y} + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{y}\right\}\omega^1 + \\ &\quad + 2x\left\{\mu_2 + (\lambda - \mu)\frac{x_2 + \gamma y}{x}\right\}\omega^2. \end{aligned} \tag{24″}$$

Так как точки A, M_1, M_2 лежат в касательной плоскости m, то уравнение асимптотических (a) принимает вид

$$\omega^1\tilde{\omega}_1^3 + \omega^2\tilde{\omega}_2^3 = 0. \tag{b}$$

Чтобы асимптотические на фокальных поверхностях (A) и (M) соответствовали, надо, чтобы уравнение (b) удовлетворялось значениями $\omega^1 = 0$ и $\omega^2 = 0$, т. е. чтобы имели место равенства

$$[\tilde{\omega}_1^3\omega^2] = 0, \quad [\tilde{\omega}_2^3\omega^1] = 0. \tag{c}$$

Нетрудно заметить, что эти уравнения равносильны между собой.

Действительно, на поверхностях (A) и (M) уже имеется одна общая сопряжённая сеть — фокальная сеть конгруэнции (AM). Если, кроме того, соответствуют асимптотические линии одного семейства, то соответствуют и другого.

Впрочем, мы сейчас в этом непосредственно убедимся. Внося в первое уравнение (c) значение $\tilde{\omega}_1^3$, получим:

$$[\tilde{\omega}_1^3\omega^2] = -2y\left[d\lambda + 2y\omega_3^1 - 2x\omega_3^2 + \mu_1\omega^1 - (\lambda + \mu)\frac{y_1 + \beta x}{y}\omega^1,\ \omega^2\right].$$

Исключая $\mu_1\omega^1$ при помощи уравнения (22), мы запишем первое уравнение (c) в виде

$$\left[d\lambda + d\mu + 2y(\omega_3^1 + \omega_2^0) - 2x(\omega_3^2 - \omega_1^0) - (\lambda + \mu)\frac{y_1 + \beta x}{y}\omega^1,\ \omega^2\right] = 0. \tag{d}$$

Это условие можно значительно упростить. Действительно, комбинируя уравнения (16c′) § 87, получим:

$$\begin{aligned} [\omega_3^1 + \omega_2^0,\ \omega^2] &= \beta\gamma[\omega^1\omega^2], \\ [\omega_3^2 - \omega_1^0,\ \omega^2] &= [\omega^1,\ \beta_v\omega^2] = [\omega^1 d\beta]; \end{aligned}$$

последнее преобразование опирается на формулы (15) § 86, в силу которых

$$d\beta = \beta_u \omega^1 + \beta_v \omega^2.$$

С другой стороны, из уравнений (20), (20′) следует

$$\lambda + \mu = -2y_2 + 2y\frac{x_2 + \gamma y}{x}.$$

Внося это в уравнение (d), получим:

$$\left[-dy_2 + yd\frac{x_2+\gamma y}{x} + \frac{x_2+\gamma y}{x}dy,\ \omega^2\right] +$$

$$+\left[x\,d\beta - y\beta\gamma\omega^2 - y_2\frac{y_1+\beta x}{y}\omega^2 + y\frac{x_2+\gamma y}{x}\frac{y_1+\beta x}{y}\omega^2,\ \omega^1\right] = 0. \quad (\mathrm{d}')$$

Между тем для матрицы компонент (16a′) § 87 уравнения (19) принимают вид

$$dx = x_1\omega^1 + x_2\omega^2, \quad dy = y_1\omega^1 + y_2\omega^2 \qquad (19')$$

и в силу формул (15) § 86 внешний дифференциал второго из этих уравнений пишется в виде

$$[dy_1\,\omega^1] + [dy_2\,\omega^2] = 0. \qquad (\mathrm{e})$$

С другой стороны, в силу (19′)

$$\left[y_2\frac{y_1+\beta x}{y}\omega^2,\ \omega^1\right] = \frac{y_1+\beta x}{y}[dy\,\omega^1],$$

$$\left[y\frac{x_2+\gamma y}{x}\frac{y_1+\beta x}{y}\omega^2,\ \omega^1\right] = \left[\frac{x_2+\gamma y}{x}y_1\omega^2 + \beta x_2\omega^2 + \beta\gamma y\omega^2,\ \omega^1\right] \qquad (\mathrm{f})$$

и

$$\left[\frac{x^2+\gamma y}{x}dy,\ \omega^2\right] + \left[-y\frac{x_2+\gamma y}{x}\frac{y_1+\beta x}{y}\omega^2 + \beta\gamma y\omega^2 + \beta\,dx,\ \omega^1\right] = 0. \quad (\mathrm{g})$$

Складывая уравнения (d′), (e), (f), (g), получим после приведения подобных членов:

$$\left[d\frac{x_2+\gamma y}{x},\ \omega^2\right] + \left[dy_1 + x\,d\beta + \beta\,dx - \frac{y_1+\beta x}{y}dy,\ \omega^1\right] = 0, \quad (\mathrm{d}'')$$

но

$$dy_1 + x\,d\beta + \beta\,dx - \frac{y_1+\beta x}{y}dy = yd\left(\frac{y_1+\beta x}{y}\right),$$

значит, наше условие (d″) принимает окончательно вид

$$\left[d\left(\frac{x_2+\gamma y}{x}\right),\ \omega^2\right] + \left[d\left(\frac{y_1+\beta x}{y}\right),\ \omega^1\right] = 0. \qquad (25)$$

В силу полной симметрии этого уравнения относительно замены x на y, β на γ и индекса 1 на индекс 2 второе уравнение (с) будет приведено к тому же виду (25).

90. Уравнение для конгруэнции W при заданной фокальной поверхности. Уравнение (25) имеет очень простой смысл: оно получается внешним дифференцированием равенства

$$d\varphi = \frac{y_1+\beta x}{y}\omega^1 + \frac{x_2+\gamma y}{x}\omega^2 \qquad (25')$$

и равносильно требованию, чтобы выражение, стоящее в правой части равенства (25′), было *полным дифференциалом.*

Заметим теперь, что координаты x, y, μ в формуле (17) определены только до общего множителя. Замена x, y на $x^* = \rho x$, $y^* = \rho y$ не изменит уравнения линии (18a) и по формулам (19′) заменит x_2, y_1 на

$$x_2^* = x_2\rho + x\rho_2, \quad y_1^* = y_1\rho + y\rho_1,$$

где

$$d\rho = \rho_1\omega^1 + \rho_2\omega^2.$$

При этом уравнение (25′) преобразуется в новое уравнение

$$d\varphi^* = \frac{\rho y_1 + y\rho_1 + \beta\rho x}{\rho y}\omega^1 + \frac{\rho x_2 + x\rho_2 + \gamma\rho y}{\rho x}\omega^2,$$

или

$$d\varphi^* = \frac{y_1+\beta x}{y}\omega^1 + \frac{x_2+\gamma y}{x}\omega^2 + \frac{\rho_1\omega^1 + \rho_2\omega^2}{\rho} = d\varphi + d\ln\rho.$$

Достаточно выбрать произвольный множитель ρ так, чтобы

$$\ln\rho = -\varphi,$$

и новое выражение $d\varphi^*$ обратится в нуль.

Допустим, что функции x, y уже выбраны так, что форма (25′) равна нулю; тогда, приравнивая нулю коэффициент при формах ω^1, ω^2, мы получим два уравнения:

$$x_2 + \gamma y = 0, \quad y_1 + \beta x = 0, \qquad (26)$$

определяющих функции x, y по заданной поверхности (A).

Так как по смыслу уравнений (15) § 86, (19′) x_2 и y_1 суть частные производные $\frac{\partial x}{\partial v}$ и $\frac{\partial y}{\partial u}$, то систему (26) можно также написать в виде

$$\frac{\partial x}{\partial v} + \gamma y = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial u} + \beta x = 0. \qquad (26')$$

Всякое решение x, y этой системы определяет на поверхности (A) посредством уравнения (18a) систему линий, касательные к которым образуют конгруэнции W. Для этих величин x, y формула (20) даст значение μ, которое посредством формулы (17) определит текущую точку M поверхности, являющейся асимптотическим преобразованием поверхности (A). Система (26) определяет, таким образом, наиболее общее асимптотическое преобразование поверхности (A).

Если функции x, y удовлетворяют системе (26), т. е. конгруэнция (AM) есть конгруэнция W, то уравнения (c) § 89 удовлетворяются и, следовательно, $\tilde{\omega}_1^3$ пропорционально форме ω^2, а $\tilde{\omega}_2^3$ — форме ω^1. Заменяя в уравнениях (24″) дифференциал $d\lambda$ его значением по формуле (22) и приравнивая нулю коэффициент при форме ω^1 или соответственно при ω^2, получим замечательные соотношения

$$\lambda_1+\mu_1=0, \quad \lambda_2-\mu_2=0. \tag{27}$$

Заметим ещё, что уравнения (26) или (26′) сохраняют силу для всякого тетраэдра (16a) § 86. Действительно, если внести в уравнения (19) значения ω_1^1, ω_2^2 по формулам (16a) § 86

$$dx+mx\omega^1=x_1\omega^1+x_2\omega^2,$$
$$dy+ny\omega^2=y_1\omega^1+y_2\omega^2,$$

то увидим, что выбор значений m и n не меняет величин x_2 или y_1. С другой стороны, дифференцируя формулы (a) § 87 и вводя вершину A_3^* согласно уравнению (b) § 87

$$A_3^*=A_{1v}^*-B^*A^*,$$

обнаружим, что и коэффициенты β, γ при всяком выборе функции B^* сохранят своё значение.

91. Формулы для второй фокальной поверхности конгруэнции W. Если внести значения (26) в уравнения предыдущих параграфов, то получим:

$$\begin{aligned} M&=\mu A+2xA_1+2yA_2,\\ M_1&=\mu_1 A+\lambda A_1+2yA_3,\\ M_2&=\mu_2 A-\lambda A_2+2xA_3,\\ dM&=\omega^1 M_1+\omega^2 M_2 \end{aligned} \tag{28}$$

$$\mu=-x_1-y_2, \quad \lambda=x_1-y_2, \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1^3&=(2x\mu_1-2y\lambda_2+2\lambda y_2+\lambda^2)\,\omega^2,\\ \tilde{\omega}_2^3&=(-2y\mu_2-2x\lambda_1+2\lambda x_1-\lambda^2)\,\omega^1, \end{aligned} \tag{30}$$

и уравнение асимптотических на поверхности (M) будет:

$$N\omega^1\omega^2=0, \tag{31}$$

где

$$N=-\lambda\mu-2y\mu_2-2x\lambda_1. \tag{32}$$

Определяя точку A из уравнений (28), получим:

$$(-\lambda\mu+2x\mu_1-2y\mu_2)\,A+\lambda M-2xM_1+2yM_2=0$$

и

$$A=-\frac{\lambda}{N}M+2\frac{x}{N}M_1-2\frac{y}{N}M_2. \tag{33}$$

Формулу (33) следует поставить в соответствие с формулой (17), определяющей второй фокус M относительно тетраэдра $\{A_i\}$. Мы видим, что для обратного перехода от поверхности (M) к поверхности (A) надо сделать замену

$$\begin{pmatrix} A & x & y & \mu & \lambda & N\\ M & \frac{x}{N} & -\frac{y}{N} & -\frac{\lambda}{N} & -\frac{\mu}{N} & \frac{1}{N} \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Дифференцируя два последних уравнения (28), получим теперь:

$$\begin{aligned} dM_1=A\,(S\omega^1-\mu_2\beta\omega^1+S'\omega^2+\mu\omega_3^2)+A_1(\lambda_2\omega^2+2x\omega_3^2)&+\\ +A_2(\lambda\beta\omega^1+\mu_1\omega^2+2y\omega_3^2)+A_3(-2\beta x\omega^1-\mu\omega^2)&, \end{aligned} \tag{35}$$

где мы положили $\lambda_1+\mu_1=0$ согласно уравнению (27) и буквами S, S' обозначили некоторые выражения, содержащие функции x, y и их производные.

Выберем теперь четвёртую вершину M_3 так, чтобы тетраэдр $(MM_1M_2M_3)$ был тетраэдром 3-го порядка для поверхности (M), и нормируем точку M_3 с коэффициентом $\tilde{b}=1$ так, чтобы иметь матрицу компонент (16a) § 86. Тогда мы должны иметь:

$$dM_1=\tilde{\omega}_1^0 M+\tilde{\omega}_1^1 M_1+\tilde{\beta}\omega^1 M_2+\omega^2 M_3.$$

Для этого достаточно отобрать из разложения (35) члены, явно содержащие ω^2, коэффициент при форме ω^2 принять за точку M_3:

$$M_3=-A_3\mu+A_1\lambda_2+A_2\mu_1+AS'.$$

Если ещё заметить, что множителем при форме ω_3^2 в разложении (35) стоит точка M по формуле (17), а множителем при форме ω^1, кроме первого члена — произведение βM_2, то формула (35) примет вид

$$dM_1=AS\omega^1-M_2\beta\omega^1+M_3\omega^2+M\omega_3^2.$$

Сравнение двух выражений для dM_1, если иметь в виду уравнение (33), даст:

$$\tilde{\omega}_1^0=\omega_3^2-\lambda\frac{S}{N}\omega^1, \qquad \tilde{\omega}_2^0=\omega_3^1-\lambda\frac{T}{N}\omega^2, \tag{36a}$$

$$\tilde{\omega}_1^1=2x\frac{S}{N}\omega^1, \qquad \tilde{\omega}_2^2=-2y\frac{T}{N}\omega^2, \tag{36b}$$

$$\beta+\tilde{\beta}=-2y\frac{S}{N}, \qquad \gamma+\tilde{\gamma}=2x\frac{T}{N}. \tag{36c}$$

Второй столбец формул написан по аналогии для dM_2.

92. Использование обратного преобразования. Поверхность (A), очевидно, можно получить по формулам (33) как асимптотическое преобразование поверхности (M); следовательно, новые величины

$$\tilde{x} = \frac{x}{N}, \quad \tilde{y} = -\frac{y}{N}, \tag{a}$$

построенные согласно формулам подстановки (34), должны удовлетворять новым уравнениям (26) и (19)

$$\tilde{x}_2 + \tilde{\gamma}\tilde{y} = 0, \quad \tilde{y}_1 + \tilde{\beta}\tilde{x} = 0, \tag{26''}$$

$$\left.\begin{aligned} d\tilde{x} + \tilde{x}\,\tilde{\omega}_1^1 &= x_1\omega^1 + \tilde{x}_2\omega^2, \\ d\tilde{y} + \tilde{y}\,\tilde{\omega}_2^2 &= \tilde{y}_1\omega^2 + \tilde{y}_2\omega^2. \end{aligned}\right\} \tag{19''}$$

Дифференцируя уравнения (a), исключая $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{x}_2$, $\tilde{y}_1$ и имея в виду значения $\tilde{\omega}_2^1$, $\tilde{\omega}_2^2$ по формулам (36b) и обозначения

$$dx = x_1\omega^1 + x_2\omega^2, \quad dy = y_1\omega^1 + y_2\omega^2, \quad dN = N_1\omega^1 + N_2\omega^2, \tag{37a}$$

получим:

$$\frac{x_2}{N} - \frac{xN_2}{N^2} - \tilde{\gamma}\frac{y}{N} = 0, \quad -\frac{y_1}{N} + \frac{yN_1}{N^2} + \tilde{\beta}\frac{x}{N} = 0,$$

откуда, исключая x_2, y_1 с помощью уравнений (26) и $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ с помощью (36c), будем иметь:

$$N_1 = 2xS, \quad N_2 = -2yT \tag{37b}$$

или

$$N_u = 2xS, \quad N_v = -2yT. \tag{37b'}$$

Эти формулы позволяют вычислить выражения S и T, если дана пара функций x, y, удовлетворяющих уравнениям (26). Далее, уравнения (36c) для обратного перехода от поверхности (M) к поверхности (A) в своей левой части содержат те же самые суммы $\beta + \tilde{\beta}$, $\gamma + \tilde{\gamma}$; правые части их преобразуются по правилу подстановки (34). Сравнивая два выражения для сумм $\beta + \tilde{\beta}$, $\gamma + \tilde{\gamma}$, получим:

$$-2y\frac{S}{N} = -2\tilde{y}\frac{\tilde{S}}{\tilde{N}}, \quad 2x\frac{T}{N} = 2\tilde{x}\frac{\tilde{T}}{\tilde{N}}$$

или, подставляя

$$\tilde{y} = -\frac{y}{N}, \quad \tilde{N} = \frac{1}{N}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{N},$$

имеем

$$\tilde{S} = -\frac{S}{N}, \quad \tilde{T} = \frac{T}{N}. \tag{36d}$$

Наконец, первое уравнение (36a) при обратном переходе $(M) \to (A)$ напишется в виде

$$\omega_1^0 = \tilde{\omega}_3^2 - \mu\frac{S}{N}\omega^1. \tag{36e}$$

Складывая его с уравнением (36a)

$$\tilde{\omega}_1^0 = \omega_3^2 - \lambda\frac{S}{N}\omega^1$$

и пользуясь формулами (16c), получим:

$$(A - A' + \tilde{A} - \tilde{A}')\,\omega^1 + (B - B' + \tilde{B} - \tilde{B}')\,\omega^2 = -(\lambda + \mu)\frac{S}{N}\omega^1, \tag{b}$$

где тильдой сверху отмечены коэффициенты $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ для форм $\tilde{\omega}_i^k$. Поскольку формы ω_i^k и коэффициенты A, A' удовлетворяют уравнениям (16d'), а формы $\tilde{\omega}_i^k$ и их коэффициенты $\tilde{A}$, $\tilde{A}'$ — уравнениям (16d), имеем:

$$A - A' = -\beta_v, \; \tilde{A} - \tilde{A}' = -\tilde{\beta}_v - \tilde{\beta}\tilde{n},$$

где $\tilde{n}$ получается из формулы (16a) и, поскольку в силу уравнения (24) $\tilde{\omega}^2 = \omega^2$, $\tilde{\omega}_2^2 = \tilde{n}\,\tilde{\omega}^2$, уравнение (36b) даёт для $\tilde{n}$ значение

$$\tilde{n} = -2y\frac{T}{N}.$$

Отбирая теперь коэффициенты при форме ω^1 в разложении (b), получим:

$$\beta_v + \tilde{\beta}_v - 2y\tilde{\beta}\frac{T}{N} = -2y_2\frac{S}{N}$$

или, исключая $\tilde{\beta}$ с помощью (36c),

$$S_v = \beta T, \quad T_u = \gamma S. \tag{38}$$

Второе уравнение написано по аналогии. Если сюда подставить значения S и T из уравнений (37b'), то получим уравнение для функции N:

$$N_{uv} + \frac{x}{y}\beta N_v + \frac{y}{x}\gamma N_u = 0. \tag{39}$$

Если известно решение x, y системы (26')

$$x_v + \gamma y = 0, \quad y_u + \beta x = 0, \tag{26'}$$

то уравнения (37a), (29), (22), (27), (32), (37b')

$$\begin{gathered} \lambda = x_u - y_v, \qquad \mu = -x_u - y_v, \\ d\lambda + 2(y\omega_3^1 - x\omega_3^2) = \lambda_1\omega^1 + \mu_2\omega^2, \\ d\mu + 2(x\omega_1^0 + y\omega_2^0) = -\lambda_1\omega^1 + \mu_2\omega^2, \\ N = -\lambda\mu - 2y\mu_2 - 2x\lambda_1, \\ N_u = 2xS, \quad N_v = -2yT \end{gathered}$$

позволят вычислить λ, μ, N, S, T, т. е. найти по формулам (36a, b, c) все компоненты проективных движений тетраэдра $\{MM_1M_2M_3\}$, т. е. все элементы преобразованной поверхности.

93. Система уравнений для определения асимптотического преобразования поверхности. Можно итти в определении асимптотического преобразования иначе.

Уравнения (26), (29) позволяют построить систему формул

$$x_1 = \frac{\lambda-\mu}{2}, \quad x_2 = -\gamma y, \quad y_1 = -\beta x, \quad y_2 = -\frac{\lambda+\mu}{2}. \tag{40}$$

Уравнения (19) примут теперь вид:

$$\begin{aligned} dx + x\omega_1^1 &= \frac{\lambda-\mu}{2}\,\omega^1 - \gamma y\omega^2, \\ dy + y\omega_2^2 &= -\beta x\omega^1 - \frac{\lambda+\mu}{2}\,\omega^2. \end{aligned} \tag{40a}$$

Дифференцируя их внешним образом, получим:

$$\begin{aligned} &\left[d\,\frac{\lambda-\mu}{2} + y(\omega_3^1 - \omega_2^0) - x(\omega_3^2 + \omega_1^0),\ \omega^1\right] = 0, \\ &\left[d\,\frac{\lambda+\mu}{2} + y(\omega_3^1 + \omega_2^0) - x(\omega_3^2 - \omega_1^0),\ \omega^2\right] = 0. \end{aligned} \tag{41}$$

Система (40), (41) — в инволюции и определяет решение с двумя произвольными функциями одного аргумента. На этом мы могли бы остановиться, но если мы хотим ввести функции S, T, N, то надо систему (41) продолжать.

Если ввести уравнения (22), то уравнения (41) эквивалентны равенствам

$$\lambda_1 + \mu_1 = 0, \quad \lambda_2 - \mu_2 = 0.$$

Мы можем, следовательно, заменить квадратичные уравнения (41) следующими линейными уравнениями:

$$\begin{aligned} &d\,\frac{\lambda-\mu}{2} + y(\omega_3^1 - \omega_2^0) - x(\omega_3^2 + \omega_1^0) = -\mu_1\omega^1, \\ &d\,\frac{\lambda+\mu}{2} + y(\omega_3^1 + \omega_2^0) - x(\omega_3^2 - \omega_1^0) = \mu_2\omega^2. \end{aligned} \tag{41$'$}$$

Если ещё присоединить уравнение (32), чтобы ввести функцию N, то можно выразить μ_1 и μ_2 с помощью одного вспомогательного неизвестного ν в виде

$$\mu_1 = (\nu + \varphi)\,y, \quad \mu_2 = (\nu - \varphi)\,x, \tag{42}$$

где

$$\varphi = \frac{N + \lambda\mu}{4xy}. \tag{42$'$}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (41′), получим:

$$[d\mu_1 + x_1(\omega_3^2 + \omega_1^0) + y_2(\omega_3^2 - \omega_1^0) + 2y\omega_3^0,\ \omega^1] = 0,$$
$$[d\mu_2 + y_2(\omega_3^1 + \omega_2^0) + x_1(\omega_3^1 - \omega_2^0) + 2x\omega_3^0,\ \omega^2] = 0.$$

Если сюда внести значения (42) и обозначить

$$d\varphi - \varphi(\omega_1^1 + \omega_2^2) = \varphi_1\omega^1 + \varphi_2\omega^2,$$

$$\begin{aligned} \Delta\nu = d\nu - \nu(\omega_1^1 + \omega_2^2) + (\nu - B + B')\left(\frac{x_1}{x}\,\omega^1 + \frac{y_2}{y}\,\omega^2\right) - \varphi_1\omega^1 + \varphi_2\omega^2 + \\ + 2\omega_3^0 + (B + B')\left(\frac{y_2}{x}\,\omega^1 + \frac{x_1}{y}\,\omega^2\right) + \varphi\left(\frac{y_2}{y}\,\omega^2 - \frac{x_1}{x}\,\omega^1\right), \end{aligned} \tag{43$'$}$$

то получим:

$$[\Delta\nu\omega^1] = 0, \quad [\Delta\nu\omega^2] = 0,$$

откуда следует

$$\Delta\nu = 0. \tag{43}$$

Внешний дифференциал уравнения (43) обращается в тождество в силу уравнений (37b), (38):

$$S_v = \beta T, \quad T_u = \gamma S$$

или

$$[dS - \beta T\omega^2,\ \omega^1] = 0, \quad [dT - \gamma S\omega^1,\ \omega^2] = 0. \tag{44}$$

Таким образом, каждое решение системы (44) определяет семейство асимптотических преобразований поверхности (***A***), определяемое вполне интегрируемой системой

$$dx + x\omega_1^1 = \frac{\lambda-\mu}{2}\,\omega^1 - \gamma y\omega^2, \quad dy + y\omega_2^2 = -\beta x\omega^1 - \frac{\lambda+\mu}{2}\,\omega^2, \tag{45a}$$

$$\begin{aligned} &d\,\frac{\lambda-\mu}{2} + y(\omega_3^1 - \omega_2^0) - x(\omega_3^2 + \omega_1^0) = \left(-\frac{N+\lambda\mu}{4xy} - \nu\right)y\omega^1, \\ &d\,\frac{\lambda+\mu}{2} + y(\omega_3^1 + \omega_2^0) - x(\omega_3^2 - \omega_1^0) = \left(-\frac{N+\lambda\mu}{4xy} + \nu\right)x\omega^2, \end{aligned} \tag{45b}$$

$$dN = 2xS\omega^1 - 2yT\omega^2, \tag{45c}$$

$$\begin{aligned} d\nu + \nu(-\omega_1^1 - \omega_2^2) + (\nu - B + B')\left\{\frac{\lambda-\mu}{2x}\,\omega^1 - \frac{\lambda+\mu}{2y}\,\omega^2\right\} + \\ + (B+B')\left(-\frac{\lambda+\mu}{2x}\,\omega^1 + \frac{\lambda-\mu}{2y}\,\omega^2\right) - \frac{N+\lambda\mu}{4xy}\left(\frac{\lambda-\mu}{2x}\,\omega^1 + \frac{\lambda+\mu}{2y}\,\omega^2\right) - \\ - \varphi_1\omega^1 + \varphi_2\omega^2 + 2\omega_3^0 = 0 \end{aligned} \tag{45d}$$

с шестью произвольными постоянными, из которых существенны только пять, потому что умножение переменных x, y, λ, μ, S, T на одно и то же постоянное, а переменное N на его квадрат сохраняет систему (44), (45a)—(45d) и не меняет конгруэнции (***AM***), которая зависит только от отношения $x:y$.

94. Теорема переместительности асимптотических преобразований. Допустим, что нам даны две конгруэнции W, имеющие поверхность (A) своей первой фокальной поверхностью и определяемые величинами x^i, y^i, λ^i, μ^i, N^i, где $i=1,\ 2$.

Ввиду линейности уравнений (26), (29) относительно x, y, λ, μ величины

$$\begin{gathered} x=m_1x^1+m_2x^2, \quad \lambda=m_1\lambda^1+m_2\lambda^2, \\ y=m_1y^1+m_2y^2, \quad \mu=m_1\mu^1+m_2\mu^2, \\ m_1,\ m_2=\text{const.}, \\ N=N^1(m_1)^2+N^{12}m_1m_2+N^2(m_2)^2 \end{gathered} \tag{46a}$$

будут определять пучок конгруэнций W; при этом, согласно формуле (32) и соотношениям (27), величина $N^{12}=N^{21}$ определяется формулой

$$N^{12}=-\lambda^1\mu^2-\lambda^2\mu^1+2\left(x^1\mu_1^2+x^2\mu_1^1-y^1\mu_2^2-y^2\mu_2^1\right). \tag{46b}$$

Между тем, если подсчитать S по формуле (35), дифференцируя выражения (28) и пользуясь формулами (16c′) § 87, то получим:

$$S^i=\frac{\partial\mu_1^i}{\partial u}+\lambda^iA+\mu_2^i\beta+2y^ia_3^0-\mu^iA', \quad \omega_3^0=a_3^0\,du+b_3^0\,dv,$$

и для произвольной конгруэнции пучка

$$S=m_1S^1+m_2S^2;$$

теперь уравнение (37b′) даёт:

$$\frac{1}{2x}N_u=\frac{m_1}{2x^1}N_u^1+\frac{m_2}{2x^2}N_u^2,$$

или, если внести сюда значение N по формуле (46a),

$$\begin{aligned} N_u^1(m_1)^2+N_u^{12}m_1m_2+N_u^2(m_2)^2&=2xS= \\ &=2\left(x^1m_1+x^2m_2\right)\left(S^1m_1+S^2m_2\right), \end{aligned}$$

откуда

$$N_u^{12}=2x^1S^2+2x^2S^1,$$

и

$$N_u^{12}=\frac{x^2}{x^1}N_u^1+\frac{x^1}{x^2}N_u^2, \quad N_v^{12}=\frac{y^2}{y^1}N_v^1+\frac{y^1}{y^2}N_v^2. \tag{46c}$$

Естественно, следовательно, искать N^{12} в виде суммы

$$N^{12}=n^1+n^2, \tag{47}$$

где можно положить

$$n_u^1=\frac{x^2}{x^1}N_u^1, \quad n_v^1=\frac{y^2}{y^1}N_v^1, \tag{47a}$$

$$n_u^2=\frac{x^1}{x^2}N_u^2, \quad n_v^2=\frac{y^1}{y^2}N_v^2, \tag{47b}$$

ибо

$$\frac{\partial}{\partial v}(n_u^1)=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{x^2}{x^1}N_u^1\right)_v=\frac{x_v^2}{x^1}N_u^1-\frac{x^2}{x^1}\frac{x_v^1}{x^1}N_u^1+\frac{x^2}{x^1}N_{uv}^1$$

или, в силу (26′), (39),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v}(n_u^1)=-\frac{y^2}{x^1}\gamma N_u^1+\frac{x^2}{x^1}\left(\frac{y^1}{x^1}\gamma N_u^1-\frac{x^1}{y^1}\beta N_v^1-\frac{y^1}{x^1}\gamma N_u^1\right)&= \\ =-\gamma\frac{y^2}{x^1}N_u^1-\beta\frac{x^2}{y^1}N_v^1&, \end{aligned}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial u}(n_v^1)=-\beta\frac{x^1}{y^1}N_v^1-\gamma\frac{y^2}{x^1}N_u^1$$

и, следовательно, условие интегрируемости удовлетворено.

Введём теперь аналитические точки

$$\begin{aligned} M^{12}&=n^1A+\left(\lambda^2M^1-2x^2M_1^1+2y^2M_2^1\right), \\ M^{21}&=n^2A+\left(\lambda^1M^2-2x^1M_1^2+2y^1M_2^2\right). \end{aligned} \tag{48}$$

Нетрудно убедиться, складывая эти точки и пользуясь формулами (28), что коэффициенты при A_1, A_2, A_3 взаимно уничтожаются, а коэффициент при точке A

$$N^{12}+\mu^1\lambda^2+\mu^2\lambda^1-2\left(x^2\mu_1^1+x^1\mu_1^2-y^2\mu_2^1-y^1\mu_2^2\right)=0$$

обращается в нуль, если заменить N^{12} по формуле (46b).

Следовательно,

$$M^{12}+M^{21}=0,$$

и две аналитические точки, отличаясь нормированием, определяют одну и ту же геометрическую точку.

Между тем первая точка M^{12} разлагается по точкам A, M^1, M_1^1, M_2^1, лежащим в касательной плоскости поверхности (M^1). Следовательно, точка M^{12} лежит в касательной плоскости (M^1), а вторая точка разложена по точкам A, M^2, M_1^2, M_2^2 и лежит в касательной плоскости (M^2).

Внесём в формулу (48) вместо точки A выражение (33); мы получим:

$$M^{12}=M^1\left(\lambda^2-\frac{n^1\lambda^1}{N^1}\right)+M_1^1\left(-2x^2+2\frac{x^1}{N^1}n^1\right)+M_2^1\left(2y^2-2\frac{y^1}{N^1}n^1\right).$$

Сравнивая эту формулу с выражением (17), мы видим, что M^{12} получается из M^1 по формуле (17) со значениями параметров

$$x^{12} = -x^2 + \frac{x^1}{N^1} n^1, \quad y^{12} = y^2 - \frac{y^1}{N^1} n^1,$$
$$\mu^{12} = \lambda^2 - \frac{n^1\lambda^1}{N^1}, \qquad \lambda^{12} = \mu^2 - \frac{n^1\mu^1}{N^1}. \tag{49}$$

Эти параметры удовлетворяют уравнениям (16а), (26), (29), а уравнение (32) даст выражение

$$(N^1)^2 = N^2 - \frac{n^1 n^2}{N^1}. \tag{47'}$$

Итак, поверхность (M^{12}) получается асимптотическим преобразованием как из поверхности (M^1), так и из поверхности (M^2); это — четвёртая поверхность теоремы переместительности асимптотических преобразований. Определение этой поверхности зависит от выполнения квадратур (47а), (47b), а поскольку эти квадратуры вводят произвольное постоянное, мы получаем однопараметрическое семейство поверхностей (M^{12}), соответствующие точки которых лежат на прямой, соединяющей точку A с точкой $\lambda^2 M^1 - 2x^2 M_1^1 + 2y^2 M_2^1$.

95. Конгруэнция линейного комплекса. Система (44) допускает очевидное решение

$$S = 0, \quad T = 0, \tag{50}$$

тогда из уравнения (45с) следует:

$$N = \text{const}.$$

Формулы (36а), (36с), (36е) показывают, что в этом и только в этом случае

$$\tilde{\beta} = -\beta, \quad \tilde{\gamma} = -\gamma,$$
$$\tilde{\omega}_1^0 = \omega_3^2, \quad \tilde{\omega}_2^0 = \omega_3^1, \quad \tilde{\omega}_3^2 = \omega_1^0, \quad \tilde{\omega}_3^1 = \omega_2^0,$$

т. е. компоненты тетраэдра $\{M_i\}$ в точечных координатах вершин совпадают с компонентами (21) тетраэдра $\{a_i\}$ в тангенциальных координатах.

Следовательно, M и a удовлетворяют одной и той же системе уравнений, т. е. любое решение M линейно (с постоянными коэффициентами) выражается через четыре решения a. Получаемые, таким образом, формулы можно истолковать как формулы коррелятивного преобразования, переводящего касательную плоскость a первой фокальной поверхности в точку M второй фокальной поверхности. В этом коррелятивном преобразовании (П. Д. Г., стр. 29) точка M по самому построению всегда лежит в соответствующей ей плоскости a. Как известно, это характеризует нулевую систему линейного комплекса.

Так как в этой нулевой системе лучи конгруэнции соответствуют сами себе, ибо при дифференциальном перемещении точки M по лучу MA плоскость a будет вращаться около этого луча, то лучи конгруэнции принадлежат комплексу.

Итак, при условии $N = \text{const}$. конгруэнция W принадлежит линейному комплексу.

Если

$$N = 0, \tag{51}$$

то уравнение (31), определяющее асимптотические линии поверхности (M), обратится в тождество. Поверхность (M) вырождается в линию L, конгруэнция состоит из конусов с вершинами на L.

Если комплекс не специальный, то через каждую точку пространства проходит пучок лучей комплекса. Следовательно, все конусы с вершинами на линии L становятся плоскими пучками, а поскольку они описаны около поверхности (A), то эта поверхность — развёртывающаяся.

Если поверхность (A) произвольна, то комплекс — специальный, образованный всеми прямыми, пересекающими его ось. Из каждой точки оси выходит связка лучей комплекса, которой и принадлежит конус лучей конгруэнции. Следовательно, линия L совпадает с осью комплекса.

Итак, при условии (51) *конгруэнция W принадлежит к специальному линейному комплексу, ось которого служит второй фокальной поверхностью.*

III. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

96. Конгруэнции W с одной линейчатой фокальной поверхностью. Допустим теперь, что вторая фокальная поверхность (M) — линейчатая и линии $\omega^2 = 0$ — прямые.

Тогда прямая MM_1 при $\omega^2 = 0$ остаётся неподвижной

$$d(MM_1) \equiv 0\,(MM_1) \qquad (\text{mod}\ \omega^2),$$

или, выполняя дифференцирование

$$\tilde{\omega}_1^2 (MM_2) + \tilde{\omega}_1^3 (MM_3) - \omega^2 (M_1 M_2) \equiv 0 \quad (\text{mod}\ \omega^2)$$

и относя к тетраэдру (16а), получим:

$$\tilde{\beta}\omega^1 (MM_2) = 0.$$

Следовательно,

$$\tilde{\beta} = 0,$$

или в силу первого уравнения (36с) § 91

$$\beta = -2y\frac{S}{N}. \tag{52a}$$

Внося значение $S=-\frac{\beta N}{2y}$ в первое уравнение (44), которое будем писать ради простоты с компонентами тетраэдра (16a') § 87, и заменяя по формулам (45a), (45c) § 93:

$$[dN\omega^1]=2yT[\omega^1\omega^2], \quad [dy\,\omega^1]=\frac{\lambda+\mu}{2}[\omega^1\omega^2]$$

и

$$[d\beta\omega^1]=-\beta_v[\omega^1\omega^2],$$

после необходимых преобразований получим:

$$N\beta\left\{\frac{\lambda+\mu}{2y}+\frac{\beta_v}{\beta}\right\}[\omega^1\omega^2]=0.$$

Так как $[\omega^1\omega^2]\neq 0$, то обращается в нуль коэффициент. Если $N=0$, то, как мы видели в § 95, конгруэнция вырождается.

Если $\beta=0$, то первая фокальная поверхность (A) тоже линейчатая. Исключив оба эти случая, мы получаем конечное уравнение

$$\frac{\lambda+\mu}{2}=-y\frac{\beta_v}{\beta}. \tag{52b}$$

Вносим это значение во второе уравнение (45b). Мы получаем линейное уравнение, которое распадается на два конечных уравнения, если сравнить коэффициенты при формах ω^1, ω^2. Второе из них, если для компонент $\omega_3^1+\omega_2^0$ и $\omega_3^2-\omega_1^0$ воспользоваться формулами (16c) и (16d'), даёт значение ν

$$\nu=\frac{N+\lambda\mu}{4xy}+\beta\gamma+\frac{y}{x}\left\{C+C'-\frac{\beta_{vv}}{\beta}\right\}. \tag{52c}$$

Первое не содержит элементов конгруэнции и накладывает условие на поверхность (A)

$$\frac{\partial^2\ln\beta}{\partial u\,\partial v}=\beta\gamma. \tag{53}$$

Поверхности, определяемые уравнением (53), мы будем для краткости называть поверхностями F_1. Уравнение (53) имеет простой геометрический смысл: асимптотические линии $\omega^2=0$ поверхности F_1 принадлежат линейным комплексам (каждая линия своему линейному комплексу).

Эта теорема принадлежит проективно-дифференциальной теории поверхностей (П. Д. Г., стр. 48), но она легко доказывается. О линейных комплексах мы будем подробно говорить в главе VII. Заметим сейчас, что линейный комплекс определяется линейным уравнением для шести координат прямой в пространстве. Асимптотическая принадлежит линейному комплексу, если все её касательные принадлежат комплексу. Следовательно, нам надо показать, что существуют шесть постоянных коэффициентов так, что шесть координат аналитической прямой (AA_1) удовлетворяют линейному уравнению с этими коэффициентами при всяком значении параметра u для $\omega^2=0$.

Условимся записывать такое уравнение в виде произведения (плюккерова)

$$\{\mathfrak{a}(AA_1)\}=0, \tag{a}$$

где буквой $\mathfrak{a}$ обозначается совокупность шести постоянных коэффициентов уравнения комплекса. Уравнение (a) можно дифференцировать сколько угодно раз по переменному u при постоянном v или, иначе, можно брать полные дифференциалы, если писать вместо равенств сравнения по модулю ω^2, т. е. полагать $\omega^2=0$, что и приведёт к дифференцированию только по одному u.

Так как для тетраэдра (16a) § 86

$$d(AA_1)=(dA\,A_1)+(A\,dA_1)=\omega^2(A_2A_1)+\beta\omega^1(AA_2)+\omega^2(AA_3),$$

то первое дифференцирование уравнения (a) приведёт к сравнению

$$\beta\{\mathfrak{a}(AA_2)\}\omega^1\equiv 0 \pmod{\omega^2}$$

или, поскольку ω^1 не сравнимо с нулём по модулю ω^2 и по условию $\beta\neq 0$,

$$\{\mathfrak{a}(AA_2)\}=0. \tag{b}$$

Дифференцирование уравнения (b) даст нам таким же образом

$$\{\mathfrak{a}(A_1A_2)\}+\{\mathfrak{a}(AA_3)\}=0; \tag{c}$$

новое дифференцирование даст, если принимать во внимание предыдущие уравнения,

$$\{\mathfrak{a}(A_1A_3)\}=0. \tag{d}$$

Следующее дифференцирование даёт:

$$\omega_1^0\{\mathfrak{a}(AA_3)\}+\beta\omega^1\{\mathfrak{a}(A_2A_3)\}+\omega_3^2\{\mathfrak{a}(A_1A_2)\}\equiv 0 \pmod{\omega^2}$$

или в силу уравнения (c)

$$(\omega_3^2-\omega_1^0)\{\mathfrak{a}(A_1A_2)\}+\beta\omega^1\{\mathfrak{a}(A_2A_3)\}\equiv 0 \pmod{\omega^2} \tag{e'}$$

или, поскольку из уравнений (16c'), (16d') § 87 следует:

$$\omega_3^2-\omega_1^0=\beta_v\omega^1+(B'-B)\omega^2,$$

будем иметь:

$$(\ln\beta)_v\{\mathfrak{a}(A_1A_2)\}+\{\mathfrak{a}(A_2A_3)\}=0. \tag{e}$$

Дифференцируя ещё раз, получим:

$$d(\ln\beta)_v\{\mathfrak{a}(A_1A_2)\}+\omega_2^0\{\mathfrak{a}(AA_3)\}-\omega_3^1\{\mathfrak{a}(A_1A_2)\}\equiv 0 \pmod{\omega^2},$$

или

$$\{d(\ln\beta)_v-\omega_2^0-\omega_3^1\}\{\mathfrak{a}(A_1A_2)\}\equiv 0 \qquad (\operatorname{mod}\omega^2).$$

Если

$$\{\mathfrak{a}(A_1A_2)\}=0,$$

то в силу уравнений (a), (в), (c), (d), (e) все шесть рёбер тетраэдра $\{A_i\}$ будут принадлежать комплексу, а так как всякая прямая пространства может быть линейно представлена через шесть рёбер координатного тетраэдра, то линейный комплекс $\mathfrak{a}$ содержал бы все прямые пространства и его уравнение обратилось бы в тождество.

Если

$$\{\mathfrak{a}(A_1A_2)\}\neq 0,$$

то первый множитель сравним с нулём по модулю ω^2:

$$d(\ln\beta)_v-(\omega_2^0+\omega_3^1)\equiv 0 \qquad (\operatorname{mod}\omega^2).$$

В силу уравнений (16c′), (16d′) § 87

$$\omega_2^0+\omega_3^1=\beta\gamma\omega^1+(C+C')\,\omega^2, \qquad d(\ln\beta)_v=(\ln\beta)_{uv}\,\omega^1+(\ln\beta)_{vv}\,\omega^2$$

и наше сравнение прямо переходит в уравнение (53).

Имеем теорему:

Асимптотическое преобразование линейчатой поверхности переводит прямолинейные образующие в прямолинейные образующие (если вторая поверхность тоже линейчатая) *или в криволинейные асимптотические, принадлежащие линейным комплексам.*

97. Преобразование поверхностей F_1 в линейчатые поверхности. Теорема предыдущего параграфа допускает обращение — она даёт не только необходимое, но и достаточное условие асимптотического преобразования поверхности в линейчатую поверхность; именно, имеем теорему:

Если асимптотические одного семейства принадлежат линейным комплексам, то существуют конгруэнции W, которая переводит эти асимптотические в прямолинейные образующие второй фокальной поверхности.

Для доказательства этой теоремы нам надо только закончить исследование совместности системы, состоящей из уравнений (44), (45a)—(45d) § 93, определяющей все конгруэнции W с первой фокальной поверхностью (A), и уравнения (52a), которое требует, чтобы на второй фокальной поверхности асимптотические $\omega^2=0$ были прямыми.

Система пополнилась линейным уравнением, которое было получено дифференцированием уравнения (52a), и вместе с первым квадратичным уравнением (44) привело к конечному соотношению (52b). Дифференцирование конечного уравнения (52b) привело нас к условию (53) на поверхность (A), с одной стороны, и, с другой стороны, к новому конечному уравнению (52c), которое мы перепишем с помощью уравнения (42′) в виде

$$\nu=\varphi+\beta\gamma+\frac{y}{x}\left(C+C'-\frac{\beta_{vv}}{\beta}\right). \tag{54a}$$

Дифференцируя это равенство и пользуясь формулами (43′), (45a) § 93, (52b), получим:

$$d\nu=\varphi_1\omega^1+\varphi_2\omega^2+d(\beta\gamma)+\frac{y}{x}\,d\left(C+C'-\frac{\beta_{vv}}{\beta}\right)-$$
$$-\left(C+C'-\frac{\beta_{vv}}{\beta}\right)\left\{\left(\frac{\lambda-\mu}{2}\frac{y}{x^2}+\beta\right)\omega^1-\frac{y}{x}\left(\gamma\frac{y}{x}+\frac{\beta_v}{\beta}\right)\omega^2\right\}.$$

Внося значения ν и $d\nu$, а также пользуясь формулами (42′) § 93 и (52b) для φ и $\frac{\lambda+\mu}{2}$, мы приведём уравнение (45d) § 93 к виду:

$$2\omega_3^0+d(\beta\gamma)+\frac{y}{x}\,d\left(C+C'-\frac{\beta_{vv}}{\beta}\right)+\omega^1\left\{\frac{y}{x}\gamma\beta_v-\beta\left(C+C'-\frac{\beta_{vv}}{\beta}\right)\right\}+$$
$$+\omega^2\left\{2\varphi\frac{\partial\ln\beta}{\partial v}+2\varphi_2+\frac{\lambda-\mu}{2y}\beta\gamma+\right.$$
$$\left.+\frac{y}{x}\left(C+C'-\frac{\beta_{vv}}{\beta}\right)\left(\gamma\frac{y}{x}+2\frac{\partial\ln\beta}{\partial v}\right)\right\}=0. \tag{a}$$

Это уравнение распадается на два конечных уравнения, ибо коэффициенты при формах ω^1 и ω^2 должны равняться нулю. Мы можем получить эти два уравнения, умножая уравнение (a) внешним образом на ω^2 и на ω^1. Нетрудно заметить, что первое из этих уравнений

$$\left[2\omega_3^0+d(\beta\gamma)+\frac{y}{x}d(C+C')-\right.$$
$$\left.-\left\{\frac{y}{x}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\beta_{vv}}{\beta}\right)-\gamma\beta_v\right)+\beta\left(C+C'-\frac{\beta_{vv}}{\beta}\right)\right\}\omega^1,\ \omega^2\right]=0 \tag{b}$$

обращается в тождество.

Действительно, вычитая отсюда третье уравнение (16e′) § 87 и второе, умноженное на $\frac{y}{x}$, получим:

$$\frac{y}{x}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\beta_{vv}}{\beta}\right)-3\gamma\beta_v-\beta\gamma_v\right\}[\omega^1\,\omega^2]=0,$$

но в силу уравнения (53)

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\beta_{vv}}{\beta}\right)-3\gamma\beta_v-\beta\gamma_v=\frac{\partial}{\partial u}\left\{(\ln\beta)_{vv}+2(\ln\beta)_v^2\right\}-3\gamma\beta_v-\beta\gamma_v=$$
$$=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2\ln\beta}{\partial u\,\partial v}\right)+2\frac{\partial^2\ln\beta}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial\ln\beta}{\partial v}-3\gamma\beta_v-\beta\gamma_v=$$
$$=\frac{\partial}{\partial v}(\beta\gamma)+2\beta\gamma\frac{\partial\ln\beta}{\partial v}-3\gamma\beta_v-\beta\gamma_v=0$$

и уравнение (b) обращается в тождество.

Умножая уравнение (a) внешним образом на форму ω^1, получим:

$$\left[2\omega_3^0+d(\beta\gamma)+\left\{2\varphi_2+2\varphi\frac{\partial\ln\beta}{\partial v}+\frac{\lambda-\mu}{2y}\beta\gamma+\frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial v}\left(C+C'-\frac{\beta_{vv}}{\beta}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{y}{x}\left(C+C'-\frac{\beta_{vv}}{\beta}\right)\left(\gamma\frac{y}{x}+2\frac{\partial\ln\beta}{\partial v}\right)\right\}\omega^2,\ \omega^1\right]=0,$$

или, вычитая последнее уравнение (16e′) § 87,

$$\left\{2\varphi_2+2\varphi\frac{\partial\ln\beta}{\partial v}+\frac{\lambda-\mu}{2y}\beta\gamma+\frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial v}\left(C+C'-\frac{\beta_{vv}}{\beta}\right)+\gamma\left(A+A'-\frac{\gamma_{uu}}{\gamma}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{y}{x}\left(C+C'-\frac{\beta_{vv}}{\beta}\right)\left(\gamma\frac{y}{x}+2\frac{\partial\ln\beta}{\partial v}\right)\right\}[\omega^1\omega^2]=0,$$

откуда, поскольку в силу (42′), (43′) § 93, а также (45a), (45c) § 93 и (16c′) § 87

$$2\varphi_2=\frac{\partial}{\partial v}\frac{N+\lambda\mu}{2xy}=\frac{N_v+\frac{\lambda+\mu}{2}\frac{\partial(\lambda+\mu)}{\partial v}-\frac{\lambda-\mu}{2}\frac{\partial(\lambda-\mu)}{\partial v}}{2xy}-2\varphi\frac{\partial\ln(xy)}{\partial v}=$$
$$=-\frac{1}{x}T-2\varphi\left(\frac{\partial\ln\beta}{\partial v}-\frac{y}{x}\gamma\right)+\frac{\lambda-\mu}{2y}\left(\frac{y}{x}\gamma_u-\beta\gamma\right)+\frac{y}{x}\frac{\beta_{vv}}{\beta}\frac{\partial\ln\beta}{\partial v},$$

получим:

$$T=2\varphi\gamma y+\frac{\lambda-\mu}{2x}\gamma_u+y\frac{\partial}{\partial v}(C+C')+x\gamma\left(A+A'-\frac{\gamma_{uu}}{\gamma}\right)+$$
$$+\gamma\frac{y^2}{x}\left(C+C'-\frac{\beta_{vv}}{\beta}\right)+2y(C+C')\frac{\partial\ln\beta}{\partial v}-y\frac{\beta_{vvv}}{\beta}. \quad (54b)$$

Это значение T удовлетворяет второму уравнению (44).

Система уравнений (45a), первое (45b), (45c) § 93 вполне интегрируема и по заданной поверхности (A), удовлетворяющей условию (53), т. е. с асимптотическими одного семейства, принадлежащими линейным комплексам, определяет асимптотические преобразования, которые переводят эти асимптотические в прямолинейные образующие с произволом трёх произвольных постоянных. Четвёртое не существенно, ибо система, очевидно, допускает умножение x, y, λ на произвольное постоянное с одновременным умножением N на его квадрат; это не меняет отношения $x:y$ и, следовательно, оставляет без изменения конгруэнцию.

98. Особые преобразования поверхности F_1 в поверхность F_1. Мы будем называть асимптотическое преобразование поверхности F_1 в поверхность F_1 *особым*, если асимптотические линии поверхности F_1 и их преобразования, принадлежащие по условию линейным комплексам, принадлежат (каждая пара соответствующих линий) одному и тому же линейному комплексу.

Вернёмся к уравнениям (a — e) § 96 и потребуем, чтобы тот же самый комплекс $\mathfrak{a}$ содержал касательные (MM_1) к линии $\omega^2=0$ преобразованной поверхности (M). Пользуясь формулами (28) § 91, получим:

$$(MM_1)=(\mu A+2xA_1+2yA_2,\ \mu_1A+\lambda A_1+2yA_3)=$$
$$=(\mu\lambda-2x\mu_1)(AA_1)-2\mu_1y(AA_2)+2y\mu(AA_3)-$$
$$-2\lambda y(A_1A_2)+4xy(A_1A_3)+4y^2(A_2A_3).$$

Теперь, в силу уравнений (a — e) § 96, условие принадлежности комплексу прямой (MM_1)

$$\{\mathfrak{a}(MM_1)\}=0$$

примет вид

$$-2\lambda y\{\mathfrak{a}(A_1A_2)\}+2\mu y\{\mathfrak{a}(AA_3)\}+4y^2\{\mathfrak{a}(A_2A_3)\}=0,$$

а в силу

$$\{\mathfrak{a}(AA_3)\}=-\{\mathfrak{a}(A_1A_2)\},\quad \{\mathfrak{a}(A_2A_3)\}=-(\ln\beta)_v\{\mathfrak{a}(A_1A_2)\}$$

и неравенства нулю произведения $\{\mathfrak{a}(A_1A_2)\}$, получим по сокращении на $2y$

$$\lambda+\mu+2y(\ln\beta)_v=0, \quad (52b)$$

т. е. в точности уравнение (52b) § 96. Тем не менее мы придём к другому результату, ибо теперь мы не имеем уравнения (52a).

Дифференцируя уравнение (52b) и пользуясь системой (45a), (45b) § 93, обнаружим, что члены с формой ω^1 сокращаются, и мы опять получим уравнение (52c):

$$\nu=\varphi+\beta\gamma+\frac{y}{x}\left(C+C'-\frac{\beta_{vv}}{\beta}\right). \quad (54a)$$

Дифференцируя это выражение и внося в уравнение (45d) § 93, заметим, что в силу уравнения (53) компонента с формой ω^1 сокращается, и мы получаем одно конечное уравнение:

$$2\varphi_2+\beta\gamma\frac{\lambda-\mu}{2y}+\frac{y}{x}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(C+C'-\frac{\beta_{vv}}{\beta}\right)+2\left(C+C'-\frac{\beta_{vv}}{\beta}\right)(\ln\beta)_v\right\}+$$
$$+2\varphi(\ln\beta)_v+\frac{y^2}{x^2}\gamma\left(C+C'-\frac{\beta_{vv}}{\beta}+\gamma\left(A+A'-\frac{\gamma_{uu}}{\gamma}\right)=0,\right.$$

которое определит значение T, удовлетворяющее второму уравнению (44) § 93.

Система, содержащая квадратичное уравнение (44) (первое), линейные уравнения (45a), (45c) и первое (45b), будет в инволюции и определит искомые асимптотические преобразования с одной произвольной функцией одного аргумента.

99. Асимптотические преобразования линейчатых поверхностей. Допустим теперь, что поверхность (A) — линейчатая поверхность и линии $\omega^1=0$ — прямолинейные образующие. Следовательно,

$$d(AA_2)\equiv\theta(AA_2)\pmod{\omega^1}$$

и

$$\gamma=0. \quad (55a)$$

Если на второй фокальной поверхности (M) конгруэнции W линии $\omega^2=0$ — прямые, то по теореме § 96 соответствующие им криволинейные асимптотические поверхности (A) принадлежат линейным комплексам, и имеет место уравнение (53). В силу уравнения (55a) оно теперь примет вид

$$\frac{\partial^2 \ln \beta}{\partial u\, \partial v}=0, \tag{55b}$$

и, следовательно, β есть произведение функции одного u на функцию одного v.

Так как абсолютный инвариант (12′) § 84

$$2\,\frac{\psi_3}{\varphi_2}=\frac{\beta\, du^2}{dv}+\frac{\gamma\, dv^2}{du}$$

при всех преобразованиях параметров u, v переходит сам в себя, то простым их выбором можно привести коэффициент β к единице, если, конечно, он не равен нулю,

$$\beta=1.$$

Тогда формулы (16c′) § 87 примут вид

$$\omega_1^0=A\omega^1,\ \omega_2^0=C\omega^2,\ \omega_3^2=A\omega^1,\ \omega_3^1=C\omega^2,$$

откуда внешним дифференцированием получим:

$$\begin{gathered}[dA\omega^1]=0, \quad [dC\omega^2]=0,\\ [\omega_3^0-C\omega^1, \omega^2]=0, \quad [\omega_3^0\omega^1]=0.\end{gathered} \tag{a}$$

Следовательно,

$$\omega_3^0=C\omega^1,$$

откуда внешним дифференцированием получим:

$$[dC\omega^1]=0,$$

т. е. $dC=0$ и C — постоянная.

Уравнение (52b) даёт

$$\lambda+\mu=0, \tag{b}$$

а уравнения (45a, b) § 93

$$[dx\,\omega^1]=0,\ [dy\,\omega^1]=0,\ [d(\lambda-\mu),\ \omega^1]=0, \tag{c}$$

и уравнения (41′) § 93 дадут:

$$\mu_2=2Cy,\ \mu_1=2xA-\left(\frac{\lambda-\mu}{2}\right)_u$$

и новое дифференцирование в силу уравнений (a), (c) даст:

$$[d\mu_1\omega^1]=0.$$

Следовательно, поскольку $N=-\lambda\mu-2y\mu_2-2x\lambda_1$,

$$[dN\omega^1]=0,$$

и уравнение (45c) § 93 приведёт к значению

$$T=0,$$

ибо y не может равняться нулю, иначе луч конгруэнции AM совпадал бы с асимптотической касательной и конгруэнция вырождалась бы в параболическую.

Теперь по формулам (36c) § 91

$$\tilde{\gamma}=-\gamma=0$$

и, следовательно, линии $\omega^1=0$ на поверхности (M) — прямые.

Имеем теорему:

Если обе фокальные поверхности конгруэнции W — линейчатые, и кривым асимптотическим первой фокальной поверхности соответствуют прямолинейные образующие второй, то и прямолинейным образующим первой фокальной поверхности соответствуют прямые линии второй и, следовательно, эта поверхность есть поверхность 2-го порядка.

В силу теоремы предыдущего параграфа, все кривые асимптотические на поверхности (A) принадлежат к различным линейным комплексам, но комплекс, содержащий все касательные какой-либо линии, содержит весь пучок прямых, лежащих в соприкасающейся плоскости этой линии с центром в точке касания.

Действительно, если пара пересекающихся прямых принадлежит линейному комплексу, то все прямые пучка, построенного на этих прямых, принадлежат комплексу, а соприкасающаяся плоскость содержит две бесконечно близкие касательные, которые по условию принадлежат комплексу и до бесконечно малых второго порядка имеют общую точку в точке касания. Не представляет затруднений и строгое доказательство этого положения. Так из уравнения (a) § 96 вытекает уравнение (b); если комплекс содержит касательную к асимптотической (AA_1), то он содержит и касательную (AA_2), а следовательно, и весь пучок касательных в касательной плоскости. Теперь эта линия — асимптотическая и её соприкасающаяся плоскость совпадает с касательной плоскостью поверхности.

Этот последний случай для нас имеет особенно важное значение: комплекс, содержащий касательные асимптотической, содержит все касательные к поверхности в каждой точке этой асимптотической, в том числе и все образующие этой линейчатой поверхности (A). Так как линейчатая поверхность своими образующими принадлежит теперь каждому из однопараметрического семейства линейных комплексов, которым принадлежат её кривые асимптотические, то она принадлежит и их пересечению, т. е. линейной конгруэнции, и значит, имеет две действительные или мнимые прямолинейные направляющие.

Обратно, если линейчатая поверхность принадлежит линейной конгруэнции и, следовательно, имеют место уравнения (55a), (55b), то по формулам §§ 96, 97 мы построим асимптотическое преобразование поверхности (A), переводящее криволинейные асимптотические $\omega^2=0$ в прямолинейные образующие второй фокальной поверхности, а тогда, по доказанной теореме, мы получим не только $\tilde{\beta}=0$, но и $\tilde{\gamma}=0$ и поверхность (M) будет поверхностью 2-го порядка.

Всякая линейчатая поверхность линейной конгруэнции может быть преобразована с помощью конгруэнции W в поверхность 2-го порядка.

Для произвольной линейчатой поверхности нетрудно найти конгруэнцию W, преобразующую её в линейчатую поверхность так, что прямолинейные образующие соответствуют друг другу.

По формулам (36c) из условия

$$\beta=0, \quad \tilde{\beta}=0$$

вытекает

$$S=0,$$

и обратно, из $S=0$, $\beta=0$ следует $\tilde{\beta}=0$.

При этих условиях первое уравнение (44) удовлетворено, система (44), (45a)—(45d) в инволюции и определит преобразование с произволом одной функции одного аргумента, ибо содержит одно квадратичное уравнение (44), которое позволит определить значение дифференциала dT на втором линейном элементе интегрального элемента $\mathcal{E}_2$ системы.

100. Асимптотические преобразования поверхностей 2-го порядка. Если поверхность (A) есть поверхность 2-го порядка, то её асимптотические состоят из прямолинейных образующих. Предполагая их действительными и строя тетраэдр $\{A_i\}$ на образующих AA_1, AA_2, мы получим прежде всего

$$\beta=0, \quad \gamma=0. \tag{56}$$

Теперь по формулам (16c′) § 87 получим:

$$\omega_1^0=A\omega^1, \quad \omega_2^0=C\omega^2, \quad \omega_3^2=A\omega^1, \quad \omega_3^1=C\omega^2$$

и внешнее дифференцирование даст

$$[dA\omega^1]=0, \quad [dC\omega^2]=0, \quad [\omega_3^0\omega^1]=0, \quad [\omega_3^0\omega^2]=0.$$

Следовательно,

$$\omega_3^0=0.$$

Вся прямая AA_1 принадлежит поверхности (A), а так как при $\omega^1=0$ точка A_1 перемещается по прямой A_1A_3, то эта прямая тоже принадлежит поверхности, т. е. тетраэдр $\{A_i\}$ построен на четырёх образующих AA_1, AA_2, A_1A_3 и A_2A_3 поверхности 2-го порядка.

Из уравнений (26) § 90 в силу условия (56) вытекает, что функции x и y суть произвольные функции одной переменной u или соответственно одной переменной v

$$x=x(u), \quad y=y(v).$$

Из уравнений (18a), (18b) § 88 фокальной сети, которые для тетраэдра (16a) § 86 можно написать в виде

$$\frac{du}{x}=\pm\frac{dv}{y},$$

вытекает, что простой заменой параметров u, v эти две произвольные функции $x(u)$, $y(v)$ можно привести к единице

$$x=1, \quad y=1,$$

и линии, касательные к которым образуют конгруэнцию W, запишутся

$$du-dv=0.$$

Уравнения (26) § 90, очевидно, удовлетворятся и при $x=1$, $y=-1$, т. е. касательные к линии $u+v=\text{const}$. опишут тоже конгруэнцию W.

Так как после перехода к параметрам фокальной сети

$$u+v=2\xi, \quad u-v=2\eta$$

вторая квадратичная форма (метрическая)

$$2D'\,du\,dv=2D'(d\xi^2-d\eta^2)$$

принимает изотермический вид (Т. П., стр. 54), то сеть называется изотермически сопряжённой.

Отсюда замечательное следствие:

Всякая изотермически сопряжённая сеть на поверхности 2-го порядка служит фокальной сетью двух конгруэнций W: касательные к линиям обоих сопряжённых семейств сети описывают конгруэнции W.

Мы вернёмся к этому замечательному результату в § 111.

Вторая фокальная поверхность такой конгруэнции W может быть снова поверхностью 2-го порядка; для этого, согласно формулам (36c) § 91, надо выбрать $S=T=0$, т. е. $N=\text{const}$.; следовательно, конгруэнция будет принадлежать линейному комплексу.

Поверхность (M) может быть, как мы видели, линейчатой поверхностью с одним семейством кривых асимптотических. Наконец, она может не иметь прямолинейных образующих, и в этом случае оба семейства асимптотических линий будут принадлежать к различным (для каждой линии) линейным комплексам.

IV. ПОВЕРХНОСТИ F_2 С АСИМПТОТИЧЕСКИМИ ОБОИХ СЕМЕЙСТВ В ЛИНЕЙНЫХ КОМПЛЕКСАХ

101. Преобразование поверхности F_2 в поверхность 2-го порядка. Докажем обратную теорему.

Поверхность, у которой каждая асимптотическая того и другого семейства принадлежит какому-нибудь линейному комплексу, может быть преобразована и притом двумя способами в одну и ту же поверхность 2-го порядка.

Допустим, что поверхность (A) имеет свои асимптотические в линейных комплексах. Следовательно, уравнение (53) § 96 имеет место для обоих коэффициентов β и γ:

$$\frac{\partial^2 \ln \beta}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 \ln \gamma}{\partial u\, \partial v} = \beta\gamma. \tag{57}$$

Докажем сначала существование таких поверхностей. Из уравнения (57) следует, что отношение $\beta:\gamma$ есть произведение функций одного u и одного v

$$\beta:\gamma = \varphi(u)\psi(v).$$

Так как абсолютный инвариант (12′) § 84

$$\frac{\psi_3}{\varphi_2} = \frac{\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3}{2\, du\, dv}$$

при замене параметров переходит сам в себя, то простой заменой

$$U_1 = \int \sqrt[3]{\varphi(u)}\, du, \quad V_1 = \int \frac{dv}{\sqrt[3]{\psi(v)}}$$

можно привести отношение

$$\frac{\beta\, du^3}{\gamma\, dv^3} = \frac{\varphi(u)\psi(v)\, du^3}{dv^3}$$

к виду $dU_1^3 : dV_1^3$, т. е. привести отношение $\beta:\gamma$ к единице.

Будем предполагать, что это преобразование уже сделано и $\beta=\gamma$.

При этом предположении уравнение (57) интегрируется и общим интегралом будет:

$$\beta^2 = \gamma^2 = \frac{U'V'}{(U+V)^2}. \quad U = f_1(u), \quad V = f_2(v). \tag{57′}$$

Отнесём поверхность (A) к голономному тетраэдру (16a) § 86, выбирая нормирование точки A так, чтобы

$$m = -(\ln\beta)_u, \quad n = -(\ln\beta)_v,$$

и помещая точку A_3 на прямой AA_3 так, чтобы привести коэффициент B' к нулю. По формулам (16d) § 86 получим:

$$B = \beta^2 - (\ln\beta)_{uv} = 0, \quad A' - A = \beta_v - \beta(\ln\beta)_v = 0,$$
$$C' - C = \beta_u - \beta(\ln\beta)_u = 0,$$

т. е. матрица компонент примет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega^1 & \omega^2 & 0 \\ A\omega^1 & -(\ln\beta)_u\omega^1 & \beta\omega^1 & \omega^2 \\ C\omega^2 & \beta\omega^2 & -(\ln\beta)_v\omega^2 & \omega^1 \\ \beta(C\omega^1 + A\omega^2) & C\omega^2 & A\omega^1 & -(\ln\beta)_u\omega^1 - (\ln\beta)_v\omega^2 \end{pmatrix} \tag{58}$$

и, следовательно, будет совпадать до нормирования вершин, т. е. до компонент ω_i^j с матрицей (14a) § 85.

Уравнения структуры дают для матрицы (58) только уравнения

$$[dA\,\omega^1] = 0, \quad [dC\,\omega^2] = 0,$$
$$[dC + 2C d\ln\beta, \omega^1] + [dA + 2A\, d\ln\beta, \omega^2] = 0,$$

откуда, развёртывая по лемме Картана, получим:

$$dA = \{D - 2A(\ln\beta)_u\}\omega^1, \quad dC = \{D - 2C(\ln\beta)_v\}\omega^2, \tag{59a}$$

где D — новый неизвестный коэффициент. Внешнее дифференцирование даёт:

$$[dD - 2A\beta^2\omega^2, \omega^1] = 0, \quad [dD - 2C\beta^2\omega^1, \omega^2] = 0,$$

откуда

$$dD = 2C\beta^2\omega^1 + 2A\beta^2\omega^2. \tag{59b}$$

Внешний дифференциал уравнения (59b) обращается в нуль в силу предыдущих уравнений. Система (59a), (59b) вполне интегрируема и для всякого выбора функций U, V в формулах (57′) определяет поверхность с тремя произвольными постоянными. Общий произвол поверхностей с асимптотическими в линейных комплексах зависит от двух произвольных функций одного аргумента, именно: функций U и V в формуле (57′).

Мы будем обозначать этот класс поверхностей буквой F_2. Обратимся к доказательству теоремы о возможности преобразования поверхности F_2 в поверхность 2-го порядка. Для этого надо обнаружить совместность системы (44), (45a), (45d) § 93 с условиями

$$\tilde{\beta} = 0, \quad \tilde{\gamma} = 0.$$

Уравнения (36c) § 91 преобразуют эти условия к виду

$$S = -\frac{N\beta}{2y}, \quad T = \frac{N\beta}{2x}.$$

Внося эти значения в уравнения (44), получим:

$$\frac{\lambda+\mu}{2y} = 0, \quad \frac{\lambda-\mu}{2x} = 0,$$

т. е. $\lambda = \mu = 0$. Следовательно, уравнения (45b) дадут:

$$N = 4(Ax^2 - Cy^2), \quad \nu = A\frac{x}{y} + C\frac{y}{x}.$$

Дифференцируя эти уравнения, получим оба раза одно и то же квадратное уравнение для отношения $\frac{y}{x}$

$$\beta Ax^2 + Dxy + \beta Cy^2 = 0. \tag{60}$$

Внешний дифференциал этого уравнения обращается в нуль в силу уравнений системы. Следовательно, уравнение (60) надо рассматривать как интеграл системы.

Таким образом, мы нашли две конгруэнции W, соответствующие двум корням $\frac{x}{y}$ уравнения (60), которые переводят произвольную поверхность F_2 в поверхность 2-го порядка. Вырождение второй фокальной поверхности наступит только при N, равном нулю.

Оставляя случаи вырождения в стороне, нам остаётся доказать последнюю часть нашей теоремы: *оба асимптотических преобразования переводят поверхность F_2 в одну и ту же поверхность 2-го порядка Q.*

102. Условие стационарности поверхности 2-го порядка Q, присоединённой к тетраэдру $\{A_i\}$. Чтобы доказать совпадение двух поверхностей 2-го порядка, получаемых двумя асимптотическими преобразованиями из одной и той же поверхности F_2, поставим общий вопрос: каким условиям должны удовлетворять коэффициенты уравнения поверхности 2-го порядка в координатах относительно тетраэдра $\{A_i\}$, чтобы при всех перемещениях тетраэдра, когда его вершина A описывает поверхность (A), уравнение определяло бы одну и ту же неподвижную поверхность 2-го порядка?

Если произвольная точка P относительно тетраэдра $\{A_i\}$ определяется формулой

$$P = \xi^i A_i, \qquad i = 0, 1, 2, 3, \tag{a}$$

то мы говорим, что величины ξ^i суть местные координаты точки P относительно тетраэдра $\{A_i\}$. Если точка P — неподвижна, а тетраэдр $\{A_i\}$ перемещается, то координаты ξ^i меняются. Закон изменения определяется из требования неподвижности геометрической точки

$$dP = \theta P.$$

Дифференцируя уравнение (a) и пользуясь общими формулами (1) для дифференциалов dA_i, получим тождество

$$A_i\, d\xi^i + \xi^i A_j \omega_i^j = \theta \xi^i A_i,$$

или, меняя во втором члене индексы суммирования i на j и наоборот,

$$A_i (d\xi^i + \xi^j \omega_j^i - \theta \xi^i) = 0,$$

откуда в силу линейной независимости точек A_i получим:

$$d\xi^i + \xi^j \omega_j^i - \theta \xi^i = 0. \tag{61}$$

Пусть теперь имеем уравнение поверхности 2-го порядка в координатах ξ^i относительно тетраэдра $\{A_i\}$

$$a_{ik}\xi^i\xi^k = 0. \tag{62}$$

При перемещении координатного тетраэдра $\{A_i\}$ меняются местные координаты ξ^i по формулам (61), меняются коэффициенты a_{ik}, но уравнение должно определять ту же поверхность, т. е. удовлетворяться новыми координатами тех же точек.

Отсюда вытекает, что квадратичная форма в левой части уравнения может получать только приращения, пропорциональные этой квадратичной форме

$$d(a_{ik}\xi^i\xi^k) = \vartheta a_{ik}\xi^i\xi^k,$$

или

$$da_{ik}\xi^i\xi^k + a_{ik}\xi^i d\xi^k + a_{ik}\xi^k d\xi^i = \vartheta a_{ik}\xi^i\xi^k,$$

или в силу формул (61)

$$da_{ik}\xi^i\xi^k + a_{ik}\xi^i(\theta\xi^k - \xi^j\omega_j^k) + a_{ik}\xi^k(\theta\xi^i - \xi^j\omega_j^i) = \vartheta a_{ik}\xi^i\xi^k,$$

или, меняя индексы суммирования j и k во втором члене первой скобки, j и i во втором члене второй и вынося $\xi^i\xi^k$ за скобку,

$$\xi^i\xi^k\left\{da_{ik} + (2\theta - \vartheta)a_{ik} - a_{ij}\omega_k^j - a_{jk}\omega_i^j\right\} = 0.$$

Так как равенство тождественное, то фигурная скобка должна равняться нулю, откуда получим закон изменения коэффициентов

$$da_{ik} = a_{ij}\omega_k^j + a_{jk}\omega_i^j + \vartheta a_{ik}, \tag{63}$$

где вместо двух форм θ и ϑ мы сохранили только одну ввиду её произвольности.

103. Поверхность 2-го порядка, присоединённая к поверхности F_2. Допустим теперь, что поверхность (62) и является той поверхностью 2-го порядка Q, которую описывает точка M, определяемая уравнением (17). Тогда она не только будет содержать точку M при всех перемещениях тетраэдра, но ей будут принадлежать и все точки прямолинейных образующих MM_1 и MM_2.

Так как теперь

$$\mu = 0, \quad \mu_1 = (\nu + \varphi)y = 2Ax, \quad \mu_2 = (\nu - \varphi)x = 2Cy$$

и

$$\begin{aligned} M &= 2xA_1 + 2yA_2, \\ M_1 &= 2AxA + 2yA_3, \\ M_2 &= 2CyA + 2xA_3, \end{aligned} \tag{64}$$

то поверхность (62) должна содержать любую из точек

$$\frac{1}{2}(M+kM_1)=kAxA+xA_1+yA_2+kyA_3,$$
$$\frac{1}{2}(M+lM_2)=lCyA+xA_1+yA_2+lxA_3.$$

Внося координаты этих точек в уравнение (62) и приравнивая нулю коэффициенты при параметрах k, l, получим:

$$\begin{aligned}
a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2&=0,\\
Aa_{01}x^2+(Aa_{02}+a_{13})\,xy+a_{23}y^2&=0,\\
a_{13}x^2+(Ca_{01}+a_{23})\,xy+Ca_{02}y^2&=0,\\
A^2a_{00}x^2+2Aa_{03}xy+a_{33}y^2&=0,\\
C^2a_{00}y^2+2Ca_{03}xy+a_{33}x^2&=0.
\end{aligned}\tag{a}$$

Если поверхности Q и Q', которые соответствуют двум решениям $x:y$ уравнения (60), совпадают, следовательно, определяются одним и тем же уравнением (62), то каждое из уравнений (a) имеет место для обоих решений уравнения (60), а потому может отличаться от него только общим множителем. Обозначая множитель пропорциональности для первого уравнения (a) буквой t, для второго и третьего — буквами σ, σ' и для двух последних — $A\tau$ и $C\tau'$, получим условие пропорциональности коэффициентов в виде равенств

$$\begin{array}{lll}
a_{11}=tA\beta, & 2a_{12}=tD, & a_{22}=tC\beta,\\
a_{01}=\sigma\beta, & Aa_{02}+a_{13}=\sigma D, & a_{23}=\sigma C\beta,\\
a_{13}=\sigma' A\beta, & Ca_{01}+a_{23}=\sigma' D, & a_{02}=\sigma'\beta,\\
a_{00}=\tau\beta, & 2a_{03}=\tau D, & a_{33}=\tau AC\beta,\\
a_{00}=\tau'\beta, & 2a_{03}=\tau' D, & a_{33}=\tau' AC\beta.
\end{array}$$

Равенства двух последних строк показывают, что мы должны принять

$$\tau'=\tau.$$

Из уравнений второй и третьей строк по исключении коэффициентов a_{ik} получаем два уравнения на σ, σ'

$$2A\beta\sigma'-\sigma D=0,$$
$$2C\beta\sigma-\sigma' D=0.$$

Обращение в нуль определителя системы

$$4AC\beta^2-D^2=0$$

приводит к совпадению корней уравнения (60) и тогда теорема о совпадении поверхностей Q и Q' становится тривиальной. Следовательно, мы должны положить

$$\sigma=\sigma'=0.$$

Если $\tau=0$, то $a_{00}=0$ и поверхность (62) при всяком положении тетраэдра содержит точку A, т. е. поверхность (A) совпадает с поверхностью 2-го порядка Q. Исключая этот неинтересный случай, мы можем, сокращая всё уравнение на τ, положить

$$\begin{array}{lllll}
a_{11}=t'A\beta, & 2a_{12}=t'D, & a_{22}=t'C\beta, & a_{00}=\beta, & 2a_{03}=D,\\
a_{33}=AC\beta, & a_{01}=0, & a_{02}=0, & a_{13}=0, & a_{23}=0,
\end{array}\tag{65a}$$

где $t'=\frac{t}{\tau}$.

Коэффициенты (65a) определяют одну поверхность 2-го порядка Q, которая является второй фокальной поверхностью двух конгруэнций, определяемых двумя решениями уравнения (60), только в том случае, если они удовлетворяют условиям стационарности (63).

Внося значения (65a) в уравнение (63) для $i=0$, $k=1$

$$da_{01}=\left(Aa_{00}-a_{01}\frac{\partial\ln\beta}{\partial u}+a_{02}\beta+a_{11}\right)\omega^1+(a_{03}+a_{12})\,\omega^2+\vartheta a_{01}$$

и приравнивая нулю коэффициенты при формах ω^1, ω^2, мы получим:

$$A\beta(1+t')=0,\ D(1+t')=0,$$

откуда

$$t'=-1.\tag{65b}$$

Точно так же уравнение (63) для $i=0$, $k=0$

$$da_{00}=2a_{01}\omega^1+2a_{02}\omega^2+\vartheta a_{00}$$

по внесении величин (65a) даёт:

$$\vartheta=d\ln\beta.\tag{65c}$$

Все остальные уравнения (63) теперь обращаются в тождества.

Следовательно, уравнение

$$\beta(\xi^0)^2+D\xi^0\xi^3+AC\beta(\xi^3)^2=A\beta(\xi^1)^2+D\xi^1\xi^2+C\beta(\xi^2)^2\tag{66}$$

определяет в местных координатах инвариантную относительно преобразований тетраэдра $\{A_i\}$ поверхность 2-го порядка. Точка M с координатами x, y, определяемыми уравнением (60), при всяком положении тетраэдра $\{A_i\}$ лежит на поверхности (66). Значит, вся поверхность (M) помещается на поверхности 2-го порядка (66), заполняя её всю или отчасти (может перекрыть несколько раз).

Так как обе точки M и M', определяемые двумя решениями $x:y$ уравнения (60), лежат на поверхности (66), то к каждой поверхности F_2 присоединена одна поверхность 2-го порядка Q, которая определяется уравнением (66) и является двумя способами асимптотическим преобразованием поверхности F_2.

V. РАССЛОЯЕМАЯ ЧЕТВЁРКА ИЗ ПОВЕРХНОСТЕЙ F_2

104. Конгруэнции директрис поверхности F_2. Уравнения (a)—(e) § 96 определяли линейный комплекс $\boldsymbol{\alpha}$, содержащий асимптотическую $\omega^2=0$ поверхности (A). Для поверхности типа F_2 существует ещё второй комплекс $\boldsymbol{\alpha}'$, содержащий асимптотическую $\omega^1=0$. Пересечение линейных комплексов, соприкасающихся к двум асимптотическим, пересекающимся в точке A поверхности, образует линейную конгруэнцию, которая называется *соприкасающейся* линейной конгруэнцией поверхности в точке A.

Для поверхности F_2 такая конгруэнция определяется пересечением комплексов $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\alpha}'$.

При пересчёте формул (a) — (e) § 96 для нового тетраэдра (58) § 101 уравнения (a) — (d) сохранят свой вид, при дифференцировании уравнения (d) опять получится уравнение (e'), но в силу равенства $\omega_3^2=\omega_1^0$ уравнение (e) примет более простой вид

$$\{\boldsymbol{\alpha}(A_2A_3)\}=0. \qquad (e'')$$

Если произвольную аналитическую прямую $\boldsymbol{p}=(PQ)$ разложить по шести рёбрам тетраэдра $(A_iA_k)=[ik]$

$$\boldsymbol{p}=p^{01}[01]+p^{02}[02]+p^{03}[03]+p^{12}[12]+p^{31}[31]+p^{23}[23]$$

и внести в уравнение комплекса $\boldsymbol{\alpha}$, то левая часть уравнения в силу уравнений (a) — (d) § 96, (e'') примет вид

$$\{\boldsymbol{\alpha p}\}=p^{01}\{\boldsymbol{\alpha}[01]\}+p^{02}\{\boldsymbol{\alpha}[02]\}+p^{03}\{\boldsymbol{\alpha}[03]\}+\ldots+p^{23}\{\boldsymbol{\alpha}[23]\}=$$
$$=\{\boldsymbol{\alpha}[12]\}(p^{12}-p^{03}).$$

Так как $\{\boldsymbol{\alpha}(12)\}\neq 0$, то уравнение комплекса примет вид

$$p^{12}-p^{03}=0.$$

Линейный комплекс $\boldsymbol{\alpha}'$ получится заменой указателя 1 на 2, но поскольку $p^{21}=-p^{12}$, то уравнение этого комплекса примет вид

$$p^{12}+p^{03}=0,$$

и уравнениями соприкасающейся линейной конгруэнции будут:

$$p^{12}=0,\ p^{03}=0. \qquad (67)$$

Если прямая

$$\boldsymbol{p}=(PQ)\equiv(x^iA_i,\ y^kA_k)=(x^iy^k-x^ky^i)[ik]$$

принадлежит комплексу $p^{12}=0$, то координаты x^iy^k точек P и Q удовлетворяют уравнению

$$x^1y^2-x^2y^1=0.$$

Если точку P взять в плоскости $x^1=0$, то из уравнения

$$x^2y^1=0$$

следует или $x^2=0$, т. е. точка P лежит на ребре AA_3, или $y^1=0$, т. е. точка Q лежит тоже в плоскости AA_2A_3 и прямая PQ во всяком случае пересекает ребро AA_3. Точно так же все прямые комплекса $p^{03}=0$ пересекают ребро A_1A_2. Так как лучи конгруэнции (67) принадлежат и первому и второму комплексу (67), то они пересекают оба ребра AA_3, A_1A_2. Эти прямые называются *директрисами* линейной конгруэнции и отсюда *директрисами поверхности* (A).

105. Система поверхностей F_2, присоединённая к паре конгруэнций директрис. Поскольку $\mu=0$, обе точки M и M', определяемые уравнением (60), лежат на директрисе A_1A_2; и та и другая являются асимптотическими преобразованиями точки A (т. е. вторыми фокусами лучей AM, AM', описывающих конгруэнции W). Два асимптотических преобразования одной поверхности определяют пучок преобразований, соответствующие точки преобразованных поверхностей расположатся на прямой MM' (гл. IV, § 77), т. е. на второй директрисе A_1A_2, а касательные плоскости образуют пучок. Ось этого пучка можно определить как линию пересечения касательных плоскостей к поверхностям (M), (M'). Поскольку $\lambda=0$, эти касательные плоскости по формуле (17') § 88

$$\boldsymbol{m}=2(\boldsymbol{a}_1x-\boldsymbol{a}_2y),\ \boldsymbol{m}'=2(\boldsymbol{a}_1x'-\boldsymbol{a}_2y'),$$

где $x:y$, $x':y'$ — два решения уравнения (60), принадлежат пучку плоскостей с базисом $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, следовательно, проходят через директрису AA_3. Следовательно, конгруэнции обеих директрис образуют расслояемую пару.

Мы знаем (гл. IV, § 77), что ось пучка касательных плоскостей сама несёт точки второго пучка асимптотических преобразований, именно: пучка общих преобразований любой пары поверхностей первого пучка.

Теорема. *Среди поверхностей второго пучка асимптотических преобразований с точками на первой директрисе AA_3 два раза встречается поверхность 2-го порядка* (66), именно: она входит своими двумя точками пересечения с директрисой AA_3.

Действительно, прямолинейные образующие Q различных семейств, проходящие через точки M и M', пересекаются, а так как касательные плоскости в точках M и M' пересекаются по директрисе AA_3, то и точки пересечения этих прямолинейных образующих будут лежать на директрисе. Обозначим точки пересечения линий $\omega^2=0$, $\omega^1=0$ в точке M соответственно с линиями $\omega^1=0$, $\omega^2=0$ в точке M' через M_1, M_2.

Отсюда вытекает, что точка M_1 описывает ту же поверхность Q, и касательная плоскость её в точке M_1 как плоскость двух прямолинейных образующих M_1M, M_1M' проходит через вторую директрису $MM'\equiv A_1A_2$. При этом на поверхности (M_1) асимптотическими служат линии $\omega^2=0$ и $\omega^1=0$. Действительно, при перемещении, определяемом уравнением $\omega^2=0$, прямая MM' стоит на месте; все точки этой прямой двигаются вдоль прямой, и точка M_1 описывает прямолинейную асимптотическую M_1M.

Соединим какую-нибудь точку S, в которой одна из поверхностей первого пучка преобразований пересекает директрису A_1A_2 с точкой M_1. Прямая M_1S лежит на пересечении касательных плоскостей $M_1A_1A_2$ поверхности (M_1) и SA_0A_3 поверхности (S); следовательно, касается обеих поверхностей, а так как асимптотические $\omega^2=0$, $\omega^1=0$ на них соответствуют друг другу, то поверхность (M_1) является асимптотическим преобразованием поверхности (S).

Поскольку при этом криволинейные асимптотические $\omega^2=0$, $\omega^1=0$ поверхности (S) соответствуют прямолинейным образующим поверхности 2-го порядка (M_1), эти криволинейные асимптотические (по теореме § 96) принадлежат линейным комплексам.

Следовательно, *все поверхности S первого пучка асимптотических преобразований* (с точками на второй директрисе A_1A_2) *являются поверхностями типа F_2*. То же самое справедливо и для поверхностей (T) второго пучка (с точками на первой директрисе AA_3), ибо они являются асимптотическими преобразованиями поверхности 2-го порядка $(M)\equiv(M')$.

Можно сказать более того: каждая из поверхностей (T) или (S) могла бы служить исходной поверхностью вместо поверхности (A) для построения всей нашей конструкции. Если мы начнём с любой поверхности (T), то мы найдём поверхность 2-го порядка Q, которая будет дважды её асимптотическим преобразованием: в первом преобразовании точка T переходит в точку M, во втором — в точку M'. Прямая MM' должна служить для поверхности (T) второй директрисой, линия пересечения касательных плоскостей поверхности Q в этих точках M, M', т. е. линия M_1M_2 — первой директрисой.

Если мы начнём с какой-нибудь поверхности (S), то получим в качестве асимптотического преобразования дважды ту же поверхность 2-го порядка Q, но уже в точках M_1 и M_2. Прямая $M_1M_2\equiv AA_3$ будет служить второй директрисой, ось касательных плоскостей $MM'\equiv A_1A_2$ — первой директрисой.

Следовательно, *все поверхности (S) и (T) обоих пучков асимптотических преобразований имеют одни и те же директрисы.*

106. Расслояемая четвёрка, присоединённая к поверхности F_2. Чтобы найти фокусы директрис, надо найти такие точки

$$G=tA+A_3,\quad E=A_1+t'A_2$$

и такие перемещения

$$\omega^1+\tau\omega^2=0,\quad \omega^1+\tau'\omega^2=0,$$

чтобы имели место сравнения

$$(dG,\ A,\ A_3)\equiv 0,\quad (\mathrm{mod}\ \omega^1+\tau\omega^2),$$

$$(dE,\ A_1,\ A_2)\equiv 0,\quad (\mathrm{mod}\ \omega^1+\tau'\omega^2).$$

Подсчитывая с помощью матрицы компонент (58) § 101 дифференциал dG, мы приведём первое сравнение к виду

$$(A_1(t\omega^1+C\omega^2)+A_2(t\omega^2+A\omega^1),A,A_3)\equiv 0,\quad (\mathrm{mod}\ \omega^1+\tau\omega^2).$$

Так как компоненты при точках A_1, A_2 должны быть пропорциональны форме $\omega^1+\tau\omega^2$, получим:

$$\frac{C}{t}=\frac{t}{A}=\tau,$$

откуда

$$t=\varepsilon\sqrt{AC},\quad \tau=\varepsilon\sqrt{\frac{C}{A}},\quad \varepsilon=\pm 1$$

Аналогично, второе сравнение даст:

$$(A(A\omega^1+t'C\omega^2)+A_3(\omega^2+t'\omega^1),A_1,A_2)\equiv 0\quad (\mathrm{mod}\ \omega^1+\tau'\omega^2),$$

откуда

$$\frac{t'C}{A}=\frac{1}{t'}=\tau'$$

и

$$t'=\eta\sqrt{\frac{A}{C}},\quad \tau'=\eta\sqrt{\frac{C}{A}},\quad \eta=\pm 1.$$

Сравнивая оба результата, видим, что развёртывающиеся поверхности конгруэнций первых и вторых директрис соответствуют друг другу.

Если введём обозначения

$$G_\varepsilon=\varepsilon\sqrt{AC}\,A+A_3,\quad E_\eta=\sqrt{C}A_1+\eta\sqrt{A}\,A_2, \tag{68}$$

то для тетраэдра $\{G_1, G_{-1}, E_1, E_{-1}\}$ получим таблицу компонент

$$\begin{pmatrix} M\Omega_1 - d\ln\beta & -M\Omega_1 & \Omega_1' & 0 \\ N\Omega_1 & -N\Omega_1 - d\ln\beta & 0 & \Omega_2' \\ \Omega_1' & 0 & M\Omega_1 - d\ln\beta & M\Omega_2 \\ 0 & \Omega_2' & -N\Omega_2 & -N\Omega_1 - d\ln\beta \end{pmatrix} \quad (69)$$

где

$$\Omega_1 = C\omega^1 + A\omega^2, \qquad \Omega_2 = A\omega^2 - C\omega^1,$$

$$\Omega_1' = \sqrt{A}\omega^1 + \sqrt{C}\omega^2, \qquad \Omega_2' = \sqrt{C}\omega^2 - \sqrt{A}\omega^1.$$

$$M = \frac{1}{2\sqrt{AC}}\left(\beta + \frac{D}{2\sqrt{AC}}\right), \quad N = \frac{1}{2\sqrt{AC}}\left(\beta - \frac{D}{2\sqrt{AC}}\right).$$

Матрица компонент показывает, что пара конгруэнций (G_1E_1) и $(G_{-1}E_{-1})$ имеет фокусы в тех же точках G_1, E_1 и G_{-1}, E_{-1}, что и первоначальная пара (G_1G_{-1}), (E_1E_{-1}); если пара директрис имела развёртывающимися поверхностями поверхности

$$\sqrt{C}\omega^2 \pm \sqrt{A}\omega^1 = 0, \qquad (70a)$$

то развёртывающиеся поверхности новой пары тоже соответствуют друг другу и определяются уравнениями

$$A\omega^2 \pm C\omega^1 = 0. \qquad (70b)$$

Из общей теории расслояемых пар (П.Д.Г., гл. X, стр. 187) следует, что пара конгруэнций (G_1E_1), $(G_{-1}E_{-1})$, фокусы которых взаимно лежат в фокальных плоскостях другой (пара T), а развёртывающиеся поверхности соответствуют, является расслояемой парой конгруэнций, т. е. допускает два пучка поверхностей, которые служат взаимно асимптотическими преобразованиями так, что поверхности первого пучка в точках пересечения с лучом E_1G_1 имеют касательными плоскостями плоскости, проходящие через луч $E_{-1}G_{-1}$, и, наоборот, и все поверхности обоих пучков соответствуют своими асимптотическими. Такие две пары в теории расслояемых пар называются *сопряжённой четвёркой*. К этому мы можем добавить, что *каждый из этих пучков содержит два раза ту же самую поверхность 2-го порядка Q.*

Действительно, если обозначить буквами ζ^i координаты произвольной точки P относительно тетраэдра $\{G_\varepsilon E_\eta\}$ так, что

$$P = \xi^i A_i = \zeta^1 G_1 + \zeta^2 G_{-1} + \zeta^3 E_1 + \zeta^4 E_{-1},$$

то, внося вместо G_ε, E_η значения (68), получим формулы преобразования координат:

$$\xi^0 = \sqrt{AC}(\zeta^1 - \zeta^2), \ \xi^1 = \sqrt{C}(\zeta^3 + \zeta^4), \ \xi^2 = \sqrt{A}(\zeta^3 - \zeta^4), \ \xi^3 = \zeta^1 + \zeta^2.$$

Уравнение (66) для поверхности 2-го порядка Q преобразуется в новых координатах к виду

$$M(\zeta^1)^2 + N(\zeta^2)^2 = M(\zeta^3)^2 + N(\zeta^4)^2. \qquad (66')$$

Прямая E_1G_1, определяемая уравнениями

$$\zeta^2 = 0, \quad \zeta^4 = 0,$$

пересекает поверхность (66′) в точках

$$\zeta^1 = \pm\zeta^3.$$

Касательная плоскость поверхности (66′) в точке ζ_0^i определяется уравнением

$$M\zeta^1\zeta_0^1 + N\zeta^2\zeta_0^2 = M\zeta^3\zeta_0^3 + N\zeta^4\zeta_0^4; \qquad (66a)$$

для $\zeta_0^1 = 1$, $\zeta_0^2 = 0$, $\zeta_0^3 = \pm 1$, $\zeta_0^4 = 0$ это уравнение принимает вид

$$\zeta^1 = \pm\zeta^3$$

и показывает, что в обеих точках пересечения с прямой E_1G_1 касательные плоскости проходят через прямую $E_{-1}G_{-1}$ с уравнениями $\zeta^1 = 0$, $\zeta^3 = 0$. Этого достаточно, чтобы поверхность (66′) была дважды асимптотическим преобразованием каждой поверхности второго пучка; аналогично доказывается и для поверхностей первого пучка.

Так как асимптотические всех этих поверхностей переводятся асимптотическими преобразованиями в прямолинейные образующие поверхности Q, то *все поверхности принадлежат к классу поверхностей F_2, а прямые E_1G_1 и $E_{-1}G_{-1}$ служат их общими директрисами.* Асимптотические на всех поверхностях определяются уравнениями

$$\omega^1 = 0, \quad \omega^2 = 0,$$

так же как на поверхности Q.

107. Фокальные поверхности пары конгруэнций директрис поверхности F_2 и конгруэнции «диагоналей». Нетрудно заметить, что асимптотические линии на четырёх фокальных поверхностях (E_η), (G_ε) определяются уравнениями

$$\omega^1 = 0, \quad \omega^2 = 0, \qquad (a)$$

так же как и на всех поверхностях F_2 из четырёх пучков асимптотических преобразований. Для этого достаточно обратить внимание на фокальные сети двух конгруэнций, присоединённых к каждой фокальной поверхности. Для поверхности G_1 такими конгруэнциями будут конгруэнции (G_1G_{-1}) и (G_1E_1). Фокальные сети определяются уравнениями (70a), (70b).

Так как каждая фокальная сеть сопряжена на своей фокальной поверхности, то асимптотические касательные должны разделять их гармонически. Этим свойством обладают линии (a).

Таким образом, все фокальные поверхности соответствуют асимптотическими линиями и все четыре конгруэнции четвёрки суть конгруэнции W. Для поверхности (G_1) обе соседние фокальные поверхности (G_{-1}) и (E_1) являются асимптотическими преобразованиями. Отсюда вытекает, что прямая E_1G_{-1} несёт пучок асимптотических преобразований. Касательные плоскости поверхностей пучка в точках, расположенных на прямой E_1G_{-1}, образуют пучок плоскостей с осью $E_{-1}G_1$, ибо по этой прямой пересекаются касательные плоскости $G_1E_1E_{-1}$, $G_1G_{-1}E_{-1}$ поверхностей (E_1) и (G_{-1}). Прямая $E_{-1}G_1$ несёт второй пучок асимптотических преобразований, которому принадлежат, в частности, поверхности (G_1) и (E_{-1}).

Каждый из двух пучков содержит, притом содержит дважды, поверхность 2-го порядка Q.

Действительно, прямая $E_{-1}G_1$ определяется в координатах ζ относительно тетраэдра E_iG_i уравнениями

$$\zeta^2=0,\quad \zeta^3=0$$

и пересекает поверхность (66′) в точках

$$\zeta^1:\zeta^4=\pm\sqrt{\frac{N}{M}},\quad \zeta^2=\zeta^3=0,$$

а касательная плоскость к поверхности Q определяется уравнением (66a) и принимает теперь вид

$$\sqrt{M}\,\zeta^1=\pm\sqrt{N}\,\zeta^4,$$

следовательно, для обеих точек пересечения проходит через прямую $\zeta^1=\zeta^4=0$, т. е. через прямую E_1G_{-1} и так же для другой прямой.

Отсюда вытекает, что каждая из поверхностей двух пучков является асимптотическим преобразованием поверхности 2-го порядка и, следовательно, *принадлежит к классу поверхностей* F_2, а *прямые* $E_{-1}G_1$, E_1G_{-1} («диагонали» косого четыреугольника, образованного лучами четвёрки конгруэнций) *являются общими директрисами* всех поверхностей двух пучков, в том числе и четырёх фокальных поверхностей четвёрки.

Это построение можно продолжать неограниченно: фокальные поверхности двух конгруэнций (E_1G_{-1}), (E_1G_1) — тоже поверхности F_2; они определяют вторую пару конгруэнций того же типа (описанных прямыми, соединяющими одноимённые фокусы), а «диагонали» четыреугольника четвёрки будут служить их общими директрисами.

Можно итти и в другую сторону; если взять два асимптотических преобразования (S_1) и (S_2) поверхности (A) и пару их общих асимптотических преобразований (T_1) и (T_2), так, что точки S_1, S_2 лежат на второй директрисе A_1A_2, а точки T_1 и T_2 на первой AA_3, то получим косой четыреугольник сопряжённой четвёрки конгруэнций. Каждая пара противоположных сторон S_1T_1, S_2T_2 и S_1T_2, S_2T_1 описывает расслояемую пару конгруэнций, развёртывающиеся поверхности которых соответствуют. Каждая сторона четыреугольника S_iT_k несёт прямолинейный ряд соответствующих точек поверхностей пучка асимптотических преобразований любой поверхности противоположного пучка, т. е. пучка, присоединённого к точкам противоположной стороны $S_{i+1}T_{k+2}$, где i и k принимают независимо значения 1 и 2 и указатели $i+1$, $k+2$ приводятся по модулю 2. Все четыре семейства поверхностей четвёрки содержат дважды ту же самую поверхность 2-го порядка Q. Она служит асимптотическим преобразованием любой поверхности четырёх семейств четвёрки. Все эти поверхности, следовательно, суть поверхности F_2. Диагоналями будут служить директрисы AA_3, A_1A_2. Четыре поверхности — по две поверхности из каждого пучка одной пары — позволят построить новую четвёрку конгруэнций и т. д.

108. Поверхность Ли, присоединённая к поверхности F_2. Чтобы закончить эту серию результатов, относящихся к поверхности F_2 и присоединённой к ней поверхности Q, нам остаётся отметить значение последней как огибающей поверхностей Ли.

Поверхность Ли, присоединённая к точке A *поверхности* (A), *есть её соприкасающаяся поверхность 2-го порядка, которую можно получить как предельное положение поверхности 2-го порядка, проходящей через три бесконечно близкие асимптотические касательные одного семейства, проведённые в трёх точках какой-то асимптотической другого семейства.* Результат построения не зависит от перемены местами первого и второго семейств асимптотических.

Обозначим буквами c_{ik} коэффициенты в уравнении поверхности 2-го порядка в произвольной неподвижной системе однородных координат x^i; условимся записывать полярную форму для поверхности 2-го порядка $\mathscr{C}$ в виде произведения

$$\{\mathscr{C}PQ\}=c_{ik}x^iy^k,\quad c_{ik}=c_{ki},$$

где $P(x^i)$, $Q(y^k)$ — аналитические точки с координатами (x^i) и (y^k). Следовательно, уравнение поверхности $\mathscr{C}$ можно написать в виде равенства

$$\{\mathscr{C}MM\}=0.$$

Это произведение, очевидно, обладает свойством переместительности и распределительности.

Поверхность $\mathscr{C}$ содержит прямую AA_1, если содержит точку $At+A_1$ при всяком значении параметра t. Так как

$$\{\mathscr{C}(At+A_1)(At+A_1)\} = t^2\{\mathscr{C}AA\} + 2t\{\mathscr{C}AA_1\} + \{\mathscr{C}A_1A_2\},$$

то наше условие эквивалентно трём

$$\{\mathscr{C}AA\}=0, \quad \{\mathscr{C}AA_1\}=0, \quad \{\mathscr{C}A_1A_1\}=0. \tag{a}$$

Условие, что поверхность содержит ещё две бесконечно близких прямых или, точнее, является предельным положением поверхности, проходящей через три касательных к кривым $\omega^2=0$ в точках, расположенных на одной кривой $\omega^1=0$, когда эти точки по произвольному закону сближаются и в пределе совпадают, — эквивалентно требованию, чтобы удовлетворялись уравнения, получаемые из уравнений (a) двукратным дифференцированием вдоль линии $\omega^1=0$ (П. Д. Г., стр. 36).

Обращаясь к таблице компонент (58) § 101, мы можем записать результат первого дифференцирования в виде

$$\{\mathscr{C}A\,dA\}\equiv 0, \quad \{\mathscr{C}A\,dA_1\}+\{\mathscr{C}A_1\,dA\}\equiv 0, \quad \{\mathscr{C}A_1\,dA_1\}\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ \omega^1)$$

или

$$\{\mathscr{C}AA_2\}=0, \ \{\mathscr{C}AA_3\}+\{\mathscr{C}A_1A_2\}=0, \ \{\mathscr{C}A_1A_3\}=0. \tag{b}$$

Новое дифференцирование, если принимать во внимание предыдущие уравнения, даст

$$\{\mathscr{C}A_2A_2\}=0, \ \{\mathscr{C}A_2A_3\}=0, \ \{\mathscr{C}A_3A_3\}=0. \tag{c}$$

Если теперь за неподвижный координатный тетраэдр принять тетраэдр $\{A_i\}$ в рассматриваемой точке A поверхности так, что каждая точка A_i будет иметь i-ю координату ξ^i равной единице, а все остальные нулю, то уравнения (a), (b), (c) примут вид

$$c_{00}=c_{01}=c_{11}=0, \quad c_{02}=c_{13}=0, \quad c_{03}+c_{12}=0, \quad c_{22}=c_{23}=c_{33}=0.$$

Полагая $c_{12}=1$ и, значит, $c_{03}=-1$, мы запишем уравнение поверхности 2-го порядка Ли, присоединённой к точке A поверхности F_2, в местных координатах ξ^i в виде

$$\xi^1\xi^2-\xi^0\xi^3=0. \tag{71}$$

109. Огибающая поверхностей Ли. Рассмотрим теперь семейство поверхностей Ли вдоль одной асимптотической $\omega^2=0$ и будем искать огибающую этого семейства.

Если бы уравнение поверхности $F=0$ было задано относительно неподвижной системы координат и α был бы параметр семейства, то характеристика, которая описывает огибающую, определялась бы двумя уравнениями:

$$F=0, \quad F_\alpha=0,$$

где символ F_α означает частную производную по параметру α при постоянных координатах (неподвижной системы) x^i. Теперь уравнение (71) записано в координатах ξ^i относительно тетраэдра $\{A_i\}$; при изменении параметра семейства, т. е. криволинейной координаты u вдоль асимптотической $\omega^2=0$ тетраэдр $\{A_i\}$ перемещается и координаты ξ^i меняются, хотя бы точка $P(\xi^i)$ была неподвижной.

Закон изменения местных координат ξ^i при неподвижности точки определяется формулами (61) § 102, которые для таблицы компонент (58) § 101 принимают вид

$$\begin{aligned}
d\xi^0 &= -A\xi^1\omega^1 - C\xi^2\omega^2 - \beta(C\omega^1+A\omega^2)\xi^3 + \theta\xi^0,\\
d\xi^1 &= -\xi^0\omega^1 - \beta\xi^2\omega^2 - C\xi^3\omega^2 + \{\theta+(\ln\beta)_u\,\omega^1\}\xi^1,\\
d\xi^2 &= -\xi^0\omega^2 - \beta\xi^1\omega^1 - A\xi^3\omega^1 + \{\theta+(\ln\beta)_v\,\omega^2\}\xi^2,\\
d\xi^3 &= -\xi^1\omega^2 - \xi^2\omega^1 + \{\theta+(\ln\beta)_u\,\omega^1+(\ln\beta)_v\,\omega^2\}\xi^3.
\end{aligned} \tag{72}$$

Дифференцируя уравнение (71) и пользуясь формулами (72) при $\omega^2=0$, мы получим по сокращении на β:

$$(\xi^1)^2 - C(\xi^3)^2 = 0. \tag{71a}$$

Аналогично характеристика семейства поверхностей Ли при движении вдоль асимптотической $\omega^1=0$ определяется уравнениями (71) и (71b)

$$(\xi^2)^2 - A(\xi^3)^2 = 0. \tag{71b}$$

Система (71), (71a) определяет пару прямых, уравнения которых получатся, если взять $\varepsilon=\pm1$,

$$\xi^1=\varepsilon\sqrt{C}\,\xi^3, \quad \xi^0=\varepsilon\sqrt{C}\,\xi^2 \tag{73a}$$

и, кроме того, асимптотическую касательную

$$\xi^1=0, \quad \xi^3=0.$$

Система (71), (71b) определяет пару прямых при $\eta=\pm1$:

$$\xi^2=\eta\sqrt{A}\,\xi^3, \quad \xi^0=\eta\sqrt{A}\,\xi^1 \tag{73b}$$

и, кроме того, асимптотическую касательную

$$\xi^2=0, \quad \xi^3=0.$$

Точки, принадлежащие и первой, и второй характеристике, описывают огибающую всех поверхностей Ли, присоединённых к поверхности (A). Таких точек пять и они описывают пять полостей огибающей. Прежде всего асимптотические касательные пересекаются в точке A исходной поверхности. Очевидно, поверхность (A) является одной из полостей огибающей её соприкасающихся поверхностей 2-го порядка.

Кроме того, прямые (73a), (73b) пересекаются в четырёх точках, координаты которых получаются, если взять все комбинации знаков $\varepsilon = \pm 1$, $\eta = \pm 1$ в формулах

$$\xi^1 = \varepsilon \sqrt{C}\, \xi^3, \quad \xi^2 = \eta \sqrt{A}\, \xi^3, \quad \xi^0 = \varepsilon\eta \sqrt{AC}\, \xi^3. \tag{74}$$

Все четыре точки (74) лежат на поверхности 2-го порядка Q, ибо координаты (74) удовлетворяют уравнению (66′).

Так как характеристики (73a) или (73b) касаются огибающей Q и каждая в двух точках, а прямая может иметь с поверхностью 2-го порядка не более двух общих точек, то они целиком принадлежат поверхности Q, являясь её прямолинейными образующими. Следовательно, та же поверхность Q является огибающей каждого однопараметрического семейства поверхностей Ли вдоль одной асимптотической первого или второго семейства.

Таким образом, все поверхности Ли, присоединённые к точкам поверхности (A) или любой другой поверхности из всех построенных нами пучков асимптотических преобразований касаются поверхности 2-го порядка Q в четырёх точках, имея с ней общими четыре образующие.

VI. КОНГРУЭНЦИИ И ПОВЕРХНОСТИ R

110. Конгруэнции R. Мы возвращаемся теперь к общим формулам асимптотических преобразований (26) § 90, (36a) — (36c) § 91.

Рассмотрим сопряжённую сеть линий на поверхности (A), определяемую уравнениями

$$y\omega^1 \pm x\omega^2 = 0.$$

Всякая сопряжённая сеть обладает двумя конгруэнциями, описанными касательными к линиям первого и второго семейства, образующим сопряжённую сеть.

Сопряжённая сеть называется *сетью* R, если обе её конгруэнции являются конгруэнциями W. Если ввести новую функцию φ, так, что

$$y = x\varphi$$

и отнести поверхность к тетраэдру (16a)—(16c) § 86, то уравнения (26) § 90 примут вид

$$\frac{\partial \ln x}{\partial v} = -\gamma\varphi, \quad \frac{\partial \ln x}{\partial u} + \frac{\partial \ln \varphi}{\partial u} = -\frac{\beta}{\varphi}. \tag{75}$$

Исключая x, получим одно уравнение 2-го порядка для φ

$$\frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial u\, \partial v} = (\gamma\varphi)_u - \left(\frac{\beta}{\varphi}\right)_v, \tag{75a}$$

которое определяет φ так, чтобы конгруэнция $x : y = \frac{1}{\varphi}$ была конгруэнцией W. Если касательные к сопряжённому направлению $x : y = -\frac{1}{\varphi}$

описывают тоже конгруэнцию W, то уравнение (75a) должно допускать решение $-\varphi$:

$$\frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial u\, \partial v} = -(\gamma\varphi)_u + \left(\frac{\beta}{\varphi}\right)_v. \tag{75b}$$

Складывая или вычитая уравнения (75a), (75b), получим:

$$\frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial u\, \partial v} = 0, \quad (\gamma\varphi)_u = \left(\frac{\beta}{\varphi}\right)_v. \tag{76}$$

Первое из этих уравнений показывает, что φ есть произведение функций одного u и одного v. Уравнение сети

$$\varphi\, du \pm dv = 0$$

показывает, что простым выбором параметров u, v можно привести φ к единице. Второе уравнение (76) даст тогда условие, характеризующее поверхности, несущие такие сопряжённые сети:

$$\gamma_u = \beta_v. \tag{77}$$

Обратно, если условие (77) выполнено, то уравнение (75a) допускает решения $\varphi = \pm 1$, т. е. два сопряжённых семейства линий

$$\frac{du}{dv} = \pm 1 \tag{78}$$

своими касательными опишут две конгруэнции W.

Поскольку теперь

$$\varphi = 1, \quad x = y$$

и в тетраэдре (16a)

$$\omega^1 = du, \quad \omega^2 = dv, \quad N_1 = N_u, \quad N_2 = N_v,$$

то уравнения (37b′) напишутся

$$N_u = 2xS, \quad N_v = -2xT,$$

а формулы (36c) примут вид

$$\beta + \tilde{\beta} = -2x\frac{S}{N} = -\frac{N_u}{N},$$

$$\gamma + \tilde{\gamma} = 2x\frac{T}{N} = -\frac{N_v}{N},$$

и условие (77) будет иметь следствием

$$\tilde{\beta}_v = \tilde{\gamma}_u.$$

Следовательно, *фокальная сеть на преобразованной поверхности — тоже сеть* R: обе её конгруэнции суть конгруэнции W.

Касательная, сопряжённая лучу конгруэнции, описывает новую конгруэнцию, которая называется *преобразованием Лапласа* от первой, Повторяя шаг за шагом такое преобразование, мы получим цепь конгруэнций, которая называется *последовательностью Лапласа*.

Применяя последовательно только что доказанную теорему о конгруэнциях W, мы получаем общее предложение: *если в последовательности Лапласа две соседние конгруэнции суть конгруэнции W, то и все конгруэнции последовательности суть конгруэнции W.*

Такие последовательности носят название *последовательностей R*, их конгруэнции — *конгруэнций R*, фокальные поверхности — *поверхностей R* и фокальные сети — *сетей R*.

111. Поверхности R. Уравнение (78), как и в § 100, показывает, что сеть R — изотермически-сопряжённая (ибо при этом вторая квадратичная метрическая форма принимает изотермический вид).

Обратно, если фокальная сеть конгруэнции W на одной фокальной поверхности — изотермически сопряжена, то уравнение (75a) допускает решение $\varphi = 1$; оно допускает, следовательно, и решение $\varphi = -1$, и эта сеть есть сеть R.

Условие (77), очевидно, удовлетворено для поверхности 2-го порядка, где $\beta = \gamma = 0$. Следовательно, поверхность 2-го порядка есть поверхность R. Рассуждения, которые мы проводили в § 100 показывают, что *всякая изотермически-сопряжённая система на поверхности 2-го порядка является сетью R.*

Другой пример поверхностей, уже из метрической геометрии, можно указать, если заметить, что из уравнений системы (1) § 80, написанных для компонент (16a), (16c) § 86, сейчас же следует

$$A_u = A_1, \quad A_v = A_2, \quad A_{1u} = AA + mA_1 + \beta A_2$$

и, следовательно,

$$A_{uu} = AA + mA_u + \beta A_v.$$

Если нормировать точку A так, чтобы четвёртая координата равнялась единице, то это уравнение непосредственно перейдёт в уравнение для трёх неоднородных координат x, y, z произвольной точки поверхности, отнесённой к параметрам асимптотических линий u, v, которое с помощью скобок Кристоффеля записывается в виде

$$x_{uu} = \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} x_u + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} x_v.$$

Так как изменение нормирования точки A, меняя m и A, оставляет неизменными β, γ, то придём к заключению, что

$$\beta = \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}, \quad \gamma = \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix},$$

где обе скобки написаны для линейного элемента поверхности, отнесённой к асимптотическим линиям; следовательно, условие (77) может быть написано в виде

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}. \tag{77'}$$

Нетрудно теперь заметить (Т. П., стр. 109, 110, 197), что в параметрах асимптотических линий скобки

$$\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}', \quad \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}',$$

вычисленные для линейного элемента поверхности и её сферического изображения (последние отмечены штрихом), отличаются только знаком, а эти скобки (Т. П., стр. 111, 197) для поверхностей постоянной отрицательной кривизны удовлетворяют условию (77′); при этом сеть линий (78) является сетью линий кривизны. Следовательно, *сеть линий кривизны на поверхности постоянной отрицательной кривизны является сетью R.*

Мы видим, что необычайно простое уравнение (77) характеризующее поверхность, которая несёт сопряжённую сеть R, позволило нам сделать целый ряд заключеиний и указать примеры поверхиостей R среди наиболее известных классов поверхностей.

112. Теорема существования для поверхностей R. Обратимся теперь к вопросу о широте класса поверхностей R.

Относя искомую поверхность к тетраэдру (16a′) § 87, мы должны присоединить уравнение (77) к уравнениям (16a′), (16c′), (16d′), определяющим компоненты тетраэдра. Они составят систему

$$\begin{gathered}
\omega_i^i = 0,\ \omega^3 = 0,\ \omega_1^3 - \omega^2 = 0,\ \omega_2^3 - \omega^1 = 0,\ \omega_1^2 - \beta\omega^1 = 0,\\
\omega_2^1 - \gamma\omega^2 = 0,\ \omega_1^0 - A\omega^1 - \beta\gamma\omega^2 = 0,\ \omega_2^0 - \beta\gamma\omega^1 - C\omega^2 = 0,\\
\omega_3^1 - (C + \gamma_u)\,\omega^2 = 0,\ \omega_3^2 - (A + \beta_v)\,\omega^1 = 0,\\
d\beta - \beta_u\omega^1 - \beta_v\omega^2 = 0,\ d\gamma - \gamma_u\omega^1 - \gamma_v\omega^2 = 0,\ \beta_v = \gamma_u.
\end{gathered} \tag{79a}$$

Дифференцируя внешним образом, мы получим только шесть независимых квадратичных уравнений:

$$\begin{gathered}
[dA + \beta C\omega^2,\ \omega^1] + [\omega_3^0 + d(\beta\gamma),\ \omega^2] = 0,\\
[dC + \gamma A\omega^1,\ \omega^2] + [\omega_3^0 + d(\beta\gamma),\ \omega^1] = 0,\\
[\Theta\,\omega^1] - 2\,[\omega_3^0 + d(\beta\gamma),\ \omega^2] = 0,\\
[\Theta\,\omega^2] - 2[\omega_3^0 + d(\beta\gamma),\ \omega^1] = 0,\\
[\Theta_1\,\omega^1] + [\Theta\,\omega^2] = 0,\ [\Theta\,\omega^1] + [\Theta_2\omega^2] = 0,
\end{gathered} \tag{79b}$$

где

$$\begin{aligned}
\Theta\ &= d\beta_v + (\gamma_v\beta - 2A\gamma)\,\omega^1 + (\beta_u\gamma - 2C\beta)\,\omega^2,\\
\Theta_1 &= d\beta_u + (\gamma_v\beta - 2A\gamma)\,\omega^2,\\
\Theta_2 &= d\gamma_v + (\beta_u\gamma - 2C\beta)\,\omega^1.
\end{aligned} \tag{79c}$$

Кроме форм, стоящих в левых частях линейных уравнений (79a), и форм ω^1, ω^2, линейно независимых на интегральном многообразии, квадратичные уравнения (79b) содержат шесть форм:

$$dA,\ dC\ \omega_3^0,\ \Theta,\ \Theta_1,\ \Theta_2.$$

Значение их определится на втором линейном элементе интегрального элемента $\mathcal{E}_2$ из билинейных уравнений, присоединённых к квадратичным (72b), если определитель системы

$$\{(\omega^1)^2+(\omega^2)^2\}\,\omega^1\omega^2\neq 0$$

не равен нулю на первом линейном элементе.

Система в инволюции и определяет поверхность R с шестью произвольными функциями одного аргумента.

Допустим теперь, что поверхность (A) есть поверхность R и уравнение (77) удовлетворено. Сколько сетей R может нести такая поверхность?

Для определения этих сетей надо обратиться к системе (76). Первое уравнение интегрируется

$$\varphi^2=\frac{U}{V}, \qquad U=f_1(u),\ V=f_2(v),$$

где U, V — произвольные функции своих аргументов. Внеся это значение во второе уравнение, получаем:

$$2\gamma_u U+\gamma U'=2\beta_v V+\beta V'. \quad U'=\frac{dU}{du}, \quad V'=\frac{dV}{dv}. \tag{a}$$

Поскольку переменные u и v независимы, мы можем дать параметру v произвольное постоянное значение $v=v_0$, не меняя функции U. Уравнение (a) обратится тогда в линейное дифференциальное уравнение первого порядка для неизвестной функции U, коэффициенты которого будут содержать два постоянных, именно, значения $V=C$ и $V'=C_1$ для $v=v_0$. Общий интеграл этого уравнения будет содержать ещё одно постоянное интеграции. Эти постоянные могут быть связаны рядом соотношений, которые вытекают из требования, чтобы функция U удовлетворяла всем тем уравнениям, которые получатся, если параметру v давать другие значения $v=v_0'$, $v=v_0''$ и т. д.

Во всяком случае функция U не может содержать более трёх произвольных постоянных.

Если функция U известна, то уравнение (a) вместе с её производной по u

$$2\gamma_{uu}U+3\gamma_u U'+\gamma U''=2\beta_{uv}V+\beta_u V'$$

алгебраически определит V и V', если только определитель системы не равен нулю. Если эти значения не будут зависеть от u и одно будет производной от другого, то эти значения U и V составят решение уравнения (a), и это решение будет содержать не более трёх произвольных постоянных. Если этот определитель системы равен нулю

$$\beta_{uv}\beta-\beta_u\beta_v=0,$$

то, интегрируя, получим:

$$\beta=U_1V_1, \quad U_1=F_1(u),\ V_1=F_2(v).$$

Заменой параметров u и v мы можем привести β к единице (при этом равенство $\gamma_u=\beta_v$ уже потеряет силу)

$$\beta=1,$$

и тогда уравнение (a) примет вид

$$2\gamma_u U+\gamma U'=V'. \tag{a$_1$}$$

Дифференцируя по u, получим:

$$2\gamma_{uu}U+3\gamma_u U'+\gamma U''=0. \tag{a$_2$}$$

Теперь U определится с двумя произвольными постоянными. Если это решение не будет зависеть от переменного v, которое может входить в виде параметра в коэффициенты уравнения (a$_2$), то при определении V из уравнения (a$_1$) по её производной войдёт ещё третье постоянное. Во всяком случае *многообразие сетей R на одной поверхности не может зависеть более чем от трёх произвольных постоянных.*

113. Поверхности, обладающие трёхпараметрическим семейством сетей R. Допустим теперь, что поверхность (A) несёт трёхпараметрическое семейство сетей R. Тогда уравнение (a) должно допускать три линейно независимых решения U_i, V_i. Одно из них может быть сведено к постоянным $U_2=V_2=1$ и приводит к уравнению

$$\gamma_u=\beta_v.$$

Два других U, V; U_1, V_1 будут функциями соответственно от u и от v. Исключая из уравнений

$$2\gamma_u U+\gamma U'=2\beta_v V+\beta V', \tag{a}$$

$$2\gamma_u U_1+\gamma U_1'=2\beta_v V_1+\beta V_1' \tag{a$'$}$$

по очереди γ и β и пользуясь равенством $\gamma_u=\beta_v$, мы получим уравнения

$$\begin{aligned} 2\beta_v\{U'(U_1-V_1)-U_1'(U-V)\}&=\beta(U'V_1'-U_1'V'),\\ 2\gamma_u\{V'(U_1-V_1)-V_1'(U-V)\}&=\gamma(V_1'U'-V'U_1'). \end{aligned} \tag{b}$$

откуда, интегрируя, получим:

$$\begin{aligned} \beta^2\{U'(U_1-V_1)-U_1'(U-V)\}&=(U_3)^3,\\ \gamma^2\{V'(U_1-V_1)-V_1'(U-V)\}&=(V_3)^3, \end{aligned} \tag{c}$$

где $U_3 = F_3(u)$, $V_3 = F_4(u)$ — новые произвольные функции своих аргументов.

Перемножая накрест уравнения (b) и помня, что $\beta_v = \gamma_u$, получим:

$$\beta\{V'(U_1 - V_1) - V_1'(U - V)\} = \gamma\{U^1(U_1 - V_1) - U_1'(U - V)\}. \quad \text{(d)}$$

Следовательно, исключая фигурные скобки из уравнений (c) и (d), будем иметь:

$$\beta : \gamma = U_3 : V_3. \quad (80)$$

Кубичная форма (12) § 84 принимает изотермический вид и поэтому эти сети по аналогии с изотермически сопряжёнными сетями называются *изотермически-асимптотическими*. Значит, *поверхности с трёхпараметрическим семейством сетей R — всегда изотермически-асимптотические*.

Изменим снова выбор параметров u, v (и, следовательно, потеряем равенство $\beta_v = \gamma_u$) так, чтобы уравнение (80) приняло вид

$$\beta = \gamma. \quad (80')$$

Делим уравнение (a) на β и преобразуем его к виду

$$2(\ln\beta)_u U + U' = 2(\ln\beta)_v V + V'. \quad \text{(e)}$$

Дифференцируем раз по u и раз по v

$$(\ln\beta)_{uuv} U + (\ln\beta)_{uv} U' = (\ln\beta)_{uvv} V + (\ln\beta)_{uv} V'. \quad \text{(f)}$$

Умножаем уравнение (e) на производную $(\ln\beta)_{uv}$ и вычитаем из уравнения (f). Так как

$$(\ln\beta)_{uuv} - 2(\ln\beta)_u(\ln\beta)_{uv} = \beta^2\left(\frac{(\ln\beta)_{uv}}{\beta^2}\right)_u,$$

то мы получим:

$$\left(\frac{(\ln\beta)_{uv}}{\beta^2}\right)_u U = \left(\frac{(\ln\beta)_{uv}}{\beta^2}\right)_v V. \quad \text{(g)}$$

Это уравнение показывает, что отношение $U:V$ вполне определено; следовательно, φ^2 не содержит никаких постоянных, и поверхность имеет только одну сеть R. Значит, для того чтобы поверхность имела трёхпараметрическое семейство сетей R, уравнение (g) должно исчезать тождественно. Мы будем иметь тогда

$$\left(\frac{(\ln\beta)_{uv}}{\beta^2}\right)_u = 0, \quad \left(\frac{(\ln\beta)_{uv}}{\beta^2}\right)_v = 0,$$

откуда

$$(\ln\beta)_{uv} = a\beta^2 \quad a = \text{const}. \quad \text{(h)}$$

Постоянное a здесь не существенно. Инвариантность проективного линейного элемента (12′) § 84 показывает, что замена параметров u, v на $\sqrt{a}u$, $\sqrt{a}v$ вызовет замену $\beta = \gamma$ на $\frac{\beta}{\sqrt{a}}$. Это не

отразится на логарифмической производной в левой части уравнения (h) и уничтожит постоянный множитель a в правой части. Таким образом, уравнение (h) может быть приведено к уравнению (57) § 101, которое определяло поверхности F_2 с асимптотическими в линейных комплексах.

Нам остаётся рассмотреть случай

$$\frac{\partial^2 \ln\beta}{\partial u\,\partial v} = 0$$

или, при подходящем выборе параметров, случай

$$\beta = 1.$$

Уравнение (a) принимает теперь вид уравнения (a_1), а его производная — вид уравнения (a_2). Это уравнение определит функцию U с двумя произвольными постоянными, если коэффициенты не содержат существенно параметра v, т. е. если отношения коэффициентов являются функциями одного u

$$\frac{\partial^2\ln\gamma}{\partial u\,\partial v} = 0, \quad \left(\frac{\gamma_{uu}}{\gamma}\right)_v = 0.$$

Второе уравнение есть следствие первого, ибо

$$\left(\frac{\gamma_{uu}}{\gamma}\right)_v = (\ln\gamma)_{uuv} + 2(\ln\gamma)_u(\ln\gamma)_{uv}.$$

Следовательно, мы приходим опять к уравнению (h), но с постоянным a, равным нулю.

114. Линейчатые поверхности *R*. В предыдущем исследовании мы предполагали, что β и γ не равны нулю, т. е. исключали случай линейчатых поверхностей. Допустим теперь, что линии v — прямые и, значит,

$$\gamma = 0,$$

следовательно,

$$\beta_v = 0.$$

Поскольку уравнение (55b) § 99 удовлетворено, наша линейчатая поверхность принадлежит линейной конгруэнции, следовательно, имеет две прямолинейные направляющие — действительные, мнимые или совпадающие.

Выберем теперь два решения уравнения (75a) в виде

$$\varphi = \pm 1,$$

т. е. положим

$$y = \pm x. \quad (81a)$$

Уравнения (26) § 90, если отнести поверхность (A) к тетраэдру (16a′) § 87, дадут:

$$x_v = 0, \quad x_u = -x\beta. \quad (81b)$$

15 Зак. 1038. С. П. Фиников.

Следовательно, x и y — функции одного u.

Уравнения (16c′) § 87 принимают вид

$$\omega_1^0 = A\,du,\quad \omega_2^0 = C\,dv,\quad \omega_3^1 = C\,dv,\quad \omega_3^2 = A\,du. \tag{81c}$$

Внешнее дифференцирование приводит к уравнениям

$$[dA\,du] = 0,\quad [dC\,dv] = 0,\quad [\omega_3^0\,du] = 0,\quad [\omega_3^0 - C\beta\,du,\ dv] = 0. \tag{81d}$$

Значит,

$$\omega_3^0 = C\beta\,du, \tag{81e}$$

и новое дифференцирование даёт, поскольку $\beta_v = 0$ и, следовательно, $[d\beta\,du] = 0$,

$$\beta\,[dC\,du] = 0. \tag{81f}$$

Следовательно, A — всегда функция одного u, если же β не нуль, т. е. поверхность (A) не является поверхностью 2-го порядка, то C — просто постоянное.

Формулы (29) § 91 покажут, что λ, μ — функции одного u, а из уравнения (22) § 89 при постоянном C получим, что и λ_i, μ_i не зависят от v и N по формуле (32) § 91 тоже будет зависеть только от u.

Тогда по формулам (36c) § 91, (37b′) § 92 получим:

$$T = 0,\ \tilde{\gamma} = 0.$$

Следовательно, вторая фокальная поверхность — тоже линейчатая.

Это заключение может быть неверно, если $\beta = 0$, т. е. если первая фокальная поверхность — поверхность 2-го порядка, ибо тогда C может быть функцией от v и по формуле (22) § 89 величина μ_2 может содержать v.

Однако, если $\beta = 0$ и $\gamma = 0$, но для конгруэнции $\varphi = 1$ вторая фокальная поверхность — линейчатая, например линии $\omega^1 = 0$ прямолинейные образующие, т. е. $\tilde{\gamma} = 0$, то и для конгруэнции $\varphi = -1$ она будет линейчатой.

Действительно, если для конгруэнции $\varphi = 1$ одновременно

$$\gamma = 0,\ \tilde{\gamma} = 0,$$

то по формулам (36c) § 91 имеем:

$$T = 0$$

и уравнение (37b) § 92 даёт:

$$N_v = 0,$$

т. е. N не содержит v. Между тем в выражении (32) § 91

$$N = -\lambda\mu - 2y\mu_2 + 2x\mu_1$$

функции λ, μ, x и y не содержат v, а уравнение (22) § 89 при нашем выборе тетраэдра по формулам (81c) даёт:

$$\mu_1 = 2Ax + \mu_u,\quad \mu_2 = 2Cy.$$

Значит,

$$N_v = -4y^2\frac{\partial C}{\partial v}.$$

Обращение в нуль N_v означает, что при том выборе параметров u, v, который приводит $\varphi = \frac{y}{x}$ к единице, коэффициент C переменного v не будет содержать, а тогда и для конгруэнции $\varphi = -1$ новая величина N не содержит v, и в силу (37b′) § 92, (36b) § 92 для второй фокальной поверхности получим:

$$\tilde{\gamma} = 0.$$

Таким образом, *если исходить из линейчатой поверхности R (с одним семейством кривых асимптотических), то все поверхности, получаемые последовательно применением преобразования Лапласа помощью конгруэнций R, будут линейчатыми поверхностями, может быть, иногда с двумя системами прямолинейных образующих* (поверхности 2-го порядка).

Нетрудно теперь обнаружить прямолинейные направляющие (директрисы) нашей линейчатой поверхности R, т. е. оси той линейной конгруэнции, которой она принадлежит.

Действительно, по формулам (81c), если положить $\rho = \pm\sqrt{C}$, получим:

$$d(\rho A + A_2) \equiv (\rho A_1 + A_3)\,\omega^1,$$
$$d(\rho A_1 + A_3) \equiv (\rho\beta + A)(\rho A + A_2)\,\omega^1,\ (\mathrm{mod}\ \omega^2).$$

Следовательно, при изменении только одного u точка первой поверхности $\rho A + A_2$ описывает прямую. Для двух знаков ρ имеем две прямые, пересекающие все образующие линейчатой поверхности (A).

Так как теперь $\mu = -x_u$, $\lambda = x_u$, то

$$M = -x_u A + 2xA_1 + 2yA_2,$$
$$M_2 = 2CyA - x_u A_2 + 2xA_3.$$

Значит, точка второй поверхности

$$\rho M + M_2 = (-x_u + 2\rho y)(\rho A + A_2) + 2x(\rho A_1 + A_3)$$

лежит на той же самой прямой $(\rho A + A_2,\ \rho A_1 + A_3)$, которая, стало быть, пересекает все образующие и второй фокальной поверхности.

Прямолинейные направляющие линейчатой поверхности (A) в то же время служат и директрисами поверхности (M). Распространяя это предложение шаг за шагом на все последовательные преобразования

Лапласа, получим теорему: *все фокальные поверхности последовательности Лапласа, построенной на конгруэнции R с линейчатыми фокальными поверхностями, принадлежат одной и той же линейной конгруэнции* (так как имеют одну и ту же пару прямолинейных директрис).

115. Преобразование J поверхностей R. Самое определение конгруэнций R даёт способ по одной поверхности R находить бесчисленное множество таких поверхностей, применяя преобразование Лапласа относительно сети R.

Существует и более широкое преобразование (преобразование J), которое переводит поверхность R в поверхность R. Обе поверхности и в этом случае являются фокальными поверхностями конгруэнции W так, что сети R соответствуют друг другу, но лучи конгруэнции не совпадают с касательными к линиям этих сетей.

Итак, рассмотрим конгруэнцию W, у которой первая и вторая фокальные поверхности суть поверхности R и линии $u \pm v = \text{const.}$ составляют на них сети R; допустим, следовательно, что для первой и второй поверхностей имеют место равенства (77)

$$\beta_v = \gamma_u, \quad \tilde{\beta}_v = \tilde{\gamma}_u. \tag{a}$$

Если в формулы (36c) § 91 внести согласно уравнениям (37b′) § 92 значения

$$S = \frac{N_u}{2x}, \quad T = -\frac{N_v}{2y}, \tag{82}$$

то сумма двух уравнений (a) легко преобразуется к виду

$$\left(\frac{x}{y}\,\frac{N_v}{N}\right)_u = \left(\frac{y}{x}\,\frac{N_u}{N}\right)_v. \tag{b}$$

Это уравнение следует рассматривать совместно с уравнением (39) § 92, устанавливая совместность. Однако это приводит к тяжёлым выкладкам с сомнительными шансами на успех, а то решение, которое приводит к хорошо известному преобразованию J поверхностей R и обладает яркими геометрическими свойствами, может быть указано непосредственно, если уравнение (b) преобразовать, используя уравнения (39) § 92 и (26) § 90.

Исключим из уравнения (39) коэффициенты β и γ посредством уравнений (26); относя всё это к компонентам тетраэдра (16a′) § 87, мы получим уравнение

$$N_{uv} = (\ln y)_u N_v + (\ln x)_v N_u. \tag{83}$$

Выполним теперь дифференцирования, указанные в уравнении (b), заменяя вторую производную N_{uv} её выражением по формуле (83)

$$\frac{x}{y}\{(\ln N)_v(\ln x)_u + (\ln N)_u(\ln x)_v - (\ln N)_u(\ln N)_v\} =$$
$$= \frac{y}{x}\{(\ln N)_v(\ln y)_u + (\ln N)_u(\ln y)_v - (\ln N)_u(\ln N)_v\},$$

или, умножая на $2xy$ и собирая члены в две группы, чтобы вынести за скобки $(\ln N)_u$ и $(\ln N)_v$, получим:

$$(\ln N)_v\{(y^2 - x^2)(\ln N)_u - (y^2 - x^2)_u\} +$$
$$+ (\ln N)_u\{(y^2 - x^2)(\ln N)_v - (y^2 - x^2)_v\} = 0.$$

Мы можем удовлетворить этому уравнению, полагая

$$(\ln N)_u = \frac{\partial}{\partial u}\ln(y^2 - x^2), \quad (\ln N)_v = \frac{\partial}{\partial v}\ln(y^2 - x^2),$$

т. е. полагая

$$N = k(y^2 - x^2), \quad k = \text{const.} \tag{84}$$

Уравнение (83) будет тоже удовлетворено. Действительно, внося выражение (84) в уравнения (82), мы получим с помощью формул (40) § 93:

$$S = -k\left(y\beta + \frac{\lambda - \mu}{2}\right), \quad T = -k\left(\gamma x - \frac{\lambda + \mu}{2}\right); \tag{84a}$$

это удовлетворит уравнение (38) § 92 и, конечно, (45c) § 93.

Система (45a), (45b), (45d) § 93 вполне интегрируема и определяет решение с пятью произвольными постоянными, но так как конгруэнция не изменится, если λ, μ, x, y умножить на одно и то же постоянное, то при заданном k преобразование J определяется с четырьмя произвольными постоянными.

116. Теорема переместительности для преобразований J. Для преобразований J поверхностей R квадратуры формул (47a), (47b) § 94 могут быть взяты.

Действительно, если в уравнения (37b′) § 92 внести значения S, T по формулам (84a), то получим с помощью уравнений (40) § 93:

$$\frac{1}{2x^1}N^1_u = -k_1(y^1\beta + x^1_u), \quad \frac{1}{2x^2}N^2_u = -k_2(y^2\beta + x^2_u).$$

Следовательно, при помощи тех же формул (40) § 93 будем иметь:

$$-\frac{x^2}{2x^1k_1}N^1_u - \frac{x^1}{2x^2k_2}N^2_u = \frac{\partial}{\partial u}(x^1x^2 - y^1y^2),$$

т. е. в силу формул (47a), (47b) § 94

$$\frac{\partial}{\partial u}\{2k_1n^2 + 2k_2n^1 + 4k_1k_2(x^1x^2 - y^1y^2)\} = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial v}\{2k_1n^2 + 2k_2n^1 + 4k_1k_2(x^1x^2 - y^1y^2)\} = 0.$$

Второе уравнение написано по аналогии. Интегрируя, получим:

$$k_1n^2 + k_2n^1 + 2k_1k_2(x^1x^2 - y^1y^2) = H, \quad H = \text{const.} \tag{85}$$

Эта формула вместе с формулами (46b), (47) § 94 позволит вычислить n^1 и n^2, т. е. найти поверхность (M^{12}) по формулам (48) § 94, если только определитель системы (47) § 94, (85) не равен нулю, т. е. если k_1 не равно k_2.

Конечно, не всегда эта поверхность будет поверхностью R. Для этого необходимо и достаточно, чтобы для второго преобразования [от (M^1) к (M^{12})] имело место равенство (84). Пользуясь формулами (49), (47′) § 94, мы приведём его к виду

$$N^2-\frac{n^1n^2}{N^1}=k_{12}\left[\left(y^2-\frac{y^1}{N^1}n^1\right)^2-\left(x^2-\frac{x^1}{N^1}n^1\right)^2\right],$$

или в силу уравнения (84) для N^1, N^2 и соотношения (85),

$$(k_2-k_{12})\left(N^2-\frac{n^1n^2}{N^1}\right)-\frac{k_{12}}{k_1}H\frac{n^1}{N^1}=0.$$

Это уравнение удовлетворяется, если

$$k_{12}=k_2,\quad H=0.$$

Следовательно, при k_1, не равном k_2, кроме поверхности (A), существует ещё одна поверхность R, которую можно получить преобразованием J и из поверхности (M^1), и из поверхности (M^2).

Если $k_1=k_2=k$, то функции n^1, n^2 попрежнему находятся квадратурами из уравнений (47a), (47b) § 94, но интеграл (85) в силу формулы (47) принимает вид

$$H=2kN^{12}+4k^2(x^1x^2-y^1y^2)$$

и постоянное H не может быть выбрано произвольно. Если $H=0$, то всё однопараметрическое семейство поверхностей, получаемых теоремой переместительности из поверхностей (M^1) и (M^2) состоит из поверхностей R. Если H не равно нулю, то среди них не найдётся ни одной поверхности R.

117. Построение преобразования J проективным изгибанием преобразуемой поверхности. Чтобы закончить вопрос о преобразованиях J поверхностей R, отметим ту геометрическую характеристику, которую мы обещали дать в § 115 и которая отличает эти преобразования от всех других, если бы такие были, асимптотических преобразований сети R в сеть R.

В § 112 мы написали систему дифференциальных уравнений (79a), (79b), определяющих поверхности R. Мы теперь можем взглянуть на неё с новой точки зрения, чтобы отметить замечательную особенность, ей присущую.

Допустим, мы имеем одно решение, т. е. одну поверхность R. Можно ли найти другое с теми же самыми функциями β и γ? Так как проективный линейный элемент поверхности по формуле (12′) § 84 вполне определён этими функциями, вопрос ставится о нахождении к произвольно заданной поверхности R другой поверхности R с тем же линейным элементом или, согласно принятой терминологии, о проективном изгибании поверхности R (П. Д. Г., стр. 55).

Если β и γ даны, то формы Θ, Θ_1, Θ_2 при изменении функций A и C на δA и δC получают приращения

$$\Theta^*=\Theta-2\gamma\delta A\omega^1-2\beta\delta C\omega^2,$$

$$\Theta_1^*=\Theta_1-2\gamma\delta A\omega^2,\quad \Theta_2^*=\Theta_2-2\beta\delta C\omega^1.$$

Уравнения (79b) последней строки от такого преобразования не пострадают. Уравнения (79b) предпоследней строки сохранятся, если ввести новую форму

$$\omega_3^{0*}=\omega_3^0+\beta\delta C\omega^1+\gamma\delta A\omega^2.$$

Наконец, первые два уравнения (79b), если ввести эту форму, дадут, если из новых уравнений почленно вычесть старые,

$$[d(\delta A),\ \omega^1]=0,\quad [d(\delta C),\ \omega^2]=0. \tag{86}$$

Что касается до линейных уравнений (79a), то изменение функций A и C повлечёт соответствующие изменения форм ω_i^k, не меняя β и γ и не нарушая совместности системы.

Следовательно, для всякой поверхности R можно построить её проективные изгибания, присоединяя к величинам A и C слагаемые δA и δC, подчинённые только уравнениям (86). Эти уравнения имеют простой смысл: приращение δA должно быть функцией только одного u, ибо $d(\delta A)$ зависит только от $\omega^1=du$, а δC — одного v.

Заметим теперь, что определение x, y из уравнений (26) § 90 не зависит от приращений δA, δC, ибо эти уравнения, кроме неизвестных функций, содержат только величины β, γ, которые остаются инвариантными. Следовательно, мы можем сохранить тот же самый луч $x:y$, описывающий конгруэнцию W, и после проективного изгибания.

Величины λ, μ по формулам (29) § 91 останутся неизменными; следовательно, на каждом луче $x:y$ та же точка M будет служить вторым фокусом. Величина N, выписываемая по формуле (32) § 91, изменится. Действительно, вычисляемые из первого уравнения (22) § 89 величины μ_1, μ_2, получают для тетраэдра (16d′) § 87 значения

$$\mu_1=\mu_u+2Ax+2\beta\gamma y,$$

$$\mu_2=\mu_v+2\beta\gamma+2Cy.$$

Следовательно, μ_1 и μ_2 получат приращения:

$$\delta\mu_1=2x\delta A,\quad \delta\mu_2=2y\delta C,$$

откуда по формуле (32) § 91 приращение величины N —

$$\delta N=-4y^2\delta C+4x^2\delta A.$$

Допустим теперь, что мы имеем преобразование J, т. е. N определяется по формуле (84)

$$N = k(y^2 - x^2).$$

Выберем приращения

$$\delta A = \delta C = \frac{k}{4};$$

при постоянном k эти значения, конечно, удовлетворяют системе (86). Между тем по формуле (a) приращение N получится в виде

$$\delta N = k(x^2 - y^2)$$

и, следовательно, новое значение N равно нулю

$$N = 0.$$

Так как при этом по формуле (28) § 91 три точки M^*, M_1^*, M_2^* лежат на одной прямой, то преобразованная поверхность вырождается. Так как при этом и построенные по принципу двойственности плоскости m^*, m_1^*, m_2^* тоже принадлежат одному пучку, то преобразованная поверхность вырождается в прямую.

Итак, если дана произвольная поверхность R и наиболее общее преобразование этой поверхности в новую поверхность (M), то можно подвергнуть заданную поверхность (A) такому проективному изгибанию, при котором переносимые вместе с касательными плоскостями отрезки лучей конгруэнции AM после изгибания разместятся так, что все точки M будут расположены на одной прямой.

Обратно, если взять произвольную прямую L пространства и какое-нибудь проективное изгибание (A^*) данной поверхности (A), принадлежащей к классу поверхностей R, то мы можем построить выродившееся асимптотическое преобразование поверхности (A^*), присоединяя к каждой точке A^* нашей поверхности ту точку M^* прямой L, в которой она пересекается касательной плоскостью поверхности (A^*) в точке A^*. Если теперь проективным изгибанием вернуть поверхность (A^*) к первоначальному виду поверхности (A), то увлекаемые касательными плоскостями отрезки касательных A^*M^* разместятся в пространстве в виде касательных AM и концы её образуют поверхность (M), вторую фокальную поверхность конгруэнции (AM), которая будет представлять наиболее общее преобразование J для поверхности (A).

VII. ДРУГИЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ КЛАССЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ

118. Сопряжённые сети с равными инвариантами. В параллель с поверхностями R, характеризуемыми условием (77) § 110, можно поставить поверхности, определяемые в параметрах асимптотических линий уравнением

$$\beta_u = \gamma_v. \tag{87}$$

Это уравнение тоже можно связать с сопряжённой сетью линий

$$du \pm dv = 0 \tag{88}$$

на поверхности.

Умножим обе части уравнения (87) на внешнее произведение $[du\, dv]$. Поскольку

$$\beta_u [du\, dv] = [d\beta\, dv], \quad \gamma_v [du\, dv] = [du\, d\gamma],$$

уравнение (87) эквивалентно уравнению

$$[d\beta\, dv] + [d\gamma\, du] = 0. \tag{87'}$$

Если ввести параметры сопряжённой сети (88)

$$u + v = s, \quad u - v = t,$$

то уравнение (87′) преобразуется в уравнение

$$[d\beta,\ ds - dt] + [d\gamma,\ ds + dt] = 0,$$

или

$$[d(\beta + \gamma),\ ds] = [d(\beta - \gamma),\ dt],$$

т. е. оно эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}(\beta + \gamma) = \frac{\partial}{\partial s}(\gamma - \beta). \tag{87''}$$

С другой стороны, если отнести поверхность (A) к тетраэдру (16a′) § 87 и ввести точки B_i уравнениями

$$A_1 = B_1 + B_2, \quad A_2 = B_1 - B_2,$$

то первые три уравнения системы (1) § 81 примут вид

$$dA = B_1\, ds + B_2\, dt,$$

$$dB_1 = \left\{\left(\frac{A+C}{4} + \frac{\beta\gamma}{2}\right) ds + \frac{A-C}{4}\, dt\right\} A + \left\{\frac{\beta+\gamma}{4}\, ds + \frac{\beta-\gamma}{4}\, dt\right\} B_1 + \\ + \left\{\frac{\gamma-\beta}{4}\, ds - \frac{\beta+\gamma}{4}\, dt\right\} B_2 + A_3 \frac{ds}{2},$$

$$dB_2 = \left\{\frac{A-C}{4}\, ds + \left(\frac{A+C}{4} - \frac{\beta\gamma}{2}\right) dt\right\} A + \left\{\frac{\beta-\gamma}{4}\, ds + \frac{\beta+\gamma}{4}\, dt\right\} B_1 + \\ + \left\{-\frac{\beta+\gamma}{4}\, ds - \frac{\beta-\gamma}{4}\, dt\right\} B_2 - A_3 \frac{dt}{2},$$

откуда следуют уравнения в частных производных:

$$A_s = B_1, \quad A_t = B_2,$$

$$A_{st} = \frac{A-C}{4} A + \frac{\beta-\gamma}{4} A_s - \frac{\beta+\gamma}{4} A_t, \tag{89a}$$

$$A_{ss} + A_{tt} = \frac{A+C}{2} A + \frac{\beta+\gamma}{2} A_s + \frac{\gamma-\beta}{2} A_t. \tag{89b}$$

Уравнение (89a) называется уравнением Лапласа для сопряжённой сети. Оно во многом определяет свойства сети (подробнее в гл. VII). При условии (87″) это уравнение будет уравнением с равными инвариантами (гл. VI, § 126), а определяемая этим уравнением сеть — сетью с равными точечными инвариантами.

Если мы обратимся к уравнениям (21) § 88, определяющим проективные перемещения тетраэдра в пространстве плоскостей, то, вводя плоскости

$$\boldsymbol{a}_1 = -\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2, \quad \boldsymbol{a}_2 = -\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2,$$

найдём

$$d\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}_1\, ds + \boldsymbol{b}_2\, dt,$$

$$d\boldsymbol{b}_1 = \left\{\frac{A+C+\beta_v+\gamma_u}{4}\, ds + \frac{A-C+\beta_v-\gamma_u}{4}\, dt\right\}\boldsymbol{a} + \\ + \left\{-\frac{\beta+\gamma}{4}\, ds + \frac{\gamma-\beta}{4}\, dt\right\}\boldsymbol{b}_1 + \left\{\frac{\beta-\gamma}{4} ds + \frac{\beta+\gamma}{4}\, dt\right\}\boldsymbol{b}_2 + \frac{\boldsymbol{a}_3}{2}\, ds,$$

$$d\boldsymbol{b}_2 = \left\{\frac{A-C+\beta_v-\gamma_u}{4}\, ds + \frac{A+C+\beta_v+\gamma_u}{4}\, dt\right\}\boldsymbol{a} - \\ - \left\{\frac{\beta-\gamma}{4}\, ds + \frac{\beta+\gamma}{4}\, dt\right\}\boldsymbol{b}_1 + \left\{\frac{\beta+\gamma}{4}\, ds + \frac{\beta-\gamma}{4}\, dt\right\}\boldsymbol{b}_2 - \frac{\boldsymbol{a}_3}{2}\, dt,$$

откуда получаем тангенциальное уравнение Лапласа для сети в виде

$$\boldsymbol{a}_{st} = \frac{A-C+\beta_v-\gamma_u}{4}\boldsymbol{a} + \frac{\gamma-\beta}{4}\boldsymbol{a}_s + \frac{\beta+\gamma}{4}\boldsymbol{a}_t.$$

При условии (87″) это — тоже уравнение с равными инвариантами (тангенциальные инварианты сети), а определяемая им сеть — сеть с равными тангенциальными инвариантами.

Сеть с равными точечными и равными тангенциальными инвариантами мы будем называть *сетью I*, а поверхность, несущую сеть *I*, *поверхностью I*.

Нетрудно заметить, что *всякая поверхность* (87) *несёт две сети I, из которых одна мнима, если асимптотические линии действительны.*

Действительно, произведём замену переменных, вводя вместо u параметр

$$u_1 = iu, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Проективный линейный элемент (12′) § 84 преобразуется к виду

$$\frac{\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3}{2du\, dv} = \frac{-\beta\, du_1^3 + i\gamma\, dv^3}{2du_1\, dv}.$$

Следовательно, новые коэффициенты суть

$$\beta_1 = -\beta, \quad \gamma_1 = i\gamma.$$

Так как

$$\frac{\partial\beta_1}{\partial u_1} = i\frac{\partial\beta}{\partial u}, \quad \frac{\partial\gamma_1}{\partial v} = i\frac{\partial\gamma}{\partial v},$$

то из условия (87) вытекает

$$\frac{\partial\beta_1}{\partial u_1} = \frac{\partial\gamma_1}{\partial v}.$$

Таким образом, всякая поверхность *I* несёт две сети *I*

$$du \pm dv = 0 \quad \text{и} \quad i\,du \pm dv = 0.$$

Нетрудно заметить, что поверхности с коэффициентами β, γ вида

$$\beta = \varphi(u+v) + \psi(u-v), \quad \gamma = \varphi(u+v) - \psi(u-v), \tag{a}$$

в том числе поверхности с постоянными β, γ и, в частности, поверхности 2-го порядка, а также поверхности *R* с равными коэффициентами $\beta = \gamma$ несут сети, которые одновременно являются сетью *R* и сетью *I*.

Действительно, выражения (a), и только такие выражения, удовлетворяют обоим уравнениям (77) § 110 и (87):

$$\beta_v = \gamma_u, \quad \beta_u = \gamma_v.$$

119. Преобразование поверхностей *I*. Для поверхностей *I* можно построить такую же теорию асимптотических преобразований, как и для поверхностей *R*.

Допустим, что не только первая фокальная поверхность, но и вторая являются поверхностями *I* так, что сети *I* $u \pm v = \text{const}$. соответствуют друг другу. В таком случае, не только коэффициенты β, γ, но и коэффициенты $\tilde\beta$, $\tilde\gamma$ удовлетворяют уравнению (87). Пользуясь формулами (36c) § 91, мы получим необходимое и достаточное условие, которому должно удовлетворять наше преобразование,

$$-\left(\frac{yS}{N}\right)_u = \left(\frac{xT}{N}\right)_v,$$

или, развёртывая и пользуясь формулами (26) § 90 и (37b) § 92,

$$xT_2 + yS_1 = xS\beta + yT\gamma + 2xy\,\frac{S^2-T^2}{N},$$

где

$$S_1 = S_u, \quad T_2 = T_v.$$

Вводя новую неизвестную функцию θ, мы разобьём это уравнение на два

$$\begin{aligned} S_1 &= T\gamma + x\left(\frac{S^2-T^2}{N} + \theta\right), \\ T_2 &= S\beta + y\left(\frac{S^2-T^2}{N} - \theta\right). \end{aligned} \tag{90}$$

Пользуясь уравнениями (38) § 92, мы можем написать для S и T линейные уравнения в полных дифференциалах:

$$dS=\left(T\gamma+x\frac{S^2-T^2}{N}+x\theta\right)du+\beta T\,dv,$$
$$dT=\gamma S\,du+\left(S\beta+y\frac{S^2-T^2}{N}-y\theta\right)dv. \qquad (91a)$$

Если обозначить

$$\Delta\theta=d\theta-2\frac{x}{y}\theta\left(\beta+\frac{yS}{N}\right)du-2\frac{y}{x}\theta\left(\gamma-\frac{xT}{N}\right)dv,$$

то внешние дифференциалы уравнений (91a) можно написать в виде

$$[\Delta\theta\,du]=0,\quad [\Delta\theta\,dv]=0,$$

откуда следует

$$\Delta\theta=0. \qquad (91b)$$

И здесь, как ранее при изыскании преобразований J, мы ограничимся специальным случаем, не утруждая себя полным исследованием совместности.

Легко заметить, что уравнение (91b) удовлетворится значением

$$\theta=0.$$

Исключая из первого уравнения (90) γ и x посредством уравнений (37b′) § 92, (38) § 92 и умножая на $2S$, мы преобразуем его к виду

$$2SS_u=2TT_u+\frac{N_u}{N}(S^2-T^2).$$

Преобразуя также второе уравнение (90), получим:

$$\left(\frac{N}{S^2-T^2}\right)_u=0,\quad \left(\frac{N}{S^2-T^2}\right)_v=0,$$

значит, интегрируя, имеем:

$$N=k(S^2-T^2),\quad k=\text{const}. \qquad (92)$$

Уравнения (91a) теперь примут вид

$$dS=\left(T\gamma+\frac{1}{k}x\right)du+\beta T\,dv,\quad dT=\gamma S\,du+\left(S\beta+\frac{1}{k}y\right)dv. \qquad (91a')$$

Поскольку внешние дифференциалы этих уравнений обращаются в тождества в силу уравнений (45a), (45b), (45d) § 93, а система (45a)—(45d) § 93 вполне интегрируема в силу уравнений (44), которые обращаются в тождество в силу (92), (91a′), то система уравнений (91a′), (92), (45a), (45b), (45d) вполне интегрируема и определяет x, y, S, T, λ, μ, ν с семью произвольными постоянными,

не считая постоянного k. Если принять во внимание, что наша система допускает умножение x, y, λ, μ, S, T на одно и то же постоянное, не меняющее отношения $x:y$, т. е. сохраняющее неизменным конгруэнцию, то придём к заключению, что построенное преобразование сетей I зависит от шести постоянных, не считая постоянного k.

Если известно два преобразования (M^1) и (M^2), параметры которых мы будем отличать значками 1 и 2, то по формулам § 94 можно построить однопараметрическое семейство преобразований (M^{12}) сетей (M^1) и (M^2). Так же, как в случае преобразований сетей R, квадратуры уравнений (47a), (47b) § 94 могут быть взяты, именно, исключая из левого столбца уравнений (47a), (47b) § 94 переменные x^i, ν^i посредством уравнений (37b′) § 92

$$x^i=\frac{N_u^i}{2S^i},\quad \nu^i=-\frac{N_v^i}{2T^i},$$

получим:

$$n_u^1=\frac{S^1}{S^2}N_u^2,\quad n_u^2=\frac{S^2}{S^1}N_u^1,$$

или, внося выражения N^i по формуле (92)

$$n_u^1=\frac{S^1}{S^2}2k_2(S^2S_u^2-T^2T_u^2),\quad n_u^2=\frac{S^2}{S^1}2k_1(S^1S_u^1-T^1T_u^1),$$

откуда

$$\frac{n_u^1}{2k_2}+\frac{n_u^2}{2k_1}=S^1S_u^2+S^2S_u^1-\left\{\frac{S^1T_u^2}{S^2}T^2+\frac{S^2T_u^1}{S^1}T^1\right\}.$$

Между тем, исключая S^1 и S^2 с помощью формул (38) § 92, получим:

$$\frac{S^1}{S^2}T_u^2=T_u^1,\quad \frac{S^2}{S^1}T_u^1=T_u^2.$$

Следовательно,

$$\frac{n_u^1}{2k_2}+\frac{n_u^2}{2k_1}=\frac{\partial}{\partial u}(S^1S^2-T^1T^2),\quad \frac{n_v^1}{2k_2}+\frac{n_v^2}{2k_1}=\frac{\partial}{\partial v}(S^1S^2-T^1T^2),$$

где второе уравнение получено из правого столбца таблицы (47a), (47b) § 94.

Интегрируя, имеем:

$$S^1S^2-T^1T^2=\frac{n^1}{2k_2}+\frac{n^2}{2k_1}+H,\quad H=\text{const}. \qquad (93)$$

Если $k_1\neq k_2$, то уравнение (93) вместе с формулой (47) § 94 определит n^1, n^2, т. е. всё многообразие поверхностей (M^{12}). Среди них только одна поверхность $H=0$ является поверхностью I, в чём нетрудно убедиться, проверяя уравнения (92) для N^{12}, S^{12}, T^{12}, вычисленных по формулам (47′) § 94 и (37b′) § 92 при использовании уравнений (49) § 94. Предположение

$$S=\pm T,\quad \theta=0$$

приводит систему (91) к одному вполне интегрируемому уравнению. При этом уравнение (92) отпадает, и N определяется квадратурами из системы (37b′) § 92. Это специальное преобразование сетей I.

120. Конгруэнции Ф. В проективной теории поверхностей основную роль играют, конечно, асимптотические направления, касательные в двойной точке линии пересечения поверхности с её касательной плоскостью. Более глубоко, но столь же интимно связаны с теорией поверхности направления Дарбу: линия пересечения с поверхностью какой-либо её соприкасающейся поверхности 2-го порядка Q имеет в точках касания обеих поверхностей тройиую точку; три касательных в тройной точке при различном выборе поверхности Q могут занимать различное положение, могут и совпадать все три в одном направлении, притом тремя различными способами, т. е. для трёх различных поверхностей Q. Получаемые таким образом три направления носят название направлений Дарбу, а линии, огибаемые ими, — линиями Дарбу (П. Д. Г., стр. 72).

Естественно поэтому искать конгруэнции, на фокальных поверхностях которых линии Дарбу соответствуют. Мы будем называть такие конгруэнции *конгруэнциями* Ф.

Направления Дарбу аполярны асимптотическим направлениям. Это значит, что каждое из направлений Дарбу вместе со своим сопряжённым гармонически разделяет два других направления Дарбу. Следовательно, по заданным трём направлениям Дарбу сопряжённые им направления определяются независимо от асимптотических, между тем уже две пары сопряжённых направлений вполне определяют асимптотические направления как единственную пару касательных, гармонически разделяющую каждую из двух пар сопряжённых направлений.

Таким образом, если на фокальных поверхностях конгруэнции соответствуют линии Дарбу, то соответствуют и асимптотические линии. Следовательно, *конгруэнция* Ф *является конгруэнцией* W.

В асимптотических параметрах линии Дарбу определяются уравнением (П. Д. Г., стр. 72)

$$\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3 = 0.$$

Следовательно, требование, налагаемое на конгруэнцию, сводится к пропорциональности коэффициентов

$$\tilde{\beta} : \beta = \tilde{\gamma} : \gamma.$$

Если обратиться к формулам (36c) § 91, то наше условие можно записать уравнениями

$$S = \beta x \rho, \quad T = -\gamma y \rho, \tag{94}$$

где ρ — новая неизвестная функция.

Вносим эти значения S, T в уравнение (44) системы (44), (45a) — (45d) § 93. Мы получим:

$$[\beta\, d\rho + \rho\, d\beta,\ \omega^1] = 0, \quad [\gamma\, d\rho + \rho\, d\gamma,\ \omega^2] = 0$$

или

$$[d \ln \rho + (\ln \beta)_v\, \omega^2,\ \omega^1] = 0, \quad [d \ln \rho + (\ln \gamma)_u\, \omega^1,\ \omega^2] = 0,$$

откуда

$$d \ln \rho = -(\ln \gamma)_u\, \omega^1 - (\ln \beta)_v\, \omega^2. \tag{95}$$

Внешнее дифференцирование даёт:

$$(\ln \gamma)_{uv} [\omega^1 \omega^2] + (\ln \beta)_{uv} [\omega^1 \omega^2] = 0,$$

т. е.

$$\frac{\partial^2 \ln \beta}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 \ln \gamma}{\partial u\, \partial v}. \tag{96}$$

Следовательно, отношение $\beta : \gamma$ есть произведение функций одного u и одного v, которое можно привести к единице подходящим выбором параметров u и v:

$$\beta = \gamma \tag{96'}$$

и, следовательно, они будут *изотермически-асимптотическими*. При этом условии уравнение (95) интегрируется

$$\rho = \frac{k}{\beta}, \quad k = \text{const}. \tag{97}$$

Мы будем обозначать эти поверхности поверхностями Ф.

Для изотермически-асимптотических поверхностей (96′) после подстановки

$$S = kx, \quad T = -ky$$

система (45a)—(45d) вполне интегрируема и определяет решение $x, y, \lambda, \mu, \rho, N, \nu$ с шестью произвольными постоянными, не считая постоянную k. Так как она допускает умножение x, y, λ, μ на произвольное постоянное с одновременным умножением N на квадрат его, что не меняет отношения $x : y$ и, следовательно, сохраняет конгруэнцию, то система определяет шестипараметрическое семейство конгруэнций Ф с заданной фокальной поверхностью (96′); иначе говоря, система определяет преобразование данной поверхности Ф в поверхность Ф с произволом шести параметров.

Уравнения (94), очевидно, допускают решения

$$\rho = 0, \quad S = 0, \quad T = 0.$$

Тогда уравнение (45c) § 93 даст:

$$N = \text{const.};$$

условия (96), (97) отпадают. Исходная поверхность (A) остаётся произвольной; конгруэнция будет принадлежать линейному комплексу, а вторая фокальная поверхность будет коррелятивна первой и коэффициенты β, γ будут связаны соотношениями

$$\tilde{\beta} = -\beta, \quad \tilde{\gamma} = -\gamma$$

(см. § 95).

121. Преобразование поверхностей Ф. Возвращаясь к преобразованию поверхностей Ф, заметим, что и в этом случае могут быть взяты квадратуры (47a)—(47b) § 94, от которых зависит определение преобразований второго порядка M^{12}.

Внося значения

$$S^1 = k_1 x^1, \quad S^2 = k_2 x^2, \quad T^1 = -k_1 y^1, \quad T^2 = -k_2 y^2 \tag{98}$$

в уравнения (45c) § 93, (47a), (47b) § 94, получим:

$$\begin{aligned} dN^1 &= 2k_1 \{(x^1)^2\,du + (y^1)^2\,dv\}, \quad dN^2 = 2k_2 \{(x^2)^2\,du + (y^2)^2\,dv\}, \\ dn^1 &= 2k_1 \{x^1x^2\,du + y^1y^2\,dv\}, \quad dn^2 = 2k_2 \{x^1x^2\,du + y^1y^2\,dv\}, \\ dN^{12} &= 2(k_1 + k_2)\{x^1x^2\,du + y^1y^2\,dv\}. \end{aligned} \tag{99}$$

Следовательно,

$$n^1 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} N^{12} + c, \quad c = \text{const.} \tag{100}$$

Среди получаемого таким образом однопараметрического семейства поверхностей (M^{12}) найдётся поверхность Ф, если определяемая по формуле (47′) § 94 функция

$$(N^1)^2 = N^2 - \frac{n^1 n^2}{N^1}$$

удовлетворит первому уравнению (99) для перехода от (M^1) к (M^{12}), ибо этим будут обеспечены формулы (98).

Внося в формулу (47′) § 94

$$n^2 = N^{12} - n^1$$

и пользуясь формулами (49) § 94 для x^{12}, y^{12}, получим в качестве условия существования среди преобразованных поверхностей поверхности Ф уравнения

$$d\left\{N^2 + \frac{n^1(n^1 - N^{12})}{N^1}\right\} = 2l\left\{\left(-x^2 + \frac{x^1 n^1}{N^1}\right)^2 du + \left(y^2 - \frac{y^1 n^1}{N^1}\right)^2 dv\right\},$$

где l — значение константы k при переходе от (M^1) к (M^{12}).

Развёртывая левую часть с помощью формул (99) и заменяя N^{12} по формуле (100), увидим, что уравнение удовлетворяется только при значениях постоянных

$$l = k_2, \quad c = 0.$$

Следовательно, существует одна и только одна поверхность Ф среди поверхностей, получаемых применением теоремы переместительности.

Теорема теряет силу, если $k_1 + k_2 = 0$, ибо в таком случае уравнение (100) не имеет места; уравнения (99) показывают, что теперь $N^{12} = \text{const}$. Дифференцируя выражение (48), обнаружим, что среди однопараметрического семейства поверхностей теоремы переместительности при $N^{12} \neq 0$ нет ни одной поверхности Ф; если же

$$N^{12} = 0,$$

то все поверхности принадлежат к классу (96).

122. Литературные указания. Канонический тетраэдр поверхности построен Картаном в статье «Sur la déformation projective des surfaces» (*Ann. Ec. Norm.* **37**, 259—356, 1920). Второе нормирование тетраэдра (§ 85) по существу совпадает с тетраэдром поверхности в П. Д. Г. Тетраэдр, построенный на частных производных A, A_u, A_v, A_{uv} (голономный тетраэдр,) является общеупотребительной местной системой координат у Вильчинского, Фубини и др. Компоненты его даются впервые.

Дифференциальные формы φ_2, ψ_3 из других соображений были даны Фубини (см. Фубини-Чех [1]), выражение их через компоненты тетраэдра приводит Картан в цитированном мемуаре.

К §§ 88—94. В классической дифференциальной геометрии эпохи Бианки-Дарбу основным методом построения асимптотических преобразований был метод Гишара, основанный на преобразованиях Мутара, который был изложен в гл. IV.

Йонас [1] первый отметил неудобство его даже в задаче преобразования поверхностей, т. е. в задаче построения конгруэнции W по заданной фокальной поверхности. В метрическом пространстве он построил формулы, очень близкие к формулам текста. Обозначая [1] через ξ, η, ζ, ξ_1, η_1, ζ_1 направляющие косинусы нормалей первой S и второй S_1 фокальных поверхностей конгруэнции W, он выражает вторую тройку косинусов через первую и их производные по параметрам асимптотических линий α, β в виде

$$\xi_1 = \frac{1}{R}\left(a\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + b\frac{\partial \xi}{\partial \beta} + c\xi\right),$$

такими же формулами определяются η_1 и ζ_1. Здесь R — преобразующее решение уравнения Мутара; и R и c определяются через a и b, которые удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{\partial a}{\partial \beta} = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} b, \quad \frac{\partial b}{\partial \alpha} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} a. \tag{a}$$

Скобки Кристоффеля вычислены для линейного элемента первой фокальной поверхности. Таким образом, если поверхность S дана, то определение конгруэнции W, для которой она служит фокальной поверхностью, а вместе с тем и асимптотического преобразования поверхности S зависит от интегрирования системы (a).

Так как скобки Кристоффеля $\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}$ равны коэффициентам Фубини β, γ, то уравнения Йонаса в точности совпадают с уравнениями (26) § 90. Почти одновременно Фубини [4] построил проективную теорию асимптотических преобразований, изложенную в пятой главе своего курса [7]. Изложение текста приближается к изложению Фубини, отличаясь применением метода внешних форм и определением поверхности компонентами проективных перемещений тетраэдра.

К §§ 96—100. Теория асимптотических преобразований линейчатых поверхностей впервые была рассмотрена Сегре [116], [178]. Пользуясь отобра-

16 Зак. 1038. С. П. Фиников.

жением пространства прямых на квадратичное многообразие Q_4^2 в пятимерном пространстве, Сегре показал, что в конгруэнции W с двумя линейчатыми фокальными поверхностями прямолинейные образующие на обеих фокальных поверхностях соответствуют друг другу; если обе фокальные поверхности—линейчатые и кривые асимптотические первой фокальной поверхности соответствуют прямолинейным образующим второй, то вторая фокальная поверхность является поверхностью 2-го порядка, а криволинейные асимптотические первой принадлежат линейным комплексам.

Вообще, если в конгруэнции W прямолинейным образующим одной фокальной поверхности соответствуют кривые асимптотические линии другой, то эти асимптотические принадлежат линейным комплексам. В частности, если первая фокальная поверхность — поверхность 2-го порядка, а вторая не имеет прямолинейных образующих, то оба семейства асимптотических линий её принадлежат к различным линейным комплексам.

К этим вопросам возвращаются Пиконе [1], Торторичи [2], [3], [4], Террачини [1], которые более или менее широко пользуются аналитическим аппаратом.

К §§ 101—109. Амбросетти [1], прилагая метод Фубини, и в особенности сам Фубини [3], [4] доказали обратные теоремы к теоремам Сегре; если кривые асимптотические некоторой поверхности принадлежат линейным комплексам, то можно построить конгруэнцию W, которая переведёт их в прямолинейные образующие второй фокальной поверхности.

Особенно интересная конфигурация связывается с поверхностями, на которых оба семейства асимптотических принадлежат различным для каждой линии линейным комплексам. Фубини доказал, что такая поверхность F_2 может быть преобразована с помощью конгруэнции W в две и только две поверхности 2-го порядка Q_1 и Q_2 так, что асимптотическим линиям будут соответствовать прямолинейные образующие. Существенное дополнение в эту теорию внёс Бушин Су [1], [2]. Он показал, что обе поверхности Q_1 и Q_2 совпадают так, что в каждой точке поверхности F_2 существуют две касательные, которые касаются одной и той же поверхности Q в двух различных точках. Каждая из касательных устанавливает между точками поверхности F_2 и поверхностью Q соответствие, в котором асимптотическим линиям поверхности F_2 соответствуют прямолинейные образующие Q.

Эта же поверхность 2-го порядка Q несёт на себе все прямые Демулена, которые являются характеристиками однопараметрических семейств соприкасающихся поверхностей 2-го порядка Софуса Ли, связанных с точками одной асимптотической линии на поверхности F_2. Четыре точки пересечения прямых Демулена описывают четыре полости огибающей поверхностей Софуса Ли, которые для поверхностей F_2 совпадают с поверхностью 2-го порядка Q.

Обратно, всякое семейство ∞^1 косых четыреугольников H, образованных прямолинейными образующими одной поверхности Q, служит четыреугольниками Демулена двух однопараметрических систем поверхностей Σ и Σ'. Каждая из поверхностей этих систем является поверхностью F_2. Все они соответствуют асимптотическим линиям, и соответствующие точки их лежат на двух диагоналях четыреугольника H, которые служат для всех поверхностей обеих систем Σ и Σ' одновременно директрисами Вильчинского, т. е. директрисами линейной конгруэнции, полученной пересечением линейных комплексов, соприкасающихся к асимптотическим линиям поверхности F_2. Ещё ранее Фиников [13], [17] нашёл эти системы Σ, Σ' как единственные системы поверхностей с общими первой и второй директрисами Вильчинского.

Вся конфигурация получила новое значение в работах Паитази [2], являясь одним из трёх найденных им типов расслояемых сопряжённых четвёрок.

К конгруэнциям W с линейчатыми фокальными поверхностями возвращается Егоров [1]. Он рассматривает семейство ∞^1 поверхностей 2-го порядка q, характеристика каждой поверхности — пространственная кривая

4-го порядка, но она может распадаться на четыре прямых, составляющих косой четыреугольник H. В таком случае каждая пара противоположных сторон четыреугольника H описывает фокальные поверхности конгруэнции, образованной прямолинейными образующими одного семейства поверхностей 2-го порядка q. Другое семейство образующих описывает вторую конгруэнцию, фокальные поверхности которой образованы другой парой сторон четыреугольника H.

Фиников [7] специализировал предыдущее построение. Если одна пара сторон четыреугольника H неподвижна при изменении H, то другая пара сторон описывает фокальные полости конгруэнции R. Всякая конгруэнция R с линейчатыми фокальными поверхностями может быть так получена. Неподвижные прямые четыреугольника H, очевидно, являются директрисами (притом общими) фокальных поверхностей. Можно сказать, что фокальные поверхности принадлежат одной и той же линейной конгруэнции. Обратно, любые две линейчатые поверхности, принадлежащие к одной линейной конгруэнции, служат фокальными поверхностями конгруэнции R. Преобразования Лапласа этой конгруэнции являются, конечно, конгруэнциями R и обе фокальные поверхности — линейчатые, причём директрисами служит та же самая пара прямых.

К § 98. Особые преобразования поверхностей F_1 появляются здесь впервые.

К §§ 110—117. Литературные указания о поверхностях R будут даны в главе VII. Преобразование поверхностей R дал Йонас [1]. Он же дал [4] асимптотические преобразования поверхности I, которые Фубини называет поверхностями Йонаса. Гамбье [2] показал, что поверхности, содержащие ∞^2 сетей R, содержат столько же сетей Йонаса. В последние годы к поверхностям Йонаса вернулся Картан [3].

В том же году Йонас [3] даёт преобразование поверхностей, налагающихся на поверхности Цицейки [2], у которых гауссова кривизна пропорциональна четвёртой степени расстояния её касательной плоскости от неподвижной точки. Несмотря на метрический характер определения, поверхность сохраняет своё свойство при всяком аффинном преобразовании (Цицейка [1]). Бляшке получил эти поверхности как аффинные сферы.

Наконец, как произведение двух асимптотических преобразований, Йонас [6] получил преобразование поверхностей, налагающихся на поверхность с линейным элементом:

$$ds^2 = \frac{G}{4}\,(u\,du^2 + 2du\,dv + v\,dv^2).$$

К § 121. Преобразование изотермически-асимптотических поверхностей дал Фубини [1], [3] также в своём курсе. Теорему переместительности построила Рагацци [1].

Фиников [10] искал конгруэнции Фубини, которые повторяются в преобразовании Лапласа. Это, очевидно, — конгруэнции R (см. далее стр. 401), ибо каждая конгруэнция Фубини есть конгруэнция W, но последовательность Лапласа может содержать три последовательные конгруэнции Фубини без того, чтобы четвёртая была того же рода. Если четыре последовательные конгруэнции последовательности суть конгруэнции Фубини, то и все конгруэнции последовательности обладают этим свойством; такую последовательность естественно назвать последовательностью Фубини. Кроме последовательности из конгруэнций, принадлежащих линейным комплексам, которую открыл Вильчинский, и последовательности, у которой все фокальные поверхности — линейчатые, автор нашёл два типа последовательностей Фубини.

Новое преобразование поверхности R дал Фубини [6], введя понятие конгруэнции вполне сопряжённой поверхности S. Так он называет конгруэнцию, лучи которой проходят через точки поверхности S и каждая сопряжённая система на фокальных поверхностях соответствует сопряжённой системе поверхности S. Поверхность S есть поверхность R и конгруэнция есть конгруэнция R. Аналогично, конгруэнция вполне гармонична S, если её лучи лежат в касательных плоскостях S и сопряжённые системы S соответствуют сопряжённым системам обеих фокальных поверхностей.

Требуя, чтобы вполне сопряжённая конгруэнция и вполне гармоничная были сопряжены относительно поверхностей 2-го порядка Ли, автор получает, кроме некоторых частных случаев, зависящих от конечного числа произвольных постоянных, только поверхности постоянной гауссовой кривизны и их проективные преобразования, поверхности Цицейки-Вильчинского и поверхности, у которых совпадают все канонические прямые. У поверхностей постоянной кривизны вполне гармоническая конгруэнция уходит в бесконечность, а двойственная ей вполне сопряжённая совпадает с конгруэнцией нормалей.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

СОПРЯЖЁННЫЕ СЕТИ И КОНГРУЭНЦИИ В n-МЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

I. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА СЕТЕЙ И КОНГРУЭНЦИЙ

123. Проективное пространство n-измерений P_n. Теория конгруэнций легко обобщается на n-мерное проективное пространство. Геометрия в пространстве более трёх измерений выходит за рамки этой книги. Однако при изложении метода изображения прямых трёхмерного пространства точками гиперповерхности 2-го порядка в проективном пространстве пяти измерений нам придётся ссылаться на основные свойства сопряжённых сетей, конгруэнций и их преобразований в пятимерном проективном пространстве. Так как эта теория развивается с одинаковой лёгкостью в проективном пространстве любого числа измерений, то в этой главе мы остановимся на проективных свойствах конгруэнции прямых в n-мерном пространстве.

Совокупность $n+1$ чисел $x^1, x^2, \ldots, x^{n+1}$, из которых не все одновременно равняются нулю, называется аналитической точкой X; умножение всех чисел x^i на одно и то же число меняет аналитическую точку X, но сохраняет неподвижной геометрическую точку X (нормирование координат геометрической точки). Совокупность всех этих геометрических точек образует проективное пространство n измерений P_n. Числа x^i называются проективными однородными координатами точки X.

Система k линейных однородных уравнений

$$\sum a_{i1}x^i = 0, \quad \sum a_{i2}x^i = 0, \quad \ldots, \quad \sum a_{ik}x^i = 0 \tag{1}$$

относительно координат x^i определяет в пространстве P_n линейное подпространство $n-k$ измерений L_{n-k}; пространство L_{n-1} называется гиперплоскостью, L_2 — плоскостью, L_1 — прямой линией.

Если $B_1, B_2, \ldots, B_{n-k+1}$ — совокупность $n-k+1$ точек линейного пространства L_{n-k}, не лежащих в одном пространстве L_{n-k-1} и X — произвольная точка L_{n-k}, то система $n+1$ уравнений

$$x^i = \sum_{j=1}^{n-k+1} b^i_j y^j, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{2}$$

где b_j^i — координаты точек B_j, или коротко

$$X = B_j y^j \qquad \text{суммирование по } j = 1, 2, \ldots, n-k+1$$

содержит только $n-k+1$ независимых уравнений, ибо и левые, и правые части удовлетворяют системе (1); она содержит не менее $n-k+1$ независимых уравнений, ибо среди определителей порядка $n-k+1$ матрицы $\| b_j^i \|$ хоть один не равен нулю, поскольку точки B_j не лежат в одном линейном пространстве L_{n-k-1}. Следовательно, система (2) определяет коэффициенты y^j, которые называются *однородными проективными координатами* точки X в пространстве L_{n-k}. Отсюда следует, что L_{n-k} определяется $n-k+1$ независимыми (не лежащими в L_{n-k-1}) точками $B_1, B_2, \ldots, B_{n-k+1}$.

Система $n+1$ уравнений

$$x^i = \varphi_i(u_1, u_2, \ldots, u_k), \quad i = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{3}$$

где φ_i — аналитические функции своих аргументов, определяет многообразие k измерений S_k проективного пространства P_n, если матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial\varphi_{n+1}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_2} & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_k} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_k} & \ldots & \frac{\partial\varphi_{n+1}}{\partial u_k} \end{pmatrix}$$

имеет ранг k. Независимые переменные $u_1, u_2, \ldots, u_k$ называются *криволинейными координатами* точки X в многообразии S_k. Многообразие S_{n-1} называется гиперповерхностью, S_2 — поверхностью и S_1 — линией.

Если дана кривая

$$x^1 = \varphi_1(u), \ \ldots, \ x^{n+1} = \varphi_{n+1}(u) \tag{4}$$

или коротко

$$X = X(u),$$

то пространство L_p, определяемое точками $X, \frac{dX}{du}, \ldots, \frac{d^pX}{du^p}$, называется соприкасающимся линейным подпространством кривой (4). Если $p = n-1$, получаем соприкасающуюся гиперплоскость; если $p = 2$ — соприкасающуюся плоскость, если $p = 1$ — касательную.

Совокупность касательных кривой S_1 образует *развёртывающуюся поверхность*, для которой S_1 служит *ребром возврата*.

124. Конгруэнция прямых в P_n. Двупараметрическое семейство прямых $(X\ Y)$ пространства P_n называется *конгруэнцией*, если его можно разложить двумя способами на ∞^1 развёртывающихся поверхностей. В трёхмерном пространстве всякое двупараметрическое семейство прямых имеет развёртывающиеся поверхности и является конгруэнцией, в пространстве большего числа измерений конгруэнции являются исключением. Пусть X и Y — две точки луча, координаты которого заданы, как функции параметров u, v. Если уравнение $v = f(u)$ определяет развёртывающуюся поверхность конгруэнции и $X + \lambda Y$ — та точка, где луч касается ребра возврата, то касательная к кривой $(X + \lambda Y)$ совпадает с лучом конгруэнции. Следовательно, при дифференцировании в направлении развёртывающейся поверхности имеет место равенство

$$(X + \lambda Y)_u du + (X + \lambda Y)_v dv = aX + bY,$$

или

$$(X_u + \lambda Y_u)\,du + (X_v + \lambda Y_v)\,dv = a'X + b'Y, \tag{5}$$

где a, b, a', b' — подходящие множители.

Выбирая четыре уравнения с различными координатами точек X, Y и исключая du, dv, a', b', мы получим квадратное уравнение для λ вида

$$(X_u + \lambda Y_u, \ X_v + \lambda Y_v, \ X, \ Y) = 0, \tag{6}$$

где круглыми скобками обозначено грассманово произведение четырёх точек, т. е. любой определитель четвёртого порядка матрицы, образованной из координат этих точек.

Если $n = 3$, то система (5) содержит только $n + 1 = 4$ уравнения, и единственное уравнение (6) определит два фокуса луча. Если $n > 3$, то уравнение (6) распадётся на ряд уравнений по числу независимых определителей четвёртого порядка матрицы координат. Эти уравнения вообще будут несовместны.

Выберем точки X и Y в фокусах луча и пусть $u = \text{const.}$ и $v = \text{const.}$ определяют развёртывающиеся поверхности конгруэнции; уравнение (5) будет удовлетворяться значениями $\lambda = 0$, $dv = 0$ и $\frac{1}{\lambda} = 0$, $du = 0$, и мы получим в новых обозначениях

$$X_u = \alpha X + \beta Y, \quad Y_v = \gamma X + \delta Y, \tag{7}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — четыре функции от u, v.

Система $n+1$ независимых решений X, Y уравнений (7) определит конгруэнцию в пространстве P_n, где X, Y — фокусы, а $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$ — развёртывающиеся поверхности конгруэнции.

Если, не меняя геометрических точек X, Y, ввести аналитические точки ρX и $\rho' Y$, то уравнения (7) примут вид

$$(\rho X)_u = \left(\alpha + \frac{\partial \ln \rho}{\partial u}\right)(\rho X) + \beta \frac{\rho}{\rho'}(\rho' Y), \qquad (\rho' Y)_v = \gamma \frac{\rho'}{\rho}(\rho X) + \left(\delta + \frac{\partial \ln \rho'}{\partial v}\right)(\rho' Y).$$

Если теперь выбрать ρ и ρ' так, чтобы

$$\alpha+\frac{\partial \ln \rho}{\partial u}=0, \quad \delta+\frac{\partial \ln \rho'}{\partial v}=0,$$

то уравнения не будут содержать соответственно членов с X или с Y. Меняя обозначения, мы можем написать систему (7) в виде

$$X_u=\beta Y, \quad Y_v=\gamma X. \tag{7'}$$

125. Преобразование Лапласа. Если исключить Y из уравнений (7), то мы придём к уравнению вида

$$X_{uv}=aX_u+bX_v+cX, \tag{8}$$

где

$$a=\delta+\frac{\partial \ln \beta}{\partial v}, \quad b=\alpha, \quad c=\alpha\frac{\partial}{\partial v}\left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)+\beta\gamma-\alpha\delta.$$

Уравнение (8) симметрично относительно переменных u, v. Следовательно, касательная к линии v, прямая XX_v, описывает конгруэнцию с теми же развёртывающимися поверхностями u, v, что и конгруэнция (XX_u).

Впрочем, нетрудно увидеть и непосредственно, что точка

$$X_1=X_v-aX \tag{9}$$

является вторым фокусом луча XX_v. Действительно, дифференцируя X_1 по u и исключая X_{uv} с помощью уравнения (8), а X_v — с помощью (9), мы получим:

$$X_{1u}=bX_1+hX, \tag{10}$$

где

$$h=c+ab-a_u.$$

Уравнения (9), (10) вполне аналогичны системе (7); следовательно, X_1 и X суть первый и второй фокусы луча XX_v.

Аналогично

$$X_{-1}=X_u-bX \tag{9'}$$

является фокусом луча XX_u, отличаясь только скалярным множителем от Y.

Дифференцируя обе части уравнения (10) по v и исключая X_v и X с помощью (9) и (10), мы получим уравнение Лапласа для X_1

$$X_{1uv}=a_1X_{1u}+b_1X_{1v}+c_1X_1, \tag{11a}$$

где

$$a_1=a+\frac{\partial \ln h}{\partial v}, \quad b_1=b, \quad c_1=c+b_v-a_u-b\frac{\partial \ln h}{\partial v}. \tag{11b}$$

Это уравнение ещё раз показывает, что сеть линий u, v на поверхности (X_1) — сопряжённая.

Рассматривая конгруэнцию касательных к линиям v на поверхности (X_1), т. е. конгруэнцию прямых $(X_1 X_{1v})$, найдём новую поверхность (X_2), отнесённую к сопряжённой сети линий (u, v) и т. д. Точно так же, рассматривая касательные к линиям u, мы найдём поверхности (X_{-1}), (X_{-2}) и т. д., отнесённые к сопряжённой системе линий (u, v). Переход от (X) к (X_1) и т. д. носит название *преобразования Лапласа*, а бесконечная последовательность конгруэнций и сопряжённых сетей... (X_{-2}), (X_{-1}), (X), (X_1), (X_2) ... называется *последовательностью Лапласа*.

Формулы преобразования Лапласа для перехода от одной сети последовательности к другой в общем случае примут вид:

$$(X_q)_u=bX_q+h_{q-1}X_{q-1}, \qquad (X_q)_v=X_{q+1}+a_qX_q, \tag{12a}$$

$$p,\ q>0,$$

$$(X_{-p})_u=X_{-p-1}+b_{-p}X_{-p}, \qquad (X_{-p})_v=aX_{-p}+k_{-p+1}X_{-p+1}, \tag{12b}$$

ибо в силу формулы (11b) и аналогичной для преобразования в сторону линии u для всяких положительных q и p имеем:

$$b_q=b, \quad a_{-p}=a.$$

126. Инварианты Дарбу. Уравнение (8) определяет бесконечное множество разнообразных сетей (u, v), которые получаются, если брать различным образом $n+1$ независимых решений его. С другой стороны, одна и та же сеть (X) может быть получена из разных уравнений вида (8), ибо при замене

$$X=\rho X'$$

уравнение (8) изменяется. Простой подсчёт покажет, что коэффициенты нового уравнения

$$X'_{uv}=a'X'_u+b'X'_v+c'X' \tag{13}$$

связаны с коэффициентами уравнения (8) соотношениями

$$a'=a-\frac{\partial \ln \rho}{\partial v}, \quad b'=b-\frac{\partial \ln \rho}{\partial u}, \quad c'=\frac{\rho c+a\rho_u+b\rho_v-\rho_{uv}}{\rho}. \tag{14}$$

Исключая из уравнений (14) множитель ρ, придём к двум соотношениям между коэффициентами a, b, c и a', b', c'

$$c+ab-a_u=c'+a'b'-a'_u, \quad c+ab-b_v=c'+a'b'-b'_v,$$

которые показывают, что выражения

$$h=c+ab-a_u, \quad k=c+ab-b_v \tag{15}$$

при изменении нормирования координат точки X не меняются. Они носят название *инвариантов Дарбу*.

Нетрудно заметить, что они определяют уравнение (8) вплоть до умножения переменной X на произвольный множитель ρ. Действительно, формулы (14) показывают, что выбором ρ мы всегда можем привести a' к нулю. Предполагая, что это уже сделано и внося $a=0$ в формулы (15), мы получим:

$$c=h, \quad b_v=h-k.$$

Отсюда b получается интегрированием с произвольной функцией одного переменного u в виде слагаемого,

$$b=\int_{v_0}^{v}(h-k)\,dv+\varphi(u),$$

но формулы (14) показывают, что множитель ρ требованием $a=0$ ещё не определён, а именно, умножение X на $\rho=f(u)$ не меняет коэффициента a и прибавляет к коэффициенту b произвольную функцию $\varphi(u)=\frac{f'(u)}{f(u)}$, которую мы встретили при интегрировании b. Выбирая её произвольным образом, мы найдём одно из уравнений с данными инвариантами h, k; все остальные будут получены по формулам (14).

Подсчитывая инварианты h, k уравнения (11a), мы найдём

$$h_1=2h-k-\frac{\partial^2 \ln h}{\partial u\,\partial v}, \quad k_1=h. \tag{16}$$

Формулы (16) позволяют подсчитывать инварианты преобразованных уравнений в последовательности Лапласа.

127. Обрывающиеся последовательности Лапласа. Если

$$h=0,$$

то уравнение (10) даёт:

$$x^i_{1u}=bx^i_1,$$

откуда общее решение —

$$x_1=e^{\int b\,du}\varphi(v)$$

и n координат x^i_1

$$x^i_1=e^{\int b\,du}\varphi_i(v)$$

отличаются между собой только множителем $\varphi_i(v)$, не зависящим от u. При изменении u все координаты x^i_1 умножаются на один и тот же множитель в силу изменения $e^{\int b\,du}$; при этом геометрическая точка не двигается. Следовательно, при изменении u и v точка X_1 описывает линию (линию v), а не поверхность. Последовательность Лапласа обрывается.

Мы видим, что последовательность Лапласа обрывается, если один из инвариантов Дарбу равен нулю, но это условие не является

необходимым, и последовательность может оборваться без того, чтобы инварианты Дарбу обращались в нуль.

Действительно, если преобразование Лапласа, поверхность (X_1), вырождается в линию, то касательные к линиям u и v совпадают, три точки X_{1u}, X_{1v} и X_1 лежат на одной прямой и, следовательно, существуют такие функции A, B, C, что

$$AX_{1u}+BX_{1v}+CX_1=0. \tag{a}$$

Внося сюда значения (9), (10), получим:

$$BX_{vv}+(Ab-Ba+C)X_v+[Ah-(Ab+C)a-Ba_v]X=0. \tag{b}$$

Если $B\neq 0$, то уравнение (b) показывает, что точки X_{vv}, X_v, X лежат на одной прямой, соприкасающаяся плоскость линии v на поверхности (X) — неопределённа; поверхность (X) — линейчатая и линии v — прямолинейные образующие; они проходят через точки X_1 и в силу (10) касаются линии (X_1). Следовательно, в этом случае поверхность (X) — развёртывающаяся и линия (X_1) служит ей ребром возврата.

Если при этом

$$h=0,$$

то в силу (10) и (a) обе производные X_{1u}, и X_{1v} пропорциональны X_1, точка X_1 при изменении u и v стоит на месте. Поверхность (X) — конус, и (X_1) вырождается в вершину этого конуса.

Допустим теперь, что $B=0$. Тогда уравнение (b) связывает только X_v и X, касательная к линии v на поверхности (X) неопределённа, эта линия вырождается в точку, а поверхность (X) — в линию. Если этот случай исключить, то надо допустить, что все коэффициенты уравнения (b) — нули. Это приводит к уравнениям

$$B=0, \quad Ab+C=0, \quad Ah=0.$$

Если $A=0$, то и $C=0$, и уравнение (a) исчезает. Значит, надо допустить $h=0$, и мы возвращаемся к рассмотренному выше случаю (случай Лапласа).

II. СЕТИ И КОНГРУЭНЦИИ СОПРЯЖЁННЫЕ И ГАРМОНИЧНЫЕ

128. Сеть, сопряжённая конгруэнции. По определению, *конгруэнция* (XY) *сопряжена сети* (Z), если луч XY конгруэнции проходит через соответствующую точку Z поверхности и развёртывающиеся поверхности конгруэнции соответствуют линиям сопряжённой системы (сети) на поверхности (Z). *Конгруэнция* $(X'Y')$ *гармонична сети* (сопряжённой) (Z), если луч $X'Y'$ лежит в соответствующей касательной плоскости поверхности (Z) и развёртывающиеся поверхности конгруэнции соответствуют линиям сети.

Пусть конгруэнция (XY) дана уравнениями (7) § 124. Если сеть (Z) сопряжена конгруэнции, то точка Z лежит на луче XY. Следовательно, при подходящем выборе функций λ и μ можно положить

$$Z=\begin{vmatrix} X & Y \\ \lambda & \mu \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Пользуясь тем, что однородные координаты точки Z можно умножить на произвольную функцию, мы можем придать одной из функций λ или μ любое значение; в частности, можно, например, предположить, что λ удовлетворяет первому из уравнений (7) § 124

$$\lambda_u=\alpha\lambda+\beta\mu. \tag{18a}$$

Выберем теперь такую функцию ε, чтобы имело место равенство

$$\mu_v=\gamma\lambda+\delta\mu+\varepsilon\mu. \tag{18b}$$

Если продифференцировать уравнение (17) по переменной u, заменить производную X_u по формуле (7) § 124, а производную λ_u — по формуле (18a), то получим по правилу дифференцирования определителя:

$$Z_u=\begin{vmatrix} X_u & Y \\ \lambda_u & \mu \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} X & Y_u \\ \lambda & \mu_u \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \alpha X+\beta Y & Y \\ \alpha\lambda+\beta\mu & \mu \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} X & Y_u \\ \lambda & \mu_u \end{vmatrix},$$

или

$$Z_u=\alpha\begin{vmatrix} X & Y \\ \lambda & \mu \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} X & Y_u \\ \lambda & \mu_u \end{vmatrix}.$$

Преобразуя так же производную Z_v и пользуясь формулой (18b), мы получим окончательно:

$$Z_u=\alpha Z+\begin{vmatrix} X & Y_u \\ \lambda & \mu_u \end{vmatrix},\quad Z_v=\delta Z+\varepsilon\mu X+\begin{vmatrix} X_v & Y \\ \lambda_v & \mu \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Продифференцируем теперь первое уравнение по переменному v. Поскольку Y удовлетворяет системе (7), получим:

$$Z_{uv}=\alpha_v Z+\alpha Z_v+\begin{vmatrix} X_v & Y_u \\ \lambda_v & \mu_u \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} X & \dfrac{\partial}{\partial u}(\gamma X+\delta Y) \\ \lambda & \dfrac{\partial}{\partial u}(\gamma\lambda+\delta\mu+\varepsilon\mu) \end{vmatrix}.$$

Мы можем исключить отсюда Y, X_v, Y_u при помощи уравнений (7), (17), (19), вводя точки Z, Z_u, Z_v. Мы получим уравнение вида

$$Z_{uv}=AZ_u+BZ_v+CZ+\varepsilon_u\mu X, \tag{20}$$

где

$$A=\delta+\frac{\lambda_v}{\lambda},\quad B=\alpha+\frac{\mu_u}{\mu},$$

$$C=\beta\gamma-\alpha\delta+\alpha\left(\ln\frac{\alpha}{\lambda}\right)_v+\delta\left(\ln\frac{\delta}{\mu}\right)_u-(\ln\lambda)_v(\ln\mu)_u.$$

Если точка Z описывает сопряжённую сеть u, v, то Z должно удовлетворять уравнению Лапласа, и коэффициент при точке X должен обращаться в нуль; а так как обращение в нуль коэффициента μ приводит к совпадению геометрических точек X и Z, то $\varepsilon_u=0$ и ε — функция одного v. Эту функцию, не испортив уравнения (18a), можно привести к нулю, если λ и μ умножить на подходящую функцию одного v.

Действительно, полагая $\lambda=\lambda_1\rho$, $\mu=\mu_1\rho$, мы по сокращении на ρ не изменим уравнения (18a) и преобразуем уравнение (18b) к виду

$$(\mu_1)_v+\mu_1\frac{\partial\ln\rho}{\partial v}=\gamma\lambda_1+\delta\mu_1+\varepsilon\mu_1.$$

Достаточно положить $\dfrac{\partial\ln\rho}{\partial v}=\varepsilon$, чтобы освободиться от ε, не нарушая уравнения (18a). Имеем теорему:

Поверхность (Z), сопряжённая конгруэнции (XY), определяется по формуле (17), *где λ и μ — произвольные решения той же самой системы* (7).

129. Вписанные и описанные последовательности. В силу сопряжённости поверхности (Z) и конгруэнции (XY) лучи конгруэнции, пересекающие линию $v=\text{const.}$ поверхности (Z), образуют развёртывающуюся поверхность; касательная плоскость к этой развёртывающейся поверхности, т. е. фокальная плоскость конгруэнции, проходит через касательную к линии $v=\text{const.}$ поверхности (Z), т. е. через луч ZZ_u.

Согласно хорошо известной теореме из теории конгруэнций (§ 8) эта фокальная плоскость касается второй фокальной поверхности, которая несёт рёбра возврата развёртывающихся поверхностей $u=\text{const.}$, т. е. поверхности (Y).

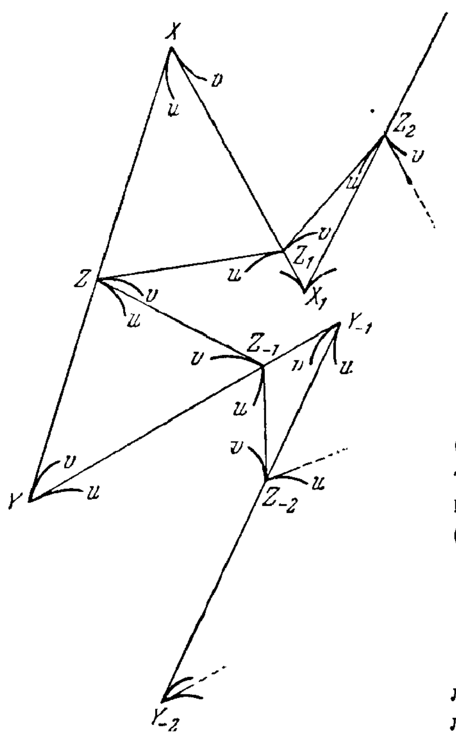
Значит, касательная ZZ_u лежит в касательной плоскости поверхности (Y). Развёртывающиеся поверхности u, v конгруэнции (ZZ_u) соответствуют линиям u, v фокальной сети этой поверхности (Y).

Имеем теорему:

Конгруэнции касательных (ZZ_u) и (ZZ_v) *линий сети* (Z), *сопряжённой конгруэнции* (XY), *гармоничны фокальным сетям* (Y) и (X) *этой конгруэнции.*

Касательные плоскости поверхности (Y), проходящие через образующие развёртывающейся поверхности $u=\text{const.}$ той конгруэнции (ZZ_u), которая к ней гармонична, касаются поверхности (Y) в точках линии $u=\text{const.}$ Характеристики этих касательных плоскостей совпадают с касательными сопряжённого семейства $v=\text{const.}$ Но характеристика плоскости семейства принадлежит двум плоскостям дифференциальной окрестности. Значит, наша характеристика пройдёт через общую точку двух образующих ZZ_u дифференциальной окрестности развёртывающейся поверхности $u=\text{const.}$, т. е. через фокус луча ZZ_u.

Таким образом, *касательные к линиям сети лежат в фокальных плоскостях сопряжённой конгруэнции и проходят через фокусы гармоничной конгруэнции.* При этом касательная к линии u нашей сети лежит в касательной плоскости той фокальной поверхности конгруэнции, ей сопряжённой, которая соответствует развёртывающимся поверхностям v и проходит через тот фокус гармоничной конгруэнции, который лежит в точке касания луча с линиями v её фокальной поверхности.



Черт. 6.

Эти геометрические соображения можно подтвердить небольшим аналитическим расчётом. Исключая X из первого уравнения (19) с помощью формулы (17), получим:

$$Z_u - \left(\alpha + \frac{\mu_u}{\mu}\right) Z = -\lambda \left(Y_u - Y \frac{\mu_u}{\mu}\right).$$

Отсюда вытекает, что не только точка Z лежит на касательной к линии $u = \text{const}$. поверхности (Y), но и точка

$$Z_{-1} = Z_u - BZ = Z_u - \left(\alpha + \frac{\mu_u}{\mu}\right) Z$$

луча ZZ_u лежит на касательной к линии $v = \text{const}$. поверхности (Y). Луч ZZ_u лежит, следовательно, в касательной плоскости поверхности (Y). При этом точка Z_{-1} по формуле (9′), где коэффициент B взят из уравнения Лапласа (20) для сети (Z), является преобразованием Лапласа поверхности (Z), т. е. вторым фокусом луча ZZ_u.

Продолжая дальше это построение, мы найдём, что касательная к линии u на поверхности (Z_{-1}) будет лежать в касательной плоскости второй фокальной поверхности (Y_{-1}) конгруэнции (YY_u) и второй фокус Z_{-2} луча $Z_{-1}Z_{-1u}$ будет лежать на касательной к линии u поверхности (Y_{-1}).

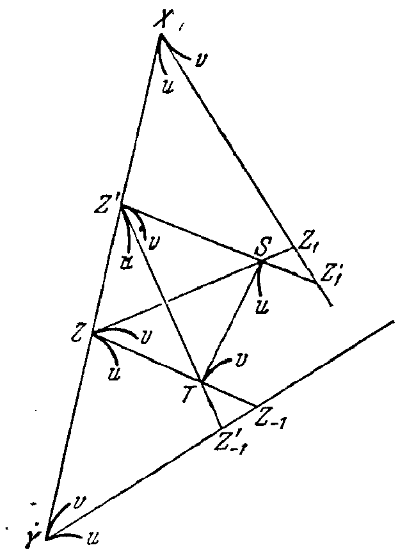
Фигура $\ldots XYY_{-1}Y_{-2}\ldots$ образует последовательность Лапласа, построенную на конгруэнции (XY); фигура $\ldots Z_1ZZ_{-1}Z_{-2}\ldots$ образует последовательность Лапласа, построенную на сети (Z).

Фокусы Z, Z_{-1} и т. д. второй последовательности лежат на соответствующих лучах XY, YY_{-1} и т. д. первой и обе последовательности соответствуют своими развёртывающимися поверхностями.

Определение. Если две последовательности соответствуют своими развёртывающимися поверхностями и лучи первой последовательности проходят через соответствующие фокусы второй, то будем говорить, что первая последовательность *описана* около второй, а вторая *вписана* в первую последовательность.

Отсюда следует, что *конгруэнция, сопряжённая сети, производит последовательность, описанную около последовательности, порождённой сетью.*

130. Конгруэнция, гармоничная паре поверхностей. Рассмотрим теперь две поверхности (Z) и (Z'), (черт. 7), сопряжённые одной и той же конгруэнции (XY). Так как касательные ZZ_u и $Z'Z'_u$ лежат в одной и той же плоскости — плоскости, которая касается поверхности (Y), то они должны пересекаться. Обозначим буквой T точку их пересечения. Пусть касательные ZZ_v, $Z'Z'_v$ пересекаются в точке S. Нетрудно показать, что конгруэнция (ST) гармонична поверхностям (Z) и (Z'), т. е. соответствует конгруэнции (XY) своими развёртывающимися поверхностями.



Черт. 7.

Действительно, зададим конгруэнцию (XY) уравнениями (7) § 124, а поверхности (Z) и (Z') — формулами

$$Z = \begin{vmatrix} X & Y \\ \lambda & \mu \end{vmatrix}, \quad Z' = \begin{vmatrix} X & Y \\ \lambda' & \mu' \end{vmatrix}, \tag{17'}$$

где λ, μ и λ', μ' — две пары решений системы (7). Очевидно, надо предполагать, что определитель

$$\Delta = \mu\lambda' - \lambda\mu'$$

отличен от нуля. Мы можем, следовательно, положить

$$\zeta = \frac{Z}{\Delta}, \quad \zeta' = \frac{Z'}{\Delta}.$$

Напишем первое уравнение (19) один раз для Z, другой раз для Z' и исключим из них Y_u:

$$(\lambda'\zeta_u-\lambda\zeta'_u)\Delta+(\lambda'\zeta-\lambda\zeta')(\Delta_u-\alpha\Delta)=X(\lambda'\mu_u-\lambda\mu'_u).$$

Если воспользоваться формулами, непосредственно вытекающими из уравнений (17')

$$X\Delta=\lambda'Z-\lambda Z'=\Delta(\lambda'\zeta-\lambda\zeta')$$

и из уравнений (7), которым удовлетворяют λ, μ и λ', μ',

$$\Delta_u=\alpha\Delta+\lambda'\mu_u-\lambda\mu'_u,$$
$$\Delta_v=\delta\Delta+\mu\lambda'_v-\mu'\lambda_v,$$

то получим:

$$\zeta_u=m\zeta'_u\quad \zeta_v=n\zeta'_v,\quad m=\frac{\lambda}{\lambda'},\quad n=\frac{\mu}{\mu'},\tag{21}$$

где второе уравнение получено таким же преобразованием из второго уравнения (19).

Отсюда вытекает, что точками пересечения наших касательных являются линейные комбинации точек Z, Z_u или Z', Z'_u:

$$T=\zeta'_u,\quad S=\zeta'_v.$$

Исключая ζ из двух уравнений (21), получим уравнение Лапласа для координат точки ζ', т. е. для поверхности (Z')

$$(m-n)\zeta'_{uv}+m_v\zeta'_u-n_u\zeta'_v=0$$

или

$$(m-n)T_v=-m_vT+n_uS,\quad (m-n)S_u=-m_vT+n_uS,$$

откуда следует, что T и S — фокусы луча ST, а $u=\text{const.}$, $v=\text{const.}$ — развёртывающиеся поверхности конгруэнции (ST). Они отвечают той сопряжённой сети u, v на поверхности (Z) или (Z'), которая соответствует развёртывающимся поверхностям конгруэнции, а так как луч ST лежит на пересечении касательных плоскостей поверхностей (Z), (Z'), то он удовлетворяет определению конгруэнции, гармоничной и поверхности (Z), и поверхности (Z').

Имеем теорему:

Две сети, сопряжённые одной конгруэнции, гармоничны другой конгруэнции.

131. Теоремы о сопряжённых и гармоничных конгруэнциях. Целый ряд аналогичных теорем можно установить относительно сопряжённых или гармоничных сетей и конгруэнций.

Две конгруэнции, гармоничные одной сети, сопряжены другой сети.

Две сети, гармоничные одной конгруэнции, сопряжены другой конгруэнции.

Две конгруэнции, сопряжённые одной сети, гармоничны другой.

Чтобы доказать первую теорему, заметим, что наиболее общая конгруэнция (ZZ_1) (черт. 7), гармоничная сети (X), может быть получена, если мы будем искать сеть (Z), сопряжённую конгруэнции $(XX_{-1})\equiv(XX_u)$, где $X_{-1}\equiv Y$. Если сеть (X) определена уравнением Лапласа (8) § 125, то конгруэнция (XX_1) определяется уравнениями (9), (10), § 125, а фокальные сети (Z), (Z_1) определятся по формуле (17):

$$Z=\begin{vmatrix}X & X_{-1}\\ R & R_{-1}\end{vmatrix}=R_uX-RX_u,\quad Z_1=\begin{vmatrix}X_1 & X\\ R_1 & R\end{vmatrix}=RX_v-R_vX,\tag{22}$$

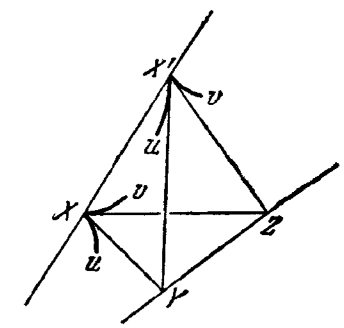
где R — какое-либо решение уравнения (8), а R_1, R_{-1} — выражения, получаемые из R по формулам (9), (9').

Если теперь взять вторую конгруэнцию $(Z'Z'_1)$, гармоничную сети (X) и полученную по формулам (22) при помощи решения R', то легко видеть, что лучи ZZ_1 и $Z'Z'_1$ пересекаются в точке

$$S=\begin{vmatrix}X & X_u & X_v\\ R & R_u & R_v\\ R' & R'_u & R'_v\end{vmatrix},\tag{22'}$$

ибо S линейно выражается как через Z, Z_1,

$$S=\frac{1}{R^2}\begin{vmatrix}X & RX_u-R_uX & RX_v-R_vX\\ R & 0 & 0\\ R' & RR'_u-R_uR' & RR'_v-R_vR'\end{vmatrix}=$$
$$=-\frac{1}{R}\begin{vmatrix}-Z & Z_1\\ RR'_u-R_uR' & RR'_v-R_vR'\end{vmatrix},$$



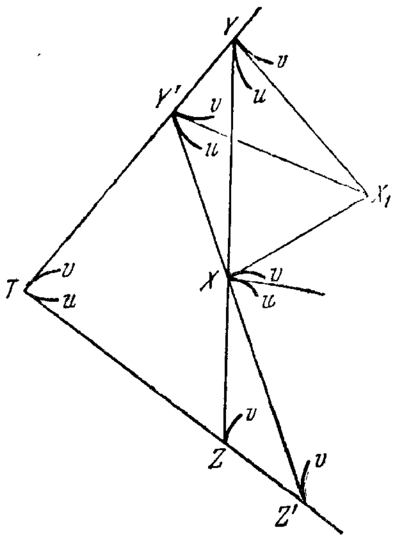
Черт. 8.

так и через Z', Z'_1. При этом построенная нами точка S описывает сеть, сопряжённую обеим конгруэнциям (ZZ_1), $(Z'Z'_1)$, ибо это — фокальная сеть конгруэнции (ST) предыдущего параграфа.

Перейдём к доказательству второй теоремы. Если две сети (X) и (X') гармоничны конгруэнции (YZ) (черт. 8), то XX_u и $X'X'_u$, XX_v и $X'X'_v$ соответственно пересекаются в точках Y и Z.

Рассмотрим конгруэнцию (XX'). Её линейчатые поверхности u, v имеют соответственно касательными плоскостями XYX' и XZX' и в точке X и в точке X' и, следовательно, являются развёртывающимися поверхностями. Следовательно, конгруэнция (XX') сопряжена и сети (X), и сети (X').

Третья теорема прямо следует из предыдущей: если конгруэнции (YZ) и $(Y'Z')$ сопряжены сети (X) (черт. 9) и, следовательно, их фокальные сети (Y), (Y') гармоничны конгруэнции $(XX_1)=(XX_v)$, то по предыдущей теореме конгруэнция (YY') сопряжена и сети (Y), и сети (Y'), и, следовательно, фокальная сеть (T) конгруэнции (YY') будет гармонична и (YZ) и (YZ').



Черт. 9.

Найдём формулы, дающие сопряжённую конгруэнцию к данной сети.

132. Определение конгруэнции, сопряжённой сети. Заметим, что конгруэнция (YZ) сопряжена сети (X), если её фокальная сеть (Y) гармонична конгруэнции (XX_1). Касательные к линиям сети (Y) содержат фокусы X, X_1 нашей конгруэнции. Следовательно,

$$Y_u=\alpha X+\beta Y,\qquad Y_v=\gamma X_1+\delta Y, \tag{23}$$

откуда условие совместности

$$(\alpha X+\beta Y)_v=(\gamma X_1+\delta Y)_u. \tag{24}$$

Если развернуть это уравнение, пользуясь формулами (23), а также (9), (10) § 125, то мы получим линейное однородное уравнение относительно X, X_1 и Y, все коэффициенты которого должны обращаться в нуль, ибо X, X_1 и Y не лежат на одной прямой. Собирая коэффициенты при Y, получим:

$$\beta_v=\delta_u.$$

Следовательно, можно положить

$$\beta=\frac{\partial\ln\varphi}{\partial u},\qquad \delta=\frac{\partial\ln\varphi}{\partial v}.$$

Деля теперь Y на φ, мы приведём β и δ к нулю, как это сейчас же следует из уравнений (23).

Между тем уравнение (24) при $\beta=\delta=0$ даёт, если воспользоваться для X_v, X_{1u} формулами (9), (10) § 125 и собрать коэффициенты при X, X_1

$$\alpha=\gamma_u+b\gamma,\qquad \alpha_v+a\alpha=h\gamma, \tag{25a}$$

откуда, исключая α, получим:

$$\gamma_{uv}=-(a\gamma)_u-(b\gamma)_v+c\gamma. \tag{25b}$$

Это уравнение называется *уравнением, присоединённым к уравнению Лапласа* (8) § 125.

Итак, конгруэнция (YZ), сопряжённая сети (X), определяется из вполне интегрируемой системы

$$Y_u=(\gamma_u+b\gamma)X,\quad Y_v=\gamma(X_v-aX), \tag{26a}$$

$$Z=Y-\gamma X, \tag{26b}$$

где γ есть любое решение уравнения (25b), присоединённого к уравнению (8).

III. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЕТЕЙ С РАВНЫМИ ИНВАРИАНТАМИ

133. Сопряжённые сети с равными инвариантами. Накладывая то или другое условие на инварианты сети, можно получить различные частные виды сопряжённых сетей. Если ограничиваться, как мы всё время делаем, уравнением Лапласа для координат точек поверхности, то наиболее интересна сопряжённая сеть с равными инвариантами:

$$h=k. \tag{27}$$

В силу (15) § 126 это условие показывает, что производные a_u и b_v равны между собой:

$$a_u=b_v, \tag{27'}$$

т. е. существует функция φ такая, что

$$a=\frac{\partial\ln\varphi}{\partial v},\qquad b=\frac{\partial\ln\varphi}{\partial u}.$$

Полагая $\rho=\varphi$ в формулах (14) § 126, мы получим $a'=b'=0$ и приведём уравнение (8) § 125 к виду уравнения Мутара:

$$\frac{\partial^2x^i}{\partial u\,\partial v}=hx^i. \tag{28}$$

В гл. IV, § 70 мы видели, что три решения этого уравнения по формулам (1) § 70 определяют поверхность в E_8, отнесённую к асимптотическим линиям u, v. Теперь мы докажем теорему о характерном свойстве сопряжённой сети с равными инвариантами.

В касательной плоскости поверхности (X), отнесённой к сопряжённой сети с равными инвариантами, существует коническое сечение, имеющее в точке X_1 касание 2-го порядка с линией u, в точке X_{-1} — с линией v.

Может быть, следует обратить внимание на то, что двумерная поверхность (X), хотя и не вмещается в пространство менее чем n измерений, но в этом пространстве обладает двумерной касательной плоскостью, на которой и лежит коническое сечение теоремы.

Возьмём в касательной плоскости поверхности (X) координатный треугольник с вершинами X, X_1, X_{-1}. Всякая точка M в этой плоскости имеет координаты ξ, ξ_1, ξ_2 относительно этого треугольника, определяемые уравнением

$$M=\xi X+\xi_1 X_1+\xi_2 X_{-1}.$$

Каковы бы ни были инварианты h, k сети (X), коническое сечение

$$\xi^2-\lambda\xi_1\xi_2=0, \quad \lambda=\text{const}. \tag{29}$$

касается оси XX_1 в точке X_1 и оси XX_{-1} в точке X_{-1}, в чём нетрудно убедиться, отыскивая точки пересечения её с прямой $\xi_1=0$ (ось XX_{-1}), и прямой $\xi_2=0$ (ось XX_1). Четырьмя точками (две точки X_1 и две X_{-1}) определяется пучок конических сечений — параметр λ остаётся произвольным.

Так как касательная плоскость XX_1X_{-1} является соприкасающейся плоскостью линии $v=\text{const}$. на поверхности (X_1), то можно выбрать параметр λ так, чтобы кривая (29) имела касание 2-го порядка с кривой $v=\text{const}$. поверхности (X_1).

Соседняя точка X_1' на линии $v=\text{const}.$, которая соответствует значению $u+\varepsilon$ параметра u, может быть получена в виде разложения

$$X_1'=X_1+\varepsilon\frac{\partial X_1}{\partial u}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2 X_1}{\partial u^2}+\ldots=\xi X+\xi_1 X_1+\xi_2 X_{-1}. \tag{a}$$

Дифференцируя уравнение (10) § 125 и внося в уравнение (a) значения X_{1u}, X_{1uu}, получим путём сравнения коэффициентов при X, X_1, X_{-1}:

$$\xi=h\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}(h_u+2bh)+\ldots$$

$$\xi_1=1+b\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}(b_u+b^2)+\ldots$$

$$\xi_2=\frac{\varepsilon^2}{2}h+\ldots$$

Если теперь внести эти значения в левую часть уравнения (29), то получим:

$$\xi^2-\lambda\xi_1\xi_2=\frac{1}{2}h(2h-\lambda)\varepsilon^2+\ldots;$$

ненаписанные члены содержат ε по крайней мере в третьей степени.

Отсюда следует, что при $\lambda=2h$ кривая (29) будет иметь касание 2-го порядка с линией $v=\text{const}$. поверхности (X_1).

Такие рассуждения с обычной заменой переменной u на переменную v, инвариантов h на k и точек X_1 на X_{-1} приведут к заключению, что при выборе параметра $\lambda=2k$ коническое сечение (29) имеет касание 2-го порядка с линией $u=\text{const}$. поверхности (X_{-1}). Только для сети с равными между собой и отличными от нуля инвариантами $h=k\gtrless 0$ можно найти кривую $\lambda=2h=2k$, имеющую

одновременно касание 2-го порядка с линией u в точке X_1 и с линией v в точке X_{-1}.

134. Преобразование Мутара. В §§ 70—76 гл. IV мы рассматривали преобразование Мутара, которое позволяет для каждого решения уравнения (28) найти решение нового преобразованного уравнения Мутара, если известно некоторое (преобразующее) решение первоначального уравнения. Это преобразование было использовано для построения конгруэнции W по заданной фокальной поверхности. Теперь мы получаем для него новый геометрический смысл.

Если конгруэнция (YZ) сопряжена сети (X) с равными инвариантами, то точка X', гармонически сопряжённая точке X относительно пары точек Y, Z, описывает новую сеть с равными инвариантами, тоже сопряжённую конгруэнции (YZ). Переход от сети (X) к сети (X') составляет наиболее общее преобразование Мутара.

Допустим, что сеть (X) определяется $n+1$ решениями уравнения (28). Конгруэнция (YZ), сопряжённая сети (X), определяется уравнениями (26a), (26b), которые теперь в силу $a=0$, $b=0$ принимают вид

$$Y_u=R_uX, \quad Y_v=RX_v, \quad Z=Y-RX, \tag{30}$$

где R есть решение присоединённого уравнения (25b), которое в силу $a=b=0$ совпадает с первоначальным уравнением Мутара (28).

Так как

$$RX=Y-Z,$$

то четвёртая гармоническая точка X' может быть определена по формуле

$$X'=Y+Z=2Y-RX.$$

Дифференцируя, получим:

$$X_u'=R_uX-RX_u, \quad X_v'=-(R_vX-RX_v), \tag{31}$$

откуда имеем:

$$X_{uv}'=X_u'\frac{\partial \ln R}{\partial v}+X_v'\frac{\partial \ln R}{\partial u},$$

или, полагая $X'=R\bar{X}$,

$$\bar{X}_{uv}=h'\bar{X}, \quad h'=R\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{1}{R}\right). \tag{31'}$$

Эти формулы в точности совпадают с формулами (5a) и (5b) § 70 гл. IV, что и доказывает наше предложение.

Обратно, *если две сети (X) и (X'), сопряжённые конгруэнции (YZ), гармонически разделяются её фокусами, то обе сети — с равными инвариантами.*

Так как сети (X) и (X') сопряжены одной и той же конгруэнции, то при подходящем нормировании координат они удовлетворяют уравнениям (21) § 130

$$X_u = mX'_u, \quad X_v = nX'_v. \tag{32}$$

Фокусы конгруэнции (YZ), сопряжённой обеим сетям, легко получаются из уравнений (17') § 130, если заменить там, согласно новым обозначениям, $Z \to \Delta X$, $Z' \to \Delta X'$, $X \to \lambda' Y$, $Y \to \mu' Z$ и полученные уравнения разрешить относительно Y и Z.

$$Y = X - mX', \quad Z = X - nX'.$$

Если X, X', Y, Z гармонически сопряжены, то $n = -m$ и условия совместности уравнений (32) дают:

$$(mX'_u)_v + (mX'_v)_u = 0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{X_u}{m}\right)_v + \left(\frac{X_v}{m}\right)_u = 0,$$

откуда следует

$$X'_{uv} + \frac{1}{2}(\ln m)_v X'_u + \frac{1}{2}(\ln m)_u X'_v = 0$$

или

$$X_{uv} - \frac{1}{2}(\ln m)_v X_u - \frac{1}{2}(\ln m)_u X_v = 0,$$

и поскольку условие (27') удовлетворено, то и другое уравнение — с равными инвариантами.

Отметим мимоходом, что конические сечения, связанные с сетями (X) и (X') и расположенные в их касательных плоскостях, пересекаются в двух точках. В этом нетрудно убедиться, если вычислить координаты точки пересечения кривой (29) со значением $\lambda = 2h$ с линией пересечения касательных плоскостей (X) и (X').

135. Теорема переместительности для преобразований Мутара. Теорема переместительности для преобразований Мутара получает теперь новое геометрическое истолкование.

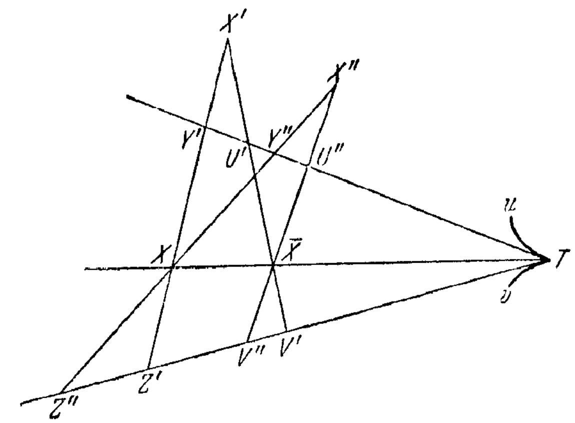
Поставим сначала вопрос шире. Пусть (X) — произвольная сопряжённая сеть и $(Y'Z')$, $(Y''\ Z'')$ — две сопряжённые ей конгруэнции. Мы знаем, что эти две конгруэнции гармоничны одной и той же сети (T); точка T лежит на линии пересечения прямых $Y'Y''$, $Z'Z''$, соединяющих одноимённые фокусы.

Если (X') — сеть, сопряжённая конгруэнции $(Y'Z')$, то найдётся однопараметрическое семейство конгруэнций $(U'V')$, сопряжённых сети (X') и гармоничных сети (T). Чтобы определить их, достаточно найти конгруэнцию, луч которой проходит через точку X' и имеет фокусы на касательных TT_u и TT_v. Если сеть (X'') сопряжена конгруэнции $(Y''Z'')$, то найдём однопараметрическое семейство конгруэнций $(U''\ V'')$, сопряжённых сети (X'') и гармоничных сети (T). Так как $(U'\ V')$ и $(U''\ V'')$ гармоничны одной сети (T), то они сопряжены одной сети, которая описывается точкой $\bar{X}$, лежащей

на пересечении прямых $U'V'$ и $U''V''$. Эта сеть $(\bar{X})$ зависит от двух параметров.

Теорема переместительности мутаровских преобразований представляет специальный случай этого построения, который получается, когда все четыре сети (X), (X'), (X'') и $(\bar{X})$ будут сетями с равными инвариантами.

Теорема переместительности утверждает существование точки $\bar{X}$, которая гармонически отделяет точки X' и X'' относительно точек пересечения прямых $X'\bar{X}$, $X''\bar{X}$ с касательными TT_u и TT_v, если сеть (X) обладает равными инвариантами и точки X' и X'' выбраны на лучах $Y'Z'$, $Y''Z''$ двух конгруэнций, сопряжённых сети (X), так,



Черт. 10.

что они гармонически отделяют X относительно фокусов Y', Z' и Y'', Z''. Этому условию, очевидно, удовлетворяют все точки прямой XT. Действительно, возьмём любую точку $\bar{X}$ на прямой XT, проведём прямые $\bar{X}X'$ и $\bar{X}X''$. Проектируя из точки T гармонические четвёрки точек X', Y', X, Z' и X'', Y'', X, Z'', получим два гармонических пучка TX', TY', TX, TZ' и TX'', TY'', TX, TZ'', которые соответственно пересекут прямые $\bar{X}X'$ и $\bar{X}X''$ по гармоническим четвёркам точек X', U', $\bar{X}$, V' и X'', U'', $\bar{X}$, V''.

Следовательно, если сети (X') и (X'') получены из сети (X) преобразованием Мутара, то и сеть $(\bar{X})$ получается из сети (X') и из сети (X'') преобразованием Мутара.

Поскольку в двух гармонических четвёрках лучей TX', TY', TX, TZ' и TX'', TY'', TX, TZ'', последние три прямых попарно совпадают, то совпадают первые прямые. Следовательно, точка T лежит на прямой $X'X''$.

Так как в гл. IV мы получили для четвёртой поверхности $(\bar{X})$ теоремы переместительности формулу (14) § 75, которая в наших обозначениях запишется в виде

$$\overline{X}=X+\frac{R_1R_2}{\nu}(X''-X'),$$

причём точки $\overline{X}$ при переменном ν заполняют прямую XT, то

$$T=X''-X'.$$

IV. СОПРЯЖЁННЫЕ СЕТИ В ПРОСТРАНСТВЕ С ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЬЮ 2-го ПОРЯДКА

136. Квадратичные сети и конгруэнции и их преобразование. Сеть (X) пространства P_n называется квадратичной, если поверхность (X) принадлежит гиперповерхности 2-го порядка Q^2_{n-1} (*фундаментальной гиперквадрике*). Левую часть уравнения поверхности Q^2_{n-1} мы будем обозначать в виде произведения (плюккерова) двух аналитических точек

$$\{XX\}=a_{ik}x^ix^k, \qquad a_{ik}=a_{ki},\ i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1. \quad (33)$$

Это произведение, очевидно, обладает свойством переместительности и распределительности. Скалярный множитель можно выносить за скобку произведения.

Уравнение поверхности Q^2_{n-1} будем теперь писать в виде

$$\{XX\}=0. \quad (33')$$

Совершая подходящее проективное преобразование (не всегда действительное), можно привести левую часть уравнения поверхности Q^2_{n-1} к виду суммы квадратов.

Следовательно, плюккерово произведение можно себе представлять в виде суммы

$$\{XX\}=(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^{n+1})^2. \quad (33'')$$

Для поверхностей 2-го порядка в трёхмерном проективном пространстве P_3 имеет место теорема:

Если развёртывающиеся поверхности конгруэнции высекают на поверхности 2-го порядка сопряжённую сеть, когда луч входит в поверхность, то они высекают сопряжённую сеть вторично, когда луч выходит из поверхности.

Чтобы обнаружить справедливость этой теоремы, достаточно заметить, что при движении точки по поверхности 2-го порядка Q в направлении какой-либо её касательной полярная плоскость точки (т. е. касательная плоскость) поворачивается около касательной сопряжённой; так как прямая полюсов и ось пучка их полярных плоскостей образуют пару полярно сопряжённых прямых, то сопряжённые касательные поверхности Q сопряжены и в полярном соответствии этой поверхности. Фокальные плоскости конгруэнции содержат эти касательные (ибо конгруэнция сопряжена поверхности), следовательно, они сопряжены в полярном соответствии, т. е. каждая плоскость α_1, α_2 содержит полюс другой A_2, A_1.

С другой стороны, полярная плоскость точки X' вторичного пересечения луча конгруэнции с поверхностью Q есть касательная плоскость. Поскольку её полюс X' принадлежит обеим плоскостям α_1, α_2, по теореме взаимности полюсы A_1, A_2 лежат в ней и определяют касательные $X'A_1$, $X'A_2$ к линиям, которые высекаются на поверхности Q фокальными плоскостями α_2, α_1. Это вместе с тем касательные к линиям, высекаемым на поверхности Q развёртывающимися поверхностями конгруэнции. Так как они сопряжены, то (X') — сопряжённая сеть.

Простой аналитический расчёт позволит распространить эту теорему на проективное пространство P_n.

137. Рибокуровское преобразование квадратичных сетей в P_n. Квадратичная сеть (X) определяется $n+1$ решениями уравнения (8) § 125, удовлетворяющими уравнению (33′). Конгруэнция (YZ), сопряжённая сети (X), определяется системой (26a), (26b) § 132, где γ есть произвольное решение присоединённого уравнения (25b) § 132.

Пусть X и X' — точки, где луч XY пересекает поверхность (33). Тогда

$$X'=Y+\theta X,$$

а поскольку точки X и X' удовлетворяют уравнению (33′), то имеем:

$$\{Y+\theta X,\quad Y+\theta X\}=\{YY\}+2\theta\{XY\}=0.$$

Следовательно, изменяя нормирование, можно принять

$$X'=\lambda Y-\mu X, \quad (34a)$$

где

$$\lambda=2\{XY\},\quad \mu=\{YY\}. \quad (34b)$$

Дифференцируя формулы (34b) и пользуясь уравнениями (26a), получим, поскольку $\{XX\}=0$, $\{XX_v\}=0$:

$$\mu_u=(\gamma_u+b\gamma)\lambda,\quad \mu_v=\gamma(\lambda_v-a\lambda). \quad (35)$$

Сравнивая эти уравнения с уравнениями (26a), немедленно получаем, что λ удовлетворяет уравнению Лапласа (8), а μ — такому же уравнению Лапласа для сети (Y).

Так как

$$\mu_uY-\mu Y_u=(\gamma_u+b\gamma)(\lambda Y-\mu X)=(\gamma_u+b\gamma)X',$$

то X' удовлетворяет уравнению (22), т. е. описывает сеть, сопряжённую конгруэнции (YY_u) или, что то же, конгруэнции (YX). Теорема доказана.

Такое преобразование квадратичных сетей называется *рибокуровским*. Оно определяется формулами (34a), (34b). Конгруэнция в проективном пространстве P_n называется *квадратичной*, если лучи её принадлежат гиперповерхности Q^2_{n-1}.

Теорема. *Рибокуровское преобразование переводит квадратичную конгруэнцию в квадратичную.*

Действительно, если точка X описывает фокальную сеть конгруэнции и лучи конгруэнции касаются линий u, то необходимое и достаточное условие квадратичности можно записать равенствами

$$\{XX\}=0, \quad \{X_uX_u\}=0, \tag{36}$$

ибо равенство $\{XX_u\}=0$ получается, если первое уравнение (36) продифференцировать по u, а тогда

$$\{X+tX_u, \quad X+tX_u\}=\{XX\}+2t\{XX_u\}+t^2\{X_uX_u\}=0.$$

Рассмотрим какую-нибудь конгруэнцию (XY), сопряжённую сети (X), у которой конгруэнция $v=\text{const.}$ — квадратичная. По доказанной теореме конгруэнция (XY), пересекая вторично поверхность Q^2_{n-1} в точках X', высекает на ней новую сопряжённую сеть (X'). Докажем, что конгруэнция $v=\text{const.}$ этой сети, т. е. конгруэнция $(X'X'_u)$ — квадратичная.

Дифференцируя уравнение (34a), которое определяет это преобразование, получим:

$$X'_u=\lambda_uY+\lambda Y_u-\mu_uX-\mu X_u$$

или, внося сюда по формулам (26a), (35)

$$Y_u=(\gamma_u+b\gamma)X, \quad \mu_u=(\gamma_u+b\gamma)\lambda,$$

и, приводя подобные члены,

$$X'_u=\lambda_uY-\mu X_u. \tag{34c}$$

Так как X' принадлежит гиперквадрике и, значит,

$$\{X'X'\}=0,$$

то, чтобы показать выполнение условий квадратичности (36), достаточно обнаружить справедливость тождества

$$\{X'_uX'_u\}=0. \tag{36'}$$

Внося сюда выражение (34c), получим:

$$(\lambda_u)^2\{YY\}-2\mu\lambda_u\{YX_u\}+\mu^2\{X_uX_u\}=0.$$

Здесь последний член пропадает в силу условия (36), ибо конгруэнция (XX_u) принадлежит гиперповерхности Q^2_{n-1}. Пользуясь

формулами (34b), мы преобразуем уравнение к виду

$$\lambda_u\mu[\lambda_u-2\{YX_u\}]=0. \tag{α}$$

Между тем, внося значение Y_u из уравнения (26a) в произведение

$$\{XY_u\}=(\gamma_u+b\gamma)\{XX\},$$

заметим, что оно обращается в нуль в силу первого условия квадратичности (36), а дифференцирование первого уравнения (34b) даёт теперь

$$\lambda_u=2\{YX_u\},$$

следовательно, уравнение (α) обращается в тождество, что и доказывает наше равенство (36').

138. Полярно сопряжённые последовательности. Если дана сеть (X) в пространстве P_n, то последовательные преобразования Лапласа (X_1), (X_2), ..., (X_n), ... образуют *последовательность Лапласа* $[X]$. Рассмотрим n точек последовательности $X_1, X_2, \ldots, X_n$; они определяют гиперплоскость L_{n-1}; обозначим буквой Y полюс этой гиперплоскости относительно гиперповерхности Q^2_{n-1}, определяемой уравнением (33'), буквой Y_1 — полюс гиперплоскости $XX_1\ldots X_{n-1}$, буквой Y_2 — гиперплоскости $X_{-1}XX_1\ldots X_{n-2}$ и т. д. *Точки Y, Y_1, Y_2, ... опишут фокальные поверхности новой последовательности Лапласа* $[Y]$, полярно сопряжённой последовательности $[X]$ относительно гиперповерхности Q^2_{n-1}.

Чтобы доказать это, заметим, что точку Y, полярно сопряжённую точкам $X_1, X_2, \ldots, X_n$, можно определить равенствами

$$\{YX\}=1, \ \{YX_1\}=0, \ \ldots, \ \{YX_n\}=0, \tag{37a}$$

из которых первое устанавливает её нормирование. Аналогично для Y_1 имеем уравнения

$$\{Y_1X_{-1}\}=1, \ \{Y_1X\}=0, \ \ldots, \ \{Y_1X_{n-1}\}=0. \tag{37b}$$

Так как последовательность $[X]$ находится в пространстве n измерений P_n, где произвольная точка пространства выражается линейно через $n+1$ линейно независимых точек, то всегда можем положить

$$X_{-1}=\alpha X+\alpha_1X_1+\ldots+\alpha_nX_n, \tag{38}$$

причём коэффициент α_n заведомо не равен нулю, иначе вся последовательность лежала бы в пространстве P_{n-1} меньшего числа измерений, что мы сейчас исключаем.

Умножая уравнение (38) на Y или на Y_1 (полюккерово произведение), получим в силу (37a), (37b):

$$\{YX_{-1}\}=\alpha, \quad \{Y_1X_n\}=\frac{1}{\alpha_n}. \tag{37c}$$

Дифференцируя уравнения (37a) по v и пользуясь для каждой точки X_i соотношениями (12a) § 125,

$$(X_i)_v = X_{i+1} + a_i X_i,$$

где a_i — коэффициент уравнения Лапласа для поверхности X_i, получим:

$$\{Y_v X_i\} + \{Y, X_{i+1} + a_i X_i\} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Здесь произведения, содержащие множителем Y, в силу (37a) пропадают все, кроме $\{YX\}$. Дифференцируя также первое уравнение (37c) и пользуясь для производной $(X_{-1})_v$ уравнением (12b) § 125

$$(X_{-1})_v = aX_{-1} + kX,$$

получим всего $n+2$ уравнения

$$\{Y_v X_{-1}\} = \alpha_v - \alpha a - k, \ \{Y_v X\} = a, \ \{Y_v X_1\} = 0, \ \ldots, \ \{Y_v X_{n-1}\} = 0.$$

Нетрудно заметить теперь, что эти $n+2$ уравнения можно записать единообразно

$$\{Y_v - pY - qY_1, X_i\} = 0, \quad i = -1, 0, \ldots, n-1,$$

если положить

$$p = a, \quad q = \alpha_v - 2\alpha a - k.$$

Так как $n+2$ точки X_i линейно независимы, то должна обращаться в нуль линейная комбинация, стоящая первым множителем.

Поступая аналогично с уравнениями (37b), получим систему уравнений

$$Y_v = pY + qY_1, \quad Y_{1u} = p_1 Y + q_1 Y_1. \tag{39}$$

Уравнения (39) показывают, что Y и Y_1 служат фокусами луча YY_1; развёртывающиеся поверхности последовательности $[Y]$ соответствуют $[X]$, но идут в обратном порядке, т. е. при движении полюса гиперплоскости в направлении u сама гиперплоскость перемещается в направлении v.

Имеем теорему:

Полярное преобразование последовательности Лапласа, относительно гиперповерхности Q^2_{n-1} образует новую последовательность Лапласа, полярно сопряжённую с первой.

Соотношение между обеими последовательностями взаимное, причём последовательность, вписанная в последовательность $[X]$ (фокусы X'_i лежат на лучах $X_i X_{i+1}$), полярно сопряжена последовательности, описанной около последовательности $[Y]$ (лучи $Y'_i Y'_{i+1}$ проходят через фокусы Y_i).

139. Производные последовательности. Последовательность Лапласа $[X']$, вписанная в последовательность $[X]$, называется *производной последовательностью* от последовательности $[X]$. Производная от производной называется производной последовательностью 2-го порядка и т. д.

Формулы (22) § 131, определяющие сеть, сопряжённую конгруэнции (XX_1), определяют вместе с тем производную последовательность. Для всякого номера i имеем:

$$X'_i = \begin{vmatrix} X_i & X_{i+1} \\ R_i & R_{i+1} \end{vmatrix},$$

где буквами X_i, X'_i обозначены преобразования Лапласа порядка i соответственно от X, X'; буквой R — решение уравнения Лапласа (8) § 125 для сети (X) и функции R_i получаются из R так же, как X_i из X.

Допустим теперь, что R^1 и R^2 — два решения уравнения (8), а $[X']$, $[\bar{X}']$ — две производные последовательности Лапласа, соответствующие этим решениям; обе конгруэнции $(X'X'_1)$ и $(\bar{X}'\bar{X}'_1)$ будут гармоничны одной сети (X_1) и, следовательно, сопряжены сети (X''), которая описывается точкой пересечения лучей $X'X'_1$ и $\bar{X}'\bar{X}'_1$. Эта точка, очевидно, может быть представлена формулой (22') § 131, которую мы теперь напишем в виде

$$X''_i = \begin{vmatrix} X_i & X_{i+1} & X_{i+2} \\ R^1_i & R^1_{i+1} & R^1_{i+2} \\ R^2_i & R^2_{i+1} & R^2_{i+2} \end{vmatrix} \tag{40}$$

и т. д. Сеть (X''_i) сопряжена и конгруэнции $(X'_i X'_{i+1})$, и конгруэнции $(\bar{X}'_i \bar{X}'_{i+1})$. Следовательно, последовательность $[X'']$ вписана в последовательности $[X']$ и $[\bar{X}']$, т. е. является второй производной от последовательности $[X]$.

Последовательность $[X^{(p)}]$, которая является производной порядка p от последовательности $[X]$, определяется формулами

$$X^{(p)}_i = \det \left| X_i R^1_{i+1} R^2_{i+2} \ldots R^p_{i+p} \right|, \tag{40'}$$

где $R^1, R^2, \ldots, R^p$ — независимые решения уравнения Лапласа (8), указатели внизу R^α_k означают преобразование Лапласа порядка k от решения R^α и между прямыми чертами записано произведение элементов по главной диагонали определителя, все остальные члены которого получаются всевозможными перестановками нижних указателей с учётом знака в зависимости от чётности или нечётности числа транспозиций.

140. Последовательность, порождаемая квадратичной сетью. Пусть (X) — квадратичная сеть. Тогда по условию имеем:

$$\{XX\} = 0; \tag{41}$$

дифференцирование по u и по v этого уравнения в силу формул (9), (9') § 125 даст:

$$\{XX_{-1}\}=0, \quad \{XX_1\}=0. \tag{41'}$$

Рассмотрим последовательность $[X]$, порождаемую сетью (X), и построим последовательность $[\overline{X}]$, полярно сопряжённую последовательности $[X]$, с таким соответствием точек $X \rightleftarrows \overline{X}$, чтобы для всякого i имели место равенства:

$$\{\overline{X}_i X_{-i-1}\}=0, \quad \{\overline{X}_i X_{-i}\}=0, \; \ldots, \; \{\overline{X}_i X_{-i+n-2}\}=0. \tag{42}$$

Если точки $\overline{X}, \overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_n$ линейно независимы, то точку X можно представить в виде:

$$X=\lambda\overline{X}+\lambda_1\overline{X}_1+\ldots+\lambda_n\overline{X}_n.$$

Тогда уравнения (41), (41') в силу формул (42) дают:

$$\{\lambda\overline{X}+\lambda_1\overline{X}_1+\ldots+\lambda_n\overline{X}_n,\; X_{-1}\}=\lambda_n\{\overline{X}_n X_{-1}\}=0,$$

$$\{\lambda\overline{X}+\lambda_1\overline{X}_1+\ldots+\lambda_n\overline{X}_n,\; X\}=\lambda_{n-1}\{\overline{X}_{n-1}X\}+\lambda_n\{\overline{X}_n X\}=0,$$

$$\{\lambda\overline{X}+\lambda_1\overline{X}_1+\ldots+\lambda_n\overline{X}_n,\; X_1\}=$$

$$=\lambda_{n-2}\{\overline{X}_{n-2}X_1\}+\lambda_{n-1}\{\overline{X}_{n-1}X_1\}+\lambda_n\{\overline{X}_n X_1\}=0,$$

откуда

$$\lambda_n=0, \quad \lambda_{n-1}=0, \quad \lambda_{n-2}=0,$$

и

$$X=\lambda\overline{X}+\lambda_1\overline{X}_1+\ldots+\lambda_{n-3}\overline{X}_{n-3}, \tag{43}$$

т. е. точка X лежит в подпространстве L_{n-3} точек $\overline{X}, \overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_{n-3}$. Отсюда теорема:

Последовательность $[X]$, порождаемая квадратичной сетью (X), является производной $(n-3)$-го порядка от её полярно сопряжённой последовательности $[\overline{X}]$.

Чтобы доказать это, заметим, что определение второй производной $[X'']$ от последовательности $[X]$ посредством определителя (40), который даёт каждый фокус её X''_i, можно заменить следующими двумя условиями: 1) каждый фокус X''_i последовательности $[X'']$ лежит в плоскости L_2 трёх последовательных фокусов X_i, X_{i+1}, X_{i+2} последовательности $[X]$, т. е. точка X''_i является линейной комбинацией этих трёх точек и 2) эта линейная комбинация обращается в нуль, если аналитическую точку X заменить решением R^1 или R^2 уравнения Лапласа сети (X).

Для $(n-3)$-й производной $[X^{(n-3)}]$ от последовательности $[\overline{X}]$ эти требования примут вид:

1) Точка $X^{(n-3)}$ должна лежать в подпространстве L_{n-3}, определяемом $n-3$ последовательными фокусами последовательности $[\overline{X}]$. Этому условию формула (43) удовлетворяет при всяком выборе коэффициентов λ_k.

2) Линейная комбинация (43) должна обращаться в нуль при подстановке вместо $\overline{X}$ любого из подходяще подобранных линейно независимых $n-3$ решений уравнения Лапласа для $\overline{X}$.

Иначе говоря, система уравнений для неизвестной функции $\overline{x}$

$$\begin{gathered}\overline{x}_{uv}=\overline{a}\,\overline{x}_u+\overline{b}\,\overline{x}_v+\overline{c}\,\overline{x},\\ G\equiv\lambda\overline{x}+\lambda_1\overline{x}_1+\ldots+\lambda_{n-3}\overline{x}_{n-3}=0\end{gathered} \tag{44}$$

должна допускать $n-3$ линейно независимых решений, т. е. должна определять некоторую сеть (ξ) в пространстве P_{n-4}.

Заметим, что здесь переменная $\overline{x}_1$ в силу формулы (9) линейно представляет частную производную $\frac{d\overline{x}}{dv}$, точно так же переменная $\overline{x}_2$ вместе с $\overline{x}_1$ и $\overline{x}$ позволит выразить $\frac{\partial^2\overline{x}}{\partial v^2}$ и т. д., вплоть до $\overline{x}_{n-3}$, которая вместе с предыдущими даёт $\frac{\partial^{n-3}\overline{x}}{\partial v^{n-3}}$, так что уравнение $G=0$ надо рассматривать как уравнение в частных производных $(n-3)$-го порядка от неизвестной функции $\overline{x}$.

141. Доказательство пассивности вспомогательной системы. Мы хотим доказать, что система (44) *пассивна*, т. е. дифференцирование уравнений (44) по переменным u, v и исключение высших производных не даёт новых уравнений между теми же производными. Продифференцируем уравнение $G=0$ по переменной v и исключим $\overline{x}_{-1}$ с помощью самого уравнения $G=0$. Так как мы имеем по формуле (12a) соотношения

$$\overline{x}_{iv}=\overline{x}_{i+1}+\overline{a}_i\overline{x}_i,$$

то линейная комбинация

$$\frac{\partial G}{\partial v}-pG=0, \quad p=\frac{\partial\ln\lambda}{\partial v}+\overline{a}, \tag{45a}$$

не будет содержать $\overline{x}$, но зато в неё войдёт производная $\frac{\partial^{n-2}\overline{x}}{\partial v^{n-2}}$ под видом функции $\overline{x}_{n-2}$, которая получится при дифференцировании $\overline{x}_{n-3}$.

Дифференцируя уравнение (45a) по u и исключая $\overline{x}_{n-2}$, получим при подходящем q:

$$(G_v-pG)_u-q(G_v-pG)=0.$$

Это уравнение, подобно уравнению $G=0$, содержит только $\bar{x}, \ldots, \bar{x}_{n-4}\bar{x}_{n-3}$.

Покажем, что оно эквивалентно уравнению $G=0$, т. е. что при подходящем множителе пропорциональности r будем иметь тождество

$$(G_v - pG)_u - q(G_v - pG) = rG. \tag{45b}$$

Но это — очевидно. Действительно, сравнивая второе уравнение (44) с уравнением (43), мы видим, что для любой сети $(\bar{X})$, т. е. для любой функции $\bar{x}$, удовлетворяющей первому уравнению (44) функция G равна соответствующему значению x, т. е. соответствующей координате точки X. Эта точка описывает сопряжённую сеть (X), и все её координаты удовлетворяют уравнению Лапласа, которое именно и получается, если, продифференцировав G по u и по v, исключить при помощи производных G_u и G_v высшие производные от $\bar{x}$, не входящие в выражение G. Таким образом, уравнение (45b) удовлетворено для всякого решения системы (44).

Следовательно, система (44) пассивна (М. В. Ф., гл. I, стр. 43), ибо дифференцирования и исключения не дают уравнений, не зависимых от уравнений системы. *Система* (44) *допускает* $n-3$ *линейно независимых решения*. Действительно, общее решение зависит от $n-3$ произвольных постоянных, именно: в начальной точке $u=u_0$, $v=v_0$ можно задать произвольно значения переменных $\bar{x}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-4}$. Тогда уравнение $G=0$ позволит вычислить значение $\bar{x}_{n-3}$, а последовательные производные от него, если пользоваться первым уравнением (44), дадут возможность шаг за шагом подсчитать значение любого $\bar{x}_i$, т. е. любой производной от неизвестной $\bar{x}$ и, следовательно, написать разложение $\bar{x}$ в степенной ряд по разностям $u-u_0$, $v-v_0$. Сходимость ряда следует из общих теорем существования решения пассивной системы (М. В. Ф., стр. 54).

Таким образом, наше предложение доказано; *сеть* (X) *является производной* $(n-3)$-го порядка от сети $(\bar{X})$.

142. Квадратичная конгруэнция, сопряжённая данной квадратичной сети. Если (X) — квадратичная сеть, то для фокусов сопряжённой ей конгруэнции (YZ) уравнения (26a) § 132, (43) с помощью формул (9) § 125 дадут разложения

$$Y_u = (\gamma_u + b\gamma)(\lambda\bar{X} + \ldots + \lambda_{n-3}\bar{X}_{n-3}), \tag{a}$$

$$Y_v = \gamma(\mu\bar{X} + \ldots + \mu_{n-2}\bar{X}_{n-2}), \tag{b}$$

где γ — решение уравнения (25b) § 132, присоединённого к уравнению Лапласа сети (X).

Из первого уравнения следует, что точка Y может лежать только в подпространстве L_{n-3} точек $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_{n-2}$, ибо согласно формулам (12a), (12b) § 125 после дифференцирования по u индекс точки X_q понижается, и точка X должна после дифференцирования дать точку X_{-1}, которой нет в разложении (a).

Из второго уравнения следует, что она может лежать только в пространстве точек $\bar{X}, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_{n-3}$, ибо при дифференцировании по переменному v индекс точки повышается, и точка X_{n-2} даст после дифференцирования точку X_{n-1}, которой нет в разложении (b).

Следовательно, точка Y лежит в подпространстве L_{n-4} точек $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_{n-3}$ и может быть представлена в виде разложения

$$Y = \nu_1\bar{X}_1 + \nu_2\bar{X}_2 + \ldots + \nu_{n-3}\bar{X}_{n-3}.$$

Тогда, в силу условий сопряжённости (42), будем иметь:

$$\{YX_1\} = 0, \quad \{YX\} = 0, \quad \{YX_{-1}\} = 0, \quad \{YX_{-2}\} = 0. \tag{46}$$

Уравнения (26a) § 132 дадут теперь в силу двух первых уравнений (46):

$$\frac{\partial}{\partial u}\{YY\} = 2(\gamma_u + b\gamma)\{YX\} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\{YY\} = 2\gamma\{YX_1\} = 0.$$

Следовательно,

$$\{YY\} = \text{const}.$$

С другой стороны, так как последовательность $[X]$ вписана в последовательность $[Y]$, то (X) является производной первого порядка от (Y). Поскольку сеть (X) есть $(n-3)$-я производная от сети $(\bar{X})$, сама сеть (Y) является производной только $(n-4)$-го порядка от $(\bar{X})$, и аналитическую точку Y по формуле (40′) можно представить в виде

$$Y = \lambda \det|\bar{X}\xi_1^1\xi_2^2 \ldots \xi_{n-4}^{n-4}|.$$

Здесь $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{n-4}$ линейно независимые решения уравнений (44), ξ_k^i — k-е преобразование Лапласа от решения ξ^i, причём $\xi_0 \equiv \xi$ и λ — множитель нормирования, выбранный так, чтобы удовлетворялись уравнения (a), (b). В скобках записано произведение элементов по главной диагонали определителя. В тех же обозначениях точка X запишется определителем

$$X = \det|\bar{X}_{-1}\xi_0\xi_1^1 \ldots \xi_{n-4}^{n-4}|, \tag{47}$$

где ξ_0 — новое $(n-3)$-е решение уравнения (44); определитель теперь содержит $n-3$ строки от $\bar{X}_{-1}$ до $\bar{X}_{n-4}$.

Мы составим новую сеть (Z), если выбросим вместо ξ какое-нибудь другое решение ξ^1.

$$Z = \mu \det|\bar{X}\xi_0\xi_2^2 \ldots \xi_{n-4}^{n-4}|.$$

Таким образом, выкидывая из (47) каждое из решений ξ^i уравнений (44), получим $n-2$ линейно независимых фокусов $Y, Y_1, \ldots, Y_{n-3}$ различных конгруэнций, сопряжённых сети (X). Для каждого из них, по доказанному, имеется соотношение

$$\{Y_iY_i\} = \gamma_{ii} = \text{const}.$$

Линейная комбинация этих фокусов

$$Y^* = m^iY_i$$

при постоянных коэффициентах m^i, очевидно, будет определять фокус новой конгруэнции, сопряжённой сети (X), и, следовательно, мы будем иметь такое же соотношение

$$\{Y^*Y^*\} = \text{const.},$$

или

$$\{m^iY_i, m^kY_k\} = m^im^k\{Y_iY_k\} = \text{const}.$$

Так как это равенство должно быть справедливо для любых m^i, то все коэффициенты при произведениях m^im^k должны быть постоянны

$$\{Y_iY_k\} = \gamma_{ik} = \text{const}.$$

В таком случае произведение

$$\{Y^*Y^*\} = m^im^k\gamma_{ik} = \text{const}.$$

при надлежащем выборе коэффициентов m^i обратится в нуль и соответствующая конгруэнция (XY^*), сопряжённая сети (X), будет квадратичной, ибо для неё будут удовлетворяться оба условия квадратичности

$$\{Y^*Y^*\} = 0, \quad \{Y^*_uY^*_u\} = (\gamma^*_u + b\gamma^*)^2\{XX\} = 0.$$

Таким образом, на $n-3$ постоянных m^i накладывается только одно соотношение. Поскольку один коэффициент m^i может быть фиксирован, конгруэнция (XY^*) зависит от $n-5$ произвольных постоянных. Для пространства пяти измерений, т. е. для $n=5$ все коэффициенты m^i будут определены. Квадратное уравнение $\gamma_{ik}m^im^k = 0$ даст для них два решения (действительных или мнимых).

Имеем теорему:

В проективном пространстве P_5 — пяти измерений существуют две квадратичные конгруэнции, действительные или мнимые, сопряжённые данной квадратичной сети.

143. Литературные указания. Дарбу [1] первый обратил внимание на связь между аналитическим преобразованием решений уравнения Лапласа и его геометрической сущностью — переходом от сопряжённой системы на заданной поверхности к сопряжённой системе на второй фокальной поверхности конгруэнции, образованной касательными к линиям одного семейства этой системы.

Он построил инварианты уравнения Лапласа, дал формулы преобразования их при преобразовании Лапласа самого уравнения. Вся первая половина второго тома Théorie des surfaces посвящена исследованию уравнения Лапласа, правда, более с аналитической точки зрения. Из геометрических приложений ему принадлежит решение вопроса о построении конгруэнции, сопряжённой сети, и сети, сопряжённой конгруэнции.

Много внимания Дарбу уделил обрывающимся последовательностям Лапласа, но он рассмотрел только вырождение фокальной поверхности в линию. Его дополнил Гурса [1] случаем развёртывающейся фокальной поверхности и Бомпиани [1], [2], [3] — случаем конической фокальной поверхности. О том, как этот пропуск в классической монографии Дарбу отразился на задаче определения главных оснований с одним семейством конических линий, смотри монографию автора «Изгибание на главном основании».

Терминология конгруэнций, сопряжённых или гармоничных поверхности, производных сетей и последовательностей введена Гишаром [4]. После его смерти конспект его Сорбоннских лекций был напечатан в двух выпусках Memorial [5]. Впрочем, Гишар пользовался неоднородными координатами и большое внимание уделял метрическим свойствам: сети ортогональные, изотропные, цикличные. Проективными свойствами занимались Цицейка [1], Бомпиани и Годо [3], [4], [5], [7]. Монография Цицейки [1] очень удачно излагает всю теорию.

Геометрическая характеристика сети с равными инвариантами принадлежит Кёнигсу [1]. Он же дал теорему о гармоническом разделении фокусов луча двумя поверхностями, сопряжёнными конгруэнции, если развёртывающиеся поверхности её высекают на каждой поверхности сопряжённые сети с равными инвариантами.

Теорема (§ 137) о преобразовании квадратичной сети (сети, расположенной на поверхности 2-го порядка) посредством конгруэнции, сопряжённой этой сети, принадлежит Рибокуру [3]. О многочисленных приложениях теории квадратичных конгруэнций смотри в конце следующей главы.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ТЕОРИЯ КОНГРУЭНЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРЯМЫХ. ОТОБРАЖЕНИЕ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТЬ 2-ГО ПОРЯДКА Q_4^2

I. ЛИНЕЙНЫЕ КОМПЛЕКСЫ И ИХ ИЗОБРАЖЕНИЕ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ P_5

144. Проективные координаты прямой. Если X и Y — две точки прямой XY и $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ — их аналитические точки с однородными координатами x^i, $y^i (i=1, 2, 3, 4)$, то всякая точка Z этой прямой имеет координаты вида

$$z^i = \lambda x^i + \mu y^i,$$

где λ, μ — подходящие множители.

Нетрудно заметить, что миноры матрицы

$$\begin{Vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ y^1 & y^2 & y^3 & y^4 \end{Vmatrix} \qquad (1)$$

не изменятся (или все умножатся на одно и то же число), если вместо координат точки $\boldsymbol{X}$ ввести координаты точки $\boldsymbol{Z}$ или вообще заменить $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ любыми другими точками прямой.

Шесть различных миноров матрицы (1)

$$p^{ik} = x^i y^k - x^k y^i \qquad (1')$$

называются *однородными* проективными *координатами* прямой.

Совокупность шести однородных координат прямой (вектор с шестью компонентами) мы будем называть *аналитической прямой* и обозначать той же буквой чёрного шрифта $\boldsymbol{p}$. Пользуясь грассмановым обозначением внешнего умножения двух аналитических точек, мы можем записать шесть уравнений (1′) для шести сочетаний значений указателей i, $k = 1, 2, 3, 4$ одним уравнением

$$\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{XY}). \qquad (1'')$$

Нетрудно показать, что координаты (1′) определяют прямую. Ввиду произвола в выборе точек $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ можно, например, принять, что

точка X совпадает с точкой пересечения прямой с плоскостью $x^1 = 0$. Внося эти значения в формулы (1′), получим:

$$p^{i1} = x^i y^1.$$

Следовательно, координаты прямой $p^{11} = 0$, p^{21}, p^{31}, p^{41} пропорциональны координатам $x^1 = 0$, x^2, x^3, x^4 точки X.

Координаты (1′) допускают умножение на одно и то же число, следовательно, для определения прямой существенны только их отношения. Кроме того, все шесть координат связаны квадратичным соотношением, которое легко получить, развёртывая по теореме Лапласа определитель в левой части очевидного равенства

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Это соотношение можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\{\boldsymbol{pp}\} = p^{12}p^{34} + p^{13}p^{42} + p^{14}p^{23} = 0, \qquad (2)$$

где в левой части мы воспользовались обозначением плюккерова произведения.

Условие (2) необходимо и достаточно, чтобы шесть чисел p^{ik} определяли прямую.

Действительно, если, например, p^{12} не равно нулю, то за точки, определяющие прямую, можно принять точки $(0, p^{21}, p^{31}, p^{41})$ и $(p^{12}, 0, p^{32}, p^{42})$; подсчитывая по формулам (1′) координаты $\bar{p}_{ik}$ этой прямой, мы заметим, что координаты $\bar{p}^{ik}$ пропорциональны заданным числам p^{ik} с множителем пропорциональности p^{12}.

Если две прямые $\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{XY})$ и $\bar{\boldsymbol{p}} = (\bar{\boldsymbol{X}}\bar{\boldsymbol{Y}})$ пересекаются, то все четыре точки $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\bar{\boldsymbol{X}}$, $\bar{\boldsymbol{Y}}$ лежат в одной плоскости. Следовательно,

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ y^1 & y^2 & y^3 & y^4 \\ \bar{x}^1 & \bar{x}^2 & \bar{x}^3 & \bar{x}^4 \\ \bar{y}^1 & \bar{y}^2 & \bar{y}^3 & \bar{y}^4 \end{vmatrix} = 0.$$

Развёртывая этот определитель по правилу Лапласа, получим необходимое и достаточное условие пересечения прямых $\boldsymbol{p}$ и $\bar{\boldsymbol{p}}$ в виде равенства

$$\{\boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{p}}\} = p^{12}\bar{p}^{34} + p^{13}\bar{p}^{42} + p^{14}\bar{p}^{23} + \bar{p}^{12}p^{34} + \bar{p}^{13}p^{42} + \bar{p}^{14}p^{23} = 0. \qquad (3)$$

Левая часть его, очевидно, — полярная форма квадратичной формы $\{pp\}$.

Если прямые p и $\overline{p}$ пересекаются, то одну из точек, их определяющую, можно выбрать в точке их пересечения, например, положить $\overline{X} \equiv X$. В таком случае всякая прямая q, принадлежащая к пучку прямых $(p, \overline{p})$, будет определяться точкой X и какой-нибудь точкой $Y + \lambda\overline{Y}$ прямой $(Y\overline{Y})$.

Формула (1′) показывает, что координаты прямой q линейно составлены из координат прямых p и $\overline{p}$.

$$q = p + \lambda\overline{p}. \tag{4}$$

Это соотношение, очевидно, останется в силе, как бы ни выбирать точки X, Y для определения наших прямых.

145. Отображение на гиперповерхность Q_4^2. Шесть координат p^{ik} прямой p можно рассматривать как однородные координаты точки P в проективном пространстве P_5 пяти измерений. Уравнение (2) определяет в пространстве P_5 гиперповерхность 2-го порядка Q_4^2. В силу теоремы предыдущего параграфа точка P, изображающая прямую p трёхмерного пространства P_3, всегда лежит на гиперповерхности Q_4^2 и всякая точка Q_4^2 изображает прямую пространства P_3.

Пучок прямых (4), очевидно, изобразится точками прямой линии $P\overline{P}$, которая целиком лежит в Q_4^2 (прямолинейная образующая). Обратно, две прямые пространства P_3 пересекаются, если точки, их изображающие, лежат на одной прямолинейной образующей Q_4^2.

Комплексное проективное преобразование пространства P_5 имеет следствием линейное преобразование с комплексными коэффициентами над координатами прямой p^{ik}, которое преобразует квадратичную форму в левой части уравнения (2) в произвольную квадратичную форму, в частности, всегда можно её привести к сумме квадратов

$$\{pp\} = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 0, \tag{5}$$

где новые координаты обозначены буквами $x_i\ (i = 1, 2, \ldots, 6)$. Условие пересечения прямых p и q примет тогда вид

$$\{pq\} = \sum_{i=1}^{6} x_i y_i = 0.$$

Очевидно, сами формулы не могут зависеть от проективного преобразования P_5, следовательно, по желанию мы можем придавать произведению $\{pp\}$ вид (5).

Линейным комплексом называется совокупность прямых, координаты которых удовлетворяют линейному уравнению

$$a^i x_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \tag{6a}$$

или

$$a_{34}p^{12} + a_{42}p^{13} + a_{23}p^{14} + a_{12}p^{34} + a_{13}p^{42} + a_{14}p^{23} = 0. \tag{6b}$$

Если подобно аналитической прямой p введём обозначение аналитического комплекса (линейного) $\mathfrak{a}$ как совокупности шести коэффициентов a_{ik} и распространим на него правило плюккерова произведения, то уравнение (6b) может быть записано в виде

$$\{\mathfrak{a}p\} = 0. \tag{7}$$

Если коэффициенты a_{ik} удовлетворяют условию Плюккера (5)

$$\{\mathfrak{a}\mathfrak{a}\} = 0, \tag{8}$$

то они определяют прямую $\mathfrak{a} \equiv a$, которая в силу условия (7) пересекается со всеми прямыми комплекса. Эта прямая называется осью *комплекса*. Сам комплекс называется *специальным*; он образован всеми прямыми, пересекающими его ось.

Шесть коэффициентов a_{ik} можно рассматривать как координаты точки A в P_5, которая изображает линейный комплекс (6b). Из условия (7) следует, что точка A полярно сопряжена относительно гиперповерхности Q_4^2 каждой точке, изображающей прямые p комплекса. Следовательно, прямые комплекса $\mathfrak{a}$ изображаются точками пересечения с гиперповерхностью Q_4^2 полярной гиперплоскости точки A. Если комплекс не специальный, то условие (8) не удовлетворено и точка A расположена в P_5 не на гиперповерхности Q_4^2. Если точка A лежит на гиперповерхности Q_4^2, то комплекс (7) — специальный. Можно сказать, что в этом случае уравнение (7) определяет прямую a посредством всех прямых x, которые её пересекают.

146. Нулевая система линейного комплекса. Пусть $\mathfrak{a}$ — линейный комплекс, не специальный, определяемый уравнением (7) и b — какая-либо прямая. Прямая AB в P_5, соединяющая точки A и B, которые изображают комплекс $\mathfrak{a}$ и прямую b, пересекает гиперповерхность Q_4^2 в двух точках: один раз в точке B, которая, очевидно, лежит на Q_4^2; другой раз в некоторой точке B', которая определяется аналитической точкой

$$b' = \mathfrak{a} + \lambda b.$$

Так как её координаты удовлетворяют уравнению (5) гиперповерхности Q_4^2, то

$$\{\mathfrak{a} + \lambda b,\ \mathfrak{a} + \lambda b\} = 0,$$

или

$$\{\mathfrak{a}\mathfrak{a}\} + 2\lambda\{\mathfrak{a}b\} + \lambda^2\{bb\} = 0,$$

откуда, так как $\{bb\} = 0$,

$$\lambda = -\frac{\{\mathfrak{a}\mathfrak{a}\}}{2\{\mathfrak{a}b\}}.$$

Если нормировать прямую b', умножая однородные координаты её на $2\{\mathfrak{a}b\}$, то можно положить

$$b' = 2\mathfrak{a}\{\mathfrak{a}b\} - b\{\mathfrak{a}\mathfrak{a}\}. \tag{9}$$

Прямые b и b' называются *сопряжёнными* относительно комплекса $\mathfrak{a}$.

Всякая прямая p комплекса $\mathfrak{a}$, пересекающая прямую b, пересекает и сопряжённую прямую b', ибо из равенств $\{pb\}=0$ и $\{\mathfrak{a}p\}=0$ в силу (9) сейчас же следует:

$$\{p\,b'\} = 2\{\mathfrak{a}\,p\}\,\{\mathfrak{a}\,b\} - \{p\,b\}\,\{\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}\} = 0.$$

Очевидно, и обратно: *прямые, пересекающие пары сопряжённых прямых относительно линейного комплекса, принадлежат линейному комплексу.*

Формула (9) показывает, что b' пропорционально b, и сопряжённые прямые совпадают, если

$$\{\mathfrak{a}\,b\} = 0,$$

т. е. если прямая b принадлежит комплексу. Следовательно, *самосопряжённые прямые принадлежат комплексу.* Очевидно, справедлива и обратная теорема: *всякая прямая комплекса (не специального) сопряжена сама себе.*

Действительно, если прямая b принадлежит линейному комплексу $\mathfrak{a}$, т. е.

$$\{\mathfrak{a}\,b\} = 0,$$

то по формуле (9) сопряжённая ей прямая будет:

$$b' = -b\{\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}\}.$$

Если комплекс $\mathfrak{a}$ — не специальный и, следовательно, произведение $\{\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}\}$ не равно нулю, то аналитические прямые b и b' отличаются только нормированием и определяют одну и ту же геометрическую прямую.

Сопряжённые прямые всегда находятся в косом положении.

Действительно, если они пересекаются, то, умножая обе части уравнения (9) на b, заметим, что в левой части по условию пересечения прямых мы должны получить нуль $\{b\,b'\}=0$; в правой части второй член обратится в нуль в силу плюккерова условия $\{b\,b\}=0$, и мы получим:

$$2\{\mathfrak{a}\,b\}\,\{\mathfrak{a}\,b\} = 0,$$

т. е. прямая b принадлежит комплексу, а тогда её сопряжённая b' с ней совпадает.

Через всякую точку пространства M проходит пучок лучей комплекса, имеющий центром точку M и опирающийся на прямую, которая сопряжена одной из прямых, проходящих через точку M,

ибо прямая комплекса, пересекающая какую-либо прямую b, пересекает и её сопряжённую. Все прямые, сопряжённые прямым связки с центром в точке M, лежат в одной плоскости, и все лучи комплекса, проходящие через точку M, принадлежат одному пучку. Действительно, если через точку M проходило бы три прямых p, q и r комплекса $\mathfrak{a}$, не лежащих в одной плоскости, то и прямая $\lambda p + \mu q + \nu r$ (λ, μ, ν — произвольные параметры), т. е. всякая прямая, проходящая через M, принадлежит комплексу. Это, очевидно, невозможно, если комплекс $\mathfrak{a}$ — не специальный. В самом деле, пусть b — какая-либо прямая пространства, не принадлежащая комплексу; её сопряжённая b' пересекает все прямые комплекса, пересекающие прямую b, но теперь, если вся связка прямых с центром в точке M принадлежит комплексу, то эти прямые образуют пучок с центром в точке M. Значит, прямая b' или лежит в плоскости этого пучка, т. е. пересекает прямую b, и тогда b принадлежит комплексу, что противоречит условию, или проходит через точку M, т. е. сама принадлежит комплексу, но тогда, умножая равенство (9) на $\mathfrak{a}$, получим:

$$\{\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}\}\,\{\mathfrak{a}\,b\} = 0.$$

Так как b не принадлежит комплексу и $\{\mathfrak{a}\,b\} \gtrless 0$, то $\{\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}\}=0$, т. е. комплекс — специальный.

Таким образом, каждой точке M соответствует одна плоскость, которая через неё проходит и содержит все прямые комплекса, проходящие через точку M, и все прямые, сопряжённые связке прямых с центром в M. Этим устанавливается коррелятивное соответствие, которое называется *нулевой системой комплекса.*

Два комплекса $\{\mathfrak{a}\,x\}=0$ и $\{\mathfrak{b}\,x\}=0$ находятся в *инволюции*, если точки A и B, изображающие их в P_5, полярно сопряжены относительно фундаментальной гиперповерхности Q_4^2

$$\{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\} = 0.$$

В этом случае всякая прямая p первого комплекса сопряжена в нулевой системе второго комплекса прямой p', тоже принадлежащей первому комплексу. Действительно, формула (9) теперь принимает вид

$$p' = 2\mathfrak{b}\{\mathfrak{b}\,p\} - p\{\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}\}.$$

Умножая на $\mathfrak{a}$, получим $\{\mathfrak{a}\,p'\}=0$, так как $\{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\}=0$ и $\{\mathfrak{a}\,p\}=0$.

Если один комплекс $\mathfrak{a} \equiv a$ — специальный, то его ось принадлежит второму комплексу; если оба комплекса — специальные, то их оси пересекаются.

147. Пересечение линейных комплексов. Пересечение двух линейных комплексов

$$\{\mathfrak{a}\,p\} = 0, \quad \{\mathfrak{b}\,p\} = 0, \tag{10}$$

т. е. совокупность прямых, принадлежащих обоим комплексам, называется *линейной конгруэнцией*. Она принадлежит всем комплексам пучка $\mathfrak{a}+\lambda\mathfrak{b}$; ибо из условий (10) вытекает

$$\{\mathfrak{a}+\lambda\mathfrak{b}, p\}=0;$$

изображениями этих комплексов в P_5 служат точки прямой AB, которая соединяет точки A и B, изображающие в P_5 комплексы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$. В силу

$$\{\mathfrak{a}+\lambda\mathfrak{b}, p\}=0$$

прямые линейной конгруэнции (10) изображаются точками пересечения с гиперповерхностью Q_4^2 трёхмерной плоскости, полярной к прямой AB относительно гиперповерхности.

Если прямая AB пересекает гиперповерхность Q_4^2 в двух точках M, N (действительных, сливающихся или мнимых), то эти точки изображают два специальных комплекса, которые содержатся в пучке $\mathfrak{a}+\lambda\mathfrak{b}$; в то же время они изображают прямые m, n, которые служат осями этих специальных комплексов. Прямые m, n носят название *директрис* линейной конгруэнции. Так как все лучи линейной конгруэнции принадлежат обоим специальным комплексам $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$, то они пересекают их оси m, n. Следовательно, *линейная конгруэнция образована прямыми, пересекающими обе её директрисы*. Эти директрисы совпадают или становятся комплексно сопряжёнными, если прямая AB касается гиперповерхности Q_4^2 или не встречает её.

Если прямая AB пространства P_5 принадлежит гиперповерхности Q_4^2, то все её комплексы — специальные; их оси образуют пучок, ибо точки, изображающие их в P_5, лежат на одной образующей гиперповерхности Q_4^2. Линейная конгруэнция становится особой: она образована прямыми, проходящими через центр этого пучка, и прямыми, лежащими в его плоскости.

Три линейных комплекса

$$\{\mathfrak{a}\,p\}=0, \quad \{\mathfrak{b}\,p\}=0, \quad \{\mathfrak{c}\,p\}=0 \tag{10'}$$

пересекаются по линейной серии ∞^1 прямых. Она принадлежит всем комплексам связки $\mathfrak{a}+\lambda\mathfrak{b}+\mu\mathfrak{c}$, которые изображаются в P_5 точками плоскости ABC. Эта плоскость пересекает гиперповерхность Q_4^2 по кривой 2-го порядка L^2, которая изображает однопараметрическое семейство специальных комплексов, содержащих линейную серию (10'). Следовательно, каждый луч этой линейной серии пересекает все оси этих специальных комплексов, значит, совокупность осей и линейная серия (10') образуют две системы образующих одной поверхности 2-го порядка (две демиквадрики). Линейная серия осей изображается в P_5 точками кривой L^2.

Поскольку

$$\{\mathfrak{a}+\lambda\mathfrak{b}+\mu\mathfrak{c}, p\}=0,$$

линейная серия (10') изображается точками, полярно сопряжёнными точкам плоскости ABC относительно гиперповерхности Q_4^2 и принадлежащими ей, т. е. точками линии пересечения гиперповерхности Q_4^2 плоскостью, сопряжённой плоскости ABC относительно Q_4^2.

Четыре комплекса пересекаются по двум прямым, определяемым системой пяти уравнений

$$\{\mathfrak{a}p\}=0, \quad \{\mathfrak{b}p\}=0, \quad \{\mathfrak{c}p\}=0, \quad \{\mathfrak{d}p\}=0, \quad \{pp\}=0, \tag{10''}$$

из которых последнее — плюккерово условие (2) — квадратное.

II. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ P_3

148. Отображение на гиперповерхности Q_4^2 асимптотических касательных поверхности. Рассмотрим поверхность (X) с текущими координатами общей точки x^i. Отнесём её к асимптотическим линиям u, v. Так как касательная плоскость поверхности определяется точками X, X_u, X_v, а соприкасающаяся плоскость линии u — точками X, X_u, X_{uu} и по определению асимптотической линии поверхности её соприкасающаяся плоскость совпадает с касательной, то произвольная точка X поверхности, отнесённой к асимптотическим параметрам u и v, удовлетворяет системе уравнений

$$(X_{uu}X_uX_vX)=0, \quad (X_{vv}X_uX_vX)=0,$$

откуда следуют линейные зависимости

$$\begin{aligned} X_{uu}&=\alpha X_u+\beta X_v+\varepsilon X,\\ X_{vv}&=\gamma X_u+\delta X_v+\varepsilon' X. \end{aligned} \tag{11}$$

Рассмотрим совокупность касательных к поверхности в точке X. Среди них особое место занимают асимптотические касательные, которые имеют касание 2-го порядка с поверхностью (Т. П., стр. 79); в нашем случае это будут касательные к координатным линиям u, v. Аналитические прямые, которые принадлежат этим касательным, можно записать в виде внешних произведений точек

$$p=(XX_u), \qquad q=(XX_v). \tag{12}$$

Дифференцируя равенства (12) и пользуясь уравнениями (11), получим:

$$\begin{aligned} (XX_{uu})&=\alpha(XX_u)+\beta(XX_v),\\ (XX_{vv})&=\gamma(XX_u)+\delta(XX_v), \end{aligned}$$

или

$$p_u=\alpha p+\beta q, \qquad q_v=\gamma p+\delta q. \tag{13}$$

Эти равенства, очевидно, сохранятся при всяком линейном преобразовании координат, в частности, они сохранят силу и для координат (5). Если изменить нормирование и вместо прямых p, q ввести прямые $\tilde{p}=\lambda p$, $\tilde{q}=\mu q$, то простой пересчёт покажет, что уравнения (13) примут вид

$$\tilde{p}_u=\left(\alpha+\frac{\partial \ln \lambda}{\partial u}\right)\tilde{p}+\beta\frac{\lambda}{\mu}\tilde{q},$$
$$\tilde{q}_v=\gamma\frac{\mu}{\lambda}\tilde{p}+\left(\delta+\frac{\partial \ln \mu}{\partial v}\right)\tilde{q}.$$

Выберем множители λ и μ так, чтобы $\alpha+\frac{\partial \ln \lambda}{\partial u}=0$, $\delta+\frac{\partial \ln \mu}{\partial v}=0$, тогда первое уравнение не будет содержать члена с $\tilde{p}$, а второе — члена с $\tilde{q}$. Предполагая, что это преобразование уже сделано, мы можем переписать систему (13) в виде

$$p_u=\beta q, \quad q_v=\gamma p. \tag{13'}$$

Асимптотические касательные p и q изображаются в пространстве P_5 двумя точками P и Q на гиперповерхности Q_4^2. Все остальные касательные в точке X поверхности (X) принадлежат к плоскому пучку (p, q), аналитические прямые их линейно выражаются через прямые p и q; следовательно, все эти касательные в пространстве P_5 изобразятся точками прямой PQ, проходящей через точки P и Q и принадлежащей гиперповерхности Q_4^2.

Уравнения (13) показывают, что при изменении переменных u и v прямая PQ описывает квадратичную конгруэнцию, фокусами которой служат точки P, Q. Развёртывающиеся поверхности u, v соответствуют асимптотическим линиям поверхности (X).

Обратно, всякая квадратичная конгруэнция (PQ) в P_5 изображает своими точками совокупность касательных одной поверхности.

Действительно, луч PQ изображает прямые плоского пучка. Центр пучка X опишет поверхность (X). Нетрудно заметить, что плоскость пучка касается поверхности. Для этого достаточно показать, что две прямые пучка p и q, которые соответствуют фокусам луча P и Q, являются касательными поверхности (X). Рассмотрим линию u, описываемую точкой P на гиперповерхности Q_4^2. Точки этой линии изображают семейство прямых (p) в P_3. Докажем, что семейство имеет огибающую и характеристическая точка прямой p есть центр пучка X. Для этого достаточно заметить, что характеристическая точка определяется пересечением прямой p с прямой p_u, полученной из прямой p дифференцированием всех её координат по параметру u. Точка P как фокус луча PQ в P_5 удовлетворяет уравнению

$$P_u=\lambda P+\mu Q,$$

откуда следует, что точка P_u лежит на луче PQ, а прямая p_u в P_3 принадлежит пучку (p, q) и пересекает прямую в центре пучка X.

Таким образом, прямая p касается линии $v=\text{const.}$, описываемой точкой X на поверхности (X), а прямая q касается линии $u=\text{const.}$ поверхности (X). Следовательно, пучок (p, q) есть пучок касательных. Поскольку плоскость прямых p и p_u есть соприкасающаяся плоскость кривой $v=\text{const.}$ и она совпадает с касательной плоскостью поверхности (X), то линии $v=\text{const.}$ и аналогично $u=\text{const.}$ — асимптотические линии поверхности, а прямые p и q — её асимптотические касательные.

149. Асимптотическое преобразование поверхности. В предыдущей главе (§ 137) мы познакомились с рибокуровским преобразованием, позволяющим по заданной квадратичной конгруэнции получить новую, тоже квадратичную, конгруэнцию.

Применим это преобразование к квадратичной конгруэнции (PQ), каждый луч которой изображает пучок касательных в некоторой точке X какой-то поверхности (X) в трёхмерном проективном пространстве P_3, а фокусы P, Q — асимптотические касательные этой поверхности.

Пусть фокусы P и Q перейдут в фокусы P' и Q' новой квадратичной конгруэнции $(P'Q')$. Формулы § 137 предыдущей главы показывают, что пара соответствующих лучей PP_u и $P'P'_u$, где аналитические точки P и P' в P_5 тождественно равны аналитическим прямым p и p' в P_3, имеют общую точку.

Действительно, внесём в формулу (34c) § 137 значение Y, взятое из формулы (34a) § 137; мы получим, перенося в одну сторону члены с X, в другую с X':

$$X_u\lambda-X\lambda_u=-\frac{1}{\mu}(X'_u\lambda-X'\lambda_u). \tag{14}$$

Заменяя X и X' на p и p' и обозначая общие значения левой и правой части буквой a, получим точку пересечения прямых PP_u, $P'P'_u$ в P_5 в виде

$$a=p_u\lambda-p\lambda_u=-\frac{1}{\mu}(p'_u\lambda-p'\lambda_u).$$

Точка a, очевидно, принадлежит гиперповерхности Q_4^2, ибо $PQ\equiv PP_u$ и $P'Q'\equiv P'P'_u$ принадлежат ей. Следовательно, она изображает некоторую прямую нашего пространства P_3. Поскольку эта точка принадлежит прямой PQ и прямой $P'Q'$, то прямая a касается и поверхности (X) и поверхности (X'), касательные которой изображаются квадратичной конгруэнцией $(p'q')$. Обе поверхности (X) и (X') в соответствующих точках имеют общую касательную, следовательно, они составляют две фокальные поверхности конгруэнции, описанной прямой a. Асимптотические линии на (X) и (X') образуют на них координатную сеть u, v, значит, соответствуют друг другу. Отсюда вытекает, что конгруэнция (a) есть конгруэнция W.

Последовательности $[P]$, $[P']$ в пространстве P_5 вписаны в последовательность, порождённую конгруэнцией (PP'), ибо фокусы P и P' конгруэнций (PP_u), $(P'P'_u)$ лежат на луче PP' и по построению преобразования $(PQ) \to (P'Q')$ конгруэнция (PP') сопряжена сетям (P) и (P'), т. е. развёртывающиеся поверхности её соответствуют линиям u, v той и другой сети.

Отсюда вытекает, что конгруэнции (PP_u), $(P'P'_u)$ гармоничны одной и той же сети, именно фокальной сети конгруэнции (PP'). В силу общей теоремы § 131 гл. VI обе конгруэнции должны быть сопряжены одной сети. Эта сеть может, очевидно, описываться только точкой a, общей обоим лучам PP_u, $P'P'_u$. Следовательно, *конгруэнция W изображается квадратичной сетью в пространстве P_5*. Отсюда прямо вытекает фундаментальная теорема.

Шесть линейных координат луча конгруэнции W удовлетворяют одному линейному уравнению в частных производных 2-го порядка, характеристики которого соответствуют асимптотическим линиям фокальных поверхностей конгруэнции.

Мы получили конгруэнцию W, применяя рибокуровское преобразование к квадратичной конгруэнции (PQ), которая служила образом всех касательных поверхности (X).

Нетрудно заметить, что мы можем таким образом получить все конгруэнции W.

150. Эквивалентность асимптотического преобразования поверхностей рибокуровскому преобразованию квадратичных конгруэнций. Пусть (X) и (X') — две фокальные поверхности какой-то конгруэнции W, (PQ) и $(P'Q')$ — квадратичные конгруэнции, изображающие все касательные (X) и (X').

Нормируя подходящим образом координаты точек P, Q, P' и Q', мы напишем уравнения $(13')$ для первой и второй конгруэнции, меняя обозначения, в виде

$$p_u = \alpha q, \quad q_v = \beta p, \quad p'_u = \alpha' q', \quad q'_v = \beta' p'. \tag{15}$$

Поверхности (X) и (X') имеют во всякой паре соответствующих точек общую касательную; лучи PQ и $P'Q'$ всегда имеют общую точку, следовательно, лежат в одной плоскости. Значит, найдётся общая точка и у прямых PP' и QQ'. Пусть это будет точка R:

$$R = mp + m'p' = nq + n'q', \tag{16}$$

где согласно нашему обычаю аналитические точки гиперповерхности Q_4^2 обозначены малыми буквами $P = p$, $Q = q$.

Так как n', очевидно, не равно нулю (иначе PQ содержало бы точку P'), то мы можем отсюда определить q'

$$q' = -\frac{n}{n'} q + \frac{m}{n'} p + \frac{m'}{n'} p'. \tag{17}$$

Отсюда в силу (15) получим:

$$p'_u = \alpha' \left[-\frac{n}{n'} q + \frac{m}{n'} p + \frac{m'}{n'} p' \right], \tag{15'}$$

а, дифференцируя уравнение (16) по v и пользуясь формулами (15), получим:

$$p'_v = -\frac{m}{m'} p_v + Ap + Bq + Cp',$$

где A, B, C зависят от m, n, m', n', α, β, α', β' и их производных.

Дифференцируя полученные уравнения и исключая первую и вторую производные от p', получим уравнение вида

$$\left(\frac{m}{m'}\right)_u p_v = Bq_u + A_1 p + B_1 q + C_1 p', \tag{18}$$

где A_1, B_1, C_1 — новые выражения, аналогичные A, B, C.

Составляя плюккерово произведение левой и правой части с прямой p и принимая во внимание, что обе конгруэнции (PQ) и $(P'Q')$ — квадратичные, следовательно,

$$\{pp\} = \{pq\} = \{qq\} = 0, \quad \{p'p'\} = \{p'q'\} = \{q'q'\} = 0,$$

откуда следует

$$\{pp_v\} = \{pq_u\} = 0,$$

мы получим:

$$C_1 \{pp'\} = 0.$$

Произведение $\{pp'\}$ заведомо не нуль. В противном случае произведение $\{p + \lambda p', p + \lambda p'\}$ обращалось бы в нуль при всяком значении λ и прямая PP' принадлежала бы гиперповерхности Q_4^2, т. е. вся плоскость $PP'Q$ принадлежала бы гиперповерхности Q_4^2 и каждая касательная (X') пересекала бы каждую касательную (X). Следовательно, надо положить $C_1 = 0$.

В таком случае уравнение (18) должно исчезать тождественно, иначе касательные PP_v и QQ_u пересекались бы, что, очевидно, невозможно. Следовательно,

$$\left(\frac{m}{m'}\right)_u = 0, \quad \left(\frac{n}{n'}\right)_v = 0,$$

где второе равенство получается аналогично заменой u на v.

Дифференцируя теперь уравнение (16), получим:

$$R_u = mp_u + m'p'_u + m_u p + m'_u p',$$

или, если обозначить $\dfrac{m_u}{m} = \dfrac{m'_u}{m'} = M$ и воспользоваться равенствами (15) и (16),

$$R_u = (m\alpha + Mn) q + (m'\alpha' + Mn') q'.$$

Аналогично

$$R_v = (n\beta + Nm)\,p + (n'\beta' + Nm')\,p',$$

и, следовательно, в силу (15), (15′)

$$R_{uv} = A_2 p + B_2 q + C_2 p'.$$

Если теперь исключить из этих трёх уравнений и двух уравнений (16) величины p, p', q, q', то получим линейное уравнение между R_{uv}, R_u, R_v и R. Следовательно, точка R описывает сопряжённую сеть (u, v), касательные к линиям u и v которой содержат точки q, q' и p, p', ибо точки R, R_u линейно выражаются через q, q', а R и R_v через p, p'. Точки P и P' получаются от пересечения гиперповерхности Q_4^2 лучом конгруэнции (RR_v), которая сопряжена сети (P) и сети (P'). Следовательно, сети (P), (P') связаны рибокуровским преобразованием.

Имеем теорему:

Рибокуровское преобразование квадратичной конгруэнции в квадратичную в пятимерном пространстве P_5 имеет прообразом в трёхмерном P_3 преобразование поверхности посредством конгруэнции W и всякое асимптотическое преобразование поверхности в P_3 изображается в P_5 посредством рибокуровского преобразования квадратичной конгруэнции.

151. Теорема переместительности. Из предыдущей теоремы прямо следует, что рибокуровское преобразование в P_5 вполне эквивалентно преобразованию Мутара в P_3. Следовательно, для первого должна существовать такая же теорема переместительности, как и для второго. Поэтому мы можем ограничиться только построением конфигурации, на которой она покоится.

Пусть квадратичная сеть (p) преобразуется в квадратичные сети (p') и (p'') посредством конгруэнций (pR') или соответственно (pR''), сопряжённых сетям (p) и (p') или соответственно сетям (p) и (p''). Но две конгруэнции, сопряжённые одной сети (p), гармоничны одной и той же другой сети (T). Точка T получится, если соединить одноимённые фокусы R', R'' и R_1', R_1'' наших конгруэнций (pR') и (pR''). Существует, однако, однопараметрическое семейство конгруэнций $(p'\bar{R}')$, сопряжённых сети (p') и гармоничных сети (T), и однопараметрическое семейство конгруэнций $(p''\bar{R}'')$, сопряжённых сети (p'') и гармоничных той же сети (T). Поскольку они гармоничны одной сети (T), они сопряжены одной сети (S), которая описывается точкой пересечения соответствующих лучей. Вся эта совокупность сетей (S), зависящая от двух параметров, сопряжена обеим конгруэнциям, но сети эти вовсе не обязаны быть квадратичными; лучи $p'\bar{R}'$ и $p''\bar{R}''$ могут пересекать гиперповерхность Q_4^2 в различных точках.

Квадратичными будут те сети (S^*), которые описываются точками линии пересечения двумерной касательной плоскости к поверхности (T)

с гиперповерхностью Q_4^2. Таких точек одномерное многообразие (коническое сечение L^2 в P_5); они и описывают сети, получаемые двукратным рибокуровским преобразованием теоремы переместительности.

Отсюда интересное дополнение теоремы переместительности мутаровских преобразований в P_3. Поскольку четыре точки p, p', p'', S^* лежат на одном коническом сечении L^2, соответствующие им касательные к асимптотическим линиям u четырёх поверхностей (X), (X'), (X'') и (X^*) теоремы переместительности принадлежат одному семейству образующих поверхности 2-го порядка.

Имеем теорему:

Касательные к асимптотическим одного семейства в соответствующих точках четырёх поверхностей (X), (X'), (X'') и $(\bar{X})$ теоремы переместительности преобразований W лежат на одной поверхности 2-го порядка.

152. Последовательность R. Всякая сопряжённая сеть (P) на гиперповерхности Q_4^2 изображает лучи конгруэнции W. Мы видели (гл. VI, § 142), что в пространстве P_5 существуют две и только две (действительные или мнимые) квадратичные конгруэнции $(Q'R')$ и $(Q''R'')$, сопряжённые сети (P); они изображают (§ 149) касательные фокальные поверхностей (X') и (X'') рассматриваемой конгруэнции W.

Допустим теперь, что сеть (P) есть сеть с равными инвариантами. Мы видели (гл. VI, § 133), что такая сеть допускает преобразование, которое эквивалентно преобразованию Мутара: точка P', гармонически сопряжённая точке P относительно фокусов Q', R' сопряжённой конгруэнции $(Q'R')$, описывает тоже сеть с равными инвариантами и также точка P'', гармонически сопряжённая точке P относительно фокусов Q'', R'' второй конгруэнции $(Q''R'')$, описывает сеть с равными инвариантами. Наши конгруэнции теперь квадратичны, т. е. целиком принадлежат гиперповерхности Q_4^2. Располагаясь на лучах $Q'R'$, $Q''R''$ и, следовательно, на гиперповерхности Q_4^2, обе сети (P') и (P'') тоже квадратичные и изображают две новые конгруэнции W.

Последовательность сетей с равными инвариантами

$$\ldots (P'),\ (P),\ (P''),\ \ldots,$$

очевидно, может быть продолжена в обе стороны неограниченно, ибо у каждой конгруэнции, которая является, например, прообразом сети (P'), найдутся две фокальные поверхности, которые изобразятся в P_5 двумя квадратичными конгруэнциями. Строя точки, гармонически сопряжённые точке P' относительно фокусов одной или другой конгруэнции, мы будем переходить вдоль нашей последовательности направо и налево.

Покажем теперь, что эта *последовательность сетей с равными инвариантами на гиперповерхности Q_4^2 изображает в нашем* *пространстве P_3 последовательность Лапласа, составленную из конгруэнций W.*

Рассмотрим, например, две соседние в нашей последовательности точки P и P'. Они обе принадлежат прямой $Q'R'$ и, следовательно, изображают две касательных p и p' одной и той же поверхности (X'). Они гармонически сопряжены относительно фокусов Q', R', следовательно, изображаемые ими касательные гармонически сопряжены относительно асимптотических касательных q', r' поверхности (X'), т. е. определяют сопряжённые направления на поверхности и являются преобразованием Лапласа друг друга. То же рассуждение приложимо ко всякой паре смежных сетей последовательности.

Таким образом, мы получаем *последовательность Лапласа, содержащую только конгруэнции W.*

Обратно, если в пространстве P_3 касательные к обоим семействам линий сопряжённой сети на поверхности (X') описывают конгруэнции W, то их изображения на гиперповерхности Q_4^2 будут точками P и P', гармонически сопряжёнными относительно фокусов Q', R', которые изображают асимптотические касательные q', r' поверхности (X').

Мы видели (гл. VI, § 133), что сети, гармонически разделяющие фокусы сопряжённой им конгруэнции, обладают каждая равными инвариантами. Следовательно, сеть (P) есть сеть с равными инвариантами и последовательность Лапласа, построенная на конгруэнции W, которая изображается этой сетью, содержит только конгруэнции W. Такие конгруэнции мы уже рассматривали в § 110—117 гл. V; они носят название *конгруэнций R*, фокальные поверхности — *поверхностей R*, фокальные сети — *сетей R* и последовательность — *последовательности R.*

Имеем теорему:

Если в последовательности Лапласа две рядом стоящие конгруэнции суть конгруэнции W, то и все конгруэнции последовательности обладают этим свойством.

III. АВТОПРОИЗВОДНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

153. Последовательность сама себе производная. В § 139 гл. VI мы рассматривали производные последовательности Лапласа. Первая производная есть вписанная последовательность Лапласа, вторая производная есть производная от производной и т. д. Введём обозначение

$$(m, n) = \alpha X_{-m} + \alpha' X_{-m+1} + \ldots + \alpha^{(m-1)} X_{-1} + \gamma X + \beta^{n-1} X_1 + \ldots$$
$$\ldots + \beta' X_{n-1} + \beta X_n, \qquad (19)$$

где X_i есть лапласово преобразование порядка i от точки X и $\alpha, \alpha', \ldots, \beta, \beta', \ldots, \gamma$ — произвольные постоянные. Тогда производная порядка $l+m$ может быть представлена выражением

$$X' = (l, m) = \alpha X_{-l} + \alpha' X_{-l+1} + \ldots + \beta X_m +$$
$$+ \beta' X_{m-1} + \ldots + \gamma X, \qquad (20a)$$

которое обращается в нуль для $l+m$ линейно независимых решений уравнения Лапласа сети (X):

$$x = R', \ x = R'', \ \ldots, \ x = R^{(l+m)}, \qquad (20b)$$

и X_i означает преобразование Лапласа порядка i от X.

Дифференцируя выражение (20a), получим в силу формул (12a), (12b) § 125:

$$X'_u = \alpha X_{-l-1} + \ldots + (\beta_u + b\beta) X_m + (\beta'_u + b\beta' + \beta h_{m-1}) X_{m-1} + \ldots,$$
$$X'_v = (\alpha_v + a\alpha) X_{-l} + \ldots + \beta X_{m+1} + \ldots, \qquad (21)$$
$$X'_{uv} = (\alpha_v + a\alpha) X_{-l-1} + \ldots + (\beta_u + b\beta) X_{m+1} + \ldots$$

Отсюда следует, что выражение

$$X'_{uv} - \left(a + \frac{\partial \ln \alpha}{\partial v}\right) X'_u - \left(b + \frac{\partial \ln \beta}{\partial u}\right) X'_v,$$

подобно X', линейно однородно относительно $X, X_1, X_2, \ldots, X_m, X_{-1}, \ldots, X_{-l}$ и обращается в нуль для значений (20b), следовательно, пропорционально X'.

Значит, X' удовлетворяет уравнению Лапласа

$$X'_{uv} = \left(a + \frac{\partial \ln \alpha}{\partial v}\right) X'_u + \left(b + \frac{\partial \ln \beta}{\partial u}\right) X'_v + c' X'. \qquad (22)$$

Если сеть (X') совпадает с сетью (X)

$$X = \rho X',$$

то уравнение (13) § 126 гл. VI должно совпадать с уравнением (22), т. е. в силу (14) § 126 мы должны иметь:

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial v} = -\frac{\partial \ln \alpha}{\partial v}, \quad \frac{\partial \ln \rho}{\partial u} = -\frac{\partial \ln \beta}{\partial u},$$

и, значит,

$$\frac{\partial^2}{\partial u \, \partial v} \ln \frac{\alpha}{\beta} = 0, \quad \frac{\alpha}{\beta} = UV, \quad U = U(u), \quad V = V(v).$$

При замене параметров u, v на $\bar{u} = \varphi(u)$, $\bar{v} = \psi(v)$, получим:

$$X_u = X_{\bar{u}} \varphi'(u), \quad X_v = X_{\bar{v}} \psi'(v).$$

Значит, по формулам (12a), (12b) § 125 для $p = 0$, $q = 0$, обозначая через $\bar{X}_{-1}$, $\bar{X}_1$ преобразования Лапласа, вычисленные для параметров $\bar{u}$, $\bar{v}$ и точно так же через $\bar{a}$, $\bar{b}$ — новые коэффициенты в уравнении Лапласа, получим:

$$X_{-1} = X_u - bX = (X_{\bar{u}} - \bar{b}X)\,\varphi'(u) = \overline{X}_{-1}\varphi'(u).$$

Следуя шаг за шагом, получим:

$$X_{-p} = \overline{X}_{-p}\varphi'^p(u).$$

Отсюда из уравнения (20а) получим закон изменения коэффициентов α и β

$$\bar{\alpha} = \alpha\varphi'^l(u), \quad \bar{\beta} = \beta\psi'^m(v).$$

Это показывает, что подходящая замена параметров u, v приведёт отношение $\frac{\alpha}{\beta} = UV$ к единице. Изменяя нормирование точки X', именно, вводя в формулу (20а) $\overline{X}' = \frac{X'}{\alpha}$, мы приведём $\alpha = \beta$ к единице.

Таким образом, сеть, совпадающая со своей производной порядка $l+m$, определяется системой

$$X_{uv} = aX_u + bX_v + cX, \tag{23a}$$

$$X' = X_{-l} + \alpha' X_{-l+1} + \ldots + X_m + \beta' X_{m-1} + \ldots = \sigma X, \quad \sigma = \text{const.}, \tag{23b}$$

если система

$$X_{uv} = aX_u + bX_v + cX,$$

$$X_{-l} + \alpha' X_{-l+1} + \ldots + X_m + \beta' X_{m-1} + \ldots = 0$$

допускает $l+m$ линейно независимых решений.

Дифференцируя равенство $X' = \sigma X$ по u и пользуясь формулами (12а), (12b) § 125, получим уравнение

$$X'_u = \sigma(X_{-1} + bX), \tag{24}$$

или

$$X'_u - bX' = \sigma X_{-1}. \tag{24'}$$

Поскольку α и β приведены к единице, уравнение (22) принимает вид

$$X'_{uv} = aX'_u + bX'_v + c'X',$$

т. е. новые коэффициенты a', b' равны старым $a' = a$, $b' = b$, и формулы (12а), (12b) § 125 для последовательности $[X']$ дают:

$$X'_{-1} = X'_u - bX',$$

а уравнение (24') принимает вид

$$X'_{-1} = \sigma X_{-1}.$$

Покажем теперь, что X'_{-1} есть выражение (m, n), которое мы ввели формулой (19), точнее $(l+1,\ m-1)$, т. е. тоже сеть, совпадающая со своей производной порядка $l+m$.

Если воспользоваться формулами (21) и иметь в виду, что $\alpha = \beta = 1$, то уравнение (24') примет вид

$$X_{-l-1} + \ldots + (\beta'_u + h_{m-1})X_{m-1} + \ldots = \sigma X_{-1}, \tag{25}$$

но, дифференцируя по v и пользуясь формулами (12а), (12b) § 125, получим:

$$aX_{-l-1} + \ldots + (\beta'_u + h_{m-1})X_m + \ldots = \sigma(aX_{-1} + kX).$$

Это уравнение должно обращаться в тождество, если заменить σX_{-1} и σX по формулам (23b), (25). Сравнивая коэффициенты при X_m, получим:

$$\beta'_u + h_{m-1} = k.$$

С другой стороны, по формулам (9), (12а), (12b) § 125 получим:

$$(X_{-1})_1 = (X_{-1})_v - a_{-1}X_{-1} = kX.$$

Эту формулу можно обобщить. По той же формуле (9) § 125 для любой сети имеем:

$$Y_1 = Y_v - \bar{a}Y,$$

где $\bar{a}$ — коэффициент в уравнении Лапласа для сети (Y). Для

$$Y = (X_{-1})_m = (kX)_{m-1} = kX_{m-1}$$

этот коэффициент $\bar{a}$ определяется как коэффициент сети (X_{m-1}) по формуле (14) § 126 при $\rho = \frac{1}{k}$ в виде

$$\bar{a} = a_{m-1} + \frac{\partial \ln k}{\partial v}.$$

Допустим, что

$$(X_{-1})_m = kX_{m-1}; \tag{26a}$$

тогда

$$(X_{-1})_{m+1} = (kX_{m-1})_1 = (kX_{m-1})_v - \left(a_{m-1} + \frac{\partial \ln k}{\partial v}\right)kX_{m-1} =$$

$$= k_vX_{m-1} + k(X_{m-1})_v - a_{m-1}kX_{m-1} - k_vX_{m-1} = kX_m,$$

ибо по формулам (12а), (12b) § 125

$$(X_{m-1})_v = X_m + a_{m-1}X_{m-1}.$$

Таким образом, формула (26а) доказана для всякого положительного m. Кроме того, по определению имеем:

$$(X_{-1})_{-l} = X_{-l-1}. \tag{26b}$$

Прилагая эти формулы к соотношению (25), мы перепишем его в виде

$$(X_{-1})_{-l}+\ldots+(X_{-1})_m+\ldots=\sigma X_{-1}. \tag{25'}$$

Применяя аналогичные рассуждения, мы докажем, что любая сеть (X_i) последовательности $[X]$ является своей собственной производной $l+m$-го порядка, т. е. вся последовательность является автопроизводной порядка $l+m$.

Таким образом, имеем теорему:

Если в последовательности Лапласа $[X]$ одна из сетей является сама себе производной k-го порядка, то и вся последовательность является сама себе производной порядка k.

154. Автопроизводная последовательность в P_3. Уравнения (23b), (25′) приводят к замечательному заключению для случая $l=m=2$.

Так как точки $X, X_u, X_v, X_{uu}, X_{uv}, X_{vv}$ и т. д. расположены в пространстве n измерений P_n, то среди них только $n+1$ линейно независимых.

Если $n=3$, то уже вторые производные должны быть связаны двумя соотношениями; одно из них уравнение Лапласа (23a), другое можно написать в виде

$$X_{-2}+gX_2+\alpha X_{-1}+\beta X_1+\gamma X=0, \tag{27}$$

или

$$X_{uu}+gX_{vv}+pX_u+qX_v+rX=0. \tag{27'}$$

Асимптотические линии поверхности (X) в трёхмерном пространстве определяются как линии, у которых соприкасающаяся плоскость совпадает с касательной плоскостью поверхности. Касательная плоскость определяется тремя точками X, X_u, X_v, соприкасающаяся плоскость — точками

$$X,\ dX=X_u\,du+X_v\,dv,$$

$$d^2X=X_{uu}\,du^2+2X_{uv}\,du\,dv+X_{vv}\,dv^2+X_u\,d^2u+X_v\,d^2v$$

или в силу (23a), (27)

$$X,\ dX=X_u\,du+X_v\,dv,\quad d^2X=X_{vv}\,(du^2-g\,dv^2)+AX_u+BX_v+CX.$$

Эти точки лежат в касательной плоскости, если

$$du^2-g\,dv^2=0; \tag{28}$$

следовательно, это уравнение определяет асимптотические линии поверхности (X).

Если сеть (X) является автопроизводной 4-го порядка ($l=m=2$), то уравнение (23b) будет совпадать с соотношением (27). Следовательно, асимптотические линии поверхности (X) определяются уравнением

$$du^2-dv^2=0. \tag{28'}$$

Точно такое же уравнение определяет асимптотические линии на поверхности (X_{-1}), полученной преобразованием Лапласа, как это показывает уравнение (25′), и на всех других преобразованиях Лапласа. Значит, *автопроизводная сеть 4-го порядка в трёхмерном пространстве есть сеть R.*

Эта теорема допускает обращение.

Всякая сеть R есть своя собственная производная порядка $l+m=4$.

Так как сеть R — изотермически сопряжённая (гл. V, § 111) так, что уравнение асимптотических в параметрах линий сети может быть написано в виде (28′), то сеть R удовлетворяет системе вида

$$X_{uv}=aX_u+bX_v+cX, \tag{29a}$$

$$G\equiv X_{-2}+X_2+\alpha X_{-1}+\beta X_1+\gamma X=0. \tag{29b}$$

Дифференцируя второе из этих уравнений по u и пользуясь формулами (12a), (12b) § 125, получим после исключения X_2 с помощью (29b):

$$X_{-3}+(\beta_u+h_1)X_1+AX_{-2}+BX+CX_{-1}=0. \tag{30}$$

Так как по определению $X_{-3}=(X_{-1})_{-2}$ и в силу (26a) $(X_{-1})_2=kX_1$, то наше уравнение можно переписать в виде

$$(X_{-1})_{-2}+\frac{\beta_u+h_1}{k}(X_{-1})_2+A'(X_{-1})_{-1}+B'(X_{-1})_1+C'X_{-1}=0.$$

Если асимптотические линии на поверхности (X_{-1}) тоже определяются уравнением (28′), то

$$\beta_u+h_1=k. \tag{31a}$$

Если, кроме того,

$$\alpha_v+k_{-1}=h, \tag{31b}$$

то асимптотические на двух преобразованиях Лапласа (X_{-1}), (X_1) соответствуют, две соседние конгруэнции последовательности суть конгруэнции W, и все сети последовательности суть сети R.

Значит, при условии (31a), (31b) система (29a), (29b) определит сеть R, если, конечно, будут выполняться условия совместности системы (29a), (29b).

155. Теорема существования для сетей R. Для того чтобы составить условие совместности системы (29a), (29b), так же как в § 141 гл. VI, дифференцируем второе уравнение системы по u и исключаем с помощью первого X_2

$$G_u-bG=0,$$

затем полученное уравнение дифференцируем по v и исключаем X_{-3}

$$(G_u-bG)_v-a(G_u-bG)=0. \tag{a}$$

Это уравнение содержит только $X_{-2}, X_{-1}, X, X_1, X_2$ и должно удовлетворяться тождественно в силу уравнения $G=0$, т. е. левая часть должна быть пропорциональна G. Множитель пропорциональности определяется, если сравнить коэффициенты при X_2. Так как первое дифференцирование приводит к уравнению (30) или в силу (31а) к уравнению

$$X_{-3}+kX_1+AX_{-2}+BX+CX_{-1}=0,$$

то коэффициент при X_2 в уравнении (a) равен k. Значит, мы должны иметь тождественно

$$G_{uv}-aG_u-bG_v-(b_v-ab)\,G=kG,$$

а так как по формуле (15) § 126 инвариант k равен

$$k=c+ab-b_v,$$

то наше уравнение совпадает с уравнением Лапласа для X:

$$G_{uv}=aG_u+bG+cG. \tag{b}$$

Уравнения (29a), (29b), (31a), (31b), (b) составляют полную систему дифференциальных уравнений, определяющих сеть R.

Покажем, что она является сама себе производной сетью 4-го порядка. Как мы видели в § 53 система (29a), (29b) определит сама себе производную сеть 4-го порядка, если система

$$X_{uv}=aX_u+bX_v+cX,\qquad G+\sigma X=0,\qquad \sigma=\text{const}. \tag{32}$$

вполне интегрируема и допускает четыре линейно независимых решения.

Выполнение первого условия следует из уравнений (29a), (b) и постоянства коэффициента σ, ибо условие совместности уравнений (32) имеет вид

$$(G+\sigma X)_{uv}=a\,(G+\sigma X)_u+b\,(G+\sigma X)_v+c\,(G+\sigma X)$$

и совпадает с суммой уравнений (29a) и (b).

Общее решение зависит от четырёх произвольных постоянных, именно: в начальной точке $u=u_0$, $v=v_0$ можно задать произвольно значения переменных X_{-2}, X_{-1}, X, X_1 (М. В. Ф., стр. 43). Следовательно, для этих решений выражение

$$\sigma X=X_{-2}+X_2+\alpha X_{-1}+\beta X_1+(\gamma+\sigma)\,X \tag{32'}$$

обращается в нуль.

Это значит, что σX есть выражение (m, n) по формуле (19), которое определяет производную порядка $m+n$ при $m=n=2$, т. е.

$$\sigma X=(2,2).$$

Поэтому сеть (X) является собственной производной 4-го порядка.

156. Преобразование сетей R. Составим при помощи решений R^1 и R^2 системы (32) выражение (m, n) при $m=n=1$. Его можно написать в виде определителя

$$X'=\begin{vmatrix} X_{-1} & X_1 & X_1 \\ R^1_{-1} & R^1 & R^1_1 \\ R^2_{-1} & R^2 & R^2_1 \end{vmatrix}. \tag{33a}$$

Эта точка описывает сеть (X'), которая является второй производной сети (X), поскольку R^1 и R^2 — два независимых решения уравнения Лапласа сети (X). Далее, такая же формула

$$X^*=\begin{vmatrix} X'_{-1} & X' & X'_1 \\ \rho^1_{-1} & \rho^1 & \rho^1_1 \\ \rho^2_{-1} & \rho^2 & \rho^2_1 \end{vmatrix} \tag{33b}$$

определит сеть (X^*), которая будет второй производной сети (X'), если ρ' и ρ^2 какие-нибудь независимые решения уравнения Лапласа сети (X').

Эти решения мы можем построить, воспользовавшись формулой (33a). Возьмём ещё два других решения R^3 и R^4 системы (32) так, чтобы четыре решения R^i были независимы, и примем

$$\rho^1=\begin{vmatrix} R^3_{-1} & R^3 & R^3_1 \\ R^1_{-1} & R^1 & R^1_1 \\ R^2_{-1} & R^2 & R^2_1 \end{vmatrix},\quad \rho^2=\begin{vmatrix} R^4_{-1} & R^4 & R^4_1 \\ R^1_{-1} & R^1 & R^1_1 \\ R^2_{-1} & R^2 & R^2_1 \end{vmatrix}. \tag{34}$$

При таком выборе решений ρ^i формула (33b) определит не только некоторую вторую производную сети (X'), но именно ту самую исходную сеть R, которая положена в основу при построении формул (33a).

Действительно, поскольку точка X' по формуле (33a) линейно зависит от точки X и её двух преобразований Лапласа X_{-1} и X_1, а определитель в правой части уравнения (33b) содержит преобразования Лапласа от X', именно: X'_{-1} и X'_1, то точка X^* линейно разложена по точкам $X_{-2}, X_{-1}, X, X_1, X_2$. С другой стороны, при подстановке вместо X решений R_1 или R_2 обращается в нуль уже выражение X' по формуле (33a), а тем самым и пятичленное выражение X^*. Если же подставить вместо X решения R_3 или R_4, то X' обратится в ρ^1 или ρ^2, а X^* опять обратится в нуль. Так как четырьмя линейно независимыми решениями, составляющими её общий интеграл, система (32) вполне определена, то и выражение (32') определено вплоть до общего множителя, т. е. пятичленное выражение X^* по формуле (33b), если внести значение X' из (33а), отличается только множителем от выражения X по формуле (32′). Значит,

$$X = \lambda X^*,$$

где λ — множитель пропорциональности.

Отсюда следует, что прежде всего сети (X) и (X') взаимно являются вторыми производными друг друга и, следовательно, сеть (X') является тоже сетью R. Так как обе сети R на поверхностях (X) и (X') отнесены к одним и тем же параметрам u, v, то они соответствуют друг другу. Так как точка X лежит в касательной плоскости поверхности (X') (линейно выражаясь через точки X', X'_1, X'_{-1}), а точка X' — и касательной плоскости поверхности (X), то прямая XX' касается обеих поверхностей; она описывает конгруэнцию W с фокальными поверхностями (X), (X'), ибо асимптотические линии на поверхностях (X) и (X'), очевидно, соответствуют друг другу: на обеих поверхностях соответствуют друг другу сети R и, кроме того, фокальные сети, а соответствие двух пар сопряжённых элементов влечёт за собой соответствие всех элементов инволюции сопряжённых направлений в том числе и её двойных элементов, т. е. асимптотических.

В силу теоремы § 153 вся последовательность $[X]$ и также $[X']$ являются автопроизводными четвёртого порядка и, следовательно, взаимно вторыми производными друг друга. Следовательно, мы получаем асимптотическое преобразование последовательности R в последовательность R. В главе XIII докажем, что это преобразование — преобразование J.

Произвол преобразования зависит от произвола выбора пары решений R, R' системы (32), при помощи которых можно строить преобразование (33а). Так как общее решение линейной системы (32′) имеет вид линейной комбинации с постоянными коэффициентами из решений фундаментальной четвёрки R^i, то широта множества преобразований зависит от произвола в выборе постоянных C_i, C'_i:

$$R = C_i R^i, \quad R' = C'_i R^i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Не все они существенны. Определитель (33а) сохранится вплоть до постоянного множителя при любой линейной замене R, R'. Значит, мы всегда можем их выбрать в виде

$$R = R^1 + C_3 R^3 + C_4 R^4,$$
$$R' = R^2 + C'_3 R^3 + C'_4 R^4$$

и произвол преобразования зависит от четырёх произвольных постоянных. Таким образом, формулы (33а) определяют наиболее общее преобразование J.

Отсюда следствие:

В любом преобразовании J существуют две последовательности, вписанные в одну из сетей R и одновременно описанные около другой сети из двух сетей R, связанных преобразованием.

IV. ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА ОТОБРАЖЕНИЯ ПРЯМЫХ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТЬ Q_4^2 К ПРОЕКТИВНОЙ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

157. Последовательность Лапласа в пространстве P_5, присоединённая к изображению асимптотических касательных поверхности. Вернёмся к отображению комплекса касательных некоторой поверхности (X) посредством квадратичной конгруэнции на гиперповерхности Q_4^2. Мы видели (§ 148), что асимптотические касательные изображаются фокусами P, Q луча. Применяя к фокальным сетям (p), (q) преобразование Лапласа, получим последовательность Лапласа

$$\ldots P_2,\ P_1,\ p,\ q,\ Q_{-1},\ Q_{-2}\ldots \tag{35}$$

Только две точки p и q (и прямая pq) принадлежат гиперповерхности Q_4^2. Пользуясь плюккеровыми произведениями, мы можем записать это в виде равенств

$$\{pp\} = 0, \quad \{pq\} = 0, \quad \{qq\} = 0. \tag{35a}$$

Продифференцируем эти равенства. Пользуясь формулами (12a), (12b) § 125, мы получим:

$$\{pP_1\} = 0, \quad \{P_1 q\} = 0, \ \{pQ_{-1}\} = 0, \quad \{qQ_{-1}\} = 0. \tag{35b}$$

Дифференцируя два средних равенства, мы получим:

$$\{P_2 q\} = 0, \quad \{P_1 Q_{-1}\} = 0, \quad \{pQ_{-2}\} = 0. \tag{35c}$$

Наконец, дифференцируя два раза среднее, найдём:

$$\{P_2 Q_{-1}\} = 0, \quad \{P_1 Q_{-2}\} = 0, \quad \{P_1 Q_{-3}\} = 0, \quad \{P_3 Q_{-1}\} = 0. \tag{35d}$$

Отсюда следует, например, что точка P_1 сопряжена относительно гиперповерхности Q_4^2 точкам p, q, Q_{-1}, Q_{-2}, Q_{-3}, т. е. является полюсом гиперплоскости $p\,q\,Q_{-1}\,Q_{-2}\,Q_{-3}$. Аналогично, Q_{-1} есть полюс гиперплоскости $P_3\,P_2\,P_1\,p\,q$, Q_{-2} — гиперплоскости $P_4\,P_3\,P_2\,P_1\,p$ и т. д. Последовательность (35) — *автополярна.* Только p и q изображают прямые (асимптотические касательные) в P_3, все остальные точки изображают линейные комплексы (не специальные). При изменении параметров u, v точка P описывает на гиперповерхности Q_4^2 поверхность (P). Линия u на ней изображает асимптотические касательные u вдоль линии u, т. е. развёртывающуюся поверхность асимптотических касательных к поверхности (X), которую мы обозначим (X_u). Линия v на поверхности (P) изображает асимптотические касательные u вдоль линии v, т. е. асимптотическую линейчатую поверхность (косую) R_v.

Сечение гиперповерхности Q_4^2 соприкасающейся гиперплоскостью линии u поверхности (P) изображает трёхмерное многообразие прямых пространства P_3, точнее, линейный комплекс (ибо координаты луча связаны линейным уравнением), который содержит четыре бесконечно близких касательных линии u на поверхности (X), т. е. соприкасающийся линейный комплекс асимптотической развёртывающейся поверхности (X_u). Эта гиперплоскость содержит точки p, p_u, p_{uu}, p_{uuu}, p_{uuuu}, следовательно, определяется точками p, q, Q_{-1}, Q_{-2}, Q_{-3}. Полюс этой гиперплоскости — точка P_1, изображает в P_5 соприкасающийся линейный комплекс поверхности (X_u).

Действительно, уравнения

$$\{P_1 p\} = \{P_1 q\} = \{P_1 Q_{-1}\} = \{P_1 Q_{-2}\} = \{P_1 Q_{-3}\} = 0$$

показывают, что уравнения линейного комплекса с коэффициентами, пропорциональными координатам точки P_1, удовлетворяются значениями p, q, Q_{-1}, Q_{-2}, Q_{-3} и, значит, коплекс содержит луч p и все те, которые получаются линейной комбинацией p с его производными p_u, p_{uu}, p_{uuu}, p_{uuuu}.

Аналогично Q_{-1} изображает соприкасающийся линейный комплекс асимптотической (X_v).

Директрисы конгруэнции (P_1, Q_{-1}) суть директрисы Вильчинского для поверхности (X). Это — оси специальных комплексов пучка $P_1 + \lambda Q_{-1}$, следовательно, они изображаются точками пересечения прямой $P_1 + \lambda Q_{-1}$ с гиперповерхностью Q_4^2. Внося $P_1 + \lambda Q_{-1}$ в уравнение гиперповерхности Q_4^2, получим для λ квадратное уравнение

$$\{P_1 P_1\} + \lambda^2 \{Q_{-1} Q_{-1}\} = 0. \tag{36}$$

Сечение гиперповерхности Q_4^2 соприкасающейся плоскостью $p P_1 P_2$ к линии v на поверхности (P) изображает соприкасающуюся к поверхности R_v линейчатую поверхность 2-го порядка; аналогично плоскость $q Q_{-1} Q_{-2}$ сечёт гиперповерхность Q_4^2 по линии, которая изображает соприкасающуюся линейчатую поверхность 2-го порядка асимптотической линейчатой поверхности R_u. Обе плоскости сопряжены относительно гиперповерхности Q_4^2.

В силу формул (35a) — (35d) уравнение

$$(p + \lambda P_1 + \mu P_2,\ q + \lambda' Q_{-1} + \mu' Q_{-2}) = 0$$

справедливо при всяком значении коэффициентов λ, μ, λ', μ'.

Следовательно, любая пара образующих первой и второй поверхности пересекаются, т. е. обе линейчатые поверхности лежат на одной поверхности 2-го порядка Φ, составляя две системы её прямолинейных образующих. Эта поверхность носит название *поверхности 2-го порядка Софуса Ли.*

158. Последовательности, полярно сопряжённые относительно фундаментальной гиперповерхности 2-го порядка Q_4^2. Пусть мы имеем две полярно сопряжённые относительно гиперповерхности Q_4^2 последовательности Лапласа

$$\ldots X_{-2},\ X_{-1},\ X,\ X_1,\ X_2 \ldots$$
$$\ldots Y_{-2},\ Y_{-1},\ Y,\ Y_1,\ Y_2 \ldots,$$

где Y_n есть полюс гиперплоскости X_{-n-2}, X_{-n-1}, X_{-n}, X_{-n+1}, X_{-n+2}.

Сопряжённые плоскости $X_{n-1} X_n X_{n+1}$ и $Y_{-n-1}\ Y_{-n}\ Y_{-n+1}$ пересекают Q_4^2 по линиям L_1^2, $L_1'^2$, изображающим два семейства прямолинейных образующих одной и той же поверхности 2-го порядка Θ_n, ибо при сопряжённости плоскостей каждая точка одной полярно сопряжена каждой точке другой, а пара полярно сопряжённых точек гиперповерхности Q_4^2 изображает пересекающиеся прямые. Поскольку два семейства прямых взаимно пересекаются так, что каждая прямая первого семейства пересекает каждую прямую второго, они принадлежат одной поверхности 2-го порядка. Таким образом, мы получаем последовательность поверхностей 2-го порядка

$$\ldots \Theta_{-2},\ \Theta_{-1},\ \Theta,\ \Theta_1,\ \Theta_2 \ldots$$

Две соседние поверхности Θ_n, Θ_{n-1} пересекаются по четырём прямым, которые изображаются в пространстве P_5 точками пересечения плоскостей $X_{n-1}\ X_n\ X_{n+1}$, $X_{n-2}\ X_{n-1} X_n$ с гиперповерхностью Q_4^2, т. е. точками пересечения прямой $X_{n-1}\ X_n$ или аналогично прямой $Y_{-n+1}\ Y_{-n}$ с Q_4^2. Следовательно, Θ_n, Θ_{n-1}, имея общими четыре образующих, касаются в четырёх точках пересечения этих образующих. Точно так же поверхности Θ_n и Θ_{n+1}, пересекаясь по двум парам образующих, касаются в четырёх точках. Нетрудно показать, что эти восемь точек поверхности Θ_n описывают восемь полостей огибающей двупараметрического семейства поверхностей Θ_n.

Действительно, одно семейство образующих поверхности Θ_n определяется уравнениями трёх комплексов

$$\{X_{n-1} p\} = 0, \quad \{X_n p\} = 0, \quad \{X_{n+1} p\} = 0, \tag{37}$$

где p — текущая аналитическая прямая. Характеристика этой линейчатой поверхности при изменении v определяется совокупностью уравнений (37) и уравнений, получаемых дифференцированием этих уравнений по v. Пользуясь формулами (12a), (12b) § 125 мы заметим, что получаемая система содержит только одно лишнее уравнение по сравнению с системой (37), именно

$$\{X_{n+2} p\} = 0. \tag{38}$$

Эта характеристика изображается в P_5 точками пересечения прямой $Y_{-n}\ Y_{-n-1}$, сопряжённой линейному многообразию $X_{n-1}\ X_n\ X_{n+1}\ X_{n+2}$ с гиперповерхностью Q_4^2. Аналогично, характеристика линейчатой поверхности (37) при изменении u состоит из двух прямых, изображаемых точками пересечения прямой $Y_{-n}Y_{-n+1}$ с гиперповерхностью Q_4^2; характеристика второго семейства образующих Θ_n при изменении u или изменении v изображается точками пересечения прямых $X_n X_{n+1}$ и $X_n X_{n-1}$ с гиперповерхностью Q_4^2.

Эти прямые служат вместе с тем характеристикой поверхности Θ_n в пространстве точек. Характеристика поверхности Θ_n при изменении одного u состоит из прямых, изображаемых точками пересечения прямых $Y_{-n}Y_{-n+1}$, $X_n X_{n+1}$ с гиперповерхностью Q_4^2; характеристика при изменении одного v состоит из четырёх прямых, изображаемых точками пересечения прямых $Y_{-n}Y_{-n-1}$, $X_n X_{n-1}$ с гиперповерхностью Q_4^2. Точки пересечения этих двух характеристик описывают огибающую поверхностей Θ_n при изменении обоих параметров. Так как пересекаются прямые, принадлежащие к различным семействам образующих Θ_n, то огибающая будет содержать восемь полостей соответственно восьми точкам пересечения: четырём точкам пересечения образующих, изображаемых точками гиперповерхности Q_4^2, лежащими на прямых $X_n X_{n-1}$ и $Y_{-n}Y_{-n+1}$, и четырём точкам пересечения образующих, изображаемых точками Q_4^2, лежащими на прямых $X_n X_{n+1}$, $Y_{-n}Y_{-n-1}$.

Четыре прямых пересечения Θ_n с Θ_{n+1}, изображаемых точками гиперповерхности Q_4^2, лежащими на прямых $Y_{-n}Y_{-n-1}$ и $X_n X_{n+1}$, образуют косой четыреугольник; при изменении u, v вершины его описывают четыре полости огибающей Θ_n; стороны касаются огибающей в вершинах, следовательно, описывают четыре конгруэнции, образующие замкнутый цикл так, что каждые две последовательные конгруэнции имеют одну общую фокальную поверхность. Такая конфигурация называется *конфигурацией* T.

Таким образом, конфигурация T является прообразом конгруэнции прямых в P_5 или правильнее двух полярно сопряжённых конгруэнций. Переход от одной конфигурации T, определяемой поверхностями Θ_n, Θ_{n-1}, к другой, определяемой поверхностями Θ_n, Θ_{n+1}, является преобразованием, отображающим на P_3 преобразование Лапласа в пространстве P_5.

Действительно, если мы возьмём одну пару противоположных сторон четыреугольника $T_{n-1,n}$, получаемого пересечением Θ_{n-1}, Θ_n, то эти прямые в P_5 изображаются точками пересечения с гиперповерхностью Q_4^2 прямой $X_{n-1}X_n$; преобразованный четыреугольник $T_{n,n+1}$, определяемый поверхностями Θ_n, Θ_{n+1}, или лучше соответствующая первой новая пара противоположных сторон четыреугольника изображается в P_5 точками пересечения гиперповерхности Q_4^2 с прямой $X_n X_{n+1}$. При этом вторая прямая является преобразованием Лапласа от первой, если взять последовательность конгруэнций $[X]$.

Применяя эти соображения к автополярной последовательности Лапласа (35), мы получим последовательность поверхностей $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$ Первая из них Φ есть поверхность 2-го порядка Софуса Ли. Четыре прямых, составляющих линию пересечения Φ и Φ_1, образуют первую четвёрку прямых D, инвариантно связанных с поверхностью. Они пересекаются в четырёх характеристических точках огибающей поверхности Φ, четыре других точки совпадают с точкой касания поверхности Φ с поверхностью (X).

159. Пара поверхностей с общими поверхностями Ли. Четыре полости огибающей поверхности Φ могут совпадать. Тогда линия пересечения Φ и Φ_1 состоит только из двух прямых с одной общей точкой; прямые P_1P_2 и $Q_{-1}Q_{-2}$ в этом случае не пересекают, а касаются гиперповерхности Q_4^2. Точка касания, очевидно, является фокусом луча, а так как P_1 и Q_{-1} не лежат на Q_4^2, то этими точками являются $P_2 \equiv p_2$ и $Q_{-2} \equiv q_{-2}$. Они не могут совпасть, ибо в таком случае последовательность (35) была бы пятизвенной, точка P_1 лежала бы в своей полярной гиперплоскости $p, q, Q_{-1}, Q_{-2} \equiv P_2, P_1$ и, следовательно, принадлежала бы гиперповерхности Q_4^2, что невозможно.

В силу автополярности последовательности имеем $\{p_2 q_{-2}\} = 0$; следовательно, прямая $p_2 q_{-2}$ принадлежит гиперповерхности Q_4^2. Нетрудно увидеть, что она является общей касательной поверхностей (p_2) и (q_{-2}).

Действительно, дифференцируя по переменным u и v равенства

$$\{p_2 p_2\} = 0, \quad \{q_{-2} q_{-2}\} = 0,$$

получим:

$$\{P_1 p_2\} = 0, \quad \{p_2 P_3\} = 0, \ \{Q_{-1} q_{-2}\} = 0, \ \{q_{-2} Q_{-3}\} = 0.$$

Таким образом, точка p_2 полярно сопряжена точке P_1, и, следовательно, лежит в её полярной гиперплоскости $pqQ_{-1}q_{-2}Q_{-3}$

$$p_2 = \lambda_1 p + \lambda_2 q + \lambda_3 Q_{-1} + \lambda_4 q_{-2} + \lambda_5 Q_{-3}.$$

Составляя плюккерово произведение прямой p_2 и прямой p_2 или q_{-2}, немедленно получим:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0;$$

следовательно, точка p_2 лежит в касательной плоскости $Q_{-1}q_{-2}Q_{-3}$ поверхности (q_2).

Также докажем, что q_{-2} лежит в касательной плоскости поверхности (p_2). Таким образом, прямая $p_2 q_{-2}$ является общей касательной поверхностей (p_2) и (q_{-2}), т. е. последовательность является шестизвенной.

Квадратичная конгруэнция $(p_2 q_{-2})$ изображает касательные некоторой поверхности (X').

Поверхность (X') вместе с поверхностью (X) составляют все полости огибающей поверхности Φ. В силу симметрии в расположении последовательности $p_2P_1pqQ_{-1}q_{-2}$ поверхность (X'), так же как поверхность (X), допускает в качестве своей поверхности Ли поверхность Φ, образующие которой изображаются точками пересечения плоскостей pP_1p_2 и $qQ_{-1}q_{-2}$ с гиперповерхностью Q_4^2; она обладает теми же директрисами $P_1+\lambda Q_{-1}$, где λ определяется уравнением (36). Асимптотические линии поверхностей (X) и (X') соответствуют развёртывающимся поверхностям последовательности (35), следовательно, соответствуют друг другу.

Заметим, что в силу соотношений (35a) — (35d) имеем:

$$\{P_1+\lambda Q_{-1},\ p\}=0,\quad \{P_1+\lambda Q_{-1},\ q\}=0,\quad \{P_1+\lambda Q_{-1},\ p_2\}=0,$$
$$\{P_1+\lambda Q_{-1},\ q_{-2}\}=0,\quad \{pq_{-2}\}=0,\quad \{p_2q\}=0.$$

Последние два равенства показывают, что одноимённые асимптотические касательные поверхностей (X) и (X') пересекаются, т. е. касательная к линии u первой поверхности пересекает касательную к линии u второй. Первые четыре равенства говорят, что каждая директриса пересекается с обеими парами касательных. Это может быть только, если одна из них (*первая*) соединяет соответствующие точки X и X' обеих поверхностей (X), (X'), а другая (*вторая*) соединяет точки пересечения M_1, M_2 соответствующих асимптотических касательных p, q_{-2} и q, p_2.

160. Конгруэнции директрис произвольного порядка. Если произвольная конгруэнция задана аналитической прямой произвольного луча как функцией от криволинейных координат

$$a=a(u,\ v),$$

тождественно удовлетворяющей плюккерову условию

$$\{a\ a\}=0, \tag{2'}$$

то дифференциальная окрестность луча a определяется, как совокупность прямых

$$a+da,$$

где скалярный множитель, всегда содержащийся в полном дифференциале (произвольный общий множитель дифференциалов du, dv), выбран так, чтобы эти прямые тоже удовлетворяли плюккерову уравнению

$$\{a+da,\quad a+da\}=0.$$

Отсюда, раскрывая произведение по закону распределительности и отбрасывая равный нулю квадрат первого слагаемого, получим:

$$2\{a\ da\}+\{da\ da\}=0. \tag{39}$$

Развёртывающиеся поверхности конгруэнции (a) найдутся, если будем искать в дифференциальной окрестности луча прямые, пересекающие данный луч. При этом будет иметь место равенство

$$\{a,\ a+da\}=0,$$

или в силу (2')

$$\{a\ da\}=0,$$

или с помощью (39)

$$\{da\ da\}=0. \tag{40}$$

Это и есть уравнение развёртывающихся поверхностей конгруэнции (a).

Из этих формул легко получается совершенно общее предложение.

Будем называть *директрисами n-го порядка* поверхности (X) те прямые в пространстве P_3, которые изображаются на гиперповерхности Q_4^2 точками пересечения её с прямой P_nQ_{-n}.

Директрисы n-го порядка определяются аналитическими прямыми

$$d=P_n+\lambda Q_{-n}, \tag{a}$$

где λ удовлетворяет уравнению, которое получается аналогично уравнению (36) и имеет вид

$$\{P_nP_n\}+\lambda^2\{Q_{-n}Q_{-n}\}=0. \tag{b}$$

Выписывая уравнение развёртывающихся поверхностей (40) для конгруэнций директрис (a), получим:

$$\{dP_n+Q_{-n}d\lambda+\lambda\,dQ_{-n},\ dP_n+Q_{-n}d\lambda+\lambda\,dQ_{-n}\}=0, \tag{c}$$

или

$$\{dP_n\,dP_n\}+2\{dP_nQ_{-n}\}\,d\lambda+2\lambda\{dP_n\,dQ_{-n}\}+$$
$$+\{Q_{-n}d\lambda+\lambda\,dQ_{-n},\quad Q_{-n}d\lambda+\lambda\,dQ_{-n}\}=0,$$

но по формулам (12a), (12b) § 125 дифференциал dP_n линейно зависит от точек P_{n-1}, P_n, P_{n+1}:

$$dP_n=\omega_1P_{n-1}+\omega_2P_n+\omega_3P_{n+1}.$$

Следовательно, в силу полярной сопряжённости последовательностей $[P_n]$ и $[Q_{-n}]$ все скобки в правой части плюккерова произведения

$$\{dP_nQ_{-n}\}=\omega_1\{P_{n-1}Q_{-n}\}+\omega_2\{P_nQ_{-n}\}+\omega_3\{P_{n+1}Q_{-n}\}$$

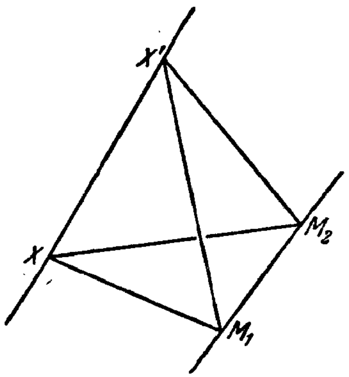
равны нулю и само произведение исчезает, и также равно нулю произведение $\{P_n\,dQ_{-n}\}$.

Следовательно, уравнение (c) не будет содержать членов с первой степенью λ или $d\lambda$, а так как два корня λ_1 и λ_2 уравнения (b) отличаются только знаком, то уравнение развёртывающихся поверхностей конгруэнций (d), соответствующих λ_1 и λ_2 совпадают. Имеем теорему:

Для произвольной поверхности обе конгруэнции директрис любого порядка n соответствуют развёртывающимся поверхностям.

Очевидно, эта теорема сохраняет свою силу для любой пары полярно сопряжённых последовательностей в P_5, т. е. для произвольной последовательности конфигураций T в P_3.

161. Общие директрисы пары поверхностей. Возвращаясь к паре поверхностей (X), (X') с общей поверхностью Ли, рассмотрим линейчатые поверхности конгруэнции первой директрисы XX' (черт. 11), которые в точке X имеют касательными плоскостями плоскости $XX'M_1$ и $XX'M_2$, где M_1 и M_2 — точки пересечения соответствующих асимптотических касательных поверхностей (X) и (X'). Они будут иметь те же касательные плоскости и в точке X', ибо касательные XM_1 и $X'M_1$ соответствуют, и если касательная плоскость в точке X определяется касательными XX' и XM_1, то касательная плоскость в точке X' к той же поверхности должна определяться касательными $X'X$ и $X'M_1$. Отсюда следует, что рассматриваемые линейчатые поверхности — развёртывающиеся. Таким образом, развёртывающиеся поверхности конгруэнции первой директрисы высекают на обеих поверхностях (X) и (X') асимптотические линии.



Черт. 11.

В силу общей теоремы предыдущего параграфа развёртывающиеся поверхности конгруэнции вторых директрис соответствуют развёртывающимся поверхностям первых и, следовательно, соответствуют асимптотическим линиям поверхностей (X), (X').

Так как асимптотическими линиями на поверхностях (X) и (X') служат координатные линии u и v, то развёртывающиеся поверхности конгруэнции, описанной той и другой директрисой

$$d = P_1 + \lambda Q_{-1},$$

где λ определяется уравнением (36), определяются прямыми d и d_u, d и d_v, которые в силу формул (12a), (12b) § 125 примут вид:

$$\begin{aligned} d_u &= bP_1 + hp + (\lambda_u + \lambda b'_{-1})\, Q_{-1} + \lambda q_{-2}, \\ d_v &= p_2 + a_1 P_1 + (\lambda_v + \lambda a'_{-1})\, Q_{-1} + \lambda k' q, \end{aligned} \tag{41}$$

где штрихами отмечены коэффициенты уравнения Лапласа для сети (Q_{-1}).

Дифференцируя квадратное уравнение (36) для параметра λ по переменным u и v и пользуясь формулами (12a), (12b) § 125, получим по исключении произведения $\{P_1 P_1\}$ с помощью того же уравнения (36) систему

$$\begin{aligned} \lambda_u + \lambda b'_{-1} - \lambda b &= 0, \\ \lambda_v + \lambda a' - \lambda a_1 &= 0. \end{aligned} \tag{42}$$

Фокусы директрис определяются как общие точки луча d с теми прямыми $d + \nu d_u$, $d + \nu' d_v$ дифференциальной окрестности, которые его пересекают; параметры ν, ν' выбраны так, чтобы точки $d + \nu d_u$, $d + \nu' d_v$ лежали на гиперповерхности Q_4^2. Пользуясь формулами (41) для производных d_u, d_v и имея в виду, что из уравнения (42) следует

$$\lambda_u + \lambda b'_{-1} = \lambda b, \quad \lambda_v + \lambda a' = \lambda a_1,$$

мы запишем первую прямую из дифференциальной окрестности луча d, которая его пересекает, в виде

$$d + \nu d_u = P_1 + \lambda Q_{-1} + \nu b (P_1 + \lambda Q_{-1}) + \nu (hp + \lambda q_{-2}).$$

Так как

$$\{hp + \lambda q_{-2},\ \ hp + \lambda q_{-2}\} = 0,$$

то прямая в P_5, соединяющая точки d и d_u, пересекает гиперповерхность Q_4^2 в точках $d = P_1 + \lambda Q_1$ и $d' = hp + \lambda q_{-2}$. Они имеют прообразом в P_3 пару прямых, которые пересекаются и определяют первый фокус директрисы d. Точно так же второй фокус определяется как точка пересечения пары прямых

$$d = P_1 + \lambda Q_{-1} \quad \text{и} \quad d'' = \frac{1}{\lambda} p_2 + k'_{-1} q.$$

Здесь k, h — инварианты сети (p), а k'_{-1}, h'_{-1} — инварианты сети (q).

Прямая

$$d' = hp + \lambda q_{-2}$$

при любом значении λ принадлежит пучку прямых с базисом p и q_{-2}, т. е. пучку прямых, построенному на асимптотических касательных поверхностей (X) и (X'), пересекающихся в точке M_1, и аналогично d''. Следовательно, вторая директриса, соединяющая точки M_1, M_2, имеет в этих точках свои фокусы. Первая директриса XX' имеет плоскость $XX'M_1$ и $XX'M_2$ своими фокальными плоскостями.

162. Литературные указания. Координаты прямой введены в 1846 г. Плюккером [1] как четыре коэффициента в простейших уравнениях прямой в декартовых координатах x, y, z

$$x = rz + \rho,$$
$$y = sz + \sigma;$$

позднее он добавил пятую

$$\eta = r\sigma - s\rho$$

и, таким образом, использовал квадратичную зависимость между ними в случае неоднородных координат прямой. За два года до этого Грассман уже ввёл координаты линейного пространства L_{r-1}, погружённого в проективное пространство P_{n-1}, как миноры матрицы, составленной из координат r точек, которые определяют L_{r-1} в P_{n-1}. Приложений к трёхмерному пространству он не давал и ограничился очень общими соображениями.

Независимо от этих авторов Кэли в 1859 г. снова нашёл их для $r=2$, $n=4$, т. е. для прямой в трёхмерном пространстве. Преобразование уравнения гиперповерхности к каноническому виду (сумма квадратов) дано Клейном [1]. Он же поставил в соответствие многообразие прямых в трёхмерном пространстве с точками гиперповерхности 2-го порядка Q_4^2 в пространстве пяти измерений P_5. Это отображение затем подробно изучает Сегре [1].

Пользуясь теоремой Дарбу об определении конгруэнции W шестью линейно независимыми решениями одного уравнения Лапласа, Бомпиани [1] показывает, что плоский пучок касательных к поверхности в данной точке её изображается точками одной прямой на гиперповерхности Q_4^2, а комплекс касательных — так называемой квадратичной конгруэнцией, т. е. конгруэнцией прямолинейных образующих гиперповерхности Q_4^2, причём асимптотические касательные изображаются фокусами на этом луче. Отсюда вытекает возможность применения к этой квадратичной конгруэнции преобразования Лапласа.

Этот метод привёл Годо [7] к построению последовательности комплексов, присоединённых к данной точке поверхности и к целому ряду геометрических исследований, среди которых можно прежде всего отметить замечательный результат Цицейки [1], именно на этом пути получившего конгруэнции R.

Изложенная в тексте теория принадлежит Цицейке. Одновременно с ним опубликовал свои работы Демулен [7], где он пришёл к поверхностям R, рассматривая преобразования Софуса Ли, переводящие прямые в шары. При этом поверхность R переходит в поверхность, которую он обозначает буквой Ω и которая замечательна тем, что развёртывающиеся поверхности её нормалей секут некоторую поверхность (O) по сопряжённой системе с равными инвариантами.

По теореме Кёнигса (см. гл. VI, § 134) точка O_1, гармонически сопряжённая точке O относительно фокусов нормали, описывает тоже сопряжённую сеть с равными инвариантами. Если рассмотреть сферы с центрами O и O_1, касательные к рассматриваемой поверхности Ω, то одной полостью огибающей такого семейства сфер служит поверхность Ω; так как линиям кривизны поверхности Ω на поверхности центров (O) или (O_1) соответствует сопряжённая система, то на второй полости огибающей им будет соответствовать сеть линий кривизны. Таким образом, получаются две новые поверхности Ω_1 и Ω_{-1}.

В преобразовании Софуса Ли сферам, касательным к поверхности Ω, соответствуют прямые d, d_1, касательные к поверхности R. Если центры O и O_1 гармонически сопряжены относительно фокусов, то прямые d, d_1 сопряжены относительно асимптотических касательных, ибо линии кривизны Ω переходят в асимптотические линии R. Так как линии кривизны на обеих полостях огибающей сфер Ω и Ω_1 соответствуют, то асимптотические линии соответствуют на фокальных поверхностях конгруэнции (d) и аналогично (d_1). Если конгруэнция (d) и её преобразование Лапласа (d_1) суть конгруэнции W, то и все конгруэнции последовательности — W.

Примером поверхностей Ω могут служить изотермические поверхности (сеть линий кривизны изотермична). В этом случае одна из сфер сжимается в точку, её центр O совпадает с точкой M поверхности Ω; другая сфера — гармоническая сфера изотермической поверхности. Так как сфера O сжимается в точку, то в преобразовании Ли этому семейству сфер соответствует

конгруэнция W, принадлежащая линейному комплексу. Сеть имеет одну из своих конгруэнций в линейном комплексе.

Демуленом же отмечено замечательное преобразование поверхностей R: поверхность, у которой сферическое изображение асимптотических линий совпадает с изображением развёртывающихся поверхностей конгруэнции R, есть поверхность R. Например, сеть линий кривизны поверхности постоянной кривизны есть сеть R и конгруэнция её нормалей есть конгруэнция R. Изотермическая сеть на сфере есть сеть R и конгруэнция нормалей минимальной поверхности, линии кривизны которой изображаются этой сетью, есть конгруэнция R.

Цицейка пришёл к конгруэнциям R, рассматривая отображение лучей точками гиперповерхности 2-го порядка Q_4^2 в пятимерном пространстве. Конгруэнция W при этом изображается поверхностью, обладающей сопряжённой сетью, линии сети соответствуют асимптотическим линиям фокальных поверхностей. Если эта сеть есть сеть с равными инвариантами, то конгруэнция является конгруэнцией R (§ 152).

Сеть R всегда изотермически сопряжённая. Сеть R и только она одна совпадает со своей четвёртой производной (см. § 151).

Бианки [9] заметил, что всякая изотермически сопряжённая сеть на поверхности 2-го порядка есть сеть R.

Преобразование поверхности R построено Йонасом [1].

Отображение конгруэнции W сопряжённой сетью на гиперповерхности Q_4^2 принадлежит Цицейке [2]. Розе [3] отметил, что и для произвольной конгруэнции асимптотические линии фокальных поверхностей отображаются особыми сетями (теперь различными), которые Сегре называет сопряжёнными сетями 2-го порядка.

Литература по конфигурации T дана в конце гл. IX. Преобразование произвольной конфигурации T посредством двупараметрического семейства поверхностей 2-го порядка было построено и изучено Калапсо [5]. Связь этих преобразований с преобразованием Лапласа конгруэнции прямых в P_5 снова подчёркнута Б. А. Розенфельдом.

Пары поверхностей с общими поверхностями Ли открыты Демуленом. Затем следуют многочисленные работы Годо, отчасти цитированные в П.Д.Г., стр. 254.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ КОНГРУЭНЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРЯМЫХ

I. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ СЕТЕЙ И КОНГРУЭНЦИЙ

163. Сопряжённые сети в евклидовом пространстве E_n. Теория сетей в проективном пространстве P_n переносится без всяких затруднений в евклидово пространство E_n. Вместо однородных координат $x^1, x^2, \ldots, x^{n+1}$ аналитической точки X мы должны теперь рассматривать неоднородные $x^1, x^2, \ldots, x^n$, полагая $x^{n+1}=1$. Совокупность n неоднородных координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$ будем называть вектором $\overrightarrow{X}$ и для краткости обозначать попрежнему буквой $\boldsymbol{X}$ чёрного шрифта.

Как мы видели (гл. VI), однородные координаты точки, которая описывает сеть, удовлетворяют уравнению Лапласа

$$x^\alpha_{uv}=ax^\alpha_u+bx^\alpha_v+cx^\alpha, \qquad \alpha=1, 2, \ldots, n+1,$$

но поскольку теперь дополнительная координата равна единице

$$x^{n+1}=1, \quad x^{n+1}_u=0, \quad x^{n+1}_v=0,$$

то мы должны считать c равным нулю

$$c=0.$$

Следовательно, в евклидовом пространстве E_n n неоднородных координат и, следовательно, радиус-вектор точки X, описывающей сопряжённую сеть, удовлетворяют приведённому уравнению Лапласа

$$\boldsymbol{X}_{uv}=a\boldsymbol{X}_u+b\boldsymbol{X}_v. \tag{1}$$

Касательные к координатным линиям определяются векторами

$$\boldsymbol{\xi}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{X}_u, \quad \boldsymbol{\eta}=\frac{1}{\mu}\boldsymbol{X}_v, \tag{2}$$

где λ и μ — произвольные скаляры.

Введём обозначения

$$a=\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v}, \quad b=\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u}, \tag{3}$$

и примем произвольные до сих пор скаляры λ и μ равными h и l.

Уравнения (2) примут вид

$$\boldsymbol{X}_u=h\boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{X}_v=l\boldsymbol{\eta}. \tag{2'}$$

Внося эти значения в уравнение (1), получим:

$$(h\boldsymbol{\xi})_v=\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v}(h\boldsymbol{\xi})+\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u}(l\boldsymbol{\eta}),$$

или, обозначая

$$n=\frac{1}{h}\frac{\partial l}{\partial u}, \quad m=\frac{1}{l}\frac{\partial h}{\partial v}, \tag{3'}$$

будем иметь:

$$\boldsymbol{\xi}_v=n\boldsymbol{\eta}, \quad \boldsymbol{\eta}_u=m\boldsymbol{\xi} \tag{4}$$

и

$$l_u=nh, \quad h_v=ml. \tag{5}$$

Векторы $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ мы будем называть *нормированными векторами* касательных сети, m и n — *компонентами вращения* сети.

Обратно, если даны нормированные векторы касательных $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, удовлетворяющие системе (4), то для получения сети надо проинтегрировать систему (5) и найти вектор $\boldsymbol{X}$ из вполне интегрируемой системы (2′).

Все получаемые таким образом сети называются **параллельными**, ибо параллельны соответствующие касательные к линиям первой и второй сети. Среди них замечательны сети, соответствующие очевидным решениям уравнений (5) $h=0$, $l=0$. Так как при этом уравнения (2′) дают $\boldsymbol{X}=\text{const.}$, следовательно, точка, описывающая сеть, стоит на месте, то сеть называется *нулевой*. Заметим, что касательные её имеют вполне определённые направления $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$.

Мы знаем (гл. VI, § 125), что точка X_1 с координатами

$$x^\alpha_1=x^\alpha_v-ax^\alpha \qquad \alpha=1, 2, \ldots, n+1$$

описывает первое преобразование Лапласа в направлении линии v. Поскольку при $x^{n+1}=1$ мы имели бы $x_1^{n+1}=-a$, мы должны разделить все координаты x^α_1 на скаляр $-a$ и ввести радиус-вектор преобразованной точки

$$\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{X}-\frac{1}{a}\boldsymbol{X}_v,$$

или, заменяя X_v и a по формулам (2′), (3), а производную h_v по формуле (5)

$$X_1 = X - \frac{h}{m}\eta, \quad X_{-1} = X - \frac{l}{n}\xi. \tag{6}$$

Вторая формула написана для первого преобразования в направлении линии u.

Так как дифференцирование первого уравнения (6) по u и по v даёт в силу уравнений (2′) и (5)

$$\frac{\partial X_1}{\partial v} = -\frac{h}{m}\left(\eta_v - \frac{m_v}{m}\eta\right), \quad \frac{\partial X_1}{\partial u} = \eta\frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{h}{m}\right), \tag{6′}$$

то мы можем принять компоненты для преобразованной сети равными

$$\xi_1 = \frac{\eta}{m}, \quad \eta_1 = \eta_v - \frac{1}{m}m_v\eta,$$
$$h_1 = m\frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{h}{m}\right), \quad l_1 = -\frac{h}{m}, \tag{7}$$
$$n_1 = \frac{1}{m}, \quad m_1 = m\left(mn - \frac{\partial^2 \ln m}{\partial u\,\partial v}\right).$$

164. Конгруэнции в E_n. Каждая из касательных сети ξ и η описывает конгруэнцию. Эти две конгруэнции можно назвать *фокальными конгруэнциями* сети по аналогии с фокальными сетями конгруэнции.

Исключая ξ из уравнений (4), получим уравнение Лапласа для вектора η

$$\eta_{uv} = \frac{1}{m}m_v\eta_u + mn\eta. \tag{8}$$

Обратно, всякий вектор H, удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$\mathsf{H}_{uv} = a\mathsf{H}_u + b\mathsf{H}_v + c\mathsf{H}, \tag{9}$$

служит вектором направления луча некоторой конгруэнции; чтобы получить нормальный вектор луча, надо нормировать вектор H

$$\mathsf{H} = \rho\eta$$

так, чтобы новый вектор η удовлетворял уравнению (8). Это, как мы видели (гл. VI, § 126), возможно, если инварианты уравнений (8) и (9) соответственно равны между собой. Сравнение инвариантов приводит к уравнениям

$$mn = c + ab - b_v, \quad \frac{\partial^2 \ln m}{\partial u\,\partial v} = a_u - b_v,$$

откуда m определяется квадратурами. Две произвольные функции входят множителем в виде произведения функции одного переменного u на функцию одного переменного v. Они — не существенны, ибо соответствуют замене параметров $u = f_1(u^*)$, $v = f_2(v^*)$ в уравнении (8). Нормирующий множитель ρ определяется вполне интегрируемой системой

$$\frac{\partial \ln\rho}{\partial u} = b, \quad \frac{\partial \ln\rho}{\partial v} = a - \frac{m_v}{m}$$

с несущественным постоянным множителем.

Уравнения (4) и (8) определяют тогда вектор ξ в конечном виде. Для определения конгруэнции надо интегрировать систему (5), после чего система (2′) определит фокус X с произвольным постоянным вектором в виде слагаемого, т. е. до параллельного переноса в пространстве; другой фокус X_1 определяется уравнением (6) в конечном виде.

Различным решениям системы (5) соответствуют различные конгруэнции, которые соответствуют развёртывающимися поверхностями $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ так, что соответствующие лучи параллельны. Такие конгруэнции называются *параллельными*. Так как по заданному вектору η вектор ξ вплоть до скалярного множителя определён, то фокальные сети (ξ, η) параллельных конгруэнций тоже будут параллельны; то же имеет место для второй фокальной сети (ξ_1, η_1) конгруэнции.

Система (5) имеет очевидное решение

$$h = 0, \quad l = 0,$$

которому соответствуют по формулам (2′) и (6) постоянные и совпадающие между собой значения радиусов-векторов фокусов

$$X_1 = X = \text{const.}$$

Следовательно, среди конгруэнций, параллельных данной конгруэнции, всегда имеются конгруэнции, вырождающиеся в связку с центром связки в произвольной точке пространства.

165. Конгруэнция, сопряжённая сети. Допустим, что конгруэнция с направляющим вектором $\mathsf{Z} = \rho\zeta$ сопряжена сети (X). Если обозначить через Z и Y радиусы-векторы фокусов конгруэнции (Z), то, заменяя η через ζ, ξ через $\frac{\zeta_u}{m'}$, X через Y и X_1 через Z и снабжая штрихом величины h, l, m, n, относящиеся к конгруэнции (Z), мы перепишем уравнения (2′), (6′) в виде

$$Z_u = \zeta\frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{h'}{m'}\right), \quad Z_v = -\frac{h}{m'}\left(\zeta_v - \frac{\partial \ln m}{\partial v}\zeta\right),$$
$$Y_u = \frac{h'}{m'}\zeta_u, \quad Y_v = l'\zeta. \tag{10}$$

Так как (гл. VI, § 129) конгруэнция (Z), сопряжённая сети (X) порождает последовательность Лапласа, описанную около последовательности $[X]$, то касательная к линии u на фокальной поверхности (Y) должна проходить через точку X_{-1}, полученную преобразованием Лапласа в сторону u из точки X и три вектора $\boldsymbol{\zeta}$, $\boldsymbol{\zeta}_u$ и $\boldsymbol{\xi}$ лежат в одной плоскости XYX_{-1}, и аналогично для векторов $\boldsymbol{\zeta}$, $\boldsymbol{\zeta}_v$ и $\boldsymbol{\eta}$. То же самое имеет место для векторов $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}_u$, $\mathbf{Z}_v$; отсюда имеем уравнения

$$\mathbf{Z}_u = P\mathbf{Z} + H\boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{Z}_v = Q\mathbf{Z} + L\boldsymbol{\eta}. \tag{a}$$

Дифференцируя и исключая производные от $\mathbf{Z}$, получим, пользуясь уравнениями (4), (a):

$$(P_v - Q_u)\,\mathbf{Z} + (H_v - QH - Lm)\,\boldsymbol{\xi} - (L_u - PL - Hn)\,\boldsymbol{\eta} = 0.$$

Так как луч $\mathbf{Z}$ заведомо не лежит в касательной плоскости поверхности (X) и не компланарен векторам $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$, то коэффициенты при $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, $\mathbf{Z}$ должны равняться нулю

$$P_v = Q_u, \quad H_v = QH + Lm, \quad L_u = PL + Hn. \tag{b}$$

Первое из этих уравнений показывает, что мы можем положить

$$P = \frac{\partial \ln \lambda}{\partial u}, \quad Q = \frac{\partial \ln \lambda}{\partial v}.$$

Уравнения (a), (b) принимают теперь вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathbf{Z}}{\lambda}\right)_u &= \frac{H}{\lambda}\boldsymbol{\xi}, & \left(\frac{\mathbf{Z}}{\lambda}\right)_v &= \frac{L}{\lambda}\boldsymbol{\eta}, \\ \left(\frac{H}{\lambda}\right)_v &= m\frac{L}{\lambda}, & \left(\frac{L}{\lambda}\right)_u &= n\frac{H}{\lambda}. \end{aligned} \tag{11}$$

Они показывают, что точка

$$Z = \frac{\mathbf{Z}}{\lambda}$$

описывает сеть, параллельную сети (X).

Следовательно, *всякая конгруэнция, сопряжённая сети, параллельна вырожденной конгруэнции, которая получается, если из неподвижной точки спроектировать сеть, параллельную данной.*

Заметим ещё, что из уравнений (11) прямо получаем уравнение Лапласа, которому удовлетворяет Z

$$\left(\frac{\mathbf{Z}}{\lambda}\right)_{uv} = m\frac{H}{L}\left(\frac{\mathbf{Z}}{\lambda}\right)_u + n\frac{L}{H}\left(\frac{\mathbf{Z}}{\lambda}\right)_v.$$

Если же выполнить дифференцирование, то это уравнение можно написать в виде

$$\frac{\mathbf{Z}_{uv} - \mathbf{Z}_u\left(\frac{\lambda_v}{\lambda} + m\frac{H}{L}\right) - \mathbf{Z}_v\left(\frac{\lambda_u}{\lambda} + n\frac{L}{H}\right)}{\mathbf{Z}} = \frac{\lambda_{uv} - \lambda_u\left(\frac{\lambda_v}{\lambda} + m\frac{H}{L}\right) - \lambda_v\left(\frac{\lambda_u}{\lambda} + m\frac{L}{H}\right)}{\lambda}. \tag{c}$$

Если $\mathbf{Z}$ удовлетворяет уравнению Лапласа (9), то левая часть (c) для всех координат вектора равна одной и той же функции c; этой же функции должна быть равна и правая часть, а так как $m\frac{H}{L}$, $n\frac{L}{H}$ придётся выбирать так, чтобы круглые скобки были равны функциям a и b из уравнения (9), то λ будет удовлетворять тому же уравнению (9).

Следовательно, если $Z^1, Z^2, \ldots, Z^n$ суть координаты вектора направления луча конгруэнции в пространстве E_n, то точка пространства E_{n-1} с координатами

$$z^\alpha = \frac{Z^\alpha}{Z^n} = \frac{\zeta^\alpha}{\zeta^n}, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n-1$$

описывает сопряжённую сеть.

Отсюда следует, что *сечение конгруэнции гиперплоскостью даёт сеть, сопряжённую конгруэнции.*

Действительно, такое сечение определяется радиусом-вектором

$$Z = Y + t\boldsymbol{\zeta},$$

где скаляр t выбран так, чтобы, например, последняя координата z^n равнялась нулю

$$z^n = y^n + t\zeta^n = 0, \quad t = -\frac{y^n}{\zeta^n}.$$

Дифференцируя уравнение

$$Z = Y - \frac{y^n}{\zeta^n}\boldsymbol{\zeta},$$

и пользуясь формулами (10), получим:

$$\begin{aligned} Z_u &= \frac{h'}{m'}\boldsymbol{\zeta}_u - \frac{y^n}{\zeta^n}\boldsymbol{\zeta}_u - \frac{h'}{m'}\frac{\boldsymbol{\zeta}}{\zeta^n}\zeta^n_u + \frac{y^n}{\zeta^n}\frac{\zeta^n_u}{\zeta^n}\boldsymbol{\zeta} = \\ &= \left(\frac{h'}{m'} - \frac{y^n}{\zeta^n}\right)\left(\boldsymbol{\zeta}_u - \boldsymbol{\zeta}\frac{\zeta^n_u}{\zeta^n}\right) = \left(\frac{h'}{m'} - \frac{y^n}{\zeta^n}\right)\zeta^n\left(\frac{\boldsymbol{\zeta}}{\zeta^n}\right)_u; \end{aligned}$$

$$Z_v = l'\boldsymbol{\zeta} - l'\boldsymbol{\zeta} - \frac{y^n}{\zeta^n}\boldsymbol{\zeta}_v + \frac{y^n}{\zeta^n}\frac{\zeta^n_v}{\zeta^n}\boldsymbol{\zeta} = -\frac{y^n}{\zeta^n}\left(\boldsymbol{\zeta}_v - \boldsymbol{\zeta}\frac{\zeta^n_v}{\zeta^n}\right) = -y^n\left(\frac{\boldsymbol{\zeta}}{\zeta^n}\right)_v.$$

Следовательно, точка с радиусом-вектором Z описывает сеть на гиперплоскости $z^n = 0$, параллельную сети с координатами $\frac{\zeta^\alpha}{\zeta^n}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n-1)$.

II. ЗАКОН ОРТОГОНАЛЬНОСТИ СЕТЕЙ И КОНГРУЭНЦИЙ

166. Закон ортогональности в E_{2p+1}. Будем называть скалярным произведением каких-либо векторов ζ и ξ сумму произведений попарно координат одного указателя

$$\zeta\cdot\xi=\zeta^1\xi^1+\zeta^2\xi^2+\ldots+\zeta^n\xi^n. \qquad (12)$$

В пространстве нечётного числа измерений $n=2p+1$ каждой сети с нормированными векторами касательных ξ, η можно поставить в соответствие вектор ζ, определяемый до скалярного множителя посредством $2p$ условий ортогональности

$$\zeta\cdot\xi=0,\quad \zeta\cdot\xi_u=0,\quad \zeta\cdot\xi_{2u}=0,\ \ldots,\ \zeta\cdot\xi_{(p-1)u}=0, \qquad (13a)$$

$$\zeta\cdot\eta=0,\quad \zeta\cdot\eta_v=0,\ \ldots,\ \zeta\cdot\eta_{(p-1)v}=0; \qquad (13b)$$

здесь мы ввели обозначения производных:

$$\xi_{ku}=\frac{\partial^k}{\partial u^k}\xi,\quad \eta_{kv}=\frac{\partial^k}{\partial v^k}\eta.$$

Действительно, $2p$ линейных однородных уравнений относительно $2p+1$ неизвестных координат вектора ζ определяют их до общего множителя, за исключением особых случаев понижения ранга, которые мы опускаем и которые соответствуют сети, расположенной в пространстве меньшего числа измерений E_{2p}.

Если в уравнения (13a), (13b) подставить $\xi=\frac{1}{m}\eta_u$, $\eta=\frac{1}{n}\xi_v$, то система (13a), (13b) перейдёт в эквивалентную систему

$$\begin{aligned}&\zeta\cdot\eta_u=0,\quad \zeta\cdot\eta_{2u}=0,\ \ldots,\ \zeta\cdot\eta_{pu}=0,\\ &\zeta\cdot\xi_v=0,\quad \zeta\cdot\xi_{2v}=0,\ \ldots,\ \zeta\cdot\xi_{pv}=0.\end{aligned} \qquad (13')$$

Нетрудно увидеть теперь, что *вектор* ζ, определяемый уравнениями (13a), (13b) или (13′), *удовлетворяет уравнению Лапласа и, следовательно, определяет конгруэнцию, для которой он служит вектором направления луча.*

Действительно, дифференцируя (13a), (13b), (13′) один раз по u, один раз по v, мы получим из первого уравнения (13a) с помощью соотношений (4) § 163:

$$\zeta_u\cdot\xi+\zeta\cdot\xi_u=0,\quad \zeta_v\cdot\xi+n\zeta\cdot\eta=0,$$

или в силу тех же уравнений (13a), (13b)

$$\begin{aligned}&\zeta_u\cdot\xi=0,\quad \zeta_v\cdot\xi=0,\\ &\zeta_u\cdot\eta=0,\quad \zeta_v\cdot\eta=0.\end{aligned} \qquad (a)$$

Уравнения второй строки получены дифференцированием первого уравнения (13b) по v и u. Дифференцируя первые уравнения (a)

каждой строки по переменному v и используя уравнения (4), получим:

$$\zeta_{uv}\cdot\xi=0,\quad \zeta_{uv}\cdot\eta=0.$$

Таким же образом, дифференцируя остальные уравнения (13a), (13b), получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}&\zeta_u\cdot\xi_{ku}=0,\quad \zeta_v\cdot\xi_{ku}=0,\quad \zeta_{uv}\cdot\xi_{ku}=0,\\ &\zeta_u\cdot\eta_{kv}=0,\quad \zeta_v\cdot\eta_{kv}=0,\quad \zeta_{uv}\cdot\eta_{kv}=0,\end{aligned}\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-2.$$

Следовательно, обозначая

$$\Delta\zeta=\zeta_{uv}-a\zeta_u-b\zeta_v-c\zeta, \qquad (14)$$

при любых функциях a, b, c будем иметь:

$$\Delta\zeta\cdot\xi_{ku}=0,\quad \Delta\zeta\cdot\eta_{kv}=0,\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-2. \qquad (b)$$

При подходяще выбранных функциях a, b, c мы удовлетворим ещё три таких уравнения, например

$$\Delta\zeta\cdot\xi_{(p-1)u}=0,\quad \Delta\zeta\cdot\eta_{(p-1)v}=0,\quad \Delta\zeta\cdot\eta_{pv}=0. \qquad (c)$$

Если $2p-2+3=2p+1$ векторов ξ_{ku}, η_{kv}, $\xi_{(p-1)u}$, $\eta_{(p-1)v}$, η_{pv} линейно независимы (что всегда имеет место, если сеть $(\xi,\ \eta)$ не принадлежит E_{n-1}), то из уравнений (b), (c) следует

$$\Delta\zeta=0, \qquad (14')$$

что и требовалось доказать. Отсюда теорема: *Система* (13a), (13b) *определяет конгруэнцию, ортогональную сети* $(\xi,\ \eta)$.

167. Ортогональные последовательности в E_{2p+1}. Дифференцируя последовательно уравнения (13a), (13b), (13′), получим новую серию уравнений:

$$\begin{aligned}&\eta\cdot\zeta=0,\quad \eta\cdot\zeta_v=0,\ \ldots,\ \eta\cdot\zeta_{(p-1)v}=0,\\ &\eta\cdot\zeta_u=0,\quad \eta\cdot\zeta_{2u}=0,\ \ldots,\ \eta\cdot\zeta_{pu}=0,\end{aligned} \qquad (15)$$

и так как по формулам (10)

$$Y_u=\frac{h'}{m'}\zeta_u,\quad Y_v=l'\zeta,$$

нормированные векторы касательных фокальной сети (Y) нашей конгруэнции пропорциональны векторам ζ_u, ζ, то уравнения (15) доказывают ортогональность второй фокальной конгруэнции (η) сети $(\xi,\ \eta)$ ко второй фокальной сети конгруэнции (ζ).

Отсюда теорема:

Если конгруэнция (ζ) ортогональна сети $(\xi,\ \eta)$, то первая фокальная конгруэнция (ξ) сети ортогональна первой фокальной сети (Z) конгруэнции, а вторая конгруэнция — второй фокальной сети.

Здесь первая фокальная конгруэнция — та, которая описана касательными к линиям u сети, и первая фокальная сеть конгруэнции —

та, которая содержит рёбра возврата развёртывающихся поверхностей конгруэнции $v = \mathrm{const}$.

Применяя эту теорему по очереди ко всем конгруэнциям последовательности, придём к заключению, что *последовательные преобразования Лапласа от конгруэнции* (ζ), *ортогональной сети* (ξ, η), *будут соответственно ортогональны сетям того же ранга в последовательности Лапласа, порождённой сетью* (ξ, η).

Рассмотрим сеть (X'), параллельную сети (X); она определяется системой $(2')$ § 163

$$X'_u = h\xi, \quad X'_v = l\eta. \tag{2'}$$

Мы видели ((9) § 165), что вектор X' может служить вектором направления луча конгруэнции, сопряжённой сети (X).

Внося в уравнение (13a), (13b) выражения $\xi = \frac{1}{h} X'_u$, $\eta = \frac{1}{l} X'_v$, получим:

$$\begin{aligned} &\zeta \cdot X'_u = 0, \quad \zeta \cdot X'_{2u} = 0, \ \ldots, \ \zeta \cdot X'_{pu} = 0, \\ &\zeta \cdot X'_v = 0, \quad \zeta \cdot X'_{2v} = 0, \ \ldots, \ \zeta \cdot X'_{pv} = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Отсюда следует, что *функция*

$$\theta = \zeta \cdot X'$$

удовлетворяет тому же уравнению Лапласа, что и вектор конгруэнции ζ.

Действительно, из уравнений $(2')$, (4) § 163 следует уравнение Лапласа для вектора X'

$$X'_{uv} = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial v} X'_u + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial u} X'_v.$$

Значит, непосредственным умножением этого равенства на вектор ζ с учётом формул (16) получаем первое из следующих трёх уравнений:

$$\zeta \cdot X'_{uv} = 0, \quad \zeta_v \cdot X'_u = 0, \quad \zeta_u \cdot X'_v = 0, \tag{17}$$

два других получаются дифференцированием первых уравнений (16) в силу первого уравнения (17). Отсюда последовательное дифференцирование функции θ даёт:

$$\theta_u = \zeta_u \cdot X', \quad \theta_v = \zeta_v \cdot X', \quad \theta_{uv} = \zeta_{uv} \cdot X'.$$

Пользуясь обозначением (14), получим:

$$\Delta\theta = \Delta\zeta \cdot X',$$

откуда и следует предложение.

Пользуясь результатами § 165, мы заметим, что точка с радиусом-вектором

$$Z = \frac{\zeta}{\theta}$$

опишет сопряжённую сеть и конгруэнция (ζ) допускает сопряжённые сети, параллельные сети (Z).

Внося в уравнение (16) выражение $\zeta = \theta Z$, мы их перепишем в виде

$$\begin{aligned} Z \cdot X' = 1, \ Z \cdot X'_{ku} = 0, \quad & Z \cdot X'_{kv} = 0, \\ X' \cdot Z_{ku} = 0, \quad & X' \cdot Z_{kv} = 0, \end{aligned} \qquad k = 1, 2, \ldots, p. \tag{16'}$$

Отсюда вытекает, что конгруэнция (X') ортогональна сети (Z). Имеем теорему:

Если сеть ортогональна конгруэнции, то всякая конгруэнция, сопряжённая сети, ортогональна некоторой сети, сопряжённой конгруэнции.

Здесь слова «сеть» и «конгруэнция» можно поменять местами; такие же теоремы имеют место для гармоничных сетей и конгруэнций.

168. Закон ортогональности в E_{2p}. В пространстве чётного числа измерений $n = 2p$ всякой конгруэнции (ζ) можно поставить в соответствие конгруэнцию (ζ'), вектор направления которой определяется условиями ортогональности

$$\zeta' \cdot \zeta = 0, \ \zeta' \cdot \zeta_{ku} = 0, \ \zeta' \cdot \zeta_{kv} = 0, \ k = 1, 2, \ldots, p-1. \tag{18}$$

Уравнения (18) образуют систему $2p-1$ линейных однородных уравнений относительно $2p$ координат вектора ζ'. Если конгруэнция (ζ) не принадлежит пространству меньшего числа измерений E_{2p-1}, то векторы $\zeta, \zeta_{ku}, \zeta_{kv}$ $(k = 1, 2, \ldots, p-1)$ линейно независимы, ранг системы (18) равен $2p-1$ и система определяет до скалярного множителя единственный вектор ζ'. Значит, семейству параллельных конгруэнций (ζ) соответствует единственное семейство параллельных конгруэнций (ζ').

Конгруэнции (ζ) и (ζ'), удовлетворяющие условиям (18), называются *ортогональными*.

Так как последовательное дифференцирование преобразует уравнения (18) в систему

$$\zeta \cdot \zeta' = 0, \ \zeta \cdot \zeta'_{ku} = 0, \ \zeta \cdot \zeta'_{kv} = 0, \ k = 1, 2, \ldots, p-1, \tag{18'}$$

то свойство ортогональности двух конгруэнций — взаимно.

Пусть *первая* фокальная сеть конгруэнции (ζ) имеет нормированные векторы (ξ, η) и *вторая* фокальная сеть конгруэнции (ζ') — векторы (ξ', η'); следовательно, вектор ζ пропорционален вектору ξ, а вектор ζ' — вектору η'.

Система (18), (18′) перепишется в виде:

$$\begin{aligned} &\xi\cdot\eta'=0,\ \xi\cdot\eta'_{ku}=0,\ \xi\cdot\eta'_{kv}=0,\\ &\eta'\cdot\xi_{ku}=0,\ \eta'\cdot\xi_{kv}=0,\end{aligned}\qquad k=1,2,\ldots,p-1. \tag{18a}$$

Если же воспользоваться формулами (4)

$$\xi_v=n\eta,\quad \eta_u=m\xi,\quad \xi'_v=n'\eta',\quad \eta'_u=m'\xi',$$

то можно ещё преобразовать систему (18a)

$$\begin{aligned} &\xi'\cdot\eta=0,\ \xi'\cdot\eta_{ku}=0,\ \xi'\cdot\eta_{kv}=0,\\ &\eta\cdot\xi'_{ku}=0,\ \eta\cdot\xi'_{kv}=0,\end{aligned}\qquad k=1,2,\ldots,p-1. \tag{18a'}$$

Следовательно, конгруэнции (ξ) и (η'), (ξ') и (η) — ортогональны.

Две сопряжённые сети (ξ, η) и (ξ', η'), у которых фокальные конгруэнции ортогональны накрест, т. е. первая конгруэнция первой сети (ξ) ортогональна второй конгруэнции (η') второй сети и наоборот, называются *ортогональными сетями.*

Пользуясь этим определением, можем высказать теорему:

Если две конгруэнции ортогональны, то первая фокальная сеть одной ортогональна второй фокальной сети другой, и наоборот.

В этой теореме можно поменять местами слова «сеть» и «конгруэнция».

Теоремы, относящиеся к ортогональности сетей и конгруэнций в пространстве E_{2p}, могут быть получены из таких же теорем для пространства E_{2p+1}, если воспользоваться общей теоремой перехода от пространства E_n к пространству E_{n-1}:

Если в пространстве E_{2p+1} конгруэнция (ζ) и сеть (ξ, η) ортогональны, то сечение конгруэнции гиперплоскостью E_{2p} и проекция сети на ту же гиперплоскость образуют в пространстве E_{2p} пару ортогональных сетей.

Для доказательства достаточно заметить, что по общему правилу точка с радиусом-вектором

$$Z=\frac{\zeta}{\theta}, \tag{a}$$

описывает сеть, параллельную сопряжённой сети для конгруэнции ζ, если скалярная функция θ удовлетворяет уравнению Лапласа конгруэнции (ζ).

Если в пространстве E_{2p+1} сеть (ξ, η) ортогональна конгруэнции (ζ), то условие ортогональности можно написать в форме системы (16′), где Z сохраняет значение (a), а X' определяется уравнениями (2′) § 167.

Дифференцируя два последних уравнения (16′) по u, получим в силу уравнений (2′):

$$X'\cdot Z_{(k+1)u}+h\xi\cdot Z_{ku}=0,\quad X'\cdot\frac{\partial}{\partial u}(Z_{kv})+h\xi\cdot Z_{kv}=0.$$

Нетрудно заметить, что Z удовлетворяет уравнению вида (1) § 163, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(Z_{kv}\right)=\frac{\partial^{k-1}}{\partial v^{k-1}}Z_{uv}=\frac{\partial^{k-1}}{\partial v^{k-1}}(aZ_u+bZ_v)$$

по выполнении дифференцирования, если систематически исключать смешанные производные с помощью уравнения (1), будет выражено через производные не выше порядка k. Все эти производные по умножению на X' обращаются в нуль в силу условий (16′). Значит, мы получим по сокращении на h:

$$\xi\cdot Z_{(k-1)u}=0,\quad \xi\cdot Z_{kv}=0,\qquad k=1,\ 2,\ldots,p. \tag{19}$$

Примем теперь функцию θ равной последней координате вектора ζ:

$$\theta=\zeta^n.$$

Сеть (Z) при таком выборе θ будет определяться радиусом-вектором Z с последней координатой $z^n=1$ равной единице. Если мы заменим эту координату нулём и обозначим вектор Z с координатой $z^n=0$ буквой Z^0, то будем иметь равенства

$$Z_u=Z^0_u,\quad Z_v=Z^0_v$$

и в то же время Z^0 определяет сечение гиперплоскостью $x^n=0$ той конгруэнции (ζ), которая принадлежит связке с центром в начале координат.

Каждое уравнение (19) не будет теперь содержать в левой части последнего слагаемого с n-й координатой вектора ξ. Следовательно, вектор ξ можно заменить вектором ξ^0, который получается из вектора ξ отбрасыванием последней компоненты. Система (19) и такая же система для вектора η запишутся в виде

$$\xi^0\cdot Z^0_{(k-1)u}=0,\ \xi^0\cdot Z^0_{kv}=0,\ \eta^0\cdot Z^0_{ku}=0,\ \eta^0\cdot Z^0_{(k-1)v}=0,\qquad k=1,\ 2,\ldots,p. \tag{19'}$$

Так как сеть (ξ^0, η^0) получается из сети (ξ, η) проектированием из начала на гиперплоскость $x^n=0$, а сечение параллельных конгруэнций (ζ) одной гиперплоскостью параллельны между собой, то условие ортогональности (19′) покажет, что проекция сети (ξ, η) на гиперплоскость $x^n=0$ ортогональна к сечению конгруэнции (ζ) той же гиперплоскостью. Теорема, таким образом, доказана.

Заметим, что в условии теоремы можно слова «сеть» и «конгруэнция» поменять местами.

При переходе от пространства E_{2p} к пространству E_{2p-1} следует в пространстве E_{2p} брать две ортогональные конгруэнции (сети), одну из них проектировать на гиперплоскость E_{2p-1} в виде конгруэнции (сети), другую пересекать гиперплоскостью E_{2p-1} в виде сети (конгруэнции). Получаемые конгруэнция и сеть будут ортогональны.

При этом сечение сети гиперплоскостью сводится к замене каждой точки X сети (ξ, η) прямой, соединяющей точки пересечения касательных ξ и η с гиперплоскостью.

III. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СЕТИ И СОПРЯЖЁННЫЕ ИМ КОНГРУЭНЦИИ

169. Ортогональные сети (сети O). Сеть ортогональна, если в каждой точке касательные к двум линиям сети перпендикулярны

$$X_u \cdot X_v = 0 \text{ или } \xi \cdot \eta = 0. \tag{a}$$

Уравнение Лапласа (1) § 163

$$X_{uv} = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v} X_u + \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u} X_v, \tag{1'}$$

которому удовлетворяет радиус-вектор X точки, описывающей ортогональную сеть, допускает решение

$$2\theta = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2,$$

равное квадрату модуля радиуса-вектора

$$2\theta = X \cdot X.$$

Действительно, дифференцируя это равенство и пользуясь формулами (2'), (4), (5) § 163, а также (3) § 163, получим:

$$\theta_u = hX \cdot \xi, \quad \theta_v = lX \cdot \eta,$$
$$\theta_{uv} = hl\xi \cdot \eta + h_v X \cdot \xi + l_u X \cdot \eta,$$

откуда в силу условия ортогональности сети (a), получим:

$$\theta_{uv} = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v}\theta_u + \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u}\theta_v,$$

что и доказывает предложение.

Так как по формулам (4) в силу условия ортогональности (a)

$$\frac{\partial}{\partial v}(\xi)^2 = 2n\xi \cdot \eta = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u}(\eta)^2 = 0,$$

то

$$(\xi)^2 = \varphi(u), \quad (\eta)^2 = \psi(v).$$

Если $\varphi(u)$ или $\psi(v)$ равно нулю, то сеть содержит линии нулевой длины. Оставляя этот особый случай в стороне, заменой параметров u, v можем привести эти функции к единице, как это вытекает из анализа системы (2), (4), (5). Действительно, при переходе от параметров u, v к параметрам $\bar{u}$, $\bar{v}$, можно сохранить h и l неизменными и принять

$$\bar{\xi} = \xi\frac{du}{d\bar{u}}, \quad \bar{\eta} = \eta\frac{dv}{d\bar{v}}, \quad \bar{m} = m\frac{dv}{d\bar{v}}, \quad \bar{n} = n\frac{du}{d\bar{u}}.$$

Выбирая

$$\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right)^2 = \varphi(u), \quad \left(\frac{d\bar{v}}{dv}\right)^2 = \psi(v),$$

мы приведём модули $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$ к единице.

Два единичных ортогональных вектора ξ, η мы можем дополнить системой из $(n-2)$ векторов x_i $(i = 1, 2, \ldots, n-2)$ так, чтобы они все были единичны и взаимно перпендикулярны

$$(x_i)^2 = 1, \quad x_i \cdot x_k = 0, \quad x_i \cdot \xi = 0, \quad x_i \cdot \eta = 0. \tag{20}$$

Это можно сделать весьма различными способами. Если дифференциалы dx_i определяются уравнениями

$$dx_i = \omega_i^k x_k + \omega_i^{n-1}\xi + \omega_i^n \eta, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n-2,$$

то единственное требование, вытекающее из условий единичности и ортогональности (20), сводится (гл. II, § 21) к соотношениям

$$\omega_\alpha^\alpha = 0, \quad \omega_\alpha^\beta = -\omega_\beta^\alpha, \qquad \begin{array}{c}\text{не суммировать!}\\ \alpha \neq \beta = 1, 2, \ldots, n,\end{array} \tag{21}$$

и уравнениям структуры евклидова пространства

$$D\omega_\alpha^\beta = [\omega_\alpha^\gamma \omega_\gamma^\beta], \qquad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, n. \tag{22}$$

Мы можем наложить дополнительные требования, положив равными нулю все

$$\omega_i^k = 0, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n-2,$$

ибо это не нарушит соотношений (21), (22).

Принимая во внимание уравнения (4) § 163 и условия (21), мы должны положить

$$\begin{gathered} d\xi = \xi_u\, du + n\, dv\, \eta, \\ d\eta = \eta_v\, dv + m\, du\, \xi, \\ \omega_i^{n-1} = a_i\, du, \quad \omega_i^n = b_i\, dv, \quad \omega_{n-1}^i = -a^i\, du, \quad \omega_n^i = -b^i\, dv, \\ \omega_{n-1}^n = -m\, du + n\, dv, \quad \omega_n^{n-1} = m\, du - n\, dv, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-2, \end{gathered} \tag{23}$$

где мы безразлично пишем $a^i = a_i$, $b^i = b_i$.

Следовательно,

$$\frac{\partial x_i}{\partial u} = a_i \xi, \qquad \frac{\partial x_i}{\partial v} = b_i \eta, \tag{23a}$$

$$\xi_u = -a^i x_i - m\eta, \quad \xi_v = n\eta, \tag{23b}$$

$$\eta_u = m\xi, \quad \eta_v = -b^i x_i - n\xi. \tag{23c}$$

Уравнения структуры (22) для форм (23) принимают вид:

$$\begin{gathered} \frac{\partial a_i}{\partial v} = mb_i, \qquad \frac{\partial b_i}{\partial u} = na_i, \\ \frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} + a_i b^i = 0. \end{gathered} \tag{24}$$

Система (24) *определяет ортогональные сети в пространстве* E_n. Из уравнений (23a), (23c), (24) получаем для вектора x_i уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\, \partial u} = m \frac{b_i}{a_i} \frac{\partial x_i}{\partial u} + n \frac{a_i}{b_i} \frac{\partial x_i}{\partial v}, \qquad \text{не суммировать!} \tag{25}$$

170. Сопряжённая с сетью *O* конгруэнция нормалей. Теперь прямую, проходящую через точку X перпендикулярно к касательным ξ и η, можно определить вектором

$$\mathbf{Z} = C^i x_i, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n-2,$$

где C^i — произвольные функции от u и v.

Если эта прямая описывает конгруэнцию с развёртывающимися поверхностями $u = \text{const.}$ и $v = \text{const.}$, то для двух перемещений $u = \text{const.}$ и $v = \text{const.}$ фокусы

$$\mathbf{Z} = X + \rho^1 \mathbf{Z} \quad \text{и} \quad Y = X + \rho^2 \mathbf{Z},$$

описывают кривые, касательные к лучу $\mathbf{Z}$, т. е. неизвестные скаляры ρ^1 и ρ^2 должны удовлетворять уравнениям

$$\mathbf{Z}_u = k_1 \mathbf{Z}, \quad Y_v = k_2 \mathbf{Z}$$

или

$$h\xi + \rho^1_u \mathbf{Z} + \rho^1 C^i_u X_i + \rho^1 C^i a_i \xi = k^1 \mathbf{Z},$$

$$l\eta + \rho^2_v \mathbf{Z} + \rho^2 C^i_v X_i + \rho^2 C^i b_i \eta = k^2 \mathbf{Z},$$

откуда, умножая на векторы ξ, η, получим:

$$\rho^1 = -\frac{h}{C^i a_i}, \quad \rho^2 = -\frac{l}{C^i b_i}.$$

Сокращая теперь члены с ξ или η, мы должны иметь при подходящем выборе функций λ и μ

$$C^i_u x_i = \lambda C^i x_i, \quad C^i_v x_i = \mu C^i x_i,$$

или в силу линейной независимости векторов x_i

$$C^i_u = \lambda C^i, \quad C^i_v = \mu C^i.$$

Так как логарифмические производные $\frac{\partial \ln C^i}{\partial u}$, $\frac{\partial \ln C^i}{\partial v}$ не должны зависеть от указателя i, то коэффициенты C^i могут отличаться только постоянными множителями. От нас зависит выбрать длину вектора $\mathbf{Z}$; следовательно, общий функциональный множитель мы можем привести к единице; все коэффициенты C^i станут тогда постоянными. *Следовательно, вектор* $\mathbf{Z}$ *будет удовлетворять уравнению Лапласа и конгруэнция* ($\mathbf{Z}$), *ортогональная сети O, будет ей сопряжена только в том случае, если все векторы* x_i *удовлетворяют одному и тому же уравнению Лапласа, т. е. если коэффициенты уравнения* (25) *не зависят от указателя* i.

Этому условию можно придать ещё другой вид. Уравнению (25) удовлетворяет нормированный вектор нормали, т. е. вектор x_i, квадрат которого равен единице. Если вектор $\mathbf{Z}$ не нормирован таким образом, то для того чтобы ортогональная сети O конгруэнция была ей сопряжена, *надо, чтобы уравнению Лапласа*

$$\mathbf{Z}_{uv} = a\mathbf{Z}_u + b\mathbf{Z}_v \tag{a}$$

удовлетворял не только вектор $\mathbf{Z}$, *т. е. все его координаты* Z^i, *но и его модуль*

$$\theta = \sqrt{(Z^1)^2 + (Z^2)^2 + \ldots + (Z^n)^2},$$

ибо тогда единичный вектор $\frac{\mathbf{Z}}{\theta}$ будет удовлетворять уравнению Лапласа

$$\left(\frac{\mathbf{Z}}{\theta}\right)_{uv} = \left(a - \frac{\theta_v}{\theta}\right)\left(\frac{\mathbf{Z}}{\theta}\right)_u + \left(b - \frac{\theta_u}{\theta}\right)\left(\frac{\mathbf{Z}}{\theta}\right)_v,$$

в чём нетрудно убедиться, выполняя в этом уравнении дифференцирование и внося $\mathbf{Z}_{uv}$ и θ_{uv} по формуле (a).

171. Конгруэнции, сопряжённые сети *O*. Мы сейчас рассматривали конгруэнцию нормалей, сопряжённую сети. Если $\theta = 0$, т. е. модуль вектора $\mathbf{Z}$ равен нулю, то нормаль — изотропная. Конгруэнцию изотропных прямых мы будем называть изотропной.

Определение 1. Конгруэнция ($\mathbf{Z}$) называется *изотропной конгруэнцией* или *конгруэнцией I*, если

$$(\mathbf{Z})^2 = (Z^1)^2 + (Z^2)^2 + \ldots + (Z^n)^2 = 0,$$
$$(\mathbf{Z}_u)^2 \neq 0, \qquad (\mathbf{Z}_v)^2 \neq 0.$$

Определение 2. Какова бы ни была конгруэнция (или сеть) $\mathscr{H}$, мы будем называть конгруэнцию (сеть) конгруэнцией $p\mathscr{H}$ (сетью $p\mathscr{H}$), если она является проекцией на пространство E_n конгруэнции (сети) $\mathscr{H}$ в пространстве E_{n+p-1}.

Пользуясь этими определениями, мы можем высказать теорему: *Конгруэнция изотропных нормалей, сопряжённая сети O, есть конгруэнция I. Конгруэнция обыкновенных нормалей, сопряжённая сети O, есть конгруэнция $2I$.*

Первая половина теоремы очевидна; перейдём к доказательству второй. Мы видели, что для конгруэнции обыкновенных (неизотропных) нормалей $(\mathbf{Z})$, сопряжённой сети O, уравнению Лапласа конгруэнции $(\mathbf{Z})$ удовлетворяет и модуль вектора

$$\theta=\sqrt{(Z^1)^2+(Z^2)^2+\ldots+(Z^n)^2}.$$

Рассмотрим вектор $\mathbf{Z}^*$ в пространстве E_{n+1}, определяемый координатами

$$Z^1,\ Z^2,\ \ldots,\ Z^n,\ Z^{n+1}=i\theta,\qquad i=\sqrt{-1}.$$

Все его координаты, а следовательно, и сам вектор, удовлетворяют уравнению Лапласа. Значит, он описывает конгруэнцию. При этом модуль вектора $\mathbf{Z}^*$ равен нулю

$$(Z^1)^2+(Z^2)^2+\ldots+(Z^n)^2+(i\theta)^2=0;$$

следовательно, конгруэнция $(\mathbf{Z})^*$ есть конгруэнция I в пространстве E_{n+1}. Конгруэнция $(\mathbf{Z})$ получается отсечением у вектора $\mathbf{Z}^*$ последней компоненты, т. е. является проекцией конгруэнции I из пространства E_{n+2-1} на пространство E_n, а потому именуется конгруэнцией $2I$.

Рассмотрим теперь наиболее общую конгруэнцию $(\mathbf{Z})$, сопряжённую сети O.

Всякая конгруэнция, параллельная конгруэнции $(\mathbf{Z})$, допускает сопряжённые сети, параллельные исходной сети O, а так как соответствующие касательные параллельных сетей параллельны, то сопряжённая сеть новой конгруэнции $(\mathbf{Z})$ — тоже сеть O.

Допустим, что эта параллельная сеть принадлежит связке, т. е. все лучи проходят через одну точку O. Тогда вектор $\mathbf{Z}$, который определяет направление луча, можно выбрать равным радиусу-вектору той точки луча, которая описывает новую сеть O.

По свойству сети O уравнению Лапласа

$$\mathbf{Z}_{uv}=a\mathbf{Z}_u+b\mathbf{Z}_v$$

удовлетворяют не только n координат радиуса-вектора $Z^1, Z^2, \ldots, Z^n$, но и сумма их квадратов

$$\theta=(Z^1)^2+(Z^2)^2+\ldots+(Z^n)^2$$

и, конечно, любое постоянное, например 1, ибо уравнение Лапласа для неоднородных координат общей точки сети не содержит самой неизвестной функции.

Мы, следовательно, можем дополнить n координат $Z^i\ (i=1, 2, \ldots, n)$ ещё двумя решениями того же уравнения Лапласа

$$Z^{n+1}=\frac{\theta-1}{2},\qquad Z^{n+2}=\frac{\theta+1}{2i},\qquad i=\sqrt{-1}.$$

Поскольку сумма квадратов координат равна нулю

$$(\mathbf{Z}^*)^2=(Z^1)^2+\ldots+(Z^n)^2+(Z^{n+1})^2+(Z^{n+2})^2=$$
$$=\theta+\frac{(\theta-1)^2}{4}-\frac{(\theta+1)^2}{4}=0,$$

то конгруэнция $(\mathbf{Z}^*)$ с координатами $Z^\alpha\ (\alpha=1,\ 2, \ldots,\ n,\ n+1,\ n+2)$ — изотропная. Это — конгруэнция в пространстве $E_{n+2}\equiv E_{n+3-1}$, наша конгруэнция $(\mathbf{Z})$ является её проекцией на пространство E_n, следовательно, будет конгруэнцией $3I$.

Имеем теорему:

Конгруэнция, сопряжённая сети O, может быть только конгруэнцией I, если описана изотропной нормалью, конгруэнцией $2I$, если описана обыкновенной нормалью, или конгруэнцией $3I$.

Следствие. Поскольку сети pO суть проекции сети O из пространства E_{n+p-1} на E_n, то отсюда прямо следует, что *конгруэнции, сопряжённые сети pO, суть конгруэнции pI, $(p+1)I$, $(p+2)I$.*

172. Сети, сопряжённые конгруэнциям pI. *Сеть, сопряжённая конгруэнции I, есть сеть O.*

Действительно, если вектор направления луча конгруэнции $\mathbf{Z}$ удовлетворяет условию

$$(\mathbf{Z})^2=0,$$

и θ — какое-нибудь решение уравнения Лапласа для вектора $\mathbf{Z}$, то сеть, сопряжённая конгруэнции прямых, проходящих из начала координат параллельно вектору $\mathbf{Z}$, описывается точкой X с радиусом-вектором

$$X=\frac{\mathbf{Z}}{\theta}.$$

Поскольку

$$(X)^2=\frac{(\mathbf{Z})^2}{\theta^2}=0,$$

то

$$X\cdot X_u=0,\quad X\cdot X_v=0,$$

а так как в силу сопряжённости сети (X)

$$X_{uv}=aX_u+bX_v,$$

то и

$$X\cdot X_{uv}=0,$$

следовательно,

$$X_u\cdot X_v=0,$$

т. е. сеть (X) — ортогональная. То же самое имеет место для всех сетей, параллельных ей.

Всякая конгруэнция 2I допускает сопряжённые сети O.

Действительно, пусть конгруэнция $(\mathbf{Z})$ в пространстве E_n есть конгруэнция $2I$, т. е. является проекцией из пространства E_{n+1} конгруэнции $(\mathbf{Z}^*)$, которая является конгруэнцией I. Допустим, что первые n координат векторов $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Z}^*$ одинаковы и обозначим буквой $\theta = Z^{n+1}$ последнюю, дополнительную координату вектора.

Она удовлетворяет тому же уравнению Лапласа, что и $Z^i (i=1, \ldots, n)$ и по условию изотропности конгруэнции $(\mathbf{Z}^*)$ имеем:

$$(\mathbf{Z}^*)^2 = (\mathbf{Z})^2 + \theta^2 = 0. \tag{a}$$

Сопряжённая сеть, описанная точкой

$$X = \frac{\mathbf{Z}}{\theta}, \tag{b}$$

будет сетью O, ибо в силу соотношения (a)

$$(X)^2 = \frac{(\mathbf{Z})^2}{\theta^2} = -1,$$

значит,

$$X \cdot X_u = 0, \quad X \cdot X_v = 0, \quad X \cdot X_{uv} = 0 \tag{c}$$

и

$$X_u \cdot X_v = 0.$$

Так как вектор X параллелен вектору направления луча $\mathbf{Z}$, то первые два уравнения (c) прямо показывают, что *конгруэнция 2I, сопряжённая сети O, ортогональна к ней.*

Если θ — произвольное решение уравнения Лапласа для $\mathbf{Z}$, то сеть (b) будет сетью $2O$, именно: она будет проекцией на E_n сети (X^*) пространства E_{n+1}, где

$$X^* = \frac{\mathbf{Z}^*}{\theta},$$

ибо по условию

$$(\mathbf{Z}^*)^2 = 0 \quad \text{и} \quad (X^*)^2 = \frac{(\mathbf{Z}^*)^2}{\theta^2} = 0,$$

откуда опять получим:

$$X_u^* \cdot X_v^* = 0.$$

Имеем теорему:

Сети, сопряжённые конгруэнции 2I, могут быть только сетями O или сетями 2O.

В общем случае *сети, сопряжённые конгруэнции pI, являются по крайней мере сетями pO*. Действительно, сеть

$$X = \frac{\mathbf{Z}}{\theta},$$

где θ — произвольное решение уравнения Лапласа для $\mathbf{Z}$, есть сеть pO, ибо её можно рассматривать как проекцию из E_{n+p-1} сети O, описываемой точкой

$$X^* = \frac{\mathbf{Z}^*}{\theta}.$$

Если же принять θ равным последней координате — вектора $\mathbf{Z}^*$:

$$\theta = Z^{n+p-1},$$

то уже проекция (X_1^*) сети (X^*) на пространство E_{n+p-2} (на гиперплоскость $x^{n+p-1}=0$) будет сетью O, ибо в силу изотропности конгруэнции $(\mathbf{Z}^*)$ имеем:

$$(Z^1)^2 + (Z^2)^2 + \ldots + (Z^{n+p-2})^2 + \theta^2 = 0.$$

Значит,

$$(X_1^*)^2 + 1 = 0,$$

откуда

$$X_1^* \cdot \frac{\partial X_1^*}{\partial u} = 0, \quad X_1^* \cdot \frac{\partial X_1^*}{\partial v} = 0, \quad X_1^* \cdot \frac{\partial^2 X_1^*}{\partial u\, \partial v} = 0,$$

и

$$\frac{\partial X_1^*}{\partial u} \cdot \frac{\partial X_1^*}{\partial v} = 0,$$

т. е. конгруэнции pI допускают сопряжённые сети $(p-1)\,O$.

IV. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ В E_3 С НОРМАЛЬНЫМИ ЧЕРЕЗ ОДНУ КОНГРУЭНЦИЯМИ

173. Конгруэнции pO в трёхмерном пространстве. В трёхмерном пространстве E_3 нормальная конгруэнция (конгруэнция нормалей к поверхности) всегда сопряжена сети линий кривизны, т. е. сети O. Такую конгруэнцию можно назвать конгруэнцией O. Так как конгруэнция $2I$ всегда допускает сопряжённые ортогональные к ней сети O, то *конгруэнция 2I в пространстве E_3 является конгруэнцией O*. Обратно, сеть O, сопряжённая конгруэнции O, ортогональна к ней.

Введём определение: в трёхмерном пространстве *конгруэнции $(p+1)\,I$ будем называть конгруэнциями pO.*

Оправданием такого определения может служить теорема:

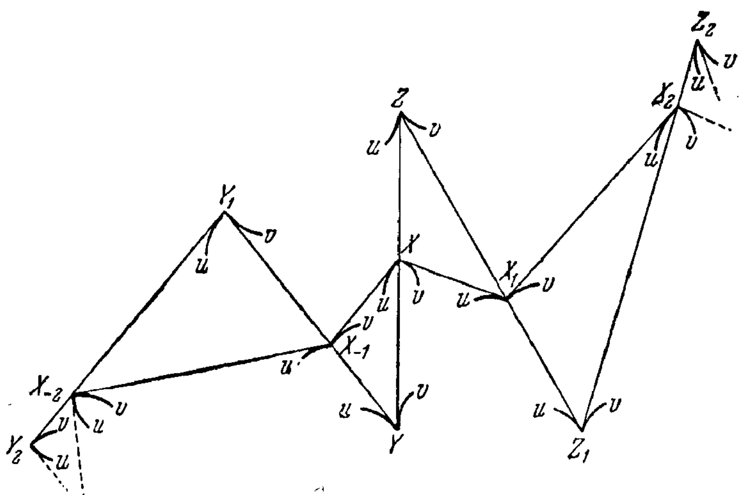
Конгруэнция, ортогональная к сети pO, есть конгруэнция pO и наоборот.

Так как для $p=1$ теорема уже доказана, то достаточно доказать справедливость её для сетей и конгруэнций $(p+1)\,O$, если она верна для сетей и конгруэнций pO.

Если сеть (X) есть сеть $(p+1)\,O$, то в пространстве E_{3+p} найдётся сеть (X^*), которая будет сетью O и будет иметь своей проекцией на E_3 сеть (X). По теореме предыдущего параграфа в E_{3+p} найдётся конгруэнция $(\mathbf{Z}^*)$, сопряжённая сети (X^*), которая будет конгруэнцией I. Значит, её проекция на E_3, конгруэнция $(\mathbf{Z})$, будет конгруэнцией $(p+1)\,I$, т. е. конгруэнцией pO. Сеть (X_1), ортогональная к конгруэнции $(\mathbf{Z})$, должна быть сетью pO, ибо для сетей и конгруэнций pO теорема по условию верна. Среди конгруэнций, сопряжённых к сети (X_1), найдётся конгруэнция $(\mathbf{Z}_1)$, которая будет ортогональна к сети (X).

Мы видели в предыдущем параграфе, что конгруэнция, сопряжённая сети pO является конгруэнцией pI, $(p+1)\,I$ или $(p+2)\,I$. Согласно определению конгруэнции pO в трёхмерном пространстве конгруэнция $(\mathbf{Z})$ может быть только конгруэнцией $(p-1)\,O$, pO или $(p+1)\,O$, но если бы конгруэнция $(\mathbf{Z})$ была конгруэнцией pO или $(p-1)\,O$, то поскольку теорема считается доказанной для сетей pO и тем более $(p-1)\,O$, сеть (X), ортогональная конгруэнции $(\mathbf{Z})$, не могла бы быть сетью $(p+1)\,O$. Следовательно, теорема верна и для сетей $(p+1)\,O$.

174. Последовательность Лапласа, порождаемая нормальной конгруэнцией. Пусть конгруэнция $(\mathbf{Z})$ с фокусами Y, Z есть кон-



Черт. 12.

груэнция нормалей поверхности (X) (черт. 12). Так как она сопряжена сети линий кривизны (X), то последовательность Лапласа

$$\ldots Y_2,\ Y_1,\ Y,\ Z,\ Z_1,\ Z_2 \ldots$$

описана около последовательности, порождённой сетью линий кривизны

$$\ldots X_{-2},\ X_{-1},\ X,\ X_1,\ X_2 \ldots$$

так, что прямые Y_2Y_1, Z_1Z_2 проходят через точки X_{-2}, X_2.

Заметим, что Y есть центр нормальной кривизны для касательной XX_1 поверхности (X), а плоскость XX_1X_2 есть касательная

плоскость к поверхности (X_1) в точке X_1 и как фокальная плоскость конгруэнции (XX_v) является соприкасающейся плоскостью ребра возврата в фокусе X, т. е. линии v на поверхности X. С другой стороны, по закону ортогональности в E_3, поскольку конгруэнция (YZ) ортогональна сети (X), фокальная конгруэнция (XX_1) сети ортогональна фокальной сети (Y) нашей конгруэнции, фокальная конгруэнция (YY_1) сети (Y) ортогональна фокальной сети (X_1). конгруэнции (XX_1) и т. д.

Значит, прямая YY_1 проходит через центр нормальной кривизны Y кривой v на поверхности (X) перпендикулярно к соприкасающейся плоскости этой кривой, т. е. прямая YY_1 является осью кривизны для этой кривой. При изменении переменной v ось кривизны YY_1 описывает развёртывающуюся поверхность, и фокус Y_1 является точкой прикосновения оси кривизны к ребру возврата, а так как ребро возврата оси кривизны описывается центром соприкасающейся сферы, то первое преобразование Лапласа в сторону u фокуса Y, т. е. точка Y_1 есть центр соприкасающейся сферы линии v сети (X), а Z_1 — центр соприкасающейся сферы линии u сети (X).

175. Последовательность с тремя нормальными через одну конгруэнциями. Допустим теперь, что последовательность Лапласа, порождаемая сетью линий кривизны (X) содержит ещё одну ортогональную сеть, именно: допустим, что сеть $(X') \equiv (X_2)$ есть сеть линий кривизны. Конгруэнция нормалей $(\mathbf{Z}')$ поверхности $(X') \equiv (X_2)$ породит вторую последовательность Лапласа

$$\ldots Y_2',\ Y_1',\ Y',\ Z',\ Z_1',\ Z_2',\ \ldots,$$

описанную около последовательности, порождённой сетью $(X') \equiv (X_2)$. Мы получим две таблицы ортогональных сетей и сопряжённых сетей конгруэнциям первой и второй последовательности.

Конгруэнции . . .	Y_2Y_1	Y_1Y	YZ	ZZ_1	Z_1Z_2	...
Ортогональные сети	X_2	X_1	X	X_{-1}	X_{-2}	...
Сопряжённые сети .	X_{-2}	X_{-1}	X	X_1	X_2	...
Конгруэнции . . .	$Y_2'Y_1'$	$Y_1'Y'$	$Y'Z'$	$Z'Z_1'$	$Z_1'Z_2'$	...
Ортогональные сети	$X_2' \equiv X_4$	$X_1' \equiv X_3$	$X' \equiv X_2$	$X_{-1}' \equiv X_1$	$X_{-2}' \equiv X$	...
Сопряжённые сети .	$X_{-2}' \equiv X$	$X_{-1}' \equiv X_1$	$X' \equiv X_2$	$X_1' \equiv X_3$	$X_2' \equiv X_4$	...

В каждой таблице первая строка содержит конгруэнции первой или второй последовательности, вторая строка содержит сети, ортогональные конгруэнции соответствующего столбца, а третья — сети, сопряжённые ей. Поскольку все сети и конгруэнции соответствуют развёртывающимся поверхностям, то сети, сопряжённые конгруэнции, замечательны только тем, что луч конгруэнции проходит через соответствующую точку сети.

Мы видим, что конгруэнция (Y_2Y_1) ортогональна сети $(X_2)\equiv(X')$, но эта сеть сейчас — сеть O. Значит, конгруэнция (Y_2Y_1) есть конгруэнция O. Поскольку сеть (X_{-2}) ей сопряжена, то она может быть или сетью O или сетью $2O$. В общем случае надо её считать сетью $2O$. Таким образом, получим, что сети (X_{-2}), (X_4) суть сети $2O$, сети (X_{-4}), (X_6) — сети $3O$ и т. д.

Допустим теперь, что сеть (X_{-2}) не $2O$, как мы предположили в общем случае, а тоже сеть O, т. е. допустим, что последовательность Лапласа содержит через одну три сети линий кривизны (X_{-2}), (X) и (X_2). Тогда ортогональная к сети (X_2) конгруэнция (Y_2Y_1) будет конгруэнцией O; она сопряжена ортогональной сети (X_{-2}), следовательно, ортогональна к ней, т. е. является конгруэнцией нормалей поверхности (X_{-2}).

Аналогично, конгруэнция (Z_1Z_2), ортогональная к сети O [именно к сети (X_{-2})] и сопряжённая сети (X_2), которая сама есть сеть O, совпадает с конгруэнцией нормалей сети (X_2), т. е. с конгруэнцией $(Y'Z')$. Значит, последовательности Лапласа, порождённые конгруэнциями нормалей всех трёх сетей линий кривизны, совпадают:

$$Z_1Z_2\equiv Y'Z',\quad ZZ_1\equiv Y_1'Y',\quad YZ\equiv Y_2'Y_1'.$$

Так как конгруэнция (YZ) есть конгруэнция O, то сеть $(X_2')\equiv(X_4)$, ортогональная конгруэнции $(Y_2'Y_1')\equiv(YZ)$, — тоже сеть O.

Таким образом, шаг за шагом докажем, что все сети чётного ранга ортогональны, а конгруэнции их нормалей принадлежат одной описанной последовательности Лапласа.

Имеем теорему:

Если три последовательно расположенные сети чётного ранга одной последовательности Лапласа образованы линиями кривизны, то все сети чётного ранга обладают тем же свойством и все конгруэнции, образованные их нормалями, принадлежат одной описанной последовательности.

V. ПРОЕКТИВНЫЕ И МЕТРИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ КОНГРУЭНЦИИ В КООРДИНАТАХ ЛУЧА

176. Развёртывающиеся поверхности и центральные пучки луча конгруэнции. Обратимся теперь к построению метрического (и проективного) инварианта конгруэнции, заданной линейными координатами луча.

Пусть аналитическая прямая $\boldsymbol{a}$ задана как функция двух параметров u, v

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(u,\ v).$$

Любой луч дифференциальной окрестности луча конгруэнции

$$\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{a}(u+du,\ v+dv)$$

может быть представлен, если воспользоваться разложением в ряд Тейлора, в виде

$$\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{a}+(\mathfrak{a}_1\,du+\mathfrak{a}_2\,dv)+\\+\frac{1}{2}(\mathfrak{a}_{11}\,du^2+2\mathfrak{a}_{12}\,du\,dv+\mathfrak{a}_{22}\,dv^2)+\ldots,\tag{26}$$

где

$$\mathfrak{a}_1=\boldsymbol{a}_u,\quad \mathfrak{a}_2=\boldsymbol{a}_v,\quad \mathfrak{a}_{11}=\boldsymbol{a}_{uu},\quad \mathfrak{a}_{12}=\boldsymbol{a}_{uv},\quad \mathfrak{a}_{22}=\boldsymbol{a}_{vv}\tag{27}$$

являются линейными комплексами, ибо не удовлетворяют плюккерову уравнению

$$\{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}\}=0.\tag{28}$$

Они подчиняются условиям сопряжённости, которые легко получаются, если в уравнение (28) внести луч $\boldsymbol{a}'$ в виде разложения (26) и сравнить с нулём коэффициенты при степенях дифференциалов du, dv

$$\{\boldsymbol{a}\mathfrak{a}_1\}=0,\quad \{\boldsymbol{a}\mathfrak{a}_2\}=0,\tag{28a}$$

$$\{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1\}+\{\boldsymbol{a}\mathfrak{a}_{11}\}=0,\ \{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\}+\{\boldsymbol{a}\mathfrak{a}_{12}\}=0,\ \{\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_2\}+\{\boldsymbol{a}\mathfrak{a}_{22}\}=0.\tag{28b}$$

Лучи из дифференциальной окрестности $(\boldsymbol{a})$ пересекают луч $\boldsymbol{a}$, если прямые $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}'$ удовлетворяют плюккерову условию

$$\{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}'\}=0.$$

Внося сюда разложение (26), заметим, что в силу соотношений (28), (28a) член, свободный от дифференциалов du, dv, и члены с первыми степенями пропадают. Члены второй степени дают квадратное уравнение, которое в силу (28b) можно написать в виде

$$\{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1\}\,du^2+2\,\{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\}\,du\,dv+\{\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_2\}\,dv^2=0.\tag{29}$$

Это уравнение определяет развёртывающиеся поверхности конгруэнции.

Если сюда внести

$$du=\alpha\,dv,$$

то квадратное уравнение

$$\{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1\}\,\alpha^2+2\,\{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\}\,\alpha+\{\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_2\}=0\tag{29'}$$

определит два корня α_1, α_2 так, что комплексы

$$\mathfrak{a}_1\alpha_i+\mathfrak{a}_2\qquad i=1,\ 2$$

будут особыми и пучок прямых

$$\lambda \boldsymbol{a} + \mathfrak{a}_1 \alpha_i + \mathfrak{a}_2$$

при произвольном параметре λ будет содержать луч

$$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a} + (\mathfrak{a}_1 \alpha_i + \mathfrak{a}_2)\, dv$$

из дифференциальной окрестности луча $\boldsymbol{a}$, который пересекает этот луч. Центр этого пучка F_i есть *фокус* луча $\boldsymbol{a}$, а его плоскость φ_i — *фокальная плоскость*, которая касается фокальной поверхности во втором фокусе луча.

Пучки (F_i, φ_i) называются *центральными пучками* луча.

177. Касательные и сопровождающие линейные комплексы конгруэнции. Линейный комплекс $\mathfrak{e}$ называется *касательным*, если он содержит всю дифференциальную окрестность первого порядка

$$\{\mathfrak{e}, \boldsymbol{a} + \mathfrak{a}_1\, du + \mathfrak{a}_2\, dv\} = 0.$$

Отсюда следуют три уравнения

$$\{\mathfrak{e}\boldsymbol{a}\} = 0, \quad \{\mathfrak{e}\mathfrak{a}_1\} = 0, \quad \{\mathfrak{e}\mathfrak{a}_2\} = 0. \tag{30}$$

Они показывают, что касательный комплекс должен быть в инволюции (см. гл. VII, § 146) с комплексами $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$. Так как линейный комплекс содержит пять существенных произвольных параметров, то уравнения (30) определяют связку линейных комплексов. Пересечение трёх независимых комплексов связки определяет семейство образующих поверхности 2-го порядка (демиквадрику). Здесь это семейство вырождается в два центральных пучка: легко видеть, что из уравнений (30) следует

$$\{\mathfrak{e}, \lambda \boldsymbol{a} + \mathfrak{a}_1 \alpha_i + \mathfrak{a}_2\} = 0;$$

значит, любой касательный комплекс содержит оба центральных пучка (F_i, φ_i).

Сопровождающим комплексом конгруэнции для фокуса F_i называется тот касательный комплекс конгруэнции, который содержит не только пучок (F_i, φ_i), но и его дифференциальную окрестность первого порядка.

Пользуясь обозначениями (27), мы запишем эту дифференциальную окрестность в виде:

$$\lambda \boldsymbol{a} + \mathfrak{a}_1 \alpha_i + \mathfrak{a}_2 + \left(\lambda \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_1 \frac{\partial \alpha_i}{\partial u} + \mathfrak{a}_{11}\alpha + \mathfrak{a}_{12}\right) du +$$
$$+ \left(\lambda \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_1 \frac{\partial \alpha_i}{\partial v} + \mathfrak{a}_{12}\alpha_i + \mathfrak{a}_{22}\right) dv. \tag{31}$$

При произвольных λ, du и dv линейный комплекс $\mathfrak{b}^i$ содержит все эти лучи, если он удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &\{\mathfrak{b}^i \boldsymbol{a}\} = 0, \ \{\mathfrak{b}^i \mathfrak{a}_1\} = 0, \ \{\mathfrak{b}^i \mathfrak{a}_2\} = 0, \\ &\{\mathfrak{b}^i, \mathfrak{a}_{11}\alpha_i + \mathfrak{a}_{12}\} = 0, \ \{\mathfrak{b}^i, \mathfrak{a}_{12}\alpha_i + \mathfrak{a}_{22}\} = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Пять линейных уравнений (32) определяют координаты комплекса $\mathfrak{b}^i$ до общего множителя, если только комплексы $\boldsymbol{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_{11}\alpha_i + \mathfrak{a}_{12}$, $\mathfrak{a}_{12}\alpha_i + \mathfrak{a}_{22}$ линейно независимы. Следовательно, два сопровождающих комплекса конгруэнции вполне определены.

178. Конгруэнция W. Два комплекса $\mathfrak{b}^1$, $\mathfrak{b}^2$ совпадут, если из семи комплексов

$$\boldsymbol{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_{11}\alpha_1 + \mathfrak{a}_{12}, \mathfrak{a}_{12}\alpha_1 + \mathfrak{a}_{22}, \mathfrak{a}_{11}\alpha_2 + \mathfrak{a}_{21}, \mathfrak{a}_{12}\alpha_2 + \mathfrak{a}_{22} \tag{a}$$

два последних линейно зависят от предыдущих. Это имеет место, если $\alpha_1 = \alpha_2$, т. е. если развёртывающиеся поверхности совпадают. Оставляя в стороне параболические конгруэнции, мы видим, что семь комплексов (a) всегда принадлежат подкольцу с базисом

$$\boldsymbol{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{12}, \mathfrak{a}_{22}. \tag{b}$$

Для того чтобы они допускали общий линейный комплекс в инволюции, который тем самым будет удовлетворять условиям (32) для обоих значений $i = 1$ и 2, необходимо и достаточно, чтобы шесть комплексов (b) допускали линейную зависимость. Если иметь в виду обозначения (27), то можно заключить, что *линейные координаты луча будут удовлетворять линейному однородному уравнению в частных производных* 2-го *порядка*. С другой стороны, общий линейный комплекс в инволюции с шестью комплексами (b) не только будет сопровождающим комплексом $\mathfrak{b}^1$ и $\mathfrak{b}^2$ одновременно, которые тем самым должны совпадать, но и будет содержать все лучи дифференциальной окрестности 2-го порядка, определяемой уравнением (31); он будет, следовательно, *соприкасающимся комплексом конгруэнции*, а *конгруэнция будет конгруэнцией* W.

Этот результат непосредственно следует из теоремы § 149 гл. VII. Сейчас мы приведём следующие геометрические соображения.

По определению, сопровождающий комплекс $\mathfrak{b}^1$ содержит весь пучок центральных линий (F_1, φ_1), а также пучки его дифференциальной окрестности 1-го порядка. Следовательно, точке F_1 первой фокальной поверхности в нулевой системе комплекса $\mathfrak{b}^1$ соответствует плоскость φ_1, т. е. касательная плоскость второй фокальной поверхности.

Рассмотрим какую-нибудь касательную t_1 первой фокальной поверхности. Она содержит фокус F_1 и фокус дифференциально близкий F_1', т. е. фокус

$$F_1' = F_1 + dF_1,$$

где dF_1 есть дифференциал аналитической точки F_1 в направлении касательной t_1. В нулевой системе комплекса $\mathfrak{b}^1$ точкам F_1, F_1' соответствуют плоскости φ_1 и $\varphi_1' = \varphi_1 + d\varphi_1$ — касательные плоскости второй поверхности в фокусах F_2 и $F_2' = F_2 + dF_2$. Следовательно, по определению полярного соответствия линейного комплекса $\mathfrak{b}^1$, прямая $t_1 = F_1F_1'$ сопряжена прямой $\tau_2 = (\varphi_1, \varphi_1')$, т. е. линии пересечения дифференциально близких касательных плоскостей второй фокальной поверхности при перемещении точки касания из F_2 в F_2'.

Аналогично, касательная $t_2 = F_2F_2'$ в нулевой системе комплекса $\mathfrak{b}^2$ сопряжена прямой $\tau_1 = (\varphi_2, \varphi_2')$ пересечения дифференциально близких плоскостей, касательных к первой фокальной поверхности в точках F_1 и F_1'.

Прямая τ_2, очевидно, сопряжена прямой t_2 относительно индикатрисы Дюпена второй фокальной поверхности, ибо касательная τ_2 есть характеристика касательной плоскости φ_1 при движении точки касания F_2 в направлении касательной τ_2. Точно так же касательные τ_1 и t_1 сопряжены на первой фокальной поверхности (F_1).

Допустим теперь, что оба комплекса $\mathfrak{b}^1$ и $\mathfrak{b}^2$ совпадают; примем за линию t_1 асимптотическую касательную поверхности (F_1) так, что t_1 совпадает с τ_1; сопряжённые им прямые (одновременно в нулевой системе $\mathfrak{b}^1$ и $\mathfrak{b}^2$) должны тоже совпасть; следовательно, $t_2 \equiv \tau_2$ будет служить асимптотической касательной второй фокальной поверхности. Так как касательные t_1 и t_2 описываются фокусами F_1 и F_2 при одном и том же движении луча a, то асимптотические линии на фокальных поверхностях соответствуют друг другу и конгруэнция принадлежит к классу конгруэнций W.

Отсюда т е о р е м а:

Конгруэнция W, и только конгруэнция W, обладает соприкасающимся линейным комплексом.

179. Проективный инвариант конгруэнции. Два сопровождающие комплекса $\mathfrak{b}^1$ и $\mathfrak{b}^2$ конгруэнции, внутренне связанные с ней, позволяют построить простейший инвариант конгруэнции.

Заметим прежде всего, что произведения

$$\{\mathfrak{b}^1\mathfrak{b}^1\}, \quad \{\mathfrak{b}^1\mathfrak{b}^2\}, \quad \{\mathfrak{b}^2\mathfrak{b}^2\} \tag{33}$$

уже являются относительными инвариантами, именно:

1. Проективное преобразование пространства умножает определитель, из которого получается форма Плюккера (3) § 144 на один и тот же определитель подстановки.

2. Если определять координаты комплексов $\mathfrak{b}^i$ из уравнений (32) определителями 5-го порядка матрицы, составленной из координат пяти линейных комплексов, стоящих множителями грассманова внешнего произведения

$$\mathfrak{b}^i = \{\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_{11}\alpha_i + \mathfrak{a}_{12}, \mathfrak{a}_{12}\alpha_i + \mathfrak{a}_{22}\}, \tag{34}$$

то умножение луча a на скаляр ρ умножает комплекс $\mathfrak{b}^i$ на ρ^5, а каждое произведение (33) на ρ^{10}.

3. Замена криволинейных координат u, v не меняет сопровождающих комплексов $\mathfrak{b}^i$, ибо они определены внутренним образом как линейные комплексы, содержащие два центральных пучка прямых линий и все пучки их дифференциальной окрестности первого порядка. Аналитическая точка пятимерного пространства $\mathfrak{b}^i$, определяемая формулой (34), может менять нормирование (умножаться на скаляр), но это не изменит отношения произведений (33).

Таким образом, отношение любых двух произведений (33) является абсолютным инвариантом.

Чтобы получить простое геометрическое истолкование, мы выберем инвариант

$$J = \frac{\{\mathfrak{b}^1\mathfrak{b}^2\}^2 - \{\mathfrak{b}^1\mathfrak{b}^1\}\{\mathfrak{b}^2\mathfrak{b}^2\}}{\{\mathfrak{b}^1\mathfrak{b}^2\}^2}. \tag{35}$$

В следующей главе мы увидим, что это — единственный независимый инвариант дифференциальной окрестности второго порядка.

Для конгруэнции W сопровождающие комплексы совпадают

$$\mathfrak{b}^1 \equiv \mathfrak{b}^2,$$

и инвариант J равен нулю.

180. Геометрический смысл инварианта J в проективном пространстве. Для каждого луча конгруэнции, следовательно, в каждой паре соответствующих точек двух фокальных поверхностей мы имеем три пары инвариантно связанных с конгруэнцией замечательных направлений: одну пару составляют направления, соответствующие развёртывающимся поверхностям конгруэнции (фокальная сеть); две пары определяются асимптотическими линиями первой и второй фокальной поверхности.

Каждая пара асимптотических направлений гармонически разделяет направления линий фокальной сети (ибо она сопряжена и на первой, и на второй фокальной поверхности). Следовательно, для того чтобы определить расположение асимптотических направлений обеих фокальных поверхностей, достаточно дать только одно из двух асимптотических направлений каждой поверхности, например те два направления, которые проходят внутри одного угла фокальной сети.

Четыре направления: два направления фокальной сети и два выбранных асимптотических направления — определяют сложное отношение, квадрат которого мы и можем принять за инвариант конгруэнции.

Легко увидеть, что он не зависит от того, какие асимптотические направления мы взяли или на какой фокальной поверхности берём сложное отношение касательных. Впрочем, после подсчёта инварианта это станет очевидным.

Прежде всего нам надо составить уравнения асимптотических линий на первой и второй фокальных поверхностях или, поскольку мы всё

22 Зак. 1038. С. П. Фиников.

время рассматриваем конгруэнцию в пространстве прямых, уравнение линейчатых поверхностей конгруэнции, секущих фокальные поверхности по их асимптотическим.

Для этого можно применить следующий приём.

181. Построение асимптотических касательных фокальной поверхности. Возьмём в пространстве произвольную неподвижную плоскость E; каждому лучу $\boldsymbol{a}$ конгруэнции поставим в соответствие его точку пересечения A с плоскостью E; параметры u, v луча $\boldsymbol{a}$, очевидно, можно рассматривать как криволинейные координаты точки A в плоскости E.

Каждая неподвижная прямая $\boldsymbol{x}$ выделяет из конгруэнции линейчатую поверхность $(\boldsymbol{x})$ как геометрическое место лучей конгруэнции $\boldsymbol{a}'$, пересекающих эту прямую. Чтобы получить уравнение этой линейчатой поверхности, достаточно внести в плюккерово условие пересечения прямых

$$\{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{x}\}=0$$

разложение (26) луча $\boldsymbol{a}'$ по степеням приращений du, dv. Мы получим уравнение

$$\{\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}\}+\{\mathfrak{a}_1\boldsymbol{x}\}\,du+\{\mathfrak{a}_2\boldsymbol{x}\}\,dv+$$
$$+\frac{1}{2}[\{\mathfrak{a}_{11}\boldsymbol{x}\}\,du^2+2\,\{\mathfrak{a}_{12}\boldsymbol{x}\}\,du\,dv+\{\mathfrak{a}_{22}\boldsymbol{x}\}\,dv^2]+\ldots=0. \quad (36)$$

Это уравнение определяет координаты $u+du$, $v+dv$ точки A', где луч $\boldsymbol{a}'$ пересекает плоскость E, или, лучше, геометрическое место точек A', т. е. линию (A') пересечения плоскостью E линейчатой поверхности $(\boldsymbol{a}')$ из тех лучей конгруэнции, которые инцидентны (пересекают) выбранную прямую $\boldsymbol{x}$.

Здесь $\boldsymbol{a}$ — любой луч конгруэнции. Если он принадлежит линейчатой поверхности $(\boldsymbol{a}')$, т. е. пересекает прямую $\boldsymbol{x}$, то уравнение (36) допускает решение $du=dv=0$ и линия (A') проходит через точку A, изображающую на плоскости E луч $\boldsymbol{a}$. Уравнение

$$\{\mathfrak{a}_1\boldsymbol{x}\}\,du+\{\mathfrak{a}_2\boldsymbol{x}\}\,dv=0$$

определяет отношение дифференциалов $du:dv$, которое соответствует касательной к кривой (A') в точке A.

Если одновременно

$$\{\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}\}=0,\quad \{\mathfrak{a}_1\boldsymbol{x}\}=0,\quad \{\mathfrak{a}_2\boldsymbol{x}\}=0, \quad (37)$$

то левая часть уравнения (36) будет начинаться с членов 2-го порядка относительно du, dv и точка A будет особой точкой кривой (A').

Если луч конгруэнции $\boldsymbol{a}$ задан, то три уравнения (37) определяют семейство прямых $\boldsymbol{x}$, принадлежащих одновременно трём линейным комплексам $\boldsymbol{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, т. е. одну систему образующих поверхности 2-го порядка (демиквадрику). Нетрудно, однако, заметить, что система прямых (37) (демиквадрика) распадается на два пучка прямых (F_1, φ_2), (F_2, φ_1).

Действительно, система уравнений (37) совпадает с системой уравнений (30), если прямую $\boldsymbol{x}$ заменить комплексом $\mathfrak{c}$.

Система (30) определяла все касательные комплексы конгруэнции. Координаты комплекса $\mathfrak{c}$ определяют прямую $\boldsymbol{x}$, если комплекс будет особым. Так как эти особые комплексы, удовлетворяя системе (30), принадлежат связке касательных комплексов, то их оси должны пересекать все образующие системы прямых (демиквадрики), принадлежащей всем касательным комплексам. Эта система прямых, как мы видели, распадалась на два центральных пучка (F_i, φ_i). Прямые, пересекающие её образующие, составляют дополнительную систему, т. е. второе семейство образующих поверхности 2-го порядка. Теперь эта дополнительная система тоже распадается на два пучка: (F_1, φ_2), (F_2, φ_1); прямые первого пучка проходят через фокус F_1, значит, пересекают все лучи пучка (F_1, φ_1) в его центре; вместе с тем они лежат в плоскости φ_2, т. е. в плоскости второго центрального пучка (F_2, φ_2) и тем самым пересекаются со всеми прямыми второго пучка; аналогично для пучка (F_2, φ_1).

Допустим теперь, что прямая $\boldsymbol{x}$ действительно принадлежит одному из этих пучков, т. е. проходит через один из фокусов F и лежит в касательной плоскости той же самой фокальной поверхности (F); тогда она будет касаться одной из фокальных поверхностей в фокусе луча $\boldsymbol{a}$. Уравнения (37) будут иметь место и кривая (A') будет иметь точку A двойной точкой.

Направления касательных в этой двойной точке определяются отношением $du:dv$ из уравнения

$$\{\mathfrak{a}_{11}\boldsymbol{x}\}\,du^2+2\,\{\mathfrak{a}_{12}\boldsymbol{x}\}\,du\,dv+\{\mathfrak{a}_{22}\boldsymbol{x}\}\,dv^2=0. \quad (38)$$

Получаемые, таким образом, два направления $du:dv$ соответствуют:

1) движению фокуса F по направлению прямой $\boldsymbol{x}$, которая, как мы видели, касается поверхности (F); луч $\boldsymbol{a}'$ при этом движении будет пересекать прямую $\boldsymbol{x}$ и, следовательно, будет чертить на плоскости E одну из тех двух ветвей кривой (A'), которые проходят через точку A;

2) движению фокуса F по направлению, сопряжённому касательной $\boldsymbol{x}$; при этом касательная плоскость вращается около прямой $\boldsymbol{x}$; следовательно, луч, касающийся фокальной поверхности в фокусе F, располагаясь в этой касательной плоскости, пересекает прямую $\boldsymbol{x}$ и чертит на плоскости E вторую ветвь кривой (A'), проходящую через точку A.

Обе касательные (38) совпадают, если прямая $\boldsymbol{x}$ на фокальной поверхности сама себе сопряжена, т. е. если $\boldsymbol{x}$ — асимптотическая касательная одной из фокальных поверхностей. Прямая $\boldsymbol{x}$ в этом случае удовлетворяет, кроме уравнений (37), ещё уравнению

$$\{\mathfrak{a}_{11}\boldsymbol{x}\}\{\mathfrak{a}_{22}\boldsymbol{x}\}-\{\mathfrak{a}_{12}\boldsymbol{x}\}^2=0. \quad (39)$$

Так как при этом корни уравнения (38) совпадают, то координаты прямой x и отношение дифференциалов $du:dv$ будут удовлетворять уравнениям, получаемым из квадратного уравнения (38) дифференцированием по переменному du или dv

$$\begin{aligned} \{\mathfrak{a}_{11}x\}\,du + \{\mathfrak{a}_{12}x\}\,dv = 0, \\ \{\mathfrak{a}_{12}x\}\,du + \{\mathfrak{a}_{22}x\}\,dv = 0, \end{aligned} \tag{39'}$$

ибо кратный корень многочлена обращает в нуль его производную.

Так как шесть координат прямой x удовлетворяют пяти однородным уравнениям (37), (39′), то они пропорциональны определителям 5-го порядка матрицы из координат пяти линейных комплексов, стоящих множителями в грассмановом внешнем произведении. Следовательно, можно написать равенство аналитических прямых, определяющее асимптотическую касательную фокальной поверхности, в виде

$$x = \rho\,(a\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{a}_{11}\,du + \mathfrak{a}_{12}\,dv,\ \mathfrak{a}_{12}\,du + \mathfrak{a}_{22}\,dv), \tag{40}$$

где ρ — несущественный скалярный множитель пропорциональности.

182. Вычисление инварианта J. Отнесём конгруэнцию к развёртывающимся поверхностям. Тогда уравнение (29) должно иметь решение $du = 0$, $dv = 0$, а следовательно, уравнение (29′) даёт $\alpha_2 = 0$, $\frac{1}{\alpha_1} = 0$ и сопровождающие комплексы $\mathfrak{b}^i$ по формуле (34) получатся в виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}^1 = (a\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{12}), \\ \mathfrak{b}^2 = (a\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{a}_{22}). \end{aligned}$$

Следовательно, выражение (40) можно переписать в виде

$$x = \rho\,[\mathfrak{b}^1\,du^2 + \mathfrak{b}^2\,dv^2 + (a\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{22})\,du\,dv], \tag{a}$$

ибо

$$(a\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{a}_{12}) = 0$$

как матрица с двумя равными столбцами.

Так как x — прямая, то она должна удовлетворять плюккерову уравнению

$$\{xx\} = 0. \tag{b}$$

Если проективным преобразованием пятимерного пространства привести уравнение гиперповерхности Q_4^2 к каноническому виду суммы квадратов, то уравнение (b) будет требовать, чтобы сумма квадратов определителей 5-го порядка матрицы (40) была равна нулю. Такая сумма квадратов, как известно, равна квадрату матрицы, т. е. определителю 5-го порядка, каждый элемент которого равен сумме произведений элементов одного столбца на соответствующие элементы другого столбца.

Тот же определитель останется и при любой другой форме квадратичного уравнения (b), только вместо суммы произведений надо писать плюккерово произведение комплексов, стоящих множителями в грассмановом внешнем произведении (40).

Теперь нетрудно заметить, что плюккерово произведение прямой x на комплекс $(a\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{22})$ равно нулю. Действительно, в первой строке определителя, получаемого при умножении этих двух матриц, должны стоять плюккеровы произведения

$$\{aa\},\quad \{a\mathfrak{a}_1\},\quad \{a\mathfrak{a}_2\},\quad \{a\mathfrak{a}_{11}\},\quad \{a\mathfrak{a}_{22}\}, \tag{c}$$

ибо первым множителем в грассмановом произведении (a), определяющем прямую x, стоит a.

Первые три произведения (c) равны нулю в силу уравнений (28), (28a). Что касается двух остальных, то, поскольку теперь конгруэнция отнесена к развёртывающимся поверхностям, крайние коэффициенты уравнения (29) равны нулю

$$\{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1\} = 0,\quad \{\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_2\} = 0,$$

а тогда в силу (28b) и остальные два произведения (c) обращаются в нуль.

Таким образом, внося в уравнение (b) выражение (a), нам придётся перемножать только первые два члена, и мы получим по сокращении на ρ^2 уравнение

$$\{\mathfrak{b}^1\mathfrak{b}^1\}\,du^4 + 2\,\{\mathfrak{b}^1\mathfrak{b}^2\}\,du^2\,dv^2 + \{\mathfrak{b}^2\mathfrak{b}^2\}\,dv^4 = 0. \tag{41}$$

Уравнение (41) определяет четыре семейства асимптотических линий — по два семейства на каждой фокальной поверхности.

Как и следовало ожидать, корни $du:dv$ этого уравнения попарно отличаются только знаком, ибо развёртывающиеся поверхности конгруэнции на каждой фокальной поверхности определяют сопряжённую систему. Следовательно, каждый корень $du^2:dv^2$ определяет два семейства асимптотических линий на одной из фокальных поверхностей.

Поскольку конгруэнция отнесена к развёртывающимся поверхностям, сложное отношение, о котором мы говорили в начале § 180, равняется простому отношению двух корней $\left(\frac{du}{dv}\right)$, $\left(\frac{\delta u}{\delta v}\right)$ уравнения (41). Действительно, если F есть аналитическая точка, определяющая один из фокусов, то точки

$$F_u,\ F_v,\ F_u\left(\frac{du}{dv}\right) + F_v,\ F_u\left(\frac{\delta u}{\delta v}\right) + F_v$$

лежат на пересечении прямой F_uF_v с касательными к фокальной сети $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$ и к асимптотическим первой и второй фокальной поверхности, проходящим в одном углу линий фокальной сети.

Квадрат сложного отношения этой четвёрки точек равен простому отношению

$$\delta = \left(\frac{du^2}{dv}\right)^2 : \left(\frac{\delta u}{\delta v}\right)^2.$$

Если обозначить дискриминант уравнения (41) буквой B

$$B = \{\mathfrak{b}^1\mathfrak{b}^2\}^2 - \{\mathfrak{b}^1\mathfrak{b}^1\}\{\mathfrak{b}^2\mathfrak{b}^2\},$$

то получим:

$$\delta = \frac{\{\mathfrak{b}^1\mathfrak{b}^2\} - \sqrt{B}}{\{\mathfrak{b}^1\mathfrak{b}^2\} + \sqrt{B}},$$

откуда абсолютный инвариант конгруэнции равен

$$J = \left(\frac{\delta - 1}{\delta + 1}\right)^2. \tag{42}$$

183. Геометрический смысл инварианта J в евклидовом пространстве. Обратимся к формулам §§ 34—36 гл. III. Вычисление инварианта δ проще всего можно совершить, если воспользоваться определением δ как квадрата сложного отношения касательных к линиям фокальной сети и касательных к тем асимптотическим линиям первой и второй фокальной поверхности, которые проходят внутри одного угла фокальной сети.

По формулам (15′) § 36 асимптотические на фокальных поверхностях определяются уравнениями

$$A(\tilde{\omega}_1)^2 - C(\tilde{\omega}_2)^2 = 0, \tag{a}$$

$$A'(\tilde{\omega}_1)^2 - C'(\tilde{\omega}_2)^2 = 0, \tag{b}$$

где

$$\tilde{\omega}_1 = 0, \quad \tilde{\omega}_2 = 0$$

определяют развёртывающиеся поверхности конгруэнции. Следовательно,

$$\delta = \left(\frac{\tilde{\omega}_1(d)}{\tilde{\omega}_2(d)} : \frac{\tilde{\omega}_1(\delta)}{\tilde{\omega}_2(\delta)}\right)^2,$$

где символы дифференцирования d и δ соответствуют асимптотическим первой (a) и второй (b) фокальной поверхности. Внося значения отношений $\tilde{\omega}_1 : \tilde{\omega}_2$ из уравнений (a) и (b), получим:

$$\delta = \frac{C}{A}\frac{C'}{A'},$$

или в силу формул (10) § 34 и (17′) § 36

$$\delta = \frac{1}{K_1 K_2 d^4}, \tag{43}$$

где K_1 и K_2 — гауссовы кривизны фокальных поверхностей, а d — расстояние между граничными точками луча.

Имеем **теорему**:

Произведение гауссовых кривизн фокальных поверхностей в двух фокусах луча на четвёртую степень расстояния между граничными точками его равно обратной величине сложного отношения луча.

Теоремы о произведении гауссовых кривизн фокальных поверхностей конгруэнций W и V представляют, очевидно, специальные случаи этой общей теоремы.

184. Литературяые указания. Метрическая теория сопряжённых сетей и конгруэнций в евклндовом пространстве E_n была построена Гишаром [4]. Кроме того, был опубликован в двух выпусках Memorial des sciences Math. [5] конспект его лекций. Кроме ортогональных и изотропных конгруэнций, он рассматрнвает циклические конгруэнции C, сопряжённые сети циклическнм конгруэнциям, налагающиеся сети и т. д. Теорема о последовательности Лапласа с ортогональиыми чётного ранга фокальными сетями дана Винченсини [9]. Теорема существования для них не доказана и в формулах этой теории не так легко доказывается.

Теорию конгруэнции в клейновских координатах луча построил Вэльш [3]; ему же принадлежит введение абсолютного инварианта и теорема о произведенни кривизи фокальных поверхностей. К теории инвариaнтов конгруэнции возвращался Демулен [4], а Мантре [1] связал её с теорией Картава [1].

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ИНВАРИАНТЫ И ИНВАРИАНТНЫЕ ФОРМЫ КОНГРУЭНЦИИ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ P_3

I. ГЛАВНЫЕ ФОРМЫ КОНГРУЭНЦИИ

185. Тетраэдр 1-го порядка. Чтобы определить конгруэнцию компонентами проективных перемещений тетраэдра, надо присоединить некоторый тетраэдр к каждому её лучу. Естественно совместить с лучом конгруэнции одно ребро тетраэдра, например ребро A_1A_2. Такой тетраэдр называется тетраэдром нулевого порядка.

Дифференциальные проективные перемещения тетраэдра (инфинитезимальные преобразования группы проективных преобразований пространства), которые соответствуют переходу от одного луча к другому (или даже переходу от одного тетраэдра, присоединённого к лучу, к другому, присоединённому к тому же лучу), можно определять уравнениями

$$d\boldsymbol{A}_i = \omega_i^k \boldsymbol{A}_k, \qquad i, k = 1, 2, 3, 4, \quad (1)$$

где ω_i^k — формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры

$$D\omega_i^k = [\omega_i^j \omega_j^k], \qquad i, j, k = 1, 2, 3, 4, \quad (2)$$

и $\boldsymbol{A}_i$ — аналитическая точка вершины тетраэдра A_i.

Дифференцируя аналитическую прямую $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$ луча конгруэнции A_1A_2, получим:

$$d(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2) = (d\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2) + (\boldsymbol{A}_1 d\boldsymbol{A}_2),$$

или, внося значения $d\boldsymbol{A}_i$ из уравнений (1),

$$d(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2) = (\omega_1^1 + \omega_2^2)[12] + \omega_2^3[13] + \omega_2^4[14] - \omega_1^3[23] + \omega_1^4[42], \quad (3)$$

где для краткости грассманово произведение вершин $(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_k)$ обозначено порядковыми номерами их, поставленными в квадратных скобках $[ik]$.

Если луч стоит на месте, то дифференциал $d(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$ будет пропорционален самой прямой $[12]$.

Действительно, поскольку все аналитические прямые одной геометрической прямой пропорциональны, то всякая аналитическая прямая $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$ ребра A_1A_2 может быть представлена формулой

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2) = \boldsymbol{p}\varphi(u^i), \quad (a)$$

где $\boldsymbol{p}$ — постоянная аналитическая прямая неподвижной прямой A_1A_2, $\varphi(u^i)$ — произвольная функция от криволинейных координат u^1, u^2. Отсюда имеем, если прямая A_1A_2 не перемещается и, следовательно, $\boldsymbol{p} = \text{const.}$,

$$d(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2) = \boldsymbol{p}\, d\varphi = (\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)\, d\ln\varphi \quad (b)$$

и обратно, из уравнения (b) простым интегрированием можно вернуться к уравнению (a).

Действительно, для каждой координаты q_{12}^α прямой $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$ имеем:

$$\frac{dq_{12}^\alpha}{q_{12}^\alpha} = d\ln\varphi, \text{ т. е. } \ln q_{12}^\alpha = \ln\varphi + \ln p^\alpha, \quad p^\alpha = \text{const.},$$

откуда

$$q_{12}^\alpha = p^\alpha\varphi \quad \text{и} \quad \boldsymbol{q}_{12} = (\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2) = \boldsymbol{p}\varphi.$$

Следовательно, при неподвижности луча четыре последних члена уравнения (3) пропадают, и мы имеем:

$$\omega_1^3 = 0, \quad \omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^3 = 0, \quad \omega_2^4 = 0. \quad (4)$$

Обратно, если уравнения (4) имеют место, то луч A_1A_2 неподвижен и дифференциалы криволинейных координат du, dv равны нулю. Следовательно, формы (4) содержат только дифференциалы главных параметров u, v и поэтому называются *главными*. Дифференциалы du, dv в свою очередь можно линейно выразить через формы (4). Так как мы имеем четыре главные формы (4), а базис системы содержит только две формы du, dv, то *между четырьмя формами* (4) *существует две линейные зависимости.*

Нетрудно непосредственно указать каноническую форму этих зависимостей, если воспользоваться элементарными сведениями о фокусах и фокальных плоскостях.

Будем предполагать, что луч конгруэнции имеет два действительных фокуса и, следовательно, две фокальные плоскости. Заметим, что случай мнимых фокусов не выйдет за рамки наших формул, если допустить комплексно сопряжённые вершины тетраэдра. По существу исключаются параболические лучи (случай совпадения фокусов).

При этих предположениях мы можем выбрать две вершины тетраэдра A_1 и A_2 в фокусах луча, а грани $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$ совместить с фокальными плоскостями. Такой тетраэдр называется *тетраэдром 1-го порядка.* Так как фокальные плоскости касаются фокальных поверхностей в фокусах, а дифференциальные перемещения текущей точки A_1 фокальной поверхности лежат в её касательной плоскости, то, принимая грань $A_1A_2A_3$ за касательную плоскость поверхности (A_1), мы заметим, что компонента дифференциала dA_1 по вершине A_4 и, соответственно, компонента дифференциала dA_2 по вершине A_3 будут равняться нулю:

$$\omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^3 = 0. \tag{5}$$

Такой вид принимают две линейные зависимости между формами (4), если перейти к тетраэдру 1-го порядка. Не равные нулю главные формы ω_1^3, ω_2^4, теперь линейно независимые, можно считать базисом подкольца форм, построенных на дифференциалах главных параметров (криволинейных координат луча u, v).

186. Главные и вторичные формы конгруэнции 2-го порядка. Дифференцируя уравнения (5) внешним образом, получим с помощью уравнений структуры (2) два квадратичных уравнения

$$[\omega_1^2\omega_2^4] + [\omega_1^3\omega_3^4] = 0, \quad [\omega_2^1\omega_1^3] + [\omega_2^4\omega_4^3]. \tag{6}$$

Развёртывая их в линейные уравнения с помощью леммы Картана, получим:

$$\begin{aligned} \omega_3^4 &= \alpha\omega_1^3 - \beta\omega_2^4, & \omega_2^1 &= \gamma'\omega_1^3 + \beta'\omega_2^4, \\ \omega_1^2 &= \beta\omega_1^3 + \gamma\omega_2^4, & \omega_4^3 &= -\beta'\omega_1^3 + \alpha'\omega_2^4. \end{aligned} \tag{7}$$

Так как при неподвижности луча, т. е. при условии $\omega_1^3 = 0$, $\omega_2^4 = 0$, все четыре формы ω_1^2, ω_2^1, ω_3^4, ω_4^3 обращаются в нуль, то они принадлежат к числу главных форм. Все остальные $16 - 8 = 8$ форм — *вторичные*, т. е. содержат дифференциалы вторичных параметров, которые определяют вариацию тетраэдра при неподвижном луче. Эти восемь вторичных форм состоят из четырёх форм ω_3^1, ω_4^2, ω_3^2, ω_4^1 и четырёх форм ω_i^i.

Формы ω_i^i (с одинаковыми указателями) *меняют нормирование вершин тетраэдра*. Действительно, допустим, что все компоненты ω_i^k равны нулю, кроме ω_1^1. Так как при этом внешний дифференциал $D\omega_1^1$ равен нулю (как квадратичная форма он может быть отличен от нуля только при наличии двух линейно независимых форм), то форма ω_1^1 есть полный дифференциал. Полагая $\omega_1^1 = d\ln\varphi$, получим:

$$dA_1 = A_1\,d\ln\varphi, \quad dA_k = 0, \qquad k = 2,\ 3,\ 4,$$

откуда

$$A_1 = A_1^0\,\varphi,$$

где A_1^0 — значение вершины A_1 при $\varphi = 1$. При изменении параметра φ точка A_1 будет менять нормирование.

Остальные четыре формы ω_3^1, ω_4^1, ω_3^2, ω_4^2 *при* $\omega_1^3 = 0$, $\omega_2^4 = 0$ *перемещают вершины* A_3, A_4 *в фокальных плоскостях*, соответственно $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$. Действительно, при наличии только одной формы $\omega_3^1 = d\tau$, отличной от нуля, уравнения (1) дают:

$$dA_1 = 0, \quad dA_3 = A_1 d\tau,$$

откуда

$$A_3 = A_1\tau + A_3^0,$$

где A_3^0 есть значение точки A_3 при $\tau = 0$. При изменении τ точка A_3 описывает прямую $A_1A_3^0$.

Так как точки A_3, A_4 по условию построения тетраэдра $\{A_i\}$ могут занимать произвольное положение каждая в своей фокальной плоскости, то вторичные формы π_3^1, π_4^1, π_3^2, π_4^2 (значения соответствующих форм ω_i^k при $\omega_1^3 = 0$, $\omega_2^4 = 0$) следует считать линейно независимыми.

187. Главные формы конгруэнции высших порядков. Дифференцируя внешним образом уравнения (7), получим:

$$\begin{aligned} \alpha[\Delta\alpha\omega_1^3] - [\Delta\beta\omega_2^4] &= 0, & \gamma'[\Delta\gamma'\omega_1^3] + [\Delta\beta'\omega_2^4] &= 0, \\ [\Delta\beta\omega_1^3] + \gamma[\Delta\gamma\omega_2^4] &= 0, & -[\Delta\beta'\omega_1^3] + \alpha'[\Delta\alpha'\omega_2^4] &= 0, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= d\ln\alpha + \omega_1^1 - 2\omega_3^3 + \omega_4^4, & \Delta\alpha' &= d\ln\alpha' + \omega_2^2 - 2\omega_4^4 + \omega_3^3, \\ \Delta\beta &= d\beta + \beta(\omega_2^2 - \omega_3^3) + \omega_3^2, & \Delta\beta' &= d\beta' + \beta'(\omega_1^1 - \omega_4^4) + \omega_4^1, \\ \Delta\gamma &= d\ln\gamma + 2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4, & \Delta\gamma' &= d\ln\gamma' + 2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3. \end{aligned} \tag{8'}$$

Развёртывая квадратичные уравнения (8) по лемме Картана, получим:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \alpha_1\omega_1^3 - \beta_1\omega_2^4, & \Delta\gamma' &= \gamma_1'\omega_1^3 + \beta_1'\omega_2^4, \\ \Delta\beta &= \alpha\beta_1\omega_1^3 + \gamma\beta_2\omega_2^4, & \Delta\beta' &= \gamma'\beta_1'\omega_1^3 + \alpha'\beta_2'\omega_2^4, \\ \Delta\gamma &= \beta_2\omega_1^3 + \gamma_2\omega_2^4, & \Delta\alpha' &= -\beta_2'\omega_1^3 + \alpha_2'\omega_2^4. \end{aligned} \tag{9}$$

Так как при $\omega_1^3 = 0$, $\omega_2^4 = 0$ все шесть форм (9) обращаются в нуль, то, следовательно, дифференциальная окрестность луча 3-го порядка обогащается шестью новыми главными формами $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, $\Delta\gamma$, $\Delta\alpha'$, $\Delta\beta'$, $\Delta\gamma'$.

Новое дифференцирование (внешним образом) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} &[\Delta\alpha_1\omega^3_1]-[\Delta\beta_1\omega^4_2]=0, && [\Delta\gamma'_1\omega^3_1]+[\Delta\beta'_1\omega^4_2]=0,\\ &\alpha[\Delta\beta_1\omega^3_1]+\gamma[\Delta\beta_2\omega^4_2]=0, && \gamma'[\Delta\beta'_1\omega^3_1]+\alpha'[\Delta\beta'_2\omega^4_2]=0,\\ &[\Delta\beta_2\omega^3_1]+[\Delta\gamma_2\omega^4_2]=0, && -[\Delta\beta'_2\omega^3_1]+[\Delta\alpha'_2\omega^4_2]=0, \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_1 &= d\alpha_1+\alpha_1(\omega^1_1-\omega^3_3)+3\omega^1_3+\{(\beta_2)^2-\beta\gamma'\}\,\omega^3_1+\\ &\qquad +(3\beta\beta'-3\alpha\alpha'-\gamma\gamma')\,\omega^4_2,\\ \Delta\beta_1 &= d\beta_1+\beta_1(\omega^2_2-\omega^4_4)+\omega^2_4+\\ &\qquad +\beta\beta'\omega^3_1-\{(\beta_1)^2+\beta\alpha'\}\,\omega^4_2,\\ \Delta\beta_2 &= d\beta_2+\beta_2(\omega^1_1-\omega^3_3)-\omega^1_3+\\ &\qquad +\{(\beta_2)^2-\beta\gamma'\}\,\omega^3_1-\beta\beta'\omega^4_2,\\ \Delta\gamma_2 &= d\gamma_2+\gamma_2(\omega^2_2-\omega^4_4)+3\omega^2_4+\\ &\qquad +(3\beta\beta'-\alpha\alpha'-3\gamma\gamma')\,\omega^3_1+\{(\beta_1)^2+\beta\alpha'\}\,\omega^4_2; \end{aligned} \tag{10'}$$

аналогичные формулы для $\Delta\alpha'_2$, $\Delta\beta'_2$, $\Delta\beta'_1$, $\Delta\gamma'_1$ получаются заменой указателей 1 на 2, 3 на 4 и добавлением штрихов при коэффициентах α, β, γ с любыми указателями.

Применение леммы Картана к квадратичным уравнениям (10) даёт:

$$\begin{aligned} &\Delta\alpha_1=\alpha_{11}\omega^3_1-\beta_{11}\omega^4_2, && \Delta\alpha'_2=-\beta'_{22}\omega^3_1+\alpha'_{22}\omega^4_2,\\ &\Delta\beta_1=\beta_{11}\omega^3_1+\gamma\beta_{12}\omega^4_2, && \Delta\beta'_2=\gamma'\beta'_{12}\omega^3_1+\beta'_{22}\omega^4_2,\\ &\Delta\beta_2=\alpha\beta_{12}\omega^3_1+\beta_{22}\omega^4_2, && \Delta\beta'_1=\beta'_{11}\omega^3_1+\alpha'\beta'_{12}\omega^4_2,\\ &\Delta\gamma_2=\beta_{22}\omega^3_1+\gamma_{22}\omega^4_2, && \Delta\gamma'_1=\gamma'_{11}\omega^3_1+\beta'_{11}\omega^4_2. \end{aligned} \tag{11}$$

Эти формулы показывают, что дифференциальная окрестность 4-го порядка имеет ещё восемь главных форм (11).

Так можно продолжать неограниченное число раз. Новое дифференцирование приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} &[\Delta\alpha_{11}\omega^3_1]-[\Delta\beta_{11}\omega^4_2]=0, && -[\Delta\beta'_{22}\omega^3_1]+[\Delta\alpha'_{22}\omega^4_2]=0,\\ &[\Delta\beta_{11}\omega^3_1]+\gamma[\Delta\beta_{12}\omega^4_2]=0, && \gamma'[\Delta\beta'_{12}\omega^3_1]+[\Delta\beta'_{22}\omega^4_2]=0,\\ &\alpha[\Delta\beta_{12}\omega^3_1]+[\Delta\beta_{22}\omega^4_2]=0, && [\Delta\beta'_{11}\omega^3_1]+\alpha'[\Delta\beta'_{12}\omega^4_2]=0,\\ &[\Delta\beta_{22}\omega^3_1]+[\Delta\gamma_{22}\omega^4_2]=0, && [\Delta\gamma'_{11}\omega^3_1]+[\Delta\beta'_{11}\omega^4_2]=0, \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_{11} &= d\alpha_{11}+2\alpha_{11}(\omega^1_1-\omega^3_3)+2(\alpha_1-\beta_2)\,\omega^1_3-4\gamma'\omega^2_3+3\alpha\omega^1_4+\\ &\qquad +\{-2\beta_2\beta_{22}+\alpha_1(2\beta\beta'-4\alpha\alpha'-\gamma\gamma')+\\ &\qquad\qquad +\beta'_1\beta\gamma'+3\alpha\alpha'\beta'_2-2\beta\beta'\beta_2-\gamma'_1\gamma\gamma'\}\,\omega^4_2,\\ \Delta\beta_{11} &= d\beta_{11}+\beta_{11}(\omega^1_1+\omega^2_2-\omega^3_3-\omega^4_4)+\\ &\qquad +(3\beta_1\alpha\beta'+3\beta'_1\beta\gamma')\,\omega^3_1-2\beta_1\beta_{11}\omega^4_2,\\ \Delta\beta_{12} &= d\beta_{12}+\beta_{12}(\omega^1_1-\omega^4_4)-\omega^1_4+(\beta_2\beta_{12}-\beta_1\gamma'+\beta_2\beta')\,\omega^3_1-\\ &\qquad -(\beta_1\beta_{12}+\beta_1\beta'+\beta_2\alpha')\,\omega^4_2,\\ \Delta\beta_{22} &= d\beta_{22}+\beta_{22}(\omega^1_1+\omega^2_2-\omega^3_3-\omega^4_4)+\\ &\qquad +2\beta_2\beta_{22}\omega^3_1-(3\beta_2\beta'\gamma+3\beta'_2\alpha'\beta)\,\omega^4_2,\\ \Delta\gamma_{22} &= d\gamma_{22}+2\gamma_{22}(\omega^2_2-\omega^4_4)+2(\beta_1+\gamma_2)\,\omega^2_4+4\alpha'\omega^2_3-3\gamma\omega^1_4+\\ &\qquad +\{-2\beta_1\beta_{11}-\alpha'_2\alpha\alpha'+2\beta_1\beta\beta'-3\beta'_1\gamma\gamma'+\beta'_2\alpha'\beta+\\ &\qquad\qquad +\gamma_2(2\beta\beta'-\alpha\alpha'-4\gamma\gamma')\}\,\omega^3_1. \end{aligned} \tag{12'}$$

Применение леммы Картана к квадратичным уравнениям (12) даёт:

$$\begin{aligned} &\Delta\alpha_{11}=\alpha_{111}\omega^3_1-\beta_{111}\omega^4_2, && \Delta\alpha'_{22}=-\beta'_{222}\omega^3_1+\alpha'_{222}\omega^4_2,\\ &\Delta\beta_{11}=\beta_{111}\omega^3_1+\gamma\beta_{121}\omega^4_2, && \Delta\beta'_{22}=\gamma'\beta'_{122}\omega^3_1+\beta'_{222}\omega^4_2,\\ &\Delta\beta_{12}=\beta_{121}\omega^3_1+\beta_{122}\omega^4_2, && \Delta\beta'_{12}=\beta'_{121}\omega^3_1+\beta'_{122}\omega^4_2,\\ &\Delta\beta_{22}=\alpha\beta_{122}\omega^3_1+\beta_{222}\omega^4_2, && \Delta\beta'_{11}=\beta'_{111}\omega^3_1+\alpha'\beta'_{121}\omega^4_2,\\ &\Delta\gamma_{22}=\beta_{222}\omega^3_1+\gamma_{222}\omega^4_2, && \Delta\gamma'_{11}=\gamma'_{111}\omega^3_1+\beta'_{111}\omega^4_2. \end{aligned} \tag{13}$$

Эти уравнения показывают, что дифференциальная окрестность 5-го порядка получает десять новых главных форм (12′).

II. ИНВАРИАНТЫ КОНГРУЭНЦИИ

188. Вариация коэффициентов 2-го порядка преобразованиями подгруппы семейства тетраэдров 1-го порядка. Если закрепить луч, то все главные формы обратятся в нули, и уравнения (8′), (10′), (12′) § 187 определят закон вариации коэффициентов α, β, γ, ... при допустимых преобразованиях тетраэдра, т. е. при преобразованиях внутри семейства тетраэдров 1-го порядка. Из уравнений (8′) получаем формулы

$$\begin{aligned} &\delta\ln\alpha=2\pi^3_3-\pi^1_1-\pi^4_4, && \delta\ln\alpha'=2\pi^4_4-\pi^2_2-\pi^3_3,\\ &\delta\ln\gamma=\pi^1_1+\pi^4_4-2\pi^2_2, && \delta\ln\gamma'=\pi^2_2+\pi^3_3-2\pi^1_1, \end{aligned} \tag{14a}$$

$$\delta\beta=\beta(\pi^3_3-\pi^2_2)-\pi^2_3,\qquad \delta\beta'=\beta'(\pi^4_4-\pi^1_1)-\pi^1_4. \tag{14b}$$

Мы видим, что $\delta\beta$ имеет в правой части слагаемое, не зависящее от β; следовательно, β может получать любые приращения за счёт приращений того вторичного параметра, дифференциал которого содержит форма π_3^2 и который можно получить как первый интеграл $\tau = \mathrm{const.}$, если проинтегрировать дифференциальное уравнение $\pi_3^2 = 0$. Так как эта форма соответствует перемещению точки A_3 по прямой A_3A_2, то тот или другой выбор функции β (который может быть сделан произвольно) означает выбор направления ребра A_1A_3 в фокальной плоскости $A_1A_2A_3$. В частности, если выбрать функцию β равной нулю, то ребро A_1A_3 будет второй касательной фокальной сети поверхности (A_1) в точке A_1.

Действительно, вторая линия фокальной сети соответствует ребру возврата на поверхности (A_2), но луч A_1A_2 на поверхности (A_2) касается линии $\omega_2^4 = 0$, а, внося это значение в уравнение (1) для $i = 1$, которое теперь (при $\beta = 0$) принимает вид:

$$dA_1 = \omega_1^1 A_1 + \gamma\omega_2^4 A_2 + \omega_1^3 A_3,$$

мы немедленно получим, что линия $\omega_2^4 = 0$ на поверхности (A_1) касается ребра A_1A_3.

Точно так же выбор β' определяет выбор ребра A_2A_4 в плоскости $A_2A_1A_4$; в частности, выбор $\beta' = 0$ заставит ребро A_2A_4 совпасть со второй фокальной касательной поверхности (A_2).

Четыре уравнения (14а) содержат четыре вторичные формы π_i^i, но, поскольку они входят только в виде трёх независимых разностей $\pi_i^i - \pi_k^k$, они могут быть исключены. При этом получается уравнение

$$\delta \ln \frac{\alpha\alpha'}{\gamma\gamma'} = 0$$

и единственный инвариант 2-го порядка

$$I = \frac{\alpha\alpha'}{\gamma\gamma'}. \tag{15}$$

189. Геометрическое значение инварианта *I*. Нетрудно обнаружить, что единственный независимый инвариант 2-го порядка I совпадает с тем инвариантом δ, который был введён в конце предыдущей главы под названием сложного отношения луча, как квадрат сложного отношения четырёх прямых одного пучка, именно: двух касательных к линиям фокальной сети на любой фокальной поверхности, асимптотической касательной (безразлично, какой из двух асимптотических касательных этой фокальной поверхности) и касательной к одной из двух линий (безразлично какой), соответствующих асимптотическим второй фокальной поверхности.

Чтобы показать это, надо прежде всего составить уравнение асимптотических линий фокальной поверхности; соприкасающаяся плоскость $(A_1 dA_1 d^2A_1)$ кривой, определяемой отношением $\omega_1^3 : \omega_2^4$ на

поверхности (A_1), совпадает с касательной плоскостью $(A_1A_2A_3)$ этой поверхности, если

$$(A_1A_2A_3\, d^2A_1) = 0. \tag{α}$$

Если, продифференцировав первое уравнение системы (1) § 185

$$dA_1 = \omega_1^1 A_1 + \omega_1^2 A_2 + \omega_1^3 A_3, \tag{β}$$

отбросить члены, пропорциональные точкам A_1, A_2 или A_3, и внести d^2A_1 в грассманово произведение (α), получим:

$$(A_1A_2A_3,\ \omega_1^2 dA_2 + \omega_1^3 dA_3) = 0,$$

или, пользуясь для дифференциалов dA_2, dA_3 выражениями (1) и сокращая на не равное нулю произведение $(A_1A_2A_3A_4)$,

$$\omega_1^2\omega_2^4 + \omega_1^3\omega_3^4 = 0. \tag{16}$$

Так как совпадение соприкасающейся плоскости с касательной плоскостью поверхности определяет асимптотические линии поверхности, то уравнение (16) определяет асимптотические линии фокальной поверхности (A_1). Внося сюда формы ω_1^2, ω_3^4 по формулам (7) § 186 и проделывая те же выкладки для поверхности (A_2), мы получим уравнения асимптотических на фокальных поверхностях (A_1) и (A_2) в виде

$$\begin{aligned} \alpha(\omega_1^3)^2 + \gamma(\omega_2^4)^2 &= 0, \\ \gamma'(\omega_1^3)^2 + \alpha'(\omega_2^4)^2 &= 0. \end{aligned} \tag{16'}$$

Теперь нетрудно подсчитать сложное отношение четырёх касательных поверхности (A_1), о котором шла речь выше. Так как инвариант I не зависит от того или другого выбора тетраэдра в семействе тетраэдров 1-го порядка так же, как не зависит и сложное отношение, то мы можем выбрать за рёбра A_1A_3, A_2A_4 касательные к линиям фокальной сети, что приведёт к равенствам $\beta = 0$, $\beta' = 0$.

Следовательно, касательные к линиям фокальной сети будут пересекать ребро A_2A_3 в точках A_2 и A_3.

С другой стороны, уравнение (β) примет вид

$$dA_1 = \omega_1^1 A_1 + \gamma\omega_2^4 A_2 + \omega_1^3 A_3,$$

и, следовательно, касательная к линии

$$\omega_2^4 = \lambda\omega_1^3,$$

пересекает это ребро в точке

$$M = \lambda\gamma A_2 + A_3.$$

Так как сложное отношение четырёх точек A_2, A_3, $M=\lambda\gamma A_2+A_3$ и $M'=\lambda'\gamma A_2+A_3$ равно

$$(A_2,\ A_3;\ \lambda\gamma A_2+A_3,\ \lambda'\gamma A_2+A_3)=\frac{\lambda}{\lambda'},$$

а сложное отношение четырёх касательных поверхности (A_1) равно сложному отношению четырёх точек пересечения их с прямой A_2A_3 и для асимптотических линий (16′) величины λ, λ' принимают значения

$$\lambda=\pm\sqrt{-\frac{\alpha}{\gamma}},\quad \lambda'=\pm\sqrt{-\frac{\gamma'}{\alpha'}},$$

то искомое сложное отношение получает значение

$$\lambda:\lambda'=\pm\sqrt{\frac{\alpha\alpha'}{\gamma\gamma'}}$$

и квадрат его совпадает с инвариантом I.

Нетрудно заметить, что равенство

$$I=1 \tag{17}$$

или

$$\alpha\alpha'-\gamma\gamma'=0 \tag{17′}$$

даёт пропорциональность коэффициентов в уравнениях (16′), т. е. соответствие асимптотических на фокальных поверхностях. Следовательно, $I=1$ определяет конгруэнцию W.

Равенство

$$I=-1 \tag{17a}$$

или

$$\alpha\alpha'+\gamma\gamma'=0 \tag{17a′}$$

показывает, что на каждой фокальной поверхности касательные к асимптотическим линиям гармонически разделяют касательные к линиям, которые соответствуют асимптотическим другой фокальной поверхности.

Действительно, сложное отношение

$$(\lambda_1\gamma A_2+A_3,\quad \lambda_2\gamma A_2+A_3;\quad \lambda_1'\gamma A_2+A_3,\quad \lambda_2'\gamma A_2+A_3)=$$
$$=\frac{\left(\sqrt{-\frac{\alpha}{\gamma}}-\sqrt{-\frac{\gamma'}{\alpha'}}\right)^2}{\left(\sqrt{-\frac{\alpha}{\gamma}}+\sqrt{-\frac{\gamma'}{\alpha'}}\right)^2}$$

при услозии (17a) равно -1.

Так как асимптотические касательные гармонически разделяют каждую пару сопряжённых касательных, и только сопряжённые пары касательных, то асимптотическим линиям одной фокальной поверхности на другой фокальной поверхности соответствует сопряжённая система. Следовательно, $I=1$ определяет конгруэнции V.

190. Инварианты 3-го порядка. Если положить равными нулю главные формы в уравнениях (10′) § 187, то мы определим вариацию при неподвижном луче коэффициентов α_1, β_1, β_2, γ_2 и симметричных и сможем продолжить ряд уравнений (14a, b):

$$\begin{aligned}
&\delta\alpha_1=\alpha_1(\pi_3^3-\pi_1^1)-3\pi_3^1, && \delta\alpha_2'=\alpha_2'(\pi_4^4-\pi_2^2)-3\pi_4^2,\\
&\delta\beta_1=\beta_1(\pi_4^4-\pi_2^2)-\pi_4^2, && \delta\beta_2'=\beta_2'(\pi_3^3-\pi_1^1)-\pi_3^1,\\
&\delta\beta_2=\beta_2(\pi_3^3-\pi_1^1)+\pi_3^1, && \delta\beta_1'=\beta_1'(\pi_4^4-\pi_2^2)+\pi_4^2,\\
&\delta\gamma_2=\gamma_2(\pi_4^4-\pi_2^2)-3\pi_4^2, && \delta\gamma_1'=\gamma_1'(\pi_3^3-\pi_1^1)-3\pi_3^1.
\end{aligned} \tag{14c}$$

Исключая отсюда вторичные формы π_3^1, π_4^2, получим шесть независимых уравнений среди следующих восьми:

$$\begin{aligned}
&\delta\ln(\alpha_1-\gamma_1')=\pi_3^3-\pi_1^1, && \delta\ln(\alpha_2'-\gamma_2)=\pi_4^4-\pi_2^2,\\
&\delta\ln(\beta_2+\beta_2')=\pi_3^3-\pi_1^1, && \delta\ln(\beta_1+\beta_1')=\pi_4^4-\pi_2^2,\\
&\delta\ln(\alpha_1+3\beta_2)=\pi_3^3-\pi_1^1, && \delta\ln(\alpha_2'+3\beta_1')=\pi_4^4-\pi_2^2,\\
&\delta\ln(\gamma_1'-3\beta_2')=\pi_3^3-\pi_1^1, && \delta\ln(\gamma_2-3\beta_1)=\pi_4^4-\pi_2^2.
\end{aligned} \tag{14c′}$$

Отсюда получаем инварианты 3-го порядка

$$I_1=\frac{\alpha_1-\gamma_1'}{\beta_2+\beta_2'},\quad I_1'=\frac{\alpha_2'-\gamma_2}{\beta_1+\beta_1'},\quad I_2=\frac{\alpha_1+3\beta_2}{\gamma_1'-3\beta_2'},\quad I_2'=\frac{\alpha_2'+3\beta_1'}{\gamma_2-3\beta_1}. \tag{18a}$$

Если принять во внимание уравнения (14a), (14b), то можно получить инварианты

$$I_3=\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}\,\frac{\alpha_1+3\beta_2}{\gamma_2-3\beta_1}},\qquad I_3'=\sqrt{-\frac{\gamma'}{\alpha'}\,\frac{\alpha_2'+3\beta_1'}{\gamma_1'-3\beta_2'}} \tag{18b}$$

и целый ряд других, например,

$$\begin{aligned}
&J_1=\frac{\alpha_1-\gamma_1'}{\sqrt[4]{\alpha^2\alpha'\gamma'}},\ J_2=\frac{\beta_2+\beta_2'}{\sqrt[4]{\alpha^2\alpha'\gamma'}},\ J_3=\frac{\alpha_1+3\beta_2}{\sqrt[4]{\alpha^2\alpha'\gamma'}},\ J_4=\frac{\gamma_1'-3\beta_2'}{\sqrt[4]{\alpha^2\alpha'\gamma'}},\\
&J_1'=\frac{\alpha_2'-\gamma_2}{\sqrt[4]{\alpha\alpha'^2\gamma}},\quad J_2'=\frac{\beta_1+\beta_1'}{\sqrt[4]{\alpha\alpha'^2\gamma}},\ J_3'=\frac{\alpha_2'+3\beta_1'}{\sqrt[4]{\alpha\alpha'^2\gamma}},\ J_4'=\frac{\gamma_2-3\beta_1}{\sqrt[4]{\alpha\alpha'^2\gamma}}.
\end{aligned} \tag{18c}$$

Геометрический смысл их раскрывается не так просто и будет служить предметом исследования. Заметим, например, что равенство $I_3^2=1$ показывает, что первая фокальная поверхность — линейчатая.

Действительно, если нормировать вершины тетраэдра $\{A_i\}$ так, чтобы

$$\gamma = -\alpha, \tag{a}$$

то уравнение асимптотических (16′) примет вид

$$(\omega_1^3)^2 - (\omega_2^4)^2 = 0.$$

Если теперь совместить ребро A_1A_3 с асимптотической касательной

$$\omega_2^4 = \varepsilon\omega_1^3, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

то

$$[\omega_1^2, \ \omega_2^4 - \varepsilon\omega_1^3] = 0,$$

ибо $\omega_1^2 = 0$ определяет на поверхности (A_1) линию, которая касается ребра A_1A_3.

Уравнения (7), (а) покажут теперь, что

$$\beta = \varepsilon\alpha,$$

$$\omega_3^4 = \varepsilon\alpha(\varepsilon\omega_1^3 - \omega_2^4).$$

Дифференцируя $\beta = \varepsilon\alpha$, получим с помощью формул (8′) § 187:

$$\omega_3^2 = \Delta\beta - \varepsilon\alpha\frac{\Delta\alpha - \Delta\gamma}{2}$$

или в силу (9) § 187

$$\omega_3^2 = \alpha\left(\beta_1 - \varepsilon\frac{\alpha_1 + \beta_2}{2}\right)\omega_1^3 - \alpha\left(\beta_2 - \varepsilon\frac{\beta_1 - \gamma_2}{2}\right)\omega_2^4.$$

Чтобы линия $\omega_2^4 = \varepsilon\omega_1^3$ была прямой линией, необходимо и достаточно, чтобы

$$dA_3 \equiv \omega_3^1 A_1 + \omega_3^2 A_2 + \omega_3^3 A_3 + \omega_3^4 A_4 \equiv \omega_3^1 A_1 + \omega_3^3 A_3 \quad (\operatorname{mod} \omega_2^4 - \varepsilon\omega_1^3)$$

или чтобы

$$[\omega_3^2, \ \omega_2^4 - \varepsilon\omega_1^3] = 0, \quad [\omega_3^4, \ \omega_2^4 - \varepsilon\omega_1^3] = 0.$$

Второе уравнение удовлетворяется тождественно, а первое даёт условие

$$\alpha\left(\beta_1 - \varepsilon\frac{\alpha_1 + \beta_2}{2}\right) - \varepsilon\alpha\left(\beta_2 - \varepsilon\frac{\beta_1 - \gamma_2}{2}\right) = 0$$

или по сокращении на α

$$3\beta_1 - \gamma_2 = \varepsilon(\alpha_1 + 3\beta_2),$$

что при $\gamma = -\alpha$ равносильно условию

$$I_3 = -\varepsilon.$$

Аналогично равенство $I_3'^2 = 1$ показывает, что вторая фокальная поверхность — линейчатая.

191. Инварианты 4-го порядка. Если перейти к окрестности 4-го порядка, то надо привлечь к рассмотрению коэффициенты с двумя индексами. Полагая равными нулю главные формы в уравнениях (12′) § 187, получим:

$$\begin{aligned}
\delta\alpha_{11} &= 2\alpha_{11}(\pi_3^3 - \pi_1^1) - 2(\alpha_1 - \beta_2)\pi_3^1 + 4\gamma'\pi_3^2 - 3\alpha\pi_4^1, \\
\delta\beta_{11} &= \beta_{11}(\pi_3^3 + \pi_4^4 - \pi_1^1 - \pi_2^2), \\
\delta\beta_{12} &= \beta_{12}(\pi_4^4 - \pi_1^1) + \pi_4^1, \\
\delta\beta_{22} &= \beta_{22}(\pi_3^3 + \pi_4^4 - \pi_1^1 - \pi_2^2), \\
\delta\gamma_{22} &= 2\gamma_{22}(\pi_4^4 - \pi_2^2) - 2(\beta_1 + \gamma_2)\pi_4^2 - 4\alpha'\pi_3^2 + 3\gamma\pi_4^1.
\end{aligned} \tag{14d}$$

Отсюда прямо следует, что β_{11}, β_{22}, точно так же симметричные β_{22}', β_{11}', являются относительными инвариантами. Так как

$$\delta(\beta_{12} + \beta') = (\beta_{12} + \beta')(\pi_4^4 - \pi_1^1), \ \delta(\beta_{12}' + \beta) = (\beta_{12}' + \beta)(\pi_3^3 - \pi_2^2), \tag{14e}$$

а из уравнений (14d) и уравнений

$$\begin{aligned}
\delta(\alpha\beta') &= 2\alpha\beta'(\pi_3^3 - \pi_1^1) - \alpha\pi_4^1, \\
\delta(\gamma'\beta) &= 2\gamma'\beta(\pi_3^3 - \pi_1^1) - \gamma'\pi_3^2, \\
\delta(\alpha_1 - \beta_2)^2 &= 2(\alpha_1 - \beta_2)^2(\pi_3^3 - \pi_1^1) - 8(\alpha_1 - \beta_2)\pi_3^1, \\
\delta(\beta_1 + \gamma_2)^2 &= 2(\beta_1 + \gamma_2)^2(\pi_4^4 - \pi_2^2) - 8(\beta_1 + \gamma_2)\pi_4^2
\end{aligned}$$

следует:

$$\begin{aligned}
\delta\ln\left\{\alpha_{11} - \frac{1}{4}(\alpha_1 - \beta_2)^2 + 4\gamma'\beta - 3\alpha\beta'\right\} &= 2(\pi_3^3 - \pi_1^1), \\
\delta\ln\left\{\gamma_{22} - \frac{1}{4}(\beta_1 + \gamma_2)^2 - 4\alpha'\beta + 3\gamma\beta'\right\} &= 2(\pi_4^4 - \pi_2^2), \\
\delta\ln\left\{\alpha_{22}' - \frac{1}{4}(\alpha_2' - \beta_1')^2 + 4\gamma\beta' - 3\alpha'\beta\right\} &= 2(\pi_4^4 - \pi_2^2), \\
\delta\ln\left\{\gamma_{11}' - \frac{1}{4}(\beta_2' + \gamma_1')^2 - 4\alpha\beta' + 3\gamma'\beta\right\} &= 2(\pi_3^3 - \pi_1^1),
\end{aligned} \tag{14f}$$

то величины

$$\beta_{12} + \beta', \ \alpha_{11} - \frac{1}{4}(\alpha_1 - \beta_2)^2 + 4\gamma'\beta - 3\alpha\beta',$$

$$\gamma_{22} - \frac{1}{4}(\beta_1 + \gamma_2)^2 - 4\alpha'\beta + 3\gamma\beta',$$

$$\beta_{12}' + \beta, \ \alpha_{22}' - \frac{1}{4}(\alpha_2' - \beta_1')^2 + 4\gamma\beta' - 3\alpha'\beta,$$

$$\gamma_{11}' - \frac{1}{4}(\beta_2' + \gamma_1')^2 - 4\alpha\beta' + 3\gamma'\beta$$

суть относительные инварианты. С помощью их нетрудно найти целую серию новых абсолютных инвариантов:

$$\frac{\beta_{11}}{\gamma\gamma'},\ \frac{\beta_{22}}{\alpha\alpha'},\ \frac{\beta_{12}+\beta'}{\sqrt{\alpha'\gamma'}},\ \frac{\alpha_{11}-\frac{1}{4}(\alpha_1-\beta_2)^2+4\gamma'\beta-3\alpha\beta'}{\alpha\sqrt{\alpha'\gamma'}},\ \frac{\gamma_{22}-\frac{1}{4}(\beta_1+\gamma_2)^2-4\alpha'\beta+3\gamma\beta'}{\alpha'\sqrt{\alpha\gamma}} \tag{18d}$$

и т. д.

Мы встретим их как отдельные слагаемые тех уравнений, которые характеризуют отдельные классы конгруэнций; например, конгруэнции R характеризуются равенствами

$$\alpha\alpha'-\gamma\gamma'=0;\ \beta_{11}+\beta_{22}=0.$$

III. ИНВАРИАНТНЫЕ ФОРМЫ КОНГРУЭНЦИИ

192. Инвариантные формы окрестности 1-го и 2-го порядка. Пользуясь формулами для внешних дифференциалов

$$D\omega_1^3=[\omega_1^3,\ \omega_3^3-\omega_1^1],\qquad D\omega_2^4=[\omega_2^4,\ \omega_4^4-\omega_2^2],$$
$$D\omega_1^2=[\omega_1^2,\ \omega_2^2-\omega_1^1]+[\omega_1^3\omega_3^2],\qquad D\omega_3^4=[\omega_3^4,\ \omega_4^4-\omega_3^3]+[\omega_3^2\omega_2^4]$$

и выписывая присоединённые им билинейные формы для двух символов дифференцирования: символа δ для дифференцирования по вторичным параметрам (при неподвижном луче, обозначение форм — π_i^k) и символа d для дифференцирования по главным параметрам (обозначение форм — ω_i^k), получим для закона вариации главных форм при проективых перемещениях тетраэдра около луча следующие формулы:

$$\delta\omega_1^3=\omega_1^3\,(\pi_1^1-\pi_3^3),\qquad \delta\omega_2^4=\omega_2^4\,(\pi_2^2-\pi_4^4), \tag{19a}$$

$$\begin{aligned}\delta\omega_1^2&=\omega_1^2\,(\pi_1^1-\pi_2^2)-\omega_1^3\pi_3^2, & \delta\omega_2^1&=\omega_2^1\,(\pi_2^2-\pi_1^1)-\omega_2^4\pi_4^1,\\ \delta\omega_3^4&=\omega_3^4\,(\pi_3^3-\pi_4^4)+\omega_2^4\pi_3^2, & \delta\omega_4^3&=\omega_4^3\,(\pi_4^4-\pi_3^3)+\omega_1^3\pi_4^1,\end{aligned} \tag{19b}$$

где формулы для ω_2^1, ω_4^3 написаны по аналогии. Заметим, что последние четыре формулы можно получить непосредственным дифференцированием уравнений (7) § 186 по вторичным параметрам, если воспользоваться формулами (14a) § 188, (19a).

Полученные формулы показывают, что компоненты ω_1^3, ω_2^4 уже являются относительными инвариантными формами, ибо при изменении тетраэдра 1-го порядка они получают только дополнительный скалярный множитель. Это можно было предвидеть, ибо нулевые линии этих форм

$$\omega_1^3=0\ \text{или}\ \omega_2^4=0$$

имеют инвариантную характеристику — соответствуют развёртывающимся поверхностям конгруэнции.

Исключая из уравнений (19b) левого столбца форму π_3^2, получим относительную инвариантную квадратичную форму

$$\varphi_2=\omega_1^3\omega_3^4+\omega_1^3\omega_2^4. \tag{20}$$

Действительно, закон вариации вторичных параметров даёт нам:

$$\delta\varphi_2=\varphi_2(\pi_1^1-\pi_4^4). \tag{20a}$$

Если воспользоваться уравнениями (7) § 186, то форма φ_2 может быть выражена явно как квадратичная форма относительно ω_1^3, ω_2^4

$$\varphi_2=\alpha\,(\omega_1^3)^2+\gamma\,(\omega_2^4)^2. \tag{20'}$$

Мы видели [§ 189, формула (16')], что нулевые линии этой формы соответствуют асимптотическим линиям первой фокальной поверхности.

Аналогично, квадратичная форма

$$\varphi_2'=\omega_2^1\omega_1^3+\omega_2^4\omega_4^3$$

есть относительная инвариантная, ибо

$$\delta\varphi_2'=\varphi_2'(\pi_2^2-\pi_3^3).$$

Её нулевые линии соответствуют асимптотическим второй фокальной поверхности.

193. Линейный элемент конгруэнции. Умножая на подходящие относительные инварианты, мы легко можем из этих относительных иивариантных форм построить абсолютные:

$$\Phi_1=\sqrt[4]{\alpha^2\alpha'\gamma'}\,\omega_1^3,\quad \Phi_1'=\sqrt[4]{\alpha'^2\alpha\gamma}\,\omega_2^4,$$
$$\Phi_2=\sqrt{\alpha'\gamma'}\,\varphi_2,\quad \Phi_2'=\sqrt{\alpha\gamma}\,\varphi_2',$$

но гораздо важнее абсолютная инвариантная форма

$$\Phi=\frac{(\omega_1^2\omega_2^4+\omega_1^3\omega_3^4)(\omega_2^1\omega_1^3+\omega_2^4\omega_4^3)}{\omega_1^3\omega_2^4}. \tag{21}$$

Так как

$$\delta\ln\varphi_2=\pi_1^1-\pi_4^4,\qquad \delta\ln\varphi_2'=\pi_2^2-\pi_3^3,\qquad \delta\ln(\omega_1^3\omega_2^4)=\pi_1^1+\pi_2^2-\pi_3^3-\pi_4^4,$$

то

$$\delta\Phi=0$$

и Φ инвариантно. Так как это — простейший инвариант пары бесконечно близких лучей конгруэнции, подобно тому как в метрической геометрии поверхности ds^2 есть простейший инвариант пары бесконечно близких точек поверхности, то инвариант Ф можно назвать *линейным элементом конгруэнции*. Он сохраняется при проективном изгибании конгруэнции (§ 270 гл. XIII).

Геометрическое значение его вытекает из теоремы:

Линейный элемент конгруэнции Ф равен главной части сложного отношения, в котором фокусы луча разделяют пару точек, высекаемых на этом луче фокальными плоскостями его бесконечно близкого луча.

Действительно, при дифференциальном перемещении луча A_1A_2 каждая точка A_i фокальной плоскости $A_1A_2A_3$ займёт положение

$$A_1' = A_1(1+\omega_1^1) + A_2\omega_1^2 + A_3\omega_1^3,$$
$$A_2' = A_1\omega_2^1 + A_2(1+\omega_2^2) + A_4\omega_2^4,$$
$$A_3' = A_1\omega_3^1 + A_2\omega_3^2 + A_3(1+\omega_3^3) + A_4\omega_3^4.$$

Точка $A_1 + \lambda A_2$, где плоскость $A_1'A_2'A_3'$ пересекает луч A_1A_2, удовлетворяет уравнению

$$(A_1'A_2'A_3',\quad A_1+\lambda A_2) = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} 1+\omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 & 0 \\ \omega_2^1 & 1+\omega_2^2 & 0 & \omega_2^4 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & 1+\omega_3^3 & \omega_3^4 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

При развёртывании определителя конечные члены, не содержащие множителем λ, и члены с первой степенью дифференциальных форм ω_i^k пропадают. Сохраняя члены 2-го порядка в свободном от λ члене и 1-го порядка в коэффициенте при λ, получим:

$$\omega_1^3\omega_3^4 + \omega_1^2\omega_2^4 - \lambda\omega_2^4 = 0$$

и

$$\lambda = \frac{\omega_1^3\omega_3^4 + \omega_1^2\omega_2^4}{\omega_2^4}.$$

Аналогично, вторая фокальная плоскость $A_1'A_2'A_4'$ бесконечно близкого луча пересекает луч A_1A_2 в точке $A_1 + \lambda' A_2$, где λ' удовлетворяет уравнению

$$\begin{vmatrix} 1+\omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 & 0 \\ \omega_2^1 & 1+\omega_2^2 & 0 & \omega_2^4 \\ \omega_4^1 & \omega_4^2 & \omega_4^3 & 1+\omega_4^4 \\ 1 & \lambda' & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\lambda' = \frac{\omega_1^3}{\omega_2^1\omega_1^3 + \omega_2^4\omega_4^3}.$$

Сложное отношение четырёх точек

$$(A_1,\ A_2;\ A_1+\lambda A_2,\ A_1+\lambda' A_2) = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{(\omega_1^3\omega_3^4 + \omega_1^2\omega_2^4)(\omega_2^1\omega_1^3 + \omega_2^4\omega_4^3)}{\omega_1^3\omega_2^4}$$

действительно равно инварианту Ф.

194. Инвариантные формы окрестности 3-го порядка. Чтобы построить инвариантные формы окрестности 3-го порядка, надо обратиться к главным формам, полученным при продолжении системы (7) § 186.

Мы можем подсчитать вариацию форм (9) § 187 при изменении вторичных параметров, дифференцируя эти уравнения (9) по вторичным параметрам и пользуясь формулами (14с) § 190 и (19а). Мы получим таблицу формул

$$\begin{aligned} &\delta(\Delta\alpha) = -3\omega_1^3\pi_3^1 + \omega_2^4\pi_4^2, && \delta(\Delta\alpha') = \omega_1^3\pi_3^1 - 3\omega_2^4\pi_4^2, \\ &\delta(\Delta\beta) = \Delta\beta(\pi_3^3 - \pi_2^2) + \gamma\omega_2^4\pi_3^1 - && \delta(\Delta\beta') = \Delta\beta'(\pi_4^4 - \pi_1^1) - \\ &\qquad\qquad - \alpha\omega_1^3\pi_4^2, && \qquad\qquad - \alpha'\omega_2^4\pi_3^1 + \gamma'\omega_1^3\pi_4^2, \\ &\delta(\Delta\gamma) = \omega_1^3\pi_3^1 - 3\omega_2^4\pi_4^2, && \delta(\Delta\gamma') = -3\omega_1^3\pi_3^1 + \omega_2^4\pi_4^2. \end{aligned} \tag{22}$$

Отсюда прямо следует, что

$$\begin{aligned} \Delta\alpha - \Delta\gamma' &= (\alpha_1 - \gamma_1')\omega_1^3 - (\beta_1 + \beta_1')\omega_2^4, \\ \Delta\alpha' - \Delta\gamma &= -(\beta_2 + \beta_2')\omega_1^3 + (\alpha_2' - \gamma_2)\omega_2^4 \end{aligned} \tag{22'}$$

являются абсолютными инвариантными линейными формами. Если иметь в виду соотношения (8') § 187, то легко обнаружим, что их сумма равна дифференциалу от логарифма абсолютного инварианта (15) § 188

$$\Delta\alpha + \Delta\alpha' - \Delta\gamma - \Delta\gamma' = d\ln I.$$

С другой стороны, нетрудно заметить, что три уравнения левого столбца уравнений (22) содержат, не считая форм π_i^i, только две вторичные формы π_3^1, π_4^2. Исключая их, получим:

$$\begin{vmatrix} \delta(\Delta\alpha) & -3\omega_1^3 & \omega_2^4 \\ \delta(\Delta\beta) + \Delta\beta(\pi_2^2 - \pi_3^3) & \gamma\omega_2^4 & -\alpha\omega_1^3 \\ \delta(\Delta\gamma) & \omega_1^3 & -3\omega_2^4 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\left\{ \alpha (\omega_1^3)^2 - 3\gamma (\omega_2^4)^2 \right\} \delta (\Delta\alpha) - 8\omega_1^3\omega_2^4 \delta (\Delta\beta) + \left\{ 3\alpha (\omega_1^3)^2 - \gamma (\omega_2^4)^2 \right\} \delta(\Delta\gamma) = \\ = 8\omega_1^3\omega_2^4 \Delta\beta (\pi_2^2 - \pi_3^3).$$

Добавляя сюда предыдущие уравнения (14a), (14b) § 188, (19a) так, чтобы в левой части получилась интегрируемая комбинация, мы будем нметь:

$$\delta \ln \varphi_3 = \pi_1^1 - \pi_4^4,$$

где

$$\varphi_3 = \left\{ \alpha (\omega_1^3)^2 - 3\gamma (\omega_2^4)^2 \right\} \Delta\alpha - 8\omega_1^3\omega_2^4 \Delta\beta + \left\{ 3\alpha (\omega_1^3)^2 - \gamma (\omega_2^4)^2 \right\} \Delta\gamma \quad (23)$$

или в силу (9) § 187

$$\varphi_3 = \alpha (3\beta_2 + \alpha_1)(\omega_1^3)^3 - 3\alpha (3\beta_1 - \gamma_2)(\omega_1^3)^2 \omega_2^4 - 3\gamma (3\beta_2 + \alpha_1) \omega_1^3 (\omega_2^4)^2 + \\ + \gamma (3\beta_1 - \gamma_2)(\omega_2^4)^3. \quad (23')$$

Следовательно, φ_3 есть относительная инвариантная кубичная форма.

Это — кубичная форма первой фокальной поверхности, ибо построена на тех главных формах, которые имеют к ней непосредственное отношение. Нулевые линии её суть линии Дарбу этой поверхности (П. Д. Г., стр. 73).

195. Тетраэдр, построенный на осях фокальной сети. Чтобы обнаружить это, удобно будет, пользуясь инвариантностью формы относительно выбора тетраэдра первого порядка, положить $\beta = 0$, т. е. выбрать за рёбра A_1A_2, A_1A_3 касательные фокальной сети поверхности (A_1). Поместим теперь вершину A_3 во втором фокусе луча A_1A_3, а вершину A_4 расположим на линии пересечения касательных плоскостей поверхностей (A_2) и (A_3).

Определение. Линия пересечения касательных плоскостей двух первых преобразований Лапласа (A_2) и (A_3) сети (A_1) называется *первой осью*, а прямая A_2A_3, соединяющая эти преобразования, — *второй осью* сопряжённой сети (A_1). Отсюда следует, что наши условия определяют тетраэдр, построенный на осях фокальной сети (A_1).

Поскольку поверхность (A_3) теперь касается плоскости $A_1A_3A_4$, то все дифференциальные перемещения dA_3 лежат в этой плоскости и компонента дифференциала dA_3 по точке A_2 равна нулю

$$\omega_3^2 = 0. \quad (24a)$$

Так как одновременно

$$\beta = 0, \quad (24b)$$

то и $\Delta\beta$ равно нулю, и по формулам (9) § 187 получим:

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0. \quad (24c)$$

Условиями (24a) — (24c) характеризуется матрица компонент тетраэдра 1-го порядка, построенного на осях фокальной сети (A_1).

За ребро A_2A_4 возьмём вторую касательную фокальной сети поверхности (A_2). Тогда

$$\beta' = 0. \quad (24d)$$

Нормированием вершин приведём коэффициенты α, γ к значениям

$$\alpha = 1, \quad \gamma = \pm 1. \quad (24e)$$

Это возможно, ибо в формулах (14a) § 188 вторичные формы $2\pi_3^3 - \pi_1^1 - \pi_4^4$ и $\pi_1^1 + \pi_4^4 - 2\pi_2^2$ линейно независимы. Мы можем положить все вторичные формы равными нулю, кроме $2\pi_3^3 - \pi_1^1 - \pi_4^4$, которая тем самым будет полным дифференциалом $d\tau$ или, наоборот, можем сохранить только $\pi_1^1 + \pi_4^4 - 2\pi_2^2 = d\sigma$. Мы будем иметь (по очереди):

$$\delta \ln \alpha = d\tau, \quad \delta \ln \gamma = d\sigma \quad \text{и} \quad \alpha = e^{\tau + C_1}, \quad \gamma = e^{\sigma + C_2},$$

где C_1, C_2 не зависят от τ или σ. При подходящем выборе вторичных параметров τ и σ мы достигнем поставленной цели. При этом, ограничиваясь действительными тетраэдрами, мы будем получать $\gamma = +1$ или $\gamma = -1$ в зависимости от того, мнимы или действительны асимптотические линии на поверхности (A_1), ибо уравнение асимптотических линий (16′) § 189 принимает теперь вид:

$$(\omega_1^3)^2 \pm (\omega_2^4)^2 = 0.$$

Принимая $\gamma = -1$ и внося все эти значения в формулу (23′), мы получим для кубичной формы φ_3 выраженне

$$\varphi_3 = \alpha_1 (\omega_1^3)^3 + 3\gamma_2 (\omega_1^3)^2 \omega_2^4 + 3\alpha_1 \omega_1^3 (\omega_2^4)^2 + \gamma_2 (\omega_2^4)^3.$$

196. Кубичная форма и проективный линейный элемент поверхности. Преобразуем базис подкольца дифференциалов главных параметров, вводя формы

$$\omega_1 = \omega_1^3 + \omega_2^4, \quad \omega_2 = \omega_1^3 - \omega_2^4,$$

нулевые линии которых соответствуют асимптотическим поверхности (A_1). Мы получим:

$$\varphi_3 = \frac{\alpha_1 + \gamma_2}{2} (\omega_1)^3 + \frac{\alpha_1 - \gamma_2}{2} (\omega_2)^3. \quad (23'')$$

В проективной теории поверхностей дифференциальной окрестности 3-го порядка присоединены две относительные инвариантные формы: одна квадратичная с нулевыми линиями в виде асимптотических линий поверхности и другая кубичная, нулевые линии которой суть линии Дарбу. Квадратичная форма до общего множителя совпадает с нашей формой φ_2, которая тоже определяет асимптотические линии поверхности (A_1). Как относительная инвариантная форма φ_3 должна быть пропорциональна кубичной форме поверхности (12) § 84.

Отсюда вытекает, что нулевые линии формы φ_3 суть линии Дарбу. Более того, сравнивая форму (23″) с кубичной формой (12) § 84 гл. V, мы можем найти отношение коэффициентов проективного линейного элемента поверхности, которые в главе V обозначались буквами β и γ и которые теперь мы будем обозначать прописными буквами В и Г. В силу пропорциональности обеих кубичных форм эти коэффициенты относятся, как коэффициенты формы (23″):

$$\text{В} : \Gamma = \frac{\alpha_1 + \gamma_2}{\alpha_1 - \gamma_2}.$$

Отсюда следует:

$$\frac{\text{В} + \Gamma}{\text{В} - \Gamma} = \frac{\alpha_1}{\gamma_2}.$$

Так как при нашем выборе тетраэдра в силу (24с) абсолютный инвариант I_3 по формуле (18b) § 190 принимает вид

$$I_3 = \sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}\, \frac{\alpha_1 + 3\beta_2}{\gamma_2 - 3\beta_1} = \frac{\alpha_1}{\gamma_2}$$

и, следовательно, совпадает с приведённой выше формулой

$$I_3 = \frac{\text{В} + \Gamma}{\text{В} - \Gamma}, \tag{25}$$

то и при любом другом тетраэдре 1-го порядка инвариант будет давать это отношение.

Мы легко можем сделать форму φ_3 абсолютной инвариантной, умножая на $\sqrt{\alpha'\gamma'}$, как мы это сделали для квадратичной формы φ_2, но гораздо важнее абсолютный инвариант в виде отношения форм φ_3 и φ_2

$$\Theta = \frac{\varphi_3}{\varphi_2} = \frac{\alpha B_2 (\omega_1^3)^3 - 3\alpha B_1 (\omega_1^3)^2 \omega_2^4 - 3\gamma B_2 \omega_1^3 (\omega_2^4)^2 + \gamma B_1 (\omega_2^4)^3}{\alpha (\omega_1^3)^2 + \gamma (\omega_2^4)^2} \tag{26a}$$

где

$$B_1 = 3\beta_1 - \gamma_2, \quad B_2 = 3\beta_2 + \alpha_1. \tag{26b}$$

Дифференциальный инвариант Θ называется *проективным линейным элементом поверхности* (A_1). Подобно тому как в метрическом пространстве преобразование поверхности с сохранением линейного элемента ds^2 есть изгибание поверхности, так и здесь преобразование

поверхности в проективном пространстве с сохранением проективного линейного элемента (26) является *проективным изгибанием* поверхности.

197. Внешние инвариантные формы. Обратимся теперь к внешним инвариантным формам конгруэнции.

Так как ω_1^3 и ω_2^4 — относительные инвариантные формы (при преобразовании тетраэдра умножаются на скалярный множитель), то такой же инвариантной формой будет их внешнее произведение

$$\delta\,[\omega_1^3\omega_2^4] = [\omega_1^3\omega_2^4]\,(\pi_1^1 + \pi_2^2 - \pi_3^3 - \pi_4^4).$$

Относительной инвариантной формой будет и внешнее произведение

$$[\omega_1^2\omega_1^3] = -\gamma\,[\omega_1^3\omega_2^4],$$

что тоже непосредственно следует из относительной инвариантности коэффициента γ. Существенно новую форму получим, рассматривая произведение $[\omega_2^1\omega_1^2]$. Поскольку по формулам (19a), (19b)

$$\delta\,[\omega_2^1\omega_1^2] = [\delta\omega_2^1, \omega_1^2] + [\omega_2^1\,\delta\omega_1^2] =$$
$$= [\omega_1^2\omega_2^4]\,\pi_4^1 + [\omega_1^3\omega_2^1]\,\pi_3^2 = [\omega_1^3\omega_2^4]\,(\beta\pi_4^1 + \beta'\pi_3^2),$$

то надо только добавить член, вариация которого сократила бы правую часть нашего выражения. Так как

$$\delta(\beta\beta') = -\beta'\pi_3^2 - \beta\pi_4^1 + \beta\beta'\,(\pi_3^3 + \pi_4^4 - \pi_1^1 - \pi_2^2),$$

то достаточно для этого прибавить $\beta\beta'\,[\omega_1^3\omega_2^4]$. Действительно,

$$\delta\,\{[\omega_2^1\omega_1^2] + \beta\beta'\,[\omega_1^3\omega_2^4]\} = 0.$$

Следовательно,

$$\mathscr{h}_1 = [\omega_2^1\omega_1^2] + \beta\beta'\,[\omega_1^3\omega_2^4]$$

или по формулам (7) § 187

$$\mathscr{h}_1 = \gamma\gamma'\,[\omega_1^3\omega_2^4] \tag{27a}$$

является абсолютной инвариантной внешней квадратичной формой.

Точно так же, исходя из произведения $[\omega_3^4\omega_4^3]$, будем иметь:

$$\delta\,[\omega_3^4\omega_4^3] = [\omega_1^3\omega_2^4]\,(\beta'\pi_3^2 + \beta\pi_4^1).$$

Следовательно,

$$\delta\,\{[\omega_3^4\omega_4^3] + \beta\beta'\,[\omega_1^3\omega_2^4]\} = 0$$

и

$$\mathscr{K}_1 = [\omega_3^4\omega_4^3] + \beta\beta'\,[\omega_1^3\omega_2^4] = \alpha\alpha'\,[\omega_1^3\omega_2^4] \tag{27b}$$

будет абсолютной инвариантной внешней квадратичной формой.

Инвариантные формы (27a), (27b), очевидно, связаны соотношением

$$\mathscr{K}_1 = I\mathscr{h}_1, \tag{27'}$$

где I — инвариант 2-го порядка (15) § 188.

Чтобы получить следующие важные инвариантные внешние формы, надо обратиться к дифференциальной окрестности 4-го порядка. Дифференцируя по вторичным параметрам уравнения (11) § 187 и пользуясь формулами (14a) § 188 и (14d) § 191, (19a), получим:

$$\delta(\Delta\beta_1) = \Delta\beta_1(\pi_4^4 - \pi_2^2) + \gamma\omega_2^4\pi_4^1,$$
$$\delta(\Delta\beta_2) = \Delta\beta_2(\pi_3^3 - \pi_1^1) + \alpha\omega_1^3\pi_4^1.$$

Отсюда вытекает, что

$$\varphi_4 = \alpha\omega_1^3\Delta\beta_1 - \gamma\omega_2^4\Delta\beta_2 = \alpha\beta_{11}(\omega_1^3)^2 - \gamma\beta_{22}(\omega_2^4)^2 \tag{28}$$

есть относительная инвариантная квадратичная форма. Несравненно важнее внешние квадратичные формы, которые здесь получаются.

Так как

$$\delta[\Delta\beta_2\,\omega_1^3] = 0, \quad \delta[\Delta\beta_1\,\omega_2^4] = 0,$$

то

$$\begin{aligned} \mathscr{k}_1 &= [\Delta\beta_2,\ \omega_1^3] = -\beta_{22}[\omega_1^3\omega_2^4], \\ \mathscr{H}_1 &= [\Delta\beta_1,\ \omega_2^4] = \beta_{11}[\omega_1^3\omega_2^4] \end{aligned} \tag{27c}$$

суть абсолютные внешние инвариантные формы.

IV. ИНВАРИАНТЫ ФОКАЛЬНОЙ СЕТИ

198. Геометрический смысл внешних инвариантных форм. Полученные внешние формы (27d) — (27c) имеют простой геометрический смысл, представляя инварианты уравнения Лапласа для фокальной сети в новом виде, инвариантном и относительно замены параметров $u = \varphi(\bar{u})$, $v = \psi(\bar{v})$ сети.

Чтобы обнаружить это, удобно будет использовать свободу выбора тетраэдра 1-го порядка, чтобы теснее связать его с последовательностью Лапласа, порождаемой нашей конгруэнцией. Мы отнесём конгруэнцию к тетраэдру, построенному на касательных к линиям первой и второй фокальной сети и на осях той сети, которая лежит на первой фокальной поверхности (A_1). Тогда обратятся в нуль коэффициенты β, β', β_1, β_2, и будет иметь место уравнение (24a) § 195.

Отсюда следуют соотношения

$$\omega_1^2 = \gamma\omega_2^4,\ \ \omega_2^1 = \gamma'\omega_1^3,\ \ \omega_3^4 = \alpha\omega_1^3,\ \ \omega_4^3 = \alpha'\omega_2^4,\ \ \Delta\beta_1 = \omega_4^2,\ \ \Delta\beta_2 = -\omega_3^1, \tag{a}$$

и инвариантные формы (27a) —(27c) примут вид:

$$\mathscr{h}_1 = [\omega_2^1\omega_1^2],\quad \mathscr{k}_1 = [\omega_1^3\omega_3^1],\quad \mathscr{H}_1 = [\omega_4^2\omega_2^4],\quad \mathscr{K}_1 = [\omega_3^4\omega_4^3]. \tag{27''}$$

Введём теперь параметры u, v развёртывающихся поверхностей (криволинейные координаты луча) так, чтобы луч A_1A_2 касался линии $v = \mathrm{const}$. на поверхности (A_2) и линии $u = \mathrm{const}$. на поверхности (A_1). Тогда можно положить

$$\omega_1^3 = a\,du, \quad \omega_2^4 = b\,dv, \quad \omega_i^k = a_i^k\,du + b_i^k\,dv.$$

Уравнение

$$dA_1 = \omega_1^1 A_1 + \omega_1^2 A_2 + \omega_1^3 A_3$$

распадается в силу (a) на два

$$\begin{aligned} A_{1u} &= a_1^1 A_1 + aA_3, \\ A_{1v} &= b_1^1 A_1 + \gamma b A_2. \end{aligned} \tag{b}$$

Дифференцируя первое уравнение по v или второе по u и пользуясь уравнениями

$$A_{3v} = b_3^1 A_1 + b_3^3 A_3,$$
$$A_{2u} = a_2^2 A_2 + \gamma' a A_1,$$

получим:

$$A_{1uv} = (a_{1v}^1 + ab_3^1)A_1 + a_1^1 A_{1v} + (a_v + ab_3^3)A_3,$$
$$A_{1uv} = (b_{1u}^1 + \gamma\gamma' ab)A_1 + b_1^1 A_{1u} + \{(\gamma b)_u + \gamma b a_2^2\}A_2.$$

Исключая A_2, A_3 при помощи уравнений (b), придём к уравнению Лапласа фокальной сети (A_1)

$$A_{1uv} = \mathscr{A} A_{1u} + \mathscr{B} A_{1v} + \mathscr{C} A_1,$$

где

$$\mathscr{A} = \frac{\partial \ln a}{\partial v} + b_3^3 = b_1^1, \quad \mathscr{B} = a_1^1 = \frac{\partial \ln(\gamma b)}{\partial u} + a_2^2,$$
$$\mathscr{C} = a_{1v}^1 + ab_3^1 - \mathscr{A}\mathscr{B} = b_{1u}^1 + \gamma\gamma' ab - \mathscr{A}\mathscr{B},$$

откуда инварианты уравнения (15) § 126

$$h_1 = \mathscr{C} + \mathscr{A}\mathscr{B} - \mathscr{A}_u, \quad k_1 = \mathscr{C} + \mathscr{A}\mathscr{B} - \mathscr{B}_v$$

примут вид

$$h_1 = \gamma\gamma' ab, \quad k_1 = ab_3^1.$$

Составляя внешние формы

$$\mathscr{h}_1 = h_1[du\,dv] = \gamma\gamma' ab\,[du\,dv] = [\gamma' a\,du,\ \gamma b\,dv] = \gamma\gamma'\,[\omega_1^3\omega_2^4],$$
$$\mathscr{k}_1 = k_1[du\,dv] = ab_3^1[du\,dv] = [a\,du,\ b_3^1 dv] = [\omega_1^3\omega_3^1],$$

вернёмся к инвариантным формам (27a), (27'').

Аналогично, дифференцируя «аналитическую плоскость» (касательную плоскость первой фокальной поверхности) $\boldsymbol{a}=[123]$, где $[ijk]$ обозначает плоскость $(A_iA_jA_k)$, получим в силу (24а) — (24d) § 195:

$$d[123]=(\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3)[123]+\alpha\omega_1^3[124]-\omega_2^4[134],$$
$$d[124]=(\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_4^4)[124]-\omega_1^3[234]+\alpha'\omega_2^4[123],$$
$$d[134]=(\omega_1^1+\omega_3^3+\omega_4^4)[134]+\gamma\omega_2^4[234]-\omega_4^2[123],$$

откуда

$$\boldsymbol{a}_u=\boldsymbol{a}\,(a_1^1+a_2^2+a_3^3)+\alpha a\,[124],$$
$$\boldsymbol{a}_v=\boldsymbol{a}\,(b_1^1+b_2^2+b_3^3)-b\,[134],$$
$$[124]_v=[124]\,(b_1^1+b_2^2+b_4^4)+\alpha' b\boldsymbol{a},\quad [134]_u=[134]\,(a_1^1+a_3^3+a_4^4)-a_4^2\boldsymbol{a}.$$

Мы получаем снова уравнение Лапласа уже для тангенциальных координат поверхности (для аналитической касательной плоскости)

$$\boldsymbol{a}_{uv}=\mathscr{A}'\boldsymbol{a}_u+\mathscr{B}'\boldsymbol{a}_v+\mathscr{C}'\boldsymbol{a},$$

где, в зависимости от дифференцирования $\boldsymbol{a}_u$ по v или $\boldsymbol{a}_v$ по u, будем иметь:

$$\mathscr{A}'=\frac{\partial\ln(\alpha a)}{\partial v}+b_1^1+b_2^2+b_4^4=b_1^1+b_2^2+b_3^3,$$
$$\mathscr{B}'=a_1^1+a_2^2+a_3^3=\frac{\partial\ln b}{\partial u}+a_1^1+a_3^3+a_4^4,$$
$$\mathscr{C}'=\frac{\partial}{\partial v}(a_1^1+a_2^2+a_3^3)+\alpha\alpha' ab-\mathscr{A}'\mathscr{B}'=$$
$$=\frac{\partial}{\partial u}(b_1^1+b_2+b_3^3)+ba_4^2-\mathscr{A}'\mathscr{B}'.$$

Отсюда тангенциальные инварианты фокальной сети на первой фокальной поверхности

$$H_1=\mathscr{C}'+\mathscr{A}'\mathscr{B}'-\mathscr{A}'_u=ba_4^2,\quad K_1=\mathscr{C}'+\mathscr{A}'\mathscr{B}'-\mathscr{B}'_v=\alpha\alpha' ab$$

и внешние формы

$$\mathscr{H}_1=H_1[du\,dv]=ba_4^2[du\,dv]=[a_4^2du,\ b\,dv]=[\omega_4^2\omega_2^4],$$
$$\mathscr{K}_1=K_1[du\,dv]=\alpha\alpha' ab\,[du\,dv]=\alpha\alpha'\,[\omega_1^3\omega_2^4]$$

совпадают с формами (27b), (27″).

Таким образом, внешние формы (27a) — (27c) связаны с точечными h_1, k_1 и тангенциальными H_1, K_1 инвариантами фокальной сети соотношениями

$$\mathfrak{h}_1=h_1[du\,dv],\quad \mathfrak{k}_1=k_1[du\,dv],\quad \mathscr{H}_1=H_1[du\,dv],$$
$$\mathscr{K}_1=K_1[du\,dv], \qquad (2‴)$$

где u, v — параметры сети, для которых вычислены инварианты соответствующих уравнений Лапласа.

199. Приложения теории внешних инвариантных форм. Соотношения между внешними инвариантными формами конгруэнции имеют большое значение для выделения наиболее важных классов конгруэнций.

Ввиду непосредственной связи (27‴) между инвариантными внешними формами $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{k}_1$, $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{K}_1$ и инвариантами соответствующих уравнений Лапласа, в дальнейшем мы будем те и другие без различия называть точечными или тангенциальными инвариантами сети.

Из уравнения (27′) прямо вытекают с л е д с т в и я:

Если первый точечный инвариант сети равен второму тангенциальному, то конгруэнция касательных к первому семейству линий сети есть конгруэнция W.

Если сумма первого точечного и второго тангенциального инвариантов фокальной сети первой фокальной конгруэнции равна нулю, то конгруэнция есть конгруэнция V (т. е. асимптотические каждой фокальной поверхности соответствуют сопряжённой системе линий на другой фокальной поверхности).

Формулы (16) § 126 дают переход от инвариантов h, k некоторой сети к инвариантам h_1, k_1 сети, преобразованной в сторону линии v. Для перехода от поверхности (A_1) к поверхности (A_2) эти формулы примут вид:

$$h_2=2h_1-k_1-\frac{\partial\ln h_1}{\partial u\,\partial v},\quad k_2=h_1, \qquad (29)$$

где h_i, k_i — инварианты сети (A_i).

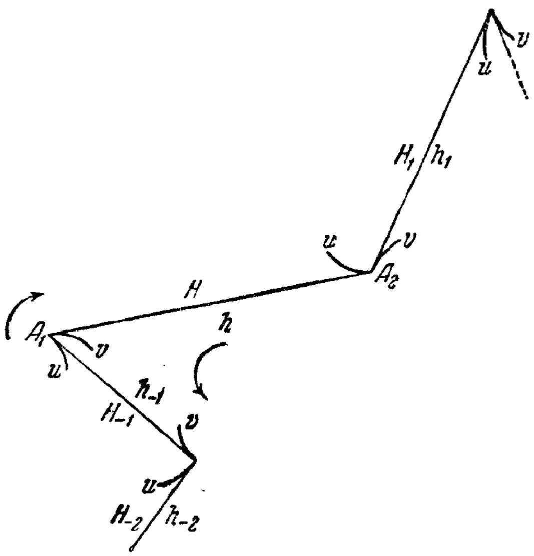
Мы видим, что первый инвариант первой фокальной поверхности всегда равняется второму инварианту второй. Поэтому будет целесообразно изменить обозначения. Будем приписывать каждой конгруэнции последовательности равные между собой инварианты его первой и второй фокальной сети. Тогда можно все точечные инварианты обозначать одной буквой h, приписывая исходной конгруэнции (A_1A_2) инвариант $h_0=h$, её преобразованию (A_2A_{2v}) инвариант h_1 с указателем 1, её преобразованию в сторону u, т. е. конгруэнции (A_1A_{1u}), инвариант h_{-1} и т. д.

Каждая фокальная сеть последовательности Лапласа будет иметь своими инвариантами, первым и вторым соответственно, инварианты двух её конгруэнций: последующей (в направлении v) и предыдущей (в направлении u).

Следовательно, инвариант h заменит равные инварианты $h_1=k_2$, инвариант h_1 станет на место инварианта h_2, инвариант h_{-1} будет равен k. Второе уравнение (29) в новых обозначениях обратится в тождество, а первое для любой сети примет вид

$$h_{i-1}+h_{i+1}=2h_i-\frac{\partial^2\ln h_i}{\partial u\,\partial v}. \qquad (29')$$

Эти формулы сохраняют силу и для тангенциальных инвариантов, но последовательность их теперь иначе направлена, ибо для тангенциального уравнения Лапласа переход от сети (A_1) к сети (A_2) совершается преобразованием Лапласа в направлении линии u. Действительно, в то время как две точки A_1 и A_{1v} определяют касательную A_1A_2, две плоскости $a=[123]$ и a_v пересекаются по характеристике, соответствующей перемещению точки касания по линии v, но совпадающей с касательной, сопряжённой лучу A_1A_2, т. е. в наших обозначениях с касательной к линии u сети. Таким образом, если тангенциальный инвариант конгруэнции, у которой точечный инвариант $-h_i$, обозначить через H_i, то первым тангенциальным инвариантом сети будет инвариант предыдущей конгруэнции, а вторым — последующей.



Черт. 13.

Итак, в новых обозначениях $\mathscr{k}_1 \to \mathscr{h}_{-1}$, $\mathscr{K}_1 \to \mathscr{H}$, $\mathscr{H}_1\,\mathscr{H}_{-1}$ мы будем иметь:

$$\begin{aligned} \mathscr{h}_{-1} &= [\Delta\beta_2, \omega_1^3] = -\beta_{22}[\omega_1^3\omega_2^4], \quad \mathscr{h} = \gamma\gamma'\,[\omega_1^3\omega_2^4], \\ \mathscr{h}_1 &= -[\Delta\beta_1'\omega_2^4] = -\beta_{11}'[\omega_1^3\omega_2^4], \\ \mathscr{H}_{-1} &= [\Delta\beta_1\omega_2^4] = \beta_{11}\,[\omega_1^3\omega_2^4], \quad \mathscr{H} = \alpha\alpha'\,[\omega_1^3\omega_2^4], \\ \mathscr{H}_1 &= -[\Delta\beta_2'\ \omega_1^3] = \beta_{22}'\,[\omega_1^3\omega_2^4], \end{aligned} \tag{30}$$

где в силу симметричности тетраэдра 1-го порядка относительно фокальных поверхностей формулы последнего столбца получаются из формул первого столбца заменой u на v, указателей 1,4 на 2,3 с добавлением штрихов у β_i.

Высказанные в начале параграфа следствия принимают вид:

Конгруэнция W характеризуется равенством её точечного и тангенциального инвариантов.

Конгруэнция V характеризуется равенством нулю суммы ее точечного и тангенциального инвариантов.

200. Конгруэнция R. Допустим теперь, что две рядом стоящих конгруэнции последовательности суть конгруэнции W. Тогда мы будем иметь:

$$h_i = H_i, \quad h_{i+1} = H_{i+1}$$

и по формуле (29′)

$$h_{i-1} = -h_{i+1} + 2h_i - \frac{\partial^2 \ln h_i}{\partial u\,\partial v} = -H_{i+1} + 2H_i - \frac{\partial^2 \ln H_i}{\partial u\,\partial v} - H_{i-1},$$

т. е. и следующая конгруэнция последовательности будет тоже W. Следовательно, все конгруэнции последовательности должны быть конгруэнциями W. Согласно определению такие конгруэнции суть конгруэнции R. Мы снова получаем т е о р е м у:

Если две рядом стоящие конгруэнции последовательности суть конгруэнции W, то вся последовательность состоит из конгруэнций W.

И, кроме того, характеристический признак конгруэнции R:

Чтобы конгруэнция (A_1A_2) была конгруэнцией R, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\mathscr{h} = \mathscr{H}, \quad \mathscr{h}_{-1} = \mathscr{H}_{-1} \tag{31}$$

или

$$\alpha\alpha' - \gamma\gamma' = 0, \quad \beta_{11} + \beta_{22} = 0. \tag{31′}$$

Последние условия вытекают из первых по формулам (30). Каждое из уравнений (31′) — инвариантно относительно преобразований тетраэдра 1-го порядка. Первое из них показывает, что конгруэнция (A_1A_2) есть конгруэнция W, второе, что этим свойством обладает её первое преобразование Лапласа в направлении от A_2 к A_1.

201. Конгруэнция с равными точечными инвариантами. Будем называть конгруэнцией с *равными точечными инвариантами* конгруэнцию, для которой

$$h_{-1} = h_1. \tag{32a}$$

Тогда из двух уравнений

$$h_{-2} + h = 2h_{-1} - (\ln h_{-1})_{uv}, \quad h_2 + h = 2h_1 - (\ln h_1)_{uv}$$

посредством вычитания получим в силу (32a) $h_{-2} = h_2$ и, применяя полную индукцию, будем иметь:

$$h_{-i} = h_i. \tag{32b}$$

Допустим, что k-е преобразование конгруэнции (32a) — тоже конгруэнция с равными инвариантами; тогда при любом целом i будем иметь

$$h_{k-i} = h_{k+i}. \tag{32c}$$

Применяя равенство (32b) к левой и правой частям, т. е. заменяя $h_{k-i} = h_{-k+i}$, $h_{k+i} = h_{-k-i}$, получим:

$$h_{-k+i} = h_{-k-i}.$$

Это показывает, что преобразование ранга $-k$ исходной конгруэнции тоже обладает равными точечными инвариантами. Применяя эту теорему к k-му преобразованию, получим, что — $2k$-е преобразование обладает равными точечными инвариантами и т. д. Имеем теорему:

Если конгруэнция и её k-е преобразование Лапласа обладают равными точечными инвариантами, то каждая конгруэнция последовательности ранга, кратного числу k, обладает тем же свойством.

Всё это переносится непосредственно и на тангенциальные инварианты.

Теоремы существования для этих конгруэнций доказываются без большого труда. Например, для определения конгруэнции с равными точечными и равными тангенциальными инвариантами, надо интегрировать систему уравнений (5) § 185, (7) § 186, (9), (10) § 187 совместно с уравнениями

$$\hbar_{-1} = \hbar_1, \quad \mathscr{H}_{-1} = \mathscr{H}_1. \tag{32d}$$

Если воспользоваться формулами (30), то уравнения (10) и (32d) примут вид

$$\begin{aligned}
&[\Delta\alpha_1\ \omega_1^3] - [\Delta\beta_1\ \omega_2^4] = 0, && [\Delta\gamma_1'\omega_1^3] + [\Delta\beta_1'\ \omega_2^4] = 0,\\
&\alpha[\Delta\beta_1\ \omega_1^3] + \gamma[\Delta\beta_2\ \omega_2^4] = 0, && \gamma'[\Delta\beta_1'\omega_1^3] + \alpha'[\Delta\beta_2'\ \omega_2^4] = 0,\\
&[\Delta\beta_2\ \omega_1^3] + [\Delta\gamma_2\ \omega_2^4] = 0, && [\Delta\beta_2'\omega_1^3] - [\Delta\alpha_2'\omega_2^4] = 0,\\
&[\Delta\beta_2\ \omega_1^3] + [\Delta\beta_1'\omega_2^4] = 0, && [\Delta\beta_1\omega_2^4] + [\Delta\beta_2'\omega_1^3] = 0.
\end{aligned} \tag{32e}$$

На первом интегральном элементе значения всех форм характеристической системы определены линейными уравнениями (5), (7), (9), кроме форм $\Delta\alpha_1$, $\Delta\beta_1$, $\Delta\beta_2$, $\Delta\gamma_2$, $\Delta\alpha_2'$, $\Delta\beta_1'$, $\Delta\beta_2'$, $\Delta\gamma_1'$. На втором — значения всех этих восьми неизвестных форм определятся из билинейных уравнений, присоединённых к квадратичным уравнениям (32e), если только на первом линейном элементе определитель системы

$$-\{\alpha\gamma'(\omega_1^3)^4 - \alpha'\gamma(\omega_2^4)^4\}(\omega_1^3\omega_2^4)^2$$

отличен от нуля. Система в инволюции и определяет конгруэнцию с восьмью произвольными функциями одного аргумента.

V. ЛИНЕЙНЫЕ КОМПЛЕКСЫ, ПРИСОЕДИНЁННЫЕ К ЛУЧУ КОНГРУЭНЦИИ

202. Инвариантные линейные комплексы окрестности 2-го порядка. Если луч A_1A_2 неподвижен и, следовательно, основные формы ω_1^3, ω_2^4, а вместе с ними и все главные формы ω_1^2, ω_2^1, ω_3^4, ω_4^3 и т. д., равны нулю, то формулы (1) § 185 примут вид:

$$\delta A_1 = \pi_1^1 A_1, \quad \delta A_2 = \pi_2^2 A_2,$$
$$\delta A_3 = \pi_3^3 A_3 + \pi_3^1 A_1 + \pi_3^2 A_2,$$
$$\delta A_4 = \pi_4^4 A_4 + \pi_4^1 A_1 + \pi_4^2 A_2.$$

Отсюда простым дифференцированием найдём вариацию аналитических прямых (A_iA_k), которые определяют рёбра тетраэдра

$$\begin{aligned}
\delta[12] &= (\pi_1^1 + \pi_2^2)[12],\\
\delta[13] &= (\pi_1^1 + \pi_3^3)[13] + \pi_3^2[12],\\
\delta[14] &= (\pi_1^1 + \pi_4^4)[14] + \pi_4^2[12],\\
\delta[23] &= (\pi_2^2 + \pi_3^3)[23] - \pi_3^1[12],\\
\delta[42] &= (\pi_2^2 + \pi_4^4)[42] + \pi_4^1[12],\\
\delta[34] &= (\pi_3^3 + \pi_4^4)[34] + \pi_3^1[14] - \pi_3^2[42] - \pi_4^1[13] - \pi_4^2[23].
\end{aligned} \tag{33a}$$

Теперь вариация аналитической точки $\mathfrak{a}$ проективного пространства P_5, которая изображает произвольный линейный комплекс

$$\mathfrak{a} = a^{ik}[ik], \qquad \text{суммирование по } i,\ k = 1, 2, 3, 4$$

может быть записана в виде

$$\begin{aligned}
\delta\mathfrak{a} = {} & [12]\{\delta a^{12} + (\pi_1^1 + \pi_2^2)a^{12} + \pi_3^2 a^{13} + \pi_4^2 a^{14} - \pi_3^1 a^{23} + \pi_4^1 a^{42}\} + \\
& + [13]\{\delta a^{13} + (\pi_1^1 + \pi_3^3)a^{13} - \pi_4^1 a^{34}\} + \\
& + [14]\{\delta a^{14} + (\pi_1^1 + \pi_4^4)a^{14} + \pi_3^1 a^{34}\} + \\
& + [23]\{\delta a^{23} + (\pi_2^2 + \pi_3^3)a^{23} - \pi_4^2 a^{34}\} + \\
& + [42]\{\delta a^{42} + (\pi_2^2 + \pi_4^4)a^{42} - \pi_3^2 a^{34}\} + \\
& + [34]\{\delta a^{34} + (\pi_3^3 + \pi_4^4)a^{34}\}.
\end{aligned} \tag{33b}$$

Построить комплекс $\mathfrak{a}$, внутренне связанный с дифференциальной окрестностью n-го порядка луча конгруэнции, значит подобрать для координат a^{ik} такие выражения через коэффициенты разложений главных форм n-го порядка по формам ω_1^3, ω_2^4, чтобы комплекс $\mathfrak{a}$ до произвольного общего множителя не менялся при допустимых преобразованиях координатного тетраэдра $\{A_i\}$, т. е. чтобы комплекс $\mathfrak{a}$ удовлетворял условию

$$\delta\mathfrak{a} = \theta\mathfrak{a}, \tag{33c}$$

где θ — произвольная форма вторичных параметров. Допустимы те преобразования, которые оставляют тетраэдр в семействе тетраэдров 1-го порядка.

Нетрудно заметить, что этому условию можно удовлетворить, полагая все $a^{ik} = 0$, кроме $a^{12} = 1$. При этом форма θ будет равна $\pi_1^1 + \pi_2^2$. Однако комплекс

$$\mathfrak{a}_0 = [12]$$

несомненно инвариантный не представляет интереса: это специальный линейный комплекс, ось которого совпадает с лучом конгруэнции

A_1A_2, следовательно, комплекс, содержащий все прямые, пересекающие рассматриваемый луч нашей конгруэнции A_1A_2.

Допустим теперь, что комплекс $\mathfrak{a}$ имеет хотя бы одну компоненту, кроме первой a^{12}. Внесём в уравнение (33c) значение $\delta\mathfrak{a}$ по формуле (33b) и сравним в левой и правой частях коэффициенты при аналитической прямой [12]. Мы получим уравнение

$$\delta a^{12}+(\pi_1^1+\pi_2^2)\,a^{12}+\pi_3^2\,a^{13}+\pi_4^2\,a^{14}-\pi_3^1\,a^{23}+\pi_4^1\,a^{42}=\theta a^{12}. \quad (33d)$$

При сделанном предположении из него следует, что вариация δa^{12} должна содержать члены с вторичными формами π_i^k так, чтобы они сокращались с теми из четырёх последних членов левой части, которые отличны от нуля. Если мы не хотим выходить из дифференциальной окрестности 2-го порядка и, следовательно, можем пользоваться только коэффициентами α, β, γ, α', β', γ', то мы сумеем сократить только члены, содержащие формы π_3^2 и π_4^1, пользуясь формулами (14b) § 188

$$\delta\beta=-\pi_3^2+\beta(\pi_3^3-\pi_2^2),\quad \delta\beta'=-\pi_4^1+\beta'(\pi_4^4-\pi_1^1).$$

Действительно, полагая

$$a^{12}=x\beta+y\beta',$$

получим:

$$\delta a^{12}=\beta\,\delta x+\beta'\,\delta y+x\beta(\pi_3^3-\pi_2^2)+y\beta'(\pi_4^4-\pi_1^1)-x\pi_3^2-y\pi_4^1.$$

Подстановка этого значения в уравнение (33d) покажет, что нам надо принять

$$a^{13}=x,\quad a^{42}=y,\quad a^{14}=0,\quad a^{23}=0,\quad a^{34}=0;$$

последнее равенство получено уже из рассмотрения других уравнений, вытекающих из равенства (33c). Внося эти значения в формулу (33b), подставляя опять $\mathfrak{a}$ и $\delta\mathfrak{a}$ в уравнение (33c) и сравнивая коэффициенты при всех прямых $[ik]$ в левой и правой частях, мы придём только к трём уравнениям (остальные три удовлетворяются тождественно):

$$\beta\,\delta x+\beta'\,\delta y+x\beta(\pi_3^3+\pi_1^1)+y\beta'(\pi_4^4+\pi_2^2)=\theta(x\beta+y\beta'),$$
$$\delta x+x(\pi_1^1+\pi_3^3)=\theta x,\quad \delta y+y(\pi_2^2+\pi_4^4)=\theta y.$$

Исключая из трёх уравнений δx, δy, получаем тождество; следовательно, независимыми будут два уравнения, например два последних, исключая из них θ, имеем:

$$\delta\ln\frac{x}{y}=\pi_2^2+\pi_4^4-\pi_1^1-\pi_3^3.$$

Пользуясь формулами (14a) § 188, получим:

$$\delta\ln\frac{\alpha'}{\gamma}=\delta\ln\frac{\gamma'}{\alpha}=\pi_2^2+\pi_4^4-\pi_1^1-\pi_3^3.$$

Следовательно, мы можем принять

$$x=\alpha',\ y=\gamma\ \text{ или }\ x=\gamma',\ y=\alpha.$$

Само собой понятно, что отношение $\frac{x}{y}$ можно умножить на любое постоянное число или на произвольную функцию от абсолютного инварианта $I=\frac{\alpha\alpha'}{\gamma\gamma'}$. Имеем, например, инвариантные комплексы дифференциальной окрестности 2-го порядка

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}_1&=(\alpha'\beta+\gamma\beta')\,[12]+\alpha'\,[13]+\gamma\,[42],\\ \mathfrak{a}_2&=(\gamma'\beta+\alpha\beta')\,[12]+\gamma'\,[13]+\alpha\,[42].\end{aligned} \quad (34a)$$

Очевидно, весь пучок комплексов

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_1+\lambda\mathfrak{a}_2, \quad (34b)$$

где λ — любое постоянное или даже функция от абсолютного инварианта $I=\frac{\alpha\alpha'}{\gamma\gamma'}$, будет инвариантно связан с окрестностью 2-го порядка луча.

203. Касательные линейные комплексы конгруэнции. Не так легко выяснить геометрический смысл комплексов (34b). Прежде всего следует сказать, что все комплексы пучка касаются конгруэнции (A_1A_2), т. е. содержат не только луч $(A_1A_2)_0$, но и всю дифференциальную окрестность 1-го порядка $(A_1A_2)_0+d\,(A_1A_2)$.

Заметим, что линейный комплекс $\mathfrak{a}$ содержит все прямые $\boldsymbol{p}$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\{\mathfrak{a}\boldsymbol{p}\}=0.$$

Следовательно, условие касания 1-го порядка запишется уравнениями

$$\{\mathfrak{a}\,[12]\}=0,\quad \{\mathfrak{a}\,d\,[12]\}=0. \quad (34c)$$

Внося сюда

$$d\,[12]=(\omega_1^1+\omega_2^2)\,[12]+\omega_2^4\,[14]-\omega_1^3\,[23],$$

мы перепишем систему (34c) в виде

$$\{\mathfrak{a}\ \ [12]\}=0,\quad \omega_2^4\{\mathfrak{a}\ \ [14]\}-\omega_1^3\{\mathfrak{a}\ \ [23]\}=0.$$

Эти уравнения должны быть удовлетворены для произвольного отношения $\omega_1^3:\omega_2^4$. Внося сюда $\mathfrak{a}=a^{ik}\,[ik]$ и обращая в нуль коэффициенты при ω_1^3, ω_2^4, мы получим условие касания 1-го порядка в виде

$$a^{34}=0,\quad a^{23}=0,\quad a^{14}=0. \quad (34d)$$

Этим условиям удовлетворяют оба комплекса базиса (34а), а, следовательно, и все комплексы пучка, но не только они, ибо уравнения (34d) не накладывают никаких условий на остальные координаты линейного комплекса.

Линейный комплекс $\mathfrak{a}$ будет иметь касание 2-го порядка, если кроме равенств (34c) будет иметь место уравнение

$$\{\mathfrak{a}\ d^2[12]\} = 0. \tag{34e}$$

Если условия (34d) уже выполнены, то уравнение (34e) равносильно уравнению

$$\{\mathfrak{a}\ \omega_2^4 d[14] - \omega_1^3 d[23]\} = 0.$$

Внося сюда

$$d[14] = (\omega_1^1 + \omega_4^4)[14] - \omega_1^2[42] + \omega_1^3[34] + \omega_4^2[12] + \omega_4^3[13],$$
$$d[23] = (\omega_2^2 + \omega_3^3)[23] + \omega_2^1[13] - \omega_2^4[34] - \omega_3^1[12] - \omega_3^4[42]$$

и имея в виду (34d), получим:

$$\{\mathfrak{a}[42]\}(\omega_1^3\omega_3^4 - \omega_1^2\omega_2^4) + \{\mathfrak{a}\ [13]\}(\omega_2^4\omega_4^3 + \omega_2^1\omega_1^3) + 2\{\mathfrak{a}\ [34]\}\omega_1^3\omega_2^4 = 0.$$

Положим для краткости письма $\beta = 0$, $\beta' = 0$, т. е. отнесём нашу конгруэнцию к касательным фокальных сетей; если мы внесём сюда $\mathfrak{a} = a^{ik}[ik]$ и воспользуемся формулами (7) § 186, то условие касания 2-го порядка примет вид

$$(\alpha a^{13} - \gamma' a^{42})(\omega_1^3)^2 + (\alpha' a^{42} - \gamma a^{13})(\omega_2^4)^2 + 2a^{12}\omega_1^3\omega_2^4 = 0. \tag{34f}$$

Это уравнение, квадратное относительно форм ω_1^3, ω_2^4, определяет два семейства линейчатых поверхностей конгруэнции, вдоль которых касательный комплекс с координатами a^{12}, a^{13}, a^{42} имеет с конгруэнцией касание 2-го порядка.

Если потребовать, чтобы эти два семейства линейчатых поверхностей совпадали с дважды взятым семейством развёртывающихся поверхностей конгруэнции первым или вторым, то получим:

$$\alpha' a^{42} - \gamma a^{13} = 0,\ a^{12} = 0 \text{ или } \alpha a^{13} - \gamma' a^{42} = 0,\ a^{12} = 0,$$

т. е., принимая во внимание, что мы положили $\beta = 0$, $\beta' = 0$, первый или второй базисный комплекс (34а).

Внося в уравнение (34f) значение $a^{12} = 0$, $a^{13} = \alpha' + \lambda\gamma'$, $a^{42} = \gamma + \alpha\lambda$, получим уравнение поверхностей, вдоль которых порядок касания комплекса из пучка $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \lambda\mathfrak{a}_2$ с конгруэнцией (A_1A_2) повышается, в виде

$$(\alpha\alpha' - \gamma\gamma')\{(\omega_1^3)^2 - \lambda(\omega_2^4)^2\} = 0. \tag{34g}$$

Это уравнение обращается в тождество, если

$$\alpha\alpha' - \gamma\gamma' = 0.$$

Тогда конгруэнция становится конгруэнцией W, а каждый комплекс пучка $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \lambda\mathfrak{a}_2$ будет иметь касание 2-го порядка с конгруэнцией (A_1A_2), но при этом условии базисные комплексы пропорциональны

$$\mathfrak{a}_1 = \frac{\gamma}{\alpha}\mathfrak{a}_2$$

и, следовательно, все комплексы пучка совпадают и дают один соприкасающийся комплекс конгруэнции:

$$\mathfrak{a} = \alpha'[13] + \gamma[42]. \tag{35}$$

Теорема. *Только конгруэнции W имеют соприкасающийся линейный комплекс.*

Теорема прямо следует из уравнения (34f). Чтобы комплекс имел касание 2-го порядка, уравнение (34f) должно быть удовлетворено при любых значениях форм ω_1^3, ω_2^4. Это приводит к уравнениям

$$\alpha a^{13} - \gamma' a^{42} = 0, \quad a^{12} = 0.$$
$$\gamma a^{13} - \alpha' a^{42} = 0,$$

Чтобы существовал соприкасающийся комплекс, система должна допускать ненулевое решение, а это требует обращения в нуль определителя системы

$$\alpha\alpha' - \gamma\gamma' = 0,$$

что характеризует конгруэнции W.

204. Инвариантые линейные комплексы окрестности 3-го порядка. Если обратиться к окрестности 3-го порядка и ввести функции α_1, β_1, β_2, γ_2 и такие же со штрихами, то мы получим несравненно больше возможностей для построения инвариантно связанного с конгруэнцией комплекса, ибо вариации $\delta\alpha_1$, $\delta\beta_1$, $\delta\beta_2$, $\delta\gamma_2, \ldots$ вводят уже формы π_3^1, π_4^2. Поскольку сумма инвариантных комплексов, очевидно, образует инвариантный комплекс, мы можем при построении нового комплекса опускать члены, пропорциональные комплексам $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$.

Полагая

$$a^{12} = x\beta_1 + y\beta_2,$$

получим по формулам (14c) § 190

$$\delta a^{12} = \beta_1\delta x + \beta_2\delta y + x\beta_1(\pi_4^4 - \pi_2^2) + y\beta_2(\pi_3^3 - \pi_1^1) - x\pi_4^2 + y\pi_3^1.$$

Уравнение (33d) покажет теперь, что для сокращения членов, содержащих формы π_i^k, надо взять

$$a^{14} = x, \quad a^{23} = y, \quad a^{42} = 0, \quad a^{13} = 0, \quad a^{34} = 0.$$

Уравнение (33c), если подсчитать $\delta\alpha$ и разложить на компоненты, даст опять три уравнения

$$\beta_1\delta x+\beta_2\delta y+x\beta_1(\pi_1^1+\pi_4^4)+y\beta_2(\pi_2^2+\pi_3^3)=\theta(x\beta_1+y\beta_2),$$
$$\delta x+x(\pi_1^1+\pi_4^4)=\theta x,\quad \delta y+y(\pi_2^2+\pi_3^3)=\theta y.$$

Подстановка δx, δy из последних уравнений в первое приводит к тождеству. Следовательно, из этих трёх уравнений независимыми являются два, например два последних. Исключение из них θ даёт единственное уравнение на x, y

$$\delta\ln\frac{x}{y}=\pi_2^2+\pi_3^3-\pi_1^1-\pi_4^4.$$

Так как

$$\delta\ln\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}=\delta\ln\sqrt{\frac{\gamma'}{\alpha'}}=\pi_2^2+\pi_3^3-\pi_1^1-\pi_4^4,$$

мы можем принять, например,

$$x=\sqrt{\alpha},\quad y=\sqrt{\gamma}.$$

Комплексы

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}_3&=(\beta_1\sqrt{\alpha}+\beta_2\sqrt{\gamma})[12]+\sqrt{\alpha}[14]+\sqrt{\gamma}[23],\\ \mathfrak{a}_4&=(\beta_1'\sqrt{\gamma'}+\beta_2'\sqrt{\alpha'})[12]-\sqrt{\gamma'}[14]-\sqrt{\alpha'}[23]\end{aligned}\tag{36a}$$

инвариантны и принадлежат окрестности 3-го порядка. Точно так же, как показывают уравнения (14c′) § 190 можно взять

$$x=\alpha_1+3\beta_2,\ y=\gamma_2-3\beta_1\ \text{или}\ x=\gamma_1'-3\beta_2',\ y=\alpha_2'+3\beta_1'.$$

Новый комплекс (уже не содержащий прямой A_1A_2) получим, если введём компоненту $a^{34}[34]$. Полагая $a^{34}=x$, мы должны для сокращения в уравнениях

$$\delta a^{13}+a^{13}(\pi_1^1+\pi_3^3)-x\pi_4^1=\theta a^{13},\quad \delta a^{14}+a^{14}(\pi_1^1+\pi_4^4)+x\pi_3^1=\theta a^{14},$$
$$\delta a^{23}+a^{23}(\pi_2^2+\pi_3^3)-x\pi_4^2=\theta a^{23},\quad \delta a^{42}+a^{42}(\pi_2^2+\pi_4^4)-x\pi_3^2=\theta a^{42}$$

членов, содержащих формы π_i^k, взять

$$a^{13}=-x\beta',\quad a^{14}=-x\beta_2,\quad a^{23}=-x\beta_1,\quad a^{42}=-x\beta.$$

Уравнение (33d) заставит нас теперь выбрать для a^{12} выражение

$$a^{12}=-x\beta\beta'-x\beta_1\beta_2.$$

Уравнение (33c) после разложения на компоненты сведётся к одному равенству:

$$\delta x+x(\pi_3^3+\pi_4^4)=\theta x.$$

Без стеснения общности можно положить $x=-1$. Мы получим инвариантный комплекс

$$\mathfrak{a}_5=(\beta\beta'+\beta_1\beta_2)[12]+\beta'[13]+\beta[42]+\beta_1[23]+\beta_2[14]-[34].\tag{36b}$$

Нетрудно заметить, однако, что произведение Плюккера

$$\{\mathfrak{a}_5\mathfrak{a}_5\}=-(\beta\beta'+\beta_1\beta_2)+\beta\beta'+\beta_1\beta_2=0$$

равно нулю; следовательно, комплекс — специальный. Чтобы представить расположение его оси, отнесём конгруэнцию к тетраэдру, построенному на касательных двух фокальных сетей и осях первой фокальной сети. По формулам (24b) — (24d) § 195 мы будем иметь:

$$\beta=0,\quad \beta'=0,\quad \beta_1=0,\quad \beta_2=0$$

и комплекс (36b)

$$\mathfrak{a}_5=-[34]$$

будет иметь осью ребро A_3A_4. Так как A_3 — первое преобразование Лапласа от фокуса A_1, ребро A_1A_4 — первая ось фокальной сети (A_1), а прямая A_2A_4 — первое преобразование луча A_1A_2 в направлении от A_1 к A_2, то комплекс $\mathfrak{a}_5$ имеет совершенно простое и даже тривиальное значение: это — специальный комплекс, ось которого соединяет первое преобразование Лапласа фокуса A_1 с той точкой первого преобразования луча A_1A_2 в другом направлении, где его пересекает первая ось сети (A_1).

VI. КОНГРУЭНЦИЯ W

205. Соприкасающийся комплекс конгруэнции W. Конгруэнция W определяется уравнением

$$\alpha\alpha'-\gamma\gamma'=0.\tag{37a}$$

Дифференцируя это равенство и пользуясь формулами (8′) § 187, получим:

$$\Delta\alpha+\Delta\alpha'-\Delta\gamma-\Delta\gamma'=0.\tag{37b}$$

Если сюда внести значения (9) § 187 и сравнить коэффициенты при ω_1^3, ω_2^4, получим:

$$\begin{aligned}\alpha_1-\gamma_1'&=\beta_2+\beta_2',\\ \alpha_2'-\gamma_2&=\beta_1+\beta_1'.\end{aligned}\tag{37c}$$

Новое дифференцирование с помощью формул (10′) § 187 даёт:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_1-\Delta\gamma_1'&=\Delta\beta_2+\Delta\beta_2',\\ \Delta\alpha_2'-\Delta\gamma_2&=\Delta\beta_1+\Delta\beta_1',\end{aligned}\tag{37d}$$

откуда, разлагая с помощью формул (11) § 187 на компоненты, получим:

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}-\gamma'_{11}=\alpha\beta_{12}+\gamma'\beta'_{12},\\ &\beta_{11}+\beta'_{11}+\beta_{22}+\beta'_{22}=0,\\ &\alpha'_{22}-\gamma_{22}=\gamma\beta_{12}+\alpha'\beta'_{12}. \end{aligned} \tag{37e}$$

Конгруэнция W обладает одним определённым соприкасающимся линейным комплексом, который имеет касание 2-го порядка с конгруэнцией на заданном луче его. Будет ли в каждом луче конгруэнции свой соприкасающийся комплекс или найдутся такие линейчатые поверхности конгруэнции, вдоль которых соприкасающийся комплекс остаётся неизменным?

Если соприкасающийся комплекс $\mathfrak{a}$ при перемещении от одного луча к другому внутри конгруэнции остаётся неизменным, то для этого перемещения дифференциал аналитической точки $\mathfrak{a}$, изображающий комплекс в проективном пятимерном пространстве P_5, будет пропорционален самой точке $\mathfrak{a}$

$$d\mathfrak{a}=\theta\mathfrak{a}, \tag{38a}$$

где θ — подходящая форма Пфаффа.

Отнесём для простоты выкладок конгруэнцию (A_1A_2) к тетраэдру, построенному на касательных обеих фокальных сетей, т. е. положим

$$\beta=0,\quad \beta'=0,\quad \Delta\beta=\omega_3^2,\quad \Delta\beta'=\omega_4^1. \tag{38b}$$

Соприкасающийся комплекс будет изображаться точкой

$$\mathfrak{a}=\gamma\,[42]+\alpha'\,[13]. \tag{38c}$$

Дифференцируя это выражение с учётом соотношения (37a), получим:

$$d\mathfrak{a}=[42]\,\{d\gamma+\gamma\,(\omega_2^2+\omega_4^4)\}+[13]\,\{d\alpha'+\alpha'\,(\omega_1^1+\omega_3^3)\}+\\ +[12]\,\{\gamma\omega_4^1+\alpha'\omega_3^2\}.$$

Внося эти значения $\mathfrak{a}$ и $d\mathfrak{a}$ в уравнение (38a) и сравнивая коэффициенты при одинаковых скобках $[ik]$, получим три уравнения:

$$\begin{aligned} &d\gamma+\gamma\,(\omega_2^2+\omega_4^4)=\theta\gamma, \qquad \gamma\omega_4^1+\alpha'\omega_3^2=0,\\ &d\alpha'+\alpha'\,(\omega_1^1+\omega_3^3)=\theta\alpha', \end{aligned}$$

откуда, исключая θ, получим с учётом (38b) и (8′) § 187

$$\Delta\gamma-\Delta\alpha'=0,\quad \gamma\Delta\beta'+\alpha'\Delta\beta=0. \tag{39a}$$

Как показывают уравнения (22) § 194, оба эти уравнения при условии (37a) инвариантны, т. е. не зависят от выбора тетраэдра 1-го порядка.

Развёртывая эти уравнения с помощью формул (9) § 187 и используя соотношения (37a), (37c), получим:

$$\begin{aligned} &(\beta_2+\beta'_2)\,\omega_1^3-(\beta_1+\beta'_1)\,\omega_2^4=0,\\ &\alpha\,(\beta_1+\beta'_1)\,\omega_1^3+\gamma\,(\beta_2+\beta'_2)\,\omega_2^4=0. \end{aligned} \tag{39b}$$

Эти уравнения относительно ω_1^3, ω_2^4 совместны, если определитель системы равен нулю

$$\alpha\,(\beta_1+\beta'_1)^2+\gamma\,(\beta_2+\beta'_2)^2=0. \tag{39c}$$

Если

$$\beta_1+\beta'_1=0,\quad \beta_2+\beta'_2=0, \tag{39d}$$

то уравнения (39b) удовлетворены при любых ω_1^3, ω_2^4; комплекс $\mathfrak{a}$ остаётся неизменным при всех перемещениях луча внутри конгруэнции, т. е. конгруэнция принадлежит линейному комплексу.

Если $\beta_1+\beta'_1\neq 0$, а следовательно, и $\beta_2+\beta'_2\neq 0$, то по исключении из уравнений (39b) обеих скобок $\beta_1+\beta'_1$, $\beta_2+\beta'_2$, получим:

$$\alpha\,(\omega_1^3)^2+\gamma\,(\omega_2^4)^2=0,$$

т. е. уравнение асимптотических на поверхности (A_1), а значит, и на (A_2).

Если соприкасающийся комплекс — один и тот же вдоль линейчатой поверхности конгруэнции, то эта линейчатая поверхность касается фокальных поверхностей вдоль двух соответствующих асимптотических.

206. Конгруэнции W с однопараметрическим семейством соприкасающихся линейных комплексов.

Эти конгруэнции определяются уравнениями (37a), (39c). Нормируем вершины тетраэдра так, чтобы

$$\gamma=-\alpha. \tag{40a}$$

Дифференцирование этого равенства с учётом формул (8′) § 187 даст:

$$\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3+\omega_4^4=\frac{\Delta\alpha-\Delta\gamma}{2}, \tag{40b}$$

что показывает, что комбинация компонент, стоящая в левой части равенства, стала теперь главной формой.

Внося значения (40a) в уравнение (39c) и сокращая на не равную нулю функцию α, получим в левой части разность квадратов. Два множителя, получаемые в левой части, соответствуют двум возможным выборам асимптотической, проходящей через точку A_1. Если мы примем

$$\beta_1+\beta'_1+\beta_2+\beta'_2=0, \tag{40c}$$

то уравнения (39b) дадут асимптотическую

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0.$$

Лучи конгруэнции (A_1A_2), пересекающие эту асимптотическую (и соответствующую ей асимптотическую второй фокальной поверхности), образуют так называемую асимптотическую линейчатую поверхность конгруэнции, которую мы обозначим буквой $\mathscr{H}$.

Через каждый луч конгруэнции W проходят две асимптотические поверхности.

Поверхность $\mathscr{H}$ для нашей конгруэнции замечательна тем, что через неё проходит линейный комплекс, который имеет касание 2-го порядка с конгруэнцией в каждой образующей поверхности, т. е. конгруэнция имеет один и тот же соприкасающийся линейный комплекс вдоль всей поверхности $\mathscr{H}$.

Конгруэнция определяется системой линейных дифференциальных уравнений (5) § 185, (7) § 186, (9) § 187 вместе с квадратичными уравнениями (10) § 187 и конечными (37c) и (40a, c).

Дифференцирование уравнений (37c) даёт систему (37d); дифференцирование уравнения (40c) с учётом формул (10′), (40b) приводит к уравнению

$$\Delta\beta_1 + \Delta\beta_2 + \Delta\beta_1' + \Delta\beta_2' = (\beta\alpha' - \beta'\alpha)(\omega_1^3 - \omega_2^4) + \\ + (\beta_2 + \beta_2') + \left\{\frac{\alpha_1 + \beta_2 - 2\beta_2'}{2}\omega_1^3 + \frac{\beta_1 - \gamma_2 - 2\beta_1'}{2}\omega_2^4\right\}. \quad (40d)$$

Систему (37d) можно разрешить относительно $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2'$, $\Delta\gamma_2$, $\Delta\gamma_1'$, если ввести новые линейные формы θ_1, θ_2 посредством равенств

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_1 &= \Delta\beta_2 + \theta_1, & \Delta\gamma_2 &= -\Delta\beta_1 + \theta_2, \\ \Delta\alpha_2' &= \Delta\beta_1' + \theta_2, & \Delta\gamma_1' &= -\Delta\beta_2' + \theta_1. \end{aligned} \quad (40e)$$

Внося эти значения в квадратичные уравнения (10), мы заметим, что они сведутся только к пяти независимым уравнениям

$$\begin{gathered} [\Delta\beta_1\omega_1^3] - [\Delta\beta_2\omega_2^4] = 0, \quad [\theta_1\omega_1^3] - [\theta_2\omega_2^4] = 0, \\ [\Delta\beta_1'\omega_1^3] - [\Delta\beta_2'\omega_2^4] = 0, \quad [\theta_1\omega_1^3] + [\Delta\beta_2\omega_1^3] - [\Delta\beta_1\omega_2^4] = 0, \\ [\Delta\beta_1 + \Delta\beta_2 + \Delta\beta_1' + \Delta\beta_2', \quad \omega_1^3 - \omega_2^4] = 0. \end{gathered} \quad (40f)$$

Внося в последнее уравнение значение первого множителя из уравнения (40d), получим новое конечное уравнение

$$(\beta_2 + \beta_2')\{\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 - \gamma_2 - 2(\beta_1' + \beta_2')\} = 0.$$

Если обращается в нуль первый множитель, то конгруэнция принадлежит линейному комплексу.

Второй множитель в силу (40c) можно преобразовать к виду

$$\alpha_1 - \gamma_2 + 3(\beta_1 + \beta_2) = 0. \quad (40g)$$

Дифференцируя его, с учётом предыдущих уравнений, получим:

$$4(\Delta\beta_1 + \Delta\beta_2) + \theta_1 - \theta_2 = 4(\beta + \alpha)\alpha'(\omega_1^3 - \omega_2^4) + \\ + \frac{(\alpha_1)^2 + 2\alpha_1\beta_2 + 5(\beta_2)^2}{2}\omega_1^3 - \frac{5(\beta_1)^2 - 2\beta_1\gamma_2 + (\gamma_2)^2}{2}\omega_2^4. \quad (40h)$$

Система содержит $s_1 = 4$ квадратичных уравнений — первые четыре уравнения системы (40f), пятое удовлетворено в силу (40g).

На втором интегральном элементе цепи все формы θ_i, $\Delta\beta_i$, $\Delta\beta_i'$ определятся из четырёх билинейных уравнений, присоединённых к первым четырём квадратичным уравнениям (40f) системы, и двух линейных (40d), (40h), если определитель системы

$$(\omega_1^3 + \omega_2^4)^4 \neq 0$$

не равен нулю. Цепь — не особая. Так как

$$s_1 = 4, \quad s_2 = 0,$$

то интегральное многообразие существует с произволом четырёх функций одного аргумента.

В силу уравнений (40a), (40g) инвариант

$$I_3 = \sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}\,\frac{\alpha_1 + 3\beta_2}{\gamma_2 - 3\beta_1}} = 1.$$

С другой стороны, уравнение (40g) в силу равенств (37c), (40c) можно переписать в виде

$$\gamma_1' - \alpha_2' - 3(\beta_1' + \beta_2') = 0;$$

следовательно, инвариант

$$I_3' = \sqrt{-\frac{\gamma'}{\alpha'}\,\frac{\alpha_2' + 3\beta_1'}{\gamma_1' - 3\beta_2'}} = 1$$

и в силу теоремы § 190 обе фокальные поверхности конгруэнции — линейчатые.

Конгруэнция W с однопараметрическим семейством соприкасающихся линейных комплексов есть конгруэнция W с двумя линейчатыми фокальными поверхностями.

207. Конгруэнция W с линейчатыми фокальными поверхностями. Доказанную теорему можно получить из очень простых соображений наполовину синтетического порядка. Эти соображения позволят доказать справедливость и обратной теоремы, что всякая конгруэнция W с линейчатыми фокальными поверхностями обладает только однопараметрическим семейством соприкасающихся линейчатых комплексов. Вместе с тем этот метод даст нам возможность проинтегрировать систему уравнений, от которых зависит определение наших конгруэнций.

Заметим, прежде всего, что соприкасающийся комплекс конгруэнции $\mathfrak{a}$, который касается конгруэнции вдоль асимптотической линейчатой поверхности $\mathcal{H}$, несомненно, содержит эту поверхность, т. е. лучи её удовлетворяют уравнению комплекса

$$\{\mathfrak{a}\boldsymbol{p}\}=0. \tag{41a}$$

Так как комплекс — соприкасающийся, то он содержит всю дифференциальную окрестность 2-го порядка

$$\{\mathfrak{a}\,d\boldsymbol{p}\}=0,\quad \{\mathfrak{a}\,d^2\boldsymbol{p}\}=0. \tag{41b}$$

Так как здесь дифференцирование может быть взято в любом направлении, то мы можем рассматривать его как выполненное по тому параметру t, от которого зависят координаты комплекса (параметр семейства комплексов). С другой стороны, мы можем рассматривать уравнение (41a) как тождество относительно параметра t, если будем предполагать, что и коэффициенты уравнения комплекса (его координаты), и лучи $\boldsymbol{p}$ поверхностей $\mathcal{H}$ одновременно меняются вместе с параметром t.

Поэтому мы можем дифференцировать равенство (41a) по параметру t:

$$\left\{\frac{d\mathfrak{a}}{dt}p\right\}+\left\{\mathfrak{a}\frac{dp}{dt}\right\}=0$$

или в силу (41b)

$$\{\mathfrak{a}'p\}=0,\quad \mathfrak{a}'=\frac{d\mathfrak{a}}{dt}.$$

Новое дифференцирование с учётом уравнения (41b) даст:

$$\{\mathfrak{a}''p\}=0,\quad \mathfrak{a}''=\frac{d^2}{dt^2}\mathfrak{a}.$$

Итак, образующие асимптотической поверхности $\mathcal{H}$, вдоль которой соприкасающийся комплекс имеет касание 2-го порядка с конгруэнцией, удовлетворяют уравнениям трёх лянейных комплексов

$$\{\mathfrak{a}\boldsymbol{p}\}=0,\quad \{\mathfrak{a}'\boldsymbol{p}\}=0,\quad \{\mathfrak{a}''\boldsymbol{p}\}=0, \tag{41c}$$

следовательно, принадлежат одному семейству образующих поверхности 2-го порядка — линейной системе прямых (*демиквадрике*).

Семейство линейных систем (41c) обладает огибающей в пространстве прямых. Характеристика определяется системой уравнений (41c) и их производных по t. В силу соотношений $\frac{d\mathfrak{a}}{dt}=\mathfrak{a}'$, $\frac{d\mathfrak{a}'}{dt}=\mathfrak{a}''$ эта система будет содержать только четыре уравнения:

$$\{\mathfrak{a}\boldsymbol{p}\}=0,\quad \{\mathfrak{a}'\boldsymbol{p}\}=0,\quad \{\mathfrak{a}''\boldsymbol{p}\}=0,\quad \{\mathfrak{a}'''\boldsymbol{p}\}=0,\quad \mathfrak{a}'''=\frac{d^3}{dt^3}\mathfrak{a}, \tag{41d}$$

и будет определять пару прямых.

Для нашей цели больше значения будет иметь огибающая дополнительных линейных систем (демиквадрик). Второе семейство прямолинейных образующих (дополнительная демиквадрика) поверхности 2-го порядка $\mathcal{H}$ состоит из прямых, пересекающих все прямые системы (41c). Пересекающиеся прямые удовлетворяют условию Плюккера

$$\{\boldsymbol{pq}\}\equiv p^{12}q^{34}+p^{34}q^{12}+p^{14}q^{23}+p^{23}q^{14}+p^{42}q^{13}+p^{13}q^{42}=0,$$

т. е. изображаются в пространстве P_5 полярно сопряжёнными точками относительно гиперповерхности 2-го порядка Плюккера Q_4^2, а по формулам (41c) сами точки $\boldsymbol{p}$, т. е. точки, изображающие образующие первой линейной системы, полярно сопряжены точкам $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$, которые изображают три линейных комплекса. Следовательно, образующие второй линейной системы изображаются точками, лежащими на пересечении плоскости $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'\,\mathfrak{a}''$ с гиперповерхностью Q_4^2 и принадлежат линейным комплексам $\mathfrak{g}$, которые полярно сопряжены комплексам $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$

$$\{\mathfrak{a}\mathfrak{g}\}=0,\quad \{\mathfrak{a}'\mathfrak{g}\}=0,\quad \{\mathfrak{a}''\mathfrak{g}\}=0. \tag{41e}$$

Среди связки комплексов $\mathfrak{g}$, определяемых тремя уравнениями (41e), можно выделить один полярно сопряжённый пяти комплексам $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{a}'''$, $\mathfrak{a}^{IV}$, где штрихами обозначены последовательные производные по параметру t.

Так как из уравнений

$$\{\mathfrak{a}^{(i)}\mathfrak{g}\}=0,\quad \{\mathfrak{a}^{(i+1)}\mathfrak{g}\}=0,\quad \mathfrak{a}^{(i)}=\frac{d^i}{dt^i}\mathfrak{a}$$

дифференцированием первого по t следует

$$\{\mathfrak{a}^{(i+1)}\mathfrak{g}\}+\{\mathfrak{a}^{(i)}\mathfrak{g}'\}=0$$

и

$$\{\mathfrak{a}^{(i)}\mathfrak{g}'\}=0,$$

то последовательное дифференцирование (три раза) даст нам таблицу равенств

$$\begin{array}{l}\{\mathfrak{a}\mathfrak{g}\}=0,\ \{\mathfrak{a}'\mathfrak{g}\}=0;\ \{\mathfrak{a}''\mathfrak{g}\}=0,\ \{\mathfrak{a}'''\mathfrak{g}\}=0,\ \{\mathfrak{a}^{IV}\mathfrak{g}\}=0,\\ \{\mathfrak{a}\mathfrak{g}'\}=0,\ \{\mathfrak{a}'\mathfrak{g}'\}=0,\ \{\mathfrak{a}''\mathfrak{g}'\}=0,\ \{\mathfrak{a}'''\mathfrak{g}'\}=0,\\ \{\mathfrak{a}\mathfrak{g}''\}=0,\ \{\mathfrak{a}'\mathfrak{g}''\}=0,\ \{\mathfrak{a}''\mathfrak{g}''\}=0,\end{array} \tag{41f}$$

Следовательно, три линейных комплекса $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}' = \frac{d}{dt}\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'' = \frac{d^2}{dt^2}\mathfrak{g}$ полярно сопряжены со всеми комплексами $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$ и уравнения

$$\{\mathfrak{g}q\} = 0, \quad \{\mathfrak{g}'q\} = 0, \quad \{\mathfrak{g}''q\} = 0 \tag{41g}$$

определяют линейную систему прямых, дополнительную к линейной системе (41с).

Характеристика семейства линейных систем (41g) определится уравнениями

$$\{\mathfrak{g}q\} = 0, \quad \{\mathfrak{g}'q\} = 0, \quad \{\mathfrak{g}''q\} = 0, \quad \{\mathfrak{g}'''q\} = 0. \tag{41h}$$

Четыре прямых (41d), (41h) образуют характеристику семейства поверхностей 2-го порядка $\mathscr{H}$ в пространстве точек. Они опишут четыре линейчатых поверхности, которые касаются всех поверхностей $\mathscr{H}$, но в то время, как прямые (41d) не имеют общих точек с образующими (41с), кроме двух образующих, которые и составляют характеристику, прямые (41h) пересекают все образующие (41с). Поскольку все поверхности $\mathscr{H}$ касаются линейчатых поверхностей, описанных прямыми (41h), их будут касаться и образующие p поверхностей $\mathscr{H}$, т. е. лучи нашей конгруэнции.

Значит, прямые (41h) образуют фокальные поверхности конгруэнции и теорема § 206 доказана.

208. Обратная теорема. Чтобы доказать обратную теорему, заметим, что если обе фокальные поверхности конгруэнции W — линейчатые, то в силу теоремы § 99 гл. V, если прямолинейным образующим первой фокальной поверхности соответствуют кривые асимптотические второй фокальной поверхности, то прямолинейным образующим второй фокальной поверхности соответствуют прямые линии первой фокальной поверхности, т. е. всегда одна из асимптотических поверхностей $\mathscr{H}$ пересекает обе фокальные поверхности по прямым. Линейчатая поверхность $\mathscr{H}$ конгруэнции W, пересекающая пару соответствующих образующих l_1, l_2 фокальных поверхностей, является всегда поверхностью 2-го порядка.

Действительно, каждый луч конгруэнции, соединяющий фокусы F_1, F_2, соединяет точку касания F_1 касательной плоскости λ поверхности (F_1) с той точкой образующей l_2, где её пересекает плоскость λ. Так как пучок касательных плоскостей $\{\lambda\}$ в точках образующей l_1 проективен прямолинейному ряду точек касания $\{F_1\}$ и перспективен ряду точек $\{F_2\}$, то два ряда точек $\{F_1\}$ и $\{F_2\}$ проективны и соединяющие их прямые F_1F_2 образуют поверхность 2-го порядка.

Всё семейство поверхностей 2-го порядка $\mathscr{H}$ касается фокальных поверхностей (F_1), (F_2); следовательно, имеет эту пару поверхностей своей огибающей. Поскольку характеристикой на каждой поверхности $\mathscr{H}$ служит пара соответствующих прямолинейных образующих l_1, l_2, то поверхности $\mathscr{H}$ будут иметь огибающую и как семейство линейных систем (демиквадрик) в пространстве прямых

(в нашем случае демиквадрик из образующих поверхности $\mathscr{H}$, принадлежащих второй системе, не принадлежащей конгруэнции W). Каждую линейную систему прямых можно определить как пересечение трёх комплексов:

$$\{\mathfrak{g}q\} = 0, \quad \{\mathfrak{g}'q\} = 0, \quad \{\mathfrak{g}''q\} = 0, \tag{42a}$$

где комплексы $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}''$ зависят от одного произвольного параметра t. Характеристика (пара прямых) принадлежит шести комплексам

$$\mathfrak{g}, \ \mathfrak{g}', \ \mathfrak{g}'', \ \frac{d\mathfrak{g}}{dt}, \ \frac{d\mathfrak{g}'}{dt}, \ \frac{d\mathfrak{g}''}{dt}.$$

Следовательно, среди этих шести комплексов только четыре линейно независимы. Выполняя линейную подстановку, мы можем принять

$$\mathfrak{g}' = \frac{d}{dt}\mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}'' = \frac{d}{dt}\mathfrak{g}'.$$

При этом условии сама линейная система (42а) является характеристикой (2-го порядка, подобно точкам огибающей однопараметрического семейства плоскостей) семейства линейных комплексов

$$\{\mathfrak{g}q\} = 0. \tag{42b}$$

Отсюда вытекает метод построения конгруэнций W с линейчатыми фокальными поверхностями. Надо взять произвольное однопараметрическое семейство линейных комплексов $\{\mathfrak{g}\}$ и искать огибающую 2-го порядка (42а). Сама конгруэнция образована лучами линейных систем (образующие первой системы поверхностей $\mathscr{H}$), дополнительных к линейным системам (42а). Огибающая 3-го порядка составит пару фокальных поверхностей конгруэнций.

Дополнительные линейные системы определяются комплексами, полярно сопряжёнными относительно гиперповерхности Q_4^2 комплексам (42а). Они двойственны первым и определяются условиями

$$\{\mathfrak{a}\mathfrak{g}\} = 0, \quad \{\mathfrak{a}\mathfrak{g}'\} = 0, \quad \{\mathfrak{a}\mathfrak{g}''\} = 0, \quad \{\mathfrak{a}\mathfrak{g}'''\} = 0, \quad \{\mathfrak{a}\mathfrak{g}^{\mathrm{IV}}\} = 0, \tag{42c}$$

где штрихами обозначено последовательное дифференцирование по параметру t. Дифференцируя уравнение (42с), получим опять таблицу формул (41f).

Три уравнения

$$\{\mathfrak{a}p\} = 0, \quad \{\mathfrak{a}'p\} = 0, \quad \{\mathfrak{a}''p\} = 0 \tag{42d}$$

определяют характеристику 2-го порядка семейства комплексов $\mathfrak{a}$, т. е. поверхность 2-го порядка $\mathscr{H}$, которая образована лучами конгруэнции, пересекающими пару прямых

$$\{\mathfrak{g}r\} = 0, \quad \{\mathfrak{g}'r\} = 0, \quad \{\mathfrak{g}''r\} = 0, \quad \{\mathfrak{g}'''r\} = 0. \tag{42e}$$

Если рассматривать p как произвольный луч поверхности $\mathscr{H}$, которая сама зависит от параметра t, то координаты прямой p будут функциями двух параметров: параметра t, определяющего поверхность $\mathscr{H}$, и второго параметра, скажем s, определяющего положение луча $\boldsymbol{p}$ среди образующих поверхности $\mathscr{H}$. Внося эти функции в уравнение (42d), получим тождества, которые можно дифференцировать. Так как комплекс $\mathfrak{a}$ зависит только от параметра t, то

$$d\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'\,dt, \quad d^2\mathfrak{a} = \mathfrak{a}''\,dt^2$$

и после дифференцирования получим, как и выше,

$$\{\mathfrak{a}\boldsymbol{p}\} = 0, \quad \{\mathfrak{a}\,d\boldsymbol{p}\} = 0, \quad \{\mathfrak{a}\,d^2\boldsymbol{p}\} = 0,$$

где $d\boldsymbol{p}$, $d^2\boldsymbol{p}$ — полные дифференциалы. Следовательно, комплекс $\mathfrak{a}$ содержит дифференциальную окрестность 2-го порядка и является соприкасающимся к конгруэнции, образованной линейными системами $\mathscr{H}$.

VII. КОНГРУЭНЦИЯ ЛИНЕЙНОГО КОМПЛЕКСА

209. Последовательность Лапласа, порождённая конгруэнцией линейного комплекса. Мы видели (§ 205), что конгруэнция линейного комплекса определяется уравнениями (37a), (39d) § 205

$$\begin{aligned} &\alpha\alpha' - \gamma\gamma' = 0, \\ &\beta_1 + \beta_1' = 0, \quad \beta_2 + \beta_2' = 0. \end{aligned} \tag{43a}$$

Эти уравнения инвариантны относительно преобразований тетраэдра 1-го порядка.

Если тетраэдр построен на касательных к линиям фокальных сетей и на осях первой фокальной сети, то по формулам (24b)—(24d) § 195

$$\beta = 0, \quad \beta' = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0, \tag{43b}$$

и уравнения (43a) дадут:

$$\beta_1' = 0, \quad \beta_2' = 0. \tag{43c}$$

Следовательно, рёбра A_1A_4 и A_2A_3 будут осями и второй фокальной сети конгруэнции (A_1A_2). Это равносильно обращению в нуль на всей конгруэнции форм ω_4^1, ω_3^2:

$$\begin{aligned} &\omega_4^1 = 0, \quad \omega_3^2 = 0, \\ &\Delta\beta_1 = -\Delta\beta_1' = \omega_4^2, \quad -\Delta\beta_2 = \Delta\beta_2' = \omega_3^1. \end{aligned} \tag{43d}$$

Уравнения (43b) — (43d) показывают, что поверхности (A_4) и (A_3) составят первые преобразования Лапласа от фокальных поверхностей, ибо поверхность (A_4) касается плоскости $A_4A_2A_3$, а поверхность (A_3) — плоскости $A_3A_1A_4$. Значит, прямая A_3A_4 является общей касательной поверхностей (A_3), (A_4) в паре соответствующих точек A_3, A_4 и косой четыреугольник $A_3A_1A_2A_4$ описывает своими сторонами четыре

конгруэнции, образующие конфигурацию T (стороны касаются поверхностей, описанных вершинами).

Ребро A_3A_4 тетраэдра при коэффициентах β, β', равных нулю, удовлетворяет уравнению

$$\{\mathfrak{a}\,[34]\} = 0$$

и, следовательно, принадлежит комплексу (35) § 203.

Имеем теорему:

Конгруэнция линейного комплекса и два её преобразования Лапласа составляют три конгруэнции конфигурации T, четвёртая конгруэнция принадлежит тому же линейному комплексу. Это свойство характерно для конгруэнций линейного комплекса.

Заметим ещё, что вторая конгруэнция этой пары T как конгруэнция линейного комплекса обладает тем же свойством: её два преобразования Лапласа преобразуют её в новую конгруэнцию того же комплекса, образованную прямыми, соединяющими первые преобразования в противоположные стороны фокусов одного луча.

Точечные и тангенциальные инварианты последовательности Лапласа, содержащей конгруэнцию линейного комплекса, обладают некоторыми особенностями.

При наличии соотношений (43b) — (43d) формулы (30) § 199 дают для трёх пар последовательных инвариантов лапласовой последовательности, порождённой конгруэнцией линейного комплекса, значения:

$$\mathscr{h}_{-1} = -[\omega_3^1\omega_1^3], \quad \mathscr{h} = \gamma\gamma'\,[\omega_1^3\omega_2^4], \quad \mathscr{h}_1 = [\omega_4^2\omega_2^4],$$

$$\mathscr{H}_{-1} = [\omega_4^2\omega_2^4], \quad \mathscr{H} = \alpha\alpha'\,[\omega_1^3\omega_2^4], \quad \mathscr{H}_1 = -[\omega_3^1\omega_1^3],$$

откуда получаем:

$$\mathscr{H} = \mathscr{h}, \quad \mathscr{h}_{-1} = \mathscr{H}_1, \quad \mathscr{h}_1 = \mathscr{H}_{-1}. \tag{44}$$

Это прямо следует из хорошо известного строения нулевой системы линейного комплекса: каждый фокус конгруэнции линейного комплекса соответствует в нулевой системе этого комплекса своей фокальной плоскости, т. е. касательной плоскости во втором фокусе; следовательно, вторая фокальная сеть является коррелятивным преобразованием первой и её точечные инварианты $\mathscr{h}$, $\mathscr{h}_1$, равны тангенциальным инвариантам (в обратном порядке) первой сети $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}_{-1}$.

Из соотношений (44) с помощью основного уравнения (29') § 199

$$h_{-2} + h = 2h_{-1} + \frac{\partial^2 \ln h_{-1}}{\partial u\,\partial v}$$

следует

$$h_{-2} + H = 2H_1 + \frac{\partial^2 \ln H_1}{\partial u\,\partial v} = H + H_2,$$

где справа то же уравнение (29′) приложено к трём тангенциальным инвариантам H, H_1, H_2. Отсюда вытекает

$$h_{-2}=H_2;$$

вообще для всякого целого числа k будем иметь:

$$\hbar_k=\mathscr{H}_{-k}. \tag{44a}$$

Допустим теперь, что конгруэнция ранга 1 этой последовательности — тоже конгруэнция некоторого вообще другого линейного комплекса. Тогда будут иметь место соотношения

$$\mathscr{H}_1=\hbar_1,\quad \mathscr{H}=\hbar_2,\quad \mathscr{H}_2=\hbar,$$

откуда получим:

$$\hbar_{1+k}=\mathscr{H}_{1-k} \tag{44b}$$

для любого целого числа k.

Так как две соседние конгруэнции последовательности являются конгруэнциями W, то все её конгруэнции — W и, значит, в силу теоремы § 199, для всякого целого k

$$\hbar_k=\mathscr{H}_k.$$

Уравнения (44a), (44b) примут теперь вид

$$\hbar_k=\hbar_{-k},\quad \hbar_{1+k}=\hbar_{1-k}.$$

Если в правой части второго равенства применить преобразование, определяемое первым равенством, т. е. изменить знак указателя $1-k$ на противоположный $k-1$, то получим:

$$\hbar_{k+1}=\hbar_{k-1}.$$

Равенство это, справедливое для всякого целого числа k, даёт для k нечётного $k=2n-1$ и чётного $k=2n$ формулы

$$\hbar_{2n}=\hbar_{2n-2},\quad \hbar_{2n+1}=\hbar_{2n-1}.$$

Следовательно, все инварианты последовательности точечные и тангенциальные чётного ранга равны между собой, нечётного — равны между собой.

Мы сейчас покажем (§§ 210—212), что при этом все конгруэнции последовательности принадлежат линейным комплексам одного пучка.

210. Последовательность Лапласа из конгруэнций линейных комплексов. Итак, допустим, что конгруэнция (A_1A_3) тоже принадлежит некоторому линейному комплексу. Так как при том выборе тетраэдра $\{A_i\}$, который определяется формулами (43b), точки A_1 и A_3 служат фокусами луча A_1A_3, а плоскости $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$ — фокальными плоскостями, то тетраэдр $\{A_i\}$ является тетраэдром 1-го порядка и для конгруэнции (A_1A_3). Чтобы воспользоваться уравне-

ниями (39d) § 205, мы должны только сделать пересчёт; обозначим новые вершины $B_1=A_3$, $B_2=A_1$, $B_4=A_2$, $B_3=A_4$. Если для нового тетраэдра все формы обозначать $\widetilde{\omega}_i^k$, то будем иметь:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\omega}_1^1=\omega_3^3,\quad \widetilde{\omega}_1^2=\omega_3^1,\quad \widetilde{\omega}_1^3=\omega_3^4,\quad \widetilde{\omega}_1^4=0,\\
&\widetilde{\omega}_2^1=\omega_1^3,\quad \widetilde{\omega}_2^2=\omega_1^1,\quad \widetilde{\omega}_2^3=0,\quad \widetilde{\omega}_2^4=\omega_1^2,\\
&\widetilde{\omega}_3^1=\omega_4^3,\quad \widetilde{\omega}_3^2=0,\quad \widetilde{\omega}_3^3=\omega_4^4,\quad \widetilde{\omega}_3^4=\omega_4^2,\\
&\widetilde{\omega}_4^1=0,\quad \widetilde{\omega}_4^2=\omega_2^1,\quad \widetilde{\omega}_4^3=\omega_2^4,\quad \widetilde{\omega}_4^4=\omega_2^2,
\end{aligned} \tag{45a}$$

откуда следует

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\omega}_1^3=\alpha\omega_1^3,\quad \widetilde{\omega}_2^4=\gamma\omega_2^4,\quad \widetilde{\omega}_3^1=\frac{1}{\alpha}\,\widetilde{\omega}_1^3,\quad \widetilde{\omega}_4^3=\frac{1}{\gamma}\,\widetilde{\omega}_2^4,\\
&\widetilde{\omega}_1^2=-\beta_{12}\widetilde{\omega}_1^3-\frac{\beta_{22}}{\gamma}\,\widetilde{\omega}_2^4,\quad \widetilde{\omega}_3^4=\frac{\beta_{11}}{\alpha}\,\widetilde{\omega}_1^3+\beta_{12}\widetilde{\omega}_2^4.
\end{aligned} \tag{45b}$$

Значит,

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\alpha}=\frac{\beta_{11}}{\alpha},\quad \widetilde{\beta}=-\beta_{12},\quad \widetilde{\gamma}=-\frac{\beta_{22}}{\gamma},\quad \widetilde{\alpha}'=\frac{1}{\gamma},\quad \widetilde{\beta}'=0,\quad \widetilde{\gamma}'=\frac{1}{\alpha},\\
&\Delta\widetilde{\beta}'=0,\quad \widetilde{\beta}_1'=0,\quad \widetilde{\beta}_2'=0,\quad \Delta\widetilde{\beta}=-\Delta\beta_{12},\quad \widetilde{\beta}_1=-\frac{\beta_{121}}{\beta_{11}},\quad \widetilde{\beta}_2=\frac{\beta_{122}}{\beta_{22}}.
\end{aligned} \tag{45c}$$

Следовательно, первое условие, требующее, чтобы конгруэнция (A_1A_3) была конгруэнцией W, запишется

$$\widetilde{\alpha}\widetilde{\alpha}'-\widetilde{\gamma}\widetilde{\gamma}'=\frac{\beta_{11}+\beta_{22}}{\alpha\gamma}=0. \tag{46a}$$

Оно, очевидно, равносильно требованию, чтобы последовательность содержала конгруэнции R (§ 200).

Второе условие (39d) теперь, когда $\widetilde{\beta}_1'=0$, $\widetilde{\beta}_2'=0$, равносильно требованию, чтобы форма $\Delta\widetilde{\beta}=-\Delta\beta_{12}$ обращалась тождественно в нуль, и записывается уравнением

$$d\beta_{12}+\beta_{12}(\omega_1^1-\omega_4^4)=0. \tag{46b}$$

Между тем из уравнений (43d) второй строки посредством сравнения коэффициентов при формах ω_1^3, ω_2^4 по формулам (11) § 187 в уравнеиияx $\Delta\beta_1+\Delta\beta_1'=0$, $\Delta\beta_2+\Delta\beta_2'=0$, получаем:

$$\beta_{11}+\beta_{11}'=0,\quad \beta_{22}+\beta_{22}'=0,\quad \gamma\beta_{12}+\alpha'\beta_{12}'=0. \tag{46c}$$

Следовательно, из уравнений (46a, b) будут вытекать уравнения

$$\beta_{11}'+\beta_{22}'=0,\quad d\beta_{12}'+\beta_{12}'(\omega_1^1-\omega_4^4)+\beta_{12}'(d\ln\alpha'-d\ln\gamma)=0, \tag{α}$$

но в силу уравнений (43b, c) соотношения (37c) § 205 принимают вид

$$\alpha_1-\gamma_1'=0,\quad \alpha_2'-\gamma_2=0, \tag{37c'}$$

и, следовательно, по формулам (9) § 187 будет:

$$\Delta\alpha'-\Delta\gamma=0,\quad d\ln\alpha'-d\ln\gamma=\omega_2^2-\omega_1^1-\omega_3^3+\omega_4^4.$$

Внося это в уравнения (α), мы приведём их к виду

$$\beta_{11}'+\beta_{22}'=0,\quad d\beta_{12}'+\beta_{12}'(\omega_2^2-\omega_3^3)=0, \tag{46d}$$

т. е. конгруэнция (A_2A_4) тоже принадлежит линейному комплексу.

Если конгруэнции (A_1A_2) и (A_1A_3) принадлежат некоторым линейным комплексам, то и конгруэнция (A_2A_4) тоже принадлежит какому-то линейному комплексу. Применяя это рассуждение шаг за шагом, мы придём к заключению, что все конгруэнции последовательности принадлежат некоторым линейным комплексам.

211. Теорема существования последовательности конгруэнций линейных комплексов. Конгруэнция, которая вместе со всеми своими преобразованиями Лапласа принадлежит некоторым линейным комплексам, определяется при нашем выборе тетраэдра, системой линейных уравнений (5) § 185, (7) § 186, (9) § 187, (11) § 187 и квадратичных (12) § 187, к которым надо прибавить конечные уравнения (37a), (37c), (37e) § 205, (43a) — (43d), (46a), (46c) и дифференциальное (46b). Поскольку внешние дифференциалы всех линейных дифференциальных уравнений системы, в том числе и уравнения (46b), удовлетворены в силу уравнений системы, нас будут интересовать те переменные, дифференциалы которых входят в квадратичные уравнения (12) под видом форм $\Delta\alpha_{11}$, $\Delta\beta_{11}$, ..., $\Delta\gamma_{11}'$.

Дифференцируя уравнения (37c′), получим по формулам (10′), (11) § 187

$$\alpha_{11}-\gamma_{11}'=0,\quad \alpha_{22}'-\gamma_{22}=0.$$

Таким образом, между неизвестными функциями нашей системы имеются соотношения:

$$\alpha_{11}=\gamma_{11}',\ \alpha_{22}'=\gamma_{22},\ \beta_{11}+\beta_{22}=0,\ \beta_{11}+\beta_{11}'=0,$$
$$\beta_{22}+\beta_{22}'=0,\ \alpha\beta_{12}+\gamma'\beta_{12}=0.$$

Дифференцируя эти уравнения с учётом формул (12′), а также уравнений (46b) — (46d), (43b), (43d), мы получим соотношения

$$\Delta\alpha_{11}=\Delta\gamma_{11}',\ \Delta\alpha_{22}'=\Delta\gamma_{22},\ \Delta\beta_{11}+\Delta\beta_{22}=0,$$
$$\Delta\beta_{11}+\Delta\beta_{11}'=0,\ \Delta\beta_{22}+\Delta\beta_{22}'=0,\ \Delta\beta_{12}=0,\ \Delta\beta_{12}'=0.$$

Средние уравнения (12) прииимают вид

$$[\Delta\beta_{11}\omega_1^3]=0,\quad [\Delta\beta_{11}\omega_2^4]=0.$$

Следовательно,

$$\Delta\beta_{11}=d\beta_{11}+\beta_{11}(\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4)=0. \tag{46e}$$

Внешний дифференциал его обращается в нуль в силу самого уравнения (46e). Следовательно, все квадратичные уравнения системы сводятся к двум:

$$[\Delta\alpha_{11}\ \omega_1^3]=0,\quad [\Delta\gamma_{22}\ \omega_2^4]=0, \tag{46f}$$

которые содержат единственные две формы, не определяемые из линейных уравнений. Так как билинейиые уравнения, присоединённые к квадратичным уравнениям (46f), определяют значения форм $\Delta\alpha_{11}$, $\Delta\gamma_{22}$ на втором линейном элементе цепи, то цепь — не особая, система — в инволюции с характерами $s_1=2$, $s_2=0$. Последовательность со всеми конгруэнциями в линейных комплексах существует с произволом двух функций одного аргумента.

Полученные нами формулы для последовательности из конгруэнции линейных комплексов можно значительно упростить подходящим нормированием вершин тетраэдров.

Заметим, что теперь $\beta_1=\beta_2=\beta_1'=\beta_2'=0$ и в силу общих формул (37c) для конгруэнций W будем иметь: $\alpha_1=\gamma_1'$, $\alpha_2'=\gamma_2$, т. е. по формулам (22′) § 194

$$\Delta\alpha=\Delta\gamma',\quad \Delta\gamma=\Delta\alpha'. \tag{46g}$$

Поскольку для вариации вторичных параметров имеем:

$$\delta\ln\frac{\alpha}{\gamma'}=\pi_1^1+\pi_3^3-\pi_2^2-\pi_4^4,$$

мы можем привести отношение $\frac{\alpha}{\gamma'}$ к единице, после чего в силу (37a) и второе отношение $\frac{\gamma}{\alpha'}$ тоже будет равио единице, а уравнения (46g) дадут:

$$\alpha=\gamma',\ \alpha'=\gamma,\ \omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_4^4=0. \tag{47a}$$

Уравнения (46b), (46c) дадут теперь

$$d\,\frac{\beta_{11}}{(\beta_{12})^2}=0$$

и, следовательно,

$$(\beta_{12})^2=R^2\beta_{11},\qquad R=\mathrm{const}. \tag{47b}$$

Поскольку уравнение (46b) для вторичных параметров принимает вид

$$\delta\ln\beta_{11}=\pi_4^4-\pi_1^1+\pi_3^3-\pi_2^2,$$

мы можем, меняя нормирование вершин, привести β_{11} к единице. Тогда уравнения (46b), (47a), (47b) дадут:

$$\beta_{11}=1,\ \beta_{12}=R,\ \omega_1^1=\omega_4^4,\ \omega_2^2=\omega_3^3. \tag{47c}$$

212. Линейные комплексы, присоединённые к конгруэнциям последовательности. Соприкасающийся комплекс конгруэнции (A_1A_2) определялся любым из инвариантных уравнений (34a) § 202. Так как тетраэдр $\{B_i\}$ является для конгруэнции (A_1A_3) тетраэдром 1-го порядка, то соприкасающийся комплекс конгруэнций (A_1A_3) будет

$$(\widetilde{\alpha}'\widetilde{\beta}+\widetilde{\gamma}\widetilde{\beta}')(B_1B_2)+\widetilde{\alpha}'(B_1B_3)+\widetilde{\gamma}(B_4B_2),$$

если же коэффициенты $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\gamma}$ заменить по формулам (45c) и от точек B_i перейти к точкам A_i, то комплекс запишется в виде

$$\mathfrak{a}'=[34]-[12]+[13]R.$$

Для конгруэнции (A_2A_4) соприкасающимся комплексом будет:

$$\mathfrak{a}''=[34]-[12]-[42]R.$$

Наконец, соприкасающийся комплекс конгруэнции (A_1A_2) по формуле (35) § 203 по сокращении на $\alpha'=\gamma$ будет:

$$\mathfrak{a}=[42]+[13].$$

Следовательно,

$$\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}''=\mathfrak{a}R$$

и комплексы трёх последовательных конгруэнций последовательности принадлежат к одному пучку. Отсюда:

Если две конгруэнции сопряжённой сети принадлежат линейным комплексам, то все конгруэнции порождаемой последовательности принадлежат различным линейным комплексам одного пучка.

Заметим, что в силу $\Delta\beta_{12}=0$ компоненты разложения этой формы по главным формам ω_1^3, ω_2^4 — величины β_{121}, β_{122} тоже равны нулю, а следовательно, по формулам (45c)

$$\widetilde{\beta}_1=0,\ \widetilde{\beta}_2=0,\ \widetilde{\beta}_1^1=0,\ \widetilde{\beta}_2^1=0,$$

т. е. конгруэнция (A_1A_3) тоже отнесена к осям своих фокальных сетей. Отсюда лемма:

Если две конгруэнции сопряжённой сети принадлежат линейным комплексам, то оси обеих сетей, полученных преобразованием Лапласа, совпадают между собой (прямо) и совпадают в обратном порядке с осями исходной сети.

Применяя эту лемму ко всем сетям последовательности, найдём, что оси каждой сети последовательности совпадают с одной и той же парой прямых A_1A_4 и A_2A_3, только в зависимости от чётностей или нечётности номера преобразования одна и та же прямая будет первой или второй осью сети. Отсюда следствие:

Если две конгруэнции сопряжённой сети принадлежат линейным комплексам, то все преобразования Лапласа нечётного порядка лежат на второй оси, чётного — на первой оси сети.

Нетрудно заметить, что оси A_1A_4 и A_2A_3 сети (A_1) принадлежат комплексу

$$\mathfrak{a}=[42]+[13],$$

ибо

$$\{[42]+[13],[14]\}=0,\ \{[42]+[13],[23]\}=0.$$

Так же будет обстоять с каждой другой сетью последовательности, а поскольку оси у всех сетей общие, они будут принадлежать всем комплексам пучка, т. е. будут описывать линейную конгруэнцию.

Директрисы этой конгруэнции можно искать как оси двух специальных комплексов пучка

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{a}'-\lambda\mathfrak{a}''.$$

Специальный комплекс изображается точкой гиперповерхности Q_4^2. Требуя, чтобы плюккерово произведение $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}$ равнялось нулю

$$\{\mathfrak{g}\mathfrak{g}\}=\{\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'\}-2\lambda\{\mathfrak{a}'\mathfrak{a}''\}+\lambda^2\{\mathfrak{a}''\mathfrak{a}''\}=0,$$

получим:

$$\begin{gathered}\lambda^2-(R^2+2)\lambda+1=0,\\ (\lambda-1)^2=\lambda R^2.\end{gathered} \tag{48a}$$

Специальные комплексы, а стало быть, и их оси, т. е. искомые директрисы, изображаются в P_5 точкой

$$\begin{aligned}[34](1-\lambda)-[12](1-\lambda)+\{[13]+\lambda[42]\}R&=\\ &=\left(A_1+\frac{\lambda-1}{R}A_4,\ (\lambda-1)A_2+RA_3\right).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что директрисы линейной конгруэнции F_1G_1, F_2G_2 пересекают лучи A_1A_4 и A_2A_3 в точках

$$F_{1,2}=A_1+A_4\frac{\lambda-1}{R},\quad G_{1,2}=A_2(\lambda-1)+A_3R, \tag{48b}$$

где λ — один из корней уравнения (48a).

213. Распределение фокусов последовательности. Нетрудно подсчитать последовательные продолжения Лапласа. Если обозначить буквой M_k преобразование порядка k точки A_1 в направлении линии $\omega_2^4=0$, то его можно задать формулой для чётного $k=2i$ и нечётного $k=2i+1$ значения порядка k

$$\begin{gathered}M_{2i}=\lambda_{i+1}A_1+\lambda_iA_4,\\ M_{2i+1}=\lambda_iA_2+\lambda_{i+1}A_3,\end{gathered} \tag{49a}$$

причём все λ_i постоянны

$$\lambda_0=0,\ \lambda_1=1\ \text{и}\ \lambda_{i+1}+\lambda_iR=\lambda_{i-1}. \tag{49b}$$

Действительно, в силу формул (43b) — (43d), (47a), (47c) матрица компонент дифференциальных перемещений тетраэдра имеет вид

$$\begin{pmatrix} \omega_1^1 & \gamma\omega_2^4 & \omega_1^3 & 0 \\ \alpha\omega_1^3 & \omega_2^2 & 0 & \omega_2^4 \\ -\alpha R\omega_1^3+\omega_2^4 & 0 & \omega_2^2 & \alpha\omega_1^3 \\ 0 & \omega_1^3+\gamma R\omega_2^4 & \gamma\omega_2^4 & \omega_1^1 \end{pmatrix} \tag{49c}$$

и, дифференцируя формулы (49a), получим общие соотношения:

$$dM_{2i}=\omega_1^1M_{2i}+\omega_1^3M_{2i+1}+\gamma\omega_2^4M_{2i-1},$$
$$dM_{2i+1}=\omega_2^2M_{2i+1}+\alpha\omega_1^3M_{2i+2}+\omega_2^4M_{2i},$$

откуда прямо следует, что конгруэнция $(M_k M_{k+1})$ имеет фокусами точки M_k, M_{k+1} с развёртывающимися поверхностями $\omega_2^4=0$ и $\omega_1^3=0$. Поскольку при $i=0$ получаем $M_0=A_1$, $M_1=A_3$ и из уравнения (49b) $\lambda_{-1}=1$, а при $i=-1$ имеем $M_{-2}=A_4$, $M_{-1}=A_2$, последовательность Лапласа $[M_k]$ порождается конгруэнцией (A_1A_2).

Если изменить нормирование точек M_{2i}, M_{2i+1}, полагая

$$M_{2i}^*=A_1+\theta_iA_4,\quad M_{2i+1}^*=\theta_iA_2+A_3,\qquad \theta_i=\frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}},$$

то нетрудно показать, что коэффициенты θ_i служат подходящими дробями периодической непрерывной дроби. Действительно, если ввести обозначения числителя P_i и знаменателя Q_i подходящей дроби $\theta_i=\frac{P_i}{Q_i}$, то

$$P_i=\lambda_i,\quad Q_i=\lambda_{i+1},$$

и рекуррентная формула (49b) даст рекуррентные формулы для числителя и знаменателя подходящих дробей

$$P_n=a_nP_{n-1}+P_{n-2},\quad Q_n=a_nQ_{n-1}+Q_{n-2},$$

где знаменатели a_n непрерывной дроби равны

$$a_n=-R.$$

Следовательно, сама непрерывная дробь θ имеет вид

$$\theta=\cfrac{1}{-R+\cfrac{1}{-R+\dots}}$$

Если она сходится, то предел должен удовлетворять квадратному уравнению

$$\theta=\frac{1}{-R+\theta},$$

или

$$\theta^2-R\theta-1=0. \tag{49d}$$

Если положить

$$\theta=\frac{\lambda-1}{R},$$

то уравнение (49d) совпадёт с уравнением (48a). Следовательно, *если последовательности фокусов M_{2i}, M_{2i+1} сходятся, то предельные точки совпадают с фокусами первой или второй оси всех фокальных сетей.*

Если же для какого-нибудь указателя i получим $\lambda_i=1$, то преобразование M_{2i+2} совпадёт с точкой A_1 и последовательность замкнётся с периодом $2i+2$.

214. Проективно налагающиеся последовательности. Заметим, что проективные линейные элементы конгруэнции Φ по формуле (21) § 193 и фокальных поверхностей Θ_1, Θ_2 по формулам (26) § 196, которые в силу (37c) § 205, (47a), (43b), (43c) запишутся в виде

$$\Phi=\frac{\left\{\alpha\left(\omega_1^3\right)^2+\gamma\left(\omega_2^4\right)^2\right\}^2}{\omega_1^3\omega_2^4},$$

$$\Theta_1=-\Theta_2=\frac{\alpha\alpha_1\left(\omega_1^3\right)^3+3\alpha\gamma_2\left(\omega_1^3\right)^2\omega_2^4-3\gamma\alpha_1\omega_1^3\left(\omega_2^4\right)^2-\gamma\gamma_2\left(\omega_2^4\right)^3}{\alpha\left(\omega_1^3\right)^2+\gamma\left(\omega_2^4\right)^2},$$

не содержат постоянного R и, следовательно, изменение параметра R не влечёт изменения форм Φ, Θ_1, Θ_2. Если мы имеем одно решение уравнений

$$\omega_1^2=\omega_4^3=\gamma\omega_2^4,\ \omega_2^1=\omega_3^4=\alpha\omega_1^3,\ \Delta\alpha=\Delta\gamma'=\alpha_1\omega_1^3,\ \Delta\alpha'=\Delta\gamma=\gamma_2\omega_2^4,$$
$$\omega_3^2=\omega_4^1=0,\ \Delta\alpha_1=\alpha_{11}\omega_1^3-\omega_2^4,\ \Delta\gamma_2=-\omega_1^3+\gamma_{22}\omega_2^4,\ \omega_1^1=\omega_4^4,$$
$$\omega_2^2=\omega_3^3,\ \omega_3^1=-\alpha R\omega_1^3+\omega_2^4,\ \omega_4^2=\omega_1^3+\gamma R\omega_2^4,$$

то мы найдём другое решение $\overline{\omega}_i^k$ с теми же формами Φ, Θ_i и другим постоянным $\overline{R}$ из вполне интегрируемой системы

$$\widetilde{\omega}_1^2=\widetilde{\omega}_2^1=\widetilde{\omega}_4^3=\widetilde{\omega}_3^4=0,\ \widetilde{\omega}_3^2=\widetilde{\omega}_4^1=0,\ \widetilde{\omega}_1^1-\widetilde{\omega}_4^4=\widetilde{\omega}_1^1-\widetilde{\omega}_2^2=\widetilde{\omega}_2^2-\widetilde{\omega}_3^3=0,$$
$$\widetilde{\omega}_1^3=\widetilde{\omega}_2^4=0,\ \widetilde{\omega}_3^1=-\alpha r\omega_1^3,\ \widetilde{\omega}_4^2=\gamma r\omega_2^4,\ dr=0,$$

где

$$\widetilde{\omega}_i^k=\overline{\omega}_i^k-\omega_i^k,\ r=\overline{R}-R.$$

Действительно, непосредственная поверка показывает, что внешние дифференциалы уравнений удовлетворены в силу уравнений первой и второй систем.

Так как преобразование поверхности или конгруэнции с сохранением проективного линейного элемента называется проективным изгибанием, то можно сказать, что изменение постоянного R вызывает проективное изгибание каждой конгруэнции и каждой фокальной поверхности последовательности. При этом фокусы последовательности перемещаются по осям A_1A_4 и A_2A_3. При подходящем значении параметра $\overline{R}$ мы можем получить для любого номера i

$$\overline{\lambda}_i=0,$$

преобразование $(\overline{M}_{2i})$ ранга $2i$, наложимое на поверхность (M_{2i}), совпадёт с поверхностью (A_1) и последовательность станет периодической. Преобразование $\overline{M}_{2i+1}$ совпадёт с A_3, конгруэнция $(\overline{M}_{2i}\overline{M}_{2i+1})$, наложимая на конгруэнцию $(M_{2i}M_{2i+1})$, совпадёт с конгруэнцией (A_1A_3), т. е. все преобразования (M_{2i}) наложимы на поверхность (A_1) и, следовательно, наложимы между собой. То же имеем для поверхностей (M_{2i+1}) и конгруэнций чётного ранга $(M_{2i}M_{2i+1})$ последовательности. Аналогично налагаются все конгруэнции нечётного ранга $(M_{2i-1}M_{2i})$.

Таким образом, *все фокальные поверхности и конгруэнции последовательности одинаковой чётности ранга проективно наложимы.*

VIII. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОНГРУЭНЦИЙ R

215. Задача одновременного преобразования всех фокальных поверхностей последовательности. Рассмотрим одну конгруэнцию (A_1A_2) последовательности и допустим, что фокальные поверхности (A_1) и (A_2) допускают асимптотическое преобразование в фокальные поверхности (A_3), (A_4) конгруэнции (A_3A_4). Если поверхность (A_3) является асимптотическим преобразованием поверхности (A_1), то луч A_1A_3 касается в точках A_1 и A_3 этих поверхностей и описывает конгруэнцию W. На таком же основании луч A_2A_4 описывает вторую конгруэнцию W с фокальными поверхностями (A_2) и (A_4).

Отсюда прежде всего следует, что точки A_3 и A_4 лежат соответственно в касательных плоскостях поверхностей (A_1) и (A_2).

Следовательно, тетраэдр $\{A_i\}$ служит тетраэдром 1-го порядка для конгруэнции (A_1A_2). С равным правом его можно считать тетраэдром 1-го порядка для остальных трёх конгруэнций (A_1A_3), (A_3A_4), (A_4A_2), ибо каждая вершина косого четыреугольника $A_1A_3A_4A_2$ служит фокусом для прилегающих сторон его. Это можно выразить словами: *две конгруэнции (A_1A_2) и (A_3A_4) образуют пару T.* Будем считать, что тетраэдр $\{A_i\}$ присоединён к конгруэнции (A_1A_2) и примем формулы § 186.

К ним мы должны добавить дополнительные условия. Касательная плоскость поверхности (A_3) содержит лучи A_1A_3 и A_3A_4. Следовательно, дифференциальные перемещения точки A_3 не выходят из плоскости $A_1A_3A_4$ так же, как перемещения точки A_4 лежат в плоскости $A_2A_4A_3$. Отсюда

$$\omega_3^2=0,\quad \omega_4^1=0. \tag{50a}$$

Дифференцируя их внешним образом, получим:

$$\begin{aligned}&[\omega_3^1\omega_1^2]+[\omega_3^4\omega_4^2]=0,\\ &[\omega_4^2\omega_2^1]+[\omega_4^3\omega_3^1]=0.\end{aligned} \tag{50b}$$

Так как преобразования $(A_1)\to(A_3)$ и $(A_2)\to(A_4)$ — асимптотические, то асимптотические линии переходят в асимптотические и каждой сопряжённой системе линий одной поверхности на преобразованной поверхности соответствует сопряжённая система. Потребуем, кроме того, чтобы фокальные сети конгруэнции (A_1A_2) переходили в фокальные сети конгруэнции (A_3A_4).

Так как луч A_1A_2 касается на поверхности (A_1) линии $\omega_1^3=0$, луч A_3A_4 касается на поверхности (A_3) линии $\omega_3^1=0$, а на поверхностях (A_2) и (A_4) они касаются соответственно линий $\omega_2^4=0$ и $\omega_4^2=0$, то соответствие фокальных сетей равносильно пропорциональности этих форм

$$\omega_3^1=\lambda\omega_1^3,\quad \omega_4^2=\mu\omega_2^4. \tag{50c}$$

Дифференцируя эти уравнения, получим:

$$[\Delta\lambda\omega_1^3]=0,\quad [\Delta\mu\omega_2^4]=0, \tag{50d}$$

где

$$\Delta\lambda=d\ln\lambda+2(\omega_1^1-\omega_3^3),\quad \Delta\mu=d\ln\mu+2(\omega_2^2-\omega_4^4). \tag{50e}$$

Если же внести значения (50c), а также выражения (7) § 186 в уравнения (50b), то придём к конечным уравнениям

$$\lambda\gamma=-\mu\alpha,\quad \mu\gamma'=-\lambda\alpha', \tag{50f}$$

откуда, перемножая почленно, получим:

$$\lambda\mu(\gamma\gamma'-\alpha\alpha')=0.$$

Если $\lambda=0$, то и $\mu=0$ и прямая A_3A_4 — неподвижна. Конгруэнция (A_1A_2) при этом остаётся произвольной. Если $\lambda\mu\neq0$, то $\alpha\alpha'-\gamma\gamma'=0$ и конгруэнция (A_1A_2) будет конгруэнцией W.

Между тем из квадратичных уравнений (50d) следует

$$\Delta\lambda=\lambda_1\omega_1^3,\quad \Delta\mu=\mu_2\omega_2^4, \tag{50g}$$

а дифференцируя уравнения (50f), получим:

$$\begin{aligned}&\Delta\lambda-\Delta\mu-\Delta\alpha+\Delta\gamma=0,\\ &\Delta\lambda-\Delta\mu+\Delta\alpha'-\Delta\gamma'=0,\end{aligned}$$

а сравнивая коэффициенты при ω_1^3, ω_2^4, после подстановки выражений (9) § 187, (50g), будем иметь:

$$\lambda_1=\alpha_1-\beta_2=\gamma_1'+\beta_2',\quad \mu_2=\beta_1+\gamma_2=\alpha_2'-\beta_1'. \tag{50h}$$

Дифференцируя теперь внешним образом уравнения

$$\Delta\lambda=(\alpha_1-\beta_2)\omega_1^3,\quad \Delta\mu=(\beta_1+\gamma_2)\omega_2^4, \tag{50k}$$

получим:

$$[\Delta\alpha_1-\Delta\beta_2,\ \omega_1^3]=0,\quad [\Delta\beta_1+\Delta\gamma_2,\ \omega_2^4]=0$$

или, в силу (11) § 187 $\beta_{11}+\beta_{22}=0$.

Поскольку уравнения (31′) § 200 удовлетворены, конгруэнция (A_1A_2) есть конгруэнция R. В силу полной симметрии в постановке задачи для конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4), вторая конгруэнция тоже будет конгруэнцией R.

Нам остаётся показать, что такое преобразование допускает всякая конгруэнция R. Для этого нам придётся обратиться к системе уравнений, определяющих конгруэнции R.

216. Теорема существования для конгруэнции R. Уравнения (31) § 200, которые характеризуют конгруэнцию R по формулам (30) § 199, могут быть записаны в виде

$$\alpha\alpha' - \gamma\gamma' = 0, \tag{51a}$$

$$[\Delta\beta_2\omega_1^3] - [\Delta\beta_1\omega_2^4] = 0. \tag{51b}$$

Их надо рассматривать совместно с системой линейных уравнений (5) § 185, (7) § 186, (9) § 187 и квадратичных (10) § 187.

Последовательное дифференцирование конечного уравнения (51a) даёт, как мы видели, два соотношения (37 d) § 205

$$\Delta\alpha_1 = \Delta\beta_2 + \Delta\beta_2' + \Delta\gamma_1', \quad \Delta\alpha_2' = \Delta\beta_1' + \Delta\beta_1 + \Delta\gamma_2. \tag{51c}$$

Внося эти значения $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2'$ в квадратичные уравнения (10), заметим, что система уравнений (10), (51b) содержит только шесть независимых квадратичных уравнений, которые определяют значения форм:

$$\Delta\beta_1,\ \Delta\beta_2,\ \Delta\beta_1',\ \Delta\beta_2',\ \Delta\gamma_1',\ \Delta\gamma_2 \tag{a}$$

на втором интегральном элементе цепи.

Действительно, выписывая присоединённые к этой системе билинейные уравнения, мы получим для определителя из коэффициентов при шести неизвестных значениях (a) выражение

$$\Delta = \omega_1^3\omega_2^4\left\{\alpha(\omega_1^3)^2 + \gamma(\omega_2^4)^2\right\}\left\{\gamma'(\omega_1^3)^2 + \alpha'(\omega_2^4)^2\right\},$$

где ω_1^3, ω_2^4 — значения одноимённых форм на первом интегральном элементе цепи.

Определитель Δ обращается в нуль на характеристиках, которые соответствуют асимптотическим линиям фокальных поверхностей и развёртывающимся поверхностям конгруэнции.

Таким образом, система — в инволюции с характерами $s_1 = 6$, $s_2 = 0$ и определяет конгруэнции R с шестью произвольными функциями одного аргумента.

Допустим теперь, что мы имеем произвольную конгруэнцию R, т. е. знаем какое-то решение системы (5), (7), (9), (51a) и квадратичных уравнений (10), (51b). Можно ли для этой конгруэнции построить совместное преобразование фокальных поверхностей и конгруэнции в новую конгруэнцию R?

Для положительного ответа на этот вопрос надо показать, что к заданной конгруэнции для каждого луча можно так подобрать вершины A_3, A_4 тетраэдра, что будут иметь место уравнения (50a, b, c, f, k).

Первая система (определяющая конгруэнции R), кроме форм ω_1^3, ω_2^4, составляющих базис подкольца дифференциалов независимых переменных, и форм, стоящих в левых частях линейных уравнений (5),

(7), (9), (51c), содержит в своей характеристической системе [системе (I)] ещё шесть форм (a). Первые интегралы этой системы и составят совокупность всех переменных зависимых и независимых, через которые можно выразить все уравнения первой системы. Если дана конгруэнция R, то все неизвестные функции этой совокупности переменных заданы функциями от независимых переменных, все формы характеристической системы (I) линейно выражены через формы ω_1^3, ω_2^4 и обращают в тождество все уравнения (5), (7), (9), (10), (51a, b, c).

Вносим эти значения в уравнения (50a, b, c, f, к). Мы получаем систему шести линейных уравнений

$$\begin{gathered}\omega_3^2 = 0,\ \omega_4^1 = 0,\ \omega_3^1 = \lambda\omega_1^3,\ \omega_4^2 = \mu\omega_2^4,\\ \Delta\lambda = (\alpha_1 - \beta_2)\,\omega_1^3,\ \Delta\mu = (\beta_1 + \gamma_2)\,\omega_2^4\end{gathered} \tag{52a}$$

и одного конечного

$$\lambda\gamma + \mu\alpha = 0. \tag{52b}$$

Система замкнута относительно операции дифференцирования: внешние дифференциалы уравнений (52a) и полный дифференциал конечного уравнения (50b) являются алгебраическими следствиями системы (51b), (52a). Кроме форм ω_1^3, ω_2^4, она содержит ещё шесть форм, стоящих в левых частях уравнений (52a), которые и составляют её характеристическую систему. Система (52a, b) вполне интегрируема, но поскольку переменные λ, μ связаны конечным уравнением (52b), решение будет зависеть только от пяти произвольных постоянных. Не все они существенны. Формулы (50c) показывают, что два последних уравнения (52a) можно написать в виде

$$\begin{gathered}d\ln\lambda + 2(\omega_1^1 - \omega_3^3) = (\alpha_1 - \beta_2)\,\omega_1^3,\\ d\ln\mu + 2(\omega_2^2 - \omega_4^4) = (\beta_1 + \gamma_2)\,\omega_2^4\end{gathered} \tag{52a'}$$

и разность их обращается в тождество в силу соотношения (52b). Следовательно, достаточно сохранить только одно уравнение, например первое. Произвольная постоянная, которая появится при интегрировании этого уравнения, войдёт в выражение для λ в виде множителя. Между тем тетраэдр $\{A_i\}$ определён только до выбора геометрических точек A_i; каждая аналитическая точка A_i допускает выбор нормирования. Умножение точек A_3, A_4 на постоянный множитель ϑ умножит компоненту ω_3^1 на ϑ и разделит на него компоненту ω_1^3, следовательно, умножит λ на ϑ^2. При подходящем выборе множителя ϑ мы приведём произвольную постоянную интеграции уравнения (52a') к единице.

Имеем теорему:

Всякая конгруэнция R может быть преобразована с четырьмя произвольными параметрами в новую конгруэнцию R так, что все фокальные поверхности последовательности Лапласа, порождаемой преобразованной конгруэнцией, будут асимптотическими преобразованиями одноимённых фокальных поверхностей исходной последовательности.

Теорема доказана для преобразования одной конгруэнции и её фокальных поверхностей. Она распространяется шаг за шагом на остальные конгруэнции последовательности.

217. Литературные указания. Общие принципы отыскания инвариантов и инвариантных форм посредством вариации по вторичным параметрам были даны Картаном в Сорбоннских лекциях (литографированные записки). Стройную систему последовательных продолжений системы уравнений, определяющих многообразие, и полной системы инвариантов, инвариантных форм и геометрических образов, инвариантно связанных с дифференциальной окрестностью данного порядка, дал Г. Ф. Лаптев.

Приведённая в тексте теория инвариантов конгруэнции, отнесённой к тетраэдру 1-го порядка, появляется в печати впервые; только простейший абсолютный инвариант 2-го порядка I был дан Вэльшем [3].

Во втором томе Проективно-дифференциальной геометрии Фубини строит теорию конгруэнций в пространстве прямых на двух инвариантных формах. Первая форма φ — квадратичная с нулевыми линиями, соответствующими развёртывающимся поверхностям конгруэнции. Эту форму он кладёт в основу абсолютного дифференцирования.

Для построения второй инвариантной формы Φ четвёртого порядка автор исходит из вторых ковариантных производных от луча (аналитической прямой) конгруэнции. Свёртывая их с дифференциалами независимых переменных, он получает квадратичную форму, которую можно назвать вторым (ковариантным) дифференциалом луча. Умножая по правилу Плюккера этот ковариантный дифференциал сам на себя, он приходит к форме Φ. Формы φ и Φ определяют конгруэнцию. Если форму Φ разложить в сумму

$$\Phi = \Phi_4 + \varphi \Phi_2 + \varphi^2 \Phi_0,$$

то отношение $\Phi_4 : \varphi$ Фубин и называет проективным линейным элементом конгруэнции. Конгруэнции с общим линейным элементом не всегда проективно налагаются, необходимо ещё совпадение инвариантов Φ_0.

Проективный линейный элемент Φ, приведённый в тексте (21) § 193 был дан Террачини [3] из геометрических соображений.

О линиях Дарбу и инвариантных формах поверхности см. Проективно-дифференциальную геометрию автора. Там даны и литературные указания.

Внешние инвариантные формы, как обобщение инвариантов уравнения Лапласа, были даны Картаном.

Характеристика конгруэнции W равенством первого точечного и второго тангенциального инвариантов принадлежит Фубини. Построение инвариантных линейных комплексов конгруэнции приводится в тексте впервые (ср. Вэльш [1]).

Конгруэнции с однопараметрическим семейством соприкасающихся линейных комплексов даны Розе [3]. Ещё ранее Фиников пришёл к этим конгруэнциям, описывая пару конгруэнций с общими соприкасающимися линейными комплексами [9]. Приведённое в тексте построение конгруэнции W с линейчатыми фокальными поверхностями, как огибающей семейства линейных комплексов, принадлежит Д. Ф. Егорову [1]. Последовательность Лапласа, состоящая из конгруэнций линейных комплексов, дана Вильчинским [2]. Распределение фокусов последовательности дано Финиковым [6]. О конгруэнциях R см. выше, гл. V, VII. Преобразование конгруэнций R дано Ионасом [1]. Совместное преобразование всех фокальных поверхностей последовательности отмечено автором [5].

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ Ф

I. ОБЩИЕ СВОЙСТВА КОНГРУЭНЦИЙ Ф

218. Выбор нормального тетраэдра для конгруэнции R. Будем предполагать, что тетраэдр $\{A_i\}$ построен на касательных A_1A_3, A_2A_4, сопряжённых лучу конгруэнции A_1A_2, т. е. положим

$$\beta = 0, \quad \beta' = 0.$$

При этом формы

$$\omega_3^2 = \Delta\beta, \quad \omega_4^1 = \Delta\beta' \tag{1a}$$

становятся главными, но π_3^1, π_4^2 и все формы π_i^i остаются вторичными. Уравнения (14c) § 190 дают вариацию коэффициентов α_1, β_i, γ_2 при неподвижном луче

$$\delta\alpha_1 = \alpha_1(\pi_3^3 - \pi_1^1) - 3\pi_3^1, \quad \delta\gamma_2 = \gamma_2(\pi_4^4 - \pi_2^2) - 3\pi_4^2,$$
$$\delta\beta_2 = \beta_2(\pi_3^3 - \pi_1^1) + \pi_3^1, \quad \delta\beta_1 = \beta_1(\pi_4^4 - \pi_2^2) - \pi_4^2.$$

Отсюда, полагая все формы π_i^i равными нулю, получим:

$$\delta(\alpha_1 - \beta_2) = -4\pi_3^1, \quad \delta(\gamma_2 + \beta_1) = -4\pi_4^2.$$

Следовательно, за счёт форм π_3^1, π_4^2, т. е. перемещая точку A_3 по прямой A_1A_3, а точку A_4 — по прямой A_2A_4, можно привести обе разности $\alpha_1 - \beta_2$ и $\gamma_2 + \beta_1$ к нулю.

Если такой выбор уже произведён и, следовательно,

$$\alpha_1 = \beta_2, \quad \gamma_2 = -\beta_1, \tag{1b}$$

то из уравнений (10′) § 187, исключая α_1 или γ_2, получим:

$$\begin{aligned} 4\omega_3^1 &= \Delta\alpha_1 - \Delta\beta_2 + (3\alpha\alpha' + \gamma\gamma')\,\omega_2^4, \\ 4\omega_4^2 &= \Delta\beta_1 + \Delta\gamma_2 + (\alpha\alpha' + 3\gamma\gamma')\,\omega_1^3, \end{aligned} \tag{1c}$$

т. е. формы ω_3^1, ω_4^2 становятся главными формами.

Между тем, поскольку наша конгруэнция есть конгруэнция W, из уравнений (37c) § 205 теперь будет следовать

$$\gamma_1' = -\beta_2', \quad \alpha_2' = \beta_1'. \tag{1d}$$

Внося в выражение (1c) значения (11) § 187 и используя основные для конгруэнции R соотношения $\alpha\alpha' - \gamma\gamma' = 0$, $\beta_{11} + \beta_{22} = 0$, получим:

$$\begin{aligned} \omega_3^1 &= \varepsilon\omega_1^3 + \alpha\alpha'\omega_2^4, \\ \omega_4^2 &= \varepsilon'\omega_2^4 + \alpha\alpha'\omega_1^3, \end{aligned} \tag{1e}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{11} - \alpha\beta_{12} &= 4\varepsilon, \\ \gamma_{22} + \gamma\beta_{12} &= 4\varepsilon'. \end{aligned} \tag{1f}$$

Наконец, выбором нормирования вершин A_i, поскольку

$$\delta \ln \frac{\alpha}{\gamma} = 2(\pi_2^2 - \pi_1^1 + \pi_3^3 - \pi_4^4),$$

можно привести отношение $\frac{\alpha}{\gamma}$ к отрицательной единице, т. е. свести $\alpha + \gamma$ к нулю, и тогда из уравнения

$$\alpha\alpha' - \gamma\gamma' = 0$$

будет следовать

$$\gamma = -\alpha, \quad \gamma' = -\alpha'. \tag{1g}$$

Дифференцирование этих соотношений приводит в силу (8′) § 187, (9) § 187 и (1b), (1d) к равенству

$$\omega_1^1 - \omega_3^3 = \omega_2^2 - \omega_4^4. \tag{1h}$$

Теперь уравнения (7) § 186, (8′), (9) § 187, (1e) напишутся:

$$\begin{aligned} &\omega_1^2 = -\alpha\omega_2^4, \quad \omega_2^1 = -\alpha'\omega_1^3, \quad \omega_3^4 = \alpha\omega_1^3, \quad \omega_4^3 = \alpha'\omega_2^4, \\ &\omega_3^1 = \varepsilon\omega_1^3 + \alpha\alpha'\omega_2^4, \qquad \omega_4^2 = \alpha\alpha'\omega_1^3 + \varepsilon'\omega_2^4, \\ &\omega_3^2 = b_1\omega_1^3 + b_2\omega_2^4, \qquad \omega_4^1 = b_1'\omega_1^3 + b_2'\omega_2^4, \\ &d\alpha = -b_2\omega_1^3 - b_1\omega_2^4, \qquad d\alpha' = -b_2'\omega_1^3 - b_1'\omega_2^4, \end{aligned} \tag{2a}$$

где

$$b = \alpha\beta_1, \quad b_2 = -\alpha\beta_2, \quad b_1' = -\alpha'\beta_1', \quad b_2' = \alpha'\beta_2'.$$

Простой подсчёт даст:

$$D(\omega_1^1 - \omega_3^3) = 0, \quad D(\omega_2^2 - \omega_4^4) = 0, \quad D(\omega_1^1 - \omega_2^2) = 0.$$

Следовательно, каждая из этих разностей есть полный дифференциал

$$\omega_1^1 - \omega_2^2 = d\varphi, \quad \omega_1^1 - \omega_3^3 = \omega_2^2 - \omega_4^4 = d\psi.$$

Между тем, меняя нормирование вершин тетраэдра, получим для новой точки

$$\bar{A}_1 = \rho_1 A_1$$

компоненту

$$\bar{\omega}_1^1 = \omega_1^1 + d\ln\rho_1$$

и также для всякой точки $\bar{A}_i$. Значит, выбирая функции ρ_i так, чтобы $\rho_2 = \varphi\rho_1$, $\rho_3 = \psi\rho_1$, $\rho_4 = \psi\rho_2$, мы приведём каждую разность к нулю

$$\omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = \omega_4^4. \tag{2b}$$

Заметим, что при этом ρ_1 остаётся произвольным. Выбирая этот множитель так, чтобы определитель из 16 координат вершин

$$(A_1A_2A_3A_4) = 1$$

равнялся единице, можно привести все формы ω_i^i к нулю.

Во всяком случае из уравнений (2b) следует

$$D\omega_1^3 = [\omega_1^3, \omega_3^3 - \omega_1^1] = 0, \quad D\omega_2^4 = 0;$$

значит, ω_1^3, ω_2^4 — тоже полные дифференциалы; положим

$$\omega_1^3 = dv, \quad \omega_2^4 = du. \tag{2c}$$

Внешнее дифференцирование уравнений (2a) даёт:

$$\begin{aligned} &[db_1 + \alpha\omega_4^2, \ \omega_1^3] + [db_2 + \alpha\omega_3^1, \ \omega_2^4] = 0, \\ &[db_2' + \alpha'\omega_3^1, \ \omega_2^4] + [db_1' + \alpha'\omega_4^2, \ \omega_1^3] = 0, \\ &[db_2 + \alpha\omega_3^1, \ \omega_1^3] + [db_1 + \alpha\omega_4^2, \ \omega_2^4] = 0, \\ &[db_1' + \alpha'\omega_4^2, \ \omega_2^4] + [db_2' + \alpha'\omega_3^1, \ \omega_1^3] = 0, \\ &[d\varepsilon\omega_1^3] + 2[d(\alpha\alpha'), \omega_2^4] = 0, \\ &[d\varepsilon' \ \omega_2^4] + 2[d(\alpha\alpha'), \ \omega_1^3] = 0. \end{aligned} \tag{2d}$$

Квадратичные уравнения (2d) применением леммы Картана преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} &db_1 + \alpha\omega_4^2 = b_{11}\omega_1^3 + \alpha b_{12}\omega_2^4, \quad db_1' + \alpha'\omega_4^2 = b_{11}'\omega_1^3 + \alpha' b_{12}'\omega_2^4, \\ &db_2 + \alpha\omega_3^1 = \alpha b_{12}\omega_1^3 + b_{11}\omega_2^4, \quad db_2' + \alpha'\omega_3^1 = \alpha' b_{12}'\omega_1^3 + b_{11}'\omega_2^4, \\ &d\varepsilon = \varepsilon_1\omega_1^3 + 2(\alpha\alpha')_v\omega_2^4, \qquad d\varepsilon' = 2(\alpha\alpha')_u\omega_1^3 + \varepsilon_2'\omega_2^4, \\ &d(\alpha\alpha') = (\alpha\alpha')_v\omega_1^3 + (\alpha\alpha')_u\omega_2^4. \end{aligned} \tag{2e}$$

Сравнение этих формул с основными уравнениями (8), (9), (10′), (11) и (12′) § 187, даёт соотношения:

$$
\begin{gathered}
b_1 = \alpha\beta_1, \quad b_2 = -\alpha\beta_2, \quad b'_1 = -\alpha'\beta'_1, \quad b'_2 = \alpha'\beta'_2, \\
b_{11} = \alpha(\beta_{11} + \beta_1\beta_2), \quad b_{12} = -\alpha\beta_{12}, \\
b'_{11} = \alpha'(-\beta'_{11} + \beta'_1\beta'_2), \quad b'_{12} = -\alpha'\beta'_{12}, \\
\varepsilon = \frac{\alpha_{11} - \alpha\beta_{12}}{4}, \quad \varepsilon' = \frac{\gamma_{22} - \alpha\beta_{12}}{4}.
\end{gathered} \tag{3a}
$$

Заметим ещё их выражения через производные от α, α'

$$
\begin{gathered}
b_1 = -\alpha_u, \quad b_2 = -\alpha_v, \quad b'_1 = -\alpha'_u, \quad b'_2 = -\alpha'_v, \\
b_{11} = \alpha^2\alpha' - \alpha_{uv}, \quad b_{12} = -\frac{\alpha_{uu} + \alpha_{vv}}{2\alpha} + \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2}, \\
b'_{12} = -\frac{\alpha'_{uu} + \alpha'_{vv}}{2\alpha} + \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2},
\end{gathered} \tag{3b}
$$

откуда вытекает в силу (1b), (3a)

$$
\begin{gathered}
\alpha_1 = \beta_2 = (\ln\alpha)_v, \quad \gamma_2 = -\beta_1 = (\ln\alpha)_u, \\
\alpha'_2 = \beta'_1 = (\ln\alpha')_u, \quad \gamma'_1 = -\beta'_2 = (\ln\alpha')_v, \\
\alpha_{11} = \frac{\alpha_{vv}}{\alpha} + 3\varepsilon, \quad \beta_{11} = -\beta_{22} = \alpha\alpha' - (\ln\alpha)_{uv}, \\
\alpha\beta_{12} = \frac{\alpha_{uu}}{\alpha} - \varepsilon', \quad \gamma_{22} = \frac{\alpha_{uu}}{\alpha} + 3\varepsilon' \\
\alpha'_{22} = \frac{\alpha'_{uu}}{\alpha'} + 3\varepsilon', \quad \beta'_{22} = -\beta'_{11} = \alpha\alpha' - (\ln\alpha')_{uv}, \\
\alpha'\beta'_{12} = \frac{\alpha'_{vv}}{\alpha'} - \varepsilon, \quad \gamma'_{11} = \frac{\alpha'_{vv}}{\alpha'} + 3\varepsilon.
\end{gathered} \tag{3c}
$$

Коэффициенты α, α', ε, ε' удовлетворяют уравнениям

$$
\begin{gathered}
\frac{\alpha_{uu} - \alpha_{vv}}{\alpha} = \frac{\alpha'_{uu} - \alpha'_{vv}}{\alpha'} = \varepsilon' - \varepsilon, \\
\varepsilon_u = 2(\alpha\alpha')_v, \quad \varepsilon'_v = 2(\alpha\alpha')_u.
\end{gathered} \tag{3d}
$$

Из уравнений (2a), (2b), (3b) следует такая матрица компонент нашего тетраэдра

$$
\begin{pmatrix}
0 & -\alpha\,du & dv & 0 \\
-\alpha' dv & 0 & 0 & du \\
\varepsilon\,dv + \alpha\alpha' du & -\alpha_u dv - \alpha_v du & 0 & \alpha\,dv \\
-\alpha'_u dv - \alpha'_v du & \alpha\alpha' dv + \varepsilon' du & \alpha' du & 0
\end{pmatrix}. \tag{4}
$$

Уравнения структуры сводятся к системе (3d).

Таблица компонент (4) допускает замену

$$
\begin{gathered}
u_1 = au, \quad v_1 = a'v, \quad \alpha_1 = \frac{c}{ab}\alpha, \quad \alpha'_1 = \frac{b}{ac}\alpha', \\
\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{a^2}, \quad \varepsilon'_1 = \frac{\varepsilon'}{a^2}; \quad a' \text{ [illegible] } a, \quad a, b, c = \mathrm{const}.
\end{gathered} \tag{3e}
$$

с одновременной заменой вершин

$$
A'_1 = cA_1, \quad A'_2 = bA_2, \quad A'_3 = \frac{c}{a'} A_3, \quad A'_4 = \frac{b}{a} A_4.
$$

219. Канонический тетраэдр для первого преобразования Лапласа конгруэнции R. Такая же матрица компонент, только с другими функциями α, α', ε, ε' и другими параметрами u, v, должна быть и для конгруэнции $(A_1 A_3)$, полученной из конгруэнции $(A_1 A_2)$ преобразованием Лапласа, если её отнести к такому же тетраэдру $\{B_i\}$, каким был тетраэдр $\{A_i\}$ для конгруэнции $(A_1 A_2)$.

Очевидно, вершина B_2 совпадает с фокусом A_1 конгруэнции (A_1A_3). Вершина B_1 лежит в другом фокусе луча A_1A_3, т. е. где-то на прямой A_1A_3, а вершина B_4 — на прямой A_1A_2, которая служит преобразованием Лапласа в сторону параметра u для прямой A_1A_3. Наконец, вершина B_3 лежит на преобразовании в сторону v, т. е. на прямой, определяемой точками B_1 и $(B_1)_v$.

Мы можем, следовательно, положить

$$
\begin{gathered}
B_1 = \rho_1(A_3 + \lambda A_1), \quad B_2 = \rho_2 A_1, \\
B_3 = \rho_3\{(B_1)_v + \mu B_1\}, \quad B_4 = \rho_4(A_2 + \nu A_1).
\end{gathered} \tag{5a}
$$

Если обозначить прописными буквами A, A', E, E', U, V величины α, α', ε, ε', u, v для тетраэдра $\{B_i\}$ и внести эти значения B_i в первое уравнение (1) § 185 для матрицы (4)

$$
dB_1 = -\mathrm{A}U'\,du B_2 + V'\,dv B_3, \qquad U' = \frac{dU}{du}, \quad V' = \frac{dV}{dv},
$$

то, сравнивая коэффициенты при вершинах A_i и дифференциале du, получим:

$$
(\rho_1)_u = 0, \quad \lambda = -(\ln\alpha)_v, \quad \mathrm{A} = \frac{\rho_1}{\rho_2 U'}\{(\ln\alpha)_{uv} - \alpha\alpha'\}. \tag{5b}
$$

Сравнение коэффициентов при дифференциале dv даёт:

$$
B_3 = \frac{1}{V'}(B_1)_v \quad \text{и} \quad \rho_3 = \frac{1}{V'}, \quad \mu = 0
$$

и разложение вершины B_3 по точкам A_i будет:

$$
\begin{aligned}
B_3 = \frac{\rho_1}{V'}\{[\varepsilon - (\ln\alpha)_{vv} - (\ln\alpha)_v(\ln\rho_1)_v] A_1 - \alpha_u A_2 + {} \\
+ \left(\ln\frac{\rho_1}{\alpha}\right)_v A_3 + \alpha A_4\}.
\end{aligned} \tag{5c}
$$

Таким же образом из второго уравнения для разложения dB_2 получим:

$$\rho_4 = -\frac{\alpha\rho_2}{U'}, \quad \nu = -\frac{1}{\alpha}(\ln \rho_2)_u, \quad (\rho_2\alpha)_v = 0, \quad A' = -\frac{\rho_2}{\rho_1 V'}. \tag{5d}$$

Четвёртое уравнение должно иметь вид

$$dB_4 = \left(-A'_u \frac{V'}{U'}dv - A'_v \frac{U'}{V'}du\right)B_1 + (AA'V'dv + E'U'du)B_2 + A'U'B_3.$$

Если сюда внести значения точек (5a), (5c) и сравнить коэффициенты при $A_i du$, $A_i dv$, то получим ряд уравнений

$$(\rho_4)_u\nu + \rho_4\nu_u = -A'_v\rho_1\lambda\frac{U'}{V'} + E'\rho_2U' +$$
$$+ A'\rho_1\frac{U'}{V'}\{\varepsilon - (\ln\alpha)_{vv} - (\ln\alpha)_v(\ln\rho_1)_v\}, \tag{α_1}$$

$$\rho_4\nu_v - \rho_4\alpha' = -A'_u\rho_1\lambda\frac{V'}{U'} + AA'\rho_2V', \tag{α_2}$$

$$(\rho_4)_u - \alpha\rho_4\nu = -A'\alpha_u\rho_1\frac{U'}{V'}, \tag{α_3}$$

$$(\rho_4)_v = 0, \tag{α_4}$$

$$-A'_v\rho_1\frac{U'}{V'} + A'\left(\ln\frac{\rho_1}{\alpha}\right)_v\rho_1\frac{U'}{V'} = 0, \tag{α_5}$$

$$\rho_4\nu = -A'_u\rho_1\frac{V'}{U'}, \tag{α_6}$$

$$\rho_4 = A'\alpha\rho_1\frac{U'}{V'}. \tag{α_7}$$

Уравнения (α_4), (α_6) после подстановки значений (5b), (5d) обращаются в тождества. Уравнение (α_7) такой же подстановкой приводится к виду

$$U'^2 = V'^2.$$

Поскольку левая часть уравнения должна быть функцией одного переменного u, а правая — одного переменного v, то U' и V' будут постоянные

$$U' = a, \quad V' = a', \qquad a' = \pm a = \text{const}.$$

Уравнения (α_3) и (α_5) теперь принимают вид

$$(\alpha\rho_2)_u = 0, \quad (\rho_1)_v = 0.$$

Поскольку в силу (5b), (5d) мы имеем $(\rho_1)_u = 0$, $(\alpha\rho_2)_v = 0$, оба выражения — постоянны

$$\rho_1 = \text{const}, \quad \rho_2\alpha = h, \quad h = \text{const}.$$

Наконец, уравнение (α_2) обращается в тождество, а уравнение (α_1) принимает вид

$$E'a^2 = \varepsilon - (\ln\alpha)_{vv} - \alpha\left\{\frac{(\ln\alpha)_u}{\alpha}\right\}_u - (\ln\alpha)^2_v.$$

Складывая его с уравнением (5d)

$$0 = \varepsilon' - \varepsilon + (\ln\alpha)_{vv} - (\ln\alpha)_{uu} + (\ln\alpha)^2_v - (\ln\alpha)^2_u,$$

получим:

$$E'a^2 = \varepsilon' - 2(\ln\alpha)_{uu}.$$

Формулы (5a), (5c) принимают вид

$$B_1 = \rho_1\{A_3 - (\ln\alpha)_v A_1\}, \quad B_2 = \frac{h}{\alpha}A_1,$$
$$B_3 = \frac{\rho_1}{a'}\{[\varepsilon - (\ln\alpha)_{vv}]A_1 - \alpha_u A_2 - (\ln\alpha)_v A_3 + \alpha A_4\}, \tag{5a$'$}$$
$$B_4 = -\frac{h}{a}\left\{A_2 + \frac{1}{\alpha}(\ln\alpha)_u A_1\right\}.$$

Разложение дифференциала dB_3 даёт нам коэффициент E и мы получаем таблицу

$$A = \frac{\rho_1}{ah}\alpha\{(\ln\alpha)_{uv} - \alpha\alpha'\}, \quad A' = -\frac{h}{\rho_1 a'}\frac{1}{\alpha},$$
$$a^2E = \varepsilon - 2(\ln\alpha)_{vv}, \quad a^2E' = \varepsilon' - 2(\ln\alpha)_{uu}, \tag{5b$'$}$$
$$U = au, \quad V = a'v, \qquad a' = \pm a, \quad a,\ h,\ \rho_1 = \text{const}.$$

Нетрудно заметить, что постоянные a, $a' = \pm a$, h_1 ρ_1 — не существенны, ибо при любом их выборе таблица (4) сохраняет свой вид.

220. Конгруэнции с соответствием линий Дарбу на фокальных поверхностях (конгруэнции Ф). Мы уже рассматривали такие конгруэнции, как метод преобразования изотермически-асимптотических поверхностей (поверхностей Ф). Мы видели, что конгруэнция Ф — необходимо конгруэнция W, т. е. асимптотические на фокальных поверхностях соответствуют и, кроме того, соответствуют линии Дарбу (гл. V, § 120).

Мы теперь рассмотрим эти конгруэнции с точки зрения тех последовательностей Лапласа, которые они порождают.

Мы видели (§ 194), что линии Дарбу на фокальных поверхностях являются нулевыми линиями кубической формы φ_3 и такой же формы φ'_3 для второй фокальной поверхности. Линии Дарбу будут соответствовать на обеих фокальных поверхностях, если коэффициенты этих форм будут пропорциональны. Пользуясь формулой (23') § 194 для формы φ_3 и выписывая форму φ'_3 обычной заменой указателей $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ и прибавлением штрихов, мы получим искомое условие в виде ряда равных отношений

$$\frac{\alpha(3\beta_2 + \alpha_1)}{\gamma'(3\beta'_2 - \gamma'_1)} = \frac{\alpha(3\beta_1 - \gamma_2)}{\gamma'(3\beta'_1 + \alpha'_2)} = \frac{\gamma(3\beta_2 + \alpha_1)}{\alpha'(3\beta'_2 - \gamma'_1)} = \frac{\gamma(3\beta_1 - \gamma_2)}{\alpha'(3\beta'_1 + \alpha'_2)}. \tag{6a}$$

Отсюда прежде всего следует пропорция

$$\frac{\alpha}{\gamma'}=\frac{\gamma}{\alpha'} \quad \text{или} \quad \alpha\alpha'-\gamma\gamma'=0, \tag{6b}$$

которая вновь показывает, что наша конгруэнция есть конгруэнция W. Затем мы имеем единственное условие

$$\frac{3\beta_2+\alpha_1}{3\beta_2'-\gamma_1'}=\frac{3\beta_1-\gamma_2}{3\beta_1'+\alpha_2'}. \tag{6c}$$

Пользуясь обозначениями (18a) § 190, это равенство можно записать как уравнение между инвариантами третьего порядка:

$$I_2 I_2'=1.$$

Если отнести конгруэнцию к осям фокальной сети поверхности (A_1), то уравнения (24a) — (24d) § 195

$$\omega_3^2=0,\ \beta=0,\ \beta'=0,\ \beta_1=0,\ \beta_2=0$$

приведут соотношения (37c) § 205, (6c) к виду

$$\alpha_1=\beta_2'+\gamma_1', \quad \gamma_2=\alpha_2'-\beta_1', \tag{6d}$$

$$\frac{\beta_2'+\gamma_1'}{3\beta_2'-\gamma_1'}=\frac{\beta_1'-\alpha_2'}{3\beta_1'+\alpha_2'},$$

или

$$\beta_2'\alpha_2'+\beta_1'\gamma_1'=0. \tag{6c'}$$

Дифференцируя уравнения (6c′), (6d), мы получим, кроме уравнений (37d) § 205, линейное уравнение

$$\begin{aligned}\alpha_2'\Delta\beta_2'+\beta_2'\Delta\alpha_2'+\gamma_1'\Delta\beta_1'+\beta_1'\Delta\gamma_1'-(3\beta_2'-\gamma_1')\Delta\beta_1+(3\beta_1'+\alpha_2')\Delta\beta_2=\\=\beta_2'(\beta_1'\beta_2'-\alpha_2'\beta_2'-4\alpha\alpha')\omega_1^3+\beta_1'(\beta_1'\beta_2'+\gamma_1'\beta_1'-4\alpha\alpha')\omega_2^4.\end{aligned} \tag{6e}$$

Внося значения $\Delta\alpha_1$ и $\Delta\gamma_2$ из уравнений (37d) § 205 в квадратичные уравнения (10) § 187, мы получим только пять независимых уравнений

$$\begin{aligned}&[\Delta\beta_2'\,\omega_1^3]+[\Delta\gamma_1'\,\omega_1^3]-[\Delta\beta_1\,\omega_2^4]+[\Delta\beta_2\,\omega_1^3]=0,\\&\alpha[\Delta\beta_1\,\omega_1^3]+\gamma[\Delta\beta_2\,\omega_2^4]=0,\\&[\Delta\beta_1'\,\omega_2^4]+[\Delta\gamma_1'\,\omega_1^3]=0,\\&\gamma'[\Delta\beta_1'\,\omega_1^3]+\alpha'[\Delta\beta_2'\,\omega_2^4]=0,\\&[\Delta\beta_2'\,\omega_1^3]-[\Delta\alpha_2'\,\omega_2^4]=0.\end{aligned} \tag{6f}$$

Система уравнений (5) § 185, (7) § 186, (9) § 187, (24a) — (24d) § 195, (37a), (37d) § 205, (6c′) — (6f), замкнута относительно операции дифференцирования. Характеристическая система, кроме форм ω_1^3, ω_2^4, составляющих базис подкольца дифференциалов независимых переменных, и левых частей линейных уравнений, содержит только шесть форм $\Delta\alpha_2'$, $\Delta\gamma_1'$, $\Delta\beta_1'$, $\Delta\beta_2'$, $\Delta\beta_1$, $\Delta\beta_2$, которые, впрочем, связаны линейным уравнением (6e). Значения пяти из них остаются на первом линейном элементе цепи произвольными, на втором они будут определяться уравнением (6e) и билинейными уравнениями, присоединёнными к пяти квадратичным уравнениям (6f). Определитель этой системы

$$\begin{aligned}\{\alpha(\omega_1^3)^2+\gamma(\omega_2^4)^2\}\{\gamma'\beta_2'(\omega_1^3)^3+3\gamma'\beta_1'(\omega_1^3)^2\omega_2^4+\\+3\alpha'\beta_2'\omega_1^3(\omega_2^4)^2+\alpha'\beta_1'(\omega_2^4)^3\}\end{aligned}$$

отличен от нуля. Следовательно, система в инволюции и определяет искомые конгруэнции с пятью произвольными функциями одного аргумента.

Мы видели (§ 120 гл. V), что с каждой изотермически-асимптотической поверхностью (поверхностью Ф) связывается шестипараметрическое семейство конгруэнций W, переводящих её в новую поверхность того же класса так, что на фокальных поверхностях соответствуют не только асимптотические линии, но и линии Дарбу. Так как фокальными поверхностями наших конгруэнций могут быть только поверхности Ф, то найденный нами произвол конгруэнции (пять произвольных функций одного аргумента) относится к произволу поверхности Ф.

221. Последовательности Лапласа с двумя конгруэнциями Ф. Существует ли последовательность Лапласа, на фокальных поверхностях которой соответствуют линии Дарбу? Очевидно, такая последовательность должна быть последовательностью R, ибо соответствие линий Дарбу имеет следствием соответствие асимптотических, и не менее очевидно, что этим свойством не обладает общая последовательность R, ибо из соответствия асимптотических не вытекает соответствия линий Дарбу.

Отнесём исходную конгруэнцию к осям фокальной сети (A_1), т. е. допустим, что имеют место уравнения (24a) — (24d) § 195 и все следующие уравнения предыдущего параграфа, и будем рассматривать конгруэнцию (A_1A_3), которая является первым преобразованием Лапласа для конгруэнции (A_1A_2) в направлении от A_2 к A_1.

Выбранный тетраэдр является тетраэдром 1-го порядка для конгруэнции (A_3A_1), ибо вершины A_3 и A_1 — фокусы луча, а грани $A_3A_1A_4$ и $A_1A_3A_2$ — фокальные плоскости в силу выбора тетраэдра $\{A_i\}$, построенного на осях фокальной сети (A_1).

Если ввести стандартное обозначение вершин тетраэдра

$$B_1=A_3, \quad B_2=A_1, \quad B_3=A_4, \quad B_4=A_2, \tag{7a}$$

то компоненты $\bar{\omega}_i^k$ для конгруэнции $(A_3A_1)\equiv(B_1B_2)$ будут получаться из компонент ω_α^β первоначальной конгруэнции (A_1A_2) подстановкой указателей $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}$. Отсюда вытекает:

1) формы, остающиеся независимыми на интегральном многообразии, пропорциональны таким же формам первоначальной конгруэнции

$$\bar{\omega}_1^3=\omega_3^4=\alpha\omega_1^3,\quad \bar{\omega}_2^4=\omega_1^2=\gamma\omega_2^4, \tag{7b}$$

что объясняется соответствием развёртывающихся поверхностей обеих конгруэнций;

2) четвёрка главных форм (7) § 186 тетраэдра 1-го порядка

$$\begin{aligned}&\bar{\omega}_3^4=\omega_4^2=\Delta\beta_1=\beta_{11}\omega_1^3+\gamma\beta_{12}\omega_2^4,\quad \bar{\omega}_2^1=\omega_1^3,\\ &\bar{\omega}_1^2=\omega_3^1=-\Delta\beta_2=-\alpha\beta_{12}\omega_1^3-\beta_{22}\omega_2^4,\quad \bar{\omega}_4^3=\omega_2^4\end{aligned} \tag{7c}$$

позволяет вычислить новые коэффициенты

$$\begin{aligned}&\bar{\alpha}=\frac{\beta_{11}}{\alpha},\quad \bar{\beta}=-\beta_{12},\quad \bar{\gamma}=-\frac{\beta_{22}}{\gamma},\\ &\bar{\alpha}'=\frac{1}{\gamma},\quad \bar{\beta}'=0,\quad \bar{\gamma}'=\frac{1}{\alpha}.\end{aligned} \tag{7d}$$

Теперь можно вычислить по формулам (8′) § 187 главные формы 2-го порядка

$$\begin{aligned}\Delta\bar{\alpha}&=d\ln\bar{\alpha}+\bar{\omega}_1^1-2\bar{\omega}_3^3+\bar{\omega}_4^4=d\ln\beta_{11}-d\ln\alpha+\omega_3^3-2\omega_4^4+\omega_2^2=\\ &=\frac{\Delta\beta_{11}}{\beta_{11}}-\Delta\alpha=\left(\frac{\beta_{111}}{\beta_{11}}-\alpha_1\right)\omega_1^3+\gamma\frac{\beta_{121}}{\beta_{11}}\omega_2^4,\\ \Delta\bar{\beta}&=\alpha\bar{\beta}+\bar{\beta}(\bar{\omega}_2^2-\bar{\omega}_3^3)+\bar{\omega}_3^2=-d\beta_{12}+\beta_{12}(\omega_4^4-\omega_1^1)+\omega_4^1=\\ &=-\Delta\beta_{12}=-\beta_{121}\omega_1^3-\beta_{122}\omega_2^4,\\ \Delta\bar{\gamma}&=d\ln\bar{\gamma}+2\bar{\omega}_2^2-\bar{\omega}_1^1-\bar{\omega}_4^4=d\ln\beta_{22}-d\ln\gamma+2\omega_1^1-\omega_3^3-\\ &-\omega_2^2=\frac{\Delta\beta_{22}}{\beta_{22}}-\Delta\gamma=\alpha\frac{\beta_{122}}{\beta_{22}}\omega_1^3+\left(\frac{\beta_{222}}{\beta_{22}}-\gamma_2\right)\omega_2^4,\\ \Delta\bar{\alpha}'&=d\ln\bar{\alpha}'+\bar{\omega}_2^2-2\bar{\omega}_4^4+\bar{\omega}_3^3=-d\ln\gamma+\omega_1^1-2\omega_2^2+\omega_4^4=\\ &=-\Delta\gamma=-\gamma_2\omega_2^4,\\ \Delta\bar{\beta}'&=\bar{\omega}_4^1=\omega_2^3=0,\\ \Delta\bar{\gamma}'&=d\ln\bar{\gamma}'+2\bar{\omega}_1^1-\bar{\omega}_2^2-\bar{\omega}_3^3=-d\ln\alpha+2\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_4^4=\\ &=-\Delta\alpha=-\alpha_1\omega_1^3.\end{aligned} \tag{7e}$$

Отсюда по формулам (9) § 187 можно вычислить значения

$$\begin{aligned}&\bar{\alpha}_1=\frac{\beta_{111}}{\alpha\beta_{11}}-\frac{\alpha_1}{\alpha},\quad \bar{\beta}_1=-\frac{\beta_{121}}{\beta_{11}},\quad \bar{\beta}_2=-\frac{\beta_{122}}{\beta_{22}},\quad \bar{\gamma}_2=\frac{\beta_{222}}{\gamma\beta_{22}}-\frac{\gamma_2}{\gamma},\\ &\bar{\alpha}_2'=-\frac{\gamma_2}{\gamma},\quad \bar{\beta}_2'=0,\quad \bar{\beta}_1'=0,\quad \bar{\gamma}_1'=-\frac{\alpha_1}{\alpha}.\end{aligned} \tag{7f}$$

Условие (6b) для конгруэнции (A_1A_3) напишется в виде уравнения

$$\beta_{11}+\beta_{22}=0, \tag{8a}$$

которое мы уже имели, когда рассматривали конгруэнции R; условие (6c) принимает вид

$$\frac{\beta_{111}}{\alpha_1\beta_{11}}-3\frac{\gamma\beta_{121}}{\gamma_2\beta_{11}}+3\frac{\alpha\beta_{122}}{\alpha_1\beta_{22}}-\frac{\beta_{222}}{\gamma_2\beta_{22}}=0. \tag{8b}$$

222. Инвариантная характеристика последовательности с двумя конгруэнциями Ф. Дифференцируя уравнение (8a), получим:

$$\Delta\beta_{11}+\Delta\beta_{22}=0,$$

откуда

$$\beta_{111}+\alpha\beta_{122}=0,\quad \beta_{222}+\gamma\beta_{121}=0. \tag{8c}$$

Следовательно, уравнение (8b) можно написать в виде

$$\gamma\alpha_1\beta_{121}+\alpha\gamma_2\beta_{122}=0, \tag{8b′}$$

или в силу (6c) в эквивалентной при $\beta_1=\beta_2=0$ форме

$$\gamma\beta_{121}(\gamma_1'-3\beta_2')+\alpha\beta_{122}(\alpha_2'+3\beta_1')=0. \tag{8d}$$

Мы уже видели, что уравнение (8a) инвариантно относительно преобразований тетраэдра 1-го порядка. Остаётся показать, что этим свойством обладает и уравнение (8d).

Продифференцируем внешним образом форму $\Delta\beta_{12}$

$$D(\Delta\beta_{12})=[\Delta\beta_{12},\ \omega_1^1-\omega_4^4]+\mathcal{A}[\omega_1^3\omega_2^4],$$

где $\mathcal{A}$ — функция от коэффициентов α, α_1, α_{11}..., содержание которой нас сейчас не интересует. Выписывая присоединённую билинейную форму для двух направлений дифференцирования: символы d, ω_i^k для изменения главных параметров и δ, π_i^k — для изменения вторичных, получим:

$$\delta(\Delta\beta_{12})=\Delta\beta_{12}(\pi_4^4-\pi_1^1)$$

или

$$\delta(\beta_{121}\omega_1^3+\beta_{122}\omega_2^4)=(\beta_{121}\omega_1^3+\beta_{122}\omega_2^4)(\pi_4^4-\pi_1^1)$$

или пользуясь формулами (19a) § 192 для вариации $\delta\omega_1^3$, $\delta\omega_2^4$ и сравнивая коэффициенты при формах ω_1^3, ω_2^4,

$$\delta\beta_{121} = \beta_{121}(\pi_4^4 + \pi_3^3 - 2\pi_1^1),$$
$$\delta\beta_{122} = \beta_{122}(2\pi_4^4 - \pi_1^1 - \pi_2^2).$$

Нетрудно проверить, что

$$I_5 = \frac{\gamma\beta_{121}(\gamma_1' - 3\beta_2')}{\alpha\beta_{122}(\alpha_2' + 3\beta_1')} \tag{9}$$

является абсолютным инвариантом 5-го порядка и, следовательно, уравнение (8d) — инвариантно.

223. Уравнение на функции α, α' для последовательности с тремя конгруэнциями Ф. Теперь мы можем написать требование, чтобы преобразование (A_2A_4) было конгруэнцией Ф (соответствие линий Дарбу). Выполняя подстановку указателей $\binom{1\ 3}{2\ 4}$, получим уравнения

$$\begin{gathered} \beta_{22}' + \beta_{11}' = 0, \\ \gamma'\beta_{122}'(\gamma_2 - 3\beta_1) + \alpha'\beta_{121}'(\alpha_1 + 3\beta_2) = 0. \end{gathered} \tag{8f}$$

Первое из этих уравнений является прямым следствием уравнения (8a) в силу второго уравнения (37e) § 205. Не так легко увидеть независимость второго из наших условий. Для этого более удобно будет обратиться к формулам голономного репера § 218.

Таблица компонент (4) удовлетворяет тождественно условию (6b), которое составляет первое условие соответствия линий Дарбу на фокальных поверхностях. Второе условие (6c′) в силу уравнений (3c) принимает вид

$$(\ln\alpha)_u(\ln\alpha')_v - (\ln\alpha)_v(\ln\alpha')_u = 0$$

или

$$[d\alpha\ d\alpha'] = 0,$$

а это равносильно требованию, чтобы α' *было функцией одного переменного* α.

Точно так же заметим, что первое условие соответствия линий Дарбу на фокальных поверхностях первого преобразования Лапласа, записываемое в виде равенства (8a), для матрицы компонент (4) удовлетворено в силу (3c).

Чтобы было удовлетворено второе условие, записываемое в инвариантной форме уравнением (8d), достаточно потребовать, чтобы коэффициенты A и A' преобразованной матрицы были связаны уравнением

$$F(\mathrm{A}, \mathrm{A}') = 0,$$

не содержащим других переменных. Формулы (5b′) показывают, что все три уравнения (6c), (8d), (8f), требующие, чтобы линии Дарбу соответствовали на четырёх соседних фокальных поверхностях последовательности R, можно записать тремя уравнениями

$$\alpha' = f(\alpha), \quad \frac{\partial^2 \ln\alpha}{\partial u\,\partial v} = f_1(\alpha), \quad \frac{\partial^2 \ln\alpha'}{\partial u\,\partial v} = f_2(\alpha), \tag{10a}$$

где все $f_i(\alpha)$ — произвольные функции своего аргумента.

Отсюда уже нетрудно увидеть, что третье уравнение (10a) не вытекает из предыдущих.

Дифференцируя последовательно $\ln\alpha'$ и рассматривая его как функцию от $\ln\alpha$, имеем:

$$\frac{\partial\ln\alpha'}{\partial u} = \frac{d\ln\alpha'}{d\ln\alpha}\frac{\partial\ln\alpha}{\partial u}, \quad \frac{\partial^2\ln\alpha'}{\partial u\,\partial v} = \frac{d\ln\alpha'}{d\ln\alpha}\frac{\partial^2\ln\alpha}{\partial u\,\partial v} + \frac{d^2\ln\alpha'}{(d\ln\alpha)^2}\frac{\partial\ln\alpha}{\partial u}\frac{\partial\ln\alpha}{\partial v}.$$

или, исключая $\frac{\partial^2\ln\alpha'}{\partial u\,\partial v}$, $\frac{\partial^2\ln\alpha}{\partial u\,\partial v}$ с помощью уравнений (10a),

$$\frac{d\ln\alpha'}{d\ln\alpha}f_1(\alpha) + \frac{d^2\ln\alpha'}{(d\ln\alpha)^2}\frac{\partial\ln\alpha}{\partial u}\frac{\partial\ln\alpha}{\partial v} = f_2(\alpha). \tag{10b}$$

Отсюда две возможности: или это уравнение содержит член

$$\frac{\partial\ln\alpha}{\partial u}\frac{\partial\ln\alpha}{\partial v}$$

и тогда это произведение будет функцией одного аргумента α или не содержит его и тогда $\frac{d^2\ln\alpha'}{(d\ln\alpha)^2} = 0$.

II. СПЕЦИАЛЬНЫЕ КЛАССЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ Ф

224. Первое очевидное решение: последовательность из конгруэнций линейных комплексов. Допустим, что уравнение (10b) действительно содержит произведение $(\ln\alpha)_u(\ln\alpha)_v$.

Поскольку производные от $\ln\alpha'$ по α, очевидно, являются функциями одного α, то и произведение частных производных тоже есть функция одного α:

$$(\ln\alpha)_u(\ln\alpha)_v = f_3(\alpha). \tag{10c}$$

Прежде всего возможно, что α зависит только от одного u

$$(\ln\alpha)_v = 0,$$

тогда и α' — функция одного u. Уравнения (3d) дают:

$$\varepsilon_u = 0, \quad \varepsilon' = 2(\alpha\alpha')_u v + \varphi(u), \quad \varepsilon' - \varepsilon = \frac{\alpha_{uu}}{\alpha} = \frac{\alpha'_{uu}}{\alpha'}. \tag{11a}$$

Внося в последнее уравнение значение ε' из второго и дифференцируя по v, получим:

$$(2\alpha\alpha')_u = \varepsilon_v.$$

Здесь в левой части уравнения стоит функция одного u, а в правой — одного v, следовательно, обе равны одному и тому же постоянному c. Интегрируя, имеем:

$$2\alpha\alpha' = cu + c_1, \quad \varepsilon = cv + c_2, \qquad c, c_i = \mathrm{const}. \tag{11b}$$

Если $c \neq 0$, то постоянное c_1 приведётся к нулю выбором начала отсчёта для параметра u; тогда из первого уравнения (11b) следует

$$(\ln \alpha)_u + (\ln \alpha')_u = \frac{1}{u}, \qquad (\ln \alpha)_{uu} + (\ln \alpha')_{uu} = -\frac{1}{u^2}, \tag{11c}$$

а если написать последнее уравнение (11а) в виде

$$(\ln \alpha)_{uu} + (\ln \alpha)_u^2 = (\ln \alpha')_{uu} + (\ln \alpha')_u^2,$$

то исключение α' приведёт к уравнению

$$(\ln \alpha)_{uu} + \frac{1}{u}(\ln \alpha)_u = 0 \text{ и } \alpha = u^k, \qquad k = \text{const}. \tag{11d}$$

Из первого уравнения (11b) получим:

$$\alpha' = \frac{c}{2} u^{1-k}.$$

Если $c = 0$, то так же получим:

$$(\ln \alpha)_{uu} = 0, \ (\ln \alpha)_u = k \text{ и } \alpha = e^{ku}. \tag{11e}$$

Так как формулы (5b′) § 219 дают для A,A′ точно такие же выражения (с несущественными постоянными множителями и увеличением в первом случае показателя k на единицу), то преобразованная конгруэнция (A_1A_3) обладает, как и первоначальная (A_1A_2), конгруэнцией Ф в качестве своего первого преобразования Лапласа. Значит, для первоначальной конгруэнции линии Дарбу соответствуют на двух преобразованиях Лапласа в сторону u. Методом полной индукции придём к заключению, что они соответствуют на всех фокальных поверхностях последовательности.

Конгруэнция (11e) для $k = 0$ удовлетворяет условию (39d) § 205

$$\beta_1 + \beta_1' = 0; \ \beta_2 + \beta_2' = 0,$$

следовательно, принадлежит линейному комплексу. Те же соображения приведут к заключению, что все конгруэнции последовательности принадлежат линейным комплексам.

225. Второе очевидное решение: последовательности R с линейчатыми фокальными поверхностями. Возвращаясь к уравнению (10c), будем предполагать, что обе частные производные $(\ln \alpha)_u$ и $(\ln \alpha)_v$ не равны нулю, и разделим среднее из уравнений (10а) на $(\ln \alpha)_u$. Мы получим, используя соотношение (10c) интегрируемую комбинацию

$$\frac{\partial}{\partial v}[\ln (\ln \alpha)_u] = \frac{f_4'(\alpha)}{f_4(\alpha)} \frac{\partial \alpha}{\partial v}, \quad \text{где} \quad \frac{f_4'(\alpha)}{f_4(\alpha)} = \frac{f_1(\alpha)}{\alpha f_3(\alpha)}.$$

Отсюда

$$(\ln \alpha)_u = f_4(\alpha)\ \varphi(u), \quad (\ln \alpha)_v = f_4(\alpha)\ \psi(v), \tag{12a}$$

где $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ — произвольные функции своих аргументов; второе уравнение получено таким же приёмом с заменой u на v.

Внося найденные значения производных в уравнение (10c), будем иметь соотношение

$$\varphi(u)\ \psi(v) = \frac{f_3(\alpha)}{[f_4(\alpha)]^2}. \tag{12b}$$

Это равенство может осуществляться только двумя способами: или правая часть не содержит α и тогда обе функции левой части — постоянные, или α есть функция от произведения $\varphi(u)\ \psi(v)$.

Остановимся на первом предположении и пусть

$$\varphi(u) = m, \ \psi(v) = n, \qquad m, n = \text{const.}, \tag{13a}$$

причём мы можем предполагать $mn \neq 0$, ибо случай, когда α есть функция одного переменного u или v, уже рассмотрен.

Из уравнений (12а) теперь следует

$$n(\ln \alpha)_u - m(\ln \alpha)_v = 0.$$

Значит, α и α' — функции одного аргумента

$$x = mu + nv.$$

Дифференцируя α, α' в этом предположении и внося в первое уравнение (3d) § 218, получим:

$$(m^2 - n^2)\left\{\frac{1}{\alpha}\frac{d^2\alpha}{dx^2} - \frac{1}{\alpha'}\frac{d^2\alpha'}{dx^2}\right\} = 0. \tag{13b}$$

В зависимости от того, какой из двух множителей левой части обращается в нуль, имеем снова два случая.

Если

$$m = \pm n, \tag{13c}$$

то мы можем считать аргумент x равным сумме $u + v$. Действительно, формулы (3e) § 218 показывают при $a = -a' = 1$ возможность замены v на $V = -v$, а при аргументе $x = m(u + v)$ переменные α, α' будут функциями от $u + v$.

Полагая

$$x = u + v, \tag{14a}$$

мы приведём систему (3d) к виду

$$\varepsilon' = \varepsilon, \ \varepsilon_u = \varepsilon_v = 2\frac{d(\alpha\alpha')}{dx}, \tag{14b}$$

откуда, интегрируя, получим:

$$\varepsilon = 2\alpha\alpha' + C, \qquad C = \text{const.} \tag{14c}$$

Формулы (5b′) § 219 показывают, что конгруэнция (A_1A_3), полученная преобразованием Лапласа, имеет параметры A, A′, E, E′ того же самого вида. Следовательно, вся последовательность состоит из конгруэнций Ф. Нетрудно заметить, что все фокальные поверхности последовательности — линейчатые. Для этого достаточно доказать, что при наших условиях одна фокальная поверхность линейчатая, ибо при полной равноправности всех фокальных поверхностей мы тем самым докажем для всей последовательности.

Мы видели (§ 190), что первая фокальная поверхность становится линейчатой, если $I_3 = \pm 1$, где I_3 есть инвариант

$$I_3 = \sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}\frac{\alpha_1 + 3\beta_2}{\gamma_2 - 3\beta_1}}$$

или в силу (3c) § 218

$$I_3 = \frac{(\ln \alpha)_v}{(\ln \alpha)_u}.$$

Два решения

$$(\ln \alpha)_v = \pm (\ln \alpha)_u$$

не существенно отличаются друг от друга (одно переходит в другое изменением знака переменного v) и приводят к конгруэнции (12а), (13а). Таким образом, полученное решение является наиболее общей последовательностью R с линейчатыми фокальными поверхностями.

Решение для нашей задачи — тривиальное, ибо поскольку на линейчатой поверхности линии Дарбу совпадают с прямолинейными образующими, соответствие прямолинейных образующих означает соответствие линий Дарбу.

226. Последовательности Φ_1. Возвращаясь к уравнению (13b), рассмотрим обращение в нуль второго множителя.

Если $m^2 \neq n^2$, то уравнение (13b) имеет следствием

$$\frac{1}{\alpha}\frac{d^2\alpha}{dx^2} - \frac{1}{\alpha'}\frac{d^2\alpha'}{dx^2} = 0, \tag{15a}$$

или, по умножении на $\alpha\alpha'$,

$$\alpha'\frac{d^2\alpha}{dx^2} + \frac{d\alpha'}{dx}\frac{d\alpha}{dx} - \left(\frac{d\alpha'}{dx}\frac{d\alpha}{dx} + \alpha\frac{d^2\alpha'}{dx^2}\right) = 0,$$

откуда после интеграции получим:

$$\alpha'\frac{d\alpha}{dx} - \alpha\frac{d\alpha'}{dx} = C, \quad C = \text{const}. \tag{15a$'$}$$

Система (3d) § 218 теперь принимает вид

$$(m^2 - n^2)\frac{1}{\alpha}\frac{d^2\alpha}{dx^2} = \varepsilon' - \varepsilon, \ \varepsilon_u = 2\frac{d(\alpha\alpha')}{dx}n, \ \varepsilon'_v = 2\frac{d(\alpha\alpha')}{dx}m.$$

Интегрируя последние два уравнения, получим:

$$\varepsilon = 2\frac{n}{m}\alpha\alpha' + \psi_1(v), \quad \varepsilon' = 2\frac{m}{n}\alpha\alpha' + \varphi_1(u)$$

и, исключая ε, ε', будем иметь:

$$\varphi_1(u) - \psi_1(v) = f(x); \quad \frac{1}{\alpha}\frac{d^2\alpha}{dx^2} - 2\frac{\alpha\alpha'}{mn} = \frac{f(x)}{m^2 - n^2},$$

Дифференцируя первое из этих уравнений по u или v, получим:

$$\varphi_1'(u) = f'(x)\,m, \quad \psi_1'(v) = -f'(x)\,n.$$

Отсюда следует, что $f'(x)$ — постоянно:

$$f'(x) = C_1, \quad f(x) = C_1x + 2C_2$$

и, следовательно,

$$\varepsilon = 2\frac{n}{m}\alpha\alpha' - nC_1v - C_2 + C_3, \quad \varepsilon' = 2\frac{m}{n}\alpha\alpha' + mC_1u + C_2 + C_3, \tag{15b}$$

$$\frac{1}{\alpha}\frac{d^2\alpha}{dx^2} - 2\frac{\alpha\alpha'}{mn} = \frac{C_1x + 2C_2}{m^2 - n^2}, \quad C_i = \text{const}. \tag{15c}$$

Так как форма (21) § 193, которая для матрицы (4) § 218 принимает вид

$$\Phi = -\alpha\alpha'\frac{(du^2 - dv^2)^2}{du\,dv} \tag{15d}$$

зависит только от выбора решения $\alpha\alpha'$ системы (15 a, c) и не содержит постоянной C_3, от которой существенно зависит матрица компонент (4), то все конгруэнции, получаемые при одном и том же значении $\alpha\alpha'$ и различном выборе постоянной C_3, проективно различны, но будут иметь один и тот же проективный линейный элемент Φ; следовательно, будут проективно налагаться (гл. XIII).

Так как вычисляемые по формулам (5b′) § 219 величины A, A′ конгруэнции (A_1A_3), полученной преобразованием Лапласа из конгруэнции (A_1A_2), являются функциями аргумента $x = mu + nv$ и вместе с величинами E, E′ удовлетворяют системе (3d), т. е. являются решениями системы (15a) — (15c), то преобразованная конгруэнция (A_1A_3) обладает теми же свойствами, что и первоначальная (A_1A_2). Отсюда так же, как и раньше, придём к заключению, что все конгруэнции последовательности будут конгруэнциями Φ. Эту последовательность мы будем называть последовательностью Φ_1.

Уравнения (15a′), (15c) содержат, кроме m, n, ещё три постоянных C, C_1, C_2, но, изменяя начало отсчёта u, v, можно постоянное C_2 привести к нулю. Кроме того, деля x на $\sqrt{m^2+n^2}$, можно сохранить отношение постоянных $m:n$. Таким образом, система (15a′), (15c) будет содержать явно только три постоянных $m:n$, C, C_1. Интегрирование системы введёт ещё три произвольных постоянных, например, начальное значение $\alpha\frac{d\alpha}{dx}$ и α'. Наконец, уравнения (15b) вводят ещё одно постоянное C_3.

Таким образом, многообразие последовательностей Φ_1 зависит от семи произвольных постоянных.

Если постоянное C равно нулю, то уравнение (15 a′) покажет, что отношение $\alpha':\alpha$ — постоянно; следовательно, обе суммы

$$\beta_1 + \beta_1' = \left(\ln\frac{\alpha'}{\alpha}\right)_u, \ \beta_2 + \beta_2' = \left(\ln\frac{\alpha}{\alpha'}\right)_v$$

равны нулю, уравнения (39d) § 205 удовлетворены и все конгруэнции последовательности принадлежат линейным комплексам.

227. Последовательности Φ_2. Возвращаясь к уравнению (12b) § 225, мы теперь должны рассмотреть общий случай, когда функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ не сводятся к постоянным. Заметим, что если одна из них равна постоянному, например, $\psi(v) = b$, то уравнение (12 b) даст α как функцию одного u. Этот случай мы уже рассматривали и, значит, теперь можем предполагать, что каждая из функций $\varphi(u)$, $\psi(v)$ действительно содержит свой аргумент.

Будем предполагать, что величина α, а следовательно, и α' являются функциями одного аргумента

$$x = \varphi(u)\,\psi(v). \tag{16a}$$

Дифференцируя α и α' в этом предположении и вносяв уравнения (12a), получим:

$$\frac{d\ln\alpha}{dx}\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}\psi(v) = f_4(\alpha), \quad \frac{d\ln\alpha}{dx}\frac{\psi'(v)}{\psi(v)}\varphi(u) = f_4(\alpha)$$

или, деля на $x\frac{d\ln\alpha}{dx}$ и сравнивая левые части обоих уравнений,

$$\frac{\varphi'(u)}{[\varphi(u)]^2} = \frac{\psi'(v)}{[\psi(v)]^2}.$$

В силу независимости переменных u и v левая и правая части должны равняться одному и тому же постоянному. Обозначая это постоянное через $-c$ и интегрируя, получим:

$$\frac{1}{\varphi(u)} = cu + c_1, \quad \frac{1}{\psi(v)} = cv + c_2;$$

постоянные интеграции c_1, c_2 можно привести к нулю выбором начала отсчёта параметров u и v. Аргумент функций α, α' будет в таком случае равен

$$x = \frac{1}{c^2 uv};$$

можно считать, следовательно, что α и α' — функции аргумента

$$x = uv.$$

Так как теперь

$$\frac{\partial^2 \ln \alpha}{\partial u\, \partial v} = x\frac{d^2 \ln \alpha}{dx^2} + \frac{d \ln \alpha}{dx},$$

и аналогично для α', то уравнения (10a) удовлетворены. Первое уравнение (3d) по сокращении на $v^2 - u^2$ примет вид уравнения (15a), а после интеграции (15a').

Остальные уравнения (3d) § 218 принимают вид

$$\varepsilon' - \varepsilon = \frac{1}{\alpha}\frac{d^2\alpha}{dx^2}(v^2 - u^2),$$

$$\varepsilon_u = 2u\frac{d(\alpha\alpha')}{dx}, \quad \varepsilon'_v = 2v\frac{d(\alpha\alpha')}{dx}.$$

Если положить

$$\varepsilon = u^2\frac{1}{\alpha}\frac{d^2\alpha}{dx^2} + t, \quad \varepsilon' = v^2\frac{1}{\alpha}\frac{d^2\alpha}{dx^2} + t,$$

то первое уравнение будет удовлетворено, а два последних дадут:

$$t_u = uF(x), \quad t_v = vF(x),$$

где

$$F(x) = 2\frac{d(\alpha\alpha')}{dx} - 2\frac{1}{\alpha}\frac{d^2\alpha}{dx^2} - x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{d^2\alpha}{dx^2}\right),$$

или

$$dt = F(x)(u\,du + v\,dv).$$

Внешнее дифференцирование этого уравнения даёт:

$$F'(x)\,[dx, u\,du + v\,dv] = 0,$$

но

$$[dx, u\,du + v\,dv] = [v\,du + u\,dv, u\,du + v\,dv] = (v^2 - u^2)\,[du\,dv] \neq 0.$$

Значит,

$$F'(x) = 0,\ F(x) = 2C_1, \quad t = C_1(u^2 + v^2) + C_2, \qquad C_i = \text{const}.$$

и, следовательно,

$$x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{d^2\alpha}{dx^2}\right) + 2\frac{1}{\alpha}\frac{d^2\alpha}{dx^2} - 2\frac{d(\alpha\alpha')}{dx} + 2C_1 = 0, \tag{16b}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= u^2\frac{1}{\alpha}\frac{d^2\alpha}{dx^2} + C_1(u^2+v^2) + C_2, \\ \varepsilon' &= v^2\frac{1}{\alpha}\frac{d^2\alpha}{dx^2} + C_1(u^2+v^2) + C_2. \end{aligned}\right\} \tag{16c}$$

Система (3d) § 218 эквивалентна системе (15a'), (16b), (16c). Формулы (5b') § 219 дают величины Λ, Λ' преобразованной конгруэнции

$$\Lambda = -\frac{\rho_1}{\alpha h}\left\{\alpha - x\frac{d^2\ln\alpha}{dx^2} + \frac{d\ln\alpha}{dx} - \alpha'\right\}, \quad \Lambda' = -\frac{h}{\rho_1\alpha'}\frac{1}{\alpha}$$

в виде функций одного аргумента $x = uv$. Так как величины Λ, Λ', E, E' удовлетворяют уравнениям структуры, которые для матрицы типа (4) § 218 принимают вид (3d), а эти уравнения для функций одного x эквивалентны системе (15a'), (16b), (16c), то преобразованная конгруэнция принадлежит к тому же самому классу конгруэнций, что и первоначальная. Отсюда непосредственно заключаем, что все конгруэнции последовательности одного и того же класса. Поскольку линии Дарбу соответствуют на фокальных поверхностях первой конгруэнции, они будут соответствовать на всех фокальных поверхностях последовательности. Система (15a'), (16b), (16c) определяет последовательность Ф; мы её будем называть последовательностью Φ_2.

Так же, как и выше, заметим, что изменение постоянного C_2 влечёт проективное изгибание последовательности, не нарушая её характера.

Уравнения (15a'), (16b) содержат явно две постоянных C, C_1; при интегрировании этой системы войдут ещё четыре произвольных постоянных, например, начальные значения $\frac{d^2\alpha}{dx^2}$, $\frac{d\alpha}{dx}$, α и α'. Кроме того, уравнения (16c) содержат ещё постоянное C_2. Следовательно, многообразие последовательностей Φ_2 зависит от семи произвольных постоянных.

228. Последовательность из конгруэнций линейных комплексов. Мы возвращаемся к уравнению (10b) § 223 с тем, чтобы рассмотреть вторую возможность, которая здесь может представиться: уравнение (10b) может не содержать произведения $\frac{\partial \ln \alpha}{\partial u}\frac{\partial \ln \alpha}{\partial v}$, если коэффициент при нём обращается в нуль.

Итак, допустим, что α' удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 \ln \alpha'}{(d \ln \alpha)^2} = 0.$$

Интегрируя дважды, получим:

$$\ln \alpha' = k \ln \alpha + \ln C$$

и

$$\alpha' = C\alpha^k. \tag{17a}$$

Это значение α' не противоречит уравнениям (10a) § 223. Внося его в первое уравнение (3d) § 218, получим:

$$(k-1)\{\alpha\alpha_{uu} + k(\alpha_u)^2 - \alpha\alpha_{vv} - k(\alpha_v)^2\} = 0. \tag{17b}$$

Отсюда две возможности в зависимости от того, какой множитель левой части обращается в нуль.

Если обращается в нуль первый множитель и, следовательно, показатель k равен единице, то уравнение (17a) принимает вид

$$\alpha' = C\alpha. \tag{17c}$$

Формулы (3c) § 218 показывают, что уравнение (17c) является общим интегралом уравнений

$$\beta_1 + \beta_1' = 0, \quad \beta_2 + \beta_2' = 0,$$

которые при наличии матрицы компонент (4) § 218 определяют наиболее общую конгруэнцию R, принадлежащую линейному комплексу. Обратно, конгруэнция линейного комплекса всегда является конгруэнцией Ф, ибо условие (17c) является специальным случаем первого уравнения (10a). Отсюда прямо следует, что последовательность из конгруэнций, принадлежащих линейным комплексам, является специальным случаем последовательности Ф.

229. Последовательности конгруэнций Φ_3 с одной и той же до постоянного множителя внешней инвариантной формой. Обратимся теперь к рассмотрению того случая, когда обращается в нуль второй множитель левой части уравнения (17b). Здесь снова придётся выделить два случая.

Если $k \neq -1$, то уравнение

$$\alpha\alpha_{uu} + k(\alpha_u)^2 - \alpha\alpha_{vv} - k(\alpha_v)^2 = 0$$

по умножении на произведение $(k+1)\alpha^{k-1}$ может быть приведено к виду

$$(\alpha^{k+1})_{uu} - (\alpha^{k+1})_{vv} = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\alpha^{k+1} = X + Y, \tag{18a}$$

где $X = \varphi(x)$, $Y = \psi(y)$ — произвольные функции своих аргументов:

$$x = u + v, \quad y = u - v.$$

Внося это значение α в среднее уравнение (10a) § 223, получим:

$$(X+Y)(X'' - Y'') - X'^2 + Y'^2 = F(X+Y). \tag{18b}$$

Если ввести обозначения

$$X_1 = \frac{1}{2}X'^2, \qquad Y_1 = \frac{1}{2}Y'^2,$$

откуда

$$\frac{dX_1}{dX} = (X'X''):X' = X'', \qquad \frac{dY_1}{dY} = Y'',$$

то уравнение (18b) примет вид

$$(X+Y)\left(\frac{dX_1}{dX} - \frac{dY_1}{dY}\right) - 2X_1 + 2Y_1 = F(X+Y). \tag{18b'}$$

Дифференцируя по X и по Y и исключая производную F', получим:

$$\left(\frac{d^2X_1}{dX^2} + \frac{d^2Y_1}{dY^2}\right)(X+Y) = 2\left(\frac{dX_1}{dX} + \frac{dY_1}{dY}\right), \tag{18c}$$

и вторая смешанная производная по X и по Y примет вид

$$\frac{d^3X_1}{dX^3} + \frac{d^3Y_1}{dY^3} = 0.$$

Так как X_1 и Y_1 — функции разных независимых переменных: первая — одного x, вторая — одного y, то сумма $\dfrac{d^3X_1}{dX^3} + \dfrac{d^3Y_1}{dY^3}$ может равняться нулю только при условии, что обе производные — постоянны, одной абсолютной величины и разных знаков. Обозначая эту постоянную буквой A и интегрируя, получим:

$$\begin{aligned} X_1 &= AX^3 + A_1X^2 + A_3X + A_5, \\ Y_1 &= -AY^3 + A_2Y^2 + A_4Y + A_6. \end{aligned} \qquad A_i = \text{const}. \tag{18d}$$

Внося эти значения в уравнение (18c) и сравнивая коэффициенты при степенях X, Y, получим:

$$A_2 = A_1, \quad A_4 = -A_3. \tag{18e}$$

С другой стороны, полагая постоянное $C = 1$, получим по формулам (17a), (18a)

$$\alpha = (X+Y)^{k_1}, \quad \alpha\alpha' = X + Y, \quad k_1 = \frac{1}{k+1}; \tag{18a'}$$

два последних уравнения (3d) § 218 интегрируются

$$\varepsilon = 2(X-Y) + V, \quad \varepsilon' = 2(X-Y) + U, \quad U = \varphi(u), \quad V = \psi(v),$$

и первые уравнения (3d) дадут:

$$U - V = k_1(k_1 - 1)\frac{8\sqrt{X_1Y_1}}{(X+Y)^2}, \tag{18g}$$

откуда

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\frac{\sqrt{X_1Y_1}}{(X+Y)^2} = 0.$$

Развёртывая это уравнение с помощью уравнений (18d), придём к единственному условию

$$A_5 = A_6.$$

Наконец, мы можем подсчитать по формулам (5b') § 219 новые величины А, А'. Уравнение (18b') после подстановки X_1, Y_1 даёт:

$$F(X+Y) = A(X+Y)^3.$$

Следовательно,

$$(\ln\alpha)_{uv} = k_1\frac{\partial^2\ln(X+Y)}{\partial u\,\partial v} = k_1\frac{F(X+Y)}{(X+Y)^2} = Ak_1(X+Y)$$

и по формулам (5b')

$$\mathrm{A} = \frac{\rho_1}{ah}(Ak_1 - 1)(X+Y)^{k_1+1}, \quad \mathrm{A}' = -\frac{h}{a'\rho_1}(X+Y)^{-k_1}. \tag{18h}$$

Эти формулы до несущественных постоянных множителей совпадают с формулами (18a'), только показатель k_1 увеличился на единицу. Следовательно, конгруэнция (B_1B_2), полученная преобразованием Лапласа из конгруэнции (A_1A_2), принадлежит к тому же типу, что и первоначальная. Отсюда попрежнему заключаем, что все конгруэнции последовательности будут того же типа: все они будут конгруэнциями Ф. Мы будем называть эти последовательности последовательностями Φ_3.

Уравнения (18a'), (18d) содержат явно пять постоянных k_1, A, A_1, A_3, A_5; кроме того интегрирование уравнений (18d) введёт два произвольных постоянных и одно произвольное постоянное получится при определении неизвестных функций U, V из уравнений (18g), ибо уравнение сохранит силу, если к каждой функции прибавить одно и то же постоянное. Однако прибавлением к X и вычитанием от Y одного и того же постоянного, отчего функции α, α' не изменятся, можно привести A_5 к нулю, а произвольные постоянные, получаемые при интегрировании уравнений (18d), приводятся к нулю выбором начала отсчёта параметров u и v. Следовательно, последовательности Φ_3 зависят от пяти произвольных постоянных. Изменение постоянного слагаемого функций U, V производит проективное изгибание одновременно всех конгруэнций последовательности.

Нетрудно заметить особенность последовательностей Φ_3, определяемых уравнениями (18a'), (18d), (18g). Равенство (15d) даёт проективный линейный элемент Ф конгруэнции (A_1A_2), определяемой матрицей компонент (4) § 218.

Он теперь принимает вид

$$\Phi = -(X+Y)\frac{(du^2-dv^2)^2}{du\,dv}.$$

Первое преобразование Лапласа — конгруэнция (B_1B_2) имеет проективный линейный элемент

$$\Phi_1 = -(1-Ak_1)\,(X+Y)\frac{(du^2-dv^2)^2}{du\,dv}.$$

Следовательно, проективные линейные элементы пропорциональны с постоянным множителем пропорциональности

$$\Phi_1 = (1-Ak_1)\,\Phi.$$

Если $A=0$, то $\Phi_1=\Phi$ и конгруэнции (A_1A_2), (B_1B_2) проективно наложимы. Тогда и вся последовательность будет состоять из проективно наложимых конгруэнций.

Заметим, что в этом случае уравнения (18d) интегрируются в элементарных функциях. Если $A_3^2 \neq A_1A_5$, то интегралы уравнений (18d) можно представить тригонометрическими функциями, быть может, с комплексными коэффициентами

$$X = a_1 + a_2\sin 2a_3x,\quad Y = -a_1 - a_2\sin 2a_3y,$$

откуда

$$X+Y = 2a_2\sin a_3v\cos a_3u.$$

Следовательно, α и α' являются функциями одного аргумента $\varphi(u)\,\psi(v)$.

230. Последовательности конгруэнций Φ_4 с постоянными инвариантами фокальных сетей. Возвращаясь к уравнению (17b), рассмотрим теперь последний из возможных случаев, когда показатель k равен -1.

Если $k=-1$, то уравнение (17b) примет вид

$$\alpha\alpha_{uu} - (\alpha_u)^2 = \alpha\alpha_{vv} - (\alpha_v)^2$$

или

$$(\ln\alpha)_{uu} = (\ln\alpha)_{vv}.$$

Общий интеграл его имеет вид

$$\ln\alpha = X+Y, \tag{19a}$$

где X и Y попрежнему функции соответственно одного аргумента $x=u+v$ и одного аргумента $y=u-v$. Внося это значение α во второе уравнение (10a) § 223, получим:

$$X''-Y'' = F(X+Y), \tag{19b}$$

где штрихами обозначаются дифференцирования каждой функции по её аргументу. Дифференцируя уравнение (19b) по переменному X или по Y, получим:

$$\frac{dX''}{dX} = F'(X+Y),\qquad \frac{dY''}{dY} = -F'(X+Y),$$

откуда каждая из этих производных постоянна

$$\frac{dX''}{dX} = C,\quad \frac{dY''}{dY} = -C\qquad C=\text{const}.$$

и

$$X'' = CX + 2C_1,\qquad Y'' = -CY + 2C_2. \tag{19c}$$

Поскольку теперь $k=-1$, $\alpha' = \frac{1}{\alpha}$, то

$$\alpha\alpha' = 1 \tag{19d}$$

и уравнения (3d) § 218 принимают вид

$$4X'Y' = \varepsilon' - \varepsilon,\quad \varepsilon_u = 0,\quad \varepsilon_v = 0. \tag{19e}$$

Дифференцируя по u и по v, получим:

$$X'''Y' - X'Y''' = 0;$$

внося сюда значения (19c), будем иметь:

$$2CX'Y' = 0.$$

Если $Y'=0$, то величина α будет функцией одного аргумента $x=u+v$ и мы возвращаемся к случаю § 225. Аналогичный результат получим при $X'=0$. Следовательно, надо положить

$$C=0;$$

значит,

$$X = C_1x^2 + C_3x + C_5,\quad Y = C_2y^2 + C_4y + C_6. \tag{19f}$$

Внося в уравнение (19e), получим:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 2\,(8C_1C_2v^2 + 4C_2C_3v - 4C_1C_4v - C_3C_4) + C_7,\\ \varepsilon' &= 2\,(8C_1C_2u^2 + 4C_2C_3u + 4C_1C_4u + C_3C_4) + C_7.\end{aligned} \tag{19g}$$

Формулы (5b′) § 219 дадут теперь значения коэффициентов A, A' конгруэнции (B_1B_2)

$$\mathrm{A} = -\frac{\rho_1}{ah}(1-2C_1+2C_2)\,e^{X+Y},\quad \mathrm{A}' = -\frac{h}{a'\rho_1}e^{-(X+Y)}. \tag{19h}$$

Эти значения отличаются несущественными постоянными множителями от первоначальных α, α'; выбором произвольных параметров $a, a' = \pm a, h, \rho_1$ каждый множитель может быть приведён к единице. Следовательно, преобразованная конгруэнция (B_1B_2) обладает теми же свойствами, что и первоначальная. Вся последовательность состоит из конгруэнций Ф.

Такие последовательности мы будем называть последовательностями Φ_4.

Уравнения (19f) содержат шесть постоянных и уравнения (19g) вводят ещё седьмое C_7. Однако выбором начала отсчёта переменных u, v так, чтобы в начальной точке $2C_1x_0 + C_3 = 0$, $2C_2y_0 + C_4 = 0$, можно привести C_3, C_4 к нулю, если $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$. С другой стороны, поскольку α, α' зависят только от суммы $X+Y$, то можно прибавить к X и одновременно отнять от Y постоянное так, чтобы $C_5 = C_6$.

Следовательно, последовательности Φ_4 зависят от четырёх произвольных постоянных.

Заметим, что проективные линейные элементы конгруэнций (A_1A_2), (B_1B_2) определяются формулами

$$\Phi = -\frac{(du^2-dv^2)^2}{du\,dv},\qquad \Phi_1 = -(1-2C_1+2C_2)\frac{(du^2-dv^2)^2}{du\,dv}.$$

Отсюда следует, что конгруэнции (A_1A_2) и (B_1B_2) проективно наложимы, если

$$C_2 = C_1,$$

Подводя итог задаче определения последовательностей Ф, мы видим, что последовательности из конгруэнций линейных комплексов и последовательности R с линейчатыми фокальными поверхностями тем самым являются последовательностями Ф. Кроме этих тривиальных решений, существует только четыре типа последовательностей Ф:

1) последовательности Φ_1, где α, α' суть функции аргумента $mu+nv$, зависящие от семи произвольных постоянных;

2) последовательности Φ_2, где α, α' — функции аргумента uv; они тоже зависят от семи произвольных постоянных;

3) последовательности Φ_3 из конгруэнций Ф с одним и тем же до постоянного множителя значением произведения $\alpha\alpha'$ у всех конгруэнций последовательности. Многообразие этих последовательностей зависит от пяти произвольных постоянных;

4) последовательности Φ_4 из конгруэнций Ф с одними и теми же значениями до постоянных множителей коэффициентов α, α' у всех конгруэнций последовательности. Эти последовательности зависят от четырёх произвольных постоянных.

231. Литературные указания. О конгруэнциях Ф см. выше, гл. V, § 122. Последовательность Лапласа из конгруэнций Ф рассмотрена автором [10].

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

КОНГРУЭНЦИЯ С ПРОЕКТИВНО НАЛАГАЮЩИМИСЯ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

I. ОБЩИЕ СВОЙСТВА КОНГРУЭНЦИЙ D

232. Постановка задачи. Если классифицировать конгруэнции с точки зрения соответствия, которое устанавливают их лучи между двумя фокальными поверхностями, то из всех конгруэнций естественно выделяются конгруэнции W, которые устанавливают соответствие, сохраняющее асимптотические линии. Можно сказать иначе: относительные инвариантные квадратичные формы φ_2 фокальных поверхностей пропорциональны.

Асимптотические линии в каждой точке поверхности имеют касательные, совпадающие с касательными к линии пересечения поверхности с её касательной плоскостью. Если касательную плоскость заменить соприкасающейся поверхностью 2-го порядка, то придём к линиям Дарбу, именно: соприкасающиеся поверхности 2-го порядка, имеющие касание 2-го порядка в данной точке P поверхности S, образуют трёхпараметрическое семейство; каждая из них пересекает поверхность S по линии, имеющей тройную точку в точке P; тремя различными способами выбором соприкасающейся поверхности 2-го порядка можно соединить три касательных в тройной точке в одну. Эти три направления называются направлениями Дарбу, а линии, имеющие эти прямые своими касательными, — линиями Дарбу. Соответствие линий Дарбу или пропорциональность кубических форм приводит к конгруэнциям Ф.

Можно сделать ещё один шаг в направлении усиления сродства фокальных поверхностей. Конгруэнции W требуют пропорциональности форм φ_2, конгруэнции Ф требуют, кроме того, пропорциональности форм φ_3. Можно потребовать равенства на обеих фокальных поверхностях единственного в окрестности 3-го порядка абсолютного инварианта пары бесконечно близких точек, проективного линейного элемента поверхности

$$\Theta=\frac{\varphi_3}{\varphi_2}.$$

Поверхности с одним и тем же проективным линейным элементом называются *налагающимися*.

Таким образом, мы будем искать конгруэнции с налагающимися фокальными поверхностями или конгруэнции D.

233. Инвариантная характеристика конгруэнции D. Из условия равенства $\Theta=\Theta^1$ линейных элементов фокальных поверхностей

$$\frac{\varphi_3}{\varphi_2}=\frac{\varphi_3'}{\varphi_2'}$$

вытекает: 1) пропорциональность квадратичных форм φ_2 и φ_2'; следовательно, конгруэнция D есть специальный случай конгруэнции W; 2) пропорциональность кубичных форм; следовательно, конгруэнция D есть специальный случай конгруэнции Ф. Действительно, пользуясь формулой (26) § 196, мы напишем наше условие в виде

$$\frac{\alpha B_2(\omega_1^3)^3-3\alpha B_1(\omega_1^3)^2\omega_2^4-3\gamma B_2\omega_1^3(\omega_2^4)^2+\gamma B_1(\omega_2^4)^3}{\alpha(\omega_1^3)^2+\gamma(\omega_2^4)^2}=$$
$$=\frac{\alpha' B_1'(\omega_2^4)^3-3\alpha' B_2'(\omega_2^4)^2\omega_1^3-3\gamma' B_1'\omega_2^4(\omega_1^3)^2+\gamma' B_2'(\omega_1^3)^3}{\alpha'(\omega_2^4)^2+\gamma'(\omega_1^3)^2},$$

где

$$B_1=3\beta_1-\gamma_2,\qquad B_2=3\beta_2+\alpha_1,$$
$$B_1'=3\beta_1'+\alpha_2',\qquad B_2'=3\beta_2'-\gamma_1'.$$

Если освободиться от знаменателей и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях форм ω_1^3, ω_2^4, то придём к пяти равенствам, из которых независимы только три

$$\alpha\alpha'=\gamma\gamma',\quad 3\beta_2+\alpha_1=3\beta_2'-\gamma_1',\quad 3\beta_1-\gamma_2=3\beta_1'+\alpha_2'. \tag{1a}$$

Нетрудно заметить, что они имеют следствием уравнения (6b), (6c) § 220, характеризующие конгруэнции Ф.

Уравнения (1a) — инвариантны. С помощью введённых в § 190 инвариантов они записываются в виде

$$I=1,\ I_2=-1,\ I_2'=-1. \tag{1a'}$$

Дифференцирование первого уравнения (1a) приводит к уравнениям (37c, e) § 205

$$\alpha_1-\beta_2=\beta_2'+\gamma_1',\ \beta_1+\gamma_2=\alpha_2'-\beta_1',$$
$$\alpha_{11}-\alpha\beta_{12}-\gamma'\beta_{12}'-\gamma_{11}'=0,\ \alpha_{22}'-\alpha'\beta_{12}'-\gamma\beta_{12}-\gamma_{22}=0, \tag{1b}$$
$$\beta_{11}+\beta_{22}+\beta_{11}'+\beta_{22}'=0.$$

Если же продифференцировать два последних уравнения (1a), то с помощью формул (10'), (11) § 187 получим:

$$\begin{aligned}&\alpha_{11}+3\alpha\beta_{12}-3\gamma'\beta_{12}'+\gamma_{11}'=4\{(\beta_2)^2+(\beta_2')^2+\beta'\alpha-\beta\gamma'\},\\&\alpha_{22}'+3\alpha'\beta_{12}'-3\gamma\beta_{12}+\gamma_{22}=4\{(\beta_1')^2+(\beta_1)^2+\beta\alpha'-\beta'\gamma\},\\&3\beta_{22}-\beta_{11}-3\beta_{22}'+\beta_{11}'=-8\alpha\alpha',\\&3\beta_{11}'-\beta_{22}'-3\beta_{11}+\beta_{22}=-8\alpha\alpha'.\end{aligned} \tag{1c}$$

Составляя разность двух последних уравнений и прибавляя удвоенное последнее уравнение (1b), получим:

$$\beta_{11}+\beta_{22}=0.$$

Таким образом, для нашей конгруэнции уравнение (31') § 200 удовлетворяется и конгруэнция D есть специальный случай конгруэнции R.

Отсюда вытекает возможность воспользоваться голономной матрицей компонент (4) § 218. Уравнения (1b) удовлетворяются тождественно, а два последних уравнения (1a) с помощью уравнений (3c) § 218 принимают вид

$$(\ln\alpha\alpha')_u=0,\ (\ln\alpha\alpha')_v=0,$$

т. е.

$$\alpha\alpha'=\mathrm{const}. \tag{1d}$$

Это постоянное, отличное от нуля для невырождающихся конгруэнций, можно привести к единице по формулам (3e) § 218.

Обращаясь к уравнениям (3d) § 218, мы получим прежде всего, как в § 230:

$$(\ln\alpha)_{uu}=(\ln\alpha)_{vv},$$

откуда

$$\ln\alpha=X+Y, \tag{1e}$$

где

$$X=\varphi(x),\quad Y=\psi(y),\quad x=u+v,\ y=u-v$$

и затем

$$4X'Y'=U-V,\ \varepsilon=V,\ \varepsilon'=U,\qquad U=f_1(u),\ V=f_2(v), \tag{1f}$$

откуда, дифференцируя первое уравнение по u и по v, имеем:

$$\frac{X'''}{X'}=\frac{Y'''}{Y'}. \tag{1g}$$

Так как левая часть — функция одного переменного x, а правая — одного переменного y, то они обе равны одному и тому же постоянному C

$$X'''=CX',\quad Y'''=CY'; \tag{1g'}$$

откуда

$$X'^2=CX^2+2C_1X+C_3,\ Y'^2=CY^2+2C_2Y+C_4,\ C_i=\mathrm{const}. \tag{1h}$$

Уравнения (1h) определят X и Y как функции от x или y, а первое уравнение (1f) определит до постоянного слагаемого U и V. Различные случаи, которые могут представиться в зависимости от обращения в нуль постоянных C_i, мы разберём позже. Теперь мы хотим обратить внимание на одно общее свойство фокальных поверхностей всех конгруэнций D, которое связано с особенностью проективного изгибания поверхности.

II. ПРОЕКТИВНОЕ ИЗГИБАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

234. Два определения проективного изгибания поверхности. Мы несколько раз имели случай говорить о проективном изгибании поверхности и определяли пару налагающихся поверхностей как две поверхности с таким соответствием точек, при котором первый абсолютный инвариант, отношение кубичной формы φ_3 к квадратичной φ_2 (проективный линейный элемент) первой поверхности совпадает с таким же линейным элементом второй. Если изгибание — не тривиальное и налагающиеся поверхности — проективно различны, то не все инварианты поверхностей совпадают.

Этим соображениям можно придать более наглядную и вместе с тем более точную форму.

Если поверхности S и S' проективно тождественны и, следовательно, в каждой паре соответствующих точек M и M' все инварианты их совпадают, то существует проективное преобразование пространства П, которое переводит поверхность S в поверхность S^* так, что каждая точка M совпадает с соответствующей точкой M' и преобразованная поверхность S^* совпадает с поверхностью S'. Это и означает, что они проективно эквивалентны.

Если в соответствующих точках M, M' поверхностей для соответствующих направлений проективные линейные элементы равны, но поверхности проективно различны, то подходящее проективное преобразование Π_0 совместит одну пару соответствующих точек M_0, M_0' поверхностей S и S', но не все такие пары. При этом преобразование Π_0 может быть выбрано так, чтобы поверхность S^*, полученная этим преобразованием из поверхности S, имела с поверхностью S' в общей точке $M_0^* \equiv M_0'$ касание 2-го порядка.

Обратно, *если для каждой пары соответствующих точек M, M' поверхностей S, S' можно выбрать проективное преобразование П так, чтобы преобразованная поверхность S^* имела с поверхностью S' в точке M' касание 2-го порядка, то в соответствующих точках проективные линейные элементы поверхностей S и S' равны и поверхности проективно наложимы.*

Мы сейчас докажем это положение. Определим первую поверхность S компонентами дифференциальных преобразований (1) § 185, (5) § 185, (7) § 186 присоединённого тетраэдра $\{A_i\}$. Проективное преобразование П, присоединённое к точке A_1, переводит четвёрку

вершин тетраэдра $\{A_i\}$ в четвёрку аналитических точек $\{A_i^*\}$, из которых первая A_1^* совпадает с геометрической точкой M_1 поверхности S'. Выберем аналитические точки $M_i = A_i^*$ за вершины тетраэдра $\{M_i\}$, присоединённого к точке M_1 поверхности S' и обозначим буквами Ω_i^k компоненты дифференциальных преобразований тетраэдра $\{M_i\}$. Компоненты таких же преобразований тетраэдра $\{A_i^*\}$ преобразованной поверхности S^* не отличаются от компонент ω_i^k первоначальной поверхности S, ибо проективное преобразование всего семейства тетраэдров $\{A_i\}$ в семейство $\{A_i^*\}$ не меняет компонент дифференциальных преобразований тетраэдров семейства.

Условие касания 2-го порядка поверхностей S^* и S' сводится по определению к совпадению дифференциальных окрестностей 2-го порядка обеих поверхностей в общей точке $M_1 = A_1^*$. Так как совпадают геометрические точки, то аналитические должны быть пропорциональны. Множитель пропорциональности, как и самые точки дифференциальной окрестности, может быть разложен на слагаемые θ_0, θ_1, $\theta_2, \ldots$ нулевого, первого и второго порядка малости.

Следовательно, мы исходим из условия, что уравнение

$$M_1 + dM_1 + \frac{1}{2} d^2M_1 + \ldots =$$
$$= (\theta_0 + \theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2 + \ldots)(A_1^* + dA_1^* + \frac{1}{2} d^2A_1^* + \ldots)$$

удовлетворяется до бесконечно малых 2-го порядка включительно. Раскрывая скобки и сравнивая слагаемые нулевого, 1-го и 2-го порядка, имеем:

$$\begin{aligned} M_1 &= \theta_0 A_1^*, \\ dM_1 &= \theta_0 dA_1^* + \theta_1 A_1^*, \\ d^2M_1 &= \theta_0\, d^2A_1^* + 2\theta_1\, dA_1^* + \theta_2 A_1^*. \end{aligned} \qquad (2)$$

235. Условия на компоненты налагающихся поверхностей. Так как по условию аналитическая точка M_1 совпадает с аналитической точкой A_1^*, то конечная часть множителя пропорциональности θ_0 равна единице

$$\theta_0 = 1.$$

Заменяя

$$dM_1 = M_1\Omega_1^1 + M_2\Omega_1^2 + M_3\Omega_1^3 + M_4\Omega_1^4,$$
$$d^2M_1 = M_1\Delta\Omega_1^1 + M_2\Delta\Omega_1^2 + M_3\Delta\Omega_1^3 + M_4\Delta\Omega_1^4,$$
$$\Delta\Omega_1^k = d\Omega_1^k + \Omega_1^j\Omega_j^k,$$

и аналогично для dA_1^*, $d^2A_1^*$ и сравнивая коэффициенты при одинаковых точках $M_i = A_i^*$, получим:

$$\Omega_1^2 = \omega_1^2,\ \Omega_1^3 = \omega_1^3,\ \Omega_1^4 = 0, \quad \Delta\Omega_1^4 = \Phi_2 = \Omega_1^2\Omega_2^4 + \Omega_1^3\Omega_3^4 \tag{3a}$$

$$\Delta\Omega_1^2 - \Delta\omega_1^2 = 2\theta_1\omega_1^2, \quad \Delta\Omega_1^3 - \Delta\omega_1^3 = 2\theta_1\omega_1^3, \quad \Phi_2 - \varphi_2 = 0 \tag{3b}$$

$$\theta_1 = \tilde{\omega}_1^1, \quad \theta_2 = \Delta\Omega_1^1 - \Delta\omega_1^1 - 2\tilde{\omega}_1^1\omega_1^1, \text{ где } \tilde{\omega}_1^1 = \Omega_1^1 - \omega_1^1. \tag{3c}$$

Последнее уравнение (3b) показывает, что при нашем выборе нормирования точки M_1 (если принять $\theta_0 = 1$) относительные инвариантные формы φ_2 обеих поверхностей совпадают.

Если обозначить через $\tilde{\omega}_i^k$ разность соответствующих компонент двух поверхностей

$$\tilde{\omega}_i^k = \Omega_i^k - \omega_i^k,$$

то последнее уравнение (3b) по формуле (16) § 189 может быть записано в виде

$$\omega_1^2\tilde{\omega}_2^4 + \omega_1^3\tilde{\omega}_3^4 = 0. \tag{α}$$

С другой стороны, внешний дифференциал уравнения $\Omega_1^4 - \omega_1^4 = 0$ в тех же обозначениях имеет вид

$$[\omega_1^2\tilde{\omega}_2^4] + [\omega_1^3\tilde{\omega}_3^4] = 0. \tag{β}$$

При независимости линейных форм ω_1^2, ω_1^3 каждое из двух последних уравнений требует, чтобы формы $\tilde{\omega}_2^4$, $\tilde{\omega}_3^4$ линейно выражались через формы базиса ω_1^2, ω_1^3; при этом уравнение (β) с внешними произведениями по лемме Картана даёт эти линейные представления с симметричной матрицей коэффициентов, а из уравнения (α) с обыкновенным законом умножения следует антисимметричность той же матрицы. Отсюда приходим к нулевой матрице, т. е. к обращению в нуль обеих форм

$$\tilde{\omega}_2^4 = 0, \ \tilde{\omega}_3^4 = 0. \tag{3d}$$

Действительно, достаточно разрешить по лемме Картана уравнение (β)

$$\tilde{\omega}_2^4 = a_1\omega_1^2 + a_2\omega_1^3,$$
$$\tilde{\omega}_3^4 = a_2\omega_1^2 + a_3\omega_1^3$$

и внести эти разложения в уравнение (α), чтобы получить квадратичную форму относительно ω_1^2, ω_1^3 с обыкновенным законом умножения и коэффициентами a_1, a_2, a_3, которая обращается тождественно в нуль только при обращении в нуль всех коэффициентов a_i.

Если иметь в виду, что уравнения (3a)—(3c) имеют место в каждой паре соответствующих точек поверхностей S и S', следовательно, допускают дифференцирование, то, раскрывая первые два уравнения (3b) и приводя подобные члены, получим:

$$\omega_1^2(\tilde{\omega}_2^2 - \tilde{\omega}_1^1) + \omega_1^3\tilde{\omega}_3^2 = 0, \ \omega_1^3(\tilde{\omega}_3^3 - \tilde{\omega}_1^1) + \omega_1^2\tilde{\omega}_2^3 = 0. \tag{α'}$$

С другой стороны, дифференцируя внешним образом первые два уравнения (3a), получим:

$$[\omega_1^2, \tilde{\omega}_2^2 - \tilde{\omega}_1^1] + [\omega_1^3\tilde{\omega}_3^2] = 0, \ [\omega_1^3, \tilde{\omega}_3^3 - \tilde{\omega}_1^1] + [\omega_1^2\tilde{\omega}_2^3] = 0. \tag{β'}$$

Уравнения (α'), (β') можно трактовать так же, как уравнения (α) и (β). Уравнения (α') требуют антисимметричной матрицы коэффициентов в разложении форм $\tilde{\omega}$ по формам ω_1^3, ω_2^4, уравнение (β') — симметричной матрицы из тех же коэффициентов. Значит, все коэффициенты равны нулю, и мы имеем:

$$\tilde{\omega}_2^3 = 0, \ \tilde{\omega}_3^2 = 0, \ \tilde{\omega}_2^2 - \tilde{\omega}_1^1 = 0, \ \tilde{\omega}_3^3 - \tilde{\omega}_1^1 = 0. \tag{3e}$$

Теперь внешнее дифференцирование уравнений (3d) после замены $\tilde{\omega}_2^2 = \tilde{\omega}_1^1$, $\tilde{\omega}_3^3 = \tilde{\omega}_1^1$ даст:

$$[\omega_2^4, \tilde{\omega}_4^4 - \tilde{\omega}_1^1] = 0, \ [\omega_3^4, \tilde{\omega}_4^4 - \tilde{\omega}_1^1] = 0,$$

а так как линейные формы ω_2^4 и $\omega_3^4 = \alpha\omega_1^3 - \beta\omega_2^4$ при $\alpha \neq 0$ линейно независимы, то

$$\tilde{\omega}_4^4 - \tilde{\omega}_1^1 = 0. \tag{3f}$$

Между тем самый выбор вершин M_i равными аналитическим точкам A_i^* имеет следствием равенство грассмановых произведений четырёх вершин $\{M_i\}$ и $\{A_i^*\}$

$$(M_1M_2M_3M_4) = (A_1^*A_2^*A_3^*A_4^*).$$

Дифференцируя это равенство и заменяя дифференциалы вершин их разложениями по вершинам тетраэдра с помощью компонент дифференциальных перемещений тетраэдра, получим:

$$\tilde{\omega}_1^1 + \tilde{\omega}_2^2 + \tilde{\omega}_3^3 + \tilde{\omega}_4^4 = 0,$$

откуда в силу (3e), (3f) прямо следует

$$\tilde{\omega}_1^1 = \tilde{\omega}_2^2 = \tilde{\omega}_3^3 = \tilde{\omega}_4^4 = 0. \tag{3g}$$

236. Сохранение линейного элемента при проективном изгибании поверхностей. Теперь нетрудно закончить наше доказательство, т. е. показать, что обе налагающиеся поверхности имеют один и тот же проективный линейный элемент. Действительно, из равенств $\tilde{\omega}_1^3 = \tilde{\omega}_2^4 = \tilde{\omega}_1^2 = \tilde{\omega}_3^4 = 0$ сейчас же следует, что коэффициенты α, β, γ для первой и второй поверхности равны. Так как $\tilde{\omega}_3^2 = 0$, $\tilde{\omega}_1^1 = \tilde{\omega}_2^2 = \tilde{\omega}_3^3 = \tilde{\omega}_4^4 = 0$, то и формы $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, $\Delta\gamma$ совпадают, а отсюда вытекает равенство коэффициентов α_1, β_1, β_2, γ_2 первой и второй поверхности. Формула (23′) § 194 покажет теперь, что кубичные формы φ_3 для обеих поверхностей совпадают.

Обратно, равенство проективных линейных элементов может быть приведено изменением нормирования текущей точки одной из поверхностей к равенству квадратичных и кубичных форм в отдельности. Поскольку из равенства форм φ_2 следует соответствие сопряжённых сетей, мы можем отнести обе поверхности к соответствующим сопряжённым сетям и присоединить тетраэдры 1-го порядка § 185 пары соответствующих конгруэнций из касательных к линиям одного семейства сопряжённой сети. Для каждой из поверхностей мы получим формулы (5) § 185, (7) § 186, (9) и (10) § 187 с коэффициентами β, равными нулю.

Так как фокальные сети соответствуют, то компоненты ω_1^3, ω_2^4 обоих тетраэдров должны быть пропорциональны. Выбирая нормирование точек M_2, M_3, M_4, можно сделать их попарно равными. Тогда из равенства соответствующих форм φ_2, φ_3 поверхностей S, S' будет следовать равенство одноимённых коэффициентов α, γ, α_1, β_1, β_2, γ_2. Отсюда вытекает равенство для S и S' форм $\Delta\alpha$, $\Delta\gamma'$, $\Delta\beta$, а значит, попарное равенство компонент ω_3^2, ω_4^1, а также ω_1^2, ω_3^4. При этом формы ω_2^3 равны между собой, ибо по построению репера каждая равна нулю. Таким образом, мы получим уравнения (3a), (3c), (3d) и первые два (3e). Из попарного равенства форм $\Delta\alpha$, $\Delta\gamma$ следует равенство

$$\tilde{\omega}_2^2=\tilde{\omega}_3^3.$$

Внешнее дифференцирование уравнений (3d) приведёт к квадратичным уравнениям (β'), но последние члены обратятся в нуль в силу $\tilde{\omega}_2^3=\tilde{\omega}_1^2=0$, а в первых произведениях вторые множители будут равны. Мы придём таким образом к двум последним уравнениям (3e), откуда прямо вытекают уравнения (3b).

Итак, эквивалентность двух определений проективного изгибания доказана.

237. Поверхности, допускающие проективное изгибание. Полученная нами система уравнений (3a), (3d), (3e), (3g) запишется

$$\tilde{\omega}_1^2=\tilde{\omega}_1^3=\tilde{\omega}_1^4=\tilde{\omega}_2^3=\tilde{\omega}_2^4=\tilde{\omega}_3^2=\tilde{\omega}_3^4=0,\quad \tilde{\omega}_1^1=\tilde{\omega}_2^2=\tilde{\omega}_3^3=\tilde{\omega}_4^4=0. \tag{4a}$$

Внешнее дифференцирование этих уравнений приводит к следующим независимым квадратичным уравнениям:

$$\begin{gathered}
[\tilde{\omega}_2^1\omega_1^3]+[\omega_2^4\tilde{\omega}_4^3]=0,\quad [\tilde{\omega}_3^1\omega_1^2]+[\omega_3^4\tilde{\omega}_4^2]=0,\\
[\omega_1^2\tilde{\omega}_2^1]+[\omega_1^3\tilde{\omega}_3^1]=0,\quad [\tilde{\omega}_3^1\omega_1^3]+[\omega_3^4\tilde{\omega}_4^3]=0,\\
[\tilde{\omega}_4^2\omega_2^4]+[\tilde{\omega}_4^3\omega_3^4]=0.
\end{gathered} \tag{4a′}$$

Если отнести поверхность к фокальной сети, т. е. положить

$$\beta=0,$$

чтобы не осложнять запись формул, то применение леммы Картана позволит разрешить квадратичные уравнения в виде

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_2^1&=\alpha a_1\omega_1^3+a_2\omega_2^4, & \tilde{\omega}_3^1&=\alpha a_3\omega_1^3+\alpha\gamma a_1\omega_2^4,\\
\tilde{\omega}_4^2&=\alpha\gamma a_1\omega_1^3-\gamma a_3\omega_2^4, & \tilde{\omega}_4^3&=-a_2\omega_1^3+\gamma a_1\omega_2^4.
\end{aligned} \tag{4b}$$

Дифференцируя эти уравнения внешним образом, получим:

$$\begin{gathered}
\alpha[\Delta a_1\omega_1^3]+[\Delta a_2\omega_2^4]=0,\quad [\Delta a_3\omega_1^3]+\gamma[\Delta a_1\omega_2^4]=0,\\
-\alpha[\Delta a_1\omega_1^3]+[\Delta a_3\omega_2^4]=0,\quad [\Delta a_2\omega_1^3]-\gamma[\Delta a_1\omega_2^4]=0,
\end{gathered} \tag{4c}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta a_1&=da_1+a_1(\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_4^4)+a_1\beta_2\omega_1^3-a_1\beta_1\omega_2^4,\\
\Delta a_2&=da_2+a_2(\omega_1^1-\omega_4^4)+\tilde{\omega}_4^1,\\
\Delta a_3&=da_3+a_3(\omega_1^1-\omega_4^4)+\tilde{\omega}_4^1+(a_3-a_2)(\beta_2\omega_1^3-\beta_1\omega_2^4)-\\
&\qquad -\alpha a_1(\beta_1-\gamma_2)\omega_1^3-\gamma a_1(\alpha_1+\beta_2)\omega_2^4.
\end{aligned} \tag{4d}$$

Система (4a)—(4c) имеет базисом характеристической системы левые части уравнений (4a), (4b), формы ω_1^3, ω_2^4 и ещё три формы (4d). Мы видим, что сюда не входит форма $\tilde{\omega}_4^1$; значит, её надо считать вторичной, т. е. она содержит дифференциалы вторичных параметров. Нетрудно обнаружить геометрический смысл этой формы. Если все формы, в том числе и форма ω_4^1, равны нулю, кроме $\tilde{\omega}_4^1=d\tau$, то из уравнений

$$dA_4=0,\quad dM_4=M_1\,d\tau$$

следует, что, не меняя тетраэдра $\{A_i\}$ и вершин M_1, M_2, M_3, мы можем переместить вершину M_4 в любую точку прямой M_1M_4. При этом проективное преобразование Π, присоединённое к паре точек A_1, M_1, меняется так, чтобы в преобразованном тетраэдре $\{A_i\}$ точка A_4^* совпадала с новой вершиной M_4. При закреплённой паре точек A_1, M_1 все формы характеристической системы (4a), (4b), (4d) (главные формы) равны нулю вместе с формами ω_1^3, ω_2^4, и уравнения (4d) принимают вид

$$\delta a_1=0,\quad \delta a_2+d\tau=0,\quad \delta a_3+d\tau=0.$$

Отсюда, интегрируя, получим:

$$a_2+a_3+2\tau=C,$$

и, выбирая вспомогательный параметр $\tau=\frac{1}{2}C$, будем иметь:

$$a_2+a_3=0,$$

и значит,

$$\Delta a_2 + \Delta a_3 = 2\tilde{\omega}_4^1 - 2a_2(\beta_2\omega_1^3 - \beta_1\omega_2^4) -$$
$$- a_1\{\alpha(\beta_1 - \gamma_2)\omega_1^3 + \gamma(\alpha_1 + \beta_2)\omega_2^4\}.$$

Между тем, складывая попарно уравнения (4c) первой и второй строк, получим:

$$[\Delta a_2 + \Delta a_3, \omega_2^4] = 0, \quad [\Delta a_2 + \Delta a_3, \omega_1^3] = 0,$$

откуда

$$\Delta a_2 + \Delta a_3 = 0,$$

следовательно,

$$\tilde{\omega}_4^1 = a_2(\beta_2\omega_1^3 - \beta_1\omega_2^4) + \frac{a_1}{2}\{\alpha(\beta_1 - \gamma_2)\omega_1^3 + \gamma(\alpha_1 + \beta_2)\omega_2^4\} \qquad (4e)$$

и квадратичные уравнеиия (4c) сводятся к двум

$$\alpha[\Delta a_1\omega_1^3] + [\Delta a_2\omega_2^4] = 0, \quad [\Delta a_2\omega_1^3] - \gamma[\Delta a_1\omega_2^4] = 0. \qquad (4c')$$

Прежде чем дифференцировать внешним образом уравнение (4e), нам будет удобно сделать ещё одно приведение коэффициентов a_i. С этой целью мы используем понятие основания проективного изгибания.

III. ОСНОВАНИЕ ПРОЕКТИВНОГО ИЗГИБАНИЯ

238. Основание проективного изгибания. Вернёмся к паре проективно налагающихся поверхностей (A_1) и (M_1) и продолжим ряд равенств (2) § 234, которые устанавливали касание 2-го порядка, добавив ещё одно уравнение

$$d^3M = \theta_0 d^3A_1^* + 3\theta_1 d^2A_1^* + 3\theta_2 dA_1^* + \theta_3 A_1^*,$$

которое требует касание 3-го порядка.

Вносим сюда значение

$$d^3M_1 = M_1\Delta^2\Omega_1^1 + M_2\Delta^2\Omega_1^2 + M_3\Delta^2\Omega_1^3 + M_4\Delta\Phi_2,$$

где

$$\Delta^2\Omega_i^k = d(\Delta\Omega_i^k) + \Omega_j^k\Delta\Omega_i^j, \ \Delta\Omega_1^4 = \Phi_2,$$

и аналогично для $d^3A_1^*$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых точках $M_i = A_i^*$, получим четыре уравнения, из которых одно определяет θ_3, а три других имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta^2\Omega_1^2 - \Delta^2\omega_1^2 &= 3\theta_1\Delta\omega_1^2 + 3\theta_2\omega_1^2, \\ \Delta^2\Omega_1^3 - \Delta^2\omega_1^3 &= 3\theta_1\Delta\omega_1^3 + 3\theta_2\omega_1^3, \\ \Delta\Phi_2 - \Delta\varphi_2 &= 3\theta_1\varphi_2. \end{aligned} \qquad (a)$$

Пользуясь уравнениями (3c)—(3d) § 235, мы подсчитываем выражения

$$\theta_1 = 0, \ \theta_2 = \omega_1^2\tilde{\omega}_2^1 + \omega_1^3\tilde{\omega}_3^1,$$
$$\Delta\Omega_1^2 - \Delta\omega_1^2 = 0, \ \Delta\Omega_1^3 - \Delta\omega_1^3 = 0,$$
$$\Delta^2\Omega_1^2 - \Delta^2\omega_1^2 = \omega_1^2(\omega_1^2\tilde{\omega}_2^1 + \omega_1^3\tilde{\omega}_3^1) + \varphi_2\tilde{\omega}_4^2,$$
$$\Delta^2\Omega_1^3 - \Delta^2\omega_1^3 = \omega_1^3(\omega_1^2\tilde{\omega}_2^1 + \omega_1^3\tilde{\omega}_3^1) + \varphi_2\tilde{\omega}_4^3,$$
$$\Delta\Phi_2 - \Delta\varphi_2 = 0.$$

Следовательно, последнее уравнение (a) обращается в тождество, а два первых дают:

$$\begin{aligned} \varphi_2\tilde{\omega}_4^2 &= 2\omega_1^2(\omega_1^2\tilde{\omega}_2^1 + \omega_1^3\tilde{\omega}_3^1), \\ \varphi_2\tilde{\omega}_4^3 &= 2\omega_1^3(\omega_1^2\tilde{\omega}_2^1 + \omega_1^3\tilde{\omega}_3^1) \end{aligned} \qquad (5a)$$

или, если обозначить $a_2 + a_3 = 2x$, $a_2 - a_3 = 2y$ и воспользоваться формулами (7) § 186, (4b) § 237:

$$\varphi_2(\alpha a_1\omega_1^3 + y\omega_2^4) = \omega_2^4\left\{3x\varphi_2 + 2y\{\gamma(\omega_2^4)^2 - \alpha(\omega_1^3)^2\} + 4\alpha\gamma a_1\omega_1^3\omega_2^4\right\},$$
$$\varphi_2(\gamma a_1\omega_2^4 - y\omega_1^3) = \omega_1^3\left\{3x\varphi_2 + 2y\{\gamma(\omega_2^4)^2 - \alpha(\omega_1^3)^2\} + 4\alpha\gamma a_1\omega_1^3\omega_2^4\right\}.$$

Здесь x зависит от выбора точки M_4 на прямой M_1M_4 и может принимать любые значения. Исключая фигурную скобку правой части, получим:

$$\varphi_2\left\{a_1\{\alpha(\omega_1^3)^2 - \gamma(\omega_2^4)^2\} + 2y\omega_1^3\omega_2^4\right\} = 0.$$

Это уравнение, следовательно, определяет те четыре направления в общей касательной плоскости поверхностей (M_1) и (A_1^*), по которым порядок касания повышается до трёх. Первый множитель $\varphi_2 = 0$ определяет пару асимптотических направлений. Вторая пара направлений определяется уравнением

$$a_1\{\alpha(\omega_1^3)^2 - \gamma(\omega_2^4)^2\} + 2y\omega_1^3\omega_2^4 = 0. \qquad (5b)$$

Линии, определяемые на поверхности (A_1) уравнением (5b), образуют *основание проективного изгибания* поверхности (A_1) в поверхность (M_1).

Нетрудно заметить, что два семейства основания (5b) сопряжены на поверхности. Действительно, условие сопряжённости двух направлений $\frac{\omega_1^3(d)}{\omega_2^4(d)}$ и $\frac{\omega_1^3(\delta)}{\omega_2^4(\delta)}$ имеет вид

$$\alpha\omega_1^3(d)\omega_1^3(\delta) + \gamma\omega_2^4(d)\omega_2^4(\delta) = 0. \qquad (5c)$$

Так как произведение двух корней $\frac{\omega_1^3}{\omega_2^4}$ уравнения (5b) равно $-\frac{\gamma}{\alpha}$, уравнение (5c) для них удовлетворяется.

239. Поверхности *R*. Допустим, что фокальная сеть конгруэнции (A_1A_2) является основанием изгибания для фокальной поверхности (A_1). Так как теперь уравнение (5b) должно быть эквивалентно уравнению

$$\omega_1^3\omega_2^4 = 0,$$

то коэффициент a_1 обращается в нуль

$$a_1 = 0.$$

При этом по формуле (4d) § 237 Δa_1 тоже обращается в нуль и уравнения (4c) § 237 дадут:

$$\Delta a_2 = 0, \ \Delta a_3 = 0, \tag{6a}$$

или по формулам (4d) в силу $a_2 + a_3 = 0$,

$$\begin{gathered} \tilde{\omega}_4^1 = a_2(\beta_2\omega_1^3 - \beta_1\omega_2^4), \\ da_2 + a_2(\omega_1^1 - \omega_4^4) + a_3(\beta_2\omega_1^3 - \beta_1\omega_2^4) = 0. \end{gathered} \tag{6b}$$

Если $a_2 = 0$, то все $\tilde{\omega}_i^k$ обратятся в нуль и обе поверхности — проективно эквивалентны. Если $a_2 \neq 0$, то, дифференцируя внешним образом уравнения (6b), получим:

$$(\beta_{11} + \beta_{22} + \gamma\gamma' - \alpha\alpha')[\omega_1^3\omega_2^4] = 0, \ (\beta_{11} + \beta_{22} - \gamma\gamma' + \alpha\alpha')[\omega_1^3\omega_2^4] = 0.$$

Так как отсюда вытекают уравнения (31′) § 200, то конгруэнция (A_1A_2) есть конгруэнция R. Мы имеем, таким образом, две теоремы.

Теорема 1. *Всякая поверхность R допускает непрерывное изгибание. Основанием изгибания служит сопряжённая сеть R. Если поверхность несёт несколько сетей R, то она допускает столько же независимых проективных изгибаний.*

Теорема 2. *Если сопряжённая сеть линий, образующая основание изгибания, не вырождается* (линии сети не совпадают), *то это — сеть R* (обе конгруэнции сети — R), *а поверхность, испытывающая изгибание — поверхность R.*

Здесь надо только заметить, что непрерывность изгибания следует из того, что вспомогательное неизвестное определяется из вполне интегрируемого уравнения (6b) с произвольным постоянным. Это произвольное постоянное и составляет параметр изгибания, непрерывное изменение которого вызывает непрерывное изгибание поверхности.

К этим теоремам можно добавить ещё одну, третью теорему.

Теорема 3. *Проективное изгибание поверхности с невырожденным основанием всегда представляет часть совместного изгибания конгруэнций и фокальных поверхностей последовательности Лапласа, построенной на сопряжённой системе основания изгибания.*

Для доказательства этой теоремы заметим, что для конгруэнции (A_1A_2), поскольку это — конгруэнция R, мы можем воспользоваться таблицей компонент (4) § 218. При этом ребро A_2A_4 тетраэдра выбрано так, что касательные A_2A_1 и A_2A_4 на поверхности (A_2) сопряжены и коэффициент $\beta' = 0$, т. е. $\omega_2^1 = \gamma'\omega_1^2$. Если мы хотим, чтобы для преобразованной конгруэнции (т. е. после проективного изгибания) ребра M_2M_1 и M_2M_4 были на поверхности (M_2) сопряжены, то надо выбирать точку M_4 на ребре M_1M_4 так, чтобы форма Ω_2^1 была пропорциональна форме $\Omega_1^3 = \omega_1^3$. При этом, очевидно, и разность $\tilde{\omega}_2^1 = \Omega_2^1 - \omega_2^1$ не будет зависеть от формы ω_2^4 и, следовательно, коэффициент a_2 по формуле (4b) § 237 будет равен нулю, а следовательно, $y = a_3$.

Внося значения

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0$$

в уравнения (4d), мы получим в силу уравнений (1g) § 218, (2c) § 218

$$\tilde{\omega}_2^1 = 0, \ \tilde{\omega}_4^3 = 0, \ \tilde{\omega}_3^1 = \alpha a_3 dv, \ \tilde{\omega}_4^2 = \alpha a_3 du. \tag{6c}$$

Уравнения (6a) по формулам (4d) § 237, если помнить, что $\beta_2 = (\ln\alpha)_v$, $\beta_1 = -(\ln\alpha)_u$, принимают вид

$$\tilde{\omega}_4^1 = 0, \ da_3 + a_3 d\ln\alpha = 0, \tag{6d}$$

откуда общий интеграл —

$$\alpha a_3 = C, \qquad C = \text{const}.$$

Уравнения (4a), (6c), (6d) показывают, что у поверхностей (A) и (M_1) отличаются лишь компоненты ω_3^1 и ω_4^2.

Следовательно, для преобразованной поверхности (M_1) (т. е. после изгибания) матрица компонент сохранит вид таблицы (4) § 218 с теми же функциями α, α' и значениями E, E', увеличенными на постоянное C

$$\mathrm{E}_1 = \varepsilon + C, \ \mathrm{E}' = \varepsilon' + C. \tag{6e}$$

Вторая фокальная поверхность (A_2) при этом будет налагаться на поверхность (M_2), ибо система уравнений для разностей $\tilde{\omega}_i^k$

$$\begin{gathered} \tilde{\omega}_1^2 = \tilde{\omega}_2^1 = \tilde{\omega}_1^3 = \tilde{\omega}_2^3 = \tilde{\omega}_1^4 = \tilde{\omega}_2^4 = \tilde{\omega}_3^4 = \tilde{\omega}_4^3 = \tilde{\omega}_3^2 = \tilde{\omega}_4^1 = 0, \ \tilde{\omega}_i^i = 0, \\ \tilde{\omega}_3^1 = C\,dv, \ \tilde{\omega}_4^2 = C\,du \end{gathered}$$

сохраняет свой вид при замене указателей $\begin{pmatrix} 1 & 3 & u \\ 2 & 4 & v \end{pmatrix}$. Так как проективный линейный элемент конгруэнции Φ по формуле (15d) § 226

$$\Phi = -\alpha\alpha' \frac{(du^2 - dv^2)^2}{du\,dv}$$

не зависит от $\varepsilon, \varepsilon'$ и, следовательно, не меняется при изгибании поверхности (A_1), то при этом изгибании конгруэнция (A_1A_2) будет подвергаться тоже проективному изгибанию. Рассуждая аналогично шаг за шагом, увидим, что все конгруэнции и фокальные поверхности конгруэнций, принадлежащие последовательности Лапласа, построенной на линиях фокальной сети (основании изгибания), будут одновременно испытывать проективное изгибание. Поверхность (A_1) изгибается, как часть изгибающейся последовательности Лапласа (последовательности R).

240. Основание наложимости фокальных поверхностей конгруэнции D. Возвращаясь к конгруэнциям D с проективно налагающимися фокальными поверхностями, мы ставим себе задачу: найти основание изгибания при наложении фокальных поверхностей конгруэнции. В § 238 мы получили для определения основания изгибания уравнение (5b). Оно содержит, кроме коэффициентов α, γ из матрицы компонент конгруэнции, ещё величины a_1 и $y=a_2$, которые зависят от компонент второй поверхности (налагающейся на первую) и определяются уравнениями (4b) § 237 вида

$$\tilde{\omega}_2^1 = \alpha a_1 \omega_1^3 + a_2 \omega_2^4, \quad \tilde{\omega}_3^1 = -\alpha a_2 \omega_1^3 + \alpha\gamma a_1 \omega_2^4.$$

Здесь $\tilde{\omega}_2^1$ есть разность форм Ω_2^1 и ω_2^1 второй и первой поверхности. При этом тетраэдр второй поверхности выбирается так, чтобы он совпадал с тетраэдром первой после проективного преобразования, которое приводит две поверхности к касанию 2-го порядка. Можно сказать иначе: тетраэдр второй поверхности выбирается так, чтобы все формы Ω_i^k второй поверхности, для которых $\tilde{\omega}_i^k = 0$ совпадали с соответствующими формами первой.

Поверхность (A_1) задаётся матрицей компонент (4) § 218 посредством тетраэдра $\{A_i\}$, где точка A_2 лежит в фокусе касательной к линии $v=\text{const.}$, вершина A_3 на касательной к линии $u=\text{const.}$ поверхности (A_1) и вершина A_4 — на касательной к линии $v=\text{const.}$ поверхности (A_2).

Для второй поверхности (A_2) надо выбрать тетраэдр $\{B_i\}$ так, чтобы геометрические точки B_1 и A_2 совпадали, точка B_2 лежала на касательной (A_2A_{2v}), т. е. на прямой (A_2A_4), точка B_3 — на касательной (A_2A_{2u}), т. е. на прямой (A_1A_2) и разности компонент $\tilde{\omega}_i^k = \Omega_i^k - \omega_i^k$ дифференциальных перемещений тетраэдров $\{B_i\}$ и $\{A_i\}$ удовлетворяли системе уравнений (4a).

Мы можем, очевидно, положить

$$B_1 = \rho_1 A_2, \quad B_2 = \rho_2 (A_4 + \nu A_2), \quad B_3 = \rho_3 (A_1 + \lambda A_2), \quad A_3 = x^i B_i$$

с тем, чтобы неизвестные координаты $\rho_\alpha, \lambda, \nu, x^i$ определить из уравнений (4a).

Пользуясь таблицей компонент (4) § 218 с добавочным условием $\alpha\alpha'=1$, которое следует из уравнения (1d) § 233, и производя пересчёт на тетраэдр $\{B_i\}$, получим:

$$dB_1 = \left(d\ln\rho_1 - \nu\,du + \frac{\lambda}{\alpha}\,dv\right)B_1 + \frac{\rho_1}{\rho_2}\,du B_2 - \frac{\rho_1}{\rho_3\alpha}\,dv B_3.$$

Так как по формулам (4a) § 237 $\tilde{\omega}_1^1 = \tilde{\omega}_1^2 = \tilde{\omega}_1^3 = 0$, то эти формы для тетраэдров $\{A_i\}$ и $\{B_i\}$ совпадают, и мы получим:

$$\rho_1 = -\alpha\rho_3, \quad \rho_1 = -\alpha\rho_2, \quad \nu = (\ln\rho_1)_u, \quad \lambda = -\alpha(\ln\rho_1)_v.$$

Точно так же, подсчитывая dB_3 и приравнивая формы $\omega_3^2, \omega_3^3, \omega_3^4$ обоих тетраэдров, получим:

$$x^2 = -\frac{\alpha_u}{\rho_3}, \quad x^3 = -\frac{1}{\rho_3}(\ln\rho_1\rho_3)_v, \quad x^4 = \frac{\alpha}{\rho_3}, \quad \lambda = -\alpha_v, \quad (\rho_3)_u = 0.$$

Сравнивая два значения λ, получим:

$$(\ln\rho_1)_v = (\ln\alpha)_v.$$

Поскольку теперь $(\rho_3)_u = 0, \ (\rho_3)_v = 0$, параметр ρ_3 является постоянной и основное равенство

$$\Omega_3^1 = \omega_3^1 + \tilde{\omega}_3^1$$

по формуле (4b) § 237 даёт

$$a_1 = -\frac{(\ln\alpha)_{uv}}{\alpha^2}, \quad \alpha a_2 = \varepsilon - x^1\rho_3 - \frac{\alpha_{vv}}{\alpha} + (\ln\alpha)_v^2.$$

Таким же образом из сравнения форм Ω_2^1 и ω_2^1 получим:

$$\alpha a_2 = -\varepsilon' + x^1\rho_3 - \frac{\alpha_{uu}}{\alpha} - (\ln\alpha)_v^2 + 2(\ln\alpha)_u^2.$$

Складывая два уравнения для αa_2 и пользуясь уравнением (3d) § 218 для разности $\varepsilon - \varepsilon'$, получим:

$$a_2 = -\frac{(\ln\alpha)_{uu}}{\alpha}.$$

Таким образом, уравнение основания изгибания принимает вид

$$(\ln\alpha)_{uv}(du^2 + dv^2) + 2(\ln\alpha)_{uu}\,du\,dv = 0. \tag{7}$$

IV. ПЯТЬ КЛАССОВ КОНГРУЭНЦИЙ D

241. Первое решение: конгруэнции D_1 с линейчатыми фокальными поверхностями. Обратимся теперь к рассмотрению отдельных случаев, которые могут представиться при интегрировании уравнения (1g) § 233.

Рассмотрим прежде всего особый случай: уравнение (1g) будет удовлетворено, если положить

$$Y = 0,$$

т. е. если считать α функцией одного аргумента $x=u+v$. Будем называть эту конгруэнцию конгруэнцией D_1. Так как конгруэнция D является специальным случаем конгруэнции Φ, то конгруэнция D_1, очевидно, входит в класс конгруэнций Φ § 225. Следовательно, фокальные поверхности её — линейчатые, с дополнительным условием $\alpha x' = \text{const}$. Это постоянное можно привести к единице.

При произвольном задании α как функции одного аргумента x уравнения (3d) § 218 дадут теперь решения

$$\alpha\alpha'=1, \quad \varepsilon=\varepsilon'=2+k^2, \qquad k=\text{const}. \tag{8a}$$

Следовательно, произвол конгруэнции D_1 зависит от одной функции одного аргумента.

Уравнение (7) теперь сведётся к полному квадрату

$$(du^2+2\,du\,dv+dv^2)=0,$$

т. е. будет определять асимптотические

$$u+v=\text{const}. \tag{α}$$

Основанием изгибания служит дважды взятое семейство прямолинейных образующих.

Если ввести точки

$$\begin{aligned} B_1&=(\alpha A_2+A_3+kA_1)\,e^{-kv}, & B_3&=\left(-\frac{1}{\alpha}A_1-A_4+kA_2\right)e^{ku},\\ B_2&=(\alpha A_2+A_3-kA_1)\,e^{kv}, & B_4&=\left(-\frac{1}{\alpha}A_1-A_4-kA_2\right)e^{-ku} \end{aligned} \tag{8b}$$

и от переменных u, v перейти к переменным

$$x=u+v, \quad y=u-v,$$

то получим систему

$$\begin{aligned} dB_1&=-B_3\alpha e^{-kx}\,dx, & dB_3&=-B_1\frac{1}{\alpha}e^{kx}\,dx,\\ dB_2&=-B_4\alpha e^{kx}\,dx, & dB_4&=-B_2\frac{1}{\alpha}e^{-kx}\,dx. \end{aligned} \tag{8c}$$

Вершины B_i нового тетраэдра, очевидно, зависят только от одного переменного x и описывают пару прямых B_1B_3, B_2B_4.

С другой стороны, линии $x=\text{const}$. поверхности (A_1) и поверхности (A_2) прямые, а

$$\frac{\partial}{\partial y}A_1=-\frac{\alpha A_2+A_3}{2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}A_2=\frac{\frac{1}{\alpha}A_1+A_4}{2}.$$

Так как по формулам (8b) точки B_1, B_2 лежат на прямой, которая соединяет точки A_1 и $\frac{\partial}{\partial y}A_1$ и принадлежит поверхности (A_1), а точки B_3, B_4 лежат на прямолинейной образующей $\left(A_2, \frac{1}{\alpha}A_1+A_4\right)$ поверхности (A_2), то прямые B_1B_3 и B_2B_4 являются общими прямолинейными направляющими обеих фокальных поверхностей.

Обратно, *какова бы ни была линейчатая поверхность с двумя прямолинейными направляющими, существует трёхпараметрическое семейство конгруэнций D_1, имеющих эту поверхность своей фокальной поверхностью.*

Для доказательства заметим прежде всего, что пару неподвижных прямых E_1E_3 и E_2E_4 и прямолинейную образующую E_1E_2 произвольной линейчатой поверхности S с направляющими E_1E_3, E_2E_4 можно задать посредством уравнений

$$\begin{aligned} dE_1&=E_3\,dt, & dE_3&=(a_1E_1+b_1E_3)\,dt,\\ dE_2&=E_4\,dt, & dE_4&=(a_2E_2+b_2E_4)\,dt, \end{aligned} \tag{8d}$$

где a_i, b_i — функции независимого переменного t.

Действительно, поскольку теперь

$$d\,(E_1E_3)=(E_1E_3)\,b_1\,dt, \qquad d\,(E_2E_4)=(E_2E_4)\,b_2\,dt,$$

то прямые E_1E_3 и E_2E_4 — неподвижны. Что касается до прямой E_1E_2, то при изменении t она будет скользить, опираясь на направляющие E_1E_3 и E_2E_4, и опишет линейчатую поверхность. Введём теперь новое независимое переменное $x=x(t)$ и новые функции λ_i, μ_i, ν_i от переменного t так, чтобы точки

$$B_1=\lambda_1\mu_1E_1, \; B_2=\lambda_2\mu_2E_2, \; B_3=\lambda_1(E_3+\nu_1E_1), \; B_4=\lambda_2(E_4+\nu_2E_2) \tag{8e}$$

удовлетворяли системе (8c).

Внося значения (8e) в уравнения (8c) и пользуясь системой (8d), получим сравнением коэффициентов при точках E_i систему уравнений на неизвестные функции x, λ_i, μ_i, ν_i

$$(\ln\lambda_i)'=-\nu_i-b_i, \quad (\ln\mu_i)'=2\nu_i+b_i, \qquad i=1,2, \tag{8f}$$

$$\mu_1=-\alpha e^{-kx}x', \quad \mu_2=-\alpha e^{kx}x', \tag{8g}$$

$$x'^2=\nu_i'-(\nu_i)^2-b_i\nu_i+a_i, \tag{8h}$$

где штрихом обозначены производные по независимому переменному t.

Уравнения (8f) по заданным ν_1, ν_2 определяют λ_i, μ_i с произвольными постоянными множителями, которые, как мы увидим, — не существенны.

Если μ_1, μ_2 определены, то уравнения (8g) позволят определить α и x, именно: почленное умножение или деление их приводит к уравнениям

$$\alpha x'=\sqrt{\mu_1\mu_2}, \quad 2kx=\ln\frac{\mu_2}{\mu_1}. \tag{8g$'$}$$

Дифференцируя второе из этих уравнений, заменяя $(\ln\mu_i)'$ по формулам (8f) и подставляя значение x' в уравнение (8h), получим два уравнения 1-го порядка для неизвестных функций ν_1, ν_2:

$$\frac{d\nu_i}{dt} = (\nu_i)^2 + b_i\nu_i - a_i + \left\{\frac{2(\nu_1 - \nu_2) + b_1 - b_2}{2k}\right\}^2, \quad i = 1, 2. \quad (8h')$$

Для каждого решения λ_i, μ_i, ν_i, x строим точки A_k посредством уравнений (8b), где $2u = x + y$, $2v = x - y$ и переменное y следует рассматривать как второе независимое переменное задачи. Мы будем иметь:

$$A_1 = \frac{B_1e^{kv} - B_2e^{-kv}}{2k}, \quad A_2 = \frac{B_3e^{-ku} - B_4e^{ku}}{2k} \quad (8k)$$

и аналогично A_3, A_4. Для нового тетраэдра $\{A_i\}$ мы получим матрицу компонент (4) § 218, где произведение $\alpha\alpha'$ подчиняется условию (8a), которая, следовательно, определяет посредством прямой A_1A_2 конгруэнцию D_1.

При этом точка A_1 лежит на прямой B_1B_2, т. е. принадлежит образующей E_1E_2 заданной поверхности S. Следовательно, конгруэнция D_1, описываемая прямой A_1A_2, имеет первой фокальной поверхностью (A_1) произвольно заданную линейчатую поверхность S с двумя прямолинейными направляющими E_1E_3 и E_2E_4.

Вторая фокальная поверхность (A_2) будет определяться выбором решений ν_1, ν_2 системы (8h') и постоянного k. Действительно, таблица компонент (4) § 218 допускает преобразование (3e) § 218; при этом произведение $\alpha\alpha'$ будет делиться на a^2. Так как для нашей конгруэнции (8a) мы выбрали $\alpha\alpha' = 1$, то постоянную a надо закрепить, полагая $a = 1$. Две другие постоянные b и c остаются произвольными и надлежащий выбор их позволяет привести к единице постоянные множители интеграции в произведениях $\lambda_1\lambda_2$ и $\mu_1\mu_2$. С другой стороны, формулы (8k) показывают, что изменение начала отсчёта переменных u и v умножает B_4 и B_1 и делит на те же постоянные B_3 и B_2, т. е. меняет отношения $\lambda_1 : \lambda_2$ и $\mu_1 : \mu_2$.

Таким образом, все четыре постоянных множителя, получаемых при интеграции уравнений (8f), могут быть приведены к единице. Останутся два постоянных в общем интеграле ν_1, ν_2 системы (8h') и постоянное k.

К произвольной линейчатой поверхности S, принадлежащей линейной конгруэнции (т. е. обладающей двумя прямолинейными направляющими), *можно построить трёхпараметрическое семейство конгруэнций D_1, которые будут преобразовывать поверхность S в линейчатую поверхность такого же рода, налагающуюся на S соответствующими точками.*

242. Четыре типа конгруэнций D_2, D_3, D_4 и D_5. *Конгруэнции D_2.* Если уравнение (1g) § 233 не исчезает тождественно, то оно имеет следствием уравнения (1h) § 233. Будем предполагать, что постоянное C отлично от нуля, и для определённости будем считать его отрицательным

$$C = -c^2.$$

Тогда уравнения (1h) будут интегрироваться в тригонометрических функциях. Вводя новые постоянные c_i, мы можем положить

$$X = c_1 \sin(cx + c_3) + c_5,$$
$$Y = c_2 \sin(cy + c_4) + c_6.$$

Выбирая начало отсчёта переменных x, y, приведём постоянные c_3, c_4 к нулю.

С другой стороны, поскольку функции X, Y входят в определение конгруэнции только в виде суммы $\ln\alpha = X + Y$, мы можем, не меняя α, прибавлять любое постоянное к X, отнимая его от Y; следовательно, можно считать постоянные c_5 и c_6 равными между собой. Они будут давать для неизвестной функции α постоянный множитель, который можно привести к единице умножением параметров u, v на подходящий постоянный множитель с одновременным изменением нормирования вершин A_i согласно формулам (3e) § 218.

Обозначая $c_1 = a$, $c_2 = b$, мы получим:

$$\alpha = e^{a \sin cx + b \sin cy}. \quad (9a)$$

Основание изгибания наложимости одной фокальной поверхности на другую (7) § 240 определяется теперь уравнением

$$a \sin cx\, dx^2 - b \sin cy\, dy^2 = 0. \quad (9b)$$

Первое уравнение (1f) § 233 примет вид

$$4abc^2 \cos cx \cos cy = U - V$$

или

$$2abc^2 (\cos 2cv + \cos 2cu) = U - V,$$

откуда, поскольку ε есть функция одного переменного v, а ε' — одного u,

$$\varepsilon = -2abc^2 \cos 2cv + h, \qquad h = \text{const}. \quad (9c)$$
$$\varepsilon' = 2abc^2 \cos 2cu + h,$$

Уравнения (9a) — (9c) показывают, что конгруэнции D_2 зависят от четырёх произвольных параметров a, b, c и h. Поскольку постоянное h входит только в функции ε, ε', ни линейный элемент конгруэнции (15d) § 226, ни линейные элементы фокальных поверхностей $\frac{\varphi_3}{\varphi_2}$ от постоянного h не зависят. Изменение параметра h производит, следовательно, совместное изгибание фокальных поверхностей и конгруэнции; основанием этого изгибания служат фокальные сети.

Действительно, поскольку постоянное h входит лишь в выражения ε, ε', т. е. только в формы ω_3^1, ω_4^2, то только эти формы и будут изменяться при изгибании. Значит,

$$\tilde{\omega}_3^1 = h\, dv, \qquad \tilde{\omega}_4^2 = h\, du.$$

Сравнивая это с уравнениями (4b) § 237, получим:

$$a_1 = 0,$$

и уравнение основания изгибания (5b) § 238 примет вид

$$\omega_1^3 \omega_2^4 = 0.$$

Конгруэнции D_3. Если постоянное $C = -c^2$ равно нулю, то уравнение (1g′) § 233 покажет, что производные X''', Y''' равны нулю и, следовательно,

$$X = c_1 x^2 + c_3 x + c_5,$$
$$Y = c_2 y^2 + c_4 y + c_6.$$

Если коэффициенты c_1, c_2 не равны нулю, то постоянные c_3 и c_4 можно привести к нулю, меняя начало отсчёта независимых переменных u, v или, что то же, переменных x, y; постоянные c_5, c_6 войдут при вычислении α только в виде суммы и составят произвольный постоянный множитель $e^{c_5 + c_6}$, который может быть приведён к единице по формулам (3e) § 218. Меняя обозначения постоянных, мы получим для α выражение

$$\alpha = e^{a^2 x^2 + b^2 y^2}. \tag{10a}$$

Первое уравнение (1f) § 233 примет вид

$$16 a^2 b^2 xy = U - V,$$

откуда, поскольку $x = u + v$, $y = u - v$ для $\varepsilon = V$, $\varepsilon' = U$, получаем:

$$\varepsilon = 16 (abv)^2 + h, \quad \varepsilon' = 16 (abu)^2 + h, \qquad h = \text{const}. \tag{10b}$$

Конгруэнция D_3 определяется формулами (10a), (10b) с тремя произвольными постоянными a, b, h. Так же как для конгруэнции D_2, изменение постоянного h производит одновременное проективное изгибание конгруэнции (A_1A_2) и её фокальных поверхностей (A_1) и (A_2); основанием этого изгибания служит фокальная сеть.

Основание проективной наложимости поверхности (A_1) на (A_2) определяется уравнением (7) § 240, которое теперь принимает вид

$$a^2 dx^2 - b^2 dy^2 = 0. \tag{10c}$$

Конгруэнции D_4. Допустим теперь, что одна из постоянных c_1, c_2, например c_2, равна нулю. Тогда мы должны считать постоянную c_4 отличной от нуля, иначе переменная α будет функцией одного x, и мы вернёмся к конгруэнции D_1. Так же как и раньше, мы приведём постоянные c_3, c_5, c_6 к нулю и получим для α выражение

$$\alpha = e^{a^2 x^2 + by}. \tag{11a}$$

Первое уравнение (1f) § 233 примет вид

$$8 a^2 bx = U - V,$$

откуда получим:

$$\varepsilon = -8a^2 bv + h, \quad \varepsilon' = 8a^2 bu + h, \qquad h = \text{const}. \tag{11b}$$

Уравнения (11a), (11b) определяют конгруэнцию D_4 с тремя произвольными постоянными a, b, h. При изменении параметра h конгруэнция (A_1A_2) и обе её фокальные поверхности подвергаются совместному проективному изгибанию.

Так как теперь $Y'' = 0$ и, следовательно, $(\ln \alpha)_{uv} = (\ln \alpha)_{uu} = X''$, то основание проективной наложимости поверхностей (A_1) и (A_2), определяемое уравнением (7), совпадает с асимптотическими $x = \text{const.}$, так же как это имело место для конгруэнции D_1.

Конгруэнции D_5. Нам остаётся предположить обращение в нуль обоих постоянных c_1 и c_2. Приводя к нулю постоянные c_5, c_6 выбором начала отсчёта переменных u, v, мы получим для α выражение

$$\alpha = e^{ax + by}. \tag{12a}$$

Первое уравнение (1f) § 233, которое теперь имеет вид

$$4ab = U - V,$$

даёт для ε, ε' постоянные значения

$$\varepsilon = -2ab + h, \quad \varepsilon' = 2ab + h, \qquad h = \text{const}. \tag{12b}$$

Из двух постоянных a, b существенно только одно, ибо преобразованием (3e) § 218 мы можем пропорционально изменить коэффициенты a, b, а сопутствующее умножение на постоянный множитель функции α можно компенсировать изменением начала отсчёта переменных u, v. Следовательно, произвол конгруэнций D_5 определяется двумя постоянными, из которых второе постоянное h своим изменением производит изгибание конгруэнции.

Уравнение (7), определяющее основание проективной наложимости поверхностей (A_1), (A_2), теперь обращается в тождество. После проективного преобразования поверхность (A_1^*) будет иметь с поверхностью (A_2) касание 3-го порядка; следовательно, две поверхности проективно эквивалентны.

Фокальные поверхности конгруэнции D_5 *проективно эквивалентны.* Это имеет место только для конгруэнции D_5, ибо только для функции α, определяемой уравнением (12a), основание изгибания (7) становится неопределённым.

243. Последовательности из конгруэнций D. Допустим, что первое преобразование Лапласа конгруэнции D в направлении от фокуса A_2 к фокусу A_1 есть конгруэнция D. Мы видели, что конгруэнция D среди конгруэнций R, определяемых матрицей компонент (4) § 218, характеризуется уравнением (1d) § 233, т. е. постоянством произведения $\alpha\alpha'$.

Пользуясь формулами (5b′) § 219, мы получим для конгруэнции, преобразованной в направлении от A_2 к A_1, искомое произведние в виде

$$\mathrm{A}\mathrm{A}' = -\frac{1}{aa'}\{(\ln\alpha)_{uv} - \alpha\alpha'\}.$$

Здесь a и a' — произвольные постоянные множители, произведение $\alpha\alpha'$ по условию постоянно, ибо исходная конгруэнция (A_1A_2) есть конгруэнция D. Значит, остаётся потребовать, чтобы постоянно было первое слагаемое фигурной скобки

$$(\ln\alpha)_{uv} = \mathrm{const.} \tag{13a}$$

Допустим, что две соседние конгруэнции последовательности (A_1A_2) и $(B_1B_2) = (A_{1v}A_1)$ являются конгруэнциями D, и уравнение (13a) удовлетворено. Тогда и третья конгруэнция последовательности (A_2A_{2u}) будет конгруэнцией D. Действительно, меняя α на α', мы получим искомое условие в виде уравнения

$$(\ln\alpha')_{uv} = \mathrm{const.}, \tag{13b}$$

но поскольку произведение $\alpha\alpha'$ — постоянно и, значит, логарифмические производные от α и от α' отличаются только знаком, то уравнение (13b) является непосредственным следствием уравнения (13a).

Таким образом, *если две рядом стоящие конгруэнции последовательности суть конгруэнции D, то и третья конгруэнция последовательности обладает этим свойством.* Применяя полную математическую индукцию, получим, что вся последовательность (13a) состоит из конгруэнций D.

Обращаясь к четырём типам конгруэнций D_2, D_3, D_4, D_5, непосредственным дифференцированием формул (9a), (10a), (11a), (12a), получаем для $(\ln\alpha)_{uv}$ соответственно выражения

$$-c^2(a\sin cx - b\sin cy), \quad 2(a^2-b^2), \quad 2a^2, \quad 0.$$

Только последние три — постоянны. Следовательно, общая конгруэнция D — конгруэнция D_2 — не порождает последовательности D. Каждая из конгруэнций D_3, D_4, D_5 порождает последовательность D; при этом преобразование Лапласа не выводит конгруэнцию из её класса, ибо по формуле (5b′) § 219 новая функция

$$\mathrm{A} = \frac{\rho_1}{ah}\,\alpha\{(\ln\alpha)_{uv} - \alpha\alpha'\}$$

отличается от первоначальной α только постоянным множителем. Существуют последовательности D_3, D_4 и D_5, из них последовательность D_5 содержит проективно эквивалентные фокальные поверхности.

Конгруэнция D_1 порождает последовательность D только в том случае, если она в то же время принадлежит к типу D_3, D_3 или D_5.

V. ПОВЕРХНОСТИ D

244. Фокальные поверхности конгруэнций D. Мы уже видели, что фокальные поверхности конгруэнции D_1 — произвольные линейчатые поверхности R, т. е. произвольные линейчатые поверхности с двумя прямолинейными директрисами или, ещё иначе, произвольные линейчатые поверхности, образующие которых принадлежат линейной конгруэнции. Каждая такая поверхность несёт трёхпараметрическое семейство сетей R, касательные к одному семейству линий каждой сети описывают конгруэнцию D_1.

Так же легко характеризовать фокальные поверхности конгруэнции D_5.

Если ввести точки

$$2B_2 = -\alpha A_2 + A_3, \quad 2B_3 = -\alpha A_2 - A_3, \quad 2B_4 = -\frac{\varepsilon}{2}A_1 - \alpha A_4, \tag{14a}$$

то таблица компонент (4) § 218 приведёт к уравнениям

$$\begin{aligned}
dA_1 &= B_2dx + B_3dy,\\
dB_2 &= \frac{1}{2}A_1\left(\alpha\alpha' + \frac{\varepsilon}{2}\right)dx + (B_2+B_3)(\ln\alpha)_x\,dx + B_4dy,\\
dB_3 &= -\frac{1}{2}A_1\left(\alpha\alpha' - \frac{\varepsilon}{2}\right)dy + (B_2+B_3)(\ln\alpha)_y\,dy + B_4dx,\\
dB_4 &= \frac{1}{2}A_1\Big\{\left[\alpha\alpha'(\ln\alpha')_x + \frac{\varepsilon}{2}(\ln\alpha)_x\right]dx + \\
&\qquad + \left[\frac{\varepsilon}{2}(\ln\alpha)_y - \alpha\alpha'(\ln\alpha')_y\right]dy\Big\} + \\
&\quad + \frac{1}{2}B_2\left\{\frac{\varepsilon'-\varepsilon}{2}dx + \left(\frac{\varepsilon'}{2} - \alpha\alpha'\right)dy\right\} + \\
&\quad + \frac{1}{2}B_3\left\{\left(\alpha\alpha' + \frac{\varepsilon'}{2}\right)dx + \frac{\varepsilon'-\varepsilon}{2}dy\right\} + \\
&\quad + B_4d\ln\alpha.
\end{aligned} \tag{14b}$$

Здесь, очевидно,

$$B_2 = (A_1)_x, \quad B_3 = (A_1)_y, \quad B_4 = (A_1)_{xy} \tag{14c}$$

и переменные $x = u + v$, $y = u - v$ — параметры асимптотических линий поверхности (A_1).

Для фокальной поверхности конгруэнции D_5 формулы (12a), (12b) § 242 дают значения

$$\alpha\alpha' = 1, \quad (\ln\alpha)_x = a, \quad (\ln\alpha)_y = b, \quad \varepsilon = -2ab + h, \quad \varepsilon' = 2ab + h. \tag{α}$$

Следовательно, все коэффициенты в уравнениях (14b) — постоянны.

Поверхность, очевидно, допускает проективное преобразование самой в себе, ибо подстановка

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0, \qquad x_0, y_0 = \text{const}.$$

при постоянных коэффициентах не меняет уравнений (14b).

245. Проективно-минимальные поверхности. Обратно, пусть дана поверхность системой вида (14b) с постоянными коэффициентами в матрице компонент, например системой

$$\begin{aligned} dM_1 &= M_2\,dX + M_3\,dY, \\ dM_2 &= M_1 A\,dX + M_2 p'\,dX + M_3 p\,dX + M_4\,dY, \\ dM_3 &= M_1 B\,dY + M_2 q\,dY + M_3 q'\,dY + M_4\,dX, \\ dM_4 &= M_i(p^i\,dX + q^i p Y), \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \end{aligned} \tag{15a}$$

Уравнения структуры при постоянных A, B, p, p', q, q' позволяют по заданным A, B, p, p', q, q' определить все p^i, q^i

$$p^1 = Bp,\ q^1 = Aq,\ p^2 = q^3 = pq,\ p^3 = A + pq',\ q^2 = B + p'q,$$
$$p^4 = p',\ q^4 = q'. \tag{15b}$$

Следовательно, поверхность вполне определена шестью постоянными A, B, p, p', q, q'.

Так как из уравнений (15a) следует

$$M_2 = \frac{\partial M_1}{\partial X},\ M_3 = \frac{\partial M_1}{\partial Y},\ M_4 = \frac{\partial^2 M_1}{\partial X\,\partial Y},$$

то система (15a) эквивалентна двум уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_1}{\partial X^2} &= AM_1 + p'\frac{\partial M_1}{\partial X} + p\frac{\partial M_1}{\partial Y}, \\ \frac{\partial^2 M_1}{\partial Y^2} &= BM_1 + q\frac{\partial M_1}{\partial X} + q'\frac{\partial M_1}{\partial Y}. \end{aligned} \tag{15c}$$

Поверхность (M_1) совпадёт с поверхностью (A_1) и будет служить фокальной поверхностью конгруэнции D_5, если подстановка

$$X = X(x),\ Y = Y(y),\ M_1 = \rho A_1$$

приведёт систему (15a) к виду (14b) или, что то же, систему (15c) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - ab + 1\right)A_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)a, \\ \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - ab - 1\right)A_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)b, \end{aligned} \tag{14b'}$$

которая получается из системы (14b), если воспользоваться соотношениями (α) § 244 и (14c).

Внося в уравнения (15a) значение $M_1 = \rho A_1$, мы получим для вторых производных от A_1 уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} = \Big\{ & AX'^2 + p'X'(\ln\rho)_x + p\frac{X'^2}{Y'}(\ln\rho)_y + \frac{X''}{X'}(\ln\rho)_x - \\ & - (\ln\rho)_{xx} - (\ln\rho)_x^2 \Big\} A_1 + \\ & + \left\{ p'X' + \frac{X''}{X'} - 2(\ln\rho)_x \right\} \frac{\partial A_1}{\partial x} + p\frac{X'^2}{Y'}\frac{\partial A_1}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} = \Big\{ & BY'^2 + q'Y'(\ln\rho)_y + q\frac{Y'^2}{X'}(\ln\rho)_x + \frac{Z''}{Y'}(\ln\rho)_y - \\ & - (\ln\rho)_{yy} - (\ln\rho)_y^2 \Big\} A_1 + q\frac{Y'^2}{X'}\frac{\partial A_1}{\partial x} + \\ & + \left\{ q'Y' + \frac{Y''}{Y'} - 2(\ln\rho)_y \right\} \frac{\partial A_1}{\partial y}, \end{aligned} \tag{15c'}$$

где X', Y' и X'', Y'' — первые и вторые производные каждой функции по своему аргументу.

Сравнивая коэффициенты при производных $\frac{\partial A_1}{\partial x}$, $\frac{\partial A_1}{\partial y}$ в уравнениях (14b'), (15c'), мы получим:

$$a = p\frac{X'^2}{Y'} = p'X' + \frac{X''}{X'} - 2(\ln\rho)_x,$$
$$b = q\frac{Y'^2}{X'} = q'Y' + \frac{Y''}{Y'} - 2(\ln\rho)_y.$$

Так как X' может зависеть только от x, а Y' — только от y, то обе производные X' и Y' — постоянны

$$X' = m,\ Y' = n,\ X'' = Y'' = 0$$

и мы будем иметь:

$$\begin{aligned} a &= p\frac{m^2}{n}, \qquad b = q\frac{n^2}{m}, \\ (\ln\rho)_x &= \frac{m}{2}\left(p' - p\frac{m}{n}\right), \quad (\ln\rho)_y = \frac{n}{2}\left(q' - q\frac{n}{m}\right). \end{aligned} \tag{15d}$$

Последние два уравнения показывают, что производные $(\ln\rho)_x$, $(\ln\rho)_y$ — постоянны.

Наконец, сравнение коэффициентов при A_1 в уравнениях (14b'), (15c') даст два уравнения:

$$\begin{aligned} m^2\left(A + \frac{1}{4}p'^2 + \frac{1}{2}pq'\right) - \frac{m^4}{4n^2}p^2 &= \frac{h}{4} + \frac{1}{2}, \\ n^2\left(B + \frac{1}{4}q'^2 + \frac{1}{2}p'q\right) - \frac{n^4}{4m^2}q^2 &= \frac{h}{4} - \frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{15e}$$

которые определят m и n, если задано h. Следовательно, со всякой поверхностью, определяемой системой (15a), с постоянными коэффициентами A, B, p, q, p', q', связано однопараметрическое семейство конгруэнций D_5; параметром семейства можно считать величину h. Лучи конгруэнции касаются линии $v = x - y = \text{const}$.

С другой стороны, уравнения (15d) второй строки показывают, что изменение нормирующего множителя ρ, точнее — выбор постоянных $(\ln\rho)_x$, $(\ln\rho)_y$ позволяет привести коэффициенты p', q' к любой величине. Следовательно, существенны только постоянные A, B, p, q. Поверхности (15a) называются *проективно-минимальными*. Таким образом, семейство проективно-минимальных поверхностей зависит от четырёх произвольных параметров.

246. Поверхности D_2, D_3, D_4. Рассуждения предыдущего параграфа в большей или меньшей степени приложимы и к фокальным поверхностям конгруэнций D_2, D_3, D_4.

Относя конгруэнцию к тетраэдру (14a), мы опять получим формулы (14b). При этом для конгруэнций D_2, D_3, D_4, отправляясь от формул (9a), (9b), (10a), (10b) § 242 или (11a), (11b) § 242, получим для компонент таблицы (14b) следующие значения:

$$\begin{aligned}
D_2:\quad & (\ln\alpha)_x = ac\cos cx, \quad (\ln\alpha)_y = bc\cos cy,\\
& \frac{\varepsilon}{2} = -abc^2\cos c(x-y) + \frac{h}{2},\\
D_3:\quad & (\ln\alpha)_x = 2a^2x, \quad (\ln\alpha)_y = 2b^2y,\\
& \frac{\varepsilon}{2} = 2a^2b^2(x-y)^2 + \frac{h}{2},\\
D_4:\quad & (\ln\alpha)_x = 2a^2x, \quad (\ln\alpha)_y = b,\\
& \frac{\varepsilon}{2} = -2a^2b(x-y) + \frac{h}{2}.
\end{aligned} \tag{16a}$$

Так же, как и для системы (15a), убедимся, что коэффициенты в разложении дифференциала dB_4 получаются из уравнений (16a) с помощью уравнений структуры. Следовательно, система (14b) для поверхностей (16a) эквивалентна системам уравнений:

$$\begin{aligned}
D_2:\quad & (A_1)_{xx} = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{h}{2} - abc^2\cos c(x-y)\right\}A_1 +\\
& \qquad + ac\cos cx\,\{(A_1)_x + (A_1)_y\},\\
& (A_1)_{yy} = \frac{1}{2}\left\{-1 + \frac{h}{2} - abc^2\cos c(x-y)\right\}A_1 +\\
& \qquad + bc\cos cy\,\{(A_1)_x + (A_1)_y\},\\
D_3:\quad & (A_1)_{xx} = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{h}{2} + 2a^2b^2(x-y)^2\right\}A_1 +\\
& \qquad + 2a^2x\,\{(A_1)_x + (A_1)_y\},\\
& (A_1)_{yy} = \frac{1}{2}\left\{-1 + \frac{h}{2} + 2a^2b^2(x-y)^2\right\}A_1 +\\
& \qquad + 2b^2y\,\{(A_1)_x + (A_1)_y\},\\
D_4:\quad & (A_1)_{xx} = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{h}{2} - 2a^2b(x-y)\right\}A_1 +\\
& \qquad + 2a^2x\,\{(A_1)_x + (A_1)_y\},\\
& (A_1)_{yy} = \frac{1}{2}\left\{-1 + \frac{h}{2} - 2a^2b(x-y)\right\}A_1 +\\
& \qquad + b\,\{(A_1)_x + (A_1)_y\}.
\end{aligned} \tag{16b}$$

Каждая поверхность несёт сеть $x \pm y = \text{const.}$, у которой одна или даже две конгруэнции (для поверхностей D_3 и D_4) касательных к линиям сети являются конгруэнциями D. Найдутся ли на поверхности ещё сети D?

Так как с данной формой уравнений (16b) связана только одна сеть D, то наличие второй сети зависит от возможности преобразования уравнений (16b) посредством подстановки

$$x = x(X), \quad y = y(Y), \quad A_1 = \rho B$$

с сохранением формы уравнений. Это — та же самая подстановка, которая перевела уравнения (15c) к виду (15c′). Прилагая её к системе (16b), которую в свёрнутом виде можно записать

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} &= \frac{\varepsilon+2}{4}A_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)(\ln\alpha)_x,\\
\frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} &= \frac{\varepsilon-2}{4}A_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)(\ln\alpha)_y,
\end{aligned} \tag{16c}$$

получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 B}{\partial X^2} &=\\
&= x'^2\left\{\frac{\varepsilon+2}{4} + (\ln\alpha)_x(\ln\rho)_x + (\ln\alpha)_x(\ln\rho_y) - (\ln\rho)_{xx} - (\ln\rho)_x^2\right\}B +\\
&\qquad + x'\left\{(\ln\alpha)_x - 2(\ln\rho)_x + \frac{x''}{x'^2}\right\}\frac{\partial B}{\partial X} + \frac{x'^2}{y'}(\ln\alpha)_x\frac{\partial B}{\partial Y},\\
\frac{\partial^2 B}{\partial Y^2} &=\\
&= y'^2\left\{\frac{\varepsilon-2}{4} + (\ln\alpha)_y(\ln\rho)_x + (\ln\alpha)_y(\ln\rho)_y - (\ln\rho)_{yy} - (\ln\rho)_y^2\right\}B +\\
&\qquad + y'\left\{(\ln\alpha)_y - 2(\ln\rho)_y + \frac{y''}{y'^2}\right\}\frac{\partial B}{\partial Y} + \frac{y'^2}{x'}(\ln\alpha)_y\frac{\partial B}{\partial X},
\end{aligned} \tag{16c′}$$

где

$$x' = \frac{dx}{dX}, \qquad y' = \frac{dy}{dY}.$$

Эти уравнения должны иметь вид уравнений (16c). Если обозначить новые функции ε, α буквами E, A и сравнить коэффициенты при производных $\frac{\partial B}{\partial X}$ и $\frac{\partial B}{\partial Y}$, то получим соотношения

$$\frac{1}{x'}(\ln \mathrm{A})_X = \frac{x'}{y'}(\ln \alpha)_x = (\ln \alpha)_x - 2(\ln \rho)_x + \frac{x''}{x'^2},$$

$$\frac{1}{y'}(\ln \mathrm{A})_Y = \frac{y'}{x'}(\ln \alpha)_y = (\ln \alpha)_y - 2(\ln \rho)_y + \frac{y''}{y'^2}.$$

Так как производные $(\ln \mathrm{A})_X$ и $(\ln \alpha)_x$ являются функциями одного переменного x, то из первого уравнения следует, что y' может быть только постоянным; то же самое можно сказать и относительно x'. Обозначая

$$x' = m, \qquad y' = n, \tag{16d}$$

получим:

$$(\ln \rho)_x = \frac{n-m}{2n}(\ln \alpha)_x, \quad (\ln \rho)_y = \frac{m-n}{2m}(\ln \alpha)_y,$$
$$(\ln \mathrm{A})_x = \frac{m}{n}(\ln \alpha)_x, \qquad (\ln \mathrm{A})_y = \frac{n}{m}(\ln \alpha)_y. \tag{16e}$$

Наконец, сравнение коэффициентов при точке B даёт уравнения

$$\mathrm{E} = \varepsilon m^2 + 2(m^2 - 1) + \frac{m^2}{n^2}(n^2 - m^2)(\ln \alpha)_x^2 +$$
$$+ 2m(m-n)(\ln \alpha)_x(\ln \alpha)_y + 2\frac{m^2}{n}(m-n)(\ln \alpha)_{xx},$$
$$\mathrm{E} = \varepsilon n^2 - 2(n^2 - 1) + \frac{n^2}{m^2}(m^2 - n^2)(\ln \alpha)_y^2 +$$
$$+ 2n(n-m)(\ln \alpha)_x(\ln \alpha)_y + 2\frac{n^2}{m}(n-m)(\ln \alpha)_{yy}. \tag{16f}$$

Чтобы эти уравнения были совместны, они должны обращаться в тождество по исключении E. Исключая E, если $n \neq m$, получаем:

$$(m+n)\left\{\varepsilon - \frac{m^2}{n^2}(\ln \alpha)_x^2 + 2(\ln \alpha)_x(\ln \alpha)_y - \frac{n^2}{m^2}(\ln \alpha)_y^2\right\} +$$
$$+ 2\frac{m^2}{n}(\ln \alpha)_{xx} + 2\frac{n^2}{m}(\ln \alpha)_{yy} + 2\frac{m^2+n^2-2}{m-n} = 0. \tag{16g}$$

При $n = m$ получим, что оба должны равняться единице $n = m = 1$ и вторая сеть (16f) D будет совпадать с первой.

Для поверхности D_2 формулы (16a), (16b) позволят привести это уравнение к виду

$$(m+n)\left\{-2abc^2 \sin cx \sin cy - \frac{m^2}{n^2}a^2c^2\cos^2 cx - \frac{n^2}{m^2}b^2c^2\cos^2 cy\right\} -$$
$$- 2\frac{m^2}{n}ac^2 \sin cx - 2\frac{n^2}{m}bc^2 \sin cy + 2\frac{m^2+n^2-2}{m-n} + h(m+n) = 0.$$

Поскольку коэффициенты при степенях $\sin cx$, $\sin cy$ — не нули, уравнение не обращается в тождество; следовательно, поверхность D_2 несёт только одну сеть D.

Такой же результат получим для поверхностей D_4. Для поверхностей D_3 формулы (16a), (16b) приведут уравнение (16g) к виду

$$(m+n)a^2b^2\left\{(x-y)^2 - \left(\frac{am}{bn}x - \frac{bn}{am}y\right)^2\right\} +$$
$$+ \frac{a^2m^2}{n} + \frac{b^2n^2}{m} + \frac{m^2+n^2-2}{2(m-n)} + h\frac{m+n}{4} = 0. \tag{16g'}$$

Сравнение коэффициентов при степенях x, y покажет, что возможно только одно решение

$$m : n = \pm\frac{b}{a}, \tag{16h}$$

именно, полагая $m = \lambda b$, $n = \lambda' a$, $\lambda' = \pm\lambda$, внося эти значения в уравнение (16g') и сравнивая коэффициенты при степенях x, y, получим для определения λ единственное уравнение

$$\lambda^2\left\{\left(ab + \frac{h}{4}\right)(a^2 - b^2) + \frac{a^2+b^2}{2}\right\} = 1.$$

Вторая сеть D определяется теперь уравнением

$$dX^2 - dY^2 = 0,$$

или, если иметь в виду соотношения (16d, h), уравнением

$$a^2 dx^2 - b^2 dy^2 = 0.$$

Это — в точности уравнение (10c) § 242, определяющее основание проективной наложимости фокальных поверхностей первой конгруэнции D, присоединённой к поверхности D_3. Основание проективной наложимости фокальных поверхностей второй конгруэнции D, очевидно, совпадает с фокальной сетью первой конгруэнции. В силу симметрии конгруэнции D_3 относительно фокальных поверхностей это же уравнение будет определять вторую сеть D и на поверхности (A_2).

VI. ПРИСОЕДИНЁННАЯ РАССЛОЯЕМАЯ ЧЕТВЁРКА

247. Четвёрка поверхностей D_3. Пара конгруэнций D, по одной от каждой сети D на поверхности D_3, образует замечательную конфигурацию. Чтобы удобнее было её рассмотреть, мы отнесём поверхность к тетраэдру, у которого одна вершина M_1 лежит в соответствующей точке поверхности A_1, две другие M_2 и M_3 во вторых фокусах лучей двух конгруэнций D, которые выходят из этой точки, а четвёртая вершина M_4 — во втором фокусе луча той конгруэнции D, которая имеет поверхность (M_2) своей фокальной поверхностью.

Если исходить из матрицы компонент (4) § 218, (10a), (10b) § 242, то, сохраняя точки $M_1 = A_1$, $M_2 = A_2$, достаточно положить вершину M_3 во втором фокусе касательной к линии

$$a(da + dv) + b(du - dv) = 0$$

поверхности (M_1) и вершину M_4 на касательной к такой же линии на поверхности (M_2) так, чтобы грань тетраэдра $M_1M_3M_4$ была касательной плоскостью фокальной поверхности (M_3).

Заменяя дифференциалы du и dv пропорциональными им постоянными $(b - a)$ и $(a + b)$ и вводя неизвестные функции λ и μ, мы представим произвольные точки касательных M_1M_3, M_2M_4 с помощью матрицы (4) § 218 в виде

$$\begin{aligned} M_3 &= \lambda A_1 + (a - b)\,\alpha A_2 + (a + b)\,A_3, \\ M_4 &= \mu A_2 - (a + b)\,\alpha' A_1 - (a - b)\,A_4. \end{aligned} \tag{17a}$$

Потребуем теперь, чтобы плоскость $M_1M_3M_4$ была касательной плоскостью поверхности (M_3), и тогда тетраэдр будет определён. Всё сводится, следовательно, к уравнению

$$(M_1M_3M_4\,dM_3) = 0,$$

которое должно иметь место для всех перемещений точки M_3. Внося сюда значения M_i, развёртывая с помощью уравнений (16a) § 246, сокращая всё уравнение на $\alpha(a^2 - b^2)$ и приравнивая нулю коэффициенты при дифференциалах du, dv, получим:

$$\mu - \lambda = 4ab\,[(a - b)\,u + (a + b)\,v],$$

$$\mu\,\frac{a + b}{a - b} - \lambda\,\frac{a - b}{a + b} = 4ab\,[(a + b)\,u + (a - b)\,v],$$

откуда определятся λ, μ

$$\lambda = -4ab\,(a + b)\,v, \quad \mu = 4ab\,(a - b)\,u. \tag{17b}$$

Ввиду симметрии формул для λ и μ одновременно будет удовлетворяться уравнение

$$(M_2M_4M_3\,dM_4) = 0,$$

т. е. плоскость $M_2M_4M_3$ будет касательной плоскостью поверхности (M_4).

Отсюда вытекает, прежде всего, что вершина M_4 совпадает со вторым фокусом касательной M_2M_4. Затем луч M_3M_4 принадлежит касательным плоскостям поверхностей (M_3) и (M_4); следовательно,

касается их в точках M_3, M_4. Так как прямые M_1M_3, M_2M_4 касаются на поверхностях (M_1), (M_2) второй сети D, то фокальные поверхности (M_3), (M_4) — тоже поверхности D_3.

Нетрудно заметить, что луч M_3M_4 описывает конгруэнцию D. Действительно, каждая из конгруэнций (M_3M_1), (M_1M_2), (M_2M_4) является конгруэнцией D, т. е. фокальные поверхности (M_3), (M_1), (M_2) и (M_4) проективно наложимы, причём в соответствии наложимости поверхности (M_3) на поверхность (M_4) точке M_3 отвечает точка M_4, а это и соответствует определению конгруэнции D.

248. Двойная последовательность Лапласа поверхностей D_3. Луч M_3M_4 касается на поверхностях (M_3), (M_4) линий первой сети D, т. е. развёртывающиеся поверхности конгруэнции (M_3M_4), так же как конгруэнции (M_1M_2), определяются уравнением $du\,dv = 0$.

Действительно, дифференцируя точки M_i, получим матрицу компонент тетраэдра $\{M_i\}$ в виде:

$$\begin{pmatrix} 4abv\,dv & -\dfrac{\alpha\theta}{a + b} & \dfrac{dv}{a + b} & 0 \\ -\dfrac{\alpha'\theta}{a - b} & 4abu\,du & 0 & -\dfrac{du}{a - b} \\ H\,dv & 0 & -4abv\,dv & -\dfrac{\alpha\theta'}{a - b} \\ 0 & H'\,du & -\dfrac{\alpha'\theta'}{a + b} & -4abu\,du \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где

$$\theta = (a + b)\,du + (a - b)\,dv, \quad \theta' = (a - b)\,du + (a + b)\,dv,$$

$$H = (h - 4ab)(a + b) - 2\frac{a^2 + b^2}{a - b}, \quad H' = (h - 4ab)(b - a) + 2\frac{a^2 + b^2}{a + b}.$$

Из этой таблицы видно, что четыре поверхности (M_i) образуют замкнутый цикл $M_1M_2M_4M_3M_1$ так, что каждые две рядом стоящие поверхности являются фокальными поверхностями конгруэнции лучей, связывающих соответствующие точки их. Развёртывающиеся поверхности конгруэнций $(M_1M_2)(M_3M_4)$ определяются уравнением $du\,dv = 0$, развёртывающиеся поверхности второй пары (M_1M_3), (M_2M_4) — уравнением $\theta\theta' = 0$. Асимптотические линии на всех поверхностях определяются уравнением $du^2 - dv^2 = 0$.

Так как постоянные a, b входят в уравнения (16b) § 246, (10a), (10b) § 242, определяющие поверхность (A_1), только в квадратах, то мы можем там изменить знак одного из них, например, b. Формулы (17a), (17b) покажут, что при этом сохранятся точки $M_1 = A_1$, $M_2 = A_2$, но изменятся точки M_3, M_4. Матрица компонент (18) сохранит свою структуру и будет определять новую четвёрку поверхностей (M_i^*) той же природы с той разницей, что теперь лучи $M_1M_3^*$, $M_2M_4^*$ будут касаться соответственно на поверхностях (M_1) и (M_3) линии

$$\theta' = a(du + dv) - b(du - dv) = 0,$$

т. е. сопряжённой линии второй сети D

$$a^2\,dx^2 - b^2\,dy^2 = 0$$

на поверхностях (M_1), (M_2).

Таким образом, система (18) допускает продолжение Лапласа относительно каждой из двух сетей D фокальных поверхностей, т. е. каждую из четырёх фокальных поверхностей (M_i) можно заменить её преобразованием Лапласа в направлении u или v сети $du\,dv = 0$ или в направлении $ax + by$ или $ax - by$ сети $a^2dx^2 - b^2dy^2 = 0$.

Получается сеть поверхностей D_3 с двумя указателями, ибо через каждую поверхность проходят две последовательности из конгруэнций D_3. Каждая поверхность служит фокальной поверхностью четырёх конгруэнций D. Если закрепить параметры u, v, то получим сеть косых четыреугольников. Узлами сети служат соответствующие точки (фокусы) поверхностей D, сторонами — лучи конгруэнций D, а каждый из косых четыреугольников сети описывает конфигурацию T, т. е. четвёрку поверхностей и четвёрку конгруэнций так, что каждая поверхность служит фокальной поверхностью двух соседних конгруэнций.

249. Расслояемая четвёрка. Четвёрка поверхностей D_3, которую мы получили, называется *сопряжённой четвёркой*, ибо развёртывающиеся поверхности пары противоположных конгруэнций четвёрки соответствуют так, что соответствующие фокусы лежат на одном луче одной конгруэнции другой пары.

По теореме о сопряжённой паре конгруэнций, если развёртывающиеся поверхности пары противоположных конгруэнций в конфигурации T соответствуют, то эта пара конгруэнций — расслояема: существуют два семейства поверхностей (расслояющих поверхностей) $(\sum)$ и $(\sum')$ таких, что касательные плоскости к поверхностям семейства $(\sum)$ в точках пересечения с лучом одной конгруэнции пары проходят через соответствующий луч другой конгруэнции и касательные плоскости к поверхностям $(\sum')$ в точках пересечения с лучом второй конгруэнции проходят через соответствующий луч первой.

Ввиду полной симметрии конфигурации относительно четырёх конгруэнций достаточно доказать эту теорему для одной конгруэнции нашей четвёрки, например, для конгруэнции (M_1M_2).

Если обозначить через

$$P = M_1 + \lambda M_2$$

точку, где луч M_1M_2 пересекает одну из расслояющих поверхностей $\sum$, то условие, что касательная плоскость к поверхности $\sum$ в этой точке проходит через прямую M_3M_4, т. е. условие, что все дифференциальные перемещения dP точки P лежат в плоскости PM_3M_4, выражается уравнением

$$(dP\ P\ M_3\ M_4) = 0$$

или, если воспользоваться при дифференцировании точки P матрицей компонент (18), уравнением

$$d\lambda + \lambda^2\alpha'\,\frac{(a+b)\,du + (a-b)\,dv}{a-b} + 4ab\lambda\,(u\,du - v\,dv) - \alpha\,\frac{(a+b)\,du + (a-b)\,dv}{a+b} = 0. \quad (19)$$

Внешний дифференциал левой части уравнения (19) обращается в нуль в силу самого уравнения. Следовательно, уравнение вполне интегрируемо и определяет λ с произвольным постоянным, т. е. определяет семейство расслояющих поверхностей $\sum$.

250. Литературные указания. Конгруэнции с проективно налагающимися фокальными поверхностями независимо были рассмотрены Чехом [1] и автором [11], [14].

Проективно-минимальные поверхности введены Томсоном Abh. Math. Sem., Hambung, 4, 232, 1926. Более подробную библиографическую справку см. П.Д.Г., примечание **14** в конце тома.

Четвёрка, построенная на поверхностях D_3, найдена Пантази [1], [2].

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

КОНГРУЭНЦИИ А. М. ВАСИЛЬЕВА

I. ПРИСОЕДИНЁННЫЕ К ФОКАЛЬНЫМ ПОВЕРХНОСТЯМ ПОВЕРХНОСТИ ЛИ

251. Поверхность 2-го порядка Ли для фокальной поверхности. В дальнейшем нам придётся писать уравнение соприкасающейся поверхности 2-го порядка Ли для фокальных поверхностей конгруэнции. Потому мы сейчас поставим себе задачу вывести уравнение поверхности Ли, инвариантное относительно выбора тетраэдра 1-го порядка в качестве местной системы координат.

По определению, поверхность Ли есть предельное положение поверхности 2-го порядка, проходящей через касательные к трём асимптотическим линиям одного семейства в точках их пересечения с одной асимптотической другого семейства, если эти точки сближаются и в пределе совпадают. При этом в данной точке поверхности получается одно и то же предельное положение и, следовательно, одна и та же поверхность Ли, независимо от того, какую из асимптотических, проходящих через эту точку, принимать за направляющую и к асимптотическим какого семейства проводить касательные.

То же самое определение, очевидно, можно высказать иначе: поверхность Ли есть пересечение всех линейных комплексов, имеющих касание 2-го порядка с линейчатой поверхностью, образованной касательными к асимптотическим одного семейства в точках их пересечения с одной асимптотической другого семейства.

Пусть

$$\omega_2^4 - t\omega_1^3 = 0 \tag{1a}$$

один из корней уравнения асимптотических

$$\alpha\,(\omega_1^3)^2 + \gamma\,(\omega_2^4)^2 = 0 \tag{1a'}$$

первой фокальной поверхности (A_1). Выберем ребро A_1A_3 тетраэдра 1-го порядка $\{A_i\}$ так, чтобы оно касалось асимптотической (1a). Так как линия, огибаемая на поверхности (A_1) ребром A_1A_3, опре-

деляется уравнением $\omega_1^3 = 0$, то уравнение (1a) обращает в нуль ω_1^3. Пользуясь формулами (7) § 186, получим:

$$\beta = -t\gamma. \tag{1b}$$

С другой стороны, внося выражение (1a) в уравнение (1a′), получим:

$$\alpha = -t^2\gamma. \tag{1b'}$$

Заметим теперь, что дифференцирование уравнения (1a) по вторичным параметрам с помощью формул (19a) § 192 даёт:

$$\delta \ln t = -\pi_1^1 + \pi_2^2 + \pi_3^3 - \pi_4^4.$$

Поскольку t заведомо отлично от нуля, мы можем его привести к единице. Тогда будем иметь:

$$\alpha + \gamma = 0, \quad \beta = \alpha, \tag{1c}$$

и дифференцирование с помощью формул (8′), (9) § 187 даст:

$$\begin{aligned} \omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 + \omega_4^4 &= \frac{\alpha_1 - \beta_2}{2}\,\omega_1^3 - \frac{\beta_1 + \gamma_2}{2}\,\omega_2^4, \\ \omega_3^2 &= \alpha\left(\frac{2\beta_1 - \beta_2 - \alpha_1}{2}\,\omega_1^3 - \frac{2\beta_2 - \beta_1 + \gamma_2}{2}\,\omega_2^4\right). \end{aligned} \tag{1d}$$

252. Связка соприкасающихся линейных комплексов. Мы будем проводить касательные A_1A_3 к асимптотическим $\omega_2^4 = \omega_1^3$ в точках асимптотической $\omega_2^4 = -\omega_1^3$ и искать линейный комплекс $\mathfrak{a}$, имеющий касание 2-го порядка с получаемой таким образом линейчатой поверхностью L.

Если линейный комплекс $\mathfrak{a}$ изображается в пятимерном проективном пространстве P_5 точкой

$$\mathfrak{a} = a^{ik}\,[ik],$$

то координаты a^{ik} должны удовлетворять уравнениям

$$\{\mathfrak{a}\,[13]\} = 0, \ \{\mathfrak{a}\,d\,[13]\} = 0, \ \{\mathfrak{a}\,d^2\,[13]\} \equiv 0 \ \left(\mathrm{mod}\ \omega_1^3 + \omega_2^4\right), \tag{2a}$$

е фигурной скобкой обозначены произведения Плюккера, которые, впрочем, можно получать по обычным правилам грассмановых произведений точек, и дифференцирование выполняется в направлении асимптотической $\omega_2^4 = -\omega_1^3$.

Поскольку полный дифференциал прямой [13] равен

$$d\,[13] = (\omega_1^1 + \omega_3^3)[13] + \omega_3^2\,[12] + \omega_3^4\,[14] + \omega_1^2\,[23],$$

или для нашего тетраэдра

$$d\,[13] \equiv \theta\,[13] + 2\alpha\left\{\frac{\beta_1 + \beta_2 - \alpha_1 + \gamma_2}{4}\,[12] + [14] + [23]\right\}\omega_1^3$$
$$\left(\mathrm{mod}\ \omega_1^3 + \omega_2^4\right),$$

где форма θ нас не интересует, то первые два уравнения (2a) дадут:

$$a^{24}=0,\quad a^{23}+a^{14}+\frac{\beta_1+\beta_2-\alpha_1+\gamma_2}{4}a^{34}=0. \tag{2b}$$

Третье уравнение (2a) в силу двух первых примет вид

$$\left\{\mathfrak{a},\ d\left(\frac{\beta_1+\beta_2-\alpha_1+\gamma_2}{4}[12]+[14]+[23]\right)\right\}\equiv 0\ \left(\mathrm{mod}\ \omega_1^3+\omega_2^4\right). \tag{2a'}$$

Но по формулам (10') § 187

$$d\,\frac{\beta_1+\beta_2-\alpha_1+\gamma_2}{4}=\frac{\beta_1+\gamma_2}{4}(\omega_4^4-\omega_2^2)+\frac{\alpha_1-\beta_2}{4}(\omega_1^1-\omega_3^3)+\omega_3^1-\omega_4^2-$$
$$-\alpha\,\frac{4\beta'-\alpha'+3\gamma'}{4}\,\omega_1^3+\alpha\,\frac{4\beta'+\gamma'-3\alpha'}{4}\,\omega_2^4+\frac{\Delta\beta_1+\Delta\beta_2-\Delta\alpha_1+\Delta\gamma_2}{4},$$

следовательно,

$$d\left(\frac{\beta_1+\beta_2-\alpha_1+\gamma_2}{4}[12]+[14]+[23]\right)\equiv\theta'\left(\frac{\beta_1+\beta_2-\alpha_1+\gamma_2}{4}[12]+\right.$$
$$\left.+[14]+[23]\right)+\Big\{(\gamma'-\alpha'-2\beta')[13]-4\alpha[42]+2[34]-$$
$$-\frac{\beta_1+\beta_2-\alpha_1+\gamma_2}{4}([14]+[23])+\frac{\beta_1-\beta_2+\alpha_1+\gamma_2}{2}\left(\frac{\beta_1+\gamma_2}{4}[12]+\right.$$
$$\left.+[14]\right)+\left(\frac{2\alpha\beta_{12}-\alpha_{11}-\gamma_{22}}{4}-\alpha(2\beta'-\alpha'+\gamma')\right)[12]\Big\}\,\omega_1^3\ (\mathrm{mod}\ \omega_1^3+\omega_2^4),$$

где форма θ' нас не интересует.

Внося это в уравнение (2a'), получим:

$$-4\alpha a^{13}+2a^{12}+\frac{\beta_1+\gamma_2+\alpha_1-\beta_2}{2}a^{23}+\Xi a^{34}=0, \tag{2b'}$$

где

$$\Xi=\frac{2\alpha\beta_{12}-\alpha_{11}-\gamma_{22}}{4}+\left(\frac{\beta_2-\alpha_1}{4}\right)^2+3\left(\frac{\beta_1+\gamma_2}{4}\right)^2-\alpha(2\beta'+\gamma'-\alpha').$$

Мы получаем, таким образом, связку соприкасающихся (2-го порядка) линейных комплексов с произвольными параметрами a^{13}, a^{23}, a^{34}, в виде:

$$\mathfrak{a}=a^{13}\mathfrak{a}_1+a^{23}\mathfrak{a}_2+a^{34}\mathfrak{a}_3,$$

где

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}_1&=[13]+2\alpha[12],\\ \mathfrak{a}_2&=[23]-[14]+\left(\frac{\beta_2-\alpha_1}{4}-\frac{\beta_1+\gamma_2}{4}\right)[12],\\ \mathfrak{a}_3&=[34]-\left(\frac{\beta_2-\alpha_1}{4}+\frac{\beta_1+\gamma_2}{4}\right)[14]-\frac{1}{2}\Xi[12]\end{aligned} \tag{2c}$$

суть базисные комплексы связки.

253. Инвариантное уравнение поверхности Ли. Чтобы дать инвариантные формулы для комплексов $\mathfrak{a}_i$, надо построить выражения $\mathfrak{A}_i$, удовлетворяющие двум требованиям:

1) при $\beta=\alpha$, $\gamma=-\alpha$ они должны совпадать с выражениями $\mathfrak{a}_i$,

2) вариация по вторичным параметрам каждого комплекса $\mathfrak{A}_i$ должна быть пропорциональна самому комплексу.

Второе требование мы возьмём в ослабленной форме: вариация $\delta\mathfrak{A}_i$ должна линейно выражаться через комплексы $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$. Это достаточно для инвариантности связки, что собственно нам и требуется.

Будем предполагать, что уравнение (1a) определяет те асимптотические, касательные к которым (в точках пересечения с одной асимптотической другого семейства) образуют поверхность L. Следовательно, под коэффициентом t будем подразумевать один из корней уравнения (1b'); в выражениях $\mathfrak{a}_i$ он принимает значение $t=1$. Мы можем выбрать базис связки в виде

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_1&=[13]+\left(\beta+\frac{\alpha}{t}\right)[12],\\ \mathfrak{A}_2&=[23]-t[14]+\left(\frac{\beta_2-\alpha_1}{4}-t\frac{\beta_1+\gamma_2}{4}\right)[12],\\ \mathfrak{A}_3&=[34]+(\beta+t\gamma)[24]-\left(\frac{\beta_2-\alpha_1}{4}+t\,\frac{\beta_1+\gamma_2}{4}\right)[14]-\\ &\quad-\frac{1}{2}\Xi'[12],\end{aligned} \tag{3a}$$

где

$$\Xi'=\frac{\alpha\beta_{12}-\alpha_{11}}{4t}-t\frac{\gamma\beta_{12}+\gamma_{22}}{4}+\frac{1}{t}\left(\frac{\beta_2-\alpha_1}{4}\right)^2+3t\left(\frac{\beta_1+\gamma_2}{4}\right)^2+$$
$$+\beta\alpha't-\frac{\beta\gamma'}{t}+\beta'\left(t\gamma-\frac{\alpha}{t}\right). \tag{3b}$$

Действительно, при $t=1$, $\gamma=-\alpha$, $\beta=\alpha$ все $\mathfrak{A}_i$ совпадают с $\mathfrak{a}_i$. С другой стороны, в силу (14a), (14b) § 188, (14c) § 190, (14d) § 191 имеем:

$$\begin{aligned}\delta\ln t&=-\pi_1^1+\pi_2^2+\pi_3^3-\pi_4^4,\\ \delta\left(\beta+\frac{\alpha}{t}\right)&=\left(\beta+\frac{\alpha}{t}\right)(\pi_3^3-\pi_2^2)-\pi_3^2,\\ \delta(\beta+t\gamma)&=(\beta+t\gamma)(\pi_3^3-\pi_2^2)-\pi_3^2,\\ \delta\,\frac{\beta_2-\alpha_1}{4}&=\frac{\beta_2-\alpha_1}{4}(\pi_3^3-\pi_1^1)+\pi_3^1,\\ \delta t\,\frac{\beta_1+\gamma_2}{4}&=t\,\frac{\beta_1+\gamma_2}{4}(\pi_3^3-\pi_1^1)-t\pi_4^2,\\ \delta\Xi'&=\Xi'(\pi_3^3+\pi_4^4-\pi_1^1-\pi_2^2)+\\ &\quad+2\left(\frac{\alpha}{t}-t\gamma\right)\pi_4^1-t(\beta_1+\gamma_2)\pi_4^2.\end{aligned}$$

Следовательно, если приинять во внимание формулы (33a) § 202,

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{A}_1&=\mathfrak{A}_1(\pi_1^1+\pi_3^3),\\ \delta\mathfrak{A}_2&=\mathfrak{A}_2(\pi_2^2+\pi_3^3),\\ \delta\mathfrak{A}_3&=\mathfrak{A}_3(\pi_3^3+\pi_4^4)-\mathfrak{A}_1\pi_4^1-\mathfrak{A}_2\pi_4^2.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что система уравнений, определяющая пересечение трёх базисных комплексов связки

$$\{\mathfrak{A}_1 p\} = 0, \ \{\mathfrak{A}_2 p\} = 0, \ \{\mathfrak{A}_3 p\} = 0 \tag{3c}$$

— инвариантна. Она определяет одно семейство прямолинейных образующих поверхности 2-го порядка, или демиквадрику, которая принадлежит поверхности 2-го порядка Ли, присоединённой к точке A_1 фокальной поверхности (A_1). Если перейти к координатам точки, то мы и получим уравнение поверхности Ли. С этой целью мы введём явно координаты двух точек M и N прямой p, предполагая, что вторая точка N совпадает с точкой пересечения этой прямой плоскостью $A_1A_2A_3$.

Мы будем иметь:

$$p = (MN) = (x^i A_i, \ y^k A_k), \qquad i, k = 1, 2, 3, 4,$$

откуда, перемножая по правилу Грассмана точки $x^i A_i$, $y^k A_k$ и собирая члены с произведениями $[ik]$, получим:

$$p = (x^i y^k - x^k y^i)\,[ik], \qquad \text{суммирование по сочетаниям } i, k = 1, 2, 3, 4$$

при этом четвёртая координата точки N равна нулю

$$y^4 = 0.$$

Внося это значение p в уравнения комплексов (3c) и опуская вниз указатели при местных координатах $x^i = x_i$, $y^k = y_k$, получим:

$$y_2 = \left(\beta + \frac{\alpha}{t}\right) y_3,$$

$$x_4 y_1 - t x_3 y_2 + \{t x_2 + x_4 (b_2 - t b_1)\}\, y_3 = 0,$$

$$\{x_2 - x_3 (\beta + t\gamma)\}\, y_1 - \{x_1 + x_3 (b_2 + t b_1)\}\, y_2 +$$
$$+ \left\{x_1 (\beta + t\gamma) + x_2 (b_2 + t b_1) - \frac{1}{2} x_4 \Xi'\right\} y_3 = 0,$$

где

$$b_2 = \frac{\beta_2 - \alpha_1}{4}, \quad b_1 = \frac{\beta_1 + \gamma_2}{4}.$$

Исключая координаты y_1, y_2, y_3 и принимая во внимание тождество $\alpha + t^2\gamma = 0$, получим инвариантное уравнение поверхности Ли в виде

$$(x_2 - \beta x_3)^2 + \alpha\gamma x_3^2 - 2\gamma x_1 x_4 - 2 b_1 x_2 x_4 + 2 x_3 x_4 (b_1\beta - b_2\gamma) +$$
$$+ \left\{\frac{\gamma\alpha_{11} - 2\alpha\gamma\beta_{12} - \alpha\gamma_{22}}{8\alpha} - \frac{\gamma}{2\alpha}(b_2)^2 + \frac{3}{2}(b_1)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\beta(\alpha\alpha' + \gamma\gamma') + 2\beta'\alpha\gamma}{2\alpha}\right\} x_4^2 = 0. \tag{4}$$

II. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРЫ КОНГРУЭНЦИЙ А. М. ВАСИЛЬЕВА В P_3

254. Конгруэнции Васильева. Так называются конгруэнции, у *которых поверхности Ли, присоединённые к фокальным поверхностям в фокусах одного луча, касаются друг друга вдоль образующей.*

Совместим ребро A_3A_4 тетраэдра с этой общей образующей двух поверхностей Ли. Поверхность (4) содержит прямую A_3A_4, если значения $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ при любом значении отношения $x_3 : x_4$ удовлетворяют уравнению (4). Внося $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и приравнивая нулю коэффициенты при степенях x_3, x_4, получим:

$$\begin{gathered} \beta^2 + \alpha\gamma = 0, \quad b_1\beta - b_2\gamma = 0, \\ \frac{\gamma\alpha_{11} - 2\alpha\gamma\beta_{12} - \alpha\gamma_{22}}{4} - \gamma(b_2)^2 + 3\alpha(b_1)^2 + \beta(\alpha\alpha' + \gamma\gamma') + 2\beta'\alpha\gamma = 0. \end{gathered} \tag{5a}$$

Аналогично, поверхность Ли второй фокальной поверхности (A_2) пройдёт через ребро A_3A_4, если будут иметь место соотношения:

$$\begin{gathered} \beta'^2 + \alpha'\gamma' = 0, \quad b_2'\beta' - b_1'\gamma' = 0, \\ \frac{\gamma'\alpha_{22}' - 2\alpha'\gamma'\beta_{12}' - \alpha'\gamma_{11}'}{4} - \gamma'(b_1')^2 + 3\alpha'(b_2')^2 + \beta'(\alpha\alpha' + \gamma\gamma') + 2\beta'\alpha'\gamma' = 0, \end{gathered} \tag{5b}$$

где

$$b_1' = \frac{\beta_1' - \alpha_2'}{4}, \qquad b_2' = \frac{\beta_2' + \gamma_1'}{4}.$$

Кроме того, поверхность Ли (4) и такая же для второй фокальной поверхности (A_2) в каждой точке $x_1 = x_2 = 0$, x_3, x_4 общей прямой A_3A_4 должны иметь общую касательную плоскость. При условии (5a), (5b) уравнения этих касательных плоскостей напишутся в виде

$$X_2 x_3 \beta + X_1 x_4 \gamma + X_2 x_4 b_1 = 0,$$

$$X_1 x_4 \beta' + X_2 x_3 \gamma' + X_1 x_3 b_2' = 0.$$

Совпадение касательных плоскостей в общей точке $x_3 : x_4$ приводит к новым условиям

$$b_1 = 0, \ b_2' = 0, \ \beta\beta' = \gamma\gamma'. \tag{5c}$$

Первые уравнения (5a), (5b) показывают, что касательные A_1A_3 и A_2A_4 поверхностей (A_1) или (A_2), пересекающие общую образующую A_3A_4 обеих поверхностей Ли, являются асимптотическими касательными, что вполне понятно, если заметить, что поверхность Ли содержит обе асимптотические касательные своей поверхности в качестве образующих первого или второго семейства. Значит, общая образующая A_3A_4 должна пересекать одну из асимптотических касательных каждой фокальной поверхности.

Возвышая в квадрат обе части последнего уравнения (5c) и исключая β, β' при помощи первых уравнений (5a), (5b), получим по сокращении на $\gamma\gamma'$:

$$\alpha\alpha' = \gamma\gamma'. \tag{5c'}$$

Следовательно, конгруэнция Васильева принадлежит к классу конгруэнций W.

Нормируя вершины, как это мы делали в § 251, мы не только получим уравнение (1c), но в силу последнего уравнения (5c) и уравнения (5c′) будем иметь такие же уравнения для α', β', γ', именно:

$$\beta = \alpha,\ \gamma = -\alpha,\ \beta' = \alpha',\ \gamma' = -\alpha'. \tag{5d}$$

С другой стороны, вторые уравнения (5a, b) и первые (5c) дают:

$$\alpha_1 - \beta_2 = 0,\ \gamma_2 + \beta_1 = 0,\ \alpha'_2 - \beta'_1 = 0,\ \gamma'_1 + \beta'_2 = 0 \tag{5e}$$

и дифференцирование уравнений (5d) по формулам (8′), (9) § 187 приводит к соотношениям

$$\begin{gathered} \omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0, \\ \omega_3^2 = \alpha(\beta_1 - \beta_2)(\omega_1^3 + \omega_2^4),\ \ \omega_4^1 = \alpha'(\beta'_2 - \beta'_1)(\omega_1^3 + \omega_2^4). \end{gathered} \tag{5e'}$$

Дифференцирование конечных уравнений (5e) по формулам (10′) § 187 приводит к соотношениям

$$\begin{gathered} 4\omega_3^1 = \Delta\alpha_1 - \Delta\beta_2, \qquad 4\omega_3^1 = \Delta\beta'_2 + \Delta\gamma'_1, \\ 4\omega_4^2 = \Delta\beta_1 + \Delta\gamma'_2, \qquad 4\omega_4^2 = \Delta\alpha'_2 - \Delta\beta'_1. \end{gathered} \tag{5f}$$

Отсюда, исключая ω_3^1, ω_4^2, разлагая по формулам (11) § 187 и сравнивая коэффициенты при формах ω_1^3, ω_2^4, придём к новым конечным уравнениям:

$$\begin{gathered} \alpha_{11} - \alpha\beta_{12} = \gamma_{11}' - \alpha'\beta'_{12},\ \ \alpha'_{22} - \alpha'\beta'_{12} = \gamma_{22} - \alpha\beta_{12}, \\ \beta_{11} + \beta_{22} + \beta'_{11} + \beta'_{22} = 0. \end{gathered} \tag{5g}$$

Последние уравнения (5a), (5b) прибавят сюда только одно соотношение

$$\alpha_{11} - \alpha\beta_{12} = -(\gamma_{22} - \alpha\beta_{12}). \tag{5h}$$

Поскольку система (5g) равносильна двум дифференциальным уравнениям

$$\Delta\alpha_1 = \Delta\beta_2 + \Delta\beta'_2 + \Delta\gamma'_1;\quad \Delta\alpha'_2 = \Delta\beta'_1 + \Delta\beta_1 + \Delta\gamma_2, \tag{6a}$$

а уравнение (5h) эквивалентно квадратичному уравнению

$$[\Delta\gamma_2 + \Delta\beta_1,\ \omega_1^3] = [\Delta\gamma'_1 + \Delta\beta'_2,\ \omega_2^4], \tag{6b}$$

то вся система, определяющая конгруэнцию Васильева, содержит, кроме уравнений Пфаффа, шесть квадратичных уравнений (10) § 187 и одно (6b) на шесть линейно независимых форм $\Delta\beta_1$, $\Delta\beta_2$, $\Delta\gamma_2$, $\Delta\beta'_1$, $\Delta\beta'_2$, $\Delta\gamma'_1$.

Однако между шестью уравнениями (10) § 187 в силу соотношений (6a) существует одна линейная зависимость, именно:

$$\begin{gathered} \{[\Delta\alpha_1\omega_1^3] - [\Delta\beta_1\omega_2^4]\} - \{[\Delta\beta_2\omega_1^3] + [\Delta\gamma_2\omega_2^4]\} - \\ - \{[\Delta\gamma'_1\omega_1^3] + [\Delta\beta'_1\omega_2^4]\} - \{[\Delta\beta'_2\omega_1^3] - [\Delta\alpha'_2\omega_2^4]\} = 0. \end{gathered}$$

Таким образом, на первом линейном элементе цепи значения шести форм $\Delta\beta_1$, $\Delta\beta_2$, $\Delta\gamma_2$ и таких же со штрихами — произвольны, на втором интегральном элементе цепи они все определяются. Цепь — не особая, с характерами $s_1 = 6$, $s_2 = 0$. Система — в инволюции и определяет конгруэнции Васильева с произволом шести функций одного аргумента.

255. Вторая конгруэнция пары Васильева. Пользуясь соотношениями (5c), (5d), (5f), мы получим для компонент ω_3^1, ω_4^2 выражения

$$\omega_3^1 = \xi\omega_1^3 - \eta\omega_2^4, \qquad \omega_4^2 = \eta\omega_1^3 - \xi\omega_2^4,$$

где

$$\xi = \frac{\alpha_{11} - \alpha\beta_{12}}{4}, \qquad \eta = \frac{\beta_{11} + \beta_{22}}{4}. \tag{7a}$$

Если нормировать вершины тетраэдра так, чтобы грассманово произведение четырёх вершин равнялось единице и, следовательно, имело место равенство $\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0$, то получим матрицу компонент в виде

$$\begin{pmatrix} \omega_1^1 & \alpha(\omega_1^3 - \omega_2^4) & \omega_1^3 & 0 \\ \alpha'(\omega_2^4 - \omega_1^3) & \omega_2^2 & 0 & \omega_2^4 \\ \xi\omega_1^3 - \eta\omega_2^4 & \alpha(\beta_1 - \beta_2)(\omega_1^3 + \omega_2^4) & -\omega_2^2 & \alpha(\omega_1^3 - \omega_2^4) \\ \alpha'(\beta'_2 - \beta'_1)(\omega_1^3 + \omega_2^4) & \eta\omega_1^3 - \xi\omega_2^4 & \alpha'(\omega_2^4 - \omega_1^3) & -\omega_1^1 \end{pmatrix}. \tag{7b}$$

Введём теперь формы

$$2\omega_1 = \omega_1^3 + \omega_2^4, \qquad 2\omega_2 = \omega_1^3 - \omega_2^4, \tag{7c}$$

которые соответствуют асимптотическим линиям фокальных поверхностей и обозначим буквами P_i точки пятимерного пространства, изображающие прямые и линейные комплексы трёхмерного пространства

$$P_0 = [12],\ P_1 = [14] - [23],\ P_2 = [14] + [23],\ P_3 = [34].$$

30 Зак. 1038. С. П. Фиников.

Мы можем записать уравнения дифференциальных перемещений репера в виде

$$
\begin{aligned}
dP_0 &= (\omega_1^1 + \omega_2^2) P_0 + \omega_1 P_1 - \omega_2 P_2,\\
dP_1 &= 2(\xi + \eta)\,\omega_2 P_0 + 2\omega_1 P_3,\\
dP_2 &= 2(\eta - \xi)\,\omega_1 P_0 + 2\omega_2 \{P_3 - 2\alpha' [13] - 2\alpha [42]\},\\
dP_3 &= -(\omega_1^1 + \omega_2^2) P_3 + \omega_2 (\xi + \eta) P_1 + \\
&\quad + \omega_1 \{(\xi - \eta) P_2 + 2\alpha' (\beta_1' - \beta_2') [13] - 2\alpha (\beta_1 - \beta_2) [42]\}\\
d[13] &= (\omega_1^1 - \omega_2^2)[13] + 2\alpha(\beta_1 - \beta_2)\,\omega_1 P_0 + 2\alpha\omega_2 P_2,\\
d[42] &= (\omega_2^2 - \omega_1^1)[42] - 2\alpha' (\beta_1' - \beta_2')\,\omega_1 P_0 + 2\alpha' \omega_2 P_2.
\end{aligned}
\tag{7d}
$$

Отсюда вытекает, что точка P_0, изображающая на гиперповерхности Плюккера Q_4^2 луч A_1A_2 конгруэнции Васильева, описывает поверхность, несущую сопряжённую сеть линий $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, которые соответствуют асимптотическим фокальных поверхностей. Мы знаем (гл. VII, § 149), что это является характерным свойством конгруэнций W. Поскольку прямая, соединяющая точки P_0 и P_1 пятимерного пространства P_5, касается поверхности (P_0) и поверхности (P_1), эта последняя тоже несёт сопряжённую сеть $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$. Касательная к линии $\omega_1 = 0$ проходит через точку P_0, касательная к линии $\omega_2 = 0$ соединяет точку P_1 с точкой P_3. Так как точка P_1 в свою очередь лежит на касательной к линии $\omega_1 = 0$ поверхности, описанной точкой P_3, то эта поверхность является преобразованием Лапласа в направлении линии $\omega_2 = 0$ поверхности (P_1). Следовательно, поверхность, описанная точкой P_3, тоже несёт сопряжённую сеть $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$. Между тем точка P_3 пятимерного пространства изображает прямую трёхмерного пространства, именно ту прямую A_3A_4, вдоль которой поверхности Ли обеих фокальных поверхностей конгруэнции (A_1A_2) касаются друг друга. Многообразие этих прямых образует конгруэнцию, образом которой служит поверхность (P_3) пятимерного пространства. Поскольку эта поверхность несёт сопряжённую сеть, конгруэнция (A_3A_4) является конгруэнцией W.

Таким образом, каждой конгруэнции Васильева присоединена вторая, описанная прямыми прикосновения поверхностей Ли, присвоенных фокальным поверхностям первой конгруэнции. В отображении Плюккера поверхность, изображающая присоединенную конгруэнцию, получается двукратным преобразованием Лапласа из поверхности, изображающей исходную конгруэнцию.

Мы сейчас докажем, что эта теорема может служить определением конгруэнции Васильева.

III. ПАРЫ ВАСИЛЬЕВА В ИХ ОТОБРАЖЕНИИ НА P_5

256. Пары конгруэнций с общим преобразованием Лапласа в P_5. Пусть A_1A_2 и A_3A_4 — прямые, описывающие две конгруэнции, которые удовлетворяют условиям теоремы, т. е. в отображении Плюккера поверхность, изображающая одну из них, является двукратным преобразованием Лапласа поверхности, изображающей другую. Выберем эти прямые за пару противоположных рёбер тетраэдра $\{A_i\}$. Точка P пятимерного пространства, которая является общим преобразованием Лапласа и для точки $P_0 = [12]$ и для точки $P_3 = [34]$, не принадлежит гиперповерхности Q_4^2, ибо всякая прямая, два фокуса которой принадлежат гиперповерхности, целиком лежит на ней и изображает в трёхмерном пространстве пучок касательных к поверхности с общей точкой касания, а фокусы прямой являются образами асимптотических касательных. Точка P, очевидно, лежит в касательных гиперплоскостях гиперповерхности Q_4^2, проведённых в её точках P_0 и P_3. Поскольку уравнение гиперповерхности в однородных координатах p^{ik} пишется в виде

$$p^{12}p^{34} + p^{13}p^{42} + p^{14}p^{23} = 0,$$

то уравнение касательной гиперплоскости напишется

$$q^{12}p^{34} + q^{34}p^{12} + q^{13}p^{42} + q^{42}p^{13} + q^{14}p^{23} + q^{23}p^{14} = 0,$$

где q^{ik} суть координаты точки касания. Так как точки P_0 и P_3 имеют только одну координату, равную единице соответственно $q^{12} = 1$ или $q^{34} = 1$, а все остальные — нули, то уравнения касательных гиперплоскостей будут $p^{34} = 0$ в точке P_0 и $p^{12} = 0$ в точке P_3. Следовательно, точка P всегда принадлежит трёхмерной плоскости, определяемой точками [13], [14], [23], [42]. Проводя через точку P прямую, всецело принадлежащую этой трёхмерной плоскости, мы пересечём гиперповерхность Q_4^2 в двух точках A и B, которые принадлежат поверхности 2-го порядка Q_2^2, высекаемой на гиперповерхности этой трёхмерной плоскостью. С другой стороны, при закреплённых прямых A_1A_2 и A_3A_4 мы можем по произволу перемещать точки A_1, A_2 по первой прямой, точки A_3, A_4 по второй. При этом точка P остаётся неподвижной, а точки [14], [23] перемещаются по поверхности Q_2^2. Следовательно, при подходящем выборе вершин A_1, A_2, A_3, A_4 на прямых A_1A_2 и A_3A_4 мы можем точки [14] и [23] совместить с произвольными точками поверхности Q_2^2, не принадлежащими одной прямолинейной образующей. Совместим их с точками A и B. Тогда точка P, расположенная на прямой AB, будет линейно выражаться только через [14], [23]. При подходящем нормировании вершин тетраэдра $\{A_i\}$ мы можем без стеснения общности положить

$$P = [14] - [23].$$

Нам теперь надо потребовать прежде всего, чтобы касательная плоскость поверхности (P) содержала точки P_0, P_3, т. е. чтобы все дифференциальные перемещения dP лежали в плоскости, определяемой точками P, P_0, P_3

$$(dPPP_0P_3)=0.$$

Поскольку

$$dP=(\omega_1^1+\omega_4^4)[14]-(\omega_2^2+\omega_3^3)[23]+(\omega_4^2+\omega_3^1)P_0+(\omega_4^3-\omega_2^1)[13]+$$
$$+(\omega_3^4-\omega_1^2)[42]+(\omega_1^3+\omega_2^4)P_3,$$

наше условие приведётся к сравнению

$$[14](\omega_1^1+\omega_4^4)-[23](\omega_2^2+\omega_3^3)+[13](\omega_4^3-\omega_2^1)+[42](\omega_3^4-\omega_1^2)\equiv 0 \pmod{[14]-[23]}.$$

Отсюда получим систему уравнений

$$\omega_1^1+\omega_4^4-\omega_2^2-\omega_3^3=0,\quad \omega_4^3-\omega_2^1=0,\quad \omega_3^4-\omega_1^2=0, \tag{8a}$$

и

$$dP=P(\omega_1^1+\omega_4^4)+(\omega_4^2+\omega_3^1)P_0+(\omega_1^3+\omega_2^4)P_3.$$

Теперь нам осталось потребовать, чтобы точки P_0 и P_3 были преобразованиями Лапласа для точки P, т. е. чтобы прямая PP_0 касалась на поверхности (P_0) линии $\omega_4^2+\omega_3^1=0$, а прямая PP_3 — на поверхности (P_3) линии $\omega_1^3+\omega_2^4=0$. Эти требования можно выразить сравнениями

$$(dP_0P_0P)\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_4^2+\omega_3^1),$$
$$(dP_3P_3P)\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_1^3+\omega_2^4)$$

или

$$[13]\omega_2^3+[42]\omega_1^4+[14]\omega_2^4-[23]\omega_1^3\equiv\omega_2^4([14]-[23]) \quad (\mathrm{mod}\ \omega_4^2+\omega_3^1),$$
$$-[13]\omega_4^1-[42]\omega_3^2+[14]\omega_3^1-[23]\omega_4^2\equiv\omega_3^1([14]-[23]) \quad (\mathrm{mod}\ \omega_1^3+\omega_2^4)$$

или равенствами

$$\begin{aligned}&[\omega_2^3,\omega_4^2+\omega_3^1]=0,\ [\omega_1^4,\omega_4^2+\omega_3^1]=0,\ [\omega_2^4-\omega_1^3,\omega_4^2+\omega_3^1]=0,\\ &[\omega_4^1,\omega_1^3+\omega_2^4]=0,\ [\omega_3^2,\omega_1^3+\omega_2^4]=0,\ [\omega_3^1-\omega_4^2,\omega_1^3+\omega_2^4]=0.\end{aligned} \tag{8b}$$

Уравнения (8a), (8b) составляют все уравнения задачи. Система замкнута: внешние дифференциалы линейных уравнений (8a) по исключении ω_3^4, ω_4^3, $\omega_3^3-\omega_4^4$ с помощью самих уравнений (8a) принимают вид

$$[\omega_1^3\ \omega_3^1]+[\omega_4^2\ \omega_2^4]=0,\ [\omega_4^1,\ \omega_1^3+\omega_2^4]-[\omega_2^3,\ \omega_4^2+\omega_3^1]=0,$$
$$[\omega_3^2,\ \omega_1^3+\omega_2^4]-[\omega_1^4,\ \omega_4^2+\omega_3^1]=0.$$

Два последних уравнения непосредственно следуют из системы (8b), а первое — в силу тождества

$$[\omega_2^4-\omega_1^3,\ \omega_4^2+\omega_3^1]+[\omega_3^1-\omega_4^2,\ \omega_1^3+\omega_2^4]=2\{[\omega_2^4\ \omega_4^2]+[\omega_3^1\ \omega_1^3]\}.$$

Характеристическая система содержит, кроме линейных форм (8a), ещё восемь форм

$$\omega_2^3,\ \omega_1^4,\ \omega_4^1,\ \omega_3^2,\ \omega_4^2-\omega_3^1,\ \omega_2^4-\omega_1^3,\ \omega_4^2+\omega_3^1,\ \omega_1^3+\omega_2^4. \tag{8c}$$

Две последние формы должны оставаться линейно независимыми на интегральном многообразии, иначе многообразие точек P образует только линию, а не поверхность. Мы можем считать, что значения этих форм определяют дифференциалы независимых переменных. Из остальных девяти характеристических форм три формы (8a) на интегральном многообразии равны нулю. Остаются первые шесть форм (8c), значения которых и определяют интегральные элементы цепи. На первом линейном элементе они произвольны, на втором — однозначно определены из билинейных уравнений, присоединённых к квадратичным уравнениям (8b). Следовательно, цепь интегральных элементов — не особая, система в инволюции с характерами $s_1=6$, $s_2=0$. Интегральное многообразие зависит от шести произвольных функций одного аргумента — тот же самый произвол, который мы нашли в предыдущем параграфе.

257. Общее решение задачи Васильева. Чтобы показать эквивалентность обеих систем (8a), (8b) и (5a) — (5d) § 254, нам надо убедиться, что выбором вторичных параметров репера, т. е. выбором вершин тетраэдра A_i на прямых A_1A_2 и A_3A_4 и нормированием аналитических точек, можно привести систему (8a), (8b) к виду (5a) — (5d). С этой целью раскрываем квадратичные уравнения (8b) по лемме Картана

$$\begin{aligned}&\omega_2^3=A(\omega_4^2+\omega_3^1),\ \ \omega_1^4=B(\omega_4^2+\omega_3^1),\ \ \omega_2^4-\omega_1^3=C(\omega_4^2+\omega_3^1),\\ &\omega_4^1=A'(\omega_2^4+\omega_1^3),\ \ \omega_3^2=B'(\omega_2^4+\omega_1^3),\ \ \omega_4^2-\omega_3^1=C'(\omega_2^4+\omega_1^3)\end{aligned} \tag{9a}$$

и определяем закон вариации коэффициентов A, B, C, ... при изменении вторичных параметров.

Внешнее дифференцирование уравнений (9a) даёт:

$$\begin{aligned}&[\Delta A,\ \omega_4^2+\omega_3^1]=0,\ [\Delta B,\ \omega_4^2+\omega_3^1]=0,\ [\Delta C,\ \omega_4^2+\omega_3^1]=0,\\ &[\Delta A',\ \omega_2^4+\omega_1^3]=0,\ [\Delta B',\ \omega_2^4+\omega_1^3]=0,\ [\Delta C',\ \omega_2^4+\omega_1^3]=0,\end{aligned} \tag{9b}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta A &= dA + A(\omega_3^3 + \omega_4^4 - 2\omega_2^2) + C\omega_2^1,\\
\Delta A' &= dA' + A'(\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_4^4) + C'\omega_2^1,\\
\Delta B &= dB + B(2\omega_4^4 - \omega_1^1 - \omega_2^2) - C\omega_1^2,\\
\Delta B' &= dB' + B'(2\omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4) - C'\omega_1^2,\\
\Delta C &= dC + 2C(\omega_4^4 - \omega_2^2) + 2A\omega_1^2 - 2B\omega_2^1,\\
\Delta C' &= dC' + 2C'(\omega_2^2 - \omega_4^4) + 2A'\omega_1^2 - 2B'\omega_2^1.
\end{aligned} \tag{9c}$$

Поскольку все формы ΔA, ΔB, ... — главные и при неподвижности пары лучей A_1A_2, A_3A_4 равны нулю, то для вариаций δA, δB, ... получаем формулы

$$\begin{aligned}
&\delta A = A(2\pi_2^2 - \pi_3^3 - \pi_4^4) - C\pi_2^1, && \delta A' = A'(2\pi_4^4 - \pi_1^1 - \pi_2^2) - C'\pi_2^1,\\
&\delta B = B(\pi_1^1 + \pi_2^2 - 2\pi_4^4) + C\pi_1^2, && \delta B' = B'(\pi_3^3 + \pi_4^4 - 2\pi_2^2) + C'\pi_1^2,\\
&\delta C = 2C(\pi_2^2 - \pi_4^4) - 2A\pi_1^2 + 2B\pi_2^1, && \delta C' = 2C'(\pi_4^4 - \pi_2^2) -\\
& && \qquad - 2A'\pi_1^2 + 2B'\pi_2^1.
\end{aligned} \tag{9d}$$

Положим все формы π_i^k равными нулю, кроме формы π_2^1. Ввиду линейной независимости вторичных форм π_i^k эти формы могут принимать любые значения, а поскольку только одна форма не равна нулю, она будет содержать только одно характеристическое переменное (характеристическая система $\pi_2^1 = 0$ вполне интегрируема и первый интеграл её можно принять за это единственное переменное). Так как и в коэффициентах и под знаком дифференциала стоит только одно переменное, мы можем дифференциальное выражение π_2^1 проинтегрировать и положить $\pi_2^1 = d\tau$. Система (9d) примет вид

$$\frac{dA}{d\tau} = -C, \quad \frac{dB}{d\tau} = 0, \quad \frac{dC}{d\tau} = 2B,$$

откуда, интегрируя, получим:

$$A = -B\tau^2 + C_1\tau + C_2, \quad C = 2B\tau - C_1, \quad B = \mathrm{const.}, \quad C_i = \mathrm{const.}$$

Если C не равно нулю, то коэффициент A существенно зависит от параметра τ и при подходящем значении будет равен нулю. Внося значение $A = 0$ в первое уравнение (9d), получим при $C \neq 0$:

$$\pi_2^1 = 0.$$

Аналогично, сохраняя только форму π_1^2 отличной от нуля и полагая $\pi_1^2 = d\sigma$, получим:

$$\frac{dB}{d\sigma} = C, \quad \frac{dC}{d\sigma} = 0,$$

откуда

$$B = C\sigma + C_3, \quad C = \mathrm{const.}, \quad C_3 = \mathrm{const.}$$

Если $C \neq 0$, то при $\sigma = -\frac{C_3}{C}$ получим $B = 0$. Внося это значение в (9d), будем иметь:

$$\pi_1^2 = 0.$$

Поскольку же теперь имеем по формулам (9a)

$$\omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^3 = 0,$$

тетраэдр $\{A_i\}$ будет тетраэдром 1-го порядка для конгруэнции (A_1A_2). Первые две формулы (9c) дают $\Delta A = C\omega_2^1$, $\Delta B = -C\omega_1^2$. Внося это в первые уравнения (9b) и заменяя $C(\omega_4^2 + \omega_3^1)$ по формулам (9a), получим:

$$[\omega_1^2, \omega_1^3 - \omega_2^4] = 0, \quad [\omega_2^1, \omega_2^4 - \omega_1^3] = 0,$$

откуда, принимая во внимание уравнение (8a), получим, как в таблице (7b) § 255

$$\omega_1^2 = \omega_3^1 = \alpha(\omega_1^3 - \omega_2^4), \quad \omega_2^1 = \omega_4^3 = \alpha'(\omega_2^4 - \omega_1^3).$$

Если же обозначить

$$C = -\frac{1}{\xi + \eta}, \quad C' = \eta - \xi, \quad B' = \alpha(\beta_1 - \beta_2), \quad A' = \alpha'(\beta_2' - \beta_1') \tag{9e}$$

и положить

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0,$$

то уравнения (9a) дадут в точности матрицу компонент (7b). Из неё внешним дифференцированием и применением общих формул (7) § 186, (8), (9), (10), (11), (11′), (12) § 187 получим уравнения (5a) — (5d) § 254, (7a) § 255.

Таким образом, конгруэнция Васильева вместе с присоединённой конгруэнцией образующих соприкосновения поверхностей Ли, присвоенных её фокальным поверхностям, составляет общий случай ($C \neq 0$) пары конгруэнций W, изображающихся на гиперповерхности Плюккера поверхностями, каждая из которых является преобразованием Лапласа второго порядка от другой.

258. Линейчатые образы, присоединённые к паре Васильева. Ввиду полной симметрии уравнений (8a), (8b) относительно обеих конгруэнций вторая конгруэнция (A_3A_4), описанная общей образующей поверхностей Ли, является тоже конгруэнцией Васильева, поверхности Ли её фокальных поверхностей касаются вдоль общей образующей и эта образующая совпадает с лучом A_1A_2 первой конгруэнции.

Замечательное соотношение между конгруэнциями пары в отображении Плюккера должно иметь следствием соотношения между конгруэнциями и в трёхмерном пространстве. При раскрытии этих свойств мы должны итти по пути истолкования последовательных преобразований Лапласа. Линия $\omega_2 = 0$ на поверхности (P_0) изображает лучи конгруэнции (A_1A_2) вдоль пары соответствующих асимптотических линий фокальных поверхностей. Они образуют линейчатую поверхность конгруэнции, которую принято называть *асимптотической* линейчатой поверхностью конгруэнции W. Мы обозначим её буквой L_1.

Уравнения (7d) § 255 дают для дифференцирования соответственно в направлении $\omega_2 = 0$ или $\omega_1 = 0$ формулы

$$dP_3 \equiv -(\omega_1^1 + \omega_2^2) P_3 + (\xi + \eta)\,\omega_2 P_1 \pmod{\omega_1},$$

$$\begin{aligned} dP_1 &\equiv 2(\xi+\eta)\,\omega_2 P_0, & dP_1 &\equiv 2\omega_1 P_3 \pmod{\omega_2},\\ dP_0 &\equiv (\omega_1^1+\omega_2^2) P_0 - \omega_2 P_2, & dP_0 &\equiv (\omega_1^1+\omega_2^2) P_0 + \omega_1 P_1,\\ dP_2 &\equiv 2\omega_2 \{P_3 - 2\alpha'[13] - 2\alpha[42]\}, & dP_2 &\equiv 2(\eta-\xi)\,\omega_1 P_0. \end{aligned}$$

Плоскость

$$(P_0 dP_0 d^2P_0) \equiv (P_0P_1P_3) \pmod{\omega_2}$$

является соприкасающейся плоскостью кривой $\omega_2 = 0$ на поверхности (P_0). Она пересекает гиперповерхность Q_4^2 по кривой 2-го порядка, которая служит образом линейной системы прямых (одно семейство образующих поверхности 2-го порядка) соприкасающейся системы для асимптотической поверхности L_1 первой конгруэнции.

Ту же плоскость мы получим:

$$(P_3 dP_3 d^2P_3) \equiv (P_3P_1P_0) \pmod{\omega_1},$$

если будем рассматривать соприкасающуюся плоскость линии $\omega_1 = 0$ на поверхности (P_3). Это вполне понятно: соприкасающаяся плоскость ребра возврата развёртывающейся поверхности конгруэнции является касательной плоскостью развёртывающейся поверхности вдоль луча и совпадает с касательной плоскостью фокальной поверхности во втором фокусе. Следовательно, соприкасающаяся плоскость линии $\omega_2 = 0$ на поверхности (P_0) так же, как соприкасающаяся плоскость линии $\omega_1 = 0$ на поверхности (P_3), должны совпадать с касательной плоскостью их общего преобразования Лапласа поверхности (P_1), а это означает, что асимптотическая поверхность L_1 первой конгру-

энции и асимптотическая поверхность L_2 второй имеют общую соприкасающуюся поверхность 2-го порядка Q.

Таким же образом можно рассмотреть трёхмерную соприкасающуюся плоскость линии $\omega_1 = 0$ поверхности (P_3). Она определяется точками

$$(P_3 dP_3 d^2P_3 d^3P_3) \equiv (P_3P_1P_0P_2) \pmod{\omega_1}.$$

Эта трёхмерная плоскость пересекает гиперповерхность Q_4^2 по поверхности 2-го порядка, которая является образом линейной конгруэнции, соприкасающейся с асимптотической поверхностью L_2 второй конгруэнции. Прямая

$$q = q^{ik}[ik], \qquad \begin{array}{c}\text{суммирование по сочетаниям}\\ i, k = 1, 2, 3, 4,\end{array}$$

пересекает все лучи этой конгруэнции (и является её директрисой), если находится в инволюции с четырьмя комплексами базиса, т. е. полярно сопряжена относительно гиперповерхности Q_4^2 четырём точкам P_3, P_1, P_0, P_2

$$\{[34]\,q\} = 0, \quad \{[12]\,q\} = 0, \quad \{[14]\,q\} = 0, \quad \{[23]\,q\} = 0.$$

Отсюда вытекает, что точка q в P_5 имеет компоненты только по вершинам [13] и [42] шестигранника

$$q = q^{13}[13] + q^{42}[42].$$

Так как точка q изображает прямую, следовательно, лежит на гиперповерхности Q_4^2, то её координаты удовлетворяют уравнению гиперповерхности, т. е.

$$q^{13}q^{42} = 0.$$

Отсюда две возможности, которые соответствуют двум директрисам линейной конгруэнции

$$q_1 = [13], \quad q_2 = [42].$$

Мы видели, что рёбра A_1A_3 и A_2A_4 являются асимптотическими касательными $\omega_2 = 0$ фокальных поверхностей первой конгруэнции. Мы теперь получаем, что они же служат директрисами соприкасающейся линейной конгруэнции линейчатой поверхности L_2 второй конгруэнции. Директриса пересекает все лучи линейной конгруэнции, а соприкасающаяся линейная конгруэнция содержит четыре бесконечно близких луча поверхности L_2, следовательно, прямые q_1 и q_2 имеют касание 3-го порядка с поверхностью L_2 и носят название *флекнодальных* касательных.

Таким образом, *асимптотические касательные $\omega_2 = 0$ фокальной поверхности первой конгруэнции служат флекнодальными касательными асимптотической линейчатой поверхности $\omega_1 = 0$ второй конгруэнции пары.*

Наконец, четырёхмерная соприкасающаяся плоскость к линии $\omega_1 = 0$ поверхности (P_3)

$$(P_3\, dP_3\, d^2P_3\, d^3P_3\, d^4P_3) \equiv (P_3P_1P_0P_2\, dP_2) \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_1),$$

очевидно, совпадает с соприкасающейся четырёхмерной плоскостью поверхности (P_0). Действительно, такая плоскость должна содержать первые два дифференциала d_1P_0 в направлении дифференцирования $\omega_1 = 0$ и два дифференциала d_2P_0 в направлении $\omega_2 = 0$. Она определяется точками

$$(P_0\, d_1P_0\, d_2P_0\, d_1^2P_0\, d_2^2P_0) = (P_0P_2P_1\, dP_2P_3),$$

т. е. теми же точками, что и первая плоскость.

Пересечение такой плоскости с гиперповерхностью Q_4^2 содержит трёхмерное многообразие точек, а каждая точка является образом прямой нашего пространства. Следовательно, совокупность их образует *линейный комплекс*, который *одновремённо является касательным 2-го порядка для первой конгруэнции* (A_1A_2) *и соприкасающимся 4-го порядка с асимптотической линейчатой поверхностью* L_2 *второй конгруэнции.*

IV. ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ КОНГРУЭНЦИИ ВАСИЛЬЕВА

259. Пара Васильева с одной параболической конгруэнцией. При доказательстве теоремы о совпадении двух определений конгруэнции Васильева: из касания поверхностей 2-го порядка Ли, присоединённых к фокальным поверхностям, и из наличия общего преобразования Лапласа в изображении пары конгруэнций W на гиперповерхности Q_4^2 — мы исключили случай обращения в нуль коэффициента C. Теперь мы перейдём к исследованию его. При этом мы должны рассматривать одновременное обращение в нуль B и C: если A и B не равны нулю одновременно, то всегда можно привести C к нулю за счёт формы π_1^2 или π_2^1, как это показывает система (9d) § 257.

Будем предполагать, что B и C одновременно равняются нулю. Внося эти значения в уравнения (9d) левого столбца, получим:

$$\delta \ln A = 2\pi_2^2 - \pi_3^3 - \pi_4^1, \quad 2A\pi_1^2 = 0.$$

Если $A \neq 0$, то $\pi_1^2 = 0$. Если $C' \neq 0$, то за счёт формы π_2^1 можно привести A' к нулю, именно: полагая все π_i^k равными нулю, кроме $\pi_2^1 = d\sigma$, будем иметь:

$$\frac{dA'}{d\sigma} = -C', \quad \frac{dC'}{d\sigma} = 2B', \quad \frac{dB'}{d\sigma} = 0,$$

откуда

$$A' = -B'\sigma^2 + C_1\sigma + C_2, \quad C_1, C_2 = \text{const.}, \quad B' = \text{const.}$$

и при подходящем значении параметра σ коэффициент A' обратится в нуль.

Система (9a) § 257 даёт теперь:

$$\omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^4 = \omega_1^3, \quad \omega_4^1 = 0. \qquad (10)$$

Поверхность (A_1) имеет касательной плоскостью $A_1A_2A_3$, ибо компонента дифференциала dA_1 по точке A_4 равна нулю и все дифференциальные перемещения dA_1 будут лежать в этой плоскости. Точно так же плоскость $A_2A_3A_4$ касается поверхности (A_4). Отсюда A_1 — фокус луча A_1A_2, а точка A_4 — фокус луча A_3A_4. На этом сходство кончается: луч A_3A_4 имеет второй фокус $F = C'A_1 - B'A_4$, ибо поскольку теперь

$$\omega_4^1 = 0, \quad C'\omega_3^2 - B'\omega_1^2 = -B'\omega_3^1,$$

то

$$dF = \theta A_3 + \theta' A_4 + \omega_3^1 (C'A_1 - B'A_2),$$

где θ, θ' — некоторые линейные формы. Следовательно, луч A_3A_4 лежит в касательной плоскости поверхности (F). Между тем точка A_1 — единственный фокус луча A_1A_2. Действительно, асимптотические линии поверхности (A_1) определяются уравнением

$$(d^2A_1A_1A_2A_3) = 0,$$

или

$$\omega_1^2\omega_2^4 + \omega_1^3\omega_3^4 = 0,$$

или в силу (8a) § 256, (10)

$$\omega_1^2\omega_1^3 = 0,$$

т. е. асимптотическими касательными служат рёбра A_1A_2, A_1A_3. Конгруэнция (A_1A_2) — параболическая.

Пара, содержащая одну параболическую конгруэнцию, определяется линейными дифференциальными уравнениями (8a), (9a) и квадратичными (9b), если сюда присоединить конечные уравнения

$$B = 0, \quad C = 0, \quad A' = 0.$$

По формулам (9c) мы получаем значения форм

$$\Delta B = 0, \quad \Delta C = 2A\omega_1^2, \quad \Delta A' = C'\omega_2^1.$$

Следовательно, второе уравнение (9b) обращается в тождество; вместо dC, dA' появляются новые формы характеристической системы ω_1^2, ω_2^1.

Система остаётся в инволюции, но поскольку число квадратичных уравнений сократилось до $s_1 = 5$, интегральное многообразие будет зависеть от пяти функций одного аргумента.

Асимптотическая линейчатая поверхность L_1 конгруэнции (A_1A_2) теперь совпадает с линейчатой поверхностью, образованной касательными к асимптотическим $\omega_1^3=0$ в точках пересечения с одной асимптотической $\omega_1^2=0$. Её соприкасающаяся линейчатая поверхность 2-го порядка является поверхностью 2-го порядка Ли, присоединённой к поверхности (A_1). Эта поверхность Ли и является соприкасающейся к асимптотической линейчатой поверхности L_2 конгруэнции (A_3A_4).

260. Огибающая соприкасающихся поверхностей 2-го порядка асимптотической поверхности конгруэнции. Чтобы дать геометрическое построение луча A_3A_4, присоединённого к параболической конгруэнции (A_1A_2) и вместе с тем выделить параболические конгруэнции Васильева, нам придётся, поскольку первоначальное определение через касание поверхностей Ли отпадает, обратиться к отысканию характеристик общей соприкасающейся поверхности 2-го порядка Q для линейчатых поверхностей L_1 первой конгруэнции и L_2 второй (которая для параболической конгруэнции обращается в поверхность Ли её фокальной поверхности).

Огибающая однопараметрического семейства поверхностей 2-го порядка имеет характеристикой пространственную кривую 4-го порядка. Поверхности 2-го порядка Ли обладают замечательным свойством: характеристика поверхности Ли при движении по асимптотическим направлениям поверхности, к которой она присоединена, распадается на четыре прямых, состоящих из дважды взятой асимптотической касательной, которая, конечно, принадлежит поверхности 2-го порядка Ли, и двух её образующих другого семейства (§ 158). Это распространяется и на поверхности Q, которые играют такую важную роль в теории пар Васильева.

Поверхность Q можно определить как пересечение трёх линейных комплексов $P_3=[34]$, $P_0=[12]$ и $P_1=[14]-[23]$. Обозначая буквой q текущую прямую комплекса, мы запишем уравнения поверхности Q в виде:

$$\{[12]\,q\}=0,\ \{[34]\,q\}=0,\ \{[14]-[23],\,q\}=0. \tag{11a}$$

Чтобы получить её характеристику, надо присоединить сюда производные в направлении асимптотической линии или дифференциалы по модулю ω_1 или ω_2. Пользуясь формулами (8a), (9a), получим:

$$\begin{aligned} d\,[12]&=(\omega_1^1+\omega_2^2)[12]+(\omega_4^2+\omega_3^1)\Big\{A\,[13]-B\,[24]+\\ &\qquad+C\,\frac{[14]+[23]}{2}\Big\}+(\omega_2^4+\omega_1^3)\,\frac{[14]-[23]}{2},\\ d\,[34]&=-(\omega_1^1+\omega_2^2)[34]+(\omega_4^2+\omega_3^1)\,\frac{[14]-[23]}{2}-\\ &\qquad-(\omega_2^4+\omega_1^3)\Big\{A'\,[13]-B'\,[24]+C'\,\frac{[14]+[23]}{2}\Big\},\\ d\,([14]-[23])&=([14]-[23])(\omega_1^1+\omega_4^4)+(\omega_4^2+\omega_3^1)[12]+\\ &\qquad+(\omega_2^4+\omega_1^3)[34]. \end{aligned}$$

Следовательно, при дифференцировании вдоль линии $\omega_2^4+\omega_1^3=0$ к уравнениям (11a) присоединится только одно уравнение

$$\Big\{A\,[13]-B\,[24]+C\,\frac{[14]+[23]}{2},\ q\Big\}=0, \tag{11b}$$

при дифференцировании вдоль линии $\omega_4^2+\omega_3^1=0$ — одно уравнение

$$\Big\{A'\,[13]-B'\,[24]+C'\,\frac{[14]+[23]}{2},\ q\Big\}=0. \tag{11c}$$

Если к уравнениям (11a), (11b) присоединить уравнение Плюккера, то система определит пару прямых с координатами

$$\begin{gathered} q^{12}=0,\ q^{34}=0,\ q^{14}=q^{23},\ Aq^{42}+Bq^{13}+Cq^{14}=0,\\ (q^{14})^2+q^{13}q^{42}=0. \end{gathered} \tag{12a}$$

Точно так же уравнения (11a), (11c) вместе с уравнением Плюккера определяют пару прямых

$$\begin{gathered} q^{12}=0,\ \ q^{34}=0,\ q^{14}=q^{23},\ \ A'q^{42}+B'q^{13}+C'q^{14}=0,\\ (q^{14})^2+q^{13}q^{42}=0. \end{gathered} \tag{12b}$$

Прямые (12a), (12b) составляют характеристику линейчатой поверхности (11a) в пространстве прямых. Если рассматривать поверхность 2-го порядка Q как образ пространства точек, то эта поверхность несёт линейные системы прямых (два семейства прямолинейных образующих) и характеристика поверхности Q будет складываться из характеристики первой и второй линейной системы в пространстве прямых.

Вторая линейная система поверхности Q получится, если искать прямые, пересекающие три прямые линейной системы (11a), а так как условие пересечения прямых записывается обращением в нуль полярной формы от квадратичной формы $q^{12}q^{34}+q^{13}q^{42}+q^{14}q^{23}$, то сопряжённая линейная система является пересечением линейных комплексов, изображённых в P_5 пересечением полярных гиперплоскостей для полюсов $P_0=[12]$, $P_3=[34]$ и $P_1=[14]-[23]$. Это пересечение есть плоскость, определяемая уравнениями $q^{34}=0$, $q^{12}=0$, $q^{23}=q^{14}$; она содержит линейно независимые точки [13], [42], $[14]+[23]$. Следовательно, вторая линейная система прямых определяется уравнениями

$$\{[13]\,q\}=0,\ \ \{[42]\,q\}=0,\ \ \{[14]+[23],\ q\}=0. \tag{13a}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} d\,[13]&=(\omega_1^1+\omega_3^3)[13]+\omega_1^2([14]+[23])-B(\omega_4^2+\omega_3^1)[34]+\\ &\qquad+B'(\omega_2^4+\omega_1^3)[12],\\ d\,[42]&=(\omega_2^2+\omega_4^4)[42]-\omega_2^1([14]+[23])-A(\omega_4^2+\omega_3^1)[34]+\\ &\qquad+A'(\omega_2^4+\omega_1^3)[12],\\ d\,([14]+[23])&=([14]+[23])(\omega_1^1+\omega_4^4)+2\omega_2^1[13]-2\omega_1^2[42]-\\ &\qquad-C(\omega_4^2+\omega_3^1)[34]+C'(\omega_2^4+\omega_1^3)[12], \end{aligned}$$

при дифференцировании вдоль $\omega_2^4 + \omega_1^3 = 0$ к системе (13a) прибавится уравнение

$$\{[34]\,q\} = 0, \tag{13b}$$

при дифференцировании вдоль $\omega_4^2 + \omega_3^1 = 0$ — уравнение

$$\{[12]\,q\} = 0. \tag{13c}$$

Система (13a), (13b) определяет дважды взятую прямую [12], система (13a), (13c) — дважды взятую прямую [34].

Объединяя характеристики первой и второй линейных систем поверхности 2-го порядка Q, мы получаем её полную характеристику.

261. Характеристика поверхности Q для общей пары Васильева. В общем случае пары Васильева после приведения коэффициентов A и B к нулю выбором тетраэдра $\{A_i\}$ система (12a) примет вид

$$q^{12} = 0, \quad q^{34} = 0, \quad q^{14} = 0, \quad q^{23} = 0, \quad q^{13}q^{42} = 0$$

и будет определять рёбра тетраэдра [13] и [24], т. е. асимптотические касательные фокальных поверхностей первой конгруэнции, которые в то же время служат флекнодальными касательными линейчатой асимптотической поверхности L_2 второй конгруэнции. В силу полной симметрии пары то же следует заключить и относительно прямых (12b), поменяв местами первую и вторую конгруэнции.

Таким образом, в общем случае пары Васильева характеристика соприкасающейся поверхности 2-го порядка Q при движении вдоль асимптотической линейчатой поверхности $\omega_2^4 + \omega_1^3 = 0$ состоит из дважды взятого луча первой конгруэнции [12] и тех асимптотических касательных её фокальных поверхностей, которые служат флекнодальными касательными соответствующей асимптотической поверхности второй конгруэнции; при движении вдоль асимптотической поверхности $\omega_2^4 - \omega_1^3 = 0$ — из пары флекнодальных касательных этой поверхности первой конгруэнции и дважды взятого луча второй конгруэнции.

Как известно, характеристики различных однопараметрических семейств, высекаемых из одного семейства поверхностей с двумя параметрами, на каждой поверхности семейства образуют пучок линий, центрами которого служат характеристические точки двупараметрического семейства. Характеристики описывают огибающие однопараметрических семейств, характеристические точки — огибающую двупараметрического семейства поверхностей. Все эти поверхности касаются друг друга в каждом центре пучка характеристик.

Нетрудно заметить, что в общем случае пары Васильева характеристики по двум направлениям на каждой поверхности Q пересекаются только в четырёх точках — в фокусах лучей [12] и [34]. Каждая точка должна считаться дважды, ибо получена пересечением дважды взятой прямой [12] или [34] с флекнодальными касательными. Прямые, составляющие каждую характеристику, касаются фокальных поверхностей. Конгруэнции прямых [12] или [34] естественно имеют по две полости огибающей в качестве своих фокальных поверхностей. Остальные четыре прямых (флекнодальные касательные), являясь асимптотическими касательными, описывают параболические конгруэнции с одной из четырёх полостей огибающей в качестве своей единственной фокальной поверхности.

262. Огибающая поверхностей Q в случае пары с одной параболической конгруэнцией. В особом случае пары Васильева, когда коэффициенты B, C равны нулю (и A' приведено к нулю выбором репера), пара прямых (12a) совпадает в дважды взятую асимптотическую касательную [13] единственной фокальной поверхности параболической конгруэнции ([12]); другая пара прямых остаётся не совпадающей

$$q_1' = [42], \quad q_2' = [14] + [23] + \frac{B'}{C'}[42] - \frac{C'}{B'}[13] =$$
$$= -\frac{[C'A_1 - B'A_2,\ C'A_3 - B'A_4]}{B'C'}.$$

Это — флекнодальные касательные асимптотической линейчатой поверхности $\omega_2^4 + \omega_1^3 = 0$ параболической конгруэнции ([12]), которые проходят через фокусы A_4 и $C'A_3 - B'A_4$ второй конгруэнции ([34]) и служат асимптотическими касательными этих фокальных поверхностей.

Центры пучка характеристик сведутся к трём точкам: фокусам A_4 и $C'A_3 - B'A_4$ второй конгруэнции, каждый из которых считается дважды, и единственному фокусу A_1 первой конгруэнции, который надо считать четырежды.

Все прямые обеих характеристик описывают конгруэнции, фокальные поверхности которых составляются из этих трёх полостей огибающей поверхности 2-го порядка Q. Прямые [12] и [13] описывают параболические конгруэнции с общей фокальной поверхностью (A_1). Прямые $q_1' = [42]$ и $q_2' = [C'A_1 - B'A_2,\ C'A_3 - B'A_4]$ тоже описывают параболические конгруэнции, но с различными фокальными поверхностями: у первой конгруэнции поверхность (A_4), у второй — $(C'A_3 - B'A_4)$. Наконец, конгруэнция ([34]) — гиперболическая с фокальными поверхностями (A_4) и $(C'A_3 - B'A_4)$.

Следует заметить, что в рассматриваемом случае соприкасающаяся поверхность 2-го порядка Q является поверхностью Ли единственной фокальной поверхности (A_1) конгруэнции ([12]) и совпадение четырёх характеристических точек в одну точку касания поверхности (A_1) с её поверхностью Ли является общим фактом в теории огибающих поверхностей Ли. Иначе дело обстоит с двумя другими характеристическими точками. Для произвольной поверхности S огибающая поверхностей Ли состоит из пяти полостей: сама поверхность S, считаемая четырежды, и ещё четыре полости S_i (асимптотическим линиям поверхности S соответствует распадение характеристики поверхности Ли на четвёрку прямых, из которых одна пара всегда совпадает с одной из асимптотических касательных поверхности S. Две другие пары описывают четыре гиперболических конгруэнции, имеющие фокальными поверхностями поверхности S_i, таким образом, что четыре луча их образуют косой четыреугольник с фокусами в вершинах его.)

Параболическая конгруэнция Васильева замечательна тем, что огибающая поверхностей Ли её единственной фокальной поверхности состоит только из трёх полостей. Иначе говоря, четыре простых характеристических точки поверхности Ли попарно совпадают. Одна пара противоположных сторон косого четыреугольника с вершинами в характеристических точках совпадает и описывает гиперболическую конгруэнцию, которая вместе с исходной параболической конгруэнцией образует пару Васильева, а две другие стороны описывают параболические конгруэнции, совпадая с привилегированными асимптотическими касательными фокальных поверхностей гиперболической конгруэнции.

263. Новая характеристика конгруэнции Васильева. Мы можем теперь дать новую характеристику конгруэнции Васильева и различных специальных случаев её.

Рассмотрим произвольную конгруэнцию W. Асимптотические линии на фокальных поверхностях соответствуют и каждой паре соответствующих асимптотических отвечает асимптотическая линейчатая поверхность конгруэнции L_1 или L_2, образующие которой принадлежат конгруэнции и пересекают на фокальных поверхностях асимптотические линии выбранной пары.

Каждая из этих асимптотических поверхностей L_1 или L_2 на каждой образующей имеет две, вообще различных флекнодальных касательных. Следовательно, каждый луч, скажем луч [12] произвольной конгруэнции W, пересекает четыре флекнодальных касательных асимптотических поверхностей L_1 и L_2, проходящих через этот луч. Они описывают четыре флекнодальные конгруэнции, присоединённые к конгруэнции [12]. Они, естественно, делятся на две пары: флекнодальные конгруэнции первого семейства асимптотических поверхностей L_1 и второго L_2. Эти флекнодальные конгруэнции вообще будут гиперболическими (или эллиптическими, если их фокусы мнимы).

Если одна из четырёх флекнодальных конгруэнций, присоединённых к конгруэнции W, параболическая, то и другая флекнодальная конгруэнция той же пары, т. е. принадлежащая тому же семейству асимптотических L_1 — тоже параболическая. Конгруэнция W, к которой они присоединены, есть конгруэнция Васильева, и прямая, соединяющая фокусы параболических конгруэнций, описывает вторую конгруэнцию пары Васильева.

Действительно, мы видели, что флекнодальные касательные асимптотической линейчатой поверхности L_1 конгруэнции W являются характеристиками соприкасающихся поверхностей 2-го порядка Q.

Их фокусы служат характеристическими точками 2-го порядка. Они являются точками пересечения двух пар образующих поверхности Q. Если фокусы одной флекнодальной касательной совпадают, то совпадает одна пара образующих поверхности Q, следовательно, совпадают фокусы и другой флекнодальной касательной, высекаемые на ней образующими этой пары. Флекнодальные касательные становятся асимптотическими касательными своих фокальных поверхностей, а прямая, соединяющая их фокусы (образующая второго семейства поверхности Q), описывает теперь конгруэнцию W и флекнодальные касательные поверхности L_1 первой конгруэнции служат асимптотическими касательными фокальных поверхностей второй конгруэнции. Мы имеем пару Васильева.

Параболическая конгруэнция — всегда конгруэнция W, ибо при совпадении фокальных поверхностей их асимптотические тоже совпадают. Она содержит только одно семейство асимптотических поверхностей.

Если флекнодальные конгруэнции параболической конгруэнции K — параболические, то конгруэнция K есть конгруэнция Васильева, и вторая конгруэнция пары описывается прямыми, соединяющими фокусы флекнодальных касательных.

Конгруэнция Васильева, которая входит в пару с параболической конгруэнцией, характеризуется совпадением флекнодальных конгруэнций, присвоенных одному семейству её асимптотических линейчатых поверхностей.

Наконец, если совпадают две флекнодальные конгруэнции, присоединённые к параболической конгруэнции K, и эта совпавшая конгруэнция — параболическая, то асимптотические касательные второго семейства её фокальной поверхности описывают параболическую конгруэнцию K', которая вместе с конгруэнцией K образует дважды вырожденную пару Васильева.

Если (F) и (F') — фокальные поверхности конгруэнций K и K', то соприкасающиеся поверхности 2-го порядка Q будут служить поверхностями Ли и для поверхности (F) и для поверхности (F'), которые, таким образом, составляют пару поверхностей с общими поверхностями Ли.

264. Задача Бадальяна. Уравнение поверхности Ли, которое мы получили в начале этой главы, находит новое приложение в задаче Бадальяна. В теории поверхностей проективного пространства существует основное проективное соответствие между прямыми связки с центром в точке поверхности и прямыми плоского поля, принадлежащего касательной плоскости. Это проективное соответствие определяется полярным соответствием относительно любой соприкасающейся поверхности 2-го порядка Дарбу, в том числе относительно поверхности 2-го порядка Ли.

Бадальян поставил задачу: определить конгруэнцию, у которой фокальные поверхности обладают одной общей парой прямых, полярно сопряжённых относительно поверхностей Дарбу.

Так как первая прямая пары должна проходить через точку поверхности, например, через фокус A_1 первой фокальной поверхности (A_1), а вторая должна лежать в её касательной плоскости $A_1A_2A_3$ и по условию задачи прямые той же пары так же ведут себя относительно второй фокальной поверхности (A_2), то надо допустить, что прямая, проходящая через точку A_1, в то же время лежит в касательной плоскости $A_1A_2A_4$ второй фокальной поверхности, а прямая, расположенная в плоскости $A_1A_2A_3$, проходит через точку A_2.

Выбирая подходящим образом тетраэдр 1-го порядка искомой конгруэнции, мы можем предположить, что первая прямая служит ребром A_1A_4, а вторая — ребром A_2A_3 тетраэдра. Нам надо поставить требование, чтобы эти рёбра были сопряжены в полярном соответствии и первой и второй поверхности.

Если

$$a_{ik}x^ix^k = 0$$

есть уравнение поверхности Ли первой фокальной поверхности в координатах относительно тетраэдра $\{A_i\}$, то полярные плоскости точек A_1 и A_4 определяются уравнениями

$$a_{1k}x^k = 0, \quad a_{4k}x^k = 0.$$

Если прямые A_1A_4 и A_2A_3 полярно сопряжены, то эти плоскости должны проходить через прямую A_2A_3. Отсюда условия

$$a_{12} = 0, \quad a_{13} = 0, \quad a_{24} = 0, \quad a_{34} = 0$$

и такие же для коэффициентов уравнения поверхности 2-го порядка Ли второй фокальной поверхности.

Обращаясь к инвариантному уравнению поверхности Ли (4) § 253, напишем первую серию наших уравнений в виде

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 0$$

или

$$\beta_1 + \gamma_2 = 0, \quad \beta_2 - \alpha_1 = 0, \tag{14a}$$

а вторая серия пишется по аналогии обычной заменой указателей $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\beta_2' + \gamma_1' = 0, \quad \beta_1' - \alpha_2' = 0. \tag{14a$'$}$$

Эти уравнения эквивалентны двум равенствам дифференциальных форм

$$\Delta\alpha - \Delta\gamma = 0, \quad \Delta\alpha' - \Delta\gamma' = 0, \tag{14b}$$

или

$$d\ln\frac{\alpha}{\gamma} = 2(\omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4),$$

$$d\ln\frac{\alpha'}{\gamma'} = 2(\omega_1^1 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_3^3),$$

откуда, складывая, получим:

$$d\ln\frac{\alpha\alpha'}{\gamma\gamma'} = 0$$

и

$$I = \frac{\alpha\alpha'}{\gamma\gamma'} = \text{const}. \tag{14c}$$

Обратно, если инвариант I — постоянен, то, дифференцируя, получим:

$$\Delta\alpha + \Delta\alpha' - \Delta\gamma - \Delta\gamma' = 0. \tag{14c$'$}$$

Поскольку по формулам (22) § 194 имеем:

$$\delta(\Delta\alpha - \Delta\gamma) = -4(\omega_1^3\pi_3^1 - \omega_2^4\pi_4^2),$$

то выбором вторичных параметров, точнее, выбором точки A_3 на ребре A_1A_3 и точки A_4 на ребре A_2A_4 можно привести разность $\Delta\alpha - \Delta\gamma$ к нулю, а тогда в силу соотношения (14c′) получим и второе уравнение (14b) и рёбра A_1A_4 и A_2A_3 будут полярно сопряжены в полярных соответствиях и первой и второй фокальной поверхности.

Следовательно, *постоянство простейшего скалярного инварианта конгруэнции есть условие существования у обеих фокальных поверхностей общей пары полярно сопряжённых прямых.*

265. Литературные указания. Конгруэнции Васильева даны этим автором в его дипломной работе при окончании Университета. Задача Бадальяна [1] составила предмет кандидатской диссертации этого автора.

ГЛАВА ТРИНАДЦАТАЯ

ИЗГИБАНИЕ КОНГРУЭНЦИИ

I. ПРОЕКТИВНОЕ ИЗГИБАНИЕ КОНГРУЭНЦИИ

266. Понятие изгибания конгруэнции. В теории поверхностей евклидова пространства большое место занимает теория изгибания поверхности. Она даёт хорошее истолкование внутренней (римановой) геометрии поверхности, как геометрии, общей всем налагающимся поверхностям. Красивый образ гнущейся тонкой оболочки несомненно много содействовал развитию этого направления. Поэтому естественно, что в проективно-дифференциальной теории поверхностей была поставлена задача перенести понятие изгибания в геометрию этой фундаментальной группы.

Наметились три пути такого обобщения. Наиболее простой и естественный тот, который был предложен в последнее время Г. Ф Лаптевым: называть изгибанием поверхности (или любого многообразия) такое преобразование её, при котором сохраняется её внутренняя геометрия. Основная трудность здесь заключается в определении того, что следует называть внутренней геометрией поверхности.

Во всяком кривом пространстве (римановом пространстве, пространстве аффинной, проективной, конформной связности и т. д.) мы присоединяем к каждой точке клейновское пространство (пространство с фундаментальной группой). Геометрия этого кривого пространства определяется его связностью, т. е. законом соответствия, устанавливаемого между точками клейновских пространств, присоединённых к паре дифференциально близких точек кривого пространства. Это соответствие должно быть преобразованием фундаментальной группы клейновского пространства.

Можно установить ещё некоторые общие свойства, которыми должно обладать такое отображение, например, при отображении пространства, присоединённого к точке M_1, на пространство, присоединённое к дифференциально близкой точке M_2, точка M_1 должна отображаться в точку M'_1 второго пространства, дифференциально близкую к точке M_2, и т. д. В остальном закон связности остаётся произвольным.

Если рассматриваемое кривое пространство $\mathfrak{R}$ осуществляет внутреннюю геометрию многообразия $\mathfrak{M}$, вложенного в пространство $\mathscr{H}$, то связность пространства $\mathfrak{R}$ должна определяться связностью окружающего пространства $\mathscr{H}$.

Так, в геометрии двумерной поверхности S, погружённой в трёхмерное евклидово пространство E_3, к каждой точке присоединено клейновское (теперь евклидово) двумерное пространство, осуществляемое касательной плоскостью поверхности S, проведённой в рассматриваемой точке. Связность риманова пространства R_2, определяющего внутреннюю геометрию поверхности S, определяется законом соответствия между точками касательных плоскостей, проведённых в двух дифференциально близких точках поверхности M_1 и M_2. Этот закон соответствия определяется ортогональным проектированием прямыми, параллельными нормали к поверхности в точке M_1, касательной плоскости в точке M_2 на касательную плоскость в точке M_1. Именно в силу такого проектирования геодезические линии поверхности S, у которых, по определению, соприкасающаяся плоскость проходит через нормаль к поверхности, сохраняют после проектирования своё направление и являются в римановой геометрии R_2 эквивалентом прямых линий.

В проективно-дифференциальной геометрии поверхности S_2, погружённой в трёхмерное проективное пространство P_3, связность касательных плоскостей тоже устанавливается проектированием. Расстояние центра проектирования от точки M_1 поверхности — не существенно, ибо проектируется только дифференциальная окрестность точки, но направление проектирования играет существенную роль. У поверхности в проективном пространстве нет единой бесспорной нормали, а потому в проективно-дифференциальной геометрии поверхности нет единой внутренней геометрии, а есть совокупность внутренних геометрий. Сохранение такой совокупности Г. Ф. Лаптев и называет проективным изгибанием поверхности.

Для конгруэнции такое изгибание не построено, хотя нельзя заранее отрицать его возможность. Зато два других пути обобщения понятия изгибания легко переносятся на конгруэнцию и дают согласные результаты.

Второе обобщение понятия изгибания поверхности отправляется от определения изгибания поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве E_3, как преобразования поверхности с сохранением линейного элемента. Линейный элемент, как квадрат расстояния пары дифференциально близких точек поверхности, есть простейший совместный инвариант этой пары точек. Отсюда непосредственное обобщение: имеем произвольное многообразие $\mathfrak{M}$ в любом пространстве $\mathscr{H}$; ищем простейшую абсолютную инвариантную форму многообразия. Под формой понимается функция криволинейных координат u^i элемента M многообразия $\mathfrak{M}$ и их дифференциалов du^i, однородная относительно последних. Эта абсолютная инвариантная форма называется обобщённым линейным элементом многообразия $\mathfrak{M}$, а преобразование многообразия с сохранением обобщённого линейного элемента называется изгибанием многообразия.

Это определение даёт прекрасный результат для поверхности в трёхмерном проективном пространстве P_3. Мы видели (гл. IX, § 196, гл. XI, § 236), что отношение кубичной формы φ_3 к квадратичной φ_2 является абсолютным инвариантом пары дифференциально близких точек и сохранение этой проективной длины дуги приводит к классическому понятию проективного изгибания поверхности. Это определение приложимо и к конгруэнции. Мы уже построили абсолютный инвариант пары дифференциально близких лучей Φ, который мы назвали проективным линейным элементом конгруэнции. Мы увидим, что сохранение этого линейного элемента приводит к проективному изгибанию конгруэнции. Для комплекса прямых дело обстоит сложнее. Сохранение простейшего абсолютного инварианта пары дифференциально близких лучей не даёт изгибания, ибо заданием своего абсолютного инварианта комплекс определён до проективного преобразования.

Третье определение изгибания в клейновском пространстве исторически возникло первым и требует несколько более подробных объяснений, чтобы увидеть его естественную связь с классическим изгибанием поверхности в E_3.

Мы видели, что связность касательных плоскостей в паре дифференциально близких точек поверхности S или правильнее связность двух дифференциальных окрестностей этих точек, устанавливается ортогональным проектированием одной касательной плоскости на другую. Поскольку речь идёт о дифференциальной окрестности точки, это проектирование эквивалентно повороту касательной плоскости в точке M_1 так, чтобы она совместилась с касательной плоскостью в точке M_2, и только в этом смысле ортогональное проектирование будет приводить к одному из преобразований фундаментальной группы пространства E_3, т. е. к некоторому перемещению пространства. Отсюда наглядный способ представить перенос геодезически параллельного вектора вдоль заданной кривой L: описать около поверхности S вдоль её линии L развёртывающуюся поверхность D, а затем развернуть поверхность D на плоскость. Линия L поверхности S, которая принадлежит развёртывающейся поверхности D, после её развёртывания переходит в плоскую линию λ и геодезически параллельные касательные поверхности S в соответствующих точках линии L изображаются параллельными в евклидовом смысле прямыми плоскости в двух точках λ.

Развёртывание развёртывающейся поверхности D на плоскость осуществляется поворотом каждой её касательной плоскости около образующей так, что все плоскости совмещаются и поверхность D обращается в плоскость. Если мы будем мыслить эти плоскости прикреплёнными к поверхности S или лучше, если мы будем представлять,

что поверхность S без изменения своей формы последовательно испытывает вместе с поворотом её касательной плоскости связанное с этим поворотом движение пространства так, что каждая точка линии L на поверхности S по очереди будет совпадать с соответствующей точкой линии λ на плоскости и поверхность S будет иметь эту плоскость своей касательной плоскостью, причём геодезически параллельные касательные будут переходить в параллельные прямые плоскости, то мы получим движение поверхности S, которое можно назвать *«качением поверхности по плоскости»*.

Такое качение неразвёртывающейся поверхности по плоскости возможно только вдоль линии. Иначе будет обстоять дело, если мы возьмём поверхность S и её изгибание S'. Это изгибание предполагает, что между точками поверхности S и S' (в некоторых соответствующих областях той и другой поверхности) установлено взаимно однозначное соответствие так, что *длины соответствующих дуг соответствующих линий равны*. Мы можем представить двупараметрическое семейство различных положений поверхности S так, что в каждом положении одна из её точек M (точек выбранной области) совпадает с соответствующей точкой M' поверхности S', касательные плоскости в этих точках совпадают, и касательные к соответствующим линиям совмещаются. Последовательный переход из одного такого положения в другое называется *«качением поверхности S по её изгибанию S'»*.

Так как дуги соответствующих линий равны, то касание поверхности S в её новом положении S^* с поверхностью S' несколько отличается от обычного касания двух поверхностей (наличие общей касательной плоскости). Поверхность S^* имеет с поверхностью S' в общей точке M' аналитическое касание 1-го порядка, если в этой точке совпадают дифференциальные окрестности 1-го порядка, т. е. каждая точка M_1^* поверхности S^* отстоит от соответствующей точки M_1' поверхности S' на расстоянии бесконечно малом 2-го порядка по отношению к расстоянию точек M_1^* или M_1' от точки касания $M^* \equiv M$. Таким образом, определение изгибания поверхности в евклидовом пространстве E_3 можно теперь дать в такой форме: поверхность S налагается на поверхность S', если между точками обеих поверхностей (в некоторой области) можно установить взаимно однозначное соответствие и каждой паре соответствующих точек M, M' присоединить такое перемещение $\mathfrak{G}$, что поверхность S^*, полученная перемещением $\mathfrak{G}$ из поверхности S, имеет с поверхностью S' в совпавших точках $M^* = M'$ аналитическое касание 1-го порядка.

Теперь ясно, как распространить это понятие изгибания на многообразие с любым образующим элементом в клейновском пространстве с любой фундаментальной группой. Надо только заменить движение пространства $\mathfrak{G}$ преобразованием Π фундаментальной группы пространства. Аналитическое касание n-го порядка попрежнему определяется совпадением дифференциальных окрестностей от 1-го до n-го порядка включительно.

Другими словами, если порядок малости разности одноимённых координат пары соответствующих элементов многообразий S^* и S' на n единиц больше порядка малости разности координат одного из этих элементов и их общего элемента (точки касания), то многообразия S^* и S' имеют касание n-го порядка и порядок изгибания S и S' равен n.

По отношению к двум конгруэнциям (A_1A_2) и (M_1M_2) это определение можно высказать в форме: конгруэнции (A_1A_2) и (M_1M_2) проективно иаложимы порядка n, если между лучами их можно установить взаимно однозначное соответствие и каждой паре соответствующих лучей присоединить проективное преобразование П, которое переводит конгруэнцию (A_1A_2) в конгруэнцию $(A_1^*A_2^*)$ так, что совпадает пара лучей $A_1^*A_2^*$ и M_1M_2, а также все лучи их дифференциальных окрестностей от 1-го до n-го порядка включительно.

267. Проективное изгибание конгруэнции. Отнесём конгруэнцию (A_1A_2) к тетраэдру 1-го порядка $\{A_i\}$ и выберем тетраэдр $\{M_i\}$, присоединённый к лучам его изгибания — конгруэнции (M_1M_2) так, чтобы проективное преобразование П, совмещающее пару лучей A_1A_2 и M_1M_2, совмещало бы тетраэдры $\{A_i\}$ и $\{M_i\}$, присоединённые к этим лучам, т. е. потребуем, чтобы $A_i^* \equiv M_i$ для $i = 1, 2, 3, 4$. Совпадение лучей дифференциальных окрестностей луча $A_1^*A_2^* \equiv M_1M_2$ до n-го порядка включительно возможно только при определённом нормировании аналитических прямых. Для этого достаточно, чтобы равенство

$$(A_1^*A_2^*) + d(A_1^*A_2^*) + \frac{1}{2}d^2(A_1^*A_2^*) + \ldots =$$
$$= \left(\theta_0 + \theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2 + \ldots\right)\{(M_1M_2) + d(M_1M_2) + \ldots\} \quad (1a)$$

удовлетворялось до членов n-го порядка включительно. При этом скобка, содержащая члены с θ_i, представляет множитель пропорциональности, причём указатель внизу означает порядок слагаемого: θ_i содержит члены степени i относительно основных линейных форм или дифференциалов независимых переменных.

Из уравнения (1a) следуют равенства:

$$\begin{aligned} (A_1^*A_2^*) &= \theta_0(M_1M_2), \\ d(A_1^*A_2^*) &= \theta_0 d(M_1M_2) + \theta_1(M_1M_2), \\ d^2(A_1^*A_2^*) &= \theta_0 d^2(M_1M_2) + 2\theta_1 d(M_1M_2) + \theta_2(M_1M_2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \quad (1b)$$

Так как $A_i^* \equiv M_i$, то из первого уравнения следует

$$\theta_0 = 1. \quad (1c)$$

Обозначим через ω_i^k компоненты дифференциальных проективных перемещений первого тетраэдра $\{A_i\}$, через Ω_i^k — второго $\{M_i\}$ и будем помнить, что проективное преобразование П, которое переводит все тетраэдры $\{A_i\}$ в соответствующие тетраэдры $\{A_i^*\}$, не меняет компонент ω_i^k. Выбирая тетраэдр $\{A_i\}$ 1-го порядка для конгруэнции (A_1A_2), получим:

$$d(A_1^*A_2^*) = (\omega_1^1 + \omega_2^2)[12] + \omega_2^4[14] - \omega_1^3[23],$$
$$d(M_1M_2) = (\Omega_1^1 + \Omega_2^2)[12] + \Omega_2^4[14] - \Omega_1^3[23] + \Omega_2^3[13] + \Omega_1^4[42],$$

где, как всегда,

$$[ik] \equiv (A_i^*A_k^*)$$

и точки M_i заменены равными им точками A_i^*.

Внося эти значения во второе уравнение (1b), получим:

$$\Omega_1^4 = 0,\ \Omega_2^3 = 0,\ \Omega_1^3 = \omega_1^3,\ \Omega_2^4 = \omega_2^4, \quad (1d)$$

$$\theta_1 = -(\tilde{\omega}_1^1 + \tilde{\omega}_2^2). \quad (1c')$$

Здесь и далее мы будем обозначать

$$\tilde{\omega}_i^k = \Omega_i^k - \omega_i^k.$$

При выполнении условий (1d) первые два уравнения (1b) будут удовлетворены, т. е. равенство (1d) будет справедливо до членов 1-го порядка включительно, и конгруэнции (A_1A_2) и (M_1M_2) — проективно наложимы 1-го порядка. С другой стороны, из уравнения (1d) следует:

1) обращение в нуль форм Ω_1^4, Ω_2^3 показывает, что тетраэдр $\{M_i\}$ является для конгруэнции (M_1M_2) тетраэдром 1-го порядка: M_1, M_2 — фокусы луча M_1M_2, $M_1M_2M_3$ и $M_1M_2M_4$ — его фокальные плоскости;

2) совпадение основных форм ω_1^3, ω_2^4 показывает, что развёртывающиеся поверхности обеих конгруэнций соответствуют.

Следовательно, условия (1d) являются условиями на выбор соответствия между лучами конгруэнций и на выбор тетраэдра $\{M_i\}$, но не на конгруэнцию (M_1M_2).

Отсюда теорема:

Любые две конгруэнции проективно наложимы 1-го порядка. Соответствие наложимости переводит развёртывающиеся поверхности в развёртывающиеся. Фокусы луча налагаются на фокусы и фокальные плоскости на фокальные плоскости.

268. Проективное изгибание 2-го порядка. Для наложимости 2-го порядка надо, чтобы кроме уравнений (1d) удовлетворялись те уравнения, которые будут вытекать из третьего равенства (1b).

Подсчитываем вторые дифференциалы от прямых (A_1A_2), (M_1M_2) и вносим в третье уравнение (1b). Если помнить, что равенства

(1d) удовлетворены на всей конгруэнции и, следовательно, допускают дифференцирование, то мы получим сравнением коэффициентов при аналитических прямых $[ik]$ следующие уравнения:

$$\tilde\omega_1^1 - \tilde\omega_3^3 = 0, \qquad \tilde\omega_2^2 - \tilde\omega_4^4 = 0, \tag{2a}$$

$$\omega_1^3\tilde\omega_2^1 - \omega_2^4\tilde\omega_4^3 = 0, \qquad \omega_1^3\tilde\omega_3^4 - \omega_2^4\tilde\omega_1^2 = 0, \tag{2b}$$

$$\theta_2 = -\omega_2^4\tilde\omega_4^2 - \omega_1^3\tilde\omega_3^1 + (\tilde\omega_1^1 + \tilde\omega_2^2)^2 - d\tilde\omega_1^1 - d\tilde\omega_2^2. \tag{2c}$$

С другой стороны, дифференцируя первые два уравнения (1d) и вычитая соответствующие уравнения для первой конгруэнции, получим:

$$[\omega_1^3\tilde\omega_2^1] - [\omega_2^4\tilde\omega_4^3] = 0, \quad [\omega_1^3\tilde\omega_3^4] - [\omega_2^4\tilde\omega_1^2] = 0. \tag{2b'}$$

Внешние квадратичные уравнения (2b′) требуют, чтобы формы $\tilde\omega_2^1$ и $-\tilde\omega_4^3$ выражались через основные формы ω_1^3, ω_2^4 с *симметричной* матрицей коэффициентов; квадратичные уравнения (2b) с обыкновенным законом умножения дают такое же линейное представление с *антисимметричной* матрицей коэффициентов. Отсюда все четыре формы должны равняться нулю:

$$\tilde\omega_1^2 = 0, \quad \tilde\omega_2^1 = 0, \quad \tilde\omega_3^4 = 0, \quad \tilde\omega_4^3 = 0. \tag{2d}$$

Уравнения (2d) показывают, что все главные формы 2-го порядка проективно налагающихся конгруэнций равны между собой. Следовательно, *асимптотические линии на фокальных поверхностях первой конгруэнции соответствуют асимптотическим линиям на соответствующих фокальных поверхностях второй.*

Пользуясь формулами (7) § 186 и разлагая формы (2d) для первой и второй конгруэнций по основным формам ω_1^3, ω_2^4, получим соотношения на коэффициенты:

$$\bar\alpha = \alpha, \quad \bar\beta = \beta, \quad \bar\gamma = \gamma, \quad \bar\alpha' = \alpha, \quad \bar\beta' = \beta, \quad \bar\gamma' = \gamma'. \tag{2e}$$

Следовательно, *точечный и тангенциальные инварианты налагающихся конгруэнций соответственно равны. Абсолютные инварианты 2-го порядка налагающихся конгруэнций равны.*

В частности, отсюда вытекает, что *конгруэнции W могут налагаться только на конгруэнции W.*

269. Достаточный признак наложимости 2-го порядка. Не все сформулированные выше условия наложения двух конгруэнций независимы. Необходимое и достаточное условие наложимости 2-го порядка можно сформулировать в виде теоремы:

Конгруэнции проективно наложимы 2-го порядка, если при взаимно однозначном соответствии лучей этих конгруэнций, сохраняющем развёртывающие поверхности их, асимптотические линии каждой фокальной поверхности переходят в асимптотические линии соответствующей фокальной поверхности другой конгруэнции и внешняя точечная (или тангенциальная) *инвариантная форма первой конгруэнции равна такой же форме второй.*

Действительно, если развёртывающиеся поверхности одной конгруэнции в соответствии лучей, установленном между двумя конгруэнциями, переходят в развёртывающиеся, то формы ω_1^3, ω_2^4 обеих конгруэнций должны быть пропорциональны:

$$\Omega_1^3 = \lambda\omega_1^3, \qquad \Omega_2^4 = \mu\omega_2^4. \tag{3a}$$

Предполагая, что каждая конгруэнция отнесена к своему тетраэдру 1-го порядка и дифференцируя по вторичным параметрам второй конгруэнции, получим согласно формулам (19a) § 192:

$$\Omega_1^3(\Pi_1^1 - \Pi_3^3) = \omega_1^3\delta\lambda,$$

откуда

$$\delta\ln\lambda = \Pi_1^1 - \Pi_3^3, \qquad \delta\ln\mu = \Pi_2^2 - \Pi_4^4, \tag{3b}$$

где Π_i^k являются значениями форм Ω_i^k для вторичных параметров.

Из уравнений (3b) следует, что нормированием вершин тетраэдра $\{M_i\}$ можно привести λ и μ к единице, после чего на вторичные параметры наложатся условия

$$\Pi_1^1 - \Pi_3^3 = 0, \qquad \Pi_2^2 - \Pi_4^4 = 0 \tag{3b'}$$

и уравнения (3a) примут вид

$$\Omega_1^3 = \omega_1^3, \qquad \Omega_2^4 = \omega_2^4. \tag{3a'}$$

Внешнее дифференцирование этих уравнений даёт:

$$[\omega_1^3, \tilde\omega_3^3 - \tilde\omega_1^1] = 0, \qquad [\omega_2^4, \tilde\omega_4^4 - \tilde\omega_2^2] = 0,$$

откуда, развёртывая по лемме Картана, будем иметь:

$$\tilde\omega_3^3 - \tilde\omega_1^1 = \lambda_1\omega_1^3, \qquad \tilde\omega_4^4 - \tilde\omega_2^2 = \mu_1\omega_2^4. \tag{3c}$$

В силу соотношений (3a′) из соответствия асимптотических на фокальных поверхностях конгруэнций будет вытекать пропорциональность коэффициентов

$$\bar\alpha = t\alpha, \quad \bar\gamma = t\gamma, \quad \bar\alpha' = t'\alpha', \quad \bar\gamma' = t'\gamma'. \tag{3d}$$

Дифференцируя по вторичным параметрам второй конгруэнции, получим по формулам (14a) § 188:

$$\delta\ln t = 2\Pi_3^3 - \Pi_1^1 - \Pi_4^4 = \Pi_1^1 - \Pi_2^2.$$

Следовательно, нормированием вершин M_i за счёт независимой вторичной формы $\Pi_1^1 - \Pi_2^2$ можно привести коэффициент t к единице, а тогда равенство внешних точечных инвариантных форм, которое в силу соотношений (3a′) принимает вид

$$\overline{\gamma}\overline{\gamma}' = \gamma\gamma',$$

покажет, что и множитель пропорциональности t' равен единице, и мы будем иметь:

$$\overline{\alpha} = \alpha, \quad \overline{\gamma} = \gamma, \quad \overline{\alpha}' = \alpha', \quad \overline{\gamma}' = \gamma'. \tag{3d′}$$

Поскольку поворотом рёбер M_1M_3, M_2M_4 в касательных плоскостях фокальных поверхностей коэффициенты $\overline{\beta}$, $\overline{\beta}'$ могут быть приведены к любому значению, мы можем положить

$$\overline{\beta} = \beta, \quad \overline{\beta}' = \beta' \tag{3d″}$$

и, следовательно, условия (2e) будут удовлетворены.

Так как теперь уравнения (1d), (2a), (2d) удовлетворены, то конгруэнции проективно наложимы 2-го порядка.

270. Проективное изгибание первого и второго рода. Из теоремы предыдущего параграфа вытекает следствие:

Необходимое и достаточное условие проективной наложимости 2-го порядка двух конгруэнций есть равенство их проективных линейных элементов

$$\Phi = \frac{\{\alpha(\omega_1^3)^2 + \gamma(\omega_2^4)^2\}\{\gamma'(\omega_1^3)^2 + \alpha'(\omega_2^4)^2\}}{\omega_1^3\omega_2^4}.$$

Действительно, если конгруэнции наложимы, то из уравнений (1d), (2e) следует равенство инвариантов Φ и $\overline{\Phi}$. Обратно, из равенства

$$\overline{\Phi} = \Phi$$

следует соответствие развёртывающихся поверхностей конгруэнции, соответствие асимптотических на фокальных поверхностях первой и второй конгруэнций и после приведения форм ω_1^3, ω_2^4 к равенству (3a′) равенство произведений

$$\overline{\alpha}\,\overline{\gamma}' = \alpha\gamma', \quad \overline{\gamma}\,\overline{\alpha}' = \gamma\alpha', \quad \overline{\alpha}\,\overline{\alpha}' + \overline{\gamma}\,\overline{\gamma}' = \overline{\alpha}\,\overline{\alpha}' + \overline{\gamma}\,\overline{\gamma}'. \tag{4a}$$

Из соответствия асимптотических на фокальных поверхностях первой и второй конгруэнций вытекают или уравнения (3d), если асимптотические соответствуют на одноимённых фокальных поверхностях (первой и первой, второй и второй) или уравнения

$$\overline{\alpha} = t\gamma', \quad \overline{\gamma} = t\alpha', \quad \overline{\alpha}' = t'\gamma, \quad \overline{\gamma}' = t\alpha, \tag{4b}$$

если асимптотические первой фокальной поверхности конгруэнции (A_1A_2) соответствуют асимптотическим второй фокальной поверхности конгруэнции (M_1M_2), и наоборот.

В первом случае (как и во втором) уравнения (4a) дадут условия

$$tt' = 1$$

и, следовательно, равенство внешних инвариантных форм, т. е. согласно теореме наложимость конгруэнций. Во втором случае конгруэнция (A_1A_2) проективно налагается на коррелятивное преобразование конгруэнции (M_1M_2).

Действительно, коррелятивное преобразование можно получить, если каждую точку пространства заменить плоскостью, тангенциальные координаты которой равны координатам точки. Мы видели (§ 199), что при переходе от точечных к тангенциальным координатам развёртывающиеся поверхности меняются местами. Следовательно, меняются местами и фокальные поверхности, что соответствует переходу от α, γ к α', γ'. Кроме того, точечный инвариант $\gamma\gamma'$ заменяется тангенциальным $\alpha\alpha'$. Следовательно, α и γ заменятся на γ' и α', а это и переведёт систему (4b) в систему (3d).

271. Конгруэнции, допускающие проективное изгибание 2-го порядка. Мы видели, что проективное изгибание 1-го порядка для конгруэнций тривиально: налагаются любые две конгруэнции. Нетрудно обнаружить, что не существует изгибания 3-го порядка. Выписывая ещё одно уравнение в системе (1b) и внося туда дифференциалы лучей (A_1A_2), $(M_1'M_2')$, мы получим, что все формы Ω_i^k второй конгруэнции равны соответствующим формам ω_i^k первой. Поскольку матрица компонент ω_i^k определяет одну конгруэнцию (A_1A_2) до проективного преобразования, конгруэнции проективно налагающиеся 3-го порядка — проективно эквивалентны, т. е. отличаются только проективным преобразованием. Таким образом, особый интерес приобретает исследование вопроса, существуют ли проективно различные налагающиеся 2-го порядка пары конгруэнций.

Они определяются системой уравнений (5) § 185, (1a), (2a), (2d):

$$\begin{gathered}\omega_1^4 = 0, \ \omega_2^3 = 0, \quad \tilde{\omega}_1^4 = \tilde{\omega}_2^3 = \tilde{\omega}_1^3 = \tilde{\omega}_2^4 = \tilde{\omega}_1^2 = \tilde{\omega}_2^1 = \tilde{\omega}_3^4 = \tilde{\omega}_4^3 = 0, \\ \tilde{\omega}_1^1 - \tilde{\omega}_3^3 = 0, \quad \tilde{\omega}_2^2 - \tilde{\omega}_4^4 = 0.\end{gathered} \tag{5a}$$

Дифференцируя эти уравнения внешним образом, получим систему квадратичных уравнений:

$$[\omega_1^2\omega_2^4] + [\omega_1^3\omega_3^4] = 0, \qquad [\omega_2^1\omega_1^3] + [\omega_2^4\omega_4^3] = 0, \tag{5b}$$

$$\begin{gathered}[\omega_1^3\tilde{\omega}_3^2] + [\omega_1^2, \tilde{\omega}_2^2 - \tilde{\omega}_1^1] = 0, \qquad [\tilde{\omega}_3^2\omega_2^4] + [\omega_3^4, \tilde{\omega}_2^2 - \tilde{\omega}_1^1] = 0, \\ [\omega_2^1, \tilde{\omega}_1^1 - \tilde{\omega}_2^2] + [\omega_2^4\tilde{\omega}_4^1] = 0, \qquad [\tilde{\omega}_4^1\omega_1^3] + [\omega_4^3, \tilde{\omega}_1^1 - \tilde{\omega}_2^2] = 0,\end{gathered} \tag{5c}$$

$$[\omega_1^3\tilde{\omega}_3^1] = 0, \qquad [\tilde{\omega}_2^4\omega_4^2] = 0. \tag{5d}$$

Система естественно распадается на две подсистемы (5b, c) и (5d). Каждая из них, если не считать форм ω_1^3, ω_2^4, составляющих базис подкольца дифференциалов независимых переменных, имеет свою характеристическую систему: для системы уравнений (5b), (5c) она содержит формы

$$\omega_1^2,\ \omega_3^4,\ \omega_2^1,\ \omega_4^3,\ \tilde\omega_1^1-\tilde\omega_2^2,\ \tilde\omega_3^2,\ \tilde\omega_4^1, \tag{5e}$$

для системы (5d) — формы

$$\tilde\omega_3^1,\ \tilde\omega_4^2. \tag{5f}$$

Поэтому можно отдельно исследовать инволютивность первой и второй системы.

Система (5d), очевидно, — в инволюции. Первый линейный элемент зависит от двух параметров — значений форм $\tilde\omega_3^1$, $\tilde\omega_4^2$; на втором они определены билинейными уравнениями, присоединёнными к квадратичным уравнениям (5d). Характеры подсистемы (5d) суть

$$s_1'=2,\quad s_2'=0.$$

Система (5b), (5c) содержит шесть квадратичных уравнений и семь форм (5e), подлежащих определению. Можем задать произвольно значение одной формы, например, $\tilde\omega_1^1-\tilde\omega_2^2$ на первом и втором линейных элементах интегральной цепи. Тогда на первом линейном элементе значения остальных шести форм (5e) останутся произвольными, на втором определятся из билинейных уравнений, присоединённых к квадратичным уравнениям (5b, c), с определителем системы, равным произведению

$$(\omega_1^3\omega_2^4)^2(\tilde\omega_1^1-\tilde\omega_2^2)^2, \tag{5g}$$

где значения форм (5f) относятся к первому линейному элементу цепи. Если определитель (5g) отличен от нуля, то цепь регулярна, подсистема (5b), (5c) — в инволюции с характерами

$$s_1''=6,\quad s_2''=1.$$

Для всей системы (5b) — (5d) инволютивность сохраняется, а характеры складываются

$$s_1=s_1'+s_1''=8,\quad s_2=s_2'+s_2''=1.$$

К тому же результату придём, если будем рассматривать систему уравнений (5b) — (5d) целиком.

Интегральное многообразие существует и зависит от одной произвольной функции двух аргументов. Этим и определяется произвол конгруэнции, допускающей проективное изгибание.

272. Особое интегральное многообразие задачи изгибания. Обращение в нуль первых двух множителей определителя системы (5f) соответствует характеристикам интегрального многообразия — раз-

вёртывающимся поверхностям изгибаемой конгруэнции. Обращение в нуль последнего множителя

$$\tilde\omega_1^1-\tilde\omega_2^2=0 \tag{6a}$$

соответствует особому интегральному элементу и приводит к особому интегральному многообразию, если потребовать, чтобы уравнение (6a) имело место для всех интегральных элементов многообразия, т. е. если присоединить уравнение (6a) к системе (5a) — (5d).

Внешнее дифференцирование уравнения (6a) приводит к тождеству в силу уравнений (5a), (5d). Уравнения (5c) теперь принимают вид

$$[\omega_1^3\tilde\omega_3^2]=0,\ [\omega_2^4\tilde\omega_3^2]=0,\ [\omega_2^4\tilde\omega_4^1]=0,\ [\omega_1^3\tilde\omega_4^1]=0$$

и приводят к двум новым линейным уравнениям

$$\tilde\omega_3^2=0,\ \tilde\omega_4^1=0. \tag{6b}$$

Внешнее дифференцирование их даёт квадратичные уравнения

$$[\tilde\omega_3^1\omega_1^2]+[\omega_3^4\tilde\omega_4^2]=0,\ [\tilde\omega_4^2\omega_2^1]+[\omega_4^3\tilde\omega_3^1]=0. \tag{6c}$$

Система линейных уравнений (5a), (6a), (6b) и квадратичных (5b), (5d), (6c) — в инволюции. Характеристическая система, кроме форм ω_1^3, ω_2^4 и левых частей линейных уравнений (5a), (6a), (6b), содержит шесть форм

$$\omega_1^2,\quad \omega_3^4,\quad \omega_2^1,\quad \omega_4^3,\quad \tilde\omega_3^1,\quad \tilde\omega_4^2. \tag{6d}$$

На первом линейном элементе цепи значения их произвольны, на втором определяются из билинейных уравнений, присоединённых к квадратичным (5b), (5d), (6c), если определитель системы

$$\omega_1^3\omega_2^4(\tilde\omega_4^2\omega_2^4-\tilde\omega_3^1\omega_1^3)^2 \tag{6e}$$

не обращается в нуль. Так как система содержит шесть независимых квадратичных уравнений и шесть форм (5e), то характеры системы суть

$$s_1=6,\quad s_2=0.$$

Особое интегральное многообразие существует с произволом шести функций одного аргумента.

Обращение в нуль определителя (6e) приводит к тривиальному результату. Обращение первых двух множителей соответствует известным уже характеристикам системы — развёртывающимся поверхностям конгруэнции. Если же присоединить к системе уравнение

$$\tilde\omega_4^2\omega_2^4-\tilde\omega_3^1\omega_1^3=0, \tag{6f}$$

полученное обращением в нуль последнего множителя (6e), то, разрешая по лемме Картана уравнения (5d)

$$\tilde{\omega}_3^1 = a\omega_1^3, \quad \tilde{\omega}_4^2 = b\omega_2^4, \tag{6g}$$

и внося эти значения в уравнение (6f), получим:

$$a(\omega_1^3)^2 - b(\omega_2^4)^2 = 0,$$

откуда при независимости форм ω_1^3, ω_2^4 следует обращение в нуль коэффициентов a, b, а стало быть, и форм $\tilde{\omega}_3^1$, $\tilde{\omega}_4^2$. Поскольку теперь все формы $\tilde{\omega}_i^k$, кроме, быть может, формы $\tilde{\omega}_1^1$, равны нулю, обе конгруэнции (A_1A_2) и (M_1M_2) проективно эквивалентны, отличаясь только нормированием вершин $[M_i]$. Следовательно, изгибание становится тривиальным.

273. Изгибание конгруэнции R. Чтобы получить более подробные сведения о характере особого изгибания и о конгруэнциях, которые допускают такое изгибание, надо разбить уравнения (5a), (5b), (5d), (6a) — (6c) на систему, определяющую изгибаемую конгруэнцию (A_1A_2) и систему, определяющую её изгибание (M_1M_2).

Будем предполагать, что конгруэнция (A_1A_2) задана и, следовательно, формы ω_i^k известны и удовлетворяют первым двум уравнениям (5a) и уравнениям (5b).

Допустим для простоты, что конгруэнция (A_1A_2) отнесена к фокальным сетям, т. е. β и β' равны нулю. Тогда эти разложения по формулам (7) § 186 примут вид:

$$\omega_1^2 = \gamma\omega_2^4, \quad \omega_3^4 = \alpha\omega_1^3, \quad \omega_2^1 = \gamma'\omega_1^3, \quad \omega_4^3 = \alpha'\omega_2^4 \tag{7a}$$

и уравнения (5d), (6c) напишутся:

$$\begin{gathered} [\omega_1^3\tilde{\omega}_3^1] = 0, \qquad [\omega_2^4\tilde{\omega}_4^2] = 0, \\ \gamma[\omega_2^4\tilde{\omega}_3^1] - \alpha[\omega_1^3\tilde{\omega}_4^2] = 0, \quad \alpha'[\omega_2^4\tilde{\omega}_3^1] - \gamma'[\omega_1^3\tilde{\omega}_4^2] = 0. \end{gathered} \tag{7b}$$

Если определитель $\alpha\alpha' - \gamma\gamma'$ не равен нулю, то из последних двух уравнений будет следовать обращение в нуль каждого произведения $[\omega_1^3\tilde{\omega}_4^2]$, $[\omega_2^4\tilde{\omega}_3^1]$ и обе формы $\tilde{\omega}_3^1$, $\tilde{\omega}_4^2$ будут равны нулю, а отсюда следует проективная эквивалентность конгруэнций и тривиальность изгибания.

Следовательно, конгруэнция (A_1A_2) должна удовлетворять условию

$$\alpha\alpha' - \gamma\gamma' = 0. \tag{7c}$$

Особое изгибание допускает только конгруэнция W, но не всякая конгруэнция W может так изгибаться. Система линейных уравнений (5a), (6a), (6b) и квадратичных (7b) не будет в инволюции, ибо четыре квадратичных уравнения (7b) содержат только две формы, подлежащие определению $\tilde{\omega}_3^1$ и $\tilde{\omega}_4^2$. Поэтому систему надо продолжать.

Разрешая по лемме Картана систему (7b), получаем в силу уравнения (7c):

$$\tilde{\omega}_3^1 = t\alpha\omega_1^3, \quad \tilde{\omega}_4^2 = -t\gamma\omega_2^4, \tag{7d}$$

где t — новая неизвестная функция. Дифференцируя внешним образом уравнения (7d), получим:

$$[\Delta t\omega_1^3] = 0, \quad [\Delta t\omega_2^4] = 0,$$

где

$$\Delta t = d\ln t + \omega_1^1 - \omega_4^4 + \beta_2\omega_1^3 - \beta_1\omega_2^4.$$

Эти уравнения равносильны одному линейному дифференциальному уравнению

$$d\ln t + \omega_1^1 - \omega_4^4 + \beta_2\omega_1^3 - \beta_1\omega_2^4 = 0. \tag{7e}$$

Внешнее дифференцирование его приводит к квадратичному уравнению

$$[\Delta\beta_1\omega_2^4] + [\omega_1^3\Delta\beta_2] = 0,$$

или по формулам (11) § 187

$$\beta_{11} + \beta_{22} = 0. \tag{7f}$$

Поскольку уравнения (7c), (7f) характеризуют конгруэнцию R, мы видим, что *конгруэнции R и только они допускают особое изгибание.*

Действительно, при выполнении условий (7c), (7f) уравнение (7e) вполне интегрируемо и определяет коэффициент t, а стало быть, и все $\tilde{\omega}_i^k$ с произвольным параметром. Следовательно, *всякая конгруэнция R допускает непрерывное проективное изгибание с одним произвольным параметром.*

274. Теорема Бам-Зеликовича о фокальных поверхностях конгруэнции, допускающей проективное изгибание. Можно ли к произвольно заданной поверхности построить конгруэнцию касательных, которая допускала бы проективное изгибание?

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим опять систему (5a) — (5d), разбивая теперь её на две группы так, чтобы первая группа содержала уравнения, относящиеся к определению поверхности (A_1).

Поверхность (A_1) определяется уравнением

$$\omega_1^4 = 0, \tag{8a}$$

и его внешним дифференциалом

$$[\omega_1^2\omega_2^4] + [\omega_1^3\omega_3^4] = 0. \tag{8b}$$

Характеристическая система уравнений (8a), (8b) состоит из пяти уравнений

$$\omega_1^3=0,\ \omega_2^4=0,\ \omega_1^4=0,\ \omega_1^2=0,\ \omega_3^4=0. \tag{8c}$$

Система вполне интегрируема и пять первых интегралов её образуют пять характеристических переменных, с помощью которых можно написать уравнения (8a), (8b) так, что и под знаком дифференциала и в коэффициентах будут входить только эти пять переменных. Два из этих переменных, например, те, дифференциалы которых позволяют линейно представить формы ω_1^2, ω_1^3, можно принять за независимые переменные. Рассмотрим какое-нибудь решение системы (8a), (8b), т. е. зададим остальные три переменных функциями от первых двух так, чтобы формы (8c) удовлетворяли системе (8a), (8b).

Система уравнений (5a) — (5d), определяющая пару налагающихся конгруэнций, содержит в своей характеристической системе все уравнения (8c), все остальные уравнения (5a) и, кроме того, уравнения

$$\begin{gathered}\omega_2^1=0,\ \omega_4^3=0,\ \tilde\omega_3^2=0,\ \tilde\omega_4^1=0,\\ \tilde\omega_3^1=0,\ \tilde\omega_4^2=0,\ \tilde\omega_1^1-\tilde\omega_2^2=0.\end{gathered} \tag{8d}$$

Она содержит 23 уравнения и обладает системой 23 первых интегралов, которые служат характеристическими переменными системы (5a) — (5d). Так как в новую систему вошли все уравнения (8c), то пять характеристических переменных системы (8a), (8b) можно выразить функциями от 23 переменных большой системы. Отсюда вытекает, что первые пять переменных можно включить в базис переменных большой системы так, что она будет содержать, кроме первых пяти, ещё 18 новых переменных.

Подставим теперь в уравнения системы (5a) — (5d) те три функции от независимых переменных, которые являются решением системы (8a), (8b) и определяют выбранную поверхность S. Уравнения (8a), (8b) будут удовлетворены. Следовательно, система (5b) — (5d) будет содержать только семь квадратичных уравнений. Так как формы (8c) содержат только первые пять переменных, они теперь будут линейно выражены через формы ω_1^2, ω_1^3 или через ω_1^3, ω_2^4, поскольку в силу уравнения (8b) форма ω_1^2 может быть выражена через формы ω_1^3, ω_2^4, если они независимы.

Следовательно, система (5a) — (5d) после выполнения подстановки будет содержать только 20 форм характеристической системы. Все формы (5a) на интегральном многообразии равны нулю, значит, при построении интегральных элементов цепи надо иметь в виду, кроме форм ω_1^3, ω_2^4, только семь форм (8d).

На первом линейном элементе цепи значения их произвольны, на втором они определяются из билинейных уравнений, присоединённых к семи квадратичным (5b) — (5d), оставшимся после обращения в тождество первого уравнения (5b). Определитель системы равен

$$\omega_1^3\omega_2^4(\tilde\omega_1^1-\tilde\omega_2^2)(\omega_1^2\omega_2^4+\omega_1^3\omega_3^4). \tag{8e}$$

Он обращается в нуль на развёртывающихся поверхностях конгруэнции ($\omega_1^3=0$, $\omega_2^4=0$), на асимптотических линиях ($\omega_1^2\omega_2^4+\omega_1^3\omega_3^4=0$) поверхности (A_1); они определяют характеристики нашей системы. Кроме того, особое интегральное многообразие (6a) соответствует обращению в нуль средней скобки ($\tilde\omega_1^1-\tilde\omega_2^2=0$).

Оставляя эти особые случаи в стороне, мы видим, что система находится в инволюции с характерами $s_1=7$, $s_2=0$; следовательно, *ко всякой данной поверхности можно построить изгибаемую конгруэнцию касательных с произволом семи функций одного аргумента.*

275. Совместное проективное изгибание фокальных поверхностей конгруэнции R. Мы уже два раза встречались с преобразованием сетей и конгруэнций R. Первый раз в гл. V, § 115 мы искали конгруэнцию W по заданной фокальной поверхности так, чтобы она переводила сеть R первой фокальной поверхности в сеть R второй. Однако, составив дифференциальные уравнения, определяющие наиболее общее преобразование этого рода, мы должны были ограничиться частным интегралом, содержащим четыре существенных произвольных постоянных, не исследуя вопроса о существовании общего решения. Найденное решение мы могли характеризовать геометрически: если присоединить к поверхности S_0, несущей сеть R, произвольную прямую пространства d и соединить в каждой касательной плоскости поверхности S_0 её точку касания A_1 с точкой A_3, где эта плоскость пересекается с прямой d, то после проективного изгибания поверхности S_0 в поверхность S, касательные A_1A_3, оставаясь касательными поверхности S, будут касаться новой поверхности S', образованной геометрическим местом точек (A_3). При этом поверхность S' не вырождается и тоже несёт сеть R. Конгруэнция (A_1A_3) — конгруэнция R, которая переводит сеть R поверхности S в сеть R поверхности S' и определяет наиболее общее преобразование J сетей R (§ 115).

Второй раз мы пришли к преобразованию последовательностей R тоже с четырьмя произвольными постоянными в гл. VII, § 156, рассматривая автопроизводные последовательности. Это преобразование тоже имело простую геометрическую характеристику как совместное асимптотическое преобразование всех фокальных сетей последовательности. Это определение явилось в § 215 гл. IX исходным.

Чтобы показать совпадение этих преобразований с преобразованием J гл. V, нам надо доказать, что при подходящем проективном изгибании поверхности (A_1) все лучи конгруэнции (A_3A_4) могут совпасть с одной прямой пространства.

Для этого заметим прежде всего, что система (52a, b) § 216 допускает решение $\lambda = 0$, $\mu = 0$. При этом уравнения (52b), (52a′) § 216 обращаются в тождества, первые четыре уравнения (52a) § 216 принимают вид

$$\omega_3^2 = 0, \quad \omega_4^1 = 0, \quad \omega_3^1 = 0, \quad \omega_4^2 = 0. \tag{9}$$

Так как при этом дифференциал аналитической прямой (A_3A_4) пропорционален самой прямой

$$d(A_3A_4) = (\omega_3^3 + \omega_4^4)(A_3A_4),$$

то прямая стоит на месте.

С другой стороны, линейный элемент конгруэнции Φ по формуле (21) § 193 или линейные элементы Θ и Θ' поверхностей (A_1) или (A_2) (первый из них по формуле (26) § 196, второй по формуле, получаемой обычной заменой указателей 1 и 3 на указатели 2 и 4) не зависят от форм ω_3^1, ω_4^2. Следовательно, обе фокальные поверхности и конгруэнция допускают проективное изгибание при любом задании λ. Нам надо показать, что поверхности (A_1), (A_2) и конгруэнция (A_1A_2) могут быть изогнуты так, чтобы все лучи A_3A_4 совместились с одной прямой пространства.

Рассмотрим семейство тетраэдров $\{A_i\}$, определяемое компонентами (5) § 185, (7) § 186, (51a), (51b) § 216, (52a), (52b) § 216, при некоторых значениях λ и μ, отличных от нуля, и семейство тетраэдров $\{B_i\}$, определяемое теми же компонентами (5) § 185, (7) § 186, при тех же формах ω_1^3, ω_2^4 и компонентами (9). Докажем, что эти семейства трёхгранников налагаются друг на друга поверхностями (A_1), (A_2) и конгруэнцией (A_1A_2) так, что лучи A_3A_4 совпадают с лучами B_3B_4.

По определению (ср. гл. X § 234, гл. XIII § 266), поверхность (A_1) проективно налагается на поверхность (B_1), если установлено взаимно-однозначное соответствие точек $A_1 \rightleftarrows B_1$ обеих поверхностей и каждой паре соответствующих точек присоединено проективное преобразование Π, которое переводит поверхность (A_1) в поверхность (A_1^*), так, что совпадают не только точки A_1^*, B_1, но и их дифференциальные окрестности 2-го порядка. Поскольку мы рассматриваем совместное изгибание обеих фокальных поверхностей (A_1) и (A_2) и конгруэнции (A_1A_2), нам надо требовать совпадения дифференциальных окрестностей точек A_1^* и B_1, A_2^* и B_2 и лучей $A_1^*A_2^*$ и B_1B_2. При этом должны совпадать лучи A_3A_4 и B_3B_4 (но не их окрестности).

Наконец, совпадение точек или их окрестностей имеет место только до скалярного множителя: пропорциональность аналитических точек означает совпадение их геометрических точек.

Поэтому условия наложимости можно записать равенствами

$$\begin{gathered}
A_1^* + dA_1^* + \frac{1}{2} d^2A_1^* = (\theta_0' + \theta_1' + \frac{1}{2}\theta_2')(B_1 + dB_1 + \frac{1}{2} d^2B_1), \\
A_2^* + dA_2^* + \frac{1}{2} d^2A_2^* = (\theta_0'' + \theta_1'' + \frac{1}{2}\theta_2'')(B_2 + dB_2 + \frac{1}{2} d^2B_2), \\
(A_1^*A_2^*) + d(A_1^*A_2^*) + \frac{1}{2} d^2(A_1^*A_2^*) = \\
= (\theta_0 + \theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2)\left\{(B_1B_2) + d(B_1B_2) + \frac{1}{2} d^2(B_1B_2)\right\}, \\
A_3^* = \rho' B_3, \quad A_4^* = \rho'' B_4,
\end{gathered} \tag{a}$$

где ρ', ρ'', θ_0, θ_0', θ_0'' — произвольные скаляры, т. е. функции от независимых перемениых u, v; θ_1, θ_1', θ_1'' — линейные формы от их дифференциалов и θ_2, θ_2', θ_2'' — квадратичные формы, а первые три равенства имеют место только до членов 2-го порядка включительно относительно дифференциалов du, dv. Следовательно, первые два равенства (a) эквивалентны системе

$$\begin{gathered}
A_i^* = \theta_0^{(i)} B_i, \; dA_i^* = \theta_0^{(i)} dB_i + \theta_1^{(i)} B_i, \\
d^2A_i^* = \theta_0^{(i)} d^2B_i + 2\theta_1^{(i)} dB_i + \theta_2^{(i)} B_i, \quad i = 1, 2
\end{gathered} \tag{a′}$$

и аналогичны для третьего равенства (a).

Так как проективное преобразование не меняет компонент тетраэдра, то дифференциалы от точек A_i^* вычисляются с помощью матрицы компонент тетраэдра $\{A_i\}$, а поскольку нормирование точек A_i или B_i по формулам (5) § 185, (7) § 186, (9) § 187, (51a), (51b) § 216, (52a), (52b) § 216 остаётся произвольным, мы можем положить

$$A_k^* = B_k, \qquad k = 1, 2, 3, 4.$$

Отсюда

$$\rho' = \rho'' = \theta_0' = \theta_0'' = \theta_0 = 1.$$

Обозначая компоненты тетраэдра $\{A_i\}$ и $\{B_i\}$ буквами ω_i^k и $\bar{\omega}_i^k$ и полагая

$$\omega_i^k - \bar{\omega}_i^k = \tilde{\omega}_i^k,$$

мы по условиям выбора тетраэдров $\{A_i\}$, $\{B_i\}$ получим:

$$\begin{gathered}
\tilde{\omega}_1^3 = \tilde{\omega}_2^4 = \tilde{\omega}_1^2 = \tilde{\omega}_2^1 = \tilde{\omega}_3^4 = \tilde{\omega}_4^3 = \tilde{\omega}_3^2 = \tilde{\omega}_4^1 = \tilde{\omega}_1^4 = \tilde{\omega}_2^3 = 0, \\
\tilde{\omega}_3^1 = \lambda\omega_1^3, \quad \tilde{\omega}_4^2 = \mu\omega_2^4.
\end{gathered} \tag{b}$$

Тогда первые уравнения (a′) обратятся в тождество, а вторые дадут:

$$\theta_1' = \tilde{\omega}_1^1, \quad \theta_1'' = \tilde{\omega}_2^2. \tag{c}$$

Поскольку

$$d^2A_1 = \{ d\omega_1^1 + (\omega_1^1)^2 + \omega_1^2\omega_2^1 + \omega_1^3\omega_3^1 \} A_1 + \\ + \{ d\omega_2^2 + (\omega_1^1 + \omega_2^2)\,\omega_1^2 \} A_2 + \{ d\omega_1^3 + (\omega_1^1 + \omega_3^3)\,\omega_1^3 \} A_3 + \\ + \{ \omega_1^2\omega_2^4 + \omega_1^3\omega_3^4 \} A_4,$$

третьи уравнения (a′) в силу соотношений (b) и (c), кроме формул для форм θ_2', θ_2'', дают только соотношения

$$\tilde{\omega}_1^1 = \tilde{\omega}_2^2 = \tilde{\omega}_3^3 = \tilde{\omega}_4^4,$$

которые вытекают из наложенного дополнительного требования о нормировании точек A_i^* и B_i. При этих условиях третье уравнение (a) удовлетворится со значением

$$\theta_1 = \tilde{\omega}_1^1 + \tilde{\omega}_2^2$$

и подходящим значением θ_2.

Это и доказывает, что преобразование последовательностей R, рассмотренное в гл. VII и IX, совпадает с тем, которое было введено в гл. V.

II. КОНФОРМНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ K

276. Конформное преобразование K Тихоцкого. Понятие изгибания n-го порядка сохраняет смысл, если его прилагать к конгруэнции в евклидовом пространстве, но становится тривиальным. Пара конгруэнций наложима, если можно установить в некоторой области взаимно однозначное соответствие лучей конгруэнции и присоединить к каждой паре лучей такое перемещение евклидова пространства, которое приводит к совпадению эту пару лучей и их дифференциальных окрестностей n-го порядка. При $n=0$ любые две конгруэнции при произвольном соответствии лучей будут наложимы, ибо совместить пару прямых всегда возможно. При $n=1$ налагающиеся пары конгруэнций становятся конгруэнтными. Действительно, после совмещения дифференциальных окрестностей 1-го порядка лучи, пересекающиеся в фокусе, тоже совпадают. Следовательно, должны совпадать фокусы и фокальные плоскости, должны соответствовать развёртывающиеся поверхности, а тогда по формулам гл. III конгруэнции будут отличаться только положением в пространстве.

К. Н. Тихоцкий построил новое преобразование конгруэнций, которое можно было бы считать изгибанием в пространстве с фундаментальной группой подобных преобразований, но гораздо естественнее называть конформным преобразованием конгруэнции или преобразованием K Тихоцкого.

Пары конгруэнций *конформно наложимы* (конформно отображаются друг на друга) или *эквивалентны относительно преобразований* K, если можно установить в некоторой области взаимно однозначное соответствие их лучей и присоединить к каждой паре лучей такое перемещение $\mathscr{E}$ евклидова пространства, которое совмещает эту пару лучей так, что соответствующие линейчатые поверхности обеих конгруэнций, проходящие через эти лучи, касаются вдоль всего луча.

Присоединим к лучам AA' первой из конформно наложимых конгруэнций произвольный прямоугольный трёхгранник $T(A;\ e_3, e_1, e_2)$ так, чтобы ось e_3 трёхгранника совпадала с лучом. Ко второй конгруэнции (BB') присоединяем трёхгранник $\mathrm{T}(B;\ \varepsilon_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, так, чтобы после перемещения $\mathscr{E}$ первой конгруэнции, совмещающего лучи AA' и BB', трёхгранники T и T совпали бы.

Компоненты первого трёхгранника обозначим буквами ω_i^k, второго — Ω_i^k, их разность — буквами $\tilde{\omega}_i^k = \Omega_i^k - \omega_i^k$.

Имеем:

$$\begin{aligned} dA &= \omega^k e_k, & dB &= \Omega^k \varepsilon_k, \\ de_i &= \omega_i^k e_k, & d\varepsilon &= \Omega_i^k \varepsilon_k, \end{aligned} \qquad i,\ k = 1,\ 2,\ 3 \tag{10a}$$

Касательная плоскость к линейчатой поверхности $\omega_2^3 : \omega_1^3$ первой конгруэнции в точке

$$A' = A + \lambda e_3$$

луча AA' определяется векторами e_3 и $dA' = dA + \lambda\, de_3 + e_3\, d\lambda$.

Не единичный вектор нормали равен

$$n = e_3 \times (dA + \lambda\, de_3) = e_2(\omega^1 - \lambda\omega_1^3) - e_1(\omega^2 - \lambda\omega_2^3).$$

Точно так же нормаль к соответствующей линейчатой поверхности второй конгруэнции

$$N = \varepsilon_2(\Omega^1 - \lambda\Omega_1^3) - \varepsilon_1(\Omega^2 - \lambda\Omega_2^3),$$

ибо точка A' совпадёт с точкой $B' = B + \lambda\varepsilon_3$ второго луча.

Так как соответствующие линейчатые поверхности касаются, их нормали должны быть пропорциональны, а поскольку после перемещения $\mathscr{E}$ векторы e_i совпадают с векторами ε_i, мы должны иметь пропорцию

$$\frac{\Omega^1 - \lambda\Omega_1^3}{\omega^1 - \lambda\omega_1^3} = \frac{\Omega^2 - \lambda\Omega_2^3}{\omega^2 - \lambda\omega_2^3}.$$

Это равенство сохраняется в любой точке луча, т. е. при всяком λ. Следовательно,

$$\frac{\Omega^1}{\omega^1} = \frac{\Omega_1^3}{\omega_1^3} = \frac{\Omega^2}{\omega^2} = \frac{\Omega_2^3}{\omega_2^3}, \tag{10b}$$

т. е. четыре главные формы 1-го порядка обеих конгруэнций пропорциональности. Отсюда прямо следует, что инвариантные квадратичные формы по формулам (22) § 25 и (38) § 27

$$ds^2 = (\omega_1^3)^2 + (\omega_2^3)^2, \quad \psi = \omega^1\omega_2^3 - \omega^2\omega_1^3$$

у обеих конгруэнций пропорциональны с одним и тем же множителем пропорциональности. С другой стороны, если ввести коэффициенты a, b, b', c, A, B, B', C посредством равенств (20) § 24, то, поскольку уравнения (10b) справедливы для любого отношения форм $\omega_2^3 : \omega_1^3$, коэффициенты a, b, b', c обеих конгруэнций должны быть соответственно равны

$$A = a, \quad B = b, \quad B' = b', \quad C = c, \tag{10c}$$

откуда по формулам (25), (27), (29), (30) § 25 прямо следует совпадение при наложении граничных точек, фокусов, соответствие главных и развёртывающихся поверхностей.

277. Конгруэнции, допускающие преобразование K. Для определения пар конформно наложимых конгруэнций имеем систему

$$\Omega_1^3 = \rho\omega_1^3, \quad \Omega_2^3 = \rho\omega_2^3, \quad \Omega^1 = \rho\omega^1, \quad \Omega^2 = \rho\omega^2, \tag{11a}$$

где множитель пропорциональности ρ следует рассматривать как новую неизвестную функцию.

Дифференцируя внешним образом, имеем систему квадратичных уравнений

$$\begin{gathered}[d\ln\rho,\ \omega_1^3] - [\tilde{\omega}_1^2\omega_2^3] = 0, \quad [d\ln\rho,\ \omega_2^3] + [\tilde{\omega}_1^2\omega_1^3] = 0,\\ [d\ln\rho,\ \omega^1] - [\tilde{\omega}_1^2\omega^2] + [\tilde{\omega}^3\omega_1^3] = 0,\\ [d\ln\rho,\ \omega^2] + [\tilde{\omega}_1^2\omega^1] + [\tilde{\omega}^3\omega_2^3] = 0.\end{gathered} \tag{11b}$$

Характеристическая система состоит из форм ω_1^3, ω_2^4, являющихся базисом подкольца дифференциалов независимых переменных, четырёх форм (7d) и ещё пяти форм

$$d\ln\rho, \quad \tilde{\omega}_1^2, \quad \tilde{\omega}^3, \quad \omega^1, \quad \omega^2. \tag{11c}$$

Одну из этих пяти форм, например $\tilde{\omega}^3$, можно задать вполне произвольно на первом и втором интегральном элементе цепи; остальные четыре произвольны на первом линейном элементе, на втором определяются из билинейных уравнений, присоединённых к квадратичным (11b).

Определитель системы

$$\{(\omega_1^3)^2 + (\omega_2^3)^2\}\ \{(d\ln\rho)^2 + (\tilde{\omega}_1^2)^2\}$$

не обращается в нуль тождественно. Значит, цепь интегральных

элементов регулярна, система — в инволюции с характерами

$$s_1 = 4, \quad s_2 = 1.$$

Пары конформно наложимых конгруэнций существуют с произволом одной функции двух аргументов.

Эти рассуждения почти без изменения прилагаются к комплексам. Мы опять получим пропорциональность главных форм 1-го порядка (10b). Только теперь, поскольку луч комплекса зависит от трёх произвольных параметров, среди четырёх главных форм будет три независимых, например ω_1^3, ω_2^3, ω^1. Четвёртая линейно выражается через первые три:

$$\omega^2 = a\omega^1 + b\omega_1^3 + c\omega_2^3. \tag{12a}$$

Уравнения (11a) надо рассматривать в этом предположении. Мы опять получим систему квадратичных уравнений (11b), но теперь только четыре формы

$$d\ln\rho, \quad \tilde{\omega}_1^2, \quad \tilde{\omega}^3, \quad \omega^2 \tag{12b}$$

подлежат определению из квадратичных уравнений (11b) на втором интегральном элементе цепи. Разрешая относительно них систему (11b), получим:

$$\begin{gathered}d\ln\rho = \alpha\omega_1^3 + \beta\omega_2^3, \qquad \tilde{\omega}_1^2 = -\beta\omega_1^3 + \alpha\omega_2^3,\\ \tilde{\omega}^3 - \beta\omega^2 = \alpha'\omega_1^3 + \beta'\omega_2^3 + \alpha\omega^1, \qquad \alpha\omega^2 = \beta'\omega_1^3 - \alpha'\omega_2^3 + \beta\omega^1.\end{gathered} \tag{12c}$$

Эти формулы содержат четыре независимых параметра: α, β, α', β'. На первом интегральном элементе цепи значения форм (12b) остаются произвольными, на втором они определяются из билинейных уравнений, присоединённых к квадратичным (11b) с определителем, равным

$$\{(\omega_1^3)^2 + (\omega_2^3)^2\}\ \{d\ln\rho\,\omega_1^3 + \omega_1^2\omega_2^3\}.$$

Следовательно, характеры цепи могут быть только $s_1 = 4$, $s_2 = s_3 = 0$. Так как число Картана

$$s_1 + 2s_2 + 3s_3 = 4$$

совпадает с числом независимых параметров, от которых зависит наиболее общий трёхмерный интегральный элемент, то цепь регулярна (М. В. Ф., стр. 249), система — в инволюции и определяет пары конформно наложимых комплексов с произволом четырёх функций одного аргумента.

278. Литературные указания. Проективное изгибание конгруэнции. Проективное изгибание поверхности было введено Фубини. Картан [2] обобщил это понятие на пространство любой фундаментальной группы и любые геометрические образы. В частности, им положены основы проективного изгибания конгруэнций.

Мантре [1], [2], [3], [4] показал, что конгруэнция проективно изгибается если соприкасающийся линейный комплекс зависит только от одного параметра (следовательно, каждый комплекс соприкасается к конгруэнции вдоль целой линейчатой поверхности). Если при этом изгибание особое, то характеристики этих комплексов, т. е. поверхности 2-го порядка, полученные пересечением трёх бесконечно близких комплексов, содержат две неподвижные прямые. Фокальные поверхности — коноиды, для которых эти прямые служат директрисами.

Существенное дополнение к работам Картана сделал Террачини [3], [4], [6]. В первой из этих работ [3] он строит проективный линейный элемент конгруэнции. В другой работе [7] он для конгруэнций не W преобразует систему уравнений, от которой зависит изгибаемость конгруэнции. В качестве приложения он доказывает, что конгруэнции не W с двумя поверхностями 2-го порядка в качестве фокальных поверхностей допускают ∞^2 проективных изгибаний.

В первой [3] из упомянутых выше работ Террачини даёт новую идею изгибания. Он называет налагающимися поверхности, конгруэнции или любые геометрические образы с равными линейными элементами; при этом линейным элементом он называет дифференциальный инвариант двух бесконечно близких образующих элементов геометрического образа. Это определение изгибания он приложил к изгибанию сложных геометрических образов, именно: совокупности поверхности S и конгруэнции K, лучи которой проходят через соответствующие точки поверхности. Требуя, чтобы пара (S, K) налагалась на пару (S', K'), он получает две конгруэнции, присоединённые к одной поверхности.

Фиников [15] рассмотрел изгибание в смысле Картана сложного образа, составленного из пары конгруэнций. Произвольно составленная пара конгруэнций не изгибается, но к любой конгруэнции можно присоединить с тремя произвольными функциями двух аргументов другую конгруэнцию (ассоциированную) так, чтобы получилась изгибаемая пара. Можно отметить целый ряд специальных случаев: пара конгруэнций взаимных относительно нуль-системы линейного комплекса, пара конгруэнций с общими линейчатыми фокальными поверхностями, сопряжённая расслояемая пара, пара противоположных конгруэнций четырёхзвенной периодической последовательности Лапласа и т. д.

Введённое Террачини понятие изгибания 2-го рода позволило этому автору поставить вопрос о сопряжённой сети, две конгруэнции которой налагаются изгибанием 2-го рода. Пантази [3] показал, что всякая сопряжённая сеть на поверхности 2-го порядка обладает этим свойством. Другие сети этого рода зависят от пяти функций одного аргумента; на преобразованиях Лапласа асимптотические соответствуют. Фиников [16] показал, что эти сети суть сети Слотника [2]. Он же исследовал более общий вопрос о последовательностях Лапласа, у которых налагаются две конгруэнции через одну или через две.

Теорема Бам-Зелнковича была им сообщена в семинаре Московского университета по дифференциальной геометрии. Фубини во втором томе своей «Проективно-дифференциальной геометрии» считает этот вопрос трудным вопросом дифференциальной геометрии.

Конформное преобразование Тихоцкого опубликовано автором в 1936 г. [1]. В последнее время Рыжков [1] исследовал проективно изгибающуюся конгруэнцию линейного комплекса.

279. Литературные указания. Метрическое изгибание конгруэнции. Вскоре после Куммера Бельтрами [1] ввёл одно из часто встречающихся преобразований конгруэнции, которое потом Бианки назвал изгибанием. Пусть луч конгруэнции r, проходящий через точку M некоторой поверхности S, неразрывно связан с касательной плоскостью поверхности S в точке M так, что при изгибании поверхности S лучи r перемещаются в пространстве, а конгруэнция (r) испытывает преобразование, которое в метрической теории конгруэнции называется изгибанием. Нормальная конгруэнция при этом изгибании остаётся нормальной.

Вскоре Рибокур [1] доказал, что конгруэнция любых линий (вообще кривых), расположенных в касательных плоскостях некоторой поверхности S и перемещающихся вместе с ними при изгибании поверхности S, останется нормальной и после изгибания поверхности, если она допускала в исходном положении семейство нормальных поверхностей. Он рассматривает [7] конгруэнцию лучей, параллельных нормалям поверхности S. Если при изгибании поверхности S каждый луч конгруэнции увлекается перпендикулярной к нему касательной плоскостью поверхности, то произведение расстояний фокусов от этой плоскости не меняется при изгибании. Если конгруэнция сопряжена поверхности, т. е. её развёртывающиеся поверхности соответствуют на поверхности S сопряжённой системе линий, то она сохранит это свойство во всё время изгибания. Если луч лежит в касательной плоскости поверхности S и его фокусы лежат на сопряжённых касательных поверхности S, то развёртывающиеся поверхности соответствуют этой сопряжённой системе; всё построение сохраняется при всех изгибаниях поверхности S. Наконец, он рассматривает и общий случай изгибания конгруэнции, когда луч конгруэнции, неразрывно связанный с некоторой касательной плоскостью поверхности S и при изгибании S перемещающийся вместе с ней, занимает по отношению к этой плоскости произвольное положение. Конгруэнция остаётся нормальной при всех изгибаниях поверхности S, если поверхность S наложима на поверхность вращения и луч пересекает касательную к параллели.

Кало [1] исследует изгибание нормальной конгруэнции, лучи которой проходят через соответствующие точки поверхности S, производящей изгибание. Конгруэнция остаётся нормальной при всех изгибаниях поверхности S, если она налагается на поверхность вращения (частный случай теоремы Рибокура); при этом фокусы на луче не двигаются. Лучи перпендикулярны к параллелям и наклонены к меридианам под углом σ так, что $r \operatorname{tg} \sigma = \text{const.}$, где r — радиус параллели. Если S_1 — поверхность, пересекающая каждый луч в точке, гармонически сопряжённой точке пересечения с поверхностью S относительно фокусов луча, то S_1 — поверхность того же рода, что и поверхность S. Если поверхность S_1 нормальна конгруэнции, то S поверхность Бонне.

Фиников [1], [7] поставил задачу изгибания конгруэнции с сохранением развёртывающихся поверхностей (развёртывающиеся поверхности при изгибании конгруэнции переходят в развёртывающиеся). Такое изгибание невозможно, если не накладывать на изгибание поверхности S никаких условий; если поверхность изгибается в зависимости от изменения только одного параметра, то коэффициенты второй квадратичной формы поверхности S должны удовлетворять во всё время изгибания линейному, вообще не однородному уравнению с коэффициентами, не меняющимися при изгибании (изгибание на кинематическом основании). Со всякой поверхностью S, изгибающейся на главном основании, можно связать изгибание с сохранением развёртывающихся поверхностей трёх конгруэнций, лучи которых параллельны нормалям поверхности S или лежат в её касательных поверхностях.

В 1915 году Бианки [12] определил новый класс конгруэнций: если поверхность S катится по своему изгибанию S_1 так, что в каждый момент поверхности S и S_1 касаются соответствующими точками и соответствующими направлениями, то произвольная прямая r, связанная с поверхностью S, описывает конгруэнцию особого вида (конгруэнция качения). Все конгруэнции этого вида и только они одни при всех изгибаниях поверхности S сохраняют свои фокусы на каждом луче неподвижными.

Своеобразную проблему изгибания конгруэнции поставил Ионас [5]. Он требует, чтобы пара поверхностей S_1 и S_2, неразрывно связанных с лучами конгруэнции (которые проходят через соответствующие точки обеих поверхностей), при изгибании конгруэнции переходила в пару поверхностей

S_1', S_2', соответственно изометричных первой паре. Бахвалов [1] усилил задачу, требуя, чтобы конгруэнция изгибалась при одновременном непрерывном изгибании обеих поверхностей S_1 и S_2. Он получает изгибание, отмеченное Кало [1], а в частном случае пару поверхностей Бонне.

В ряде работ С. Д. Россинский [1], [2], [4], [5] рассматривал изгибание конгруэнции, когда поверхность S, производящая изгибание, изгибается на главном основании. Если лучи конгруэнции перпендикулярны к касательным плоскостям поверхности и конгруэнция остаётся изотропной во время изгибания, то S — минимальная поверхность и остаётся минимальной при изгибании; развёртывающиеся поверхности конгруэнции соответствуют линиям нулевой длины. Если при том же расположении поверхности S и конгруэнции при изгибании S сохраняются главные линейчатые поверхности конгруэнции, то, кроме предыдущего случая, возможно ещё изгибание поверхности каналов, изгибающейся с сохранением линий кривизны; конгруэнция и в этом случае нормальная.

С. П. Бахвалов [2] рассматривал изгибание в смысле Бельтрами нормальной конгруэнции, при котором фокусы сохраняют своё положение на луче. Если оставить в стороне тривиальный случай, когда изгибающая поверхность S есть фокальная поверхность конгруэнции, то решение получится: 1) если взять минимальную поверхность и конгруэнцию нормалей к ней, 2) если конгруэнция изгибается вместе со своей средней поверхностью, которая налагается на поверхность вращения, и 3) если одновременно изгибаются две поверхности S и S', которые на каждом луче гармонически делят расстояние между его фокусами.

Следует ещё упомянуть прекрасную работу С. С. Бюшгенса и С. Д. Россинского [5] по изгибанию расслояемой пары конгруэнций.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК РАЗВИТИЯ УЧЕНИЯ О КОНГРУЭНЦИИ ПРЯМЫХ

280. Возникновение теории конгруэнций. Учение о конгруэнции прямых и самое понятие конгруэнции могло возникнуть только после того, как родилась мысль положить в основу геометрии как элемент, образующий пространство, прямую линию. Когда принцип двойственности (Понселе) установил равноправность точки и прямой в образовании геометрических образов на плоскости, точки и плоскости — в образовании геометрии пространства, Плюккер [1] (1846) естественно пришёл к мысли рассматривать геометрию пространства, взяв за элемент прямую.

С поразительной ясностью и увлекательностью излагает он в первом томе своего сочинения аналитическую геометрию линейного комплекса и линейной конгруэнции. Второй том, изданный уже после его смерти Клейном, содержит аналитическую геометрию квадратичного комплекса. Дифференциальной геометрии он не касался.

Впрочем, ещё ранее (в 1844 г.), исходя из общих соображений, Грассман вводит координаты линейного пространства $(r-1)$ измерений L_{r-1}, погружённого в проективное пространство $n-1$ измерений P_{n-1} как миноры матрицы, составленной из координат определяющих его точек.

Позднее (1859 г.) эти координаты были независимо найдены Кэли уже для $r=2$, $n=4$, т. е. для прямой в трёхмерном пространстве в том самом виде, как они употребляются сейчас.

В 1872 г. Клейн [1], пользуясь той формой линейных координат, которую дал Кэли, и опираясь на квадратичную зависимость, связывающую пять неоднородных координат прямой, поставил в соответствие многообразие прямых в трёхмерном пространстве с точками гиперповерхности 2-го порядка Q_4^2 в пространстве пяти измерений P_5. Это отображение затем подробно изучает Сегре [1].

Пользуясь теоремой Дарбу [1] об определении конгруэнции W шестью линейно независимыми решениями одного уравнения Лапласа, Бомпиани [1] показал, что плоский пучок касательных к поверхности в данной точке её изображается точками одной прямой на гиперповерхности Q_4^2, а комплекс касательных — так называемой квадратичной конгруэнцией, т. е. конгруэнцией прямолинейных образующих гиперповерхности Q_4^2, причём асимптотические касательные изображаются фокусами на этом луче. Отсюда вытекает возможность применения к этой квадратичной конгруэнции преобразования Лапласа. Правда, это преобразование выводит нас с гиперповерхности Q_4^2 в пространство P_5, и, следовательно, получаемые точки уже не изображают прямых евклидова пространства, но каждой точке P_5 можно поставить в соответствие линейный комплекс, коэффициенты в уравнении которого пропорциональны координатам точки пространства P_5. Этот метод привёл Годо [7] к построению последовательности комплексов, присоединённых к данной точке поверхности и к целому ряду геометрических исследований, среди которых можно прежде всего отметить замечательный результат Цнцейки [1], именно на этом пути получившего конгруэнции R.

Если исключить это направление, исключительно изящное, но стоящее особняком, то только немногие сочинения делают попытки построить теорию конгруэнций в координатах прямых. Здесь следует назвать работы Вельша [1], [2], [3] — очень интересные, но не имевшие последователей, попытку дать геометрию пространства прямых Циндлера, не вполне удачно построенные основные дифференциальные формы Фубини в конце второго тома проективно-дифференциальной геометрии Фубини-Чех [1] и любопытное построение Хаака [1].

Вся остальная теория развивалась в координатах точки, конгруэнция рассматривалась совместно с её фокальными поверхностями, как образ в пространстве точек. Впрочем, основные свойства конгруэнции были найдены значительно ранее Плюккера; теория конгруэнций появилась на свет почти одновременно с теорией поверхностей.

Двупараметрическую систему прямых в пространстве E_3 и притом самого общего вида впервые рассматривал Монж [1] [1]). Он ставит задачу определения наивыгоднейших траекторий для переноса земли из выемки на насыпь. При этом каждый элемент объёма земли описывает прямую линию. Так как элементы объёма, расположенные на одной прямолинейной траектории, очевидно, будут двигаться по этой траектории, то совокупность прямых образует конгруэнцию. Таким образом, Монж приходит к задаче исследования конгруэнции самого общего вида. Он устанавливает, что два бесконечно близких луча конгруэнции вообще не пересекаются. Требование пересечения их приводит к двум направлениям, которые соответствуют двум развёртывающимся поверхностям, проходящим через луч. Далее он рассматривает тот случай, когда эти развёртывающиеся поверхности ортогональны друг к другу, и показывает, что в таком случае существуют поверхности, ортогональные ко всем лучам конгруэнции, т. е. конгруэнция образована нормалями некоторой поверхности. Развёртывающиеся поверхности высекают на ней ортогональную сеть линий — линий кривизны; вдоль каждой такой линии нормали к поверхности образуют, очевидно, развёртывающуюся поверхность, а отрезок луча между ортогональной поверхностью и ребром возврата равен радиусу кривизны плоского сечения поверхности плоскостью, касательной к развёртывающейся поверхности.

281. Первая теория конгруэнций. К этим вопросам вернулся ученик Монжа Малюс [1] уже с точки зрения оптики. Он опять разделяет два семейства развёртывающихся поверхностей и показывает, что ортогональность их характеризует нормальность конгруэнции. Затем он ставит проблему отражения и преломления нормальной конгруэнции. Теорема о сохранении нормальной конгруэнции, носящая его имя, доказывается им в случае отражения лучей, исходящих из одной точки, и в случае однократного преломления.

После Монжа следующий шаг в развитии общей теории конгруэнций сделал Гамильтон [1]. Как и Малюс, он подошёл к ней с точки зрения оптики, но, отметив, что после прохождения через кристаллы пучок лучей перестаёт быть нормальной конгруэнцией, он в конце своей работы останавливается на общей теории конгруэнций. Полученная им формула, носящая теперь его имя,

$$r = r_1 \cos^2\omega + r_2 \sin^2\omega,$$

где r — абсцисса основания общего перпендикуляра двух конечных близких лучей, ω — угол этого перпендикуляра с перпендикуляром в граничной точке

---

[1]) См. вводную статью Выгодского к переводу «Приложений анализа к геометрии», ОНТИ, 1936.

и r_1, r_2 — абсциссы граничных точек, показывает, что ему было известно и существование граничных точек и ортогональность главных плоскостей.

И Малюс и Гамильтон обращались к теории конгруэнций только в силу потребности оптики. Впервые строгую теорию дифференциальной геометрии конгруэнции построил Куммер [1]. Задавая луч некоторой точкой его (точка исходной поверхности) и направляющими косинусами нормали, он строит две дифференциальные формы, аналогичные формам гауссовой теории поверхностей, и получает все результаты Гамильтона в формулах, содержащих только коэффициенты обеих форм. Первые пять параграфов его мемуара содержат уравнения для определения координат (на луче) фокусов и граничных точек, дифференциальные уравнения главных и развёртывающихся поверхностей. Автор отмечает сопряжённость фокальной сети, показывает, что линия пересечения фокальных полостей (если она существует) является огибающей или местом точек возврата рёбер возврата развёртывающихся поверхностей. Он вводит понятие плотности конгруэнции как предела отношения площади сферического изображения пучка лучей конгруэнции к площади нормального сечения пучка. Площади сечений одного пучка относятся, очевидно, как плотности в точках сечений. Для плотности он получает формулу

$$\Theta = \frac{1}{(\rho_1 - R)(\rho_2 - R)},$$

где ρ_1 и ρ_2 — абсциссы фокусов и R — абсцисса рассматриваемой точки луча. Затем он рассматривает угол поворота между двумя точками A и B какого-нибудь луча конгруэнции относительно его бесконечно близкого, т. е. угол между перпендикулярами, опущенными из точек A и B первого луча на второй. Для лучей в одной фокальной плоскости этот угол всегда равен нулю. Для всех других он меняет знак при переходе через фокальную плоскость. Для любой пары лучей угол поворота между двумя фокусами равен углу фокальных плоскостей. Возвращаясь к рассмотрению бесконечно тонкого пучка лучей, он показывает, что в фокусах площадь сечения вытягивается в прямую линию, которая располагается в фокальной плоскости. Эта площадь сжимается в точку, если граничные точки совпадают. Исключительные лучи, для которых это имеет место, автор называет главными.

Основные формы Куммера не инвариантны: при заданной конгруэнции они зависят от выбора исходной поверхности. Они недостаточны для определения конгруэнции. Формулы Куммера содержат отдельно две слагающие f и f' среднего коэффициента второй формы, равенство которых является, например, условием нормальности конгруэнции. Куммер не ставит вопроса о возможности произвольного задания этих двух форм; он не ищет дифференциальных уравнений, связывающих семь функций — коэффициентов двух форм, которые он вводит. Куммер пишет формулы для определения тех или иных элементов конгруэнции (фокусы, граничные точки и т. д.), но нигде не говорит, можно ли определить самую конгруэнцию по заданным формам. Тем не менее его работа имела большое значение для последующего развития теории конгруэнции, его формулы вошли в учебники дифференциальной геометрии (Бианки, Эйзенхарт и т. д.) и до сих пор в метрических вопросах теории конгруэнций многие авторы пользуются его обозначениями.

282. Обзор различных теорий конгруэнций. Было сделано много попыток видоизменить теорию Куммера или построить её на новых принципах. Большинство из них осталось без применений. Так Кэли [1] определяет конгруэнцию векторным полем; если направляющие косинусы луча α, β, γ даны функциями точки, через которую луч проходит, то совокупность лучей составит конгруэнцию, если выполнены условия:

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} + \gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)\alpha = 0, \qquad \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} + \gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)\beta = 0,$$
$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} + \gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)\gamma = 0.$$

Гортон [1] пишет теорию Куммера в кватернионах. Вельш [1] в довольно трудной символике строит теорию конгруэнций в координатах прямой. Чезаро [1] в духе своей внутренней геометрии определяет луч компонентами относительного движения по осям подвижного трёхгранника. Демулен [1] прилагает к линейчатым образам векторный метод. Кноблаух [1], [2], отмечая неудачу Куммера в его стремлении определить конгруэнцию двумя квадратичными формами, вводит одну квадратичную и одну билинейную форму.

Санния [3], [6] определяет конгруэнцию двумя квадратичными формами, не зависимыми от исходной поверхности.

Шесть коэффициентов этих двух форм удовлетворяют (кроме уравнения Гаусса для сферы) ещё одному уравнению в частных производных 2-го порядка и определяют конгруэнцию вплоть до её положения в пространстве.

Бурали-Форти [1] и Пьери [1] переносят в теорию конгруэнций и комплексов теорию абсолютного дифференцирования. Развитие геометрии с другими основными группами и прежде всего проективно-дифференциальной геометрии поставило перед теорией конгруэнций новые вопросы.

Фубини (см. Фубини-Чех [1]) строит на основе дифференциальных форм теорию конгруэнции в проективном пространстве. Слотник [1], опираясь на принцип перенесения Штуди и работы Бляшке, вводит в теорию конгруэнций символику тензорного анализа. Хаак [1] определяет конгруэнцию в аффинном пространстве одной квадратичной и одной кубичной формой, исходя из линейных координат луча. Дубнов [1], [2] вводит основные тензоры в метрическую теорию конгруэнций, определяя луч единичным вектором направления и моментом относительно начала. Мантре [1] и Чех (см. Фубини-Чех [1]) первые приложили к теории конгруэнций метод Картана. Фиников [5], [12], [18] строит проективную теорию конгруэнций с помощью подходяще подобранного трёхгранника.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ ПО ТЕОРИИ КОНГРУЭНЦИЙ

Альфан, Ж. (Halphen, G.):

[1] Théorème concernant les surfaces, dont les rayons de courbure principaux sont liès par une relation. *Bull. Soc. Math. de Fr.* **4**, 94, **1876**.

Амбросетти, М. Т. (Ambrosetti, M. T.):

[1] Determinazione proiettiva di una congruenze W. *Rend. Lincei* **(5), 29**, 121—123, 1920.

Бадальян, В. Х.:

[1] Геометрическая характеристика конгруэнции с постоянным инвариантом Вэльша. *Доклады АН СССР*, **33**, 339, 1941.

Бахвалов, С. В.:

[1] Sur la déformation simultanée de deux surfaces associées. *CR* **188** 1364, 1929;
Sur un couple de surfaces applicables. *Bull. des Sciences* (2), **59**, 1935.

[2] Об изгибании конгруэнции нормалей. *Матем. Сб.* **I**, 243—251, 1936.

Бельтрами, Е. (Beltrami, E.):

[1] Ricerche di Analisé Applicata alla Geometria. *Giornale di matematiche* **2**, 281, 1864.

Бертран, Ж. (Bertrand, J.):

[1] Sur la théorie des surfaces. *J. de Math.* (1), **9**, 153, 1844.

Бехари Рам (Behari Ram):

[1] A significant integral invariant in the theory of rectilinear congruences *J. Indian Math. Soc.* **I**, 135—142, 1934.

[2] On Levi-Civita's «anormalita» of a rectilinear congruence. *J. Indian Phys. Math.* 53—55, 1936.

[3] Ruled surfaces through a ray of a rectilinear congruence. *J. Indian Math. Soc.* **2**, 91—95, 45—50, 163—164, 1936.

Бианки, Л. (Bianchi, L.):

[1] Über die Flächen mit konstanter negativer Krümmung. *Math. Ann.* **16** 9—40, 1879.

[2] Sopra i sistemi tripli ortogonali di Weingarten. *Annali di Mat.* **(2) 13**, 177—234, 1885.

[3] Sui sistemi tripli ortogonali di Weingarten. *Annali di Mat.* (2), **14**, **1886**.

[4] Sui sistemi doppiamente infiniti di retti. *Annali di Mat.* **(2) 15**, **161—172, 1887**.

[5] Sopra alcune nuove classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali. *Annali di Mat.* **(2)**, **18**, 301—358, 1890.

[6] Teoria delle transformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde. *Mem. di Soc. Ital. a Scienze* (3), 14, 72, 1905.

[7] Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sui paraboloidi. *Annali di Mat.* (3), **12**, 263—344; *Rend. Palermo* **22**, 75—96; *Rend. Lincei* (5) **161**, 707—716, 1907.
[8] Lezioni di geometria differenziale, **3**, 361, Pisa, 1909. Théorie des transformations des surfaces applicables sur les quadriques générales. *Mem. sav. étr.* (2), **34**, 274.
[9] Sui sistemi coniugate permatenti nelle deformate delle quadriche. *Rend. Lincei* (5), 22_2, 5, 1913.
[10] Alcune ricerche sul rotolamento di superficie applicabili. *Rend. Palermo* **38**, 1—49, 1914.
[11] Sopra una proprieta caretteristica delle congruenze rettilinee di rotolamento. *Rend. Lincei* $\mathbf{24}_1$, 3—16, 1915.
[12] Sulle congruenze rettilinee di rotolamento. *Rend. Palermo* **39**, 177—229, 1915.
[13] Sopra una proprieta caratteristica delle superficie della classe $K = -\frac{1}{\{\varphi(\alpha)+\psi(\beta)\}^2}$. *Rend. Lincei* (5) $\mathbf{26}_1$, 575—585, 1917.

Бомпиани, Е. (Bompiani, E.):
[1] Sull equazione di Laplace. *Rend. Palermo* **34**, 383, 1912.
[2] Sur les configurations de Laplace. *CR* **156**, 603—605, 1913.
[3] Rizoluzione geometrica del problema di Moutard. *Rend. Lincei* (5) $\mathbf{24}_1$, 190, 1915.
[4] I fondamenti della teoria proiettiva delle curve e delle superficie. *App.* III a *Geom. Prolett.-diff. Fubini-Cech.* II, 671—727, 1927.

Бюрали-Форти (Burali-Forti C.):
[1] Sulla geometria differenziale assoluta delle congruenze e dei complessi rettilinei. *Atti Torino* **45**, 4—22, 1910.

Бюшгенс, С. С.
[1] Конгруэнции прямых и их приложение к поверхностям постоянной кривизны. *Матем. Сб.* **25**, 490—500, 1605.
[2] О циклических системах. *Матем. Сб.* **27**, 205—210, 1909.
[3] О циклических конгруэнциях и поверхностях Бианки. *Матем. Сб.* **30**, 296—313, 1916.
[3] Изгибание на главном основании. Москва, 1917.

Бюшгенс и Россинский:
Sur les couples de congruences stratifiables et sur la déformation des surfaces. *Матем. сб.* **36**, 339—370, 1929.

Вильчинский, Е. (Wilczynski, E. J.):
[1] Invariants of a system of linear partial differential equations and the theory of congruences of rays. *Am. J. of Math.* **26**, 319—360, 1904.
[2] On the general theory of congruences of straight lines. *Bull. Am. Math. Soc.* (2) **16**, 461, 1910; Sur la théorie générale des congruences. *Mem. Belg.* (2), **3**, 86, 4, 1911.
[3] The General Theory of Congruences. *Trans. Am. Math. Soc.* **16**, 311, 1915.

Винченсини, П. (Vincensini, P.):
[1] Sur trois types de congruences rectilignes. *Ann. Toulouse* (3) **19**, 93—166, 1927.
[2] Sur une famille de congruences rectilignes attachées aux surfaces applicables sur les surfaces de révolution. *Bull. des Sciences* (2), **54**, 117, 1930.

[3] Sur la déformation des surfaces et sur quelques propriétés des surfaces spirales. *Bull. Soc. de Fr.* **59**, 211—228, 1931.
[4] Congruences isotropes et surfaces minima. *CR* **193**, 689—690, 1931.
[5] Sur une transformation des congruences isotropes. *CR* **193**, 1144—1146, 1931.
[6] Sur la déformation de certaines congruences rectilignes. *Ann. Toulouse* (3) **24**, 49—66, 1932.
[7] Congruences à surface moyenne plane et questions qui s'y rattachent. *Bull. Math.* (2), **56**, 366—384, 1932.
[8] Transformation de Ribaucour des surfaces de Guichard. Réseaux cycliques. Nouvel aspect de la transformation d'Eisenhart. *CR* **200**, 1266, 1935.
[9] Sur certaines suites de Laplace. *CR* **202**, 897, 1936.
[10] Sur les suites de Laplace contenant des éléments orthogonaux. *J. de Math.* (9) **17**, 327—366, 1938.

Воло, А. (Vaulot, A.):
[1] Congruences rectilignes qui sont en même temps W et de Ribaucour. Thèse Paris, 95 стр., 1923, J. Éc. Pol. 1923.

Востер, М. С. (Voster, M. C.):
[1] Rectilinear congruences referred to special surfaces. *Annals of Math.* (2) **25**, 159—180, 1924.

Вэльш, Е. (Waelsch, E.):
[1] Zur Infinitesimalgeometrie der Strahlencongruenzen und Flächen. *Berichte, Wien.* **100**, 219—270, 1891.
[2] Über Tangentencongruenzen einer Fläche. *Berichte, Wien.* **102**, 757—767, 1893.
[3] Sur le premier invariant différentiel projectif des congruences rectilignes. *CR* **118**, 736—738, 1894.

Гамбье, Б. (Gambier, B.):
[1] Couples de deux surfaces minima se correspondant comme focales d'une congruence rectiligne, avec conservation des lignes asymptotiques et des lignes de longueur nulle. *CR* **171**, 842—845, 1920.
[2] Surfaces de Jonas et surfaces R. *CR* **204**, 1858, 1937.

Гамильтон, В. (Hamilton, W.):
[1] Theory of systems of rays. *Trans. Royal Irish. Ac.* **15**, 69, 1828; 16, 1830.

Гензель, К. (Hensel, K.):
[1] Theorie der unendlich dünnen Strahlenbündel. *J. für Math.* **102**, 273—303, 1888.

Гишар, К. (Guichard, C.):
[1] Surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques et congruences rapportées à leurs développables. *Ann. Éc. Norm.* (3) **6**, 333—348, 1889.
[2] Recherches sur les surfaces à courbure totale constante et sur certaines surfaces qui s'y rattachent. *Ann. Éc. Norm.* (3), **7**, 233—264, 1890.
[3] Détermination des congruences telles que les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale. *CR* **110**, 126—127, 1890; Sur une classe particulière de congruences de droites. *CR* **112**, 1424—1426, 1891.
[4] Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques. *Ann. Éc. Normale* (3) **14**, 467—516, 1897; **15**, 179—227, 1898; **20**, 75—132, 181—240, 241—288, 1903.
[5] Théorie des réseaux. *Mémorial des Sciences Math.* **74**, 64, 1935. Application. *Там же* **77**, 75, 1936.

Годо, Л. (Godeaux, L.)·
[1] Sur les congruences formées par les directrices de Wilczynski d'une surface. *Bull. Ac. Belg.* 335—345, 1928; Sur les congruences de M. Goursat et les surfaces ayant même quadriques de Lie. *Там же* 455—466.
[2] Sur certaines suites de Laplace. *Mém. Soc. Liège* 1—16, 1929; Sur la transformation de Guichard et sur certaines quadriques considérées par M. Démoulin. *Bull. Ac. Belg.* 953—956, 1929.
[3] Sur certaines suites de Laplace associées à une suite de Laplace donnée. *Bull. Ac. Belg.* 264—273, 1930; Sur les groupes de trois congruences W ayant une nappe focale commune, *Там же* 983—988.
[4] Remarque sur la théorie des suites de Laplace. *Mém. Soc. Liège*, 1—8, 1931; Sur les surfaces donnant lieu, dans l'espace reglé, à des suites de Laplace terminées. *Bull. Ac. Belg.* 730—739, 1931.
[5] Note sur les congruences W. *Bull. Ac. Belg.* (5), 18, 662—671, 1932.
[6] Sur une suite de surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques. *Bull. Ac. Belg.* (5) **20**, 495—504, 1934.
[7] La théorie des surfaces et l'espace reglé. *Actual. Hermann.* **138**, 36, 1934.
Гортон, В. С. Л. (Gorton, W. C. L.):
[1] Lien Congruences. *Amer. J. of Math.* **11**, 347—367, 1888.
Гурса, Э. (Goursat, E.):
[1] Sur les équations linéares et la méthode de Laplace. *Amer. J. of Math.* 347, 1896.
Дарбу, Г. (Darboux, G.):
[1] Leçons sur la théorie des surfaces, **2**, 16—22, Paris, 1888.
[2] Sur un problème relatif à la théorie des courbes gauches, Paris, 1908.
Дельглейз, А. (Delgleize, A.):
[1] *Mém. Soc. Liège* **16**, 1, 1931.
Демулен, А. (Demoulin, A.):
[1] Mémoire sur l'application d'une méthode vectorielle à l'étude de divers systèmes de droites (complexes, congruences, surfaces reglées). Bruxelles, VII + 118 стр. in 8°, 1894.
[2] Sur une propriété métrique commune à trois classes particulières de congruences rectilignes. *CR* **118**, 242—244, 1894.
[3] Note sur les deux classes particulières de congruences rectilignes. *Bull. des Sciences* (2) **18**, 233—240, 1894.
[4] Sur la théorie générale des congruences rectilignes. *CR* **130**, 1701—1703, 1900.
[5] Sur deux classes particulières de congruences de Ribaucour. *CR* **133**, 628—630, 1901.
[6] Sur la quadrique de Lie. *CR* **147**, 493—496, 1908.
[7] Sur les surfaces R et les surfaces Ω. *CR* **153**, 590—593, 705, 797, 1911.
[8] Sur les systèmes Θ et sur les systèmes R. *Bull. Ac. Belg.* **1919**, 273, 1919.
[9] Sur la transformation de Guichard et sur les systèmes K. *Bull. Ac. Belg.* 103, 108—112, 1919.
[10] Sur deux transformations des surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux ou trois points caractéristiques. *Bull. Ac. Belg.* (5), **19**, 1352—1363, 1933.
Драш, И. (Drach, I.):
[1] Sur les classes remarquables de congruences W. *CR* **176**, 1591, 1923.
[2] Sur deux classes remarquables de congruences W. *Bull. Soc. de Fr.* **52**, 434—467, 1924.
Дубнов, Я. С.
[1] Sur les tenseurs fondamentaux d'une congruence rectiligne. *CR* **192**, 399—401, 1931.

[2] Die Differentialgeometrie der Strahlencongruenzen in tensorieller Darstellung. *Труды семинара по векторному и тензорному анализу.* Москва, 1933.
Дюпен, Ш. (Dupin, Ch.):
[1] Application de Géométrie et de Mécanique. Quatrième Mémoire: Sur les routes suivies par la lumière et par les corps élastiques, en général, dans les phénomènes de la réflexion et de la réfraction. Paris, 1816.
Егоров, Д. Ф.:
[1] Sur les congruences W à focales reglées. *Rend. Lincei* (6), **10**, 145, 1929.
Ермолаев, Л. С.
[1] Congruences rectilignes dont les normales des deux nappes focales engendrent un couple stratifiable. *Bull. Sc. Math.* (2), **58**, 78—79, 1934.
Зейлигер, Д. Н.:
[1] Основные формулы комплексной линейной геометрии. II. Теория конгруэнций. Казань, 1908. Комплексная линейчатая геометрия. ГТТИ. Москва, 1934.
Йонас, Г. (Jonas, H.):
[1] Über die Konstruktion der W-Kongruenzen zu einem gegebenen Brennflächenmantel und über die Transformation der R-Flächen. *J. Deutsch. Math. Ver.* **29**, 40—74, 1920.
[2] Über die sphärische Abbildung der W-Strahlensysteme und einen Satz von Darboux. *Arch. Math. u. Phys.* (3), **28**, 45—52, 1919—1920.
[3] Sopra una classe di transformazioni asintotiche, applicabili in particolare alle superficie la cui curvature e proporzionale alla quarta potenza della distanza del piano tangente ad un punto fisso. *Annali di Mat.* (3) **30**, 223—255, 1921.
[4] Über eine Klasse von Flächen die ein Gegenstück zu den von Demoulin und Tzitzeica betrachteten R-Flächen bilden. *Sitzber. Berl. Math. Ges.* **19**, 18—30, 1921.
[5] Über ein die Verbiegung der Linienkongruenzen betreffendes Problem und über die Transformation der Bonnetschen Flächenpaare. *Math. Ann.* **86**, 79—98, 1922.
[6] Aufstellung einer Transformationstheorie für eine neue Klasse aufeinander abwickelbarer Flächen. *Math. Ann.* **92**, 244—257, 1924.
[7] Über eine neue geometrische Eigenschaft der Bianchischen Transformation der auf die Mittelpunktsflächen zweiten Grades abwickelbareren Flächen. *Math. Ann.* **99**, 435—478, 1928.
[8] Flächen mit Bertrandschen Kurven und pseudosphärische Flächen und Strahlensysteme. *Math. Ann.* **103**, 720—751, 1930.
[9] Ausdehnung der Bianchi-Transformation B_k auf gewisse zweifach unendliche Systeme kongruenter einschaliger Hyperboloide und damit verbundene Normalenkongruenzen. *Sitzber. preuss. Akad. W.* **17**, 264—301, 1934.
[10] Über die Verallgemeinerung des in der Biegungstheorie der Flächen zweiten Grades auftretenden intriseken Transformationsprozesses H. *Berichte, Leipzig* **84**, 41—78, 1935.
[11] Eine neue Eigenschaft der pseudosphärischen Strahlenkongruenzen. *J. für Math.* **175**, 159—168, 1936.
[12] Ein allgemeiner Satz über W-Kongruenzen mit Anwendungen auf Laplacesche Zyklen, Biegungsflächen des inschaligen Hyperboloids und schiefe Weingartensche Systeme. *Math. Ann.* **114**, 237—274, 1937.
[13] Allgemeine Transformationstheorie der konjugierten Systeme mit viergliedrigen Laplaceschen Zyklen. *Math. Ann.* **114**, 749—780, 1937.
Калапсо, П. (Calapso, P.):
[1] Intorno alle congruenze sulle cui superficie focali si corrispondono le linee di curvatura. *Annali di Mat.* (4) **5**, 231—252, 1928.

[2] Una trasformazione delle congruenze cicliche. *Annali di Mat.* (4) **7**, 213—224, 1930.
[3] Intorno alle congruenze sulle cui superficie focali si corrispondono le linee di curvatura. *Annali di Mat.* (4) **8**, 201—213, 1930.
[4] Sur la configuration (*T*) de Finikoff et sur les éléments projectifs qui s'y rattachent. *Доклады АН СССР* **2**, 441—446, 1935.
[5] Sur la configuration de M. Finikoff et sur les éléments projectifs qui s'y rattachent. *Матем. Сб.* **42**, 451—458, 1935;
Sur les transformations des réseaux O. *Там же*, 465—469.
Sur la transformation des surfaces minimales-projektives. *Там же*, 471—472.
Sur la configuration (*T*) de M. Finikoff à caractéristique 1. *Там же*, 461—464.

Кало, Б. (Calo B.):
[1] Su alcuni problemi relativi alla deformazione delle congruenze. *Rend Napoli* (3) **10**, 43—61, 162—179, 1904.

Картан, Э. (Cartan, E.):
[1] Le principe de dualité et certaines intégrales multiples de l'espace tangentiel et de l'espace réglé. *Bull. Soc. Math. de Fr.* 24, 140—177, 1896.
[2] Sur le problème général de la déformation. *Comptes Rendus du Congrès de Strassbourg*, 397—406, 1920.
[3] Sur une classe des surfaces apparentées aux surfaces *R* et aux surfaces de Jonas. *Bull. des Sciences* 58, 1944.

Кёнигс, Г. (Koenigs, G.):
[1] Sur les systèmes conjugués à invariants égaux. *CR* **113**, 1022—1024, 1891.

Коммерелль, К. (Kommerell, K.):
[1] Strahlensysteme und Minimalflächen. *Math. Ann.* **70**, 143—160, 1910.

Коссера, E. (Cosserat, E.):
[1] Sur les congruences de droites et sur la théorie des surfaces. *Ann. Toulouse* **7**, 1—69, 1893.
[2] Sur un théorème de M. Darboux et sur les congruences de droites. *Там же* **8**, 1—9, 1894.
[3] Sur les congruences rectilignes et sur le problème de Ribaucour. *CR* **118**, 335—397, 1894.

Клейн, Ф. (Klein, F.):
[1] Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie. *Math. Ann.* **5**, 257, 1872.

Кноблаух, И. (Knoblauch, I.):
[1] Grundformeln der Theorie der Strahlensysteme. *Verh. d.* **3** *intern. Math. Kongr. Heidelberg*. 373—374, 1905.
[2] Strahlensysteme und Differentialformen. *Sitzber Berlin M. Ges.* **14**, 79—84, 1915.

Куммер, Е. (Kummer, E.):
[1] Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme. *J. für Math* **57**, 189—230, 1860.

Кэмпбелл, И. Е. (Campbell, I. E.):
[1] On cyclic congruences. *Proc. London Math. Soc.* (2) **8**, 383—392 1910.

Кэли, А. (Cayley, A.):
[1] On systems of rays. *Messenger of Math.* (2) **17**, 73—78, 1887.

Леви-Чивита, Т. (Levi-Civita, T.):
[1] Complementi al teorema di Malus-Dupin. *Rend. Lincei* (5) 9_1, 185—189 237—245, 1900.

Ли, С. (Lie, S.):
[1] Zur Theorie der Flächen konstanter Krümmung. *Archiv for Math. og Naturvidenskab*, Christiania, 1880.

Малюс, Э. (Malus, E.):
[1] Mémoire sur L'Optique. *J. Éc. Pol.* 84, 1808.

Маннхейм, А. (Mannheim, A.):
[1] Mémoire sur les pinceaux de droites et les normalies, contenant une nouvelle exposition de la théorie de la courbure des surfaces. *J. de Math.* (2) **17**, 109—166, 1872.

Мантре, П. (Mentré, P.):
[1] Invariants projectifs des congruences *W. Bull. Soc. Math. de Fr.* **51**, 202—212, 1923.
[2] Sur les déformations projectives de certaines congruences de droites. *CR* **179**, 22, 1924.
[3] Déformation projective singulière des congruences de Koenigs. *Association Franç.* Grenoble 1925, 50—52.
[4] Sur les déformations projectives simultanées d'une congruence et de ses deux surfaces focales. *CR* **181**, 495, 1925.

Маслов, А. Ф.:
[1] Sur une classe de congruence *W. CR* **187**, 794, 1928.
[2] Об одном классе конгруэнций Бианки. *Матем. Сб.* **40**, 196—209, 1933.

Матисова, А. М.:
[1] О конгруэнциях Рибокура. *Изв. Казанск. Физ.-Матем. Общ.* (2), **24**, 7—13, 1924.

Михалеско, Т. (Mihailesco, T.):
[1] Sur une classe de réseaux à transformés de Laplace en correspondance asymptotique. *CR Ac. Roumaine* **3**, 121, 1939.

Монж, Г. (Monge, G.):
[1] Mémoire sur la théorie des déblais et remblais. *Mém. des div. sav.*, 1781.
[2] Application de l'Analyse à la Géométrie. Paris-Bachelier, 1850.

Пантази, А. (Pantazi, A.):
[1] Sur les quadruples stratifiables conjugués. *CR* **198**, 1668, 1894.
[2] Sur les couples transformables. *Ann. Roum. de Math.* **2**, 3—34, 1935.
[3] Sur les couples de congruences stratifiables appartenant à des complexes linéaires. *Bull. Math. Soc. Roum.* $\mathbf{38}_1$, 53—66, 1936.

Пето, А. (Petot, A.):
[1] Sur une classe de congruences de droites. *CR* **113**, 841—844, 1891.

Пьери, М. (Pieri, M.):
[1] Sulla rappresentazione vettoriale delle congruenze di raggi. *Rend. Palermo* **33**, 217—246, 1912.

Пиконе, М. (Picone, M.):
[1] Sulle congruenze rettilinee *W. Rend. Palermo* **37**, 212—244, 1914; **39**, 51—73, 1915.

Плюккер, Ю. (Plücker, J.):
[1] System der Geometrie des Raumes, 1846.
Neue Geometrie des Raumes, 1868—1869.

Потоцкий, М. В.:
[1] Détermination des complexes dont toutes les congruences sont *W. CR* **199**, 12, 1936.

Пшеборский, А. П.:
[1] Некоторые приложения теории линейчатых конгруэнций. *Сообщения Харьковского матем. общества* (2) **7**, 49—226, 1902.
[2] О некоторых конгруэнциях прямых. *Матем. сб.* **23**, 764—773, 1902.

Рагацци, Е. (Ragazzi, E.):
[1] Sopra una classe di transformazioni delle superficie isotermo-asymptotiche ed il relativo teorema di permutabilita. *Rend. Palermo* **45**, 200—210, 1921.

Рибокур, А. (Ribaucour, A.):
[1] Sur la déformation des surfaces. *CR* **70**, 330, 1870.
[2] Sur les développées des surfaces. *CR* 74, 1399, 1872.
[3] Sur la théorie des lignes de courbure. *CR* **74**, 1489, 1570, 1872.
[4] Sur les systèmes cycliques. *CR* **76**, 478, 1873; Sur les faisceaux de cercles, *CR* **76**, 830, 1873.
[5] Étude des Elassoides ou surfaces à courbure Moyenne Nulle, Mém. sav. etr. Acad. Belg. 44, 2, 1881.
[6] Sur les systèmes cycliques. *CR* **113**, 304, 324, 1891.
[7] Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes. *J. de Math.* (4), **7**, 5—108, 219—270, 1891.

Розенфельд, Б. А.
[1] Метрический метод в проективно-дифференциальной геометрии и ее конформных и контактных аналогах. *Матем. Сб.* **22**, **(64)**, 457—492, 1948.

Розе, О. (Rozet, O.):
[1] Sur une congruence particulière de droites. *Bull. Ac. Belg.* (5), **18**, 358—360, 1932.
[2] Sur les congruences *W* dont le complexe osculateur dépend d'un seul paramètre. *Bull. Soc. Sc. Liège* **3**, 170, 1934.
[3] Sur les congruences de droites. *Bull. Ac. Belg.* (5) **20**, 140—150, 1934.

Россинский, С. Д.:
[1] Sur un cas de déformation des congruences isotropes à réseau conjugué persistant. *CR* **197**, 1562, 1933.
[2] Sur une transformation des surfaces minima. *CR* **198**, 1108, 1934.
[3] Sur la déformation des surfaces avec réseau conjugué persistant. *CR* **200**, 1268, 1935.
[4] Déformation d'une congruence rectiligne avec conservation des surfaces réglées principales. *CR* **200**, 515, 1268, 1935.
[5] Sur un cas de déformation des congruences isotropes et sur une transformation des surfaces minima qui s'y rattachent. *Rend. Palermo* **59**, 82—96, 1935.
[6] Déformation d'une congruence rectiligne avec conservation des surfaces réglées principales. *Ann. di Mat.* (4), **14**, 349—358, 1936.
[7] Об изгибании прямолинейной конгруэнции с сохранением главных линейчатых поверхностей. *Доклады АН СССР* **18**, 319, 1938; **19**, 349, 435; **20**, **85**, 89, 1938.

Рыжков, В. В.
[1] К вопросу о проективном изгибании конгруэнций. *Доклады АН СССР*, **59**, 17, 1948.

Саннна, Г. (Sannia, G.):
[1] Nuova esposizione della geometria infinitesimale delle congruenze rettilinee. *Ann. di Mat.* (3) **15**, 143—185, 1908.
[2] Congruenze rettilinee que possono deformarsi conservando il parametro medio. *Giorn. di Batt.* (2) **15**, **16**, 299—312, 1908.
[3] Sul teorema di Moutard e la sua interpretazione geometrica per le congruenze *W*. *Atti. Torino* **43**, 745—762, 1908.
[4] Nuove formole utili per lo studio delle congruenze rettilinee. *Atti. Torino* 44, 567—579, 1909.
[5] Geometria differeziale delle congruenze rettilinee. *Math. Ann.* **68**, 409—416, 1910. Sull inviluppata media di una congruenza di rette. *Atti. Torino* **45**, 56—78.

[6] Su due forme differenziali che individuano una congruenza o un complesso di retti. *Rend. Palermo* **31**, 244—256, 1911; 67—74, 1912.
[7] Nuovo metodo per lo studio delle congruenze e dei complessi di raggi. *Rend. Palermo* **33**, 328—340, 1912.

Сегре, С. (Segre, C.):
[1] Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche. *Torino Mem.* (2) **36**, 87, 1885.
[2] Le congruenze rettilinee *W* aderenti a due superficie rigate. *Atti Torino* **42**, 539—550, 1907.
[3] Sulle congruenze rettilinee *W*, di cui una od ambe le falde focali sono rigate. *Atti. Torino* **49**, 291—303, 1914.

Слотник, М. (Slotnick, M.):
[1] A Methode of Applying Tensor Analyses to the study of Rectilinear Congruences. *Math.* Z. **28**, 107—115, 1928.
[2] On the projective differential geometry of conjugate nets. *Amer. J. of Math.* **53**, 142—152, 1931.

Су, Бушин (Su, Buchin):
[1] On the surfaces whose asymptotic curves belong to linear complexes.
I. *Tohoku Math. J.* **40**, Part II, **408—420**, **1935**.
II. *Tohoku Math. J.* **40**, Part II, **433—448**, **1935**.
III. *Tohoku Math. J.* **41**, Part. I, 1—19, 1935.
IV. *Tohoku Math. J.* 41, Part. I, 203—215, **1935**.
[2] On the surfaces whose asymptotic curves belong to linear complexes.
V. *Tohoku Science Rep.* **1**, **24**, 601—633, **1936**.
VI. *Tohoku Science Rep.* 1, 24, 634—642, 1936.
[3] A Note on the sequences of Laplace of period four. *The Tohoku Math. J.* **43**, 4—10, 1937. *Science Rep. Tohoku Un.* **(1) 25**, 227—256, 1936.
[4] Configuration (*T*) of Finikoff, *J. Chin. Math. Soc.* **1**, 174—**206**. 1937.

Сьянг, 4 (Hsiung Chuan — Chih):
[1] Rectilinear congruences *Trans. Am. Math. Soc.* **66**, 419, 1949.

Террачини, А. (Terracini, A.):
[1] Sulle congruenze *W* di cui una falde focale e una quadrica. *Scritti mat. oferti ad Enrico d'Ovidio* 149—157, 1918.
[2] Sulle superficie con un sistema di asintotiche in complessi lineari. *Atti. Torino* 59, 441—461, 1924.
[3] Su alcuni elementi lineari proiettivi. *Ann. Scuola Norm. de Pisa* (2), **2**, 401—428, 1933.
[4] Sulle congruenze di rette piu volte associabili respetto a une superficie. *Rend. Lincei* (6), **18**, 291—296, 1933; **18**, 93—97, 1933.
[5] Sullo scarto della normalita delle congruenze rettilinee. *Bol. Un. Mat It.* **12**, 7—12, 1933.
[6] Osservazioni sulla geometria differenziale delle congruenze di retti. *Atti Ist. Veneto* **94**, 75—86, 1935.
[7] Sulla deformabilita proiettiva delle congruenze rettilinee. *Rend. Lincei* (6) **22**, 225—231, 1935.

Тибо, А. (Thybaut, A.):
[1] Sur la déformation du paraboloïde et sur quelques problèmes qui s' rattachent. *Ann. Éc. Norm.* (3) **14**, 71, 1897.

Тихоцкий, К. Н.
[1] Sur la transformation *K* des congruences. *CR* **202**, 1474, 1936.
[2] О изгибании и преобразовании К конгруэнций. *Матем. Сб.* 5 (47 1939.

Торторичи, П. (Tortorici, P.):
[1] Sulle deformazioni infinitesimal delle superficie e sul teorema di permutabilita. *Rend. Palermo* **35**, 289—316, 1913.

[2] Sulle transformazioni asintotiche delle curve e sulle congruenze *W* a falde focali rigate. *Rend. Palermo* **38**, 357—369, 1914.
[3] Alcune osservazioni analitiche sulle congruenze rettilinee *W* aderenti a due superficie rigate. *Math. Z.* **10**, 255—282, 1921.
[4] Dimonstrazioni analitica di un teorema di Segre. *Rend. Napoli* (3), **28**, 51—54, 1922.

Тюрьер, Е. (Turrière, E.):
[1] Sur les congruences de normales qui appartiennent à un complexe donné. *Ann. Toulouse* (3), **2**, 143—223, 1910.
Sur les congruences de droites qui admettent un point pour surface centrale. *Nouv. Ann.* (4), **11**, 165—175.

Фиников, С. П.:
[1] Общая задача изгибания на главном основании. Москва, 1917, стр. 198.
[2] Sur les surfaces principales des congruences rectilignes de M. Bianchi. *Rend. Lincei* (6), **1**, 515—516, 1925.
[3] Sur les congruences de roulement. *Матем. Сб.* **32**, 599—612, 1925.
[4] Sur la déformation d'un système de ∞^3 éléments plans. *Bull. des Sciences* (2), **51**, 393—403, 1927.
[5] Sur les congruences stratifiables. *Rend. Palermo* **53**, 714, 1929.
[6] Sur les congruences de M. Demoulin. *Rend. Lincei* (6), 9_1, 494—498, 1929.
Sur les congruences de M. Goursat. *CR* **188**, 1367, 1929.
Sur les suites de Laplace périodiques contenant une congruence *W*. *CR* **188**, 1647, 1929.
Sur les suites de Laplace contenant des congruences de Wilczynski. *CR* **189**, 517, 1929.
[7] Déformation d'une congruence rectiligne avec développables persistantes. *Bull. Sc. Math.* (2) **53**, 341—360, 1929.
[8] Congruences *R* ayant deux surfaces gauches pour les deux nappes de la surface focale. *Rend. Lincei* (6), 12_2, 302—306, 1930.
[9] Congruences *W* ayant le long de rayons correspondants même complexe linéaire osculateur. *CR* **190**, 999, 1930.
[10] Sur les suites de M. Fubini. *Rend. Lincei* (6), **12**, 41—47, 1930.
[11] Congruences dont les deux nappes de la surface focale sont projectivement applicables l'une sur l'autre par les points correspondants. *Bull. Math.* (2) **56**, 117—136, 1932.
[12] Transformation *T* des congruences de droites. *Ann. Scuola Norm. Pisa* (2), **2**, 59—88, 1933.
[13] Sur les couples de surfaces dont les asymptotiques se correspondent et qui aux points correspondants ont les mêmes directrices de Wilczynski. *CR* **197**, 883, 1933.
[14] Congruences stratifiables paraboliques. *Math. Z.* **36**, 344—357, 1933.
[15] Déformation projective. *CR* **199**, 177, 1934.
[16] Sur quelques réseaux conjugués. *CR* **202**, 1734, 1936.
[17] Surfaces ayant aux points homologues les mêmes directrices de Wilczynski. *Известия Казанского Физико-Матем. Общ.* (3) **7**, 44—54, 1936.
[18] Проективно-дифференциальная геометрия. ГТТИ, Москва, 1937, 263 стр.
[19] О последовательностях Лапласа с парой проективно-налагающихся конгруэнций. *Доклады АН СССР* **14**, 243, 1937.
[20] Конгруэнции, ассоциированные в совместном изгибании. *Известия АН СССР*, 373—401, 1937.
[21] Suites de Laplace pour lesquelles les surfaces d'indice de même parité ont leurs asymptotiques en correspondance. *CR* **204**, 321, 1937.

Фубини, Г. (Fubini G.):
[1] Su una classe di congruenze *W* di caractere proiettiva. *Rend. Lincei* (5), 25_1, 144—148, 1916.
[2] Fondamenti della geometria proiettivo-differenziale dei complessi et delle congruenze di retti. *Rend. Lincei* (5), 27_2, 304—311, 1918; 28_1, 32—39, 1919.
[3] La teoria proiettiva delle congruenze *W*. *Rend. Lincei* (5), 32_1, 198, 300, 376, 455, 1923.
[4] Sulla teoria proiettiva delle congruenze *W*. *Rend. Lincei* (5), 30_1, 273—276, 1921; 32_1, 198—202, 1923.
[5] Relazioni tra le due falde focali di una congruenze *W*. Composizione di 2 transformazioni *W*. *Rend. Lincei* 32_1, 301—306, 1923.
[6] Sulla teoria delle superficie *R* e della loro transformazioni. *Rend. Lincei.* (6), 4_2, 81—85, 1926.

Фубини-Чех (Fubini-Čech):
[1] Geometria proiettiva differenziale, I—1920, II—1927.
[2] Introduction à la Géométrie projective-différentielle des surfaces. Paris, 1931.

Хаак, В. (Haack, W.):
[1] Affine Differentialgeometrie der Strahlensysteme. Monatsh. für Math. u. Ph. **36**, 47—76, 331—352, 1929; *Math. Z.* **33**, 232—270, 1931; **35**, 66—79, 1932.

Цицейка, Ж. (Tzitzeica, J.):
[1] Géométrie différentielle projective des réseaux. Paris—Bucarest, 1924.
[2] Sur un théorème de M. Darboux. *CR* **150**, 955, 971—974, 1227, 1910

Чезаро, Ел. (Cesaro, El.):
[1] Sulla geometria intrinseca delle congruenza. *Rend. Napoli* (2) **8** 141—148, 1894.

Чех, Э. (Čech, E.):
[1] Sur les correspondances asymptotiques entre deux surfaces. *Rend. Lincei* (6), **8**, 484—486, 552—559, 1928.

Эйзенхарт, Л. П. (Eisenhart, L. P.):
[1] Congruences of tangents to a surface and derived congruences. *Am J. of Math.* **26**, 180—208, 1904.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ