С. П. ФИНИКОВ

ТЕОРИЯ ПАР КОНГРУЭНЦИЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1956

11-5-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РАССЛОЯЕМЫХ ПАР КОНГРУЭНЦИЙ

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

СОПРЯЖЕННЫЕ ПАРЫ

ГЛАВА ПЯТАЯ

ПРОЕКТИВНОЕ ИЗГИБАНИЕ СОПРЯЖЕННОЙ ПАРЫ

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ПАРЫ

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ПАР

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

РАССЛОЯЕМЫЕ ЧЕТВЕРКИ

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

КЛАССЫ СОПРЯЖЕННЫХ ЧЕТВЕРОК

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

СОПРЯЖЕННЫЕ ЧЕТВЕРКИ ПАНТАЗИ

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

ПРОДОЛЖЕНИЕ СОПРЯЖЕННЫХ ЧЕТВЕРОК

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КАЛАПСО

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга в значительной мере обязана своим происхождением семинару по классической дифференциальной геометрии Московского университета, где докладывались почти все работы, о которых я буду говорить.

В первой главе, вступительной, я изложил конспективно весь аналитический аппарат, который в дальнейшем понадобится. К ней можно обращаться всякий раз, как в этом представится необходимость.

Теория векторов в евклидовом и аффинном пространствах хорошо известна и говорить о ней не представляется надобности, но теория аналитических точек, которая играет такую же роль в проективном пространстве, может быть, требует напоминания. Поэтому я начинаю с грассмановой теории аналитических точек и их внешних произведений, аналитической прямой и аналитической плоскости в проективном трехмерном пространстве P_3, а затем в n-мерном P_n. После этого следует теория линейных комплексов и их изображение точками в P_5 вместе с теорией демиквадрик (одна система образующих поверхности 2-го порядка).

Теория аналитических точек как функций скалярных аргументов и их дифференцирования, которая заканчивается понятием касательной к кривой и касательной плоскости к поверхности, является переходной от алгебры к анализу.

Затем следуют основные понятия и теоремы (без доказательств) картановской теории внешних производных и систем в инволюции. Этот раздел преследует ограниченную цель привести все теоремы в том виде, на который мы будем ссылаться.

Заканчивается глава основными понятиями метода подвижного репера и выбором тетраэдра 1-го порядка для поверхности и для конгруэнции.

Все исследование ведется локально: следовательно, под поверхностью надо понимать некоторую область поверхности, под конгруэнцией — некоторую область конгруэнции и т. д., где все функции, определяющие поверхность или конгруэнцию, будут голоморфны.

Ссылки на список литературы, находящийся в конце книги, даны цифрами в квадратных скобках. Книга автора «Теория конгруэнций», Гостехиздат, М. — Л., 1950, сокращенно цитируется Т. К.

В заключение с благодарностью обращаюсь к светлой памяти Вячеслава Васильевича Степанова, который навел меня на мысль обобщить опыт Московской школы классической геометрии.

С. П. Фиников

ВВЕДЕНИЕ

Развитие дифференциальной геометрии при переходе от XIX века к XX испытало переломный период, который хочется назвать революцией.

Классическая дифференциальная геометрия конца XIX столетия — геометрия эпохи Бианки—Дарбу — характеризовалась вполне благоустроенной гауссовой теорией поверхностей, но основные, излюбленные задачи ее связывались с сопряженными сетями линий и конгруэнциями прямых. Преобразования Лапласа и последовательности таких преобразований, которым Дарбу посвятил бо́льшую половину второго тома своей Теории поверхностей [1]; циклические системы Рибокура, т. е. семейства ∞^2 окружностей в пространстве, допускающие ∞^1 ортогональных поверхностей, и циклические конгруэнции, т. е. конгруэнции осей циклов системы Рибокура вместе с изгибанием поверхности на главном основании, так причудливо с этими конгруэнциями связанным; наконец, триортогональные системы поверхностей (см. Дарбу [2]) — вот далеко не полный перечень тематики этой эпохи.

Новые идеи в геометрии были связаны с бурным развитием теоретической физики, точнее общей теории относительности А. Эйнштейна, и вошли в жизнь дифференциальной геометрии двумя потоками.

Первый наиболее мощный и ошеломляющий принес новый метод — метод тензорного анализа, и новые задачи — исследование многомерного кривого пространства. У нас оно было хорошо представлено в Москве школой В. Ф. Кагана, в Казани А. П. Широковым, а в последнее время школой В. В. Вагнера в Саратове, А. П. Нордена в Казани и П. К. Рашевского в Москве.

Второе течение, более скромное и менее заметное, ставило задачей изучение геометрии пространств более близких к евклидову — пространств однородных, т. е. обладающих фундаментальной группой, и первую очередь геометрии аффинно-дифференциальной, проективно-дифференциальной, конформной.

Первой была построена проективно-дифференциальная геометрия (Вильчинский [1], [2], [3], Фубини, Чех [1]), затем аффинная (Бляшке [1]) и в последнее время конформная.

Сейчас еще трудно характеризовать тематику конформной геометрии*). Аффинно-дифференциальная геометрия Бляшке и проективно-дифференциальная геометрия Вильчинского — Фубини — Чеха ставят задачей прежде всего построить теорию поверхностей.

Лучше всего это удалось сделать Бляшке. В аффинном пространстве, так же как в евклидовом, с каждой точкой поверхности в дифференциальной окрестности 2-го порядка связана одна единственная прямая, проходящая через эту точку поверхности и не лежащая в ее касательной плоскости. Эта прямая называется аффинной нормалью. Наличие аффинной нормали значительно облегчает построение гауссовой теории поверхностей в аффинном пространстве, но и здесь определение аффинной нормали при произвольном отнесении поверхности представляет не элементарную задачу.

В проективно-дифференциальной геометрии построение инвариантной теории поверхностей представляет одну из труднейших задач дифференциальной геометрии. Ее пытались разрешить Фубини и Чех в своей итальянской монографии [1], но их формулы были слишком громоздки.

А. П. Норден [1] построил теорию поверхности, оснащенной двумя нормалями, и был на пути к решению общей задачи, когда Г. Ф. Лаптев [1] дал общий метод последовательных продолжений и охватов, позволяющий исследовать геометрию многообразия, вложенного в пространство любой фундаментально-групповой связности.

С точки зрения этого нового метода еще более удивительно, с какими малыми средствами Вильчинскому, Фубини и их ученикам удалось исследовать проблему проективных нормалей и канонических поверхностей 2-го порядка Дарбу. Сюда можно добавить проективное изгибание поверхностей Фубини — Картана и исследование четырех полостей огибающей квадрик Ли, присоединенных к поверхности, — исследование, которое обогатило проективную геометрию замечательными классами поверхностей.

Другие темы проективно-дифференциальной геометрии непосредственно перешли из дифференциальной геометрии времен Бианки — Дарбу. Проективный метод не столько изменил их характер, сколько дал могущественное средство с малыми средствами исследовать глубоко лежащие свойства.

Уже в первую четверть XX века получила новое развитие теория сетей на поверхности. Оставляя в стороне созданную тензорную теорию сетей (Дубнов [1]), которая дала инвариантные характеристики метрически замечательным сетям, следует на первое место поставить теорию сетей R, которые вошли в науку с определением в духе геометрии прошлого века: сети, обе конгруэнции которых суть конгруэнции W. Сюда же относятся сети, определяемые соотношениями

*) Хотя за последнее время Р. М. Гейдельман достиг значительных успехов в конформной теории конгруэнций окружностей и сфер.

на инварианты Дарбу. С этими вопросами тесно связано развитие теории асимптотических преобразований. Вся теория преобразования поверхностей постоянной отрицательной кривизны, созданная Бианки, была перенесена на новые поверхности. Наконец, законченную форму получила теория преобразования линейчатых поверхностей.

В связи с этими темами новое развитие получила и теория прямолинейных конгруэнций. Теперь она получила самостоятельное значение.

Обращение так называемой теоремы Бианки о переместительности асимптотических преобразований послужило поводом для создания новой теории расслояемых пар конгруэнций. Эта теория была разработана преимущественно в Москве и достигла большого развития. Ее проективная часть дала наиболее красивые построения, связанные с теми поверхностями и конгруэнциями, которые вошли в науку в первой четверти XX века. Метрическая сторона этой теории неожиданно привела (Бахвалов [2], [3], [4], [5], [6], [7]) к наиболее интересным конгруэнциям эпохи Бианки — Дарбу: псевдосферической, изотропной, конгруэнции Бианки.

Расслояемая пара конгруэнций приводит к замечательной конфигурации: пара соответствующих лучей служит ребрами тетраэдра, вершины которого являются фокусами, а грани — фокальными плоскостями. Это определение, впрочем, слишком широко. Существуют две конфигурации, обладающие этим свойством: конфигурация T, к которой приводит расслояемая пара гиперболических конгруэнций, и конфигурация θ Попова*), специальный случай которой связан с расслояемыми параболическими парами.

Первая получается, если косой четырехугольник перемещается с двумя степенями свободы так, что стороны его касаются поверхностей, описанных вершинами. Вторую можно определить как четверку конгруэнций, образующих замкнутый цикл так, что луч каждой конгруэнции пересекает фокальную поверхность следующей конгруэнции в фокусе, причем вторая развертывающая поверхность каждой конгруэнции (с фокусом не в вершине тетраэдра) соответствует первой развертывающейся поверхности следующей конгруэнции цикла.

Из этих двух конфигураций пара T имеет несравненно большее значение. Причина этого, может быть, наиболее ярко была выяснена Б. А. Розенфельдом [1]. Как известно, каждая прямая нашего пространства изображается точкой фундаментальной гиперквадрики в пятимерном проективном пространстве P_5. Пара прямых изображается двумя точками или прямой, их соединяющей. Следовательно, две конгруэнции прямых нашего пространства, лучи которых находятся во взаимно однозначном соответствии, изображаются семейством ∞^2 прямых в P_5. Такое семейство в пятимерном пространстве

*) Доложено в семинаре по классической дифференциальной геометрии механико-математического факультета Московского государственного университета.

вообще не имеет развертывающихся поверхностей, но существуют семейства прямых, разбивающиеся двумя способами на фокальные подсемейства, т. е. на развертывающиеся поверхности. Такое семейство ∞^2 прямых называют фокальным (или конгруэнцией прямых). Фокальное семейство ∞^2 прямых в P_5 изображает пару T нашего пространства.

Это замечание распространяется и на комплексы. Теория комплексов прямых значительно отстала в своем развитии от теории конгруэнций, но в последнее время и здесь замечается некоторый сдвиг. В. И. Коровин [1] в своей диссертации построил канонический репер комплекса в проективном пространстве, исследовал основные дифференциальные формы. М. А. Акивис [1] перенес на комплексы понятие пар T. А. М. Васильев [1] построил замечательную четырежды инволютивную систему комплексов, представляющую своеобразное обобщение триортогональных систем. Г. Г. Бикматова исследовала расслояемые пары комплексов.

За последнее время намечается дальнейшее развитие и в теории сетей и асимптотических преобразований. Это обобщение идет в направлении настолько близком к классической теории Дарбу, что приходится удивляться, как этот величайший геометр XIX века не заметил его. В основной монографии Дарбу по теории триортогональных систем [2] автор посвящает две главы системам трижды сопряженным, т. е. системам из трех однопараметрических семейств поверхностей, где каждые два семейства высекают на любой поверхности третьего семейства сопряженную сеть линий. Автор обстоятельно доказывает теорему существования, с этой целью рассматривает специальное преобразование, которое переводит одну трижды сопряженную систему в другую с сохранением параллельности касательных плоскостей в соответствующих точках, и ничего не говорит о возможности применить к ним преобразование Лапласа. Т. Л. Козьмина [3] в своей кандидатской диссертации показала, что каждая трижды сопряженная система допускает преобразование Лапласа относительно каждой сопряженной системы, которую она несет. Точнее, если преобразования Лапласа всех поверхностей одного семейства относительно сопряженных систем, высекаемых на них поверхностями двух других семейств, не вырождаются, то преобразованные поверхности (в одном направлении) вместе с поверхностями, образованными геометрическим местом линий, полученных преобразованием основных сопряженных систем, порождающих преобразование Лапласа, составят новую трижды сопряженную систему.

К полученной трижды сопряженной системе можно применить снова преобразование Лапласа и т. д. Таким образом возникает та самая теория последовательностей Лапласа, которые для поверхностей (в трехмерном и даже многомерном пространстве) подробно рассмотрены во втором томе теории поверхностей Дарбу и в отдельной монографии Цицейки [1]. Разница только в том, что для трижды сопряженных систем вся теория становится гораздо богаче. Трижды сопряженная система допускает преобразование Лапласа относительно каждой из своих трех сопряженных систем, следовательно, обладает шестью преобразованиями 1-го порядка. Каждое из этих шести первых преобразований допускает тоже шесть преобразований Лапласа. Одно из них возвращает к исходной трижды сопряженной системе, два других переводят к двум другим преобразованиям 1-го порядка, а три остальных дают существенно новые преобразования 2-го порядка. Получается все расширяющаяся «плетенка», где все преобразования связаны между собою тоже преобразованиями Лапласа. В. И. Коровин *) доказал существование замкнутых плетенок, где каждая последовательность Лапласа является периодической. В нашем пространстве она состоит из 16 узлов и 16 прямых. Через каждый узел проходят три прямые, на каждой прямой лежат три узла. При проективных перемещениях с тремя степенями свободы каждый узел описывает трижды сопряженную систему, три семейства линий которой касаются трех прямых, проходящих через узел.

Вписанные и описанные последовательности Лапласа из теории Дарбу превращаются здесь в вписанные и описанные плетенки, состоящие из трижды сопряженных систем.

Р. В. Смирнов [1] распространил эту теорию на p-сопряженные системы в n-мерном проективном пространстве P_n, где $p \leqslant n$. При этом оказалось, что при $p < \frac{n}{2}$ каждая p-сопряженная система представляет p-мерное многообразие Картана [1] «особого проективного типа», квадратичная форма которого приводится к сумме квадратов. Преобразования Лапласа для этого многообразия были отмечены Черном [1]. Коровин *) построил для них систему инвариантов, аналогичных инвариантам Дарбу. Кроме обычных инвариантов («внутренних») для каждой сопряженной сети системы здесь имеются новые «внешние», связывающие между собой две сопряженные сети системы. Если все эти инварианты — точечные и тангенциальные — постоянны, то тем же свойством будут обладать и все преобразования Лапласа. При этом все конгруэнции, описанные касательными к линиям сопряженных сетей системы, будут конгруэнциями R, и каждая из поверхностей системы — поверхностью R.

Наконец, Т. А. Шульман [1] распространила на трижды сопряженные системы нашего пространства, содержащие одно семейство поверхностей R, асимптотические преобразования, которые обобщают классическую теорию преобразования триортогональных систем, содержащих одно семество поверхностей постоянной отрицательной кривизны.

*) Доложено в семинаре по классической дифференциальной геометрии механико-математического факультета Московского государственного университета.

Этим работам, сделанным большей частью в Советском Союзе и определяющим развитие классической дифференциальной геометрии Бианки — Дарбу за вторую четверть XX века, и посвящена настоящая книга. Она содержит полную теорию расслояемых пар конгруэнций как в ее проективной, так и в метрической части вместе со всеми обобщениями: расслояемые пары кривых, расслояемые пары линейчатых поверхностей, расслояемые системы в пространствах размерности больше трех и общая теория систем конгруэнций W. Общая теория пар T и различные специальные случаи, так же как элементы дифференциальной теории комплекса прямых и замечательные конфигурации их (пары T комплексов, инволютивные системы комплексов), составляют существенную часть ее содержания. Она заканчивается теорией асимптотических преобразований трижды сопряженных систем.

Большинство теорем, которые здесь излагаются, принадлежат проективной геометрии и доказываются в проективной системе отнесения. Это значительно облегчает изложение подобно тому, как употребление проективных координат облегчает изложение теории полюсов и поляр для кривых 2-го порядка. Так же как в аналитической геометрии это не исключает исследование сопряженных диаметров или осей, так и здесь метрические стороны теории не исключаются, если они представляют интерес.

ГЛАВА I

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ

I. Аналитические точки и действия над ними

1. Аналитические точки. Если дано евклидово трехмерное пространство E_3 (или проективное пространство P_3) и в нем декартова прямоугольная система координат, то четыре числа

$$x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4, \qquad x^4 \neq 0,$$

отношения которых $x^1 : x^4$, $x^2 : x^4$, $x^3 : x^4$ равны абсциссе, ординате и аппликате точки M, называются ее однородными координатами.

Совокупность четырех однородных координат x^i геометрической точки M называется ее *аналитической точкой* $\boldsymbol{M}$. Различный выбор четвертой координаты x^4 приводит к однопараметрическому многообразию аналитических точек $\boldsymbol{M}$, присоединенных к одной геометрической точке M. Величины x^i называются координатами аналитической точки. Аналитические точки рассматриваются как алгебраические величины (векторы абстрактной алгебры), допускающие кольцевые операции: сложение и умножение на скаляр с обычными свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, и внешнее умножение точек между собой (антикоммутативное). Уравнение, устанавливающее линейную зависимость между аналитическими точками $\boldsymbol{M}(x^\alpha)$, $\boldsymbol{A}_i(a_i^\alpha)$:

$$\boldsymbol{M} = y^i \boldsymbol{A}_i \qquad (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ p), \tag{1}$$

по определению справедливо для каждой серии координат x^α, a_i^α с одним и тем же значением $\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

Если $p = 0$, то геометрическая точка M совпадает с геометрической точкой A_0; множитель y^0 меняет *нормирование* точки $\boldsymbol{A}_0$. Если аналитические точки $\boldsymbol{A}_i$ линейно независимы, то при $p = 1$ точка M лежит на прямой A_0A_1, при $p = 2$ — принадлежит плоскости $A_0A_1A_2$.

Обратно, всякая точка прямой ($p = 1$), плоскости ($p = 2$) или пространства ($p = 3$) может быть представлена в виде (1).

Если аналитическая точка $\boldsymbol{M}$ дана так же, как и точки $\boldsymbol{A}_i$ ($i = 0,\ 1,\ 2,\ 3$), то коэффициенты y^i вполне определены и называются *координатами* точки M относительно координатного тетраэдра $\{A_i\}$ (на плоскости координатного треугольника). Тетраэдр $\{A_i\}$ задается как четверка линейно независимых аналитических точек.

Преобразование координат y^i при переходе от координатного тетраэдра $\{A_i\}$ к тетраэдру $\{B_i\}$ определяется линейными однородными формулами

$$y^i = c^i_{i'} y^{i'}, \quad \det | c^i_{i'} | \neq 0, \tag{2α}$$

где

$$B_{i'} = c^i_{i'} A_i \qquad (i, i' = 1, 2, 3, 4). \tag{2β}$$

С другой стороны, всякую подстановку (2α) с определителем, отличным от нуля, можно рассматривать или как проективное преобразование пространства P_3, переводящее точку $(y^{i'})$ в точку (y^i), если эти координаты относить к одной и той же системе, или как преобразование координат одной и той же точки M, если координаты y^i относить к системе $\{A_i\}$, а координаты $y^{i'}$ — к системе $\{B_i\}$.

Поэтому проективное преобразование пространства можно определять, не меняя координат точек, простым заданием нового координатного тетраэдра. Этот тетраэдр носит теперь название *репера проективной группы*.

Само проективное пространство P_3 можно рассматривать как геометрическое место точек M, присоединенных к аналитическим точкам M с действительными координатами x^i, не обращающимися одновременно в нуль. Моделью проективного пространства может служить евклидово пространство E_3, дополненное точками несобственной плоскости. При изменении координатного тетраэдра $\{A_i\}$ оно подвергается преобразованиям проективной группы.

Отсюда фундаментальной важности заключение: *изучая кривые, поверхности, конгруэнции* и т. д. *в координатах относительно произвольного координатного тетраэдра, мы изучаем только проективные свойства их*, т. е. свойства, которые сохраняются при преобразованиях проективной группы. Мы определяем кривые, поверхности, конгруэнции и т. д. до проективного преобразования.

2. Проективное пространство P_n. Все эти соображения легко распространяются на пространство P_n любого числа измерений n. Аналитическая точка пространства P_n имеет $n+1$ координат x^α $(\alpha = 1, \ldots, n+1)$, которые могут принимать любые действительные значения с единственным ограничением: все $n+1$ координат одновременно не должны обращаться в нуль.

Уравнение (1) при $p \leqslant n$ определяет линейное многообразие p измерений, которое будем называть p-плоскостью. При $p=0$ все многообразие сводится к одной геометрической точке. Геометрическое место их составляет пространство P_n. При $p=1$ имеем прямую, при $p=2$ — плоскость, при $p=n-1$ — гиперплоскость.

В координатах x^α, a^α_i уравнение (1) распадается на $(n+1)$ линейных уравнений

$$x^\alpha = y^i a^\alpha_i \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots, p; \\ \alpha = 1, 2, \ldots, n+1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Исключая $p+1$ параметр y^i, получим $n+1-(p+1) = n-p$ линейных однородных уравнений, связывающих текущие координаты x^α произвольной точки M, принадлежащей p-плоскости (1). Гиперплоскость $(p=n-1)$ определяется одним уравнением, плоскость $(p=2)$ определяется $n-2$ уравнениями, прямая $n-1$ уравнениями.

3. Грассмановы произведения точек. Аналитические точки подобно векторам нашего пространства допускают *внешнее* перемножение, которое приводит к величинам другой природы. Мы будем обозначать их круглыми скобками (в отличие от картановых внешних произведений дифференциальных форм)

$$(A_1 A_2), \ \ldots, \ (A_1 A_2 \ldots A_p), \ \ldots$$

Это умножение ассоциативно, дистрибутивно и антикоммутативно:

$$\begin{gathered} ((A_1 A_2)(B_1 B_2 B_3)) = (A_1 A_2 B_1 B_2 B_3), \\ (A, B_1 + B_2) = (A_1 B_1) + (A_1 B_2), \\ (A_1 A_2) = -(A_2 A_1), \quad (A_1 A_2 A_3) = -(A_3 A_2 A_1). \end{gathered} \tag{4}$$

Отсюда вытекает, что внешнее произведение с двумя одинаковыми линейными множителями (одинаковыми точками) равно нулю.

В общем случае равенство нулю внешнего произведения аналитических точек эквивалентно линейной зависимости между его линейными множителями (точками).

Действительно, внося вместо одного множителя линейную комбинацию остальных и пользуясь дистрибутивностью внешнего произведения, получим сумму внешних произведений, в каждом из которых найдется два одинаковых множителя.

Обратно, *если внешнее произведение равно нулю, то его множители* (точки) — *линейно зависимы*. Для доказательства достаточно линейно независимые точки $A_1, \ldots, A_m$ произведения

$$(A A_1 \ldots A_m) = 0 \tag{a}$$

включить в координатный репер $A_1, \ldots, A_{n+1}$ (если точки $A_1, \ldots, A_m$ линейно зависимы, то теорема доказана). Тогда точка A разложится по вершинам репера

$$A = x^1 A_1 + \ldots + x^{n+1} A_{n+1}. \tag{b}$$

Внося это разложение в равенство (a), получим:

$$x^{m+1}(A_{m+1} A_1 \ldots A_m) + \ldots + x^{n+1}(A_{n+1} A_1 \ldots A_m) = 0,$$

откуда в силу линейной независимости вершин координатного репера получим:

$$x^{m+1}=0, \ \ldots, \ x^{n+1}=0$$

и уравнение (b) даст

$$A=x^1A_1+\ \ldots\ +x^mA_m.$$

Следствие. *В пространстве P_n все произведения точек размерности более $n+1$* (содержащие более $n+1$ линейных множителей) *равны нулю*. Это прямо следует из уравнения (1), устанавливающего линейную зависимость между $m>n+1$ точками пространства P_n.

Все эти предложения становятся очевидными, если ввести числовое (координатное) значение внешнего произведения.

В пространстве P_n аналитическая точка M_i имеет $n+1$ координат x_i^α ($\alpha=1, \ldots, n+1$), которые в совокупности составляют ее числовое значение. Координатами внешнего произведения p измерений

$$(M_1M_2\ \ldots\ M_p)$$

мы будем называть совокупность линейно независимых определителей p-го порядка матрицы

$$\begin{Vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n+1} \\ x_2^1 & \ldots & \ldots & x_2^{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_p^1 & x_p^2 & \ldots & x_p^{n+1} \end{Vmatrix} \tag{5}$$

из всех координат множителей M_i ($i=1, \ldots, p$). Отсюда внешнее произведение $(M_1 \ldots M_p)$ из p точек M_i в P_n имеет столько координат, сколько можно составить сочетаний из $(n+1)$-го столбца матрицы (5) по p столбцов, т. е.

$$C_{n+1}^p=\frac{(n+1)\,n\ \ldots\ (n-p+1)}{1\cdot 2\ldots p}. \tag{6}$$

Внешнее произведение $n+1$ точек в P_n имеет только одну координату; это — псевдоскаляр подобно скалярному произведению трех векторов (смешанное векторно-скалярное произведение) в P_3, ибо меняет знак при перестановке множителей.

Если внешнее произведение равно нулю, то все его координаты равны нулю, и наоборот.

4. Геометрическое значение внешних произведений точек. Ненулевое грассманово произведение $(A_0A_1\ldots A_p)$ из $p+1$ точки в P_n ($p<n$) выделяет из пространства P_n геометрическое место точек M, аналитические точки которых при внешнем умножении на

$(A_0A_1\ \ldots\ A_p)$ дают нулевые произведения

$$(MA_0A_1\ \ldots\ A_p)=0. \tag{a}$$

Поскольку обращение в нуль внешнего произведения точек эквивалентно линейной зависимости множителей, а по условию произведение вершин репера $(A_0A_1\ldots A_p)$ не равно нулю и точки A_i ($i=0, 1, \ldots, p$) — линейно независимы, из равенства (a) следует уравнение вида (1):

$$M=y^iA_i \qquad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ p), \tag{b}$$

и все геометрические точки M, имеющие точку M своей аналитической точкой, принадлежат линейному подпространству, натянутому на $p+1$ точек $A_0, \ldots, A_p$, т. е. p-плоскости, проходящей через $p+1$ точек $A_0, A_1, \ldots, A_p$.

Уравнение в координатной форме p-плоскости, присоединенной к грассманову произведению $(A_0A_1\ldots A_p)$, можно получить, обращая в нуль все координаты грассманова произведения (a). Следовательно, равны нулю все определители матрицы

$$\left((x^\alpha,\ a_0^\alpha,\ a_1^\alpha,\ \ldots,\ a_p^\alpha)\right)=0 \qquad (\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1), \tag{c}$$

где из $n+1$ строк матрицы записана только одна. Так как размерность произведения (a) равна $p+2$, то получим вообще C_{n+1}^{p+2} линейных уравнений.

Для $p=n-1$ получим $C_{n+1}^{p+2}=C_{n+1}^{n+1}=1$ — одно уравнение, которое и определит гиперплоскость в P_n. Для $p=n-2$ получим $C_{n+1}^n=C_{n+1}^1=n+1$ линейных уравнений; между тем они должны определять $(n-2)$-плоскость в P_n и, следовательно, должны быть эквивалентны двум линейным уравнениям. Отсюда вытекает, что координаты грассманова произведения $p+1$ измерений ($p<n-1$) удовлетворяют $C_{n+1}^{p+2}-(n-p)$ условиям. Эти условия не все независимы. Те из них, обращение которых в тождество необходимо и достаточно для того, чтобы были удовлетворены все остальные, составляют *плюккеровы условия простоты* агрегата.

Для $p=n-1$ эти координаты называются *тангенциальными координатами* гиперплоскости, для $p=1$ — *линейными координатами* прямой.

Эта зависимость между $(p+1)$-мерным грассмановым произведением точек и p-плоскостью в P_n позволяет назвать такое произведение аналитической p-плоскостью.

5. Грассмановы агрегаты в P_n. Если в пространстве P_n задан координатный репер $\{A_\alpha\}$ ($\alpha=0, 1, \ldots, n$), то каждую аналитическую точку M_k можно разложить по вершинам репера

$$M_k=x_k^\alpha A_\alpha \qquad (\alpha=0,\ \ldots,\ n). \tag{7α}$$

Внося эти выражения в произведение p точек M_k, в силу дистрибутивности получим по вынесении скаляров x_k^α за скобку:

$$(M_1 \dots M_p) = x_1^{\alpha_1} \dots x_p^{\alpha_p} (A_{\alpha_1} \dots A_{\alpha_p}) \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_p = 0, 1, \dots, n). \quad (7\beta)$$

В правой части можно объединить в группы все члены, содержащие те же самые указатели $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, хотя бы и расположенные в различном порядке.

Если теперь переставить множители A_α с изменением в случае надобности знака произведения так, чтобы из каждой группы можно было вынести произведение $(A_{\alpha_1} A_{\alpha_2} \dots A_{\alpha_p})$ за скобку, то получим равенство вида

$$(M_1 \dots M_p) = \sum_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{0, 1, \dots, n} p^{\alpha_1 \dots \alpha_p} (A_{\alpha_1} \dots A_{\alpha_p}), \qquad (7\gamma)$$

где суммирование ведется по всем сочетаниям указателей $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ из числа $0, 1, \dots, n$, а коэффициент $p^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ имеет значение

$$p^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = x_1^{\alpha_1} \dots x_p^{\alpha_p} - x_1^{\alpha_2} \dots x_p^{\alpha_p} + \dots = \det | x_1^{\alpha_1} \dots x_p^{\alpha_p} |. \qquad (8)$$

Здесь в прямых чертах написано произведение элементов определителя по главной диагонали.

Поскольку x_k^α являются координатами аналитических точек M_k, коэффициенты $p^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ как определители матрицы $((x_k^\alpha))$ будут координатами грассманова произведения (7β). Координаты $p^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ меняют знак при перестановке указателей.

Сумму внешних произведений вида (7γ) с произвольными коэффициентами $q^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$, антисимметричными относительно указателей α_i, мы будем называть *грассмановым агрегатом* размерности p:

$$\sum_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{0, 1, \dots, n} q^{\alpha_1 \dots \alpha_p} (A_{\alpha_1} A_{\alpha_2} \dots A_{\alpha_p}). \qquad (9)$$

Всякий грассманов агрегат размерности n в пространстве P_n есть аналитическая гиперплоскость, ибо любые $n+1$ чисел можно принять за тангенциальные координаты гиперплоскости. Для $p < n$ грассманов агрегат (9) становится аналитической $(p-1)$-плоскостью только при условии, что его координаты $q^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ удовлетворяют плюккеровым условиям простоты агрегата. Эти условия сводятся к требованию, чтобы агрегат имел p делителей в виде линейно независимых аналитических точек M_k или, другими словами, чтобы агрегат обращался в нуль при умножении на каждую из p линейно независимых точек.

6. Аналитические прямые в P_3. В трехмерном пространстве P_3 возможны только два вида ненулевых грассмановых произведений:

аналитические прямые, которые представляют внешнее произведение двух линейно независимых аналитических точек

$$(M_1 M_2),$$

и аналитические плоскости, которые представляют внешние произведения трех точек.

Всякий грассманов агрегат третьей степени в P_3 является аналитической плоскостью, но не всякий агрегат второй степени будет аналитической прямой. Не представляет труда вывести в этом случае плюккерово условие простоты.

Начнем с условия пересечения двух прямых $(M_1 M_2)$ и $(P_1 P_2)$. Если координаты их суть $M_i (x_i^\alpha)$, $P_k (y_k^\alpha)$, то условие пересечения прямых сводится к компланарности четырех точек M_1, M_2, P_1, P_2 и записывается в виде равенства нулю определителя

$$\begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ y_1^1 & y_1^2 & y_1^3 & y_1^4 \\ y_2^1 & y_2^2 & y_2^3 & y_2^4 \end{vmatrix} = 0. \qquad (a)$$

Развертывая его по правилу Лапласа, получим:

$$\begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^1 & x_2^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1^3 & y_1^4 \\ y_2^3 & y_2^4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1^2 & y_1^4 \\ y_2^2 & y_2^4 \end{vmatrix} + \dots = 0$$

или, заменяя определители координатами p^{ik} первой или q^{jl} второй прямой,

$$p^{12} q^{34} + p^{13} q^{42} + p^{14} q^{23} + p^{23} q^{14} + p^{42} q^{13} + p^{34} q^{12} = 0. \qquad (10)$$

Если условие (10) удовлетворено, то прямые p^{ik} и q^{jl} пересекаются.

Если в определителе (a) заменить координаты y_k^α на координаты x_k^α, то равенство будет удовлетворено тождественно: определитель с равными строками равен нулю. Мы получим плюккерово условие

$$p^{12} p^{34} + p^{13} p^{42} + p^{14} p^{23} = 0. \qquad (11)$$

Следовательно, координаты аналитической прямой p^{ik} необходимо должны удовлетворять условию (11).

Покажем, что это условие достаточно. Умножим внешним образом заданный агрегат $\sum\limits_{(ik)} p^{ik} (A_i A_k)$ на неизвестную точку $x^\alpha A_\alpha$ $(\alpha = 1, \dots, 4)$ и потребуем, чтобы произведение равнялось нулю:

$$\sum_{(i,\,k)} p^{ik} (A_i A_k) \, x^\alpha A_\alpha = 0$$

(суммирование по сочетаниям i, k и по $\alpha = 1, \dots, 4$).

Переходя от суммирования по сочетаниям (ik) к суммированию по размещениям (отдельно по указателям i, k и α), получим:

$$p^{ik}x^{\alpha}(A_iA_kA_\alpha)=0,$$

или, переходя к суммированиям по сочетаниям $(i,\ k,\ \alpha)$,

$$\sum_{(ik\alpha)}^{1,\ldots,4}(p^{ik}x^{\alpha}+p^{k\alpha}x^{i}+p^{\alpha i}x^{k})(A_iA_kA_\alpha)=0. \tag{b}$$

Здесь члены собраны в группы для каждого сочетания $(ik\alpha)$ и общий множитель $(A_iA_kA_\alpha)$ вынесен за скобку. Поскольку любая тройка вершин координатного тетраэдра $\{A_i\}$ не лежит на одной прямой, произведения $(A_iA_kA_\alpha)$ линейно независимы и равенство (b) приводит к равенству нулю коэффициентов. Таких коэффициентов четыре, и мы получаем систему

$$\begin{aligned} p^{23}x^1-p^{13}x^2+p^{12}x^3 \qquad\qquad &=0,\\ -p^{42}x^1-p^{14}x^2 \qquad\qquad +p^{12}x^4&=0,\\ p^{34}x^1 \qquad\qquad -p^{14}x^3+p^{13}x^4&=0,\\ p^{34}x^2+p^{42}x^3+p^{23}x^4&=0. \end{aligned} \tag{c}$$

В силу равенства (11) ранг системы (c) равен 2 (умножая первые три уравнения соответственно на p^{14}, $-p^{13}$, p^{12} или первое, второе и четвертое на p^{42}, p^{23}, $-p^{12}$ и каждый раз складывая, получим оба раза тождество). Следовательно, система допускает два линейно независимых решения x_1^α и x_2^α; существуют две точки

$$M_1=x_1^\alpha A_\alpha,\qquad M_2=x_2^\alpha A_\alpha,$$

которые делят заданный агрегат, т. е. при подходящем множителе λ имеет место тождество

$$\sum_{(ik)}p^{ik}(A_iA_k)=\lambda(M_1M_2),$$

мы имеем аналитическую прямую.

7. Линейные комплексы в P_3. Рассмотрим грассманов агрегат

$$\mathfrak{a}\equiv\sum_{(ik)}^{1,\ldots,4}a^{ik}(A_iA_k). \tag{a}$$

Если коэффициенты a^{ik} удовлетворяют плюккерову условию

$$\frac{1}{2}\{\mathfrak{a}\mathfrak{a}\}=a^{12}a^{34}+a^{13}a^{42}+a^{14}a^{23}=0, \tag{11'}$$

и только при этом условии агрегат $\mathfrak{a}$ есть аналитическая прямая. Ему, однако, можно придать геометрический смысл и в общем случае.

Уравнение

$$\{\mathfrak{a}p\}\equiv a^{12}p^{34}+a^{13}p^{42}+a^{14}p^{23}+a^{34}p^{12}+a^{42}p^{13}+a^{23}p^{14}=0, \tag{12}$$

где

$$p=\sum_{(ik)}^{1,\ldots,4}p^{ik}(A_iA_k)$$

есть аналитическая прямая, связывает координаты p^{ik} прямой p линейным уравнением. Поскольку координаты p^{ik} удовлетворяют, кроме того, плюккерову условию (11), уравнение (12) определяет прямые p с тремя произвольными параметрами. Геометрическое место прямых p, координаты которых удовлетворяют уравнению (12), называется *линейным комплексом*. Отсюда агрегату (a) можно присвоить название: *аналитический линейный комплекс*.

Сменим обозначения коэффициентов a^{ik} в уравнении (12), полагая

$$a^{ik}=a_{jl},$$

где четыре индекса i, k, j, l представляют четную перестановку указателей 1, 2, 3, 4. Тогда уравнение (12) может быть записано в виде суммы по всем сочетаниям указателей 1, 2, 3, 4:

$$\sum_{(ik)}^{1,\ldots,4}a_{ik}p^{ik}=0. \tag{12'}$$

Если в это уравнение внести выражения координат луча p через координаты двух его точек $(\underset{1}{x}^\alpha)$ и $(\underset{2}{x}^\alpha)$:

$$p^{ik}=\underset{1}{x}^i\underset{2}{x}^k-\underset{1}{x}^k\underset{2}{x}^i,$$

то получим:

$$\sum_{(ik)}^{1,\ldots,4}a_{ik}(\underset{1}{x}^i\underset{2}{x}^k-\underset{1}{x}^k\underset{2}{x}^i)=0$$

или, переходя к суммированию по размещениям (i и k пробегают независимо значения 1, ..., 4), учитывая антисимметричность коэффициентов $a_{ik}=-a_{ki}$ и опуская знак суммы,

$$a_{ik}\underset{1}{x}^i\underset{2}{x}^k=0. \tag{12''}$$

Если здесь закрепить одну точку $(\underset{1}{x}^\alpha)$, а координаты другой рассматривать как текущие, то уравнение (12″) как уравнение первой степени относительно $(\underset{2}{x}^\alpha)$ будет определять плоскость, в которой лежат все прямые комплекса, проходящие через произвольную точку пространства $(\underset{1}{x}^\alpha)$.

Следовательно, через каждую точку пространства M проходит пучок прямых, принадлежащих линейному комплексу. Если обозначить эту плоскость буквой μ, то взаимно однозначное соответствие $M \rightleftarrows \mu$ является основным полярным соответствием комплекса, называемым *нулевой системой* линейного комплекса.

Если координаты a^{ik} линейного комплекса $\mathfrak{a}$ удовлетворяют плюккерову условию (11), т. е. если существует прямая $\boldsymbol{a}$ с теми же координатами, то комплекс называется *специальным*. Уравнение специального линейного комплекса (12)

$$\{ap\} = 0$$

получает простой геометрический смысл. Оно требует, чтобы прямые комплекса $\boldsymbol{p}$ пересекали прямую $\boldsymbol{a}$. Эта прямая называется *осью* специального комплекса.

Два уравнения

$$\{\mathfrak{a}p\} = 0, \quad \{\mathfrak{b}p\} = 0, \qquad (13)$$

где агрегаты

$$\mathfrak{a} = \sum_{(ik)} a^{ik}(A_iA_k), \qquad \mathfrak{b} = \sum_{(ik)} b^{ik}(A_iA_k)$$

суть линейные комплексы, определяют двупараметрическое многообразие прямых $\boldsymbol{p}$, которое называется *линейной конгруэнцией*.

Лучи $\boldsymbol{p}$ линейной конгруэнции (13) принадлежат всем линейным комплексам пучка

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{b}, \qquad (14)$$

где λ — произвольный параметр. Выбирая λ так, чтобы комплекс $\mathfrak{m}$ удовлетворял плюккерову условию

$$\{\mathfrak{m}\mathfrak{m}\} = 0,$$

или

$$\{\mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{b},\ \mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{b}\} = \{\mathfrak{a}\mathfrak{a}\} + 2\lambda\{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\} + \lambda^2\{\mathfrak{b}\mathfrak{b}\} = 0, \qquad (15)$$

мы найдем два корня λ_1 и λ_2, которые определяют два (действительных или мнимых) специальных комплекса пучка: $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$ с осями m_1, m_2.

Каждый луч конгруэнции (13) принадлежит обоим комплексам $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, следовательно, пересекает обе оси m_1, m_2. Отсюда линейная конгруэнция есть геометрическое место прямых, пересекающих прямые m_1, m_2 (действительные или мнимые), которые называются *директрисами конгруэнции*.

8. Плюккерово отображение прямых на гиперквадрику в P_5. Плюккерово уравнение (11) показывает, что точка $\boldsymbol{p}$, изображающая одноименную прямую нашего пространства, если шесть координат p^{ik} прямой принять за проективные координаты точки $\boldsymbol{P}$ в P_5, будет лежать на фундаментальной гиперквадрике Q_4^2, определяемой в P_5 уравнением (11).

Обратно, каждая точка гиперквадрики (11) изображает прямую в P_3.

Уравнение (10) можно рассматривать как условие полярной сопряженности пары точек $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ относительно гиперквадрики Q_4^2. Следовательно, *прямые в P_3 пересекаются в том и только в том случае, если точки, изображающие их на гиперквадрике Q_4^2 в P_5, полярно сопряжены.*

Соединим две такие точки $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ прямой

$$m = p + \lambda q,$$

где λ — параметр, определяющий положение точки $\boldsymbol{m}$ на прямой (pq). Нетрудно заметить, что все точки $\boldsymbol{m}$ лежат на гиперквадрике Q_4^2 и изображают в P_3 прямые одного пучка. Действительно, если точка $\boldsymbol{R}$ — точка пересечения прямых p и q в P_3, то при подходящем выборе точек $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ в P_3 будем иметь:

$$p = (PR), \qquad q = (QR)$$

и

$$m = (P + \lambda Q,\ R).$$

Отсюда прямо следует, что каждая точка $\boldsymbol{m}$ прямой (pq) в P_5 изображает прямую в P_3, все эти прямые проходят через точку $\boldsymbol{R}$ и лежат в плоскости $\boldsymbol{PQR}$, т. е. образуют пучок прямых.

Отсюда следствие: *каждая прямолинейная образующая гиперквадрики изображает пучок прямых нашего пространства.*

Уравнение (12)

$$\{\mathfrak{a}p\} = 0$$

тоже можно рассматривать как уравнение полярной гиперплоскости относительно гиперквадрики Q_4^2 с полюсом в точке $\mathfrak{a}$. Точка $\mathfrak{a}$, изображающая в P_5 линейный комплекс, вообще не удовлетворяет своими координатами уравнению (11) (если комплекс не специальный), а потому не лежит на гиперквадрике Q_4^2.

Следовательно, всякая точка $\mathfrak{a}$ в P_5 изображает линейный комплекс в P_3; если эта точка принадлежит гиперквадрике Q_4^2, то комплекс специальный, а точка одновременно изображает ось специального комплекса. В обоих случаях комплексу принадлежат все те прямые, которые изображаются точками, полярно сопряженными точке $\mathfrak{a}$, т. е. точками пересечения с гиперквадрикой Q_4^2 полярной гиперплоскости точки $\mathfrak{a}$.

Два линейных комплекса $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ определяют две точки в P_5. Пучок линейных комплексов изображается прямой линией, соединяющей точки $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$.

Специальные комплексы (15) соответствуют точкам пересечения прямой (14) с гиперквадрикой. Эти точки вместе с тем изображают оси этих специальных комплексов.

Полярные гиперплоскости различных точек $\mathfrak{m}$ прямой (14) образуют пучок гиперплоскостей, пересекающихся по трехмерной плоскости пространства P_5, определяемой системой уравнений (13). Пересечение 3-плоскости (13) с гиперквадрикой содержит ∞^2 точек, которые изображают лучи линейной конгруэнции ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$). Так как каждая точка 3-плоскости (13) полярно сопряжена точкам прямой (14), в том числе и точкам пересечения прямой (14) с гиперквадрикой, а полярно сопряженные точки гиперквадрики изображают пересекающиеся прямые в P_3, то каждый луч линейной конгруэнции пересекается с ее двумя директрисами (15).

Если точка $\mathfrak{a}$ в P_5 изображает линейный комплекс $\mathfrak{a}$ и точка p на гиперквадрике Q_4^2 — прямую p в P_3, то прямая, соединяющая точки $\mathfrak{a}$ и p в P_5, пересечет гиперквадрику Q_4^2 еще во второй точке p', которой соответствует в P_3 вторая прямая p'. Прямые p и p' называются *сопряженными* прямыми относительно нулевой системы линейного комплекса $\mathfrak{a}$. Так как точки $\mathfrak{a}$, p и p' лежат на одной прямой, то найдутся скаляры λ и μ такие, что

$$\mathfrak{a} = \lambda p + \mu p'. \tag{a}$$

Следовательно, линейный комплекс $\mathfrak{a}$ и специальные линейные комплексы p и p' принадлежат одному пучку линейных комплексов. Составляя плюккерово произведение обеих частей равенства (a) на произвольную прямую q, получим:

$$\{\mathfrak{a}q\} = \lambda\{pq\} + \mu\{p'q\}. \tag{b}$$

Отсюда следует: если прямая q пересекает обе прямые p и p':

$$\{pq\} = 0, \quad \{p'q\} = 0,$$

то она принадлежит линейному комплексу $\mathfrak{a}$:

$$\{\mathfrak{a}q\} = 0.$$

Таким образом получаем теорему:

Все прямые, пересекающие пару сопряженных прямых относительно линейного комплекса, принадлежат этому комплексу.

Определение. *Два линейных комплекса $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}'$ находятся в инволюции, если точки $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}'$ в P_5, изображающие эти комплексы, полярно сопряжены относительно фундаментальной гиперквадрики Q_4^2, т. е. если имеет место плюккерово уравнение*

$$\{\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\} = 0. \tag{c}$$

Составим плюккерово произведение обеих частей равенства (a) на линейный комплекс $\mathfrak{a}'$. В силу равенства (c) получим:

$$\lambda\{p\mathfrak{a}'\} + \mu\{p'\mathfrak{a}'\} = 0. \tag{d}$$

Отсюда следует: если прямая p принадлежит комплексу $\mathfrak{a}'$:

$$\{p\mathfrak{a}'\} = 0,$$

то и прямая p' принадлежит ему:

$$\{p'\mathfrak{a}'\} = 0.$$

Поэтому имеем теорему:

Если два комплекса $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}'$ находятся в инволюции и из двух прямых p и p', сопряженных относительно комплекса $\mathfrak{a}$, одна прямая принадлежит комплексу $\mathfrak{a}'$, то и вторая прямая принадлежит ему.

9. Демиквадрики и их отображение в P_5. Три линейных комплекса

$$\mathfrak{a} = \sum_{(ik)} a^{ik}(A_iA_k), \quad \mathfrak{b} = \sum_{(ik)} b^{ik}(A_iA_k), \quad \mathfrak{c} = \sum_{(ik)} c^{ik}(A_iA_k)$$

определяют в P_3 связку комплексов

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{b} + \mu\mathfrak{c}, \tag{16}$$

где λ, μ — произвольные параметры. Комплексы связки (16) изображаются в P_5 точками плоскости (двумерной) $\mathfrak{abc}$. Лучи, принадлежащие всем комплексам связки, изображаются точками гиперквадрики, принадлежащими трем гиперплоскостям

$$\{\mathfrak{a}p\} = 0, \quad \{\mathfrak{b}p\} = 0, \quad \{\mathfrak{c}p\} = 0. \tag{17}$$

Они полярно сопряжены всем точкам плоскости $\mathfrak{abc}$, в том числе и точкам кривой 2-го порядка L^2, по которой плоскость $\mathfrak{abc}$ сечет гиперквадрику Q_4^2. С другой стороны, три гиперплоскости (17) своим пересечением определяют в P_5 двумерную плоскость, которая пересекает гиперквадрику по другой кривой 2-го порядка $\tilde{L}^2$.

Каждая точка одной кривой L^2 полярно сопряжена каждой точке другой $\tilde{L}^2$. Следовательно, кривые L^2 и $\tilde{L}^2$ изображают в P_3 две линейчатые поверхности, прямолинейные образующие которых пересекаются так, что каждая образующая одной пересекает все образующие другой. Значит, все образующие L^2 и $\tilde{L}^2$ принадлежат одной поверхности в P_3, которая тем самым обладает двумя системами прямолинейных образующих и является поверхностью 2-го порядка (*квадрика*).

Каждая линейчатая поверхность L^2 и $\tilde{L}^2$ представляет одно семейство образующих квадрики и называется *демиквадрикой*.

Три линейных комплекса пересекаются по демиквадрике.

Наконец, четыре линейных комплекса

$$\mathfrak{a}=\sum_{(ik)} a^{ik}(A_iA_k), \quad \mathfrak{b}=\sum_{(ik)} b^{ik}(A_iA_k), \quad \mathfrak{c}=\sum_{(ik)} c^{ik}(A_iA_k),$$
$$\mathfrak{d}=\sum_{(ik)} d^{ik}(A_iA_k)$$

определяют трехпараметрическую сеть комплексов

$$\mathfrak{m}=\mathfrak{a}+\lambda\mathfrak{b}+\mu\mathfrak{c}+\nu\mathfrak{d}, \tag{18}$$

изображаемых точками трехмерной плоскости $\mathfrak{abcd}$ в P_5.

Лучи, принадлежащие всем комплексам сети (18), изображаются точками гиперквадрики, принадлежащими линии пересечения четырех гиперплоскостей

$$\{\mathfrak{a}p\}=0, \quad \{\mathfrak{b}p\}=0, \quad \{\mathfrak{c}p\}=0, \quad \{\mathfrak{d}p\}=0. \tag{19}$$

Эта прямая пересекает гиперквадрику Q_4^2 в двух точках (действительных или мнимых). Следовательно, четыре линейных комплекса пересекаются по паре прямых.

10. Векторные образы в A_n. Понятие внешних произведений распространяется на векторы в аффинном пространстве A_n. Координатный репер в аффинном пространстве A_n состоит из начала O и n векторов $e_1, \ldots, e_n$ с началом в точке O, которые не лежат в одном A_{n-1}. Всякий вектор m_k может быть разложен единственным способом на сумму

$$m_k=m_k^i e_i \qquad (i=1, \ldots, n). \tag{20}$$

Коэффициенты m_k^i называются координатами вектора m_k. Внешние произведения

$$(m_1m_2), \ \ldots, \ (m_1m_2\ldots m_p), \ \ldots$$

определяют бивектор, ..., p-вектор и т. д.

Внося сюда значения m_k по формулам (20), получим в силу дистрибутивности и антикоммутативности внешнего произведения по приведении подобных членов равенства

$$(m_1m_2\ldots m_p)=\sum_{(i_1\ldots i_p)}^{1,\ldots,n} p^{i_1\ldots i_p}(e_{i_1}\ldots e_{i_p}), \ (i_1, \ldots, i_p=1, 2, \ldots, n). \tag{21}$$

Величины $p^{i_1\ldots i_p}$ называются координатами p-вектора и являются определителями p-го порядка матрицы координат m_k:

$$\begin{pmatrix} m_1^1 & m_1^2 & \ldots & m_1^n \\ m_2^1 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_p^1 & m_p^2 & \ldots & m_p^n \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Произведение (21) обращается в нуль, если все координаты $p^{i_1\ldots i_p}$ равны нулю; тогда ранг матрицы (22) снижается и множители $m_k (k=1, \ldots, p)$ — линейно зависимы.

Координатные векторы $e_i (i=1, \ldots, n)$ по условию линейно независимы.

Переход от репера $(O; e_i)$ к реперу $(O'; e_{i'})$

$$\overrightarrow{OO'}=c_0^i e_i, \quad e_{i'}=c_{i'}^i e_i \tag{23α}$$

преобразует радиус-вектор $M=\overrightarrow{OM}=x^ie_i$ в радиус-вектор

$$\overrightarrow{O'M}=x^{i'}e_{i'}$$

по формуле

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}$$

или

$$x^ie_i=c_{0'}^ie_i+x^{i'}c_{i'}^ie_i,$$

откуда в силу линейной независимости векторов e_i имеем:

$$x^i=c_{0'}^i+x^{i'}c_{i'}^i \qquad (i, i'=1, \ldots, n), \tag{23β}$$

где коэффициенты $c_{0'}^i$, $c_{i'}^i$ подчинены единственному условию

$$\det|c_{i'}^i|\neq 0.$$

С другой стороны, уравнения (23β) определяют наиболее общее аффинное преобразование пространства $(x^i)\to(x^{i'})$, если рассматривать x^i и $x^{i'}$ как координаты различных точек относительно одного и того же репера.

Поэтому аффинное преобразование пространства эквивалентно изменению координатного репера, причем соответствующие в преобразовании точки сохраняют одни и те же координаты относительно различных реперов. Это означает, другими словами, что репер $(O; e_i)$ является репером группы аффинных преобразований пространства.

Система уравнений

$$x^i=x^i(u^1, \ldots, u^p) \quad (i=1, \ldots, n)$$
$$(p<n)$$

или одно векторное уравнение

$$M=x^ie_i,$$

где функции x^i — аналитические функции своих аргументов и функциональная матрица $\left(\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\right)\right)$ $(i=1, \ldots, n; \ \alpha=1, \ldots, p)$ имеет ранг p, определяют p-мерное многообразие $\mathfrak{M}_p$. Для $p=1$ имеем линию, для $p=2$ — двумерную поверхность, для $p=n-1$ — гиперповерхность.

3 Зак. 1277. С. П. Фиников

Точка $(\underset{0}{x^i})$ и p-вектор $(\underset{0}{M_1}, \ldots, \underset{0}{M_p})$ в точке $(\underset{0}{x^i})$, где

$$M_\alpha = \frac{\partial M}{\partial u^\alpha} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} e_i \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n \\ \alpha = 1, \ldots, p \end{pmatrix},$$

определяют линейное многообразие (p-плоскость), касательное к многообразию в точке $(\underset{0}{x^i})$. Его параметрическое уравнение имеет вид

$$P = \underset{0}{M} + \underset{0}{M_\alpha} v^\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, p),$$

где P — радиус-вектор произвольной точки P касательной p-плоскости и $v^\alpha (\alpha = 1, \ldots, p)$ — параметры, определяющие положение точки P в касательной p-плоскости. Для $p = 1$ получаем касательную к линии $\mathfrak{M}_1$, для $p = 2$ — касательную плоскость к поверхности $\mathfrak{M}_2$ и т. д., для $p = n - 1$ — касательную гиперплоскость к гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$.

Касательная p-плоскость многообразия $\mathfrak{M}_p$ содержит касательные всех линий $\mathfrak{M}_1$, лежащих в $\mathfrak{M}_p$, так же как касательные ν-плоскости всех многообразий $\mathfrak{M}_\nu (\nu < p)$, которые лежат в $\mathfrak{M}_p$.

11. Дифференцирование аналитических точек. Если координаты аналитической точки M суть функции одного или нескольких независимых переменных, то говорят, что аналитическая точка есть функция этих переменных

$$M = M(t), \tag{a}$$

$$M = M(u, v), \tag{b}$$

$$\cdots\cdots$$

Аналитическая точка с координатами, равными производным от координат данной аналитической точки $M = x^i A_i$, называется ее *производной*: *обыкновенной*

$$M' = \frac{dM}{dt} = \frac{dx^i}{dt} A_i$$

или *частной*

$$\frac{\partial M}{\partial u} = M_u = \frac{\partial x^i}{\partial u} A_i.$$

Произведение производной по параметру t на произвольную постоянную или переменную (в частности, бесконечно малую) величину dt называется *дифференциалом аналитической точки*; аналогично строится полный дифференциал функции нескольких независимых переменных

$$dM = M' \, dt, \quad dM = M_u \, du + M_v \, dv.$$

При подходящем выборе дифференциала независимого переменного dt дифференциал dM будет равен производной M'. Для обозначения частных дифференциалов (дифференциалов в данном направлении) употребляются индексы, а иногда специальные символы дифференцирования

$$d_u M = M_u \, du; \quad \delta M = d_v M = M_v \, dv.$$

Для аналитических точек сохраняются обычные правила дифференцирования с сохранением порядка множителей при дифференцировании внешнего произведения

$$d(M_1 M_2 M_3) = (dM_1 M_2 M_3) + (M_1 \, dM_2 M_3) + (M_1 M_2 \, dM_3).$$

В дальнейшем будем предполагать, что все функции, с которыми мы будем иметь дело, в рассматриваемой области непрерывны и обладают достаточным числом непрерывных производных.

При этом условии уравнение (a), заданное в пространстве P_n, определяет кривую (регулярный кусок кривой) на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$, если производная $M'(t)$ не пропорциональна $M(t)$, т. е.

$$(MM') \neq 0.$$

Поскольку точка

$$\frac{M(t + \Delta t) - M(t)}{\Delta t}$$

как линейная комбинация точек $M(t)$ и $M(t + \Delta t)$ лежит на прямой, которая проходит через точки $M(t)$, $M(t + \Delta t)$ и при $\Delta t \to 0$ обращается в касательную, *производная* $\frac{dM}{dt}$ *есть точка, расположенная на касательной к кривой* (a). Здесь и в дальнейшем для краткости речи мы будем говорить «точка $\frac{dM}{dt}$ лежит на касательной» вместо «геометрическая точка, присоединенная к аналитической точке $\frac{dM}{dt}$, лежит на касательной».

Если $(MM') = 0$, то производная совпадает с геометрической точкой M:

$$\frac{dM}{dt} = \lambda M. \tag{24}$$

Если равенство (24) справедливо на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$, то точка M на отрезке неподвижна. Действительно, из (24) следует для каждой координаты x^i точки M

$$\frac{dx^i}{dt} = \lambda x^i, \quad x^i = \underset{0}{x^i} e^{\int \lambda \, dt},$$

где $\underset{0}{x^i}$ есть начальное значение решения x^i для $t = 0$.

Следовательно, при изменении t меняется только общий множитель всех координат точки (нормирование точки M); геометрическая точка M неподвижна.

Если $(MM') \neq 0$, то касательная определяется аналитической прямой (MM').

Аналогично, если $(MM'M'') \neq 0$, то эта аналитическая плоскость определяет соприкасающуюся плоскость кривой (а).

Уравнение (b) определяет двумерную поверхность в P_n, если в рассматриваемой замкнутой области изменения u, v произведение (MM_uM_v) отлично от нуля.

Уравнение $v=\varphi(u)$ определяет линию на поверхности (b); при $dv=\varphi'(u)\,du$ дифференциал

$$dM = M_u du + M_v dv \tag{c}$$

определяет точку на касательной к этой линии. При произвольном выборе du, dv точка dM занимает произвольное положение в касательной плоскости.

Аналитическая плоскость (MM_uM_v) является касательной плоскостью поверхности.

Поскольку для асимптотической линии поверхности соприкасающаяся плоскость совпадает с касательной плоскостью, аналитические плоскости (MM_uM_v) и $(M\,dM\,d^2M)$ при дифференцировании вдоль асимптотической определяют одну и ту же геометрическую плоскость. Между тем, в силу равенства (c) точки M и dM всегда лежат в касательной плоскости поверхности. Поэтому для совпадения касательной плоскости поверхности с соприкасающейся плоскостью кривой достаточно (и необходимо), чтобы в касательной плоскости лежала точка d^2M, т. е. чтобы четыре точки M, M_u, M_v и d^2M лежали в одной плоскости, т. е. чтобы имело место равенство

$$(d^2M,\ M_u,\ M_v,\ M) = 0. \tag{25}$$

Отсюда если вдоль кривой на поверхности справедливо уравнение (25), то кривая служит асимптотической линией поверхности.

II. Дифференциальные системы в инволюции

12. Картаново кольцо форм. Грассманово кольцо внешних произведений из аналитических точек в P_n (или векторов в A_n) строится над полем действительных чисел (скаляров) присоединением $n+1$ аналитических точек A_i $(i=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$, где каждая точка имеет $n+1$ компонент a_i^α $(\alpha=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$, или n векторов e_k $(k=1,\ \ldots,\ n)$, где каждый вектор имеет n компонент.

Теперь мы берем поле всех аналитических функций от n переменных $x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n$ и присоединяем к нему n дифференциалов $dx^i\,(i=1,\ \ldots,\ n)$.

Кольцевые операции (сложение, умножение на скаляры и внешнее умножение) приводят к образованиям различного вида (и различной степени 1, 2, ..., n).

а) Линейные формы

$$\omega = a_i\,dx^i \qquad (i=1,\ \ldots,\ n), \tag{26α}$$

где a_i — аналитические функции от переменных x^i.

b) Квадратичные (внешние) формы

$$\Omega_2 = \sum_{(ik)}^{1,\ldots,n} a_{ik}[dx^i\,dx^k] \qquad \begin{pmatrix} i,\ k=1,\ \ldots,\ n, \\ a_{ik}=-a_{ki} \end{pmatrix}, \tag{26β}$$

суммирование по сочетаниям. Этой форме можно поставить в соответствие для двух символов дифференцирования (частных дифференциалов dx^i, δx^i) билинейную форму

$$\Omega_2(d,\ \delta) = \sum_{(ik)}^{1,\ldots,n} a_{ik}(dx^i\,\delta x^k - dx^k\,\delta x^i), \tag{26β'}$$

которая называется *присоединенной*.

с) Кубичные (внешние) формы

$$\Omega_3 = \sum_{(ijk)}^{1,\ldots,n} a_{ijk}[dx^i\,dx^j\,dx^k] \qquad (i,\ j,\ k=1,\ \ldots,\ n), \tag{26γ}$$

суммирование по сочетаниям, коэффициенты a_{ijk} кососимметричны.

Для частных дифференциалов с символами дифференцирования dx^i, δx^i, ∂x^i кубичной форме Ω_3 соответствует присоединенная трилинейная форма

$$\Omega_3(d,\ \delta,\ \partial) = \sum_{(ijk)}^{1,\ldots,n} a_{ijk} \begin{vmatrix} dx^i & dx^j & dx^k \\ \delta x^i & \delta x^j & \delta x^k \\ \partial x^i & \partial x^j & \partial x^k \end{vmatrix}. \tag{26γ'}$$

. . . .

d) Вообще внешние формы степени p

$$\Omega_p = \sum_{(i_1\ldots i_p)}^{1,\ldots,n} a_{i_1\ldots i_p}[dx^{i_1}\ldots dx^{i_p}] \qquad (i_1\ldots i_p=1,\ \ldots,\ n), \tag{26δ}$$

суммирование по сочетаниям, коэффициенты $a_{i_1\ldots i_p}$ кососимметричны, p может принимать значения $p=2,\ 3,\ \ldots,\ n$. Такой форме присоединена p-линейная форма для p символов дифференцирования $d_1,\ \ldots,\ d_p$:

$$\Omega_p(d_1,\ \ldots,\ d_p) = \sum_{(i_1\ldots i_p)}^{1,\ldots,n} a_{i_1\ldots i_p} \begin{vmatrix} d_1x^{i_1} & \ldots & d_1x^{i_p} \\ d_2x^{i_1} & \ldots & d_2x^{i_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ d_px^{i_1} & \ldots & d_px^{i_p} \end{vmatrix}. \tag{26δ'}$$

Чтобы получить числовое значение внешней формы, надо:

1) задать *точку* в аналитическом пространстве (x^i) $(i=1,\ \ldots,\ n)$, т. е. числовые значения всех переменных x^i, затем

2а) для линейной формы задать *вектор* (dx^i), т. е. произвольные числовые значения всех дифференциалов dx^i;

2b) для квадратичной формы Ω_2 задать два вектора (dx^i) и (δx^i), т. е. две непропорциональные серии числовых значений дифференциалов dx^i и δx^i;

2c) для формы Ω_p степени p задать p векторов $(d_\alpha x^i)$ $(\alpha = 1, \ldots, p)$, т. е. p линейно независимых серий числовых значений дифференциалов.

После этого линейная форма подсчитывается подстановкой этих значений в виде числа. Внешняя форма подсчитывается по ее присоединенной форме.

Заметим, что числовые значения дифференциалов каждой серии обычно задаются с точностью до общего множителя так, что по существу задается не вектор, а направление в n-мерном пространстве (dx^i).

Можно задать значение форм сразу во всех точках аналитического пространства. Например, отнести аналитическое пространство (или некоторую область его) к системе криволинейных координат

$$x^i = \varphi^i(u^1, \ldots, u^n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

и положить

$$d_\alpha x^i = \frac{\partial \varphi^i}{\partial u^\alpha} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, p, \\ \alpha = 1, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Тогда внешние произведения получат значения функциональных определителей Якоби, а формы будут равны

$$\omega(d_1) = a_i \frac{\partial x^i}{\partial u^1};$$

$$\Omega_2(d_1, d_2) = \sum_{(i_1 i_2)}^{1, \ldots, n} a_{i_1 i_2} \frac{\partial(x^{i_1}, x^{i_2})}{\partial(u^1, u^2)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Omega_p(d_1, \ldots, d_p) = \sum_{(i_1 \ldots i_p)}^{1, \ldots, n} a_{i_1 \ldots i_p} \frac{\partial(x^{i_1}, \ldots, x^{i_p})}{\partial(u^1, \ldots, u^p)}.$$

Заметим, что вместо дифференциального базиса кольца $dx^1, \ldots, dx^n$ можно взять любую систему линейно независимых форм $\omega^1, \ldots, \omega^n$. Все остальные формы будут линейными комбинациями этих форм и их внешних произведений. Различные серии числовых значений придется задавать этим n формам ω^i. Например,

$$\theta = c_i \omega^i, \qquad \Theta_2 = \sum_{(ik)} a_{ik} [\omega^i \omega^k], \; \ldots$$

Обращение в нуль внешнего произведения линейных форм означает линейную зависимость множителей.

Лемма Картана. *Если $2r$ линейных форм ω^i и θ_i $(i = 1, \ldots, r)$ от $n \geqslant r$ переменных связаны соотношением*

$$[\omega^1\theta_1] + [\omega^2\theta_2] + \ldots + [\omega^r\theta_r] = 0 \qquad \text{(a)}$$

и формы ω^i линейно независимы, то формы θ_i линейно выражаются через ω^i с симметричной матрицей коэффициентов.

Поскольку ω^i линейно независимы, их можно*) включить в базис кольца n измерений, которому принадлежат все ω^i и θ_i, добавляя подходящие формы ω^λ $(\lambda = r+1, \ldots, n)$.

Тогда θ_i разложатся по формам нового базиса в виде

$$\theta_i = c_{ij}\omega^j + c_{i\lambda}\omega^\lambda \qquad \begin{pmatrix} i, j = 1, \ldots, r, \\ \lambda = r+1, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Внося это в уравнение (a), получим после приведения подобных членов

$$\sum_{(ij)}^{1, \ldots, n} (c_{ij} - c_{ji})[\omega^i\omega^j] + c_{i\lambda}[\omega^i\omega^\lambda] = 0,$$

откуда

$$c_{ij} = c_{ji}, \qquad c_{i\lambda} = 0,$$

что и доказывает предложение.

Заметим, что лемма сохраняет свою силу и для равенства с обычным законом умножения

$$\omega^i\theta_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r), \qquad \text{(b)}$$

но матрица коэффициентов c_{ij} будет антисимметричной

$$c_{ij} + c_{ji} = 0,$$

ибо при перестановке множителей теперь произведение не изменит знака

$$c_{ij}\omega^i\omega^j + c_{ji}\omega^j\omega^i = (c_{ij} + c_{ji})\omega^i\omega^j = 0.$$

Отсюда

Следствие I. Если r линейных форм θ_i удовлетворяют одновременно равенствам (a) и (b) при линейно независимых ω^i, то все θ_i равны нулю, ибо из условий $c_{ij} + c_{ji} = 0$ и $c_{ij} = c_{ji}$ следует

$$c_{ij} = c_{ji} = 0.$$

Следствие II. Если в кольце n форм внешние произведения линейной формы θ на две линейно независимые формы ω^1, ω^2 равны нулю:

$$[\theta\omega^1] = 0, \qquad [\theta\omega^2] = 0,$$

*) Теоремы о замене базиса линейных форм доказаны, например, в книге С. П. Финикова «Метод внешних форм Картана», стр. 97.

то форма θ тождественно равна нулю:

$$\theta \equiv 0. \tag{26з}$$

13. Внешнее дифференцирование. К обычным кольцевым операциям теперь добавляется внешнее дифференцирование.

По определению внешний дифференциал от формы

$$\Omega_p = \sum_{(i_1 \ldots i_p)} a_{i_1 \ldots i_p} [dx^{i_1} \ldots dx^{i_p}]$$

равен

$$D\Omega_p = \sum_{(i_1 \ldots i_p)} [da_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \ldots dx^{i_p}]. \tag{27α}$$

Отсюда следуют такие правила дифференцирования

$$D(\Omega^1 + \Omega^2) = D\Omega^1 + D\Omega^2, \tag{27β}$$

$$D(m\Omega) = mD\Omega + [dm\,\Omega], \tag{27γ}$$

$$D[\Omega_p \Omega_q] = [D\Omega_p,\ \Omega_q] + (-1)^p [D\Omega_q,\ \Omega_p], \tag{27δ}$$

где p и q суть степени форм Ω_p и Ω_q.

Теорема 1. *Внешний дифференциал от полного дифференциала равен нулю и обратно, если внешний дифференциал формы равен нулю, то форма — полный дифференциал.*

Теорема 2. *Внешний дифференциал от внешнего дифференциала равен нулю.*

Из определения (26β′) вытекает, что билинейная форма, присоединенная к внешнему дифференциалу линейной формы $D\omega$, строится по формуле

$$D\omega = d\omega(\delta) - \delta\omega(d), \tag{28}$$

где $\omega(\delta)$ означает, что форма ω написана для символа дифференцирования δ. Выражение (28) называется *билинейным ковариантом Фробениуса*.

Аналогично $(p+1)$-линейная форма, присоединенная к внешнему дифференциалу формы Ω_p степени p

$$\Omega_p = \sum_{(i_1 \ldots i_p)} a_{i_1 \ldots i_p} [\omega^{i_1} \ldots \omega^{i_p}],$$

строится по формуле

$$D\Omega_p(d_1 \ldots d_p) =$$
$$= \delta\Omega_p(d_1 \ldots d_p) - d_1\Omega_p(\delta,\ d_2 \ldots d_p) + \ldots \mp d_p\Omega_p(d_1 \ldots d_{p-1},\ \delta). \tag{28′}$$

14. Система внешних дифференциальных уравнений. Рассмотрим дифференциальное кольцо с базисом $[dx^1, \ldots, dx^n] \neq 0$ над полем голоморфных функций от $x^1, \ldots, x^n$.

Равенства

$$\begin{gathered} \Phi_1(x^1, \ldots, x^n) = 0, \ \ldots, \ \Phi_l(x^1, \ldots, x^n) = 0, \\ \theta_1 = 0, \ \ldots, \ \theta_{l_1} = 0, \ \ldots, \ \Theta^{(2)}_{l_2} = 0, \ \ldots, \ \Theta^{(m)}_{l_m} = 0, \end{gathered} \tag{29α}$$

где функции $\Phi_1, \ldots, \Phi_l$ функционально независимы, а линейные формы $\theta_1, \ldots, \theta_{l_1}$ — линейно независимы и $\Theta^{(p)}_\alpha$ есть внешняя форма степени p, образуют систему внешних дифференциальных уравнений.

Если подстановка

$$x^j = F^j(t_1, \ldots, t_p) \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{30}$$

обращает все уравнения (29α) в тождества относительно t_i, dt_i $(i = 1, \ldots, p)$, то говорят, что система (30) определяет *решение* системы (29α). Если ранг функциональной матрицы в окрестности точки $x^j = \underset{0}{x^j} = F^j(t_1^0, \ldots, t_p^0)$

$$\left\| \frac{\partial F^j}{\partial t_i} \right\| \qquad \begin{pmatrix} j = 1, \ldots, n, \\ i = 1, \ldots, p \end{pmatrix}$$

равен p, то p уравнений (30) можно разрешить относительно t_i и по исключении t_i привести (30) к виду

$$x^k = f^k(x^1, \ldots, x^p) \qquad (k = p+1, \ldots, n). \tag{30′}$$

Говорят, что в окрестности точки $(\underset{0}{x^j})$ система (30′) определяет p-мерное *интегральное многообразие* $\mathfrak{M}_p$ системы (29α).

В силу того, что операция внешнего дифференцирования перестительна с операцией подстановки (30) или (30′), подстановка (30) или (30′) удовлетворит не только систему (29α), но и систему ее внешних дифференциалов (и полных дифференциалов от конечных уравнений $d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} dx^j = 0$):

$$\begin{gathered} d\Phi_1 = 0, \ \ldots, \ d\Phi_l = 0, \\ D\theta_1 = 0, \ \ldots, \ D\theta_{l_1} = 0, \ D\Theta^{(2)}_1 = 0, \ \ldots, \ D\Theta^{(2)}_{l_2} = 0, \ \ldots, \ D\Theta^{(m)}_{l_m} = 0. \end{gathered} \tag{29β}$$

Присоединяя уравнения (29β) к системе (29α), получим систему, *замкнутую относительно операции внешнего дифференцирования*, в силу теоремы 2 п. 13.

В дальнейшем мы будем предполагать, что уже рассматриваемая система (29α) замкнута.

15. Вполне интегрируемая система. *Вполне интегрируемой называется замкнутая система, содержащая только линейные (пфаффовы) формы*

$$\theta_1 = 0, \ \ldots, \ \theta_{l_1} = 0. \tag{31}$$

Следствие. *Система* (31) *вполне интегрируема, если внешние дифференциалы уравнений системы являются алгебраическими следствиями самой системы,* т. е. обращаются в тождества, если с помощью уравнений (31) исключить дифференциалы $dx^{p+1}, \ldots, dx^{p+l_1}$.

Вполне интегрируемая система допускает интегральное многообразие наибольшей размерности

$$p = n - l_1.$$

Для нее система (30′) содержит ровно l_1 уравнений, *определяющих* l_1 *неизвестных функций*

$$x^k = f^k(x^1, \ldots, x^p, C_1, \ldots, C_{l_1}) \quad (k = p+1, \ldots, p+l_1) \quad (32)$$

с произвольными начальными значениями $x^k = \overset{0}{x}{}^k = C_{k-p}$ для $x^i = \overset{0}{x}{}^i$ $(i = 1, \ldots, p)$ через $p = n - l_1$ независимых переменных.

Если уравнения (32) разрешить относительно постоянных интеграции

$$\varphi_1(x^1, \ldots, x^n) = C_1, \ \ldots, \ \varphi_{l_1}(x^1, \ldots, x^p) = C_{l_1}, \qquad (32')$$

то функции

$$y_k = \varphi_k(x^1, \ldots, x^n) \qquad (33)$$

называются *первыми интегралами* системы (31).

16. Характеристические переменные семейства форм. Рассмотрим кольцо форм с линейным базисом $\omega^1, \ldots, \omega^n$.

Будем называть *алгебраическим дифференцированием* внешней формы $\Theta^{(p)}$ по форме базиса ω^1 операцию

$$\frac{\partial}{\partial\omega^1}\Theta^{(p)},$$

подчиненную правилам действий:

1. Производная суммы мономов равна сумме производных от каждого монома суммы.

2. Если моном не содержит формы ω^1, то производная равна нулю.

3. Производная от монома

$$a[\omega^2, \ldots, \omega^1, \ldots, \omega^p]$$

получается результатом двух операций:

a) множитель ω^1 во внешнем произведении монома переносится на первое место с соответствующим изменением знака (в силу антикоммутативности);

b) форма ω^1 заменяется единицей.

Например,

$$\frac{\partial}{\partial\omega^1}[\omega^1\omega^2] = \omega^2, \quad \frac{\partial}{\partial\omega^2}[\omega^1\omega^2\omega^3] = -[\omega^1\omega^3], \quad \frac{\partial}{\partial\omega^3}[\omega^1\omega^2] = 0.$$

Поскольку алгебраическое дифференцирование понижает степень произведения на единицу, производная порядка $p-1$ от внешней формы $\Theta^{(p)}$ степени p будет линейной формой.

Ассоциированной системой форм семейства

$$\theta_1, \ldots, \theta_{l_1}, \Theta_1^{(2)}, \ldots, \Theta_{l_2}^{(2)}, \ldots, \Theta_{l_m}^{(m)}, \qquad (34)$$

где

$$\Theta^{(p)} = a_{j_1\ldots j_p}[\omega^{j_1}, \ldots, \omega^{j_p}] \qquad (j_1, \ldots, j_p = 1, \ldots, n)$$

называется базис

$$\tilde{\omega}^1, \ldots, \tilde{\omega}^q \qquad (q \leqslant n) \qquad (34')$$

совокупности всех линейных форм $\theta_1, \ldots, \theta_{l_1}$ и всех $(p-1)$-х алгебраических производных по формам базиса $\omega^1, \ldots, \omega^n$ от каждой внешней формы $\Theta^{(p)}$ степени $p (p = 2, \ldots, m)$ семейства (34).

Ассоциированная система (34′) *образует базис подкольца форм* (34). Каждая форма (34) может быть выражена только через формы (34) и все формы (34) не могут быть выражены через линейные комбинации $\omega^1, \ldots, \omega^n$ в количестве, меньшем q.

Характеристической системой форм семейства (29α) называется ассоциированная система замкнутого семейства, полученного присоединением к формам (29α) их внешних дифференциалов (29β).

Характеристическая система форм обладает рядом замечательных свойств:

1. Если все формы характеристической системы приравнять нулю, то получившаяся таким образом характеристическая система уравнений *вполне интегрируема.*

2. Если ранг характеристической системы равен ρ и она интегрируется ρ первыми интегралами

$$F_j(x^1, \ldots, x^n) = C_j \qquad (j = 1, \ldots, \rho),$$

где C_j — произвольные постоянные интеграции, то первые интегралы системы

$$y_j = F_j(x^1, \ldots, x^n)$$

определяют ρ *характеристических переменных* семейства (29α) (или (29αβ)), через которые можно выразить все формы (29α) (или (29αβ)), так что под знаком дифференциала и в коэффициентах будут стоять только характеристические переменные $y_1, \ldots, y_\rho$.

3. Ранг характеристической системы ρ определяет наименьшее число переменных, через которые можно выразить все формы семейства (29α) (или (29αβ)).

17. Необходимый признак существования интегрального многообразия. Допустим, что дана замкнутая система внешних уравнений (29α). Если она допускает p-мерное интегральное многообразие $\mathfrak{M}_p$, определяемое системой (30′), то подстановка значений x^k, dx^k, полученных из уравнений (30′), в уравнения (29α) приводит к тождеству.

Совокупность n чисел $\underset{0}{x^k}$, удовлетворяющих системе (30′), определяет точку интегрального многообразия. Значения dx^k при произвольных $dx^1, \ldots, dx^p$ определяют касательный элемент (касательную p-плоскость) многообразия $\mathfrak{M}_p$.

Мы можем подойти к построению касательного элемента интегрального многообразия с другой точки зрения.

Будем называть *интегральной точкой* $\mathfrak{E}_0$ совокупность n чисел $(\underset{0}{x^j})$ $(j=1, \ldots, n)$, удовлетворяющих конечным уравнениям

$$\Phi_1(x^1, \ldots, x^n)=0, \ \ldots, \ \Phi_l(x^1, \ldots, x^n)=0$$

замкнутой системы (29α), если система содержит их. В противном случае координаты $(\underset{0}{x^j})$ интегральной точки вполне произвольны в области голоморфности системы.

Будем называть *линейным интегральным элементом* $\mathfrak{E}_1$ совокупность интегральной точки $\mathfrak{E}_0$ и вектора e_1, координатами которого служат n чисел $dx^1, \ldots, dx^n$, удовлетворяющих линейным уравнениям $\theta_1=0, \ldots, \theta_{l_1}=0$ системы (29α).

Вообще, *ν-мерным интегральным элементом* $\mathfrak{E}_\nu$ называется совокупность интегральной точки $\mathfrak{E}_0$ и ν-мерного векторного пространства, определяемого при произвольных $dx^1, \ldots, dx^\nu$ координатами

$$dx^m = l_1^m\,dx^1 + \ldots + l_\nu^m\,dx^\nu \qquad (m=\nu+1, \ldots, n), \tag{35}$$

удовлетворяющими *алгебраически* всем уравнениям замкнутой системы (29α). Слово «алгебраически» означает, что величины $dx^1, \ldots, dx^n$ связаны только соотношениями (35) и после подстановки всех dx^m по формулам (35) в уравнения (29α) при подходящем выборе величин l_i^m все коэффициенты при независимых произведениях $[dx^{i_1}, \ldots, dx^{i_\alpha}]$ $(\alpha=1, \ldots, \nu)$ обратятся в нуль.

Касательный элемент интегрального многообразия $\mathfrak{M}_p$, очевидно, является p-мерным интегральным элементом $\mathfrak{E}_p$. Отсюда необходимый признак:

Чтобы система внешних дифференциальных уравнений допускала р-мерное интегральное многообразие $\mathfrak{M}_p$, *необходимо* (но не достаточно) *существование р-мерного интегрального элемента* $\mathfrak{E}_p$.

18. Цепь интегральных элементов и теорема Картана. Для достаточности существования интегрального многообразия надо, чтобы *интегральный элемент* $\mathfrak{E}_p$ *был достижим регулярной цепью интегральных элементов.*

Определение 1. *Присоединенные к одной интегральной точке* $\mathfrak{E}_0$ *интегральные элементы*

$$\mathfrak{E}_\nu \quad (\nu=0, 1, \ldots, p) \tag{36}$$

образуют цепь интегральных элементов, если каждый элемент $\mathfrak{E}_{\nu+1}$ *проходит через предыдущий* $\mathfrak{E}_\nu$, *т. е. векторное пространство* $\mathfrak{E}_{\nu+1}$ *содержит все векторы пространства* $\mathfrak{E}_\nu$.

Определение 2. *Интегральный элемент* $\mathfrak{E}_\nu^0$ *не особый, если через него проходит не больше интегральных элементов* $\mathfrak{E}_{\nu+1}$, *чем через соседние элементы* $\mathfrak{E}_\nu$, *координаты которых* (x^j), (dx^j) *достаточно мало отличаются от координат* $(\underset{0}{x^j})$, $(\underset{0}{dx^j})$ *интегрального элемента* $\mathfrak{E}_\nu^0$.

Определение 3. *Цепь интегральных элементов* $(\mathfrak{E}_\nu)$ $(\nu=1, \ldots, p)$ *называется регулярной, если каждый элемент цепи* $\mathfrak{E}_{\nu-1}$ — *не особый.*

Если интегральный элемент $\mathfrak{E}_p$ достижим регулярной цепью $(\mathfrak{E}_\nu)$, $(\nu=0, \ldots, p)$, то при подходящем выборе переменных (x^j) все элементы $\mathfrak{E}_\nu$ будут определяться формулами (35) *с одними и теми же коэффициентами* l_i^k, т. е. с возрастанием ν в формулах (35) будут добавляться слагаемые $dx^{\nu+1}, \ldots, dx^p$ *без изменения предыдущих.*

Будем обозначать буквой r_ν число произвольных параметров, от которого зависит выбор интегрального элемента $\mathfrak{E}_{\nu+1}$, проходящего через предыдущий элемент цепи $\mathfrak{E}_\nu$. Тогда *характерами* цепи называются разности

$$s_0=l_1-l, \quad s_1=q-r_1, \quad s_2=r_1-r_2, \ \ldots,$$
$$s_{p-1}=r_{p-2}-r_{p-1}, \quad s_p=r_{p-1}, \tag{37}$$

где l_1 — число линейно независимых линейных уравнений замкнутой системы (29α), l — число функционально независимых конечных уравнений ее и

$$q=n-p-l_1. \tag{38α}$$

Складывая последние p уравнений (37), получим:

$$s_1+\ldots+s_p=q. \tag{38β}$$

В этих обозначениях теорема существования интегрального многообразия имеет вид:

Теорема Картана. *Если существует регулярная цепь интегральных элементов* (36) *с характерами* (37), *то через всякую интегральную точку проходит интегральная линия* $\mathfrak{M}_1$, *через каждое* $\mathfrak{M}_1$ *проходит двумерное интегральное многообразие* $\mathfrak{M}_2$ *и т. д., через каждое* $\mathfrak{M}_{p-1}$ *проходит р-мерное интегральное многообразие* $\mathfrak{M}_p$, произвол которого зависит от

s_p	произвольных функций	от p	аргументов
s_{p-1}	» »	» $p-1$	»
. . .	. . .	. . .	. . .
s_1	» »	» 1	аргумента

и s_0 произвольных постоянных.

Само собой понятно, что произвол интегрального многообразия определяется числом произвольных функций наибольшего числа аргументов.

Система внешних дифференциальных уравнений, удовлетворяющая теореме Картана, носит название *системы в инволюции*.

19. Признак регулярности цепи Кэлера. Допустим, что ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_p$ замкнутой системы (29α), на котором переменные $x^1, \ldots, x^p$ были бы независимыми, или, что то же, на котором внешнее произведение дифференциалов $[dx^1, \ldots, dx^p] \neq 0$ было отлично от нуля.

Вместо независимых переменных $x^1, \ldots, x^p$ можно задать любой базис подкольца форм $dx^1, \ldots, dx^p$

$$[\omega^1\omega^2\ldots\omega^p] \neq 0. \tag{39}$$

Включим в базис характеристической системы форм подкольца уравнений (29α) все формы ω^i $(i = 1, \ldots, p)$, левые части θ_k $(k = 1, \ldots, l_1)$ линейных уравнений (29α) и дополним до полного базиса формами $\tilde{\omega}^g$ $(g = 1, \ldots, q)$, где в полном согласии с (38α) $q = n - p - l_1$.

На всяком интегральном элементе формы θ_k равны нулю. Если предположить (*высечение по формам базиса*), что на каждом интегральном элементе цепи $\mathfrak{E}_\nu$

$$\omega^{\nu+1} = 0, \ldots, \omega^p = 0,$$

то уравнения (35), определяющие интегральный элемент $\mathfrak{E}_\nu$, примут вид

$$\tilde{\omega}^g = l_1^g\omega^1 + \ldots + l_\nu^g\omega^\nu. \tag{40}$$

При последовательном определении элементов цепи $\mathfrak{E}_1, \ldots, \mathfrak{E}_\nu, \ldots$ каждый раз при определении $\mathfrak{E}_\nu$ предыдущие коэффициенты l_α^g $(\alpha = 1, \ldots, \nu - 1)$ считаются известными. Искомые коэффициенты l_ν^g входят в уравнения линейно. Если при определении их на предыдущие l_α^g $(\alpha < \nu)$ не налагается новых ограничений, то система конечных уравнений на коэффициенты l_ν^g $(\nu = 1, \ldots, p)$ *разрешается регулярно*.

Признак Кэлера. *Если система уравнений на коэффициенты l_ν^g $(\nu = 1, \ldots, p)$ допускает регулярное разрешение, то построенная цепь регулярна, система дифференциальных уравнений — в инволюции и произвол интегрального многообразия $\mathfrak{M}_p$ определяется теоремой Картана.*

Обратная теорема неверна. Невозможность регулярного разрешения системы уравнений на коэффициенты l_ν^g может объясняться неудачным выбором базиса $\omega^1, \ldots, \omega^p$ подкольца форм (39), независимых на интегральном многообразии.

20. Признак Картана. Чтобы не стеснять произвол интегральных элементов $\mathfrak{E}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, p)$ выбором специального высечения, можно задаться матрицей неопределенных величин

$$\| u_\alpha^i \| \qquad (i, \alpha = 1, \ldots, p)$$

так, чтобы для базисных векторов e_α $(\alpha = 1, \ldots, \nu)$, определяющих векторное пространство интегральных элементов $\mathfrak{E}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, p)$, формы ω^i имели значения $\omega^i = u_\alpha^i$ для вектора e_α $(i, \alpha = 1, \ldots, p)$.

Теперь подстановку разложений (40) во внешние уравнения системы (29α) можно заменить подстановкой значений форм ω^i, $\tilde{\omega}^g$ на базисных векторах e_α $(\alpha = 1, \ldots, \nu)$ векторного пространства $\mathfrak{E}_\nu$ и μ-линейную форму, присоединенную по формулам (26δ, δ') к каждому уравнению степени μ $(\mu = 1, \ldots, \nu)$ системы (29α), которое теперь имеет вид

$$\Theta^{(\mu)} = b_{i_1, \ldots, i_\rho, g_1, \ldots, g_\sigma}[\omega^{i_1}, \ldots, \omega^{i_\rho}\tilde{\omega}^{g_1}, \ldots, \tilde{\omega}^{g_\sigma}] = 0 \tag{41}$$

$$\left(\rho + \sigma = \mu, \quad \begin{matrix} i_1, \ldots, i_\rho = 1, \ldots, \nu, \\ g_1, \ldots, g_\sigma = 1, \ldots, q \end{matrix}\right).$$

Если система внешних уравнений *правильная*, т. е. каждое внешнее произведение (41) содержит только один множитель $\tilde{\omega}^g$ и все остальные ω^i, то присоединенная μ-линейная форма

$$\Theta^{(\mu)}(d_{\alpha_1}, \ldots, d_{\alpha_{\mu-1}}d_\nu) = b_{i_1, \ldots, i_{\mu-1}g}\begin{vmatrix} u_{\alpha_1}^{i_1} & \ldots & u_{\alpha_1}^{i_{\mu-1}} & v_{\alpha_1}^g \\ u_{\alpha_2}^{i_1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_\nu^{i_1} & \ldots & u_\nu^{i_{\mu-1}} & v_\nu^g \end{vmatrix} = 0, \tag{41'}$$

где v_α^g — неизвестные значения форм $\tilde{\omega}^g$ на векторе e_α, будет иметь коэффициентами при неизвестных v_ν^g выражения, зависящие только от неопределенных величин u_α^i. Сохраняя полную произвольность величин u_α^i, подсчитываем ранг полярной матрицы, т. е. матрицы коэффициентов при неизвестных, обозначая его в виде суммы

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_\nu. \tag{42}$$

Если ранг расширенной матрицы (вместе со столбцом правых частей уравнения, куда войдут величины $v_{\alpha_1}^g, \ldots, v_{\alpha_{\mu-1}}^g$, равен рангу (42), то система, определяющая интегральный элемент $\mathfrak{E}_\nu$, т. е. q значений форм $\tilde{\omega}^g$ на векторе e_ν, допускает решение с

$$q - (\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_\nu) \tag{42'}$$

произвольными параметрами. Если это имеет место для каждого $\nu = 1, \ldots, p$, то цепь регулярна, система — в инволюции; следовательно, $\sigma_\alpha = s_\alpha$ суть характеры системы и по формуле (38β) произвол элемента $\mathfrak{E}_\nu$ равен

$$q - (\sigma_1 + \ldots + \sigma_\nu) = \sigma_{\nu+1} + \ldots + \sigma_p,$$

а общий произвол цепи (число Картана)

$$Q = (\sigma_1 + \ldots + \sigma_p) + (\sigma_2 + \ldots + \sigma_p) + \ldots + \sigma_p = \\ = \sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + p\sigma_p \qquad (43)$$

будет равен произволу N наиболее общего интегрального элемента $\mathfrak{E}_p$.

Если ранг расширенной матрицы при определении $\mathfrak{E}_\nu$ больше, чем (42), то система не имеет решения, если не наложить ограничения на произвол выбора предыдущих $\mathfrak{E}_\mu$ $(\mu < \nu)$, т. е. величин $v^g_\alpha (\alpha < \nu)$. Тогда цепь станет особой и система — не в инволюции, а произвол N реально существующего p-мерного интегрального элемента $\mathfrak{E}_p$ будет меньше Q. Отсюда теорема:

Признак Картана. *Если для произвольной матрицы неопределенных величин* u^i_α $(i, \alpha = 1, \ldots, p)$ *ранги* $\sigma_1 + \ldots + \sigma_\nu$ *матриц коэффициентов при неизвестных значениях форм* $\tilde{\omega}^g_\nu$ *в системах полярных уравнений* (41′), *определяющих интегральные элементы* $\mathfrak{E}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, p)$ *цепи, приводят к характерам* $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$, *удовлетворяющим равенству*

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + p\sigma_p = N, \qquad (44)$$

где N — произвол наиболее общего p-мерного интегрального элемента $\mathfrak{E}_p$, то цепь регулярна, система — в инволюции с характерами $s_\alpha = \sigma_\alpha$ и произвол интегрального многообразия $\mathfrak{M}_p$ определяется теоремой Картана.

Замечание 1. Если система внешних уравнений (29α) неправильная, т. е. встречаются внешние произведения (41), содержащие несколько множителей $\tilde{\omega}^{g_1}$, $\tilde{\omega}^{g_2}$, то матрица коэффициентов при неизвестных v^g_ν в системе, определяющей интегральный элемент $\mathfrak{E}_\nu$, будет содержать значения форм $\tilde{\omega}^g = v^g_\mu$ $(\mu = 1, \ldots, \nu - 1)$ на векторах e_μ, принадлежащих предыдущим элементам цепи $\mathfrak{E}_\mu$ $(\mu < \nu)$. Их нельзя считать вполне произвольными, ибо они отчасти определялись (с произвольными параметрами) при построении $\mathfrak{E}_\mu$. В этом случае рекомендуется найти одно (или несколько) решений для коэффициентов разложений p-мерного интегрального элемента $\mathfrak{E}_p$

$$\tilde{\omega}^g = L^g_i \omega^i \quad (i = 1, \ldots, p;\ g = 1, \ldots, q) \qquad (45\alpha)$$

в виде функций от произвольных параметров $y^1, y^2, \ldots, y^N$

$$L^g_i = F^g_i(y^1, y^2, \ldots, y^N) \qquad (45\beta)$$

и значения форм $\tilde{\omega}^g = v^g_\mu$ подсчитывать по формулам (45α, β)

$$v^g_\mu = L^g_i u^i_\mu,$$

полагая при подсчете рангов σ_i элементы матрицы $\| u^i_\alpha \|$ и параметры $y^1, y^2, \ldots, y^N$ произвольно неопределенными величинами (чтобы расчет ранга сохранялся для соседних элементов $\mathfrak{E}_\mu$).

Замечание 2. В случае двух независимых переменных все внешние дифференциальные уравнения выше второй степени удовлетворяются на интегральном многообразии тождественно, как формы > 2 измерений в подкольце двух базисных форм.

На первом линейном элементе цепи значения форм $\tilde{\omega}^g (g = 1, \ldots, q)$ произвольны, на втором они связаны билинейными уравнениями, присоединенными к квадратичным уравнениям замкнутой системы (29α). Они дают для неизвестных значений $\tilde{\omega}^g$ на втором векторе e_2 двумерного элемента $\mathfrak{E}_2$ цепи линейную систему, которая имеет решение при любых правых частях (т. е. при любом выборе значений $\tilde{\omega}^g = v^g_1$ на первом линейном элементе), если ранг матрицы коэффициентов равен числу независимых билинейных уравнений, т. е. числу независимых квадратичных уравнений системы.

Отсюда теорема: *Необходимое и достаточное условие регулярности цепи интегральных элементов внешней дифференциальной* (или пфаффовой) *системы при двух независимых переменных состоит в равенстве ранга полярной матрицы числу независимых квадратичных уравнений замкнутой дифференциальной системы.*

21. Продолжение системы. Если необходимый признак удовлетворен, а цепь интегральных элементов не регулярна (при любом высечении), то систему надо продолжать. Для этого надо обратиться к уравнениям (45α, β) п. 20, определяющим наиболее общий интегральный элемент $\mathfrak{E}_p$ с N произвольными параметрами $y^1, \ldots, y^N$. Эти уравнения надо присоединить к замкнутой системе (29α). При этом все внешние уравнения (выше первой степени) исчезнут, ибо коэффициенты L^g_i определялись из требования, чтобы все эти уравнения обращались в тождества.

Уравнения (45α) п. 20 дифференцируем внешним образом и полученную систему из линейных уравнений (29α), уравнений (45α) и их внешних дифференциалов исследуем так же, как первоначальную систему (29α).

Согласно общей теореме Картана *) последовательные продолжения или приведут систему к противоречию, когда необходимый признак (п. 17) не будет удовлетворен, или дадут, наконец, систему в инволюции.

Нередко бывает необходимо наложить добавочные условия, чтобы необходимое условие было удовлетворено. Тогда эти уравнения присоединяем к системе и полученную систему исследуем заново.

---

*) См., например, С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, Москва, 1948, стр. 287.

4 Зак. 1277. С. П. Фиников

22. Особые интегральные многообразия. Интегральный элемент $\mathcal{E}_\nu^0$ особый, если через него проходит больше элементов $\mathcal{E}_{\nu+1}$, чем через соседние $\mathcal{E}_\nu$.

Так как $(\nu+1)$-й вектор $(d_{\nu+1}x^\alpha)$, определяющий $\mathcal{E}_{\nu+1}$, получается решением линейной системы уравнений (полярной системы элемента $\mathcal{E}_\nu^0$), то элемент $\mathcal{E}_\nu^0$ будет особым только при понижении ранга полярной матрицы (матрицы коэффициентов полярной системы), т. е. при обращении в нуль всех ее определителей высшего порядка.

Уравнения, которые при этом получаются, могут связывать только величины u_α^i, т. е. значения форм ω^i на первых ν линейных элементах. Тем самым на всяком интегральном многообразии $\mathfrak{M}_p$ выделяется некоторая сеть линий (характеристики), которая имеет особое значение.

Условия понижения ранга могут связывать значения $\tilde{\omega}^g = v_\alpha^g$ $(\alpha = 1, \ldots, \nu)$ на первых ν линейных элементах цепи. Если это будет иметь место для всех линейных элементов многообразия, то такое интегральное многообразие не может быть получено обычным путем и называется *особым*. Чтобы получить особое интегральное многообразие, надо присоединить все уравнения, обусловливающие понижение ранга полярной системы, к уравнениям системы и полученную систему исследовать так же, как первоначальную систему.

Главное затруднение при этом в том, что в отличие от первоначальной системы (29α), которая содержала, кроме конечных, только пфаффовы уравнения (линейные) или уравнения из внешних форм, условие понижения ранга вводит уравнения, содержащие в левой части смешанные многочлены, где внешние произведения перемножены между собой по правилам коммутативной алгебры.

Следует заметить, что при понижении ранга полярной матрицы условия на формы $\tilde{\omega}^g$ могут накладываться только для неправильной системы внешних уравнений. После одного продолжения всякая система становится правильной, сохраняя все свои интегральные многообразия — обыкновенные и особые. Все дело в том, что неправильная система внешних уравнений допускает несколько различных решений (45α) для коэффициентов L_i^q разложения p-мерного интегрального элемента (45α) с различным числом параметров $y^1, \ldots, y^N$, которые приводят к различным интегральным элементам (45α). Одно из них с наибольшим числом параметров N соответствует не особому интегральному многообразию $\mathfrak{M}_p$, остальные, если не приводят к противоречию, — особым. Поэтому при определении рангов полярных матриц интегральные элементы $\mathcal{E}_\nu$ цепи строятся так, чтобы они достигали определенный интегральный элемент $\mathcal{E}_p$, и значения форм $\tilde{\omega}^g = v_\mu^g$ $(\mu = 1, \ldots, \nu - 1)$ определяются по формулам $v_\mu^g = L_i^q u_\mu^i$, используя решения $L_i^q = F_i^q(y^1, \ldots, y^N)$ для выбранного элемента $\mathcal{E}_p$.

III. Подвижной репер пространства

23. Уравнения структуры проективного пространства. Мы видели (п. 1), что проективное преобразование пространства P_3 может быть задано невырожденным тетраэдром $\{A_i\}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, т. е. четырьмя аналитическими точками A_i, в который преобразуется начальный тетраэдр пространства. Задать семейство невырожденных тетраэдров $\{A_i\}$ значит задать семейство проективных преобразований. Если это семейство зависит от произвольного параметра t, то все аналитические точки A_i зависят от t. Будем предполагать эти функции на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$ аналитическими. Тогда в каждой точке этого отрезка существуют дифференциалы dA_i.

Четыре дифференциала dA_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ определяют инфинитезимальное преобразование *) пространства. Так как каждый дифференциал dA_i сам является аналитической точкой, то при невырожденном тетраэдре $\{A_i\}$ его можно разложить по вершинам тетраэдра

$$dA_i = \omega_i^k A_k \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4). \tag{46}$$

Координаты ω_i^k точек dA_i называются *компонентами* инфинитезимального проективного преобразования или *компонентами проективных движений тетраэдра*.

Если тетраэдр $\{A_i\}$ зависит от одного параметра t, то все компоненты ω_i^k пропорциональны dt. Если он зависит от p параметров $u^1, \ldots, u^p$, то компоненты являются линейными формами от $du^1, \ldots, du^p$

$$\omega_i^k = a_{i\lambda}^k du^\lambda \begin{pmatrix} i, k = 1, 2, 3, 4 \\ \lambda = 1, \ldots, p \end{pmatrix}, \tag{47}$$

где $a_{i\lambda}^k$ суть функции от всех u^λ.

Так как тетраэдр $\{A_i\}$ вполне определяется 16 координатами его четырех вершин, то наиболее общее инфинитезимальное преобразование (46) зависит от $p = 16$ дифференциалов du^λ, даже только от 15 параметров, ибо умножение всех четырех вершин координатного тетраэдра на общий множитель умножает на этот множитель все аналитические точки пространства, оставляя геометрические точки неизменными, следовательно, приводит к тождественному преобразованию пространства.

Компоненты ω_i^k не могут быть взяты произвольными функциями u^λ и du^λ. Дифференцируя систему (46) внешним образом, получим:

$$A_k D\omega_i^k + [dA_k \omega_i^k] = 0 \tag{a}$$

*) См., например, С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, стр. 398.

или, меняя во второй сумме индекс суммирования k на j и заменяя по формуле (46) $dA_j=\omega_j^k A_k$, получим:

$$\{D\omega_i^k+[\omega_j^k\omega_i^j]\}A_k=0,$$

где общий множитель A_k вынесен за скобку.

Поскольку тетраэдр $\{A_k\}$ не вырожден и вершины A_k не могут быть связаны линейной зависимостью, все фигурные скобки равны нулю, откуда

$$D\omega_i^k=[\omega_i^j\omega_j^k]. \tag{48}$$

Квадратичные уравнения (48) называются *уравнениями структуры* проективной группы или проективного пространства.

Основная теорема. *Компоненты ω_i^k, удовлетворяющие уравнениям структуры* (48), *определяют одно семейство тетраэдров вплоть до проективного преобразования пространства.*

Действительно, в силу (48) система (46) вполне интегрируема, ибо внешние дифференциалы (a) после подстановки dA_i из (46) обращаются в тождество.

Линейные однородные уравнения (46) справедливы для каждой серии однородных координат $A_i(a_i^\alpha)$ ($\alpha=1, 2, 3, 4$)

$$da_i^\alpha=\omega_i^k a_k^\alpha, \tag{46'}$$

и эта система тоже вполне интегрируема.

Следовательно, существует решение и только одно с начальными условиями

$$a_i^\alpha=\underset{0}{a_i^\alpha} \quad \text{для} \quad u^\lambda=\underset{0}{u^\lambda}, \qquad \underset{0}{a_i^\lambda},\ \underset{0}{u^\lambda}=\text{const}.$$

Значит, для каждого начального невырожденного тетраэдра $\{\underset{0}{A_i}\}$ определено семейство тетраэдров $\{A_i\}$, которое обладает столькими степенями свободы, сколько независимых дифференциалов du^λ содержат компоненты ω_i^k, или сколько независимых линейных форм содержит кольцо $\{\omega_i^k\}$.

Все эти различные решения системы (46') *проективно эквивалентны.*

Действительно, уравнения (46) не зависят от выбора координатного тетраэдра неподвижной системы координат. Это равносильно тому, что компоненты ω_i^k в уравнениях (46) не изменятся, если все семейство точек $\{A_i\}$ одновременно подвергнуть проективному преобразованию. В теории групп это предложение имеет вид: *компоненты инфинитезимальных преобразований группы инвариантны относительно преобразований группы.*

Рассмотрим два решения системы (46): семейство тетраэдров $\{A_i\}$ с начальным тетраэдром $\{\underset{0}{A_i}\}$ и семейство $\{A_i^*\}$ с начальным тетра-

эдром $\{\underset{0}{A_i^*}\}$. Подвергнем семейство $\{A_i^*\}$ проективному преобразованию так, чтобы начальный тетраэдр $\{\underset{0}{A_i^*}\}$ совместился с начальным тетраэдром $\{\underset{0}{A_i}\}$. При этом компоненты ω_i^k не изменятся и тетраэдры $\{A_i^*\}$ после преобразования будут удовлетворять системе (46). Поскольку начальный тетраэдр $\{\underset{0}{A_i}\}$ вполне определяет решение системы (46), после преобразования совпадут не только начальные тетраэдры $\{\underset{0}{A_i^*}\}$ с $\{\underset{0}{A_i}\}$, но каждый тетраэдр $\{A_i^*\}$ совпадет с соответствующим (с теми же значениями u^λ) тетраэдром $\{A_i\}$.

Следовательно, семейства $\{A_i\}$ и $\{A_i^*\}$ проективно эквивалентны.

24. Тетраэдр 2-го порядка поверхности. Выделим одну вершину тетраэдра, введя обозначения

$$A=A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,$$

и рассмотрим стационарную подгруппу точки A, т. е. подгруппу проективных преобразований, оставляющих неподвижной геометрическую точку A. Тогда аналитическая точка A только меняет нормирование

$$A=\lambda\underset{0}{A}, \qquad \underset{0}{A}=\text{const}.$$

Внося это в уравнение (46), получим:

$$d\lambda\underset{0}{A}=\omega_0^0\lambda\underset{0}{A}+\omega^1A_1+\omega^2A_2+\omega^3A_3, \qquad \omega^i=\omega_0^i,$$

откуда

$$\begin{gathered}\omega_0^0=d\ln\lambda,\\ \omega^1=0,\quad \omega^2=0,\quad \omega^3=0.\end{gathered} \tag{a}$$

Нетрудно проверить (с помощью уравнений структуры), что система (a) вполне интегрируема (п. 15). Три первых интеграла этой системы являются неоднородными координатами точки A в пространстве.

Если формы ω^i ($i=1, 2, 3$) связаны линейным соотношением, то система (a), попрежнему вполне интегрируемая, будет содержать только два независимых уравнения и будет интегрироваться двумя первыми интегралами, которые будут служить координатами точки A в двумерном многообразии точек (A), определяемом этим линейным соотношением.

Это двумерное многообразие будет поверхностью, согласно определению п. 11, ибо для двух символов дифференцирования d и δ (внутри многообразия) грассманово произведение

$$(A\,dA\,\delta A)\neq 0$$

отлично от нуля. Действительно, если бы это неравенство было несправедливо, то, внося сюда по формулам (46) значения dA, δA, мы получили бы для всех смещений d и δ внутри многообразия

$$(A,\ \omega^k(d)\,A_k,\ \omega^i(\delta)\,A_i) = 0$$

или, перемножая аналитические точки,

$$(AA_1A_2)\begin{vmatrix} \omega^1(d) & \omega^2(d) \\ \omega^1(\delta) & \omega^2(\delta) \end{vmatrix} + (AA_2A_3)\begin{vmatrix} \omega^2(d) & \omega^3(d) \\ \omega^2(\delta) & \omega^3(\delta) \end{vmatrix} + (AA_3A_1)\begin{vmatrix} \omega^3(d) & \omega^1(d) \\ \omega^3(\delta) & \omega^1(\delta) \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку d и δ — произвольные смещения внутри многообразия, из равенства нулю билинейной формы будет следовать обращение в нуль внешней квадратичной

$$(AA_1A_2)[\omega^1\omega^2] + (AA_2A_3)[\omega^2\omega^3] + (AA_3A_1)[\omega^3\omega^1] = 0.$$

Здесь точки A_i линейно независимы и их грассмановы произведения не могут быть связаны линейным соотношением.

Между тем при наличии только одного линейного соотношения между ω^1, ω^2, ω^3 три произведения $[\omega^i\omega^j]$ не могут обратиться в нуль одновременно.

Если формы ω^i связаны произвольным линейным соотношением, то тетраэдр $\{A_i\}$ будет для поверхности (A) тетраэдром нулевого порядка. Преобразования стационарной подгруппы переводят один тетраэдр нулевого порядка в другой. Эти преобразования, если отбросить одновременное умножение всех вершин, зависят от $15 - 3 = 12$ форм ω_i^k, которые при $\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = 0$ мы будем обозначать через π_i^k.

Ввиду полного равноправия вершин A_1, A_2, A_3 мы можем, не стесняя общности, написать линейную зависимость форм ω^i в виде

$$\omega^3 = a\omega^1 + b\omega^2. \tag{49α}$$

Коэффициенты a, b при преобразованиях стационарной подгруппы могут испытывать вариации δa, δb. Чтобы определить их, дифференцируем равенство (49α) внешним образом, используя уравнения структуры (48).

Получим:

$$[da + a(\omega_3^3 - \omega_1^1) - a^2\omega_3^1 - ab\omega_3^2 - b\omega_1^2 + \omega_1^3,\ \omega^1] +$$
$$+ [db + b(\omega_3^3 - \omega_2^2) - ab\omega_3^1 - b^2\omega_3^2 - a\omega_2^1 + \omega_2^3,\ \omega^2] = 0. \tag{49β}$$

В силу линейной независимости форм ω^1, ω^2 по лемме Картана (п. 12) полиномы, стоящие множителями в квадратных скобках, при ω^1, ω^2 линейно выражаются через ω^1, ω^2 и для стационарной подгруппы в силу (а) равны нулю.

Отсюда, присваивая символ дифференцирования δ инфинитезимальным вариациям при преобразованиях подгруппы, получим:

$$\begin{aligned} \delta a &= a(\pi_1^1 - \pi_3^3) + a^2\pi_3^1 + ab\pi_3^2 + b\pi_1^2 - \pi_1^3, \\ \delta b &= b(\pi_2^2 - \pi_3^3) + ab\pi_3^1 + b^2\pi_3^2 + a\pi_2^1 - \pi_2^3. \end{aligned} \tag{49γ}$$

В силу линейной независимости форм π_i^k мы можем положить их равными нулю все, кроме формы π_1^3. Тогда все параметры стационарной подгруппы, кроме одного, будут закреплены; форма π_1^3 будет содержать только одну переменную и при подходящем выборе ее можно положить

$$\pi_1^3 = \delta\varphi,\quad \pi_1^1 = \pi_2^2 = \pi_3^3 = \pi_3^1 = \pi_3^2 = \pi_1^2 = 0;$$

первое уравнение (49γ) дает

$$\delta a = -\delta\varphi,\quad a = a_0 - \varphi,\quad a_0 = \text{const},$$

где a_0 — начальное значение переменной a. Выбирая значение параметра $\varphi = a_0$, приведем a к нулю. Точно так же приведем к нулю b за счет формы π_2^3.

Внося значения $a = 0$, $b = 0$ в уравнения (49γ), получим ограничения, накладываемые на стационарную подгруппу тетраэдра нулевого порядка, чтобы уравнение (49α) имело вид

$$\omega^3 = 0. \tag{49α'}$$

Эти ограничения выражаются линейными зависимостями

$$\pi_1^3 = 0,\quad \pi_2^3 = 0. \tag{49γ'}$$

Тетраэдр с компонентой (49α') называется тетраэдром 1-го порядка. Группа преобразований (49γ') называется стационарной подгруппой тетраэдра 1-го порядка; она преобразует между собой тетраэдры 1-го порядка.

Геометрический смысл уравнения (49α') очевиден. Первое уравнение (46) теперь принимает вид

$$dA = \omega_0^0 A + \omega^1 A_1 + \omega^2 A_2.$$

Следовательно, аналитическая точка dA, расположенная всегда на касательной, лежит в плоскости AA_1A_2; все касательные к поверхности в точке A лежат в этой плоскости, которая, следовательно, служит касательной плоскостью поверхности.

Уравнение (49β) теперь принимает вид

$$[\omega^1\omega_1^3] + [\omega^2\omega_2^3] = 0, \tag{50α}$$

откуда по лемме Картана (п. 12) следует

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= \alpha\omega^1 + \beta\omega^2, \\ \omega_2^3 &= \beta\omega^1 + \gamma\omega^2. \end{aligned} \tag{50β}$$

Чтобы определить вариации коэффициентов α, β, γ инфинитезимальными преобразованиями стационарной подгруппы 1-го порядка, дифференцируем внешним образом уравнения (50β):

$$[d\alpha + \alpha(\omega_0^0 - 2\omega_1^1 + \omega_3^3) - 2\beta\omega_1^2,\ \omega^1] + \\ + [d\beta + \beta(\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3) - \alpha\omega_2^1 - \gamma\omega_1^2,\ \omega^2] = 0,$$

$$[d\beta + \beta(\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3) - \alpha\omega_2^1 - \gamma\omega_1^2,\ \omega^1] + \\ + [d\gamma + \gamma(\omega_0^0 - 2\omega_2^2 + \omega_3^3) - 2\beta\omega_2^1,\ \omega^2] = 0.$$

Поскольку первые множители каждого произведения зависят только от ω^1, ω^2 и вместе с ними обращаются в нуль для инфинитезимальных преобразований стационарной подгруппы, закон вариации коэффициентов α, β, γ стационарной подгруппой 1-го порядка определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \delta\alpha &= \alpha(2\pi_1^1 - \pi_0^0 - \pi_3^3) + 2\beta\pi_1^2, \\ \delta\beta &= \beta(\pi_1^1 + \pi_2^2 - \pi_0^0 - \pi_3^3) + \alpha\pi_2^1 + \gamma\pi_1^2, \\ \delta\gamma &= \gamma(2\pi_2^2 - \pi_0^0 - \pi_3^3) + 2\beta\pi_2^1. \end{aligned} \tag{50γ}$$

Если положить все $\pi_i^k = 0$, кроме $\pi_1^2 = \delta\varphi$, то уравнения (50γ) примут вид

$$\delta\alpha = 2\beta\,\delta\varphi, \quad \delta\beta = \gamma\,\delta\varphi, \quad \delta\gamma = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial\varphi^2} = 2\gamma, \quad \alpha = \gamma\varphi^2 + \alpha_0'\varphi + \alpha_0, \quad \alpha_0, \quad \alpha_0' = \mathrm{const}, \quad \gamma = \mathrm{const},$$

где

$$\alpha = \alpha_0, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial\varphi} = \alpha_0' \quad \text{для} \quad \varphi = 0.$$

Выбирая для φ значение одного из корней квадратного уравнения

$$\gamma\varphi^2 + \alpha_0'\varphi + \alpha_0 = 0,$$

приведем α к нулю.

Аналогично, полагая $\pi_i^k = 0$, кроме $\pi_2^1 = \delta\psi$, получим:

$$\delta\gamma = 2\beta\,\delta\psi, \quad \delta\beta = 0,$$

откуда

$$\beta = \beta_0, \quad \gamma = 2\beta_0\psi + \gamma_0, \quad \beta_0, \gamma_0 = \mathrm{const}.$$

Если $\beta_0 \neq 0$, то, выбирая $2\beta_0\psi + \gamma_0 = 0$, приведем γ к нулю. Тогда

$$\delta \ln \beta = \pi_1^1 + \pi_2^2 - \pi_0^0 - \pi_3^3,$$

и мы можем привести к нулю $\ln\beta$, откуда $\beta = 1$.

Уравнения (50β) примут вид

$$\omega_1^3 = \omega^2, \quad \omega_2^3 = \omega^1, \tag{51α}$$

а уравнения (50γ) дадут соотношения на компоненты

$$\pi_1^2 = 0, \quad \pi_2^1 = 0, \quad \pi_1^1 + \pi_2^2 - \pi_0^0 - \pi_3^3 = 0. \tag{51β}$$

Тетраэдр с компонентами (51α) называется тетраэдром 2-го порядка, а соотношения (49γ'), (51β) определяют восьмичленную стационарную подгруппу тетраэдров 2-го порядка.

Если $\alpha = 0$, $\beta = 0$, то привести γ к нулю нельзя, но можно привести к единице, если $\gamma_0 \neq 0$. Уравнения (50β) примут вид

$$\omega_1^3 = 0, \quad \omega_2^3 = \omega^2, \tag{52α}$$

а уравнения (50γ) дадут

$$\pi_1^2 = 0. \tag{52β}$$

Наконец, могут все коэффициенты α, β, γ обратиться в нуль, и тогда

$$\omega_1^3 = 0, \quad \omega_2^3 = 0. \tag{53α}$$

Поскольку теперь касательной плоскостью служит грань AA_1A_2, уравнение асимптотических будет

$$(d^2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2) = 0.$$

Подсчитывая d^2A по формулам (46) п. 23, получим для двух первых случаев уравнение асимптотических

$$\omega^1\omega^2 = 0, \tag{51γ}$$

$$(\omega^2)^2 = 0. \tag{52γ}$$

Для третьего случая (53α) уравнение асимптотических пропадает: поверхность есть плоскость. Во втором случае (52α) асимптотические совпадают; поверхность развертывающаяся и AA_1 — прямолинейная образующая. В первом случае (51α) асимптотическими касательными служат ребра AA_1, AA_2.

25. Тетраэдр 1-го порядка конгруэнции. Конгруэнция — двупараметрическое семейство прямых. Оно разбивается на два семейства (действительных и различных, мнимых или совпадающих) развертывающихся поверхностей. Та точка луча, где он касается ребра возврата своей развертывающейся поверхности, называется *фокусом*, геометрическое место фокусов — *фокальной поверхностью*, а касательная плоскость фокальной поверхности — *фокальной плоскостью*.

Присоединим к лучу A_1A_2 тетраэдр $\{A_i\}$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$; если луч имеет два фокуса (гиперболическая область лучей конгруэнции), то мы поместим вершины $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ тетраэдра в фокусы, а грани $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3$ и $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_4$ совместим с фокальными плоскостями. Поскольку теперь

$$(d\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3)=0, \quad (d\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_4)=0$$

для всех перемещений внутри конгруэнции, то, пользуясь уравнениями (46), получим:

$$\omega_1^4=0, \quad \omega_2^3=0, \tag{54α}$$

откуда внешние дифференциалы

$$[\omega_1^2\omega_2^4]+[\omega_1^3\omega_3^4]=0, \quad [\omega_2^1\omega_1^3]+[\omega_2^4\omega_4^3]=0. \tag{54β}$$

Тетраэдр с компонентами (54α) называется тетраэдром 1-го порядка конгруэнции. Два семейства развертывающихся поверхностей определяются уравнениями $\omega_1^3=0$ или $\omega_2^4=0$.

Эллиптическая конгруэнция (с комплексно сопряженными семействами развертывающихся поверхностей) определяется таким же тетраэдром 1-го порядка, но фокусы A_1, A_2 будут мнимые, комплексно сопряженные.

Если конгруэнция *параболическая*, то она разбивается только одним способом на развертывающиеся поверхности. Каждый луч имеет только один фокус и на единственной фокальной поверхности лучи конгруэнции огибают асимптотические линии одного семейства.

Если совместить вершину A_1 с фокусом луча, а грань $A_1A_2A_3$ — с фокальной плоскостью и оставить вершину A_2 в произвольной точке луча, то мы попрежнему получим:

$$\omega_1^4=0, \tag{a}$$

ибо плоскость $A_1A_2A_3$ касается поверхности $(\boldsymbol{A}_1)$ в точке A_1.

Асимптотические линии поверхности $(\boldsymbol{A}_1)$ определяются уравнением

$$(d^2\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3)=0$$

или

$$\omega_1^2\omega_2^4+\omega_1^3\omega_3^4=0. \tag{b}$$

Если луч A_1A_2 касается на поверхности $(\boldsymbol{A}_1)$ асимптотической линии, то уравнение асимптотических должно удовлетворяться после подстановки $\omega_1^3=0$.

Поскольку формы ω_1^2, ω_1^3 должны быть линейно независимы, если поверхность $(\boldsymbol{A}_1)$ не вырождается в линию, наше требование удовлетворится только при условии, что форма ω_2^4 обращается в нуль

вместе с формой ω_1^3; следовательно, существует линейная зависимость вида

$$\omega_2^4=b\omega_1^3. \tag{c}$$

Внешний дифференциал уравнения (a) теперь примет вид

$$[\omega_3^4-b\omega_1^2,\ \omega_1^3]=0,$$

откуда

$$\omega_3^4=a\omega_1^3+b\omega_1^2. \tag{d}$$

Тетраэдр 1-го порядка параболической конгруэнции определяется условиями на компоненты

$$\omega_1^4=0, \quad \omega_2^4=b\omega_1^3, \quad \omega_3^4=a\omega_1^3+b\omega_1^2, \tag{55α}$$

к которым следует присоединить внешние дифференциалы

$$[\Delta b\omega_1^3]-2b[\omega_2^3\omega_1^2]=0, \quad [\Delta a\omega_1^3]+[\Delta b\omega_1^2]=0, \tag{55β}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta a &= da+a(\omega_1^1-2\omega_3^3+\omega_4^4)-2b\omega_3^2, \\ \Delta b &= db+b(\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3+\omega_4^4)-a\omega_2^3. \end{aligned} \tag{55γ}$$

Независимыми следует считать формы ω_1^2, ω_1^3, ибо

$$d\boldsymbol{A}_1=\omega_1^1\boldsymbol{A}_1+\omega_1^2\boldsymbol{A}_2+\omega_1^3\boldsymbol{A}_3$$

и при линейной зависимости этих форм поверхность $(\boldsymbol{A}_1)$ вырождается.

26. Уравнения структуры аффинного пространства. Репер аффинного пространства A_3 определяется радиусом-вектором $\boldsymbol{A}$ начала и тремя не компланарными векторами $\boldsymbol{e}_i$ $(i=1,\ 2,\ 3)$. Если эти векторы заданы функциями от скалярных параметров u^λ $(\lambda=1,\ \ldots,\ p)$, число которых p не может быть больше общего числа их координат $3\cdot 4=12$, то дифференциалы $d\boldsymbol{A}$, $d\boldsymbol{e}_i$ как новые векторы пространства разлагаются по тройке некомпланарных векторов $\boldsymbol{e}_i$. Мы получаем уравнения инфинитезимальных преобразований аффинной группы

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{A} &= \omega^i\boldsymbol{e}_i, \\ d\boldsymbol{e}_i &= \omega_i^k\boldsymbol{e}_k \end{aligned} \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ 3), \tag{56}$$

где ω^i, ω_i^k — линейные формы от du^λ с коэффициентами в виде голоморфных функций от всех u^λ.

Внешнее дифференцирование этих уравнений по исключении дифференциалов $d\boldsymbol{e}_i$ приводит к четырем соотношениям вида

$$\mathfrak{M}^i\boldsymbol{e}_i=0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3),$$

Поскольку тройка векторов e_i не компланарна, все коэффициенты $\mathfrak{M}^i$ равны нулю. Это дает нам (п. 23) уравнения структуры

$$\begin{aligned} D\omega^i &= [\omega^k\omega^i_k], \\ D\omega^k_i &= [\omega^j_i\omega^k_j] \end{aligned} \qquad (i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3). \tag{57}$$

Обратно, 12 линейно независимых линейных форм ω^i, ω^k_i от u^λ, du^λ $(\lambda = 1, \ldots, p;\ \ p \leqslant 12)$, удовлетворяющих уравнениям структуры (57), определяют аффинные движения репера с p степенями свободы, или, иначе, семейство реперов с p независимыми параметрами.

Действительно, уравнения (56) можно писать для координат векторов $A\,(x^\alpha)$, $e_i\,(e^\alpha_i)$

$$\begin{aligned} dx^\alpha &= \omega^i e^\alpha_i, \\ de^\alpha_i &= \omega^k_i e^\alpha_k \end{aligned} \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ 3). \tag{58}$$

В силу уравнений структуры (57) система (58) вполне интегрируема и определяет единственное решение x^α, e^α_i при заданных начальных условиях $x^\alpha = \underset{0}{x}^\alpha$, $e^\alpha_i = \underset{0}{e}^\alpha_i$ для $u^\lambda = u^\lambda_0\,(\underset{0}{x}^\alpha,\ \underset{0}{e}^\alpha_i,\ \underset{0}{u}^\lambda = \mathrm{const})$. Следовательно, для всякого невырожденного начального трехгранника $(\underset{0}{A},\ \underset{0}{e}_i)$ существует определенное семейство трехгранников $(A,\ e_i)$.

Поскольку аффинное преобразование пространства не меняет компонент ω^i, ω^k_i, оно не меняет и системы (56); если же подходящим преобразованием аффинной группы совместить два начальных трехгранника $(\underset{0}{A},\ \underset{0}{e}_i)$ и $(\underset{0}{A}^*,\ \underset{0}{e}^*_i)$, то совместятся все трехгранники семейства $(A^*,\ e^*_i)$ с соответствующими трехгранниками $(A,\ e_i)$, ибо начальные условия вполне определяют решение.

Таким образом, *компоненты* ω^i, ω^k_i *определяют семейства трехгранников до аффинного преобразования пространства.*

В частности, если из трех компонент ω^i линейно независимых два, то вершина репера A опишет поверхность и компоненты ω^i, ω^k_i определят ее до аффинного преобразования.

Линейную зависимость между ω^i подходящим выбором репера можно привести к виду

$$\omega^3 = 0. \tag{59α}$$

Тогда плоскость $(e_1,\ e_2)$ будет касательной плоскостью поверхности. Уравнение асимптотических

$$(d^2 A e_1 e_2) = 0$$

с помощью уравнений (56) можно привести к виду

$$\omega^1\omega^3_1 + \omega^2\omega^3_2 = 0. \tag{59β}$$

Поскольку из внешнего дифференциала от уравнения (59α)

$$[\omega^1\omega^3_1] + [\omega^2\omega^3_2] = 0$$

вытекают по лемме Картана (п. 12) соотношения

$$\begin{aligned} \omega^3_1 &= \alpha\omega^1 + \beta\omega^2, \\ \omega^3_2 &= \beta\omega^1 + \gamma\omega^2, \end{aligned} \tag{59γ}$$

уравнение асимптотических принимает вид

$$\alpha\,(\omega^1)^2 + 2\beta\omega^1\omega^2 + \gamma\,(\omega^2)^2 = 0. \tag{a}$$

Для неразвертывающихся поверхностей $\alpha\gamma - \beta^2 \neq 0$ выбором векторов e_1, e_2 можно привести коэффициенты α и γ к нулю, а β — к единице.

Соотношения

$$\omega^3_1 = \omega^2, \qquad \omega^3_2 = \omega^1 \tag{59γ'}$$

определяют трехгранник 2-го порядка поверхности в аффинном пространстве.

Аналогично, помещая вершину A в центр луча конгруэнции (средина фокального отрезка), совмещая вектор e_3, по модулю равный половине фокального расстояния, с лучом конгруэнции и располагая векторы e_1, e_2 в его фокальных плоскостях, получим равенства

$$\begin{aligned} (d\,(A + e_3),\ e_1,\ e_3) &= 0, \\ (d\,(A - e_3),\ e_2,\ e_3) &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\omega^1_3 = \omega^1, \qquad \omega^2_3 = -\omega^2. \tag{60}$$

Эти соотношения между четырьмя главными формами конгруэнции определяют трехгранник 1-го порядка конгруэнции в аффинном пространстве A_3.

27. Уравнения структуры евклидова пространства. Репер группы движений евклидова пространства является трехгранником $(A;\ I_j)$ $(j = 1,\ 2,\ 3)$ с постоянными длинами векторов I_j и постоянными углами между ними.

Удобнее всего взять векторы I_j единичными и взаимно перпендикулярными с правой ориентацией трехгранника.

Уравнения (56), (57) п. 26 сохраняются, но в силу конечных соотношений на I_j, вытекающих из наложенных условий ортогональности и единичности

$$I_j^2 = 1, \qquad I_i \cdot I_j = 0 \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3;\ \ i \neq j),$$

компоненты ω^j_i образуют кососимметричную матрицу

$$\omega^j_i + \omega^i_j = 0. \tag{61}$$

Трехгранник 1-го порядка поверхности попрежнему определяется условием (59α), откуда вытекают разложения (59γ), но в силу перпендикулярности векторов I_1, I_2 совместить их с асимптотическими касательными нельзя (кроме минимальных поверхностей). Поэтому их совмещают с главными касательными поверхности (касательными к линиям кривизны).

Из формул Родрига для перемещений по главным направлениям

$$dI_3 = \frac{1}{R}\, dA,$$

где R — соответствующий главный радиус кривизны, получаем соотношения между формами

$$\omega_1^3 = -\frac{\omega^1}{R_1}, \qquad \omega_2^3 = -\frac{\omega^2}{R_2}, \tag{62}$$

которые определяют канонический трехгранник (2-го порядка) поверхности в евклидовом пространстве.

Для конгруэнции вершину репера A совмещают с центром луча, ось I_3 — с лучом конгруэнции, а оси I_1, I_2 располагают перпендикулярно к лучу в биссекторных плоскостях двух фокальных плоскостей конгруэнции. Обозначая через 2ρ фокальное расстояние ($A+\rho I_3$, $A-\rho I_3$ — фокусы) и через 2φ угол фокальных плоскостей, получаем соотношения между формами

$$\omega^1 = \omega_2^3 \rho \operatorname{ctg} \varphi, \qquad \omega^2 = \omega_1^3 \rho \operatorname{tg} \varphi. \tag{63}$$

ГЛАВА II

РАССЛОЯЕМЫЕ ПАРЫ КОНГРУЭНЦИЙ

28. Историческое введение. Конгруэнцией W называется конгруэнция с двумя фокальными поверхностями, на которых соответствуют асимптотические линии, асимптотическим преобразованием поверхностей — переход от одной фокальной поверхности произвольной конгруэнции W к другой.

Если произвольно задать две конгруэнции W, например (A_0A_1'), (A_0A_2'), с общей первой фокальной поверхностью (A_0) и двумя вторыми фокальными поверхностями (A_1'), (A_2'), то можно построить *) однопараметрическое семейство конгруэнций W с той же первой фокальной поверхностью (A_0) так, чтобы лучи этих конгруэнций, выходящих из одной точки A_0, имели вторые фокусы на прямой $A_1'A_2'$. Такое семейство конгруэнций W Торторичи [1] назвал пучком конгруэнций W.

С другой стороны, по теореме о переместительности асимптотических преобразований [4] (A_1') и (A_2'), полученных из одной и той же поверхности (A_0) асимптотическими преобразованиями посредством конгруэнций (A_0A_1'), (A_0A_2'), существует ∞^1 поверхностей (A_i), которые получаются асимптотическими преобразованиями и из поверхности (A_1') и из поверхности (A_2'). Точки A_i этих поверхностей, соответствующие точкам A_1', A_2' и, следовательно, точке A_0, лежат на прямой d, по которой пересекаются касательные плоскости поверхностей (A_1') и (A_2').

Исходя из этой теоремы, Демулен [1] впервые построил конфигурацию пары расслояемых конгруэнций.

Действительно, касательные плоскости поверхностей (A_i) проходят через точки A_1' и A_2', следовательно, пересекаются по прямой $d' \equiv A_1'A_2'$. Любая поверхность (A_i) вместе с поверхностью (A_0) являются асимптотическими преобразованиями поверхности (A_2'). Значит, существует ∞^1 поверхностей (A_k'), которые можно получить

*) Т. К., стр. 76.

асимптотическими преобразованиями из (A_0) и (A_i). Среди них найдется и поверхность (A'_1). Поэтому точки A'_k, соответствующие точке A_0 поверхности (A_0), расположатся на прямой d', а их касательные плоскости пройдут через прямую d.

Каждая из прямых d и d' описывает конгруэнцию. Лучи этих конгруэнций находятся во взаимно однозначном соответствии. Луч d пересекает поверхности (A_i) в точках A_i; касательные плоскости, проведенные к поверхностям (A_i) в точках пересечения с лучом d, проходят через луч d'. Луч d' пересекает поверхности (A'_k), и касательные плоскости, проведенные к поверхностям (A'_k) в точках пересечения с лучом d', проходят через соответствующий луч d.

Такая пара конгруэнций (d), (d') называется теперь *расслояемой*, а поверхности (A_i), (A'_k) — *расслояющими*.

Асимптотические линии на всех поверхностях (A_i), (A'_k) соответствуют друг другу; каждая пара поверхностей (A_i), (A'_k) находится в отношении асимптотического преобразования, т. е. служит фокальными поверхностями одной конгруэнции W, описанной лучами $(A_iA'_k)$. Значительно позднее Террачини [1] назвал эту совокупность поверхностей *системой Бианки*.

Таким же почти синтетическим путем Демулен вводит две линейчатые поверхности 2-го порядка, присоединенные к каждому реперу расслояемой пары конгруэнций. Эти присоединенные квадрики позволили Калапсо [1], [2] значительно позднее построить преобразование пар T.

Сообщение Демулена не было замечено, и Фубини [1] заново подошел к постановке задачи, исходя из идеи расслоения трехпараметрического семейства плоских элементов.

29. Семейство плоских элементов. *Плоским элементом* $(A; \alpha)$ называется совокупность плоскости α и принадлежащей этой плоскости точки A (*центр элемента*).

Однопараметрические семейства H_1 плоских элементов $(A; \alpha)$ можно разбить на три класса:

1) Семейства H_1^2, у которых *линия центров* (A) *совпадает с ребром возврата огибающей семейства плоскостей* (α); чтобы построить такое семейство, достаточно взять произвольную неплоскую линию (A) и к каждой точке A присоединить ее соприкасающуюся плоскость.

2) Семейства H_1^1, у которых *линия центров* (A) *принадлежит огибающей семейства плоскостей* (α), но не совпадает с ребром возврата ее.

3) Семейства H_1^0, у которых *линия центров* (A) *не принадлежит огибающей семейства* (α).

Двупараметрические семейства H_2 плоских элементов $(A; \alpha)$ можно разбить тоже на три класса:

1) Семейства H_2^2, у которых *поверхность центров* (A) *совпадает с огибающей семейства плоскостей* (α); такое семейство разлагается двумя способами на ∞^1 действительных или мнимых семейств H_1^2, которые соответствуют асимптотическим линиям поверхности (A); все остальные подсемейства H_1 семейства H_2^2 принадлежит к классу H_1^1, ибо огибающей однопараметрического семейства касательных плоскостей поверхности центров H_2 служит развертывающаяся поверхность, проходящая через линию, описанную точками касания.

2) Семейства H_2^1, у которых *поверхность центров не совпадает с огибающей семейства плоскостей* (α), *но касательные плоскости* α' *поверхности центров проходят через соответствующие точки* A' *огибающей семейства* (α). Так как касательные плоскости α огибающей (A') всегда проходят через свои центры A, то прямая, соединяющая пару соответствующих точек A и A', является общей касательной обеих поверхностей (A) и (A'); таким образом, семейства H_2^1 образованы фокусами и фокальными плоскостями (которые касаются фокальной поверхности во втором фокусе луча) произвольной конгруэнции; с каждой конгруэнцией связаны две такие системы $(A; \alpha)$ и $(A'; \alpha')$.

Семейство H_2^1 разбивается одним способом на подсемейства H_1^2; линии центров их являются ребрами возврата фокальной поверхности (A). Все остальные однопараметрические подсемейства системы H_2^1 принадлежат к классу H_1^0, ибо огибающая однопараметрического семейства касательных плоскостей второй фокальной поверхности (A') может содержать фокусы A первой поверхности только в том случае, если характеристики совпадают с лучами конгруэнции AA', а тогда точка A будет описывать ребро возврата развертывающейся поверхности.

3) Семейства H_2^0, у которых *касательные плоскости поверхности центров* (A) *не проходят через соответствующие точки* A' *огибающей семейства плоскостей* (α). Прямые AA' касаются поверхности (A') и пересекают поверхность (A). Система H_2^0 разбивается двумя способами на действительные или мнимые подсемейства H_1^1, которые соответствуют развертывающимся поверхностям конгруэнции прямых (AA'). Все остальные подсемейства принадлежат к классу H_1^0.

Среди трехпараметрических семейств H_3 наиболее организованные те, которые допускают разбиение на двупараметрические подсемейства H_1^2.

Такие системы H_3 мы будем называть *расслояемыми*, а семейство поверхностей центров их подсемейств H_2^2 — расслояющими поверхностями.

30. Пара, расслояемая в одном направлении. Рассмотрим в трехмерном пространстве P_3 две конгруэнции прямых K и K', между лучами которых в некоторой области параметров u, v установлено взаимно однозначное соответствие.

Присоединим к каждой точке M луча r конгруэнции K плоскость μ, проходящую через точку M и соответствующий луч r' второй конгруэнции. Мы получим семейство H_3 плоских элементов (M, μ), которое зависит от трех параметров: два параметра определяют луч r в конгруэнции K (криволинейные координаты луча), третий определяет положение точки M на луче r.

Определение: *Пара конгруэнций (K, K') называется расслояемой односторонне в направлении от K к K', если присоединенная к ней система плоских элементов H_3 расслояема.*

Не стесняя общности, мы можем предположить, что пара соответствующих прямых r, r' находится в косом положении.

Выберем на каждом луче r две не совпадающие аналитические точки A_1 и A_2, на соответствующем луче r' — точки A_3 и A_4. Поскольку лучи r, r' находятся в косом положении, тетраэдр $\{A_i\}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ с вершинами A_i не вырождается (определитель из 16 координат A_i отличен от нуля).

Инфинитезимальные проективные преобразования репера $\{A_i\}$ при проективных перемещениях внутри конгруэнции определяются уравнениями

$$dA_i = \omega_i^k A_k \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4), \tag{1}$$

где среди линейных форм ω_i^k линейно независимых только две.

Произвольную точку M луча $r \equiv A_1A_2$ можно определить с помощью параметра ρ посредством уравнения

$$M = A_1 + \rho A_2. \tag{2}$$

Ей присоединена плоскость μ, определяемая точками M, A_3, A_4. Если система H_3 плоских элементов (M, μ) расслояема и точка M описывает одну из расслояющих поверхностей (M), то плоскость μ должна быть касательной плоскостью этой поверхности и все инфинитезимальные проективные смещения dM не выводят из плоскости μ. Отсюда уравнение

$$(dMMA_3A_4) = 0. \tag{a}$$

Дифференцируя равенство (2) и внося в уравнение (a), получим:

$$(dA_1 + \rho\, dA_2 + A_2\, d\rho;\ A_1 + \rho A_2,\ A_3,\ A_4) = 0$$

или, в силу формул (1),

$$(\omega_1^k A_k + \rho\omega_2^k A_k + A_2\, d\rho,\ A_1 + \rho A_2,\ A_3,\ A_4) = 0.$$

Перемножая по правилу дистрибутивности и сокращая на неравное нулю произведение $(A_2A_1A_3A_4)$, получим:

$$d\rho + \omega_1^2 + \rho(\omega_2^2 - \omega_1^1) - \rho^2\omega_2^1 = 0. \tag{3}$$

Это уравнение определяет по формуле (2) расслояющие поверхности пары (K, K').

31. Система уравнений односторонне расслояемой пары. Система H_3 будет расслояемой, если общее решение ρ будет определяться из уравнения (3) с произвольным постоянным, т. е. если уравнение (3) будет вполне интегрируемо.

Дифференцируем уравнение (3) внешним образом и исключаем дифференциал $d\rho$ с помощью того же уравнения (3). Мы получим для ρ квадратное уравнение

$$\mathfrak{M}\rho^2 + \mathfrak{N}\rho + \mathfrak{R} = 0. \tag{4}$$

Поскольку это уравнение должно удовлетворяться относительно ρ тождественно, оно распадается на три квадратичных уравнения:

$$\begin{gathered}[\omega_2^3\omega_3^1] + [\omega_2^4\omega_4^1] = 0, \qquad [\omega_1^3\omega_3^2] + [\omega_1^4\omega_4^2] = 0,\\ [\omega_1^3\omega_3^1] + [\omega_1^4\omega_4^1] - [\omega_2^3\omega_3^2] - [\omega_2^4\omega_4^2] = 0.\end{gathered} \tag{5}$$

Если формы ω_i^k удовлетворяют системе (5), то уравнение (3) будет вполне интегрируемо и определит семейство расслояющих поверхностей; система H_3 будет расслояема. Следовательно, система (5) определяет односторонне расслояемую пару конгруэнций.

32. Теорема существования. Чтобы показать существование односторонне расслояемых пар, мы докажем более сильную теорему.

Теорема. *Если дана произвольная конгруэнция K, то с произволом одной функции двух аргументов можно присоединить к каждому ее лучу r прямую r' так, чтобы конгруэнция $K' \equiv (r')$ образовала с конгруэнцией K односторонне расслояемую пару (K, K').*

Первая конгруэнция K описывается лучом $r \equiv A_1A_2$. Дифференцируя аналитическую прямую (A_1A_2), получим:

$$\begin{gathered} d(A_1A_2) = [12](\omega_1^1 + \omega_2^2) + [13]\,\omega_2^3 + [14]\,\omega_2^4 - [23]\,\omega_1^3 - [24]\,\omega_1^4,\\ [i, k] = (A_iA_k).\end{gathered} \tag{6}$$

Обращение в нуль четырех главных форм

$$\omega_1^3 = 0, \quad \omega_2^4 = 0, \quad \omega_2^3 = 0, \quad \omega_1^4 = 0 \tag{7}$$

закрепляет луч A_1A_2. Система (7), как легко проверить непосредственным дифференцированием, вполне интегрируема (п. 15), и первые интегралы ее (п. 15) являются линейными координатами прямой A_1A_2. Если конгруэнция K дана, то две из этих координат даны функциями от двух других. Следовательно, две формы из четырех форм (7) даны линейными комбинациями двух других, например, форм ω_1^3, ω_2^4, которые будут на конгруэнции линейно независимы.

При этих условиях характеристическая система (п. 16) уравнений (5), кроме формы ω_1^3, ω_2^4, будет содержать только четыре формы:

$$\omega_3^1, \quad \omega_4^1, \quad \omega_3^2, \quad \omega_4^2. \tag{a}$$

Действительно, непосредственным дифференцированием нетрудно убедиться, что внешние дифференциалы системы (5) обращаются в тождества в силу уравнений этой системы. Система замкнута относительно операции внешнего дифференцирования. Применяя алгебраическое дифференцирование (п. 16) по формам базиса ω_i^k, придем к системе восьми форм (7), (а). При заданной конгруэнции K линейно независимыми будут только шесть.

Следовательно, система (5) будет иметь ровно шесть характеристических переменных (п. 16), которые только и будут входить и под знаком дифференциала и в коэффициенты при дифференциалах, если систему (5) написать в раскрытой форме.

Нетрудно увидеть геометрический смысл этих шести переменных. Две из них являются координатами луча A_1A_2 на заданной конгруэнции K.

Их мы должны считать независимыми переменными нашей задачи; дифференциалы их линейно выражаются через формы ω_1^3, ω_2^4.

Остаются четыре формы (а), которые, как легко проверить, при обращении в нуль дают вполне интегрируемую систему из четырех уравнений:

$$\omega_3^1 = 0, \quad \omega_4^1 = 0, \quad \omega_3^2 = 0, \quad \omega_4^2 = 0. \tag{a$'$}$$

Первые интегралы этой системы являются линейными координатами луча второй конгруэнции A_3A_4.

Действительно, дифференцируя аналитическую прямую $(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4)$, получим:

$$d(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4) = [34](\omega_3^3 + \omega_4^4) + [14]\,\omega_3^1 + [24]\,\omega_3^2 - [13]\,\omega_4^1 - [23]\,\omega_4^2.$$

В силу уравнений (а$'$) последние четыре члена пропадают, и дифференциал $d\,[34]$ становится пропорционален прямой [34]; прямая A_3A_4 закрепляется, если закрепить эти четыре характеристические переменные.

Итак, система (5) определяет четыре координаты луча A_3A_4 в функциях от двух независимых переменных — координат луча A_1A_2 в конгруэнции K.

Чтобы доказать существование интегрального многообразия $\mathfrak{M}_2$, надо построить регулярную цепь интегральных элементов (п. 18).

Обозначим буквами u_i^k значения форм ω_1^3, ω_2^4, ω_2^3, ω_1^4 на первом линейном элементе цепи. Первые два из них произвольны, значения двух последних следуют из линейных соотношений, определяющих конгруэнцию K. Сохраним обозначение ω_i^k за значениями форм на втором линейном элементе цепи.

Поскольку система (5) не содержит линейных уравнений, значения форм (а) на первом линейном элементе цепи произвольны; на втором они определяются из билинейных уравнений, присоединенных к квадратичным (5). Система внешних уравнений правильная (п. 20). Перенося неизвестные ω_i^k в левую часть и опуская известные члены в правой, получаем полярную систему первого линейного элемента в виде

$$u_2^3\omega_3^1 + u_2^4\omega_4^1 = 0,$$
$$u_1^3\omega_3^2 + u_1^4\omega_4^2 = 0,$$
$$u_1^3\omega_3^1 + u_1^4\omega_4^1 - u_2^3\omega_3^2 - u_2^4\omega_4^2 = 0.$$

Ранг этой системы равен 3.

Следовательно, характеры системы $s_1 = 3$, $s_2 = q - s_1 = 4 - 3 = 1$. Поскольку ранг полярной матрицы равен числу независимых квадратичных уравнений замкнутой системы, цепь регулярна.

Интегральное многообразие существует с произволом одной функции двух аргументов, откуда и следует теорема.

33. Расслояемая пара гиперболическая. Если пара конгруэнций расслояема и в направлении (K, K') и в направлении (K', K), то она называется двухсторонне расслояемой или просто *расслояемой парой*.

Ввиду полной симметрии лучей $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2$ и $\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4$ относительно репера система уравнений, определяющая расслояемую пару, получится, если к уравнениям (5) добавить те, которые получаются, если в этих уравнениях сделать подстановку индексов $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{gathered} [\omega_4^1\omega_1^3] + [\omega_4^2\omega_2^3] = 0, \quad [\omega_3^1\omega_1^4] + [\omega_3^2\omega_2^4] = 0, \\ [\omega_3^1\omega_1^3] + [\omega_3^2\omega_2^3] - [\omega_4^1\omega_1^4] - [\omega_4^2\omega_2^4] = 0. \end{gathered} \tag{5$'$}$$

Заменяя последние два уравнения (5), (5$'$) их полуразностью и полусуммой, мы получим систему шести уравнений:

$$[\omega_2^3\omega_3^1] + [\omega_2^4\omega_4^1] = 0, \quad [\omega_1^3\omega_3^2] + [\omega_1^4\omega_4^2] = 0, \tag{8α}$$

$$[\omega_4^1\omega_1^3] + [\omega_4^2\omega_2^3] = 0, \quad [\omega_3^1\omega_1^4] + [\omega_3^2\omega_2^4] = 0, \tag{8β}$$

$$[\omega_3^1\omega_1^3] - [\omega_4^2\omega_2^4] = 0, \quad [\omega_3^2\omega_2^3] - [\omega_4^1\omega_1^4] = 0. \tag{8γ}$$

Из этих шести уравнений независимы только пять.

Чтобы показать это, нам придется отдельно рассмотреть случай гиперболической конгруэнции (A_1A_2) и случай параболической. Случай эллиптической конгруэнции (A_1A_2) не отличается существенно от гиперболической, только фокусы станут комплексно сопряженными.

Если конгруэнция $K \equiv (A_1A_2)$ гиперболическая, то мы отнесем ее к тетраэдру 1-го порядка (п. 25). На главные формы ω_1^3, ω_2^4, ω_2^3, ω_1^4 наложатся соотношения (54α) п. 25

$$\omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^3 = 0, \tag{9α}$$

откуда, дифференцируя внешним образом, получаем квадратичные уравнения

$$[\omega_1^2\omega_2^4] + [\omega_1^3\omega_3^4] = 0, \quad [\omega_2^1\omega_1^3] + [\omega_2^4\omega_4^3] = 0. \tag{9β}$$

Второе уравнение (8γ) исчезает тождественно, а уравнения (8α, β) принимают вид

$$[\omega_2^4\omega_4^1] = 0, \quad [\omega_4^1\omega_1^3] = 0, \quad [\omega_1^3\omega_3^2] = 0, \quad [\omega_3^2\omega_2^4] = 0. \tag{a}$$

Четыре уравнения (a) и первое уравнение (8γ) составляют пять независимых уравнений системы (8α, β, γ). Поскольку две формы ω_1^3, ω_2^4 на конгруэнции K линейно независимы, из первых двух уравнений (a) следует, что форма ω_4^1 равна нулю (п. 12, следствие II). Точно так же два последних уравнения (a) показывают, что ω_3^2 равна нулю:

$$\omega_4^1 = 0, \quad \omega_3^2 = 0. \tag{9γ}$$

Следовательно, тетраэдр $\{A_i\}$ будет тетраэдром 1-го порядка и для конгруэнции (A_3A_4).

Таким образом, гиперболическая расслояемая пара определяется системой уравнений

$$\omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^3 = 0, \quad \omega_3^2 = 0, \quad \omega_4^1 = 0, \tag{10α}$$

$$[\omega_3^1\omega_1^3] - [\omega_4^2\omega_2^4] = 0, \tag{10β}$$

к которым нужно присоединить внешние дифференциалы уравнений (10α):

$$[\omega_1^2\omega_2^4] + [\omega_1^3\omega_3^4] = 0, \quad [\omega_2^1\omega_1^3] + [\omega_2^4\omega_4^3] = 0, \tag{10γ}$$

$$[\omega_3^1\omega_1^2] + [\omega_3^4\omega_4^2] = 0, \quad [\omega_4^2\omega_2^1] + [\omega_4^3\omega_3^1] = 0. \tag{10δ}$$

Две конгруэнции, между лучами которых установлено взаимно однозначное соответствие, образуют *пару T, если можно так сопоставить фокусы соответствующих лучей, что прямые, соединяющие сходственные фокусы, будут касаться фокальных поверхностей и первой и второй конгруэнции.*

Уравнения (10α) показывают, что расслояемая гиперболическая пара всегда образует пару T. Имеем теорему:

Если одна из конгруэнций расслояемой пары гиперболическая, то и другая гиперболическая, и они образуют пару T.

34. Расслояемая пара параболическая. Из доказанной теоремы следует:

Если первая конгруэнция расслояемой пары $K \equiv (A_1A_2)$ параболическая, то и вторая должна быть параболической.

Отнесем параболическую конгруэнцию K к тетраэдру 1-го порядка (п. 25). Тогда между главными формами конгруэнции будут соотношения (55α) п. 25:

$$\omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^4 = b\omega_1^3, \quad \omega_3^4 = a\omega_1^3 + b\omega_1^2. \tag{11α}$$

Теперь три уравнения ($8\alpha, \beta, \gamma$) п. 33 правого столбца содержат только два независимых:

$$[\omega_3^2\omega_1^3] = 0, \quad [\omega_3^2\omega_2^3] = 0. \tag{a}$$

Если формы ω_1^3, ω_2^3 линейно зависимы, то среди главных форм луча [12] ω_1^3, ω_2^4, ω_2^3, ω_1^4 останется только одна линейно независимая, и конгруэнция K выродится в линейчатую поверхность (п. 25). Если формы ω_1^3, ω_2^3 линейно независимы, то в силу следствия II п. 12 имеем:

$$\omega_3^2 = 0, \tag{11β}$$

откуда внешним дифференцированием получаем:

$$[\omega_3^1\omega_1^2] + [\omega_3^4\omega_4^2] = 0. \tag{11γ}$$

Отсюда поверхность (A_3) имеет в точке A_3 касательной плоскостью грань $A_1A_3A_4$ и уравнение асимптотических линий (ср. п. 25, уравнение (b)) принимает вид

$$\omega_3^1\omega_1^2 + \omega_3^4\omega_4^2 = 0. \tag{b}$$

Между тем левый столбец уравнений расслояемой пары (8 α, β, γ) п. 33 принимает вид

$$[\omega_2^3\omega_3^1] + b[\omega_1^3\omega_4^1] = 0, \quad [\omega_4^1\omega_1^3] + [\omega_4^2\omega_2^3] = 0, \tag{c_1}$$

$$[\omega_1^3, \ \omega_3^1 - b\omega_4^2] = 0, \tag{c_2}$$

откуда, прибавляя к первому уравнению (c_1) второе, умноженное на b, получим:

$$[\omega_2^3, \ \omega_3^1 - b\omega_4^2] = 0. \tag{c_3}$$

Из уравнений ($c_{2,3}$), в силу линейной независимости форм ω_1^3, ω_2^3, следует (следствие п. 12)

$$b\omega_4^2 = \omega_3^1, \tag{11δ}$$

и уравнение асимптотических (b) поверхности (A_3) принимает вид

$$\omega_3^1(2b\omega_1^2 + a\omega_1^3) = 0. \tag{b'}$$

Луч A_3A_4 лежит в касательной плоскости $A_1A_3A_4$ поверхности (A_3) и огибает на ней линии

$$\omega_3^1 = 0,$$

но это асимптотические линии поверхности (A_3), ибо значение $\omega_3^1 = 0$ удовлетворяет уравнению (b′). Следовательно, конгруэнция $K' \equiv (A_3A_4)$ имеет поверхность (A_3) своей фокальной поверхностью и, будучи описана ее асимптотическими касательными, является параболической конгруэнцией, как мы предвидели.

35. Параболическая пара T. Прямая, соединяющая фокусы A_1 и A_3 сходственных лучей, лежит в касательных плоскостях $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$ той и другой фокальной поверхности, следовательно, касается их.

Две параболические конгруэнции, между лучами которых установлено взаимно однозначное соответствие, образуют *параболическую пару T*, если прямые, соединяющие сходственные фокусы, касаются обеих фокальных поверхностей.

Имеем теорему:

Если первая конгруэнция расслояемой пары параболическая, то вторая тоже параболическая и они образуют параболическую пару T.

Эта параболическая пара T обладает особыми свойствами. Внося в уравнение (11γ) выражения ω_3^4, ω_3^1 по формулам (11α, δ), получим:

$$a[\omega_4^2\omega_1^3] = 0. \tag{d}$$

Отсюда

1) или $a = 0$, т. е.

$$b\omega_1^2 = \omega_3^4, \tag{12α}$$

2) или $[\omega_4^2\omega_1^3] = 0$ и в силу (11δ)

$$[\omega_3^1\omega_1^3] = 0. \tag{12β}$$

В первом случае среди главных форм ω_1^2, ω_1^4, ω_3^2, ω_3^4 конгруэнции (A_1A_3)

$$d(A_1A_3) = [13](\omega_1^1 + \omega_3^3) + [23]\,\omega_1^2 + [14]\,\omega_3^4$$

останется только одна линейно независимая, и конгруэнция выродится в линейчатую поверхность. Две конгруэнции параболической пары будут совпадать с конгруэнцией касательных к криволинейным асимптотическим этой линейчатой поверхности.

Во втором случае асимптотические линии $\omega_1^3 = 0$ и $\omega_3^1 = 0$, которые служат ребрами возврата развертывающихся поверхностей первой и второй конгруэнций пары, соответствуют.

36. Асимптотические расслояющих поверхностей. Обратимся теперь к асимптотическим линиям расслояющих поверхностей расслояемой пары. Рассмотрим одну из поверхностей первого расслояющего семейства, которая описывается точкой

$$M = A_1 + \rho A_2.$$

Здесь ρ удовлетворяет уравнению (3) п. 30. Дифференцируя в этом предположении, получим:

$$dM = M(\omega_1^1 + \rho\omega_2^1) + A_3(\omega_1^3 + \rho\omega_2^3) + A_4(\omega_1^4 + \rho\omega_2^4). \tag{a}$$

Следовательно, уравнение асимптотических линий на поверхности (M)

$$(d^2M,\ M,\ A_3,\ A_4) = 0$$

напишется:

$$(dA_3(\omega_1^3 + \rho\omega_2^3) + dA_4(\omega_1^4 + \rho\omega_2^4),\ A_1 + \rho A_2,\ A_3,\ A_4) = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} \omega_3^1(\omega_1^3 + \rho\omega_2^3) + \omega_4^1(\omega_1^4 + \rho\omega_2^4) & 1 \\ \omega_3^2(\omega_1^3 + \rho\omega_2^3) + \omega_4^2(\omega_1^4 + \rho\omega_2^4) & \rho \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\rho^2(\omega_3^1\omega_2^3 + \omega_4^1\omega_2^4) + \rho(\omega_3^1\omega_1^3 + \omega_4^1\omega_1^4 - \omega_3^2\omega_2^3 - \omega_4^2\omega_2^4) - \omega_3^2\omega_1^3 - \omega_4^2\omega_1^4 = 0.$$

Для гиперболической пары, в силу уравнений (10α) п. 33, по сокращении на ρ получим:

$$\omega_3^1\omega_1^3 - \omega_4^2\omega_2^4 = 0. \tag{13}$$

Для параболической расслояемой пары, в силу уравнений (11α, β, δ) п. 34, по сокращении на ρ^2 получим:

$$\omega_3^1\omega_2^3 + \omega_4^1\omega_2^4 = 0. \tag{14}$$

В обоих случаях уравнение асимптотических не зависит от координаты ρ, которая является функцией произвольного постоянного интеграции и меняется от одной поверхности семейства к другой.

Следовательно, *на всех расслояющих поверхностях семейства асимптотические линии соответствуют.*

Более того, как уравнение (13), так и уравнение (14) выдерживают подстановку указателей $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, которая переводит луч A_1A_2 в луч A_3A_4 и первую конгруэнцию пары во вторую. Следовательно, асимптотические линии первого семейства соответствуют асимптотическим линиям второго семейства.

Теорема. *Асимптотические линии соответствуют на всех расслояющих поверхностях первого и второго семейства.*

Для параболической невырожденной пары (случай 2 п. 35) мы имеем еще уравнение

$$\omega_3^1 = b\mu\omega_1^3,$$

которое получается развертыванием по лемме Картана уравнения (12 β). Уравнение асимптотических (14) принимает вид

$$\omega_1^3(\mu\omega_2^3 + \omega_4^1) = 0. \qquad (14')$$

Одно семейство асимптотических на расслояющих поверхностях невырожденной параболической пары всегда соответствует семейству развертывающихся поверхностей конгруэнций пары.

37. Присоединенная система Бианки. Доказанная теорема о соответствии асимптотических на всех расслояющих поверхностях имеет замечательное следствие.

По построению этих поверхностей касательная плоскость любой поверхности (M) первого семейства проходит через ребро A_3A_4, т. е. содержит соответствующие точки каждой поверхности (M') второго семейства, и наоборот. Следовательно, прямая MM', соединяющая пару соответствующих точек M, M', описывает конгруэнцию с фокальными поверхностями (M) и (M'). Поскольку на всех поверхностях (M) и (M') асимптотические соответствуют, все двупараметрическое семейство конгруэнций (MM') состоит из конгруэнций W.

Совокупность ∞^2 конгруэнций и двух семейств ∞^1 поверхностей, которые соответствуют своими асимптотическими и составляют все фокальные поверхности конгруэнций, называется *системой Бианки.*

Присвоение этого имени объясняется тесной связью между этой системой и теоремой о переместительности асимптотических преобразований (п. 28).

Таким образом, *со всякой расслояемой парой конгруэнций связана присоединенная к ней система Бианки.*

Обратно, *всякая система Бианки присоединена к некоторой расслояемой паре.*

Действительно, пусть два семейства поверхностей (P_α) и (Q_β) и семейство конгруэнций, описанных прямыми $(P_\alpha Q_\beta)$, где α, β — произвольные параметры, образуют систему Бианки. Следовательно, на всех поверхностях асимптотические линии соответствуют и тем самым на них установлено взаимно однозначное соответствие точек.

Поскольку любая поверхность (P_α) является фокальной поверхностью конгруэнции прямых, соединяющих произвольную точку P_α со всеми соответствующими (сходственными) точками Q_β, все точки Q_β лежат в касательной плоскости каждой поверхности (P_α). Отсюда соответствующие касательные плоскости поверхностей (P_α) образуют пучок и ось этого пучка r' несет сходственные точки Q_β.

Обратно, соответствующие точки P_α образуют прямолинейный ряд и прямая r, которая несет его, служит осью пучка касательных плоскостей в соответствующих точках поверхностей (Q_β). Прямые r и r' описывают расслояемую пару конгруэнций с расслояющими поверхностями (P_α) и (Q_β).

38. Односторонние пары. Здесь мы выскажем несколько теорем относительно условий, при которых односторонне расслояемая пара становится двусторонне расслояемой. Доказательство этих теорем не составит затруднения, и мы предоставляем это читателю. Начнем с вопроса о том, когда пара T становится расслояемой парой.

Теорема I. *Если существует хотя бы одна поверхность, касательная плоскость которой в точке пересечения с каждым лучом одной конгруэнции пары T проходит через соответствующий луч другой, то пара T расслояема.*

Теорема II. *Если фокусы конгруэнций K' лежат в фокальных плоскостях конгруэнции K односторонней пары (K, K'), то пара расслояема двусторонне или конгруэнция K сопряжена* *) *своим расслояющим поверхностям.*

*) Т. К., стр. 251.

ГЛАВА III

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РАССЛОЯЕМЫХ ПАР КОНГРУЭНЦИЙ

39. Расслояемая пара гиперболическая. Теорема существования. Теперь мы обращаемся к расслояемой паре из гиперболических конгруэнций, которую будем называть просто расслояемой парой. Она определяется системой (10α, β, γ, δ) п. 33:

$$\omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^3 = 0, \quad \omega_3^2 = 0, \quad \omega_4^1 = 0, \tag{1α}$$

$$[\omega_3^4\omega_1^3] - [\omega_1^2\omega_2^4] = 0, \quad [\omega_2^1\omega_1^3] - [\omega_4^3\omega_2^4] = 0, \tag{1β}$$

$$[\omega_3^1\omega_1^3] - [\omega_4^2\omega_2^4] = 0, \tag{1γ}$$

$$[\omega_3^1\omega_1^2] - [\omega_4^2\omega_3^4] = 0, \quad [\omega_4^2\omega_2^1] - [\omega_3^1\omega_4^3] = 0. \tag{1δ}$$

Чтобы построить характеристическую систему форм (п. 16), надо прежде всего пополнить систему внешними дифференциалами, но внешний дифференциал уравнения (1γ) обращается в тождество в силу (1α), а уравнения (1β, δ) сами получены внешним дифференцированием уравнений (1α). Следовательно, система замкнута. Кроме форм (1α), равных нулю на всяком интегральном элементе, и форм ω_1^3, ω_2^4, линейно независимых на интегральном многообразии, характеристическая система содержит только шесть форм:

$$\omega_1^2, \ \omega_2^1, \ \omega_3^4, \ \omega_4^3, \ \omega_3^1, \ \omega_4^2. \tag{a}$$

Поскольку два последних уравнения (1δ) в каждом произведении содержат множителями по две формы (a), система внешних уравнений неправильная.

Для определения наиболее общего двумерного интегрального элемента $\mathfrak{E}_2$ разрешаем уравнения (1β, γ) по лемме Картана:

$$\begin{aligned} \omega_3^4 &= \alpha\omega_1^3 - \beta\omega_2^4, & \omega_4^3 &= \alpha'\omega_2^4 - \beta'\omega_1^3, \\ \omega_1^2 &= \beta\omega_1^3 + \gamma\omega_2^4, & \omega_2^1 &= \beta'\omega_2^4 + \gamma'\omega_1^3, \end{aligned} \tag{2α}$$

$$\omega_3^1 = a\omega_1^3 + b\omega_2^4, \quad \omega_4^2 = c\omega_2^4 - b\omega_1^3. \tag{2β}$$

Внося эти выражения в уравнения (1δ), получаем на девять коэффициентов два уравнения:

$$\begin{aligned} a\gamma - 2b\beta + c\alpha &= 0, \\ a\alpha' + 2b\beta' + c\gamma' &= 0. \end{aligned} \tag{2γ}$$

Эти уравнения могут быть разрешены двумя способами:

a) Если ранг матрицы коэффициентов при a, $2b$, c равен двум, то можно положить:

$$a = t(\beta\gamma' + \alpha\beta'), \quad 2b = -t(\alpha\alpha' - \gamma\gamma'), \quad c = -t(\beta\alpha' + \gamma\beta'), \tag{3}$$

где α, β, γ, α', β', γ' и t — произвольные параметры числом $N = 7$.

b) если коэффициенты при a, b, c в уравнениях (2γ) пропорциональны, то

$$\alpha' = \lambda\gamma, \quad \beta' = -\lambda\beta, \quad \gamma' = \lambda\alpha, \tag{4α}$$

$$c = -\frac{a\gamma - 2b\beta}{\alpha}, \quad \alpha \neq 0. \tag{4β}$$

Произвольные параметры α, β, γ, a, b и λ числом $N = 6$.

Начнем с интегрального элемента (3), что соответствует общему случаю. Обозначая

$$\omega_1^3 = u, \quad \omega_2^4 = v$$

значения форм ω_1^3, ω_2^4 на первом интегральном элементе $\mathfrak{E}_1$ и отбрасывая известные члены (правые части уравнений), мы запишем полярную систему для определения $\mathfrak{E}_2$ в виде

$$\omega_3^1 u - \omega_4^2 v = 0, \quad \omega_3^4 u - \omega_1^2 v = 0, \quad \omega_2^1 u - \omega_4^3 v = 0, \tag{5α}$$

$$\begin{aligned} &\omega_2^1(\beta u + \gamma v) - \omega_1^2(au + bv) + \omega_3^4(-bu + cv) - \omega_4^2(\alpha u - \beta v) = 0, \\ &\omega_1^2(\beta' v + \gamma' u) - \omega_2^1(-bu + cv) + \omega_4^3(au + bv) - \omega_3^1(\alpha' v - \beta' u) = 0. \end{aligned} \tag{5β}$$

Здесь через ω_i^k обозначены искомые значения форм (a) на втором базисном векторе e_2 интегрального элемента $\mathfrak{E}_2$, их значения на первом векторе e_1 подсчитаны по формулам (2α, β).

Исключая неизвестные ω_3^1, ω_3^4, ω_2^1 с помощью (5α) при $u \neq 0$ и внося значения a, b, c по формулам (3), приведем (5β) к виду

$$\begin{aligned} &\omega_4^2(\alpha u^2 - 2\beta uv - \gamma v^2) + \\ &\qquad + \omega_1^2 t\{(\beta\gamma' + \alpha\beta')u^2 - (\alpha\alpha' - \gamma\gamma')uv + (\beta\alpha' + \gamma\beta')v^2\} = 0, \\ &\omega_1^2(\gamma' u^2 + 2\beta' uv - \alpha' v^2) + \\ &\qquad + \omega_4^3 t\{(\beta\gamma' + \alpha\beta')u^2 - (\alpha\alpha' - \gamma\gamma')uv + (\beta\alpha' + \gamma\beta')v^2\} = 0. \end{aligned} \tag{5β'}$$

Уравнения ($5\beta'$) совпадают и ранг системы (5α, β) понижается, если

$$1) \ t = 0$$

или

$$2)\ (\beta\gamma'+\alpha\beta')u^2-(\alpha\alpha'-\gamma\gamma')uv+(\beta\alpha'+\gamma\beta')v^2=0.$$

В первом случае из (2β), (3) имеем $\omega_3^1=0$, $\omega_4^2=0$ и луч A_3A_4 становится неподвижным. Второй случай накладывает ограничения на формы $\omega_1^3=u$, $\omega_2^4=v$ и, следовательно, приводит к характеристикам.

Оставляя эти случаи в стороне, имеем ранг полярной системы $s_1=5$; при $q=6$ формах (а) имеем $s_2=q-s_1=1$. Поскольку

$$Q=s_1+2s_2=7,\quad N=7,$$

признак Картана удовлетворен. Система — в инволюции и расслояемые пары (гиперболические) существуют с произволом $s_2=1$ одной функции двух аргументов.

40. Особое решение расслояемых пар. Переходим к случаю (4 α, β). Уравнения (4α) по формулам (2α) имеют следствием два пфаффовых уравнения:

$$\omega_4^3=\lambda\omega_1^2,\quad \omega_2^1=\lambda\omega_3^4. \qquad (6\alpha)$$

Присоединяя их к системе (1α — δ), замечаем, что вторые уравнения (1β, δ) совпадают с первыми, и система квадратичных уравнений принимает вид

$$\begin{aligned}&[\omega_1^2\omega_2^4]-[\omega_3^4\omega_1^3]=0,\quad [\omega_3^1\omega_1^2]-(\omega_4^2\omega_3^4]=0,\\&[\omega_3^1\omega_1^3]-[\omega_4^2\omega_2^4]=0.\end{aligned} \qquad (6\beta)$$

Внешнее дифференцирование уравнений (6α) дает

$$[d\ln\lambda+\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_4^4,\ \omega_1^2]=0,$$
$$[d\ln\lambda+\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_4^4,\ \omega_3^4]=0.$$

Отсюда, если $[\omega_1^2\omega_3^4]\neq 0$, имеем:

$$d\ln\lambda+\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_4^4=0, \qquad (6\gamma)$$

и новое внешнее дифференцирование приводит к тождеству.

Наиболее общий интегральный элемент $\mathfrak{E}_2$ определяется уравнениями:

$$\begin{aligned}&\omega_3^4=\alpha\omega_1^3-\beta\omega_2^4,\quad \omega_1^2=\beta\omega_1^3+\gamma\omega_2^4,\\&\omega_3^1=a\omega_1^3+b\omega_2^4,\quad \omega_4^2=-b\omega_1^3+c\omega_2^4,\end{aligned} \qquad (6\delta)$$

где коэффициенты α, β, γ, a, b, c связаны первым уравнением (2γ).

Система внешних уравнений неправильная. Полярная система элемента $\omega_1^3=u$, $\omega_2^4=v$ содержит два первых уравнения (5α) и первое (5β).

Ранг системы $s_1=3$. Поскольку характеристическая система (а) п. 39 теперь содержит только $q=4$ независимых форм, имеем $s_2=q-s_1=1$ и

$$Q=s_1+2s_2=5,\quad N=5,$$

ибо уравнения (6δ) содержат шесть параметров α, β, γ, a, b, c, связанных одним уравнением (2γ). Следовательно, признак Картана удовлетворен. Система в инволюции и определяет расслояемые пары (6α, β, γ) с произволом $s_2=1$ одной функции двух аргументов.

41. Геометрический смысл полученного решения. Чтобы выяснить геометрический смысл уравнений (6α), потребуем, чтобы обе конгруэнции пары (A_1A_2) и (A_3A_4) принадлежали одному линейному комплексу.

Обозначая буквой $\mathfrak{a}$ линейный комплекс, отнесенный к неподвижной системе координат, имеем условия принадлежности пары лучей комплексу

$$\{\mathfrak{a}(A_1A_2)\}=0,\quad \{\mathfrak{a}(A_3A_4)\}=0. \qquad (a)$$

Поскольку все лучи первой и второй конгруэнций принадлежат комплексу, уравнения (а) допускают дифференцирование в любом направлении при постоянном $\mathfrak{a}$. Принимая во внимание уравнения (1α), получим:

$$\{\mathfrak{a},\ \omega_1^3[32]+\omega_2^4[14]\}=0,$$
$$\{\mathfrak{a},\ \omega_3^1[14]+\omega_4^2[32]\}=0 \qquad [ik]=(A_iA_k),$$

откуда, в силу линейной независимости форм ω_1^3, ω_2^4,

$$\{\mathfrak{a}[23]\}=0,\quad \{\mathfrak{a}[14]\}=0. \qquad (b)$$

Дифференцируя еще раз, получим:

$$\{\mathfrak{a},\ \omega_2^1[13]+\omega_3^4[24]\}=0,$$
$$\{\mathfrak{a},\ \omega_1^2[24]+\omega_4^3[13]\}=0.$$

Отсюда, если $\omega_2^1\omega_1^2-\omega_4^3\omega_3^4\neq 0$, получаем еще два уравнения $\{\mathfrak{a}[13]\}=0$, $\{\mathfrak{a}[24]\}=0$, которые вместе с уравнениями (а) и (b) составят шесть условий на пять независимых параметров линейного комплекса, что невозможно. Таким образом, приходим к уравнениям (6α) или к уравнениям

$$\omega_3^4=\mu\omega_1^2,\quad \omega_2^1=\mu\omega_4^3. \qquad (6\varepsilon)$$

Итак, в особом случае расслояемая пара состоит из двух конгруэнций одного и того же линейного комплекса.

42. Расслояемая пара из дважды взятой конгруэнции W с линейчатыми фокальными поверхностями. Во втором случае (6ε)

уравнения (1β) дают

$$[\omega_1^2,\ \omega_2^4-\mu\omega_1^3]=0,\quad [\omega_4^3,\ \omega_2^4-\mu\omega_1^3]=0, \tag{7α}$$

откуда снова приходим к уравнениям (6α).

Система (6α, β) принимает вид

$$\omega_4^3=\lambda\omega_1^2,\quad \omega_2^1=\lambda\mu\omega_1^2,\quad \omega_3^4=\mu\omega_1^2, \tag{7β}$$

$$[\omega_1^2,\ \omega_2^4-\mu\omega_1^3]=0,\quad [\omega_3^1-\mu\omega_4^2,\ \omega_2^4-\mu\omega_1^3]=0, \tag{7γ}$$

$$[\omega_3^1\omega_1^3]-[\omega_4^2\omega_2^4]=0, \tag{7δ}$$

где во втором уравнении (7γ) множитель ω_1^2 заменен на $\omega_2^4-\mu\omega_1^3$ в силу первого уравнения (7γ).

Внешнее дифференцирование уравнений (7β) приводит только к двум уравнениям:

$$[\Delta\lambda,\ \omega_2^4-\lambda\omega_1^3]=0,\quad [\Delta\mu,\ \omega_2^4-\mu\omega_1^3]=0, \tag{7ε}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= d\ln\lambda+\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_4^4,\\ \Delta\mu &= d\ln\mu+\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3+\omega_4^4.\end{aligned} \tag{7ζ}$$

Система (1α), (7β—ε) замкнута относительно операции внешнего дифференцирования. Система внешних квадратичных уравнений (7γ, δ, ε) правильная. Характеристическая система, кроме левых частей линейных уравнений (1α), (7β) и форм ω_1^3, ω_2^4, независимых на интегральном многообразии, содержит $q=5$ форм:

$$\omega_1^2,\quad \omega_3^1,\quad \omega_4^2,\quad \Delta\lambda,\quad \Delta\mu. \tag{a}$$

Полярная система элемента $\omega_1^3=u$, $\omega_2^4=v$ имеет ранг $s_1=5$, что совпадает с числом независимых квадратичных уравнений (7γ, δ, ε). Следовательно, система — в инволюции с характерами $s_1=5$, $s_2=0$ и определяет расслояемые пары с пятью произвольными функциями одного аргумента.

Из уравнений (1α), (7β) непосредственно вытекают сравнения

$$\begin{aligned} d[13] &\equiv (\omega_1^1+\omega_3^3)[13],\\ d[24] &\equiv (\omega_2^2+\omega_4^4)[24]. \end{aligned}\quad (\mathrm{mod}\ \omega_1^2). \tag{7η}$$

Значит, при $\omega_1^2=0$ прямые A_1A_3, A_2A_4 неподвижны, а при $\omega_1^2\neq 0$ они описывают линейчатые поверхности, которые служат фокальными поверхностями (A_1) и (A_3), (A_2) и (A_4) одновременно первой и второй конгруэнций.

Поскольку прямолинейные образующие фокальных поверхностей соответствуют, каждая конгруэнция является конгруэнцией W.

Правильнее сказать, пара конгруэнций является дважды взятой одной и той же конгруэнцией W, ибо пучок касательных плоскостей в точках одной образующей высекает на соответствующей второй поверхности проективный ряд точек, который вместе с точками касания определяют лучи единственной конгруэнции с этими фокальными поверхностями.

43. Построение расслояемой пары к заданной конгруэнции W с линейчатыми фокальными поверхностями. Обратно, допустим, что задана произвольная конгруэнция W с двумя линейчатыми фокальными поверхностями, прямолинейные асимптотические которых соответствуют прямолинейным асимптотическим. Выберем тетраэдр $\{A_i\}$ так, чтобы ребро A_1A_2 совпадало с лучом конгруэнции, ребра A_1A_3 и A_2A_4 совпадали с прямолинейными образующими фокальных поверхностей и A_3A_4 — с произвольным лучом той же конгруэнции. Тогда, поскольку прямые A_1A_2 и A_3A_4 касаются фокальных поверхностей (A_i), будет иметь место система уравнений (1α). С другой стороны, поскольку A_1A_3 и A_2A_4 — прямолинейные образующие, должны иметь место сравнения (7η) п. 42.

Следовательно, четыре формы ω_1^2, ω_2^1, ω_3^4, ω_4^3 попарно линейно зависимы, откуда следуют уравнения

$$\omega_3^4=\mu\omega_1^2,\quad \omega_4^3=\lambda\omega_1^2,\quad \omega_2^1=\lambda\mu'\omega_1^2. \tag{7β′}$$

Внешнее дифференцирование уравнений (1α), (7β′) приводит к равенству коэффициентов $\mu'=\mu$ и к квадратичным уравнениям (7γ, ε).

Таким образом, замкнутая система (1α), (7β, γ, ε) определяет произвольную конгруэнцию W с линейчатыми фокальными поверхностями.

Характеристическая система, кроме форм ω_1^3, ω_2^4, независимых на интегральном многообразии, и левых частей уравнений (1α), (7β), содержит $q=4$ форм

$$\omega_1^2,\quad \omega_3^1-\mu\omega_4^2,\quad \Delta\lambda,\quad \Delta\mu. \tag{a}$$

Система внешних уравнений (7γ, ε) правильная и содержит четыре независимых квадратичных уравнения; ранг полярной матрицы тоже равен четырем, $s_1=4$. Следовательно, система в инволюции и определяет нашу конгруэнцию с произволом четырех функций одного аргумента.

Произвольное решение системы (1α), (7β, γ, ε) можно написать 11 уравнениями, задающими 11 характеристических переменных системы через два остальных.

Зададимся таким решением и внесем его в систему (1α), (7β — ε), определяющую нашу расслояемую пару. При этом, очевидно, уравнения (1α), (7β, γ, ε) будут удовлетворены. В единственном оставшемся уравнении (7δ) мы должны рассматривать разность $\omega_3^1-\mu\omega_4^2$ как характеристическую форму (a) системы (1α), (7β, γ, ε), заданной

6 Зак. 1277. С. П. Фиников

в виде известной линейной комбинации от форм ω_1^3, ω_2^4, независимых на интегральном многообразии.

Кроме ω_1^3, ω_2^4, характеристическая система уравнения (7δ) содержит только одну форму, например $\omega_3^1+\mu\omega_4^2$.

Интегральное многообразие $\mathfrak{M}_2$, очевидно, будет определяться с произволом одной функции одного аргумента.

С этим произволом можно присоединить к каждому лучу конгруэнции (1α), (7β, γ, ε) другой луч той же конгруэнции, пересекающий те же прямолинейные образующие так, чтобы получить расслояемую пару из дважды взятой конгруэнции W.

44. Расслояемые конгруэнции. Из доказанной теоремы (п. 39) вытекает, что конгруэнции, входящие в расслояемые пары, не произвольны, ибо произвольная конгруэнция зависит от двух функций двух аргументов *). Конгруэнции расслояемых пар мы будем называть *расслояемыми*.

Теорема. *На всякой поверхности можно провести с произволом четырех функций одного аргумента семейство линий так, чтобы касательные к этим линиям образовали расслояемую конгруэнцию.*

Произвольная поверхность, отнесенная к тетраэдру 1-го порядка (п. 24), определяется системой

$$\omega_1^4=0,\quad [\omega_1^2\omega_2^4]+[\omega_1^3\omega_3^4]=0, \tag{8α}$$

причем квадратичное уравнение раскрывается по лемме Картана в виде

$$\omega_3^4=\alpha\omega_1^3-\beta\omega_2^4,\quad \omega_1^2=\beta\omega_1^3+\gamma\omega_2^4. \tag{8β}$$

Характеристическая система, кроме формы ω_1^4, равной нулю на всяком интегральном элементе, и форм ω_1^3, ω_2^4, линейно независимых на интегральном многообразии, содержит две формы

$$\omega_1^2,\quad \omega_3^4.$$

Следовательно, система (8α) обладает пятью характеристическими переменными. Если поверхность дана, то три из них заданы функциями двух других; формы ω_1^4, ω_1^2, ω_3^4 являются известными линейными комбинациями форм ω_1^3, ω_2^4, удовлетворяющими системе (8α).

Внося эти значения в систему (1α — δ), получим систему

$$\omega_2^3=0,\quad \omega_3^2=0,\quad \omega_4^1=0, \tag{9α}$$

$$\begin{gathered}[\omega_3^1\omega_1^3]-[\omega_4^2\omega_2^4]=0,\quad [\omega_2^1\omega_1^3]+[\omega_2^4\omega_4^3]=0,\\ [\omega_3^1\omega_1^2]-[\omega_4^2\omega_3^4]=0,\quad [\omega_4^2\omega_2^1]-[\omega_3^1\omega_4^3]=0.\end{gathered} \tag{9β}$$

*) Можно задать произвольно две поверхности, и их общие касательные образуют конгруэнцию прямых.

Характеристическая система уравнений (9α, β), если считать, что формы ω_1^2, ω_3^4 являются заданными линейными комбинациями от форм ω_1^3, ω_2^4, содержит, кроме этих последних и форм (9α), равных нулю на всяком интегральном линейном элементе, только четыре формы:

$$\omega_3^1,\quad \omega_4^2,\quad \omega_2^1,\quad \omega_4^3. \tag{a}$$

Система внешних уравнений (9β) неправильная. Наиболее общий интегральный элемент $\mathfrak{E}_2$ определяется уравнениями

$$\begin{gathered}\omega_4^3=\alpha'\omega_2^4-\beta'\omega_1^3,\quad \omega_2^1=\beta'\omega_2^4+\gamma'\omega_1^3,\\ \omega_3^1=a\omega_1^3+b\omega_2^4,\quad \omega_4^2=c\omega_2^4-b\omega_1^3,\end{gathered} \tag{10α}$$

где коэффициенты α', β', γ', a, b, c связаны уравнениями (2γ). Эти уравнения разрешаются двумя способами или в виде решений (3) с $N=4$ произвольными параметрами α', β', γ', t или в виде решений (4α, β) с $N=3$ произвольными параметрами a, b и λ.

В первом случае полярная система получается из уравнений (5α, β), если принять во внимание, что значения форм ω_1^2, ω_3^4 вычисляются из (8β):

$$\begin{gathered}\omega_3^1u+\omega_4^2v=0,\quad \omega_2^1u-\omega_4^3v=0,\\ \omega_3^1(\beta u+\gamma v)-\omega_4^2(\alpha u-\beta v)=0,\\ \omega_1^2(\beta'v+\gamma'u)-\omega_2^1(-bu+cv)+\omega_4^3(au+bv)-\omega_3^1(\alpha'v-\beta'u)=0.\end{gathered} \tag{10β}$$

Ранг системы $s_1=4$, если

$$(\alpha u^2-2\beta uv-\gamma v^2)(au^2+2buv-cv^2)\neq 0.$$

Поскольку число форм (a) равно $q=4$, характеры цепи $s_1=4$, $s_2=q-s_1=0$. Признак Картана удовлетворен $Q=N=4$, система в инволюции и определяет интегральное многообразие $\mathfrak{M}_2$ с четырьмя произвольными функциями одного аргумента.

45. Конгруэнции линейного комплекса. В случае b) п. 39, как мы знаем, система, определяющая расслояемую пару, приводится к виду (1α), (6α, β, γ).

В силу уравнений (8α) она принимает вид

$$\begin{gathered}\omega_2^3=0,\quad \omega_3^2=0,\quad \omega_4^1=0,\quad \omega_4^3-\lambda\omega_1^2=0,\quad \omega_2^1-\lambda\omega_3^4=0,\\ d\ln\lambda+\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_4^4=0,\end{gathered} \tag{11α}$$

$$[\omega_3^1\omega_1^3]-[\omega_4^2\omega_2^4]=0,\quad [\omega_3^1\omega_1^2]-[\omega_4^2\omega_3^4]=0, \tag{11β}$$

где формы ω_1^2, ω_3^4 следует рассматривать как известные линейные комбинации (8β) форм ω_1^3, ω_2^4. Характеристическая система, кроме левых частей линейных уравнений (11α) и форм ω_1^3, ω_2^4, независимых на интегральном многообразии, содержит только $q=2$ формы:

$$\omega_3^1, \quad \omega_4^2. \tag{a}$$

Система внешних уравнений (11β) правильная. Полярная система интегрального элемента $\omega_1^3=u$, $\omega_2^4=v$, в силу (8β), имеет вид

$$\omega_3^1 u - \omega_4^2 v = 0,$$

$$\omega_3^1(\beta u+\gamma v) - \omega_4^2(\alpha u - \beta v) = 0.$$

Ранг ее равен $s_1 = 2$, т. е. числу независимых квадратичных уравнений (11β), если

$$\alpha u^2 - 2\beta uv - \gamma v^2 \neq 0.$$

Система — в инволюции с характерами $s_1=2$, $s_2=q-s_1=0$ и определяет $\mathfrak{M}_2$ с произволом двух функций одного аргумента.

Этот произвол надо отнести к выбору второй конгруэнции пары, ибо при заданных поверхности (A_1) и линейного комплекса (пять произвольных постоянных, которые соответствуют пяти независимым отношениям шести коэффициентов в уравнении произвольного линейного комплекса) конгруэнция линейного комплекса, имеющая поверхность (A_1) своей фокальной поверхностью, вполне определена: луч конгруэнции в точке A_1 является пересечением касательной плоскости поверхности в точке A_1 с полярной плоскостью точки A_1 относительно нулевой системы комплекса.

Отсюда теорема:

Всякая конгруэнция линейного комплекса с произволом двух функций одного аргумента образует расслояемую пару с конгруэнциями того же комплекса.

В третьем случае (п. 42) мы имеем теорему:

Всякая конгруэнция W с двумя линейчатыми фокальными поверхностями и соответствием их прямолинейных образующих составляет сама с собой расслояемые пары с произволом одной функции одного аргумента.

46. Расслояемые пары, присоединенные к одной расслояемой конгруэнции. Постановка задачи. Только что полученные результаты о конгруэнциях линейного комплекса и о конгруэнциях W с линейчатыми фокальными поверхностями дают основание поставить вопрос, сколько расслояемых пар можно соединить с одной расслояемой конгруэнцией.

Мы докажем теорему Бам-Зеликовича о конгруэнциях W.

Теорема. *Только конгруэнции W допускают присоединение ∞ расслояемых пар.*

При доказательстве этой теоремы нам придется обращаться к дифференциальной окрестности 4-го порядка луча конгруэнции (A_1A_2). Поэтому мы заранее заготовим необходимые формулы.

При отнесении произвольной (не параболической) конгруэнции

к тетраэдру 1-го порядка таблица компонент определяется уравнениями

$$\omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^3 = 0, \tag{12α}$$

откуда внешним дифференцированием получаем:

$$[\omega_1^2\omega_2^4] + [\omega_1^3\omega_3^4] = 0, \quad [\omega_2^1\omega_1^3] + [\omega_2^4\omega_4^3] = 0. \tag{12β}$$

Лемма Картана (п. 12) дает разложения

$$\begin{aligned} &\omega_3^4 = \alpha\omega_1^3 - \beta\omega_2^4, \quad \omega_4^3 = -\beta'\omega_1^3 + \alpha'\omega_2^4,\\ &\omega_1^2 = \beta\omega_1^3 + \gamma\omega_2^4, \quad \omega_2^1 = \gamma'\omega_1^3 + \beta'\omega_2^4, \end{aligned} \tag{12γ}$$

откуда новым дифференцированием получаем:

$$\begin{aligned} &\alpha[\Delta\alpha, \ \omega_1^3] - [\Delta\beta\omega_2^4] = 0, \quad -[\Delta\beta'\omega_1^3] + \alpha'[\Delta\alpha'\omega_2^4] = 0,\\ &[\Delta\beta\omega_1^3] + \gamma[\Delta\gamma\omega_2^4] = 0, \quad \gamma'[\Delta\gamma'\omega_1^3] + [\Delta\beta'\omega_2^4] = 0, \end{aligned} \tag{12δ}$$

где

$$\begin{aligned} &\Delta\alpha = d\ln\alpha + \omega_1^1 - 2\omega_3^3 + \omega_4^4, \quad \Delta\alpha' = d\ln\alpha' + \omega_2^2 - 2\omega_4^4 + \omega_3^3,\\ &\Delta\beta = d\beta + \beta(\omega_2^2 - \omega_3^3) + \omega_3^2, \quad \Delta\beta' = d\beta' + \beta'(\omega_1^1 - \omega_4^4) + \omega_4^1,\\ &\Delta\gamma = d\ln\gamma + 2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4, \quad \Delta\gamma' = d\ln\gamma' + 2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3. \end{aligned} \tag{12ε}$$

Отсюда по лемме Картана получим:

$$\begin{aligned} &\Delta\alpha = \alpha_1\omega_1^3 - \beta_1\omega_2^4, \quad \Delta\alpha' = -\beta_2'\omega_1^3 + \alpha_2'\omega_2^4,\\ &\Delta\beta = \alpha\beta_1\omega_1^3 + \gamma\beta_2\omega_2^4, \quad \Delta\beta' = \gamma'\beta_1'\omega_1^3 + \alpha'\beta_2'\omega_2^4,\\ &\Delta\gamma = \beta_2\omega_1^3 + \gamma_2\omega_2^4, \quad \Delta\gamma' = \gamma_1'\omega_1^3 + \beta_1'\omega_2^4. \end{aligned} \tag{12ζ}$$

Отсюда внешним дифференцированием получаем:

$$\begin{aligned} &[\Delta\alpha_1\omega_1^3] - [\Delta\beta_1\omega_2^4] = 0, \quad -[\Delta\beta_2'\omega_1^3] + [\Delta\alpha_2'\omega_2^4] = 0,\\ &\alpha[\Delta\beta_1\omega_1^3] + \gamma[\Delta\beta_2\omega_2^4] = 0, \quad \gamma'[\Delta\beta_1'\omega_1^3] + \alpha'[\Delta\beta_2'\omega_2^4] = 0,\\ &[\Delta\beta_2\omega_1^3] + [\Delta\gamma_2\omega_2^4] = 0, \quad [\Delta\gamma_1'\omega_1^3] + [\Delta\beta_1'\omega_2^4] = 0, \end{aligned} \tag{12η}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_1 &= d\alpha_1 + \alpha_1(\omega_1^1 - \omega_3^3) + 3\omega_3^1 +\\ &\quad + \{(\beta_2)^2 - \beta\gamma'\}\omega_1^3 + (3\beta\beta' - 3\alpha\alpha' - \gamma\gamma')\omega_2^4,\\ \Delta\beta_1 &= d\beta_1 + \beta_1(\omega_2^2 - \omega_4^4) + \omega_4^2 + \beta\beta'\omega_1^3 - \{(\beta_1)^2 + \beta\alpha'\}\omega_2^4,\\ \Delta\beta_2 &= d\beta_2 + \beta_2(\omega_1^1 - \omega_3^3) - \omega_3^1 + \{(\beta_2)^2 - \beta\gamma'\}\omega_1^3 - \beta\beta'\omega_2^4,\\ \Delta\gamma_2 &= d\gamma_2 + \gamma_2(\omega_2^2 - \omega_4^4) + 3\omega_4^2 +\\ &\quad + (3\beta\beta' - \alpha\alpha' - 3\gamma\gamma')\omega_1^3 + \{(\beta_1)^2 + \beta\alpha'\}\omega_2^4. \end{aligned} \tag{12θ}$$

Формулы для $\Delta\alpha'_2$, $\Delta\beta'_2$, $\Delta\beta'_1$, $\Delta\gamma'_1$ получаются подстановкой $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ с добавлением штрихов при коэффициентах α, β, γ. Если ограничиться уравнениями (12α, β), то характеристическая система будет содержать восемь форм:

$$\omega_1^4,\ \omega_2^3;\quad \omega_1^3,\ \omega_2^4;\quad \omega_1^2,\ \omega_2^1;\quad \omega_3^4,\ \omega_4^3. \tag{a}$$

Система уравнений (1α, β, γ) п. 39, определяющая расслояемые пары, содержит, кроме уравнений (12α, β), еще пять уравнений:

$$\omega_3^2 = 0,\quad \omega_4^1 = 0, \tag{13α}$$

$$[\omega_3^1\omega_1^3] - [\omega_4^2\omega_2^4] = 0, \tag{13β}$$

$$[\omega_3^1\omega_1^2] + [\omega_3^4\omega_4^2] = 0,\quad [\omega_4^2\omega_2^1] + [\omega_4^3\omega_3^1] = 0. \tag{13γ}$$

Ее характеристическая система содержит, кроме форм (a), еще четыре формы:

$$\omega_3^2,\ \omega_4^1;\quad \omega_3^1,\ \omega_4^2, \tag{b}$$

из которых первые две равны нулю на всяком интегральном элементе.

Система, полученная обращением в нуль форм (a), вполне интегрируема, и восемь первых ее интегралов служат характеристическими переменными системы (12α, β). Они являются первыми интегралами и большой системы, левые части уравнений которой состоят из форм (a) и (b). Поэтому их можно включить в число характеристических переменных системы (12α, β) и (13α, β, γ), которая определяет расслояемые пары. Если конгруэнция дана, т. е. дано решение системы (12α, β), то шесть характеристических переменных ее даны функциями от двух остальных и шесть форм (a) даны линейными комбинациями от двух форм ω_1^3, ω_2^4, удовлетворяющими уравнения (12α, β).

Внесем это решение в уравнения (12α, β), (13α, β, γ). Первая группа уравнений (12α, β) обратится в тождества. Останутся уравнения (13α, β, γ), которые будут содержать только шесть независимых форм: формы ω_3^2, ω_4^1, равные нулю на всяком интегральном элементе в силу уравнений (13α); формы ω_1^3, ω_2^4 независимые на интегральном многообразии, и $q = 2$ формы: ω_3^1, ω_4^2. Поскольку формы ω_1^2, ω_2^1, ω_3^4, ω_4^3 заданы линейными комбинациями (12γ), где коэффициенты α, β, γ, α', β', γ' следует считать известными, система внешних уравнений (13β, γ) правильная.

Наиболее общий интегральный элемент системы (13α, β, γ) определяется уравнениями (2β, γ) п. 39. При этом из двух решений a) и b) п. 39 для системы конечных уравнений (2γ) п. 39 мы должны выбрать первое, ибо второе решение (4α, β) п. 39 приводит к конгруэнциям линейного комплекса или конгруэнциям W с линейчатыми

фокальными поверхностями, для которых вопрос присоединения расслояемых пар рассмотрен в п. 43.

47. Конгруэнции с параметрическим произволом расслояемых пар. Обозначим

$$\xi = \beta\gamma' + \alpha\beta',\quad 2\eta = \alpha\alpha' - \gamma\gamma',\quad \zeta = \gamma\beta' + \alpha'\beta; \tag{14α}$$

тогда по формулам (2β), (3) п. 39 получим:

$$\omega_3^1 = t(\xi\omega_1^3 - \eta\omega_2^4),\quad \omega_4^2 = t(\eta\omega_1^3 - \zeta\omega_2^4). \tag{14β}$$

Внешнее дифференцирование уравнений (14α, β) дает с помощью (12δ, ε)

$$\begin{aligned}&[d\ln t,\ \xi\omega_1^3 - \eta\omega_2^4] + [\Theta\omega_2^4] = 0,\\ &[d\ln t,\ \eta\omega_1^3 - \zeta\omega_2^4] + [\Theta\omega_1^3] = 0,\end{aligned} \tag{15α}$$

где

$$\Theta = \beta'\Delta\beta - \beta\Delta\beta' - \alpha\alpha'\frac{\Delta\alpha - \Delta\alpha'}{2} + \gamma\gamma'\frac{\Delta\gamma' - \Delta\gamma}{2}. \tag{15β}$$

Пропорциональность форм, стоящих множителями при $d\ln t$ в уравнениях (15α), приводит к вырождению конгруэнции (A_3A_4). Следовательно, развертывая уравнения (15α) по лемме Картана, получим:

$$d\ln t = A\omega_1^3 + B\omega_2^4, \tag{15γ}$$

откуда новым дифференцированием получим:

$$[\Delta A\omega_1^3] + [\Delta B\omega_2^4] = 0, \tag{15δ}$$

$$\Delta A = dA + A(\omega_1^1 - \omega_3^3),\quad \Delta B = dB + B(\omega_2^2 - \omega_4^4). \tag{15ε}$$

Между тем, если положить

$$\Theta = P\omega_1^3 + P'\omega_2^4,$$

где по формулам (15β) и (12ζ)

$$P = (\alpha\beta'\beta_1 - \beta\gamma'\beta'_1) - \alpha\alpha'\frac{\alpha_1 + \beta'_1}{2} + \gamma\gamma'\frac{\gamma'_1 - \beta_2}{2},$$

$$P' = (\beta'\gamma\beta_2 - \alpha'\beta\beta'_2) + \alpha\alpha'\frac{\beta_1 + \alpha'_2}{2} + \gamma\gamma'\frac{\beta'_1 - \gamma_2}{2},$$

и внести (15γ) в (15α), то получим:

$$A\eta + B\xi = P,$$
$$A\zeta + B\eta = -P',$$

откуда, используя уравнения (2α) п. 39, (14β), (12θ), будем иметь:

$$\eta\,\Delta A+\xi\,\Delta B=(\alpha\beta'\,\Delta\beta_1-\beta\gamma'\,\Delta\beta_1')-\alpha\alpha'\,\frac{\Delta\alpha_1+\Delta\beta_2'}{2}+$$
$$+\gamma\gamma'\,\frac{\Delta\gamma_1'-\Delta\beta_2}{2}+\eta\omega_3^1-\xi\omega_4^2+P_1\omega_1^3+P_2\omega_4^2,$$
$$\zeta\Delta A+\eta\,\Delta B=-(\beta'\gamma\,\Delta\beta_2-\alpha'\beta\,\Delta\beta_2')-\alpha\alpha'\,\frac{\Delta\beta_1+\Delta\alpha_2'}{2}-$$
$$-\gamma\gamma'\,\frac{\Delta\beta_1'-\Delta\gamma_2}{2}-\zeta\omega_3^1+\eta\omega_4^2+P_3\omega_1^3+P_4\omega_2^4,$$

где P_i — многочлены от A, B, α, β, γ, α_i, β_i, γ_i и штрихованных.

Отсюда

$$\Delta A=-t\,(\xi\omega_1^3+\eta\omega_2^4)+Q_1\omega_1^3+Q_2\omega_2^4,$$
$$\Delta B=t\,(\eta\omega_1^3+\zeta\omega_2^4)+Q_3\omega_1^3+Q_4\omega_2^4$$

и после подстановки в (15δ) получаем конечное уравнение на t:

$$2t\eta+Q_5=0, \tag{16}$$

где Q_i — многочлены от A, B, α, β, γ, α_i, β_i, γ_i и штрихованных.

Если $\eta\neq 0$, то уравнение (16) определит значение t; если оно удовлетворит системе (15α), то формы ω_3^1, ω_4^2, вычисленные по формулам (14β), будут вполне определены. Все формы ω_i^k, кроме форм ω_i^i, будут известны; следовательно, семейство тетраэдров $\{A_i\}$ будет определено до проективного преобразования (и нормирования вершин). С конгруэнцией может быть связано не более одной расслояемой пары.

Если $\eta=0$, то

$$\alpha\alpha'-\gamma\gamma'=0. \tag{17}$$

Уравнение (b) п. 25

$$\omega_1^2\omega_2^4+\omega_1^3\omega_3^4=0$$

для асимптотических линий фокальной поверхности (A_1) сохраняет силу и в гиперболической области лучей конгруэнции. Если внести значение (12γ), то получим уравнение асимптотических в виде

$$\alpha\,(\omega_1^3)^2+\gamma\,(\omega_2^4)^2=0 \tag{18α}$$

и, аналогично, для фокальной поверхности (A_2)

$$\gamma'\,(\omega_1^3)^2+\alpha'\,(\omega_2^4)^2=0. \tag{18β}$$

При выполнении условия (17) асимптотические линии (18α, β) на фокальных поверхностях соответствуют, и конгруэнция становится конгруэнцией W, что и доказывает теорему.

48. Расслояемые конгруэнции W. Допустим теперь, что конгруэнция (A_1A_2) есть конгруэнция W

$$\alpha\alpha'-\gamma\gamma'=0.$$

Из уравнения (14β) п. 47 следует

$$\omega_3^1=a\omega_1^3,\quad \omega_4^2=c\omega_2^4. \tag{19}$$

Разрешая уравнение (17) в виде

$$\gamma=\lambda\alpha,\quad \gamma'=\frac{1}{\lambda}\,\alpha', \tag{17$'$}$$

получим после дифференцирования

$$\Delta\gamma=\Delta\alpha+\Delta\lambda,\quad \Delta\gamma'=\Delta\alpha'-\Delta\lambda, \tag{20α}$$

где

$$\Delta\lambda=d\ln\lambda+2\,(\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_4^4), \tag{20β}$$

и формулы (12ζ) дадут

$$\begin{aligned}\Delta\lambda&=(\beta_2-\alpha_1)\,\omega_1^3+(\gamma_2+\beta_1)\,\omega_2^4,\\ \Delta\lambda&=-(\gamma_1'+\beta_2')\,\omega_1^3+(\alpha_2'-\beta_1')\,\omega_2^4;\end{aligned} \tag{20γ}$$

отсюда следует

$$\gamma_1'+\beta_2'+\beta_2-\alpha_1=0,\quad \gamma_2+\beta_1+\beta_1'-\alpha_2'=0, \tag{20δ}$$

и новое дифференцирование дает

$$\Delta\gamma_1'+\Delta\beta_2'+\Delta\beta_2-\Delta\alpha_1=0,\quad \Delta\gamma_2+\Delta\beta_1+\Delta\beta_1'-\Delta\alpha_2'=0. \tag{20ε}$$

Обратимся теперь к уравнениям расслояемой пары (13α, β, γ). Уравнение (13β) удовлетворено выражениями (19). Уравнения (13γ) приводят к конечным уравнениям (2γ) п. 39, которые дают теперь

$$a=t\alpha,\quad c=-t\gamma, \tag{21}$$

и система (19) принимает вид

$$\omega_3^1=t\alpha\omega_1^3,\quad \omega_4^2=-t\gamma\omega_2^4. \tag{19$'$}$$

Внешнее дифференцирование даст

$$[\Delta t+\Delta\alpha,\ \omega_1^3]=0,\quad [\Delta t+\Delta\gamma,\ \omega_2^4]=0, \tag{22α}$$

где

$$\Delta t=d\ln t+\omega_1^1-\omega_4^4;$$

в силу (12ζ) п. 46 из уравнений (20α) следует

$$\Delta t=\beta_1\omega_2^4-\beta_2\omega_1^3, \tag{22β}$$

откуда внешним дифференцированием получаем:

$$[\Delta\beta_2\omega_1^3]-[\Delta\beta_1\omega_2^4]=0. \tag{22γ}$$

Это единственное условие на конгруэнцию (A_1A_2).

Конгруэнция $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$ определяется теперь системой (12α, γ, ζ, η) п. 46, (17) п. 47 и (22γ). Кроме пфаффовых уравнений (12α, γ, ζ), она содержит конечное уравнение (17) и только шесть квадратичных (12η) п. 46, (22γ):

$$\begin{aligned} &[\Delta\beta_1\omega_1^3] + \lambda[\Delta\beta_2\omega_2^4] = 0, \quad [\Delta\beta_1'\omega_1^3] + \lambda[\Delta\beta_2'\omega_2^4] = 0,\\ &[\Delta\beta_2\omega_1^3] + [\Delta\gamma_2\omega_2^4] = 0, \quad [\Delta\gamma_1'\omega_1^3] + [\Delta\beta_1'\omega_2^4] = 0,\\ &[\Delta\beta_2\omega_1^3] - [\Delta\beta_1\omega_2^4] = 0, \quad [\Delta\gamma_1' + \Delta\beta_2',\ \omega_1^3] = 0, \end{aligned} \tag{23}$$

ибо среди шести уравнений (12η) п. 46 в силу (20ε), (22γ) остается только пять независимых.

Характеристическая система содержит кроме форм (12α, γ, ζ) и форм ω_1^3, ω_2^4, независимых на интегральном многообразии, шесть форм:

$$\Delta\beta_1,\ \Delta\beta_2,\ \Delta\beta_1',\ \Delta\beta_2',\ \Delta\gamma_1,\ \Delta\gamma_2'. \tag{a}$$

Ранг полярной системы элемента $\omega_1^3 = u$, $\omega_2^4 = v$ при условии

$$u(u^2 + \lambda v^2) \neq 0$$

равен 6, т. е. числу независимых квадратичных уравнений. Система в инволюции (п. 20) с характерами $s_1 = 6$, $s_2 = 0$ и определяет конгруэнцию $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$ с шестью произвольными функциями одного аргумента.

Эти конгруэнции называются конгруэнциями R.

Если такая конгруэнция $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$ дана, то вторая конгруэнция $(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4)$, составляющая с ней расслояемую пару, определяется из вполне интегрируемой системы (13α) п. 46, (19′), (22β):

$$\begin{gathered} \omega_3^2 = 0, \quad \omega_4^1 = 0, \quad \omega_3^1 = t\alpha\omega_1^3, \quad \omega_4^2 = -t\gamma\omega_2^4,\\ d\ln t + \omega_1^1 - \omega_4^4 = \beta_1\omega_2^4 - \beta_2\omega_1^3 \end{gathered} \tag{24}$$

с пятью произвольными постоянными.

Весьма замечательные геометрические свойства таких пар мы будем рассматривать в следующей главе.

49. Теорема существования расслояемых конгруэнций. Если уравнение (17) п. 47 не удовлетворено, то уравнение (16) п. 47 определяет t через элементы конгруэнции $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$. Поэтому уравнения (15α — γ) п. 47 следует перевести в систему, определяющую конгруэнцию (A_1A_2). Эта система, таким образом, будет содержать, кроме уравнений (12α, γ) п. 46, (15γ) п. 47, еще квадратичные уравнения (12δ) п. 46, (15δ) п. 47 и уравнения

$$\begin{aligned} &[2(\beta'\Delta\beta - \beta\Delta\beta') - \alpha\alpha'(\Delta\alpha - \Delta\alpha') +\\ &\qquad + \gamma\gamma'(\Delta\gamma' - \Delta\gamma) - (Ax + 2By)\omega_1^3,\ \omega_2^4] = 0,\\ &[2(\beta'\Delta\beta - \beta\Delta\beta') - \alpha\alpha'(\Delta\alpha - \Delta\alpha') +\\ &\qquad + \gamma\gamma'(\Delta\gamma' - \Delta\gamma) + (2Az + Bx)\omega_2^4,\ \omega_1^3] = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} &2(\beta'\Delta\beta - \beta\Delta\beta') - \alpha\alpha'(\Delta\alpha - \Delta\alpha') + \gamma\gamma'(\Delta\gamma' - \Delta\gamma) =\\ &\qquad = (Ax + 2By)\omega_1^3 - (2Az + Bx)\omega_2^4. \end{aligned} \tag{25α}$$

Дифференцируя внешним образом, получим:

$$\begin{aligned} &2[\omega_3^1,\ x\omega_1^3 + z\omega_2^4] - 2[\omega_4^2,\ y\omega_1^3 + x\omega_2^4] - [\omega_4^1,\ \Delta\beta - B\alpha\omega_1^3 + A\gamma\omega_2^4] +\\ &\qquad + [\omega_3^2,\ \Delta\beta' + B\gamma'\omega_1^3 - A\alpha'\omega_2^4] + \Theta = 0, \end{aligned} \tag{25β}$$

где Θ — квадратичная форма из подкольца ассоциированной системы уравнений (12α, γ, δ) п. 46, (15γ, δ) п. 47, (25α).

Дифференцируя алгебраически по формам базиса ω_1^3, ω_2^4, $\Delta\beta$, $\Delta\beta'$, мы увидим, что уравнение (25β) вводит в характеристическую систему форм последние недостающие формы ω_3^1, ω_4^2, ω_3^2, ω_4^1, которыми характеристическая система (13α — γ) п. 46 отличалась от характеристической системы (12α, β) п. 46. Таким образом, расслояемая конгруэнция $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$ определяет единственную расслояемую пару.

Впрочем, из уравнений (13α) п. 46, (14β) п. 47 следует, что репер, присоединенный к любой расслояемой паре с заданной конгруэнцией $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$, имеет одни и те же компоненты независимо от выбора этой пары. Следовательно, все получаемые таким образом пары проективно эквивалентны.

Таким образом, мы получаем общую теорему:

Теорема. *Расслояемая конгруэнция зависит от одной произвольной функции двух аргументов и вполне определяет расслояемую пару, в которую она входит.*

Исключения составляют:

1) *конгруэнции линейного комплекса, которые образуют с конгруэнциями того же комплекса расслояемые пары с произволом двух функций одного аргумента;*

2) *конгруэнции* W *с линейчатыми фокальными поверхностями и соответствием прямолинейных образующих, которые образуют сами с собой расслояемые пары с произволом одной функции одного аргумента;*

3) *конгруэнции* R, *которые образуют с конгруэнциями того же класса расслояемые пары* (*сопряженные*, см. п. 50) *с произволом пяти произвольных постоянных.*

Все эти конгруэнции принадлежат к классу конгруэнций W и исчерпывают все расслояемые конгруэнции W.

Первый и третий классы конгруэнций пересекаются: существуют конгруэнции R, принадлежащие линейным комплексам. Они допускают расслояемые пары и первого класса с обратным соответствием развертывающихся поверхностей своих вспомогательных конгруэнций и третьего с прямым соответствием своих развертывающихся поверхностей.

ГЛАВА IV

СОПРЯЖЕННЫЕ ПАРЫ

50. Общие свойства сопряженных пар. Если конгруэнция (A_1A_2) расслояемой пары, пересекая своими развертывающимися поверхностями расслояющую поверхность (M), высекает на ней сопряженную систему линий, то говорят, что *конгруэнция* (A_1A_2) *сопряжена поверхности* (M). Поскольку (п. 36) на расслояющих поверхностях и первого и второго семейств асимптотические линии определяются одним и тем же уравнением (13) п. 36

$$\omega_3^1\omega_1^3 - \omega_4^2\omega_2^4 = 0,$$

конгруэнция, сопряженная одной поверхности расслояющего семейства, будет сопряжена всем остальным поверхностям этого семейства. Внося сюда значения (2β) п. 39 форм ω_3^1, ω_4^2, получим:

$$a(\omega_1^3)^2 + 2b\omega_1^3\omega_2^4 - c(\omega_2^4)^2 = 0, \tag{1}$$

откуда условие сопряженности направлений $\omega_1^3(d):\omega_2^4(d)$ и $\omega_1^3(\delta):\omega_2^4(\delta)$ в точке поверхности пишется в виде равенства нулю полярной формы

$$a\omega_1^3(d)\,\omega_1^3(\delta) + b\,\{\omega_1^3(d)\,\omega_2^4(\delta) + \omega_2^4(d)\,\omega_1^3(\delta)\} - c\omega_2^4(d)\,\omega_2^4(\delta) = 0. \tag{1'}$$

Следовательно, условие сопряженности развертывающихся поверхностей $\omega_1^3(d) = 0$, $\omega_2^4(\delta) = 0$ сводится к равенству

$$b = 0, \tag{2}$$

и мы возвращаемся к случаю, рассмотренному в п. 48. При этом асимптотические соответствуют не только на фокальных поверхностях пары, но отвечают асимптотическим и на расслояющих поверхностях. Действительно, уравнение (1) теперь принимает вид

$$a(\omega_1^3)^2 - c(\omega_2^4)^2 = 0,$$

и в силу уравнения (2γ) п. 39

$$a\gamma + c\alpha = 0$$

будет эквивалентно уравнению асимптотических (18α, β) п. 47 на фокальных поверхностях пары.

Разложения (2β) п. 39 теперь принимают вид (19) п. 48

$$\omega_3^1 = a\omega_1^3, \quad \omega_4^2 = c\omega_2^4, \tag{2'}$$

откуда следуют сравнения

$$\begin{aligned} dA_1 &\equiv \omega_1^1A_1 + \omega_1^2A_2 \quad (\mathrm{mod}\ \omega_1^3),\\ dA_3 &\equiv \omega_3^3A_3 + \omega_3^4A_4 \quad (\mathrm{mod}\ \omega_1^3),\\ dA_2 &\equiv \omega_2^2A_2 + \omega_2^1A_1 \quad (\mathrm{mod}\ \omega_2^4),\\ dA_4 &\equiv \omega_4^4A_4 + \omega_4^3A_3 \quad (\mathrm{mod}\ \omega_2^4). \end{aligned} \tag{3}$$

Следовательно, развертывающиеся поверхности конгруэнций (A_1A_2), (A_3A_4) расслояемой пары (2) с ребрами возврата на соответствующих фокальных поверхностях (A_1), (A_3) или (A_2), (A_4) соответствуют друг другу.

Поскольку асимптотические расслояющих поверхностей обоих семейств тоже соответствуют (п. 47), если одна конгруэнция пары сопряжена своим расслояющим поверхностям, то и другая сопряжена своим.

Отсюда теорема: *Если одна расслояющая поверхность одного семейства сопряжена своей расслояемой конгруэнции, то сопряжены и все поверхности этого семейства, а поверхности второго семейства сопряжены второй конгруэнции.* Такая расслояемая пара называется *сопряженной парой*.

Следовательно, сопряженные пары характеризуются равенством (2).

Теорема. *Развертывающиеся поверхности двух конгруэнций сопряженной пары соответствуют прямо.*

Это непосредственно вытекает из сравнений (3). Весьма замечательно, что эта теорема допускает обращение.

Теорема. *Если развертывающиеся поверхности двух конгруэнций пары T соответствуют прямо, то они образуют сопряженную пару конгруэнций.*

Напомним, что пара T описывается противоположными сторонами косого четырехугольника, обладающего двумя степенями свободы, если стороны четырехугольника касаются поверхностей, описанных его вершинами. Соответствие развертывающихся поверхностей прямое, если ребра возврата соответствующих развертывающихся поверхностей лежат на фокальных поверхностях, описанных вершинами одной и той же стороны четырехугольника.

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что расслояемые пары определяются системой уравнений (1α — δ) п. 39. Из этих уравнений пфаффовы уравнения (1α) вытекают из условий, что каждая из поверхностей (A_1), (A_2), (A_3) и (A_4) касается прилегающих сторон косого четырехугольника $A_1A_2A_4A_3$, который описывает пару T.

Квадратичные уравнения (1β, δ) следуют отсюда как внешние дифференциалы уравнений (1α). Остается уравнение (1γ) п. 39; оно вытекает из условия соответствия развертывающихся поверхностей. Действительно, это условие пишется в виде уравнений ($2'$) п. 50, но его можно написать в эквивалентной форме

$$[\omega_3^1\omega_1^3] = 0, \quad [\omega_4^2\omega_2^4] = 0, \tag{2''}$$

откуда прямо следует (1γ) п. 39. Сопряженность расслояемой пары непосредственно вытекает из уравнений ($2'$).

51. Расслояемость конгруэнций диагоналей. Отметим, наконец, замечательное свойство сопряженных пар: это единственный случай, когда расслояемая пара образует конфигурацию Бианки (п. 37) из четырех конгруэнций W. Мы докажем более сильную теорему.

Теорема. *Если одна из вспомогательных конгруэнций расслояемой пары является конгруэнцией W, то и другая тоже — конгруэнция W и пара — сопряженная.*

Вспомогательными называются конгруэнции прямых, соединяющих соответствующие фокусы A_1 и A_3, A_2 и A_4 конгруэнций расслояемой пары.

Асимптотические линии на поверхности (A_1) определяются уравнением (18α) п. 47

$$\alpha(\omega_1^3)^2 + \gamma(\omega_2^4)^2 = 0, \tag{a}$$

на поверхности (A_3) — уравнением

$$(d^2A_3\, A_1A_3A_4) = 0$$

или

$$\omega_3^1\omega_1^2 + \omega_3^4\omega_4^2 = 0,$$

или, если воспользоваться формулами (2α, β) п. 39,

$$(a\beta - b\alpha)(\omega_1^3)^2 + (a\gamma + 2b\beta + c\alpha)\,\omega_1^3\omega_2^4 - (-b\gamma + c\beta)(\omega_2^4)^2 = 0. \tag{b}$$

Допустим теперь, что асимптотические (a) и (b) соответствуют, тогда коэффициенты в уравнениях (a) и (b) пропорциональны. Отсюда имеем:

$$a\gamma + 2b\beta + c\alpha = 0, \tag{c}$$

если же вычесть первое уравнение (2γ) п. 39, то получим:

$$b\beta = 0.$$

Но если $\beta = 0$, то уравнение (b) принимает вид

$$\alpha(\omega_1^3)^2 + \gamma(\omega_2^4)^2 = 0$$

и конгруэнция (A_1A_3) не будет W: асимптотические каждой фокальной поверхности ее соответствуют сопряженной системе другой. Следовательно, $b = 0$ и пара сопряженная.

Обратная теорема очевидна. Если пара сопряженная, то развертывающиеся поверхности соответствуют прямо. Следовательно, на поверхностях (A_1) и (A_3) соответствуют две пары сопряженных систем: фокальная сеть конгруэнции (A_1A_3) и фокальные сети конгруэнций (A_1A_3) и (A_3A_4). Если эти сети различны, то асимптотические тоже соответствуют и конгруэнция (A_1A_3) есть конгруэнция W, а поскольку теперь асимптотические соответствуют на всех четырех фокальных поверхностях, и конгруэнция (A_2A_4) будет конгруэнцией W.

Исключение могла бы представлять периодическая последовательность Лапласа, ибо тогда фокальные сети соответствуют на всех четырех конгруэнциях, но в этом случае конфигурация вырождается, ибо при $b = 0$, $\beta = 0$ уравнение асимптотических (b) исчезает.

Отсюда замечательное следствие:

Диагонали косого четырехугольника сопряженной пары описывают расслояемую пару конгруэнций, и этим свойством обладают только сопряженные пары.

Действительно, сопряженная пара конгруэнций вместе со своими вспомогательными конгруэнциями образуют конфигурацию теоремы переместительности асимптотических преобразований Бианки, а диагонали четырехугольника из соответствующих лучей четырех конгруэнций W теоремы переместительности описывают расслояемую пару (п. 28).

Обратно, если диагонали четырехугольника расслояемой пары сами описывают расслояемую пару, то вершины четырехугольника описывают расслояющие поверхности, ибо касательные плоскости их проходят через две прилегающие стороны четырехугольника и, стало быть, содержат противоположную диагональ. Все такие поверхности были найдены в п. 30 и асимптотические их соответствуют друг другу. Значит, четыре конгруэнции, описанные сторонами четырехугольника, суть конгруэнции W и расслояемая пара сопряжена.

52. Преобразование Лапласа сопряженных пар. Мы теперь перейдем к рассмотрению конгруэнций, которые входят в сопряженные пары.

В п. 48 мы назвали конгруэнциями R те конгруэнции, которые входят в сопряженные пары. Теперь мы хотим показать, что эти конгруэнции обладают теми свойствами, с которыми конгруэнции, которым присвоено название R, вошли в науку.

Конгруэнции R имеют два эквивалентных определения:

1. Конгруэнциями R называются такие конгруэнции W, которые сохраняют это свойство при преобразовании Лапласа.

2. Конгруэнции R суть конгруэнции, допускающие проективное изгибание совместно со своими фокальными поверхностями. Поверхностями R и сетями R называются соответственно фокальные поверхности и фокальные сети таких конгруэнций.

Каждое из этих двух свойств, которые характеризуют класс конгруэнций R, в применении к сопряженной паре получает новый обобщенный вид. Мы сейчас остановимся на первом из них.

Теорема. *Только конгруэнции R могут образовать сопряженные пары.*

Докажем более сильную теорему:

Последовательности Лапласа, порожденные конгруэнциями сопряженной пары, образуют последовательность сопряженных пар, образованных соответствующими конгруэнциями первой и второй последовательностей.

Поскольку каждая сопряженная пара состоит из конгруэнций W, из этой теоремы непосредственно следует и первая, ибо обе последовательности будут состоять только из конгруэнций W, а стало быть, все будут конгруэнциями R.

Обратимся к доказательству теоремы о последовательностях сопряженных пар.

Преобразование Лапласа конгруэнции $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$ и, соответственно, $(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4)$ описывается касательными к линии $\omega_2^4=0$ на поверхности $(\boldsymbol{A}_1)$ или $(\boldsymbol{A}_3)$. Поскольку

$$\left.\begin{aligned} d\boldsymbol{A}_1 &\equiv \omega_1^1\boldsymbol{A}_1+(\boldsymbol{A}_3+\beta\boldsymbol{A}_2)\,\omega_1^3,\\ d\boldsymbol{A}_3 &\equiv \omega_3^3\boldsymbol{A}_3+(a\boldsymbol{A}_1+\alpha\boldsymbol{A}_4)\,\omega_1^3\end{aligned}\right\} \pmod{\omega_2^4},$$

нам надо показать, что конгруэнции $(\boldsymbol{A}_1,\ \boldsymbol{A}_3+\beta\boldsymbol{A}_2)$, $(\boldsymbol{A}_3,\ a\boldsymbol{A}_1+\alpha\boldsymbol{A}_4)$ составляют сопряженную пару. Для этого достаточно показать, что они соответствуют развертывающимися поверхностями и образуют пару T. Первое очевидно, ибо в преобразовании Лапласа развертывающиеся поверхности переходят в развертывающиеся и, следовательно, соответствие развертывающихся поверхностей сохранится. Значит, надо только показать, что касательная плоскость во втором фокусе луча $(\boldsymbol{A}_1,\ \boldsymbol{A}_3+\beta\boldsymbol{A}_2)$ проходит через второй фокус луча $(\boldsymbol{A}_3,\ a\boldsymbol{A}_1+\alpha\boldsymbol{A}_4)$, и наоборот.

Пусть эти вторые фокусы определяются величинами ρ и σ по формулам

$$\boldsymbol{A}_1'=\boldsymbol{A}_3+\beta\boldsymbol{A}_2+\rho\boldsymbol{A}_1,\qquad \boldsymbol{A}_3'=a\boldsymbol{A}_1+\alpha\boldsymbol{A}_4+\sigma\boldsymbol{A}_3. \tag{a}$$

Тогда нам надо доказать, что поверхности $(\boldsymbol{A}_1')$ и $(\boldsymbol{A}_3')$ соответственно касаются плоскостей $(\boldsymbol{A}_3+\beta\boldsymbol{A}_2,\ \boldsymbol{A}_1,\ \boldsymbol{A}_3')$ и $(a\boldsymbol{A}_1+\alpha\boldsymbol{A}_4,\ \boldsymbol{A}_3,\ \boldsymbol{A}_1')$, т. е. что для всех значений ω_1^3, ω_2^4 имеют место равенства

$$(d\boldsymbol{A}_1',\ \boldsymbol{A}_3+\beta\boldsymbol{A}_2,\ \boldsymbol{A}_1,\ \boldsymbol{A}_3')=0,\qquad (d\boldsymbol{A}_3',\ a\boldsymbol{A}_1+\alpha\boldsymbol{A}_4,\ \boldsymbol{A}_3,\ \boldsymbol{A}_1')=0. \tag{b}$$

Дифференцируя выражения (a) и внося их в равенства (b), получим:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\beta &= -\beta\sigma\omega_1^3-\rho\gamma\omega_2^4,\\ \Delta a-a\,\Delta\alpha &= a\rho\omega_1^3-a\sigma\frac{\beta}{\alpha}\,\omega_2^4,\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

где $\Delta a=da+2a(\omega_1^1-\omega_3^3)$ и $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ сохраняют значения (12ε) п. 46.

Нам надо доказать, что для всякой сопряженной пары можно выбрать такие значения ρ и σ, которые обращают систему (c) в тождества.

Внося в уравнения (c) значения $\Delta\beta=\alpha\beta_1\omega_1^3+\gamma\beta_2\omega_2^4$ по формуле (12ζ) п. 46 и $\Delta a-a\,\Delta\alpha=a\,\Delta t=a(\beta_1\omega_2^4-\beta_2\omega_1^3)$ по формулам (21), (22β) п. 48, получим:

$$\left.\begin{aligned} \alpha\beta_1\omega_1^3+\gamma\beta_2\omega_2^4 &= -\beta\sigma\omega_1^3-\rho\gamma\omega_2^4,\\ -\beta_2\omega_1^3+\beta_1\omega_2^4 &= \rho\omega_1^3-\sigma\frac{\beta}{\alpha}\,\omega_2^4,\end{aligned}\right\} \tag{c'}$$

откуда следует очевидное решение

$$\rho=-\beta_2,\qquad \sigma=-\beta_1\frac{\alpha}{\beta},$$

удовлетворяющее обоим уравнениям (c′).

Отсюда следует, что преобразование Лапласа, примененное к конгруэнции $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$ или $(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4)$, дает конгруэнции $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_1')$ или $(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_3')$, которые образуют сопряженную расслояемую пару. Тем самым каждая из этих конгруэнций есть конгруэнция W, а поскольку исходные конгруэнции $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$ и $(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4)$ были тоже конгруэнциями W, то (по определению) все четыре конгруэнции являются конгруэнциями R.

53. Расслояющие поверхности сопряженной пары. Теорема п. 52 может быть доказана непосредственным построением расслояющих поверхностей преобразованной пары.

Мы докажем более общую теорему:

Если преобразования Лапласа конгруэнций расслояемой пары образуют новую расслояемую пару, то обе пары сопряженные.

Пусть $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$, $(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4)$ — произвольная расслояемая пара и точка

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}_3+\beta\boldsymbol{A}_2+\mu\beta\boldsymbol{A}_1$$

некоторая точка прямой $(\boldsymbol{A}_1,\ \boldsymbol{A}_3+\beta\boldsymbol{A}_2)$, являющейся преобразованием Лапласа луча $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2$. Если она описывает поверхность $(\boldsymbol{P})$, которая расслояет пару, образованную преобразованиями Лапласа от конгруэнций $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$, $(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4)$, то касательная плоскость этой поверхности проходит через луч $(\boldsymbol{A}_3 d\boldsymbol{A}_3)$, где

$$d\boldsymbol{A}_3-\omega_3^3\boldsymbol{A}_3\equiv\omega_3^1\boldsymbol{A}_1+\omega_3^4\boldsymbol{A}_4\pmod{\omega_4^2},$$

ибо $\omega_4^2=0$ определяет направление $\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{A}_3$ на поверхности $(\boldsymbol{A}_4)$, следовательно, определяет направление, сопряженное лучу $\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4$ на поверхности $(\boldsymbol{A}_3)$. Пользуясь для вычисления ω_3^1, ω_3^4 формулами (2α, β) п. 39 и внося туда $\dfrac{\omega_1^3}{c}=\dfrac{\omega_2^4}{b}$ согласно уравнению $\omega_4^2=-b\omega_1^3+c\omega_2^4=0$, получим аналитическую прямую $(\boldsymbol{A}_3,\ (ac+b^2)\boldsymbol{A}_1+(c\alpha-b\beta)\boldsymbol{A}_4)$, откуда уравнение для определения расслояющей поверхности $(\boldsymbol{P})$

7 Зак. 1277. С. П. Фиников

напишется:

$$(d\boldsymbol{P},\ \boldsymbol{P},\ \boldsymbol{A}_3,\ (ac+b^2)\boldsymbol{A}_1+(c\alpha-b\beta)\boldsymbol{A}_4)=0$$

или

$$(d\boldsymbol{A}_3+\beta d\boldsymbol{A}_2+\mu\beta d\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_1\beta d\mu,$$
$$\beta\boldsymbol{A}_2+\beta\mu\boldsymbol{A}_1,\ \boldsymbol{A}_3,\ (ac+b^2)\boldsymbol{A}_1+(c\alpha-b\beta)\boldsymbol{A}_4)=0,$$

или

$$d\mu+\omega_2^1+\mu(\omega_1^1-\omega_2^2)-\mu^2\omega_1^2=\frac{b}{\beta}\,\frac{b\alpha+a\beta}{c\alpha-b\beta}\,\omega_1^3-\frac{b}{\beta}\,\omega_2^4. \tag{4}$$

Уравнение (4) должно определять семейство ∞^1 поверхностей $(\boldsymbol{P})$, следовательно, должно быть вполне интегрируемо, а поэтому внешний дифференциал его должен равняться нулю при всяком μ. Отсюда, дифференцируя внешним образом и обращая в нуль коэффициенты при μ^2, μ и свободный член, получаем в силу уравнений (1α) п. 39 и (4) всего два уравнения:

$$\frac{b}{\beta}\left[\frac{b\alpha+a\beta}{c\alpha-b\beta}\ \omega_1^3-\omega_2^4,\ \omega_1^2\right]=0,$$

$$D\left\{\frac{b}{\beta}\left(\frac{b\alpha+a\beta}{c\alpha-b\beta}\ \omega_1^3-\omega_2^4\right)\right\}=\frac{b}{\beta}\left[\frac{b\alpha+a\beta}{c\alpha-b\beta}\ \omega_1^3-\omega_2^4,\ \omega_1^1-\omega_2^2\right],$$

где знак D означает внешнее дифференцирование.

Первое уравнение имеет только одно решение $b=0$, которое удовлетворяет и второму уравнению. Следовательно, пара сопряженная. Теперь первое преобразование Лапласа луча $\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4$ будет совпадать с прямой $(\boldsymbol{A}_3,\ a\boldsymbol{A}_1+\alpha\boldsymbol{A}_4)$. Точка этой прямой

$$\boldsymbol{Q}=\frac{a}{\alpha}\ \boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_4+\nu\boldsymbol{A}_3$$

описывает расслояющую поверхность, если

$$(d\boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{A}_4+\nu\boldsymbol{A}_3,\ \boldsymbol{A}_1,\ \boldsymbol{A}_3+\beta\boldsymbol{A}_2)=0.$$

В силу $b=0$ это уравнение принимает вид

$$d\nu+\omega_4^3+\nu(\omega_3^3-\omega_4^4)-\nu^2\omega_3^4=0. \tag{5}$$

Внешний дифференциал его равен нулю в силу (13α, β, γ) п. 48. Следовательно, существует и второе семейство расслояющих поверхностей и новая пара расслояема. Поскольку обратное преобразование Лапласа переводит ее в расслояемую пару, она должна быть тоже сопряженной. Таким образом, сопряженная пара после одновременного преобразования Лапласа ее конгруэнций остается сопряженной.

Теорема. *Две конгруэнции сопряженной пары порождают две последовательности Лапласа из конгруэнций R, где каждая пара соответствующих друг другу конгруэнций образует сопряженную пару.*

Эту совокупность сопряженных пар мы будем называть последовательностью сопряженных пар, порожденной исходной сопряженной парой.

Весьма интересно, что расслояющие поверхности пары при этом преобразовании пары тоже подвергаются преобразованию Лапласа относительно сопряженных сетей, высекаемых на них развертывающимися поверхностями конгруэнций.

54. Последовательности расслояющих поверхностей. Рассмотрим некоторую расслояющую поверхность $(\boldsymbol{M})$ конгруэнции $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$ и расслояющую поверхность $(\boldsymbol{P})$ конгруэнции $(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{A}_3+\beta\boldsymbol{A}_2)$, определяемые формулами

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}_1+\rho\boldsymbol{A}_2,\qquad \boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}_3+\beta(\boldsymbol{A}_2+\mu\boldsymbol{A}_1).$$

Пользуясь дифференциальными уравнениями (3) п. 30 и (4) п. 53 для дифференциалов $d\rho$, $d\mu$ и уравнениями ($12a$, β, γ), (13α, β, γ) п. 46, получим сравнения

$$d\boldsymbol{M}\equiv\boldsymbol{M}(\omega_1^1+\rho\omega_2^1)+\boldsymbol{A}_3\omega_1^3\qquad(\mathrm{mod}\ \omega_2^4),$$

$$d\boldsymbol{P}\equiv\boldsymbol{P}\omega_3^3+(\boldsymbol{A}_2+\mu\boldsymbol{A}_1)(\gamma\beta_2+\mu\beta\gamma)\,\omega_2^4\qquad(\mathrm{mod}\ \omega_1^3).$$

Отсюда вытекает, что прямые

$$(\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}_3)=(\boldsymbol{A}_1+\rho\boldsymbol{A}_2,\ \boldsymbol{A}_3)\quad\text{и}\quad(\boldsymbol{P},\ \boldsymbol{A}_2+\mu\boldsymbol{A}_1)=(\boldsymbol{A}_3,\ \boldsymbol{A}_2+\mu\boldsymbol{A}_1)$$

суть касательные к линиям $\omega_2^4=0$ на поверхности $(\boldsymbol{M})$ и $\omega_1^3=0$ на поверхности $(\boldsymbol{P})$. Эти прямые совпадают, если

$$\mu=\frac{1}{\rho}.$$

Следовательно, поверхности, описанные точками $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}_1+\rho\boldsymbol{A}_2$ и $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}_3+\beta\boldsymbol{A}_2+\frac{\beta}{\rho}\ \boldsymbol{A}_1$, служат фокальными поверхностями конгруэнции прямых $\boldsymbol{MP}$, и поверхность $(\boldsymbol{P})$ является преобразованием Лапласа поверхности $(\boldsymbol{M})$ относительно сопряженной системы линий $\omega_1^3=0$, $\omega_2^4=0$. Аналогично для точек

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{A}_3+\sigma\boldsymbol{A}_4,\qquad \boldsymbol{Q}=\frac{a}{\alpha}\ \boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_4+\nu\boldsymbol{A}_3$$

в силу уравнения

$$d\sigma+\omega_3^4+\sigma(\omega_4^4-\omega_3^3)-\sigma^2\omega_4^3=0, \tag{6}$$

которое строится подобно уравнению (3) п. 30, а также в силу формул (1α), (2α, β) п. 39 и (21), (22β) п. 48 имеем сравнения

$$d\boldsymbol{N}\equiv\boldsymbol{N}(\omega_3^3+\sigma\omega_4^3)+a\boldsymbol{A}_1\omega_1^3\qquad(\mathrm{mod}\ \omega_2^4),$$

$$d\boldsymbol{Q}\equiv\boldsymbol{Q}(\omega_4^4+\nu\omega_3^4)+\frac{a}{\alpha}\ (\beta_1+\nu\beta)\,\boldsymbol{A}_1\omega_2^4\qquad(\mathrm{mod}\ \omega_1^3),$$

откуда прямые

$$(NA_1)=(A_3+\sigma A_4,\ A_1),$$

$$(QA_1)=(A_4+\nu A_3,\ A_1)$$

служат касательными линии $\omega_2^4=0$ на поверхности (N) и линии $\omega_1^3=0$ на поверхности (Q). Касательные совпадают, и прямая NQ описывает конгруэнцию с фокальными поверхностями (N), (Q), каждая из которых служит преобразованием Лапласа от другой, если

$$\nu=\frac{1}{\sigma}.$$

Таким образом, при любом выборе решений ρ и σ уравнений (3) п. 30, (6) конгруэнции (MP) и (NQ) соответствуют развертывающимися поверхностями $\omega_1^3=0$ и $\omega_2^4=0$. Вместе с тем касательная плоскость MA_3A_4 поверхности (M) содержит фокус N второго луча, а касательная плоскость NA_1A_2 содержит фокус M первого и, аналогично, прямая PQ касается обеих поверхностей (P) и (Q). Следовательно, конгруэнции (MP) и (NQ) образуют пару T, а поскольку развертывающиеся поверхности соответствуют прямо — сопряженную пару. Имеем теоремы:

Теорема I. *Расслояющие поверхности сопряженной пары суть поверхности R, сети R на них высекаются развертывающимися поверхностями пары.*

Теорема II. *Преобразование Лапласа обеих конгруэнций сопряженной пары относительно фокальных сетей преобразуют сопряженную пару в сопряженную пару, причем расслояющие поверхности новой пары получаются преобразованием Лапласа расслояющих поверхностей исходной пары относительно их сетей.*

Следствие. *Расслояющие поверхности сопряженной пары порождают два семейства последовательностей Лапласа из конгруэнций R, которые вписаны в первую и вторую последовательности конгруэнций этой пары и имеют фокальными поверхностями расслояющие поверхности сопряженных пар последовательности.*

Теорема III. *Каждая последовательность первого семейства с любой последовательностью второго семейства образует последовательность сопряженных пар.*

Теорема IV. *Соответствующие лучи конгруэнций одного семейства последовательностей проходят через фокус второй конгруэнции исходной сопряженной пары.*

Так, прямая MP проходит через точку A_3, прямая QN — через точку A_1.

Отсюда:

Следствие I. *Каждое семейство последовательностей, вписанных в одну из последовательностей конгруэнций, порожденных исходной сопряженной парой, описано около другой.*

Так, последовательность (MP) вписана в последовательность (A_1A_2) и описана около последовательности (A_3A_4).

Следствие II. *Фокальные поверхности последовательности сопряженных пар сами служат расслояющими поверхностями для сопряженных пар, образованных ее расслояющими поверхностями.*

ГЛАВА V

ПРОЕКТИВНОЕ ИЗГИБАНИЕ СОПРЯЖЕННОЙ ПАРЫ

55. Изгибание в проективном пространстве. В п. 52 мы упомянули два определения конгруэнций R: конгруэнции последовательности Лапласа, состоящей из конгруэнций W, и конгруэнции, допускающие проективное изгибание совместно со своими фокальными поверхностями. Мы хотим теперь остановиться на втором определении и показать, какой вид оно принимает для сопряженных пар. Для этого нам придется, не входя в подробности, напомнить некоторые факты из теории изгибания в проективном пространстве.

Мы будем говорить только о классическом изгибании Фубини — Картана.

Рассмотрим в проективном пространстве P_n многообразие $\mathfrak{M}(\xi)$ элементов ξ (точек, прямых, тетраэдров и т. д.); каждый элемент ξ определяется в пространстве P_n координатами $\xi^\alpha (\alpha = 1, \ldots, m)$, а на многообразии «криволинейными» координатами $u^\lambda (\lambda = 1, \ldots, p)$.

Если даны два многообразия $\mathfrak{M}(\xi)$ и $\mathfrak{N}(\eta)$ одной размерности p из элементов одной и той же природы, то взаимно однозначное соответствие $\mathfrak{H}(\xi \rightleftarrows \eta)$ в рассматриваемой области может быть определено посредством отнесения к одной и той же системе криволинейных координат (u^λ). При этом условии *аналитическое касание* m-го порядка относительно соответствия $\mathfrak{H}(u^\lambda)$ может быть определено следующим способом.

Определение 1. Два многообразия $\mathfrak{M}(\xi)$ и $\mathfrak{N}(\eta)$, отнесенных к общим криволинейным координатам u^λ $(\lambda = 1, \ldots, p)$, имеют в соответствии $\mathfrak{H}(u^\lambda)$ касание m-го порядка, если пара соответствующих элементов $\xi(\underset{0}{u}{}^\lambda)$, $\eta(\underset{0}{u}{}^\lambda)$ совпадает, т. е. равны попарно их координаты $\underset{0}{\xi}{}^\alpha = \underset{0}{\eta}{}^\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$, а в достаточно малых окрестностях этих элементов $(\underset{0}{\xi})$, $(\underset{0}{\eta})$ разность координат $\xi^\alpha - \eta^\alpha$ соответствующих элементов $\xi(u^\lambda)$, $\eta(u^\lambda)$ будет бесконечно малой порядка $(du^\lambda)^{m+1}$, где $du^\lambda = u^\lambda - \underset{0}{u}{}^\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots, p)$.

Теперь проективное изгибание Фубини — Картана получает такое определение.

Определение 2. Многообразия $\mathfrak{M}(\xi)$ и $\mathfrak{N}(\eta)$ одной размерности с элементами одной природы называются *проективно наложимыми порядка* m, если можно установить взаимно однозначное соответствие $\mathfrak{H}(u^\lambda)$ между элементами $\xi(u^\lambda)$ и $\eta(u^\lambda)$ и каждой паре соответствующих элементов (ξ, η) присоединить проективное преобразование пространства Π_u, которое переводит многообразие $\mathfrak{N}$ в многообразие $\overline{\mathfrak{N}} = \Pi_u \mathfrak{N}$, так что элемент $\overline{\eta} = \Pi_u \eta$ совпадает с элементом ξ и многообразия $\mathfrak{M}$ и $\overline{\mathfrak{N}}$ будут иметь аналитическое касание порядка m относительно соответствия $\mathfrak{H}(u^\lambda)$.

Для поверхностей и конгруэнций в P_3 не тривиально только изгибание 2-го порядка: любая пара поверхностей или пара конгруэнций проективно наложимы 1-го порядка при подходящем выборе проективных преобразований Π_u; с другой стороны, проективно наложимые 3-го порядка поверхности или конгруэнции проективно эквивалентны, т. е. проективные преобразования Π_u приводят к совпадению все элементы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Поэтому под проективным изгибанием подразумевается изгибание 2-го порядка.

Проективные изгибания допускают только поверхности класса R или класса R_0.

Чтобы выяснить разницу между этими двумя классами, надо определить понятие *основания изгибания*.

Если поверхности $\mathfrak{M}(\xi)$ и $\mathfrak{N}(\eta)$ проективно наложимы 2-го порядка, то по определению преобразование Π_u переводит $\mathfrak{N}(\eta)$ в $\overline{\mathfrak{N}}(\overline{\eta}) = \Pi_u \mathfrak{N}(\eta)$, так что

$$\begin{gathered} \overline{\eta}^\alpha(u) - \xi^\alpha(u) = 0, \\ \overline{\eta}^\alpha(u + du) - \xi^\alpha(u + du) = O((du^\lambda)^3) \end{gathered} \tag{1}$$

для всех значений отношений $du^\lambda (\lambda = 1, 2)$. Но при подходящем выборе отношения $q = du^1 : du^2$ порядок малости может быть повышен до $(du^\lambda)^4$. Таких значений всего четыре: два из них всегда соответствуют двум асимптотическим направлениям (одновременно на поверхности $\mathfrak{M}$ и на поверхности $\mathfrak{N}$); два других определяют пару сопряженных направлений (на $\mathfrak{M}$ и на $\mathfrak{N}$).

Если эти направления различны (в рассматриваемой области), то они определяют сопряженную сеть линий, которая называется *основанием изгибания*. Основание изгибания всегда образует сеть R (п. 52), т. е. обе конгруэнции касательных к линиям сети являются конгруэнциями W. Тем самым изгибаемые поверхности принадлежат классу поверхностей R.

Если же пара сопряженных направлений повышенного порядка касания $\mathfrak{M}$ и $\overline{\mathfrak{N}}$ совпадает, то они выделяют одно асимптотическое направление и одно семейство асимптотических линий (на $\mathfrak{M}$ и на $\mathfrak{N}$). Это семейство асимптотических образует основание изгибания; его можно назвать семейством асимптотических R_0, а поверхности — поверхностями R_0.

При изгибании (проективном) поверхности R изгибаются одновременно обе ее конгруэнции R, при изгибании поверхности R_0 изгибается ее параболическая конгруэнция R_0 (конгруэнция касательных к асимптотическим линиям R_0).

Кроме конгруэнций R проективное изгибание допускает довольно широкий класс изгибаемых конгруэнций, произвол которых зависит от одной функции двух аргументов. Этот класс конгруэнций недостаточно хорошо изучен; известно только, что на всякой поверхности можно построить с произволом семи функций одного аргумента семейство линий, касательные к которым образуют изгибаемую конгруэнцию.

56. Проективное изгибание одной конгруэнции сопряженной пары. Рассмотрим произвольную сопряженную пару, определяемую системой (12α, γ, ζ), (13α) п. 46, (17′), (19), (20δ), (22γ), (23) п. 48, и допустим, что поверхность (A_1) и конгруэнция (A_1A_2) сопряженной пары проективно наложимы (2-го порядка) на поверхность $(\boldsymbol{B}_1)$ и конгруэнцию $(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2)$. Выберем репер $\{\boldsymbol{B}_i\}$ так, чтобы проективное преобразование Π, присоединенное к паре элементов $\xi=(A_1;\ A_1A_2)$ и $\eta=(\boldsymbol{B}_1;\ \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2)$, переводило репер $\{\boldsymbol{B}_i\}$ в репер $\{\overline{\boldsymbol{B}}_i\}$, совпадающий с репером $\{A_i\}$:

$$\overline{\boldsymbol{B}}_i=\boldsymbol{A}_i. \tag{a}$$

Ввиду того, что мы пользуемся однородными координатами, условия совпадения элементов ξ и η, которые мы писали в форме (1), теперь должны писаться с точностью до произвольного скалярного множителя

$$\begin{gathered}\left(\boldsymbol{A}_1+d\boldsymbol{A}_1+\frac{1}{2}d^2\boldsymbol{A}_1\right)\left(\theta_0+\theta_1+\frac{1}{2}\theta_2\right)-\\ -\left(\overline{\boldsymbol{B}}_1+d\overline{\boldsymbol{B}}_1+\frac{1}{2}d^2\overline{\boldsymbol{B}}_1\right)=O((\omega_i^k)^3),\\ \left([12]+d[12]+\frac{1}{2}d^2[12]\right)\left(\varphi_0+\varphi_1+\frac{1}{2}\varphi_2\right)-\\ -\left([\overline{12}]+d[\overline{12}]+\frac{1}{2}d^2[\overline{12}]\right)=O((\omega_i^k)^3),\end{gathered} \tag{2α}$$

где

$$[ik]=(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_k),\quad [\overline{ik}]=(\overline{\boldsymbol{B}}_i\overline{\boldsymbol{B}}_k), \tag{b}$$

θ_i, φ_i — произвольные скалярные множители и индекс i — порядок малости такого множителя относительно ω_i^k.

Подсчитывая дифференциалы, получим:

$$\begin{gathered}d\overline{\boldsymbol{B}}_1=\overline{\boldsymbol{B}}_i\Omega_1^i,\quad d^2\overline{\boldsymbol{B}}_1=\overline{\boldsymbol{B}}_i\Delta\Omega_1^i,\quad \Delta\Omega_1^i=d\Omega_1^i+\Omega_1^j\Omega_j^i,\\ d[\overline{12}]=(\Omega_1^1+\Omega_2^2)[\overline{12}]+\Omega_2^4[\overline{14}]-\Omega_1^3[\overline{23}]+\Omega_2^3[\overline{13}]+\Omega_1^4[\overline{42}],\end{gathered} \tag{2β}$$

где Ω_i^k суть компоненты проективных перемещений тетраэдра $\{\boldsymbol{B}_i\}$, а следовательно, и тетраэдра $\{\overline{\boldsymbol{B}}_i\}$, ибо последний получается из первого проективным преобразованием пространства Π, не меняющим компонент инфинитезимальных преобразований.

Сравнивая коэффициенты при $\boldsymbol{A}_i$, $[ik]$ в уравнениях, получаемых из равенств (2α) сравнением бесконечно малых одного порядка,

$$\begin{gathered}\overline{\boldsymbol{B}}_1=\theta_0\boldsymbol{A}_1,\quad d\overline{\boldsymbol{B}}_1=\theta_0 d\boldsymbol{A}_1+\theta_1\boldsymbol{A}_1,\\ d^2\overline{\boldsymbol{B}}_1=\theta_0 d^2\boldsymbol{A}_1+2\theta_1 d\boldsymbol{A}_1+\theta_2\boldsymbol{A}_1,\end{gathered} \tag{3α}$$

$$[\overline{12}]=\varphi_0[12],\quad d[\overline{12}]=\varphi_0 d[12]+\varphi_1[12], \tag{3β}$$

$$d^2[\overline{12}]=\varphi_0 d^2[12]+2\varphi_1 d[12]+\varphi_2[12], \tag{3γ}$$

после подстановки значений (a) и (b) получим, внося значения (2β) в уравнения (3α, β),

$$\begin{gathered}\tilde\omega_1^2=0,\quad \tilde\omega_1^3=0,\quad \Omega_1^4=0;\\ \theta_0=1,\quad \theta_1=\tilde\omega_1^1,\quad \theta_2=\Delta\Omega_1^1-\Delta\omega_1^1-2\theta_1\omega_1^1;\end{gathered} \tag{4α}$$

$$\Delta\Omega_1^2-\Delta\omega_1^2=2\theta_1\omega_1^2,\quad \Delta\Omega_1^3-\Delta\omega_1^3=2\theta_1\omega_1^3,\quad \omega_1^2\tilde\omega_2^4+\omega_1^3\tilde\omega_3^4=0; \tag{4β}$$

$$\Omega_2^3=0,\quad \tilde\omega_2^4=0;\quad \varphi_0=1,\quad \varphi_1=(\tilde\omega_1^1+\tilde\omega_2^2), \tag{4γ}$$

где

$$\tilde\omega_i^k=\Omega_i^k-\omega_i^k. \tag{4δ}$$

Второе уравнение (4γ) и третье (4β) дают

$$\tilde\omega_3^4=0, \tag{4ε}$$

а первые два (4β) и внешние дифференциалы *) первых двух (4α), в силу следствия 1 леммы Картана (п. 12), дают

$$\tilde\omega_1^1=\tilde\omega_2^2=\tilde\omega_3^3;\quad \tilde\omega_3^2=0. \tag{4ζ}$$

Наконец, внешнее дифференцирование второго (4γ) и (4ε) приводит к равенству

$$\tilde\omega_1^1=\tilde\omega_4^4.$$

Если выбрать нормирование вершин так, чтобы произведение $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4)$ равнялось единице и сумма четырех форм ω_i^i равнялась нулю, то в силу $\overline{\boldsymbol{B}}_i=\boldsymbol{A}_i$ получаем

$$\tilde\omega_1^1=\tilde\omega_2^2=\tilde\omega_3^3=\tilde\omega_4^4=0. \tag{4η}$$

*) Дифференцирование законно, ибо, хотя уравнения (4α) получены после проективного преобразования Π_u, присоединенного к элементу (u^λ), но все рассуждения сохраняют силу для любого элемента (u^λ) и уравнения (4α) справедливы на всей сопряженной паре.

Условие (3γ) после подсчета $d^2[\overline{12}]$ при наличии $(4\alpha - \eta)$ дает только одно новое условие

$$\omega_1^3\tilde{\omega}_2^1 - \omega_2^4\tilde{\omega}_4^3 = 0,$$

откуда, сравнивая с внешним дифференциалом $\tilde{\omega}_2^3 = 0$ и пользуясь следствием 1 леммы Картана (п. 12), получаем:

$$\tilde{\omega}_2^1 = \tilde{\omega}_4^3 = 0. \tag{4θ}$$

Наконец, дифференцируя внешним образом уравнения (4θ), получим:

$$[\omega_2^4\tilde{\omega}_4^1] = 0, \quad [\tilde{\omega}_4^1\omega_1^3] = 0,$$

откуда

$$\tilde{\omega}_4^1 = 0. \tag{4ι}$$

Таким образом, конгруэнция $(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2)$, проективно налагающаяся на конгруэнцию $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$ сопряженной пары, определяется

$$\begin{gathered}\tilde{\omega}_1^2 = \tilde{\omega}_1^3 = \tilde{\omega}_1^4 = \tilde{\omega}_2^1 = \tilde{\omega}_2^3 = \tilde{\omega}_2^4 = \tilde{\omega}_3^2 = \tilde{\omega}_3^4 = \tilde{\omega}_4^1 = \tilde{\omega}_4^3 = 0,\\ \tilde{\omega}_1^1 = \tilde{\omega}_2^2 = \tilde{\omega}_3^3 = \tilde{\omega}_4^4 = 0,\end{gathered} \tag{5α}$$

к которым надо присоединить систему внешних дифференциалов

$$[\tilde{\omega}_3^1\omega_1^3] = 0, \quad [\tilde{\omega}_4^2\omega_2^4] = 0, \quad [\tilde{\omega}_3^1\omega_1^2] + [\omega_3^4\tilde{\omega}_4^2] = 0. \tag{5β}$$

Развертывая по лемме Картана и пользуясь формулами (12γ) п. 46, $(17')$ п. 48, получим:

$$\tilde{\omega}_3^1 = \mu\alpha\omega_1^3, \quad \tilde{\omega}_4^2 = -\mu\gamma\omega_2^4, \tag{5γ}$$

откуда, так же как в п. 48,

$$[\Delta\mu + \Delta\alpha, \ \omega_1^3] = 0, \quad [\Delta\mu + \Delta\gamma, \ \omega_2^4] = 0, \tag{5δ}$$

где

$$\Delta\mu = d\ln\mu + \omega_1^1 - \omega_4^4;$$

следовательно,

$$\Delta\mu = \beta_1\omega_2^4 - \beta_2\omega_1^3, \tag{6}$$

и это уравнение вполне интегрируемо в силу (22γ) п. 48.

Заметим, что только одно произвольное постоянное, получаемое при интегрировании уравнения (6), существенно. Все остальные получаются при интегрировании системы $(5\alpha, \gamma)$ и дают семейство проективно эквивалентных конгруэнций (ибо сохраняют те же компоненты ω_i^k).

57. Построение сопряженных пар проективным изгибанием конгруэнции $\boldsymbol{R}$. Как видно из уравнений $(5\alpha, \gamma)$, семейство тетраэдров $\{\boldsymbol{A}_i\}$ определяет не только проективно налагаемую на $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$ конгруэнцию, но и вторую сопряженную пару $(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2)$, $(\boldsymbol{B}_3\boldsymbol{B}_4)$.

Можно сказать, что при проективном изгибании одной конгруэнции сопряженной пары эта пара остается сопряженной и только коэффициент t в уравнениях $(19')$ п. 48 получает произвольный постоянный множитель.

Если этот произвольный постоянный множитель стремится к нулю, то сопряженная пара при изгибании своей первой конгруэнции $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$ придет к вырождению

$$\omega_3^1 = 0, \quad \omega_4^2 = 0.$$

При этом в силу (13α) п. 46 дифференциал луча

$$d[34] = (\omega_3^3 + \omega_4^4)[34] + \omega_3^1[14] + \omega_3^2[24] - \omega_4^2[23] - \omega_4^1[13]$$

станет пропорционален самому лучу [34] и луч $\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4$ станет неподвижным.

Обратно, если присоединить к конгруэнции R произвольную прямую и построить реперы 1-го порядка, содержащие в каждом тетраэдре одну и ту же неподвижную прямую $\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4$, то после проективного изгибания конгруэнции $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$ в конгруэнцию $(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2)$ тетраэдры $\{\boldsymbol{B}_i\}$ новой конгруэнции будут иметь различные ребра $\boldsymbol{B}_3\boldsymbol{B}_4$ и конгруэнция $(\boldsymbol{B}_3\boldsymbol{B}_4)$ вместе с конгруэнцией $(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2)$ образуют сопряженную пару. При произвольном выборе прямой A_3A_4 ее положение и нормирование будут зависеть от пяти независимых параметров.

После изгибания мы получим с пятью произвольными параметрами конгруэнцию $(\boldsymbol{B}_3\boldsymbol{B}_4)$, составляющую сопряженную пару с одной и той же конгруэнцией $(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2)$, принадлежащей классу R.

Как известно, именно таким образом можно определить наиболее общее асимптотическое преобразование поверхности $(\boldsymbol{B}_1)$ класса R в поверхность $(\boldsymbol{B}_3)$ класса R при помощи конгруэнции W, которая устанавливает на фокальных поверхностях $(\boldsymbol{B}_1)$ и $(\boldsymbol{B}_3)$ соответствие не только асимптотических линий, но и сетей R (преобразование Йонаса). Поэтому наиболее общую сопряженную пару можно построить, если взять произвольную поверхность R и ее (наиболее общее) преобразование Йонаса и рассмотреть пару одноименных (в одну сторону сети R) конгруэнций касательных к линиям сети R.

58. Изгибание 1-го порядка пары конгруэнций. Рассмотрим теперь изгибание двумерного многообразия $\mathfrak{M}(\xi)$, где элементом ξ является пара прямых $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4$, а все многообразие представляет расслояемую пару конгруэнций. Допустим, что многообразие $\mathfrak{N}(\eta)$, где элемент η есть пара прямых $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3\boldsymbol{B}_4$, а многообразие — совокупность двух конгруэнций, проективно налагается изгибанием 1-го порядка на пару $\mathfrak{M}(\xi)$.

Условия наложимости (2α) п. 56 теперь напишутся в виде равенств

$$([12] + d[12])(\theta_0 + \theta_1) - ([\overline{12}] + d[\overline{12}]) = O((\omega_i^k)^2),$$
$$([34] + d[34])(\varphi_0 + \varphi_1) - ([\overline{34}] + d[\overline{34}]) = O((\omega_i^k)^2),$$

откуда следуют

$$[\overline{12}]=\theta_0[12], \quad d[\overline{12}]=\theta_0 d[12]+\theta_1[12], \tag{7α}$$

$$[\overline{34}]=\varphi_0[34], \quad d[\overline{34}]=\varphi_0 d[34]+\varphi_1[34]. \tag{7β}$$

Здесь, как и выше,

$$[ik]=(A_iA_k), \quad [\overline{ik}]=(\overline{B}_i\overline{B}_k),$$

точки $\overline{B}_i$ суть проективные преобразования вершин тетраэдра $\{B_i\}$ проективным преобразованием Π^0, присоединенным к паре соответствующих реперов $\{A_i\}^0$, $\{B_i\}^0$, причем по построению репера $\{B_i\}$ вершины $\overline{B}{}_i^0$ репера, полученного преобразованием Π^0 репера $\{B_i\}^0$, совпадают с вершинами $\{A_i\}^0$.

Сохраняя обозначения п. 56, мы получим после подстановки формул (2β) и аналогичных для $d[\overline{34}]$ в уравнения (7α, β) и сравнения коэффициентов при независимых ребрах $[ik]$ следующий ряд равенств:

$$\theta_0=\varphi_0=1, \quad \theta_1=\tilde{\omega}_1^1+\tilde{\omega}_2^2, \quad \varphi_1=\tilde{\omega}_3^3+\tilde{\omega}_4^4; \tag{8α}$$

$$\Omega_1^4=\Omega_2^3=0, \quad \tilde{\omega}_1^3=0, \quad \tilde{\omega}_2^4=0; \tag{8β}$$

$$\tilde{\omega}_3^1=0, \quad \tilde{\omega}_4^2=0, \quad \Omega_3^2=0, \quad \Omega_4^1=0. \tag{8γ}$$

Отсюда прямо следует в силу двух первых уравнений (8β) и двух последних (8γ), что многообразие $\mathfrak{R}(\eta)$ представляет пару T конгруэнций.

Внешние дифференциалы уравнений (8β, γ) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &[\omega_1^3,\ \tilde{\omega}_1^1-\tilde{\omega}_3^3]=0, \qquad [\omega_2^4,\ \tilde{\omega}_2^2-\tilde{\omega}_4^4]=0,\\ &[\omega_3^1,\ \tilde{\omega}_1^1-\tilde{\omega}_3^3]=0, \qquad [\omega_4^2,\ \tilde{\omega}_2^2-\tilde{\omega}_4^4]=0, \end{aligned}\right\} \tag{9α}$$

$$[\tilde{\omega}_1^2\omega_2^4]+[\omega_1^3\tilde{\omega}_3^4]=0, \qquad [\tilde{\omega}_2^1\omega_1^3]+[\omega_2^4\tilde{\omega}_4^3]=0, \tag{9β}$$

$$[\tilde{\omega}_1^2\omega_3^1]+[\omega_4^2\tilde{\omega}_3^4]=0, \qquad [\tilde{\omega}_2^1\omega_4^2]+[\omega_3^1\tilde{\omega}_4^3]=0. \tag{9γ}$$

Если расслояемая пара $\{A_i\}$ — не сопряженная $b\neq 0$, то $[\omega_1^3\omega_3^1]\neq 0$, $[\omega_2^4\omega_4^2]\neq 0$ и уравнения (9α) имеют следствием два пфаффовых уравнения:

$$\tilde{\omega}_1^1-\tilde{\omega}_3^3=0, \quad \tilde{\omega}_2^2-\tilde{\omega}_4^4=0; \tag{10α}$$

их внешние дифференциалы дают одно квадратичное уравнение

$$[\tilde{\omega}_1^2\tilde{\omega}_2^1]+[\tilde{\omega}_1^2\omega_2^1]+[\omega_1^2\tilde{\omega}_2^1]+[\tilde{\omega}_4^3\tilde{\omega}_3^4]+[\tilde{\omega}_4^3\omega_3^4]+[\omega_4^3\tilde{\omega}_3^4]=0. \tag{10β}$$

59. Проективное изгибание расслояемой пары. В силу уравнений (8β, γ) и (9β, γ), если пара $\{A_i\}$ — расслояемая и уравнения (1β — δ) п. 39

$$[\omega_1^2\omega_2^4]-[\omega_3^4\omega_1^3]=0, \qquad [\omega_2^1\omega_1^3]-[\omega_4^3\omega_2^4]=0,$$

$$[\omega_3^1\omega_1^3]-[\omega_4^2\omega_2^4]=0, \tag{11α}$$

$$[\omega_3^1\omega_1^2]+[\omega_3^4\omega_4^2]=0, \qquad [\omega_4^2\omega_2^1]+[\omega_4^3\omega_3^1]=0 \tag{11β}$$

удовлетворены, то они будут удовлетворены и для компонент Ω_i^k и пара $\{B_i\}$ будет тоже расслояемой.

На расслояемую пару (A) может проективно налагаться изгибанием первого порядка только расслояемая пара (B), но не всякая расслояемая пара (A) допускает проективное изгибание 1-го порядка. Чтобы определить изгибаемые расслояемые пары (A) (вместе с их изгибаниями (B)), надо рассмотреть замкнутую систему (12α, β), (13α) п. 46, (8β, γ), (9β, γ), (10α, β), (11α, β).

Характеристическая система, кроме форм (12α), (13α) п. 46, (8β, γ), (10α) и форм ω_1^3, ω_2^4, независимых на интегральном многообразии, содержит $q=10$ форм:

$$\omega_1^2,\ \omega_2^1,\ \omega_3^4,\ \omega_4^3,\ \omega_3^1,\ \omega_4^2,\ \tilde{\omega}_1^2,\ \tilde{\omega}_2^1,\ \tilde{\omega}_3^4,\ \tilde{\omega}_4^3, \tag{a}$$

на десять независимых квадратичных уравнений (12β) п. 46, (9β, γ), (10β), (11α, β) системы.

Система внешних квадратичных уравнений (9β, γ), (10β), (11β) неправильная.

Наиболее общий интегральный элемент $\mathfrak{E}_2$ определяется уравнениями (2α, β) п. 39 и такими же уравнениями для форм $\tilde{\omega}_1^2$, $\tilde{\omega}_2^1$, $\tilde{\omega}_3^4$, $\tilde{\omega}_4^3$ с титлованными коэффициентами $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha}'$ и т. д.

Двенадцать различных коэффициентов α, β, γ и три коэффициента a, b, c удовлетворяют пяти конечным уравнениям: четырем уравнениям (2γ) п. 39 с титлованными и нетитлованными коэффициентами α, β, γ и уравнению

$$\begin{aligned}(\tilde{\beta}+\beta)(\tilde{\beta}'+\beta')-(\tilde{\gamma}+\gamma)(\tilde{\gamma}'+\gamma')-(\tilde{\alpha}+\alpha)(\tilde{\alpha}'+\alpha')=\\ =2\beta\beta'-\alpha\alpha'-\gamma\gamma',\end{aligned} \tag{12α}$$

получаемому из квадратичного уравнения (10β) п. 58.

Поскольку одновременное обращение в нуль a, b, c приводит к вырождению вторых конгруэнций (A_3A_4), ранг системы четырех уравнений: уравнений (2γ) п. 39 и таких же уравнений для титлованных $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ относительно неизвестных a, b, c не выше 2.

Отсюда следует обращение в нуль определителей

$$\begin{vmatrix} \gamma & \beta & \alpha \\ \alpha' & -\beta' & \gamma' \\ \tilde{\gamma} & \tilde{\beta} & \tilde{\alpha} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \gamma & \beta & \alpha \\ \alpha' & -\beta' & \gamma' \\ \tilde{\alpha}' & -\tilde{\beta}' & \tilde{\gamma}' \end{vmatrix} = 0$$

или с помощью обозначений (14α) п. 47

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}\xi + 2\tilde{\beta}\eta - \tilde{\alpha}\zeta = 0, \\ \tilde{\alpha}'\xi - 2\tilde{\beta}'\eta - \tilde{\gamma}'\zeta = 0. \end{aligned} \tag{12β}$$

Первый случай: $\eta \neq 0$; уравнения (12β) определяют $\tilde{\beta}$, $\tilde{\beta}'$:

$$\tilde{\beta} = \frac{\tilde{\alpha}\zeta - \tilde{\gamma}\xi}{2\eta}, \quad \tilde{\beta}' = \frac{\tilde{\alpha}'\xi - \tilde{\gamma}'\zeta}{2\eta}, \tag{12β'}$$

и уравнение (12α) определяет один из четырех параметров $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha}'$, $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\gamma}'$.

Интегральный элемент $\mathcal{E}_2$ зависит от шести параметров α, β, γ, α', β', γ'; трех $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\gamma}'$ и одного параметра t при определении ω_3^1, ω_4^2 по формулам (14β) п. 47, всего $N = 10$.

Полярная система элемента $\omega_1^3 = u$, $\omega_2^4 = v$

$$u\omega_3^4 = v\omega_1^2, \quad u\tilde{\omega}_3^4 = v\tilde{\omega}_1^2, \quad u\omega_3^1 = v\omega_4^2,$$

$$u\omega_2^1 = v\omega_4^3, \quad u\tilde{\omega}_2^1 = v\tilde{\omega}_4^3,$$

$$\begin{gathered}
(au + bv)\tilde{\omega}_1^2 - (-bu + cv)\tilde{\omega}_3^4 + \\
+ (\tilde{\alpha}u - \tilde{\beta}v)\omega_4^2 - (\tilde{\beta}u + \tilde{\gamma}v)\omega_3^1 = 0, \\
(au + bv)\tilde{\omega}_4^3 - (-bu + cv)\tilde{\omega}_2^1 + \\
+ (\beta'v + \gamma'u)\omega_1^2 - (\alpha'v - \beta'u)\omega_3^1 = 0, \\
(\alpha u - \beta v)\omega_4^2 - (\beta u + \gamma v)\omega_3^1 + \\
+ (au + bv)\omega_1^2 - (-bu + cv)\omega_3^4 = 0, \\
(\gamma'u + \beta'v)\omega_4^2 - (-\beta'u + \alpha'v)\omega_3^1 + \\
+ (au + bv)\omega_4^3 - (-bu + cv)\omega_2^1 = 0, \\
(\tilde{\gamma}'u + \tilde{\beta}'v)\tilde{\omega}_1^2 + (\tilde{\beta}'u - \tilde{\alpha}'v)\tilde{\omega}_3^4 + \\
+ (\tilde{\alpha}u - \tilde{\beta}v)\tilde{\omega}_4^3 - (\tilde{\beta}u + \tilde{\gamma}v)\tilde{\omega}_2^1 + (\gamma'u + \beta'v)\tilde{\omega}_1^2 + \\
+ (\beta'u - \alpha'v)\tilde{\omega}_3^4 + (\alpha u - \beta v)\tilde{\omega}_4^3 - (\beta u + \gamma v)\tilde{\omega}_2^1 + \\
+ (\tilde{\gamma}'u + \tilde{\beta}'v)\omega_1^2 + (\tilde{\beta}'u - \tilde{\alpha}'v)\omega_3^4 + \\
+ (\tilde{\alpha}u - \tilde{\beta}v)\omega_4^3 - (\tilde{\beta}u + \tilde{\gamma}v)\omega_2^1 = 0
\end{gathered} \tag{12γ}$$

имеет ранг $s_1 = 10$, если

$$(\tilde{\mathscr{A}} + \mathscr{A})(\tilde{\mathscr{A}} + \mathscr{A}') - \mathscr{A}\mathscr{A}' \neq 0, \tag{12δ}$$

где

$$\mathscr{A} = \alpha u^2 - 2\beta uv - \gamma v^2, \quad \tilde{\mathscr{A}} = \tilde{\alpha}u^2 - 2\tilde{\beta}uv - \tilde{\gamma}v^2 \tag{12δ'}$$

и штрихованные получаются обычной заменой u на v.

Поскольку $s_2 = q - s_1 = 0$, имеем $Q = s_1 + 2s_2 = 10$ и признак Картана удовлетворен. Интегральное многообразие $\mathfrak{M}_2$ существует с произволом $s_1 = 10$ функций одного аргумента. Отсюда теорема:

Существуют с произволом 10 функций одного аргумента расслояемые несопряженные пары, допускающие проективное изгибание 1-го порядка с сохранением расслояемости.

60. Проективное изгибаие сопряженной пары. *Второй случай* $\eta = 0$. Теперь пара $\{\boldsymbol{A}\}$ сопряженная. Следовательно, $[\omega_1^3\omega_3^1] = [\omega_1^2\omega_2^4] = 0$ и уравнения (9α, β) попарно совпадают. Внося значение $\omega_3^1 = a\omega_1^3$, $\omega_4^2 = c\omega_2^4$, мы приводим систему (9α, β) к виду

$$\begin{gathered}
[\omega_1^3, \tilde{\omega}_1^1 - \tilde{\omega}_3^3] = 0, \quad [\omega_2^4, \tilde{\omega}_2^2 - \tilde{\omega}_4^4] = 0, \\
[\tilde{\omega}_1^2\omega_2^4] + [\omega_1^3\tilde{\omega}_3^4] = 0, \quad [\tilde{\omega}_2^1\omega_1^3] + [\omega_2^4\tilde{\omega}_4^3] = 0, \\
a[\tilde{\omega}_1^2\omega_1^3] + c[\omega_2^4\tilde{\omega}_3^4] = 0, \quad c[\tilde{\omega}_2^1\omega_2^4] + a[\omega_1^3\tilde{\omega}_4^3] = 0.
\end{gathered} \tag{13}$$

Характеристическая система, кроме форм ω_1^3, ω_2^4 и форм (8β, γ), содержит $q = 6$ форм:

$$\tilde{\omega}_1^1 - \tilde{\omega}_3^3, \quad \tilde{\omega}_2^2 - \tilde{\omega}_4^4, \quad \tilde{\omega}_1^2, \quad \tilde{\omega}_2^1, \quad \tilde{\omega}_3^4, \quad \tilde{\omega}_4^3. \tag{a}$$

Система внешних уравнений правильная.

Определитель полярной матрицы элемента $\omega_1^3 = u$, $\omega_2^4 = v$ при произвольном выборе u, v отличен от нуля. Система — в инволюции (п. 18) с характерами $s_1 = 6$, $s_2 = 0$ и определяет проективные изгибания 1-го порядка произвольной сопряженной пары с шестью функциями одного аргумента.

Это — произвол наиболее общей сопряженной пары. Действительно, из уравнений (22α) п. 48 следует, что для инфинитезимальных преобразований стационарной подгруппы $\omega_1^3 = \omega_2^4 = 0$ имеем:

$$\Delta t + \Delta\alpha = 0, \quad \Delta t + \Delta\gamma = 0,$$

т. е., обозначая символ дифференцирования буквой δ,

$$\delta \ln(t\alpha) + 2(\pi_1^1 - \pi_3^3) = 0, \quad \delta \ln(t\gamma) + 2(\pi_2^2 - \pi_4^4) = 0.$$

Следовательно, выбором нормирования вершин $\{\boldsymbol{A}_i\}$ всегда можно привести

$$a = t\alpha = 1, \quad c = -t\gamma = 1, \tag{14α}$$

и тогда уравнения (19′) п. 48 примут вид

$$\omega_3^1 = \omega_1^3, \quad \omega_4^2 = \omega_2^4. \tag{14β}$$

Следовательно, уравнения (8β, γ) п. 58 будут удовлетворены для любых двух сопряженных пар. Что касается уравнений (9α), то уравнения (22α) п. 48 теперь для обеих конгруэнций принимают вид

$$[\omega_1^3, \ \omega_1^1 - \omega_3^3] = 0, \quad [\omega_2^4, \ \omega_2^2 - \omega_4^4] = 0,$$

откуда (9α) прямо следуют.

Теорема. *Сопряженная пара изгибанием 1-го порядка налагается на любую другую сопряженную пару.*

ГЛАВА VI

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ПАРЫ

61. Фокальные поверхности параболической пары. В пп. 34, 35 гл. II мы рассматривали расслояемую пару из двух параболических конгруэнций, которую мы коротко называли параболической парой. Две конгруэнции параболической пары образуют параболическую пару T, т. е. прямая, соединяющая соответствующие фокусы, касается обеих фокальных поверхностей. Более того, эта прямая описывает конгруэнцию W, причем асимптотические, огибаемые лучами конгруэнций расслояемой пары, соответствуют друг другу.

Это обстоятельство показывает на аналогию параболических пар парам сопряженным: как здесь, так и там развертывающиеся поверхности конгруэнций пары соответствуют друг другу. Эту аналогию можно продолжить.

Фокальными поверхностями сопряженной пары служат поверхности R, и конгруэнциями пары служат конгруэнции касательных к одному семейству линий сети R. При этом любая поверхность R и ее преобразование Йонаса определяют сопряженную пару. Для параболических пар существуют такие же теоремы.

Теорема 1. *Фокальными поверхностями параболических пар служат поверхности R_0, на которых сопряженная сеть R* (основание проективного изгибания) *вырождается в одно семейство асимптотических R_0, и конгруэнциями пары служат конгруэнции касательных к этим асимптотическим R_0.*

Теорема 2. *Произвольная поверхность R_0 вместе с любой поверхностью R_0, которая является ее асимптотическим преобразованием с соответствием асимптотических R_0, определяют параболическую пару, образованную касательными к асимптотическим R_0 первой и второй поверхностей.*

Мы докажем эти теоремы, но начать надо с доказательства существования расслояемых параболических пар.

62. Теорема существования параболической пары. В пп. 34, 35 мы получили для невырожденной параболической пары систему из уравнений (11α, β, δ) п. 34, (12β) п. 35 и одного из уравнений (c_1) п. 34. Развертывая, кроме того, уравнение (12β) п. 35

по лемме Картана, получим:

$$\omega_1^4=0,\quad \omega_3^2=0,\quad \omega_2^4=b\omega_1^3,\quad \omega_4^2=\nu\omega_1^3,\quad \omega_3^1=\mu b\omega_1^3,\quad \omega_3^4=a\omega_1^3+b\omega_1^2, \tag{1α}$$

$$[\omega_4^1-\mu\omega_2^3,\ \omega_1^3]=0. \tag{1β}$$

Чтобы замкнуть систему, присоединяем виешние дифференциалы уравнений (1α). Среди них только четыре независимых:

$$\begin{gathered}[\Delta a\,\omega_1^3]+[\Delta b\,\omega_1^2]=0.\quad [\Delta b\,\omega_1^3]-2b[\omega_2^3\omega_1^2]=0,\\ [\omega_4^1+\mu\omega_2^3,\ 2b\omega_1^2+a\omega_1^3]=0,\\ \mu[\Delta\mu\,\omega_1^3]-[\omega_4^1+\mu\omega_2^3,\ \omega_1^2]=0,\end{gathered} \tag{1γ}$$

где

$$\begin{gathered}\Delta a=da+a(\omega_1^1-2\omega_3^3+\omega_4^4),\\ \Delta b=db+b(\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3+\omega_4^4),\\ \Delta\mu=d\ln\mu+\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4.\end{gathered} \tag{1δ}$$

Система внешних квадратичных уравнений (1γ) правильная.

Для построения характеристической системы надо было бы присоединить внешний дифференциал квадратичного уравнения (1β), но он обращается в тождество в силу уравнений (1α, β, γ). Характеристическая система, кроме форм ω_1^3, ω_1^2, независимых на интегральном многообразии, и левых частей уравнений (1α), содержит только $q=5$ форм:

$$\Delta a,\ \Delta b,\ \Delta\mu,\ \omega_2^3,\ \omega_4^1. \tag{a}$$

Полярная система элемента $\omega_1^3=u,\omega_1^2=v$, если

$$\omega_1^3(a\omega_1^3+2b\omega_1^2)\neq 0,$$

имеет ранг $s_1=5$ при пяти независимых квадратичных уравнениях (1β, γ). Система — в инволюции с характерами $s_1=5$, $s_2=q-s_1=0$ и определяет параболические пары с пятью произвольными функциями одного аргумента.

63. Проективное изгибаиие иа параболическом основании. Для доказательства теорем п. 61 нам придется войти в некоторые подробности относительно проективного изгибания, когда основание изгибания состоит из дважды взятого семейства асимптотических линий.

Отнесем параболическую конгруэнцию $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$ к тетраэдру 1-го порядка (55α, β, γ) п. 25:

$$\omega_1^4=0,\quad \omega_2^4-b\omega_1^3=0,\quad \omega_3^4-a\omega_1^3-b\omega_1^2=0, \tag{2α}$$

$$[\Delta a\,\omega_1^3]+[\Delta b\,\omega_1^2]=0,\quad [\Delta b\,\omega_1^3]-2b[\omega_2^3\omega_1^2]=0, \tag{2β}$$

где

$$\begin{gathered}\Delta a=da+a(\omega_1^1-2\omega_3^3+\omega_4^4)-2b\omega_3^2,\\ \Delta b=db+b(\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3+\omega_4^4)-a\omega_2^3.\end{gathered} \tag{2γ}$$

Эта система вместе с тем определяет произвольную поверхность $(\boldsymbol{A}_1)$, отнесенную к касательной плоскости $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3$ и асимптотической касательной $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2$ поверхности. Если на нее налагается поверхность $(\boldsymbol{B}_1)$, определенная компонентами Ω_i^k ее репера $\{\boldsymbol{B}_i\}$, то имеют место уравнения (3α) п. 56:

$$\begin{gathered}\overline{\boldsymbol{B}_1}=\theta_0\boldsymbol{A}_1,\quad d\overline{\boldsymbol{B}_1}=\theta_0\,d\boldsymbol{A}_1+\theta_1\boldsymbol{A}_1,\\ d^2\overline{\boldsymbol{B}_1}=\theta_0\,d^2\boldsymbol{A}_1+2\theta_1\,d\boldsymbol{A}_1+\theta_2\boldsymbol{A}_1,\end{gathered} \tag{3α}$$

откуда попрежнему (п. 56) следуют равенства

$$\theta_0=1,\qquad \theta_1=\tilde\omega_1^1,\qquad \theta_2=\Delta\tilde\omega_1^1-2\theta_1\omega_1^1, \tag{3β}$$

$$\tilde\omega_1^2=\tilde\omega_1^3=\tilde\omega_1^4=0, \tag{3γ}$$

$$\Delta\tilde\omega_1^2=2\theta_1\omega_1^2,\qquad \Delta\tilde\omega_1^3=2\theta_1\omega_1^3,\qquad \omega_1^2\tilde\omega_2^4+\omega_1^3\tilde\omega_3^4=0, \tag{3δ}$$

где

$$\tilde\omega_i^k=\Omega_i^k-\omega_i^k,$$

$$\Delta\tilde\omega_i^k=\Delta\Omega_i^k-\Delta\omega_i^k=d\Omega_i^k+\Omega_i^j\Omega_j^k-d\omega_i^k-\omega_i^j\omega_j^k. \tag{3ε}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (3γ), получим:

$$\begin{gathered}[\omega_1^2,\ \tilde\omega_2^2-\tilde\omega_1^1]+[\omega_1^3,\ \tilde\omega_3^2]=0,\quad [\omega_1^3,\ \tilde\omega_3^3-\tilde\omega_1^1]+[\omega_1^2,\ \tilde\omega_2^3]=0,\\ [\omega_1^2\tilde\omega_2^4]+[\omega_1^3\tilde\omega_3^4]=0.\end{gathered}$$

Между тем уравнения (3δ) в раскрытой форме напишутся:

$$\begin{gathered}\omega_1^2(\tilde\omega_2^2-\tilde\omega_1^1)+\omega_1^3\tilde\omega_3^2=0,\quad \omega_1^3(\tilde\omega_3^3-\tilde\omega_1^1)+\omega_1^2\tilde\omega_2^3=0,\\ \omega_1^2\tilde\omega_2^4+\omega_1^3\tilde\omega_3^4=0.\end{gathered}$$

Применяя следствие 1 п. 12, получим:

$$\tilde\omega_2^4=\tilde\omega_3^4=\tilde\omega_2^3=\tilde\omega_3^2=0,\qquad \tilde\omega_1^1-\tilde\omega_2^2=0,\qquad \tilde\omega_1^1-\tilde\omega_3^3=0, \tag{4α}$$

откуда следует, что соотношения (2α, β) удовлетворены и для компонент Ω_i^k, т. е. конгруэнция $(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2)$ параболическая и отнесена к тетраэдру 1-го порядка.

Дифференцируя внешним образом первые два уравнения (4α), получим:

$$[\omega_2^4,\ \tilde\omega_4^4-\tilde\omega_1^1]=0,\qquad [\omega_3^4,\ \tilde\omega_4^4-\tilde\omega_1^1]=0.$$

Если формы ω_2^4, ω_3^4 линейно зависимы, то, в силу (2α), имеем $b=0$, откуда $\omega_2^4=0$ и смещения касательной плоскости $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3$ зависят только от одной главной формы ω_3^4:

$$d(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3)=[123](\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3)+[124]\,\omega_3^4;$$

следовательно, касательная плоскость описывает однопараметрическое семейство, т. е. огибает развертывающуюся поверхность.

Оставляя этот случай в стороне, имеем (следствие 2 п. 12):

$$\tilde{\omega}_1^1-\tilde{\omega}_4^4=0. \tag{4β}$$

Если нормировать тетраэдр $\{\boldsymbol{A}_i\}$, а следовательно, по самому построению его (п. 56) и тетраэдр $\{\boldsymbol{B}_i\}$ так, чтобы определитель из 16 координат вершин равнялся единице, то

$$\tilde{\omega}_1^1+\tilde{\omega}_2^2+\tilde{\omega}_3^3+\tilde{\omega}_4^4=0$$

и, в силу (4α, β),

$$\tilde{\omega}_1^1=\tilde{\omega}_2^2=\tilde{\omega}_3^3=\tilde{\omega}_4^4=0. \tag{4γ}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (4α, γ), получим пять независимых квадратичных уравнений:

$$\begin{aligned}&[\omega_1^3,\ \tilde{\omega}_2^1-b\tilde{\omega}_4^3]=0, \quad [\omega_1^2\tilde{\omega}_2^1]+[\omega_1^3\tilde{\omega}_3^1]=0, \quad [\omega_1^3,\ \tilde{\omega}_3^1+b\tilde{\omega}_4^2]=0,\\ &[\omega_1^2,\ \tilde{\omega}_3^1-b\tilde{\omega}_4^2]-a\,[\omega_1^3\tilde{\omega}_4^2]=0, \quad [\omega_1^2,\ \tilde{\omega}_2^1+b\tilde{\omega}_4^3]+a\,[\omega_1^3\tilde{\omega}_4^3]=0.\end{aligned} \tag{4δ}$$

64. Параболическое основание изгибания. Поверхность $(\overline{\boldsymbol{B}}_1)$, полученная проективным преобразованием из поверхности $(\boldsymbol{B}_1)$, имеет, в силу (3γ), (4α, γ), касание 2-го порядка с поверхностью $(\boldsymbol{A}_1)$. Порядок касания повышается вдоль тех направлений, для которых имеет место равенство

$$d^3\overline{\boldsymbol{B}}_1=d^3\boldsymbol{A}_1+3\theta_2\,d\boldsymbol{A}_1+\theta_3\boldsymbol{A}_1, \tag{5α}$$

где мы уже внесли значения $\theta_0=1$, $\theta_1=0$. При этом

$$d^3\boldsymbol{B}_1-d^3\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}_i\Delta^2\tilde{\omega}_1^i, \tag{5β}$$

где

$$\Delta^2\tilde{\omega}_i^k=\Delta^2\Omega_i^k-\Delta^2\omega_i^k=d(\Delta\Omega_i^k)+\Delta\Omega_i^j\,\Omega_j^k-d(\Delta\omega_i^k)-\Delta\omega_i^j\,\omega_j^k. \tag{5γ}$$

Уравнение (5α) сравнением коэффициентов при линейно независимых точках $\boldsymbol{A}_i$ разбивается на четыре уравнения, из которых первое определяет θ_3, последнее обращается в тождество, а два средних имеют вид

$$\Delta^2\tilde{\omega}_1^2=3\theta_2\,\omega_1^2, \qquad \Delta^2\tilde{\omega}_1^3=3\theta_2\,\omega_1^3. \tag{6α}$$

Здесь форма

$$\theta_2=\omega_1^2\tilde{\omega}_2^1+\omega_1^3\tilde{\omega}_3^1 \tag{6β}$$

меняется с изменением положения точки $\boldsymbol{B}_4$ относительно вершины $\boldsymbol{B}_1$, что не меняет налагающуюся поверхность $(\boldsymbol{B}_1)$, но вызывает изменение присоединенных к каждой паре соответствующих точек $(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{B}_1)$ проективных преобразований П. Характеристическая система уравнений (4δ) не содержит формы $\tilde{\omega}_4^1$, которую, следовательно, надлежит считать в задаче определения поверхности $(\boldsymbol{B}_1)$ вторичной.

Поскольку

$$D\tilde{\omega}_2^1=[\tilde{\omega}_2^1,\ \omega_1^1-\omega_2^2]+[\omega_2^3\tilde{\omega}_3^1]+[\omega_2^4\tilde{\omega}_4^1],$$

$$D\tilde{\omega}_3^1=[\tilde{\omega}_3^1,\ \omega_1^1-\omega_3^3]+[\omega_3^2\tilde{\omega}_2^1]+[\omega_3^4\tilde{\omega}_4^1],$$

выписывая присоединенные билинейные формы для двух символов дифференцирования: 1) символ d для главных форм ω_i^k задачи, когда вторичные формы равны нулю, и 2) символ δ для вторичной формы $\omega_1^1=\pi_4^1$, когда все остальные формы равны нулю, получим:

$$\delta\tilde{\omega}_2^1=-\omega_2^4\pi_4^1, \quad \delta\tilde{\omega}_3^1=-\omega_3^4\pi_4^1, \qquad \delta\theta_2=-(\omega_1^2\omega_2^4+\omega_1^3\omega_3^4)\,\pi_4^1;$$

следовательно, при $\pi_4^1\neq 0$ форма θ_2 получает приращения, пропорциональные скобке $\omega_1^2\omega_2^4+\omega_1^3\omega_3^4$. Исключая θ_2 из уравнений (5α), мы получаем поэтому единственное условие, которое определяет основание изгибания (вместе с асимптотическими линиями)

$$\omega_1^3\Delta^2\tilde{\omega}_1^2-\omega_1^2\Delta^2\tilde{\omega}_1^3=0, \tag{6γ}$$

где простой подсчет дает:

$$\Delta\tilde{\omega}_1^2=\Delta\tilde{\omega}_1^3=0, \qquad \Delta\omega_1^4=(b\omega_1^2+\omega_3^4)\,\omega_1^3=(2b\omega_1^2+a\omega_1^3)\,\omega_1^3,$$

$$\Delta^2\tilde{\omega}_1^2=\omega_1^2\Delta\tilde{\omega}_1^1+\tilde{\omega}_4^2\Delta\omega_1^4, \qquad \Delta^2\tilde{\omega}_1^3=\omega_1^3\Delta\tilde{\omega}_1^1+\tilde{\omega}_4^3\Delta\omega_1^4$$

и уравнение (6γ)

$$(\omega_1^3\tilde{\omega}_4^2-\omega_1^2\tilde{\omega}_4^3)(2b\omega_1^2+a\omega_1^3)\,\omega_1^3=0. \tag{6γ'}$$

Допустим теперь, что основание изгибания при наложении поверхности $(\boldsymbol{B}_1)$ на $(\boldsymbol{A}_1)$ совпадает со сдвоенными асимптотическими $\omega_1^1=0$. Тогда, поскольку асимптотические линии поверхности $(\boldsymbol{A}_1)$ определяются уравнением

$$\omega_1^3(2b\omega_1^2+a\omega_1^3)=0,$$

левая часть уравнения ($6\gamma'$) пропорциональна форме $(\omega_1^3)^3(2b\omega_1^2+a\omega_1^3)$.

Отсюда — равенство, которое должно иметь место тождественно относительно ω_1^2, ω_1^3:

$$(\omega_1^3\tilde{\omega}_4^2-\omega_1^2\tilde{\omega}_4^3)\,\omega_1^3(2b\omega_1^2+a\omega_1^3)=\lambda\,(\omega_1^3)^3(2b\omega_1^2+a\omega_1^3) \tag{6δ}$$

или по сокращении на $\omega_1^3(2b\omega_1^2+a\omega_1^3)$

$$\omega_1^3\tilde{\omega}_4^2-\omega_1^2\tilde{\omega}_4^3=\lambda\,(\omega_1^3)^2. \tag{6δ'}$$

Поскольку первое слагаемое левой части делится на ω_1^3, второе тоже должно делиться, но формы ω_1^2, ω_1^3 линейно независимы; следовательно,

$$\tilde{\omega}_4^3 = \nu\omega_1^3, \tag{7α}$$

и равенство (6δ′) принимает вид

$$\tilde{\omega}_4^2 - \nu\omega_1^2 = \lambda\omega_1^3. \tag{7β}$$

Система (2α, β), (3γ), (4α, γ, δ) п. 63, (7α, β) определяют пару проективно налагающихся поверхностей с основанием изгибания в виде дважды взятого семейства асимптотических $\omega_1^3 = 0$.

65. Поверхности R_0. Чтобы получить условия на поверхность (A_1), допускающую изгибание (3γ), (4α, γ, δ) п. 63, (7α, β) п. 64, нам надо прежде всего продолжить систему (2α, β) п. 63.

Развертывая по лемме Картана уравнения (2β), получим:

$$\begin{gathered}\Delta a = a_3\omega_1^3 + b_2\omega_1^2, \qquad \Delta b = b_2\omega_1^3 + 2bb_3\omega_1^2, \\ \omega_2^3 = -b_3\omega_1^3 + 2bc_2\omega_1^2,\end{gathered} \tag{8α}$$

откуда внешним дифференцированием получаем:

$$\begin{gathered}[\Delta a_3\omega_1^3] + [\Delta b_2\omega_1^2] = 0, \qquad [\Delta b_2\omega_1^3] + 2b\,[\Delta b_3\omega_1^2] = 0, \\ -[\Delta b_3\omega_1^3] + 2bc_2\,[\Delta c_2\omega_1^2] = 0,\end{gathered} \tag{8β}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta a_3 &= da_3 + a_3(2\omega_1^1 - 3\omega_3^3 + \omega_4^4) + 3a\omega_3^1 - 3b_2\omega_3^2 - 3ab\omega_4^2 - 3a^2\omega_4^3, \\ \Delta b_2 &= db_2 + b_2(2\omega_1^1 - \omega_2^2 - 2\omega_3^3 + \omega_4^4) + a\omega_2^1 - a_3\omega_2^3 + \\ &\quad + 2b\omega_3^1 - 4bb_3\omega_3^2 - 2b^2\omega_4^2 - 3ab\omega_4^3 + \left\{2a(b_3)^2 - 4b_2b_3\right\}\omega_1^2, \\ \Delta b_3 &= db_3 + b_3(\omega_1^1 - \omega_2^2) + \omega_2^1 - b\omega_4^3 + 2bc_2\omega_3^2 + \\ &\qquad\qquad + \left\{2b_2c_2 - 2ab_3c_2 - (b_3)^2\right\}\omega_1^2, \\ \Delta c_2 &= d\ln c_2 + 2\omega_3^3 - \omega_2^2 - \omega_4^4.\end{aligned} \tag{8γ}$$

Развертывая по лемме Картана, получим:

$$\begin{gathered}\Delta a_3 = \zeta_1\omega_1^3 + \zeta_2\omega_1^2, \qquad \Delta b_2 = \zeta_2'\omega_1^3 + 2b\zeta_3\omega_1^2, \\ \Delta b_3 = \zeta_3\omega_1^3 + 2bc_2\zeta_4\omega_1^2, \qquad \Delta c_2 = -\zeta_4\omega_1^3 + 2b\zeta_5\omega_1^2,\end{gathered} \tag{8δ}$$

откуда внешним дифференцированием имеем:

$$\begin{gathered}[\Delta\zeta_1\omega_1^3] + [\Delta\zeta_2\omega_1^2] = 0, \qquad [\Delta\zeta_2\omega_1^3] + 2b\,[\Delta\zeta_3\omega_1^2] = 0, \\ [\Delta\zeta_3\omega_1^3] + 2bc_2\,[\Delta\zeta_4\omega_1^2] = 0, \qquad [\Delta\zeta_4\omega_1^3] - 2b\,[\Delta\zeta_5\omega_1^2] = 0.\end{gathered} \tag{8ε}$$

Все $\Delta\zeta_i$ — линейно независимые формы, содержащие дифференциалы $d\zeta_i$ и линейную комбинацию из форм ω_1^2, ω_1^3; мы ограничимся записью только двух последних форм:

$$\begin{aligned}\Delta\zeta_4 &= d\zeta_4 + \zeta_4(\omega_1^1 - \omega_3^3) + (2b\zeta_5 - 3b_3)\omega_3^2 + 2\omega_3^1 - 3a\omega_4^3 + \\ &\qquad + \left\{2(b_2 - ab_3)\zeta_5 - b_3\zeta_4\right\}\omega_1^2, \\ \Delta\zeta_5 &= d\zeta_5 + \zeta_5(\omega_3^3 - \omega_4^4) + \frac{1}{2b}\omega_2^1 + \frac{3}{2}\omega_4^3 - 3c_2\omega_3^2.\end{aligned} \tag{8ζ}$$

Обратимся теперь к уравнениям, определяющим вторую поверхность (B_1). Внося в уравнения (4δ) п. 63 значения (7α, β) и развертывая по лемме Картана, получим:

$$\tilde{\omega}_2^1 = -b\nu\omega_1^3, \qquad \tilde{\omega}_4^3 = \nu\omega_1^3, \tag{9α}$$

$$\tilde{\omega}_3^1 = -b\nu\omega_1^2 + (b\lambda - a\nu)\omega_1^3, \qquad \tilde{\omega}_4^2 = \nu\omega_1^2 + \lambda\omega_1^3, \tag{9β}$$

где λ и ν надо рассматривать как новые неизвестные функции.

Дифференцируя внешним образом, получим только три уравнения;

$$[\Delta\nu\omega_1^3] = 0, \qquad [\Delta\nu\omega_1^2] = 0, \qquad [\Delta\lambda\omega_1^3] = 0, \tag{9γ}$$

где

$$\begin{gathered}\Delta\nu = d\nu + \nu(\omega_1^1 - \omega_4^4) - \tilde{\omega}_4^1 + \lambda\omega_2^3 + 2\lambda(b_3 + ac_2)\omega_1^3, \\ \Delta\lambda = d\ln\lambda + \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4 + 2ac_2\omega_1^2.\end{gathered} \tag{9δ}$$

При этом мы исключили случай $b = 0$, когда поверхность (A_1) становится развертывающейся, и случай $\lambda = 0$, когда уравнения (6δ) и (6γ′) п. 64 совпадают, основание изгибания становится неопределенным, а налагающиеся поверхности — проективно эквивалентными.

Первые два уравнения (9γ) имеют следствием

$$\Delta\nu = 0. \tag{10α}$$

Внешний дифференциал этого уравнения имеет вид

$$\left[\Delta\lambda - \left\{2(\zeta_4 + a\zeta_5) - 2\frac{a^2}{b}c_2 - \frac{b_2}{b}\right\}\omega_1^3,\ \omega_1^2\right] = 0, \tag{10β}$$

отсюда, в силу (9γ),

$$\Delta\lambda = \left\{2(\zeta_4 + a\zeta_5) - \frac{2a^2c_2 + b_2}{b}\right\}\omega_1^3. \tag{10γ}$$

Наконец, внешний дифференциал уравнения (10γ) совсем не содержит λ и ν

$$[\Delta\zeta_4 + a\Delta\zeta_5,\ \omega_1^3] + A\,[\omega_1^2\omega_1^3] = 0, \tag{11}$$

где A есть функция от переменных ζ_i, a_j, b_k, c_l.

Если поверхность (A_1) удовлетворяет системе (2α) п. 63, (8α, δ, ε), (11), то система (10α, γ) будет вполне интегрируема и определит с двумя произвольными постоянными компоненты $\Omega_i^k = \tilde{\omega}_i^k + \omega_i^k$ тетраэдра $\{\boldsymbol{B}_i\}$, присоединенного к поверхности $(\boldsymbol{B}_1)$, проективно налагающейся с параболическим основанием на поверхность $(\boldsymbol{A}_1)$.

Система (2α) п. 63, $(8\alpha, \delta, \varepsilon)$, (11), определяющая поверхности $(\boldsymbol{A}_1)$, способные изгибаться на параболическом основании (поверхности R_0), содержит пять квадратичных уравнений (8ε), (11) с $q=5$ формами $\Delta\zeta_i\,(i=1, \ldots, 5)$, которые вместе с левыми частями пфаффовых уравнений и формами ω_1^3, ω_1^2, независимыми на интегральном многообразии, составляют характеристическую систему форм.

Система внешних уравнений правильная.

Ранг полярной матрицы элемента $\omega_1^3 = u$, $\omega_1^2 = v$ равен $s_1 = 5$, если

$$u(au + 2bv) \neq 0.$$

Следовательно, система в инволюции (п. 18) с характерами $s_1 = 5$, $s_2 = q - s_1 = 0$ и определяет поверхности R_0 с произволом пяти функций одного аргумента.

66. Построение параболической пары к заданной поверхности $\boldsymbol{R}_0$. Параболическая пара определяется системой $(1\alpha - \gamma)$ п. 62. Уравнения эти разбиваются на две группы:

$$\omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^4 - b\omega_1^3 = 0, \quad \omega_3^4 = a\omega_1^3 + b\omega_1^2, \tag{12α}$$

$$[\Delta a\omega_1^3] + [\Delta b\omega_1^2] = 0, \quad [\Delta b\omega_1^3] - 2b\,[\omega_2^3\omega_1^2] = 0 \tag{12β}$$

и

$$\omega_3^2 = 0, \quad \omega_4^2 = \mu\omega_1^3, \quad \omega_3^1 - b\mu\omega_1^3 = 0, \tag{13α}$$

$$\begin{gathered}[\omega_4^1 - \mu\omega_2^3,\ \omega_1^3] = 0, \quad [\omega_4^1 + \mu\omega_2^3,\ a\omega_1^3 + 2b\omega_1^2] = 0,\\ \mu\,[\Delta\mu\omega_1^3] - [\omega_4^1 + \mu\omega_2^3,\ \omega_1^2] = 0,\end{gathered} \tag{13β}$$

где

$$\Delta\mu = d\ln\mu + \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4. \tag{13γ}$$

Система $(12\alpha, \beta)$ определяет произвольную поверхность $(\boldsymbol{A}_1)$, отнесенную к касательной плоскости $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3$ и асимптотической касательной $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2$.

Продолжая эту систему, мы присоединяем к ней уравнения $(8\alpha, \delta, \varepsilon)$ п. 65.

Система $(13\alpha, \beta)$ должна определить параболическую пару, присоединенную к конгруэнции $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$, полученной решением системы $(12\alpha, \beta)$.

Внося значение ω_2^3 по формуле (8α) п. 65 в квадратичные уравнения (13β) и раскрывая их по лемме Картана, получим:

$$\begin{gathered}\omega_4^1 = \mu\,\{(b_3 + 2ac_2)\,\omega_1^3 + 2bc_2\omega_1^2\},\\ \Delta\mu = \mu_1\omega_1^3 - 2ac_2\omega_1^2.\end{gathered} \tag{14α}$$

Дифференцируя внешним образом первое уравнение, будем иметь:

$$[\omega_1^2\omega_1^3]\,bc_2\mu\left\{\mu_1 - 2(\zeta_4 + a\zeta_5) + \frac{b_2 + 2a^2c_2}{b}\right\} = 0.$$

Поскольку $b=0$ приводит к вырождению поверхности $(\boldsymbol{A}_1)$ в развертывающуюся, из $c_2 = 0$, в силу (8α) п. 65, следует $[\omega_2^3\omega_1^3] = 0$ и вырождение конгруэнции $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$, а из $\mu = 0$ следует вырождение конгруэнции $(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4)$, мы должны обратить в нуль фигурную скобку, откуда второе уравнение (14α) принимает вид

$$\Delta\mu = 2(\zeta_4 + a\zeta_5)\,\omega_1^3 - \frac{b_2 + 2a^2c_2}{b}\,\omega_1^3 - 2ac_2\omega_1^2. \tag{14β}$$

Это уравнение, если иметь в виду значение $\Delta\mu$ по формуле (13γ), совпадает с заменой λ на μ с уравнением (10γ) п. 65, где $\Delta\lambda$ имеет значение (9δ). Внешний дифференциал его приведет к тому же квадратичному уравнению (11) п. 65. Имеем теорему:

Теорема. *Фокальные поверхности параболической пары суть поверхности R_0 и обратно: всякая поверхность R_0 допускает образование параболических пар с произволом пяти параметров.*

Чтобы доказать вторую половину теоремы, достаточно заметить, что при заданной первой параболической конгруэнции $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$ посредством любого решения системы (12α), $(8\alpha, \delta, \varepsilon)$, (11) п. 65 параболическая пара $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$, $(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4)$ определяется уравнениями (13α), $(14\alpha, \beta)$. Эти уравнения теперь образуют вполне интегрируемую систему, которая определяет решение с пятью произвольными постоянными.

ГЛАВА VII

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ПАР

67. Асимптотическое преобразование поверхностей R_0. Поскольку параболическая расслояемая пара вполне симметрична относительно своих двух конгруэнций, фокальная поверхность (A_3) второй конгруэнции является тоже поверхностью R_0. Прямая A_1A_3 касается обеих поверхностей (A_1) и (A_3) и асимптотические линии на них соответствуют. Следовательно, конгруэнция (A_1A_3) является конгруэнцией W с фокальными поверхностями (A_1) и (A_3). Переход от одной фокальной поверхности произвольной конгруэнции W к другой ее фокальной поверхности называется *асимптотическим преобразованием поверхности*. Здесь поверхность (A_1) класса R_0 преобразуется в поверхность (A_3) того же класса так, что асимптотические R_0 переходят в асимптотические R_0. Такое преобразование называется *асимптотическим преобразованием поверхностей* R_0.

Можно отметить еще одну особенность конгруэнции (A_1A_3), которая преобразует поверхность (A_1) в поверхность (A_3).

Для этого придется вспомнить некоторые факты из проективной теории поверхностей.

68. Формулы для коэффициентов β, γ кубичной формы поверхности. Подобно двум квадратичным формам гауссовой (метрической) теории поверхностей проективная теория Фубини строится на трех инвариантных дифференциальных формах, из которых наиболее важны две: квадратичная форма φ_2 с нулевыми линиями асимптотическими и кубичная форма φ_3 с нулевыми линиями Дарбу. В параметрах асимптотических линий u, v поверхность $\boldsymbol{M}(x^i)$ можно определить четырьмя решениями системы:

$$\begin{aligned} x_{uu} &= \alpha x_u + \beta x_v + px, \\ x_{vv} &= \gamma x_u + \alpha' x_v + qx, \end{aligned} \qquad x_u = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad x_{uu} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}. \tag{a}$$

При этом формы φ_2 и φ_3 имеют вид

$$\varphi_2 = 2du\,dv, \quad \varphi_3 = \beta\,du^3 + \gamma\,dv^3. \tag{b}$$

Отсюда нетрудно убедиться, что для любого тетраэдра $\{\boldsymbol{M}_\alpha\}$ $(\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$, построенного на асимптотических касательных $\boldsymbol{MM}_1$,

$\boldsymbol{MM}_2$ с компонентами $\overline{\omega}_\alpha^\beta$ $(\alpha,\ \beta = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$

$$\overline{\omega}^3 = 0, \quad [\overline{\omega}_1^3\overline{\omega}^2] = 0, \quad [\overline{\omega}_2^3\overline{\omega}^1] = 0, \tag{c}$$

коэффициенты кубичной формы β, γ определяются из условий

$$[\overline{\omega}_1^2\overline{\omega}^2] = \beta[\overline{\omega}^1\overline{\omega}^2], \quad [\overline{\omega}_2^1\overline{\omega}^1] = \gamma\,[\overline{\omega}^2\overline{\omega}^1], \tag{d}$$

если только формы $\overline{\omega}^1$, $\overline{\omega}^2$ — полные дифференциалы.

Действительно, записывая уравнение (a) в символике аналитических точек, имеем:

$$\boldsymbol{M}_{uu} = \alpha\boldsymbol{M}_u + \beta\boldsymbol{M}_v + p\boldsymbol{M},$$

откуда

$$(\boldsymbol{MM}_u\boldsymbol{M}_{uu}\boldsymbol{M}_{uv}) = \beta\,(\boldsymbol{MM}_u\boldsymbol{M}_v\boldsymbol{M}_{uv}). \tag{e}$$

Между тем, полагая

$$\overline{\omega}^1 = du, \ \overline{\omega}^2 = dv, \quad \overline{\omega}_i^k = a_i^k\,du + b_i^k\,dv,$$

перепишем уравнения (c), (d) в виде

$$[\overline{\omega}_1^3\,dv] = 0, \ [\overline{\omega}_2^3\,du] = 0, \ [\overline{\omega}_1^2 - \beta^*du,\ dv] = 0, \quad [\overline{\omega}_2^1 - \gamma^*dv,\ du] = 0$$

откуда

$$\overline{\omega}_1^3 = b_1^3\,dv, \quad \overline{\omega}_2^3 = a_2^3\,du, \quad \overline{\omega}_1^2 = \beta^*du + b_1^2\,dv, \quad \overline{\omega}_2^1 = a_2^1\,du + \gamma^*dv.$$

Здесь звездочкой отмечены величины β^*, γ^*, получаемые из формул (d).

Теперь из уравнений (46) п. 23 получим:

$$d\boldsymbol{M} = (a_0^0\,du + b_0^0\,dv)\,\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}_1\,du + \boldsymbol{M}_2\,dv,$$

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{M}_1 = (a_1^0\,du + b_1^0\,dv)\,\boldsymbol{M} &+ \\ + (a_1^1\,du + b_1^1\,dv)\,\boldsymbol{M}_1 &+ (\beta^*du + b_1^2\,dv)\,\boldsymbol{M}_2 + b_1^3\,dv\boldsymbol{M}_3, \end{aligned}$$

откуда

$$\boldsymbol{M}_u = a_0^0\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}_1, \quad \boldsymbol{M}_v = b_0^0\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}_2,$$

$$(\boldsymbol{M}_1)_u = a_1^0\boldsymbol{M} + a_1^1\boldsymbol{M}_1 + \beta^*\boldsymbol{M}_2$$

и

$$\boldsymbol{M}_{uu} = A\boldsymbol{M} + B\boldsymbol{M}_u + \beta^*\boldsymbol{M}_v,$$

где коэффициенты A, B нас не интересуют. Теперь

$$(\boldsymbol{MM}_u\boldsymbol{M}_{uu}\boldsymbol{M}_{uv}) = \beta^*\,(\boldsymbol{MM}_u\boldsymbol{M}_v\boldsymbol{M}_{uv}) \tag{e'}$$

и, сравнивая равенства (e) и (e′), получим:

$$\beta^* = \beta, \quad \gamma^* = \gamma.$$

Второе равенство получается аналогично.

69. Характеристика вспомогательной конгруэнции параболической пары. Применим формулы (d) к тетраэдру $\{A_i\}$ параболической пары (12α, β), (13α, β) п. 66.

Полагая $M = bA_1$, $M_1 = A_2$, $M_2 = bA_3 - \frac{a}{2} A_2$, $M_3 = A_4$, мы получим для поверхности (A_1), так как ее асимптотические определяются уравнением $\omega_1^3(2b\omega_1^2 + a\omega_1^3) = 0$, асимптотический тетраэдр $\{M_\alpha\}$ с компонентами

$$\overline{\omega}^1 = b\omega_1^2 + \frac{a}{2}\omega_1^3, \ \overline{\omega}^2 = \omega_1^3, \quad \overline{\omega}_1^3 = b\overline{\omega}^2, \ \overline{\omega}_2^3 = b\overline{\omega}^1, \ \overline{\omega}_1^2 = \frac{1}{b}\omega_2^3. \qquad \text{(a)}$$

Поскольку нормирование вершин A_i остается произвольным, подходящим выбором этого нормирования можно добиться, чтобы формы $\overline{\omega}^1$, $\overline{\omega}^2$ умножились на свои интегрирующие множители и стали полными дифференциалами. При этом внешние дифференциалы $D\overline{\omega}^1$, $D\overline{\omega}^2$ обратятся в нуль и к уравнениям системы (12α, β), (13α, β) п. 66 присоединятся два квадратичных уравнения:

$$\begin{gathered}[\omega_2^3\omega_1^2] - [\omega_1^1 - \omega_3^3, \ \omega_1^3] = 0, \\ [\Delta b + a\omega_2^3, \ \omega_1^2] + [\omega_3^3 - \omega_4^4, \ a\omega_1^3 + 2b\omega_1^2] = 0,\end{gathered} \qquad (1)$$

формы $\omega_1^1 - \omega_3^3$, $\omega_3^3 - \omega_4^4$ станут главными (войдут в характеристическую систему).

При этом условии мы можем пользоваться формулами (d) п. 68. Поскольку теперь в силу (8α) п. 65

$$[\overline{\omega}^1\overline{\omega}^2] = b[\omega_1^2\omega_1^3], \ [\overline{\omega}_1^2\overline{\omega}^2] = \frac{1}{b}[\omega_2^3\omega_1^3] = 2c_2[\omega_1^2\omega_1^3], \qquad (2\alpha)$$

немедленно получаем:

$$\beta_1 = 2\frac{c_2}{b}, \qquad (2\beta)$$

где индекс один при β_1 означает принадлежность β_1 поверхности (A_1).

Аналогично, полагая $M = A_3$, $M_1 = A_4$, $M_2 = b\mu A_1 + \frac{a}{2} A_4$, $M_3 = A_2$, получим асимптотический тетраэдр для поверхности (A_3), имеющий компоненты

$$\tilde{\omega}^1 = b\omega_1^2 + \frac{a}{2}\omega_1^3, \ \ \tilde{\omega}^2 = \omega_1^3, \ \ \tilde{\omega}_1^3 = \mu\tilde{\omega}^2, \ \ \tilde{\omega}_2^3 = \mu\tilde{\omega}^1, \ \tilde{\omega}_1^2 = \frac{\omega_4^1}{b\mu}, \qquad (\text{a}')$$

откуда по формулам (d)

$$\beta_3 = 2\frac{c_2}{b}, \qquad (2\gamma)$$

где индекс у β_3 означает принадлежность поверхности (A_3).

Итак, *асимптотическое преобразование посредством конгруэнции (A_1A_3) сохраняет величину коэффициента β кубичной формы Фубини преобразуемой поверхности.*

Это свойство характеризует конгруэнцию (A_1A_3).

Действительно, если отнесем произвольную конгруэнцию (A_1A_3) к тетраэдру 1-го порядка и совместим ребра A_1A_2 и A_3A_4 с парой соответствующих асимптотических касательных поверхностей (A_1) и (A_3), то будем иметь уравнения (12α), (13α) п. 66. Отсюда внешним дифференцированием получим квадратичные уравнения (12β), (13β) п. 66, кроме первого уравнения (13β):

$$[\omega_4^1 - \mu\omega_2^3, \ \omega_1^3] = 0,$$

но по формулам (a), (a′) оно равносильно уравнению

$$[\tilde{\omega}_1^2 - \overline{\omega}_1^2, \ \overline{\omega}^2] = 0,$$

т. е. условию

$$\beta_1 = \beta_3.$$

70. Теорема переместительности для преобразований R_0. Заметим, что из уравнений (9δ), (10γ) п. 65 следует для инфинитезимальных преобразований стационарной подгруппы $\omega_1^2 = \omega_1^3 = 0$, $\omega_i^i = \pi_i^i$ закон изменения коэффициента λ

$$\delta \ln \lambda = \pi_3^3 + \pi_4^4 - \pi_1^1 - \pi_2^2.$$

Отсюда при подходящем выборе нормирования вершин A_i вытекает значение параметра $\lambda = 1$.

При этом форма $\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4$ становится главной и уравнение (10γ) п. 65 принимает вид

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4 = -2ac_2\omega_1^2 + \left\{2(\zeta_4 + a\zeta_5) - \frac{b_2 + 2a^2c_2}{b}\right\}\omega_1^3, \qquad (3)$$

а уравнение (14β) п. 66

$$d \ln \mu = 0 \qquad (4)$$

дает для μ, если оно не равно нулю, произвольное постоянное значение.

Обратимся теперь к теореме переместительности асимптотических преобразований поверхностей R_0. В силу общей теоремы о переместительности асимптотических преобразований для двух преобразований $(A_1) \to (A_3)$ и $(A_1) \to (A_{3'})$ существует семейство ∞^1 поверхностей (B), которые могут быть получены асимптотическими преобразованиями как из поверхности (A_3), так и из поверхности $(A_{3'})$, а также из любой поверхности однопараметрического семейства (B'), получаемых из поверхности (A_1) преобразованиями одного пучка асимптотических преобразований. Соответствующие точки поверхностей пучка (B') лежат на прямой $A_3A_{3'}$, такие же точки поверхностей (B) — на прямой A_1B.

Мы хотим показать, что среди поверхностей (B) найдется поверхность R_0.

С этой целью мы прежде всего доопределим тетраэдр $\{A_i\}$, присоединенный к параболической паре (A_1A_2), (A_3A_4), используя произвол выбора вершин A_2 и A_4 на прямых A_1A_2 и A_3A_4.

Поскольку поверхности (A_3) и $(A_{3'})$ являются асимптотическими преобразованиями поверхности (A_1), их точки A_3 и $A_{3'}$ лежат в касательной плоскости $A_1A_2A_3$ поверхности (A_1). Прямая $A_3A_{3'}$ плоскости $A_1A_2A_3$ пересекает луч A_1A_2, лежащий в той же плоскости. Мы совместим точку A_2 с точкой пересечения $A_3A_{3'}$ и A_1A_2. Тогда точка $A_{3'}$ и все точки B' будут лежать на ребре A_2A_3, и мы можем положить

$$A_{3'} = c_{3'}^2 A_2 + A_3, \quad B' = \rho' A_3 + A_2. \tag{5α}$$

С другой стороны, каждая поверхность (B) является асимптотическим преобразованием поверхностей (A_3) и $(A_{3'})$, значит, соответствующая точка любой поверхности (B) и вся прямая A_1B лежат в касательных плоскостях $A_1A_3A_4$, $A_1A_{3'}A_{4'}$ поверхностей (A_3) и $(A_{3'})$. Поэтому прямая A_1B пересекает прямые A_3A_4 и $A_{3'}A_{4'}$. Мы можем совместить точки A_4, $A_{4'}$ с этими точками пересечения и положить

$$A_{4'} = c_{4'}^1 A_1 + A_4, \quad B = \rho A_1 + A_4. \tag{5β}$$

Поскольку касательная плоскость каждой поверхности (B) проходит через луч A_2A_3, а поверхности (B') — через луч A_1A_4, эти поверхности расслояют пару конгруэнций (A_1A_4), (A_2A_3).

Для ρ и ρ' имеют место уравнения (3) п. 30, если сделать подстановку указателей $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} d\rho + \omega_4^1 + \rho(\omega_1^1 - \omega_4^4) &= 0, \\ d\rho' + \omega_2^3 + \rho'(\omega_3^3 - \omega_2^2) &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Условие полной интегрируемости этих уравнений приводит к системе ($8\alpha - \gamma$) п. 33, которая после подстановки указателей $\begin{pmatrix} 1234 \\ 4123 \end{pmatrix}$ сведется в силу (12α), (13α) п. 66 к двум уравнениям:

$$[\omega_2^1 - b\omega_4^3,\ \omega_1^3] = 0, \quad [\omega_2^1\omega_1^2] + [\omega_4^3\omega_3^4] = 0. \tag{7α}$$

Эти уравнения надо присоединить к системе (12α, β), (13α, β), (14α, β) п. 66, (11) п. 65. Они пополняют характеристическую систему двумя формами ω_2^1, ω_4^3, которые таким образом становятся главными в силу доопределения репера $\{A_i\}$.

Развертывая уравнения (7α) по лемме Картана, получим:

$$\begin{aligned} \omega_4^3 &= x\omega_1^3 + y(a\omega_1^3 + 2b\omega_1^2), \\ \omega_2^1 &= -bx\omega_1^3 + by(a\omega_1^3 + 2b\omega_1^2), \end{aligned} \tag{7β}$$

откуда внешним дифференцированием получаем:

$$[\Delta x\omega_1^3] = 0, \quad [\Delta y,\ a\omega_1^3 + 2b\omega_1^2] = 0, \tag{7γ}$$

где

$$\Delta x = dx + x(\omega_1^1 - \omega_4^4) + y\{b_2 - a(2b_3 + ac_2)\}\omega_1^2 + ac_2x\omega_1^2,$$

$$\begin{aligned} \Delta y = dy + 2y(\omega_3^3 - \omega_4^4) &- \\ &- \frac{b_3 + ac_2}{a}x\omega_1^2 - \left(2\frac{b_2}{a} - 3b_3 - ac_2\right)y\omega_1^2. \end{aligned} \tag{7δ}$$

71. Преобразование поверхности R_0. Если дана параболическая пара, т. е. пара поверхностей R_0 в отношении асимптотического преобразования с сохранением коэффициента β кубичной формы, то уравнения (7β, γ) образуют систему, замкнутую относительно операции внешнего дифференцирования. Характеристическая система, кроме форм ω_1^3, ω_1^2, независимых на интегральном многообразии, и левых частей линейных уравнений (7β), содержит только $q = 2$ формы Δx, Δy. Система внешних уравнений (7γ) правильная. Ранг полярной системы элемента $\omega_1^3 = u$, $\omega_1^2 = v$ равен $s_1 = 2$, если $u(au + 2bv) \neq 0$ при двух независимых квадратичных уравнениях (7γ). Система — в инволюции с характерами $s_1 = 2$, $s_2 = 0$ и определяет присоединенную расслояемую пару (A_1A_4), (A_2A_3) с произволом двух функций одного аргумента (произвол наиболее общего асимптотического преобразования $(A_1) \to (A_{3'})$).

Среди расслояющих поверхностей (B) найдется поверхность R_0, если преобразование $(A_3) \to (B)$ сохраняет коэффициент β кубичной формы, т. е. если компоненты $\bar\omega_i^k$ тетраэдра $\{B_i\}$ удовлетворяют системе (12α, β), (13α, β) п. 66. При этом тетраэдр $\{B_i\}$ должен быть построен для конгруэнции (BA_3) так же, как тетраэдр $\{A_i\}$ для конгруэнции (A_1A_3). Так как асимптотические на поверхностях (A_1), (A_3), (B) соответствуют, точку B_2 надо взять на касательной к линии $\omega_1^3 = 0$ поверхности (B), но по формулам (5β), (12α), (13α) п. 66

$$dB = \omega_4^4 B + \omega_1^2(\rho A_2 + 2byA_3) + \omega_1^3\{\mu A_2 + (\rho + x + ay)A_3\}.$$

Следовательно, мы можем положить

$$B_1 = B = \rho A_1 + A_4; \quad B_2 = \rho A_2 + 2byA_3, \quad B_3 \doteq A_3, \quad B_4 = A_4.$$

Тогда будем иметь:

$$\bar\omega_1^2 = \omega_1^2 + \frac{\mu}{\rho}\omega_1^3, \quad \bar\omega_1^3 = \left(\rho + x + ay - \frac{2b\mu y}{\rho}\right)\omega_1^3,$$

$$\bar\omega_1^4 = \bar\omega_3^2 = 0, \qquad \bar\omega_2^4 = \left(b\rho + aby + bx - \frac{2b^2\mu y}{\rho}\right)\omega_1^3 = b\bar\omega_1^3,$$

$$\bar\omega_4^2 = \frac{\mu}{\rho}\omega_1^3 = \bar\mu\bar\omega_1^3, \quad \bar\omega_3^1 = \frac{b\mu}{\rho}\omega_1^3 = \bar b\bar\mu\bar\omega_1^3,$$

$$\bar\omega_3^4 = \omega_3^4 - \frac{b\mu}{\rho}\omega_1^3 = \bar a\bar\omega_1^3 + b\bar\omega_1^2,$$

откуда

$$\bar{a} = \frac{a - 2\dfrac{b\mu}{\rho}}{\rho + x + ay - \dfrac{2b\mu y}{\rho}}, \qquad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\rho\left(\rho + x + ay - \dfrac{2b\mu y}{\rho}\right)}$$

и

$$[\bar{\omega}_4^1 \omega_1^3] = 2\frac{b\mu}{\rho} c_2 [\omega_1^2 \omega_1^3],$$

$$[\bar{\omega}_2^3 \omega_1^3] = \tag{8α}$$

$$= 2bc_2\left\{\rho + ay + x + 2\frac{b}{c_2}y_1 + \left(\frac{2b_2}{ac_2} - \frac{b_3}{c_2} + \frac{2b\mu}{\rho}\right)y + \frac{b_3}{ac_2}x\right\}[\omega_1^2\omega_1^3],$$

где

$$\Delta y = y_1(a\omega_1^3 + 2b\omega_1^2). \tag{8β}$$

Мы видим, что уравнения (1α) п. 62 удовлетворены. Удовлетворены и квадратичные уравнения (1γ) как дифференциальные следствия линейных, кроме уравнения (1β). Это уравнение дает конечное соотношение

$$-\frac{4b\mu y}{\rho}c_2 = \frac{b_3}{a}x + 2by_1 - y\left(b_3 - 2\frac{b_2}{a}\right). \tag{8γ}$$

Можно показать, что значение ρ, определяемое уравнением (8γ), удовлетворяет первому дифференциальному уравнению (6) п. 70, если поверхность $(A_{3'})$, которая послужила нам отправным пунктом для построения прямой A_3A_4 и выбора точки A_2 на каждой асимптотической касательной A_1A_2, будет поверхностью R_0, определяющей вместе с поверхностью (A_1) параболическую пару.

Таким образом, уравнение (8γ) определяет поверхность (B_1) и только одну, которая является поверхностью R_0, а ее асимптотическая касательная R_0 описывает параболическую конгруэнцию, которая вместе с такой же конгруэнцией поверхности (A_3), а также и поверхности $(A_{3'})$ образует параболические пары. Мы получаем четыре параболические пары конгруэнций (A_1A_2), (A_3A_4); (A_3A_4), (B_1B_2); (B_1B_2), $(A_{3'}A_{4'})$ и $(A_{3'}A_{4'})$, (A_1A_2), образующих замкнутый цикл, так что каждая пара с каждой соседней имеет общую конгруэнцию.

72. Расслояемая четверка. Уравнение (8γ) не определяет координаты ρ точки B, если

$$4b\mu c_2 y = 0, \qquad \frac{b_3}{a}x + 2by_1 + y\left(2\frac{b_2}{a} - b_3\right) = 0. \tag{8γ'}$$

Поскольку обращение в нуль $4b\mu c_2$ приводит к вырождению или конгруэнции (A_1A_2) или конгруэнции (A_3A_4), первое уравнение (8γ′) дает $y = 0$. Тогда из (7δ) п. 70 получим $\Delta y = -\dfrac{b_3 + ac_2}{a}x\omega_1^2$, и уравнение (8β) даст $y_1 = 0$ и $(b_3 + ac_2)x = 0$. Между тем второе уравнение (8γ′) дает $b_3 x = 0$. Поскольку обращение в нуль ac_2 приводит

к вырождению, мы должны положить $x = 0$; уравнения (7γ) обращаются в тождество, а уравнения (7β) принимают вид

$$\omega_4^3 = 0, \qquad \omega_2^1 = 0. \tag{7β'}$$

Эта система вполне интегрируема и для каждой параболической пары определяет положение точек A_2, A_4, т. е. конгруэнцию (A_2A_4) с двумя произвольными постоянными.

Геометрический смысл равенства (7β′) очень прост. Поскольку теперь имеем:

$$\begin{aligned} dA_2 &= \omega_2^2 A_2 + 2bc_2\omega_1^2 A_3 + \omega_1^3(bA_4 - b_3A_3), \\ dA_4 &= \omega_4^4 A_4 + 2bc_2\mu\omega_1^2 A_1 + \omega_1^3\{A_2 + (b_3 + 2ac_2)A_1\}\mu, \end{aligned} \tag{9α}$$

поверхности (A_2) и (A_4) касаются плоскостей $A_2A_3A_4$ и $A_4A_1A_2$, следовательно, служат фокальными поверхностями конгруэнции (A_2A_4). Асимптотические линии определяются на них уравнениями, соответственно,

$$\omega_2^3\omega_3^1 + \omega_2^4\omega_4^1 = 0, \qquad \omega_4^1\omega_1^3 + \omega_4^2\omega_2^3 = 0,$$

которые, в силу (12α), (13α), (14α) п. 66, (8α) п. 65, дают при $\mu \neq 0$ одно и то же уравнение

$$\omega_1^3(a\omega_1^3 + 2b\omega_1^2) = 0,$$

которое, как мы знаем, определяет асимптотические линии поверхностей (A_1) и (A_3). При этом асимптотические R_0 этих последних соответствуют линиям $\omega_1^3 = 0$, касательные к которым, как показывают формулы (9α), проходят через точки A_3 и, соответственно, A_4.

Теперь нетрудно обнаружить, что таблица компонент (8α) п. 65, (12α, β), (13α, β), (14α) п. 66, (7β′) п. 72 симметрична относительно подстановки указателей $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, причем коэффициенты b и μ принимают значение $b' = \mu$ и $\mu' = \dfrac{1}{b}$. Отсюда следует, что конгруэнции (A_4A_1) и (A_2A_3) образуют расслояемую пару, поверхности (A_2) и (A_4) являются поверхностями R_0, а конгруэнция (A_2A_4) преобразует одну поверхность R_0 в другую с соответствием асимптотических R_0 и сохранением величины коэффициента β кубичной формы Фубини.

73. Присоединенная пара θ. Две конгруэнции (A_1A_3) и (A_2A_4) одного и того же рода (преобразующие одну поверхность R_0 в другую с сохранением величины коэффициента β) находятся в особом положении одна относительно другой, именно фокусы произвольного луча каждой конгруэнции этой пары лежат в фокальных плоскостях соответствующего луча другой конгруэнции. Этим свойством обладают две конгруэнции пары T, примером которой служит расслояемая

9 Зак. 1277. С. П. Фиников

пара гиперболических конгруэнций, но в конфигурации T каждому фокусу F_i ($i=1, 2$) луча конгруэнции (F_1F_2) поставлен в соответствие определенный фокус G_i конгруэнции (G_1G_2) так, что каждый фокус F_i лежит в касательной плоскости поверхности (G_i), а фокус G_i — в касательной плоскости поверхности (F_i) и луч F_iG_i описывает конгруэнцию (вспомогательную) с фокальными поверхностями (F_i), (G_i).

Здесь фокус A_1 первой конгруэнции (A_1A_3) лежит в касательной плоскости фокальной поверхности (A_4) конгруэнции (A_2A_4), между тем как касательная плоскость поверхности (A_1) содержит фокус A_2 этой последней. Такая конфигурация называется *парой* θ *Попова* (см. гл. XIV).

Таким образом, для каждой параболической пары вполне интегрируемая система ($7\beta'$) п. 72 определяет с двумя произвольными постоянными присоединенную пару θ.

Эта пара не является общей парой θ. Она замечательна тем, что четыре вспомогательные конгруэнции, описанные прямыми, соединяющими попарно фокусы двух соответствующих лучей пары, и образующие замкнутый цикл, так что луч каждой конгруэнции цикла пересекает луч последующей конгруэнции в его фокусе, состоят из параболических конгруэнций, развертывающиеся поверхности которых соответствуют на всех четырех конгруэнциях.

Четыре конгруэнции R_0 этого цикла разбиваются на две пары противоположных (не смежных) конгруэнций, каждая из которых образует расслояемую параболическую пару, и развертывающиеся поверхности первой и второй пар соответствуют друг другу.

Мы будем называть такой цикл параболических конгруэнций расслояемой параболической четверкой.

74. Пара θ с параболическим циклом. Теорема. *Пара* θ *с циклом из параболических конгруэнций всегда присоединена к расслояемой параболической четверке.*

Если конгруэнции (A_1A_3) и (A_2A_4) образуют пару θ и каждая поверхность (A_1), (A_2), (A_3), (A_4) касается, соответственно, плоскости $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, то компоненты ω_i^k тетраэдра $[A_i]$ удовлетворяют соотношениям

$$\omega_1^4=0, \quad \omega_2^1=0, \quad \omega_3^2=0, \quad \omega_4^3=0. \tag{9β}$$

Если при этом каждая конгруэнция (A_1A_2), (A_2A_3), (A_3A_4), (A_4A_1) параболическая, то каждый из лучей A_iA_{i+1} ($i=1, \ldots, 4$; $5\equiv 1$ *)) касается на поверхности (A_i) асимптотической $\omega_i^{i+2}=0$. В силу $\omega_i^{i+3}=0$ уравнение асимптотических пишется

$$\omega_i^{i+1}\omega_{i+1}^{i+3}+\omega_i^{i+2}\omega_{i+2}^{i+3}=0,$$

*) В дальнейшем индексы $i+1$, $i+2$, $i+3$ приводятся по модулю 4.

а поскольку ω_i^{i+1}, ω_i^{i+2} линейно независимы, если поверхность (A_i) не вырождается, то $[\omega_{i+1}^{i+3}\omega_i^{i+2}]=0$ и два семейства развертывающихся поверхностей каждой конгруэнции совпадают. Если прямая (A_iA_{i+1}) описывает развертывающуюся поверхность, то инфинитезимально близкие лучи (A_iA_{i+1}) и $(A_i+dA_i, A_{i+1}+dA_{i+1})$ лежат в одной плоскости, т. е. удовлетворяется уравнение

$$(dA_i, dA_{i+1}, A_i, A_{i+1})=0,$$

откуда, в силу $\omega_i^{i+3}=0$, получим уравнение развертывающихся поверхностей

$$\omega_i^{i+2}\omega_{i+1}^{i+3}=0$$

и условие их совпадения

$$[\omega_i^{i+2}\omega_{i+1}^{i+3}]=0.$$

Для $i=1, 2, 3, 4$ мы получим только три независимых уравнения, которые при подходящем выборе обозначений a, b, μ можно написать в виде (12α), (13α) п. 66; внешние дифференциалы этих уравнений, а также уравнений (9β) дадут нам все уравнения (12β), (13β), т. е. приведут к параболической четверке.

75. Системы Бианки, присоединенные к расслояемой четверке. Теорема переместительности для преобразований поверхностей R_0 теперь принимает другой вид.

Мы построили два семейства ∞^1 поверхностей, которые служат асимптотическими преобразованиями 1-го и 2-го порядка поверхности (A_1); вместе с тем они служили расслояющими поверхностями для пары конгруэнций (A_1A_4), (A_2A_3). Эта пара — параболическая, вторая параболическая пара расслояемой четверки. Для этой пары поверхности (A_1) и (A_3) служат расслояющими поверхностями. Обратно, два семейства расслояющих поверхностей первой пары (A_1A_2), (A_3A_4) содержат поверхности (A_2), (A_4) и их асимптотические преобразования.

Таким образом, каждое семейство расслояющих поверхностей параболической пары всегда содержит одну поверхность R_0. Что представляют собой другие расслояющие поверхности?

Рассмотрим какие-нибудь две расслояющие поверхности (B_1) и (B_3) различных семейств

$$B_1=\rho A_1+A_4, \quad B_3=\rho' A_3+A_2.$$

С помощью уравнений (6) п. 70 получим:

$$dB_1=\omega_4^4 B_1+\rho\omega_1^2 A_2+\omega_1^3(\mu A_2+\rho A_3),$$

$$dB_3=\omega_2^2 B_3+\rho' b\omega_1^2 A_4+\omega_1^3\{\rho' a+b)\,A_4+b\mu\rho' A_1\}.$$

Если ввести $B_2 = A_2$, $B_4 = A_4$ и обозначить компоненты тетраэдра $\{B_i\}$ буквами $\overline{\omega}_i^k$, то немедленно получим:

$$\overline{\omega}_1^4 = \overline{\omega}_2^1 = \overline{\omega}_3^2 = \overline{\omega}_4^3 = 0, \quad \overline{\omega}_2^4 = \overline{b}\overline{\omega}_1^3, \quad \overline{\omega}_4^2 = \overline{\mu}\overline{\omega}_1^3, \quad \overline{\omega}_3^1 = \overline{b}\overline{\mu}\overline{\omega}_1^3,$$

где

$$\overline{b} = b\frac{\rho'}{\rho}, \quad \overline{\mu} = \mu\frac{\rho'}{\rho}, \quad \overline{\omega}_1^3 = \frac{\rho}{\rho'}\omega_1^3.$$

Уравнения (12α), (13α) п. 66, (9β) п. 74 удовлетворены; следовательно, тетраэдр $\{B_i\}$ описывает параболический цикл, т. е. расслояемую четверку из двух параболических пар (B_1A_2), (B_3A_4) и (A_2B_3), (A_4B_1).

Отсюда все расслояющие поверхности (B_1) и (B_3) суть поверхности R_0 с асимптотическими касательными R_0, проходящими, соответственно, через точки A_2 и A_4. Все конгруэнции системы Бианки, присоединенной к параболической паре, суть конгруэнции W, преобразующие поверхность R_0 в поверхность R_0 с сохранением коэффициента β кубичной формы Фубини.

ГЛАВА VIII

РАССЛОЯЕМЫЕ ЧЕТВЕРКИ

76. Присоединенные пары. Мы возвращаемся к теории гиперболических пар. Такая расслояемая пара конгруэнций (A_1A_2), (A_3A_4) всегда образует пару T; это означает, что прямые A_1A_3, A_2A_4, соединяющие сходственные фокусы исходной пары, описывают конгруэнции с теми же фокальными поверхностями (A_1), (A_3), (A_2), (A_4). Кроме этой пары «вспомогательных» конгруэнций, к паре T вообще и к расслояемой паре в частности присоединена пара «диагоналей», т. е. пара конгруэнций, описанных диагоналями A_1A_4, A_2A_3, основного четырехугольника.

Мы видели (п. 51), что только у сопряженной пары пара диагоналей (B_1B_4), (B_2B_3) расслояема.

Если расслояема пара вспомогательных конгруэнций, то все четыре конгруэнции пары T расслояемы и образуют расслояемую четверку. Если на тех же диагоналях можно построить еще одну пару T, то пара (B_1B_4), (B_2B_3) расслояема, а исходная пара (A_1A_2), (A_3A_4) сопряженная (п. 52).

Таким образом, конгруэнции диагоналей однозначно определяют присоединенную расслояемую пару, за исключением сопряженных.

77. Определяющая система уравнений. У расслояемой четверки не только первые две конгруэнции (A_1A_2), (A_3A_4), но и вторые (вспомогательные) (A_1A_3), (A_2A_4) образуют расслояемые пары. Расслояемость первой пары обеспечивается системой уравнений (10α—δ) п. 33.

Теперь надо потребовать существование еще двух семейств поверхностей (P) и (P'):

$$P = A_1 + \sigma A_3, \quad P' = A_2 + \sigma' A_4,$$

касательные плоскости которых в точках пересечения с лучом A_1A_3 (соответственно, A_2A_4) проходят через луч A_2A_4 (A_1A_3). Уравнения для определения неизвестных функций σ и σ′ можно получить из уравнений (3) п. 30 подстановкой указателей $\binom{2}{3}$ или $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ и заменой ρ на σ или на σ':

$$d\sigma+\omega_1^3+\sigma(\omega_3^3-\omega_1^1)-\sigma^2\omega_3^1=0, \tag{1α}$$

$$d\sigma'+\omega_2^4+\sigma'(\omega_4^4-\omega_2^2)-\sigma'^2\omega_4^2=0; \tag{1β}$$

условия полной интегрируемости их получаются из уравнений ($8\alpha-\gamma$) п. 33 подстановкой $\begin{pmatrix}2&1&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}$. В силу уравнений ($10\alpha$) п. 33 мы получим только одно независимое уравнение

$$[\omega_2^1\omega_1^2]+[\omega_3^4\omega_4^3]=0.$$

Вместе с уравнениями ($10\alpha-\gamma$) п. 33 для определения расслояемых четверок получается система

$$\omega_1^4=0,\quad \omega_2^3=0,\quad \omega_3^2=0,\quad \omega_4^1=0, \tag{2α}$$

$$[\omega_3^1\omega_1^3]-[\omega_4^2\omega_2^4]=0,\quad [\omega_2^1\omega_1^2]+[\omega_3^4\omega_4^3]=0, \tag{2β}$$

$$[\omega_1^2\omega_2^4]+[\omega_1^3\omega_3^4]=0,\quad [\omega_2^1\omega_1^3]+[\omega_2^4\omega_4^3]=0, \tag{2γ}$$

$$[\omega_3^1\omega_1^2]+[\omega_3^4\omega_4^2]=0,\quad [\omega_4^2\omega_2^1]+[\omega_4^3\omega_3^1]=0. \tag{2δ}$$

78. Теорема существования четверки. Характеристическая система форм для уравнений ($2\alpha-\delta$) содержит, кроме четырех форм (2α) и двух форм ω_1^3, ω_2^4, независимых на интегральном многообразии, еще шесть форм:

$$\omega_1^2,\quad \omega_2^1,\quad \omega_3^4,\quad \omega_4^3,\quad \omega_3^1,\quad \omega_4^2. \tag{a}$$

Система внешних уравнений ($2\beta-\gamma$) неправильная. Разрешая по лемме Картана уравнения (2γ) и первое (2β), получим (ср. п. 39):

$$\omega_3^4=\alpha\omega_1^3-\beta\omega_2^4,\quad \omega_2^1=\gamma'\omega_1^3+\beta'\omega_2^4, \tag{3α}$$

$$\omega_1^2=\beta\omega_1^3+\gamma\omega_2^4,\quad \omega_4^3=-\beta'\omega_1^3+\alpha'\omega_2^4, \tag{3β}$$

$$\omega_3^1=a\omega_1^3+b\omega_2^4,\quad \omega_4^2=-b\omega_1^3+c\omega_2^4. \tag{3γ}$$

Внося эти выражения в остальные уравнения (2β, δ), получим конечные уравнения:

$$a\gamma-2b\beta+c\alpha=0,$$

$$a\alpha'+2b\beta'+c\gamma'=0, \tag{4α}$$

$$\alpha\alpha'+\gamma\gamma'-2\beta\beta'=0. \tag{4β}$$

Первые два уравнения совпадают, если

$$\frac{\gamma}{\alpha'}=\frac{\beta}{-\beta'}=\frac{\alpha}{\gamma'}.$$

Но тогда уравнение (4β) приводится к виду

$$\alpha\gamma+\beta^2=0,$$

формы ω_3^4, ω_1^2 становятся пропорциональными, и конгруэнция (A_1A_3) вырождается, ибо из четырех главных форм ω_1^2, ω_1^4, ω_3^2, ω_3^4 луча A_1A_3 линейно независима только одна ω_1^2.

Оставляя этот случай в стороне, мы можем разрешить систему (4α) в виде уравнений (3) п. 39:

$$a=t(\beta\gamma'+\alpha\beta'),\quad 2b=-t(\alpha\alpha'-\gamma\gamma')\quad \text{и}\quad c=-t(\gamma\beta'+\alpha'\beta). \tag{5α}$$

Поскольку обращение α в нуль приводит к вырождению поверхности (A_1) в развертывающуюся (см. (18α) п. 46), мы должны полагать $\alpha\neq 0$, и тогда уравнение (4β) разрешается относительно α':

$$\alpha'=\frac{2\beta\beta'-\gamma\gamma'}{\alpha}. \tag{5β}$$

Таким образом, все коэффициенты разложения ($3\alpha-\gamma$) выражены через шесть параметров:

$$t,\quad \alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \beta',\quad \gamma'. \tag{b}$$

Наиболее общий двумерный интегральный элемент зависит от $N=6$ произвольных параметров. Он достигается регулярной цепью интегральных элементов. Полярная система элемента $\omega_1^3=u$, $\omega_2^4=v$ имеет вид:

$$\begin{gathered}u\omega_3^1-v\omega_4^2=0,\quad v\omega_1^2-u\omega_3^4=0,\quad u\omega_2^1-v\omega_4^3=0,\\ (\beta u+\gamma v)\omega_2^1-(\gamma'u+\beta'v)\omega_1^2-(\beta'u-\alpha'v)\omega_3^4-(\alpha u-\beta v)\omega_4^3=0,\\ (\beta u+\gamma v)\omega_3^1-(au+bv)\omega_1^2+(-bu+cv)\omega_3^4-(\alpha u-\beta v)\omega_4^2=0,\\ (\gamma'u+\beta'v)\omega_4^2-(-bu+cv)\omega_2^1+(au+bv)\omega_4^3+(\beta'u-\alpha'v)\omega_3^1=0,\end{gathered} \tag{6}$$

где a, b, c и α' имеют значения (5α, β).

Если определитель системы

$$uv(\alpha u^2-2\beta uv-\gamma v^2)(\gamma'u^2+2\beta'uv-\alpha'v^2)(au^2+2buv-cv^2)\neq 0 \tag{7}$$

не равен нулю, то система — в инволюции с характерами $s_1=6$, $s_2=0$ и *определяет расслояемые четверки с произволом шести функций одного аргумента.*

Обращение в нуль определителя (7) имеет место при обращении в нуль одной из трех скобок; если это не связывает значений u, v независимых на интегральном многообразии форм ω_1^3, ω_2^4, то может иметь место только при обращении в нуль коэффициентов α, β, γ или a, b, c или α', β', γ'; но это равносильно обращению в нуль форм $\omega_3^4=0$, $\omega_1^2=0$ или $\omega_3^1=0$, $\omega_4^2=0$, или $\omega_2^1=0$, $\omega_4^3=0$ и приводит к неподвижности прямой A_1A_3 или A_3A_4, или A_2A_4, т. е. к вырождению четверки.

79. Расслояющие поверхности четверки. Две расслояемые пары, составляющие одну четверку, внутренне связаны между собой. Это отражается и на их расслояющих поверхностях, которые мы сейчас будем рассматривать.

Теорема. *Асимптотические линии четырех семейств расслояющих поверхностей четверки соответствуют друг другу.*

Мы видели (п. 36), что асимптотические на всех расслояющих поверхностях (первого и второго семейства) первой пары определяются уравнением (13) п. 36:

$$\omega_3^1\omega_1^3-\omega_4^2\omega_2^4=0. \tag{8α}$$

Они определяются одним уравнением и на всех расслояющих поверхностях второй пары (A_1A_3), (A_2A_4), и уравнение это получается из уравнения (8α) подстановкой указателей $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$:

$$\omega_2^1\omega_1^2-\omega_4^3\omega_3^4=0. \tag{8β}$$

Внося в уравнения (8α, β) значения (3α — γ), мы получим с помощью (5α) одно и то же уравнение

$$a(\omega_1^3)^2+2b\omega_1^3\omega_2^4-c(\omega_2^4)^2=0, \tag{8γ}$$

что и доказывает теорему.

Каждая расслояемая пара четверки несет свою систему Бианки из конгруэнций W, описанных прямыми, которые соединяют попарно соответствующие точки расслояющих поверхностей первого и второго семейств. Расслояемая четверка несет, кроме того, две системы конгруэнций, лучи которых проходят через соответствующие точки расслояющих поверхностей различных пар или являются линиями пересечения их касательных поверхностей. Эти конгруэнции мы будем называть *присоединенными*.

Теорема. *Две расслояющие поверхности, одна первой, другая второй пары одной расслояемой четверки, сопряжены конгруэнции прямых, соединяющих соответствующие точки их, и гармоничны конгруэнции линий пересечения соответствующих касательных плоскостей.*

Согласно определению сопряженности (гармоничности) конгруэнции прямых и поверхности достаточно доказать, что развертывающиеся поверхности конгруэнции соответствуют линиям сопряженной системы на поверхности.

Рассмотрим две поверхности (M) и (P):

$$M=A_1+\rho A_2,\quad P=A_1+\sigma A_3,$$

где ρ определяется уравнением (3) п. 30 и σ — уравнением (1α) п. 77.

Развертывающиеся поверхности конгруэнции (MP) определяются требованием: инфинитезимально близкие лучи (MP) и $(M+dM,\ P+dP)$, т. е. лучи дифференциальной окрестности 1-го порядка, должны лежать в одной плоскости. Отсюда уравнение

$$(dM,\ dP,\ M,\ P)=0.$$

Если воспользоваться формулой (a) п. 36:

$$dM=M(\omega_1^1+\rho\omega_2^1)+A_3\omega_1^3+A_4\rho\omega_2^4, \tag{9α}$$

$$dP=P(\omega_1^1+\sigma\omega_3^1)+A_2\omega_1^2+A_4\sigma\omega_3^4, \tag{9β}$$

то уравнение примет вид

$$(A_3\omega_1^3+A_4\rho\omega_2^4,\ A_2\omega_1^2+A_4\sigma\omega_3^4,\ A_1+\rho A_2,\ A_1+\sigma A_3)=0,$$

откуда, перемножая, имеем, в силу $(A_1A_2A_3A_4)\neq 0$,

$$\omega_1^3\omega_3^4-\omega_1^2\omega_2^4=0$$

и с помощью (3α, β) п. 78

$$\alpha(\omega_1^3)^2-2\beta\omega_1^3\omega_2^4-\gamma(\omega_2^4)^2=0. \tag{10α}$$

В силу первого уравнения (4α) п. 78 уравнения (8γ) и (10α) аполярны *), т. е. пары корней уравнений (8γ) и (10α) гармонически разделяют друг друга. Поскольку пара касательных, гармонически разделяющих асимптотические направления, сопряжена, развертывающиеся поверхности (10α) секут поверхность (M), а также и поверхность (P) по сопряженной системе.

Вторая половина теоремы следует по принципу двойственности.

---

*) Два квадратных уравнения

$$ax^2-2bx+c=0,\quad \alpha y^2+2\beta y+\gamma=0 \tag{a}$$

аполярны, если сложное отношение их корней $(x_1x_2y_1y_2)$ равно -1:

$$\frac{x_1-y_1}{x_2-y_1}:\frac{x_1-y_2}{x_2-y_2}=-1\quad\text{или}\quad\frac{x_1-y_1}{x_2-y_1}+\frac{x_1-y_2}{x_2-y_2}=0,$$

но

$$(x_1-y_1)(x_2-y_2)+(x_1-y_2)(x_2-y_1)=$$
$$=2(x_1x_2+y_1y_2)-(x_1+x_2)(y_1+y_2)=$$
$$=2\left(\frac{c}{a}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)+4\frac{b}{a}\frac{\beta}{\alpha}=2\frac{\alpha c+a\gamma+2b\beta}{a\alpha},$$

так как по теореме Виета

$$x_1x_2=\frac{c}{a},\quad y_1y_2=\frac{\gamma}{\alpha},\quad x_1+x_2=\frac{2b}{a},\quad y_1+y_2=-\frac{2\beta}{\alpha}.$$

Отсюда условие аполярности уравнений (a)

$$\alpha c+2b\beta+a\gamma=0. \tag{b}$$

80. Присоединенные системы конгруэнций. Уравнение (10α) не зависит от выбора решений ρ, σ уравнения (3) п. 30 или (1α) п. 77. Следовательно, развертывающиеся поверхности всех конгруэнций (MP) соответствуют друг другу независимо от выбора поверхности (M) или (P) среди расслояющих поверхностей, присоединенных к конгруэнциям (A_1A_2) или (A_1A_3).

Выполняя подстановку указателей $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, мы перейдем к конгруэнциям (A_4A_3) и (A_4A_2), к семействам расслояющих поверхностей (M') и (P') и к развертывающимся поверхностям произвольной конгруэнции ($M'P'$), определяемым уравнением

$$\omega_4^2\omega_2^1 - \omega_4^3\omega_3^1 = 0.$$

С помощью формул (3α—γ) п. 78 это уравнение преобразуется к уравнению вида

$$(a\beta' - b\gamma')(\omega_1^3)^2 - (a\alpha' - c\gamma')\,\omega_1^3\omega_2^4 + (-b\alpha' + c\beta')(\omega_2^4)^2 = 0, \qquad (10\alpha')$$

оторое, в силу (5α, β) п. 78, эквивалентно уравнению (10α).

Аналогично, соединяя попарно расслояющие поверхности, присоединенные к конгруэнциям (A_2A_1) и (A_2A_4) или (A_3A_4) и (A_3A_1), получим конгруэнции, развертывающиеся поверхности которых определяются уравнением

$$\gamma'(\omega_1^3)^2 + 2\beta'\omega_1^3\omega_2^4 - \alpha'(\omega_2^4)^2 = 0. \qquad (10\beta)$$

Отсюда теорема:

Развертывающиеся поверхности двух систем конгруэнций, лучи которых соединяют сходственные точки или лежат в сходственных плоскостях любой пары расслояющих поверхностей, присоединенных к двум конгруэнциям четверки, описанным парой смежных сторон косого четырехугольника, соответствуют друг другу.

Сопряженную сеть (10α) фокальной поверхности (A_1) (или A_4), которая соответствует развертывающимся поверхностям присоединенных конгруэнций, будем называть *сопряженной сетью присоединенных к поверхности конгруэнций*.

81. Последовательность Лапласа, порожденная сопряженно сетью присоединенных конгруэнций. Эта теорема весьма существенно дополняется новыми результатами относительно фокусов фокальных плоскостей присоединенных конгруэнций.

Теорема. *Вся система ∞^2 конгруэнций, лучи которых со единяют сходственные точки расслояющих поверхностей* (M) *и* (P *присоединенных к конгруэнциям* (A_1A_2), (A_1A_3), *вписана в посл довательность Лапласа, порождаемую сопряженной сетью лини*

$$\alpha(\omega_1^3)^2 - 2\beta\omega_1^3\omega_2^4 - \gamma(\omega_2^4)^2 = 0 \qquad (10\gamma)$$

на поверхности (A_1).

Фокусы луча MP

$$F = M + lP$$

являются точками касания луча MP с фокальной поверхностью (F). Следовательно, для любых направлений дифференцирования d и δ имеет место уравнение

$$(dF,\ \delta F,\ M,\ P) = 0. \qquad (a)$$

Отсюда с помощью разложений (9α, β) п. 79, а также формул (3α—γ) п. 77, полагая $\omega_1^3(\delta) = 0$, $\omega_2^4(d) = 0$, приведем уравнение (a) к виду

$$(A_3 + l\beta A_2 + l\sigma\alpha A_4,\ \rho A_4 + l\gamma A_2 - l\sigma\beta A_4,\ A_1 + \rho A_2,\ A_1 + \sigma A_3) = 0,$$

или, раскрывая скобки и сокращая на $(A_1A_2A_3A_4) \neq 0$,

$$l^2\sigma^2(\beta^2 + \alpha\gamma) = \rho^2. \qquad (11)$$

Отсюда для двух значений $\varepsilon = \pm 1$ получаем два фокуса $F_1(\varepsilon = 1)$, $F_2(\varepsilon = -1)$:

$$F_{1,2} = \left(1 + \varepsilon\frac{\rho}{\sigma\sqrt{\alpha\gamma + \beta^2}}\right)A_1 + \rho\left(A_2 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\alpha\gamma + \beta^2}}A_3\right). \qquad (11')$$

Геометрическое место этих фокусов для всех решений ρ и σ вполне интегрируемых уравнений (3) п. 30 и (1α) п. 77 образует пару прямых

$$(A_1,\ A_3 + A_2\sqrt{\alpha\gamma + \beta^2}), \quad (A_1,\ A_3 - A_2\sqrt{\alpha\gamma + \beta^2}), \qquad (12)$$

которые проходят через точку A_1, лежат в касательной плоскости поверхности (A_1) и касаются на этой поверхности линий системы (10γ). Это уравнение аполярно уравнению асимптотических поверхности (A_1)

$$\alpha(\omega_1^3)^2 + \gamma(\omega_2^4)^2 = 0,$$

следовательно, определяет на поверхности (A_1) сопряженную систему.

Поэтому прямые (12) описывают две конгруэнции одной последовательности Лапласа. Фокусы всех конгруэнций (MP) лежат на лучах последовательности (10γ) п. 81, развертывающиеся поверхности соответствуют этой сопряженной сети.

Следовательно, конгруэнции (MP) вписаны в последовательность, порождаемую сопряженной системой (10γ) поверхности (A_1).

По принципу двойственности следует теорема:

Система ∞^2 конгруэнций, образованных линиями пересечения сходственных касательных плоскостей расслояющих поверхностей (M) *и* (P), *присоединенных к конгруэнциям* (A_1A_2), (A_1A_3), *описана около последовательности Лапласа, порождаемой сопряженной сетью* (10γ) *поверхности* (A_1).

Само собой понятно, что в этих построениях поверхность (A_1) можно заменить любой фокальной поверхностью (A_i) расслояемой четверки.

82. Сопряженные четверки. Расслояемая четверка называется *сопряженной*, если состоит из двух сопряженных пар.

Можно высказать целый ряд предложений относительно сопряженных пар.

1. Если расслояемая четверка содержит одну конгруэнцию W, то и три остальные — тоже конгруэнции W; обе расслояемые пары четверки и пара диагоналей сопряженные.

2. Система Бианки расслояемой пары содержит в себе сопряженную четверку только, если она сама сопряженная.

3. Если среди трех пар конгруэнций, описанных ребрами подвижного тетраэдра, две пары сопряженные, то сопряженной будет и третья.

4. Если три пары конгруэнций, описанных ребрами подвижного тетраэдра конфигурации T расслояемы, то они все сопряженные.

Доказательство 1. Если конгруэнция (A_1A_2) есть конгруэнция W, то (17) п. 47 дает

$$\alpha\alpha' - \gamma\gamma' = 0 \tag{13}$$

и, в силу (5α) п. 78,

$$b = 0,$$

откуда по формулам (3γ) п. 78

$$\omega_3^1 = a\omega_1^3, \qquad \omega_4^2 = c\omega_2^4.$$

Развертывающиеся поверхности конгруэнции (A_1A_2): $\omega_1^3 = 0$, $\omega_2^4 = 0$ и конгруэнции (A_3A_4): $\omega_3^1 = 0$, $\omega_4^2 = 0$ соответствуют прямо, и пара (A_1A_2), (A_3A_4) сопряженная (п. 50).

Сходственные развертывающиеся поверхности конгруэнций (A_1A_3), (A_2A_4) определяются уравнениями: $\omega_1^2 = 0$ и $\omega_2^1 = 0$; $\omega_3^4 = 0$ и $\omega_4^3 = 0$; но, в силу ($3\alpha, \beta$) п. 78,

$$[\omega_1^2\omega_2^1] = (\beta\beta' - \gamma\gamma')[\omega_1^3\omega_2^4], \qquad [\omega_3^4\omega_4^3] = (\alpha\alpha' - \beta\beta')[\omega_1^3\omega_2^4].$$

Между тем из уравнений (4β) п. 78 и (13) следует

$$\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma'. \tag{13'}$$

Развертывающиеся поверхности конгруэнций (A_1A_3), (A_2A_4) соответствуют прямо, и пара сопряженная. В силу теорем п. 51, все эти конгруэнции — конгруэнции W.

Наконец, для пары диагоналей (A_1A_4), (A_2A_3) была доказана (п. 51) расслояемость, если пара (A_1A_2), (A_3A_4) сопряженная. Остается показать, что системы линий, высекаемых развертывающимися поверхностями на какой-нибудь расслояющей поверхности, сопряжены.

Развертывающиеся поверхности конгруэнций (A_1A_4), (A_2A_3) определяются уравнениями

$$(dA_1\, dA_4\, A_1A_4) = 0, \qquad (dA_2\, dA_3\, A_2A_3) = 0$$

или

$$(\omega_1^2A_2 + \omega_1^3A_3,\ \omega_4^2A_2 + \omega_4^3A_3,\ A_1,\ A_4) = 0,$$
$$(\omega_2^1A_1 + \omega_2^4A_4,\ \omega_3^1A_1 + \omega_3^4A_4,\ A_2,\ A_3) = 0,$$

или

$$\omega_1^2\omega_4^3 - \omega_1^3\omega_4^2 = 0, \qquad \omega_2^1\omega_3^4 - \omega_2^4\omega_3^1 = 0,$$

или, в силу (3α—γ) п. 78,

$$\beta\beta'(\omega_1^3)^2 + (c - \alpha'\beta + \beta'\gamma)\,\omega_1^3\omega_2^4 - \alpha'\gamma\,(\omega_2^4)^2 = 0, \tag{14α}$$

$$\alpha\gamma'(\omega_1^3)^2 - (a - \alpha\beta' + \beta\gamma')\,\omega_1^3\omega_2^4 - \beta\beta'(\omega_2^4)^2 = 0. \tag{14β}$$

Между тем на расслояющих поверхностях (A_1) и (A_2) асимптотические определяются уравнениями

$$\alpha(\omega_1^3)^2 + \gamma(\omega_2^4)^2 = 0, \tag{15α}$$

$$\gamma'(\omega_1^3)^2 + \alpha'(\omega_2^4)^2 = 0. \tag{15β}$$

Условие аполярности уравнений (14α) и (15α), (14β) и (15β)

$$(\beta\beta' - \alpha\alpha')\gamma = 0, \qquad (\alpha\alpha' - \beta\beta')\gamma' = 0 \tag{16}$$

удовлетворено в силу (13′). Следовательно, системы линий (14α) на поверхности (A_1), (14β) на поверхности (A_2) сопряженные. Этого достаточно, чтобы пара (A_1A_4), (A_2A_3) была сопряженной.

Доказательство 2. Если за исходную пару принять пару диагоналей (A_1A_4), (A_2A_3), а за расслояющие поверхности, которые образуют четыре фокальные поверхности сопряженной четверки, — поверхности (A_1), (A_2), (A_3), (A_4), то второе предложение будет прямо вытекать из первого.

Доказательство 3. Если две сопряженные пары описываются сторонами косого четырехугольника, то они образуют расслояемую четверку и содержат конгруэнции W; следовательно, в этом случае теорема 3 вытекает из теоремы 1.

Если же одна из сопряженных пар описана диагоналями, а другая — сторонами A_1A_2, A_3A_4 четырехугольника, то развертывающиеся поверхности конгруэнций диагоналей будут попрежнему определяться уравнениями (14α, β) и попрежнему эти уравнения должны быть аполярны уравнениям асимптотических (15α, β), ибо пара диагоналей — сопряженная. Мы придем к уравнениям (16), откуда при $\gamma\gamma' \neq 0$ следуют уравнения ($13'$) и основная четверка будет сопряженной.

Доказательство 4. Если пара диагоналей расслояема, то по теореме п. 51 основная пара (A_1A_2), (A_3A_4) сопряженная, следовательно, содержит конгруэнции W, и теорема 4 вытекает из теоремы 1.

83. Две расслояемые пары с пересекающимися соответствующими лучами. При доказательстве четвертой теоремы мы опирались на предположение, что две первые конгруэнции образуют пару T. Это допущение существенно, ибо существуют расслояемые пары, между лучами которых может быть установлено такое соответствие, что из четверки соответствующих лучей каждый луч первой пары пересекает каждый луч второй пары. При этом четыре конгруэнции обеих пар описываются сторонами одного косого четырехугольника, но фокусы сторон не совпадают с вершинами подвижного четырехугольника.

Рассмотрим эту конфигурацию. Присоединим к каждой четверке лучей тетраэдр $\{A_i\}$, ребра которого совпадают с лучами четверки, и допустим, что инфинитезимальные проективные перемещения тетраэдра $\{A_i\}$ определяются уравнениями (46) п. 23.

Существование двух семейств поверхностей (M), (M')

$$M = A_1 + \rho A_2, \qquad M' = A_3 + \rho' A_4, \tag{a}$$

касательные плоскости которых в точках пересечения с лучом A_1A_2 (соответственно, A_3A_4) проходят через луч A_3A_4 (A_1A_2), обеспечивается квадратичными уравнениями (5) п. 31 и второй серией таких же уравнений, которые можно получить из уравнений (5) п. 31 подстановкой указателей $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. Они образуют систему ($8\alpha$—$\gamma$) п. 33:

$$[\omega_2^3\omega_3^1] + [\omega_2^4\omega_4^1] = 0, \qquad [\omega_1^3\omega_3^2] + [\omega_1^4\omega_4^2] = 0, \tag{16α}$$

$$[\omega_1^3\omega_3^1] + [\omega_4^2\omega_2^4] = 0, \qquad [\omega_1^4\omega_4^1] + [\omega_3^2\omega_2^3] = 0, \tag{16β}$$

$$[\omega_4^1\omega_1^3] + [\omega_4^2\omega_2^3] = 0, \qquad [\omega_3^1\omega_1^4] + [\omega_3^2\omega_2^4] = 0. \tag{16γ}$$

Подстановка указателей $\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$ дает нам вторую группу уравнений, которая обеспечивает расслояемость пары (A_1A_3), (A_2A_4):

$$[\omega_3^2\omega_2^1] + [\omega_3^4\omega_4^1] = 0, \qquad [\omega_1^2\omega_2^3] + [\omega_1^4\omega_4^3] = 0, \tag{16δ}$$

$$[\omega_1^2\omega_2^1] + [\omega_4^3\omega_3^4] = 0, \qquad [\omega_1^4\omega_4^1] + [\omega_2^3\omega_3^2] = 0, \tag{16ε}$$

$$[\omega_4^1\omega_1^2] + [\omega_4^3\omega_3^2] = 0, \qquad [\omega_2^1\omega_1^4] + [\omega_2^3\omega_3^4] = 0. \tag{16ζ}$$

Уравнения правого столбца далее отмечаются штрихами ($16\alpha'$, ...).

Уравнения (16α—ζ), ($16\alpha'$—ζ') составляют все уравнения нашей задачи.

Из уравнений ($16\beta'$, ε') следует

$$[\omega_1^4\omega_4^1] = 0, \quad [\omega_2^3\omega_3^2] = 0. \tag{17}$$

Уравнения (17) удовлетворены, если $\omega_1^4 = \omega_2^3 = 0$, но тогда при $[\omega_1^3\omega_2^4] \neq 0$ уравнения (16α, α'), (16γ, γ') дадут $\omega_4^1 = \omega_3^2 = 0$ и тетраэдр будет описывать пару T расслояемой четверки. Если $\omega_1^4 = \omega_3^2 = 0$ и $[\omega_4^1\omega_2^3] \neq 0$, то из ($16\delta$, δ'), (16ζ, ζ') следует $\omega_3^4 = \omega_1^2 = 0$ и прямая A_1A_3 будет неподвижна, а если $\omega_4^1 = \lambda\omega_2^1$, то $\omega_3^4 = \mu\omega_2^3$, $\omega_1^2 = \nu\omega_2^3$ и конгруэнция (A_1A_3) вырождается в линейчатую поверхность. Тот же результат получим, полагая $\omega_1^4 = \xi\omega_2^3$, $\omega_4^1 = \eta\omega_2^3$, $\omega_3^2 = \zeta\omega_2^3$.

Следовательно, мы можем положить

$$[\omega_1^4\omega_2^3] \neq 0.$$

Тогда (17) дают

$$\omega_4^1 = \lambda\omega_1^4, \qquad \omega_3^2 = \mu\omega_2^3 \tag{18α}$$

и, развертывая по лемме Картана остальные уравнения (16α—ζ), ($16\alpha'$—ζ'), получим:

$$\begin{aligned}
&\omega_2^1 = \lambda x\omega_1^4 + y\omega_2^3, && \omega_1^2 = y'\omega_1^4 + \mu x'\omega_2^3,\\
&\omega_3^4 = -y\omega_1^4 - \mu x\omega_2^3, && \omega_4^3 = -\lambda x'\omega_1^4 - y'\omega_2^3,\\
&\omega_2^4 = \xi\omega_1^4 + \eta\omega_2^3, && \omega_1^3 = \eta'\omega_1^4 + \xi'\omega_2^3,\\
&\omega_3^1 = -\lambda\eta\omega_1^4 - \mu\xi\omega_2^3, && \omega_4^2 = -\lambda\xi'\omega_1^4 - \mu\eta'\omega_2^3,
\end{aligned} \tag{18β}$$

где λ, μ, x, y, ξ, η и штрихованные — 10 новых неизвестных функций.

Дифференцируя уравнения (18α, β) внешним образом, получим систему квадратичных уравнений:

$$\begin{aligned}
&[\Delta\lambda\,\omega_1^4] = 0, && [\Delta\mu\,\omega_2^3] = 0,\\
&\xi[\Delta\xi\,\omega_1^4] + \eta[\Delta\eta\,\omega_2^3] = 0, && \eta'[\Delta\eta'\,\omega_1^4] + \xi'[\Delta\xi'\,\omega_2^3] = 0,\\
&\lambda\eta[\Delta\eta\,\omega_1^4] + \mu\xi[\Delta\xi\,\omega_2^3] = 0, && \lambda\xi'[\Delta\xi'\,\omega_1^4] + \mu\eta'[\Delta\eta'\,\omega_2^3] = 0,\\
&\lambda x[\Delta x\,\omega_1^4] + y[\Delta y\,\omega_2^3] = 0, && y'[\Delta y'\,\omega_1^4] + \mu x'[\Delta x'\,\omega_2^3] = 0,\\
&y[\Delta y\,\omega_1^4] + \mu x[\Delta x\,\omega_2^3] = 0, && \lambda x'[\Delta x'\,\omega_1^4] + y'[\Delta y'\,\omega_2^3] = 0,
\end{aligned} \tag{19α}$$

где

$$\Delta\lambda = d\ln\lambda + 2(\omega_1^1 - \omega_4^4) + 2(\mu\xi x' + \mu\eta' x - \eta y' - \xi' y)\,\omega_2^3,$$

$$\Delta\mu = d\ln\mu + 2(\omega_2^2 - \omega_3^3) + 2(\lambda\xi' x + \lambda\eta x' - \eta' y - \xi y')\,\omega_1^4,$$

$$\Delta x = d\ln x + \omega_4^4 - \omega_2^2 - (\lambda\eta x' + \lambda\xi' x - \xi y')\,\omega_1^4 - (\mu\xi x' + \mu\eta' x - \eta y')\,\omega_2^3,$$

$$\Delta x' = d\ln x' + \omega_3^3 - \omega_1^1 - (\lambda\xi' x + \lambda\eta x' - \eta' y)\,\omega_1^4 - \{\mu\eta' x + \mu\xi x' - \xi' y\}\,\omega_2^3,$$

$$\Delta y = d\ln y + \omega_1^1 - \omega_3^3 + \{\lambda\eta x' - (\xi y' + \eta' y)\}\,\omega_1^4 + \\ + \{\mu\xi x' - (\eta y' + \xi' y)\}\,\omega_2^3,$$

$$\Delta y' = d\ln y' + \omega_2^2 - \omega_4^4 + \{\lambda\xi' x - (\eta' y + \xi y')\}\,\omega_1^4 + \\ + \{\mu\eta' x - (\xi' y + \eta y')\}\,\omega_2^3, \qquad (19\beta)$$

$$\Delta\xi = d\ln\xi + \omega_1^1 - \omega_2^2 - \{\lambda\xi' x - (\xi y' + \eta' y)\}\,\omega_1^4 + \\ + \{\mu(\xi x' + \eta' x) - \xi' y\}\,\omega_2^3,$$

$$\Delta\xi' = d\ln\xi' + \omega_2^2 - \omega_1^1 + \{\lambda(\xi' x + \eta x') - \xi y'\}\,\omega_1^4 - \\ - \{\mu\xi x' - (\xi' y + \eta y')\}\,\omega_2^3,$$

$$\Delta\eta = d\ln\eta + \omega_4^4 - \omega_3^3 + \{\lambda(\eta x' + \xi' x) - \eta' y\}\,\omega_1^4 - \\ - \{\mu\eta' x - (\xi' y + \eta y')\}\,\omega_2^3,$$

$$\Delta\eta' = d\ln\eta' + \omega_3^3 - \omega_4^4 - \{\lambda\eta x' - (\xi y' + \eta' y)\}\,\omega_1^4 + \\ + \{\mu(\xi x' + \eta' x) - \eta y'\}\,\omega_2^3.$$

Характеристическая система содержит, кроме форм ω_1^4, ω_2^3, независимых на интегральном многообразии, и левых частей уравнений (18α, β), еще $q = 10$ форм (19β). Система внешних уравнений (19α) правильная. Ранг полярной матрицы элемента $\omega_1^4 = u$, $\omega_2^3 = v$ равен $s_1 = 10$, если

$$uv\xi\eta xy\xi'\eta' x' y' (\lambda u^2 - \mu v^2) \neq 0. \qquad (19\gamma)$$

Произвол наиболее общего интегрального элемента $\mathfrak{E}_2$, равный числу независимых квадратичных уравнений, тоже равен $N = 10$. Система — в инволюции с характерами $s_1 = 10$, $s_2 = 0$ и определяет искомую конфигурацию расслояемых пар с произволом 10 функций от одного аргумента.

Неравенство (19γ) показывает, что на интегральном многообразии $\mathfrak{M}_2$ характеристиками являются линии

$$\lambda(\omega_1^4)^2 - \mu(\omega_2^3)^2 = 0. \qquad (20)$$

Геометрический смысл этих линий нетрудно усмотреть. Пользуясь уравнением (3) п. 30 для параметра ρ расслояющих поверхностей (a),

получим:

$$dM = M(\omega_1^1 + \rho\omega_2^1) + A_3(\omega_1^3 + \rho\omega_2^3) + A_4(\omega_1^4 + \rho\omega_2^4).$$

Отсюда уравнение асимптотических линий на поверхности (M)

$$(d^2MMA_3A_4) = 0$$

или

$$\big((\omega_1^3 + \rho\omega_2^3)\,dA_3 + (\omega_1^4 + \rho\omega_2^4)\,dA_4,\ A_1 + \rho A_2,\ A_3,\ A_4\big) = 0,$$

или

$$(\omega_1^3 + \rho\omega_2^3)(\rho\omega_3^1 - \omega_3^2) + (\omega_1^4 + \rho\omega_2^4)(\rho\omega_4^1 - \omega_4^2) = 0, \qquad (\mathfrak{b})$$

но, в силу (18α, β),

$$\omega_2^3\omega_3^1 + \omega_2^4\omega_4^1 = \xi\{\lambda(\omega_1^4)^2 - \mu(\omega_2^3)^2\},$$

$$\omega_1^3\omega_3^2 + \omega_1^4\omega_4^2 = -\xi'\{\lambda(\omega_1^4)^2 - \mu(\omega_2^3)^2\},$$

$$\omega_1^3\omega_3^1 - \omega_2^3\omega_3^2 + \omega_1^4\omega_4^1 - \omega_2^4\omega_4^2 = (1 + \xi\xi' - \eta\eta')\{\lambda(\omega_1^4)^2 - \mu(\omega_2^3)^2\}.$$

Следовательно, уравнение ($\mathfrak{b}$) эквивалентно уравнению (20) и определяет асимптотические линии на расслояющих поверхностях (M), (M') первой пары. Такие же выкладки покажут, что асимптотические линии на расслояющих поверхностях второй пары (A_1A_3), (A_2A_4) тоже определяются уравнением (20).

Отсюда теорема:

Если соответствующие лучи двух расслояемых пар пересекаются, то асимптотические линии на всех четырех семействах расслояющих поверхностей соответствуют.

84. Теорема о тройке расслояемых пар, описанных ребрами одного тетраэдра. Теперь мы можем доказать четвертую теорему п. 82 во всей общности.

Рассмотрим конфигурацию двух расслояемых пар с пересечением соответствующих лучей, определяемую уравнениями (18α, β), (19α) п. 83, и допустим, что пара диагоналей тоже расслояема. Условие ее расслояемости получается из уравнений (16α—γ) подстановкой указателей $\binom{2}{4}$:

$$[\omega_4^3\omega_3^1] + [\omega_4^2\omega_2^1] = 0, \quad [\omega_1^3\omega_3^4] + [\omega_1^2\omega_2^4] = 0,$$

$$[\omega_1^3\omega_3^1] + [\omega_2^4\omega_4^2] = 0, \quad [\omega_1^2\omega_2^1] + [\omega_3^4\omega_4^3] = 0, \qquad (21)$$

$$[\omega_2^1\omega_1^3] + [\omega_2^4\omega_4^3] = 0, \quad [\omega_3^1\omega_1^2] + [\omega_3^4\omega_4^2] = 0.$$

Внося сюда значения (18β) и приравнивая нулю коэффициенты при $[\omega_1^4\omega_2^3] \neq 0$, получим только четыре уравнения:

$$yy' = \lambda\mu xx', \qquad \lambda\xi'\eta = \mu\xi\eta', \qquad (22\alpha)$$

$$\mu(\xi x' + \eta' x) = \eta y' + \xi' y, \quad \lambda(\eta x' + \xi' x) = \eta' y + \xi y'. \qquad (22\beta)$$

Первые два уравнения при xx', $\eta\eta'$, не равных нулю, можно разрешить с помощью параметров t и τ в виде

$$y = t\lambda x, \quad y' = \frac{1}{t}\mu x', \quad \xi = \tau\lambda\eta, \quad \xi' = \tau\mu\eta', \tag{22γ}$$

и тогда уравнения (22β) принимают вид

$$\begin{aligned} (\eta x' - t\eta' x)(t\tau\lambda - 1) &= 0, \\ (\eta x' - t\eta' x)(\tau\mu - t) &= 0. \end{aligned} \tag{a}$$

Если $\eta x' - t\eta' x \neq 0$, то

$$\tau\mu = t, \quad \tau\lambda = \frac{1}{t}, \quad \xi = \frac{\eta}{t}, \quad \xi' = t\eta', \quad y = \frac{x}{\tau}, \quad y' = \frac{x'}{\tau}$$

и по формулам (18β) п. 83, (22γ)

$$\begin{aligned} &\omega_1^2 = y'(\omega_1^4 + t\omega_2^3), && \omega_3^4 = -y(\omega_1^4 + t\omega_2^3), \\ &\omega_1^3 = \eta'(\omega_1^4 + t\omega_2^3), && \omega_3^1 = -\frac{\xi}{\tau}(\omega_1^4 + t\omega_2^3), \\ &\omega_2^1 = \frac{y}{t}(\omega_1^4 + t\omega_2^3), && \omega_4^3 = -\frac{y'}{t}(\omega_1^4 + t\omega_2^3), \\ &\omega_2^4 = \xi(\omega_1^4 + t\omega_2^3), && \omega_4^2 = -\frac{\eta'}{\tau}(\omega_1^4 + t\omega_2^3), \end{aligned}$$

откуда прямо следует, что при $\omega_1^4 + t\omega_2^3 = 0$ прямые A_1A_4 и A_2A_3 стоят на месте, ибо все главные формы их ω_1^2, ω_1^3, ω_4^2, ω_4^3; ω_2^1, ω_2^4, ω_3^1, ω_3^4 равны нулю, т. е. конгруэнции диагоналей описывают линейчатые поверхности.

Следовательно, мы должны положить равным нулю первый множитель в уравнениях (a). Исключая с помощью (22γ) параметр t и привлекая уравнения (22α, β), мы получим четыре уравнения:

$$\begin{aligned} &y\eta' = \lambda x'\eta, && \xi' y = \mu x'\xi, \\ &y'\eta = \mu x\eta', && \xi y' = \lambda x\xi', \end{aligned} \tag{23}$$

из которых независимы только три, ибо, перемножая почленно уравнения левого столбца или правого, в обоих случаях мы получаем первое уравнение (22α), а если умножить почленно накрест уравнения первой строки на уравнения второй, то получим оба раза второе уравнение (22α).

Теперь нетрудно показать, что у каждой из трех расслояемых пар, в силу уравнений (23), развертывающиеся поверхности соответствуют.

Развертывающиеся поверхности конгруэнции (A_1A_2) определяются уравнением

$$(dA_1\, dA_2 A_1 A_2) = 0$$

или

$$\omega_1^3\omega_2^4 - \omega_1^4\omega_2^3 = 0. \tag{24α}$$

Делая подходящую подстановку указателей, получим уравнения развертывающихся поверхностей:

для конгруэнций	посредством подстановки		
(A_3A_4)	$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$	$\omega_3^1\omega_4^2 - \omega_3^2\omega_4^1 = 0,$	
(A_1A_3)	$\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$	$\omega_1^2\omega_3^4 - \omega_1^4\omega_3^2 = 0,$	
(A_2A_4)	$\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}$	$\omega_4^3\omega_2^1 - \omega_4^1\omega_2^3 = 0,$	(24β)
(A_1A_4)	$\begin{pmatrix}2\\ 4\end{pmatrix}$	$\omega_1^3\omega_4^2 - \omega_1^2\omega_4^3 = 0,$	
(A_2A_3)	$\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$	$\omega_3^1\omega_2^4 - \omega_3^4\omega_2^1 = 0.$	

Отсюда с помощью формул (18β) получаем:
для первой пары (A_1A_2) и (A_3A_4)

$$\begin{aligned} \xi\eta'(\omega_1^4)^2 + (\xi\xi' + \eta\eta' - 1)\,\omega_1^4\omega_2^3 + \xi'\eta(\omega_2^3)^2 &= 0, \\ \lambda^2\xi'\eta(\omega_1^4)^2 + \lambda\mu(\xi\xi' + \eta\eta' - 1)\,\omega_1^4\omega_2^3 + \mu^2\xi\eta'(\omega_2^3)^2 &= 0; \end{aligned}$$

для второй пары (A_1A_3) и (A_2A_4)

$$\begin{aligned} yy'(\omega_1^4)^2 + \mu(xy' + x'y + 1)\,\omega_1^4\omega_2^3 + \mu^2 xx'(\omega_2^3)^2 &= 0, \\ \lambda^2 xx'(\omega_1^4)^2 + \lambda(xy' + x'y + 1)\,\omega_1^4\omega_2^3 + yy'(\omega_2^3)^2 &= 0; \end{aligned} \tag{24γ}$$

для третьей пары (A_1A_4) и (A_2A_3)

$$\begin{aligned} \lambda(\xi'\eta' - x'y')(\omega_1^4)^2 + (\lambda\xi'^2 + \mu\eta'^2 - \lambda\mu x'^2 - y'^2)\,\omega_1^3\omega_2^4 + \\ + \mu(\xi'\eta' - x'y')(\omega_2^3)^2 = 0, \end{aligned}$$

$$\lambda(\xi\eta - xy)(\omega_1^4)^2 + (\lambda\eta^2 + \mu\xi^2 - \lambda\mu x^2 - y^2)\,\omega_1^3\omega_2^4 + \mu(\xi\eta - xy)(\omega_2^3)^2 = 0.$$

Пропорциональность коэффициентов без труда устанавливается с помощью уравнений (23), но труднее установить, что соответствие развертывающихся поверхностей прямое. Поэтому проще непосредственно установить аполярность*) уравнений (24γ) с уравнением асимптотических на расслояющих поверхностях.

Для всех расслояющих поверхностей первых двух пар мы его получим в виде (20) п. 83

$$\lambda(\omega_1^4)^2 - \mu(\omega_2^3)^2 = 0.$$

Таким образом, теорема четвертая п. 82 будет доказана во всей общности.

Заметим, что существование таких конфигураций, так же как сопряженных четверок, нами не доказано. Для сопряженных четверок теорема существования (ограниченная) будет доказана в следующей главе. Для троек сопряженных пар с пересечением соответствующих лучей вопрос существования остается открытым.

*) См. сноску на стр. 137.

ГЛАВА IX

КЛАССЫ СОПРЯЖЕННЫХ ЧЕТВЕРОК

85. Продолжение системы уравнений сопряженной четверки. Мы переходим теперь к работам Пантази [7] по определению классов сопряженных четверок.

Сопряженная четверка определяется системой уравнений (2α) п. 77, (3α—γ), (4α) п. 78 вместе с конечными уравнениями (13′) п. 82.

Уравнения (4α) п. 78, (13′) п. 82 можно разрешить, вводя новые неизвестные функции λ, μ, m в виде

$$\alpha = \frac{\beta}{\mu}, \quad \gamma = -\frac{\beta}{\lambda}, \quad \alpha' = \beta'\mu, \quad \gamma' = -\beta'\lambda,$$
$$a = m\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}, \quad c = m\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}. \tag{1α}$$

Внешние дифференциалы уравнений (3α—γ) п. 78 тогда примут вид

$$\begin{gathered}
[\nabla\beta - \Delta\mu,\ \omega_1^3] - \mu[\nabla\beta\omega_2^4] = 0,\\
\lambda[\nabla\beta\omega_1^3] - [\nabla\beta - \Delta\lambda,\ \omega_2^4] = 0,\\
\left[\Delta m + \frac{\Delta\lambda - \Delta\mu}{2},\ \omega_1^3\right] = 0,\\
\lambda[\nabla\beta' + \Delta\lambda,\ \omega_1^3] - [\nabla\beta'\omega_2^4] = 0,\\
[\nabla\beta'\omega_1^3] - \mu[\nabla\beta' + \Delta\mu,\ \omega_2^4] = 0,\\
\left[\Delta m + \frac{\Delta\mu - \Delta\lambda}{2},\ \omega_2^4\right] = 0,
\end{gathered} \tag{1β}$$

где

$$\begin{gathered}
\nabla\beta = d\ln\beta + \omega_2^2 - \omega_3^3, \quad \nabla\beta' = d\ln\beta' + \omega_1^1 - \omega_4^4,\\
\Delta\lambda = d\ln\lambda + \omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 + \omega_4^4,\\
\Delta\mu = d\ln\mu - \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_4^4,\\
\Delta m = d\ln m + \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4.
\end{gathered} \tag{1γ}$$

Развертывая по лемме Картана уравнения (1β), получаем:

$$\beta\nabla = x\omega_1^3 + y\omega_2^4, \qquad \nabla\beta' = y'\omega_1^3 + x'\omega_2^4,$$

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= (x+\lambda y)\,\omega_1^3 - \left(x' + \frac{1}{\lambda}y'\right)\omega_2^4,\\ \Delta\mu &= -\left(y' + \frac{1}{\mu}x'\right)\omega_1^3 + (y+\mu x)\,\omega_2^4,\end{aligned} \tag{2α}$$

$$\Delta m = \frac{1}{2}\left(x + \lambda y + y' + \frac{1}{\mu}x'\right)\omega_1^3 + \frac{1}{2}\left(y + \mu x + x' + \frac{1}{\lambda}y'\right)\omega_2^4,$$

где x, y, x', y' — вспомогательные переменные.

Внешнее дифференцирование дает

$$[\Delta x\,\omega_1^3] + [\Delta y\,\omega_2^4] = 0, \quad [\Delta y'\,\omega_1^3] + [\Delta x'\,\omega_2^4] = 0$$

$$\begin{aligned}\lambda\,[\Delta x' - x'\,\Delta\mu - \lambda\mu\,\Delta y - \lambda\mu y\,\Delta\lambda,\ \omega_1^3] &+ \\ +\mu\,[\Delta y' - y'\,\Delta\lambda - \lambda\mu\,\Delta x - \lambda\mu x\,\Delta\mu,\ \omega_2^4] &= 0,\\ \left[\Delta x + \lambda\,\Delta y + \Delta y' + \frac{1}{\mu}\Delta x' + \lambda y\,\Delta\lambda - \frac{x'}{\mu}\Delta\mu,\ \omega_1^3\right] &= 0,\\ \left[\Delta y + \mu\,\Delta x + \Delta x' + \frac{1}{\lambda}\Delta y' + \mu x\,\Delta\mu - \frac{y'}{\lambda}\Delta\lambda,\ \omega_2^4\right] &= 0,\end{aligned} \tag{2β}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta x &= dx + x(\omega_1^1 - \omega_3^3), & \Delta y &= dy + y(\omega_2^2 - \omega_4^4),\\ \Delta x' &= dx' + x'(\omega_2^2 - \omega_4^4), & \Delta y' &= dy' + y'(\omega_1^1 - \omega_3^3).\end{aligned} \tag{2γ}$$

Наиболее общее алгебраическое разрешение системы (2β) зависит от трех параметров ξ, η, ζ:

$$\begin{aligned}\Delta x &= \left\{x\left(y' + \frac{1}{\mu}x'\right) - \frac{\xi+\zeta}{\mu}\right\}\omega_1^3 + (\xi-\zeta)\,\omega_2^4,\\ \Delta y &= (\xi-\zeta)\,\omega_1^3 + \left\{y\left(x' + \frac{1}{\lambda}y'\right) - \frac{\xi+\zeta}{\lambda}\right\}\omega_2^4,\\ \Delta x' &= (\eta+\zeta)\,\omega_1^3 + \{x'(y+\mu x) + \mu(\zeta-\eta)\}\,\omega_2^4,\\ \Delta y' &= \{y'(x+\lambda y) + \lambda(\zeta-\eta)\}\,\omega_1^3 + (\eta+\zeta)\,\omega_2^4.\end{aligned} \tag{3α}$$

Внешнее дифференцирование дает

$$\begin{aligned}[\Delta\xi + \Delta\zeta,\ \omega_1^3] - \mu\,[\Delta\xi - \Delta\zeta,\ \omega_2^4] + 2\zeta(2\mu x - x')\,[\omega_1^3\omega_2^4] &= 0,\\ \lambda\,[\Delta\xi - \Delta\zeta,\ \omega_1^3] - [\Delta\xi + \Delta\zeta,\ \omega_2^4] + 2\zeta(2\lambda y - y')\,[\omega_1^3\omega_2^4] &= 0,\\ \lambda\,[\Delta\zeta - \Delta\eta,\ \omega_1^3] + [\Delta\eta + \Delta\zeta,\ \omega_2^4] - 2\zeta(\lambda y - 2y')\,[\omega_1^3\omega_2^4] &= 0,\\ [\Delta\eta + \Delta\zeta,\ \omega_1^3] + \mu\,[\Delta\zeta - \Delta\eta,\ \omega_2^4] + 2\zeta(\mu x - 2x')\,[\omega_1^3\omega_2^4] &= 0.\end{aligned}$$

Отсюда, составляя сумму или разность первого уравнения с последним или второго с третьим, получим:

$$\begin{aligned}[\Delta\xi - \Delta\eta,\ \omega_1^3 - \mu\omega_2^4] + 2\zeta(\mu x + x')\,[\omega_1^3\omega_2^4] &= 0,\\ [\Delta\xi - \Delta\eta,\ \lambda\omega_1^3 - \omega_2^4] + 2\zeta(\lambda y + y')\,[\omega_1^3\omega_2^4] &= 0,\\ [\Delta\xi + \Delta\eta,\ \omega_1^3 - \mu\omega_2^4] + 2\,[\Delta\zeta,\ \omega_1^3 + \mu\omega_2^4] + 6\zeta(\mu x - x')\,[\omega_1^3\omega_2^4] &= 0,\\ [\Delta\xi + \Delta\eta,\ \lambda\omega_1^3 - \omega_2^4] - 2\,[\Delta\zeta,\ \lambda\omega_1^3 + \omega_2^4] + 6\zeta(\lambda y - y')\,[\omega_1^3\omega_2^4] &= 0,\end{aligned} \tag{3β}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta\xi &= d\xi + \xi(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4) - \xi\{(x+y')\,\omega_1^3 + (x'+y)\,\omega_2^4\},\\ \Delta\eta &= d\eta + \eta(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4) - \eta\{(x+y')\,\omega_1^3 + (x'+y)\,\omega_2^4\},\\ \Delta\zeta &= d\zeta + \zeta(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4) - \zeta\{(x+y')\,\omega_1^3 + (x'+y)\,\omega_2^4\}.\end{aligned} \tag{3γ}$$

86. Особое решение в виде вырожденной четверки. Первые два уравнения (3β) вполне определяют форму $\Delta\xi - \Delta\eta$, если вторые множители $\omega_1^3 - \mu\omega_2^4$, $\mu\omega_1^3 - \omega_2^4$ не пропорциональны.

Мы начнем с особого решения и рассмотрим случай пропорциональности этих форм, когда

$$\lambda\mu - 1 = 0. \tag{4α}$$

Система (2α) п. 77, (3α—γ) п. 78 принимает вид

$$\begin{aligned}&\omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^3 = 0, \quad \omega_3^2 = 0, \quad \omega_4^1 = 0,\\ &\omega_3^4 = \beta(\lambda\omega_1^3 - \omega_2^4), \quad \omega_2^1 = -\beta'(\lambda\omega_1^3 - \omega_2^4),\\ &\omega_1^2 = \frac{\beta}{\lambda}(\lambda\omega_1^3 - \omega_2^4), \quad \omega_4^3 = -\frac{\beta'}{\lambda}(\lambda\omega_1^3 - \omega_2^4),\\ &\omega_3^1 = m\lambda\omega_1^3, \quad \omega_4^2 = \frac{m}{\lambda}\omega_2^4.\end{aligned} \tag{4}$$

Тогда из первых двух уравнений форма $\Delta\xi - \Delta\eta$ исключается простым вычитанием (после умножения первого уравнения на λ), и мы получаем конечное соотношение

$$\zeta(x + \lambda x' - \lambda y - y') = 0. \tag{4α'}$$

Дифференцируя тождество (4α), получим, в силу (1γ), (2α) п. 85,

$$x + \lambda y = y' + \lambda x', \tag{4β}$$

откуда новым дифференцированием с помощью (1γ), (2γ) п. 85 получаем:

$$\Delta x + \lambda\,\Delta y + \lambda y\,\Delta\lambda = \Delta y' + \lambda\,\Delta x' + \lambda x'\,\Delta\lambda, \tag{4γ}$$

и формулы (2α), (3α) дают

$$\zeta = 0. \tag{4γ'}$$

Уравнения (2α) п. 85 второй и третьей строк теперь принимают вид

$$\Delta\lambda = (x+\lambda y)\left(\omega_1^3 - \frac{1}{\lambda}\omega_2^4\right), \quad \Delta\mu = -\Delta\lambda, \qquad\qquad (4\delta)$$
$$\Delta m = (x+\lambda y)\left(\omega_1^3 + \frac{1}{\lambda}\omega_2^4\right);$$

внешнее дифференцирование их дает последние два уравнения (2β), которые теперь принимают вид

$$[\Delta x + \lambda\,\Delta y + \lambda y\,\Delta\lambda,\ \omega_1^3] = 0 \quad [\Delta x + \lambda\,\Delta y - x\,\Delta\lambda,\ \omega_2^4] = 0.$$

Отсюда получаем:

$$\Delta x + \lambda\,\Delta y = (x+\lambda y)(x\omega_1^3 + y\omega_2^4), \qquad\qquad (5\alpha)$$
$$\Delta y' + \lambda\,\Delta x' = (x+\lambda y)(y'\omega_1^3 + x'\omega_2^4),$$

что, в силу (4γ′), вполне согласуется с (3α).

Теперь по исключении форм Δx, $\Delta y'$ квадратичные уравнения (2β) приведут к двум уравнениям:

$$[\Delta y,\ \lambda\omega_1^3 - \omega_2^4] + y(x+\lambda y)[\omega_1^3\omega_2^4] = 0, \qquad\qquad (5\beta)$$
$$[\Delta x',\ \lambda\omega_1^3 - \omega_2^4] + x'(x+\lambda y)[\omega_1^3\omega_2^4] = 0.$$

Внешнее дифференцирование уравнений (5α) приводит, в силу уравнений (4δ), к тождествам.

Система из уравнений (2α) п. 77, (3α, β) п. 78, (13′) п. 82, (1α), (2α) п. 85, (4α), (5α, β) будет в инволюции с характерами $s_1 = 2$, $s_2 = 0$, ибо при двух независимых квадратичных уравнениях ранг полярной системы тоже равен двум и будет определять особый класс сопряженных четверок с произволом двух функций одного аргумента.

Однако уравнения (1α) п. 85, (4α) имеют следствием соотношения

$$\omega_3^4 = \lambda\omega_1^2, \quad \omega_4^3 = \frac{1}{\lambda}\omega_2^1, \qquad\qquad (6)$$

откуда следуют уменьшение числа главных форм прямых A_1A_3 и A_2A_4 до одной и вырождение конгруэнции (A_2A_4) и конгруэнции (A_1A_3) в линейчатые поверхности. Эти поверхности будут общими фокальными поверхностями обеих конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4).

87. Сопряженная пара из дважды взятой конгруэнции R с линейчатыми фокальными поверхностями с общими прямолинейными директрисами. Расслояемые пары конгруэнций из дважды взятых конгруэнций W с линейчатыми фокальными поверхностями мы рассматривали в п. 42. Здесь налагается добавочное требование: наша пара сопряженная, и поэтому обе конгруэнции являются конгруэнциями R, а линейчатые поверхности — поверхностями R (п. 52).

Линейчатые поверхности R принадлежат линейной конгруэнции *), следовательно, имеют две прямолинейные направляющие.

В нашем случае обе линейчатые фокальные поверхности имеют одни и те же прямолинейные направляющие. Действительно, будем искать прямую $(D_\varepsilon D_\varepsilon')$

$$D_\varepsilon = \varepsilon A_1 + A_3, \quad D_\varepsilon' = \varepsilon A_2 + \lambda A_4, \qquad\qquad (a)$$

которая пересекает обе образующие A_1A_3 и A_2A_4 фокальных поверхностей так, чтобы при изменении главных переменных она оставалась неподвижной.

Дифференцируя (a) и используя уравнения системы (4), получим:

$$dD_\varepsilon = D_\varepsilon(\omega_3^3 + \varepsilon\omega_1^3) + D_\varepsilon'\omega_1^2 + A_1\,\Delta\varepsilon,$$
$$dD_\varepsilon' = D_\varepsilon'\left(\Delta\lambda - \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \frac{\varepsilon}{\lambda}\omega_2^4\right) + D_\varepsilon\omega_2^1 +$$
$$+ A_2\,\Delta\varepsilon + A_2\left(\omega_1^3 - \frac{1}{\lambda}\omega_2^4\right)\{\varepsilon^2 - \varepsilon(x+\lambda y) - m\lambda\},$$

где

$$\Delta\varepsilon = d\varepsilon + \varepsilon(\omega_1^1 - \omega_3^3) + (m\lambda - \varepsilon^2)\,\omega_1^3.$$

Отсюда следует, что точки D_ε, D_ε' перемещаются только по прямой $D_\varepsilon D_\varepsilon'$ и сама прямая неподвижна в пространстве, если функция ε удовлетворяет системе уравнений

$$\Delta\varepsilon \equiv d\varepsilon + \varepsilon(\omega_1^1 - \omega_3^3) + (m\lambda - \varepsilon^2)\,\omega_1^3 = 0, \qquad\qquad (7\alpha)$$
$$\varepsilon^2 - \varepsilon(x+\lambda y) - m\lambda = 0. \qquad\qquad (7\beta)$$

Дифференцируя второе уравнение и принимая во внимание первое придем к тождеству. Следовательно, оба корня квадратного уравнения (7β) удовлетворяют дифференциальному уравнению (7α) и определяют две пары точек D_ε, D_ε'. Значит, существуют две неподвижные прямые $D_\varepsilon D_\varepsilon'$ — общие прямолинейные направляющие (директрисы) первой и второй фокальных поверхностей.

88. Первое решение: сопряженные четверки A. Вернемся к общему случаю. Если $\lambda\mu - 1 \neq 0$, то первые два квадратичных уравнения (3β) позволяют определить произведения

$$[\Delta\xi - \Delta\eta,\ \omega_1^3] = 2B\zeta\,[\omega_1^3\omega_2^4], \qquad\qquad (8\alpha)$$
$$[\Delta\xi - \Delta\eta,\ \omega_2^4] = -2A\zeta\,[\omega_1^3\omega_2^4],$$

$$A = \frac{y' + \lambda(y - x') - \lambda\mu x}{\lambda\mu - 1}, \quad B = \frac{x' + \mu(x - y') - \lambda\mu y}{\lambda\mu - 1}, \qquad\qquad (8\beta)$$

---

*) См., например, С. П. Фиников, Проективно-дифференциальная геометрия, гл. IX, § 5.

следовательно, приводят к линейному уравнению

$$\Delta\xi - \Delta\eta = -2\zeta(A\omega_1^3 + B\omega_2^4). \tag{9}$$

Поскольку два последних уравнения (3β) содержат две формы $\Delta\xi + \Delta\eta$ и $\Delta\zeta$, линейно независимые между собой и от формы $\Delta\xi - \Delta\eta$, система (3β), (9) будет в инволюции, если внешний дифференциал уравнения (9) обращается в нуль в силу уравнений системы. Поскольку

$$D(\Delta\xi - \Delta\eta) =$$
$$= -[\Delta\xi - \Delta\eta,\ -\omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 + (x + y')\omega_1^3 + (x' + y)\omega_2^4], \tag{9'}$$

система (3β), (9) будет в инволюции, если правая часть равенства (9) обратится в нуль.

Если при этом не стеснять значения неизвестной функции ζ, то надо положить равными нулю A, B или в силу (8β)

$$y' + \lambda(y - x') - \lambda\mu x = 0,$$
$$x' + \mu(x - y') - \lambda\mu y = 0.$$

Умножая первое равенство на μ и прибавляя ко второму или второе на λ и прибавляя к первому, получим:

$$x' + \mu x = 0, \quad y' + \lambda y = 0. \tag{10α}$$

Дифференцируя, получим:

$$\Delta x' = -\mu(\Delta x + x\Delta\mu),$$
$$\Delta y' = -\lambda(\Delta y + y\Delta\lambda),$$

и уравнения (2α) и первые два (3α) примут вид

$$\nabla\beta = x\omega_1^3 + y\omega_2^4, \quad \nabla\beta' = -\lambda y\omega_1^3 - \mu x\omega_2^4,$$
$$\Delta\lambda = \Delta\mu = (x + \lambda y)\omega_1^3 + (y + \mu x)\omega_2^4, \quad \Delta m = 0,$$
$$\Delta x = -\left\{x(x + \lambda y) + \frac{\xi + \zeta}{\mu}\right\}\omega_1^3 + (\xi - \zeta)\omega_2^4, \tag{10β}$$
$$\Delta y = (\xi - \zeta)\omega_1^3 - \left\{y(\mu x + y) + \frac{\xi + \zeta}{\lambda}\right\}\omega_2^4,$$

а последние два уравнения (3α) дадут

$$\xi = \eta, \tag{10γ}$$

что удовлетворит уравнению (9). Система (3β) сохранит только два уравнения:

$$[\Delta\xi,\ \omega_1^3 - \mu\omega_2^4] + [\Delta\zeta,\ \omega_1^3 + \mu\omega_2^4] + 6\zeta\mu x[\omega_1^3\omega_2^4] = 0,$$
$$[\Delta\xi,\ \lambda\omega_1^3 - \omega_2^4] - [\Delta\zeta,\ \lambda\omega_1^3 + \omega_2^4] + 6\zeta\lambda y[\omega_1^3\omega_2^4] = 0. \tag{10δ}$$

Система (2α) п. 77, (3α) п. 78, (1α) п. 85, (10β, γ) — в инволюции с характерами $s_1 = 2$, $s_2 = 0$ и определяет класс сопряженных четверок A, которые мы будем называть *четверками Пантази*, с произволом двух функций одного аргумента. Весьма интересные геометрические свойства их будут рассмотрены в главе X.

89. Второе решение: сопряженные четверки C. Правая часть уравнения (9) обращается в нуль и в том случае, когда

$$\zeta = 0. \tag{11}$$

Уравнения (3β) теперь примут вид

$$[\Delta\xi - \Delta\eta,\ \omega_1^3 - \mu\omega_2^4] = 0, \quad [\Delta\xi - \Delta\eta,\ \lambda\omega_1^3 - \omega_2^4] = 0,$$
$$[\Delta\xi + \Delta\eta,\ \omega_1^3 - \mu\omega_2^4] = 0, \quad [\Delta\xi + \Delta\eta,\ \lambda\omega_1^3 - \omega_2^4] = 0 \tag{12α}$$

и будут иметь следствием обращение в нуль форм $\Delta\xi - \Delta\eta$, $\Delta\xi + \Delta\eta$, а потому и $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, а вся система (3α, β) п. 85 примет вид

$$\Delta x = \left\{x\left(y' + \frac{1}{\mu}x'\right) - \frac{1}{\mu}\xi\right\}\omega_1^3 + \xi\omega_2^4,$$
$$\Delta y = \xi\omega_1^3 + \left\{y\left(x' + \frac{1}{\lambda}y'\right) - \frac{1}{\lambda}\xi\right\}\omega_2^4, \tag{12β}$$
$$\Delta x' = \eta\omega_1^3 + \{x'(y + \mu x) - \mu\eta\}\omega_2^4,$$
$$\Delta y' = \{y'(x + \lambda y) - \lambda\eta\}\omega_1^3 + \eta\omega_2^4,$$

$$d\ln\xi + \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4 - (x + y')\omega_1^3 - (x' + y)\omega_2^4 = 0,$$
$$d\ln\eta + \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4 - (x + y')\omega_1^3 - (x' + y)\omega_2^4 = 0.$$

Присоединяя сюда пять уравнений (2α) п. 85, мы получим вполне интегрируемую систему 11 пфаффовых уравнений для определения всех компонент ω_i^k $(i \neq k)$ тетраэдра $\{A_i\}$. Следовательно, сопряженные четверки C существуют с 11 произвольными постоянными.

90. Специальный случай: сопряженные четверки C_0. Только что найденное общее решение, характеризуемое равенством (11), содержит замечательный специальный случай из конгруэнций с налагающимися фокальными поверхностями. Мы уже встречались (гл. V) с понятием проективного изгибания поверхности. Фубини показал, что проективное изгибание поверхности эквивалентно преобразованию с сохранением проективного линейного элемента ϑ. Он определяется как отношение кубичной формы φ_3 к первой квадратичной φ_2.

В произвольном репере 1-го порядка, присоединенном к лучам конгруэнции, эти формы для первой фокальной поверхности (A_1) **пишутся в виде** *)

$$\varphi_2=\alpha(\omega_1^3)^2+\gamma(\omega_2^4)^2, \tag{13}$$

$$\varphi_3=\{\alpha(\omega_1^3)^2-3\gamma(\omega_2^4)^2\}\Delta\alpha-8\omega_1^3\omega_2^4\beta\nabla\beta+\{3\alpha(\omega_1^3)^2-\gamma(\omega_2^4)^2\}\Delta\gamma,$$

где $\Delta\alpha$, $\Delta\gamma$ определены формулами (12е) п. 46.

Внося сюда, согласно формулам (1α) п. 85, значения $\alpha=\frac{\beta}{\mu}$, $\gamma=-\frac{\beta}{\lambda}$, откуда следует $\Delta\alpha=\nabla\beta-\Delta\mu$, $\Delta\gamma=\nabla\beta-\Delta\lambda$ или, в силу (2α) п. 85,

$$\Delta\alpha=\left(x+y'+\frac{1}{\mu}x'\right)\omega_1^3-\mu x\omega_2^4, \quad \Delta\gamma=-\lambda y\omega_1^3+\left(y+x'+\frac{1}{\lambda}y'\right)\omega_2^4,$$

получим:

$$\varphi_2=\frac{\beta}{\lambda\mu}\{\lambda(\omega_1^3)^2-\mu(\omega_2^4)^2\}, \tag{14α}$$

$$\varphi_3=\frac{\beta}{\lambda\mu}\left\{\left(x+y'+\frac{1}{\mu}x'-3\lambda y\right)\omega_1^3\{\lambda(\omega_1^3)^2+3\mu(\omega_2^4)^2\}+\right.$$
$$\left.+\left(y+x'+\frac{1}{\lambda}y'-3\mu x\right)\omega_2^4\{\mu(\omega_2^4)^2+3\lambda(\omega_1^3)^2\}\right\},$$

откуда проективный линейный элемент поверхности (A_1) будет

$$\vartheta_1=\frac{\left(x+y'+\frac{1}{\mu}x'-3\lambda y\right)\{\lambda(\omega_1^3)^2+3\mu(\omega_2^4)^2\}\omega_1^3}{\lambda(\omega_1^3)^2-\mu(\omega_2^4)^2}+$$
$$+\frac{\left(y+x'+\frac{1}{\lambda}y'-3\mu x\right)\{\mu(\omega_2^4)^2+3\lambda(\omega_1^3)^2\}\omega_2^4}{\lambda(\omega_1^3)^2-\mu(\omega_2^4)^2}. \tag{14β}$$

Для второй фокальной поверхности (A_2) обычной заменой $\begin{pmatrix}1 & 3 & x & y & \lambda & \mu\\ 2 & 4 & x' & y' & \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\mu}\end{pmatrix}$ получим:

$$\vartheta_2=\frac{\left(x+y'+\lambda y-3\frac{x'}{\mu}\right)\{\lambda(\omega_1^3)^2+3\mu(\omega_2^4)^2\}\omega_1^3}{\mu(\omega_2^4)^2-\lambda(\omega_1^3)^2}+$$
$$+\frac{\left(y+x'+\mu x-3\frac{y'}{\lambda}\right)\{\mu(\omega_2^4)^2+3\lambda(\omega_1^3)^2\}\omega_2^4}{\mu(\omega_2^4)^2-\lambda(\omega_1^3)^2}. \tag{14γ}$$

*) С. П. Фиников, Теория конгруэнций, стр. 360. В силу формул (1 п. 85 мы заменили $\Delta\beta=\beta\nabla\beta$.

Для того чтобы поверхность (A_1) **соответственными точками налагалась** на поверхность (A_2), надо, чтобы равенство

$$\vartheta_1=\vartheta_2$$

было справедливо тождественно относительно ω_1^3, ω_2^4. Это приводит к двум конечным уравнениям

$$x+y'-\lambda y-\frac{x'}{\mu}=0,$$
$$y+x'-\mu x-\frac{y'}{\lambda}=0,$$

или, если разрешить относительно x', y', в силу $\lambda\mu-1\neq0$,

$$x'=\mu x, \quad y'=\lambda y. \tag{15}$$

Дифференцируя равенства (15) и пользуясь уравнениями (2α), (3α) п. 85, придем к двум конечным уравнениям

$$\xi+\eta+2\zeta=0, \quad \xi+\eta-2\zeta=0,$$

откуда снова получаем уравнение (11):

$$\zeta=0 \tag{11}$$

и, следовательно, вполне интегрируемую систему (2α) п. 77, ($3\alpha-\gamma$) п. 78, (2α), (3α) п. 85, (12α, β) п. 89 и, кроме того, конечное уравнение

$$\xi+\eta=0. \tag{16}$$

Это уравнение является одним из интегралов дифференциальных уравнений (12α), поэтому не нарушает полной интегрируемости системы, уменьшая на единицу число произвольных постоянных интеграции.

91. Сопряженная четверка из конгруэнций с проективно налагающимися фокальными поверхностями. Поскольку тетраэдр $\{A_i\}$ для сопряженной четверки является тетраэдром 1-го порядка и для конгруэнции (A_3A_4), формулы (13) можно применять и при вычислении инвариантных форм для поверхностей (A_3), (A_4).

Вводя обозначения $B_1=A_3$, $B_2=A_4$, $B_3=A_1$, $B_4=A_2$ и снабжая чертой $\bar\omega_i^k$ компоненты тетраэдра $\{B_i\}$, простой подстановкой указателей $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ получим:

$$\bar\omega_1^3=\omega_3^1=a\omega_1^3, \quad \bar\omega_2^4=\omega_4^2=c\omega_2^4,$$
$$\bar\omega_1^2=\omega_3^4, \quad \bar\omega_2^1=\omega_4^3, \quad \bar\omega_3^4=\omega_1^2, \quad \bar\omega_4^3=\omega_2^1.$$

Отсюда

$$\bar\alpha=\frac{\beta}{a}, \quad \bar\beta=-\frac{\gamma}{c}=\frac{\alpha}{a}, \quad \bar\gamma=-\frac{\beta}{c},$$
$$\bar\alpha'=\frac{\beta'}{c}, \quad \bar\beta'=-\frac{\gamma'}{a}=\frac{\alpha'}{c}, \quad \bar\gamma'=-\frac{\beta'}{a},$$

и в силу (1α) п. 85

$$\overline{\alpha}=\frac{\mu\beta}{m\sqrt{\lambda\mu}},\quad \overline{\beta}=\frac{\beta}{m\sqrt{\lambda\mu}},\quad \overline{\gamma}=-\frac{\lambda\beta}{m\sqrt{\lambda\mu}},$$

$$\Delta\overline{\alpha}=\nabla\beta-\nabla m+\frac{\Delta\mu-\Delta\lambda}{2},\quad \nabla\overline{\beta}=\nabla\beta-\Delta m-\frac{\Delta\lambda+\Delta\mu}{2},$$

$$\Delta\overline{\gamma}=\nabla\beta-\Delta m+\frac{\Delta\lambda-\Delta\mu}{2}.$$

Следовательно, по формулам (13) формы $\overline{\varphi}_2$, $\overline{\varphi}_3$ для поверхности $(\boldsymbol{A}_3)$ принимают вид

$$\overline{\varphi}_2=\frac{m\beta}{\sqrt{\lambda\mu}}\{\lambda(\omega_1^3)^2-\mu(\omega_2^4)^2\},$$

$$\overline{\varphi}_3=\frac{m\beta}{\sqrt{\lambda\mu}}\left\{\begin{array}{l}\left(3x-\lambda y-y'-\frac{1}{\mu}x'\right)\{\lambda(\omega_1^3)^2+3\mu(\omega_2^4)^2\}\,\omega_1^3+\\ +\left(3y-\mu x-x'-\frac{1}{\lambda}y'\right)\{3\lambda(\omega_1^3)^2+\mu(\omega_2^4)^2\}\,\omega_2^4\end{array}\right\}.$$

Составляя отношение $\overline{\varphi}_2:\overline{\varphi}_3$ и используя соотношения (15) п. 90, получим проективный линейный элемент поверхности $(\boldsymbol{A}_3)$:

$$\vartheta_3=2\,\frac{(x-\lambda y)\{\lambda(\omega_1^3)^2+3\mu(\omega_2^4)^2\}\,\omega_1^3+(y-\mu x)\{3\lambda(\omega_1^3)^2+\mu(\omega_2^4)^2\}\,\omega_2^4}{\lambda(\omega_1^3)^2-\mu(\omega_2^4)^2}. \quad (17)$$

К тому же виду подстановкой (15) приводятся линейные элементы ϑ_1, ϑ_2 поверхностей $(\boldsymbol{A}_1)$ и $(\boldsymbol{A}_2)$ и линейный элемент ϑ_4 поверхности $(\boldsymbol{A}_4)$.

Следовательно, *сопряженные четверки C_0 состоят из четырех конгруэнций с проективно налагающимися фокальными поверхностями*.

92. Продолжение системы уравнений сопряженной четверки. Мы возвращаемся к уравнениям (3β) п. 85, (9) п. 88.

Если правая часть уравнения (9) не обращается в нуль, то уравнение надо дифференцировать.

Заметим, что в силу формул (2α) п. 85

$$A\omega_1^3+B\omega_2^4=\frac{\nabla\beta'+\theta_1}{\lambda\mu-1}-\lambda\mu\frac{\nabla\beta+\theta_2}{\lambda\mu-1},$$

$$\lambda B\omega_1^3+\mu A\omega_2^4=\lambda\mu\left(\frac{\nabla\beta+\theta_2}{\lambda\mu-1}-\frac{\nabla\beta'+\theta_1}{\lambda\mu-1}\right), \quad (18\alpha)$$

$$\Delta m=\frac{\nabla\beta'+\theta_1}{2}+\frac{\nabla\beta+\theta_2}{2},$$

$$\frac{\Delta\lambda+\Delta\mu}{2}=\frac{\nabla\beta'+\theta_1}{2}-\frac{\nabla\beta+\theta_2}{2}+\nabla\beta-\nabla\beta'=\frac{\theta_1-\nabla\beta'}{2}-\frac{\theta_2-\nabla\beta}{2},$$

где

$$\theta_1=\lambda y\omega_1^3+\mu x\omega_2^4,\quad \theta_2=\frac{x'}{\mu}\omega_1^3+\frac{y'}{\lambda}\omega_2^4.$$

Поскольку в силу (1γ) п. 85

$$D(\Delta m)=D(\Delta\lambda)=D(\Delta\mu)=D(\nabla\beta)=D(\nabla\beta')=0,$$

имеем:

$$D\theta_1=0,\ D\theta_2=0,\quad D\left(\frac{\Delta\xi\pm\Delta\eta}{\zeta}\right)=\frac{1}{\zeta^2}[\Delta\xi\pm\Delta\eta,\ \Delta\zeta], \quad (18\beta)$$

$$D(A\omega_1^3+B\omega_2^4)=\frac{2}{\lambda\mu-1}[\lambda\mu\theta_2-\theta_1,\ A\omega_1^3+B\omega_2^4]=$$
$$=\frac{2}{\lambda\mu-1}[\nabla\beta-\nabla\beta',\ \lambda B\omega_1^3+\mu A\omega_2^4],$$

$$D(\lambda B\omega_1^3+\mu A\omega_2^4)=-\frac{2}{\lambda\mu-1}[\lambda\mu\theta_2-\theta_1,\ A\omega_1^3+B\omega_2^4]=$$
$$=-\frac{2}{\lambda\mu-1}[\nabla\beta-\nabla\beta',\ \lambda B\omega_1^3+\mu A\omega_2^4].$$

С помощью этих формул внешний дифференциал уравнения (9) п. 88 принимает вид

$$\left[\frac{\Delta\zeta}{2\zeta}+\frac{\nabla\beta'-\lambda\mu\nabla\beta}{\lambda\mu-1},\quad A\omega_1^3+B\omega_2^4\right]=0, \quad (19\alpha)$$

откуда следует

$$\frac{\Delta\zeta}{2\zeta}=\frac{\lambda\mu\nabla\beta-\nabla\beta'}{\lambda\mu-1}+\sigma(A\omega_1^3+B\omega_2^4). \quad (19\alpha')$$

Теперь два последних уравнения (3β) п. 85 дают

$$\frac{\Delta\xi+\Delta\eta}{2\zeta}=(2\sigma+3)\left\{\frac{\lambda\mu+1}{\lambda\mu-1}(A\omega_1^3+B\omega_2^4)-\frac{2}{\lambda\mu-1}(\lambda B\omega_1^3+\mu A\omega_2^4)\right\}-$$
$$-\frac{16\lambda\mu}{(\lambda\mu-1)^2}(\Delta\lambda+\Delta\mu)+8\,\frac{\lambda\mu\nabla\beta+\nabla\beta'}{\lambda\mu-1}. \quad (19\beta)$$

Внешнее дифференцирование уравнений (19α′, β) приведет к двум квадратичным уравнениям вида

$$\left[d\sigma+(2\sigma-1)\frac{\nabla\beta'-\lambda\mu\nabla\beta}{\lambda\mu-1},\quad A\omega_1^3+B\omega_2^4\right]=0, \quad (20\alpha)$$

$$[d\sigma,\ \lambda B\omega_1^3+\mu A\omega_2^4]=M[A\omega_1^3+B\omega_2^4,\ \lambda B\omega_1^3+\mu A\omega_2^4], \quad (20\beta)$$

где M — вполне определенная функция от x, y, x', y', λ, μ.

Отсюда следует, если

$$[A\omega_1^3+B\omega_2^4,\ \lambda B\omega_1^3+\mu A\omega_2^4]=(\mu A^2-\lambda B^2)[\omega_1^3\omega_2^4]\neq 0,$$

$$d\sigma=P\omega_1^3+Q\omega_2^4, \quad (20\gamma)$$

где P и Q — известные функции от x, y, x', y', λ, μ.

Если внешний дифференциал уравнения (20γ) обращается в нуль в силу предыдущих уравнений, то система (2α) п. 77, (3α—γ) п. 78, (19α′, β), (2α), (3α) п. 85, (9) п. 88, (20γ) вполне интегрируема и определяет четверки с некоторым числом произвольных постоянных.

Если внешний дифференциал (20γ) не обратится в нуль, то он дает конечное соотношение на неизвестные функции, и число произвольных постоянных уменьшится, если только решение будет существовать. Функционального произвола эти решения не допускают.

93. Третье решение: сопряженные четверки B. Заключение п. 92 теряет силу, если

$$\mu A^2 - \lambda B^2 = 0,$$

или при $\lambda\mu - 1 \neq 0$ вследствие (8β) п. 88, если

$$\lambda(x' + \mu x)^2 - \mu(y' + \lambda y)^2 = 0. \tag{21}$$

При $x' + \mu x = 0$, очевидно, получаем четверки A п. 88. Оставляя это в стороне после дифференцирования и сравнения коэффициентов при ω_1^3, ω_2^4, будем иметь в силу (21) два конечных уравнения:

$$2(\xi - \eta)(x' + \mu x + \mu y' + \lambda\mu y) = (x' + \mu x)^2\left(y' + \frac{1}{\mu}x' - x - \lambda y\right),$$
$$2(\xi - \eta)(y' + \lambda y + \lambda x' + \lambda\mu x) = (y' + \lambda y)^2\left(x' - y + \frac{1}{\lambda}y' - \mu x\right), \tag{22α}$$

откуда по исключении $\xi - \eta$ и сокращении на $\lambda\mu - 1 \neq 0$ получим с помощью (21)

$$\lambda x' y - \mu x y' = 0. \tag{22β}$$

Таким образом, между x, y, x', y' имеется два конечных соотношения (21) и (22β). Мы можем положить, рассматривая ρ, σ как новые переменные

$$x = p\rho, \quad y = q\rho, \quad x' = -\frac{\sigma}{p}, \quad y' = -\frac{\sigma}{q}, \tag{23α}$$

или

$$x = p\rho, \quad y = -q\rho, \quad x' = -\frac{\sigma}{p}, \quad y' = \frac{\sigma}{q}, \tag{23β}$$

где

$$p^2 = \frac{1}{\mu},$$
$$q^2 = \frac{1}{\lambda}$$

и случай $\rho = \sigma$ соответствует четверкам A. Заметим, что (23α) переходит в (23β) заменой q на $-q$ и поэтому достаточно рассмотреть лишь случай (23α). Уравнения (2α) п. 85 принимают вид

$$\nabla\beta = \rho(p\omega_1^3 + q\omega_2^4), \qquad \nabla\beta' = -\frac{\sigma}{pq}(p\omega_1^3 + q\omega_2^4),$$

$$\Delta\lambda = \left(1 + \frac{1}{pq}\right)(p\rho\omega_1^3 + q\sigma\omega_2^4),$$
$$\Delta\mu = \left(1 + \frac{1}{pq}\right)(p\sigma\omega_1^3 + q\rho\omega_2^4), \tag{24α}$$
$$\Delta m + \frac{\Delta\lambda + \Delta\mu}{2} = \left(1 + \frac{1}{pq}\right)\rho\,(p\omega_1^3 + q\omega_2^4).$$

Дифференцируя внешним образом, получим только три уравнения:

$$[\Delta\rho,\ p\omega_1^3 + q\omega_2^4] = 0, \quad [\Delta\sigma,\ p\omega_1^3 + q\omega_2^4] = 0,$$
$$p[\Delta\rho\,\omega_1^3] + q[\Delta\sigma\,\omega_2^4] + \frac{\rho - \sigma}{2}(pq\rho - \sigma)[\omega_1^3\omega_2^4] = 0, \tag{24β}$$

где

$$\Delta\rho = d\rho + \frac{\rho}{2}(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4),$$
$$\Delta\sigma = d\sigma + \frac{\sigma}{2}(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4). \tag{24γ}$$

Отсюда по лемме Картана имеем:

$$\Delta\rho = \frac{1}{2pq}\{\rho(pq\rho - \sigma) + \varphi\}(p\omega_1^3 + q\omega_2^4),$$
$$\Delta\sigma = \frac{1}{2pq}\{\sigma(pq\rho - \sigma) + \varphi\}(p\omega_1^3 + q\omega_2^4), \tag{24δ}$$

где φ — новая неизвестная функция. Внешнее дифференцирование приводит к одному квадратичному уравнению на форму $d\varphi$:

$$[d\varphi + \varphi(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4),\ p\omega_1^3 + q\omega_2^4] = 0. \tag{25}$$

Теперь система содержит только одно квадратичное уравнение, а характеристическая система, кроме форм ω_1^3, ω_2^4 и левых частей линейных уравнений, содержит только одну форму $d\varphi$. Следовательно, система — в инволюции с характерами $s_1 = 1$, $s_2 = 0$ и определяет четверки B с произволом одной функции одного аргумента.

Все четыре фокальные поверхности линейчатые, и прямолинейные образующие определяются уравнением

$$p\omega_1^3 + q\omega_2^4 = 0. \tag{a}$$

Действительно, дифференцируя в направлении линии (a), мы можем положить $\omega_1^3 = q$, $\omega_2^4 = -p$; при этом

$$dA_1 = \omega_1^1 A_1 + q\{\beta(1+pq)A_2 + A_3\}, \qquad d\ln\beta = \omega_3^3 - \omega_2^2,$$

$$dA_2 = \omega_2^2 A_2 - \frac{\beta'}{q}(1+pq)A_1 - pA_4, \qquad d\ln pq = 0,$$

$$dA_3 = \omega_3^3 A_3 + p\{\beta(1+pq)A_4 + mA_1\},$$

$$dA_4 = \omega_4^4 A_4 - \frac{\beta'}{p}(1+pq)A_3 - mqA_2.$$

Тогда, например, для фокальной поверхности (A_1) имеем:

$$dA_1 \equiv q\{\beta(1+pq)A_2 + A_3\} \pmod{A_1},$$

$$d\{\beta(1+pq)A_2 + A_3\} \equiv \omega_3^3\{\beta(1+pq)A_2 + A_3\} \pmod{A_1},$$

откуда прямо следует, что касательная к линии (a) на поверхности (A_1) — прямая $\{A_1, \beta(1+pq)A_2 + A_3\}$ неподвижна.

Аналогично доказывается это для фокальных поверхностей (A_2), (A_3) и (A_4).

ГЛАВА X
СОПРЯЖЕННЫЕ ЧЕТВЕРКИ ПАНТАЗИ

94. Условие стационарности квадрики. Мы теперь возвращаемся к исследованию сопряженных четверок A, которые мы будем называть *четверками Пантази*.

Чтобы выяснить геометрический смысл полученного решения, покажем, что все тетраэдры четверки $\{A_i\}$ автополярны относительно некоторой неподвижной поверхности 2-го порядка (*квадрики*).

Для этого нам надо написать условие стационарности точки и квадрики.

Если обозначить буквами x^α четыре однородные координаты точки P относительно координатного тетраэдра $\{A_i\}$, то будем иметь

$$P = x^\alpha A_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4). \tag{a}$$

Если точка P неподвижна при проективных перемещениях тетраэдра $\{A_i\}$, то координаты x^α удовлетворяют условию

$$dP = \theta P, \tag{b}$$

где θ — подходящая пфаффова форма, линейная относительно форм ω_1^3, ω_2^4. Дифференцируя уравнение (a) и внося в уравнение (b), получим:

$$dx^\alpha A_\alpha + x^\beta \omega_\beta^\alpha A_\alpha = \theta x^\alpha A_\alpha,$$

откуда, сравнивая коэффициенты при линейно независимых точках A_α, получим условие стационарности точки P

$$dx^\alpha + x^\beta \omega_\beta^\alpha = \theta x^\alpha. \tag{1α}$$

Допустим теперь, что поверхность 2-го порядка

$$a_{ik}x^i x^k = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4) \tag{c}$$

неподвижна при перемещениях координатного тетраэдра $\{A_i\}$. Тогда должно иметь место тождество

$$d(a_{ik}x^i x^k) = \theta_1 a_{ik}x^i x^k,$$

откуда, выполняя дифференцирование и исключая dx^i, dx^k с помощью (1α), получим:

$$x^i x^k da_{ik} - x^i x^k a_{\alpha k}\omega_i^\alpha - x^i x^k a_{i\alpha}\omega_k^\alpha = x^i x^k(\theta_1 - 2\theta)a_{ik}.$$

Так как это должно быть тождеством относительно x^i, x^k, то коэффициенты при $x^i x^k$ в левой и правой части должны быть равны. Отсюда условие стационарности поверхности (c):

$$da_{ik} - a_{\alpha k}\omega_i^\alpha - a_{i\alpha}\omega_k^\alpha = \theta' a_{ik}, \qquad (1\beta)$$

где $\theta' = \theta_1 - 2\theta$ — новая пфаффова форма.

95. Автополярная квадрика четверки A. Применим теперь условие (1β) для определения неподвижной поверхности 2-го порядка, отнесенной к автополярному тетраэдру $\{A_i\}$. Уравнение поверхности (c) при таком отнесении содержит только четыре члена с квадратами текущих координат

$$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 + a_{44}(x^4)^2 = 0. \qquad (2)$$

Уравнения (1β) при $i \neq k$ не будут содержать da_{ik}, ибо $a_{ik} = 0\ (i \neq k)$; они примут вид

$$a_{kk}\omega_i^k + a_{ii}\omega_k^i = 0 \qquad (i,\ k \text{ фиксированы}),$$

откуда, давая $i \neq k$ значения 1, 2, 3, 4 и полагая по формулам ($3\alpha - \gamma$) п. 78, (1α) п. 85

$$\omega_1^2 = \frac{\beta}{\lambda}(\lambda\omega_1^3 - \omega_2^4), \quad \omega_3^4 = \frac{\beta}{\mu}(\omega_1^3 - \mu\omega_2^4), \quad \omega_3^1 = m\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\,\omega_1^3, \qquad (a)$$

$$\omega_2^1 = -\beta'(\lambda\omega_1^3 - \omega_2^4), \quad \omega_4^3 = \beta'(\mu\omega_2^4 - \omega_1^3), \quad \omega_4^2 = m\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\,\omega_2^4,$$

получим:

$$a_{11}\beta'(\omega_2^4 - \lambda\omega_1^3) + a_{22}\frac{\beta}{\lambda}(\lambda\omega_1^3 - \omega_2^4) = 0,$$

$$a_{11} m\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\,\omega_1^3 + a_{33}\omega_1^3 = 0,$$

$$a_{22} m\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\,\omega_2^4 + a_{44}\omega_2^4 = 0,$$

$$a_{33}\beta'(\mu\omega_2^4 - \omega_1^3) + a_{44}\frac{\beta}{\mu}(\omega_1^3 - \mu\omega_2^4) = 0,$$

поэтому, полагая $a_{11} = \beta$, будем иметь

$$a_{11} = \beta, \quad a_{22} = \beta'\lambda, \quad a_{33} = -m\beta\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}, \quad a_{44} = -m\beta'\sqrt{\lambda\mu}.$$

Нетрудно убедиться, что эти коэффициенты удовлетворяют при подходящем θ' всем уравнениям (1β).

Отсюда существование стационарной квадрики с автополярными тетраэдрами $\{A_i\}$ доказано, и ее уравнение имеет вид

$$\beta(x^1)^2 + \beta'\lambda(x^2)^2 - m\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\{\beta(x^3)^2 + \beta'\mu(x^4)^2\} = 0. \qquad (2')$$

По свойству автополярности каждая вершина A_i полярно сопряжена трем остальным, каждое ребро A_1A_2 полярно сопряжено противоположному A_3A_4.

Следовательно, полярная плоскость любой точки прямой A_1A_2 проходит через прямую A_3A_4. В частности, для двух точек пересечения прямой A_1A_2 с квадрикой ($2'$) полярная плоскость обращается в касательную плоскость, которая будет проходить через прямую A_3A_4. Это значит, что квадрика ($2'$) два раза входит как расслояющая поверхность конгруэнции (A_1A_2) и точно так же для любой из четырех конгруэнций сопряженной четверки.

96. Фокальные поверхности F_2. Так же как выше, касательные плоскости к квадрике ($2'$) в точках Q_1, Q_3 ее пересечения с прямой A_2A_3 проходят через прямую A_1A_4. Следовательно, квадрика ($2'$) дважды входит в число расслояющих поверхностей пары диагоналей. Кроме того, отсюда следует, что прямые A_1Q_1, A_1Q_3, располагаясь в касательной плоскости $A_1A_2A_3$ поверхности (A_1) и в касательной плоскости квадрики в точке Q_1, являются их общими касательными, т. е. описывают конгруэнцию с фокальными полостями из поверхности (A_1) и квадрики ($2'$). Между тем асимптотические линии на всех расслояющих поверхностях соответствуют (п. 36), в том числе они соответствуют на поверхности (A_1), которая является расслояющей поверхностью пары диагоналей и на квадрике ($2'$). Следовательно, обе конгруэнции (A_1Q_1), (A_1Q_3) суть конгруэнции W.

Таким образом, фокальная поверхность (A_1) сопряженной четверки двумя способами асимптотически преобразуется в поверхность 2-го порядка.

Известно, что на фокальных поверхностях конгруэнции W асимптотические, которые соответствуют прямолинейным образующим, принадлежат линейным комплексам.

Мы докажем более сильную теорему: соответствующие асимптотические на четырех фокальных поверхностях сопряженной четверки A *принадлежат одному и тому же линейному комплексу.*

Асимптотические на фокальных поверхностях (A_i) определяются уравнением

$$\omega_1^2\omega_2^4 + \omega_1^3\omega_3^4 = 0$$

или

$$\lambda(\omega_1^3)^2 - \mu(\omega_2^4)^2 = 0.$$

Рассмотрим асимптотическую

$$\omega_2^4 = \varepsilon\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\,\omega_1^3 \qquad (\varepsilon = \pm 1) \qquad (a)$$

а поверхностях (A_1), (A_2), (A_3) и (A_4). Она касается соответственно прямых

$$\left\{A_1,\ A_2\beta\left(1-\frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda\mu}}\right)+A_3\right\}=[13]+[12]\,\beta\left(1-\frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda\mu}}\right),$$

$$\left\{A_2,\ A_1\beta'\lambda\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda\mu}}-1\right)+\varepsilon\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\,A_4\right\}=$$
$$=[12]\,\beta'\lambda\left(1-\frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda\mu}}\right)+[24]\,\varepsilon\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}},\qquad\text{(b)}$$

$$\left\{A_3,\ A_1 m\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}+A_4\frac{\beta}{\mu}(1-\varepsilon\sqrt{\lambda\mu})\right\}=$$
$$=-[13]\,m\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}+[34]\frac{\beta}{\mu}(1-\varepsilon\sqrt{\lambda\mu}),$$

$$\{A_4,\ \varepsilon m A_2-A_3\beta'(1-\varepsilon\sqrt{\lambda\mu})\}=[42]\,\varepsilon m+[34]\,\beta'(1-\varepsilon\sqrt{\lambda\mu}).$$

Линейный комплекс $\mathfrak{a}$, которому принадлежат эти асимптотические, должен удовлетворять уравнениям

$$\{\mathfrak{a}[12]\}=0,\quad \{\mathfrak{a}[13]\}=0,\quad \{\mathfrak{a}[24]\}=0,\quad \{\mathfrak{a}[34]\}=0 \qquad\text{(c)}$$

и условию стационарности комплекса.

Если положить

$$\mathfrak{a}=\sum_{(ik)}^{1,2,3,4} a^{ik}[ik],\qquad [ik]=(A_iA_k),\quad a^{ik}=-a^{ki},$$

(суммирование по сочетаниям 1, 2, 3, 4)

то условие стационарности комплекса

$$d\,\mathfrak{a}=\theta\mathfrak{a}$$

запишется в виде

$$\sum_{(ik)}^{1,2,3,4}([ik]\,da^{ik}+a^{\alpha k}\omega_\alpha^i[ik]+a^{i\beta}\omega_\beta^k[ik])=\theta\sum_{(ik)}^{1,2,3,4}a^{ik}[ik],$$

или

$$da^{ik}+a^{\alpha k}\omega_\alpha^i+a^{i\beta}\omega_\beta^k=\theta a^{ik}.\qquad(3)$$

Условие (c) теперь примет вид

$$a^{34}=0,\qquad a^{42}=0,\qquad a^{13}=0,\qquad a^{12}=0.\qquad\text{(c}'\text{)}$$

Дифференцируя эти уравнения в направлении асимптотической (a) и пользуясь формулами (3), получим:

$$a^{14}\omega_1^3-a^{23}\omega_2^4=0,\qquad a^{23}\omega_3^4+a^{14}\omega_1^2=0,$$
$$a^{23}\omega_2^1+a^{14}\omega_4^3=0,\qquad -a^{23}\omega_3^1+a^{14}\omega_4^2=0;$$

при дифференцировании вдоль линии (a) все четыре уравнения совпадают в одно:

$$a^{14}=a^{23}\varepsilon\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\quad(\varepsilon=\pm1).\qquad\text{(d)}$$

Дифференцируя вторично в том же направлении, получим тождество. Полагая

$$a^{23}=1,\quad a^{14}=\varepsilon\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}},$$

мы удовлетворим уравнению (d). Следовательно, комплекс

$$\mathfrak{a}=[23]+\varepsilon\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\,[14]\qquad(4)$$

не меняется при перемещениях вдоль асимптотических. Поскольку он содержит все четыре касательные (b), соответствующие касательные к асимптотическим (a) принадлежат одному и тому же линейному комплексу.

97. Директрисы фокальных поверхностей. *Директрисами Вильчинского* в точке поверхности называются директрисы линейной конгруэнции, полученной пересечением двух линейных комплексов, соприкасающихся в данной точке первой и второй асимптотической, проходящей через эту точку.

В нашем случае асимптотическая целиком принадлежит своему комплексу (4). Пересечение двух комплексов (4) для $\varepsilon=\pm1$ определяет линейную конгруэнцию, директрисы которой и будут директрисами поверхности. Чтобы определить их, надо найти специальные комплексы пучка

$$\mathfrak{a}_q=[23]+q\,[14]\qquad (q\text{ — параметр пучка}),$$

которому принадлежит конгруэнция. Такими комплексами служат

$$\mathfrak{a}_0=[23],\quad \mathfrak{a}_\infty=[14].$$

Их оси A_2A_3 и A_1A_4 являются, следовательно, директрисами каждой поверхности (A_i). Отсюда теорема: *четыре фокальных поверхности сопряженной четверки имеют общие директрисы, которыми служат диагонали четырехугольника.*

98. Конгруэнции сопряженной четверки *A*. Результат, который мы только что получили, хорошо характеризует конгруэнции рассматриваемой четверки. Это — конгруэнции W (и даже R), которые переводят асимптотические, принадлежащие линейным комплексам, в асимптотические, принадлежащие тем же самым комплексам.

Можно дать новую характеристику такой конгруэнции (Пантази). Это — конгруэнция W, которая переводит линии Дарбу в линии Сегре.

Линии Дарбу являются нулевыми линиями кубичной формы поверхности точно так же, как асимптотические линии можно определить как нулевые линии квадратичной формы (первой квадратичной формы проективной теории поверхностей). Геометрическое определение направлений Дарбу довольно сложно и связано с соприкасающимися поверхностями 2-го порядка, подобно тому, как асимптотические направления связаны с касательными к линиям пересечения поверхности ее касательной плоскостью, именно: соприкасающаяся квадрика имеет касание 2-го порядка с заданной поверхностью; поэтому линия пересечения их имеет в точке касания поверхности с квадрикой тройную точку. Среди трехпараметрического семейства квадрик, соприкасающихся в данной точке поверхности, найдутся такие, для которых три касательные в тройной точке линии пересечения совпадают. Это совпадение возможно тремя разными способами по трем направлениям, которые и носят название *направлений Дарбу*.

Если от поверхности как геометрического места точек перейти к поверхности как огибающей касательных плоскостей, то то же самое построение приведет к трем *направлениям Сегре*. Поскольку при перемещении точки касания по поверхности касательная к линии, описываемой этой точкой (предельное положение прямой, проходящей через две бесконечно близкие точки), и характеристика касательной плоскости (предельное положение прямой, определяемой двумя бесконечно близкими касательными плоскостями) составляют пару сопряженных касательных поверхности, *три касательные Сегре сопряжены соответствующим касательным Дарбу*.

Мы видели, что в репере 1-го порядка, присоединенном к конгруэнции сопряженной четверки, кубичная форма фокальной поверхности $(\boldsymbol{A}_1)$ пишется в виде (14α) п. 90:

$$\varphi_3 = \frac{\beta}{\lambda\mu}\left\{\left(x + y' + \frac{1}{\mu}x' - 3\lambda y\right)\{\lambda(\omega_1^3)^2 + 3\mu(\omega_2^4)^2\}\,\omega_1^3 + \right.$$
$$\left. + \left(y + x' + \frac{1}{\lambda}y' - 3\mu x\right)\{\mu(\omega_2^4)^2 + 3\lambda(\omega_1^3)^2\}\,\omega_2^4\right\}.$$

Внося сюда значения x', y' по формулам (10α) п. 88 и приравнивая φ_3 к нулю, получим уравнение линий Дарбу в виде

$$\frac{\lambda}{\mu}\,y(\omega_1^3)^3 + 3x(\omega_1^3)^2\,\omega_2^4 + 3y\omega_1^3(\omega_2^4)^2 + \frac{\mu}{\lambda}\,x(\omega_2^4)^3 = 0. \quad \text{(a)}$$

Для второй фокальной поверхности уравнение линий Дарбу получится обычной подстановкой $\begin{pmatrix} 1 & 3 & \lambda & \mu & x & y \\ 2 & 4 & \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\mu} & x' & y' \end{pmatrix}$ с заменой x', y' по формулам (10α) п. 88:

$$\mu y(\omega_2^4)^3 + 3\mu x(\omega_2^4)^2\,\omega_1^3 + 3\lambda y\omega_2^4(\omega_1^3)^2 + \lambda x(\omega_1^3)^3 = 0. \quad \text{(}$$

Чтобы получить уравнение линий Сегре, надо перейти к сопряженным линиям. Уравнение асимптотических можно получить, приравнивая нулю квадратичную форму φ_2.

Пользуясь формулой (14α) п. 90, получим:

$$\lambda(\omega_1^3)^2 - \mu(\omega_2^4) = 0; \quad (5)$$

условие сопряженности направлений $\omega_1^3 : \omega_2^4$ и $\tilde{\omega}_1^3 : \tilde{\omega}_2^4$ теперь примет вид

$$\lambda\omega_1^3\tilde{\omega}_1^3 - \mu\omega_2^4\tilde{\omega}_2^4 = 0,$$

откуда

$$\frac{\tilde{\omega}_1^3}{\mu\omega_2^4} = \frac{\tilde{\omega}_2^4}{\lambda\omega_1^3}.$$

Внося в уравнение (b) вместо форм ω_1^3, ω_2^4 величины, пропорциональные $\tilde{\omega}_1^3$, $\tilde{\omega}_2^4$, получим искомое уравнение линий Сегре на второй фокальной поверхности $(\boldsymbol{A}_2)$:

$$\frac{\lambda}{\mu}\,y(\omega_1^3)^3 + 3x(\omega_1^3)^2\,\omega_2^4 + 3y\omega_1^3(\omega_2^4)^2 + \frac{\mu}{\lambda}\,x(\omega_2^4)^3 = 0.$$

Это уравнение совпадает с уравнением (a), откуда и следует теорема.

99. Пара директрис поверхности. Все эти теоремы допускают обращение. Мы покажем, как можно построить сопряженную четверку по заданной поверхности F_3 с асимптотическими в линейных комплексах, но предварительно нам надо найти уравнение поверхности, отнесенной к асимптотическим касательным и директрисам Вильчинского.

Отнесем поверхность $(\boldsymbol{A}_0)$ к тетраэдру $\{\boldsymbol{A}_i\}$ 2-го порядка, построенному на асимптотических касательных $\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{A}_2$.

Мы видели (п. 24), что инфинитезимальные перемещения тетраэдра 2-го порядка, построенного на асимптотических касательных, определяются системой уравнений (46) п. 23

$$d\boldsymbol{A}_i = \omega_i^k \boldsymbol{A}_k \qquad (i,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3),$$

где формы ω_i^k удовлетворяют соотношениям ($49\alpha'$), (51α) п. 24

$$\omega_0^3 = 0, \quad \omega_1^3 = \omega^2, \quad \omega_2^3 = \omega^1. \quad \text{(a)}$$

Внешнее дифференцирование уравнений (a) дает два квадратичных уравнения:

$$[\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3,\ \omega^2] - 2[\omega_1^2\omega^1] = 0,$$
$$[\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3,\ \omega^1] - 2[\omega_2^1\omega^2] = 0,$$

откуда

$$\omega_1^2 = \beta\omega^1 + \beta'\omega^2, \quad \omega_2^1 = \gamma'\omega^1 + \gamma\omega^2,$$
$$\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 = -2(\beta'\omega^1 + \gamma'\omega^2). \quad \text{(b)}$$

Если при этом ребра A_0A_3, A_1A_2 совпадают с двумя директрисами поверхности (при этом на β, β', γ, γ' накладываются дополнительные соотношения), то соприкасающиеся линейные комплексы асимптотических линий $\omega^2=0$ и $\omega^1=0$ должны принадлежать пучку линейных комплексов

$$\mathfrak{a}=[12]+\lambda[03],$$

где λ — параметр пучка. Это значит, что при подходящем выборе $\lambda=\lambda_1$ удовлетворено соотношение

$$\left\{\mathfrak{a},\ [01]+d[01]+\frac{1}{2}d^2[01]+\frac{1}{6}d^3[01]+\frac{1}{24}d^4[01]\right\}\equiv 0 \pmod{\omega^2} \qquad (c)$$

и такое же с заменой индексов $\binom{1}{2}$ для $\lambda=\lambda_2$.

Поскольку

$$\begin{aligned}
&d[01]\equiv\theta[01]+\beta\omega^1[02],\\
&d[02]\equiv\theta_1[01]+\theta_2[02]+\omega^1([12]+[03]),\\
&d([12]+[03])\equiv\varphi_1[01]+\varphi_2[02]+\varphi_3([12]+[03])+\\
&\qquad\qquad+\beta'\omega^1([12]-[03])+2\omega^1[13] \pmod{\omega^2}, \qquad (d)\\
&d[13]\equiv\psi_1[01]+\psi_2[13]+\psi_3([12]+[03])-\\
&\qquad\qquad-\frac{\omega_1^0-\omega_3^2}{2}([12]-[03])+\beta\omega^1[23],\\
&d[23]\equiv\chi_1[02]+\chi_2[03]+\chi_3[13]+\chi_4[12]+\chi_5[23],
\end{aligned}$$

а соотношение (c) эквивалентно сравнениям

$$\left.\begin{aligned}
&\{\mathfrak{a}[01]\}\equiv 0, \quad \{\mathfrak{a}\,d[01]\}\equiv 0, \quad \{\mathfrak{a}\,d[02]\}\equiv 0,\\
&\{\mathfrak{a},\ d([12]+[03]\}\equiv 0,\ \{\mathfrak{a},\ d(\beta'([12]+[03])+2[13])\}\equiv 0
\end{aligned}\right\} \pmod{\omega^2},$$

то будут иметь место равенства:

$$\{\mathfrak{a}[01]\}=0, \quad \{\mathfrak{a}[02]\}=0, \qquad (e_1)$$

$$\{\mathfrak{a},\ ([12]+[03])\}=0, \qquad (e_2)$$

$$\{\mathfrak{a},\ \beta'([12]-[03])+2[13]\}=0. \qquad (e_3)$$

Уравнения (e_1) удовлетворены тождественно; уравнение (e_2) определяет параметр $\lambda_1=-1$; уравнение (e_3) дает

$$\beta'=0.$$

Тогда последнее требование принимает вид

$$\{\mathfrak{a}\,d[13]\}\equiv 0 \pmod{\omega^2},$$

т. е.

$$\{\mathfrak{a},\ (\omega_1^0-\omega_3^2)([12]-[03])+2\beta\omega^1[23]\}\equiv 0 \pmod{\omega^2},$$

или

$$\omega_1^0-\omega_3^2\equiv 0 \pmod{\omega^2},$$

поэтому

$$[\omega_1^0-\omega_3^2,\ \omega^2]=0. \qquad (f_1)$$

Аналогично, отыскивая соприкасающийся комплекс для второй асимптотической, найдем параметр $\lambda_2=1$ и соотношения

$$\gamma'=0, \qquad [\omega_2^0-\omega_3^1, \qquad \omega^1]=0. \qquad (f_2)$$

Уравнения (b) принимают теперь вид

$$\omega_1^2=\beta\omega^1, \qquad \omega_2^1=\gamma\omega^2, \qquad \omega_0^0-\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3=0. \qquad (b')$$

Дифференцируя внешним образом, получаем в силу (f_1), (f_2):

$$\left.\begin{aligned}
&[d\ln\beta+\omega_0^0-2\omega_1^1+\omega_2^2,\ \omega^1]=0,\\
&[d\ln\gamma+\omega_0^0-2\omega_2^2+\omega_1^1,\ \omega^2]=0,
\end{aligned}\right\} \qquad (g_1)$$

$$[\omega_1^0-\omega_3^2,\ \omega^1]+[\omega_2^0-\omega_3^1,\ \omega^2]=0. \qquad (g_2)$$

Развертывая квадратичные уравнения ($f_{1,2}$), (g_2), получим:

$$\omega_3^2-\omega_1^0=y\omega^2, \qquad \omega_3^1-\omega_2^0=y\omega^1. \qquad (h)$$

Внешнее дифференцирование этих уравнений дает

$$2\beta[\omega_2^0\omega^1]-[dy+y(\omega_0^0-\omega_3^3)-2\omega_3^0,\ \omega^2]=0, \qquad (i)$$

$$[dy+y(\omega_0^0-\omega_3^3)-2\omega_3^0,\ \omega^1]-2\gamma[\omega_1^0\omega^2]=0, \qquad (j)$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_1^0=B\omega^1+k'\omega^2,\\
&\omega_2^0=k\omega^1+A\omega^2,\\
&dy+y(\omega_0^0-\omega_3^3)-2\omega_3^0=-2(A\beta\omega^1+B\gamma\omega^2).
\end{aligned}\right\} \qquad (k)$$

100. Расслояемость пары директрис. Потребуем теперь, чтобы пара конгруэнций, описанных директрисами, была расслояема.

Если точка

$$M=tA+A_3$$

описывает расслояющую поверхность пары, то касательная плоскость в точке M проходит через прямую A_1A_2. Следовательно, должно иметь место уравнение

$$(dM\,MA_1A_2)=0$$

или, если подставить сюда дифференциал dM,

$$\{(dt+t\omega_0^0+\omega_3^0)A+\omega_3^3A_3, \qquad tA+A_3,\ A_1,\ A_2\}=0,$$

или

$$dt + \omega_3^0 + t(\omega_0^0 - \omega_3^3) = 0. \qquad (\mathrm{l}_1)$$

Аналогично точка

$$M' = t'A_1 + A_2$$

описывает расслояющую поверхность второго семейства, если t' удовлетворяет уравнению

$$(dM'\,M'AA_3) = 0$$

или

$$dt' + \omega_2^1 + t'(\omega_1^1 - \omega_2^2) - t'^2\omega_1^2 = 0. \qquad (\mathrm{l}_2)$$

Уравнения (l_1), (l_2) должны быть вполне интегрируемыми, ибо каждое определяет семейство поверхностей.

Дифференцируя уравнения (l_1), (l_2) внешним образом и принимая во внимание (a), (b′), (h), получим:

$$(y + 2t)\{[\omega^1\omega_1^0] + [\omega^2\omega_2^0]\} = 0,$$

$$2t'\{[\omega^1\omega_1^0] - [\omega^2\omega_2^0] + y[\omega^1\omega^2]\} = 0.$$

Таким образом, условие расслояемости пары директрис выражается равенствами

$$\left.\begin{aligned}&[\omega^1\omega_1^0] + [\omega^2\omega_2^0] = 0,\\ &[\omega^1\omega_1^0] - [\omega^2\omega_2^0] + y[\omega^1\omega^2] = 0,\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{m})$$

или, в силу соотношений (k), равенствами

$$k' = k, \qquad k + k' + y = 0. \qquad (\mathrm{m}')$$

101. Поверхности F_2. Геометрический смысл уравнений (m′) п. 100 чрезвычайно прост; они показывают, что каждая асимптотическая поверхности (A) принадлежит некоторому линейному комплексу. Действительно, чтобы обнаружить это, достаточно доказать стационарность линейного комплекса

$$\mathfrak{a} = [12] + \varepsilon[03] \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

при перемещении репера вдоль линии $\omega^2 = 0$, если $\varepsilon = -1$, или вдоль линии $\omega^1 = 0$, если $\varepsilon = 1$.

Условие стационарности линейного комплекса

$$\mathfrak{a} = \sum_{(ik)}^{0,1,2,3} a^{ik}[ik]$$

выражается уравнениями (3) п. 96

$$da^{ik} + a^{\alpha k}\omega_\alpha^i + a^{i\beta}\omega_\beta^k = \theta a^{ik}. \qquad ($$

Теперь все $a^{ik} = 0$, кроме $a^{12} = 1$ и $a^{03} = \varepsilon$. Внося эти значения в уравнение (n), получим только два соотношения, не обращающихся в тождество:

$$\omega_1^0 + \omega_3^2 \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\,\omega^1), \qquad \omega_2^0 + \omega_3^1 \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\,\omega^2),$$

которые, в силу соотношений (h,k) п. 99, принимают вид

$$2k' + y = 0, \qquad 2k + y = 0,$$

что эквивалентно уравнениям (m′).

Таким образом, *поверхности с асимптотическими в линейных комплексах и только эти поверхности обладают расслояемой парой директрис.*

102. Расслояющие поверхности пары директрис. Выберем точку A_3 так, чтобы она совпадала с точкой M одной из расслояющих поверхностей.

Тогда уравнение (l_1) п. 100 должно иметь решение $t = 0$, откуда следует

$$\omega_3^0 = 0.$$

Внешний дифференциал левой части обращается в нуль в силу первого уравнения (m) п. 100.

Теперь поверхность (A_3) касается плоскости ($A_1A_2A_3$), а поскольку

$$dA_3 = \omega_3^3A_3 + (-k\omega^1 + A\omega^2)A_1 + (B\omega^1 - k\omega^2)A_2,$$

уравнение асимптотических будет

$$\omega_1^0(-k\omega^1 + A\omega^2) + \omega_2^0(B\omega^1 - k\omega^2) = 0,$$

или в силу (k) п. 99

$$(AB - k^2)\,\omega^1\omega^2 = 0,$$

т. е. асимптотические линии поверхности (A_3) соответствуют асимптотическим поверхности (A), что и следовало ожидать, поскольку обе поверхности расслояют пару (A_1A_2), (AA_3).

Асимптотическими касательными служат прямые

$$-k[13] + B[23], \quad A[13] - k[23]. \qquad (\mathrm{o})$$

Нетрудно обнаружить, что обе асимптотические принадлежат линейным комплексам пучка с особыми комплексами [12] и [03]. Действительно, при $\omega^2 = 0$ комплекс [12] − [03] неподвижен; он содержит прямую $-k[13] + B[23]$, следовательно, содержит и все касательные линии $\omega^2 = 0$ на поверхности (A_3); аналогично асимптотические $\omega^1 = 0$ поверхности (A_3) принадлежат комплексу [12] + [03]. Это переносится на все поверхности $M = tA + A_3$, ибо мы совместили точку A_3 с точкой произвольной поверхности (M). Это переносится и на все поверхности $M' = t'A_1 + A_2$; действительно, асимптотические любой поверхности (M') как расслояющей поверхности пары соответствуют асимптотическим поверхности (A).

Следовательно, вдоль асимптотических $\omega^2=0$ или $\omega^1=0$ комплексы $[12]-[03]$ или соответственно $[12]+[03]$ неподвижны. Между тем теперь

$$dM' = (t'\omega_1^2+\omega_2^2)M' + \omega^1\{A_3+(t'B+k)A\} + \\ + \omega^2\{t'A_3+(t'k+A)A\}; \quad (\mathrm{p})$$

следовательно, асимптотическими касательными являются прямые

$$t'(t'B+k)[01]+(t'B+k)[02]-t'[13]-[23],$$
$$t'(t'k+A)[01]+(t'k+A)[02]-t'^2[13]-t'[23],$$

которые принадлежат соответственно комплексам $[12]\pm[03]$.

Таким образом, и здесь каждая асимптотическая принадлежит линейному комплексу, а прямые A_1A_2, A_0A_3 являются общими директрисами всех поверхностей (M) и (M').

103. Присоединенная к паре директрис сопряженная четверка. Остается показать, что каждая поверхность (A) с асимптотическими в линейных комплексах может быть фокальной поверхностью сопряженной четверки.

Допустим, что точки

$$M_1' = t_1'A_1+A_2, \quad M_2'=t_2'A_1+A_2, \quad M=tA+A_3,$$

где t_i', t удовлетворяют уравнениям (l_1), (l_2) п. 100, описывают три другие фокальные поверхности четверки. Так как косой четырехугольник $AM_1'MM_2'$ описывает конфигурацию T, то для расслояемости (и даже сопряженности (п. 50)) достаточно, чтобы развертывающиеся поверхности четверки соответствовали прямо.

Переписываем уравнение (p) п. 102 в виде

$$dM_i' = (t_i'\omega_1^2+\omega_2^2)M_i' + \\ + A\left\{(t_i'B+k-t)\,\omega^1 + t_i'\left(k-t+\frac{A}{t_i'}\right)\omega^2\right\} + M(\omega^1+t_i'\omega^2).$$

Отсюда следует, что лучи $M_1'A$, $M_2'M$ касаются на поверхности (M_1'), (M_2') линий

$$\omega^1+t_1'\omega^2=0, \quad (t_2'B+k-t)\,\omega^1+t_2'\left(k-t+\frac{A}{t_2'}\right)\omega^2=0.$$

Те же лучи на поверхностях соответственно (A) и (M) будут касаться линий сопряжённых, уравнения которых отличаются знаком при ω^2:

$$\omega^1-t_1'\omega^2=0, \quad (t_2'B+k-t)\,\omega^1-t_2'\left(k-t+\frac{A}{t_2'}\right)\omega^2=0.$$

Прямое соответствие развертывающихся поверхностей четверки предполагает, что на фокальных поверхностях (M_1'), (M) одной конгруэнции $(M_1'M)$ лучи $M_1'A$ и MM_2' огибают соответствующие линии. Следовательно, развертывающиеся поверхности соответствуют прямо, если

$$\left[\omega^1+t_1'\omega^2, \ (t_2'B+k-t)\,\omega^1-t_2'\left(k-t+\frac{A}{t_2'}\right)\omega^2\right]=0,$$

откуда вытекает условие на координаты t_i', t точек M_i', M

$$Bt_1't_2'+(t_1'+t_2')(k-t)+A=0. \quad (\mathrm{q})$$

Можно показать, что значение t, получаемое из уравнения (q) при некоторых t_1', t_2', удовлетворяет уравнению (l_1) п. 100, т. е. если продифференцировать уравнение (q), то оно будет эквивалентно уравнению (l_1) при некоторых t_1', t_2', удовлетворяющих (l_2). Это равносильно тому, чтобы дифференциальное следствие уравнения (q) выполнялось тождественно в силу (l_1), (l_2) при некоторых t_1', t_2', удовлетворяющих уравнению (l_2). Для этого нам придется предварительно продолжить систему (k) п. 99 для поверхностей с асимптотическими в линейных комплексах.

Внося в уравнение (k) значения (m′) п. 100 и $\omega_3^0=0$, получим:

$$\omega_1^0=B\omega^1+k\omega^2, \quad \omega_2^0=k\omega^1+A\omega^2, \\ dk+k(\omega_0^0-\omega_3^3)=A\beta\omega^1+B\gamma\omega^2. \quad (\mathrm{k}')$$

Внешнее дифференцирование дает с помощью (g_1) п. 99:

$$[dB+2B(\omega_0^0-\omega_1^1), \ \omega^1]=0, \quad [dA+2A(\omega_0^0-\omega_2^2), \ \omega^2]=0,$$
$$\beta\,[dA+2A(\omega_0^0-\omega_2^2), \ \omega^1]+\gamma\,[dB+2B(\omega_0^0-\omega_1^1), \ \omega^2]=0,$$

откуда

$$dA+2A(\omega_0^0-\omega_2^2)=\gamma\xi\omega^2, \\ dB+2B(\omega_0^0-\omega_1^1)=\beta\xi\omega^1. \quad (\mathrm{r})$$

Новое дифференцирование дает

$$[d\xi+\xi(\omega_0^0-\omega_3^3)-2A\beta\omega^1-2B\gamma\omega^2, \ \omega^1]=0,$$
$$[d\xi+\xi(\omega_0^0-\omega_3^3)-2A\beta\omega^1-2B\gamma\omega^2, \ \omega^2]=0,$$

откуда

$$d\xi+\xi(\omega_0^0-\omega_3^3)=2A\beta\omega^1+2B\gamma\omega^2 \quad (\mathrm{s})$$

и внешнее дифференцирование приводит к тождеству.

Пользуясь соотношениями (k′) п. 103 и уравнениями ($l_{1,2}$) п. 100, получим, дифференцируя равенство (q):

$$(t_1' t_2' \beta\omega^1 + \gamma\omega^2)(\xi - 2k + 2t) = 0,$$

откуда, в силу линейной независимости ω^1, ω^2, имеем:

$$t = k - \frac{1}{2}\xi. \tag{t₁}$$

В силу уравнений (k′) и (s) это значение t удовлетворяет уравнению (l_1) п. 100.

Для того чтобы уравнение (q) давало этот корень для t, необходимо, чтобы t_1', t_2' удовлетворяли уравнению

$$2Bt_1' t_2' + \xi(t_1' + t_2') + 2A = 0. \tag{t₂}$$

Но в то же время t_1', t_2' должны удовлетворять уравнению (l_2) п. 100. Уравнение (t_2) ему не противоречит, ибо дифференциальное следствие его тождественно выполняется в силу уравнений (l_2), написанных для t_1' и t_2'.

Таким образом, мы можем взять произвольную поверхность (A) с асимптотическими в линейных комплексах, к ней присоединить любую поверхность (M_1'), обладающую теми же директрисами, но в обратном порядке; они будут служить фокальными поверхностями конгруэнции W, которая переводит одну поверхность в другую так, что соответствующие друг другу асимптотические лежат в одних и тех же комплексах. Тогда уравнения (t_2) и (t_1) определяют единственные поверхности (M_2') и (M), которые вместе с поверхностями (M_1') и (A) образуют четыре фокальные поверхности четверки так, что конгруэнции (AM_1') и (MM_2') образуют сопряженную пару. Так как уравнения (q), (t_2) симметричны относительно t_1' и t_2', то будут удовлетворяться аналогичные уравнения для конгруэнций (AM_2') и (MM_1'), т. е. они также образуют сопряженную пару, и четырехугольник $AM_1'MM_2'$ описывает сопряженную четверку.

ГЛАВА XI

ПРОДОЛЖЕНИЕ СОПРЯЖЕННЫХ ЧЕТВЕРОК

104. Сопряженная четверка диагоналей. В п. 82 (теорема 1) мы доказали, что конгруэнции, описанные диагоналями косого четырехугольника сопряженной четверки, всегда образуют сопряженную пару. Если эта сопряженная пара порождает сопряженную четверку, то мы будем называть ее *продолжением исходной четверки*, описанной сторонами четырехугольника.

Сопряженную четверку, допускающую продолжение, будем называть *продолжаемой*.

Условие, которому удовлетворяют продолжаемые четверки, получится, если потребовать, чтобы вспомогательные конгруэнции пары диагоналей имели прямое соответствие развертывающихся поверхностей.

Допустим, что фокусами диагоналей A_1A_4, A_2A_3 служат точки:

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 + x_1A_4, \quad & B_3 &= A_2 + x_2A_3, \\ B_2 &= A_1 + x_1'A_4, \quad & B_4 &= A_2 + x_2'A_3. \end{aligned} \tag{α}$$

Поскольку конгруэнции (B_1B_2), (B_3B_4) образуют расслояемую пару, следовательно, пару T, каждая вершина косого четырехугольника $B_1B_2B_4B_3$ описывает поверхность, которая касается двух смежных сторон четырехугольника; следовательно, касательной плоскостью такой поверхности является плоскость, определяемая этими двумя сторонами четырехугольника. Отсюда четыре соотношения:

$$\begin{aligned} (dB_1B_1B_3B_2) &= 0, \quad & (dB_3B_3B_4B_1) &= 0, \\ (dB_2B_2B_1B_4) &= 0, \quad & (dB_4B_4B_2B_3) &= 0, \end{aligned}$$

или в силу уравнений (α)

$$\begin{aligned} (dB_1B_3A_1A_4) &= 0, \quad & (dB_3B_1A_2A_3) &= 0, \\ (dB_2B_4A_1A_4) &= 0, \quad & (dB_4B_2A_2A_3) &= 0. \end{aligned}$$

Это приводит к двум уравнениям, которым удовлетворяют как значения x_1, x_2, так и x_1', x_2':

$$\begin{vmatrix} \omega_1^2 + x_1\omega_4^2 & 1 \\ \omega_1^3 + x_1\omega_4^3 & x_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \omega_2^1 + x_2\omega_3^1 & 1 \\ \omega_2^4 + x_2\omega_3^4 & x_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

12 Зак. 1277. С. П. Фиников

Развертывая эти равенства с помощью формул ($3\alpha - \gamma$) п. 78 при $b = 0$ и приравнивая нулю коэффициенты при ω_1^3, ω_2^4, получим четыре уравнения, которые, в силу (4α) п. 78 и ($13'$) п. 82, равносильны двум:

$$\beta' x_1 + \beta x_2 = 1, \quad \alpha' x_1 - \gamma x_2 = c x_1 x_2. \tag{1α}$$

Отсюда для координаты фокуса x_1 (и x_1') получается квадратное уравнение

$$c\beta' x_1^2 - (c - \alpha'\beta - \gamma\beta') x_1 - \gamma = 0. \tag{1β}$$

Нам надо, чтобы конгруэнции диагоналей (A_1A_4), (A_2A_3) определяли сопряженную четверку, т. е. чтобы вспомогательная пара (B_1B_3), (B_2B_4) была расслояемой сопряженной парой, а для этого, как мы видели, достаточно прямого соответствия развертывающихся поверхностей пары.

Дифференцируя равенства (α) и пользуясь соотношениями (1), мы без труда получим:

$$\begin{aligned}
dB_1 &= \left(\frac{x_1 \Delta x_1}{x_1 - x_1'} + \omega_1^1\right) B_1 + (\omega_1^2 + x_1\omega_4^2) B_3 - \frac{x_1 \Delta x_1}{x_1 - x_1'} B_2, \\
dB_3 &= (\omega_2^1 + x_2\omega_3^1) B_1 + \left(\frac{x_2 \Delta x_2}{x_2 - x_2'} + \omega_2^2\right) B_3 - \frac{x_2 \Delta x_2}{x_2 - x_2'} B_4, \\
dB_4 &= \frac{x_2' \Delta x_2'}{x_2 - x_2'} B_3 + \left(\omega_2^2 - \frac{x_2' \Delta x_2'}{x_2 - x_2'}\right) B_4 + (\omega_2^1 + x_2'\omega_3^1) B_2, \\
dB_2 &= \frac{x_1' \Delta x_1'}{x_1 - x_1'} B_1 + (\omega_1^2 + x_1'\omega_4^2) B_4 + \left(\omega_1^1 - \frac{x_1' \Delta x_1'}{x_1 - x_1'}\right) B_2,
\end{aligned} \tag{2α}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta x_1 &= d \ln x_1 + \omega_4^4 - \omega_1^1, \quad \Delta x_1' = d \ln x_1' + \omega_4^4 - \omega_1^1, \\
\Delta x_2 &= d \ln x_2 + \omega_3^3 - \omega_2^2, \quad \Delta x_2' = d \ln x_2' + \omega_3^3 - \omega_2^2.
\end{aligned} \tag{2β}$$

Отсюда следует, что на фокальных поверхностях (B_1) и (B_2) конгруэнции (B_1B_2) лучи вспомогательных конгруэнций (B_1B_3) и (B_2B_4) огибают линии, определяемые уравнениями

$$\Delta x_1 = 0 \quad \text{и} \quad \Delta x_1' = 0,$$

и аналогично $\Delta x_2 = 0$ и $\Delta x_2' = 0$ для поверхностей (B_3) и (B_4).

Условие прямого соответствия развертывающихся поверхносте[й], следовательно, записывается квадратичными уравнениями

$$[\Delta x_1 \Delta x_1'] = 0, \quad [\Delta x_2 \Delta x_2'] = 0. \quad ($$

Между тем, дифференцируя уравнение (1β), получаем по исключении $(x_1)^2$ при помощи того же уравнения (1β) и уравнений (1α) п. 85:

$$\left\{\left(m\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} + \beta\beta' \frac{1 - \lambda\mu}{\lambda}\right) x_1 - 2\frac{\beta}{\lambda}\right\} \Delta x_1 + A x_1 + B = 0, \tag{a$'$}$$

где

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1 - \lambda\mu}{\lambda} \beta\beta' (\Delta m - \nabla\beta) + m\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \nabla\beta' + \frac{1 + \lambda\mu}{\lambda} \beta\beta' \frac{\Delta\lambda + \Delta\mu}{2}, \\
B &= -\frac{\beta}{\lambda}\left(\Delta m - \nabla\beta + \nabla\beta' + \frac{\Delta\lambda + \Delta\mu}{2}\right).
\end{aligned} \tag{b}$$

При этом $\Delta x_1'$ определяется таким же уравнением с заменой x_1 на x_1'. Для Δx_2, $\Delta x_2'$ уравнения получаются заменой $\begin{pmatrix} \beta & \mu \\ \beta' & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$.

Условие прямого соответствия резвертывающихся поверхностей (a) принимает вид

$$[AB] = 0, \quad [A'B'] = 0, \tag{3}$$

где A', B' получаются из форм A, B обычной заменой

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \beta & \mu \\ 2 & 4 & \beta' & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Пользуясь формулами (b), (2α) п. 85, получим:

$$\begin{aligned}
&\Big[m\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}(x\omega_1^3 + y\omega_2^4) + \frac{\beta\beta'}{\lambda}\Big\{\left(y' - \lambda y + \frac{x'}{\mu} - \lambda\mu x\right)\omega_1^3 + \\
&+ \left(x' + \frac{y'}{\lambda} - \mu x - \lambda\mu y\right)\omega_2^4\Big\},\ \left(x + \frac{1}{\mu}x'\right)\omega_1^3 + \left(y + \frac{1}{\lambda}y'\right)\omega_2^4\Big] = 0, \\
&\Big[m\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}(y'\omega_1^3 + x'\omega_2^4) + \beta\beta'\mu\Big\{\left(x + \lambda y - \frac{x'}{\mu} - \frac{y'}{\lambda\mu}\right)\omega_1^3 + \\
&\qquad + \left(y + \mu x - \frac{y'}{\lambda} - \frac{x'}{\lambda\mu}\right)\omega_2^4\Big\},\ (y' + \lambda y)\omega_1^3 + (x' + \mu x)\omega_2^4\Big] = 0,
\end{aligned} \tag{3$'$}$$

или, развертывая только одно конечное уравнение

$$\begin{aligned}
&m(\mu x y' - \lambda x' y) + \\
&+ \beta\beta'\sqrt{\lambda\mu}\left\{\mu x^2 + \frac{1}{\lambda}y'^2 - \lambda y^2 - \frac{1}{\mu}x'^2 + \frac{\lambda\mu + 1}{\lambda\mu}(\lambda x' y - \mu x y')\right\} = 0.
\end{aligned} \tag{3$''$}$$

Если уравнение ($3''$) удовлетворено, то пара диагоналей вместе [с] своими вспомогательными конгруэнциями образует сопряженную четверку. Значит, равенство (3″) является признаком продолжаемой четверки.

105. Продолжение вырожденной четверки. Хотя сопряженная четверка п. 86 выродилась, но она определяет пару диагоналей, которая, в силу общей теоремы п. 82, будет сопряженной. Она порождает сопряженную четверку, если удовлетворяются уравнения (3) или (3″) п. 104.

Теперь, в силу соотношений (4α, β) п. 86, уравнения (3′) п. 104 принимают вид

$$\left[x\omega_1^3+y\omega_2^4,\ \lambda x'\omega_1^3+\frac{1}{\lambda}\,y'\omega_2^4\right]=0,$$

$$\left[y'\omega_1^3+x'\omega_2^4,\ \lambda y\omega_1^3+\frac{1}{\lambda}\,x\omega_2^4\right]=0,$$

откуда получаем только одно конечное уравнение

$$xy'=\lambda^2x'y.$$

Исключая отсюда x с помощью уравнения (4β) п. 86, получим:

$$(y'+\lambda x'-\lambda y)\,y'=\lambda^2x'y,$$

или

$$(y'+\lambda x')(y'-\lambda y)=0,$$

откуда два случая:

$$1)\qquad y'+\lambda x'=0,\quad x+\lambda y=0; \qquad (4\alpha)$$

$$2)\qquad y'=\lambda y,\qquad x=\lambda x'. \qquad (4\beta)$$

Здесь вторые уравнения в обоих случаях получаются с помощью равенства (4β) п. 86.

В первом случае немедленно получаем, в силу (1γ), (2α, γ) п. 85:

$$\Delta y'+\lambda\,\Delta x'=0,\quad \Delta x+\lambda\,\Delta y=0,\quad \Delta\lambda=0,$$

и уравнения (5α) п. 86 удовлетворены. Уравнения (5β) п. 86 принимают вид

$$[\Delta y,\ \lambda\omega_1^3-\omega_2^4]=0,\quad [\Delta x',\ \lambda\omega_1^3-\omega_2^4]=0. \qquad (5\alpha)$$

Система (2α) п. 77, (3α, β) п. 78, (13′) п. 82, (1α), (2α) п. 85, (4α) п. 86, (4α), (5α) определяет продолжаемые четверки с произволом двух функций одного аргумента. По сравнению с системой п. 86, определяющей общие вырожденные четверки, мы имеем здесь замену пфаффовых уравнений (5α) п. 86 конечными уравнениями (4α), в силу чего произвол решения уменьшается на две произвольные постоянные — начальные значения сумм $x+\lambda y$, $y'+\lambda x'$.

Во втором случае дифференцирование уравнений (4β) дает, в силу (1γ), (2γ) п. 85,

$$\Delta x=\lambda\,\Delta x'+\lambda x'\,\Delta\lambda,\quad \Delta y'=\lambda\,\Delta y+\lambda y\,\Delta\lambda.$$

Внося эти значения в уравнения (5α, β) п. 86, получим, если $y-x'\neq 0$, два линейных уравнения и одно квадратичное:

$$\Delta x'+\Delta y=(x'+y)^2\,\omega_2^4,\quad \Delta\lambda=(x'+y)(\lambda\omega_1^3-\omega_2^4), \qquad (6\alpha)$$

$$[\Delta x'-\Delta y,\ \lambda\omega_1^3-\omega_2^4]+\lambda\,(x'^2-y^2)\,[\omega_1^3\omega_2^4]=0. \qquad (6\beta)$$

Внешний дифференциал линейных уравнений (6α) обращается в тождество в силу уравнений системы. Система — в инволюции и определяет продолжаемые четверки с произволом одной функции одного аргумента.

106. Геометрические свойства полученного продолжения. Пантази дает подробную классификацию вырожденных четверок (4α, β). Четверки S_0 (4α) он делит на четверки S_0' и S_0'' в зависимости от того, различны ли y и x' или они совпадают. В обоих случаях продолженная пара $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_4)$, $(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3)$ сама продолжаема и принадлежит к тому же классу S_0' или S_0'', причем линейчатые фокальные поверхности продолженной пары опираются на те же директрисы. Класс S_0'' обладает характеристическим свойством: обе конгруэнции продолжаемой пары и обе продолженной принадлежат одному и тому же линейному комплексу. Произвол класса S_0'' зависит от произвольных постоянных.

Четверки S_1 (4β) делятся на классы S_1' и S_1'' в зависимости от того, различны y^2 и x'^2 или совпадают. Пары S_1'' зависят от произвольных постоянных. Если $y=x'$, то пара S_1'' принадлежит к классу S_0'. Если $y=-x'$, то продолженная пара будет того же класса и, следовательно, сама допускает продолжение. Произвол пар этого класса зависит от произвольных постоянных. Заметим, что эта пара характеризуется условием $\Delta m=(x'+y)(\lambda\omega_1^3+\omega_2^4)=0$.

Класс S_1' особенно интересен, ибо продолженная четверка не вырождена.

Действительно, условие вырождения конгруэнции $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_3$ — линейная зависимость главных форм луча $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_3$

$$[\Omega_1^2\Omega_3^4]=0,$$

в силу разложений (2α) п. 104, принимает вид

$$[\Delta x_1\,\Delta x_2]=0, \qquad (a)$$

но для $y'=\lambda y$, $x'=\mu x$, $\lambda\mu=1$ формулы (2α) п. 85 дают $\Delta m=\nabla\beta+\nabla\beta'$ и уравнение (a′) п. 104 принимает вид

$$(mx_1-2\beta)\,\Delta x_1+(mx_1-2\beta)\,\nabla\beta'+\beta\,(\Delta m-\nabla\beta-\nabla\beta')=0,$$

следовательно, будем иметь:

$$\Delta x_1 = \Delta x_1' = -\nabla\beta', \quad \Delta x_2 = \Delta x_2' = \nabla\beta \tag{7a}$$

и

$$[\Delta x_1 \, \Delta x_2] = [\nabla\beta' \, \nabla\beta] = \lambda (y^2 - x'^2) [\omega_1^3 \omega_2^4];$$

таким образом, для $y^2 \neq x'^2$

$$[\Delta x_1 \, \Delta x_2] \neq 0,$$

и продолженная четверка не вырождается.

Можно показать, что она является сопряженной четверкой B. Для этого надо проверить для нее равенство, аналогичное равенству (21) п. 93 для исходной четверки.

Если обозначить

$$\Delta m = \frac{m_1}{2}\omega_1^3 + \frac{m_2}{2}\omega_2^4,$$

так что

$$m_1 = x + \lambda y + y' + \frac{1}{\mu} x', \quad m_2 = y + \mu x + x' + \frac{1}{\lambda} y',$$

то нетрудно обнаружить тождество, верное для любой сопряженной четверки

$$\lambda (x' + \mu x)^2 - \mu (y' + \lambda y)^2 = \{\lambda (m_2)^2 - \mu (m_1)^2\} \frac{\lambda\mu}{(\lambda\mu - 1)}.$$

Следовательно, достаточно проверить равенство, аналогичное такому:

$$\lambda (m_2)^2 - \mu (m_1)^2 = 0. \tag{8}$$

Между тем по формулам (1α), (2α) п. 85 для любой сопряженной четверки, имея в виду, что $\Delta a = d \ln a + 2(\omega_1^1 - \omega_3^3)$, $\Delta c = d \ln c + 2(\omega_2^2 - \omega_4^4)$, получим:

$$\Delta a = \Delta m + \frac{\Delta\lambda - \Delta\mu}{2} = m_1 \omega_1^3, \quad \Delta c = \Delta m + \frac{\Delta\mu - \Delta\lambda}{2} = m_2 \omega_2^4.$$

Следовательно, достаточно проверить справедливость равенства для одного из двух знаков

$$\sqrt{\mu}\, [\Delta a \omega_2^4] \pm \sqrt{\lambda}\, [\Delta c \omega_1^3] = 0. \tag{8'}$$

Система (2α) п. 104 дает для тетраэдра $\{B_i\}$ компоненты

$$\begin{aligned} \Omega_1^3 &= \omega_1^2 + x_1 \omega_4^2, & \Omega_2^4 &= \omega_1^2 + x_1' \omega_4^2, \\ \Omega_3^1 &= \omega_2^1 + x_2 \omega_3^1, & \Omega_4^2 &= \omega_2^1 + x_2' \omega_3^1, \\ \Omega_1^1 &= \omega_1^1 - \frac{x_1}{x_1 - x_1'} \nabla\beta', & \Omega_2^2 &= \omega_1^1 + \frac{x_1'}{x_1 - x_1'} \nabla\beta', \\ \Omega_3^3 &= \omega_2^2 - \frac{x_2}{x_2 - x_2'} \nabla\beta, & \Omega_4^4 &= \omega_2^2 + \frac{x_2'}{x_2 - x_2'} \nabla\beta, \end{aligned} \tag{7β}$$

откуда, отмечая титлой величины $\tilde{a}$, $\tilde{c}$, $\tilde{m}$, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$, относящиеся к тетраэдру $\{B_i\}$, получим, в силу уравнений вида (3α—γ) п. 78 при $b=0$ и уравнений (1α) п. 85:

$$\beta'\omega_2^4 + (-\beta'\lambda + m\lambda x_2)\omega_1^3 = \tilde{a}\{\beta\omega_1^3 + (-\beta\mu + m\mu x_1)\omega_2^4\},$$

$$\beta'\omega_2^4 + (-\beta'\lambda + m\lambda x_2')\omega_1^3 = \tilde{c}\{\beta\omega_1^3 + (-\beta\mu + m\mu x_1')\omega_2^4\}.$$

Уравнение (1β) п. 104, если из него исключить x_1 при помощи (1α) п. 104 и учесть (1α) п. 85 и условие $\lambda\mu = 1$, примет вид

$$m\beta (x_2)^2 - m x_2 + \beta' = 0,$$

откуда для двух корней x_2, x_2' этого уравнения будем иметь

$$x_2 x_2' = \frac{\beta'}{m}(x_2 + x_2'),$$

поэтому

$$\tilde{a} = \lambda \frac{m x_2 - \beta'}{\beta} = \frac{\lambda\beta'}{\beta} \frac{x_2}{x_2'}, \qquad \tilde{c} = \lambda \frac{m x_2' - \beta'}{\beta} = \frac{\lambda\beta'}{\beta} \frac{x_2'}{x_2}$$

и по формулам (1) п. 85, верным для любой сопряженной четверки

$$\tilde{\lambda} : \tilde{\mu} = \tilde{a} : \tilde{c} = \left(\frac{x_2}{x_2'}\right)^2.$$

Теперь

$$\Delta\tilde{a} = d \ln\left(\frac{\lambda\beta'}{\beta} \frac{x_2}{x_2'}\right) + 2(\Omega_1^1 - \Omega_3^3),$$

$$\Delta\tilde{c} = d \ln\left(\frac{\lambda\beta'}{\beta} \frac{x_2'}{x_2}\right) + 2(\Omega_2^2 - \Omega_4^4),$$

с другой стороны, уравнение (1β) и то, которое получается из него по исключении x_1 при помощи (1α), в случае $\lambda\mu = 1$ принимают вид

$$\begin{aligned} m\beta'(x_1)^2 - m x_1 + \beta &= 0, \\ m\beta(x_2)^2 - m x_2 + \beta' &= 0. \end{aligned} \tag{a}$$

Поэтому $\Delta\tilde{a}$, $\Delta\tilde{c}$ можно переписать, в силу (2α) п. 85, (4β), в виде

$$\Delta\tilde{a} = \frac{2(x + \lambda y) x_2}{(x_2 - x_2')}\left(\omega_1^3 + \frac{1}{\lambda} \frac{x_2'}{x_2} \omega_2^4\right),$$

$$\Delta\tilde{c} = -\frac{2(x + \lambda y) x_2'}{(x_2 - x_2')}\left(\omega_1^3 + \frac{1}{\lambda} \frac{x_2}{x_2'} \omega_2^4\right).$$

Но, в силу уравнений (3α—γ) п. 78 для $b = 0$, (1α) п. 85 для $\lambda\mu = 1$, (7β) и уравнений (a) Ω_1^3, Ω_2^4 принимают вид

$$\Omega_1^3 = \beta\left(\omega_1^3 + \frac{1}{\lambda} \frac{x_2'}{x_2} \omega_2^4\right), \qquad \Omega_2^4 = \beta\left(\omega_1^3 + \frac{1}{\lambda} \frac{x_2}{x_2'} \omega_2^4\right),$$

откуда

$$\Delta\tilde{a} = \frac{2(x+\lambda y)\,x_2}{\beta\,(x_2 - x_2')}\,\Omega_1^3, \qquad \Delta\tilde{c} = -\frac{2(x+\lambda y)\,x_2'}{\beta\,(x_2 - x_2')}\,\Omega_2^4,$$

и после подстановки в уравнение (8′), написанное для тетраэдра $\{\boldsymbol{B}_i\}$, получим тождество.

107. Продолжение четверок *B*. Для четверок B, в силу соотношений (23α) п. 93, равенство (3″) п. 104 удовлетворено, следовательно, эта четверка допускает продолжение.

Поскольку, в силу соотношений (24α) п. 93, если положить $t = \frac{1}{pq}$, будет

$$\Delta m = \frac{t+1}{2}\left(\nabla\beta + \frac{1}{t}\,\nabla\beta'\right), \qquad \Delta\lambda + \Delta\mu = (1+t)\left(\nabla\beta - \frac{1}{t}\,\nabla\beta'\right)$$

и

$$[\nabla\beta\,\nabla\beta'] = 0,$$

то по формулам (a′), (b) п. 104

$$[\Delta x_1\,\nabla\beta] = 0, \qquad [\Delta x_2\,\nabla\beta] = 0$$

и равенство (α) п. 106 удовлетворено. Следовательно, продолжение сопряженной четверки B приводит к вырожденной четверке, а так как

$$\Delta\tilde{m} = (\tilde{x} + \tilde{\lambda}\tilde{y})\left(\Omega_1^3 + \frac{1}{\tilde{\lambda}}\,\Omega_2^4\right)$$

не обращается в нуль для тетраэдра $(\boldsymbol{B}_i)$, то продолженная четверка должна быть четверкой S_1'.

Отсюда теорема Пантази:

Четверки B и четверки S_1' могут быть неограниченно продолжаемы. При этом они по очереди переходят из четверок B в четверки S_1', и наоборот.

108. Продолжение четверок *A*. Для четверок A имеют место уравнения (10α) п. 88:

$$x' = -\mu x, \qquad y' = -\lambda y.$$

Внося эти значения в уравнение (3″) п. 104, мы приведем его к тождеству. Следовательно, каждая четверка A продолжаема.

Внося эти значения в формулы (a′) п. 104, получим:

$$\left\{\left(m\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} + \beta\beta'\,\frac{1-\lambda\mu}{\lambda}\right)x_1 - \frac{2\beta}{\lambda}\right\}\Delta x_1 + \\ + \left\{2\mu\beta\beta'\,\nabla\beta + \left(m\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} - \frac{1+\lambda\mu}{\lambda}\,\beta\beta'\right)\nabla\beta'\right\}x_1 = 0,$$

$$\left\{\left(m\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} + \beta\beta'\,\frac{\lambda\mu-1}{\lambda}\right)x_2 - 2\beta'\mu\right\}\Delta x_2 + \\ + \left\{2\,\frac{\beta\beta'}{\lambda}\,\nabla\beta' + \left(m\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} - \frac{1+\lambda\mu}{\lambda}\,\beta\beta'\right)\nabla\beta\right\}x_2 = 0$$

и

$$[\Delta x_1\,\Delta x_2] = [\nabla\beta\,\nabla\beta'],$$

но

$$[\nabla\beta\,\nabla\beta'] = [x\omega_1^3 + y\omega_2^4,\ -\lambda y\omega_1^3 - \mu x\omega_2^4] = (\lambda y^2 - \mu x^2)\,[\omega_1^3\,\omega_2^4]$$

обращается в нуль только для тех четверок A, которые одновременно будут четверками B. Следовательно, за исключением четверок (AB), продолжение четверки A не вырождается.

Чтобы доказать, что продолженная четверка тоже принадлежит к классу четверок A, удобнее всего обратиться к геометрическим свойствам этой четверки.

Мы видели, что четверка A обладает неподвижной квадрикой (поверхностью 2-го порядка), относительно которой все тетраэдры четверки автополярны, и определяемой относительно тетраэдра $\{\boldsymbol{A}_i\}$ уравнением (2) п. 95.

Сделаем преобразование координат, относя эту квадрику к тетраэдру $\{\boldsymbol{B}_i\}$, определяемому формулами (a) п. 104. Из уравнений

$$X^i\boldsymbol{A}_i = Y^k\boldsymbol{B}_k$$

получим:

$$\begin{aligned} &X^1 = Y^1 + Y^2, && X^2 = Y^3 + Y^4,\\ &X^3 = x_2Y^3 + x_2'Y^4, && X^4 = x_1Y^1 + x_1'Y^2. \end{aligned} \tag{9α}$$

Внося эти выражения в уравнение (2′) п. 95 и имея в виду, что по формулам (1α, β) п. 104 координаты x_i, x_i', в силу (1α) п. 85, удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} &m\sqrt{\lambda\mu}\,\beta' x_1^2 - \left\{m\sqrt{\lambda\mu} + \beta\beta'(1-\lambda\mu)\right\}x_1 + \beta = 0,\\ &m\sqrt{\lambda\mu}\,\beta x_2^2 - \left\{m\sqrt{\lambda\mu} - \beta\beta'(1-\lambda\mu)\right\}x_2 + \lambda\mu\beta' = 0 \end{aligned} \tag{9β}$$

и, следовательно,

$$x_1x_1' = \frac{\beta}{m\sqrt{\lambda\mu}\,\beta'}, \qquad x_2x_2' = \frac{\beta'\sqrt{\lambda\mu}}{m\beta},$$

получим уравнение фундаментальной квадрики (2) п. 95 относительно тетраэдра $\{\boldsymbol{B}_i\}$ в виде

$$(Y^1)^2\left(m\sqrt{\lambda\mu}\,\beta' x_1^2 - \beta\right) + (Y^2)^2\left(m\sqrt{\lambda\mu}\,\beta' x_1'^2 - \beta\right) + \\ + \lambda\left\{(Y^3)^2\left(\frac{m}{\sqrt{\lambda\mu}}\,\beta x_2^2 - \beta'\right) + (Y^4)^2\left(\frac{m}{\sqrt{\lambda\mu}}\,\beta x_2'^2 - \beta'\right)\right\} = 0. \tag{10}$$

Следовательно, квадрика (2′) п. 95, (10) полярно сопряжена также и всем тетраэдрам $\{\boldsymbol{B}_i\}$. Отсюда рассуждения конца п. 95 целиком применимы и к продолженной четверке. Квадрика (10) входит по два раза в каждое семейство расслояющих поверхностей четырех конгруэнций продолженной четверки и ее конгруэнций диагоналей.

Рассуждения п. 95 показывают, что эта квадрика будет дважды служить асимптотическим преобразованием каждой из четырех фокальных поверхностей $\{\boldsymbol{B}_i\}$ продолженной сопряженной четверки.

Таким образом, асимптотические линии на фокальных поверхностях исходной и продолженной четверки соответствуют.

Все эти фокальные поверхности являются поверхностями F_2 Фубини, асимптотические которых принадлежат линейным комплексам. Получаем вторую теорему Пантази:

Сопряженные четверки А допускают неограниченное продолжение, которое оставляет четверку внутри класса четверок А и не меняет ее фундаментальной квадрики.

109. Продолжение сопряженных четверок Чеха. Обратимся к сопряженным четверкам п. 90 из конгруэнций с проективно налагающимися фокальными поверхностями, которые мы будем называть *четверками Чеха.*

Эти четверки характеризуются равенствами (15) п. 90

$$x' = \mu x, \qquad y' = \lambda y. \tag{11α}$$

Внося эти значения в уравнение (3″) п. 104, мы немедленно приведем его к тождеству. Следовательно, четверки Чеха продолжаемы.

Формулы (a′), (b) п. 104 теперь дают

$$\Delta x_1 = \Delta x_1' = -\nabla\beta', \qquad \Delta x_2 = \Delta x_2' = -\nabla\beta,$$

и

$$[\Delta x_1\, \Delta x_2] = [\nabla\beta'\, \nabla\beta] = (\lambda y^2 - \mu x^2)\,[\omega_1^3 \omega_2^4] \tag{11β}$$

обращается в нуль только для четверок, которые одновременно будут четверками B в силу (21) п. 93.

За этим исключением продолжения четверки Чеха не вырождаются.

Уравнения (11β), в силу (2β) п. 104, (1γ) п. 85, интегрируются:

$$x_1 = \frac{c_1}{\beta'}, \quad x_1' = \frac{c_1'}{\beta'}, \quad x_2 = \frac{c_2}{\beta}, \quad x_2' = \frac{c_2'}{\beta}, \quad c_i = \text{const.} \tag{11γ}$$

Отсюда, в силу (1α) п. 85, (1α, β) п. 104, имеем:

$$c_1 + c_2 = 1, \qquad c_1' + c_2' = 1,$$

$$m = \frac{\beta\beta'}{\sqrt{c_1 c_1' c_2 c_2'}}, \qquad \lambda\mu = \frac{c_2 c_2'}{c_1 c_1'}. \tag{11δ}$$

Действительно, в силу теоремы Виета для уравнения (1β) п. 104 имеем $x_1 x_1' = -\frac{\gamma}{c\beta'}$ и, следовательно, в силу (1α) п. 85 и (11γ):

$$\frac{c_1 c_1'}{\beta'} = \frac{\beta}{\sqrt{\lambda\mu m}}. \tag{a}$$

Исключая из (1β) п. 104 x_1 при помощи (1α) п. 104, получим:

$$c\beta(x_2)^2 - (c + \alpha'\beta + \gamma\beta')\, x_2 + \alpha' = 0,$$

откуда

$$x_2 x_2' = \frac{\alpha'}{c\beta}$$

и

$$\frac{c_2 c_2'}{\beta} = \frac{\beta'\sqrt{\lambda\mu}}{m}. \tag{b}$$

Перемножая или деля друг на друга соотношения (a) и (b), получим равенства (11δ).

Между тем таблица (2α) п. 104, в силу соотношений (a) п. 95, (7β) п. 106:

$$\begin{aligned} \Omega_1^2 &= \widetilde{\beta}\left(\Omega_1^3 - \frac{1}{\widetilde{\lambda}}\,\Omega_2^4\right), & \Omega_3^4 &= \widetilde{\beta}\left(\frac{1}{\widetilde{\mu}}\,\Omega_1^3 - \Omega_2^4\right),\\ \Omega_1^3 &= \beta\left(\omega_1^3 + \frac{c_2'}{\lambda c_1'}\,\omega_2^4\right), & \Omega_2^4 &= \beta\left(\omega_1^3 + \frac{c_2}{\lambda c_1}\,\omega_2^4\right), \end{aligned} \tag{11ε}$$

дает

$$\begin{aligned} &\widetilde{\beta}\beta\left(1 - \frac{1}{\widetilde{\lambda}}\right) = \frac{c_1}{c_1 - c_1'}\,\lambda y, & &\widetilde{\beta}\beta\left(\frac{1}{\widetilde{\mu}} - 1\right) = \frac{c_2}{c_2 - c_2'}\,x,\\ &\frac{\widetilde{\beta}\beta}{\lambda}\left(\frac{c_2'}{c_1'} - \frac{c_2}{c_1}\,\frac{1}{\widetilde{\lambda}}\right) = \frac{c_1}{c_1 - c_1'}\,\mu x, & &\frac{\widetilde{\beta}\beta}{\lambda}\left(\frac{c_2'}{c_1'}\,\frac{1}{\widetilde{\mu}} - \frac{c_2}{c_1}\right) = \frac{c_2}{c_2 - c_2'}\,y, \end{aligned} \tag{11ζ}$$

откуда

$$\widetilde{\lambda} = \frac{c_1'}{c_1}\,\frac{c_2 y - c_1\mu x}{c_2' y - c_1'\mu x}, \qquad \widetilde{\mu} = \frac{c_1}{c_1'}\,\frac{c_2' x - c_1'\lambda y}{c_2 x - c_1\lambda y} \tag{11η}$$

и, в силу (11δ),

$$\widetilde{\lambda}\widetilde{\mu} = \frac{\lambda}{\mu}\,\frac{(c_2 y - c_1\mu x)^2}{(c_2 x - c_1\lambda y)^2}. \tag{11θ}$$

По формуле (11δ) следует, что произведение $\widetilde{\lambda}\widetilde{\mu}$ должно быть постоянно, если продолженная четверка Чеха тоже является четверкой Чеха, но, в силу (11η); (1γ), (2α, γ), (3α) п. 85:

$$\begin{aligned} d\ln\widetilde{\lambda}\widetilde{\mu} &= \Delta\widetilde{\lambda} + \Delta\widetilde{\mu} = \Delta\lambda - \Delta\mu +\\ &+ 2\,\frac{c_2\,\Delta y - c_1\mu\,\Delta x - c_1\mu x\,\Delta\mu}{c_2 y - c_1\mu x} - 2\,\frac{c_2\,\Delta x - c_1\lambda\,\Delta y - c_1\lambda y\,\Delta\lambda}{c_2 x - c_1\lambda y} =\\ &= 2\xi\,\frac{c_2}{c_1'}\,\frac{(-c_1 c_2' + c_1' c_2)}{(c_2 x - c_1\lambda y)(c_2 y - c_1\mu x)}\left\{\frac{y + \mu x}{\mu}\,\omega_1^3 - \frac{\lambda y + x}{\lambda}\,\omega_2^4\right\}, \end{aligned}$$

так как, в силу (11) п. 90, $\zeta = 0$.

Если оставить в стороне вырождение исходной четверки ($\lambda\mu-1=0$) или вырождение продолженной ($x=0$, $y=0$, что равносильно $\Omega_1^2=\Omega_2^1=\Omega_3^4=\Omega_4^3=0$), или совпадение фокусов диагоналей ($c_1c_2'-c_1'c_2=0$, что, в силу (11γ), равносильно $c_1=c_1'$, $c_2=c_2'$), то обращение в нуль $d\ln\tilde{\lambda}\tilde{\mu}$ возможно только при

$$\xi=0. \tag{12}$$

Отсюда, в силу (16) п. 90, имеем $\eta=0$ и по формулам (3γ) п. 85 $\Delta\xi=\Delta\eta=0$, что удовлетворяет систему (12α) п. 89, уменьшая на одно постоянное произвол этих четверок Чеха.

Нетрудно заметить, что условие

$$\Delta\tilde{\lambda}+\Delta\tilde{\mu}=0 \tag{13}$$

обеспечивает принадлежность четверки к классу четверок Чеха. Действительно, по формулам (2α) п. 85 оно равносильно системе

$$\tilde{x}+\tilde{\lambda}\tilde{y}-\left(\tilde{y}'+\frac{1}{\tilde{\mu}}\tilde{x}'\right)=0,\qquad \tilde{y}+\tilde{\mu}\tilde{x}-\left(\tilde{x}'+\frac{1}{\tilde{\lambda}}\tilde{y}'\right)=0, \tag{14}$$

откуда при $\tilde{\lambda}\tilde{\mu}-1\neq 0$ прямо следуют равенства (15) п. 90.

110. Третья квадратичная форма поверхности в P_3. Новый класс четверок Чеха, определяемый равенством (12), имеет простую геометрическую характеристику. *Фокальные поверхности этой четверки* не только проективно налагаются, но и *проективно эквивалентны*. Для того чтобы доказать это, заметим, что в теории Фубини поверхности в проективном пространстве определяются тремя инвариантными дифференциальными формами. В пп. 90, 91 мы рассматривали две такие формы (13): квадратичную φ_2 и кубическую φ_3. Совпадение этих форм для поверхностей (A_1) и (A_2) обеспечивало проективную наложимость этих фокальных поверхностей. Для доказательства проективной эквивалентности их надо показать, что третья дифференциальная форма Фубини (тоже квадратичная) для этих поверхностей тоже совпадает.

Третью форму Фубини можно писать в разной форме. Достаточно, чтобы она была инвариантной, принадлежала дифференциальной окрестности 4-го порядка, в то время как форма φ_2 принадлежит дифференциальной окрестности 2-го порядка, а φ_3 — 3-го, и была независима от φ_2 и φ_3.

Обращаясь к формулам п. 46 для произвольной конгруэнции, отнесенной к тетраэдру 1-го порядка, мы можем сказать, что уравнение $\omega_1^4=0$ из системы (12α) определяет поверхность (A_1). Дифференцируя внешним образом и развертывая по лемме Картана, получим уравнения левого столбца ($12\beta, \gamma$). Они позволяют построить квадратичную форму φ_2. Новое дифференцирование приводит к уравнениям левого столбца ($12\delta, \zeta$), которые дают кубичную форму φ_3

из системы (13) п. 90. Новое дифференцирование дает уравнения левого столбца (12η), откуда, развертывая по лемме Картана, получим:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_1&=\alpha_{11}\omega_1^3-\beta_{11}\omega_2^4, &\qquad \Delta\beta_1&=\beta_{11}\omega_1^3+\gamma\beta_{12}\omega_2^4,\\ \Delta\beta_2&=\alpha\beta_{12}\omega_1^3+\beta_{22}\omega_2^4, & \Delta\gamma_2&=\beta_{22}\omega_1^3+\gamma_{22}\omega_2^4. \end{aligned} \tag{15}$$

Полагая в уравнениях (12ζ) п. 46 формы ω_1^3, ω_2^4 равными нулю, мы получим для вариации тетраэдра 1-го порядка формулы

$$\delta\alpha=\alpha(2\pi_3^3-\pi_1^1-\pi_4^4),\quad \delta\beta'=\beta'(\pi_4^4-\pi_1^1)-\pi_4^1,\quad \delta\gamma=\gamma(\pi_1^1+\pi_4^4-2\pi_2^2). \tag{16α}$$

Аналогично после внешнего дифференцирования уравнений (15) получим:

$$\begin{aligned} &\delta\beta_{11}=\beta_{11}(\pi_3^3+\pi_4^4-\pi_1^1-\pi_2^2), \qquad \delta\beta_{12}=\beta_{12}(\pi_4^4-\pi_1^1)+\pi_4^1,\\ &\delta\beta_{22}=\beta_{22}(\pi_3^3+\pi_4^4-\pi_1^1-\pi_2^2),\\ &\delta\omega_1^3=\omega_1^3(\pi_1^1-\pi_3^3), \qquad \delta\omega_2^4=\omega_2^4(\pi_2^2-\pi_4^4). \end{aligned} \tag{16β}$$

Теперь нетрудно обнаружить инвариантность формы

$$\psi=\alpha(\beta_{12}+\beta')(\omega_1^3)^2+(\beta_{11}-\beta_{22})\,\omega_1^3\omega_2^4-\gamma(\beta_{12}+\beta')(\omega_2^4)^2, \tag{17}$$

ибо, в силу формул ($16\alpha, \beta$), имеем:

$$\delta\psi=0.$$

Сравнивая значения $\Delta\beta=\beta\nabla\beta$ по формулам (12ζ) п. 46 и (2α) п. 85, получим, в силу (1α) п. 85:

$$\beta_1=\mu x,\qquad \beta_2=-\lambda y,$$

и новое дифференцирование с учетом формул (3α) п. 85, (11) п. 89, (15), (16) п. 90, (15) дает

$$\beta_{11}=-\beta_{22}=\beta\beta'-\xi,\qquad \beta_{12}=\frac{\lambda\mu}{\beta}\left(\beta\beta'-xy-\frac{m}{\sqrt{\lambda\mu}}-\xi\right),$$

а форма ψ для поверхности (A_1) принимает вид

$$\psi=\left\{\beta\beta'\frac{\lambda\mu+1}{\lambda\mu}-xy-\frac{m}{\sqrt{\lambda\mu}}-\xi\right\}\{\lambda(\omega_1^3)^2+\mu(\omega_2^4)^2\}+2(\beta\beta'-\xi)\,\omega_1^3\omega_2^4. \tag{17$'$}$$

Для поверхности (A_2) значение ψ' этой формы получается обычной заменой $\begin{pmatrix}1 & 3 & \beta & \lambda & \mu & \xi & x & y\\ 2 & 4 & \beta' & \lambda^{-1} & \mu^{-1} & \eta & x' & y'\end{pmatrix}$, причем, в силу формул (15), (16) п. 90, имеем $\eta=-\xi$, $x'=\mu x$, $y'=\lambda y$ и

$$\psi'=\{\beta\beta'(\lambda\mu+1)-\lambda\mu xy-m\sqrt{\lambda\mu}+\xi\}\left\{\frac{(\omega_2^4)^2}{\lambda}+\frac{(\omega_1^3)^2}{\mu}\right\}+ \\ +2(\beta\beta'+\xi)\,\omega_1^3\omega_2^4,$$

или, деля первую фигурную скобку на $\lambda\mu$ и умножая на $\lambda\mu$ вторую:

$$\psi' = \left\{\beta\beta' \frac{\lambda\mu + 1}{\lambda\mu} - xy - \frac{m}{\sqrt{\lambda\mu}} + \frac{\xi}{\lambda\mu}\right\} \{\lambda(\omega_1^3)^2 + \mu(\omega_2^4)^2\} + \\ + 2(\beta\beta' + \xi)\,\omega_1^3\omega_2^4. \qquad (17'')$$

Сравнивая (17′) и (17″), видим, что формы ψ и ψ' совпадают и поверхности (A_1) и (A_2) проективно эквивалентны, если

$$\xi = 0,$$

что и доказывает теорему.

111. Продолжение четверок Чеха с проективно эквивалентными фокальными поверхностями. Продолженная четверка этого класса будет принадлежать к тому же классу.

Чтобы доказать это, достаточно показать, что для новой четверки $\tilde{\xi}$ будет равно нулю, ибо при постоянстве $\tilde{\lambda}\tilde{\mu}$ равенства $\tilde{\zeta} = 0$, $\tilde{\xi} = \tilde{\eta}$ уже доказаны. (Действительно, тогда $\Delta\tilde{\lambda} + \Delta\tilde{\mu} = 0$, откуда следуют равенства (15) п. 90, а для этого случая в п. 90 доказано, что $\xi = \eta$, $\zeta = 0$.) Нетрудно видеть, в силу (3α) п. 85, что для этого достаточно доказать тождество

$$\Delta\tilde{x} + \Delta\tilde{y} = \tilde{x}(\tilde{\lambda}\tilde{y} + \tilde{x})\,\Omega_1^3 + \tilde{y}(\tilde{\mu}\tilde{x} + \tilde{y})\,\Omega_2^4. \qquad (a)$$

Между тем, исключая $\tilde{\lambda}$ из левых уравнений (11ζ) п. 109, получим:

$$\tilde{\beta} = \frac{c_1 c_1'}{(c_1 - c_1')^2}\,\frac{\lambda}{\beta}\,(c_2\mu x - c_2 y).$$

Теперь сравнивая уравнение

$$\nabla\tilde{\beta} = \tilde{x}\Omega_1^3 + \tilde{y}\Omega_2^4 = \beta(\tilde{x} + \tilde{y})\,\omega_1^3 + \frac{\beta}{\lambda}\left(\frac{c_2'}{c_1'}\tilde{x} + \frac{c_2}{c_1}\tilde{y}\right)\omega_2^4,$$

которое получается в силу (2α) п. 85 и (11ε) п. 109, с равенством

$$\nabla\tilde{\beta} = d\ln\tilde{\beta} + \Omega_2^2 - \Omega_3^3,$$

где

$$\Omega_2^2 = \omega_1^1 + \frac{c_1'\nabla\beta'}{c_1 - c_1'}, \qquad \Omega_3^3 = \omega_2^2 - \frac{c_2\nabla\beta}{c_2 - c_2'},$$

получим, в силу (1γ), (2α) п. 85:

$$\tilde{x} + \tilde{y} = \frac{c_1\lambda y - c_2 x}{\beta(c_1 - c_1')},$$

$$\frac{c_2'}{c_1'}\tilde{x} + \frac{c_2}{c_1}\tilde{y} = \frac{\lambda}{\beta}\left\{\frac{c_1'\mu x + (c_1' - 1)\,y}{c_1 - c_1'}\right\}.$$

Дифференцируя первое из этих уравнений и внося результат в равенство (a), мы приведем его по исключении $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ к тождеству, что и доказывает теорему.

Таким образом, последовательное продолжение четверок Чеха с проективно эквивалентными фокальными поверхностями не выводит из этого класса четверок. В общем случае $\xi \neq 0$ продолжение четверок Чеха приводит к новым сопряженным четверкам.

ГЛАВА XII

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КАЛАПСО *)

112. Фокальные семейства прямых в P_5. Каждая прямая проективного пространства P_3 изображается в перенесении Плюккера точкой гиперквадрики Q_4^2 в P_5. Двум прямым l_1 и l_2 в P_3 соответствуют две точки L_1, L_2 на гиперквадрике и, следовательно, прямая линия L_1L_2 в P_5. Отсюда двум конгруэнциям, между лучами которых установлено взаимно однозначное соответствие, присоединено двупараметрическое семейство прямых в P_5.

Это простое соображение позволило Б. А. Розенфельду дать новое определение пар T конгруэнций.

В трехмерном пространстве P_3 всякое двупараметрическое семейство прямых допускает двумя способами разложение на семейство ∞^1 развертывающихся поверхностей (действительных и различных, совпадающих или мнимых сопряженных). В пространстве более трех измерений это возможно только в виде исключения.

Однопараметрическое семейство прямых называется *фокальным*, если прямые семейства являются касательными одной линии в пространстве, т. е. образуют развертывающуюся поверхность. Двупараметрическое семейство прямых называется *фокальным* (или *конгруэнцией*), если оно допускает двумя способами разложение на фокальные подсемейства.

Если прямая $\lambda \equiv M_1M_2$ описывает в P_5 двупараметрическое семейство, то проективные перемещения ее можно задать инфинитезимальными смещениями присоединенного к ней гексаэдра $\{M_J\}$ $(J = 1, \ldots, 6)$:

$$dM_J = \Omega_J^K M_K \qquad (J, K = 1, \ldots, 6), \qquad (1\alpha)$$

где M_J — аналитические точки в P_5 и Ω_J^K — пфаффовы формы.

Дифференциал аналитической прямой (M_1M_2), т. е. грассманова произведения двух точек M_1 и M_2 (15 линейно независимых опре-

---

*) Кроме работ Калапсо [1], [2], Финикова [10], [12] и Розенфельда [2], большое значение имеют новые результаты А. М. Березмана [1].

делителей матрицы из 12 однородных координат этих точек), принимает вид

$$d(M_1M_2) = (12)(\Omega_1^1 + \Omega_2^2) + (13)\Omega_2^3 + (14)\Omega_2^4 +$$
$$+ (15)\Omega_2^5 + (16)\Omega_2^6 - (23)\Omega_1^3 - (24)\Omega_1^4 - (25)\Omega_1^5 - (26)\Omega_1^6, \qquad (1\beta)$$

где $(JK) = (M_JM_K)$. Восемь пфаффовых форм Ω_1^α, Ω_2^α $(\alpha = 3, \ldots, 6)$ являются главными для прямой M_1M_2, ибо при неподвижности ее равны нулю. Поскольку луч λ описывает двупараметрическое семейство, две из этих восьми форм (и только две) линейно независимы. При полном произволе выбора вершин M_α $(\alpha = 3, \ldots, 6)$ гексаэдра мы можем положить

$$[\Omega_1^3\Omega_1^4] \neq 0,$$

$$\Omega_1^\nu = a_1^\nu\Omega_1^3 + b_1^\nu\Omega_1^4, \quad \Omega_2^\alpha = a_2^\alpha\Omega_1^3 + b_2^\alpha\Omega_1^4 \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 3, \ldots, 6, \\ \nu = 5, 6\end{pmatrix}. \qquad (1\gamma)$$

Если семейство прямых (λ) разбивается на фокальные подсемейства

$$\Omega_1^3 + \sigma\Omega_1^4 = 0 \qquad (2\alpha)$$

и точка

$$S = M_1 + \rho M_2 \qquad (2\beta)$$

описывает линию, огибающую лучи подсемейства, то должны иметь место сравнения

$$(d(M_1 + \rho M_2),\ M_1,\ M_2) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\,(\Omega_1^3 + \sigma\Omega_1^4))$$

или

$$\Omega_1^\alpha + \rho\Omega_2^\alpha \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\,(\Omega_1^3 + \sigma\Omega_1^4)) \qquad (\alpha = 3, \ldots, 6), \quad (2\gamma)$$

или после подстановки (1γ) конечные уравнения:

$$\begin{aligned} &\sigma + \rho(a_2^3\sigma - b_2^3) = 0, \\ &1 - \rho(a_2^4\sigma - b_2^4) = 0, \\ &a_1^\nu\sigma - b_1^\nu + \rho(a_2^\nu\sigma - b_2^\nu) = 0 \qquad (\nu = 5, 6). \end{aligned} \qquad (2\delta)$$

Эти четыре уравнения относительно двух неизвестных ρ и σ вообще несовместны.

Следовательно, *произвольное двупараметрическое семейство прямых в P_5 не содержит фокальных подсемейств и не является фокальным.*

113. Пары T конгруэнций. Допустим, что прямая λ пересекает гиперквадрику Плюккера Q_4^2 в двух различных точках, не сопряженных относительно полярной системы гиперповерхности 2-го порядка Q_4^2, и пусть M_1, M_2 суть эти точки пересечения прямой λ с гиперквадрикой.

13 Зак. 1277. С. П. Фиников

Наиболее интересен тот случай, когда одна из этих точек изображает луч конгруэнции прямых в P_3, обладающей действительными фокальными поверхностями. Мы отнесем эту конгруэнцию к тетраэдру 1-го порядка $\{A_i\}$ так, чтобы вершины A_1 и A_2 были фокусами луча, грани $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$ — фокальными плоскостями и вершины A_3, A_4 совпадали с точками пересечения фокальных плоскостей с прямой, соответствующей второй точке M_2 пересечений прямой λ с гиперквадрикой. Тогда будет $\omega_1^4 = 0$, $\omega_2^3 = 0$.

Ввиду полного произвола в выборе вершин M_α $(\alpha = 3, \ldots, 6)$ гексаэдра (M_J), присоединенного к лучу λ, можно совместить их с точками, изображающими в P_5 ребра тетраэдра $\{A_i\}$, полагая

$$M_1 = [12],\quad M_2 = [34],\quad M_3 = [23],\quad M_4 = [14],\quad M_5 = [13],\quad M_6 = [42],$$
$$[ik] = (A_iA_k). \tag{3α}$$

Поскольку в P_3

$$\begin{aligned} d\,[12] &= [12]\,(\omega_1^1 + \omega_2^2) - [23]\,\omega_1^3 + [14]\,\omega_2^4 + [13]\,\omega_2^3 + [42]\,\omega_1^4, \\ d\,[34] &= [34]\,(\omega_3^3 + \omega_4^4) - [23]\,\omega_4^2 + [14]\,\omega_3^1 - [13]\,\omega_4^1 - [42]\,\omega_3^2, \end{aligned} \tag{3β}$$

для тетраэдра (3α) получим:

$$\begin{aligned} &\Omega_1^1 = \omega_1^1 + \omega_2^2, \quad \Omega_1^2 = 0, \quad \Omega_1^3 = -\omega_1^3, \\ &\Omega_1^4 = \omega_2^4, \quad \Omega_1^5 = \omega_2^3, \quad \Omega_1^6 = \omega_1^4, \\ &\Omega_2^1 = 0, \quad \Omega_2^2 = \omega_3^3 + \omega_4^4, \quad \Omega_2^3 = -\omega_4^2, \\ &\Omega_2^4 = \omega_3^1, \quad \Omega_2^5 = -\omega_4^1, \quad \Omega_2^6 = -\omega_3^2. \end{aligned} \tag{3γ}$$

Теперь при $\omega_1^4 = 0$, $\omega_2^3 = 0$ уравнения (2α, γ) примут вид

$$\omega_1^3 + \rho\omega_4^2 \equiv 0, \quad \omega_2^4 + \rho\omega_3^1 \equiv 0, \quad \rho\omega_4^1 \equiv 0, \quad \rho\omega_3^2 \equiv 0$$
$$(\operatorname{mod} \theta = \omega_1^3 - \sigma\omega_2^4). \tag{3δ}$$

Поскольку при $\rho = 0$ первые два сравнения дают $\omega_1^3 \equiv \omega_2^4 = 0$, что, очевидно, невозможно ввиду линейной независимости этих форм, формы ω_4^1, ω_3^2 обращаются в нуль по модулю и первого $\sigma = \sigma_1$ и второго $\sigma = \sigma_2$ фокальных подсемейств, следовательно, равны нулю на всем двупараметрическом семействе

$$\omega_4^1 = 0, \quad \omega_3^2 = 0. \tag{3}$$

Это является характерным признаком пары T (п. 33). Таким образом, пара T изображается в P_5 фокальным семейством прямых (λ). Фокальные подсемейства определяются уравнением

$$\omega_1^3\omega_3^1 - \omega_2^4\omega_4^2 = 0, \tag{3}$$

которое получается из первых двух сравнений (3δ) исключением параметра ρ.

114. Параболическая пара *T*. Допустим теперь, что первая конгруэнция в P_3, т. е. конгруэнция прямых, изображаемых в перенесении Плюккера точками M_1, является параболической конгруэнцией. Отнесем ее к тетраэдру 1-го порядка (55α, β) п. 25. При этом, чтобы сохранить независимыми формы Ω_1^3, Ω_1^4, придется поменять индексы 4 и 5 у M, полагая $M_4 = [13]$, $M_5 = [14]$.

Сравнения (2γ) примут вид

$$\omega_1^3 + \rho\omega_4^2 \equiv 0, \quad b\omega_1^3 + \rho\omega_3^1 \equiv 0, \quad \omega_2^3 - \rho\omega_4^1 \equiv 0, \quad \rho\omega_3^2 \equiv 0 \ (\operatorname{mod} \theta). \tag{4α}$$

Последнее сравнение дает либо $\rho = 0$, либо $\omega_3^2 \equiv 0$, но для $\rho = 0$ первое и третье сравнения дают $\omega_1^3 \equiv 0$, $\omega_2^3 \equiv 0$; следовательно,

$$[\omega_1^3\omega_2^3] = 0,$$

и тогда среди главных форм луча [12] ω_1^3, $\omega_1^4 = 0$, ω_2^3, $\omega_2^4 = b\omega_1^3$ останется только одна независимая; конгруэнция (A_1A_2) будет вырождаться.

Следовательно, форма ω_3^2 обращается в нуль для обоих фокальных семейств, т. е. на всей конгруэнции

$$\omega_3^2 = 0. \tag{4β}$$

Исключая ρ из первых двух сравнений, найдем уравнения двух фокальных подсемейств

$$\omega_1^3(\omega_3^1 - b\omega_4^2) = 0, \tag{a}$$

но для $\omega_1^3 \equiv 0$ из этих сравнений получим или $\rho = 0$ и вырождение конгруэнции (A_1A_2) или $[\omega_4^2\omega_1^3] = [\omega_3^1\omega_1^3] = 0$. Достаточно допустить на всей конгруэнции

$$\omega_3^1 = b\omega_4^2, \tag{4γ}$$

чтобы уравнение (a) исчезало и первые сравнения (4α) совпадали. Тогда фокальные подсемейства будут определяться уравнением

$$\omega_1^3\omega_4^1 + \omega_2^3\omega_4^2 = 0, \tag{4δ}$$

и для каждого решения его первое или третье сравнения (4α) дадут значение ρ.

Уравнений (4β, γ) достаточно, чтобы на конгруэнции (A_1A_2), (A_3A_4) можно было распространить рассуждения п. 35. Конгруэнция (A_3A_4) будет тоже параболической с фокусом в точке A_3 и фокальной плоскостью $A_1A_3A_4$. Луч A_1A_3 лежит в касательных плоскостях $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$ поверхностей (A_1) и (A_3), следовательно, касается их и описывает конгруэнцию (A_1A_3) с фокальными поверхностями (A_1), (A_3) и соответствием асимптотических линий на них.

Мы приходим, таким образом, к параболической паре T (п. 35). *Параболическая пара T изображается в перенесении Розенфельда фокальным семейством прямых* (λ).

Нетрудно заметить, что в обоих случаях и для гиперболической и для параболической пары дифференциальная окрестность луча конгруэнции (M_1M_2) в P_5 трехмерная. В первом случае формулы ($3\beta\varepsilon$) показывают, что, кроме луча (M_1M_2), эта окрестность определяется точками гиперквадрики M_3 и M_4. Во втором случае, кроме луча (M_1M_2), она определяется точкой гиперквадрики M_4 и не лежащей на гиперквадрике точкой $M_3 - bM_5$. Прямая (M_4, $M_3 - bM_5$), кроме вершины M_4, не имеет другой общей точки с гиперквадрикой Q_4^2.

115. Двупараметрическое семейство прямолинейных образующих гиперквадрики Q_4^2. Если луч λ пересекает гиперквадрику Q_4^2 в паре полярно сопряженных точек M_1, M_2, то каждая из них лежит в полярной гиперплоскости другой, а поскольку гиперплоскость, полярно сопряженная точке гиперквадрики, является ее касательной, луч $\lambda = M_1M_2$ касается гиперквадрики Q_4^2 в двух точках M_1, M_2, следовательно, принадлежит ей. Все точки прямой λ полярно сопряжены между собой; соответствующие им в P_3 прямые пересекаются и образуют пучок (п. 8).

В этом случае мы можем совместить точки M_1, M_2 только с образами пересекающихся ребер тетраэдра, полагая, например,

$$M_1 = [12], \quad M_2 = [13], \quad M_3 = [23],$$
$$M_4 = [14], \quad M_5 = [42], \quad M_6 = [34],$$

и таблица (3γ) п. 113 примет вид

$$\Omega_1^3 = -\omega_1^3, \quad \Omega_1^4 = \omega_2^4, \quad \Omega_1^2 = \omega_2^3, \quad \Omega_1^5 = \omega_1^4, \quad \Omega_1^6 = 0,$$
$$\Omega_2^3 = \omega_1^2, \quad \Omega_2^1 = \omega_3^2, \quad \Omega_2^4 = \omega_3^4, \quad \Omega_2^5 = 0, \quad \Omega_2^6 = -\omega_1^4.$$

Сравнения (2γ) п. 112 для фокальных подсемейств напишутся теперь:

$$\omega_1^3 - \rho\omega_1^2 \equiv 0, \quad \omega_2^4 + \rho\omega_3^4 \equiv 0, \quad \frac{1}{\rho}\omega_1^4 \equiv 0, \quad \rho\omega_1^4 \equiv 0 \pmod{\theta}. \tag{5α}$$

Последние два сравнения показывают, что форма ω_1^4 обращается в нуль и на первом и на втором фокальных подсемействах, следовательно, равна нулю на всей конгруэнции

$$\omega_1^4 = 0; \tag{5β}$$

плоскость пучка $A_1A_2A_3$ служит касательной плоскостью поверхности (A_1), описываемой центром пучка. Два последних сравнения (5α) обращаются в тождества, и фокальные подсемейства определяются уравнением

$$\omega_1^3\omega_3^4 + \omega_1^2\omega_2^4 = 0, \tag{5γ}$$

получаемым посредством исключения ρ из первых двух сравнений (5α).

Это уравнение вместе с тем определяет асимптотические линии поверхности (A_1). Первое сравнение (5α) показывает, что асимптотические линии на поверхности (A_1), соответствующие фокальным подсемействам, касаются прямых

$$(A_1, A_2 + \rho A_3) = [12] + \rho[13] = M_1 + \rho M_2.$$

Мы видим, что эти прямые, т. е. асимптотические касательные поверхности (A_1), в пространстве P_5 изображаются фокусами луча λ.

Таким образом, *фокальное двупараметрическое семейство прямых, лежащих на гиперквадрике Q_4^2, изображает своими точками все касательные произвольной поверхности, фокальные подсемейства соответствуют асимптотическим линиям поверхности, а фокусы — асимптотическим касательным.*

116. Расслояемая пара конгруэнций. Если гиперболическая пара T п. 113 расслояема, то компоненты ω_i^k удовлетворяют системе (10α, β) п. 33, откуда следуют линейные соотношения ($2\alpha - \gamma$) п. 39, в частности, равенство нулю

$$b + b' = 0 \tag{6α}$$

суммы коэффициентов разложения

$$\omega_3^1 = a\omega_1^3 + b\omega_2^4, \quad \omega_4^2 = b'\omega_1^3 + c\omega_2^4. \tag{6β}$$

Между тем, внося в сравнения (3δ) п. 113 эти значения ω_3^1, ω_4^2, мы получим:

$$\omega_1^3(1 + b'\rho) + \omega_2^4 c\rho = 0,$$
$$\omega_1^3 a\rho + \omega_2^4(1 + b\rho) = 0$$

и уравнение для координаты ρ фокусов

$$(bb' - ac)\rho^2 + (b + b')\rho + 1 = 0. \tag{6γ}$$

Для расслояемой пары, в силу (6α), коэффициент при первой степени ρ обращается в нуль и два фокуса

$$S = M_1 + \rho M_2, \quad S_1 = M_1 - \rho M_2 \tag{6δ}$$

гармонически разделяют точки пересечения луча M_1M_2 с гиперквадрикой.

Отсюда теорема:

Для того чтобы конгруэнция (M_1M_2) в P_5 в перенесении Розенфельда изображала расслояемую пару, необходима и доста-

точна полярная сопряженность фокусов относительно гиперквадрики Плюккера Q_4^2.

При этом уравнения (3ζ) п. 113, определяющие фокальные подсемейства конгруэнции (M_1M_2), совпадают с уравнениями (14) п. 36, определяющими асимптотические линии расслояющих поверхностей.

Отсюда следствие:

Развертывающиеся поверхности конгруэнции Розенфельда для расслояемой пары соответствуют асимптотическим линиям расслояющих поверхностей.

117. Расслояемая параболическая пара. Эти теоремы распространяются и на параболические расслояемые пары.

Если параболическая пара п. 114 расслояема, то имеют место уравнения ($8\alpha - \gamma$) п. 33, (12β) п. 35. Если принять во внимание уравнения (55α, β) п. 25, а также (4β, γ) п. 114, то уравнения пп. 33, 35 примут вид

$$\omega_4^2 = c\omega_1^3, \quad \omega_3^1 = bc\omega_1^3, \quad \omega_2^4 = b\omega_1^3, \tag{7α}$$

$$[\omega_4^1 - c\omega_2^3, \ \omega_1^3] = 0,$$

откуда

$$\omega_4^1 - c\omega_2^3 = \lambda\omega_1^3. \tag{7β}$$

Теперь сравнения (4α) п. 114 сведутся к двум уравнениям, определяющим координаты фокусов, и уравнения развертывающихся поверхностей конгруэнции:

$$\omega_1^3(1 + c\rho) = 0, \quad \omega_2^3 - \rho\omega_4^1 = 0. \tag{7γ}$$

Первое уравнение имеет два решения:

$$1)\ \omega_1^3 = 0; \qquad 2)\ 1 + c\rho = 0.$$

Первое решение, в силу (7β), дает $\omega_4^1 = c\omega_2^3$, откуда второе уравнение (7γ) дает для координаты фокуса уравнение

$$1 - c\rho = 0.$$

Если же взять второе решение

$$1 + c\rho = 0,$$

то второе уравнение (7γ) даст $\omega_4^1 = -c\omega_2^3$.

Таким образом, опять получаем для фокусов конгруэнции (M_1M_2) два значения:

$$\rho = \pm\frac{1}{c},$$

отличающихся только знаком; отсюда вытекает, как и выше, полярная сопряженность фокусов относительно гиперквадрики.

С другой стороны, уравнение фокальных подсемейств (4δ) п. 114 совпадает с уравнением (14) п. 36, которое определяет асимптотические линии на расслояющих поверхностях. Таким образом доказана и вторая теорема п. 116.

118. Сопряженные пары. Обе конгруэнции сопряженной пары являются конгруэнциями W. Как известно*), конгруэнции W в перенесении Плюккера изображаются на гиперквадрике Q_4^2 геометрическим местом точек (поверхностью), несущим сопряженную сеть линий. Линии сети соответствуют асимптотическим линиям фокальных поверхностей конгруэнции. Между тем (п. 50) асимптотические линии фокальных поверхностей сопряженной пары (и только сопряженной пары) соответствуют асимптотическим линиям расслояющих поверхностей, а эти последние соответствуют фокальным подсемействам, т. е. развертывающимся поверхностям, конгруэнции Розенфельда (M_1M_2).

Отсюда теорема:

Конгруэнция Розенфельда для сопряженной пары сопряжена гиперквадрике Плюккера Q_4^2.

Обратная теорема тоже верна.

Если конгруэнция (λ) с полярно сопряженными фокусами сопряжена гиперквадрике Q_4^2, то ее развертывающиеся поверхности высекают на Q_4^2 две сопряженные сети, которые определяют в P_3 две конгруэнции W.

Асимптотические линии фокальных поверхностей каждой из этих конгруэнций W соответствуют линиям сети, а следовательно, асимптотическим линиям расслояющих поверхностей. Отсюда прямо вытекает соответствие всех сопряженных сетей на фокальных поверхностях и на расслояющих, а так как развертывающиеся поверхности конгруэнции секут фокальные поверхности по сопряженной сети (фокальной), то они высекают сопряженные сети и на расслояющих поверхностях. Пара сопряженная.

119. Конгруэнции (λ) с неопределенными развертывающимися поверхностями. Эта теорема имеет исключение, представляющее в дальнейшем большое значение. Развертывающиеся поверхности конгруэнции (λ) станут неопределенными, если ее фокус неподвижен и она вырождается в связку прямых (двупараметрическую).

По формулам (3α, β) п. 113 инфинитезимальные смещения фокуса

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{M}_1 + \rho\boldsymbol{M}_2$$

определяются уравнением

$$d\boldsymbol{S} = (\omega_1^1 + \omega_2^2)\boldsymbol{S} + \{d\rho + \rho(\omega_3^3 + \omega_4^4 - \omega_1^1 - \omega_2^2)\}[34] + \\ + (\omega_1^3 + \rho\omega_4^2)[32] + (\omega_2^4 + \rho\omega_3^1)[14]. \tag{8α}$$

*) Т. К., § 149, стр. 286

Если воспользоваться разложениями (6β) п. 116, то уравнение развертывающихся поверхностей (3ζ) п. 113 примет вид

$$a(\omega_1^3)^2+(b-b')\,\omega_1^3\omega_2^4-c\,(\omega_2^4)^2=0$$

и будет неопределенным при условии

$$a=0,\quad b'=b,\quad c=0. \tag{8β}$$

Теперь уравнения (6β) п. 116 принимают вид

$$\omega_3^1=b\omega_2^4,\qquad \omega_4^2=b\omega_1^3. \tag{8γ}$$

Внешнее дифференцирование дает

$$[\Delta b\omega_1^3]=0,\qquad [\Delta b\omega_2^4]=0,$$

откуда получается уравнение

$$\Delta b=d\ln b+\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4=0, \tag{8δ}$$

внешний дифференциал которого, в силу (8γ), обращается в тождество.

Уравнения (10α, γ, δ) п. 33, определяющие пару T, дадут теперь только два независимых квадратичных уравнения (10γ). Система (10α, γ) п. 33, (8γ, δ) — в инволюции и определяет пару T (с неопределенными развертывающимися поверхностями конгруэнции Розенфельда) с произволом двух функций одного аргумента. Мы рассмотрим их с новой точки зрения в п. 128.

Теперь при $\rho=-\frac{1}{b}$ уравнение (8α) принимает вид

$$dS=S(\omega_1^1+\omega_2^2).$$

Следовательно, фокус $S=[12]-\frac{1}{b}[34]$ в P_5 неподвижен. Ему соответствует в P_3 неподвижный линейный комплекс. Поскольку для произведений Плюккера имеем равенства

$$\{S[13]\}=0,\quad \{S[14]\}=0,\quad \{S[23]\}=0,\quad \{S[42]\}=0,$$

пара вспомогательных конгруэнций и конгруэнции диагоналей принадлежат линейному комплексу S.

120. Преобразование Лапласа конгруэнции (λ) в P_5. Вернемся к общей конгруэнции (λ) и рассмотрим ее преобразование Лапласа.

Как известно*), развертывающиеся поверхности конгруэнции прямых в P_n высекают на каждой ее фокальной поверхности сопряженную фокальную сеть. Одно семейство линий этой сети имеет касательными лучи исходной конгруэнции (λ). Другое семейство своими касательными образует новую конгруэнцию (λ′), т. е. двупараметрическое семейство прямых, распадающееся двумя способами на фокальные подсемейства. Переход от конгруэнции (λ) к конгруэнции (λ′) называется *преобразованием Лапласа*.

*) Т. К., стр. 248.

В применении к конгруэнции (λ) в P_5, изображающей в перенесении Розенфельда пару T, оно дает преобразование пар посредством соприкасающихся квадрик, введенное в науку Калапсо и носящее его имя.

Дифференциальная окрестность 1-го порядка луча λ в конгруэнции (λ) определяется дифференциалом $d\lambda=d(M_1M_2)$ по формуле (1α) п. 112; уравнения (3γ) п. 113 позволяют записать ее в виде

$$d\lambda=(\Omega_1^1+\Omega_2^2)(12)+\omega_1^3(23)+\omega_2^4(42)-\omega_4^2(13)+\omega_3^1(14).$$

Эта окрестность, следовательно, лежит в трехмерном пространстве $M_1M_2M_3M_4$ и имеет такое же строение, как у конгруэнции прямых в P_3. Каждому фокусу S_1, S_2 луча λ присвоена фокальная двумерная плоскость d_1 или d_2, которая касается другой двумерной фокальной поверхности во втором фокусе.

Плоскость d_2 пересекает гиперквадрику Q_4^2 по линии 2-го порядка C_1^2. Эта линия содержит все точки гиперквадрики Q_4^2, принадлежащие плоскости d_2, в том числе и точки пересечения ее с прямой $\lambda=S_1S_2$ и ее преобразованием Лапласа $\lambda'=S_1S_1'$, ибо обе прямые λ и λ′ лежат в касательной плоскости d_2 поверхности (S_1).

Каждая точка линии C_1^2 изображает прямую в P_3, их совокупность — одно семейство образующих поверхности 2-го порядка: *демиквадрику* (п. 9) Q_1 в P_3. Линия C_1^2 содержит точки M_1, M_2 прямой λ, которые изображают в перенесении Плюккера два соответствующих луча A_1A_2 и A_3A_4 пары T. Следовательно, демиквадрика Q_1 содержит прямые A_1A_2, A_3A_4.

То же можно сказать о точках M_1', M_2', где луч λ′ пересекает Q_4^2; они лежат на кривой C_1^2, а их прообразы — лучи $A_1'A_2'$, $A_3'A_4'$ преобразованной пары T — принадлежат демиквадрике Q_1.

Поверхности 2-го порядка, которым принадлежат демиквадрики Q_1, называются *главными поверхностями* пары T, а фокальные направления конгруэнции (λ) — *главными направлениями* пары T.

121. Характеристики главных поверхностей. Фокальная плоскость d_2 как касательная плоскость поверхности (S_1) содержит, кроме точки S_1, еще два преобразования Лапласа (в ту и другую сторону) — точки S_1' и S_2. Уравнение плоскости записывается в виде

$$(S_2S_1S_1'P)=0, \tag{a}$$

где P — текущая точка плоскости. В пятимерном пространстве P_5 уравнение (a) эквивалентно трем уравнениям на координаты точки P; например, если принять S_2, S_1, S_1' за вершины координатного гексаэдра, то уравнение (а) требует обращения в нуль координат точки $\boldsymbol{P}$ по трем остальным вершинам гексаэдра.

Будем искать характеристику плоскости d_2 при перемещении вдоль одного из фокальных направлений $\theta_2 = \omega_1^3 - \sigma_2\omega_2^4 = 0$. Как известно, характеристика определяется системой из уравнения (а) и уравнения (b):

$$d(\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_1'\boldsymbol{P}) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \theta_2), \tag{b}$$

полученного дифференцированием в фокальном направлении $\theta_2 = 0$, причем текущая точка плоскости $\boldsymbol{P}$ считается неподвижной.

При дифференцировании в фокальном направлении каждый фокус $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$ смещается в направлении соответствующего луча конгруэнции, например при $\theta_2 = 0$ от $\boldsymbol{S}_2$ к $\boldsymbol{S}_1$, от $\boldsymbol{S}_1$ к $\boldsymbol{S}_1'$, от $\boldsymbol{S}_1'$ к $\boldsymbol{S}_1''$, где $\boldsymbol{S}_1''$ — второе преобразование Лапласа; при $\theta_1 = \omega_1^3 - \sigma_1\omega_2^4 = 0$ от $\boldsymbol{S}_1'$ к $\boldsymbol{S}_1$, от $\boldsymbol{S}_1$ к $\boldsymbol{S}_2$ и от $\boldsymbol{S}_2$ к $\boldsymbol{S}_2'$.

Отсюда сравнения:

$$\left.\begin{aligned} d\boldsymbol{S}_1' &\equiv a\boldsymbol{S}_1' + b\boldsymbol{S}_1,\\ d\boldsymbol{S}_1 &\equiv a'\boldsymbol{S}_1 + b'\boldsymbol{S}_2,\\ d\boldsymbol{S}_2 &\equiv a''\boldsymbol{S}_2 + b''\boldsymbol{S}_2',\\ d\boldsymbol{S}_2' &\equiv a'''\boldsymbol{S}_2' + b'''\boldsymbol{S}_2'' \end{aligned}\right\} (\mathrm{mod}\ \theta_1); \quad \left.\begin{aligned} d\boldsymbol{S}_2' &\equiv f\boldsymbol{S}_2' + g\boldsymbol{S}_2,\\ d\boldsymbol{S}_2 &\equiv f'\boldsymbol{S}_2 + g'\boldsymbol{S}_1,\\ d\boldsymbol{S}_1 &\equiv f''\boldsymbol{S}_1 + g''\boldsymbol{S}_1',\\ d\boldsymbol{S}_1' &\equiv f'''\boldsymbol{S}_1' + g'''\boldsymbol{S}_1'' \end{aligned}\right\} (\mathrm{mod}\ \theta_2). \tag{9}$$

Теперь сравнение (b) примет вид равенства

$$(\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_1''\boldsymbol{P}) = 0. \tag{b$'$}$$

Плоскости (а) и (b$'$) пересекаются по прямой $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2$, которая и будет характеристикой плоскости d_2 при перемещении $\theta_2 = 0$.

Если дифференцировать уравнение (а) в направлении $\theta_1 = 0$, то получим:

$$(\boldsymbol{S}_2'\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_1'\boldsymbol{P}) = 0. \tag{b$''$}$$

Плоскости (а) и (b$''$) определяют характеристику $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_1'$ плоскости d_2 при смещении $\theta_1 = 0$.

Если плоскость d_2 пересечь гиперповерхностью Q_4^2, то, в силу неподвижности этой гиперквадрики, характеристика линии пересечения C_1^2 в направлении $\theta_2 = 0$ сведется к паре точек $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$ пересечения прямой $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2$ с гиперквадрикой Q_4^2, а в направлении $\theta_1 = 0$ — к паре точек $\boldsymbol{M}_1'$, $\boldsymbol{M}_2'$ пересечения с гиперквадрикой прямой $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_1'$.

Те уравнения, которые в P_5 дают линию C_1^2, определяют в P_3 демиквадрику Q_1; те уравнения, которые в P_5 определяют характеристические точки $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$ или $\boldsymbol{M}_1'$, $\boldsymbol{M}_2'$ линии C_1^2, в P_3 будут определять характеристические образующие $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4$ или $\boldsymbol{A}_1'\boldsymbol{A}_2'$, $\boldsymbol{A}_3'\boldsymbol{A}_4'$ демиквадрики Q_1.

Таким образом, преобразование Лапласа конгруэнции (λ) в P_5 непосредственно связано с преобразованием пар T посредством демиквадрик Q_1. Эта связь окажется значительно полнее, когда мы построим полярно сопряженные конгруэнции (λ^*).

122. Полярно сопряженные конгруэнции в $\boldsymbol{P}_5$. Гиперповерхность 2-го порядка Q_4^2 устанавливает в P_5 полярное соответствие. Каждой точке прямой $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2$ соответствует полярная гиперплоскость; прямолинейному ряду точек $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2$ соответствует пучок гиперплоскостей, имеющих общее трехмерное подпространство L_3^*, каждая точка которого полярно сопряжена всем точкам прямой $\boldsymbol{\lambda}$.

Сохраняя обозначения (9) п. 121, можно заметить, что точкам трехмерной дифференциальной окрестности 1-го порядка $\boldsymbol{S}_1'\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_2'$ луча $\boldsymbol{\lambda} \equiv \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2$ конгруэнции (λ) соответствует трехпараметрическая связка полярных гиперплоскостей, имеющих общее линейное подпространство L_1^*, т. е. прямую линию $\boldsymbol{\lambda}^*$, которая определяется системой

$$\{\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{S}_1'\} = 0, \quad \{\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{S}_1\} = 0, \quad \{\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{S}_2\} = 0, \quad \{\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{S}_2'\} = 0, \tag{a$_1$}$$

где $\boldsymbol{S}^*$ — текущая точка прямой $\boldsymbol{\lambda}^*$.

Обозначая дифференцирование по модулю θ_2 символом d_1, по модулю θ_1 символом d_2 и пользуясь сравнениями (9), получим как дифференциальное следствие системы (a$_1$) уравнения

$$\{d_1\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{S}_1\} = 0, \quad \{d_1\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{S}_2\} = 0, \quad \{d_1\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{S}_2'\} = 0,$$
$$\{d_2\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{S}_1'\} = 0, \quad \{d_2\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{S}_1\} = 0, \quad \{d_2\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{S}_2\} = 0.$$

Следовательно, каждая точка $\boldsymbol{S}^* + d\boldsymbol{S}^*$ дифференциальной окрестности 1-го порядка точки $\boldsymbol{S}^*$ прямой $\boldsymbol{\lambda}^*$ удовлетворяет уравнениям

$$\{(\boldsymbol{S}^* + d\boldsymbol{S}^*), \boldsymbol{S}_1\} = 0, \quad \{(\boldsymbol{S}^* + d\boldsymbol{S}^*), \boldsymbol{S}_2\} = 0.$$

Значит, дифференциальная окрестность луча $\boldsymbol{\lambda}^*$ семейства ($\boldsymbol{\lambda}^*$) совпадает с подпространством L_3^* и является трехмерной, а семейство прямых ($\boldsymbol{\lambda}^*$) — фокальным (конгруэнцией).

Нетрудно указать фокусы $\boldsymbol{S}_1^*$, $\boldsymbol{S}_2^*$ луча $\boldsymbol{\lambda}^*$. Это — полюсы гиперплоскостей $\boldsymbol{S}_1''\boldsymbol{S}_1'\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_2'$ и $\boldsymbol{S}_1'\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_2'\boldsymbol{S}_2''$.

Действительно, полюс $\boldsymbol{S}_2^*$, очевидно, определяется системой

$$\{\boldsymbol{S}_2^*\boldsymbol{S}_1'\} = 0, \quad \{\boldsymbol{S}_2^*\boldsymbol{S}_1\} = 0, \quad \{\boldsymbol{S}_2^*\boldsymbol{S}_2\} = 0, \quad \{\boldsymbol{S}_2^*\boldsymbol{S}_2'\} = 0, \quad \{\boldsymbol{S}_2^*\boldsymbol{S}_2''\} = 0.$$

Дифференцируя по модулю θ_1 и пользуясь формулами (9) для $d_2\boldsymbol{S}_1'$, ..., $d_2\boldsymbol{S}_2'$, получим:

$$\{d_2\boldsymbol{S}_2^*\boldsymbol{S}_1'\} = 0, \quad \{d_2\boldsymbol{S}_2^*\boldsymbol{S}_1\} = 0, \quad \{d_2\boldsymbol{S}_2^*\boldsymbol{S}_2\} = 0, \quad \{d_2\boldsymbol{S}_2^*\boldsymbol{S}_2'\} = 0.$$

Это показывает, что дифференциальная окрестность 1-го порядка

$S_2^* + d_2 S_2^*$ точки S_2^* подсемейства $\theta_1 = 0$ совпадает с линейным подпространством $L_1^* = \lambda^*$ системы (a_1). Другими словами, описываемая точкой S_2^* линия $\theta_1 = 0$ касается в этой точке прямой λ^*.

Аналогично, при $\theta_2 = 0$ точка S_1^* описывает линию, имеющую в точке S_1^* своей касательной луч λ^*.

Вообще, последовательности Лапласа $\{\lambda\}$ с фокусами $\ldots, S_1', S_1, S_2, S_2', \ldots$ соответствует «полярно сопряженная» последовательность $\{\lambda^*\}$ с фокусами $\ldots, S_1^*, S_2^*, S_2^{*\prime} \ldots$, где каждая точка $S^{*'''}$ является полюсом гиперплоскости, определяемой соответствующей точкой S''' и четырьмя преобразованиями Лапласа: двумя справа S^{IV}, S^{V} и двумя слева S'', S'. Фокальные подсемейства (λ^*) — те же самые $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$, но дифференцирование по модулю θ_1 перемещает в последовательности (λ) от S_1 к S_2, а в последовательности (λ^*) от S_2^* к S_1^*.

Отсюда фокальная плоскость $d_2 = S_2 S_1 S_1'$ конгруэнции (λ) полярно сопряжена соответствующей фокальной плоскости $d_2^* = S_2^* S_1^* S_1^{*\prime}$ второй конгруэнции (λ^*). Поэтому точки кривой C_1^2 как линии пересечения гиперповерхности Q_4^2 фокальной плоскостью d_2 полярно сопряжены каждой точке кривой C_1^{2*}, получаемой сечением гиперквадрики Q_4^2 плоскостью d_2^* конгруэнции (λ^*).

Полярно сопряженная конгруэнция (λ^*) своими точками пересечения M_1^*, M_2^* с гиперквадрикой Q_4^2 определяет в P_3 новую пару конгруэнций T, лучи которой $A_1^*A_2^*$ и $A_3^*A_4^*$ в перенесении Плюккера соответствуют этим точкам. Поскольку луч λ^* полярно сопряжен прямой λ, каждая точка его полярно сопряжена каждой точке прямой λ. Следовательно, каждая из точек M_1^*, M_2^* полярно сопряжена и точке M_1 и точке M_2.

Полярно сопряженные относительно гиперквадрики Q_4^2 точки изображают в P_3 пересекающиеся прямые. Следовательно, каждая из прямых $A_1^*A_2^*$, $A_3^*A_4^*$, изображаемых на Q_4^2 точками M_1^* и M_2^*, пересекает пару прямых A_1A_2, A_3A_4. Более того, так как плоскости d_2 и d_2^* полярно сопряжены, лучи демиквадрики Q_1 пересекают каждую образующую демиквадрики Q_1^*, которая в P_5 изображается линией C_1^{2*}. Таким образом, эти две линейчатые поверхности Q_1 и Q_2 составляют два семейства образующих одной и той же поверхности 2-го порядка Q.

При главных перемещениях $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = 0$, которые соответствуют развертывающимся поверхностям конгруэнций (λ) и (λ^*), характеристика поверхности Q будет складываться из характеристических образующих линейчатых поверхностей Q_1 и Q_1^*. Поскольку при полярном преобразовании сопряженные направления меняются местами, характеристика поверхности Q при перемещении $\theta_2 = 0$ будет состоять из двух пар образующих A_1A_2, A_3A_4 и $A_1^{*\prime}A_2^{*\prime}$, $A_3^{*\prime}A_4^{*\prime}$, а при перемещении $\theta_1 = 0$ — из образующих $A_1'A_2'$, $A_3'A_4'$ и $A_1^*A_2^*$, $A_3^*A_4^*$, где A_1A_2, A_3A_4 изображаются в P_5 точками M_1, M_2, прямые $A_1'A_2'$, $A_3'A_4'$ — точками M_1', M_2', прямые $A_1^*A_2^*$, $A_3^*A_4^*$ и $A_1^{*\prime}A_2^{*\prime}$, $A_3^{*\prime}A_4^{*\prime}$ — точками M_1^*, M_2^* и $M_1^{*\prime}$, $M_2^{*\prime}$; точки эти лежат на прямых $\lambda = M_1M_2$, $\lambda' = M_1'M_2'$, $\lambda^* = M_1^*M_2^*$, $\lambda^{*\prime} = M_1^{*\prime}M_2^{*\prime}$, и прямые λ' и $\lambda^{*\prime}$ служат преобразованиями Лапласа от прямых λ, λ^* а прямые λ^*, $\lambda^{*\prime}$ полярно сопряжены прямым λ, λ'. Прямые A_1A_2, A_3A_4 и такие же со штрихами принадлежат первому семейству образующих поверхности Q и между собой не пересекаются, прямые со звездочками — второму. Образующие разных семейств пересекаются.

Выберем точки A_i, A_i^* так, чтобы они лежали в этих точках пересечения, причем совпадали точки

$$A_1 \equiv A_1^*, \quad A_2 \equiv A_3^*, \quad A_3 \equiv A_2^*, \quad A_4 \equiv A_4^*,$$

и аналогично для точек со штрихами.

Поскольку прямые A_1A_2, A_3A_4 и прямые $A_1^*A_2^* \equiv A_1A_3$, $A_3^*A_4^* \equiv A_2A_4$ принадлежат различным характеристикам поверхности Q, первые для смещения $\theta_2 = 0$, а вторые для $\theta_1 = 0$, их точки пересечения A_i служат характеристическими точками поверхности Q в двупараметрическом семействе поверхностей (Q), присоединенных ко всем косым четырехугольникам $\{A_i\}$. Отсюда вытекает, что точки A_i описывают четыре полости (A_i) огибающей двупараметрического семейства квадрик (Q), точки A_i' опишут еще четыре полости, всего восемь полостей, которые и составляют всю огибающую.

Поэтому каждая из поверхностей (A_i) или (A_i') касается поверхности Q соответственно в точке A_i или A_i', а поскольку стороны косого четырехугольника $A_1A_2A_4A_3$ являются образующими поверхности Q, они касаются поверхностей, описанных вершинами четырехугольника.

Мы снова получаем, что косой четырехугольник $\{A_i\}$ описывает пару T, но теперь мы можем дополнить эту теорему предложением: *вспомогательные конгруэнции пары* (A_1A_3) *и* (A_2A_4) *образуют вторую пару* T, *к которой в* P_5 *присоединена полярно сопряженная конгруэнция* (λ^*).

123. Главные направления и главные квадрики пары T. Результаты, которые мы получили, показывают, что с парой T связано на семейства ∞^2 поверхностей 2-го порядка. Каждая такая поверхность имеет стороны косого четырехугольника пары T своими образующими, и с каждым тетраэдром пары T связаны две квадрики, по одной из каждого семейства. Поскольку касательная плоскость поверхности 2-го порядка определяется двумя ее образующими, а касательная плоскость фокальной поверхности пары T — двумя лучами конгруэнций, проходящими через точку касания, то каждая квадрика семейства касается всех четырех фокальных поверхностей пары, которые тем самым входят в состав огибающей двупараметрического семейства квадрик. Характеристика однопараметрического семейства в общем случае является пространственной кривой 4-го порядка, но для *главных направлений* пары T, которые соответствуют фокальным подсемействам конгруэнции (λ), эта характеристика распадается на четверку прямых.

Две такие четверки для двух главных направлений составляют косой четырехугольник исходной пары T и его преобразования Калапсо. Для второй главной квадрики получается тот же четырехугольник исходной пары T и четырехугольник преобразования Калапсо в обратном направлении.

Калапсо при построении своего преобразования вводил главные поверхности пары T требованием распадения характеристики на четыре прямые для каждого из двух главных направлений. Нетрудно заметить, что это требование приводит к тому же преобразованию Лапласа фокального семейства ∞^2 прямых Розенфельда.

Действительно, четыре прямых распавшейся характеристики, очевидно, являются прямолинейными образующими главной поверхности 2-го порядка. Значит, по крайней мере одна из двух демиквадрик при перемещении в главном направлении допускает характеристику. Эта характеристика не может содержать более двух прямых, ибо три прямолинейные образующие определяют линейчатую поверхность 2-го порядка. Следовательно, обе демиквадрики одновременно описывают фокальные подсемейства. В перенесении Плюккера демиквадрикам соответствуют плоские сечения гиперквадрики Q_4^2 посредством полярно сопряженных двумерных плоскостей C_1^2, C_1^{2*}. Две характеристики для двух главных направлений одной демиквадрики выделяют на кривой C_1^2 две пары точек и, стало быть, две прямые Розенфельда λ и λ', определяемые первой и второй парой. Расположенные в плоскости кривой C_1^2 прямые λ и λ' пересекаются, и точка пересечения S_1 является фокусом и для λ и для λ'.

Действительно, для того чтобы существовали характеристические точки линий в семействе плоских кривых в пространстве, надо, чтобы допускали характеристики плоскости из семейства их плоскостей. Характеристика плоскости (прямая линия λ) и высечет на линии C_1^2 ее характеристические точки. Если же плоскость из двупараметрического семейства несет две характеристики λ и λ' относительно двух фокальных подсемейств, которым она принадлежит, то точка пересечения S_1 этих характеристик будет характеристической точкой плоскости относительно всего двупараметрического семейства. Двумерная поверхность, описываемая точкой S_1, будет огибающей двупараметрического семейства, и плоскость кривой C_1^2 будет касаться поверхности (S_1) в точке S_1. Следовательно, и прямые линии λ и λ', расположенные в этой плоскости, касаются поверхности (S_1), т. е. конгруэнции (λ) и (λ') имеют общую фокальную поверхность (S_1), а так как фокальные подсемейства их соответствуют той же паре главных направлений, то конгруэнция (λ') является преобразованием Лапласа от конгруэнции (λ).

124. Формулы для преобразования пары T. Главные направления T (фокальные подсемейства конгруэнции Розенфельда) определяются уравнениями (3ζ) п. 113. Чтобы определить преобразованную пару T, надо предварительно выписать систему уравнений, которым удовлетворяет тетраэдр, присоединенный к паре T.

Пара T определяется (п. 33) системой линейных уравнений (1α) п. 39

$$\omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^3 = 0, \quad \omega_3^2 = 0, \quad \omega_4^1 = 0, \tag{10α}$$

откуда внешним дифференцированием получаются квадратичные уравнения (1β, δ) п. 39 и с помощью леммы Картана разложения:

$$\begin{aligned} \omega_3^4 &= \alpha\omega_1^3 - \beta\omega_2^4, & \omega_4^3 &= \alpha'\omega_2^4 - \beta'\omega_1^3, \\ \omega_1^2 &= \beta\omega_1^3 + \gamma\omega_2^4, & \omega_2^1 &= \beta'\omega_2^4 + \gamma'\omega_1^3, \\ \omega_3^1 &= a\omega_1^3 + b\omega_2^4, & \omega_4^2 &= b'\omega_1^3 + c\omega_2^4, \end{aligned} \tag{10β}$$

где 10 параметров α, β, γ, a, b, c и штрихованные удовлетворяют двум конечным соотношениям:

$$\begin{gathered} a\gamma - (b - b')\beta + c\alpha = 0, \\ a\alpha' + (b - b')\beta' + c\gamma' = 0. \end{gathered} \tag{10γ}$$

Разложения (10β, γ) переходят в формулы (2α, β, γ) п. 39, если $b' = -b$, и тогда пара T становится расслояемой.

Теорему существования мы докажем в следующей главе, а теперь обратимся к сравнениям (3δ) п. 113, которые мы запишем в виде уравнений, определяющих и фокальные подсемейства и координату ρ фокуса:

$$\begin{gathered} \omega_1^3 + \rho\omega_4^2 = 0, \\ \omega_2^4 + \rho\omega_3^1 = 0. \end{gathered} \tag{11α}$$

Отсюда по исключении отношения $\omega_1^3 : \omega_2^4$ получаем уравнение для фокусов

$$(ac - bb')\rho^2 - (b + b')\rho - 1 = 0, \tag{11β}$$

а по исключении ρ уравнение для фокальных подсемейств в двух эквивалентных формах, в силу (10γ):

$$a(\omega_1^3)^2 + (b - b')\omega_1^3\omega_2^4 - c(\omega_2^4)^2 = 0, \tag{11γ}$$

$$(\beta\gamma' + \beta'\alpha)(\omega_1^3)^2 + (\gamma\gamma' - \alpha\alpha')\omega_1^3\omega_2^4 + (\beta\alpha' + \beta'\gamma)(\omega_2^4)^2 = 0. \tag{11γ'}$$

Для фокусов $S_i = M_1 + \rho_i M_2$, пользуясь уравнениями (10α), получим сравнения, в силу (8α) п. 119:

$$\left.\begin{aligned} d_2S_1 &\equiv S_1(\omega_1^1+\omega_2^2)+[34]\,\rho_1(\sigma_1\rho_{11}+\rho_{12})\,\omega_2^4,\\ d_2S_2 &\equiv S_2(\omega_1^1+\omega_2^2)+\Big\{[34]\,\rho_2(\sigma_1\rho_{21}+\rho_{22})+\\ &\qquad+\Big(1-\frac{\rho_2}{\rho_1}\Big)([14]+\sigma_1[32])\Big\}\,\omega_2^4 \end{aligned}\right\}\Big(\mathrm{mod}\,(\theta_1=\omega_1^3-\sigma_1\omega_2^4)\Big), \qquad (12\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} d_1S_1 &\equiv S_1(\omega_1^1+\omega_2^2)+\Big\{[34]\,\rho_1(\sigma_2\rho_{11}+\rho_{12})+\\ &\qquad+\Big(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\Big)([14]+\sigma_2[32])\Big\}\,\omega_2^4,\\ d_1S_2 &\equiv S_2(\omega_1^1+\omega_2^2)+[34]\,\rho_2(\sigma_2\rho_{21}+\rho_{22})\,\omega_2^4 \end{aligned}\right\}\cdot\ \Big(\mathrm{mod}\,(\theta_2=\omega_1^3-\sigma_2\omega_2^4)\Big),$$

где

$$d\ln\rho_i+\omega_3^3+\omega_4^4-\omega_1^1-\omega_2^2=\rho_{i1}\omega_1^3+\rho_{i2}\omega_2^4. \qquad (12\beta)$$

Отсюда параметрическое уравнение прямой $\lambda' = (S_1 d_1 S_1) = (S_1 S_1')$ с параметром t'

$$M = [12]+\rho_1[34]+ \\ +t'\Big\{[34]\,\rho_1(\sigma_2\rho_{11}+\rho_{12})+\Big(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\Big)([14]+\sigma_2[32])\Big\}, \qquad (12\gamma)$$

а прямой $\lambda'' = (S_2 d_2 S_2)$

$$M = [12]+\rho_2[34]+t''\Big\{[34]\,\rho_2(\sigma_1\rho_{21}+\rho_{22})+\Big(1-\frac{\rho_2}{\rho_1}\Big)([14]+\sigma_1[32])\Big\}.$$

125. Преобразованная пара. Та точка прямой λ', которая лежит на гиперквадрике Q_4^2 и изображает прямую в P_3, должна быть представлена произведением линейных комбинаций из точек A_i; следовательно, грассманово произведение точки M самой на себя равно нулю. Отсюда, в силу тождеств

$$[12]\cdot[34] = (A_1A_2A_3A_4), \quad [14]\cdot[32] = -(A_1A_2A_3A_4), \\ [12]\cdot[14] = [12]\cdot[32] = [34]\cdot[14] = [34]\cdot[32] = 0, \qquad (13\alpha)$$

имеем уравнение для координат t_1', t_2' двух точек M_1', M_2' прямой λ', изображающих лучи преобразованной пары конгруэнций T:

$$t'^2\Big(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\Big)^2\sigma_2 - t'\rho_1(\sigma_2\rho_{11}+\rho_{12}) - \rho_1 = 0; \qquad (13\beta)$$

для прямой $\lambda'' = (S_2 d_2 S_2)$ это уравнение имеет вид

$$t''^2\Big(1-\frac{\rho_2}{\rho_1}\Big)^2\sigma_1 - t''\rho_2(\sigma_1\rho_{21}+\rho_{22}) - \rho_2 = 0. \qquad (13\gamma)$$

Сами прямые для двух корней t_1', t_2' уравнения (13β) имеют вид

$$\Big[A_1+t'\Big(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\Big)\sigma_2A_3,\quad A_2+t'\Big(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\Big)A_4\Big]; \qquad (13\delta)$$

лучи λ^* полярно сопряженной конгруэнции (λ^*) соединяют точки образы прямых [13], [24]. Уравнения (11α) для (λ^*) получаются подстановкой указателей $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$:

$$\omega_1^2+\rho^*\omega_4^3=0, \quad \omega_3^1+\rho^*\omega_2^1=0. \qquad (14\alpha)$$

Поскольку фокальные подсемейства конгруэнций (λ) и (λ^*) соответствуют, из квадратичных уравнений

$$[\omega_1^2+\rho_2^*\omega_4^3,\ \omega_1^3-\sigma_1\omega_2^4]=0, \quad [\omega_1^2+\rho_1^*\omega_4^3,\ \omega_1^3-\sigma_2\omega_2^4]=0$$

получаем:

$$\rho_2^* = \frac{\gamma+\beta\sigma_1}{\beta'\sigma_1-\alpha'}, \quad \rho_1^* = \frac{\gamma+\beta\sigma_2}{\beta'\sigma_2-\alpha'}. \qquad (14\beta)$$

Инфинитезимальные смещения фокусов

$$S_i^* = [13]+\rho_i^*[24] \qquad (i=1,\ 2)$$

напишутся:

$$d_2S_1^* \equiv S_1^*(\omega_1^1+\omega_3^3)+\Big\{[24]\,\rho_1^*(\rho_{11}^*\sigma_1+\rho_{12}^*)+ \\ +\Big(1-\frac{\rho_1^*}{\rho_2^*}\Big)\Big([23](\beta\sigma_1+\gamma)+[14](\alpha\sigma_1-\beta)\Big)\Big\}\,\omega_2^4, \quad (\mathrm{mod}\,\theta_1) \qquad (15\alpha)$$

где

$$d\ln\rho_1^*+\omega_2^2+\omega_4^4-\omega_1^1-\omega_3^3=\rho_{11}^*\omega_1^3+\rho_{12}^*\omega_2^4, \qquad (15\beta)$$

откуда пара точек пересечения прямой $\overset{*}{\lambda}{}'$ с гиперквадрикой Q_4^2 и два луча преобразованной пары T в P_3 определяются грассмановым произведением

$$\Big[A_1+\overset{*}{t}{}'\Big(1-\frac{\rho_1^*}{\rho_2^*}\Big)(\beta\sigma_1+\gamma)A_2,\quad A_3+\overset{*}{t}{}'\Big(1-\frac{\rho_1^*}{\rho_2^*}\Big)(\alpha\sigma_1-\beta)A_4\Big], \qquad (15\gamma)$$

где $\overset{*}{t}{}'$ — один из корней уравнения

$$\overset{*}{t}{}'^2\Big(1-\frac{\rho_1^*}{\rho_2^*}\Big)^2(\beta\sigma_1+\gamma)(\alpha\sigma_1-\beta)-\overset{*}{t}{}'\rho_1^*(\rho_{11}^*\sigma_1+\rho_{12}^*)-\rho_1^*=0. \qquad (15\delta)$$

Пара прямых (13δ) и пара прямых (15γ) своим пересечением определяют четыре фокуса A_1', A_2', A_3', A_4' преобразованной пары (T'):

$$A'_i = A_1 + \overset{*}{t}{}'_j\left(1 - \frac{\overset{*}{\rho}_1}{\overset{*}{\rho}_2}\right)(\beta\sigma_1 + \gamma)A_2 + t'_k\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\sigma_2 A_3 +$$
$$+ \overset{*}{t}{}'_j t'_k\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\left(1 - \frac{\overset{*}{\rho}_1}{\overset{*}{\rho}_2}\right)(\beta\sigma_1 + \gamma)A_4, \qquad (16)$$

так как в силу теоремы Виета, примененной к уравнению $(11\gamma')$, где $\omega_1^5 = \sigma\omega_2^4$, следует

$$\frac{\beta\sigma_1 + \gamma}{\sigma_2} = \alpha\sigma_1 - \beta;$$

значения указателей i, j, k согласованы таблицей:

i	1	2	3	4
j	1	2	1	2
k	1	1	2	2.

126. Преобразование Калапсо расслояемых пар. Обратимся теперь к преобразованию Калапсо расслояемых пар в расслояемые пары. Здесь мы имеем ряд новых результатов А. М. Березмана.

Теорема 1. *Если обе конгруэнции касательных к кривым сопряженной сети в P_5 изображают в перенесении Розенфельда расслояемые пары, то сеть имеет равные точечные инварианты Дарбу.*

Как известно *), сеть в P_5 определяется шестью решениями уравнения Лапласа

$$X_{uv} = aX_u + bX_v + cX, \qquad (17\alpha)$$

где X — аналитическая точка, которая описывает сеть. Вторые фокусы X_{-1}, X_1 конгруэнций (XX_u), (XX_v), т. е. преобразования Лапласа в направлении u и в направлении v сети (X), определяются формулами

$$X_{-1} = X_u - bX, \quad X_1 = X_v - aX, \qquad (17\beta)$$

причем

$$(X_1)_u = bX_1 + hX, \quad (X_{-1})_v = aX_{-1} + kX, \qquad (17\gamma)$$

где

$$h = c + ab - a_u, \quad k = c + ab - b_v \qquad (17\delta)$$

— инварианты Дарбу уравнения (17α).

По условию теоремы конгруэнции (XX_u), (XX_v) в перенесении Розенфельда изображают расслояемые пары, следовательно (п. 116), фокусы X и X_{-1}, X и X_1 полярно сопряжены относительно гипер-

*) Т. К., гл. VI.

квадрики Q_4^2. Обозначая фигурными скобками произведение Плюккера, будем иметь:

$$\{XX_{-1}\} = 0, \quad \{XX_1\} = 0.$$

Дифференцируем первое уравнение по v, второе по u, получим, пользуясь формулами $(17\beta, \gamma)$:

$$\frac{\partial}{\partial v}\{XX_{-1}\} = \{X_1X_{-1}\} + k\{XX\} = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial u}\{XX_1\} = \{X_{-1}X_1\} + h\{XX\} = 0,$$

откуда после вычитания, поскольку $\{XX\} \neq 0$, получим:

$$k = h.$$

Теорема 2. *Если преобразование Калапсо переводит в обе стороны расслояемую пару в расслояемую, то исходная пара сопряженная.*

Как известно *), уравнение Лапласа с равными инвариантами (17α) нормированием неизвестной функции X может быть приведено к виду уравнения Мутара, когда $a = b = 0$ и

$$X_{uv} = cX.$$

При этом

$$X_{-1} = X_u, \quad X_1 = X_v,$$

и преобразование Лапласа X_1 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial \ln c}{\partial v}(X_1)_u + cX_1.$$

Если это уравнение тоже с равными инвариантами, то по формулам, аналогичным (17δ),

$$\frac{\partial^2 \ln c}{\partial u\,\partial v} = 0, \quad c = \varphi(u)\psi(v),$$

и изменением параметров u, v на $\bar{u}$, $\bar{v}$, так что $\frac{d\bar{u}}{du} = \varphi(u)$, $\frac{d\bar{v}}{dv} = \psi(v)$, можно привести c к единице.

Координаты ρ точек

$$G = X + \rho X_1,$$

в которых прямая XX_1 пересекает гиперквадрику Q_4^2, определяются уравнением

$$\{X + \rho X_1, \ X + \rho X_1\} = \{XX\} + \rho^2\{X_1X_1\} = 0.$$

*) Т. К., гл. VI, п. 133.

Но по условию

$$\frac{\partial}{\partial u}\{\boldsymbol{XX}\} = 2\{\boldsymbol{XX}_{-1}\} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v}\{\boldsymbol{XX}\} = 2\{\boldsymbol{XX}_1\} = 0,$$

следовательно, $\{\boldsymbol{XX}\}$ и аналогично $\{\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_1\}$ — постоянные, и поэтому $\rho = \mathrm{const}$.

Отсюда

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{G}}{\partial u\, \partial v} = \boldsymbol{X}_{uv} + \rho(\boldsymbol{X}_1)_{uv} = \boldsymbol{X} + \rho\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{G}.$$

Следовательно, высекаемая на Q_4^2 развертывающимися поверхностями конгруэнции сеть — сопряженная.

127. Компоненты тетраэдра конфигурации Бианки. Рассмотрим пару T из четырех конгруэнций W. Это — конфигурация теоремы перестановочности асимптотических преобразований Бианки, диагонали которой описывают наиболее общую гиперболическую расслояемую пару (п. 37).

Поскольку ребро [12] описывает конгруэнцию W, имеем (17) п. 47:

$$\alpha\alpha' - \gamma\gamma' = 0.$$

Нормируя вершины тетраэдра так, чтобы

$$\alpha = -\gamma, \quad \alpha' = -\gamma', \qquad \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_1^4 = 0, \tag{18α}$$

получим:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \beta\omega_1^3 - \alpha\omega_2^4, & \omega_2^1 &= -\alpha'\omega_1^3 + \beta'\omega_2^4, \\ \omega_3^4 &= \alpha\omega_1^3 - \beta\omega_2^4, & \omega_4^3 &= -\beta'\omega_1^3 + \alpha'\omega_2^4. \end{aligned} \tag{18β}$$

И уравнение асимптотических на поверхностях $(\boldsymbol{A}_1)$ и $(\boldsymbol{A}_2)$ будет

$$(\omega_1^3)^2 - (\omega_2^4)^2 = 0. \tag{a}$$

Требуя, чтобы асимптотические

$$\omega_3^1\omega_1^2 + \omega_3^4\omega_4^2 = 0,$$
$$\omega_4^2\omega_2^1 + \omega_4^3\omega_3^1 = 0$$

на поверхностях $(\boldsymbol{A}_3)$ и $(\boldsymbol{A}_4)$ соответствовали асимптотическим (а) поверхности $(\boldsymbol{A}_1)$, получим разложения

$$\omega_3^1 = a\omega_1^3 + b\omega_2^4, \quad \omega_4^2 = b\omega_1^3 + a\omega_2^4, \tag{18γ}$$

если только не будет одновременно $\alpha^2 - \beta^2 = 0$, $\alpha'^2 - \beta'^2 = 0$, $\alpha\alpha' = \beta\beta'$, т. е. $[\omega_2^1\omega_4^3] = 0$, $[\omega_1^2\omega_3^4] = 0$, $[\omega_1^2\omega_2^1] = 0$, что приводит к вырождению конгруэнций $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_3)$, $(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_4)$ в линейчатые поверхности.

Внешнее дифференцирование уравнений (18β, γ), если взять суммы и разности уравнений левого столбца, а потом правого, приводит к системе

$$\begin{aligned} &[\Delta\alpha + \Delta\beta,\ \theta_2] + \alpha[\Omega\theta_1] = 0, & &[\Delta\alpha' + \Delta\beta',\ \theta_2] + \alpha'[\Omega\theta_1] = 0, \\ &[\Delta\alpha - \Delta\beta,\ \theta_1] + \alpha[\Omega\theta_2] = 0, & &[\Delta\alpha' - \Delta\beta',\ \theta_1] + \alpha'[\Omega\theta_2] = 0, \\ &[\Delta a + \Delta b,\ \theta_1] + a[\Omega\theta_2] = 0, & &[\Delta a - \Delta b,\ \theta_2] + a[\Omega\theta_1] = 0, \end{aligned} \tag{18δ}$$

где

$$\begin{aligned} &\theta_1 = \omega_1^3 + \omega_2^4, \quad \theta_2 = \omega_1^3 - \omega_2^4, & &\Omega = \omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 + \omega_4^4, \\ &\Delta\alpha = d\alpha + \alpha(\omega_2^2 - \omega_3^3), & &\Delta\alpha' = d\alpha' + \alpha'(\omega_1^1 - \omega_4^4), \\ &\Delta\beta = d\beta + \beta(\omega_2^2 - \omega_3^3), & &\Delta\beta' = d\beta' + \beta'(\omega_1^1 - \omega_4^4), \\ &\Delta a = da + a(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4), & &\Delta b = db + b(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4). \end{aligned} \tag{18δ'}$$

Отсюда, развертывая по лемме Картана, получим:

$$\Omega = \xi\theta_1 + \eta\theta_2.$$

$$\begin{aligned} \Delta a - \Delta b &= a\eta\theta_1 + \zeta\theta_2, & \Delta a + \Delta b &= \zeta'\theta_1 + a\xi\theta_2, \\ \Delta\alpha + \Delta\beta &= \alpha\eta\theta_1 + \zeta_1\theta_2, & \Delta\alpha - \Delta\beta &= \zeta_1'\theta_1 + \alpha\xi\theta_2, \\ \Delta\alpha' + \Delta\beta' &= -\alpha'\eta\theta_1 + \zeta_2\theta_2, & \Delta\alpha' - \Delta\beta' &= \zeta_2'\theta_1 + \alpha'\xi\theta_2. \end{aligned} \tag{18ε}$$

Теперь конгруэнция Розенфельда, изображающая пару конгруэнций диагоналей [14], [23], имеет фокусами точки

$$\boldsymbol{S}_1 = [14] - [23], \quad \boldsymbol{S}_2 = [14] + [23]. \tag{18ζ}$$

Действительно, дифференцируя равенства (18ζ), получим, в силу (18α, δ', ε), сравнения:

$$\begin{aligned} d_1\boldsymbol{S}_1 &= \Big(\frac{1}{2}\xi\boldsymbol{S}_2 + (\beta - \alpha)[24] - (\beta' - \alpha')[13] + \\ &\qquad + (b + a)[12] + [34]\Big)\theta_1, \\ d_1\boldsymbol{S}_2 &= \frac{1}{2}\xi\boldsymbol{S}_1\theta_1, \\ d_2\boldsymbol{S}_1 &= \frac{1}{2}\eta\boldsymbol{S}_2\theta_2, \\ d_2\boldsymbol{S}_2 &= \Big(\frac{1}{2}\eta\boldsymbol{S}_1 + (\beta + \alpha)[24] - (\beta' + \alpha')[13] + \\ &\qquad + (b - a)[12] + [34]\Big)\theta_2, \end{aligned} \tag{18η}$$

и следовательно, уравнения главных направлений

$$\theta_1 = \omega_1^3 + \omega_2^4 = 0, \quad \theta_2 = \omega_1^3 - \omega_2^4 = 0, \quad \text{т. е.} \quad \sigma_1 = -1, \quad \sigma_2 = 1.$$

128. Обрывающиеся последовательности. Теорема 1. *Если расслояемая пара в одну сторону преобразуется в расслояемую пару, а в другую сторону преобразование Калапсо обрывается, то обе расслояемые пары сопряженные и преобразование второй пары тоже обрывается.*

Фокальная поверхность $(\boldsymbol{S}_1)$ вырождается в линию, и преобразование обрывается, если

$$\eta = 0. \tag{a}$$

При этом

$$d_2\boldsymbol{S}_2 = \{(\beta+\alpha)[24] - (\beta'+\alpha')[13] + (b-a)[12] + [34]\}\,\theta_2,$$

а поскольку

$$\{\boldsymbol{S}_2,\ (\beta+\alpha)[24] - (\beta'+\alpha')[13] + (b-a)[12] + [34]\} = 0,$$

конгруэнция Розенфельда $(\boldsymbol{S}_2,\ d_2\boldsymbol{S}_2)$ будет образом расслояемой пары, если

$$\boldsymbol{S}'_2 = (\alpha+\beta)[24] - (\alpha'+\beta')[13] + (b-a)[12] + [34]$$

будет вторым фокусом, т. е. будет удовлетворять уравнению

$$(d_1\boldsymbol{S}'_2,\ \boldsymbol{S}_2,\ \boldsymbol{S}'_2) = 0. \tag{b}$$

Поскольку, в силу ($18\delta'$, ε) и условия (a),

$$\left.\begin{aligned} d_1(\alpha+\beta) &\equiv (\alpha+\beta)(\omega_3^3-\omega_2^2), \\ d_1(\alpha'+\beta') &\equiv (\alpha'+\beta')(\omega_4^4-\omega_1^1), \\ d_1(a-b) &\equiv (a-b)(\omega_3^3-\omega_2^2+\omega_4^4-\omega_1^1), \\ d_1\boldsymbol{S}'_2 &\equiv \boldsymbol{S}'_2(\omega_3^3+\omega_4^4)+\boldsymbol{S}_1(\beta\beta'-\alpha\alpha'+b)\,\theta_1 \end{aligned}\right\} \pmod{\theta_2}, \quad \begin{aligned} &(c) \\ &(d) \end{aligned}$$

уравнение (b) эквивалентно равенству

$$b = \alpha\alpha' - \beta\beta'. \tag{b$'$}$$

Следовательно, расслояемая пара, преобразуемая в одну сторону в расслояемую пару с обрывом последовательности в другую сторону, характеризуется условиями (a), (b′).

Нетрудно показать, что развертывающимся поверхностям $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$ конгруэнции $(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2)$ на гиперквадрике Q_4^2 соответствует сопряженная система.

Действительно, луч $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2$ сечет Q_4^2 в точках [14] и [23]. Достаточно доказать теорему для поверхности ([14]), ибо, согласно общей теореме, если развертывающиеся поверхности конгруэнции высекают на гиперквадрике сопряженную сеть при входе, то они высекут сопряженную сеть и при выходе.

Для точки [14] в P_5 имеем сравнения:

$$d_1[14] = (\beta-\alpha)[24] + (\alpha'-\beta')[13] + (b+a)[12] + [34],$$
$$d_2[14] = (\beta+\alpha)[24] - (\alpha'+\beta')[13] + (b-a)[12] + [34],$$

где символы дифференцирования d_1 и d_2 соответствуют значениям форм $\theta_1 = 2$, $\theta_2 = 0$ и $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 2$.

Дифференцируя $d_2[14]$ в направлении d_1, получим:

$$d_1(d_2[14]) - (\omega_3^3+\omega_4^4)\,d_2[14] \equiv 2(b-\alpha\alpha'+\beta\beta')\,\boldsymbol{S}_1\theta_1 \pmod{\theta_2}.$$

Правая часть, в силу (b′), обращается в нуль; следовательно, вторая смешанная производная $d_1(d_2[14])$ линейно зависит от [14], $d_1[14]$, $d_2[14]$, что эквивалентно уравнению Лапласа (17α).

Таким образом, развертывающиеся поверхности конгруэнции $(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2)$ секут гиперквадрику Q_4^2 по сопряженной сети, а потому (п. 118) пара [14], [23] сопряженная.

Из сравнения (d) при условии (b′) прямо следует вырождение поверхности $\boldsymbol{S}_2$ в линию, т. е. обрыв последовательности в направлении $\boldsymbol{S}_2 \to \boldsymbol{S}'_2$.

Наконец, сопряженность пары — прообраза конгруэнции Розенфельда $(\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}'_2)$ — вытекает из предыдущих рассуждений, ибо теперь в сторону $\boldsymbol{S}_2 \to \boldsymbol{S}'_2$ от конгруэнции $(\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}'_2)$ последовательность обрывается, а в сторону $\boldsymbol{S}'_2 \to \boldsymbol{S}_2$ переходит в конгруэнцию $(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2)$, которая изображает расслояемую пару.

Таким образом, если последовательность Калапсо из расслояемых пар обрывается, то она состоит из двух сопряженных пар.

Теорема 2. *Если преобразование расслояемых пар обрывается в обе стороны, то пара сопряженная.*

Действительно, в этом случае обе фокальные поверхности $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$ конгруэнции Розенфельда $(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2)$ вырождаются в линии, откуда, в силу сравнений (18η), следует

$$\xi = 0, \quad \eta = 0,$$

т. е., в силу ($18\delta'$, ε),

$$\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0,$$

и внешнее дифференцирование приведет к уравнению (b′). Следовательно, прообраз в P_3 конгруэнции $(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2)$ будет сопряженной парой.

Возвращаясь к обозначениям п. 126, мы имеем теперь

$$\boldsymbol{X}_u = \lambda\boldsymbol{X}, \quad (\boldsymbol{X}_1)_v = \mu\boldsymbol{X}_1.$$

Дифференцируя последовательно по u и по v условие полярной сопряженности фокусов $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{X}_1$

$$\{\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}_1\} = 0,$$

получим:

$$\begin{gathered}
\{\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}_1\}=0, \quad \{\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}_1)_u\}=0, \quad \{\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}_1)_{uu}\}=0,\\
\{\boldsymbol{X}_v\boldsymbol{X}_1\}=0, \quad \{\boldsymbol{X}_v(\boldsymbol{X}_1)_u\}=0, \quad \{\boldsymbol{X}_v(\boldsymbol{X}_1)_{uu}\}=0,\\
\{\boldsymbol{X}_{vv}\boldsymbol{X}_1\}=0, \quad \{\boldsymbol{X}_{vv}(\boldsymbol{X}_1)_u\}=0, \quad \{\boldsymbol{X}_{vv}(\boldsymbol{X}_1)_{uu}\}=0,\\
\{\boldsymbol{X}_{vvv}\boldsymbol{X}_1\}=0, \quad \{\boldsymbol{X}_{vvv}(\boldsymbol{X}_1)_u\}=0, \quad \{\boldsymbol{X}_{vvv}\{\boldsymbol{X}_1\}_{uu}\}=0.\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}$$

Отсюда $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{X}_v$ и т. д. все последовательные производные по v точки $\boldsymbol{X}$ лежат в плоскости, полярно сопряженной трем точкам $\boldsymbol{X}_1$, $(\boldsymbol{X}_1)_u$, $(\boldsymbol{X}_1)_{uu}$.

Следовательно, каждая из вырожденных фокальных поверхностей $(\boldsymbol{X})$, $(\boldsymbol{X}_1)$ конгруэнции $(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}_1)$ является плоской кривой, и плоскости этих двух кривых полярно сопряжены.

Таким образом, последовательность преобразований Калапсо из расслояемых пар не обрывается, если содержит хотя бы три преобразования. При этом предполагается, что расслояемая пара не преобразуется в простую пару T (не расслояемую).

129. Сопряженная пара, которая в одном направлении переводится в расслояемую пару. В разложениях форм ω_3^1, ω_4^2 сопряженной пары коэффициент b равен нулю; меняя нормирование вершин репера, мы приведем коэффициенты a и c к единице, и тогда уравнения (10γ) п. 124 дадут $\gamma+\alpha=0$, $\gamma'+\alpha'=0$.

Система уравнений сопряженной пары примет вид

$$\begin{gathered}
\omega_1^4=0, \quad \omega_2^3=0, \quad \omega_3^2=0, \quad \omega_4^1=0, \quad \omega_3^1=\omega_1^3, \quad \omega_4^2=\omega_2^4,\\
\omega_1^2=\beta\omega_1^3-\alpha\omega_2^4, \quad \omega_2^1=\beta'\omega_2^4-\alpha'\omega_1^3,\\
\omega_3^4=\alpha\omega_1^3-\beta\omega_2^4, \quad \omega_4^3=\alpha'\omega_2^4-\beta'\omega_1^3.
\end{gathered} \tag{19α}$$

Внешнее дифференцирование дает

$$\begin{gathered}
[\omega_1^1-\omega_3^3, \quad \omega_1^3]=0, \qquad [\omega_2^2-\omega_4^4, \quad \omega_2^4]=0,\\
[\Delta\beta\omega_1^3]-[\Delta\alpha\omega_2^4]=0, \quad [\Delta\alpha'\omega_1^3]-[\Delta\beta'\omega_2^4]=0,\\
[\Delta\alpha\omega_1^3]-[\Delta\beta\omega_2^4]=0, \quad [\Delta\beta'\omega_1^3]-[\Delta\alpha'\omega_2^4]=0,
\end{gathered} \tag{19β}$$

откуда

$$\omega_1^1-\omega_3^3=2n\omega_1^3, \quad \omega_2^2-\omega_4^4=2n'\omega_2^4, \tag{19γ}$$

и новое дифференцирование даст

$$[\Delta n\omega_1^3]=0, \quad [\Delta n'\omega_2^4]=0, \tag{19δ}$$

где

$$\begin{gathered}
\Delta\alpha=d\alpha+\alpha(\omega_4^4-\omega_1^1), \qquad \Delta\alpha'=d\alpha'+\alpha'(\omega_3^3-\omega_2^2),\\
\Delta\beta=d\beta+\beta(\omega_2^2-\omega_3^3), \qquad \Delta\beta'=d\beta'+\beta'(\omega_1^1-\omega_4^4),\\
\Delta n=dn+(\beta\beta'-\alpha\alpha')\omega_2^4, \quad \Delta n'=dn'+(\beta\beta'-\alpha\alpha')\omega_1^3.
\end{gathered} \tag{19ε}$$

Кроме того, мы примем

$$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4=0,$$

что соответствует нормированию

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4)=1.$$

Фокусы конгруэнции $(\boldsymbol{\lambda})$ по формулам (6γ, δ) п. 116 теперь будут

$$\boldsymbol{S}_1=[12]+[34], \quad \boldsymbol{S}_2=[12]-[34]. \tag{20α}$$

Развертывающиеся поверхности определяются уравнением

$$(\omega_1^3)^2-(\omega_2^4)^2=0. \tag{20β}$$

Теперь в формулах пп. 124 и 125, в силу (3δ) п. 113, надо положить

$$\rho_1=1, \ \rho_2=-1, \ \sigma_1=-1, \ \sigma_2=1, \ \rho_{i1}=-2n, \ \rho_{i2}=-2n' \ (i=1, 2).$$

Сравнения (12α) п. 124 примут вид

$$\begin{aligned}
d_1\boldsymbol{S}_2&=\frac{1}{2}\boldsymbol{S}_1(n+n')\theta_1,\\
d_1\boldsymbol{S}_1&=\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{S}_2(n+n')+([14]-[23])\right\}\theta_1,\\
d_2\boldsymbol{S}_2&=\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{S}_1(n-n')-([14]+[23])\right\}\theta_2,\\
d_2\boldsymbol{S}_1&=\frac{1}{2}\boldsymbol{S}_2(n-n')\theta_2,
\end{aligned} \tag{20γ}$$

где

$$\theta_1=\omega_1^3+\omega_2^4, \quad \theta_2=\omega_1^3-\omega_2^4. \tag{20δ}$$

Преобразование Лапласа луча $\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2$ в направлении $\theta_2=0$ будет прямая $\boldsymbol{\lambda}'=\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_1'$, где

$$\boldsymbol{S}_1'=\boldsymbol{S}_2(n+n')+2([14]-[23]). \tag{21α}$$

Нетрудно обнаружить, что точка $\boldsymbol{S}_1'$ полярно сопряжена фокусу $\boldsymbol{S}_1$ относительно гиперквадрики Q_1^2:

$$\{\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_1'\}=0.$$

Следовательно, если конгруэнция $(\boldsymbol{\lambda}')$ в перенесении Розенфельда изображает расслояемую пару, то точка $\boldsymbol{S}_1'$, полярно сопряженная фокусу $\boldsymbol{S}_1$, должна быть вторым фокусом луча $\boldsymbol{\lambda}'$:

$$(d_2\boldsymbol{S}_1'\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_1')=0. \tag{a}$$

Но, дифференцируя (21α), имеем:

$$d_1S_1' = \left\{ \frac{1}{2} S_1 (n+n')^2 + 2S_1 + (n-n')([14]+[23]) + \right.$$
$$\left. + 2(\beta-\alpha)[24] + 2(\alpha'-\beta')[13] \right\} \theta_1 + S_2 d_1 (n+n'), \quad (21\beta)$$
$$d_2S_1' = \frac{1}{2} S_1 (n^2 - n'^2)\, \theta_2 + S_2 d_2 (n+n'),$$

и, подставляя в сравнение (a), получим условие расслояемости пары, изображаемой конгруэнцией Розенфельда (λ'):

$$d_2 (n+n') = 0. \quad (21\gamma)$$

Аналогично, пара [12], [34] переводится преобразованием Калапсо и в другом направлении в расслояемую пару, если

$$d_1 (n-n') = 0. \quad (21\gamma')$$

Между тем, развертывая по лемме Картана уравнения (19δ), получим, в силу (19ε),

$$dn = n_1 \omega_1^3 + (\alpha\alpha' - \beta\beta')\, \omega_2^4, \quad dn' = (\alpha\alpha' - \beta\beta')\, \omega_1^3 + n_2' \omega_2^4,$$

и сравнение (21γ) дает

$$n_1 = n_2'. \quad (21\delta)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} d(n+n') &= (n_1 + \alpha\alpha' - \beta\beta')\, \theta_1, \\ d(n-n') &= (n_1 - \alpha\alpha' + \beta\beta')\, \theta_2, \end{aligned} \quad (21\varepsilon)$$

и сравнение ($21\gamma'$) удовлетворено.

Отсюда теорема: *если сопряженная пара преобразуется в расслояемую пару, то преобразование Калапсо, если оно не обрывается, переводит ее в расслояемую пару и в другую сторону.*

130. Сопряженная пара, которая в обоих направлениях переводится в сопряженные пары. Расслояемая пара (λ'), полученная преобразованием Калапсо из сопряженной пары (S_1S_2), в силу теоремы 2 п. 126, будет парой сопряженной, если ее преобразование Лапласа ($S_1'd_1S_1'$) изображает тоже расслояемую пару, т. е. если она будет обладать парой полярно сопряженных фокусов.

Точка

$$S_1'' = \rho'' S_1' + \frac{d_1 S_1'}{\theta_1} \quad \mathbf{(22\alpha)}$$

полярно сопряжена фокусу S_1', если

$$\{ S_1' S_1'' \} = 0, \quad \mathbf{(b)}$$

но, в силу (20α), (21α), а затем тождеств (13α) п. 125 и условия (19ζ), имеем:

$$\begin{aligned} &\{S_1S_1\} = 2, \quad \{S_2S_2\} = -2, \quad \{S_1S_2\} = 0, \\ &\{S_1S_1'\} = 0, \quad \{S_2S_1'\} = -2(n+n'), \\ &\{S_1'S_1'\} = -2[4+(n+n')^2]. \end{aligned} \quad (22\beta)$$

Дифференцируя последнее равенство, получим, в силу (21γ, ε):

$$\{S_1'd_2S_1'\} = 0, \quad \{S_1'd_1S_1'\} = -2(n+n')\, d_1(n+n') = -2(n+n')\, g\theta_1,$$

где, в силу (21ε),

$$g = (n_1 + \alpha\alpha' - \beta\beta'). \quad (22\gamma)$$

Отсюда (b) после подстановки выражения (22α) примет вид

$$\rho'' [4 + (n+n')^2] + (n+n')\, g = 0. \quad (22\delta)$$

Остается потребовать, чтобы точка (22α, δ) была вторым фокусом луча $S_1'S_1''$, т. е. удовлетворяла уравнению

$$(d_2S_1'' S_1' S_1'') = 0, \quad (c)$$

но

$$d_2S_1'' = S_1' d_2\rho'' + \rho'' d_2 S_1' + d_2 \frac{d_1S_1'}{\theta_1}.$$

Поскольку в силу первых уравнений (19β) внешние дифференциалы $D\theta_1$, $D\theta_2$ равны нулю, эти формы суть полные дифференциалы

$$\theta_1 = 2\,du, \quad \theta_2 = 2\,dv, \quad d_2\theta_1 = \frac{\partial}{\partial v} du = 0, \quad d_1\theta_2 = \frac{\partial}{\partial u} dv = 0. \quad (22\varepsilon)$$

Следовательно,

$$d_2S_1'' = S_1' d_2\rho'' + \rho'' d_2 S_1' + \frac{d_2(d_1S_1')}{\theta_1},$$

но, в силу (21β, γ),

$$d_2(d_1S_1') = d_1(d_2S_1') = d_1 \left\{ \frac{1}{2} S_1 (n^2 - n'^2) \right\} \theta_2$$

и

$$d_2S_1'' = AS_1' + \frac{1}{2} \rho'' S_1 (n^2 - n'^2)\, \theta_2 + \frac{1}{2} S_1 d_1 (n^2 - n'^2) \frac{\theta_2}{\theta_1}.$$

Условие (c) примет вид

$$\rho'' (n^2 - n'^2) + \frac{d_1 (n^2 - n'^2)}{\theta_1} = 0, \quad (22\zeta)$$

но, в силу (21ε),

$$d_1 (n^2 - n'^2) = (n-n')\, g\theta_1.$$

Теперь уравнения (22δ, ζ) по исключении ρ'' дадут

$$4(n-n')\,g=0. \tag{22η}$$

Обращение в нуль $n-n'$ приводит к вырождению конгруэнции $(S_1'S_1'')$. Следовательно, надо положить $g=0$ и, в силу (21ε), (22γ),

$$d(n+n')=0. \tag{23α}$$

Аналогично, чтобы первое преобразование в направлении $\theta_1=0$ было образом сопряженной пары, необходимо

$$d(n-n')=0. \tag{23β}$$

Этими условиями определяются сопряженные пары, у которых оба преобразования Калапсо будут тоже сопряженными парами (или вырождаются).

131. Сопряженные четверки. Уравнения (21ε) показывают, что условия (23α, β) эквивалентны системе

$$n_1=0,\quad \alpha\alpha'-\beta\beta'=0. \tag{24α}$$

Поскольку конгруэнция $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$ есть конгруэнция W, т. е. имеет место равенство

$$\alpha\alpha'-\gamma\gamma'=0, \tag{24β}$$

уравнения ($13'$) п. 82 удовлетворены и исходная пара T будет сопряженной четверкой.

С другой стороны, если сопряженная четверка переводится преобразованием Калапсо в сопряженную четверку, то будет иметь место второе уравнение (24α) и уравнение (23α); следовательно, в силу (21ε), параметр n_1 равен нулю и уравнение (23β) удовлетворено; преобразование Лапласа в другую сторону будет также сопряженной парой.

Следовательно, *если существует последовательность преобразований Калапсо из расслояемых пар, то они все сопряженные и даже более: все пары T последовательности — сопряженные четверки.*

132. Определение сопряженных пар с двумя расслояемыми парами в качестве преобразований Калапсо. Сопряженные пары (четверки) с двумя расслояемыми парами в качестве преобразований Калапсо определяются системой (19α — δ) п. 129, (23α, β) п. 130. Из уравнений (23α, β) следует $n=\mathrm{const}$, $n'=\mathrm{const}$.

Уравнения (19δ) обращаются в тождество, но зато появляются конечные соотношения (24α), и вопрос сводится к исследованию четырех последних уравнений (19β) п. 129, где формы $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, $\Delta\alpha'$, $\Delta\beta'$ связаны линейным соотношением, вытекающим из второго уравнения (24α).

Это исследование приводит к более наглядным результатам, если воспользоваться возможностью перейти к параметрам асимптотиче-

ских линий u, v — возможностью, на которую мы указывали в п. 130. При этом целесообразно выполнить еще одно нормирование вершин тетраэдра.

Вторичные формы π_i^i, в силу (19γ, ζ), были связаны только тремя соотношениями:

$$\pi_1^1=\pi_3^3,\quad \pi_2^2=\pi_4^4,\quad \pi_1^1+\pi_4^4=0. \tag{25α}$$

Разность $\pi_1^1-\pi_4^4$ оставалась произвольной. Между тем, из формул (19ε), в силу (19α), следует при закрепленных главных переменных $\omega_1^3=\omega_2^4=0$ закон вариации отношения $\beta':\alpha$:

$$\delta\ln\frac{\beta'}{\alpha}=2(\pi_4^4-\pi_1^1).$$

Поскольку β' и α не нули, мы можем привести их отношение к -1. Тогда второе уравнение (24α) дает

$$\beta'=-\alpha,\quad \alpha'=-\beta \tag{25β}$$

и по формулам (19α)

$$\omega_2^1=\omega_1^2,\quad \omega_4^3=\omega_3^4. \tag{25γ}$$

Между тем, из этих соотношений внешним дифференцированием получаем:

$$[\omega_1^1-\omega_2^2,\ \omega_1^2]=0,\quad [\omega_3^3-\omega_4^4,\ \omega_3^4]=0. \tag{25γ'}$$

Следовательно, $D\omega_1^2=0$, и форма ω_1^2 есть полный дифференциал

$$\omega_1^2=d\varphi.$$

Тогда из уравнений (19α), (20δ), (22ε) следует

$$d\varphi=\beta(du+dv)+\alpha(dv-du),$$

откуда

$$\alpha+\beta=\varphi_v,\quad \beta-\alpha=\varphi_u,\quad 2\alpha=\varphi_v-\varphi_u,\quad 2\beta=\varphi_u+\varphi_v. \tag{25δ}$$

Составляя разности уравнений (19β) последних двух строк, получим, в силу (19ε) и (25β),

$$[d\beta\omega_1^3]-[d\alpha\omega_2^4]=0,\quad [d\alpha\omega_1^3]-[d\beta\omega_2^4]=0,$$

откуда сумма и разность дадут

$$[d(\alpha+\beta),\ \theta_2]=0,\quad [d(\alpha-\beta),\ \theta_1]=0, \tag{26α}$$

или, в силу уравнений (22ε), (25δ), по сокращении на $[du\,dv]$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}=0, \tag{26β}$$

и

$$\varphi=U+V,\quad U=f_1(u),\quad V=f_2(v).$$

С другой стороны, развертывая по лемме Картана уравнения (25γ′), получим:

$$\omega_1^1-\omega_2^2=p\omega_1^2,\quad \omega_3^3-\omega_4^4=q\omega_3^4, \tag{26γ}$$

откуда внешнее дифференцирование дает

$$[dp\omega_1^3]=0,\quad [dq\omega_2^4]=0. \tag{26γ′}$$

Между тем, составляя разность уравнений (26γ) и пользуясь соотношениями (19α, γ), (21ε), (25δ), получим, сравнивая коэффициенты при du, dv:

$$\begin{aligned}(p+q)U'&=2(n-n'),\\(p-q)V'&=2(n+n').\end{aligned} \tag{26δ}$$

Подставляя отсюда p и q в уравнения (26γ′), придем к одному и тому же уравнению:

$$(n-n')\left(\frac{1}{U'^2}\right)'=(n+n')\left(\frac{1}{V'^2}\right)'. \tag{27α}$$

Поскольку в левой части стоит функция одного переменного u, а в правой одного переменного v, они обе должны равняться одной и той же постоянной

$$(n-n')\left(\frac{1}{U'^2}\right)'=K,\quad (n+n')\left(\frac{1}{V'^2}\right)'=K,\quad K=\text{const}. \tag{27β}$$

Эти уравнения без труда интегрируются, что и доказывает теорему существования решения нашей системы.

133. Последовательность преобразований Калапсо из пяти расслояемых пар. Если $K\neq 0$, то $(n-n')(n+n')\neq 0$ и производные U', V' определяются из уравнений (27β) с двумя новыми постоянными C_1, C_2:

$$\frac{1}{U'^2}=\frac{K}{n-n'}u+C_1,\quad \frac{1}{V'^2}=\frac{K}{n+n'}v+C_2. \tag{28α}$$

Формулы (25β, δ) дадут нам α, β, α', β':

$$\alpha=-\beta'=\frac{V'-U'}{2},\quad \beta=-\alpha'=\frac{U'+V'}{2}. \tag{28β}$$

Тем самым все формы ω_i^k будут определены:

$$\begin{aligned}&\omega_3^1=\omega_1^3=du+dv, && \omega_4^2=\omega_2^4=du-dv,\\&\omega_2^1=\omega_1^2=U'\,du+V'\,dv, && \omega_4^3=\omega_3^4=-U'\,du+V'\,dv,\\&\omega_1^1=n(du+dv)+\frac{n+n'}{2}\frac{U'}{V'}du+\frac{n-n'}{2}\frac{V'}{U'}dv,\\&\omega_2^2=n'(du-dv)-\frac{n+n'}{2}\frac{U'}{V'}du-\frac{n-n'}{2}\frac{V'}{U'}dv,\\&\omega_3^3=-n(du+dv)+\frac{n+n'}{2}\frac{U'}{V'}du+\frac{n-n'}{2}\frac{V'}{U'}dv,\\&\omega_4^4=-n'(du-dv)-\frac{n+n'}{2}\frac{U'}{V'}du-\frac{n-n'}{2}\frac{V'}{U'}dv.\end{aligned} \tag{28γ}$$

Таким образом, произвол сопряженной четверки, которая в обе стороны преобразуется в сопряженную пару, определяется пятью произвольными постоянными n, n', C_1, C_2 и K.

Остается показать, что преобразованная пара будет сопряженной парой, но при $K\neq 0$ не будет сопряженной четверкой. Для этого рассмотрим вторую пару конгруэнций конфигурации [13], [24]. Меняя нумерацию вершин $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{A}_3$, $\boldsymbol{B}_3=\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{B}_4=\boldsymbol{A}_4$ и обозначая чертой $\overline{\omega}_i^k$ компоненты тетраэдра $\{\boldsymbol{B}_i\}$, получим таблицу:

$$\begin{aligned}&\overline{\omega}_3^1=\overline{\omega}_1^3=\omega_1^2=dU+dV, && \overline{\omega}_4^2=\overline{\omega}_2^4=\omega_3^4=-dU+dV,\\&\overline{\omega}_2^1=\overline{\omega}_1^2=\omega_1^3=\frac{dU}{U'}+\frac{dV}{V'}, && \overline{\omega}_3^4=\overline{\omega}_4^3=\omega_2^4=\frac{dU}{U'}-\frac{dV}{V'}.\end{aligned} \tag{29α}$$

Отсюда, в силу (19α),

$$\overline{\alpha}=-\overline{\beta}'=\frac{V'-U'}{2U'V'},\quad \overline{\beta}=-\overline{\alpha}'=\frac{U'+V'}{2U'V'}. \tag{29β}$$

Наконец,

$$\begin{aligned}\overline{\omega}_1^1-\overline{\omega}_3^3&=\omega_1^1-\omega_2^2=\left(\frac{n-n'}{U'}+\frac{n+n'}{V'}\right)(dU+dV)=2\overline{n}\,\overline{\omega}_1^3,\\\overline{\omega}_2^2-\overline{\omega}_4^4&=\omega_3^3-\omega_4^4=\left(\frac{n+n'}{V'}-\frac{n-n'}{U'}\right)(dU-dV)=2\overline{n}'\omega_2^4,\end{aligned}$$

откуда

$$2\overline{n}=\frac{n-n'}{U'}+\frac{n+n'}{V'},\quad 2\overline{n}'=\frac{n-n'}{U'}-\frac{n+n'}{V'}. \tag{29γ}$$

Очевидно, хотя бы одно из условий (23α, β) п. 130 для пары [13], [24] может удовлетвориться в силу (29γ) только при $K=0$.

По самому построению системы уравнений п. 130 последовательность преобразований Калапсо четверки (28γ) при $K\neq 0$ содержит пять расслояемых пар. Средняя пара T является сопряженной четверкой, ее первые преобразования — сопряженные пары и вторые преобразования — обыкновенные расслояемые пары.

134. Сопряженные четверки Пантази. Из п. 130 следует, что последовательность Калапсо, состоящую из расслояемых пар более 5, можно искать только среди решений системы (27β) при $K=0$.

Отбрасывая симметричные решения, достаточно рассмотреть три случая:

$$1)\ n+n'=0, \quad n-n'=0; \tag{30α}$$

$$2)\ n-n'=0, \quad n+n'\neq 0, \quad V'=\text{const}; \tag{30β}$$

$$3)\ n+n'\neq 0, \quad n-n'\neq 0, \quad U'=\text{const}, \quad V'=\text{const}. \tag{30γ}$$

Начнем с первого случая (30α). По формулам (28γ), которые сохраняют силу, все формы ω_i^i равны нулю. С другой стороны, сравнивая уравнения (19α) с формулами (1α, γ) п. 85, немедленно получим:

$$\lambda=\mu, \qquad m=1, \qquad \Delta m=0,$$

и уравнения (2α) п. 85 теперь дают

$$y'+\lambda y+\frac{1}{\lambda}(x'+\lambda x)=0,$$

$$\frac{1}{\lambda}(y'+\lambda y)+x'+\lambda x=0,$$

где $\lambda^2-1\neq 0$, ибо в противном случае придем к вырождению четверки. Таким образом получаем уравнения (10α) п. 88, которые характеризуют сопряженные четверки A Пантази.

Однако, как показывает сравнение (21β) п. 129, обращение в нуль величин n, n' приводит к вырождению преобразованных пар.

Согласно второй теореме п. 128 фокальные поверхности конгруэнции Розенфельда вырождаются в плоские линии, лежащие в полярно сопряженных относительно гиперквадрики Q_4^2 плоскостях. Преобразованные конгруэнции вырождаются в семейства касательных этих плоских линий. Точки пересечения этих касательных с гиперквадрикой Q_4^2 определяют в P_3 линейчатые поверхности. Поскольку касательные первой и второй фокальных линий полярно сопряжены относительно Q_4^2, образующие соответствующих линейчатых поверхностей пересекаются: каждая образующая, определяемая касательными первой фокальной линии, пересекает каждую образующую, определяемую касательными второй. Таким образом, все эти образующие принадлежат одной и той же поверхности 2-го порядка, составляя две системы ее образующих.

Нетрудно обнаружить, что эта поверхность 2-го порядка совпадает с фундаментальной квадрикой четверки.

Интересно отметить, что преобразование Калапсо четверки A, хотя и вырожденное, допускает не вырожденное продолжение. Луч S_1S_1' пересекает гиперквадрику Q_4^2 в точках

$$G_i=S_1+\rho_i S_1',$$

где, в силу $\{S_1S_1\}=2$, $\{S_1'S_1'\}=-8$, коэффициент $\rho_i=\pm\frac{1}{2}$. Поэтому

$$G_1=S_1+\frac{1}{2}S_1'=(A_1+A_3,\ A_2+A_4),$$

$$G_2=S_1-\frac{1}{2}S_1'=(A_1-A_3,\ A_2-A_4).$$

При этом, в силу (28γ), (30α), будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}
&d(A_1+A_3)=\\
&\quad=(\omega_1^1+\omega_1^3)(A_1+A_3)+U'(A_2-A_4)\,du+V'(A_2+A_4)\,dv,\\
&d(A_2+A_4)=\\
&\quad=(\omega_2^2+\omega_2^4)(A_2+A_4)-U'(A_1-A_3)\,du+V'(A_1+A_3)\,dv,\\
&d(A_1-A_3)=\\
&\quad=(\omega_1^1-\omega_1^3)(A_1-A_3)+U'(A_2+A_4)\,du+V'(A_2-A_4)\,dv,\\
&d(A_2-A_4)=\\
&\quad=(\omega_2^2-\omega_2^4)(A_2-A_4)+U'(A_1+A_3)\,du+V'(A_1-A_3)\,dv.
\end{aligned}\right\} \tag{31α}$$

Следовательно, точки

$$B_1=A_1+A_3, \quad B_2=A_2+A_4, \quad B_3=A_2-A_4, \quad B_4=A_1-A_3 \tag{31β}$$

— фокусы преобразованной (вырожденной) четверки. Конгруэнции диагоналей (B_1B_4), (B_2B_3), очевидно, совпадают со вспомогательными конгруэнциями исходной четверки (A_1A_3), (A_2A_4).

135. Сопряженные четверки B. Переходим к рассмотрению второго случая — сопряженных четверок (30β).

В силу $n-n'=0$ и (23β) п. 130, преобразование Калапсо обрывается в направлении $S_1\to S_2 \pmod{\theta_1}$:

$$V'=C, \qquad C=\text{const}.$$

Обращение константы C в нуль приводит к вырожденной четверке из дважды взятой конгруэнции R с линейчатыми фокальными поверхностями.

Если $C\neq 0$, то

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_3^1=\omega_1^3=du+dv, && \omega_4^2=\omega_2^4=du-dv,\\
&\omega_2^1=\omega_1^2=U'\,du+C\,dv, && \omega_4^3=\omega_3^4=-U'\,du+C\,dv,\\
&\omega_1^1=n(du+dv)+n\frac{U'}{C}\,du, && \omega_3^3=-n(du+dv)+n\frac{U'}{C}\,du,\\
&\omega_2^2=n(du-dv)-n\frac{U'}{C}\,du, && \omega_4^4=-n(du-dv)-n\frac{U'}{C}\,du,
\end{aligned}\right\} \tag{32α}$$

$$\alpha=-\beta'=\frac{C-U'}{2}, \quad \beta=-\alpha'=\frac{C+U'}{2}, \quad \lambda=\mu=\frac{C+U'}{C-U'}, \tag{32β}$$

$$m=1,$$

15 Зак. 1277. С. П. Фиников

и по формулам (1γ) п. 85 получаем:

$$\Delta m = 4n\,du, \quad \Delta\beta = \frac{U''\,du}{U'+C} + 2n\frac{C-U'}{C}\,du,$$
$$\Delta\beta' = \frac{U''\,du}{U'-C} + 2n\frac{C+U'}{C}\,du; \tag{32γ}$$

уравнения (2α) п. 85 дадут

$$x = y = \frac{1}{2}\frac{U''}{U'+C} + n\frac{C-U'}{C}, \quad x' = y' = \frac{1}{2}\frac{U''}{U'-C} + n\frac{C+U'}{C}. \tag{32δ}$$

Отсюда прямо следует, что уравнения (21), (22β) п. 93 удовлетворены и четверка (30β) совпадает с четверкой B п. 93.

Согласно общей теореме преобразование Калапсо в другую сторону $S_1 \to S_1' \to S_1''$ на втором шаге обрывается. Первое преобразование ($S_1 S_1'$) изображает в P_3 сопряженную пару, но нетрудно показать, что это будет тоже сопряженная четверка и того же типа.

Действительно, меняя нумерацию вершин тетраэдра

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_3, \quad B_3 = A_2, \quad B_4 = -A_4$$

и обозначая компоненты нового тетраэдра через $\tilde{\omega}_i^k$, получим таблицу:

$$\tilde{\omega}_3^1 = \tilde{\omega}_1^3 = dU + d(Cv), \qquad \tilde{\omega}_4^2 = \tilde{\omega}_2^4 = dU - d(Cv),$$
$$\tilde{\omega}_2^1 = \tilde{\omega}_1^2 = \frac{dU}{U'} + \frac{d(Cv)}{C}, \qquad \tilde{\omega}_4^3 = \tilde{\omega}_3^4 = -\frac{dU}{U'} + \frac{d(Cv)}{C},$$
$$\tilde{\omega}_1^1 = \frac{n}{C}\{dU + d(Cv)\} + n\frac{dU}{U'}, \quad \tilde{\omega}_3^3 = -\frac{n}{C}\{dU + d(Cv)\} + n\frac{dU}{U'}, \tag{32ε}$$
$$\tilde{\omega}_2^2 = \frac{n}{C}\{dU - d(Cv)\} - n\frac{dU}{U'}, \quad \tilde{\omega}_4^4 = -\frac{n}{C}\{dU - d(Cv)\} - n\frac{dU}{U'},$$
$$\tilde{\alpha} = -\tilde{\beta}' = \frac{1}{2C} - \frac{1}{2U'}, \quad \tilde{\beta} = -\tilde{\alpha}' = \frac{1}{2U'} + \frac{1}{2C}, \quad \tilde{m} = 1,$$

откуда опять

$$\tilde{x} = \tilde{y}, \quad \tilde{x}' = \tilde{y}', \quad \tilde{\lambda} = \tilde{\mu}.$$

Ввиду полной симметрии обеих пар одной конфигурации (T) преобразованная конфигурация (T) будет сопряженной парой и по одной паре конгруэнций и по другой, т. е. будет сопряженной четверкой.

Таким образом, вся последовательность преобразований Калапсо состоит из двух сопряженных четверок B. Произвол конфигурации — одна функция одного аргумента, именно: производная U' как функция переменного U.

136. Сопряженные четверки Чеха C_0. Мы обращаемся теперь к последнему случаю п. 134, определяемому уравнениями (30γ).

В этом случае преобразование не обрывается ни в одном, ни в другом направлениях, зато обе производные U' и V' постоянны:

$$U' = C_1, \quad V' = C_2. \tag{33α}$$

По формулам (28γ) п. 133 это приводит к замечательной системе компонент, где все коэффициенты при дифференциалах du, dv постоянны.

Обращаясь к системе формул (28β) п. 133, (1α, γ), (2α) п. 85, легко подсчитаем:

$$\alpha = -\beta' = \frac{C_2 - C_1}{2}, \quad \beta = -\alpha' = \frac{C_1 + C_2}{2}, \quad \lambda = \frac{C_2 + C_1}{C_2 - C_1}, \quad m = 1,$$
$$x = \frac{C_2 - C_1}{C_1 C_2}\left(n\frac{C_1 - C_2}{2} + n'\frac{C_1 + C_2}{2}\right),$$
$$x' = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}\left(n\frac{C_1 - C_2}{2} + n'\frac{C_1 + C_2}{2}\right), \tag{33β}$$
$$y = \frac{C_2 - C_1}{C_1 C_2}\left(n\frac{C_1 + C_2}{2} + n'\frac{C_1 - C_2}{2}\right),$$
$$y' = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}\left(n\frac{C_1 + C_2}{2} + n'\frac{C_1 - C_2}{2}\right).$$

Следовательно, условия (11α) п. 109 удовлетворены и четверка (30γ) является четверкой Чеха с проективно налагающимися фокальными поверхностями. Эти четверки Чеха одновременно являются сопряженными четверками (23α) п. 93.

По формулам (2γ) п. 85 получим при помощи (19γ) п. 129, (33β):

$$\Delta x = 2nx\omega_1^3, \quad \Delta y = 2n'y\omega_2^4,$$
$$\Delta y' = 2ny'\omega_1^3, \quad \Delta x' = 2n'x\omega_2^4.$$

Теперь уравнения (3α) п. 85 дадут для ξ, η, ζ соотношения:

$$\xi = \zeta, \quad \xi + \zeta = \lambda x(x + \lambda y - 2n),$$
$$\eta = -\zeta, \quad \eta - \zeta = y(x + \lambda y - 2n).$$

Однако по формулам (33β)

$$x + \lambda y - 2n = 0$$

и, следовательно,

$$\xi = \eta = \zeta = 0.$$

В п. 107, 108 мы получили эти четверки, отыскивая те четверки Чеха, которые допускают продолжение в конгруэнциях диагоналей. Теперь мы снова находим их как четверки, допускающие преобразование Калапсо. Их можно определить как сопряженные четверки с проективно эквивалентными фокальными поверхностями.

Ввиду полной симметрии этих четверок пара вспомогательных конгруэнций [13], [42] того же самого рода, что и основная пара [12], [34], т. е. преобразованная конфигурация (T), будет содержать две сопряженные пары. Следовательно, сопряженная четверка с проективно эквивалентными фокальными поверхностями преобразуется преобразованием Калапсо в сопряженную четверку. Согласно общим теоремам, такая последовательность Калапсо не может оборваться и будет состоять только из сопряженных четверок.

Мы разобрали все случаи преобразования сопряженной четверки в сопряженные пары и видели, что только четверки Чеха с проективно эквивалентными поверхностями допускают преобразование в сопряженные пары в обе стороны.

Следовательно, последовательность преобразований Калапсо, порождаемая четверками Чеха с проективно эквивалентными фокальными поверхностями, вся состоит из четверок этого рода.

ГЛАВА XIII

ПАРА T КОНГРУЭНЦИЙ

137. Пара T и пара θ. Рассмотрим две конгруэнции K, K', между лучами которых установлено взаимно однозначное соответствие так, что соответствующие лучи не пересекаются.

Каждая конгруэнция обладает каноническим тетраэдром 1-го порядка, построенным на фокусах и фокальных плоскостях. Возможно ли, чтобы для пары соответствующих лучей конгруэнций K и K' был один общий канонический тетраэдр 1-го порядка?

Мы сейчас увидим, что это может осуществиться двумя и только двумя способами. Поскольку соответствующие лучи конгруэнций не пересекаются и должны совпадать с ребрами тетраэдра, мы можем принять за первый луч ребро A_1A_2, за второй — A_3A_4 тетраэдра $\{A_i\}$ ($i = 1, 2, 3, 4$); при этом A_1 и A_2, A_3 и A_4 будут фокусами этих лучей, если $\{A_i\}$ является каноническим тетраэдром 1-го порядка. Поскольку фокальные плоскости совпадают с гранями канонического тетраэдра, для конгруэнции K они совпадают с гранями $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$, для K' — с гранями $A_3A_4A_1$ и $A_3A_4A_2$. Меняя в случае надобности нумерацию вершин A_1, A_2, мы можем считать, что грань $A_1A_2A_3$ касается фокальной поверхности (A_1) в точке A_1, а грань $A_1A_2A_4$ служит касательной плоскостью поверхности (A_2) в точке A_2.

Тогда для конгруэнции K' имеются две возможности:

1) грань $A_3A_4A_1$ касается поверхности (A_3) в точке A_3 и грань $A_3A_4A_2$ — поверхности (A_4) или

2) грань $A_3A_4A_1$ касается поверхности (A_4), а грань $A_3A_4A_2$ — поверхности (A_3).

В первом случае конгруэнции K, K' образуют пару T (п. 33), ибо ребро A_1A_3 принадлежит касательным плоскостям и поверхности (A_1) и поверхности (A_3) и, аналогично, A_2A_4 касается поверхностей (A_2) и (A_4).

Во втором случае пара K, K' называется парой θ Попова*).

*) Пары T вошли в геометрию в специальном случае расслояемых пар и подробно исследованы автором. Определение пар θ дал Попов в докладе на семинаре по классической дифференциальной геометрии Московского университета. Подробно исследовал их С. Е. Карапетян в кандидатской диссертации 1951 г. [1].

138. Теорема существования пары T. Отнесем пару T к ее каноническому тетраэдру. Мы будем иметь систему уравнений (10α) п. 33:

$$\omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^3 = 0, \quad \omega_3^2 = 0, \quad \omega_4^1 = 0, \tag{1}$$

которая показывает, что поверхность, описываемая каждой вершиной A_1, касается плоскости, определяемой двумя ребрами тетраэдра, выходящими из этой вершины. Дифференцируя внешним образом, получим:

$$[\omega_1^2\omega_2^4] + [\omega_1^3\omega_3^4] = 0, \quad [\omega_2^1\omega_1^3] + [\omega_2^4\omega_4^3] = 0, \tag{2α}$$

$$[\omega_3^1\omega_1^2] + [\omega_3^4\omega_4^2] = 0, \quad [\omega_4^2\omega_2^1] + [\omega_4^3\omega_3^1] = 0. \tag{2β}$$

Система замкнута относительно операции внешнего дифференцирования.

Характеристическая система содержит, кроме форм ω_1^3, ω_2^4, независимых на интегральном многообразии, и форм (1), равных нулю на всяком интегральном элементе, еще $q = 6$ форм:

$$\omega_1^2, \ \omega_2^1, \ \omega_3^4, \ \omega_4^3, \ \omega_3^1, \ \omega_4^2. \tag{3}$$

Система ковариантов неправильная, ибо квадратичные уравнения (2β) содержат в каждом произведении два множителя из числа форм (3).

Наиболее общее алгебраическое разрешение системы (2αβ) получается в двух видах:

1) Уравнения (2α) дают

$$\begin{aligned} \omega_3^4 &= \alpha\omega_1^3 - \beta\omega_2^4, \quad \omega_4^3 = -\beta'\omega_1^3 + \alpha'\omega_2^4, \\ \omega_1^2 &= \beta\omega_1^3 + \gamma\omega_2^4, \quad \omega_2^1 = \gamma'\omega_1^3 + \beta'\omega_2^4; \end{aligned} \tag{4α}$$

если положить

$$\omega_3^1 = a\omega_1^3 + b\omega_2^4, \quad \omega_4^2 = b'\omega_1^3 + c\omega_2^4, \tag{4β}$$

то уравнения (2β) приведут, как в п. 39, к двум конечным соотношениям:

$$\begin{aligned} a\gamma - (b - b')\beta + c\alpha &= 0, \\ a\alpha' + (b - b')\beta' + c\gamma' &= 0, \end{aligned} \tag{5α}$$

откуда, если ранг матрицы коэффициентов (5α) при a, $b - b'$, c равен 2, то

$$a = t(\beta\gamma' + \alpha\beta'), \quad b - b' = -t(\alpha\alpha' - \gamma\gamma'), \quad c = -t(\beta\alpha' + \gamma\beta') \tag{5β}$$

и интегральный элемент $\mathfrak{E}_2$ зависит от $N = 8$ параметров α, β, γ, α', β', γ', t и b'.

2) Если коэффициенты при a, $b - b'$, c в уравнениях (5α) пропорциональны, то

$$\alpha' = \lambda\gamma, \quad \beta' = -\lambda\beta, \quad \gamma' = \lambda\alpha, \tag{6α}$$

$$c = -\frac{a\gamma - (b - b')\beta}{\alpha}, \quad \alpha \neq 0, \tag{6β}$$

а число произвольных параметров $N = 7$ (α, β, γ, a, b, b', λ).

В первом случае полярная система для уравнений (2α, β) имеет вид

$$\begin{gathered} \omega_1^2 v - \omega_3^4 u = 0, \quad \omega_2^1 u - \omega_4^3 v = 0, \\ \omega_3^1(\beta u + \gamma v) - \omega_4^2(\alpha u - \beta v) - \omega_1^2(au + bv) + \omega_3^4(b'u + cv) = 0, \\ \omega_4^2(\gamma' u + \beta' v) - \omega_3^1(\alpha' v - \beta' u) - \omega_2^1(b'u + cv) + \omega_4^3(au + bv) = 0, \end{gathered} \tag{7}$$

где $\omega_1^3 = u$, $\omega_2^4 = v$ — значения этих форм на первом линейном элементе цепи; ранг полярной системы равен 4. Следовательно, $s_1 = 4$, $s_2 = q - s_1 = 2$ и $Q = s_1 + 2s_2 = 8 = N$. Система — в инволюции и определяет пары T с произволом двух функций двух аргументов.

139. Пары T из конгруэнций линейного комплекса. Во втором случае, как мы видели в п. 40, уравнения (6α) эквивалентны пфаффовым уравнениям

$$\omega_4^3 = \lambda\omega_1^2, \quad \omega_2^1 = \lambda\omega_3^4, \tag{6α'}$$

причем λ удовлетворяет уравнению (6γ) п. 40:

$$d\ln\lambda + \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_4^4 = 0, \tag{6γ}$$

внешний дифференциал которого обращается в тождество в силу (6α').

Система квадратичных уравнений (2 α, β) сводится к двум:

$$[\omega_1^2\omega_2^4] + [\omega_1^3\omega_3^4] = 0, \quad [\omega_3^1\omega_1^2] + [\omega_3^4\omega_4^2] = 0. \tag{6δ}$$

Характеристическая система, кроме форм ω_1^3, ω_2^4, независимых на интегральном многообразии, и форм (6α'), определяемых пфаффовыми уравнениями, содержит еще $q = 4$ формы:

$$\omega_1^2, \ \omega_3^4, \ \omega_3^1, \ \omega_4^2. \tag{8}$$

Полярная система для элемента $\omega_1^3 = u$, $\omega_2^4 = v$ состоит из первого и третьего уравнений (7) и имеет ранг 2. Следовательно, характеры системы $s_1 = 2$, $s_2 = q - s_1 = 2$. Произвол цепи интегральных элементов $Q = s_1 + 2s_2 = 6$, и наиболее общее алгебраическое разрешение системы (6δ) зависит от $N = 6$ параметров. Система — в инволюции и определяет пару T с двумя произвольными функциями двух аргументов.

Геометрическая характеристика этих пар T вытекает из доказанного в п. 41 предложения: две конгруэнции (A_1A_2) и (A_3A_4) принадлежат одному и тому же линейному комплексу тогда и только тогда, когда удовлетворено условие

$$\omega_1^2\omega_2^1 - \omega_3^4\omega_4^3 = 0. \tag{9}$$

Поскольку уравнения ($6\alpha'$) обращают (9) в тождество, второй случай пар T п. 138 приводит к парам T из конгруэнций одного линейного комплекса.

140. Пары T с обратным соответствием развертывающихся поверхностей. Из уравнений (1), ($6\alpha'$) непосредственно следуют сравнения:

$$\left.\begin{aligned} dA_1 &\equiv \omega_1^1 A_1 + \omega_1^3 A_3 \\ dA_4 &\equiv \omega_4^4 A_4 + \omega_4^2 A_2 \end{aligned}\right\} (\mathrm{mod}\ \omega_1^2), \qquad \left.\begin{aligned} dA_2 &\equiv \omega_2^2 A_2 + \omega_2^4 A_4 \\ dA_3 &\equiv \omega_3^3 A_3 + \omega_3^1 A_1 \end{aligned}\right\} (\mathrm{mod}\ \omega_3^4). \tag{10}$$

Следовательно, луч A_1A_3 касается на поверхности (A_1) линии $\omega_1^2 = 0$, на поверхности (A_3) — линии $\omega_3^4 = 0$, луч A_2A_4 касается на поверхности (A_2) линии $\omega_3^4 = 0$, на поверхности (A_4) — линии $\omega_1^2 = 0$. Это значит, что линейчатые поверхности $\omega_1^2 = 0$ или $\omega_3^4 = 0$ конгруэнций (A_1A_3) и (A_2A_4) развертывающиеся. Таким образом, вторая пара конгруэнций, принадлежащая конфигурации (T) п. 139, обладает соответствием развертывающихся поверхностей, и соответствующие ребра возврата этих поверхностей лежат на поверхностях, описанных противоположными вершинами косого четырехугольника $A_1A_2A_4A_3$. Отсюда название: *обратное соответствие* развертывающихся поверхностей.

Таким образом, если первая пара конфигурации (T) п. 139 образована конгруэнциями одного линейного комплекса, то *вторая пара характеризуется обратным соответствием развертывающихся поверхностей.*

141. Периодическая с периодом 4 последовательность Лапласа. Мы начнем с обращения предложения п. 140.

Обратное соответствие развертывающихся поверхностей конгруэнций (A_1A_3), (A_2A_4) конфигурации (T) приводит к сравнениям (10); но, для того чтобы имели место эти сравнения, необходимо и достаточно линейных зависимостей форм ω_1^2 и ω_4^3, ω_2^1 и ω_3^4:

$$\omega_4^3 = \lambda\omega_1^2, \quad \omega_2^1 = \lambda'\omega_3^4. \tag{11}$$

Внося эти значения в правый столбец уравнений (2α, β), получим:

$$\lambda\,[\omega_1^2\omega_2^4] - \lambda'\,[\omega_3^4\omega_1^3] = 0, \quad \lambda\,[\omega_3^1\omega_1^2] - \lambda'\,[\omega_4^2\omega_3^4] = 0. \tag{a}$$

Отсюда, сравнивая с левым столбцом уравнений (2α, β), будем иметь или $\lambda' = \lambda$, и мы возвращаемся к парам T из конгруэнций одного линейного комплекса, или $\lambda' \neq \lambda$, и тогда уравнение (9) п. 139 не будет удовлетворено; конгруэнции (A_1A_2), (A_3A_4) не принадлежат одному линейному комплексу, а система (a) имеет следствием

$$[\omega_3^4\omega_1^3] = 0, \quad [\omega_1^2\omega_2^4] = 0, \quad [\omega_3^1\omega_1^2] = 0, \quad [\omega_4^2\omega_3^4] = 0, \tag{12α}$$

откуда

$$[\omega_3^1\omega_2^4] = 0, \quad [\omega_4^2\omega_1^3] = 0. \tag{12β}$$

Теперь к сравнениям (10) присоединяются сравнения:

$$\left.\begin{aligned} dA_1 &\equiv \omega_1^1 A_1 + \omega_1^2 A_2, \\ dA_4 &\equiv \omega_4^4 A_4 + \omega_4^3 A_3 \end{aligned}\right\} (\mathrm{mod}\ \omega_1^3), \qquad \left.\begin{aligned} dA_2 &\equiv \omega_2^2 A_2 + \omega_2^1 A_1, \\ dA_3 &\equiv \omega_3^3 A_3 + \omega_3^4 A_4 \end{aligned}\right\} (\mathrm{mod}\ \omega_2^4). \tag{10$'$}$$

Первая пара (A_1A_2), (A_3A_4) тоже обладает обратным соответствием развертывающихся поверхностей. На каждой из четырех конгруэнций конфигурации (T) развертывающиеся поверхности определяются уравнением $\omega_1^3\omega_2^4 = 0$, и, следовательно, на каждой из четырех фокальных поверхностей (A_i) лучи конгруэнций огибают сеть $\omega_1^3\omega_2^4 = 0$. Так как эта сеть фокальная, то на каждой поверхности (A_i) она сопряжена. Каждая конгруэнция является преобразованием Лапласа двух смежных, а вся конфигурация (T) образует периодическую с периодом 4 последовательность Лапласа.

Итак, равенства (11) при $\lambda \neq \lambda'$ характеризуют периодическую с периодом 4 последовательность Лапласа. Конфигурация определяется шестью квадратичными уравнениями: четырьмя (12α) и двумя уравнениями левого столбца (2α, β). Система уравнений правильная, и следовательно, такая последовательность Лапласа существует с произволом шести функций одного аргумента.

142. Пара T из дважды взятой конгруэнции W с линейчатыми фокальными поверхностями. Займемся теперь обращением результатов п. 139. Мы пришли тогда к уравнению (9), как необходимому и достаточному условию принадлежности конгруэнций (A_1A_2), (A_3A_4) одному линейному комплексу. Это уравнение удовлетворяется значениями ($6\alpha'$), но из уравнения (9) не следует обязательно ($6\alpha'$). Действительно, рассмотрим линию $\omega_1^2 = 0$, тогда из уравнения (9) будет следовать

$$\omega_3^4\omega_4^3 = 0.$$

Это равенство удовлетворяется двумя способами: 1) или $\omega_4^3 = 0$, и это приведет к равенствам ($6\alpha'$), или 2) $\omega_3^4 = 0$. Поскольку обращение в нуль формы ω_1^2 влечет за собой обращение в нуль ω_3^4, эти формы линейно зависимы, и мы получаем:

$$\omega_3^4 = \mu\omega_1^2, \quad \omega_2^1 = \mu\omega_4^1; \tag{13}$$

второе равенство получается подстановкой $\omega_3^4 = \mu\omega_1^2$ в уравнение (9).

Подставляя эти значения в уравнения (2α), мы приходим к уравнению (7α) п. 42 и снова получаем систему (7β, γ, ε) п. 42, но уравнение (7δ) п. 42 теперь не имеет места.

Характеристическая система, кроме форм ω_1^3, ω_2^4, независимых на интегральном многообразии, и форм (7β) п. 42, определяемых пфаффовыми уравнениями, содержит еще $q=4$ формы:

$$\omega_1^2,\ \omega_3^1-\mu\omega_4^2,\ \Delta\lambda,\ \Delta\mu.$$

Система квадратичных уравнений (7γ, ε) п. 42 правильная. Характеры системы $s_1=4$, $s_2=0$. Решение существует с произволом $s_1=4$ функций одного аргумента.

Из сравнений (7η) п. 42, которые теперь тоже имеют место, следует, что конгруэнции (A_1A_3), (A_2A_4) вырождаются в линейчатые поверхности, которые совпадают с фокальными поверхностями (A_1) и (A_3), (A_2) и (A_4) так, что лучи (A_1A_2), (A_3A_4) принадлежат одной и той же конгруэнции W с линейчатыми фокальными поверхностями.

Различие пары T (7β, γ, ε) п. 42 от расслояемой пары (7β, γ, δ, ε) п. 42 состоит в том, что с отбрасыванием квадратичного уравнения (7δ) п. 42 число характеристических форм уменьшается на одну, именно: формы ω_3^1, ω_4^2 входят теперь только в одной комбинации $\omega_3^1-\mu\omega_4^2$. Поскольку формы ω_3^1, ω_4^2 — единственные линейно независимые главные формы луча (A_3A_4), замена одной из них будет менять положение прямой A_3A_4, а следовательно, и пару (A_1A_2), (A_3A_4). Если эту форму, например ω_4^2, включить в характеристическую систему, то число характеристических переменных увеличится на одно переменное, которое можно взять в виде произвольной функции двух аргументов. Этот произвол следует отнести к выбору луча A_3A_4 нашей конгруэнции W, касающегося фокальных линейчатых поверхностей в точках тех же образующих A_1A_3, A_2A_4.

Нетрудно заметить, что при любом выборе конгруэнции W с линейчатыми фокальными поверхностями и соответствием прямолинейных образующих A_1A_3, A_2A_4 мы можем произвольно поставить в соответствие пары лучей A_1A_2, A_3A_4 этой конгруэнции, пересекающих выбранные образующие. Мы получим пару T рассматриваемого вида, ибо касательная плоскость в любой точке A_1 содержит, очевидно, луч A_1A_2, касательный к фокальной поверхности, и ее прямолинейную образующую A_1A_3. То же самое получим для каждой точки A_3, A_4, A_2.

143. Построение пары T из двух конгруэнций линейного комплекса. Теорема. *Произвольная конгруэнция линейного комплекса образует пару T, вообще говоря, с любой конгруэнцией того же комплекса.*

Рассмотрим произвольную конгруэнцию $K=(A_1A_2)$ линейного комплекса.

Если A_1, A_2 — фокусы луча $r=A_1A_2$ и A_1A_2A, A_1A_2B — фокальные плоскости, то плоскость A_1A_2A, касательная в точке A_2 к фокальной поверхности, сопряжена относительно нулевой системы H линейного комплекса точке A_1, ибо заведомо содержит два луча конгруэнции: луч A_1A_2 и инфинитезимально близкую образующую той развертывающейся поверхности конгруэнции K, ребро возврата

которой описывается точкой A_1. Аналогично плоскость A_1A_2B сопряжена точке A_2.

Пусть плоскости A_1A_2A и A_1A_2B пересекают фокальные поверхности конгруэнции K' того же линейного комплекса соответственно по кривым C_1' и C_2'. Лучи конгруэнции K', пересекающие линии C_1', C_2', образуют линейчатые поверхности L_1', L_2'. Допустим, что эти линейчатые поверхности имеют общий луч $r'=A_3A_4$, где A_3 — точка пересечения его с плоскостью A_1A_2B и A_4 — с плоскостью A_1A_2A. Эти точки суть фокусы луча, ибо они принадлежат линиям C_2' и C_1', лежащим на его фокальных поверхностях.

Фокальные плоскости луча A_3A_4 определяются как плоскости, сопряженные фокусам в нулевой системе H. Точка A_4 полярно сопряжена точке A_1, ибо лежит в ее полярной плоскости A_1A_2A. Поэтому полярная плоскость точки A_4 пройдет через точку A_1 и, кроме того, через луч комплекса A_3A_4. Аналогично полярная плоскость точки A_3 совпадет с плоскостью $A_2A_3A_4$. Эти плоскости касаются фокальных поверхностей конгруэнции K': плоскость $A_1A_3A_4$ в точке A_3, плоскость $A_2A_3A_4$ в точке A_4. Следовательно, K и K' образуют пару T.

144. Построение пары T с обратным соответствием развертывающихся поверхностей. Если пара конгруэнций конфигурации (T) принадлежит одному линейному комплексу, то вторая пара конфигурации обратно соответствует развертывающимися поверхностями (п. 140). Эта пара конгруэнций, очевидно, будет полярно сопряжена относительно нулевой системы H линейного комплекса. Действительно, если (A_1A_2) и (A_3A_4) принадлежат одному линейному комплексу, то плоскости $A_1A_2A_4$ и $A_3A_2A_4$ полярно сопряжены точкам A_1 и A_3. Следовательно, прямая A_1A_3 (место полюсов) и прямая A_2A_4, получаемая пересечением полярных плоскостей $A_1A_2A_4$, $A_3A_2A_4$, полярно сопряжены.

Теорема. *К произвольной* (не параболической) *конгруэнции K можно присоединить конгруэнцию K' с произволом пяти параметров так, что конгруэнции K, K' образуют пару T с обратным соответствием развертывающихся поверхностей.*

Пусть дана конгруэнция $K=(A_1A_3)$, где точки A_1, A_3 — фокусы. Зададимся произвольным линейным комплексом, не содержащим конгруэнции K (пять произвольных параметров — отношения шести коэффициентов в уравнении комплекса при координатах произвольного луча комплекса). Плоскости $A_1A_2A_4$, $A_3A_2A_4$, полярно сопряженные точкам A_1 и A_3 относительно нулевой системы H линейного комплекса, своим пересечением с касательными плоскостями к фокальным поверхностям (A_1), (A_3) определяют те лучи A_1A_2, A_3A_4 линейного комплекса, которые касаются поверхностей (A_1), (A_3). Конгруэнции (A_1A_2), (A_3A_4) принадлежат комплексу. Точка A_1 — первый фокус луча A_1A_2, второй фокус совпадает с полюсом касательной плоскости (A_1), т. е. плоскости $A_1A_2A_3$. Он должен лежать в полярной плоскости точки A_3, т. е. в плоскости $A_2A_3A_4$, которая пересекает луч A_1A_2 в точке A_2. Аналогично второй фокус прямой A_3A_4 лежит в точке A_4. Касательными плоскостями поверхностей (A_2), (A_4) будут полярные плоскости точек A_1 и A_3, т. е. плоскости $A_1A_2A_4$, $A_2A_3A_4$.

Отсюда прямо следует, что косой четырехугольник $A_1A_2A_4A_3$ описывает пару T, а поскольку конгруэнции (A_1A_2), (A_3A_4) принадлежат линейному комплексу, развертывающиеся поверхности конгруэнций (A_1A_3) и (A_2A_4) соответствуют обратно.

145. Конфигурация (T) с двумя парами конгруэнций в линейных комплексах. Рассуждения пп. 143, 144 можно распространить на конфигурацию (T), у которой не только первая пара (A_1A_2), (A_3A_4), но и вторая (A_1A_3), (A_2A_4) принадлежат каждая своему линейному комплексу $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}'$. Поскольку вспомогательные прямые A_1A_3, A_2A_4 первой пары полярно сопряжены относительно нулевой системы $\mathfrak{a}$, то оба комплекса $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}'$ — в инволюции (п. 8), т. е. точки $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, изображающие эти комплексы в P_5, полярно сопряжены относительно фундаментальной гиперквадрики Q_4^2:

$$\{\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\} = 0.$$

Зададимся произвольной поверхностью (A_1) и двумя линейными комплексами в инволюции $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}'$ так, чтобы асимптотические линии (A_1) не принадлежали комплексам $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$. Произвольная точка A_1 поверхности определит две полярные плоскости $A_1A_2A_4$ и $A_1A_2A_3$ относительно нулевых систем $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}'$ и касательную плоскость $A_1A_2A_3$ поверхности (A_1). Касательные A_1A_2, A_1A_3 принадлежат соответственно комплексам $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}'$.

Прямая p, полярно сопряженная касательной A_1A_2 относительно $\mathfrak{a}'$, лежит в плоскости $A_1A_3A_4$, сопряженной полюсу A_1 относительно $\mathfrak{a}'$. Аналогично прямая q, полярно сопряженная касательной A_1A_3 относительно $\mathfrak{a}$, лежит в плоскости $A_1A_2A_4$.

Прямые p и q пересекаются. Действительно, прямые p и A_1A_2 полярно сопряжены относительно $\mathfrak{a}'$. Комплекс $\mathfrak{a}$ содержит прямую A_1A_2, он в инволюции с комплексом $\mathfrak{a}'$, значит, он содержит и прямую p (теорема конца п. 8); аналогично прямая q принадлежит комплексу $\mathfrak{a}'$. С другой стороны, прямая p принадлежит комплексу $\mathfrak{a}$; она пересекает касательную A_1A_3, ибо лежит с ней в одной плоскости $A_1A_3A_4$; следовательно, должна пересекать и прямую q, которая полярно сопряжена с A_1A_3 относительно $\mathfrak{a}$.

Выбирая подходящим образом точки A_2, A_3, A_4, получим:

$$p \equiv A_3A_4, \quad q \equiv A_2A_4.$$

Косой четырехугольник $A_1A_2A_4A_3$ описывает конфигурацию (T). Действительно, вторым фокусом луча A_1A_2 будет полюс касательной плоскости $A_1A_2A_3$ относительно $\mathfrak{a}$; но в силу сопряженности A_2A_4 и A_1A_3 относительно $\mathfrak{a}$ полярные плоскости всех точек

A_2A_4 проходят через A_1A_3. Значит, точка A_2 имеет полярной плоскостью $A_2A_1A_3$ и является вторым фокусом прямой A_1A_2.

Касательная плоскость поверхности (A_2) в точке A_2 совпадает с полярной плоскостью A_1, а это, как мы видели, есть плоскость $A_1A_2A_4$. Следовательно, луч A_2A_4 касается поверхности (A_2) и т. д. Рассматривая по очереди точки A_1, A_2, A_4, A_3, мы найдем, что каждая из них описывает поверхность, касающуюся прилегающих сторон четырехугольника $A_1A_2A_4A_3$, который тем самым описывает конфигурацию (T).

Из этих рассуждений следует, что произвол таких конфигураций определяется одной функцией от двух аргументов.

ГЛАВА XIV

ПАРЫ θ ПОПОВА

146. Теорема существования. Пара T описывается косым четырехугольником, у которого каждая сторона касается поверхностей, описанных ее вершинами.

Таким образом, основная пара [12], [34] и пара вспомогательных конгруэнций [13], [24] участвуют в построении равноправно. Можно говорить о конфигурации (T), составленной из двух пар T конгруэнций. Пара конгруэнций, описанных диагоналями четырехугольника, стоит совершенно особняком.

В паре θ Попова (п. 137) особняком стоит основная пара, имеющая фокусы в вершинах тетраэдра; зато остальные четыре конгруэнции вполне равноправны. У каждой из вспомогательных конгруэнций один фокус лежит в вершине вспомогательного четырехугольника $A_1A_3A_2A_4$, а в другой вершине луч пересекает фокальную поверхность основной пары так, что касательные плоскости, если на первом месте писать точку касания, будут $A_1A_3A_2$, $A_3A_2A_4$, $A_2A_4A_1$, $A_4A_1A_3$. Отсюда основная система уравнений

$$\omega_1^4=0, \quad \omega_3^1=0, \quad \omega_2^3=0, \quad \omega_4^2=0. \tag{1}$$

К ней надо прибавить внешние дифференциалы:

$$\begin{aligned} &[\omega_1^2\omega_2^4]+[\omega_1^3\omega_3^4]=0, \quad [\omega_3^2\omega_2^1]+[\omega_3^4\omega_4^1]=0, \\ &[\omega_2^1\omega_1^3]+[\omega_2^4\omega_4^3]=0, \quad [\omega_4^1\omega_1^2]+[\omega_4^3\omega_3^2]=0. \end{aligned} \tag{2α}$$

Характеристическая система, кроме форм (1) и форм ω_1^3, ω_2^4, независимых на интегральном многообразии, содержит $q=6$ форм:

$$\omega_1^2, \ \omega_2^1, \ \omega_3^4, \ \omega_4^3, \ \omega_3^2, \ \omega_4^1. \tag{2β}$$

Система квадратичных уравнений неправильная.

Развертывая по лемме Картана уравнения (2α) левого столбца и дополняя произвольным разложением форм ω_3^2, ω_4^1, получим:

$$\begin{aligned} &\omega_3^4=\alpha\omega_1^3-\beta\omega_2^4, \quad \omega_4^3=-\beta'\omega_1^3+\alpha'\omega_2^4, \\ &\omega_1^2=\beta\omega_1^3+\gamma\omega_2^4, \quad \omega_2^1=\gamma'\omega_1^3+\beta'\omega_2^4, \\ &\omega_3^2=a\omega_1^3+b\omega_2^4, \quad \omega_4^1=b'\omega_1^3+c\omega_2^4. \end{aligned} \tag{3α}$$

Уравнения (2α) правого столбца дадут два конечных уравнения:

$$\begin{aligned} &a\beta'-b\gamma'+b'\beta+c\alpha=0, \\ &a\alpha'+b\beta'-b'\gamma+c\beta=0. \end{aligned} \tag{3β}$$

Если ранг этой системы относительно неизвестных a, b, b', c равен 2, то наиболее общий интегральный элемент $\mathfrak{E}_2$ зависит от $N=8$ произвольных параметров, например b, b', α, β, γ, α', β', γ'.

Полярная система элемента $\omega_1^3=u$, $\omega_2^4=v$ для уравнений (2α)

$$\omega_1^2v-\omega_3^4u=0, \quad \omega_2^1u-\omega_4^3v=0,$$

$$\begin{aligned} &\omega_3^2(\gamma'u+\beta'v)-\omega_4^1(\alpha u-\beta v)-\omega_2^1(au+bv)+\omega_3^4(b'u+cv)=0, \\ &\omega_3^2(\alpha'v-\beta'u)-\omega_4^1(\beta u+\gamma v)+\omega_1^2(b'u+cv)-\omega_4^3(au+bv)=0. \end{aligned} \tag{3γ}$$

Ранг системы — 4, если

$$(\beta\gamma'+\alpha\beta')u^2+(\gamma\gamma'-\alpha\alpha')uv+(\gamma\beta'+\alpha'\beta)v^2\neq 0. \tag{3δ}$$

Характеры системы $s_1=4$, $s_2=2$, $Q=s_1+2s_2=8=N$. Система — в инволюции и определяет пары θ с произволом двух функций от двух аргументов.

147. Особое решение. Ранг системы (3β) будет равен 1, если

$$\frac{\beta'}{\alpha'}=-\frac{\gamma'}{\beta'}=-\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha}{\beta}. \tag{4α}$$

Обозначая общую величину этих отношений буквой λ, можно положить

$$\alpha=\lambda\beta, \quad \gamma=-\frac{1}{\lambda}\beta, \quad \alpha'=\frac{1}{\lambda}\beta', \quad \gamma'=-\lambda\beta', \tag{4α'}$$

откуда, в силу (3α), следует

$$\begin{aligned} &\omega_3^4=\beta(\lambda\omega_1^3-\omega_2^4), \quad \omega_4^3=-\frac{\beta'}{\lambda}(\lambda\omega_1^3-\omega_2^4), \\ &\omega_1^2=\frac{\beta}{\lambda}(\lambda\omega_1^3-\omega_2^4), \quad \omega_2^1=-\beta'(\lambda\omega_1^3-\omega_2^4), \end{aligned} \tag{5}$$

или

$$\omega_3^4=\lambda\omega_1^2, \quad \omega_4^3=\frac{1}{\lambda}\omega_2^1, \quad \omega_3^4=\mu\omega_2^1; \quad \mu=-\frac{\beta}{\beta'}. \tag{5$'$}$$

Уравнения (2α), в силу ($5'$), сведутся только к двум независимым:

$$[\omega_1^2, \ \lambda\omega_1^3-\omega_2^4]=0, \quad [\omega_3^2-\mu\omega_4^1, \ \lambda\omega_1^3-\omega_2^4]=0. \tag{6α}$$

Внешнее дифференцирование уравнений ($5'$) добавит еще три:

$$\begin{aligned} &\lambda[\Delta\lambda\omega_1^2]-[\omega_3^2, \ \lambda\omega_1^3+\omega_2^4]=0, \\ &[\Delta\mu\omega_1^2]+[\omega_3^2+\mu\omega_4^1, \ \omega_1^3]=0, \\ &[\omega_3^2+\mu\omega_4^1, \ \lambda\omega_1^3+\omega_2^4]=0, \end{aligned} \tag{6β}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= d\ln\lambda + \omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 + \omega_4^4, \\ \Delta\mu &= d\ln\mu - \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 + \omega_4^4. \end{aligned} \tag{6γ}$$

Система уравнений (1), (5′), (6α, β) замкнута относительно операции внешнего дифференцирования. Характеристическая система, кроме форм (1), левых частей уравнений (5′) и форм ω_1^3, ω_2^4, содержит еще $q=5$ форм:

$$\omega_1^2,\ \omega_3^2,\ \omega_4^1,\ \Delta\lambda,\ \Delta\mu.$$

Наиболее общий интегральный элемент $\mathfrak{E}_2$ определяется, кроме (1), (5′), еще уравнениями:

$$\omega_1^2 = \frac{\beta}{\lambda}(\lambda\omega_1^3 - \omega_2^4),$$

$$\omega_3^2 + \mu\omega_4^1 = 2\eta(\lambda\omega_1^3 + \omega_2^4), \quad \omega_3^2 - \mu\omega_4^1 = 2\xi(\lambda\omega_1^3 - \omega_2^4),$$

$$\Delta\lambda = \lambda_1(\lambda\omega_1^3 - \omega_2^4) - \frac{\xi}{\beta}(\lambda\omega_1^3 + \omega_2^4),$$

$$\Delta\mu = \mu_1(\lambda\omega_1^3 - \omega_2^4) - \frac{2\lambda\eta}{\beta}\omega_1^3$$

с $N=5$ произвольными постоянными: λ_1, μ_1, ξ, η и β. Характеры системы $s_1=5$, $s_2=0$.

Признак Картана удовлетворен, система — в инволюции и определяет особые пары θ с пятью произвольными функциями одного аргумента.

148. Пара θ из конгруэнций W со вспомогательными конгруэнциями из касательных к асимптотическим одного семейства на каждой фокальной поверхности основной пары. Чтобы выяснить геометрические свойства полученного решения, можно отметить, что, в силу уравнений (1), имеют место сравнения:

$$\begin{aligned} dA_1 &\equiv \omega_1^1 A_1 + \omega_1^3 A_3 \pmod{\omega_1^2}, \quad & dA_3 &\equiv \omega_3^3 A_3 + \omega_3^2 A_2 \pmod{\omega_3^4}, \\ dA_2 &\equiv \omega_2^2 A_2 + \omega_2^4 A_4 \pmod{\omega_2^1}, \quad & dA_4 &\equiv \omega_4^4 A_4 + \omega_4^1 A_1 \pmod{\omega_4^3}, \end{aligned} \tag{7α}$$

которые вместе с уравнениями (5′) показывают, что каждая из четырех вспомогательных конгруэнций цикла A_1A_3, A_3A_2, A_2A_4, A_4A_1 огибает на фокальных поверхностях основной пары (A_1), (A_3), (A_2), (A_4) соответствующие линии, определяемые уравнением

$$\omega_1^2 = 0. \tag{7β}$$

Поскольку каждое из уравнений (1) определяет одну из фокальных поверхностей (A_i), асимптотические линии фокальных поверх-

ностей (ср. замечания в п. 34; уравнения (11β, γ) и (b)) определяются уравнениями:

$$\begin{aligned} &(A_1) \quad \omega_1^2\omega_2^4 + \omega_1^3\omega_3^4 = 0, \\ &(A_3) \quad \omega_3^2\omega_2^1 + \omega_3^4\omega_4^1 = 0, \\ &(A_2) \quad \omega_2^1\omega_1^3 + \omega_2^4\omega_4^3 = 0, \\ &(A_4) \quad \omega_4^1\omega_1^2 + \omega_4^3\omega_3^2 = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Нетрудно заметить, что, в силу уравнений (5′), равенство $\omega_1^2=0$ удовлетворяет всем уравнениям (8).

Следовательно, ***вспомогательные конгруэнции являются параболическими, описанными касательными к асимптотическим* (7β) *фокальных поверхностей основной пары.***

Поскольку на паре фокальных поверхностей каждой из конгруэнций основной пары (A_1A_2), (A_3A_4) одно семейство асимптотических соответствует, то, в силу наличия общей сопряженной сети (фокальной), соответствует и другое семейство асимптотических и *обе основные конгруэнции суть конгруэнции W.*

Таким образом, особое решение пары θ возвращает нас к параболическим четверкам, рассмотренным в пп. 72—74 гл. VII.

149. Фокусы вспомогательных конгруэнций. Мы возвращаемся к общей паре θ и будем определять вторые («дополнительные») фокусы вспомогательных конгруэнций (четырех конгруэнций цикла), которые по условию не совпадают с вершинами тетраэдра $\{A_i\}$.

Если

$$B_1 = A_1 + \rho A_3$$

есть второй фокус луча A_1A_3 и $\theta=0$ — развертывающаяся поверхность с ребром возврата в этом фокусе, то должно иметь место сравнение

$$(dB_1A_1A_3) \equiv 0 \pmod{\theta},$$

или

$$((\omega_1^2 + \rho\omega_3^2)A_2 + \rho\omega_3^4 A_4,\ \ A_1,\ A_3) \equiv 0 \pmod{\theta},$$

или

$$[\omega_1^2 + \rho\omega_3^2,\ \theta] = 0, \quad \rho[\omega_3^4\theta] = 0.$$

Отсюда или

1) $\rho = 0, \quad \theta = \omega_1^2,$

т. е. фокус лежит в вершине A_1, а развертывающаяся поверхность $\omega_1^2=0$, или

2) $\theta = \omega_3^4, \quad [\omega_1^2 + \rho\omega_3^2,\ \omega_3^4] = 0,$

т. е. развертывающаяся поверхность определяется уравнением $\omega_3^4=0$, а координата фокуса ρ определяется уравнением

$$[\omega_1^2\omega_3^4]+\rho\,[\omega_3^2\omega_3^4]=0,$$

или с помощью формул (3α)

$$\rho=-\frac{\alpha\gamma+\beta^2}{a\beta+b\alpha}.$$

Аналогично подсчитываются три других дополнительных фокуса. Получаем таблицу:

Конгруэнция	Ее фокусы	Развертывающиеся поверхности	
[13]	$A_1,\ B_1=(a\beta+b\alpha)A_1-(\alpha\gamma+\beta^2)A_3$	$\omega_1^2=0,\quad \omega_3^4=0$	
[32]	$A_3,\ B_3=\gamma' A_3+(\alpha\beta'+\beta\gamma')A_2$	$\omega_4^3=0,\quad \omega_2^1=0$	(9)
[24]	$A_2,\ B_2=(b'\alpha'+c\beta')A_2-(\alpha'\gamma'+\beta'^2)A_4$	$\omega_2^1=0,\quad \omega_4^3=0$	
[41]	$A_4,\ B_4=\gamma A_4+(\beta\alpha'+\gamma\beta')A_1$	$\omega_4^3=0,\quad \omega_1^2=0$	

Мы видим, что *вторая развертывающаяся поверхность каждой конгруэнции соответствует первой развертывающейся поверхности последующей конгруэнции цикла.*

Отсюда прямо следует, что в случае параболических конгруэнций цикла развертывающиеся поверхности соответствуют на всех конгруэнциях.

150. Присоединенные пары T. Дополнительные фокусы B_3 и B_4 будут служить фокусами конгруэнции (B_3B_4), и четверка конгруэнций (A_3A_4), (B_3B_4), (A_3B_3), (A_4B_4) образует конфигурацию (T), если для всех перемещений

$$(dB_3A_2A_3B_4)=0,\quad (dB_4A_1A_4B_3)=0$$

или

$$\begin{vmatrix} (\alpha\beta'+\beta\gamma')\,\omega_2^1 & \beta\alpha'+\gamma\beta' \\ \gamma'\omega_3^4+(\alpha\beta'+\beta\gamma')\,\omega_2^4 & \gamma \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} (\beta\alpha'+\gamma\beta')\,\omega_1^2 & \alpha\beta'+\beta\gamma' \\ \gamma\omega_4^3+(\beta\alpha'+\gamma\beta')\,\omega_1^3 & \gamma' \end{vmatrix}=0,$$

или, поскольку, в силу (3α),

$$\gamma'\omega_3^4+(\alpha\beta'+\beta\gamma')\,\omega_2^4=\alpha\omega_2^1,\quad \gamma\omega_4^3+(\beta\alpha'+\gamma\beta')\,\omega_1^3=\alpha'\omega_1^2,$$

конгруэнция (B_3B_4) имеет фокусами точки B_3 и B_4, если

$$\beta(\alpha\alpha'-\gamma\gamma')\,\omega_2^1=0,\quad \beta'(\alpha\alpha'-\gamma\gamma')\,\omega_1^2=0.$$

Поскольку обращение в нуль форм ω_1^2 или ω_2^1 приводит к вырождению конгруэнций, две конгруэнции цикла (A_3A_2) и (A_4A_1) образуют пару T в двух и только двух случаях:

1) если

$$\alpha\alpha'-\gamma\gamma'=0, \tag{10α}$$

т. е. если первая конгруэнция пары θ, именно (A_1A_2), есть конгруэнция W, или

2) если

$$\beta=0,\quad \beta'=0, \tag{10β}$$

т. е. если конгруэнция (A_1A_2) и прилегающие конгруэнции цикла (A_1A_3) и (A_2A_4) образуют три звена одной последовательности Лапласа.

При этом конгруэнция (B_3B_4) одновременно образует пару θ с конгруэнцией (A_1A_2). Действительно, точка B_3 лежит на прямой A_2A_3, следовательно, в касательной плоскости $A_1A_2A_3$ поверхности (A_1), а точка A_1 лежит на прямой B_4A_4, через которую проходит касательная плоскость поверхности (B_4). Аналогично, точка B_4 лежит в касательной плоскости поверхности (A_2), а точка A_2 — в касательной плоскости поверхности (B_3).

Имеем теорему:

Если первая конгруэнция пары θ есть конгруэнция W или вместе со своими вспомогательными принадлежит одной последовательности Лапласа, то дополнительные фокусы вспомогательных конгруэнций второй конгруэнции пары определяют новую конгруэнцию, которая образует пару T со второй конгруэнцией исходной пары и пару θ с первой.

151. Пара θ, у которой первая конгруэнция со своими вспомогательными принадлежит одной последовательности Лапласа. Эта пара определяется уравнением (10β) вместе с уравнениями (1), (2α), (3α, β) п. 146. Конечные уравнения (10β), (3β) п. 146 теперь запишутся:

$$\beta=0,\quad \beta'=0,\quad b\gamma'-c\alpha=0,\quad a\alpha'-b'\gamma=0. \tag{11α}$$

Поскольку обращение в нуль одного из коэффициентов α, α', γ, γ' приводит к вырождению фокальных поверхностей пары, мы можем положить:

$$a=\lambda\gamma,\quad b'=\lambda\alpha',\quad b=\mu\alpha,\quad c=\mu\gamma',$$

и уравнения (3α) примут вид

$$\omega_3^4=\alpha\omega_1^3,\quad \omega_1^2=\gamma\omega_2^4,\quad \omega_4^3=\alpha'\omega_2^4,\quad \omega_2^1=\gamma'\omega_1^3,$$
$$\omega_3^2=\lambda\gamma\omega_1^3+\mu\alpha\omega_2^4,\quad \omega_4^1=\lambda\alpha'\omega_1^3+\mu\gamma'\omega_2^4. \tag{11β}$$

Дифференцируя внешним образом, получим:

$$\left[\Delta\alpha+\frac{\lambda\gamma}{\alpha}\,\omega_2^4,\ \omega_1^3\right]=0,\qquad \left[\Delta\alpha'+\frac{\mu\gamma'}{\alpha'}\,\omega_1^3,\ \omega_2^4\right]=0,$$
$$\left[\Delta\gamma-\frac{\mu\alpha}{\gamma}\,\omega_1^3,\ \omega_2^4\right]=0,\qquad \left[\Delta\gamma'-\frac{\lambda\alpha'}{\gamma'}\,\omega_2^4,\ \omega_1^3\right]=0, \tag{11γ}$$
$$\lambda\gamma\,[\Delta\gamma\omega_1^3]+\lambda\gamma\,[\Delta\lambda\omega_1^3]+\mu\alpha\,[\Delta\alpha\omega_2^4]+\mu\alpha\,[\Delta\mu\omega_2^4]=0,$$
$$\lambda\alpha'\,[\Delta\alpha'\omega_1^3]+\lambda\alpha'\,[\Delta\lambda\omega_1^3]+\mu\gamma'\,[\Delta\gamma'\omega_2^4]+\mu\gamma'\,[\Delta\mu\omega_2^4]=0,$$

где

$$\Delta\alpha=d\ln\alpha+\omega_1^1-2\omega_3^3+\omega_4^4,\qquad \Delta\alpha'=d\ln\alpha'+\omega_2^2-2\omega_4^4+\omega_3^3,$$
$$\Delta\gamma=d\ln\gamma+2\omega_2^2-\omega_1^1-\omega_4^4,\qquad \Delta\gamma'=d\ln\gamma'+2\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3, \tag{11δ}$$
$$\Delta\lambda=d\ln\lambda+2\omega_1^1-2\omega_3^3-\omega_2^2+\omega_4^4,\quad \Delta\mu=d\ln\mu+2\omega_2^2-2\omega_4^4-\omega_1^1+\omega_3^3.$$

Характеристическая система, кроме форм ω_1^3, ω_2^4, независимых на интегральном многообразии, и форм (1) п. 146, (11β), содержит $q=6$ форм:

$$\Delta\alpha,\ \Delta\alpha',\ \Delta\gamma,\ \Delta\gamma',\ \Delta\lambda,\ \Delta\mu.$$

Система квадратичных уравнений (11γ) правильная. Наиболее общий интегральный элемент $\mathfrak{E}_2$ зависит от $N=6$ параметров. Полярная система элемента $\omega_1^3=u$, $\omega_2^4=v$ для уравнений (11γ) имеет вид

$$u\Delta\alpha=0,\ v\Delta\alpha'=0,\qquad v\Delta\gamma=0,\ u\Delta\gamma'=0,$$
$$\lambda\gamma\,u\Delta\lambda+\mu\alpha v\,\Delta\mu=0,\quad \lambda\alpha' u\,\Delta\lambda+\mu\gamma' v\,\Delta\mu=0. \tag{11ε}$$

Если $\alpha\alpha'-\gamma\gamma'=0$, то два последних уравнения (11β) дают $[\omega_3^2\omega_4^1]=0$ и конгруэнция (A_3A_4) вырождается. Если $\alpha\alpha'-\gamma\gamma'\neq 0$, то ранг системы (11ε) равен $s_1=6$. Отсюда $s_2=q-s_1=0$, $Q=s_1+2s_2=6=N$. Система — в инволюции и определяет эти пары θ с присоединенной парой T с произволом $s_1=6$ функций одного аргумента.

152. Пара θ с одной конгруэнцией *W*. Если (A_1A_2) — конгруэнция W, то удовлетворено условие

$$\alpha\alpha'-\gamma\gamma'=0. \tag{12α}$$

Дифференцируя конечные уравнения (12α), (3β) п. 146, получим:

$$\Delta\alpha+\Delta\alpha'-\Delta\gamma-\Delta\gamma'=0,$$
$$a\beta'(\Delta a+\nabla\beta')-b\gamma'(\Delta b+\Delta\gamma')+b'\beta(\Delta b'+\nabla\beta)+c\alpha(\Delta c+\Delta\alpha)=0,$$
$$a\alpha'(\Delta a+\Delta\alpha')+b\beta'(\Delta b+\nabla\beta')-b'\gamma(\Delta b'+\Delta\gamma)+c\beta(\Delta c+\nabla\beta)=0, \tag{12β}$$

а дифференцируя внешним образом уравнения (3α) п. 146, будем иметь:

$$\alpha\,[\Delta\alpha\omega_1^3]-[\beta\nabla\beta+\omega_3^2,\ \omega_2^4]=0,\quad [\beta'\nabla\beta'+\omega_4^1,\ \omega_1^3]-\alpha'\,[\Delta\alpha'\omega_2^4]=0,$$
$$[\beta\nabla\beta+\omega_3^2,\ \omega_1^3]+\gamma\,[\Delta\gamma\omega_2^4]=0,\quad \gamma'\,[\Delta\gamma'\omega_1^3]+[\beta'\nabla\beta'+\omega_4^1,\ \omega_2^4]=0, \tag{12γ}$$
$$a\,[\Delta a\omega_1^3]+b\,[\Delta b\omega_2^4]=0,\qquad b'\,[\Delta b'\omega_1^3]+c\,[\Delta c\omega_2^4]=0,$$

где

$$\nabla\beta=d\ln\beta+\omega_2^2-\omega_3^3,\qquad \nabla\beta'=d\ln\beta'+\omega_1^1-\omega_4^4,$$
$$\Delta a=d\ln a+\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3,\quad \Delta b'=d\ln b'+2\omega_1^1-\omega_3^3-\omega_4^4, \tag{12δ}$$
$$\Delta b=d\ln b+2\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4,\quad \Delta c=d\ln c+\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_4^4.$$

Характеристическая система, кроме форм ω_1^3, ω_2^4 и форм (1), (3α) п. 146, содержит еще 10 форм:

$$\Delta\alpha,\ \nabla\beta,\ \Delta\gamma,\ \Delta\alpha',\ \nabla\beta',\ \Delta\gamma',\ \Delta a,\ \Delta b,\ \Delta b',\ \Delta c, \tag{a}$$

связанных тремя линейными уравнениями (12β), так что $q=7$.

Уравнения (12β) и полярная система для элемента $\omega_1^3=u$, $\omega_2^4=v$ квадратичных уравнений (12γ):

$$\alpha u\,\Delta\alpha-\beta v\nabla\beta=0,\quad \beta u\nabla\beta+\gamma v\,\Delta\gamma=0,\quad \beta' u\nabla\beta'-\alpha' v\,\Delta\alpha'=0,$$
$$\gamma' u\,\Delta\gamma'+\beta' v\nabla\beta'=0,\quad au\,\Delta a+bv\,\Delta b=0,\quad b'u\,\Delta b'+cv\,\Delta c=0 \tag{12ε}$$

определяют значения форм (а) на втором линейном элементе цепи.

Исключая $\Delta\alpha$, $\Delta\gamma$, $\Delta\alpha'$, $\Delta\gamma'$, Δa, Δc из (12β) с помощью (12ε), мы приведем первое уравнение (12β) к виду

$$\beta'\nabla\beta'=-\frac{\alpha'}{\gamma}\,\beta\nabla\beta, \tag{12ξ}$$

а тогда последние два (12β) можно представить в виде

$$b\,\Delta b\,(\gamma' u^2+2\beta' uv-\alpha' v^2)-b'\,\Delta b'\,(-\alpha u^2+2\beta uv+\gamma v^2)=0,$$
$$\beta\nabla\beta\,(-\alpha u^2+2\beta uv+\gamma v^2)\,\{\gamma'(c\beta+b\beta')\,u-\alpha'(a\beta'+b'\beta)\,v\}=0. \tag{12η}$$

Если задать $\Delta b=0$, то уравнения (12ξ, η) дадут $\Delta b'=0$, $\nabla\beta=\nabla\beta'=0$, а уравнения (12ε) определят остальные шесть форм. Ранг системы — 9, но так как уравнения (12β) линейные, то ранг системы (12ε) равен $s_1=6$. Отсюда $s_2=q-s_1=1$, $Q=s_1+2s_2=8$, а поскольку уравнения (12γ) определяют интегральный элемент $\mathfrak{E}_2$ с числом параметров $N=8$, то система — в инволюции и пары θ, содержащие конгруэнцию W, существуют с произволом одной функции двух аргументов.

153. Присоединенная расслояемая пара *T*. Полученный произвол пары θ соответствует произволу наиболее общей конгруэнции W. Нетрудно обнаружить, что к произвольной конгруэнции W можно присоединить пару θ этого вида. Достаточно заметить, что всякий раз, когда пара θ допускает присоединенную пару T из конгруэнций (B_3B_4), (A_3A_4), точки A_1, A_2, лежащие соответственно на лучах A_4B_4 и A_3B_3, описывают поверхности (A_1), (A_2), касательные плоскости которых проходят соответственно через прямые $A_3B_3(A_3A_2)$ и $A_4B_4(A_4A_1)$. Этого достаточно (теорема 1 п. 38), чтобы пара T из конгруэнций (A_3B_3), (A_4B_4) была расслояема.

Следовательно, *если пара θ допускает присоединенную пару T, то это — расслояемая пара.*

Обратно, *каждая расслояемая пара несет двупараметрическое семейство пар θ*. Действительно, произвольная расслояющая поверхность (M) пересекает луч (P_1P_2) расслояемой пары в точке, которая принадлежит касательным плоскостям обеих фокальных поверхностей (P_1) и (P_2). С другой стороны, касательная плоскость поверхности (M) по определению расслоения проходит через второй луч пары (P_3P_4), следовательно, содержит фокусы P_3 и P_4. Таким образом, любая конгруэнция W из присоединенной к расслояемой паре системы Бианки (п. 37), т. е. любая конгруэнция (MM'), описанная прямой, соединяющей соответствующие точки M, M' двух расслояющих поверхностей разных семейств (M) и (M'), образует пару θ с каждой из конгруэнций (P_1P_3) и (P_2P_4).

Если дана произвольная конгруэнция W, например (M_1M_2), с фокусами M_1 и M_2, мы проведем произвольную (произвол двух функций одного аргумента) конгруэнцию W, которая касается поверхности (M_1). Пусть (M_4) — ее вторая фокальная поверхность. Касательные плоскости в точках M_2, M_4 к поверхностям (M_2), (M_4) проходят через точку M_1, пересекаясь по прямой M_1M_3, где (M_3) — общая поверхность, получаемая по теореме Бианки асимптотическим преобразованием и из поверхности (M_2) и из поверхности (M_4). Диагонали косого четырехугольника $M_1M_2M_3M_4$ описывают расслояемую пару (M_1M_3), (M_2M_4). Если $M_1M_3 \equiv P_1P_3$, $M_2M_4 \equiv P_2P_4$, где $P_i (i = 1, 2, 3, 4)$ — фокусы диагоналей, то каждая из прямых P_1P_2 и P_3P_4 вместе с прямой M_1M_2 описывает пару θ с присоединенной парой T.

154. Пары θ из двух конгруэнций W. Мы видели, что асимптотические линии фокальных поверхностей (A_3) и (A_4) определялись уравнениями (8) п. 148:

$$\omega_3^2\omega_2^1 + \omega_3^4\omega_4^1 = 0, \quad \omega_4^1\omega_1^2 + \omega_4^3\omega_3^2 = 0. \tag{13α}$$

Если асимптотические на фокальных поверхностях (A_3), (A_4) соответствуют, то левые части уравнений (13α) пропорциональны. Обозначая множитель пропорциональности буквой λ, получим тождество

$$\omega_3^2(\omega_2^1 - \lambda\omega_4^3) = \omega_4^1(\lambda\omega_1^2 - \omega_3^4). \tag{13β}$$

Если ω_3^2 и ω_4^1 пропорциональны, то конгруэнция (A_3A_4) вырождается; следовательно, при обращении в нуль ω_3^2 в правой части обратится в нуль второй множитель. Отсюда уравнение (13β) эквивалентно двум линейным:

$$\omega_3^2 = \mu(\lambda\omega_1^2 - \omega_3^4), \quad \omega_4^1 = \mu(\omega_2^1 - \lambda\omega_4^3).$$

Пользуясь уравнениями (3α) п. 146 и сравнивая коэффициенты при ω_1^3, ω_2^4, получим:

$$a = \mu\lambda\beta - \mu\alpha, \quad b = \mu\lambda\gamma + \mu\beta, \quad b' = \mu\gamma' + \mu\lambda\beta', \quad c = \mu\beta' - \mu\lambda\alpha'.$$

Внося эти значения в уравнения (3β) п. 146, получим два уравнения:

$$\lambda\mu(\alpha\alpha' + \gamma\gamma' - 2\beta\beta') = 0, \quad \mu(\alpha\alpha' + \gamma\gamma' - 2\beta\beta') = 0.$$

Обращение в нуль μ ведет к обращению в нуль форм ω_3^2, ω_4^1 и вырождению конгруэнции (A_3A_4). Следовательно, условием соответствия асимптотических на фокальных поверхностях конгруэнции (A_3A_4) является равенство

$$\alpha\alpha' + \gamma\gamma' - 2\beta\beta' = 0. \tag{13γ}$$

Если и первая конгруэнция (A_1A_2) является конгруэнцией W, то

$$\alpha\alpha' - \gamma\gamma' = 0. \tag{13δ}$$

Следовательно, пара θ из двух конгруэнций W определяется системой (1), (2α), (3α, β) п. 146 с конечными уравнениями

$$\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma' = t, \tag{14α}$$

где t — новая неизвестная функция. Исключая с помощью (14α) величины α', β', γ' из уравнений (3β) п. 146, мы их приведем к виду

$$(\alpha\gamma + \beta^2)(tb - \beta\gamma b') = 0, \quad (\alpha\gamma + \beta^2)(ta + \alpha\beta c) = 0.$$

Обращение в нуль первого множителя вместе с уравнениями (14α) приводит к особым парам θ п. 147. Все остальные пары θ из двух конгруэнций W определяются, следовательно, системой (1), (3α) п. 146, (12γ) п. 152 вместе с конечными уравнениями (14α, β):

$$b = \frac{\beta\gamma}{t} b', \quad a = -\frac{\alpha\beta}{t} c. \tag{14β}$$

Дифференцирование конечных уравнений (14α, β) дает нам

$$\begin{gathered}\Delta\alpha + \Delta\alpha' = \Delta t, \quad \nabla\beta + \nabla\beta' = \Delta t, \quad \Delta\gamma + \Delta\gamma' = \Delta t, \\ \Delta b = \nabla\beta + \Delta\gamma + \Delta b' - \Delta t, \quad \Delta a = \Delta\alpha + \nabla\beta + \Delta c - \Delta t,\end{gathered} \tag{14γ}$$

где

$$\Delta t = d\ln t + \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4. \tag{14δ}$$

Исключая из (12γ) с помощью (14γ) формы $\Delta\alpha'$, $\nabla\beta'$, $\Delta\gamma'$, Δa, Δb, мы получим шесть уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\alpha[\Delta\alpha\omega_1^3]-[\beta\nabla\beta+\omega_3^2,\ \omega_2^4]=0,\\
&[\beta'(\Delta t-\nabla\beta)+\omega_4^1,\ \omega_1^3]-\alpha'[\Delta t-\Delta\alpha,\ \omega_2^4]=0,\\
&[\beta\nabla\beta+\omega_3^2,\ \omega_1^3]+\gamma[\Delta\gamma\omega_2^4]=0,\\
&\gamma'[\Delta t-\Delta\gamma,\ \omega_1^3]+[\beta'(\Delta t-\nabla\beta)+\omega_4^1,\ \omega_2^4]=0,\\
&a[\Delta\alpha+\nabla\beta+\Delta c-\Delta t,\ \omega_1^3]+b[\nabla\beta+\Delta\gamma+\Delta b'-\Delta t,\ \omega_2^4]=0,\\
&b'[\Delta b'\omega_1^3]+c[\Delta c\omega_2^4]=0.
\end{aligned}
\tag{14ε}
$$

Характеристическая система, кроме форм (1), (3α) п. 146 и форм ω_1^3, ω_2^4, содержит $q=6$ форм:

$$\Delta\alpha,\ \nabla\beta,\ \Delta\gamma,\ \Delta b',\ \Delta c,\ \Delta t.$$

Ранг полярной системы элемента $\omega_1^3=u$, $\omega_2^4=v$ уравнений (14ε):

$$
\begin{gathered}
\alpha u\,\Delta\alpha-\beta v\nabla\beta=0,\quad \alpha'v\,\Delta\alpha-\beta'u\nabla\beta+(\beta'u-\alpha'v)\,\Delta t=0,\\
\beta u\nabla\beta+\gamma v\,\Delta\gamma=0,\quad \gamma'u\,\Delta\gamma+\beta'v\nabla\beta=(\gamma'u+\beta'v)\,\Delta t,\\
au\,\Delta c+bv\,\Delta b'=(au+bv)(-\nabla\beta+\Delta t)-au\,\Delta\alpha-bv\,\Delta\gamma,\\
b'u\,\Delta b'+cv\,\Delta c=0,
\end{gathered}
$$

равен $s_1=6$. Отсюда $s_2=q-s_1=0$, $Q=6$, а поскольку уравнения (14ε) определяют интегральный элемент $\mathfrak{E}_2$ с числом параметров $N=6$, то система — в инволюции и определяет пары θ из двух конгруэнций W с произволом шести функций одного аргумента.

155. Сопряженная пара T и присоединенные θ. Полученная пара θ весьма замечательна: она несет на себе две присоединенные пары θ того же рода (B_1B_2), (A_3A_4) и (B_3B_4), (A_1A_2) и две присоединенные пары T, именно: (B_1B_2), (A_1A_2) и (B_3B_4), (A_3A_4).

Пользуясь формулами (14α) п. 154 и (3α) п. 146, мы получим соотношения

$$\omega_4^3=-\frac{t}{\alpha\beta}\,\omega_3^4,\quad \omega_2^1=\frac{t}{\beta\gamma}\,\omega_1^2. \tag{15}$$

Согласно таблице (9) п. 149 это показывает, что развертывающиеся поверхности всех четырех вспомогательных конгруэнций (A_iB_i) соответствуют друг другу. Между тем каждые две противоположные вспомогательные конгруэнции (A_1B_1) и (A_2B_2) или (A_3B_3) и (A_4B_4) образуют пару T. В гл. IV мы видели, что пара T с прямым соответствием развертывающихся поверхностей образует сопряженную расслояемую пару. Обе конгруэнции такой пары суть конгруэнции R, а вспомогательные конгруэнции являются теми конгруэнциями W,

которые преобразуют поверхность R в поверхность R так, что сеть R переходит в сеть R.

Таким образом, все четыре вспомогательные конгруэнции (A_iB_i) суть конгруэнции R, все восемь фокальных поверхностей (A_i), (B_i) являются поверхностями R. Вспомогательными в этих сопряженных парах (A_1B_1), (A_2B_2) или (A_3B_3), (A_4B_4) являются конгруэнции основной пары (A_1A_2), (A_3A_4) и присоединенные к ним конгруэнции (B_1B_2) и (B_3B_4). Все эти четыре конгруэнции суть конгруэнции W с фокальными поверхностями R, у которых сети R соответствуют друг другу.

Обратно, рассмотрим произвольную сопряженную пару T из конгруэнций (A_1B_1), (A_2B_2).

По определению расслояемой пары (п. 28) она несет два семейства поверхностей $\{M_1\}$ и $\{M_2\}$, касательные плоскости к которым в точках пересечения с лучом A_1B_1 проходят через луч A_2B_2, и наоборот.

Если (M_1) — какая-нибудь поверхность первого семейства, а (M_2) — второго и точка M_1 лежит на луче A_1B_1, а M_2 — на луче A_2B_2, то конгруэнции (A_1A_2), (M_1M_2) образуют пару θ. Действительно, по самому построению касательные плоскости поверхностей (A_1) и (A_2) содержат соответственно прямые A_1B_1 и A_2B_2, а следовательно, проходят соответственно через точки M_1 и M_2. С другой стороны, касательная плоскость поверхности (M_1) проходит через прямую A_2B_2 и, следовательно, содержит точку A_2, а касательная плоскость поверхности (M_2) точку A_1.

Таким образом, с каждой конгруэнцией W, у которой фокальными поверхностями служат две поверхности R с соответствующими друг другу сетями R, связано две пары вспомогательных конгруэнций R, описанных касательными к линиям этих двух сетей R, и каждая пара вспомогательных конгруэнций, образующих сопряженную пару T, несет двупараметрическое семейство конгруэнций W, лучи которых соединяют точки двух произвольных поверхностей из первого и второго семейства поверхностей, расслояющих сопряженную пару T. Каждая конгруэнция из этого двупараметрического семейства образует с исходной конгруэнцией W пару θ с присоединенными парами T.

156. Включение заданной конгруэнции в пару θ. Присоединим к данной конгруэнции (A_1A_2) произвольный тетраэдр 1-го порядка, две вершины которого A_1 и A_2 лежат в фокусах луча A_1A_2, а две другие A_3 и A_4 занимают произвольное положение в касательных плоскостях поверхностей (A_1) и (A_2).

Тогда будут иметь место уравнения:

$$\omega_1^4=0,\quad \omega_2^3=0, \tag{16α}$$

$$[\omega_1^2\omega_2^4]+[\omega_1^3\omega_3^4]=0,\quad [\omega_2^1\omega_1^3]+[\omega_2^4\omega_4^3]=0, \tag{16β}$$

которые определяют произвольную не параболическую конгруэнцию.

Характеристическая система, кроме форм (16α) и форм ω_1^3, ω_2^4, независимых на интегральном многообразии, содержит $q=4$ формы:

$$\omega_1^2,\ \omega_2^1,\ \omega_3^4,\ \omega_4^3. \tag{16γ}$$

Если приравнять нулю все характеристические формы, то получится вполне интегрируемая система, первые интегралы которой составят совокупность характеристических переменных задачи.

С другой стороны, пара θ определяется уравнениями (1), (2α) п. 146, и характеристическая система содержит 12 форм (1), (2β) п. 146 и формы ω_1^3, ω_2^4. Восемь из этих форм совпадают с формами (16α, γ). Отсюда вытекает, что первые интегралы характеристической системы пары θ (большой системы) удовлетворяют характеристической системе произвольной не параболической конгруэнции (малой системе). Это означает, что в совокупность 12 характеристических переменных большой системы мы можем включить все характеристические переменные малой системы.

Допустим теперь, что нам дана не параболическая конгруэнция $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$. Это значит, что нам дано одно решение системы (16α, β). Шесть неизвестных функций из числа восьми характеристических переменных системы заданы функциями от двух независимых переменных так, что уравнения (16α, β) после подстановки этих функций обращаются в тождество. Самую подстановку можно выполнить в два приема: сначала подсчитать формы (16γ), а затем подставить их в уравнения (16α, β). После замены шести неизвестных функций и их дифференциалов их выражениями через независимые переменные, полученными из заданного решения системы (16α, β), две формы ω_1^4, ω_2^3 обратятся в нуль, а четыре формы ω_1^2, ω_2^1, ω_3^4, ω_4^3 будут содержать только дифференциалы независимых переменных и, следовательно, будут линейно выражаться через формы ω_1^3, ω_2^4.

Поскольку те же шесть неизвестных функций и две независимые переменные входят в число 12 характеристических переменных большой системы (1), (2α) п. 146, мы можем внести их значения, полученные из заданного решения системы (16α, β), в уравнения (1), (2α) п. 146. После этого они будут содержать, кроме независимых переменных, только четыре неизвестные функции. Дифференциалы этих неизвестных функций (и независимых переменных) линейно выражаются через формы ω_1^3, ω_2^4, ω_3^2, ω_4^1, ω_3^1, ω_4^2.

Первые два уравнения (1) и уравнения (2α) левого столбца п. 146 после подстановки обратятся в тождество. Наша система будет содержать только четыре уравнения:

$$\omega_3^1=0,\quad \omega_4^2=0, \tag{17α}$$

$$[\omega_3^2\omega_2^1]+[\omega_3^4\omega_4^1]=0,\quad [\omega_4^1\omega_1^2]+[\omega_4^3\omega_3^2]=0, \tag{17β}$$

имея характеристическую систему из форм (17α), форм ω_1^3, ω_2^4 и $q=2$ формы:

$$\omega_3^2,\ \omega_4^1. \tag{17γ}$$

Формы ω_1^2, ω_2^1, ω_3^4, ω_4^3 представляют собой известные линейные комбинации форм ω_1^3, ω_2^4.

Если определитель

$$\omega_1^2\omega_2^1-\omega_3^4\omega_4^3 \tag{18}$$

на первом линейном элементе цепи не обращается в нуль, то значения форм ω_3^2, ω_4^1 на втором линейном элементе цепи будут определены билинейными уравнениями, присоединенными к квадратичным (17β). Цепь будет не особой, система — в инволюции с характерами $s_1=2$, $s_2=q-s_1=0$ и определит интегральное многообразие с двумя произвольными функциями одного аргумента. Это интегральное многообразие определяет все пары θ, которые содержат в качестве первой конгруэнции заданную конгруэнцию $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$.

157. Особое решение. Теорема о существовании решения теряет силу, если определитель (18) равен нулю. Если равенство

$$\omega_1^2\omega_2^1-\omega_3^4\omega_4^3=0 \tag{18$'$}$$

имеет место для всех линейных элементов интегрального многообразия, то оно эквивалентно системе (4α) п. 147. Мы рассматривали эти уравнения в пп. 147, 148. Они привели нас к уравнениям (5′), (6α, β, γ) п. 147. Теперь мы должны рассмотреть эту систему с новой точки зрения. Уравнения (5′) п. 147 накладываются на формы характеристической системы (16β) п. 156. Следовательно, конгруэнция $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$ не будет более произвольной. Присоединяя уравнения (5′) к уравнениям (16α, β), мы заметим, что квадратичные уравнения (16β) примут вид первого уравнения (6α) п. 147. Внешние дифференциалы уравнений (5′) дадут три квадратичных уравнения (6β) п. 147, характеристическая система которых содержит все формы (16γ).

Впрочем, соображения, развитые в пп. 70—74, непосредственно показывают, что при заданной конгруэнции $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_3)$, удовлетворяющей системе (12α, β), (13α — γ) п. 66, вспомогательные конгруэнции $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$, $(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4)$ как конгруэнции касательных к асимптотическим линиям особого семейства вполне определены. Что касается выбора точек $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_4$ на асимптотических касательных, то он ограничивается только требованием, чтобы поверхности $(\boldsymbol{A}_2)$, $(\boldsymbol{A}_4)$ принадлежали соответственно тем семействам поверхностей $(\boldsymbol{M})$, $(\boldsymbol{M}')$, которые присоединены к расслояемой паре параболических конгруэнций $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$, $(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4)$.

Таким образом, с каждой конгруэнцией W, которая преобразует одну поверхность R_0 в другую, присоединено двупараметрическое семейство конгруэнций того же рода, каждая из которых образует с заданной конгруэнцией пару θ, а между собой пару T.

ГЛАВА XV

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ T КОНГРУЭНЦИЙ

158. Гармоническое пересечение линейчатых поверхностей. Рассмотрим конгруэнцию (A_1A_2), отнесенную к тетраэдру первого порядка. Такая конгруэнция определяется уравнениями

$$\omega_1^4=0, \quad \omega_2^3=0.$$

Любое уравнение

$$\omega_2^4=\lambda\omega_1^3 \tag{1α}$$

выделит одну линейчатую поверхность конгруэнции, проходящую через заданный ее луч A_1A_2. Касательная плоскость этой линейчатой поверхности в точке P образующей A_1A_2

$$P=A_1+tA_2$$

определяется аналитической плоскостью

$$(A_1A_2\,dP)=(A_1A_2,\ A_3\omega_1^3+tA_4\omega_2^4)$$

или, в силу уравнения (1α), — плоскостью

$$(A_1A_2,\ A_3+t\lambda A_4).$$

Эта плоскость при заданной образующей A_1A_2 вполне определяется точкой пересечения ее с ребром A_3A_4:

$$Q=A_3+qA_4, \quad q=t\lambda. \tag{1β}$$

Отсюда следует теорема о проективном соответствии точек касания пучка касательных плоскостей с осью A_1A_2 и прямолинейного ряда точек пересечения их с прямой A_3A_4.

Допустим теперь, что мы имеем вторую линейчатую поверхность конгруэнции

$$\omega_2^4=\lambda'\omega_1^3, \tag{1α'}$$

касательная плоскость которой в точке P луча A_1A_2 пересекает ребро A_3A_4 в точке

$$Q'=A_3+q'A_4, \quad q'=t\lambda'. \tag{1β'}$$

Исключая переменное t, получим линейное соотношение между q и q':

$$q'=q\frac{\lambda'}{\lambda}. \tag{1γ}$$

Это соотношение устанавливает проективное соответствие между двумя рядами точек (Q) и (Q') с общим носителем A_3A_4 или соответственно между двумя пучками касательных плоскостей с общей осью A_1A_2.

Это соответствие будет инволюцией, если одновременно имеет место соотношение

$$q=q'\frac{\lambda'}{\lambda},$$

откуда, исключая q и q', получим:

$$\lambda'^2=\lambda^2, \quad \text{т. е.} \quad \lambda'=\pm\lambda.$$

Верхний знак соответствует случаю вырождения инволюции в тождество. Нижний знак

$$\lambda'=-\lambda \tag{2}$$

соответствует невырожденной инволюции, когда сопряженные точки Q и Q' гармонически разделяют точки пересечения прямой A_3A_4 с фокальными плоскостями луча A_1A_2.

Мы будем говорить, что при условии (2) две линейчатые поверхности (1α) и (1α'), проходящие через луч A_1A_2, *пересекаются гармонически*.

Все линейчатые поверхности конгруэнции, проходящие через луч A_1A_2, делятся на пары гармонически пересекающихся.

159. Условие гармонического пересечения. Нетрудно написать условие гармонического пересечения (2) при произвольном задании линейчатых поверхностей (1α).

Будем попрежнему предполагать, что та и другая линейчатые поверхности описаны ребром A_1A_2 тетраэдра, но не принадлежат нашей конгруэнции. Чтобы определить эти линейчатые поверхности, достаточно для каждой из них дать отношения главных форм ребра:

$$\frac{\omega_1^3}{a_1}=\frac{\omega_2^4}{a_2}=\frac{\omega_2^3}{a_3}=\frac{\omega_1^4}{a_4}, \quad \frac{\omega_1^3}{b_1}=\frac{\omega_2^4}{b_2}=\frac{\omega_2^3}{b_3}=\frac{\omega_1^4}{b_4}. \tag{3}$$

Параметры a_i определяют первую поверхность, b_i — вторую.

Теперь для первой поверхности дифференциал точки касания примет вид

$$dP=\theta_1A_1+\theta_2A_2+A_3(a_1+ta_3)+A_4(a_4+ta_2).$$

Следовательно, формула (1β) примет вид

$$q=\frac{a_4+ta_2}{a_1+ta_3},$$

откуда, разрешая относительно t, получим:

$$t=\frac{a_1q-a_4}{a_2-a_3q}.$$

Для второй поверхности и той же точки касания получим:

$$t=\frac{b_1q'-b_4}{b_2-b_3q'}.$$

Сравнивая эти два значения t, получим:

$$\frac{a_1q-a_4}{a_2-a_3q}=\frac{b_1q'-b_4}{b_2-b_3q'}$$

или, освобождаясь от знаменателей и собирая члены с q и q',

$$qq'(a_3b_1-a_1b_3)+q(a_1b_2-a_3b_4)+q'(a_4b_3-a_2b_1)+a_2b_4-a_4b_2=0.$$

Это уравнение определит инволюцию пар точек Q, Q', если оно допускает замену q на q'; это требование приводит нас к равенству

$$a_1b_2-a_3b_4=a_4b_3-a_2b_1. \qquad (2')$$

При этом условии поверхности a_i и b_i пересекаются по общему лучу A_1A_2 гармонически.

160. Гармоническая нормаль конгруэнции. Рассмотрим опять конгруэнцию

$$\omega_1^4=0, \quad \omega_2^3=0, \qquad (a)$$

описанную прямой A_1A_2, и будем искать направление линейчатой поверхности

$$\frac{\omega_1^3}{b_1}=\frac{\omega_2^4}{b_2}=\frac{\omega_2^3}{b_3}=\frac{\omega_1^4}{b_4}, \qquad (b)$$

т. е. параметры b_i на исходном луче A_1A_2 так, чтобы линейчатая поверхность (b) пересекала гармонически все линейчатые поверхности

$$\omega_2^4=\lambda\omega_1^3 \qquad (a')$$

рассматриваемой конгруэнции. Уравнения (a), (a′) можно представить в форме

$$\frac{\omega_1^3}{a_1}=\frac{\omega_2^4}{a_2}=\frac{\omega_2^3}{a_3}=\frac{\omega_1^4}{a_4},$$

если положить

$$a_3=0, \quad a_4=0, \quad a_1=1, \quad a_2=\lambda.$$

Внося эти значения в уравнение (2′), получим условие на параметры b_i поверхности, пересекающей гармонически линейчатую поверхность (a′) конгруэнции

$$b_2+\lambda b_1=0. \qquad (c)$$

Если параметры b_i удовлетворяют условию (c), то линейчатая поверхность (b) пересекает поверхности (a), (a′) гармонически.

Если мы хотим, чтобы она пересекала гармонически все линейчатые поверхности конгруэнции (a), нам надо потребовать, чтобы условие (c) удовлетворялось при всяком λ. Это приводит к равенствам

$$b_1=0, \quad b_2=0. \qquad (c')$$

Таким образом, линейчатые поверхности, проходящие через луч A_1A_2 и пересекающие в этом луче все линейчатые поверхности конгруэнции гармонически, определяются уравнениями

$$\omega_1^3=0, \quad \omega_2^4=0, \quad \omega_2^3=\nu\omega_1^4, \qquad (4)$$

где $\nu=\frac{b_3}{b_4}$ — произвольный параметр.

В метрической геометрии поверхности мы не только можем указать направление линий, пересекающих ортогонально все линии поверхности, проходящие через заданную точку ее, но и определяем нормаль поверхности в виде прямой, проходящей через эту точку с направлением, ортогональным поверхности. В проективной геометрии линейчатого пространства простейшей линейчатой поверхностью является совокупность образующих одного семейства поверхности 2-го порядка, которая определяется в линейчатом пространстве тремя линейными уравнениями на координаты луча как пересечение трех линейных комплексов и носит название *демиквадрики*.

Демиквадрику, проходящую через луч A_1A_2 и пересекающую в этом луче все линейчатые поверхности конгруэнции гармонически, мы можем назвать *гармонической нормалью* конгруэнции.

Для каждого своего луча конгруэнция обладает пучком гармонических нормалей, ибо конгруэнция является двупараметрическим многообразием в четырехмерном пространстве прямых в P_3.

161. Преобразование конгруэнций посредством семейства гармонических демиквадрик. Допустим теперь, что ребра A_1A_2 и A_3A_4 описывают пару конгруэнций со взаимно однозначным соответствием лучей $(A_1A_2)\rightleftarrows(A_3A_4)$ и через каждую пару сходственных лучей проходит демиквадрика, пересекающая гармонически и первую и вторую конгруэнции.

Демиквадрика определяется в P_5 плоским сечением фундаментальной гиперповерхности 2-го порядка. Плоскость этого сечения содержит, очевидно, точки [12], [34] и, кроме того, точку $d[12]$, лежащую на касательной к кривой (4), ибо демиквадрика должна пересекать гармонически конгруэнцию (A_1A_2). В силу уравнений (4), имеем:

$$d[12]=[12](\omega_1^1+\omega_2^2)+([42]+\nu[13])\omega_1^4.$$

Следовательно, секущая плоскость определяется в P_5 аналитической плоскостью

$$([12],\ [34],\ [13]\nu+[42]). \tag{a}$$

Эта плоскость проходит через точку [34], которая изображает луч (A_3A_4) на гиперквадрике. Чтобы определить линию, которой она касается на поверхности ([34]) гиперквадрики Q_4^2, заметим, что касательная, определяемая точкой

$$d[34]=[34](\omega_3^3+\omega_4^4)+\omega_3^1[14]+\omega_4^1[31]+\omega_3^2[24]+\omega_4^2[32],$$

должна лежать в плоскости (a). Отсюда прямо следует уравнение линейчатой поверхности

$$\omega_3^1=0,\quad \omega_4^2=0,\quad \omega_4^1=\nu\omega_3^2. \tag{b}$$

Между тем подстановка указателей $\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix}$ в формулах (3) п. 159 приводит к заключению: равенство (2′) п. 159 характеризует гармоническое пересечение линейчатых поверхностей, описанных лучом (A_3A_4), если параметры a_i и b_i определяются уравнениями

$$\frac{\omega_3^1}{a_1}=\frac{\omega_4^2}{a_2}=\frac{\omega_4^1}{a_3}=\frac{\omega_3^2}{a_4},\quad \frac{\omega_3^1}{b_1}=\frac{\omega_4^2}{b_2}=\frac{\omega_4^1}{b_3}=\frac{\omega_3^2}{b_4}. \tag{3′}$$

Система уравнений (b) дает для параметров b_i значения

$$b_1=0,\quad b_2=0,\quad b_3=\nu,\quad b_4=1.$$

Внося эти значения в уравнение (2′), получим для параметров a_i условие

$$a_4\nu+a_3=0. \tag{c}$$

Чтобы демиквадрика (b_i) была гармонической нормалью конгруэнции (A_3A_4), линейчатая поверхность с параметрами b_i должна пересекать гармонически все линейчатые поверхности конгруэнции (A_3A_4).

Следовательно, уравнение (c), или в силу (3′) уравнение

$$\nu\omega_3^2+\omega_4^1=0, \tag{c′}$$

должно являться следствием уравнений, определяющих конгруэнцию (A_3A_4).

Если конгруэнция (A_3A_4) удовлетворяет условию

$$[\omega_4^1\omega_3^2]=0, \tag{5}$$

то в каждой паре соответствующих лучей (A_1A_2), (A_3A_4) найдется одна демиквадрика (b) с параметром ν из уравнения (c′), которая пересекает гармонически обе конгруэнции.

Параметр ν становится неопределенным, и пара конгруэнций (A_1A_2), (A_3A_4) допускает для каждой пары соответствующих лучей A_1A_2, A_3A_4 семейство ∞^1 общих гармонических нормалей, если конгруэнция (A_3A_4) удовлетворяет системе

$$\omega_4^1=0,\quad \omega_3^2=0. \tag{6}$$

При этом пара конгруэнций (A_1A_2), (A_3A_4) становится парой T.

Таким образом, *пары T и только пары T допускают однопараметрическое семейство общих гармонических нормалей.*

162. Преобразование конгруэнций посредством касательных демиквадрик. Рассмотрим конгруэнцию (a) п. 160, описанную ребром (A_1A_2), на ней — линейчатую поверхность (a′) п. 160. Касательная к этой поверхности демиквадрика определяется в P_5 сечением гиперквадрики Q_4^2 плоскостью π, проходящей через точки [12] и d[12], где d[12], в силу (a), (a′) п. 160, имеет вид

$$d[12]=[12](\omega_1^1+\omega_2^2)+\omega_1^3([32]+\lambda[14]).$$

Если эта демиквадрика проходит через луч A_3A_4 конгруэнции (A_3A_4), то плоскость π содержит еще точку [34] и определяется в P_5 аналитической плоскостью

$$([12],\ [34],\ [32]+\lambda[14]). \tag{a}$$

Чтобы демиквадрика касалась конгруэнции (A_3A_4), надо, чтобы дифференциал

$$d[34]=[34](\omega_3^3+\omega_4^4)+\omega_3^1[14]+\omega_4^1[31]+\omega_3^2[24]+\omega_4^2[32]$$

для подходяще выбранной линейчатой поверхности конгруэнции (A_3A_4) лежал в плоскости (a). Отсюда уравнения этой линейчатой поверхности

$$\omega_4^1=0,\quad \omega_3^2=0,\quad \omega_3^1=\lambda\omega_4^2. \tag{b}$$

Если конгруэнция (A_3A_4) определяется системой

$$\omega_4^1=0,\quad \omega_3^2=0, \tag{6′}$$

и только в этом случае, каждой линейчатой поверхности (a′) п. 160 конгруэнции (A_1A_2) будет соответствовать линейчатая поверхность (b) конгруэнции (A_3A_4) так, что демиквадрика (a) будет проходить через пару лучей A_1A_2 и A_3A_4 и касаться поверхности (a′) п. 160 и (b).

Таким образом, *пары T и только пары T допускают однопараметрическое семейство демиквадрик, касающихся обеих конгруэнций пары T в каждой паре соответствующих лучей.*

Переход от одной конгруэнции пары T к другой называется *преобразованием T* конгруэнций.

163. Теорема существования преобразования T заданной конгруэнции. Произвольную не параболическую конгруэнцию (A_1A_2) можно задать относительно тетраэдра 1-го порядка как решение системы (16α, β) п. 156:

$$\omega_1^4=0,\quad \omega_2^3=0, \tag{7α}$$

$$[\omega_1^2\omega_2^4]+[\omega_1^3\omega_3^4]=0,\quad [\omega_2^1\omega_1^3]+[\omega_2^4\omega_4^3]=0 \tag{7β}$$

с характеристической системой форм ω_1^3, ω_2^4, форм (7α) и четырех форм

$$\omega_1^2, \quad \omega_2^1, \quad \omega_3^4, \quad \omega_4^3. \tag{7γ}$$

Пара T определяется системой (1), (2α, β) п. 138 с характеристической системой из форм (1) п. 138, форм ω_1^3, ω_2^4 и шести форм

$$\omega_1^2, \quad \omega_2^1, \quad \omega_3^4, \quad \omega_4^3, \quad \omega_3^1, \quad \omega_4^2. \tag{7δ}$$

Поскольку формы характеристической системы (7α, γ) (малая система) содержатся в характеристической системе (1) п. 138, (7δ) (большая система), мы можем выбрать характеристические переменные так, чтобы восемь характеристических переменных малой системы включались в совокупность 12 характеристических переменных большой системы.

Если конгруэнция (7α, β) задана, то шесть переменных (из числа 8) этой системы заданы в виде функций от двух остальных (независимых переменных). Эти функции удовлетворяют системе (7α, β). Внесем их в уравнения большой системы.

Два уравнения (1) п. 138 и уравнения (2α) п. 138 будут удовлетворены, и мы получим систему

$$\omega_3^2 = 0, \qquad \omega_4^1 = 0, \tag{8α}$$

$$[\omega_4^2\omega_2^1] + [\omega_4^3\omega_3^1] = 0, \quad [\omega_3^1\omega_1^2] + [\omega_3^4\omega_4^2] = 0. \tag{8β}$$

Поскольку формы (7γ) теперь будут известными из (4α) п. 138 линейными комбинациями независимых на интегральном многообразии форм ω_1^3, ω_2^4, характеристическая система форм (8α, β), кроме форм (8α) и форм ω_1^3, ω_2^4, будет содержать только $q=2$ формы:

$$\omega_3^1, \quad \omega_4^2. \tag{8γ}$$

Система квадратичных уравнений (8β) правильная. Полярная матрица элемента $\omega_1^3 = u$, $\omega_2^4 = v$ имеет вид

$$\begin{aligned} &\omega_4^2(\alpha u - \beta v) - \omega_3^1(\beta u + \gamma v) = 0, \\ &\omega_4^2(\gamma' u + \beta' v) - \omega_3^1(-\beta' u + \alpha' v) = 0. \end{aligned} \tag{8δ}$$

Если определитель системы

$$(\gamma' u + \beta' v)(\beta u + \gamma v) - (\alpha u - \beta v)(-\beta' u + \alpha' v) \tag{8ε}$$

не нуль, то ранг ее $s_1 = 2$. Система — в инволюции и определяет преобразованную конгруэнцию с произволом двух функций одного аргумента.

Таким образом, не параболическая конгруэнция, удовлетворяющая неравенству (8ε) или

$$\omega_1^2\omega_2^1 - \omega_3^4\omega_4^3 \neq 0, \tag{8ε'}$$

допускает преобразование T с произволом двух функций одного аргумента.

Это — тот самый произвол, с которым конгруэнция W определяет асимптотическое преобразование произвольной поверхности.

164. Особое решение. Система (8α, β) не будет в инволюции, если заданная конгруэнция (A_1A_2) удовлетворяет равенству

$$\omega_1^2\omega_2^1 - \omega_3^4\omega_4^3 = 0. \tag{9}$$

Мы уже встречались с этим условием в пп. 139—142. Оно может быть удовлетворено двумя способами. Если положить $\omega_1^2 = 0$, то произведение $\omega_3^4\omega_4^3$ должно равняться нулю; в зависимости от того, какой множитель обращается в нуль и, следовательно, пропорционален форме ω_1^2, получаем или

$$1)\ \omega_4^3 = \lambda\omega_1^2, \quad \omega_2^1 = \lambda\omega_3^4, \tag{10α}$$

или

$$2)\ \omega_3^4 = \mu\omega_1^2, \quad \omega_2^1 = \mu\omega_4^3. \tag{10β}$$

В первом случае обе конгруэнции принадлежат одному и тому же линейному комплексу (п. 139); произвольная конгруэнция линейного комплекса образует пары T с любой конгруэнцией того же комплекса (п. 143).

Во втором случае получаются пары T из дважды взятой конгруэнции W с линейчатыми поверхностями (п. 142).

Таким образом, каждая не параболическая конгруэнция допускает преобразование T с произволом двух функций одного аргумента; конгруэнция линейного комплекса, кроме того, преобразуется в любую конгруэнцию того же комплекса с произволом одной функции двух аргументов, а конгруэнция W с линейчатыми фокальными поверхностями — сама в себя.

Эти исключительные преобразования надо рассматривать как дополнительные к основным, ибо уравнения (10α, β) накладывают условия на обе конгруэнции пары. Общее (не особое) решение (8ε') существует для всякой конгруэнции (A_1A_2), и конгруэнция линейного комплекса (A_1A_2), кроме особых решений (9), будет допускать обычные преобразования T.

165. Преобразование T конгруэнций W. Теорема. *Преобразование T сохраняет класс конгруэнций W.*

Допустим, что первая конгруэнция (A_1A_2) пары T есть конгруэнция W. Следовательно, имеет место соотношение

$$\alpha\alpha' - \gamma\gamma' = 0, \tag{11α}$$

где α, α', γ, γ' — коэффициенты в разложении форм ω_1^2, ω_2^1, ω_3^4, ω_4^3 по формулам (4α) п. 138. Уравнения (5α) п. 138 связывают коэффициенты a, c, $b - b'$ в разложении (4β) п. 138 соотношениями

$$\begin{aligned} a\alpha' + c\gamma' &= (b' - b)\beta', \\ a\gamma + c\alpha &= (b - b')\beta. \end{aligned} \tag{11β}$$

Для конгруэнции W, в силу равенства (11α), определитель из коэффициентов при a и c в системе (11β) равен нулю. Следовательно, можно одновременно исключить a и c из этих уравнений:

$$(b-b')(\gamma\beta'+\alpha'\beta)=0.$$

Отсюда две возможности:

$$b-b'=0 \tag{12α}$$

или

$$\gamma\beta'+\alpha'\beta=0. \tag{12β}$$

В первом случае уравнения асимптотических линий на фокальных поверхностях (A_3), (A_4)

$$\omega_3^1\omega_1^2+\omega_3^4\omega_4^2=0 \quad \text{и} \quad \omega_4^2\omega_2^1+\omega_4^3\omega_3^1=0, \tag{13}$$

в силу соотношений (11α, β), (12α), а также формул (4α, β) п. 138, принимают вид

$$\begin{aligned}&\left(b-c\frac{\beta}{\gamma}\right)\{\alpha(\omega_1^3)^2+\gamma(\omega_2^4)^2\}=0,\\ &\left(b-a\frac{\beta'}{\gamma'}\right)\{\gamma'(\omega_1^3)^2+\alpha'(\omega_2^4)^2\}=0.\end{aligned} \tag{13'}$$

Таким образом, в силу уравнения (10α), асимптотические линии соответствуют не только на первой паре фокальных поверхностей (A_1) и (A_2) и на второй (A_3) и (A_4), но и на всех поверхностях; все четыре конгруэнции, описанные сторонами косого четырехугольника $A_1A_2A_4A_3$, являются конгруэнциями W. Это в точности соответствует конфигурации из четырех конгруэнций W в теореме перестановочности асимптотических преобразований. Как известно, переход от одной фокальной поверхности конгруэнции W к другой называется *асимптотическим преобразованием поверхности*. Теорема перестановочности (Т. К., стр. 151) утверждает, что для заданных двух асимптотических преобразований одной поверхности существует однопараметрическое семейство поверхностей, получаемых подходящими асимптотическими преобразованиями как из первого преобразования исходной поверхности, так и из второго. Четверка поверхностей: исходная поверхность, два заданных ее преобразования и любая поверхность из однопараметрического семейства общих преобразований этих последних, составит четыре фокальные поверхности пары T, все четыре конгруэнции которой суть конгруэнции W. Такую четверку конгруэнций называют *конфигурацией Бианки* (п. 37). Следовательно, равенство (12α) показывает, что пара T образует конфигурацию Бианки.

Во втором случае (12β), поскольку обращение в нуль γ или α' означает вырождение поверхностей (A_1), (A_2), а потому может быть исключено, уравнения (11α) и (12β) можно представить с помощью вспомогательных неизвестных λ и μ в виде

$$\beta=\lambda\gamma, \quad \beta'=-\lambda\alpha', \quad \alpha=\mu\gamma, \quad \gamma'=\mu\alpha'. \tag{12β'}$$

Внося теперь эти значения в уравнения (13), а также исключая $b-b'$ с помощью уравнений (11β), напишем уравнения асимптотических на поверхностях (A_3), (A_4) в виде

$$\begin{aligned}&\gamma\,\{(a\lambda+b'\mu)(\omega_1^3)^2+2(a+c\mu)\,\omega_1^3\omega_2^4+(b-c\lambda)(\omega_2^4)^2\}=0,\\ &\alpha'\,\{(a\lambda+b'\mu)(\omega_1^3)^2+2(a+c\mu)\,\omega_1^3\omega_2^4+(b-c\lambda)(\omega_2^4)^2\}=0,\end{aligned}$$

откуда прямо следует соответствие асимптотических на фокальных поверхностях (A_3), (A_4) конгруэнции (A_3A_4). Таким образом, и в этом случае конгруэнция W преобразуется преобразованием T в конгруэнцию W, но вспомогательные конгруэнции (A_1A_3), (A_2A_4) не будут конгруэнциями W, ибо асимптотические на поверхностях (A_3) или (A_4) не соответствуют асимптотическим на поверхностях (A_1) или (A_2).

Геометрический смысл наложенных требований (12β) или лучше ($12\beta'$) установить нетрудно. Уравнения (4α) п. 138 показывают, что система ($12\beta'$) эквивалентна соотношениям

$$\omega_3^4=\frac{\gamma}{\alpha'}\omega_2^1, \quad \omega_4^3=\frac{\alpha'}{\gamma}\,\omega_1^2,$$

которые совпадают с уравнениями ($6\alpha'$) п. 139 и эквивалентны требованию обратного соответствия развертывающихся поверхностей вспомогательных конгруэнций.

Таким образом, *если пара T содержит одну конгруэнцию W, то и вторая конгруэнция будет тоже конгруэнцией W. При этом и обе вспомогательные конгруэнции будут конгруэнциями W, если только первая пара конгруэнций не принадлежит одному линейному комплексу.*

166. Конфигурация Бианки. Конфигурация Бианки определяется системой (1), (4α, β) п. 138, к которым надо присоединить конечные уравнения (11α, β), (12α) п. 165:

$$\alpha\alpha'-\gamma\gamma'=0, \quad b=b', \quad a\alpha'+c\gamma'=0. \tag{14α}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (4α, β) п. 138, получим:

$$\begin{aligned}&\alpha\,[\Delta\alpha\omega_1^3]-[\Delta\beta\omega_2^4]=0, \quad [\Delta\beta'\omega_1^3]-\alpha'\,[\Delta\alpha'\omega_2^4]=0, && (14\beta)\\ &[\Delta\beta\omega_1^3]+\gamma\,[\Delta\gamma\omega_2^4]=0, \quad \gamma'\,[\Delta\gamma'\omega_1^3]+[\Delta\beta'\omega_2^4]=0,\\ &a\,[\Delta a\omega_1^3]+b'\,[\Delta b'\omega_2^4]=0, \quad b\,[\Delta b\omega_1^3]+c\,[\Delta c\omega_2^4]=0, && (14\gamma)\end{aligned}$$

где формы $\Delta\alpha$, $\Delta\gamma$, $\Delta\alpha'$, $\Delta\gamma'$ имеют значения (11δ) п. 151:

$$\begin{aligned}&\Delta a=d\ln a+2(\omega_1^1-\omega_3^3), \quad \Delta b=d\ln b+(\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4),\\ &\Delta b'=d\ln b'+\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4, \quad \Delta c=d\ln c+2(\omega_2^2-\omega_4^4), && (14\delta)\\ &\Delta\beta=d\beta+\beta(\omega_2^2-\omega_3^3)+\omega_3^2, \quad \Delta\beta'=d\beta'+\beta'(\omega_1^1-\omega_4^4)+\omega_4^1.\end{aligned}$$

Дифференцируя конечные уравнения (14α), будем иметь:

$$\Delta\alpha + \Delta\alpha' - \Delta\gamma - \Delta\gamma' = 0, \quad \Delta b = \Delta b', \quad \Delta a - \Delta c + \Delta\alpha' - \Delta\gamma' = 0. \qquad (14\varepsilon)$$

Характеристическая система, кроме форм ω_1^3, ω_2^4 и форм (1), (4α, β) п. 138, (14ε), содержит еще $q = 7$ форм:

$$\Delta\alpha, \ \Delta\alpha', \quad \Delta\gamma', \ \Delta\beta, \ \Delta\beta', \ \Delta a, \ \Delta b. \qquad (\alpha)$$

Система квадратичных уравнений (14β,γ) правильная. Ранг полярной матрицы (14β,γ) для элемента $\omega_1^3 = u$, $\omega_2^4 = v$

$$\alpha u\Delta\alpha - v\Delta\beta = 0, \quad u\Delta\beta' - \alpha' v\Delta\alpha' = 0, \quad \gamma' u\Delta\gamma' + v\Delta\beta' = 0,$$
$$au\Delta a + b'v\Delta b' = 0, \quad bu\Delta b + cv(\Delta a + \Delta\alpha' - \Delta\gamma') = 0,$$
$$u\Delta\beta + \gamma v(\Delta\alpha + \Delta\alpha' - \Delta\gamma') = 0$$

равен

$$s_1 = 6, \quad s_2 = q - s_1 = 1, \quad Q = s_1 + 2s_2 = 8.$$

Поскольку система (14β, γ) определяет $\mathfrak{E}_2$ с $N = 8$ произвольных параметров, признак Картана удовлетворен; система — в инволюции и определяет конфигурации Бианки с произволом $s_2 = 1$ функции двух аргументов.

Если конгруэнция (A_1A_2) задана в виде произвольной конгруэнции W, т. е. дано решение системы первых двух уравнений (1) п. 138, (4α) п. 138 и первого уравнения (14α), то, предполагая, что характеристические переменные этой системы включены в совокупность характеристических переменных большой системы (1), (4α, β) п. 138 и (14α — γ) и значения неизвестных функций, полученные из заданного решения малой системы, подставлены в уравнения большой системы, мы найдем систему уравнений для определения конфигурации Бианки, содержащей заданную конгруэнцию W, в виде

$$\omega_3^2 = 0, \quad \omega_4^1 = 0, \quad \omega_3^1 = a\omega_1^3 + b\omega_2^4, \quad \omega_4^2 = b\omega_1^3 + c\omega_2^4, \qquad (15\alpha)$$
$$a[\Delta a\omega_1^3] + b[\Delta b\omega_2^4] = 0, \quad b[\Delta b\omega_1^3] + c[\Delta c\omega_2^4] = 0, \qquad (15\beta)$$
$$a\alpha' + c\gamma' = 0, \quad \Delta a - \Delta c + \Delta\alpha' - \Delta\gamma' = 0. \qquad (15\gamma)$$

Характеристическая система, кроме форм ω_1^3, ω_2^4 и форм (15α, γ), содержит $q = 2$ формы: Δa, Δb.

Полярная система для элемента $\omega_1^3 = u$, $\omega_2^4 = v$

$$au\Delta a + bv\Delta b = 0, \quad bu\Delta b + cv\Delta a = 0$$

имеет ранг $s_1 = 2$, если определитель системы

$$ab(\gamma' u^2 + \alpha' v^2) \neq 0 \qquad (15\delta)$$

не равен нулю, система — в инволюции с характерами $s_1 = 2$, $s_2 = 0$ и определяет конфигурацию Бианки с произволом двух функций одного аргумента.

167. Особое решение. Пара T из двух конгруэнций R. Определитель системы (15δ) обращается в нуль на всем интегральном многообразии, и многообразие становится особым, если

$$1)\ b = 0 \ \text{или}\ 2)\ a = 0, \quad c = 0.$$

В первом случае последние два уравнения (15α) принимают вид

$$\omega_3^1 = a\omega_1^3, \quad \omega_4^3 = c\omega_2^4. \qquad (15\alpha')$$

Это совпадает с уравнениями (2′) п. 50 и показывает, что наша пара T — сопряженная расслояемая пара из двух конгруэнций R; развертывающиеся поверхности соответствуют прямо.

Поскольку теперь при $b = 0$ три уравнения (15β, γ) содержат только две формы Δa, Δc, которые подлежат определению, система — не в инволюции и требует продолжения.

Развертывая уравнения (14β, γ) по лемме Картана при коэффициенте $b = 0$, имеем:

$$\Delta\alpha = \alpha_1\omega_1^3 - \beta_1\omega_2^4, \qquad \Delta\gamma' = \gamma_1'\omega_1^3 + \beta_1'\omega_2^4,$$
$$\Delta\beta = \alpha\beta_1\omega_1^3 + \gamma\beta_2\omega_2^4, \qquad \Delta\beta' = \gamma'\beta_1'\omega_1^3 + \alpha'\beta_2'\omega_2^4, \qquad (16\alpha)$$
$$\Delta\gamma = \beta_2\omega_1^3 + \gamma_2\omega_2^4, \qquad \Delta\alpha' = -\beta_2'\omega_1^3 + \alpha_2'\omega_2^4,$$
$$\Delta a = a_1\omega_1^3, \qquad \Delta c = c_2\omega_2^4. \qquad (16\beta)$$

Виося эти значения в пфаффово уравнение (15γ), получим:

$$a_1 = \beta_2' + \gamma_1', \quad c_2 = \alpha_2' - \beta_1'. \qquad (16\beta'$$

Принимая во внимание первое уравнение (15γ), мы можем теперь заменить уравнения (14γ) одним пфаффовым уравнением:

$$d\ln(a\alpha' - c\gamma') + 2\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - 2\omega_4^4 = \gamma_1'\omega_1^3 + \alpha_2'\omega_2^4. \qquad (16\gamma)$$

Внешний дифференциал его имеет вид

$$[\Delta\gamma_1'\omega_1^3] + [\Delta\alpha_2'\omega_2^4] = 0, \qquad (16\delta)$$

где

$$\Delta\alpha_2' = d\alpha_2' + \alpha_2'(\omega_2^2 - \omega_4^4),$$
$$\Delta\gamma_1' = d\gamma_1' + \gamma_1'(\omega_1^1 - \omega_3^3).$$

Здесь уравнения (16α, δ) налагаются на задаваемую конгруэнцию (A_1A_2), которая не будет произвольной конгруэнцией W.

Если конгруэнция (A_1A_2) удовлетворяет системе уравнений из первых двух уравнений (1) п. 138, (4α) п. 138, (16α, δ) и первого уравнения (14α), то система

$$\omega_3^2 = 0, \quad \omega_4^1 = 0, \quad \omega_3^1 = a\omega_1^3, \quad \omega_4^1 = c\omega_2^4, \qquad (17\alpha)$$
$$a\alpha' + c\gamma' = 0,$$
$$d\ln(a\alpha' - c\gamma') + 2\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - 2\omega_4^4 = \gamma_1'\omega_1^3 + \alpha_2'\omega_2^4 \qquad (17\beta)$$

вполне интегрируема и определяет конфигурацию Бианки, присоединенную к конгруэнции (A_1A_2) с пятью произвольными постоянными; одно из них может быть приведено к единице нормированием вершин A_3, A_4.

Второе особое решение определяется условиями

$$a=0, \quad c=0, \quad b-b'=0 \tag{18α}$$

или

$$\overset{1}{\omega}_3 = b\overset{4}{\omega}_2, \quad \overset{2}{\omega}_4 = b\overset{3}{\omega}_1, \tag{18α'}$$

откуда следуют уравнения (12β) п. 141 и сравнения (10′) п. 141. Следовательно, развертывающиеся поверхности конгруэнций (A_1A_2), (A_3A_4) соответствуют накрест, а вспомогательные конгруэнции их принадлежат одному и тому же линейному комплексу (п. 140). Две конгруэнции (A_1A_2) и (A_3A_4) являются полярно сопряженными относительно нулевой системы этого линейного комплекса.

Каждая конгруэнция (A_1A_2) может быть преобразована с пятью произвольными постоянными в такую же полярно сопряженную (п. 144).

ГЛАВА XVI

ТЕОРЕМЫ ПЕРЕМЕСТИТЕЛЬНОСТИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ P РАССЛОЯЕМЫХ ПАР

168. Теорема переместительности. Допустим, что конгруэнция C посредством преобразований T и T' переведена в конгруэнции C_1 и C_1'; можно ли найти преобразования T_1' и T_1, которые переводили бы конгруэнции C_1 и C_1' в одну и ту же конгруэнцию C_2, отличную от конгруэнции C?

Если это возможно, то мы будем говорить, что преобразования T и T' переместительны. Мы хотим показать, что по отношению к конгруэнциям W все преобразования T переместительны.

Пусть (A_3A_4) и $(A_3'A_4')$ суть две конгруэнции C_1 и C_1', полученные из одной конгруэнции (A_1A_2) посредством преобразований T и T' и (B_1B_2) — конгруэнция C_2, которая получается из (A_3A_4) преобразованием T_1' и из $(A_3'A_4')$ преобразованием T_1.

Поскольку конгруэнции (A_3A_4) и $(A_3'A_4')$ образуют пары T с конгруэнцией (A_1A_2), мы имеем:

$$\begin{aligned} dA_1 &= \overset{1}{\omega}_1 A_1 + \overset{2}{\omega}_1 A_2 + \overset{3}{\omega}_1 A_3, & dA_2 &= \overset{1}{\omega}_2 A_1 + \overset{2}{\omega}_2 A_2 + \overset{4}{\omega}_2 A_4, \\ dA_1 &= \overset{-1}{\omega}_1 A_1' + \overset{-2}{\omega}_1 A_2' + \overset{-3}{\omega}_1 A_3', & dA_2 &= \overset{-1}{\omega}_2 A_1' + \overset{-2}{\omega}_2 A_2' + \overset{-4}{\omega}_2 A_4'. \end{aligned} \tag{a}$$

Ввиду отсутствия каких-либо ограничений на нормирование вершин, мы можем предположить $A_1' = A_1$, $A_2' = A_2$. Формы $\overset{3}{\omega}_1$ и $\overset{-3}{\omega}_1$ должны быть пропорциональны (линейно зависимы), ибо уравнения $\overset{3}{\omega}_1 = 0$ и $\overset{-3}{\omega}_1 = 0$ определяют одни и те же развертывающиеся поверхности конгруэнции (A_1A_2). Мы можем выбрать нормирование точки A_3' так, чтобы формы $\overset{3}{\omega}_1$ и $\overset{-3}{\omega}_1$ были равны. Аналогично нормирование A_4' приведет к $\overset{4}{\omega}_2 = \overset{-4}{\omega}_2$.

Составляя разность уравнений (a), получим:

$$\begin{aligned} &(\overset{1}{\omega}_1 - \overset{-1}{\omega}_1) A_1 + (\overset{2}{\omega}_1 - \overset{-2}{\omega}_1) A_2 + \overset{3}{\omega}_1 (A_3 - A_3') = 0, \\ &(\overset{1}{\omega}_2 - \overset{-1}{\omega}_2) A_1 + (\overset{2}{\omega}_2 - \overset{-2}{\omega}_2) A_2 + \overset{4}{\omega}_2 (A_4 - A_4') = 0. \end{aligned} \tag{b}$$

Равенства (b) должны быть тождествами: 1) относительно форм ω ω_2^4, если все формы ω_i^k, $\overline{\omega}_i^k$ выразить через них; 2) относительн вершин A_i, если точки A_3', A_4' через них выразить.

Поскольку

$$\omega_1^2 = \beta\omega_1^3 + \gamma\omega_2^4, \qquad \overline{\omega}_1^2 = \overline{\beta}\omega_1^3 + \overline{\gamma}\omega_2^4,$$
$$\omega_2^1 = \gamma'\omega_1^3 + \beta'\omega_2^4, \qquad \overline{\omega}_2^1 = \overline{\gamma}'\omega_1^3 + \overline{\beta}'\omega_2^4,$$

сравнивая коэффициенты при форме ω_1^3 в первом равенстве (b) и пр ω_2^4 во втором равенстве (b), получим:

$$A_3' = \xi A_1 + (\beta - \overline{\beta}) A_2 + A_3,$$
$$A_4' = (\beta' - \overline{\beta}') A_1 + \eta A_2 + A_4. \qquad (1\alpha$$

Внося значения (1α) в уравнения (b) и сравнивая коэффициент при линейно независимых точках A_1, A_2, получим:

$$\overline{\omega}_1^1 = \omega_1^1 - \xi\omega_1^3, \qquad \overline{\omega}_1^2 = \omega_1^2 - (\beta - \overline{\beta})\,\omega_1^3,$$
$$\overline{\omega}_2^2 = \omega_2^2 - \eta\omega_2^4, \qquad \overline{\omega}_2^1 = \omega_2^1 - (\beta' - \overline{\beta}')\,\omega_2^4, \qquad (1\beta$$

и

$$\overline{\alpha} = \alpha, \quad \overline{\gamma} = \gamma.$$

Дифференцируя равенства (1α) и внося в уравнения

$$dA_3' = \overline{\omega}_3^1 A_1 + \overline{\omega}_3^3 A_3' + \overline{\omega}_3^4 A_4',$$
$$dA_4' = \overline{\omega}_4^2 A_2 + \overline{\omega}_4^3 A_3' + \overline{\omega}_4^4 A_4',$$

получим:

$$\overline{\omega}_3^1 - \omega_3^1 = \Delta\xi, \qquad \overline{\omega}_4^2 - \omega_4^2 = \Delta\eta, \qquad (1\gamma$$
$$\overline{\omega}_3^3 = \omega_3^3 + \xi\omega_1^3, \qquad \overline{\omega}_4^4 = \omega_4^4 + \eta\omega_2^4,$$
$$\overline{\omega}_3^4 = \omega_3^4 + (\beta - \overline{\beta})\,\omega_2^4, \quad \overline{\omega}_4^3 = \omega_4^3 + (\beta' - \overline{\beta}')\,\omega_1^3, \qquad (1\delta$$
$$d(\beta - \overline{\beta}) + \xi\omega_1^2 - \eta\omega_3^4 + (\beta - \overline{\beta})(\omega_2^2 - \omega_3^3 - \xi\omega_1^3 - \eta\omega_2^4) = 0,$$
$$d(\beta' - \overline{\beta}') - \xi\omega_4^3 + \eta\omega_2^1 + (\beta' - \overline{\beta}')(\omega_1^1 - \omega_4^4 - \xi\omega_1^3 - \eta\omega_2^4) = 0, \qquad (1\varepsilon$$

где

$$\Delta\xi = d\xi + \xi(\omega_1^1 - \omega_3^3) + (\beta - \overline{\beta})\,\omega_2^1 -$$
$$- (\beta' - \overline{\beta}')\,\omega_3^4 - \xi^2\omega_1^3 - (\beta - \overline{\beta})(\beta' - \overline{\beta}')\,\omega_2^4,$$
$$\Delta\eta = d\eta + \eta(\omega_2^2 - \omega_4^4) + (\beta' - \overline{\beta}')\,\omega_1^2 - \qquad (1$$
$$- (\beta - \overline{\beta})\,\omega_4^3 - \eta^2\omega_2^4 - (\beta - \overline{\beta})(\beta' - \overline{\beta}')\,\omega_1^3.$$

Уравнения ($1\beta - \varepsilon$) получены простым пересчетом формул пос подстановки выражений (1α); поэтому внешние дифференциалы удовлетворены в силу уравнений структуры.

Конгруэнция (B_1B_2) по условию должна образовать пару T с каждой из конгруэнций (A_3A_4), ($A_3'A_4'$), причем фокусами будут точки B_1, B_2. Отсюда следует прежде всего, что точки B_1 и B_2 лежат соответственно в плоскостях $A_1A_3A_4$, $A_2A_3A_4$ (касательные плоскости в точках A_3 и A_4). Значит,

$$B_1 = \lambda_1 A_1 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4, \qquad B_2 = \mu_2 A_2 + \mu_3 A_3 + \mu_4 A_4. \qquad (a')$$

Затем они лежат соответственно в фокальных плоскостях $A_1A_3'A_4'$, $A_2A_3'A_4'$ (касательных плоскостях поверхностей (A_3') и (A_4')):

$$(A_1A_3'A_4'B_1) = 0, \qquad (A_2A_3'A_4'B_2) = 0,$$

а точки A_3' и A_4' — в фокальных плоскостях $A_3B_1B_2$, $A_4B_1B_2$ конгруэнции (B_1B_2):

$$(A_3B_1B_2A_3') = 0, \qquad (A_4B_1B_2A_4') = 0.$$

Внося сюда A_3', A_4', B_1, B_2, получим:

$$\lambda_4\eta + \lambda_3(\beta - \overline{\beta}) = 0, \qquad \mu_3\xi + \mu_4(\beta' - \overline{\beta}') = 0, \qquad (b')$$
$$\lambda_4\mu_2\xi + \lambda_1\mu_4(\beta - \overline{\beta}) = 0, \qquad \lambda_1\mu_3\eta + \lambda_3\mu_2(\beta' - \overline{\beta}') = 0. \qquad (c')$$

Пользуясь произволом нормирования точек B_1, B_2, можно разрешить уравнения (b'), полагая

$$\lambda_3 = \eta, \qquad \lambda_4 = \overline{\beta} - \beta, \qquad \mu_3 = \overline{\beta}' - \beta', \qquad \mu_4 = \xi.$$

Тогда уравнения (c') дадут только одно условие

$$\lambda_1 = \mu_2.$$

Обозначая $\lambda_1 = \mu_2$ через ρ, получим:

$$B_1 = \rho A_1 + \eta A_3 + (\overline{\beta} - \beta) A_4,$$
$$B_2 = \rho A_2 + (\overline{\beta}' - \beta') A_3 + \xi A_4. \qquad (2\alpha)$$

Нам остается потребовать, чтобы фокальные плоскости $A_3B_1B_2$ и $A_4B_1B_2$ касались фокальных поверхностей (B_1), (B_2) в точках B_1 и B_2:

$$(A_3B_1B_2\,dB_1) = 0, \qquad (A_4B_1B_2\,dB_2) = 0.$$

Внося сюда значения (2α), получим единственное уравнение

$$d\rho + \rho(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4) + \eta\omega_3^1 + \xi\omega_4^2 - \rho(\xi\omega_1^3 + \eta\omega_2^4) = 0. \qquad (2\beta)$$

Дифференцируя внешним образом, получим:

$$\{[\omega_3^1\omega_1^3] + [\omega_4^2\omega_2^4]\}\,\{\xi\eta - (\beta - \overline{\beta})(\beta' - \overline{\beta}')\} + [\overline{\omega}_3^1\omega_4^2] + [\overline{\omega}_4^2\omega_3^1] -$$
$$- \rho\,\{[\omega_3^1\omega_1^3] + [\omega_4^2\omega_2^4] + [\overline{\omega}_3^1\omega_1^3] + [\overline{\omega}_4^2\omega_2^4]\} = 0, \qquad (2\gamma)$$

или, если положить

$$\overline{\omega}_3^1 = \overline{a}\omega_1^3 + \overline{b}\omega_2^4, \qquad \overline{\omega}_4^2 = \overline{b}'\omega_1^3 + \overline{c}\omega_2^4,$$

развернуть по формам ω_1^3, ω_2^4 и сократить на не равное нулю про-изведение $[\omega_1^3\omega_2^4]$,

$$(b'-b)\{\xi\eta-(\beta-\overline{\beta})(\beta'-\overline{\beta}')\}+$$
$$+\overline{a}c-a\overline{c}+\overline{b}'b-\overline{b}b'-\rho(b-b'+\overline{b}-\overline{b}')=0. \qquad (2\gamma')$$

Это уравнение удовлетворяется при $b=b'$, $\overline{b}=\overline{b}'$, ибо теперь

$$a\alpha'+c\gamma'=0, \qquad \overline{a}\alpha'+\overline{c}\gamma'=0$$

и, следовательно,

$$\overline{a}c-a\overline{c}=0. \qquad (2\delta)$$

Но при $b=b'$, в силу (5β) п. 138, $\alpha\alpha'-\gamma\gamma'=0$, и, следовательно исходная конгруэнция (A_1A_2) — конгруэнция W (п. 47). Таким обра-зом, имеем теорему:

Преобразования T для конгруэнций $W(b=b')$ переместительны

169. Конфигурация P. Мы видели, что при $b=b'$ уравнени $(2\gamma')$ обращается в тождество и уравнение (2β) вполне интегрируемо Следовательно, существует однопараметрическое семейство конгру-энций (B_1B_2), которые образуют пару T и с конгруэнцией $(A_3A_4$ и с конгруэнцией $(A'_3A'_4)$. Уравнения (2α) показывают, что при изме-нении параметра ρ семейства точки B_1 и B_2 описывают прямы $\{A_1, \eta A_3+(\overline{\beta}-\beta)A_4\}$, $\{A_2, (\overline{\beta}'-\beta')A_3+\xi A_4\}$. В координатах x относительно тетраэдра $\{A_i\}$ геометрическое место прямых B_1B_2 пр неподвижном тетраэдре $\{A_i\}$ образует поверхность 2-го порядка:

$$x_1x_3(\overline{\beta}-\beta)+x_2x_3\xi-x_1x_4\eta-(\overline{\beta}'-\beta')x_2x_4=0. \qquad (3)$$

Видим, что этой поверхности принадлежит и прямая A_1A_2.

Каждая образующая B_1B_2 этой поверхности 2-го порядка пере-секает не только прямые $\{A_1, \eta A_3+(\overline{\beta}-\beta)A_4\}$, $\{A_2, (\overline{\beta}'-\beta')A_3+\xi A_4\}$, но и прямые $A_3A'_3$, $A_4A'_4$, т. е. $\{A_3, \xi A_1-(\overline{\beta}-\beta)A_2\}$, $\{A_4, (\beta'-\overline{\beta}')A_1+\eta A_2\}$. Это нетрудно проверить вычислением, но в этом нет надобност ибо, поскольку прямые B_1B_2, $A_3A'_3$ лежат в касательной плоскос поверхности (B_1), они пересекаются и точно так же пересекают прямые B_1B_2, $A_4A'_4$.

Четыре конгруэнции (A_1A_2), (A_3A_4), $(A'_3A'_4)$, (B_1B_2) вполне равн правны.

Если конгруэнции (A_3A_4) и $(A'_3A'_4)$ представляют два перв преобразования T от конгруэнции (A_1A_2) и конгруэнция (B_1B_2) пол чается из нее двукратным применением преобразования T, то мож сказать совершенно так же, что конгруэнции (A_1A_2) и (B_1B_2) являют

двумя первыми преобразованиями от конгруэнции (A_3A_4), а конгру-энция $(A'_3A'_4)$ будет по отношению к ней преобразованием 2-го по-рядка. Наряду с конгруэнцией $(A'_3A'_4)$ найдется еще однопараметри-ческое семейство конгруэнций (B_3B_4), которые, так же как конгру-энции (A_3A_4) и $(A'_3A'_4)$, являются общими преобразованиями T и для конгруэнции (A_1A_2), и для конгруэнции (B_1B_2), и для всего пучка конгруэнций, описанных образующими (2α) поверхности 2-го поряд-ка (3).

Фокусы B_3 и B_4 этих конгруэнций (B_3B_4) располагаются соот-ветственно на прямых $A_3A'_3$ и $A_4A'_4$. Между тем, известно, что ли-нейчатая поверхность 2-го порядка вполне определяется как геомет-рическое место прямых, пересекающих три заданные неподвижные прямые, а каждая прямая B_3B_4, так же как и прямая B_1B_2, пере-секает не только прямые $A_3A'_3$, $A_4A'_4$, но и прямые A_1B_1, A_2B_2, которые лежат соответственно в фокальных плоскостях $B_3A_1B_1$ и $B_4A_2B_2$ конгруэнции B_3B_4. Следовательно, все прямые B_3B_4, так же как и прямые B_1B_2, являются образующими одной поверхности 2-го порядка (3).

Хотя каждая образующая одного семейства поверхности (3) является одновременно лучом одной из конгруэнций (B_1B_2) и одной из конгруэнций (B_3B_4), но тем не менее эти конгруэнции не совпа-дают. Можно сказать, что все двупараметрическое семейство поверх-ностей 2-го порядка (3) своими образующими составляет трехмерное многообразие прямых, которое разлагается двумя способами на одно-параметрическое семейство конгруэнций (B_1B_2) и (B_3B_4). Действи-тельно, произвольная образующая поверхности (3) как луч конгру-энции (B_1B_2) имеет фокусами точки пересечения с прямыми $\{A_1, \eta A_3+(\beta-\overline{\beta})A_4\}$ и $\{A_2, (\beta'-\overline{\beta}')A_3+\xi A_4\}$ и фокальными плоско-стями — плоскости $B_1A_3A'_3$ и $B_2A_4A'_4$, а если ее рассматривать как луч конгруэнции (B_3B_4), то его фокусы будут располагаться на прямых $A_3A'_3$, $A_4A'_4$, а фокальные плоскости будут проходить через прямые A_1B_1 и A_2B_2.

Последнее замечание показывает, что фокальные поверхности (B_1) и (B_3), (B_2) и (B_4) служат расслояющими поверхностями соответ-ственно для пар конгруэнций (A_1B_1), (A_3B_3) и (A_2B_2), (A_4B_4).

170. Конфигурация Мёбиуса 8_4. Если собрать все фокусы, фокальные плоскости и лучи наших конгруэнций при закрепленном тетраэдре, т. е. при $\omega_1^3=0$, $\omega_2^4=0$, то получим совокупность восьми точек — фокусов четырех основных конгруэнций (A_1A_2), (A_3A_4), $(A'_3A'_4)$, (B_1B_2), восьми плоскостей, которые служат их фокальными плоскостями, и 12 прямых — лучей четырех основных и восьми вспо-могательных конгруэнций. В каждой вершине сходятся три луча, четыре плоскости;в каждой плоскости лежат три луча, четыре вер-шины. Такая совокупность точек, прямых и плоскостей называется конфигурацией Мёбиуса 8_4. Все двупараметрическое семейство таких конфигураций Мёбиуса, т. е. четверку конгруэнций W, образующих замкнутый цикл так, что каждые две последовательные конгруэнции находятся в отношении преобразования T, мы будем называть конфигурацией P.

Ради удобства речи мы будем иногда говорить о параллелепипеде P, считая лучи основных конгруэнций боковыми ребрами, а одноименные фокусы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_3$, $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{A}_3'$ и $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_4$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{A}_4'$ вершинами двух оснований. Тогда можно, например, сказать, что оба основания и каждая боковая грань описывают конфигурацию Бианки из теоремы о переместительности асимптотических преобразований, а их диагонали — расслояемую пару конгруэнций.

Действительное расположение более напоминает два тетраэдра, из которых один вложен в другой. Если точки $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_3$, $\boldsymbol{A}_3'$, $\boldsymbol{B}_1$ принять за вершины первого тетраэдра, то расположение касательных плоскостей к поверхностям, описанным вершинами, определяется тем, что косой четырехугольник $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}_3'$ описывает пару T. В каждой из этих касательных плоскостей из ее точки касания проведен луч одной из четырех основных конгруэнций. Вторые фокусы служат вершинами косого четырехугольника $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{A}_4'$, который описывает новую пару T.

171. Конфигурация *PR*. В п. 167 мы рассматривали особый случай преобразования T:

$$b=0, \quad b'=0. \tag{a}$$

Эти два равенства эквивалентны требованию, чтобы развертывающиеся поверхности конгруэнций $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$ и $(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4)$ соответствовали прямо: два фокуса $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_3$, принадлежащих одному лучу $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_3$ вспомогательной конгруэнции, одновременно описывают линии, касающиеся лучей $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2$ и $\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4$, и аналогично фокусы $\boldsymbol{A}_2$ и $\boldsymbol{A}_4$.

Исходная конгруэнция $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$ и ее преобразование $(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4)$ являются конгруэнциями R, пара вспомогательных конгруэнций переводит сеть R в сеть R.

Допустим теперь, что оба первых преобразования T переводят конгруэнцию $R(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$ в конгруэнцию R, т. е. допустим, что не только конгруэнция $(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4)$, но и конгруэнция $(\boldsymbol{A}_3'\boldsymbol{A}_4')$ являются конгруэнциями R. Следовательно, имеют место уравнения (14α) п. 166, (a) и (b):

$$\bar{b}=0, \quad \bar{b}'=0, \tag{b}$$

т. е., в силу (1γ) п. 168,

$$[\Delta\xi\omega_1^3]=0, \quad [\Delta\eta\omega_2^4]=0.$$

Мы хотим показать, что среди однопараметрического семейства конгруэнций $(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2)$, определяемого вполне интегрируемым уравнением (2β) п. 168, найдется, кроме конгруэнции $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$, еще одна конгруэнция R. Для этого нам надо доказать только, что при подходящем выборе решения ρ уравнения (2β) развертывающиеся поверхности конгруэнции $(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2)$ будут прямо соответствовать развертывающимся поверхностям конгруэнции $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$, а это в свою очередь сводится к доказательству справедливости двух сравнений:

$$\begin{aligned}(d\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2)&\equiv 0 \qquad (\operatorname{mod}\omega_1^3),\\ (d\boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2)&\equiv 0 \qquad (\operatorname{mod}\omega_2^4).\end{aligned} \tag{c}$$

Дифференцируя равенства (2α) п. 168 и пользуясь уравнениями (1γ, ε), (2β) п. 168, получим:

$$d\boldsymbol{B}_1\equiv \boldsymbol{B}_1\left(\omega_3^3+\omega_4^4-\omega_2^2+\eta\omega_2^4-\frac{c\xi^3}{\rho}\omega_2^4\right)+\boldsymbol{B}_2\left\{\gamma\omega_2^4-c\,\frac{\bar\beta-\beta}{\rho}\,\omega_2^4\right\}+$$
$$+\boldsymbol{A}_3\left\{\bar c-c+c\,\frac{\xi\eta}{\rho}-\frac{c\,(\bar\beta-\beta)\,(\bar\beta'-\beta')}{\rho}\right\}\omega_2^4 \qquad (\operatorname{mod}\omega_1^3).$$

Следовательно, первое из сравнений (c) приводит к равенству

$$\rho(\bar c-c)+c\xi\eta-c(\bar\beta-\beta)(\bar\beta'-\beta')=0, \tag{4}$$

второе сравнение получается из первого обычной подстановкой указателей $\begin{pmatrix}1 & 3 & \xi & \bar\beta-\beta\\ 2 & 4 & \eta & \bar\beta'-\beta'\end{pmatrix}$; поскольку равенство (4) относительно этого преобразования инвариантно, оно обеспечивает справедливость обоих сравнений (c).

Уравнение (4) определяет, если $\bar c\neq c$, только одно значение ρ. Внося это значение в уравнение (2β) п. 168 и используя уравнения (2δ), (1γ, ε, δ) п. 168, мы получим тождество. Следовательно, уравнение (4) определяет частный интеграл уравнения (2β) п. 168. Конгруэнция $(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2)$, соответствующая этому интегралу, будет конгруэнцией R.

Таким образом, среди всего однопараметрического семейства конгруэнций W, получаемых преобразованием T как из конгруэнции $(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4)$, так и из конгруэнции $(\boldsymbol{A}_3'\boldsymbol{A}_4')$, кроме исходной конгруэнции $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$, существует только одна конгруэнция R, определяемая уравнением (4).

Уравнение (4) не будет содержать ρ, если

$$\bar c-c=0. \tag{5α}$$

При этом однопараметрическое семейство конгруэнций $(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2)$ не будет содержать ни одной конгруэнции R, кроме конгруэнции $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$, разве только одновременно с коэффициентом при ρ в уравнении (4) обратится в нуль и свободный член его. Поскольку обращение в нуль коэффициента c означает вырождение конгруэнции (A_4A_3), надо допустить обращение в нуль разности

$$\xi\eta-(\bar\beta-\beta)(\bar\beta'-\beta')=0. \tag{5β}$$

В этом случае все семейство конгруэнций (B_1B_2) будет состоять только из конгруэнций R.

Если произвольно задано одно преобразование T конгруэнции (A_1A_2), например, задана конгруэнция (A_3A_4), то определение второго преобразования, т. е. конгруэнции $(A_3'A_4')$, складывается из определения параметров a, c из уравнений (16β) п. 167 и интегрирования вполне интегрируемой системы (1δ, ε) п. 168, где $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ определяются по формулам (1γ). Если имеет место уравнение (5α), то, в силу (2α) п. 168, $\bar a=a$, интеграл $\bar a=a$, $\bar c=c$ уже задан и определение конгруэнции $(A_3'A_4')$ зависит только от интегрирования системы (1ε, δ).

Нетрудно убедиться непосредственным дифференцированием, что уравнение

$$\xi\eta-(\bar\beta-\beta)(\bar\beta'-\beta')=\mathrm{const} \tag{5β'}$$

является первым интегралом системы (1ε, δ) п. 168 при $\Delta\xi=0$, $\Delta\eta=0$.

Задание равенства (5β) равносильно закреплению произвольного постоянного в интеграле (5β') со значением, равным нулю. Таким образом, каждое из уравнений (5α, β) уменьшает на единицу число произвольных постоянных, от которых зависит выбор второй конгруэнции $(A_3'A_4')$.

172. Преобразование P расслояемых пар. Будем пользоваться условным языком (п. 170), называя конфигурацию P «параллелепипедом». Переход от одной к другой расслояемой паре, описанных диагоналями двух противоположных «граней» параллелепипеда, является преобразованием расслояемой пары посредством конфигурации P или «преобразованием P».

Рассмотрим косые четырехугольники $A_1A_3B_1A_3'$ и $A_2A_4B_2A_4'$.

Мы видели, что уравнение (2α) определяет семейство конгруэнций (B_1B_2), фокусы которых пробегают прямые A_1B_1 и A_2B_2. Каждая поверхность (B_1) содержит в своей касательной плоскости точки A_3, A_3' и B_2, следовательно, проходит через луч A_3A_3'. Аналогично, если исходить из конгруэнции (A_3A_4) и двух преобразований T конгруэнций (A_1A_2) и (B_1B_2), то найдем семейство конгруэнций (B_3B_4), которое содержит в себе и конгруэнцию $(A_3'A_4')$. Фокусы этих конгруэнций пробегают прямые A_3A_3', A_4A_4', а касательные плоскости поверхности (B_3) содержат точки A_1, B_1 и B_4, следовательно, проходят через прямую A_1B_1. Таким образом, расслояющими поверхностями пары (A_1B_1), (A_3B_3) служат поверхности (B_1) и (B_3), пары (A_2B_2), (A_4B_4) — поверхности (B_2) и (B_4). Поскольку каждая поверхность (B_1) вместе с соответствующей поверхностью (B_2) и (B_3) вместе с (B_4)

образуют пары фокальных поверхностей конгруэнций W, можно сказать, что преобразование P расслояемых пар производится посредством двух однопараметрических семейств конгруэнций W, фокальными поверхностями которых служат расслояющие поверхности первой и второй пары.

Очевидно, что справедливо и обратное. Если существуют такие два семейства конгруэнций, то любая пара конгруэнций (B_1B_2) и (B_3B_4) вместе с исходной парой (A_1A_3), (A_2A_4) даст конфигурацию P.

173. Построение P-преобразованной пары. Пусть $\{M_i\}$ ($i=1, 2, 3, 4$) — исходная расслояемая пара, $\{N_i\}$ — ее преобразование. Отнесем пару $\{M_i\}$ к ее реперу 1-го порядка и выберем вершины $\{N_i\}$ в точках пересечения прямых N_1N_2, N_3N_4 с фокальными плоскостями первой пары. Нормируя точки N_i, можно положить

$$\begin{aligned} N_1&=a_1M_3+b_1M_4+M_1, & N_3&=a_3M_1+b_3M_2+M_3,\\ N_2&=a_2M_3+b_2M_4+M_2, & N_4&=a_4M_1+b_4M_2+M_4. \end{aligned} \tag{a}$$

Пусть точки $Q=M_1+\lambda M_2$, $Q'=M_3+\nu M_4$ описывают расслояющие поверхности первой пары. Следовательно, λ и ν удовлетворяют вполне интегрируемым уравнениям

$$\begin{aligned} &d\lambda+\omega_1^2+\lambda(\omega_2^2-\omega_1^1)-\lambda^2\omega_2^1=0,\\ &d\nu+\omega_3^4+\nu(\omega_4^4-\omega_3^3)-\nu^2\omega_4^3=0. \end{aligned} \tag{6}$$

Касательные плоскости этих поверхностей

$$(M_1+\lambda M_2,\ M_3,\ M_4),\qquad (M_3+\nu M_4,\ M_1,\ M_2) \tag{b}$$

пересекают прямые N_1N_2, N_3N_4 в точках

$$P=N_1+\lambda N_2,\qquad P'=N_3+\nu N_4.$$

Так как точки $M_1+\lambda M_2$, $N_1+\lambda N_2$ служат фокусами конгруэнции QP, то точки Q, Q' должны лежать соответственно в касательных плоскостях (P) и (Q)

$$\begin{aligned} &(M_1+\lambda M_2,\ N_1+\lambda N_2,\ N_3,\ N_4)=0,\\ &(M_3+\nu M_4,\ N_3+\nu N_4,\ N_1,\ N_2)=0. \end{aligned}$$

Здесь λ и ν в начальной точке должны быть вполне произвольны. Следовательно,

$$(M_1N_1N_3N_4)=0,\quad (M_2N_2N_3N_4)=0,\quad (M_1N_2N_3N_4)+(M_2N_1N_3N_4)=0,$$

и также верны аналогичные равенства, получаемые подстановкой указателей $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

Внося значения (a), получим систему

$$a_1b_3+b_1b_4=0, \quad (\mathrm{a}_1) \qquad a_3b_1+b_2b_3=0, \quad (\mathrm{a}_2)$$

$$a_2a_3+b_2a_4=0, \quad (\mathrm{b}_1) \qquad a_1a_4+a_2b_4=0, \quad (\mathrm{b}_2)$$

$$b_2b_4-a_1a_3=0, \quad (\mathrm{c}_1) \qquad a_4b_1-a_2b_3=0. \quad (\mathrm{c}_2)$$

Если $a_1=b_1=0$, то точка $N_1\equiv M_1$ и конфигурация вырождается. Значит, если конгруэнция не вырождается, то из (a_1) будет следовать

$$b_4=ta_1, \quad b_3=-tb_1. \tag{7α}$$

Теперь (a_2), (b_2), (c_1), (c_2) дают

$$b_1(a_3-tb_2)=0, \quad a_1(a_4+ta_2)=0,$$
$$a_1(a_3-tb_2)=0, \quad b_1(a_4+ta_2)=0.$$

Если a_1, b_1 не обращаются в нуль одновременно, то имеем:

$$a_3=tb_2, \quad a_4=-ta_2, \tag{7β}$$

и (b_1) будет удовлетворено.

Если

$$a_1=0, \quad b_1=0, \tag{8α}$$

то (a_1) удовлетворено; уравнения (a_2), (b_2), (c_2), (c_1) принимают вид

$$b_2b_3=0, \quad a_2b_4=0, \quad a_2b_3=0, \quad b_2b_4=0.$$

Отсюда или

$$a_2=0, \quad b_2=0,$$

конгруэнция $(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2)$ совпадает с конгруэнцией $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$, или

$$b_3=0, \quad b_4=0, \tag{8β}$$

и (b_1) дает

$$a_4=-ta_2, \quad a_3=tb_2. \tag{8γ}$$

Нетрудно заметить, что решение (8α, β, γ) получается из решения (7α, β), если положить $a_1=b_1=0$.

174. Теорема существования. Нам остается потребовать, чтобы плоскости $(\boldsymbol{P}\boldsymbol{N}_3\boldsymbol{N}_4)$ и $(\boldsymbol{P}'\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2)$ касались поверхностей $(\boldsymbol{P})$, $(\boldsymbol{P}')$, что выражается уравнениями

$$(d(\boldsymbol{N}_1+\lambda\boldsymbol{N}_2), \ \boldsymbol{N}_1+\lambda\boldsymbol{N}_2, \ \boldsymbol{N}_3, \ \boldsymbol{N}_4)=0,$$
$$(d(\boldsymbol{N}_3+\nu\boldsymbol{N}_4), \ \boldsymbol{N}_3+\nu\boldsymbol{N}_4, \ \boldsymbol{N}_1, \ \boldsymbol{N}_2)=0.$$

Поскольку параметры λ и ν определяют семейства расслояющих поверхностей, они не могут быть связаны конечными уравнениями. Отсюда, пользуясь уравнениями (6) и сравнивая с нулем коэффициенты

при степенях λ и ν, получим систему

$$(d\boldsymbol{N}_1-\omega_1^2\boldsymbol{N}_2, \ \boldsymbol{N}_1, \ \boldsymbol{N}_3, \ \boldsymbol{N}_4)=0, \quad (d\boldsymbol{N}_3-\omega_3^4\boldsymbol{N}_4, \ \boldsymbol{N}_3, \ \boldsymbol{N}_1, \ \boldsymbol{N}_2)=0,$$
$$(d\boldsymbol{N}_2-\omega_2^1\boldsymbol{N}_1, \ \boldsymbol{N}_2, \ \boldsymbol{N}_3, \ \boldsymbol{N}_4)=0, \quad (d\boldsymbol{N}_4-\omega_4^3\boldsymbol{N}_3, \ \boldsymbol{N}_4, \ \boldsymbol{N}_1, \ \boldsymbol{N}_2)=0,$$
$$\big(d\boldsymbol{N}_2+\boldsymbol{N}_2(\omega_1^1-\omega_2^2), \ \boldsymbol{N}_1, \ \boldsymbol{N}_3, \ \boldsymbol{N}_4\big)+(d\boldsymbol{N}_1, \ \boldsymbol{N}_2, \ \boldsymbol{N}_3, \ \boldsymbol{N}_4)=0,$$
$$\big(d\boldsymbol{N}_4+\boldsymbol{N}_4(\omega_3^3-\omega_4^4), \ \boldsymbol{N}_3, \ \boldsymbol{N}_1, \ \boldsymbol{N}_2\big)+(d\boldsymbol{N}_3, \ \boldsymbol{N}_4, \ \boldsymbol{N}_1, \ \boldsymbol{N}_2)=0.$$

Если сюда внести значения

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N}_1&=a_1\boldsymbol{M}_3+b_1\boldsymbol{M}_4+\boldsymbol{M}_1, & \boldsymbol{N}_3&=t(b_2\boldsymbol{M}_1-b_1\boldsymbol{M}_2)+\boldsymbol{M}_3,\\ \boldsymbol{N}_2&=a_2\boldsymbol{M}_3+b_2\boldsymbol{M}_4+\boldsymbol{M}_2, & \boldsymbol{N}_4&=t(-a_2\boldsymbol{M}_1+a_1\boldsymbol{M}_2)+\boldsymbol{M}_4, \end{aligned} \tag{9α}$$

то получим:

$$\begin{aligned} &b_1\,\Delta a_1-a_1\,\Delta b_1=0, \quad b_2\,\Delta a_2-a_2\,\Delta b_2=0,\\ &b_2\,\Delta b_1-b_1\,\Delta b_2=0, \quad a_1\,\Delta a_2-a_2\,\Delta a_1=0,\\ &b_1\,\Delta a_2-a_2\,\Delta b_1=0, \quad b_2\,\Delta a_1-a_1\,\Delta b_2=0, \end{aligned} \tag{9β}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta a_1&=da_1+a_1(\omega_3^3-\omega_1^1)+b_1\omega_4^3-a_2\omega_1^2+\frac{1}{t}\,\omega_4^2+\omega_1^3,\\ \Delta b_2&=db_2+b_2(\omega_4^4-\omega_2^2)+a_2\omega_3^4-b_1\omega_2^1+\frac{1}{t}\,\omega_3^1+\omega_2^4,\\ \Delta b_1&=db_1+b_1(\omega_4^4-\omega_1^1)+a_1\omega_3^4-b_2\omega_1^2,\\ \Delta a_2&=da_2+a_2(\omega_3^3-\omega_2^2)+b_2\omega_4^3-a_1\omega_2^1. \end{aligned} \tag{9γ}$$

Уравнения (9β) эквивалентны трем уравнениям:

$$\frac{\Delta a_1}{a_1}=\frac{\Delta a_2}{a_2}, \quad \frac{\Delta b_2}{b_2}=\frac{\Delta b_1}{b_1}, \quad \frac{\Delta a_2}{a_2}=\frac{\Delta b_1}{b_1}. \tag{10α}$$

Внешнее дифференцирование последнего уравнения приводит к тождеству, а два первых уравнения дают, в силу (10α),

$$\begin{aligned} &[b_1\,\nabla t+\Delta b_1, \ \omega_4^2]-t\,[\Delta b_1\omega_1^3]=0,\\ &[b_1\,\nabla t+\Delta b_1, \ \omega_3^1]-t\,[\Delta b_1\omega_2^4]=0, \end{aligned} \tag{10β}$$

где

$$\nabla t=d\ln t+\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4. \tag{10γ}$$

При заданной расслояемой паре $(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2)$, $(\boldsymbol{M}_3\boldsymbol{M}_4)$ посредством произвольного решения системы (1α—δ) п. 39 замкнутая система (10α, β) определяет преобразованную P расслояемую пару $(\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2)$, $(\boldsymbol{N}_3\boldsymbol{N}_4)$. Формы ω_3^1, ω_4^2 теперь являются известными комбинациями (2β) п. 39 форм ω_1^3, ω_2^4. Следовательно, система ковариантов (10β) правильная. Характеристическая система, кроме форм (10α) и форм ω_1^3, ω_2^4, независимых на интегральном многообразии, содержит только две формы ∇t и Δb_1 при двух независимых квадратичных уравнениях. Система — в инволюции с характерами $s_1 = 2$, $s_2 = 0$ и определяет преобразование P с произволом двух функций одного аргумента.

Этот результат можно было предвидеть. Если расслояемая пара $(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2)$, $(\boldsymbol{M}_3\boldsymbol{M}_4)$ дана, то достаточно взять две пары расслояющих поверхностей $(\boldsymbol{A}_1)$ и $(\boldsymbol{B}_1)$ для первой конгруэнции, $(\boldsymbol{A}_3)$ и $(\boldsymbol{B}_3)$ — для второй (произвол — четыре параметра), чтобы иметь уже четыре конгруэнции из конфигурации (P). К этому надо добавить поверхность $(\boldsymbol{A}_2)$ как произвольное асимптотическое преобразование поверхности $(\boldsymbol{A}_1)$ — произвол двух функций одного аргумента. Поверхности $(\boldsymbol{A}_4)$, $(\boldsymbol{B}_2)$, $(\boldsymbol{B}_4)$ найдутся по теореме о переместительности асимптотических преобразований лишь с параметрическим произволом. Следовательно, определение преобразованной расслояемой пары $(\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2) \equiv (\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2)$, $(\boldsymbol{N}_3\boldsymbol{N}_4) \equiv (\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{B}_4)$ зависит от двух функций одного аргумента.

175. Вырожденное преобразование P. Если имеют место уравнения (8α—γ) п. 173, то $\Delta b_1 = -b_2\omega_1^2$ и уравнение $b_2\Delta b_1 - b_1\Delta b_2 = 0$ дает

$$(b_2)^2\omega_1^2 = 0.$$

Обращение в нуль формы $\omega_1^2 = 0$ приводит к вырождению пары $(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2)$, $(\boldsymbol{M}_3\boldsymbol{M}_4)$; следовательно, мы должны положить

$$b_2 = 0, \tag{11}$$

и формулы (9α) дадут

$$\boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{M}_1, \qquad \boldsymbol{N}_3 = \boldsymbol{M}_3, \qquad \boldsymbol{N}_2 = a_2\boldsymbol{M}_3 + \boldsymbol{M}_2, \qquad \boldsymbol{N}_4 = -ta_2\boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_4.$$

Поскольку теперь лучи $\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2$ и $\boldsymbol{N}_3\boldsymbol{N}_4$ лежат в касательных плоскостях соответственно поверхностей $(\boldsymbol{M}_1)$ и $(\boldsymbol{M}_3)$ и проходят через точки $\boldsymbol{M}_1$ и $\boldsymbol{M}_3$, обе расслояемые пары имеют одну пару общих фокальных поверхностей.

Система (9β) теперь дает при $a_2 \neq 0$

$$db_2 = 0, \qquad \Delta a_1 = 0, \qquad \Delta b_1 = 0,$$

или, в силу (9γ),

$$a_2\omega_3^4 + \frac{1}{t}\omega_3^1 + \omega_2^4 = 0,$$

$$-a_2\omega_1^2 + \frac{1}{t}\omega_4^2 + \omega_1^3 = 0,$$

или, в силу (2α, β) п. 39,

$$a_2\alpha + \frac{1}{t}a = 0, \qquad -a_2\beta + \frac{b}{t} + 1 = 0,$$

$$-a_2\gamma + \frac{c}{t} = 0, \qquad -a_2\beta - \frac{b}{t} + 1 = 0,$$

откуда с помощью (2γ) п. 39

$$b = 0, \qquad a_2 = \frac{1}{\beta}, \qquad t = c\frac{\beta}{\gamma} = -a\frac{\beta}{\alpha}$$

и

$$\boldsymbol{N}_2 = \frac{1}{\beta}(\boldsymbol{M}_3 + \beta\boldsymbol{M}_2), \qquad \boldsymbol{N}_4 = \frac{1}{\alpha}(a\boldsymbol{M}_1 + \alpha\boldsymbol{M}_4).$$

Следовательно, в силу $b = 0$ пара сопряженная, а поскольку из сравнений

$$\left.\begin{aligned} d\boldsymbol{M}_1 &\equiv \omega_1^1\boldsymbol{M}_1 + \omega_1^3(\boldsymbol{M}_3 + \beta\boldsymbol{M}_2), \\ d\boldsymbol{M}_3 &\equiv \omega_3^3\boldsymbol{M}_3 + \omega_1^3(a\boldsymbol{M}_1 + \alpha\boldsymbol{M}_4) \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_2^4)$$

следует, что лучи $\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2$, $\boldsymbol{N}_3\boldsymbol{N}_4$ огибают соответственно на поверхностях $(\boldsymbol{M}_1)$, $(\boldsymbol{M}_2)$ линии $\omega_2^4 = 0$ так же, как лучи $\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_4\boldsymbol{M}_3$ на поверхностях $(\boldsymbol{M}_2)$ и $(\boldsymbol{M}_4)$, конгруэнции $(\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2)$ и $(\boldsymbol{N}_3\boldsymbol{N}_4)$ составляют продолжение Лапласа соответственно конгруэнций $(\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1)$ и $(\boldsymbol{M}_4\boldsymbol{M}_3)$, и мы возвращаемся к преобразованиям п. 52.

ГЛАВА XVII

СРОДСТВО СЕТЕЙ ЙОНАСА

176. Сродство S. Рассмотрим произвольную сеть линий σ на поверхности (A), т. е. два семейства линий (L_1), (L_2) таких, что через каждую точку поверхности в рассматриваемой области проходит по одной линии каждого семейства. Допустим теперь, что вторая поверхность (A') тоже несет сеть линий $\sigma' = (L_1', L_2')$ и между точками A, A' поверхностей в рассматриваемых областях установлено взаимно однозначное соответствие, которое переводит линии сети σ в линии сети σ':

$$L_1 \to L_1', \qquad L_2 \to L_2'.$$

Если при этом в каждой паре соответствующих точек A, A' соприкасающиеся плоскости линий сети σ совпадают накрест с соприкасающимися плоскостями линий σ', т. е. общую соприкасающуюся плоскость имеют линии L_1 и L_2' с одной стороны, линии L_2 и L_1' — с другой, то мы будем говорить, что сети σ и σ' находятся в сродстве соприкасающихся плоскостей или в сродстве S.

Обозначим точку пересечения касательных к линиям L_1 и L_2' буквой A_2, касательных к линиям L_2 и L_1' — буквой A_3.

Прямая AA_2 при движении точки A по линии L_1 описывает развертывающуюся поверхность, имеющую касательной плоскостью соприкасающуюся плоскость линии L_1, т. е. плоскость AA_2A'. Прямая $A'A_2$ при движении точки A' по линии L_2' описывает развертывающуюся поверхность, у которой касательной плоскостью служит соприкасающаяся плоскость линии L_2', т. е. та же плоскость AA_2A'.

Отсюда прямо следует, что эта плоскость является касательной плоскостью поверхности (A_2). Действительно, линии L_1 и L_2' соответствуют различным линиям поверхности (A_2), которые своими касательными определяют касательную плоскость поверхности (A_2) в точке A_2.

Точно так же точка A_3, где пересекаются касательные к линиям L_2 и L_1', описывает поверхность, касательная плоскость к которой проходит через точки A и A'.

Таким образом, косой четырехугольник $A = A_1$, A_2, $A' = A_4$, A_3 своими вершинами описывает четыре поверхности, каждая из которых касается тех двух сторон четырехугольника, которые проходят через эту вершину.

Следовательно, *две сети линий σ и σ', находящиеся в отношении сродства, определяют конфигурацию* (T).

Обратно, если в конфигурации (T) сети, огибаемые сторонами косого четырехугольника на паре противоположных фокальных поверхностей, соответствуют накрест, то они находятся в отношении сродства S.

177. Соответствие накрест развертывающихся поверхностей одного семейства пары конгруэнций T. Присоединим к паре T тетраэдр 1-го порядка $\{A_i\}$ с вершинами в фокусах и допустим, что линии, огибаемые лучами A_1A_2 и A_3A_4 соответственно на поверхностях (A_1) и (A_4), соответствуют.

Общие уравнения конфигурации (T) составляют систему

$$\omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^3 = 0, \quad \omega_3^2 = 0, \quad \omega_4^1 = 0, \tag{1}$$

$$[\omega_1^2\omega_2^4] + [\omega_1^3\omega_3^4] = 0, \quad [\omega_2^1\omega_1^3] + [\omega_2^4\omega_4^3] = 0, \tag{2α}$$

$$[\omega_4^2\omega_2^1] + [\omega_4^3\omega_3^1] = 0, \quad [\omega_3^1\omega_1^2] + [\omega_3^4\omega_4^2] = 0. \tag{2β}$$

Эти квадратичные уравнения разрешаются по лемме Картана в виде

$$\begin{aligned} \omega_3^4 &= \alpha\omega_1^3 - \beta\omega_2^4, & \omega_4^3 &= -\beta'\omega_1^3 + \alpha'\omega_2^4, \\ \omega_1^2 &= \beta\omega_1^3 + \gamma\omega_2^4, & \omega_2^1 &= \gamma\omega_1^3 + \beta'\omega_2^4, \\ \omega_3^1 &= a\omega_1^3 + b\omega_2^4, & \omega_4^2 &= b'\omega_1^3 + c\omega_2^4, \end{aligned} \tag{3α}$$

где коэффициенты связаны соотношениями (4β) п. 138:

$$\begin{aligned} a\gamma - (b - b')\beta + c\alpha &= 0, \\ a\alpha' + (b - b')\beta' + c\gamma' &= 0. \end{aligned} \tag{3β}$$

Мы видели (10) п. 140, что прямая A_1A_2 огибает на поверхности (A_1) линию $\omega_1^3 = 0$, а прямая A_3A_4 — на поверхности (A_4) линию $\omega_4^2 = 0$. Если эти линии соответствуют, то формы ω_1^3, ω_4^2 должны быть пропорциональны; следовательно, в силу (3α)

$$c = 0.$$

Внося это в уравнения (3β), получим:

$$\begin{aligned} a\alpha' + (b - b')\beta' &= 0, \\ a\gamma - (b - b')\beta &= 0. \end{aligned} \tag{a}$$

Если

$$a = 0, \qquad b - b' = 0, \tag{4α}$$

то имеют место уравнения (9) п. 139 с заменой индексов $\binom{2}{3}$, вторые развертывающиеся поверхности конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4), т. е. $\omega_2^4=0$ и $\omega_3^1=0$ соответствуют и конгруэнции (A_1A_3), (A_2A_4) принадлежат одному и тому же линейному комплексу.

Если же система (a) имеет не нулевые решения, то обращается в нуль определитель системы

$$\alpha'\beta+\beta'\gamma=0, \tag{4β}$$

формы ω_1^2 и ω_4^3 пропорциональны и линии, огибаемые на поверхностях (A_1) и (A_4) соответственно лучами A_1A_3, A_4A_2, тоже соответствуют. Отсюда теорема:

Если развертывающиеся поверхности одного семейства пары конгруэнций T соответствуют накрест, то соответствуют и развертывающиеся поверхности второго семейства и конгруэнции пары полярно сопряжены относительно нулевой системы линейного комплекса, которому принадлежат вспомогательные конгруэнции второй пары, или пара противоположных фокальных поверхностей, несущих ребра возврата этих развертывающихся поверхностей, находится в отношении сродства сети линий, огибаемых лучами первой и второй пары.

Кроме того, нетрудно обнаружить, что *конгруэнция прямых, соединяющих пары соответствующих точек поверхностей, находящихся в отношении сродства сетей, есть конгруэнция W.*

Фокусы конгруэнции W, присоединенной к паре сетей S, разделяют гармонически каждую пару соответствующих точек сетей, фокальные плоскости делят гармонически общие соприкасающиеся плоскости линий первой и второй сети.

178. Теорема существования. Доказанная (первая) теорема дает основание предполагать, что из шести квадратичных уравнений (2) и (5)

$$[\omega_4^2\omega_1^3]=0, \qquad [\omega_4^3\omega_1^2]=0 \tag{5}$$

независимы только пять. Мы докажем это, разрешая алгебраически систему (2), (5) при независимых формах ω_1^2, ω_1^3.

Применяя в этом предположении лемму Картана к первому уравнению (2α) и к уравнениям (5), получим:

$$\omega_4^2=\lambda\omega_1^3, \qquad \omega_4^3=\mu\omega_1^2, \tag{6α}$$

$$\omega_2^4=A\omega_1^2+B\omega_1^3, \qquad \omega_3^4=B\omega_1^2+C\omega_1^3. \tag{6β}$$

Уравнения (2α, β) правого столбца принимают теперь вид

$$[\omega_2^1-B\mu\omega_1^2,\ \omega_1^3]=0, \qquad [\omega_3^1-B\lambda\omega_1^3,\ \omega_1^2]=0,$$

откуда

$$\omega_2^1=B\mu\omega_1^2+\mu_1\omega_1^3, \qquad \omega_3^1=\lambda_1\omega_1^2+B\lambda\omega_1^3. \tag{6γ}$$

Внося эти значения в последнее уравнение (2β), заметим, что оно удовлетворяется тождественно. Таким образом, последнее уравнение (2β) левого столбца является следствием остальных уравнений (2) и уравнений (5).

Система состоит из $s=4$ уравнений Пфаффа (1) и пяти квадратичных уравнений:

$$\begin{gathered}[\omega_1^2\omega_2^4]+[\omega_1^3\omega_3^4]=0, \qquad [\omega_2^1\omega_1^3]+[\omega_2^4\omega_4^3]=0,\\ [\omega_3^1\omega_1^2]+[\omega_3^4\omega_4^2]=0, \qquad [\omega_4^2\omega_1^3]=0, \qquad [\omega_4^3\omega_1^2]=0.\end{gathered} \tag{6δ}$$

Ищется интегральное многообразие $\mathfrak{M}_2$, на котором формы ω_1^2, ω_1^3 остаются линейно независимыми. Характеристическая система, кроме этих двух форм и четырех форм (1), содержит $q=6$ форм:

$$\omega_2^1,\ \omega_2^4,\ \omega_3^1,\ \omega_3^4,\ \omega_4^2,\ \omega_4^3. \tag{6ε}$$

Система ковариантов (6δ) неправильная. Наиболее общий интегральный элемент $\mathcal{E}_2$ определяется формулами (6α—γ) с $N=7$ параметрами: A, B, C, λ, μ, λ_1, μ_1. Полярная система элемента $\omega_1^2=u$, $\omega_1^3=v$ системы (6δ)

$$\begin{gathered}u\omega_2^4+v\omega_3^4=0, \qquad v\omega_4^2=0, \qquad u\omega_4^3=0,\\ v\omega_2^1+\mu u\omega_2^4=0, \qquad u\omega_3^1+\lambda v\omega_3^4=0\end{gathered} \tag{6ζ}$$

имеет ранг $s_1=5$. Отсюда $s_2=q-s_1=1$, $Q=s_1+2s_2=7=N$.

Система—в инволюции и определяет пары поверхностей в отношении сродства S (так как $[\omega_2^4\omega_3^1]\neq 0$) с произволом одной функции двух аргументов.

179. Преобразование S поверхностей. Полученный произвол конфигурации S дает основание предполагать, что одна из двух поверхностей может быть задана произвольно.

Зададим поверхность относительно тетраэдра 1-го порядка произвольным решением замкнутой системы

$$\omega_1^4=0, \tag{7α}$$

$$[\omega_1^2\omega_2^4]+[\omega_1^3\omega_3^4]=0. \tag{7β}$$

Характеристическая система содержит, кроме форм ω_1^2, ω_1^3 и формы (7α), еще две формы:

$$\omega_2^4,\ \omega_3^4. \tag{7γ}$$

Она составляет часть характеристической системы форм ω_1^2, ω_1^3, (1), (6ε); следовательно, пять первых интегралов системы $\omega_1^2=\omega_1^3=0$, (7α, γ) являются интегралами и системы $\omega_1^2=\omega_1^3=0$, (1), (6ε); их можно включить в базис системы 12 первых интегралов системы $\omega_1^2=\omega_1^3=0$, (1), (6ε).

Если поверхность (A_1) дана, то три из числа пяти характеристических переменных системы $(7\alpha, \beta)$ даны функциями от двух остальных так, что формы ω_1^4, ω_2^4, ω_3^4 будут линейными комбинациями форм ω_1^2, ω_1^3, которые удовлетворят уравнениям $(7\alpha, \beta)$. Если их внести в систему (1), (6δ), то останется система

$$\omega_2^3 = 0, \quad \omega_3^2 = 0, \quad \omega_4^1 = 0,$$
$$[\omega_2^1\omega_1^3] + [\omega_2^4\omega_4^3] = 0, \quad [\omega_3^1\omega_1^2] + [\omega_3^4\omega_4^2] = 0, \tag{8α}$$
$$[\omega_4^2\omega_1^3] = 0, \quad [\omega_4^3\omega_1^2] = 0. \tag{8β}$$

Поскольку формы ω_2^4, ω_3^4 являются теперь известными линейными комбинациями (6α) форм ω_1^2, ω_1^3, характеристическая система $(8\alpha, \beta)$, кроме форм ω_1^2, ω_1^3 и форм (8α), содержит только четыре формы:

$$\omega_2^1, \ \omega_3^1, \ \omega_4^2, \ \omega_4^3. \tag{8γ}$$

Система — в инволюции с характерами $s_1=4$, $s_2=0$ и определяет интегральное многообразие $\mathfrak{M}_2$ с произволом четырех функций одного аргумента.

Таким образом, произвольную поверхность можно преобразовать с произволом четырех функций одного аргумента в поверхность, находящуюся в отношении сродства сетей с исходной.

180. Преобразование S с сохранением асимптотических. Допустим, что поверхности (A_1) и (A_4) находятся в отношении сродства сетей и в то же время асимптотические на них соответствуют друг другу. Асимптотические линии на этих поверхностях определяются уравнениями

$$\omega_1^2\omega_2^4 + \omega_1^3\omega_3^4 = 0, \tag{A_1}$$
$$\omega_4^2\omega_2^1 + \omega_4^3\omega_3^1 = 0, \tag{A_4}$$

или, в силу уравнений $(6\alpha—\gamma)$,

$$A(\omega_1^2)^2 + 2B\omega_1^2\omega_1^3 + C(\omega_1^3)^2 = 0, \tag{9α}$$
$$\frac{\lambda_1}{\lambda}(\omega_1^2)^2 + 2B\omega_1^2\omega_1^3 + \frac{\mu_1}{\mu}(\omega_1^3)^2 = 0. \tag{9β}$$

Если асимптотические на поверхностях (A_1) и (A_4) соответствуют, то коэффициенты уравнений $(9\alpha, \beta)$ должны быть пропорциональны. Это может осуществиться двумя способами.

Если $B \neq 0$, то средние коэффициенты равны, следовательно, равны между собой и крайние

$$\lambda_1 = A\lambda, \quad \mu_1 = C\mu. \tag{10}$$

Система (6γ) примет вид

$$\omega_2^1 = \mu(B\omega_1^2 + C\omega_1^3) = \mu\omega_3^4,$$
$$\omega_3^1 = \lambda(A\omega_1^2 + B\omega_1^3) = \lambda\omega_2^4. \tag{6γ'}$$

При этом поверхности (A_2) и (A_3) будут в сродстве S относительно той же конфигурации $\{A_i\}$, и на всех четырех фокальных поверхностях (A_i) асимптотические линии будут соответствовать. Каждая пара противоположных конгруэнций конфигурации (T) соответствует накрест развертывающимися поверхностями. Следовательно, каждая пара противоположных конгруэнций принадлежит линейному комплексу. Эти два линейных комплекса находятся в инволюции (в смысле Кенигса — изображающие их точки в P_5 полярно сопряжены относительно гиперквадрики Q_4^2).

Обратно, если четыре конгруэнции конфигурации (T) попарно принадлежат линейным комплексам, то развертывающиеся поверхности каждой пары конгруэнций соответствуют накрест. Отсюда четыре квадратичных уравнения, которые надо присоединить к общим уравнениям конфигурации (T):

$$[\omega_4^2\omega_1^3] = 0, \quad [\omega_4^3\omega_1^2] = 0, \quad [\omega_3^1\omega_2^4] = 0, \quad [\omega_3^4\omega_2^1] = 0. \tag{a}$$

Первые два уравнения (a) вместе с уравнениями $(2\alpha, \beta)$ приведут к системе $(6\alpha—\gamma)$. Внося эти значения в последние уравнения (a), получим:

$$B(\lambda_1 - A\lambda) = 0, \quad B(\mu_1 - C\mu) = 0,$$

т. е. при условии $B \neq 0$ мы вернемся к уравнениям $(6\gamma')$.

В п. 145 мы видели, что к произвольной поверхности (A_1) можно построить с девятью произвольными постоянными конфигурацию (T), четыре конгруэнции которой попарно принадлежат линейным комплексам.

181. Периодическая последовательность Лапласа. Требование соответствия асимптотических на поверхностях (A_1) и (A_4) приводит к другим результатам, если

$$B = 0. \tag{11α}$$

Тогда вместо попарного равенства крайних коэффициентов в уравнениях $(9\alpha, \beta)$ достаточна их пропорциональность, и уравнения (10) примут вид

$$\lambda_1 = tA\lambda, \quad \mu_1 = tC\mu, \tag{10$'$}$$

где t — новая неизвестная функция. Если принять во внимание только уравнения (a) п. 180, то система $(6\alpha—\gamma)$ принимает вид

$$\omega_1^2 = \lambda\omega_1^3, \quad \omega_4^3 = \mu\omega_1^2, \quad \omega_2^4 = A\omega_1^2, \quad \omega_3^4 = C\omega_1^3, \quad \omega_2^1 = \mu_1\omega_1^3, \quad \omega_3^1 = \lambda_1\omega_1^2, \tag{11β}$$

и мы приходим к уравнениям п. 141. Линии, огибаемые лучами конгруэнций конфигурации, образуют на каждой из четырех фокальных поверхностей (A_i) сопряженную систему. Вся конфигурация представляет периодическую, с периодом 4, последовательность Лапласа. В п. 141 мы определили ее произвол в виде шести функций одного аргумента. Теперь мы должны присоединить сюда уравнения (10′).

Дифференцируя внешним образом уравнения (11β) с учетом (10′), получим:

$$\begin{gathered}[\Delta\lambda\, \omega_1^3]=0, \quad [\Delta\mu\, \omega_1^2]=0, \quad [\Delta A\, \omega_1^2]=0, \quad [\Delta C\, \omega_1^3]=0,\\ [\Delta t\, \omega_1^3]+[\Delta\mu\, \omega_1^3]=0, \quad [\Delta t\, \omega_1^2]+[\Delta\lambda\, \omega_1^2]=0,\end{gathered} \tag{11γ}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= d\ln\lambda+\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4, \qquad \Delta t = d\ln t,\\ \Delta\mu &= d\ln\mu+\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_4^4,\\ \Delta A &= d\ln A+\omega_1^1-2\omega_2^2+\omega_4^4,\\ \Delta C &= d\ln C+\omega_1^1-2\omega_3^3+\omega_4^4.\end{aligned}$$

Развертывая систему (11γ) с помощью леммы Картана, получим:

$$\begin{gathered}\Delta\lambda=\Lambda\omega_1^3, \quad \Delta\mu=\mathrm{M}\omega_1^2, \quad \Delta A=a\omega_1^2, \quad \Delta C=c\omega_1^3,\\ \Delta t=-\mathrm{M}\omega_1^2-\Lambda\omega_1^3.\end{gathered} \tag{11δ}$$

Дифференцируя внешним образом, получим четыре квадратичных уравнения:

$$[\Delta\Lambda\, \omega_1^3]=0, \quad [\Delta\mathrm{M}\, \omega_1^2]=0, \quad [\Delta a\, \omega_1^2]=0, \quad [\Delta c\, \omega_1^3]=0, \tag{11ε}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta\Lambda &= d\Lambda+\Lambda(\omega_1^1-\omega_3^3)+2A\lambda(t-1)\,\omega_1^2,\\ \Delta\mathrm{M} &= d\mathrm{M}+\mathrm{M}(\omega_1^1-\omega_2^2)+2C\mu(t-1)\,\omega_1^3,\\ \Delta a &= da+a(\omega_1^1-\omega_2^2)+2(tC\mu-A\lambda)\,\omega_1^3,\\ \Delta c &= dc+c(\omega_1^1-\omega_3^3)+2(tA\lambda-C\mu)\,\omega_1^2,\end{aligned} \tag{11ζ}$$

и одно конечное:

$$(t-1)(A\lambda-C\mu)=0. \tag{12}$$

Если $t=1$, то уравнения (10′) совпадают с уравнениями (10), и мы получаем специальный случай четырехзвенной последовательности Лапласа, когда четыре конгруэнции последовательности попарно принадлежат линейным комплексам. Последнее уравнение (11δ) приводит теперь к двум конечным уравнениям:

$$\mathrm{M}=0, \quad \Lambda=0$$

и, следовательно,

$$\Delta\mathrm{M}=0, \quad \Delta\Lambda=0.$$

Система содержит только два квадратичных уравнения (11ε) для форм Δa, Δc. Система — в инволюции с характерами $s_1=2$, $s_2=0$ и определяет эту периодическую последовательность с двумя произвольными функциями одного аргумента.

Если $t\neq 1$, то из уравнения (12) следует

$$A\lambda=C\mu,$$

откуда

$$\Delta A+\Delta\lambda=\Delta C+\Delta\mu$$

и, в силу (11δ),

$$a=\mathrm{M}, \quad c=\Lambda$$

и

$$\Delta a=\Delta\mathrm{M}, \quad \Delta c=\Delta\Lambda.$$

Уравнения (11ε) попарно совпадают. Система опять будет в инволюции с характерами $s_1=2$, $s_2=0$. Интегральное многообразие и на этот раз будет зависеть от двух произвольных функций одного аргумента.

ГЛАВА XVIII

ПАРЫ T КОМПЛЕКСОВ *)

182. Тетраэдр 1-го порядка комплекса прямых. В главе XV мы видели, что пары T конгруэнций можно определить как пары конгруэнций с установленным взаимно однозначным соответствием лучей, допускающих для каждой пары сходственных лучей однопараметрическое семейство демиквадрик, гармонически пересекающих по этим лучам обе конгруэнции.

Это определение непосредственно распространяется на комплексы, но, поскольку гармоническое пересечение линейного многообразия предполагает гармоническое пересечение каждой линейчатой поверхности многообразия, гармоническое пересечение комплекса налагает больше требований на демиквадрику. Поэтому через каждую прямую пространства можно провести одну и только одну гармоническую нормаль.

Присоединим к лучу A_1A_2 произвольного комплекса тетраэдр $\{A_i\}$ $(i=1, 2, 3, 4)$ нулевого порядка и пусть инфинитезимальные проективные смещения тетраэдра определяются уравнениями

$$dA_i = \omega_i^k A_k. \tag{1}$$

Поскольку комплекс есть трехпараметрическое многообразие прямых, из четырех главных форм луча (A_1A_2)

$$d[12] = (\omega_1^1 + \omega_2^2)[12] + \omega_1^3[32] + \omega_2^4[14] + \omega_1^4[42] + \omega_2^3[13] \tag{2}$$

только три будут независимы; линейную зависимость четырех форм можно написать, например, в виде

$$\omega_1^4 = a\omega_1^3 + b\omega_2^4 + c\omega_2^3. \tag{3}$$

Тогда подгруппа инфинитезимальных проективных перемещений луча (A_1A_2) внутри комплекса, оставляющая неподвижной точку $A_1 + \lambda A_2$:

$$d(A_1 + \lambda A_2) = (\omega_1^1 + \lambda\omega_2^1)A_1 + (\omega_1^2 + \lambda\omega_2^2 + d\lambda)A_2 + \\ + (\omega_1^3 + \lambda\omega_2^3)A_3 + (\omega_1^4 + \lambda\omega_2^4)A_4, \tag{4α}$$

*) Акивис М. А. [1].

запишется в виде соотношений на формы

$$\omega_1^3 + \lambda\omega_2^3 = 0, \quad \omega_1^4 + \lambda\omega_2^4 = 0$$

или, в силу (3),

$$\omega_1^3 = -\lambda\omega_2^3, \quad \omega_2^4 = -\frac{c-\lambda a}{\lambda+b}\omega_2^3, \quad \omega_1^4 = \lambda\frac{c-\lambda a}{\lambda+b}\omega_2^3. \tag{4β}$$

При этом лучи комплекса описывают конус с вершиной в точке $A_1 + \lambda A_2$ и касательной плоскостью (касающейся конуса по лучу A_1A_2):

$$(dA_1A_1A_2) = \left(-\lambda A_3 + \lambda\frac{c-\lambda a}{\lambda+b}A_4,\ A_1,\ A_2\right),$$

или

$$[(\lambda+b)A_3 + (\lambda a - c)A_4,\ A_1,\ A_2]. \tag{4γ}$$

Таким образом, устанавливается основное проективное соответствие прямолинейного ряда точек $A_1 + \lambda A_2$ и плоскостей пучка (4γ).

Сохраняя произвол выбора ребра A_3A_4 тетраэдра, мы можем выбрать на этой прямой вершины A_3 и A_4 так, чтобы точке A_1 соответствовала плоскость [412], а точке A_2 — плоскость [312].

Отсюда немедленно получаем:

$$a = 0, \quad b = 0.$$

Если $c = 0$, то $\omega_1^4 = 0$ и все лучи комплекса касаются поверхности

$$\omega_1^4 = 0,$$

описанной точкой (A_1). Такой комплекс называется *специальным*, и мы его будем исключать.

Если $c \neq 0$, то, нормируя вершины тетраэдра, мы можем привести параметр c к единице. Уравнение (3) принимает вид

$$\omega_1^4 - \omega_2^3 = 0 \tag{5}$$

и является уравнением комплекса. Тетраэдр $\{A_i\}$, для которого уравнение (3) принимает вид (5), называется *тетраэдром 1-го порядка комплекса* (5).

183. Гармоническая нормаль комплекса. В п. 159 мы нашли условия гармонического пересечения линейчатых поверхностей, определяемых отношением главных форм (3) п. 159 в виде билинейного соотношения (2′) п. 159.

Произвольную линейчатую поверхность комплекса (5) можно задать уравнениями

$$\omega_2^4 = \lambda\omega_1^3, \quad \omega_2^3 = \mu\omega_1^3. \tag{6α}$$

Тогда отношения a_i компонент (3) п. 159 примут вид

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \lambda, \quad a_3 = \mu, \quad a_4 = \mu,$$

и условие (2′) п. 159 напишется:

$$b_2 = \mu(b_4 + b_3) - \lambda b_1. \tag{6β}$$

Если линейчатая поверхность (b_i) пересекает гармонически все линейчатые поверхности комплекса (5), то условие (6β) должно удовлетворяться при любых λ, μ. Следовательно,

$$b_1=0, \quad b_2=0, \quad b_3+b_4=0. \tag{6γ}$$

Этим вполне определяется направление линейчатой поверхности, гармонически пересекающей комплекс.

Демиквадрика не определяется направлением, под которым она проходит через луч (A_1A_2), но она будет определена, если потребовать, чтобы, кроме того, проходила через прямую A_3A_4.

Действительно, в пространстве P_5 демиквадрика определяется плоским сечением гиперквадрики Q_4^2. Плоскость сечения определяется тремя точками, за которые можно принять точки [12], [34] и точку $d[12]$, взятую в направлении (6γ) или по формулам (2) и (3) п. 182 и (3) п. 159:

$$d[12]=(\omega_1^1+\omega_2^2)[12]+\{[13]+[24]\}\,\omega_2^3.$$

Таким образом, гармоническая нормаль, опущенная из прямой [34] на луч [12] комплекса (5), определяется сечением гиперквадрики Q_4^2 плоскостью

$$([12],\ [34],\ [13]+[24]). \tag{7α}$$

184. Комплексы с общими гармоническими нормалями. Допустим теперь, что демиквадрика (7α) гармонически пересекает не только комплекс (A_1A_2), но и комплекс (A_3A_4).

Направление демиквадрики (7α) в точке [34] пространства P_5 получим, если в уравнение плоскости (7α) внесем

$$d[34]=(\omega_3^3+\omega_4^4)[34]+\omega_3^1[14]+\omega_4^1[31]+\omega_3^2[24]+\omega_4^2[32]. \tag{7β}$$

Мы получим:

$$([12],\ [34],\ [13]+[24],\ \omega_3^1[14]-\omega_4^1[13]+\omega_3^2[24]-\omega_4^2[23])=0,$$

откуда

$$\omega_3^1=0, \quad \omega_4^2=0, \quad \omega_3^2+\omega_4^1=0$$

и компоненты (3′) п. 161

$$a_1=0, \quad a_2=0, \quad a_3=1, \quad a_4=-1.$$

Уравнение (2′) п. 159 дает теперь для компонент (b_i) соотношение

$$b_4=b_3.$$

В силу формул (3′) п. 161, это означает, что комплекс (A_3A_4) должен удовлетворять уравнению

$$\omega_3^2-\omega_4^1=0. \tag{8}$$

Определение. *Парой T комплексов называется два комплекса прямых, между лучами которых установлено взаимно однозначное соответствие, и в каждой паре соответствующих лучей комплексы допускают общую гармонически пересекающую демиквадрику.*

При отнесении к тетраэдру 1-го порядка пара T комплекса определяется уравнениями (5) и (8).

185. Преобразование комплекса посредством касательных демиквадрик. Рассмотрим комплекс (5) п. 182 и на ней линейчатую поверхность (6α). Касательная к этой линейчатой поверхности демиквадрика, проходящая через прямую A_3A_4, определяется в P_5 сечением гиперквадрики Q_4^2 плоскостью, проходящей через точки [12], [34] и $d[12]$, или, в силу (2), (5), (6α), плоскостью

$$([12],\ [34],\ [32]+\lambda[14]+\mu([13]+[42])). \tag{9}$$

Чтобы эта демиквадрика касалась комплекса (A_3A_4), надо, чтобы дифференциал (7β) при подходящем выборе λ и μ лежал в плоскости (9):

$$\begin{gathered}([12],\ [34],\ [32]+\lambda[14]+\mu([13]-[24]),\\ \omega_3^1[14]-\omega_4^1[13]+\omega_3^2[24]+\omega_4^2[32])=0.\end{gathered} \tag{a}$$

Условие (a) эквивалентно пропорциональности

$$\frac{\omega_4^2}{1}=\frac{\omega_3^1}{\lambda}=\frac{\omega_4^1}{-\mu}=\frac{\omega_3^2}{-\mu}. \tag{b}$$

Эти условия дают только одно ограничение на компоненты комплекса

$$\omega_3^2-\omega_4^1=0. \tag{8′}$$

Пары T и только пары T комплексов допускают преобразования посредством касательных демиквадрик.

Можно эту теорему высказать иначе. Трехпараметрическое семейство демиквадрик образует *конгруэнцию демиквадрик* в том смысле слова, что через всякий луч пространства будет проходить конечное число демиквадрик. Такие конгруэнции демиквадрик могут иметь фокальные поверхности (комплексы прямых). *Каждые две фокальные поверхности одной конгруэнции демиквадрик образуют пару T комплексов.*

186. Фокальное трехпараметрическое семейство прямых в P_5. Рассмотрим в P_5 трехпараметрическое семейство прямых (m_1m_2). Будем предполагать, что луч m_1m_2 пересекает гиперквадрику Плюккера Q_4^2 в точках m_1 и m_2. Эти точки изображают две прямые в P_3, которые мы примем за ребра $m_1=[12]$, $m_2=[34]$ тетраэдра $\{A_i\}$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$. Шесть ребер тетраэдра $\{A_i\}$ определят в P_5 репер из шести точек $[ik]$. Произвольная точка $\boldsymbol{p}$ прямой

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{m}_1+\lambda\boldsymbol{m}_2$$

описывает фокальную 3-поверхность, если для некоторого перемещения $\theta_1=\theta_2=0$

$$(d\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{m}_1,\ \boldsymbol{m}_2)\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\,(\theta_1,\ \theta_2)). \tag{a}$$

Поскольку

$$d\boldsymbol{p}=(\omega_1^1+\omega_2^2)[12]+\{d\lambda+\lambda(\omega_3^3+\omega_4^4)\}[34]+(\omega_1^3+\lambda\omega_4^2)[32]+$$
$$+(\omega_2^4+\lambda\omega_3^1)[14]+(\omega_1^4-\lambda\omega_3^2)[42]+(\omega_2^3-\lambda\omega_4^1)[13],$$

сравнение (a) имеет следствием

$$\left.\begin{aligned}\omega_1^3+\lambda\omega_4^2&\equiv 0,\\ \omega_2^4+\lambda\omega_3^1&\equiv 0,\\ \omega_1^4-\lambda\omega_3^2&\equiv 0,\\ \omega_2^3-\lambda\omega_4^1&\equiv 0\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{mod}\,(\theta_1,\ \theta_2)). \tag{a'}$$

Без стеснения общности мы можем предположить, что комплекс $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$ в P_3 отнесен к тетраэдру 1-го порядка. Тогда имеет место равенство (5) и два последних сравнения (a′) дают

$$\lambda(\omega_3^2-\omega_4^1)\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\,(\theta_1,\ \theta_2)).$$

Если $\lambda=0$, то первые три сравнения дадут $\omega_1^3\equiv\omega_2^4\equiv\omega_1^4\equiv 0$ $(\mathrm{mod}\,(\theta_1,\ \theta_2))$, т. е. все главные формы равны нулю и луч стоит на месте. Если $\omega_3^2-\omega_4^1$ не равняется тождественно нулю, то можно считать $\theta_1=\omega_3^2-\omega_4^1$. На том же основании, если уравнение комплекса $(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4)$ будет

$$a\omega_4^2+b\omega_3^1+c\omega_3^2+e\omega_4^1=0,$$

то можно положить $\theta_2=a\omega_1^3+b\omega_2^4-c\omega_1^4+e\omega_2^3$ и трехпараметрическое семейство $(\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2)$ будет допускать не более одной фокальной 3-поверхности.

Если одновременно имеют место уравнения (5) и (8), то последнее сравнение (a′) является следствием трех предыдущих. Перемножая внешним образом три первых

$$[\omega_1^3+\lambda\omega_4^2,\ \omega_2^4+\lambda\omega_3^1,\ \omega_1^4-\lambda\omega_3^2]=0,$$

мы получим кубичное уравнение для λ. Для каждого корня $\lambda=\lambda_i$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ из четырех сравнений (a′) останется только два независимых, которые и определят линию $\theta_1=0$, $\theta_2=0$, огибаемую лучом $(\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2)$ на фокальной поверхности $(\boldsymbol{p})$ в P_5.

Теорема. *Только для пары T комплексов* [12], [34] *прямая Розенфельда* ([12], [34]) *в P_5 описывает трехпараметрическое семейство прямых, распадающееся тремя способами на фокальные подсемейства.*

Каждое фокальное подсемейство представляет собой развертывающуюся линейчатую поверхность в P_5, прямолинейные образующие которой касаются линии (ребра возврата) на фокальной поверхности.

187. Теорема существования. Пара T комплексов определяется уравнениями (5) и (8). Дифференцируя их внешним образом, получим:

$$\begin{aligned}-[\varphi\omega_1^3]+[\chi\omega_1^4]+[\psi\omega_2^4]&=0,\\ [\varphi\omega_4^2]+[\chi\omega_4^1]-[\psi\omega_3^1]&=0,\end{aligned} \tag{10α}$$

где

$$\varphi=\omega_2^1+\omega_3^4,\quad \psi=\omega_1^2+\omega_4^3,\quad \chi=\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_4^4. \tag{10α'}$$

Характеристическая система, кроме форм ω_1^3, ω_2^4, ω_1^4, независимых на интегральном многообразии, и форм (5), (8), содержит еще $q=6$ форм:

$$\omega_3^1,\ \omega_4^2,\ \omega_4^1,\ \varphi,\ \psi,\ \chi. \tag{10β}$$

Система ковариантов (10α) неправильная. Наиболее общий интегральный элемент $\mathfrak{E}_3$ определяется системой

$$\begin{aligned}-\varphi&=a_{11}\omega_1^3+a_{12}\omega_1^4+a_{13}\omega_2^4, &\quad \omega_4^2&=\alpha_{11}\omega_1^3+\alpha_{12}\omega_1^4+\alpha_{13}\omega_2^4,\\ \chi&=a_{21}\omega_1^3+a_{22}\omega_1^4+a_{23}\omega_2^4, &\quad \omega_4^1&=\alpha_{21}\omega_1^3+\alpha_{22}\omega_1^4+\alpha_{23}\omega_2^4,\\ \psi&=a_{31}\omega_1^3+a_{32}\omega_1^4+a_{33}\omega_2^4, &\quad -\omega_3^1&=\alpha_{31}\omega_1^3+\alpha_{32}\omega_1^4+\alpha_{33}\omega_2^4,\end{aligned} \tag{10γ}$$

где

$$a_{ij}=a_{ji},$$

$$\begin{aligned}-(\alpha_{11}a_{12}-\alpha_{12}a_{11})+(\alpha_{21}a_{22}-\alpha_{22}a_{21})+(\alpha_{31}a_{32}-\alpha_{32}a_{31})&=0,\\ -(\alpha_{12}a_{13}-\alpha_{13}a_{12})+(\alpha_{22}a_{23}-\alpha_{23}a_{22})+(\alpha_{32}a_{33}-\alpha_{33}a_{32})&=0,\\ -(\alpha_{13}a_{11}-\alpha_{11}a_{13})+(\alpha_{23}a_{21}-\alpha_{21}a_{23})+(\alpha_{33}a_{31}-\alpha_{31}a_{33})&=0.\end{aligned} \tag{10δ}$$

Интегральный элемент $\mathfrak{E}_3$ зависит от $N=12$ параметров.

Полярная система элемента $\omega_1^3=u$, $\omega_1^4=v$, $\omega_2^4=w$

$$-u\varphi+v\chi+w\psi=0,$$
$$\omega_4^2(a_{11}u+a_{12}v+a_{13}w)-\omega_4^1(a_{21}u+a_{22}v+a_{23}w)+$$
$$+\omega_3^1(a_{31}u+a_{32}v+a_{33}w)+\varphi(\alpha_{11}u+\alpha_{12}v+\alpha_{13}w)+$$
$$+\chi(\alpha_{21}u+\alpha_{22}v+\alpha_{23}w)+\psi(\alpha_{31}u+\alpha_{32}v+\alpha_{33}w)=0. \tag{10ε}$$

имеет ранг $s_1=2$. Присоединяя такие же уравнения (10ε) для элемента $\omega_1^3=u'$, $\omega_1^4=v'$, $\omega_2^4=w'$, найдем ранг новой системы $s_1+s_2=4$.

Отсюда $s_1=2$, $s_2=2$, $s_3=q-s_1-s_2=2$, и $Q=s_1+2s_2+3s_3=12=N$. Система в инволюции и определяет пары T с произволом $s_3=2$ функций от трех аргументов.

188. Преобразование T. Если первый комплекс (A_1A_2) дан относительно тетраэдра 1-го порядка, то имеют место уравнения (5) и первое (10α). Характеристическая система, кроме форм ω_1^3, ω_2^4, ω_1^4 и (5), содержит три последние формы (10β), т. е. всего семь форм. На каждом решении этой системы четыре характеристические переменные будут функциями трех остальных.

Пара T комплексов определяется уравнениями (5), (8) и (10α) с характеристической системой из 11 форм (5), (8), шести форм (10β) и трех форм ω_1^3, ω_1^4, ω_2^4. Поскольку все характеристические формы малой системы входят в большую систему, мы можем ввести в базис характеристических переменных большой системы семь переменных малой системы. Если теперь вместо четырех неизвестных функций внести те значения, которые они принимают на заданном комплексе (A_1A_2), то уравнение (5) и первое (10α) обратятся в тождества и для определения $11-7=4$ оставшихся неизвестными функций мы будем иметь уравнение (8) и второе (10α).

Характеристическая система теперь, кроме форм ω_1^3, ω_1^4, ω_2^4, независимых на интегральном многообразии, и формы (8), содержит только $q=3$ первых форм (10β). Последние три формы (10β) следует рассматривать как известные линейные комбинации форм ω_1^3, ω_1^4, ω_2^4.

Система ковариантов правильная. Если формы φ, ψ, χ линейно независимы, то интегральный элемент $\mathfrak{E}_3$ определяется

$$
\begin{aligned}
\omega_4^2&=b_{11}\varphi+b_{12}\chi+b_{13}\psi,\\
\omega_4^1&=b_{12}\varphi+b_{22}\chi+b_{23}\psi,\\
-\omega_3^1&=b_{13}\varphi+b_{23}\chi+b_{33}\psi
\end{aligned}
\tag{11}
$$

с произволом $N=6$ параметров. Характеры системы $s_1=s_2=s_3=1$. Система — в инволюции и определяет присоединенный комплекс (A_3A_4) с произволом $s_2=1$ функции от трех аргументов.

189. Особое решение. Если φ, ψ, χ на первом комплексе линейно зависимы, например

$$\chi=\lambda\varphi+\mu\psi, \tag{12α}$$

то, дифференцируя это соотношение внешним образом, получим для определения пары T комплексов систему трех линейных (5), (8) и (12α) и трех квадратичных уравнений:

$$
\begin{gathered}
[\varphi,\ \omega_1^3-\lambda\omega_1^4]-[\psi,\ \omega_2^4+\mu\omega_1^4]=0,\\
[\varphi,\ \omega_4^2+\lambda\omega_4^1]-[\psi,\ \omega_3^1-\mu\omega_4^1]=0,\\
[\Delta\lambda\varphi]+[\Delta\mu\psi]=0,
\end{gathered}
\tag{12β}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\Delta\lambda&=d\lambda+\frac{\lambda^2}{2}(\omega_2^1-\omega_3^4)-\frac{\lambda\mu+2}{2}(\omega_1^2-\omega_4^3)-\frac{1}{2}\lambda(\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3+\omega_4^4),\\
\Delta\mu&=d\mu-\frac{\mu^2}{2}(\omega_1^2-\omega_4^3)+\frac{\lambda\mu+2}{2}(\omega_2^1-\omega_3^4)+\frac{1}{2}\mu(\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3+\omega_4^4).
\end{aligned}
\tag{12γ}
$$

Характеристическая система, кроме форм (5), (8), (12α), содержит $q=6$ форм:

$$\varphi,\ \psi,\ \Delta\lambda,\ \Delta\mu,\ \omega_4^2+\lambda\omega_4^1,\ \omega_3^1-\mu\omega_4^1, \tag{12δ}$$

и только две линейные комбинации форм ω_1^3, ω_1^4, ω_2^4, независимых на интегральном многообразии:

$$\omega_1^3-\lambda\omega_1^4,\quad \omega_2^4+\mu\omega_1^4. \tag{12ε}$$

Если требовать линейной независимости форм (12ε), то уравнения (12β) определят интегральный элемент $\mathfrak{E}_2$:

$$
\begin{gathered}
\begin{aligned}
-\varphi&=a_{11}(\omega_1^3-\lambda\omega_1^4)+a_{13}(\omega_2^4+\mu\omega_1^4),\\
\psi&=a_{13}(\omega_1^3-\lambda\omega_1^4)+a_{33}(\omega_2^4+\mu\omega_1^4),
\end{aligned}
\qquad a_{11}a_{33}-(a_{13})^2\neq 0,\\
\omega_4^2+\lambda\omega_4^1=-b_{11}\varphi+b_{12}\psi,\quad \Delta\lambda=c_{11}\varphi+c_{12}\psi,\\
\omega_3^1-\mu\omega_4^1=-b_{12}\varphi+b_{22}\psi,\quad \Delta\mu=c_{12}\varphi+c_{22}\psi
\end{gathered}
$$

с произволом $N=9$ параметров. Характеры системы $s_1=3$, $s_2=q-s_1=3$, откуда $Q=s_1+2s_2=9=N$. Система — в инволюции и определяет пары T комплексов с произволом $s_2=3$ функций от двух аргументов. При этом, поскольку система содержит только две линейные комбинации независимых форм (12ε), решение будет содержать независимые переменные только в виде двух функционально независимых выражений. Меняя эти переменные так, чтобы эти выражения сохраняли свою величину, мы не изменим найденное решение, хотя заставим перемещаться в пространстве лучи комплексов.

190. Репер 2-го порядка. Дифференцируя внешним образом уравнения (10γ) п. 187 правого столбца, получим:

$$
\begin{aligned}
&[\Delta\alpha_{11}\omega_1^3]+[\Delta\alpha_{12}\omega_1^4]+[\Delta\alpha_{13}\omega_2^4]=0,\\
&[\Delta\alpha_{21}\omega_1^3]+[\Delta\alpha_{22}\omega_1^4]+[\Delta\alpha_{23}\omega_2^4]=0,\\
&[\Delta\alpha_{31}\omega_1^3]+[\Delta\alpha_{32}\omega_1^4]+[\Delta\alpha_{33}\omega_2^4]=0,
\end{aligned}
\tag{13α}
$$

где

$$\Delta\alpha_{11} = d\alpha_{11} + \alpha_{11}(2\omega_2^2 - 2\omega_3^3 + \chi) - \alpha_{12}\omega_3^4 + 2\alpha_{21}\omega_1^2 - \alpha_{21}\psi,$$

$$\Delta\alpha_{12} = d\alpha_{12} + \alpha_{12}(2\omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4 + \chi) + (\alpha_{11} + \alpha_{22})(2\omega_1^2 - \psi) + \alpha_{13}(\varphi - 2\omega_3^4),$$

$$\Delta\alpha_{13} = d\alpha_{13} + 2\alpha_{13}(\omega_2^2 - \omega_4^4) + \alpha_{12}\omega_1^2 + \alpha_{23}(2\omega_1^2 - \psi),$$

$$\Delta\alpha_{21} = d\alpha_{21} + \alpha_{21}(2\omega_2^2 - 3\omega_3^3 + \omega_4^4 + 2\chi) - \alpha_{22}\omega_3^4 + \alpha_{11}(\varphi - \omega_3^4) + \alpha_{31}(\psi - \omega_1^2),$$

$$\Delta\alpha_{22} = d\alpha_{22} + 2\alpha_{22}(\omega_2^2 - \omega_3^3 + \chi) + \alpha_{21}(2\omega_1^2 - \psi) + \\ + (\alpha_{23} + \alpha_{12})(\varphi - 2\omega_3^4) + \alpha_{12}\omega_3^4 + \alpha_{32}(\psi - \omega_1^2),$$

$$\Delta\alpha_{23} = d\alpha_{23} + \alpha_{23}(2\omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4 + \chi) + \alpha_{22}\omega_1^2 + \alpha_{13}(\varphi - \omega_3^4) + \alpha_{33}(\psi - \omega_1^2),$$

$$\Delta\alpha_{31} = d\alpha_{31} + 2\alpha_{31}(\omega_2^2 - 2\omega_3^3 + \omega_4^4 + \chi) - \alpha_{32}\omega_3^4 - \alpha_{21}(\varphi - 2\omega_3^4),$$

$$\Delta\alpha_{32} = d\alpha_{32} + \alpha_{32}(2\omega_2^2 - 3\omega_3^3 + \omega_4^4 + 2\chi) + \\ + \alpha_{31}(2\omega_1^2 - \psi) + (\alpha_{33} - \alpha_{22})(\varphi - 2\omega_3^4),$$

$$\Delta\alpha_{33} = d\alpha_{33} + \alpha_{33}(2\omega_2^2 - 2\omega_3^3 + \chi) + \alpha_{32}\omega_1^2 - \alpha_{23}(\varphi - 2\omega_3^4).$$

В силу уравнений (13α), все формы $\Delta\alpha_{ik}$ на интегральном многообразии линейно зависят от форм ω_1^3, ω_1^4, ω_2^4 и при неподвижном луче равны нулю, так же как формы φ, ψ, χ. Уравнения (13β) дают закон вариации коэффициентов α_{ik} под действием стационарной подгруппы луча. Вторичные формы ω_i^k обозначаются π_i^k:

$$\sigma_{11} = 2\alpha_{11}(\pi_3^3 - \pi_2^2) + \alpha_{12}\pi_3^4 - 2\alpha_{21}\pi_1^2,$$

$$\delta\alpha_{12} = \alpha_{12}(\pi_3^3 + \pi_4^4 - 2\pi_2^2) - 2(\alpha_{22} + \alpha_{11})\pi_1^2 + 2\alpha_{13}\pi_3^4,$$

$$\delta\alpha_{13} = 2\alpha_{13}(\pi_4^4 - \pi_2^2) - (2\alpha_{23} + \alpha_{12})\pi_1^2,$$

$$\delta\alpha_{21} = \alpha_{21}(3\pi_3^3 - 2\pi_2^2 - \pi_4^4) + (\alpha_{11} + \alpha_{22})\pi_3^4 + \alpha_{31}\pi_1^2,$$

$$\delta\alpha_{22} = 2\alpha_{22}(\pi_3^3 - \pi_2^2) - (2\alpha_{21} + \alpha_{32})\pi_1^2 + (2\alpha_{23} + \alpha_{12})\pi_{34}.$$

$$\delta\alpha_{23} = \alpha_{23}(\pi_3^3 + \pi_4^4 - 2\pi_2^2) + (\alpha_{33} - \alpha_{22})\pi_1^2 + \alpha_{13}\pi_3^4,$$

$$\delta\alpha_{31} = 2\alpha_{31}(2\pi_3^3 - \pi_2^2 - \pi_4^4) + (\alpha_{32} - 2\alpha_{21})\pi_3^4,$$

$$\delta\alpha_{32} = \alpha_{32}(3\pi_3^3 - 2\pi_2^2 - \pi_4^4) - 2\alpha_{31}\pi_1^2 + 2(\alpha_{33} - \alpha_{22})\pi_3^4,$$

$$\delta\alpha_{33} = 2\alpha_{33}(\pi_3^3 - \pi_2^2) - \alpha_{32}\pi_1^2 - 2\alpha_{23}\pi_3^4,$$

Пользуясь вторичными формами π_1^2, π_3^4, мы можем привести два коэффициента α_{ik} к нулю. Например, полагая все π_i^k равными нулю, кроме $\pi_1^2 = \delta\sigma$, получим:

$$\delta\alpha_{21} = \alpha_{31}\,\delta\sigma, \quad \delta\alpha_{31} = 0, \text{ т. е. } \alpha_{21} = \alpha_{31}\sigma + \alpha_{21}^0.$$

Если $\alpha_{31} = C \neq 0$, то, полагая $\sigma = -\frac{\alpha_{21}^0}{C}$, получим $\alpha_{21} = 0$. Аналогично за счет формы π_3^4 можно привести к нулю α_{23}, если $\alpha_{13} \neq 0$.

Если еще пронормировать вершины так, чтобы $\alpha_{22} = 1$, то среднее уравнение (10γ) правого столбца даст

$$\omega_4^1 = \omega_1^4, \tag{14α}$$

или с помощью уравнений (5), (8)

$$\omega_3^2 = \omega_1^4, \quad \omega_4^1 = \omega_2^3. \tag{14β}$$

Уравнения (14β) изменением нумерации вершин $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ переходят в соотношения (5), (8), которые определяли пару T комплексов [12], [34]. Совершая обратный переход, мы получим, что условия (14β) обеспечивают пару T из комплексов (A_1A_3), (A_2A_4).

Следовательно, пара T комплексов может быть дополнена второй парой T, соответствующие лучи которых попарно пересекаются.

ГЛАВА XIX

ИНВОЛЮТИВНЫЕ СИСТЕМЫ КОМПЛЕКСОВ *)

191. Инволютивное пересечение комплексов. Присоединим к лучу A_1A_2 комплекса тетраэдр 1-го порядка $\{A_i\}$ $(i=1, 2, 3, 4)$, так что комплекс будет определяться уравнением

$$\omega_2^3-\omega_1^4=0. \tag{1}$$

Дифференцируя теперь аналитическую прямую (A_1A_2), получим:

$$d[12]=(\omega_1^1+\omega_2^2)[12]+\omega_1^3[32]+\omega_2^4[14]+\omega_2^3([13]+[42]). \tag{2}$$

Если величины $[ik]=(A_iA_k)$ рассматривать как точки в P_5, то уравнение (2) даст касательное подпространство S_3 к трехмерному подмногообразию (1) на гиперквадрике Q_4^2 в P_5, определяемое точками [12], [32], [14] и [13]+[42]. В нашем пространстве эти точки изображают четыре линейных комплекса, из которых три первых — специальные.

Линейный комплекс, касательный к комплексу (1), должен содержать все прямые (2), т. е. удовлетворять условиям

$$\{\mathfrak{a}[12]\}=0, \qquad \{\mathfrak{a}[32]\}=0, \qquad \{\mathfrak{a}[14]\}=0, \qquad \{\mathfrak{a}, [13]+[42]\}=0,$$

откуда получаем с точностью до скалярного множителя

$$\mathfrak{a}=[12]+\lambda([13]+[24]), \tag{3}$$

где λ — произвольный параметр.

Таким образом, всякий пучок линейных комплексов, касательных к любому комплексу, проходящему через луч A_1A_2, содержит специальный комплекс [12].

По определению два комплекса, проходящих через один луч, пересекаются инволютивно, если их касательные пучки линейных комплексов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}'$ находятся в инволюции (п. 8), т. е. удовлетворяют условию Плюккера

$$\{\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\}=0.$$

Покажем, что четыре пучка линейных комплексов, проходящих через луч [12], содержащих специальный комплекс [12], находящихся попарно в инволюции друг с другом (ни один из которых не состоит

*) Васильев А. М., [1].

целиком из специальных комплексов), можно при соответствующем выборе тетраэдра записать в виде

$$\begin{aligned}&\mathfrak{a}_1=[12]+\lambda_1([13]+[24]), \qquad \mathfrak{a}_3=[12]+\lambda_3([14]+[23]),\\ &\mathfrak{a}_2=[12]+\lambda_2([13]-[24]), \qquad \mathfrak{a}_4=[12]+\lambda_4([14]-[23]).\end{aligned} \tag{a}$$

Действительно, любая такая четверка пучков комплексов изобразится в P_5 четверкой полярно сопряженных относительно Q_4^2 прямых, проходящих через точку [12] на гиперквадрике Q_4^2 и лежащих в касательной гиперплоскости к ней, но не являющихся ее образующими. Известно, что любую такую четверку лучей можно перевести в любую другую такую же проективным преобразованием пространства P_5, оставляющим на месте квадрику Q_4^2. Такие преобразования в P_5 соответствуют проективным преобразованиям трехмерного пространства P_3. Пучки $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4$ обладают требуемыми свойствами, таким образом, любые четыре пучка с этими свойствами можно проективным преобразованием перевести в пучки $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4$. Это эквивалентно тому, что четыре таких пучка можно представить в виде (а) при соответствующем выборе тетраэдра.

Четыре комплекса, проходящих через луч A_1A_2, имеющих касательными пучками линейных комплексов пучки $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4$, удовлетворяют уравнениям

$$\omega_2^3-\omega_1^4=0, \qquad \omega_2^3+\omega_1^4=0, \qquad \omega_2^4-\omega_1^3=0, \qquad \omega_2^4+\omega_1^3=0. \tag{4}$$

192. Основная система уравнений. Для того чтобы все пространство прямых можно было расслоить на комплексы (4), каждое из уравнений (4) должно быть вполне интегрируемо, т. е. внешний дифференциал должен быть алгебраическим следствием самого уравнения

$$\begin{aligned}&[D(\omega_2^3-\omega_1^4), \quad \omega_2^3-\omega_1^4]=0, \quad [D(\omega_2^3+\omega_1^4), \ \omega_2^3+\omega_1^4]=0,\\ &[D(\omega_2^4-\omega_1^3), \quad \omega_2^4-\omega_1^3]=0, \quad [D(\omega_2^4+\omega_1^3), \ \omega_2^4+\omega_1^3]=0\end{aligned} \tag{5}$$

или, если выполнить внешнее дифференцирование,

$$\begin{aligned}&\big[[\omega_2^1+\omega_3^4, \ \omega_1^3]-[\omega_1^2+\omega_4^3, \ \omega_2^4]-\\ &\qquad -[\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_4^4, \ \omega_2^3], \ \omega_2^3-\omega_1^4\big]=0,\\ &\big[[\omega_2^1-\omega_3^4, \ \omega_1^3]+[\omega_1^2-\omega_4^3, \ \omega_2^4]-\\ &\qquad -[\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_4^4, \ \omega_2^3], \ \omega_2^3+\omega_1^4\big]=0,\\ &\big[[\omega_1^2+\omega_3^4, \ \omega_2^3]-[\omega_2^1+\omega_4^3, \ \omega_1^4]-\\ &\qquad -[\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3+\omega_4^4, \ \omega_1^3], \ \omega_1^3-\omega_2^4\big]=0,\\ &\big[[\omega_1^2-\omega_3^4, \ \omega_2^3]+[\omega_2^1-\omega_4^3, \ \omega_1^4]+\\ &\qquad +[\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3+\omega_4^4, \ \omega_1^3], \ \omega_1^3+\omega_2^4\big]=0.\end{aligned} \tag{5'}$$

Если уравнения (5) удовлетворены, то каждое уравнение (4) вполне интегрируемо и система (4) определяет четыре семейства комплексов, образующих инволютивную систему.

Независимыми на интегральном многообразии должны оставаться главные формы луча A_1A_2:

$$[\omega_1^3\omega_2^3\omega_1^4\omega_2^4] \neq 0, \tag{6}$$

Характеристическая система, кроме форм (6), содержит $q=6$ форм:

$$\omega_1^2,\ \omega_2^1,\ \omega_3^4,\ \omega_4^3,\ \omega_1^1-\omega_2^2,\ \omega_3^3-\omega_4^4. \tag{7}$$

193. Теорема существования. Система кубичных уравнений (5′) — не в инволюции, но может быть алгебраически преобразована в эквивалентную систему тоже кубичных уравнений, но в большем числе, которая будет в инволюции. По определению две системы внешних уравнений эквивалентны, если допускают одно и то же наиболее общее разложение всех форм характеристической системы (7) по формам интегрального базиса (6).

Из первых двух уравнений (5′) получаем:

$$-\varphi=-(\omega_2^1+\omega_3^4)=a_{11}\omega_1^3+a_{12}\omega_2^4+a_{13}\omega_2^3+a_{14}(\omega_2^3-\omega_1^4),$$

$$\psi=\omega_1^2+\omega_4^3=a_{21}\omega_1^3+a_{22}\omega_2^4+a_{23}\omega_2^3+a_{24}(\omega_2^3-\omega_1^4), \qquad a_{ij}=a_{ji},$$

$$\chi=\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_4^4=a_{31}\omega_1^3+a_{32}\omega_2^4+a_{33}\omega_2^3+a_{34}(\omega_2^3-\omega_1^4),$$

$$\varphi_1=\omega_2^1-\omega_3^4=\bar a_{11}\omega_1^3+\bar a_{12}\omega_2^4+\bar a_{13}\omega_2^3+\bar a_{14}(\omega_2^3+\omega_1^4),$$

$$\psi_1=\omega_1^2-\omega_4^3=\bar a_{21}\omega_1^3+\bar a_{22}\omega_2^4+\bar a_{23}\omega_2^3+\bar a_{24}(\omega_2^3+\omega_1^4), \qquad \bar a_{ij}=\bar a_{ji},$$

$$-\chi_1=-(\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_4^4)=\bar a_{31}\omega_1^3+\bar a_{32}\omega_2^4+\bar a_{33}\omega_2^3+\bar a_{34}(\omega_2^3+\omega_1^4),$$

откуда в новых обозначениях, принимая во внимание последние уравнения (5′), имеем:

$$\left.\begin{aligned}
\omega_2^1&=P_1\omega_1^3+P_2\omega_2^4+R_1\omega_2^3+R_2\omega_1^4,\\
\omega_4^3&=-P_2\omega_1^3-P_1\omega_2^4+S_1\omega_2^3+S_2\omega_1^4,\\
\omega_3^4&=Q_1\omega_1^3+Q_2\omega_2^4-R_2\omega_2^3-R_1\omega_1^4,\\
\omega_1^2&=-Q_2\omega_1^3-Q_1\omega_2^4-S_2\omega_2^3-S_1\omega_1^4,\\
\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_4^4&=L_1\omega_2^3+L_2\omega_1^4,\\
\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3+\omega_4^4&=M_1\omega_1^3+M_2\omega_2^4.
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Нетрудно убедиться, что из уравнений (8) вытекают равенства:

$$\omega_1^2+\omega_2^1+\omega_3^4+\omega_4^3=$$
$$=(P_1-P_2+Q_1-Q_2)(\omega_1^3-\omega_2^4)+(R_1-R_2+S_1-S_2)(\omega_2^3-\omega_1^4),$$
$$\omega_1^2-\omega_2^1-\omega_3^4+\omega_4^3=$$
$$=-(P_1+P_2+Q_1+Q_2)(\omega_1^3+\omega_2^4)+(S_1-S_2-R_1+R_2)(\omega_2^3-\omega_1^4),$$
$$\omega_1^2-\omega_2^1+\omega_3^4-\omega_4^3=$$
$$=(P_2-P_1+Q_1-Q_2)(\omega_1^3-\omega_2^4)-(R_1+R_2+S_1+S_2)(\omega_2^3+\omega_1^4),$$
$$\omega_1^2+\omega_2^1-\omega_3^4-\omega_4^3=$$
$$=(P_1+P_2-Q_1-Q_2)(\omega_1^3+\omega_2^4)+(R_1+R_2-S_1-S_2)(\omega_2^3+\omega_1^4),$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}
&[\omega_1^2+\omega_2^1+\omega_3^4+\omega_4^3,\quad \omega_1^3-\omega_2^4,\quad \omega_2^3-\omega_1^4]=0,\\
&[\omega_1^2-\omega_2^1-\omega_3^4+\omega_4^3,\quad \omega_1^3+\omega_2^4,\quad \omega_2^3-\omega_1^4]=0,\\
&[\omega_1^2-\omega_2^1+\omega_3^4-\omega_4^3,\quad \omega_1^3-\omega_2^4,\quad \omega_2^3+\omega_1^4]=0,\\
&[\omega_1^2+\omega_2^1-\omega_3^4-\omega_4^3,\quad \omega_1^3+\omega_2^4,\quad \omega_2^3+\omega_1^4]=0,\\
&[\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_4^4,\ \omega_2^3,\ \omega_1^4]=0,\quad [\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3+\omega_4^4,\ \omega_1^3,\ \omega_2^4]=0.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Отсюда обратно следуют уравнения (8) и (5).

Система (9) замкнута относительно операций внешнего дифференцирования. Характеристическая система, кроме форм ω_1^3, ω_1^4, ω_2^3, ω_2^4, независимых на интегральном многообразии, содержит еще $q=6$ форм:

$$\omega_1^2,\ \omega_2^1,\ \omega_3^4,\ \omega_4^3,\ \omega_1^1-\omega_2^2,\ \omega_3^3-\omega_4^4. \tag{9′}$$

Система ковариантов правильная. Интегральный элемент $\mathfrak{E}_4$ определяется формулами (8) с $N=12$ произвольными параметрами. Характеры системы $s_1=0$, $s_2=6$, $s_3=q-s_1-s_2=0$. Система — в инволюции и определяет инволютивные системы комплексов с произволом шести функций от двух аргументов.

194. Конгруэнции пересечения комплексов инволютивной системы. Ввиду полной симметрии четырех комплексов системы можно рассмотреть два первые комплекса (4) п. 191. Конгруэнция их пересечения определяется хорошо знакомыми уравнениями

$$\omega_1^4=0, \qquad \omega_2^3=0, \tag{10}$$

которые показывают, что фокусы луча лежат в точках A_1, A_2, а фокальными плоскостями служат грани $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$.

Асимптотические линии фокальных поверхностей $(\boldsymbol{A}_1)$, $(\boldsymbol{A}_2)$ определяются уравнениями

$$\omega_1^2\omega_2^4+\omega_1^3\omega_3^4=0, \qquad \omega_2^1\omega_1^3+\omega_2^4\omega_4^3=0$$

или, в силу (8) и (10), в обоих случаях

$$(\omega_1^3)^2-(\omega_2^4)^2=0. \tag{11}$$

Отсюда прежде всего следует, что *конгруэнции попарного пересечения комплексов инволютивной системы суть конгруэнции W*, ибо асимптотические на фокальных поверхностях соответствуют.

Во-вторых, эти асимптотические соответствуют уравнениям комплексов — последним двум уравнениям (4). Следовательно, *каждые три комплекса системы пересекаются по линейчатой поверхности, образующие которой соединяют точки соответствующих асимптотических линий фокальных поверхностей.*

Шесть конгруэнций, получаемых попарным пересечением четырех комплексов, имеют на каждом луче только три пары фокусов, ибо они попарно совпадают. Две пары фокусов действительных $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2$; $\boldsymbol{A}_1\pm\boldsymbol{A}_2$, третья пара комплексно сопряженная $\boldsymbol{A}_1\pm i\boldsymbol{A}_2$. Аналогичное расположение имеет место для фокальных плоскостей.

195. Инфлексионный пучок Кёнигса. Рассмотрим комплекс (1) и ту линейчатую поверхность, вдоль которой лучи комплекса пересекают прямую $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2$ с точностью до бесконечно малых выше 2-го порядка:

$$\left\{[12]+d\,[12]+\frac{1}{2}\,d^2[12],\ [12]\right\}=0$$

или, в силу $\{[12],\ [12]\}=0$, $\{d\,[12],\ [12]\}=0$,

$$\{d^2[12],\ [12]\}=0,$$

и с помощью (2)

$$\{\omega_1^3 d\,[32]+\omega_2^4 d\,[14]+\omega_2^3 d\,[13]+\omega_2^3 d\,[42],\ [12]\}=0,$$

или

$$\omega_1^3\omega_2^4-(\omega_2^3)^2=0. \tag{12α}$$

Конус направлений (12α) определяет развертывающиеся поверхности комплекса. Действительно, записывая уравнения (12α) в виде

$$\frac{\omega_1^3}{\omega_2^3}=\frac{\omega_2^3}{\omega_2^4}=z, \tag{12β}$$

мы найдем для дифференциалов в направлении (12β):

$$d(\boldsymbol{A}_1-z\boldsymbol{A}_2)\equiv(\omega_1^1-z\omega_2^1)\boldsymbol{A}_1+(\omega_1^2-z\omega_2^2-dz)\boldsymbol{A}_2 \pmod{(\omega_1^3-z\omega_2^3)}. \tag{12γ}$$

Следовательно, точка $\boldsymbol{A}_1-z\boldsymbol{A}_2$ при движении вдоль линейчатой поверхности (12β) описывает ее ребро возврата.

Аналогично мы можем искать линейчатую поверхность, вдоль которой лучи комплекса с точностью до бесконечно малых 2-го порядка принадлежат ее касательному линейному комплексу (3) п. 191:

$$\{d^2[12],\ [12]+\lambda([13]+[24])\}=0, \tag{13}$$

или с помощью (2)

$$\{\omega_1^3 d\,[32]+\omega_2^4 d\,[14]+\omega_2^3(d\,[13]+d\,[42]),\ [12]+\lambda([13]+[24])\}=0,$$

или

$$2\{\omega_1^3\omega_2^4-(\omega_2^3)^2\}+$$
$$+\lambda\{(\omega_2^1+\omega_3^4)\omega_1^3-(\omega_1^2+\omega_4^3)\omega_2^4+(\omega_2^2-\omega_1^1-\omega_3^3+\omega_4^4)\omega_2^3\}=0.$$

Направления, соприкасающиеся одновременно ко всем касательным комплексам, удовлетворяют системе

$$\omega_1^3\omega_2^4-(\omega_2^3)^2=0, \tag{14α}$$

$$(\omega_2^1+\omega_3^4)\omega_1^3-(\omega_1^2+\omega_4^3)\omega_2^4+(-\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3+\omega_4^4)\omega_2^3=0. \tag{14β}$$

Всего четыре таких направления. Каждому соответствует на луче точка $\boldsymbol{A}_1+z\boldsymbol{A}_2$, где z определяется из уравнений (12β), (14β), и плоскость, которые определяют *инфлексионный пучок* Кёнигса.

196. Двойные точки инволюции инфлексионных центров. Чтобы найти координату центра инфлексионного пучка, надо продолжить уравнение комплекса (1) п. 191.

Дифференцируя внешним образом, получим:

$$-[\varphi\omega_1^3]+[\psi\omega_2^4]+[\chi\omega_2^3]=0, \tag{15α}$$

где φ, ψ, χ имеют значения (10α′) п. 187.

Разлагая по лемме Картана, имеем:

$$\begin{aligned} -\varphi &= a_{11}\omega_1^3+a_{12}\omega_2^4+a_{13}\omega_2^3,\\ \psi &= a_{21}\omega_1^3+a_{22}\omega_2^4+a_{23}\omega_2^3, \qquad a_{ik}=a_{ki},\\ \chi &= a_{31}\omega_1^3+a_{32}\omega_2^4+a_{33}\omega_2^3. \end{aligned} \tag{15β}$$

Теперь уравнение (14β), если положить $\dfrac{\omega_1^3}{\omega_2^3}=\dfrac{\omega_2^3}{\omega_2^4}=z$, примет вид

$$a_{11}z^4+2a_{13}z^3+(2a_{12}+a_{33})z^2+2a_{23}z+a_{22}=0. \tag{16}$$

Сравнивая формулы (8) п. 193 и (15β), найдем $a_{13}=a_{23}=0$, $a_{11}=a_{22}$, и уравнение (16) примет вид

$$z^4+2qz^2+1=0, \qquad q=\frac{a_{12}+\frac{1}{2}a_{33}}{a_{11}}. \tag{17}$$

Обе пары точек, соответствующих равно-противоположиым корням уравнения, гармонически разделяются точками $A_1(z=0)$ и $A_2(z=\infty)$, которые тем самым являются двойными точками инволюции, определяемой этими парами точек.

При замене основного репера

$$A_1'=A_1+A_2,\qquad A_3'=A_3+A_4,$$
$$A_2'=A_1-A_2,\qquad A_4'=A_3-A_4$$

координата z испытывает преобразование

$$z'=\frac{z-1}{z+1}.$$

При этом уравнение (17) переходит в уравнение

$$z'^4+2q'z'^2+1=0. \tag{17'}$$

То же самое имеет место при замене

$$A_1''=A_1+iA_2,\qquad A_3''=A_3+iA_4,\qquad z''=\frac{z-i}{iz-1}.$$
$$A_2''=A_1-iA_2,\qquad A_4''=A_3-iA_4,$$

Следовательно, точки $z'=0$, $z'=\infty$; $z''=0$, $z''=\infty$ также являются двойными точками инволюций, определяемых четырьмя корнями уравнения при изменении соответствия между точками.

Таким образом, *шесть фокусов конгруэнций, образованных попарным пересечением комплексов инволютивной системы, являются на каждом из комплексов тремя парами двойных точек инволюций, заданных в различных комбинациях двумя парами центров инфлексионных пучков комплекса*.

197. Преобразование T инволютивных систем комплексов*). Пусть нам задана инволютивная система одним из решений системы (5′). Четыре комплекса системы, описанных ребром A_1A_2, определяются вполне интегрируемыми уравнениями (4).

Подстановкой указателей $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ получим четыре уравнения:

$$\omega_4^1-\omega_3^2=0,\qquad \omega_4^1+\omega_3^2=0,\qquad \omega_4^2-\omega_3^1=0,\qquad \omega_4^2+\omega_3^1=0. \tag{18}$$

Каждое из этих уравнений будет определять комплекс, описанный ребром A_3A_4, который вместе с соответствующим комплексом (4) образует пару T. Для этого необходимо только, чтобы уравнения (18), каждое в отдельности, были вполне интегрируемы:

$$\begin{aligned}&[D(\omega_4^1-\omega_3^2),\ \omega_4^1-\omega_3^2]=0, && [D(\omega_4^2-\omega_3^1),\ \omega_4^2-\omega_3^1]=0,\\ &[D(\omega_4^1+\omega_3^2),\ \omega_4^1+\omega_3^2]=0, && [D(\omega_4^2+\omega_3^1),\ \omega_4^2+\omega_3^1]=0,\end{aligned} \tag{19α}$$

*) Акивис М. А. [1].

и чтобы лучи A_1A_2 и A_3A_4 каждой пары комплексов (4) и (18) соответствовали друг другу:

$$\begin{aligned}&[\omega_2^3-\omega_1^4,\ \omega_4^1-\omega_3^2]=0, && [\omega_2^4-\omega_1^3,\ \omega_4^2-\omega_3^1]=0,\\ &[\omega_2^3+\omega_1^4,\ \omega_4^1+\omega_3^2]=0, && [\omega_2^4+\omega_1^3,\ \omega_4^2+\omega_3^1]=0.\end{aligned} \tag{19β}$$

Действительно, для первой пары комплексов наше утверждение прямо вытекает из формул (5) п. 182, (8) п. 184. Вторая пара переходит в первую, если изменить нормирование вершины A_2 на $-A_2$, третья и четвертая пары переходят в первую и вторую, если переменить нумерацию вершин подстановкой $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Новая четверка комплексов (18) тоже образует, в силу уравнений (19α), инволютивную систему, ибо переменой нумерации вершин посредством подстановки $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ переходит в систему (5).

Остается доказать существование решения системы (19α, β).

198. Теорема существования. Прежде всего легко видеть, что система (19α) прямо следует из уравнений (19β) и (5). Действительно, рассмотрим, например, первое уравнение (19β); оно имеет следствием пропорциональность форм

$$\omega_4^1-\omega_3^2=\lambda(\omega_2^3-\omega_1^4).$$

Внося это выражение в уравнения (19α), мы получим, в силу (5) и (19β), тождество.

Следовательно, достаточно рассмотреть систему (9), (19β).

Характеристическая система, кроме форм ω_1^3, ω_1^4, ω_2^3, ω_2^4, содержит шесть форм (9′) п. 193 и четыре формы (18) п. 197, всего $q=10$ форм. Все уравнения (9), (19β) независимы, ибо содержат различные формы. Система ковариантов правильная. Характеры системы $s_1=4$ по числу квадратичных уравнений, $s_2=6$, $s_3=q-s_1-s_2=0$. Следовательно, $Q=s_1+2s_2+3s_3=16$. Наиболее общий интегральный элемент $\mathfrak{E}_4$ определяется формулами (8), к которым надо присоединить четыре уравнения (19β), устанавливающих пропорциональность форм (18) и (4). Уравнения (8) содержат 12 параметров; присоединяя четыре множителя пропорциональности форм (18) формам (4), получим $N=16=Q$. Система — в инволюции и определяет пару T инволютивных систем комплексов с произволом $s_2=6$ функций от двух аргументов.

Если первая инволютивная система дана, то шесть из десяти характеристических переменных системы (9). п. 193 даны в функциях от четырех остальных. Все эти переменные можно включить в базис большой системы, образованной из всех форм характеристической системы (9) и четырех форм ω_3^1, ω_4^1, ω_3^2, ω_4^2. После подстановки шести интегралов системы (9) все уравнения (9) обратятся в тождества и определение преобразованной инволютивной системы будет зависеть от интегрирования системы (19β). Характеристическая система теперь, кроме тех же форм ω_1^3, ω_1^4, ω_2^3, ω_2^4, будет содержать только $q=4$ формы (18). Система — в инволюции с характерами $s_1=4$, $s_2==s_3=0$ и определяет преобразование T заданной инволютивной системы с произволом четырех функций от одного аргумента.

ГЛАВА XX

РАССЛОЯЕМАЯ ПАРА КРИВЫХ *)

199. Постановка задачи. Мы переходим к обобщениям понятия расслояемой пары конгруэнций и будем рассматривать два семейства по ∞^1 плоскостей (σ) и (σ'), между элементами которых установлено взаимно однозначное соответствие.

С ними можно связать две системы ∞^3 плоских элементов H_3 и H_3'. Для этого надо только установить по какому-либо закону между каждой парой соответствующих плоскостей σ, σ' фундаментальную корреляцию $\mathfrak{F}$. Если в этой корреляции точке P плоскости σ соответствует прямая p' плоскости σ' и прямой p плоскости σ — точка P' плоскости σ', то мы образуем плоские элементы, присоединяя к точке P плоскость $\pi \equiv (P, p')$ и к точке P' плоскость $\pi' \equiv (P', p)$, соответственно проходящие через точку P и прямую p' или через точку P' и прямую p. Совокупности элементов $h \equiv (P, \pi)$ и $h' \equiv (P', \pi')$ и образуют две системы H_3 и H_3', которые мы присоединяем к двум семействам плоскостей (σ), (σ').

Если системы H_3, H_3' расслояемы (п. 29), мы будем говорить, что *пара* (σ), (σ') *расслояема*.

Допустим, что каждое семейство плоскостей σ и σ' имеет невырождающуюся огибающую — развертывающуюся поверхность с ребром возврата (M) или (M'), и будем рассматривать пару кривых (M), (M'), между точками которых установлено взаимно однозначное соответствие. Их соприкасающиеся плоскости дадут нам два семейства плоскостей σ и σ', причем соответствие точек на кривой установит соответствие плоскостей (σ, σ'). Если присоединенные системы H_3 и H_3' расслояемы, то мы будем говорить, что *пара кривых* (M) и (M') *расслояема*.

Будем предполагать, что пара кривых (M), (M') находится в общем положении: соприкасающаяся плоскость σ первой кривой не содержит соответствующей точки M' второй кривой, и наоборот. Следовательно, прямая пересечения плоскостей σ, σ' не имеет общих точек с прямой MM'.

*) Фиников [22], [16].

Могут представиться два случая: касательные в соответствующих точках кривых $(\boldsymbol{M})$, $(\boldsymbol{M}')$ могут пересекаться или будут в косом положении. Мы их рассмотрим отдельно. В обоих случаях надо установить основную корреляцию $\mathfrak{F}$.

Поскольку мы рассматриваем пару кривых, естественно выбрать корреляцию $\mathfrak{F}$ так, чтобы она была тесно связана с обеими кривыми.

Мы возьмем *нулевую систему линейного комплекса*. Если искать комплекс, имеющий касание 1-го порядка с обеими кривыми в паре точек $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{M}'$, то этим линейный комплекс не будет определен. Он определяется пятью прямыми, а касание 1-го порядка дает по две бесконечно близкие касательные, т. е. эквивалентно четырем прямым. Повышая порядок касания на единицу с той и другой кривой, мы получим условие, эквивалентное требованию, чтобы комплекс содержал шесть прямых, т. е. больше, чем может дать выбор коэффициентов в уравнении линейного комплекса. Таким образом, мы накладываем новое условие на пару кривых, требуя, чтобы *в каждой паре точек* $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{M}'$ *кривые* $(\boldsymbol{M})$ *и* $(\boldsymbol{M}')$ *обладали общим линейным комплексом, имеющим касание 2-го порядка с каждой из кривых*. Такой комплекс мы будем называть *общим соприкасающимся* линейным комплексом.

Нетрудно заметить, что первую кривую можно взять совершенно произвольно и к ней подобрать вторую так, чтобы они обладали общим соприкасающимся линейным комплексом, даже более того, вторая кривая остается тоже произвольной. Наше требование накладывает условие только на соответствие, устанавливаемое между их точками.

При этом для установления корреляции $\mathfrak{F}$ более удобно будет воспользоваться нулевой системой общего касательного (касание 1-го порядка) линейного комплекса, находящегося в инволюции (п. 8) (в смысле Кёнигса) с общим соприкасающимся.

200. Пары кривых с непересекающимися касательными. Обратимся теперь к исследованию пары кривых, сходственные касательные которых скрещиваются.

Присоединим к каждой паре точек $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{M}'$ кривых тетраэдр $\{\boldsymbol{A}_i\}$ $(i=1, 2, 3, 4)$, две вершины которого совместим с точками наших кривых $\boldsymbol{M}\equiv\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{M}'\equiv\boldsymbol{A}_2$, а две другие вершины поместим на касательных к нашим кривым в тех точках, где эти касательные пересекают соприкасающуюся плоскость другой кривой.

Поскольку теперь $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_4$ и $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3$ — касательные к кривым $(\boldsymbol{A}_1)$, $(\boldsymbol{A}_2)$, а [134] и [234] — их соприкасающиеся плоскости, то имеем уравнения:

$$\left(\frac{d\boldsymbol{A}_1}{ds}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_4\right)=0, \qquad \left(\frac{d\boldsymbol{A}_2}{ds}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3\right)=0,$$
$$\left(\frac{d^2\boldsymbol{A}_1}{ds^2}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4\right)=0, \quad \left(\frac{d^2\boldsymbol{A}_2}{ds^2}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4\right)=0, \tag{a}$$

где s — общий параметр, устанавливающий соответствие точек кривых $(\boldsymbol{A}_1)$, $(\boldsymbol{A}_2)$.

Если инфинитезимальные проективные преобразования тетраэдра определять уравнениями

$$\frac{d\boldsymbol{A}_i}{ds}=a_i^k\boldsymbol{A}_k, \tag{1α}$$

то из уравнений (a) будет следовать

$$a_1^2=a_1^3=a_2^1=a_2^4=0, \quad a_4^2=a_3^1=0. \tag{1β}$$

Умножая четыре однородные координаты $\boldsymbol{A}_1$ на ρ_1, а координаты $\boldsymbol{A}_2$ — на ρ_2, мы заменим a_1^1 и a_2^2 на

$$\overline{a}_1^1=a_1^1+\frac{d\ln\rho_1}{ds}, \quad \overline{a}_2^2=a_2^2+\frac{d\ln\rho_2}{ds}.$$

Следовательно, подходящим выбором функций ρ_1 и ρ_2 (нормирование точек $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$) приведем компоненты a_1^1, a_2^2 к нулю. Будем предполагать, что это уже выполнено.

Меняя параметр s и точки $\boldsymbol{A}_3$, $\boldsymbol{A}_4$ на параметр и точки

$$\overline{s}=f(s); \quad \overline{\boldsymbol{A}}_3=\rho_3\boldsymbol{A}_3, \quad \overline{\boldsymbol{A}}_4=\rho_4\boldsymbol{A}_4,$$

мы не изменим a_1^1, a_2^2 и получим новые компоненты:

$$\overline{a}_3^3=\left(a_3^3+\frac{d\ln\rho_3}{ds}\right)\frac{ds}{d\overline{s}}, \quad \overline{a}_4^4=\left(\overline{a}_4^4+\frac{d\ln\rho_4}{ds}\right)\frac{ds}{d\overline{s}},$$
$$\overline{a}_1^4=a_1^4\frac{ds}{d\overline{s}}\frac{1}{\rho_4}, \quad \overline{a}_3^2=a_3^2\frac{ds}{d\overline{s}}\rho_3.$$

Следовательно, подходящим выбором функций ρ_3, ρ_4, $\overline{s}$ можно привести a_1^4, a_3^2 к единице, а a_3^3 — a_4^4 — к нулю.

Выполнив эти преобразования и меняя обозначения, мы запишем таблицу компонент a_i^k в виде

$$\begin{array}{|cccc|} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 & b & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 & b \end{array} \tag{2}$$

201. Общий соприкасающийся линейный комплекс. Будем искать линейный комплекс, имеющий касание 2-го порядка с кривыми $(\boldsymbol{A}_1)$ и $(\boldsymbol{A}_2)$ в точках $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$.

Уравнение линейного комплекса можно написать в виде

$$\mathfrak{a}=a^{ik}[ik], \qquad [ik]=(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_k).$$

Если этот комплекс имеет касание 2-го порядка с кривыми (A_1) и (A_2), то имеют место шесть уравнений:

$$\{\mathfrak{a}[14]\}=0,\quad \left\{\mathfrak{a}\ \frac{d}{ds}[14]\right\}=0,\quad \left\{\mathfrak{a}\ \frac{d^2}{ds^2}[14]\right\}=0,$$

$$\{\mathfrak{a}[23]\}=0,\quad \left\{\mathfrak{a}\ \frac{d}{ds}[23]\right\}=0,\quad \left\{\mathfrak{a}\ \frac{d^2}{ds^2}[23]\right\}=0,$$

откуда, заменяя с помощью таблицы (2)

$$\frac{d}{ds}[14]=\left(\frac{dA_1}{ds}A_4\right)+\left(A_1\frac{dA_4}{ds}\right)=c_2[13]+b[14]$$

и аналогично получая другие производные, будем иметь:

$$\{\mathfrak{a}[14]\}=0,\quad \{\mathfrak{a}[13]\}=0,\qquad \{\mathfrak{a}[34]\}-\{\mathfrak{a}[12]\}=0,$$

$$\{\mathfrak{a}[23]\}=0,\quad \{\mathfrak{a}[24]\}=0,\quad a_1\{\mathfrak{a}[34]\}-a_2\{\mathfrak{a}[12]\}=0.$$

Четыре из этих уравнений (определяющие любой касательный комплекс) дадут

$$a^{23}=a^{24}=a^{14}=a^{13}=0,$$

а остальные два

$$a^{12}=a^{34},\quad a_1a^{12}=a_2a^{34}.$$

Чтобы последние два коэффициента в уравнении комплекса не обратились в нуль, необходимо

$$a_1=a_2=a. \tag{3}$$

Этим определяется пара кривых, имеющих в соответствующих точках общий соприкасающийся комплекс.

Уравнение такого комплекса в местных координатах x_i, y_k относительно тетраэдра $\{A_i\}$, где (x_i) и (y_i) — координаты двух точек луча, напишется в виде

$$x_1y_2-x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3=0. \tag{4}$$

Уравнение любого касательного линейного комплекса будет

$$x_1y_2-x_2y_1+\alpha(x_3y_4-x_4y_3)=0, \tag{4'}$$

где $\alpha=\dfrac{a^{12}}{a^{34}}$ — произвольный параметр.

Условие, что два линейных комплекса $\mathfrak{a}=a^{ik}[ik]$, $\bar{\mathfrak{a}}=\bar{a}^{ik}[ik]$ находятся в инволюции, записывается в виде равенства

$$\{\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}}\}=a^{12}\bar{a}^{34}+a^{13}\bar{a}^{42}+a^{14}\bar{a}^{23}+a^{23}\bar{a}^{14}+a^{42}\bar{a}^{13}+a^{34}\bar{a}^{12}=0.$$

Применяя это условие к комплексам (4) и (4'), получим:

$$\alpha+1=0.$$

Итак, мы будем устанавливать основную корреляцию $\mathfrak{F}$ между плоскостями $A_1A_3A_4$ и $A_2A_3A_4$, пользуясь нулевой системой комплекса:

$$x_1y_2-x_2y_1-(x_3y_4-x_4y_3)=0. \tag{5}$$

Так как этому комплексу как касательному принадлежат две прямые $[14]$ и $\dfrac{d}{ds}[14]$ плоскости σ, пересекающиеся в точке A_1, то в нулевой системе этого комплекса точке A_1 соответствует плоскость σ. Аналогично точке A_2 соответствует плоскость σ'.

202. Основная система уравнений. Нулевая система комплекса (5) не только определяет фундаментальную корреляцию $\mathfrak{F}$, но и непосредственно определяет плоскость π, присоединенную к точке P. Действительно, в нулевой системе (5) каждой точке $P(x_i)$ соответствует плоскость

$$x_1Y_2-x_2Y_1-x_3Y_4+x_4Y_3=0, \tag{6α}$$

где Y_i — текущие координаты точки плоскости. Внося координаты $P(x,\ 0,\ 1,\ \xi)$ точки P плоскости $A_1A_3A_4$, получим уравнение присоединенной плоскости π:

$$xY_2+\xi Y_3-Y_4=0. \tag{6β}$$

Точно так же точке $Q(0,\ y,\ 1,\ \eta)$ соответствует плоскость

$$yX_1+X_4-\eta X_3=0. \tag{6γ}$$

Нетрудно заметить, что плоскость (6β) пересекает плоскость $A_1A_3A_4$ по прямой A_1P, соединяющей эту точку P с точкой касания плоскости $A_1A_3A_4$ с кривой (A_1). Следовательно, в любой точке прямой A_1P присоединенная к этой точке плоскость π пересечет соприкасающуюся плоскость $A_1A_3A_4$ по той же прямой A_1P, и эта прямая целиком принадлежит той поверхности Σ, которая расслояет первую систему плоских элементов $H_3=\{P,\ \pi\}$, присоединенных к нашей паре кривых.

На поверхности, описываемой прямой A_1P при перемещении точки A_1 по кривой (A_1), можно принять за криволинейные координаты параметр x, определяющий положение точки P на прямой A_1P, и параметр s, определяющий положение точки A_1 на кривой (A_1). Надо определить ξ как функцию x и s так, чтобы все инфинитезимальные перемещения точки P при изменении x и s не выводили ее из плоскости π.

Обращаясь к таблице компонент (2) с дополнительным условием (3) и дифференцируя

$$P=xA_1+A_3+\xi A_4, \tag{7}$$

получим:

$$dP=A_1\,dx+\left\{A_1a\xi+A_2+A_3(b+c_2\xi)+A_4\left(x+c_1+\quad+\frac{d\xi}{ds}\right)\right\}ds. \tag{8}$$

Внося локальные координаты точки dP, т. е. коэффициенты при A_i из формулы (8), в уравнение (6β), получим единственное условие на ξ:

$$\frac{d\xi}{ds}+c_1-c_2\xi^2=0. \tag{9}$$

Аналогично, требуя, чтобы точка dQ лежала в плоскости (6γ), придём к единственному уравнению:

$$\frac{d\eta}{ds}+c_1-c_2\eta^2=0. \tag{9'}$$

Всякое решение уравнений (9) и (9′) определяет линейчатые поверхности (P) и (Q), которые описываются соответственно прямыми A_1P и A_2Q и расслаивают системы H_3, H_3', присоединенные к кривым (A_1), (A_2). Следовательно, условие (3) определяет расслояемую пару кривых (A_1), (A_2).

203. Присоединенная система W. Касательная плоскость π поверхности (P) пересекает плоскость $A_2A_3A_4$ по прямой p, определяемой уравнением $Y_1=0$ и уравнением (6β). Если точка Q поверхности (Q) лежит на этой прямой, т. е. если ее координаты $(0, y, 1, \eta)$ удовлетворяют уравнению

$$xy+\xi-\eta=0, \tag{10}$$

то прямая PQ касается поверхности (P) в точке P, но тогда и прямая q, определяемая уравнением (6γ) и $X_2=0$, будет в силу (10) содержать точку $P(x, 0, 1, \xi)$, т. е. эта точка будет лежать в касательной плоскости π' поверхности (Q) и прямая PQ будет касаться поверхности (Q) в точке Q.

Следовательно, прямая PQ при изменении x, y и s, удовлетворяющих уравнению (10), опишет конгруэнцию, фокальными поверхностями которой будут поверхности (P) и (Q), а фокусами — точки P и Q, связанные соотношением (10).

Эта конгруэнция будет конгруэнцией W.

Действительно, при закрепленном $s=s_1$ точка P будет описывать прямолинейную образующую A_1P, а точка Q будет перемещаться по образующей A_2Q, подчиняясь в своем движении закону (10). Следовательно, прямолинейные образующие на фокальных поверхностях (P) и (Q) конгруэнции (PQ) соответствуют. Между тем, согласно теореме Петерсона, достаточно двух соответствующих сопряженных систем во взаимно однозначном точечном соответствии двух поверхностей, чтобы сохранились все сопряженные системы и двойные линии инволюции сопряженных направлений — асимптотические направления. Одна общая сопряженная система всегда образована фокальной сетью, другую заменяет сдвоенная сопряженная система — одно семейство асимптотических (прямолинейных).

Таким образом, расслояемая пара кривых (A_1), (A_2) несет на себе ∞^2 конгруэнций W, которые обладают двумя однопараметрическими

семействами фокальных поверхностей (P) и (Q). Эта система W отличается от системы Бианки, присоединенной к расслояемой паре конгруэнций. Соответствующие точки расслояющих поверхностей пары конгруэнций располагаются на сходственных лучах этих конгруэнций, а так как касательная плоскость каждой поверхности одного семейства проходит через соответствующий луч другой конгруэнции пары, то каждая прямая, соединяющая пару соответствующих точек двух поверхностей различных семейств, имеет эти точки своими фокусами. Соответствие между точками поверхностей обоих семейств устанавливается твердо: одно и то же для всех конгруэнций W.

В системе W, связанной с расслояемой парой кривых, твердо установлено соответствие между прямолинейными образующими линейчатых поверхностей обоих семейств (P) и (Q): соответствующие образующие лежат в соответствующих соприкасающихся плоскостях σ и σ' обеих кривых. Соответствие точек устанавливается для каждой конгруэнции (PQ) свое. Чтобы найти точку Q_1 поверхности (Q_1), соответствующую точке P_1 поверхности (P_1) в конгруэнции W с фокальными поверхностями (P_1) и (Q_1), надо построить прямую p_1, соответствующую в корреляции $\mathfrak{F}$ точке P_1. Точка пересечения прямой p_1 с соответствующей прямолинейной образующей A_2Q_1 поверхности (Q_1) и дает искомую точку Q_1. На какой-нибудь поверхности (P_2) точке Q_1 будет соответствовать точка P_2, лежащая на пересечении ее образующей A_1P_2 с прямой q_1, соответствующей в корреляции $\mathfrak{F}$ точке Q_1. От точки P_2 мы можем перейти к соответствующей ей точке Q_2 поверхности (Q_2), отыскивая точку пересечения образующей A_2Q_2 с прямой p_2, соответствующей точке P_2. Но уже от точки Q_2 мы не сможем вернуться в точку P_1, ибо прямая q_2, соответствующая точке Q_2, проходя через точку P_2 (так как p_2 проходит через Q_2) и отличаясь от прямой $q_1\equiv(P_1P_2)$, не пройдет через точку P_1, а пересечет образующую A_1P_1 в точке P_1^*, отличной от точки P_1.

Следовательно, система W, присоединенная к паре кривых, не имеет замкнутых циклов из четырех поверхностей, связанных последовательно конгруэнциями W, — циклов, характерных для системы Бианки, присоединенной к паре конгруэнций, и соответствующих основной теореме Бианки о переместительности асимптотических преобразований. В системе W, присоединенной к паре кривых, можно найти сколько угодно замкнутых циклов из шести поверхностей. Достаточно взять любые три поверхности (P_1), (P_2), (P_3) и три точки их P_1, P_2, P_3 на соответствующих образующих, чтобы получить в плоскости $A_1A_3A_4$ треугольник $P_1P_2P_3$. Ему будет соответствовать в основной корреляции $\mathfrak{F}$ на плоскости $A_2A_3A_4$ трехсторонник $p_1p_2p_3$ с вершинами $Q_1=(p_2p_3)$, $Q_2=(p_3p_1)$, $Q_3=(p_1p_2)$. Шестиугольник $P_1Q_2P_3Q_1P_2Q_3$ опишет своими сторонами шесть конгруэнций W, для которых фокальными поверхностями будут служить поверхности, описанные вершинами шестиугольника.

204. Единственность расслояемой системы H_3, H_3', порождаемой парой кривых. Покажем теперь, что выбор нулевой системы общего касательного комплекса в инволюции с общим соприкасающимся необходим, чтобы придти к системе W из расслояющих поверхностей. Мы видим, что любая пара кривых с компонентами проективных движений тетраэдра в виде таблицы (2) имеет пучок касательных линейных комплексов, определяемых уравнением (4′), где α — параметр пучка.

В нулевой системе одного из этих комплексов точке $P(x, 0, 1, \xi)$ соответствует плоскость

$$xY_2+\alpha Y_4-\alpha\xi Y_3=0$$

и точке $Q(0, y, 1, \eta)$ — плоскость

$$yX_1-\alpha X_4+\alpha\eta X_3=0.$$

Внося в первое уравнение местные координаты dP, а во второе — dQ, придем к уравнениям:

$$\frac{d\xi}{ds}+c_1-c_2\xi^2+\frac{1+\alpha}{\alpha}x=0,$$

$$\frac{d\eta}{ds}+c_1-c_2\eta^2-\frac{\alpha a_1+a_2}{\alpha}\eta y=0.$$

Так как на поверхности (P) переменные x и s — независимые параметры, а на поверхности (Q) независимы y и s, то коэффициенты при x и y должны обращаться в нуль, откуда и находим: $\alpha=-1$, $a_2=a_1$, т. е. пара кривых должна обладать общим соприкасающимся (2-го порядка) линейным комплексом, а фундаментальная корреляция $\mathfrak{F}$ должна определяться касательным линейным комплексом, который находится в инволюции с этим соприкасающимся.

205. Семейство линий, описанных точками пересечений образующих. Уравнения (6β, γ)

$$xY_2+\xi Y_3-Y_4=0, \tag{6β′}$$

$$yX_1-\eta X_3+X_4=0 \tag{6γ′}$$

определяют теперь касательные плоскости поверхностей (P) и (Q) соответственно в точках $P(x, 0, 1, \xi)$ и $Q(0, y, 1, \eta)$. При обращении x (или y) в бесконечность эти плоскости совпадают независимо от значения ξ или η с плоскостью $Y_2=0$ (или соответственно $X_1=0$). Таким образом, все поверхности (P), описанные пучком образующих с центром в точке A_1, касаются друг друга в каждой точке A_1, т. е. вдоль всей первой кривой (A_1). Вместе с тем общая касательная плоскость совпадает с плоскостью $A_1A_3A_4$, т. е. с соприкасающейся плоскостью кривой (A_1). Значит, эта кривая является *общей асимптотической* линией всех расслояющих поверхностей первого семейства.

Совершенно так же вторая линия (A_2) будет *общей асимптотической* всех расслояющих поверхностей второго семейства, которые касаются друг друга вдоль этой общей линии.

Для $x=0$ и $y=0$ плоскости (6β) и (6γ) совпадают, если $\xi=\eta$, т. е. если совпадают точки P и Q на ребре A_3A_4, но ξ и η являются двумя решениями одного и того же уравнения (9) (и (9′)) п. 202. Следовательно, если $\xi=\eta$ в одной точке, т. е. для одного значения s, то они равны при всех значениях s и две точки совпадают вдоль всей линии. Таким образом, для каждой расслояющей поверхности первого семейства (P), например для поверхности Σ, найдется поверхность второго семейства (Q) (будем обозначать ее Σ') такая, что соответствующие образующие их пересекаются в некоторой точке R на ребре A_3A_4. Будем называть эти поверхности Σ и Σ' *сопряженными*. При изменении s эта точка опишет линию (R), вдоль которой поверхности Σ и Σ' касаются друг друга.

Действительно, обе поверхности имеют в точке R общую касательную плоскость, полярную плоскость точки P в основной нулевой системе, т. е. плоскость A_1RA_2. Между тем, дифференцируя дважды точку

$$R=A_3+A_4,$$

получим в силу (9) п. 202:

$$\begin{aligned}\frac{dR}{ds}&=\xi aA_1+A_2+(b+c_2\xi)R,\\ \frac{d^2R}{ds^2}&=\frac{d}{ds}(\xi a)A_1+\frac{d}{ds}(b+c_1\xi)R+aR+(b+c_1\xi)\frac{dR}{ds}.\end{aligned} \tag{11}$$

Следовательно, соприкасающаяся плоскость линии (R) совпадает с общей касательной плоскостью A_1A_2R, откуда следует предложение.

206. Новые расслояемые пары кривых (R). Естественно спросить, нельзя ли сочетать две кривые (R) так, чтобы они образовали расслояемую пару подобно кривым (A_1), (A_2)?

Возьмем две кривые (R_1), (R_2), определяемые двумя решениями уравнения (9) п. 202, так что

$$R_i=A_3+\xi_iA_4 \qquad (i=1,\ 2). \tag{12}$$

Таблица (2) п. 200 с дополнительным условием (3) п. 201 дает:

$$\begin{aligned}\frac{dR_i}{ds}&=(b+c_2\xi_i)R_i+T_i, \quad T_i=A_1a\xi_i+A_2;\\ \frac{dT_i}{ds}&=A_1\frac{d(a\xi_i)}{ds}+aR_i.\end{aligned} \tag{13}$$

Линейный комплекс, имеющий касание 1-го порядка с обеими кривыми (R_1) и (R_2), определяется условиями:

$$\{\mathfrak{a}, R_iT_i\}=0, \quad \left\{\mathfrak{a}, R_i\frac{dT_i}{ds}\right\}=0 \quad (i=1,\ 2),$$

или, в силу формул (13),

$$\{\mathfrak{a}(R_i, A_1 a\xi_i + A_2)\} = 0, \quad \{\mathfrak{a}(R_i A_1)\} = 0,$$

или окончательно

$$\{\mathfrak{a}[13]\} = 0, \ \{\mathfrak{a}[14]\} = 0, \ \{\mathfrak{a}[23]\} = 0, \ \{\mathfrak{a}[24]\} = 0.$$

Это те же уравнения, которые определяли общий касательный линейный комплекс к кривым (A_1), (A_2).

Его уравнение напишется в виде (4') п. 201

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 + \alpha(x_3 y_4 - x_4 y_3) = 0,$$

где α — произвольный параметр.

В нулевой системе этого комплекса точке $P_i(x, x\zeta_i, 1, \xi_i)$ прямой $A_1 + \zeta_i A_2, R_i)$ соответствует плоскость

$$x\zeta_i Y_1 - xY_2 + \alpha\xi_i Y_3 - \alpha Y_4 = 0. \tag{14}$$

Дифференцируя

$$P_i = x(A_1 + \zeta_i A_2) + A_3 + \xi_i A_4,$$

получим, в силу (2) п. 200, при условии (3) п. 201:

$$dP_i = (A_1 + \zeta_i A_2)\,dx + \Big\{(b + c_2\xi_i) R_i + A_1 a\xi_i + A_2 + \\ + x\Big(A_2 \frac{d\zeta_i}{ds} + A_3 a\zeta_i + A_4\Big)\Big\}\, ds.$$

Внося местные координаты dP_i в уравнение (14), получим уравнение

$$x^2 \frac{d\zeta_i}{ds} + x(\alpha + 1)(1 - a\zeta_i\xi_i) = 0.$$

Это уравнение должно быть удовлетворено тождественно относительно x и s. Следовательно, равны нулю коэффициенты при степенях x, а так как ζ должно определяться из дифференциального уравнения с произвольным постоянным, то мы приходим к уравнениям

$$\alpha = -1, \quad \frac{d\zeta_i}{ds} = 0.$$

Итак, прежде всего фундаментальная корреляция для любой пары кривых (R_1), (R_2) определяется нулевой системой того же самого линейного комплекса (общий касательный в инволюции с соприкасающимся), что и для пары кривых (A_1) и (A_2).

Затем в данном случае

$$\zeta_i = \text{const}.$$

Это объясняется, конечно, тем, что точки A_1 и A_2 тоже дают решение нашего вопроса, т. е. прямые A_1R_i и A_2R_i тоже описывают расслояющие поверхности пары кривых (R_1), (R_2).

207. Новое расширение системы кривых (R). Мы обнаруживаем, что, кроме основной пары кривых (A_1), (A_2), наш тетраэдр несет еще ∞^1 кривых (R_i), так что любые две из них образуют расслояемую пару. Они расслояются линейчатыми поверхностями, соответствующие образующие которых образуют пучки с центрами в точках R_i, опирающиеся на прямую A_1A_2.

Эти поверхности тоже собираются в сопряженные пары, так что каждая пара имеет общую асимптотическую линию, вдоль которой они касаются друг друга. Эта кривая описывается точкой пересечения соответствующих образующих сопряженных поверхностей. Это — точки $S_i = A_1 + \zeta_i A_2$, $\zeta_i = \text{const}$.

Мы видим, что эти кривые (S_i) — одни и те же для любой пары кривых (R_i). Расслояющие поверхности всей этой совокупности ∞^2 пар (R_i), (R_k) описаны прямыми линейной конгруэнции с директрисами A_1A_2, A_3A_4 — прямыми, соединяющими любую точку R_i с любой точкой S_k.

Можно сказать, что мы имеем здесь четырехмерную систему элементов H_4, описанную нулевыми системами (точка и соответствующая ей в нулевой системе плоскость) комплексов, полученных из комплекса

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 - (x_3 y_4 - x_4 y_3) = 0$$

при движении координатного тетраэдра, согласно нашим формулам.

Все это множество плоских элементов расслояется при помощи ∞^2 линейчатых поверхностей, описанных прямыми R_iS_k.

Можно предвидеть, что кривые (S_i) будут играть ту же роль для (R_i), что и кривые (R_i) для (S_i).

Действительно, дифференцируя с помощью таблицы (2) при условии (3) п. 201 точку Q_i, лежащую на прямой, соединяющей точку S_i с произвольной точкой ребра A_3A_4:

$$Q = x(A_1 + \zeta A_2) + A_3 + \theta A_4,$$

где ζ — постоянная, θ — неизвестная функция от s, а x и s — независимые переменные, мы получим:

$$dQ = (A_1 + \zeta A_2)\,dx + \Big\{a(A_1\theta + x\zeta A_3) + A_2 + xA_4 + \\ + A_3(b + c_2\theta) + A_4\Big(\frac{d\theta}{ds} + c_1 + b\theta\Big)\Big\}\, ds.$$

Внося локальные координаты точки dQ в уравнение плоскости, соответствующей точке Q в нулевой системе нашей фундаментальной корреляции $\mathfrak{F}$:

$$-x\zeta Y_1 + xY_2 + \theta Y_3 - Y_4 = 0,$$

или, что сводится к тому же, внося в выражение для dQ вместо A_i

коэффициенты при Y_i из уравнения плоскости, мы придем к уравнению на θ:

$$\frac{d\theta}{ds}+c_1-c_2\theta^2=0,$$

откуда находится общий интеграл $\theta=\xi$.

Любые две кривые (S_1), (S_2) образуют расслояемую пару с той же фундаментальной корреляцией, и пары сопряженных расслояющих поверхностей прикасаются друг к другу вдоль общих асимптотических, которыми служат кривые того же самого семейства кривых $(\boldsymbol{R}_i)$, которое мы нашли, рассматривая пару кривых $(\boldsymbol{A}_1)$, $(\boldsymbol{A}_2)$. Кривые $(\boldsymbol{A}_1)$ и $(\boldsymbol{A}_2)$, очевидно, входят в состав семейства $(\boldsymbol{S}_i)$. Нулевая система фундаментальной корреляции для все кривых $(\boldsymbol{S}_i)$ та же самая, что и для семейства $(\boldsymbol{R}_i)$. Расслояющие поверхности $(\boldsymbol{Q})$ семейства кривых $(\boldsymbol{S}_i)$ совпадают с расслояющими поверхностями $(\boldsymbol{P})$ семейства кривых $(\boldsymbol{R}_i)$.

208. Расслояемая пара линейчатых поверхностей. Мы пришли, таким образом, к проблеме расслояемости в новом виде. Пара конгруэнций K и K' расслояема, если существует семейство ∞^1 расслояющих поверхностей Σ, касательные плоскости которых в точках пересечения со всяким лучом $\boldsymbol{r}$ конгруэнции K проходят через соответствующий луч $\boldsymbol{r}'$ конгруэнции K', и второе семейство ∞^1 поверхностей Σ', у которых касательные плоскости в точках, расположенных на луче $\boldsymbol{r}'$, образуют пучок с осью $\boldsymbol{r}$.

Заменим теперь конгруэнцию, т. е. ∞^2 прямых, линейчатой поверхностью, т. е. серией ∞^1 прямых, поверхность Σ — кривой, касательную плоскость поверхности — соприкасающейся плоскостью кривой, и мы получим задачу расслоения пары линейчатых поверхностей в ниже следующем виде.

Дана пара линейчатых поверхностей (r) и (r'), так что между их прямолинейными образующими $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}'$ установлено взаимно однозначное соответствие. Найти на поверхности (r) семейство линий (C) и на поверхности (r') семейство линий (C'), так чтобы соприкасающаяся плоскость к каждой линии C в точке пересечения ее с любым лучом $\boldsymbol{r}$ проходила через соответствующий луч $\boldsymbol{r}'$ и, обратно, пучок плоскостей с осью $\boldsymbol{r}$ служил бы соприкасающимися плоскостями линий (C') в точках пересечения их с соответствующим лучом $\boldsymbol{r}'$.

Нетрудно заметить, что линейчатые поверхности, описанные ребрами $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$ и $(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4)$ нашего тетраэдра, дают такую расслояемую пару поверхностей. Расслояющими кривыми служат линии $\boldsymbol{S}_i$ на поверхности $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$ и линии $(\boldsymbol{R}_i)$ на поверхности $(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4)$. Любая пара кривых находится в отношении асимптотического преобразования Бианки [1]: прямая, соединяющая пару соответствующих точек $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{R}$, является линией пересечения соприкасающихся плоскостей обеих кривых.

Обратно, если мы возьмем любую пару линейчатых поверхностей, лучи которых находятся во взаимно однозначном соответствии и

s — общий параметр соответствующих лучей поверхностей, и к паре соответствующих лучей $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2$ и $\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4$ присоединим тетраэдр $\{\boldsymbol{A}_i\}$ $(i=1, 2, 3, 4)$, проективные движения которого определяются уравнениями

$$\frac{d\boldsymbol{A}_i}{ds}=a_i^k\boldsymbol{A}_k, \tag{15}$$

то задача расслоения сводится к отысканию таких функций ζ и ξ от s, чтобы точки

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{A}_1+\zeta\boldsymbol{A}_2,\quad \boldsymbol{R}=\boldsymbol{A}_3+\xi\boldsymbol{A}_4$$

описывали расслояющие кривые, т. е. чтобы соприкасающаяся плоскость к кривой $(\boldsymbol{S})$ в точке $\boldsymbol{S}$ проходила через луч $\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4$ (и аналогично для кривой $(\boldsymbol{R})$), а это в свою очередь сводится к уравнениям:

$$\begin{aligned}&\left(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{S}\,\frac{d\boldsymbol{S}}{ds}\right)=0,\quad \left(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{S}\,\frac{d^2\boldsymbol{S}}{ds^2}\right)=0,\\ &\left(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{R}\,\frac{d\boldsymbol{R}}{ds}\right)=0,\quad \left(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{R}\,\frac{d^2\boldsymbol{R}}{ds^2}\right)=0.\end{aligned} \tag{16}$$

Так как уравнения (15) дают нам

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{S}}{ds}=\boldsymbol{A}_1(a_1^1+\zeta a_2^1)+\boldsymbol{A}_2\left(a_1^2+\zeta a_2^2+\frac{d\zeta}{ds}\right)+\\ +\boldsymbol{A}_3(a_1^3+\zeta a_2^3)+\boldsymbol{A}_4(a_1^4+\zeta a_2^4),\end{aligned}$$

то первое уравнение (16) принимает вид

$$\frac{d\zeta}{ds}+a_1^2+(a_2^2-a_1^1)\zeta-a_2^1\zeta^2=0. \tag{16'}$$

Выберем точки $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ на прямой $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2$ так, чтобы они описывали две кривые $(\boldsymbol{S})$, а точки $\boldsymbol{A}_3$ и $\boldsymbol{A}_4$ на прямой $\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4$ так, чтобы они лежали соответственно на касательных к линиям $(\boldsymbol{A}_2)$ и $(\boldsymbol{A}_1)$. Так как теперь уравнение для ζ имеет решением $\zeta=0$ или $\frac{1}{\zeta}=0$ и для этих решений $\frac{d\boldsymbol{S}}{ds}$, кроме точки $\boldsymbol{S}$, зависит только от точки $\boldsymbol{A}_4$ или точки $\boldsymbol{A}_3$, то

$$a_1^2=a_2^1=a_1^3=a_2^4=0.$$

При подходящем нормировании точек $\boldsymbol{A}_i$ и выборе параметра s получим:

$$a_1^4=a_3^2=1,\quad a_1^1=a_2^2=0,\quad a_3^3=a_4^4.$$

Параметр ζ будет постоянным $\left(\text{так как уравнение (16′) принимает вид } \frac{d\zeta}{ds}=0\right)$, и, обозначая $a_2^3=a$, получим:

$$\frac{d\boldsymbol{S}}{ds}=a\zeta\boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{A}_4;$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{S}}{ds^2}=\boldsymbol{A}_1(a\zeta a_3^1+a_4^1)+\boldsymbol{A}_2(a\zeta+a_4^2)+\boldsymbol{A}_3\mathscr{A}+\boldsymbol{A}_4\mathscr{B},$$

где содержание выражений $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ нас не интересует. Второе уравнение (16) даст, следовательно,

$$\zeta^2 a a_3^1 + \zeta(a_4^1 - a) - a_4^2 = 0,$$

а так как ζ — произвольный параметр и $a \neq 0$, то $a_3^1 = a_4^2 = 0$, $a_4^1 = a$, и мы возвращаемся к таблице компонент (2) п. 200 с добавочным условием (3) п. 201. Любые две расслояемые линейчатые поверхности несут ∞^2 расслояемых пар кривых, именно любые две расслояющие кривые одного семейства сами образуют расслояемую пару.

209. Новая характеристика расслояемой пары линейчатых поверхностей. С другой стороны, по формулам (2), (3) п. 201, принимая $\zeta = \mathrm{const}$, имеем:

$$\frac{d\boldsymbol{S}}{ds} = a\zeta \boldsymbol{A}_3 + \boldsymbol{A}_4,$$

$$\frac{d}{ds}(a\zeta \boldsymbol{A}_3 + \boldsymbol{A}_4) = \mathscr{A}\boldsymbol{A}_3 + \mathscr{B}\boldsymbol{A}_4 + a\boldsymbol{S}.$$

Это показывает, что касательная к линии $\boldsymbol{S}$ на поверхности $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$ пересекает образующую $\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4$ в точке $a\zeta\boldsymbol{A}_3 + \boldsymbol{A}_4$, а так как касательная плоскость к поверхности $(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4)$ в этой точке $a\zeta\boldsymbol{A}_3 + \boldsymbol{A}_4$, определяемая точками

$$\left\{\boldsymbol{A}_3,\ \boldsymbol{A}_4,\ \frac{d}{ds}(a\zeta\boldsymbol{A}_3 + \boldsymbol{A}_4)\right\} = (\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{S})\,a,$$

проходит через точку $\boldsymbol{S}$, то прямая, соединяющая точку $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{A}_1 + \zeta\boldsymbol{A}_2$ с точкой $a\zeta\boldsymbol{A}_3 + \boldsymbol{A}_4$, касается обеих поверхностей и описывает конгруэнцию с линейчатыми фокальными поверхностями $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$ и $(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4)$. На поверхности $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$ луч огибает линии $(\boldsymbol{S})$, на поверхности $(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4)$, очевидно, — линии $(\boldsymbol{R})$, причем в соответствующих точках значения ζ и ξ связаны условием $a\zeta\xi = 1$.

Так как прямолинейные образующие на фокальных поверхностях соответствуют друг другу, то это — конгруэнция W.

Обратно, если имеем любую конгруэнцию W с линейчатыми фокальными поверхностями и лучи конгруэнции огибают на первой фокальной поверхности $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$ линии $(\boldsymbol{S})$, а на второй $(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4)$ — линии $(\boldsymbol{R})$, то первая фокальная плоскость луча $\boldsymbol{SR}$ является соприкасающейся плоскостью линии $(\boldsymbol{S})$ и касательной плоскостью поверхности $(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4)$; следовательно, соприкасающаяся плоскость любой линии $(\boldsymbol{S})$ содержит луч $\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4$. Аналогично плоскости пучка с осью $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2$ служат соприкасающимися плоскостями линий $(\boldsymbol{R})$, а, значит, пара линейчатых поверхностей $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$, $(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4)$, которые служат фокальными поверхностями одной конгруэнции W, расслояема, и расслояющими кривыми служат линии, огибаемые на фокальных поверхностях лучами конгруэнции.

210. Пара кривых с пересечением касательных. Обратимся теперь к рассмотрению пары кривых, между точками которых установлено взаимно однозначное соответствие и касательные, проведенные к кривым в паре соответствующих точек, пересекаются. Будем предполагать, что линия пересечения соприкасающихся плоскостей σ_1 и σ_2, взятых в двух соответствующих точках $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ обеих кривых, не имеет общих точек с прямой $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2$, соединяющей эти две точки.

Обозначим через $\boldsymbol{A}_3$ точку пересечения касательных к кривым $(\boldsymbol{A}_1)$ и $(\boldsymbol{A}_2)$ в точках $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ и пусть $\boldsymbol{A}_4$ — некоторая точка линии пересечения соприкасающихся плоскостей σ_1 и σ_2, отличная от точки $\boldsymbol{A}_3$.

Примем эти четыре точки $\boldsymbol{A}_i$ за вершины подвижного тетраэдра отнесения.

Поскольку $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_3$ и $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_4$ — касательные к линиям $(\boldsymbol{A}_1)$, $(\boldsymbol{A}_2)$, а плоскости $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4)$, $(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4)$ — их соприкасающиеся плоскости, имеем:

$$\left(\frac{d\boldsymbol{A}_1}{ds}\ \ \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_3\right) = 0,\quad \left(\frac{d\boldsymbol{A}_2}{ds}\ \ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3\right) = 0,$$
$$\left(\frac{d^2\boldsymbol{A}_1}{ds^2}\ \ \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4\right) = 0,\quad \left(\frac{d^2\boldsymbol{A}_2}{ds^2}\ \ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4\right) = 0, \tag{17}$$

откуда, сохраняя обозначения (1α) п. 200, опять получаем для компонент a_i^k уравнения

$$a_1^2 = a_1^4 = a_2^1 = a_2^4 = a_3^1 = a_3^2 = 0.$$

Затем подходящим нормированием точек $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$ приведем компоненты a_1^1, a_2^2 к нулю. Наконец, заменой параметра s и точек $\boldsymbol{A}_3$ и $\boldsymbol{A}_4$ на $\bar{s} = f(s)$, $\bar{\boldsymbol{A}}_3 = \rho_3\boldsymbol{A}_3$, $\bar{\boldsymbol{A}}_4 = \rho_4(\boldsymbol{A}_4 + \lambda\boldsymbol{A}_3)$, сохраняя приведенные к нулю компоненты, приведем $a_3^3 - a_4^4$ и a_4^3 к нулю, а a_1^3, a_4^2 — к единице, если, конечно, a_1^3 или a_4^2 не равно нулю. Обращение a_1^3 в нуль привело бы к неподвижности точки $\boldsymbol{A}_1$, а обращение в нуль a_4^2 — к неподвижности плоскости $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4$, т. е. к вырождению первого семейства плоскостей.

Оставляя эти случаи вырождения в стороне и меняя обозначения, мы представим таблицу компонент a_i^k в форме

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & b & c \\ a_2 & 1 & 0 & b \end{vmatrix} \tag{18}$$

Здесь компоненты a_1, a_2, c надо считать отличными от нуля.

211. Фундаментальная корреляция $\mathfrak{F}$. Записывая уравнение линейного комплекса, имеющего касание 2-го порядка с каждой из кривых (A_1) и (A_2) в точках A_1 и A_2, в виде

$$\mathfrak{a} = a^{ik}[ik],$$

мы будем иметь условия касания 2-го порядка в виде равенств

$$\{\mathfrak{a}[13]\} = 0, \quad \left\{\mathfrak{a}\frac{d}{ds}[13]\right\} = 0, \quad \left\{\mathfrak{a}\frac{d^2}{ds^2}[13]\right\} = 0,$$

$$\{\mathfrak{a}[23]\} = 0, \quad \left\{\mathfrak{a}\frac{d}{ds}[23]\right\} = 0, \quad \left\{\mathfrak{a}\frac{d^2}{ds^2}[23]\right\} = 0.$$

или, в силу уравнения (1α) п. 200, (18) п. 210, в виде

$$\{\mathfrak{a}[13]\} = 0, \quad \{\mathfrak{a}[14]\} = 0, \quad \{\mathfrak{a}[34]\} + \{\mathfrak{a}[12]\} = 0,$$

$$\{\mathfrak{a}[23]\} = 0, \quad \{\mathfrak{a}[24]\} = 0, \quad a_1\{\mathfrak{a}[34]\} - a_2\{\mathfrak{a}[12]\} = 0.$$

Отсюда необходимое и достаточное условие существования общего соприкасающегося комплекса (касание 2-го порядка) записывается в виде

$$a_2 = -a_1 = a, \tag{19}$$

и для координат комплекса $\mathfrak{a}$ получим равенства

$$a^{24} = a^{14} = a^{23} = a^{13} = 0, \quad a^{12} = -a^{34}.$$

Сокращая все члены уравнения комплекса на a^{34}, мы напишем его в виде

$$\mathfrak{a} = [12] - [34].$$

В локальных координатах уравнение комплекса запишется в виде

$$\{\mathfrak{a}(PQ)\} \equiv x_1y_2 - x_2y_1 - (x_3y_4 - x_4y_3) = 0,$$

где $P = \sum x_iA_i$, $Q = \sum y_iA_i$; уравнение касательного (касание 1-го порядка) линейного комплекса в инволюции с соприкасающимся — в виде

$$x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3 = 0. \tag{20}$$

Полагая линейный комплекс (20) и его нулевую систему в основу для определения фундаментальной корреляции между элементами пары соответствующих соприкасающихся плоскостей $A_1A_3A_4$ и $A_2A_3A_4$, мы увидим, что каждой точке пространства $P(x_i)$ соответствует плоскость

$$-x_2Y_1 + x_1Y_2 - x_4Y_3 + x_3Y_4 = 0, \tag{21}$$

где Y_i — текущие координаты точки плоскости.

В частности, точке $P(x, 0, 1, \xi)$ плоскости $A_1A_3A_4$, которую можно считать центром плоского элемента, соответствует плоскость π (плоскость элемента):

$$xY_2 - \xi Y_3 + Y_4 = 0, \tag{22}$$

а точке $Q(0, y, 1, \eta)$ — плоскость π':

$$yX_1 + \eta X_3 - X_4 = 0. \tag{22'}$$

212. Присоединенная система W. Плоскость π пересекает соприкасающуюся плоскость $A_1A_3A_4$ по прямой A_1P. Следовательно, при перемещении точки P по этой прямой соответствующая ей плоскость π вращается около нее и прямая принадлежит поверхности Σ, расслояющей систему плоских элементов $H_3 \equiv \{P, \pi\}$.

Если на этой поверхности принять за криволинейные координаты x и s, то условие расслояемости выразится требованием, чтобы дифференциал точки

$$P = xA_1 + A_3 + \xi A_4 \tag{23}$$

для произвольных значений дифференциалов dx, ds лежал бы в плоскости, определяемой уравнением (22). Так как теперь

$$dP = A_1\,dx + \left\{A_1a\xi + A_2\xi + A_3(x+b) + A_4\left(c + b\xi + \frac{d\xi}{ds}\right)\right\}ds, \tag{24}$$

то наше условие запишется в виде только одного равенства:

$$\frac{d\xi}{ds} = -c. \tag{25}$$

Аналогично точка $Q(0, y, 1, \eta)$ опишет при изменении y и s линейчатую поверхность (A_2Q), расслояющую вторую систему плоских элементов $H_3' = \{Q, \pi'\}$, если η удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\eta}{ds} = -c. \tag{25'}$$

Уравнения (25) и (25') определяют два семейства поверхностей Σ и Σ', расслояющих системы H_3, H_3'.

Касательная плоскость π поверхности (P) пересекает плоскость $A_2A_3A_4$ по прямой p, определяемой уравнением $Y_1 = 0$ и уравнением (22).

Точка $Q(0, y, 1, \eta)$ лежит на этой прямой, если ее координаты удовлетворяют уравнению

$$xy - \xi + \eta = 0. \tag{26}$$

Тогда прямая PQ касается поверхности (P), ибо лежит в ее касательной плоскости, но тогда и прямая q, определяемая уравнениями $X_2 = 0$ и (22'), будет содержать точку $P(x, 0, 1, \xi)$, так как эта точка будет лежать в плоскости π', касательной к поверхности (Q), и, следовательно, прямая PQ будет касаться обеих поверхностей (P) и (Q).

Любые две поверхности (P) и (Q) служат фокальными поверхностями конгруэнции (PQ), причем парой соответствующих точек P

и Q — точек касания луча PQ с его фокальными поверхностями — служат точки, координаты которых связаны уравнением (26).

Фиксируя ξ и η, т. е. выбирая определенные образующие A_1P и A_2Q, мы каждому значению x, т. е. каждой точке P образующей A_1P, ставим в соответствие значение y (определяемое уравнением (26)), т. е. соответствующую точку Q образующей A_2Q. Таким образом, на фокальных поверхностях (A_1P) и (A_2Q) нашей конгруэнции соответствуют прямолинейные образующие, откуда следует, что соответствуют и криволинейные асимптотические, т. е. каждая такая конгруэнция (PQ) есть конгруэнция W.

Таким образом, совокупность ∞^1 поверхностей $\Sigma \equiv (A_1P)$ и $\Sigma' \equiv (A_2Q)$ и ∞^2 конгруэнций (PQ) образует систему W 2-го рода, отличную от системы Бианки, присоединенной к расслояемой паре конгруэнций, без твердого соответствия точек на расслояющих поверхностях, ибо, если точке $P_1(x_1, 0, 1, \xi_1)$ поверхности (A_1P_1) соответствуют точка $Q(0, y, 1, \eta)$ поверхности (A_2Q) с заданным значением η и значением

$$y = \frac{\xi_1 - \eta}{x_1}$$

и точка $Q'(0, y', 1, \eta')$ поверхности (A_2Q') с другим значением η' и

$$y' = \frac{\xi_1 - \eta'}{x_1},$$

то на всякой поверхности (A_1P_2), определяемой значением ξ_2, точкам Q и Q' будут соответствовать разные точки $P_2(x_2, 0, 1, \xi_2)$ и $P_2'(x_2', 0, 1, \xi_2)$, определяемые координатами

$$x_2 = \frac{\xi_2 - \eta}{\xi_1 - \eta} x_1, \qquad x_2' = \frac{\xi_2 - \eta'}{\xi_1 - \eta'} x_1'.$$

213. Два семейства расслояемых кривых. Прямолинейные образующие A_1P, A_2Q двух поверхностей (P) и (Q), которые мы будем называть сопряженными, пересекаются при условии $\eta = \xi$.

Точка пересечения их

$$R = A_3 + \xi A_4$$

лежит на ребре A_3A_4. В этой точке касательные плоскости обеих поверхностей совпадают с плоскостью A_1RA_2. Следовательно, поверхности касаются друг друга вдоль линии (R). Так как в силу условий (1α) п. 200, (18) п. 210, (19) п. 211, (25) п. 212

$$\frac{dR}{ds} = bR + \xi T, \qquad T = aA_1 + A_2, \qquad \frac{dT}{ds} = A_1 \frac{da}{ds}, \tag{27}$$

касательные всех кривых R_i для любого решения уравнения (25) сходятся в точке T ребра A_1A_2; прямая A_1A_2 точно так же, как и двойственная ей A_3A_4, описывает развертывающиеся поверхности, и точки T и A_3 — точки касания образующих A_1A_2 и A_3A_4 с ребром возврата (T) и (A_3). Соприкасающиеся плоскости всех кривых (R), как это видно из формул (27), проходят через ребро A_1A_2.

Так как из тех же формул легко получить:

$$(RT) = -(aA_1 + A_2,\ A_3 + \xi A_4),$$

$$\frac{d}{ds}(RT) = b(RT) - \frac{da}{ds}(A_1,\ A_3 + \xi A_4),$$

$$\frac{d^2}{ds^2}(RT) = \frac{db}{ds}(RT) + b\frac{d}{ds}(RT) - \left(b\frac{da}{ds} + \frac{d^2a}{ds^2}\right)(A_1,\ A_3 + \xi A_4) - \\ - \xi\frac{da}{ds}\{(A_1A_2) + (A_3A_4)\},$$

то первые две прямые (RT), $\frac{d}{ds}(RT)$ не содержат компонент (A_1A_2) и (A_3A_4), а последняя содержит их с одинаковыми коэффициентами (местные координаты) $-\xi\frac{da}{ds}$; следовательно, все три удовлетворяют линейному комплексу:

$$x_1y_2 - x_2y_1 - (x_3y_4 - x_4y_3) = 0.$$

Таким образом, все кривые (R_i) имеют общий соприкасающийся комплекс (касание 2-го порядка), а следовательно, и общий касательный в инволюции с соприкасающимся, определяемый уравнением (20) п. 211.

Любые две кривые (R_1), (R_2) образуют расслояемую пару.

Нулевая система комплекса (20) ставит в соответствие точке $P(x_i)$ плоскость

$$x_2Y_1 - x_1Y_2 + x_4Y_3 - x_3Y_4 = 0,$$

где Y_i — текущие координаты точки плоскости.

Выбирая точку

$$P = x(A_3 + \xi A_4) + \theta A_1 + A_2$$

в соприкасающейся плоскости A_1A_2R точки $R = A_3 + \xi A_4$ кривой (R), мы поставим ей в соответствие плоскость π, определяемую уравнением

$$Y_1 - \theta Y_2 + x(\xi Y_3 - Y_4) = 0. \tag{28}$$

Так как при переменных x и s

$$dP = (A_3 + \xi A_4)\,dx + \left\{A_1\frac{d\theta}{ds} + x\xi T + bxR + (\theta - a)A_3\right\}ds,$$

то dP будет лежать в плоскости (28) и PR будет описывать поверхность, расслояющую систему плоских элементов (P, π), если θ удовлетворяет условию

$$\frac{d\theta}{ds} = 0, \quad \theta = \text{const}.$$

Из каждой точки $R = A_3 + \xi A_4$, где ξ — любое решение уравнения (25), можно провести пучок прямых RS, где

$$S = \theta A_1 + A_2, \quad \theta = \text{const}.$$

Каждая прямая RS при изменении параметра s описывает поверхность, и все эти поверхности расслояют систему $H_4 = \{P, \pi\}$, содержащую ∞^4 плоских элементов.

Иначе говоря, любые две кривые (R_1) и (R_2), соответствующие решениям ξ_1, ξ_2 уравнения (25), образуют расслояемую пару. Расслояющие поверхности собираются в пары сопряженных поверхностей, касающихся вдоль кривых (S_i). Это семейство кривых (S) — одно и то же для любой пары кривых (R_a), (R_b). Кривые (A_1) и (A_2) входят в состав семейства $\{S\}$.

Так как θ — постоянное, а кривые (A_1) и (A_2) имеют общий соприкасающийся линейный комплекс, то ясно, что этот же комплекс будет иметь касание 2-го порядка со всеми кривыми $\{S\}$. Та же нулевая система (20) п. 211 определит соответствие точек и плоскостей плоских элементов тех систем $H_3 = \{P, \pi\}$, которые связаны с парами кривых (S_a), (S_b). Совокупность всех элементов этих систем образует ту же систему, которую мы получили, исходя из пары кривых (R_i) и которая привела нас к поверхностям (P):

$$P = \theta A_1 + A_2 + x(A_3 + \xi A_4),$$

где θ — постоянное и ξ — решение уравнения (25).

Группируя эти поверхности иначе, именно собирая вместе те, которые соответствуют постоянному значению θ_a и переменному параметру, содержащемуся в общем решении уравнения (25), мы получим семейство поверхностей, расслояющее ту систему плоских элементов $H_3 = (P, \pi)$, которая связана с кривой $(S_a) = (\theta_a A_1 + A_2)$, т. е. центры элементов которой расположены в соприкасающихся плоскостях кривой (S_a).

Для любой пары кривых (S_a), (S_b) расслояющие поверхности (P) собираются в пары сопряженных поверхностей, образующие которых пересекаются. Эти точки пересечения для любой пары (S_a), (S_b) описывают то же самое семейство кривых (R).

214. Связь расслояемых пар линейчатых поверхностей с расслояемыми парами конгруэнций. Две линейчатые поверхности, между прямолинейными образующими которых установлено взаимно однозначное соответствие, мы называли (п. 208) расслояемой парой, если на каждой поверхности можно провести семейство ∞^1 кривых C (соответственно, C') так, чтобы соприкасающиеся плоскости, проведенные к кривым каждой поверхности в точках их пересечения с одной прямолинейной образующей (например, r), проходили через соответствующую образующую (например, r') другой поверхности.

Мы покажем теперь, что каждая расслояемая пара конгруэнций распадается двумя способами на семейство ∞^1 расслояемых пар линейчатых поверхностей.

Рассмотрим расслояемую пару конгруэнций K, K'. По определению расслояемости (п. 30) каждая из них несет семейство ∞^1 поверхностей Σ или Σ', так что касательные плоскости, проведенные к каждой поверхности семейства каждой конгруэнции в точках пересечения их с одним и тем же лучом этой конгруэнции, проходят через соответствующий луч другой конгруэнции. Эти два семейства поверхностей образуют систему Бианки (п. 37). Всякая прямая, соединяющая пару точек двух поверхностей Σ и Σ', лежащих на соответствующих лучах r, r', касается обеих поверхностей, ибо, по самому определению расслояемости, является пересечением их касательных плоскостей. Следовательно, любую пару поверхностей Σ, Σ' можно рассматривать как фокальные поверхности некоторой новой конгруэнции. Все эти ∞^2 конгруэнций являются конгруэнциями W. Если считать соответственными на всех поверхностях Σ, Σ' те точки, которые лежат на соответствующих лучах r, r' пары конгруэнций K, K', то асимптотические линии на всех поверхностях Σ, Σ' соответствуют друг другу (п. 36).

Следовательно, существует два семейства по ∞^1 линейчатых поверхностей L конгруэнции K, которые для краткости можно назвать асимптотическими и каждая из которых несет на себе те асимптотические линии C всех поверхностей Σ, которые соответствуют какой-нибудь выбранной асимптотической C_1 на одной из этих поверхностей Σ_1. Такая поверхность L образована, очевидно, теми лучами конгруэнции K, которые пересекают линию C_1. Каждой такой поверхности L соответствует в конгруэнции K' асимптотическая линейчатая поверхность L', несущая асимптотические линии C' всех поверхностей Σ', соответствующих линиям C.

Нетрудно заметить, что две поверхности L и L' образуют расслояемую пару. Действительно, соприкасающаяся плоскость любой асимптотической C совпадает с касательной плоскостью ее поверхности Σ и, следовательно, проходит через соответствующий луч r' конгруэнции K', т. е. через соответствующую образующую поверхности L'; то же можно сказать относительно асимптотических C', лежащих на поверхности L'. Их соприкасающиеся плоскости пройдут через соответствующую образующую r поверхности L.

Если конгруэнции K, K' расслояемой пары гиперболические, то поверхности L, L' косые линейчатые (неразвертывающиеся).

Если конгруэнции K, K' параболические, то одно семейство асимптотических расслояющих поверхностей Σ, Σ' соответствует тому семейству асимптотических на фокальных поверхностях конгруэнций K, K', касательные к которым образуют эти конгруэнции. Линейчатые поверхности L, L' конгруэнций K, K', которые несут соответствующие друг другу асимптотические из этого семейства, очевидно, будут развертывающимися.

Обратно, можно показать (Фиников, [16]), что при подходящем задании пар точек A_1, A_2 и A_3, A_4 на каждой из соответствующих образующих линейчатых поверхностей пары L, L' так, чтобы лучи A_1A_3, A_2A_4 описывали новую пару расслояемых линейчатых поверхностей, существует с произволом одной функции одного аргумента расслояемая пара конгруэнций, которая включает в себя заданную пару линейчатых поверхностей в качестве асимптотических линейчатых поверхностей, причем выбранные на образующих точки A_i будут совпадать с фокусами луча. Одна точка A_1 может быть взята произвольно (одна произвольная функция одного аргумента), три остальных ею определяются.

Так же решается задача включения расслояемой пары развертывающихся поверхностей в расслояемую пару параболических конгруэнций.

ГЛАВА XXI

ДВУМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ W С ТВЕРДЫМ СООТВЕТСТВИЕМ ЛИНИЙ *)

215. Постановка задачи. Будем называть *системой* W многообразие конгруэнций W, фокальные поверхности которых образуют многообразие меньшей размерности, чем само многообразие конгруэнций.

Система Бианки расслояемой пары конгруэнций содержит двупараметрическое семейство конгруэнций и два однопараметрических семейства фокальных поверхностей. Все поверхности $\Sigma_{a,b}$, к которым мы пришли в гл. XX, рассматривая расслояемую пару линейчатых поверхностей, и все связанные с ней пары кривых образуют систему W из двухпараметрического семейства поверхностей и четырехпараметрического семейства конгруэнций W.

Наибольшая система W содержит все поверхности пространства и все конгруэнции W. Все поверхности постоянной кривизны $K = -\frac{1}{a^2}$ и псевдосферические конгруэнции с граничным расстоянием a образуют тоже систему W и т. д.

Система Бианки расслояемой пары отличается твердым соответствием точек на всех поверхностях системы. Соответствуют точки поверхностей, лежащие на двух соответствующих лучах конгруэнций пары.

Система W из линейчатых поверхностей главы XX не имеет твердого соответствия точек, но допускает твердое соответствие прямолинейных образующих. Соответствуют прямые, принадлежащие одному линейному комплексу.

Сейчас мы будем искать все двумерные системы W (семейство ∞^2 конгруэнций W и два семейства ∞^1 фокальных поверхностей) с твердым соответствием линий. На всех поверхностях системы существует семейство соответствующих друг другу линий так, что луч произвольной конгруэнции системы имеет фокусами точки, лежащие на соответствующих линиях.

216. Основная система уравнений. Присоединим к каждому лучу любой конгруэнции двумерной системы W тетраэдр $\{A_i\}$

*) Фиников С. П. [19].

($i=1$, 2, 3, 4) так, чтобы точки A_1, A_2 совпадали с фокусами луча, а плоскости $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$ — с их фокальными плоскостями. Положения точек A_3 и A_4 в фокальных плоскостях оставляем пока неопределенными.

Инфинитезимальные проективные перемещения тетраэдра определяются уравнениями

$$dA_i = \omega_i^k A_k \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4), \tag{1}$$

где ω_i^k — линейные формы в полных дифференциалах от четырех независимых переменных, из которых два параметра определяют конгруэнцию в системе W и два других определяют луч этой конгруэнции. Формы ω_i^k удовлетворяют уравнениям структуры

$$D\omega_i^k = [\omega_i^\alpha \omega_\alpha^k] \qquad (i,\ k,\ \alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{2}$$

Непосредственным дифференцированием при помощи формул (1) получаем:

$$d(A_1A_2) = (\omega_1^1 + \omega_2^2)[12] + \omega_2^3[13] + \omega_2^4[14] - \omega_1^3[23] - \omega_1^4[24].$$

Если прямая A_1A_2 стоит на месте, то дифференциал прямой (A_1A_2) будет пропорционален самой прямой, и будем иметь:

$$\omega_1^3 = 0, \quad \omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^3 = 0, \quad \omega_2^4 = 0. \tag{3}$$

Отсюда следует, что четыре формы (3) содержат только дифференциалы четырех независимых переменных, которые определяют положение луча A_1A_2 в системе W. Следовательно, они линейно независимы. Внешние дифференциалы, вычисленные при помощи уравнений (2), обращаются в нуль в силу уравнений (3). Следовательно, система (3) вполне интегрируема. Первые интегралы ее и являются независимыми переменными нашей задачи.

Если луч A_1A_2 описывает одну из конгруэнций системы W, то плоскости $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$ будут касательными плоскостями фокальных поверхностей (A_1) и (A_2). В частности, плоскость $A_1A_2A_3$ как касательная плоскость поверхности (A_1) должна содержать все инфинитезимальные перемещения точки A_1. При этом дифференциал dA_1 будет линейно зависеть только от точек A_1, A_2, A_3; аналогично дифференциал dA_2 не будет иметь компоненты по точке A_3

$$\omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^3 = 0. \tag{4}$$

Обратно, если независимые переменные связаны уравнениями (4), то плоскости $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$ служат касательными плоскостями поверхностей (A_1) и (A_2); луч A_1A_2 как их пересечение касается обеих поверхностей (A_1), (A_2) и описывает одну из конгруэнций системы. Следовательно, система (4) должна быть вполне интегрируема, и

первые интегралы ее можно принять за параметры, определяющие конгруэнцию в системе W. Внешние дифференциалы форм (4) должны обращаться в нуль в силу уравнений системы (4), что можно записать в виде сравнений

$$\begin{aligned} &[\omega_1^2\omega_2^4] + [\omega_1^3\omega_3^4] \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\,(\omega_1^4,\ \omega_2^3)),\\ &[\omega_2^1\omega_1^3] + [\omega_2^4\omega_4^3] \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\,(\omega_1^4,\ \omega_2^3)). \end{aligned} \tag{5}$$

Сравнения (5) надо рассматривать как первые уравнения той системы, которая определяет систему W.

Положение точки A_1 определяется тремя параметрами: один параметр определяет поверхность (A_1) в однопараметрическом семействе поверхностей (A_1) системы и два других являются криволинейными координатами точки A_1 на этой поверхности. Будем предполагать, что эти три параметра независимы. При неподвижности точки A_1 однородные координаты ее могут только умножаться на общий множитель; следовательно, дифференциал dA_1 должен быть пропорционален точке A_1, откуда следует

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_1^3 = 0, \quad \omega_1^4 = 0. \tag{6}$$

Внешние дифференциалы форм (6) обращаются в нуль в силу уравнений (6). Следовательно, система (6) вполне интегрируема и первые интегралы ее можно принять за координаты (неоднородные) точки A_1.

Если точка A_1 описывает одну из поверхностей (A_1) системы W, то плоскость $A_1A_2A_3$ служит ее касательной плоскостью, дифференциал dA_1 лежит на этой плоскости и компонента его по точке A_4 равна нулю:

$$\omega_1^4 = 0. \tag{7}$$

Это уравнение можно рассматривать как дифференциальное уравнение семейства поверхностей (A_1). Следовательно, уравнение (7) вполне интегрируемо и внешний дифференциал формы ω_1^4 должен обращаться в нуль в силу уравнения (7), что приводит нас к сравнению

$$[\omega_1^2\omega_2^4] + [\omega_1^3\omega_3^4] \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\,\omega_1^4). \tag{8}$$

Аналогично уравнение $\omega_2^3 = 0$ определяет семейство поверхностей (A_2), а потому оно вполне интегрируемо. Внешнее дифференцирование приводит к сравнению

$$[\omega_2^1\omega_1^3] + [\omega_2^4\omega_4^3] \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\,\omega_2^3). \tag{8'}$$

Уравнения (8), (8′), очевидно, входят в состав системы уравнений, определяющих систему W. Уравнения (5) являются их следствием.

Развертывая уравнения (8), (8′) при помощи леммы Картана, находим:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \alpha_2\omega_1^3 + \beta_2\omega_2^4 + \gamma_2\omega_1^4, & \omega_2^1 &= \beta_1\omega_1^3 + \alpha_1\omega_2^4 + \gamma_1\omega_2^3, \\ \omega_3^4 &= \beta_2'\omega_1^3 - \alpha_2\omega_2^4 + \gamma_4\omega_1^4, & \omega_4^3 &= -\alpha_1\omega_1^3 + \beta_1'\omega_2^4 + \gamma_3\omega_2^3. \end{aligned} \tag{9}$$

Уравнение асимптотических линий поверхности (A_1) получится, если исходить из требования, чтобы соприкасающаяся плоскость линии, определяемая точками A_1, dA_1, d^2A_1, совпадала с касательной плоскостью $A_1A_2A_3$ поверхности. Отсюда уравнение асимптотических поверхности (A_1) запишется в виде сравнения

$$(d^2A_1A_1A_2A_3) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_1^4)$$

или, пользуясь формулами (1), в виде

$$\omega_1^2\omega_2^4 + \omega_1^3\omega_3^4 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_1^4),$$

или, в силу формул (9), в виде уравнения

$$\beta_2'(\omega_1^3)^2 + \beta_2(\omega_2^4)^2 = 0. \tag{10}$$

Аналогично асимптотические линии на поверхности (A_2) определяются уравнением

$$\beta_1(\omega_1^3)^2 + \beta_1'(\omega_2^4)^2 = 0. \tag{10′}$$

Поскольку асимптотические линии на фокальных поверхностях (A_1), (A_2) конгруэнции W соответствуют, коэффициенты в уравнениях (10), (10′) должны быть пропорциональны:

$$\beta_2' : \beta_1 = \beta_2 : \beta_1'.$$

Отсюда, вводя вспомогательное неизвестное t, получим:

$$\beta_2' = t\beta_2, \quad \beta_1' = \frac{1}{t}\beta_1.$$

Система уравнений (9) теперь принимает вид

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \alpha_2\omega_1^3 + \beta_2\omega_2^4 + \gamma_2\omega_1^4, & \omega_2^1 &= \beta_1\omega_1^3 + \alpha_1\omega_2^4 + \gamma_1\omega_2^3, \\ \omega_3^4 &= t\beta_2\omega_1^3 - \alpha_2\omega_2^4 + \gamma_4\omega_1^4, & \omega_4^3 &= -\alpha_1\omega_1^3 + \frac{\beta_1}{t}\omega_2^4 + \gamma_3\omega_2^3. \end{aligned} \tag{11}$$

Уравнения (11) составляют все уравнения задачи. Коэффициенты α_i, β_i, γ_i, t следует рассматривать как неизвестные функции. Надо найти интегральное многообразие $\mathfrak{M}_4$, на котором формы ω_1^3, ω_1^4, ω_2^3, ω_2^4 оставались бы линейно независимыми:

$$[\omega_1^3\omega_1^4\omega_2^3\omega_2^4] \neq 0. \tag{a*}$$

217. Замкнутая система дифференциальных уравнений. Дифференцируя внешним образом уравнения (11), получим систему квадратичных уравнений:

$$\begin{gathered} [\Delta\alpha_2\omega_1^3] + [\Delta\beta_2\omega_2^4] + [\Delta\gamma_2\omega_1^4] = 0, \quad [\Delta\beta_1\omega_1^3] + [\Delta\alpha_1\omega_2^4] + [\Delta\gamma_1\omega_2^3] = 0, \\ t[\Delta\beta_2\omega_1^3] + t\beta_2[\Delta t\omega_1^3] - [\Delta\alpha_2\omega_2^4] + [\Delta\gamma_4\omega_1^4] = 0, \\ -[\Delta\alpha_1\omega_1^3] + \frac{1}{t}[\Delta\beta_1\omega_2^4] - \frac{\beta_1}{t}[\Delta t\omega_2^4] + [\Delta\gamma_3\omega_2^3] = 0, \end{gathered} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_1 &= d\alpha_1 + \alpha_1(\omega_1^1 - \omega_4^4) + \omega_4^1 + \left\{\frac{(\beta_1)^2}{t} - (\alpha_1)^2\right\}\omega_1^4, \\ \Delta\alpha_2 &= d\alpha_2 + \alpha_2(\omega_2^2 - \omega_3^3) + \omega_3^2 + \{t(\beta_2)^2 - (\alpha_2)^2\}\omega_2^3, \\ \Delta\beta_1 &= d\beta_1 + \beta_1(2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3) - 2\alpha_1\beta_1\omega_1^4, \\ \Delta\beta_2 &= d\beta_2 + \beta_2(2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4) - 2\alpha_2\beta_2\omega_2^3, \\ \Delta\gamma_1 &= d\gamma_1 + \gamma_1(\omega_1^1 - \omega_3^3) + \omega_3^1 + (\alpha_2\beta_1 - t\alpha_1\beta_2 - \gamma_1^2)\omega_1^3 + \\ &\quad + (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_3)\omega_2^4 + \{\beta_1(\gamma_2 + \gamma_3) - \alpha_1(\gamma_1 + \gamma_4)\}\omega_1^4, \\ \Delta\gamma_2 &= d\gamma_2 + \gamma_2(\omega_2^2 - \omega_4^4) + \omega_4^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_2\gamma_4)\omega_1^3 + \\ &\quad + \left(\alpha_1\beta_2 - \frac{\alpha_2\beta_1}{t} - \gamma_2{}^2\right)\omega_2^4 + \{\beta_2(\gamma_1 + \gamma_4) - \alpha_2(\gamma_2 + \gamma_3)\}\omega_2^3, \\ \Delta\gamma_3 &= d\gamma_3 + \gamma_3(\omega_2^2 - \omega_4^4) - \omega_4^2 - (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_3)\omega_1^3 - \\ &\quad - \left(\alpha_1\beta_2 - \frac{\alpha_2\beta_1}{t} - \gamma_3{}^2\right)\omega_2^4 - \left\{\frac{\beta_1}{t}(\gamma_1 + \gamma_4) + \alpha_1(\gamma_2 + \gamma_3)\right\}\omega_1^4, \\ \Delta\gamma_4 &= d\gamma_4 + \gamma_4(\omega_1^1 - \omega_3^3) - \omega_3^1 - (\alpha_2\beta_1 - t\alpha_1\beta_2 - \gamma_4{}^2)\omega_1^3 - \\ &\quad - (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_2\gamma_4)\omega_2^4 - \{t\beta_2(\gamma_2 + \gamma_3) + \alpha_2(\gamma_1 + \gamma_4)\}\omega_2^3, \\ \Delta t &= d\ln t + 2(\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 + \omega_4^4). \end{aligned} \tag{13}$$

Характеристическая система уравнений (11) содержит, кроме четырех форм (a*), линейно независимых на интегральном многообразии, и левых частей линейных дифференциальных уравнений (11), еще $q = 9$ форм (13).

Разрешая по лемме Картана систему (12), получим:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_1 &= a_2\omega_1^3 + a_1\omega_2^4 + a_3\omega_2^3, & \Delta\alpha_2 &= b_1\omega_1^3 + b_2\omega_2^4 + b_3\omega_1^4, \\ \Delta\beta_1 &= a_4\omega_1^3 + a_2\omega_2^4 + a_5\omega_2^3, & \Delta\beta_2 &= b_2\omega_1^3 + b_4\omega_2^4 + b_5\omega_1^4, \\ \Delta\gamma_1 &= a_5\omega_1^3 + a_3\omega_2^4 + a_6\omega_2^3, & \Delta\gamma_2 &= b_3\omega_1^3 + b_5\omega_2^4 + b_6\omega_1^4, \\ \Delta\gamma_3 &= -a_3\omega_1^3 + \frac{a_5}{t}\omega_2^4 + a_7\omega_2^3, & \Delta\gamma_4 &= tb_5\omega_1^3 - b_3\omega_2^4 + b_7\omega_1^4, \end{aligned}$$

$$\Delta t = \frac{a_4 + ta_1}{\beta_1}\omega_1^3 - \frac{tb_4 + b_1}{t\beta_2}\omega_2^4. \tag{14}$$

Следовательно, интегральный элемент $\mathcal{E}_4$ существует с произволом 14 параметров a_i, b_i. Система — не в инволюции. Действительно, выписывая билинейные коварианты уравнений (12), без труда найдем характеры последовательных интегральных элементов цепи. Первый характер по числу квадратичных уравнений $s_1 = 4$, второй $s_2 = 4$ и $s_3 = q - s_1 - s_2 = 1$, $s_4 = 0$; при этом произвол цепи

$$Q = s_1 + 2s_2 + 3s_3 = 15$$

больше числа $N = 14$ параметров наиболее общего интегрального элемента $\mathcal{E}_4$.

218. Канонизация репера. Чтобы упростить запись, воспользуемся вторичными параметрами тетраэдра. При неподвижности луча формы (a*), а следовательно, и все формы $\Delta\alpha_i$, $\Delta\beta_i$, $\Delta\gamma_i$, Δt равны нулю. Обозначая значения остальных форм при неподвижном луче буквой π_i^k, мы получим из уравнений (13):

$$\begin{aligned}
&\delta\alpha_1 = \alpha_1(\pi_4^4 - \pi_1^1) - \pi_4^1, \qquad &&\delta\alpha_2 = \alpha_2(\pi_3^3 - \pi_2^2) - \pi_3^2,\\
&\delta\beta_1 = \beta_1(\pi_2^2 + \pi_3^3 - 2\pi_1^1), &&\delta\beta_2 = \beta_2(\pi_1^1 + \pi_4^4 - 2\pi_2^2),\\
&\delta\gamma_1 = \gamma_1(\pi_3^3 - \pi_1^1) - \pi_3^1, &&\delta\gamma_2 = \gamma_2(\pi_4^4 - \pi_2^2) - \pi_4^2,\\
&\delta\gamma_3 = \gamma_3(\pi_4^4 - \pi_2^2) + \pi_4^2, &&\delta\gamma_4 = \gamma_4(\pi_3^3 - \pi_1^1) + \pi_3^1,
\end{aligned}$$
$$\delta \ln t = 2(\pi_2^2 + \pi_3^3 - \pi_1^1 - \pi_4^4). \tag{15}$$

Так как все восемь форм π_i^i, π_4^1, π_4^2, π_3^1, π_3^2 линейно независимы, то мы можем положить равными нулю семь из них. Делая замену вторичных параметров, мы можем положить восьмую форму, например π_4^1, равной дифференциалу одного из вторичных параметров:

$$\pi_4^1 = \delta v.$$

Тогда первое уравнение (15) даст

$$\delta\alpha_1 + \delta v = 0, \quad \alpha_1 + v = \text{const},$$

и при подходящем выборе значения параметра v коэффициент α_1 будет приведен к нулю. Таким же образом можно привести к нулю α_2. Внося эти значения в уравнения (15), получим:

$$\pi_4^1 = 0, \quad \pi_3^2 = 0.$$

Число вторичных форм убавится на два, что соответствует закреплению двух вторичных параметров.

Как следствие системы (15) можно написать уравнения

$$\begin{aligned}
&\delta(\gamma_1 - \gamma_4) + (\gamma_1 - \gamma_4)(\pi_1^1 - \pi_3^3) + 2\pi_3^1 = 0,\\
&\delta(\gamma_2 - \gamma_3) + (\gamma_2 - \gamma_3)(\pi_2^2 - \pi_4^4) + 2\pi_4^2 = 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Они позволят привести к нулю разности $\gamma_1 - \gamma_4$ и $\gamma_2 - \gamma_3$ за счет закрепления еще двух вторичных параметров:

$$\pi_3^1 = 0, \quad \pi_4^2 = 0.$$

Если γ_3 и γ_4 не равны нулю, то система (15) дает для них закон изменения при вариации вторичных параметров:

$$\delta \ln \gamma_3 + \pi_2^2 - \pi_4^4 = 0, \quad \delta \ln \gamma_4 + \pi_1^1 - \pi_3^3 = 0.$$

Эти уравнения позволяют привести к нулю $\ln\gamma_3$ и $\ln\gamma_4$ за счет закрепления двух вторичных параметров:

$$\pi_2^2 - \pi_4^4 = 0, \quad \pi_1^1 - \pi_3^3 = 0.$$

Тогда, если β_1 и β_2 не равны нулю, мы получим:

$$\delta \ln \frac{\beta_1}{\beta_2} + 2(\pi_1^1 - \pi_2^2) = 0.$$

Следовательно, можно привести к нулю $\ln \frac{\beta_1}{\beta_2}$ за счет закрепления еще одного вторичного параметра:

$$\pi_1^1 - \pi_2^2 = 0.$$

Тогда $\delta \ln t = 0$.

Поскольку

$$\delta \ln (A_1A_2A_3A_4) = \pi_1^1 + \pi_2^2 + \pi_3^3 + \pi_4^4 = 4\pi_1^1,$$

можно привести к единице определитель $(A_1A_2A_3A_4)$ за счет закрепления последнего параметра. Все формы π_i^k будут равны нулю.

Мы будем иметь:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 1, \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta.$$

Уравнения (11) и (13) примут вид

$$\begin{aligned}
&\omega_1^2 = \beta\omega_2^4 + \omega_1^4, \qquad &&\omega_2^1 = \beta\omega_1^3 + \omega_2^3,\\
&\omega_3^4 = t\beta\omega_1^3 + \omega_1^4, &&\omega_4^3 = \frac{\beta}{t}\omega_2^4 + \omega_2^3,
\end{aligned} \tag{11'}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha_1 &= \omega_4^1 + \frac{\beta^2}{t}\omega_1^4, \quad \Delta\alpha_2 = \omega_3^2 + t\beta^2\omega_2^3,\\
\Delta\beta_1 &= d\beta + \beta(2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3), \quad \Delta\beta_2 = d\beta + \beta(2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4),\\
\Delta\gamma_1 &= \omega_1^1 - \omega_3^3 + \omega_3^1 - \omega_1^3 + (\beta^2 + 1)\omega_2^4 + 2\beta\omega_1^4,\\
\Delta\gamma_2 &= \omega_2^2 - \omega_4^4 + \omega_4^2 + (\beta^2 + 1)\omega_1^3 - \omega_2^4 + 2\beta\omega_2^3,\\
\Delta\gamma_3 &= \omega_2^2 - \omega_4^4 - \omega_4^2 - (\beta^2 + 1)\omega_1^3 + \omega_2^4 - 2\frac{\beta}{t}\omega_1^4,\\
\Delta\gamma_4 &= \omega_1^1 - \omega_3^3 - \omega_3^1 + \omega_1^3 - (\beta^2 + 1)\omega_2^4 - 2t\beta\omega_2^3,\\
\Delta t &= d \ln t + 2(\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 + \omega_4^4).
\end{aligned} \tag{13'}$$

Число характеристических форм осталось, конечно, неизменным.

219. Специальный случай: система Бианки. Если β_1 или β_2 равно нулю, то, как показывают уравнения (10), (10′), асимптотические линии на одной из фокальных поверхностей совпадают и поверхность становится развертывающейся. Этот случай мы исключаем.

Если γ_3 и γ_4 одновременно равны нулю, то γ_1 и γ_2 равны нулю и система (11) не будет содержать форм ω_1^4, ω_2^3.

Мы можем привести к нулю $\ln\beta_1$, $\ln\beta_2$, $\ln t$ и $\ln(A_1A_2A_3A_4)$ за счет закрепления тетраэдра, все формы π_i^k будут равны нулю.

Мы будем иметь:

$$\alpha_1=\alpha_2=0,\quad \gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=\gamma_4=0,\quad \beta_1=\beta_2=1,\quad t=1.$$

Уравнения (11), (13) примут вид

$$\omega_1^2=\omega_2^4,\quad \omega_2^1=\omega_1^3,\quad \omega_3^4=\omega_1^3,\quad \omega_4^3=\omega_2^4, \tag{11″}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta\alpha_1=\omega_4^1+\omega_1^4, && \Delta\alpha_2=\omega_3^2+\omega_2^3,\\
&\Delta\beta_1=2\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3, && \Delta\beta_2=2\omega_2^2-\omega_1^1-\omega_4^4,\\
&\Delta\gamma_1=-\Delta\gamma_4=\omega_3^1+\omega_2^4, && \Delta\gamma_2=-\Delta\gamma_3=\omega_4^2+\omega_1^3,\\
&\Delta t=2(\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3+\omega_4^4).
\end{aligned} \tag{13″}$$

Число форм характеристической системы убавилось на две, ибо

$$\Delta\gamma_1+\Delta\gamma_4=0,\quad \Delta\gamma_2+\Delta\gamma_3=0.$$

Уравнения (14) дадут соотношения

$$a_5+b_5=0,\quad a_3=b_3,\quad a_6=a_7=b_6=b_7=0.$$

Следовательно, систему (14) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
&\Delta\alpha_1=a_2\omega_1^3+a_1\omega_2^4+a_3\omega_2^3, && \Delta\alpha_2=b_1\omega_1^3+b_2\omega_2^4+a_3\omega_1^4,\\
&\Delta\beta_1=a_4\omega_1^3+a_2\omega_2^4+a_5\omega_2^3, && \Delta\beta_2=b_2\omega_1^3+b_4\omega_2^4-a_5\omega_1^4,\\
&\Delta\gamma_1=a_5\omega_1^3+a_3\omega_2^4, && \Delta\gamma_2=a_3\omega_1^3-a_5\omega_2^4,
\end{aligned} \tag{14′}$$

$$\Delta t=(a_4+a_1)\omega_1^3-(b_4+b_1)\omega_2^4.$$

Присоединим эти уравнения к системе (11″), рассматривая a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_4 и a_5 как дополнительные неизвестные функции. Квадратичные уравнения (12) будут удовлетворены.

Дифференцируя уравнения (14′) внешним образом, получим:

$$\begin{aligned}
&[\Delta a_2\omega_1^3]+[\Delta a_1\omega_2^4]+[\Delta a_3\omega_2^3]=0, && [\Delta b_1\omega_1^3]+[\Delta b_2\omega_2^4]+[\Delta a_3\omega_1^4]=0,\\
&[\Delta a_4\omega_1^3]+[\Delta a_2\omega_2^4]+[\Delta a_5\omega_2^3]=0, && [\Delta b_2\omega_1^3]+[\Delta b_4\omega_2^4]-[\Delta a_5\omega_1^4]=0,\\
&[\Delta a_5\omega_1^3]+[\Delta a_3\omega_2^4]=0, && [\Delta a_3\omega_1^3]-[\Delta a_5\omega_2^4]=0,
\end{aligned} \tag{17}$$

$$[\Delta a_4+\Delta a_1,\ \omega_1^3]-[\Delta b_4+\Delta b_1,\ \omega_2^4]=0,$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta a_1={}&da_1+a_1(\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_4^4)+\omega_3^1-\\
&-a_2(a_1+a_4)\omega_2^4-a_2\omega_2^3+(3a_2+b_4+b_1)\omega_1^4,\\
\Delta a_2={}&da_2+a_2(2\omega_1^1-\omega_3^3-\omega_4^4)-\omega_4^2-\\
&-a_1(b_4+b_1)\omega_1^3+a_1\omega_2^3+(a_4-2a_1)\omega_1^4,\\
\Delta a_3={}&da_3+a_3(\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4)-2a_5(\omega_2^3-\omega_1^4),\\
\Delta a_4={}&da_4+a_4(3\omega_1^1-\omega_2^2-2\omega_3^3)+3\omega_3^1-\{4+a_1(b_1+b_4)\}\omega_2^4+\\
&+\{a_2-a_5(a_1+a_4)-(b_1+b_4)\}\omega_2^3-3a_2\omega_1^4,\\
\Delta a_5={}&da_5+a_5(\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4)-\left\{\frac{1}{2}a_5(a_1+a_4)+b_1+b_4\right\}\omega_1^3+\\
&+\left\{a_1+a_4-\frac{1}{2}a_5(b_1+b_4)\right\}\omega_2^4+2a_3(\omega_2^3-\omega_1^4).
\end{aligned} \tag{18}$$

Формы Δb_i получаются из форм Δa_i заменой a_i на b_i, ω_1^3 на ω_2^4 и ω_2^3 на ω_1^4, 1 на 2 и 3 на 4.

Наиболее общее алгебраическое решение системы (17) определяется уравнениями:

$$\begin{aligned}
&\Delta a_1=\xi_2\omega_1^3+\xi_1\omega_2^4+x\omega_2^3, && \Delta b_1=\eta_1\omega_1^3+\eta_2\omega_2^4+y\omega_1^4,\\
&\Delta a_2=\xi_3\omega_1^3+\xi_2\omega_2^4+y\omega_2^3, && \Delta b_2=\eta_2\omega_1^3+\eta_3\omega_2^4+x\omega_1^4,\\
&\Delta a_4=\xi_4\omega_1^3+\xi_3\omega_2^4-x\omega_2^3, && \Delta b_4=\eta_3\omega_1^3+\eta_4\omega_2^4-y\omega_1^4,\\
&\Delta a_3=y\omega_1^3+x\omega_2^4, && \Delta a_5=-x\omega_1^3+y\omega_2^4,\\
&\xi_3+\xi_1+\eta_3+\eta_1=0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Оно зависит от $N=9$ параметров x, y, ξ_i, η_i.

Выписывая билинейные уравнения, присоединенные к квадратичным уравнениям (17), и подсчитывая ранги матриц, составленных из коэффициентов, мы получим характеры интегральной цепи:

$$s_1 = 7, \quad s_2 = 1, \quad s_3 = s_4 = 0.$$

Так как произвол цепи интегральных элементов

$$Q = s_1 + 2s_2 + 3s_3 + 4s_4 = 9$$

совпадает с числом $N = 9$ наиболее общего интегрального элемента $\mathfrak{E}_4$ системы, то система — в инволюции и определяет интегральное многообразие $\mathfrak{M}_4$, т. е. систему W с одной произвольной функцией двух аргументов.

Эта система является системой Бианки — Террачини, ибо система уравнений

$$\omega_1^3 = 0, \quad \omega_2^4 = 0 \tag{20}$$

теперь вполне интегрируема. Первые интегралы ее можно принять за криволинейные координаты луча любой конгруэнции системы. Поскольку этим самым устанавливается на всех конгруэнциях твердое соответствие лучей, а на фокальных поверхностях твердое соответствие точек, то найденная система является системой Бианки.

220. Продолжение системы дифференциальных уравнений. Возвращаясь к общим уравнениям п. 217, нам надо было бы рассмотреть еще одну возможность особого решения, когда, например, γ_2 и γ_3 равны нулю, а γ_1 и γ_4 отличны от нуля, но это предположение не дает невырожденной системы W. Поэтому мы прямо обращаемся к исследованию системы (11′) п. 218.

Мы видели, что система (11), а следовательно и (11′), — не в инволюции. Поэтому мы будем ее продолжать, присоединяя к ней систему (14), где коэффициенты a_i, b_i надо рассматривать как дополнительные неизвестные.

Дифференцируя внешним образом уравнения (14), где формы, стоящие в левых частях, имеют вид (13′), мы получим квадратичные уравнения:

$$\begin{aligned}
&[\Delta a_1\omega_2^4] + [\Delta a_2\omega_1^3] + [\Delta a_3\omega_2^3] = 0, \quad [\Delta b_1\omega_1^3] + [\Delta b_2\omega_2^4] + [\Delta b_3\omega_1^4] = 0,\\
&[\Delta a_2\omega_2^4] + [\Delta a_4\omega_1^3] + [\Delta a_5\omega_2^3] = 0, \quad [\Delta b_2\omega_1^3] + [\Delta b_4\omega_2^4] + [\Delta b_5\omega_1^4] = 0,\\
&[\Delta a_3\omega_2^4] + [\Delta a_5\omega_1^3] + [\Delta a_6\omega_2^3] = 0, \quad [\Delta b_3\omega_1^3] + [\Delta b_5\omega_2^4] + [\Delta b_6\omega_1^4] = 0,\\
&\frac{1}{t}[\Delta a_5\omega_2^4] - [\Delta a_3\omega_1^3] + [\Delta a_7\omega_2^3] = 0, \quad t[\Delta b_5\omega_1^3] - [\Delta b_3\omega_2^4] + [\Delta b_7\omega_1^4] = 0,\\
&[\Delta a_4 + t\,\Delta a_1,\ \omega_1^3] - \left[\Delta b_4 + \frac{1}{t}\Delta b_1,\ \omega_2^4\right] + 2h\,[\omega_2^3\omega_1^4] = 0,
\end{aligned} \tag{21}$$

где

$$h = \left(b_4 + \frac{b_1}{t}\right) + a_4 + ta_1,$$

и формы Δa_i, Δb_i имеют вид

$$\begin{aligned}
\Delta a_1 &= da_1 + a_1(\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_4^4) + \frac{\beta}{t}\omega_3^1 - a_2\frac{ta_1 + a_4}{t\beta}\omega_2^4 -\\
&\qquad - a_2\beta\omega_2^3 + \frac{\beta}{t}\left(3a_2 + b_4 + \frac{1}{t}b_1 - \beta\right)\omega_1^4,\\
\Delta a_2 &= da_2 + a_2(2\omega_1^1 - \omega_3^3 - \omega_4^4) - \beta\omega_4^2 - a_1\frac{tb_4 + b_1}{\beta}\omega_1^3 +\\
&\qquad + a_1 t\beta\omega_2^3 + \beta\left(-2a_1 + \frac{a_4}{t} + \frac{\beta}{t}\right)\omega_1^4,\\
\Delta a_3 &= da_3 + a_3(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4) - \omega_4^2 + \omega_3^1 - a_3\omega_1^3 +\\
&\qquad + a_3\omega_2^4 - (2a_5\beta + a_6 + a_7)\omega_2^3 + 2\left(a_2 - a_1 + \frac{\beta}{t}a_5\right)\omega_1^4,\\
\Delta a_4 &= da_4 + a_4(3\omega_1^1 - \omega_2^2 - 2\omega_3^3) + 3\beta\omega_3^1 + \frac{(ta_1)^2 - a_4{}^2}{\beta}\omega_1^3 -\\
&\qquad - 3\beta(a_2 + \beta)\omega_1^4 - \left(4\beta^3 + a_1\frac{tb_4 + b_1}{\beta}\right)\omega_2^4 +\\
&\qquad + \left\{a_2 t\beta - a_5\frac{a_4 + ta_1}{\beta} - \beta(tb_4 + b_1) - 4t\beta^2\right\}\omega_2^3,\\
\Delta a_5 &= da_5 + 2a_5(\omega_1^1 - \omega_3^3) - \left\{a_5 + a_5\frac{a_4 + ta_1}{\beta} + (b_1 + tb_4)\beta + 3t\beta^2\right\}\omega_1^3 +\\
&\qquad + \{\beta(a_4 + ta_1) + a_5 - 3\beta^2\}\omega_2^4 +\\
&\qquad + 2t\beta(a_3 - 1)\omega_2^3 - 2(a_2 + a_3\beta - a_4 + \beta)\omega_1^4,\\
\Delta a_6 &= da_6 + a_6(\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3) - 3a_6\omega_1^3 +\\
&\qquad + a_6\omega_2^4 + (4 - 4a_3 + 4a_5 + \beta a_7)\omega_1^4,\\
\Delta a_7 &= da_7 + a_7(2\omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4) - a_7\omega_1^3 +\\
&\qquad + 3a_7\omega_2^4 + \left(4 - 4a_3 - 4\frac{a_5}{t} - a_6\frac{\beta}{t}\right)\omega_1^4.
\end{aligned} \tag{22}$$

Формы Δb_i получаются из форм Δa_i заменой a_k на b_k, t на $\frac{1}{t}$ и подстановкой указателей 1 и 3 вместо 2 и 4 в формах ω_i^k.

Последнее уравнение (21) показывает, что система (21) допускает интегральный элемент $\mathfrak{E}_4$ только при условии

$$h = 0.$$

Действительно, подстановка

$$\Delta a_4 + t\,\Delta a_1 = \xi_1\omega_1^3 + \xi_2\omega_2^4 + \xi_3\omega_2^3 + \xi_4\omega_1^4,$$

$$\Delta b_4 + \frac{1}{t}\Delta b_1 = \eta_1\omega_1^3 + \eta_2\omega_2^4 + \eta_3\omega_2^3 + \eta_4\omega_1^4$$

с любыми коэффициентами ξ_i, η_i не может сократить последнего члена $2h\,[\omega_2^3\omega_1^4]$.

22 Зак. 1277. С. П. Фиников

Таким образом, мы должны присоединить к нашей системе конечное уравнение

$$a_4+ta_1+b_4+\frac{1}{t}b_1=0. \tag{23}$$

Вводя ради симметрии новую неизвестную функцию θ, мы можем положить

$$\begin{aligned} a_4+ta_1&=\theta\beta, \\ b_4+\frac{1}{t}b_1&=-\theta\beta. \end{aligned} \tag{24}$$

Дифференцируя уравнение (23), получим:

$$\begin{aligned} &\Delta a_4+t\,\Delta a_1+\Delta b_4+\frac{1}{t}\Delta b_1+ \\ &\quad+\frac{\beta}{2}\{-a_3(\theta+4)+b_3(\theta-4)+16\beta^2\}(\omega_1^3+\omega_2^4)- \\ &\quad-\frac{\beta}{2}\{a_5(\theta+4)+tb_5(\theta-4)\}\left(\omega_1^3-\frac{1}{t}\omega_2^4\right)+ \\ &\quad+\frac{\beta}{2}\{(a_7-a_6)(\theta+4)-4\beta(t+1)(\theta-4)\}\,\omega_2^3+ \\ &\quad\quad+\frac{\beta}{2}\left\{(b_6-b_7)(\theta-4)+4\beta\frac{t+1}{t}(\theta+4)\right\}\omega_1^4=0. \end{aligned} \tag{25}$$

Теперь последнее уравнение (21) примет вид

$$[\Delta a_4+t\,\Delta a_1,\ \omega_1^3]-\left[\Delta b_4+\frac{1}{t}\Delta b_1,\ \omega_2^4\right]=0;$$

следовательно, обе формы $\Delta a_4+t\,\Delta a_1$ и $\Delta b_4+\frac{1}{t}\Delta b_1$ линейно выражаются через формы ω_1^3, ω_2^4. Коэффициенты при формах ω_2^3, ω_1^4 в уравнении (25) должны равняться нулю. Отсюда, если $\theta\neq\pm4$, имеем:

$$a_7-a_6=4\beta(t+1)\frac{\theta-4}{\theta+4},\quad b_7-b_6=4\beta\frac{t+1}{t}\,\frac{\theta+4}{\theta-4}. \tag{26}$$

Введем формы

$$\begin{aligned} \nabla a_4&=\Delta a_4-\frac{\beta}{2}\{(\theta+4)(a_3+a_5)-(\theta-4)(b_3-tb_5)-16\beta^2\}\,\omega_1^3, \\ \nabla b_4&=\Delta b_4-\frac{\beta}{2}\left\{(\theta+4)\left(a_3-\frac{1}{t}a_5\right)-(\theta-4)(b_3+b_5)-16\beta^2\right\}\omega_2^4. \end{aligned} \tag{27}$$

Уравнения (21) сохранят свой вид, если вместо форм Δa_4, Δb_4 напишем ∇a_4, ∇b_4, а уравнение (27) примет вид

$$\nabla a_4+t\,\Delta a_1+\nabla b_4+\frac{1}{t}\Delta b_1=0, \tag{28}$$

и последнее уравнение (23) напишется так:

$$[\nabla a_4+t\,\Delta a_1,\ \omega_1^3+\omega_2^4]=0.$$

Отсюда

$$\nabla a_4+t\,\Delta a_1=\lambda\beta(\omega_1^3+\omega_2^4), \tag{28'}$$

где λ — неизвестный множитель пропорциональности.

Дифференцируя теперь любое из уравнений (24), после некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned} 2d\theta=\{a_3(\theta+4)-b_3(\theta-4)-16\beta^2-8\}(\omega_1^3-\omega_2^4)+ \\ +2\lambda(\omega_1^3+\omega_2^4)-\vartheta_1\omega_2^3+\vartheta_2\omega_1^4, \end{aligned} \tag{29}$$

где в полном согласии с уравнениями (26) можно придать ϑ_i любое из двух значений:

$$\begin{aligned} \vartheta_1&=a_6(\theta+4)+4t\beta(\theta-4)=a_7(\theta+4)-4\beta(\theta-4), \\ -\vartheta_2&=b_6(\theta-4)+4\frac{\beta}{t}(\theta+4)=b_7(\theta-4)-4\beta(\theta+4). \end{aligned} \tag{30}$$

221. Конечное уравнение системы. Если $\theta=4$, то уравнения (26) следует заменить равенствами $a_7=a_6$; $t=-1$.

Дифференцируя теперь уравнения (24), мы опять получим равенство (29), но в левой части его будет стоять нуль. Следовательно,

$$a_3=2\beta^2+1,\quad \lambda=0,\quad \vartheta_1=0,\quad \vartheta_2=0,$$

а отсюда, в силу формул (32), получим:

$$\beta=0.$$

Значит, система W вырождается. Тот же результат будет иметь место и для $\theta=-4$.

Возвращаясь к общему случаю, дифференцируем первое уравнение (26). Мы получим равенство

$$\Delta a_7-\Delta a_6=\xi_1\omega_1^3+\xi_2\omega_2^4+\xi_3\omega_2^3+h_1\omega_1^4,$$

где нас сейчас интересует только значение h_1:

$$h_1=2(t+1)\left\{-\frac{1}{t}\left(2a_5-\frac{\beta\vartheta_1}{\theta-4}\right)+\left(2b_5+\frac{\beta\vartheta_2}{\theta+4}\right)\frac{\theta-4}{\theta+4}\right\}. \tag{31}$$

Между тем, составляя разность третьего и четвертого уравнений левого столбца системы (21), мы имеем:

$$\left[\frac{1}{t}\Delta a_5-\Delta a_3,\ \omega_2^4\right]-[\Delta a_3+\Delta a_5,\ \omega_1^3]+[\Delta a_7-\Delta a_6,\ \omega_2^3]=0.$$

При любых значениях форм $\frac{1}{t}\Delta a_5 - \Delta a_3$, $\Delta a_3 + \Delta a_5$ коэффициентом при произведении $[\omega_1^4 \omega_2^3]$ будет величина h_1. Следовательно, необходимым условием существования интегрального элемента $\mathfrak{E}_4$, а значит и интегрального многообразия $\mathfrak{M}_4$, будет обращение коэффициента h_1 в нуль. Уравнение (31) показывает, что это может осуществиться двумя способами, в зависимости от того, какой из множителей правой части (31) обратится в нуль:

$$t + 1 = 0, \tag{31a}$$

$$(\theta + 4)\left(2a_5 - \frac{\beta\vartheta_1}{\theta - 4}\right) - t(\theta - 4)\left(2b_5 + \frac{\beta\vartheta_2}{\theta + 4}\right) = 0. \tag{31b}$$

Как первое, так и второе уравнения допускают замену ω_1^3, ω_1^4 на ω_2^4, ω_2^3, a_i на b_i, t на $\frac{1}{t}$, θ на $-\theta$ и ϑ_1 на ϑ_2. Следовательно, дифференцируя второе уравнение (24), мы придем к тому же результату.

Мы ограничимся здесь рассмотрением только первого случая, который приводит к хорошему геометрическому результату.

222. Преобразование системы уравнений. Внося в последние из уравнений (13′), (14) значение $t = -1$, получим:

$$2(\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 + \omega_4^4) = \theta(\omega_1^3 + \omega_2^4).$$

Между тем другие уравнения (13′), (14) позволяют подсчитать разности форм ω_i^i, которые при $t = -1$ принимают вид

$$\omega_1^1 - \omega_3^3 = \frac{a_5 - b_5}{2}\omega_1^3 + \frac{a_3 - b_3}{2}\omega_2^4 + \frac{a_6 - 2\beta}{2}\omega_2^3 + \frac{b_7 - 2\beta}{2}\omega_1^4,$$

$$\omega_2^2 - \omega_4^4 = \frac{b_3 - a_3}{2}\omega_1^3 + \frac{b_5 - a_5}{2}\omega_2^4 + \frac{a_7 - 2\beta}{2}\omega_2^3 + \frac{b_6 - 2\beta}{2}\omega_1^4.$$

Исключая из этих трех уравнений формы ω_i^i и сравнивая коэффициенты при ω_i^k, получим:

$$a_7 = a_6, \quad b_7 = b_6, \tag{32}$$

$$a_3 - b_3 + a_5 - b_5 = \theta. \tag{33}$$

Дифференцируя эти уравнения, заключаем:

$$\Delta a_7 - \Delta a_6 = -\frac{1}{2}a_6(\theta - 4)(\omega_1^3 + \omega_2^4),$$

$$\Delta b_7 - \Delta b_6 = \frac{1}{2}b_6(\theta + 4)(\omega_1^3 + \omega_2^4),$$

$$\Delta a_3 - \Delta b_3 + \Delta a_5 - \Delta b_5 =$$
$$= \lambda(\omega_1^3 + \omega_2^4) + \frac{1}{2}a_6(\theta - 4)\omega_2^3 + \frac{1}{2}b_3(\theta + 4)\omega_1^4. \tag{34}$$

Нетрудно заметить, что эти выражения удовлетворяют квадратичному уравнению

$$[\Delta a_3 - \Delta b_3 + \Delta a_5 - \Delta b_5,\ \omega_1^3 + \omega_2^4] +$$
$$+ [\Delta a_6 - \Delta a_7,\ \omega_2^3] + [\Delta b_7 - \Delta b_6,\ \omega_1^4] = 0,$$

которое получится, если комбинировать уравнения (21).

Введем новые формы:

$$\begin{aligned}
&\nabla a_3 = \Delta a_3 - \frac{1}{4}a_6(\theta - 4)\omega_2^3, \quad \nabla b_3 = \Delta b_3 + \frac{1}{4}b_6(\theta + 4)\omega_1^4,\\
&\nabla a_5 = \Delta a_5 - \frac{1}{4}a_6(\theta - 4)\omega_2^3, \quad \nabla b_5 = \Delta b_5 + \frac{1}{4}b_6(\theta + 4)\omega_1^4,\\
&\nabla a_6 = \Delta a_6 - \frac{1}{4}a_6(\theta - 4)(\omega_1^3 + \omega_2^4),\\
&\qquad\qquad \nabla b_6 = \Delta b_6 + \frac{1}{4}b_6(\theta + 4)(\omega_1^3 + \omega_2^4),\\
&\nabla a_7 = \Delta a_7 + \frac{1}{4}a_6(\theta - 4)(\omega_1^3 + \omega_2^4),\\
&\qquad\qquad \nabla b_7 = \Delta b_7 - \frac{1}{4}b_6(\theta + 4)(\omega_1^3 + \omega_2^4).
\end{aligned} \tag{35}$$

Для новых форм уравнения (21) сохраняют свой вид, а уравнения (34) запишутся в более простом виде. Мы переписываем также уравнения (28) и (28′):

$$\begin{aligned}
&\nabla a_7 = \nabla a_6, \quad \nabla b_7 = \nabla b_6,\\
&\nabla a_3 + \nabla a_5 - \nabla b_3 - \nabla b_5 = \lambda(\omega_1^3 + \omega_2^4),\\
&\nabla a_4 - \Delta a_1 = \nabla b_1 - \nabla b_4 = \lambda\beta(\omega_1^3 + \omega_2^4).
\end{aligned} \tag{34′}$$

223. Система в инволюции. Задачу, которую мы рассматривали в предыдущем параграфе, можно представить как задачу интегрирования системы линейных дифференциальных уравнений (11′), (14), где неизвестные функции a_i, b_i связаны конечными уравнениями (23), (32), (33) и θ определено уравнениями (24). При помощи вспомогательных неизвестных θ и $\overline{\theta}$ конечные уравнения можно разрешить в виде

$$\begin{aligned}
&a_4 = a_1 + \theta\beta, && b_4 = b_1 - \theta\beta,\\
&a_5 = -a_3 + \frac{\theta + \overline{\theta}}{2}, && b_5 = -b_3 + \frac{\overline{\theta} - \theta}{2},\\
&a_7 = a_6, && b_7 = b_6.
\end{aligned} \tag{36}$$

Дифференцируя эти уравнения, получим опять:

$$\begin{aligned}
&\nabla a_4 = \Delta a_1 + \beta\,\Delta\theta, && \nabla b_4 = \Delta b_1 - \beta\,\Delta\theta,\\
&\nabla a_5 = -\nabla a_3 + \frac{\Delta\theta + \Delta\bar\theta}{2}, && \nabla b_5 = -\nabla b_3 + \frac{\Delta\bar\theta - \Delta\theta}{2},\\
&\nabla a_7 = \nabla a_6, && \nabla b_7 = \nabla b_6,
\end{aligned} \tag{37}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta\theta &= d\theta - \frac{1}{2}\left\{ a_3(\theta+4) - b_3(\theta-4) - 16\beta^2 - 8 \right\}(\omega_1^3 - \omega_2^4) + \\
&\qquad + \frac{1}{2}\vartheta_1\omega_2^3 - \frac{1}{2}\vartheta_2\omega_1^4,\\
\Delta\bar\theta &= d\bar\theta + \frac{1}{2}\left\{a_3(\theta - 2\bar\theta) + b_3(\theta + 2\bar\theta) - 2\theta(2\beta^2+1)\right\}(\omega_1^3 - \omega_2^4) + \\
&\qquad + \left\{(a_6 - 4\beta)\bar\theta - \frac{1}{2}(a_6 + 4\beta)\theta\right\}\omega_2^3 + \\
&\qquad + \left\{(b_6 - 4\beta)\bar\theta + \frac{1}{2}(b_6 + 4\beta)\theta\right\}\omega_1^4,
\end{aligned} \tag{38}$$

и коэффициенты ϑ_1, ϑ_2 определяются уравнениями (30).

Таблица квадратичных уравнений (21) примет теперь вид

$$\begin{aligned}
&[\Delta a_1\omega_2^4] + [\Delta a_2\omega_1^3] + [\nabla a_3\omega_2^3] = 0,\\
&[\Delta b_1\omega_1^3] + [\Delta b_2\omega_2^4] + [\nabla b_3\omega_1^4] = 0,\\
&[\Delta a_2\omega_2^4] + [\Delta a_1 + \beta\,\Delta\theta,\ \omega_1^3] - \left[\nabla a_3 - \frac{1}{2}(\Delta\theta + \Delta\bar\theta),\ \omega_2^3\right] = 0,\\
&[\Delta b_2\omega_1^3] + [\Delta b_1 - \beta\,\Delta\theta,\ \omega_2^4] - \left[\nabla b_3 - \frac{1}{2}(\Delta\bar\theta - \Delta\theta),\ \omega_1^4\right] = 0,\\
&[\nabla a_3\omega_2^4] - \left[\nabla a_3 - \frac{1}{2}(\Delta\theta + \Delta\bar\theta),\ \omega_1^3\right] + [\nabla a_6\omega_2^3] = 0,\\
&[\nabla b_3\omega_1^3] - \left[\nabla b_3 - \frac{1}{2}(\Delta\bar\theta - \Delta\theta),\ \omega_2^4\right] + [\nabla b_6\omega_1^4] = 0,\\
&[\Delta\theta + \Delta\bar\theta,\ \omega_1^3 + \omega_2^4] = 0,\ [\Delta\bar\theta - \Delta\theta,\ \omega_1^3 + \omega_2^4] = 0.
\end{aligned} \tag{39}$$

Характеристическая система содержит, кроме форм (3) п. 216, линейно независимых на интегральном многообразии, и левых частей линейных уравнений (11′), п. 218, (18′), еще $q = 10$ форм: Δa_1, Δa_2, ∇a_3, ∇a_6, Δb_1, Δb_2, ∇b_3, ∇b_6, $\Delta\theta$ и $\Delta\bar\theta$, которые входят в квадратичные уравнения (39).

Наиболее общий интегральный элемент $\mathfrak{E}_4$ определяется из уравнений (39) равенствами

$$\begin{aligned}
&\Delta a_1 = x_1\omega_2^4 + x_2\omega_1^3 + x_3\omega_2^3,\ \ \Delta b_1 = y_1\omega_1^3 + y_2\omega_2^4 + y_3\omega_1^4,\\
&\Delta a_2 = x_2\omega_2^4 + (x_1 + \lambda\beta)\,\omega_1^3 + \left(\frac{\mu+\lambda}{2} - x_3\right)\omega_2^3,\\
&\Delta b_2 = y_2\omega_1^3 + (y_1 - \lambda\beta)\,\omega_2^4 + \left(\frac{\mu-\lambda}{2} - y_3\right)\omega_1^4,\\
&\nabla a_3 = x_3\omega_2^4 + \left(\frac{\mu+\lambda}{2} - x_3\right)\omega_1^3 + x_4\omega_2^3,\\
&\nabla b_3 = y_3\omega_1^3 + \left(\frac{\mu-\lambda}{2} - y_3\right)\omega_2^4 + y_4\omega_1^4,\\
&\nabla a_6 = x_4(\omega_2^4 - \omega_1^3) + x_5\omega_2^3,\ \ \nabla b_6 = y_4(\omega_1^3 - \omega_2^4) + y_5\omega_1^4,\\
&\Delta\theta = \lambda(\omega_1^3 + \omega_2^4), \quad \Delta\bar\theta = \mu(\omega_1^3 + \omega_2^4)
\end{aligned} \tag{40}$$

с $N = 12$ произвольными параметрами x_i, y_i, λ и μ.

Подсчитывая ранги матриц из коэффициентов при неизвестных значениях форм (40) в билинейных уравнениях, присоединенных к квадратичным уравнениям (39), мы получим характеры цепи интегральных элементов: $s_1 = 8$, $s_2 = 2$, $s_3 = s_4 = 0$. Так как произвол цепи $Q = s_1 + 2s_2 = 12$ совпадает с произволом $N = 12$ наиболее общего интегрального элемента $\mathfrak{E}_4$, то система — в инволюции и определяет решение $\mathfrak{M}_4$ с произволом двух функций от двух аргументов. Это решение и дает искомую систему W. Несмотря на довольно большой произвол решения, не следует думать, что полученная система W может содержать произвольную конгруэнцию W или даже произвольную поверхность, ибо такое двумерное решение $\mathfrak{M}_2$ соответствует обращению в нуль двух форм ω_2^3 и ω_1^4. Между тем уже ранг матрицы $s_1 = 8$ понижается при $\omega_2^3 = 0$, $\omega_1^4 = 0$. Все касательные элементы такого многообразия будут особыми, и существование интегрального многообразия $\mathfrak{M}_4$, проходящего через это $\mathfrak{M}_2$, не обеспечено.

224. Система W с твердым соответствием линий. Обратимся к геометрическому смыслу полученного решения и докажем прежде всего, что найденные системы W заключают в себе все двумерные системы W с твердым соответствием линий на поверхностях системы.

Допустим, что

$$\omega_1^3 + q\omega_2^4 = 0 \tag{41}$$

— уравнение семейства линий на каждой фокальной поверхности системы, обладающих тем свойством, что любая конгруэнция системы соединяет своими лучами точки каждой линии (41) одной фокальной поверхности с точками линии, определяемой тем же (конечным) уравнением на другой фокальной поверхности. Так как для каждой конгруэнции системы, т. е. для каждого решения системы

$$\omega_2^3 = 0, \quad \omega_1^4 = 0, \tag{42}$$

лучи конгруэнции соединяют точки A_1, A_2 с одинаковыми значениями независимых переменных, то достаточно, чтобы уравнение (41) было вполне интегрируемо независимо от выбора решения системы (42), и первый интеграл его при каждом значении произвольного постоянного определит на каждой поверхности системы линий, точки которых будут соединяться лучами конгруэнций с точками соответствующих линий других поверхностей.

Чтобы уравнение (41) было вполне интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы внешний дифференциал уравнения был следствием самого уравнения. Дифференцируем внешним образом уравнение (41) и требуем, чтобы внешнее произведение этого дифференциала на левую часть уравнения (41) тождественно равнялось нулю; получим:

$$\left[dq - q(\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 + \omega_4^4) - \beta(1+tq^2)\,\omega_2^3 + \frac{\beta}{t}(1+tq^2)\,\omega_1^4,\ \omega_2^4,\ \omega_1^3\right] + \\ + 2\,[\omega_1^4,\ \omega_2^3,\ \omega_1^3 + q\omega_2^4](1-q) = 0. \tag{43}$$

Каждый из этих двух членов должен равняться нулю, а так как произведение основных форм на интегральном многообразии отлично от нуля, то

$$q = 1.$$

Внося $q = 1$ в уравнение (43), получим:

$$\left[-(\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 + \omega_4^4) + \beta\frac{1+t}{t}(\omega_1^4 - t\omega_2^3),\ \omega_2^4,\ \omega_1^3\right] = 0, \tag{43'}$$

но, в силу уравнений (13′), (14),

$$\Delta\gamma_1 + \Delta\gamma_4 - (\Delta\gamma_2 + \Delta\gamma_3) \equiv \\ \equiv 2(\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 + \omega_4^4) + 2\beta\frac{1+t}{t}(\omega_1^4 - t\omega_2^3) \quad (\mathrm{mod}\,(\omega_1^3,\ \omega_2^4)),$$

$$\Delta\gamma_1 + \Delta\gamma_4 - (\Delta\gamma_2 + \Delta\gamma_3) \equiv \\ \equiv (a_6 - a_7)\,\omega_2^3 + (b_7 - b_6)\,\omega_1^4 \quad (\mathrm{mod}\,(\omega_1^3,\ \omega_2^4)).$$

Следовательно, уравнение (43′) можно написать в виде

$$\left[(a_7 - a_6)\,\omega_2^3 + (b_6 - b_7)\,\omega_1^4 + 4\beta\frac{1+t}{t}(\omega_1^4 - t\omega_2^3),\ \omega_2^4,\ \omega_1^3\right] = 0,$$

откуда, приравнивая нулю коэффициенты при произведениях $[\omega_2^3\omega_2^4\omega_1^3]$, $[\omega_1^4\omega_2^4\omega_1^3]$, получим:

$$a_7 - a_6 = 4\beta(1+t), \quad b_7 - b_6 = 4\beta\frac{1+t}{t},$$

Сопоставляя эти соотношения с уравнениями (26), сразу заключаем:

$$t = -1, \quad a_7 = a_6, \quad b_7 = b_6$$

и приходим к рассмотренному в пп. 221, 222 случаю.

Итак, системы W п. 222 *характеризуются твердым соответствием линий на поверхностях системы и дают все двумерные системы этого рода.*

Линии, которые соответствуют на поверхностях системы, определяются уравнением (41), принимающим при $q = 1$ вид

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0. \tag{41'}$$

Мы видели, что асимптотические линии на фокальных поверхностях определяются уравнением (10), но, поскольку $\beta_2' = t\beta_2$, а t в нашем случае равно -1, уравнение (10′) принимает вид

$$(\omega_1^3)^2 - (\omega_2^4)^2 = 0.$$

Следовательно, *линии твердого соответствия* (41) *составляют одно семейство асимптотических линий поверхностей системы.*

225. Конгруэнции построенной системы W. Чтобы исследовать конгруэнции, которые входят в полученную систему W, нам будет удобно изменить выбор тетраэдра, присоединяемого к лучам системы. Совместим ребра A_1A_3 и A_2A_4 с касательными к асимптотическим твердого соответствия (41′). Формулы (11) показывают, что в таком случае мы должны иметь:

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad t = -1. \tag{44}$$

Уравнения (15) дадут нам ограничения на вторичные формы:

$$\pi_4^1 = 0, \quad \pi_3^2 = 0, \quad \pi_1^1 - \pi_2^2 - \pi_3^3 + \pi_4^4 = 0.$$

Мы попрежнему можем привести к нулю разности $\gamma_1 - \gamma_4$, $\gamma_2 - \gamma_3$ за счет закрепления форм $\pi_3^1 = 0$, $\pi_4^2 = 0$. Кроме того, мы приведем к единице коэффициенты β_1, β_2 за счет окончательного закрепления репера.

Так как, по условию, уравнение (41′) на интегральном многообразии системы W вполне интегрируемо, то его внешний дифференциал

$$[\omega_1^2\omega_2^3] + [\omega_1^4\omega_4^3] + [\omega_2^1\omega_1^4] + [\omega_2^3\omega_3^4] + [\omega_1^3,\ \omega_3^3 - \omega_1^1] + [\omega_2^4,\ \omega_4^4 - \omega_2^2] = 0$$

должен быть следствием самого уравнения (41′). Внося значения (11) и (44) и сравнивая коэффициенты при произведении $[\omega_2^3\omega_1^4]$, получим:

$$\gamma_1 = \gamma_2.$$

Мы имеем, таким образом:

$$
\begin{aligned}
&t=-1,\ \alpha_1=\alpha_2=\beta_1=\beta_2=1, && \gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=\gamma_4=\gamma,\\
&\omega_1^2=\omega_1^3+\omega_2^4+\gamma\omega_1^4, && \omega_2^1=\omega_1^3+\omega_2^4+\gamma\omega_2^3,\\
&\omega_3^4=-\omega_1^3-\omega_2^4+\gamma\omega_1^4, && \omega_4^3=-\omega_1^3-\omega_2^4+\gamma\omega_2^3,\\
&\frac{\Delta\gamma_1+\Delta\gamma_4}{2}=d\gamma+\gamma(\omega_1^1-\omega_3^3), && \frac{\Delta\gamma_2+\Delta\gamma_3}{2}=d\gamma+\gamma(\omega_2^2-\omega_4^4),\\
&\frac{\Delta\gamma_1-\Delta\gamma_4}{2}=\omega_3^1+2(\omega_1^3+\omega_2^4)-\gamma^2(\omega_1^3-\omega_2^4),\\
&\frac{\Delta\gamma_2-\Delta\gamma_3}{2}=\omega_4^2+2(\omega_1^3+\omega_2^4)+\gamma^2(\omega_1^3-\omega_2^4),\\
&\Delta t=2(\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3+\omega_4^4).
\end{aligned}
\tag{44'}
$$

Отсюда выводим линейное соотношение между формами

$$\Delta\gamma_1+\Delta\gamma_4-\Delta\gamma_2-\Delta\gamma_3=\gamma\,\Delta t,$$

которое при помощи уравнений таблицы (14) преобразуется в конечные уравнения

$$a_5-b_5+a_3-b_3=\gamma(a_4-a_1)=\gamma(b_1-b_4),\quad a_7=a_6,\quad b_7=b_6.$$

Вводя вспомогательные величины θ, $\overline{\theta}$, запишем эти уравнения в виде

$$a_4=a_1+2\theta,\quad b_4=b_1-2\theta,\quad a_5=\gamma\theta+\overline{\theta}-a_3,\quad b_5=\overline{\theta}-\gamma\theta-b_3. \tag{45}$$

Нас будут интересовать производные точек вдоль линий твердого соответствия (41′). Подсчитывая по модулю форм $\omega_1^3+\omega_2^4$, ω_2^3, ω_1^4, получим из последних уравнений (44′) и первых двух уравнений (14):

$$
\left.
\begin{aligned}
&\omega_3^1\equiv(\overline{\theta}+2\gamma^2-a_3-b_3)\,\omega_1^3,\\
&\omega_4^1\equiv-(a_1-a_2)\,\omega_1^3,\\
&\omega_3^2\equiv(b_1-b_2)\,\omega_1^3,\\
&\omega_4^2\equiv-(\overline{\theta}-2\gamma^2-a_3-b_3)\,\omega_1^3,\\
&2(\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3+\omega_4^4)=0
\end{aligned}
\right\}\ (\mathrm{mod}\,(\omega_1^3+\omega_2^4,\ \omega_2^3,\ \omega_1^4)). \tag{46}
$$

Обозначая

$$x=\overline{\theta}+2\gamma^2-a_3-b_3,\quad y=b_1-b_2,\quad y'=a_1-a_2, \tag{47}$$

получаем:

$$
\left.
\begin{aligned}
&dA_1\equiv\omega_1^1A_1+\omega_1^3A_3,\\
&dA_2\equiv\omega_2^2A_2-\omega_1^3A_4,\\
&dA_3\equiv\omega_3^3A_3+\omega_1^3(xA_1+yA_2),\\
&dA_4\equiv\omega_4^4A_4-\omega_1^3(y'A_1+xA_2)
\end{aligned}
\right\}\ (\mathrm{mod}\,(\omega_1^3+\omega_2^4,\ \omega_2^3,\ \omega_1^4)). \tag{48}
$$

Будем искать линейный комплекс

$$\mathfrak{a}=a^{ik}[ik]\qquad (i,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4), \tag{49}$$

соприкасающийся к асимптотической линии (41′) на первой фокальной поверхности. Прямая A_1A_3 принадлежит комплексу $\mathfrak{a}$, если плюккерово произведение равно нулю:

$$\{\mathfrak{a}[13]\}=0. \tag{a}$$

Комплекс $\mathfrak{a}$ будет соприкасающимся к линии (41′), если он содержит не только луч [13], но и все лучи его дифференциальной окрестности четвертого порядка вдоль линии (41′), т. е. содержит четыре производные аналитической прямой [13] вдоль линии (41′). Чтобы его получить, нужно последовательно дифференцировать равенство (a) при неподвижном комплексе $\mathfrak{a}$.

Пользуясь формулами (48), чтобы вычислить дифференциал

$$d[13]=(dA_1A_3)+(A_1\,dA_3),$$

мы получим после первого дифференцирования уравнения (a) (если принимать во внимание само уравнение):

$$y\{\mathfrak{a}[12]\}=0. \tag{b}$$

Если коэффициент y равен нулю, то

$$d[13]\equiv[13](\omega_1^1+\omega_3^3)\quad (\mathrm{mod}\,(\omega_1^3+\omega_2^4,\ \omega_2^3,\ \omega_1^4)),$$

асимптотическая (41′) становится прямой линией и первая фокальная поверхность (A_1) — линейчатая. Это возвращает нас к случаю системы W, присоединенной к расслояемой паре кривых. Сейчас мы допустим, что $y\neq 0$, сократим уравнение (b) на y и будем дифференцировать второй множитель. Мы получим:

$$\{\mathfrak{a}[32]\}-\{\mathfrak{a}[14]\}=0; \tag{c}$$

новое дифференцирование дает

$$\{\mathfrak{a}[34]\}=0, \tag{d}$$

$$\{\mathfrak{a}[24]\}=0. \tag{e}$$

Внося в уравнения (a) — (e) значение (49) и сокращая на неравное нулю произведение $(A_1A_2A_3A_4)$, получим условия на координаты a^{ik} комплекса $\mathfrak{a}$:

$$a^{24}=a^{34}=a^{12}=a^{13}=0,\quad a^{14}+a^{23}=0.$$

Сокращая все уравнения комплекса на коэффициент a^{23}, который не может равняться нулю, получим равенство (49) в виде

$$\mathfrak{a}=[23]-[14]. \tag{49'}$$

Между тем, дифференцируя уравнение (49′) и учитывая последнее равенство (46), получим:

$$d\mathfrak{a} \equiv (\omega_2^2+\omega_3^3)\,\mathfrak{a} \qquad (\mathrm{mod}\,(\omega_1^3+\omega_2^4)). \tag{50}$$

Следовательно, вдоль линии (41′) комплекс $\mathfrak{a}$ остается неизменным, и *каждая асимптотическая твердого соответствия принадлежит своему линейному комплексу.*

Уравнение (b) показывает, что касательная A_2A_4 к соответствующей асимптотической второй фокальной поверхности принадлежит тому же линейному комплексу. Таким образом, все поверхности системы W суть поверхности F_1 (с асимптотическими одного семейства в линейных комплексах), и все конгруэнции суть конгруэнции W, устанавливающие особое преобразование поверхности F_1 в поверхность F_1, при котором асимптотические первой и второй поверхности принадлежат попарно одному и тому же линейному комплексу. Таким образом, к системе W присоединено однопараметрическое семейство комплексов $\mathfrak{a}$, так что все соответствующие асимптотические (41′) всех поверхностей системы принадлежат одному и тому же линейному комплексу семейства.

ГЛАВА XXII

СИСТЕМА W С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ ПРОИЗВОЛОМ

226. Постановка задачи. Теория систем W с твердым соответствием линий, рассмотренная в предыдущей главе, хорошо завершается системой W, многообразие конгруэнций которой зависит от двух произвольных функций одного аргумента, а многообразие фокальных поверхностей состоит из двух семейств, зависящих каждое от одной функции одного аргумента.

Присоединим к каждому лучу каждой конгруэнции системы W тетраэдр 1-го порядка $\{A_i\}$ ($i=1, 2, 3, 4$), две вершины A_1, A_2 которого помещаются в фокусах луча, а две грани $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$ служат его фокальными плоскостями.

Инфинитезимальные проективные преобразования репера определим системой (1) п. 216.

При заданной системе W замкнутая система

$$\omega_1^4=0, \quad [\omega_1^2\omega_2^4]+[\omega_1^3\omega_3^4]=0, \tag{1}$$

где второе уравнение представляет внешний дифференциал первого, определяет фокальные поверхности (A_1) системы. Характеристическая система состоит из пяти форм ω_1^4, ω_1^2, ω_1^3, ω_2^4, ω_3^4, из которых первая определяется пфаффовым уравнением (1), две другие остаются независимыми на интегральном многообразии, так что $q=2$ и при одном квадратичном уравнении характеры системы $s_1=1$, $s_2=q-s_1=1$.

Это приводит к произволу интегрального многообразия системы (1) в виде одной функции двух аргументов, в то время как многообразие фокальных поверхностей системы W по условию зависит от одной произвольной функции одного аргумента. Чтобы уменьшить число независимых форм характеристической системы (1), надо ввести в систему дифференциальных уравнений, определяющую систему W, уравнение вида

$$\omega_3^4=A\omega_1^3+B\omega_2^4+C\omega_1^2+D\omega_1^4, \tag{2}$$

где A, B, C, D — функции от переменных системы.

Квадратичное уравнение (1) теперь даст

$$\omega_1^2=-B\omega_1^3+\lambda\,(\omega_2^4-C\omega_1^3), \tag{3}$$

где функция λ зависит от выбора фокальной поверхности (A_1); асимптотические линии на ней определяются уравнением

$$\omega_1^2\omega_2^4 + \omega_1^3\omega_3^4 = 0$$

или

$$(A - BC - \lambda C^2)(\omega_1^3)^2 + \lambda(\omega_2^4)^2 = 0. \tag{4}$$

Уравнения (1), (2), (3), (4) для поверхности (A_2) получаются подстановкой указателей $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ и заменой коэффициентов A, B, C, D, λ на A', B', C', D', λ'.

Конгруэнции (A_1A_2) системы W определяются теперь с двумя произвольными функциями одного аргумента. Они все будут конгруэнциями W, если коэффициенты в уравнении (4) и в таком же уравнении для поверхности (A_2)

$$(A' - B'C' - \lambda'C'^2)(\omega_2^4)^2 + \lambda'(\omega_1^3)^2 = 0$$

будут пропорциональны независимо от выбора значений λ, λ', откуда следует

$$A = BC, \quad A' = B'C', \quad C^2C'^2 = 1.$$

Теперь уравнение (2) и такое же уравнение для (A_2) запишутся:

$$\left.\begin{aligned} \omega_3^4 &= B(C\omega_1^3 + \omega_2^4) + C\omega_1^2 + D\omega_1^4, \\ \omega_4^3 &= B'\left(\omega_1^3 + \frac{\varepsilon}{C}\omega_2^4\right) + \frac{\varepsilon}{C}\omega_2^1 + D'\omega_2^3 \end{aligned}\right\} \quad (\varepsilon = \pm 1). \tag{5}$$

Искомые системы W определяются интегральным многообразием $\mathfrak{M}_6$ системы (5), на котором

$$[\omega_1^3\omega_2^4\omega_1^4\omega_2^3\omega_1^2\omega_2^1] \neq 0. \tag{6}$$

227. Основная система дифференциальных уравнений. Дифференцируя внешним образом уравнения (5), получим:

$$\left.\begin{aligned} &[\Delta B,\ C\omega_1^3 + \omega_2^4] + C[\nabla C,\ B\omega_1^3 + \omega_1^2] + [\Delta D\omega_1^4] = 0, \\ &\left[\Delta B',\ \omega_1^3 + \frac{\varepsilon}{C}\omega_2^4\right] + \frac{\varepsilon}{C}[\nabla C',\ B'\omega_2^4 + \omega_2^1] + [\Delta D'\omega_2^3] = 0, \end{aligned}\right\} \tag{7α}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \Delta B &= dB + B(\omega_2^2 - \omega_3^3) - \omega_3^2 + B^2\omega_2^3, \\ \Delta B' &= dB' + B'(\omega_1^1 - \omega_4^4) - \omega_4^1 + B'^2\omega_1^4, \\ \nabla C &= d\ln C + \omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 + \omega_4^4 + D\omega_1^3 - \frac{D}{C}\omega_2^4, \\ \nabla C' &= -d\ln C - \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_4^4 + D'\omega_2^4 - \varepsilon D'C\omega_1^3, \\ \Delta D &= dD + D(\omega_1^1 - \omega_3^3) - \omega_3^1 - C\omega_4^2 + (D^2 - BB'C)\omega_1^3 - \\ &\quad - \varepsilon BB'\omega_2^4 + B(1-\varepsilon)\omega_3^1 + B(D - CD')\omega_2^3, \\ \Delta D' &= dD' + D'(\omega_2^2 - \omega_4^4) - \omega_4^2 - \frac{\varepsilon}{C}\omega_3^1 + \left(D'^2 - \frac{\varepsilon}{C}BB'\right)\omega_2^4 - \\ &\quad - \varepsilon BB'\omega_1^3 + B'(1-\varepsilon)\omega_1^2 + B'\left(D' - \frac{\varepsilon}{C}D\right)\omega_1^4. \end{aligned}\right\} \tag{7β}$$

Из уравнений (7α) следует, что ∇C линейно выражается через формы $C\omega_1^3 + \omega_2^4$, $B\omega_1^3 + \omega_1^2$, ω_1^4, следовательно, не зависит от форм ω_2^1, ω_2^3, а $\nabla C'$ не зависит от ω_1^2, ω_1^4. Поскольку, в силу (7β),

$$\nabla C + \nabla C' = (D - \varepsilon CD')\omega_1^3 + \left(D' - \frac{D}{C}\right)\omega_2^4, \tag{7γ}$$

каждая из этих форм ∇C и $\nabla C'$ зависит только от форм ω_1^3, ω_2^4, именно:

$$\nabla C = \xi(C\omega_1^3 + \omega_2^4), \quad \nabla C' = \xi'\left(\omega_1^3 + \frac{\varepsilon}{C}\omega_2^4\right).$$

Внося эти значения в равенство (7γ), получим из сравнения коэффициентов при ω_1^3, ω_2^4:

$$D - \varepsilon CD' = \xi C + \xi', \quad CD' - D = \xi C + \varepsilon\xi',$$

откуда две возможности:

$$\varepsilon = 1, \quad D = CD', \quad \nabla C = -\nabla C' = \xi(C\omega_1^3 + \omega_2^4); \tag{8α}$$

$$\varepsilon = -1, \quad \nabla C = D'(C\omega_1^3 + \omega_2^4), \quad \nabla C' = D\left(\omega_1^3 - \frac{1}{C}\omega_2^4\right). \tag{8β}$$

228. Частичная канонизация репера. Характеристическая система уравнений (5), (7α), кроме шести форм (6) и двух форм (5), содержит шесть форм (7β), связанных соотношением (7γ). Формы ω_3^2, ω_4^1, ω_3^1, ω_4^2, а также формы ω_i^i являются вторичными, и мы можем этим воспользоваться для частичной канонизации репера. При равенстве нулю форм (6), т. е. для преобразований стационарной подгруппы, все формы характеристической системы обращаются в нуль, и система (7β) дает закон вариации коэффициентов

$$\delta B = (\pi_3^3 - \pi_2^2)B + \pi_3^2, \quad \delta B' = (\pi_4^4 - \pi_1^1)B' + \pi_4^1,$$

$$\delta D = (\pi_3^3 - \pi_1^1)D + \pi_3^1 + C\pi_4^2, \quad \delta D' = (\pi_4^4 - \pi_2^2)D' + \pi_4^2 + \frac{\varepsilon}{C}\pi_3^1,$$

$$\delta\ln C = \pi_2^2 - \pi_1^1 - \pi_4^4 + \pi_3^3,$$

где все π_i^k суть значения ω_i^k для преобразований стационарной подгруппы.

Полагая все π_i^k равными нулю, кроме $\pi_3^2 = \delta\varphi$, где φ — вторичный параметр, определяющий положение вершины A_3 на ребре A_2A_3, получим из первого уравнения

$$\delta B = \delta\varphi, \quad B = \varphi + B_0,$$

где B_0 — значение коэффициента B при $\varphi = 0$. Выбирая значение параметра $\varphi = -B_0$, приведем B к нулю. Таким же образом приведем к нулю B', D, D' и $\ln C$. Уравнения (7α) сохраняются, а формулы (5), (7β) примут вид

$$\omega_3^4 = \omega_1^2, \quad \omega_4^3 = \varepsilon\omega_2^1, \tag{5'}$$

$$\Delta B = -\omega_3^2, \quad \Delta B' = -\omega_4^1, \quad \Delta D = -(\omega_3^1 + \omega_4^2), \quad \Delta D' = -(\omega_4^2 + \varepsilon\omega_3^1),$$
$$\nabla C = -\nabla C' = \omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 + \omega_4^4. \tag{7β'}$$

229. Первое решение $\varepsilon = 1$. Для $\varepsilon = 1$, в силу (8α), (7β'), система (7α) принимает вид

$$\begin{aligned} &[\omega_3^2 + \xi\omega_1^2,\ \omega_1^3 + \omega_2^4] + [\omega_3^1 + \omega_4^2,\ \omega_1^4] = 0,\\ &[\omega_4^1 - \xi\omega_2^1,\ \omega_1^3 + \omega_2^4] + [\omega_3^1 + \omega_4^2,\ \omega_2^3] = 0, \end{aligned} \tag{9α}$$

откуда

$$\begin{aligned} &\omega_3^2 = -\xi\omega_1^2 + \eta(\omega_1^3 + \omega_2^4) + \zeta\omega_1^4, \quad \omega_3^1 + \omega_4^2 = \zeta(\omega_1^3 + \omega_2^4),\\ &\omega_4^1 = \xi\omega_2^1 + \eta'(\omega_1^3 + \omega_2^4) + \zeta\omega_2^3, \quad \omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 + \omega_4^4 = \xi(\omega_1^3 + \omega_2^4). \end{aligned} \tag{9β}$$

Дифференцируя внешним образом, получим:

$$\begin{aligned} &[\Delta\xi\omega_1^2] - [\Delta\eta,\ \omega_1^3 + \omega_2^4] - [\Delta\zeta\omega_1^4] = 0,\\ &[\Delta\xi\omega_2^1] + [\Delta\eta',\ \omega_1^3 + \omega_2^4] + [\Delta\zeta\omega_2^3] = 0,\\ &[\Delta\zeta,\ \omega_1^3 + \omega_2^4] = 0, \quad [\Delta\xi,\ \omega_1^3 + \omega_2^4] = 0, \end{aligned} \tag{10α}$$

где

$$\begin{aligned} &\Delta\xi = d\xi + \xi(\omega_1^1 - \omega_3^3) - \xi^2\frac{\omega_1^3 - \omega_2^4}{2} - \zeta(\omega_1^3 - \omega_2^4) + \omega_3^1 - \omega_4^2,\\ &\Delta\eta = d\eta + \eta(\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3) - \xi\eta(\omega_1^3 - \omega_2^4) - \frac{1}{2}\xi^2\omega_1^2,\\ &\Delta\zeta = d\zeta + \zeta(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4) + \xi\frac{\omega_4^2 - \omega_3^1}{2} - \xi\zeta\frac{\omega_1^3 - \omega_2^4}{2},\\ &\Delta\eta' = d\eta' + \eta'(\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_4^4) + \xi\eta'(\omega_2^4 - \omega_1^3) + \frac{1}{2}\xi^2\omega_2^1. \end{aligned} \tag{10β}$$

Характеристическая система содержит, кроме форм (5′) (9β) и пяти форм

$$\omega_1^2, \quad \omega_2^1, \quad \omega_1^4, \quad \omega_2^3, \quad \omega_1^3 + \omega_2^4, \tag{10γ}$$

независимых на интегральном многообразии, еще $q = 4$ формы (10β).

При обращении в нуль форм (10γ) все формы (10β) тоже обратятся в нуль. Отсюда закон вариации коэффициента ξ преобразованиями стационарной подгруппы (при изменении вторичных параметров репера):

$$\delta\xi + \xi(\pi_1^1 - \pi_3^3) + \pi_3^1 - \pi_4^2 = 0.$$

Здесь $\pi_3^1 - \pi_4^2$ — вторичная форма; используя ее так же, как при первой канонизации репера, мы приведем коэффициент ξ к нулю. Система (5′), (9β) примет вид

$$\begin{aligned} &\omega_3^4 = \omega_1^2, \quad \omega_4^3 = \omega_2^1,\\ &\omega_3^1 + \omega_4^2 = \zeta(\omega_1^3 + \omega_2^4), \quad \omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0,\\ &\omega_3^2 = \eta(\omega_1^3 + \omega_2^4) + \zeta\omega_1^4, \quad \omega_4^1 = \eta'(\omega_1^3 + \omega_2^4) + \zeta\omega_2^3. \end{aligned} \tag{9β'}$$

Система ковариантов (10α) правильная. Ранг полярной системы $s_1 = 4$; следовательно, характеры суть $s_1 = 4$, $s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = 0$ и $Q = 4$.

Поскольку наиболее общий $\mathfrak{E}_5$ зависит тоже от $N = 4$ параметров, система — в инволюции и определяет системы W с произволом $s_1 = 4$ функции одного аргумента.

Поскольку в уравнения системы (10α, β) входят только характеристические переменные, а характеристическая система содержит формы ω_1^3, ω_2^4 из числа форм (6) только в одной комбинации $\omega_1^3 + \omega_2^4$, система дифференциальных уравнений и интегральное многообразие зависят только от пяти независимых переменных; шестое независимое (6) остается вполне произвольным.

Вполне интегрируемая на интегральном многообразии система

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0, \quad \omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^1 = 0, \quad \omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^3 = 0 \tag{11}$$

определяет характеристическое многообразие. Все переменные задачи на характеристическом многообразии сохраняют постоянные значения, меняется только шестое независимое переменное.

230. Система W с асимптотическими одного семейства в линейных комплексах. Поскольку уравнение асимптотических линий (4) теперь принимает вид

$$(\omega_1^3 + \omega_2^4)(\omega_1^3 - \omega_2^4) = 0,$$

линии

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0, \tag{12α}$$

которые соответствуют на каждой фокальной поверхности характеристическому многообразию, являются на каждой поверхности асимптотическими.

Так как, в силу (9β'),

$$D(\omega_1^3 + \omega_2^4) = \frac{1}{2}[\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4,\ \omega_1^3 + \omega_2^4] \equiv 0, \quad (\mathrm{mod}\,(\omega_1^3 + \omega_2^4)),$$

уравнение (12α) вполне интегрируемо, и первый интеграл его устанавливает на всех фокальных поверхностях твердое соответствие асимптотических этого семейства.

Все эти асимптотические принадлежат линейным комплексам, так что соответствующие друг другу асимптотические всех фокальных поверхностей принадлежат одному и тому же линейному комплексу.

Действительно, допустим, что линейный комплекс

$$\mathfrak{a} = a^{ik}[ik] \qquad [ik] = (A_i A_k) \tag{12β}$$

содержит касательные к линиям (12α) поверхностей (A_1) и (A_2); он имеет вид $\mathfrak{a} = [14] - [23]$, ибо на каждой конгруэнции системы

$$\omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^3 = 0,$$

в силу уравнений (1), (3),

$$\omega_1^2 = \lambda(\omega_2^4 - \omega_1^3), \quad \omega_2^1 = \lambda'(\omega_1^3 - \omega_2^4)$$

и

$$\left.\begin{aligned} dA_1 &\equiv \omega_1^1 A_1 + (A_3 - 2\lambda A_2)\,\omega_1^3, \\ dA_2 &\equiv \omega_2^2 A_2 + (2\lambda' A_1 - A_4)\,\omega_1^3 \end{aligned}\right\} \pmod{(\omega_1^3 + \omega_2^4)};$$

комплекс $\mathfrak{a} = [14] - [23]$, очевидно, содержит прямые $[A_1 dA_1)$, $(A_2 dA_2)$, так как удовлетворяет системе уравнений

$$\{\mathfrak{a},\ -2\lambda[12] + [13]\} = 0, \quad \{\mathfrak{a},\ 2\lambda'[21] - [24]\} = 0.$$

Между тем, в силу уравнений (9β′), имеем:

$$d\mathfrak{a} = \frac{\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4}{2}\,\mathfrak{a} + (\omega_1^3 + \omega_2^4)([34] + \zeta[12]).$$

Следовательно, при перемещении вдоль многообразия (12α) комплекс $\mathfrak{a}$ сохраняется неизменным, а так как он не зависит от λ, то один и тот же для всех соответствующих поверхностей.

231. Особое решение $\xi = 0$, $\zeta = 0$. Особое решение получим, если одновременно

$$\xi = 0, \quad \zeta = 0 \quad \text{и} \quad \Delta\zeta = 0.$$

Уравнения (9β′), (10α) принимают вид

$$\left.\begin{gathered} \omega_3^4 = \omega_1^2, \quad \omega_4^3 = \omega_2^1, \quad \omega_3^1 + \omega_4^2 = 0, \quad \omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0, \\ \omega_3^2 = \eta(\omega_1^3 + \omega_2^4), \quad \omega_4^1 = \eta'(\omega_1^3 + \omega_2^4), \end{gathered}\right. \tag{13α}$$

$$\left.\begin{gathered} [\omega_3^1 - \omega_4^2,\ \omega_1^3 + \omega_2^4] = 0, \\ -[\Delta\eta,\ \omega_1^3 + \omega_2^4] + [\omega_3^1 - \omega_4^2,\ \omega_1^2] = 0, \\ [\Delta\eta',\ \omega_1^3 + \omega_2^4] + [\omega_3^1 - \omega_4^2,\ \omega_2^1] = 0. \end{gathered}\right. \tag{13β}$$

Характеристическая система содержит только три из числа шести форм (6), независимых на интегральном многообразии:

$$\omega_1^2, \quad \omega_2^1, \quad \omega_1^3 + \omega_2^4, \tag{13γ}$$

и, кроме форм (13α), еще $q = 3$ формы:

$$\omega_3^1 - \omega_4^2, \quad \Delta\eta, \quad \Delta\eta'. \tag{13δ}$$

Система ковариантов (13β) правильная с характерами $s_1 = 3$, $s_2 = s_3 = 0$.

Интегральный элемент $\mathfrak{E}_3$ существует с $N = 3$ произвольными параметрами. Система — в инволюции и определяет интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ с $s_1 = 3$ произвольными функциями от одного аргумента.

Чтобы получить интегральное многообразие $\mathfrak{M}_6$, надо к каждой группе значений $6 + 3 + 3 = 12$ характеристических переменных — первых интегралов характеристической системы (13α, γ, δ) — присоединить произвольные значения остальных трех независимых переменных из числа шести первых интегралов системы (6).

Система

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^1 = 0, \quad \omega_1^3 + \omega_2^4 = 0 \tag{13γ′}$$

определяет трехмерное характеристическое многообразие.

232. Случай $\varepsilon = -1$. Теперь уравнения (5′), (7β′) и (7α) принимают вид системы

$$\omega_3^4 = \omega_1^2, \quad \omega_4^3 = -\omega_2^1, \quad \omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0, \tag{14α}$$

$$\left.\begin{gathered} [\omega_3^2,\ \omega_1^3 + \omega_2^4] + [\omega_3^1 + \omega_4^2,\ \omega_1^4] = 0, \\ [\omega_4^1,\ \omega_1^3 - \omega_2^4] + [\omega_4^2 - \omega_3^1,\ \omega_2^3] = 0, \end{gathered}\right. \tag{14β}$$

к которой надо присоединить внешний дифференциал последнего уравнения (14α):

$$[\omega_3^1 - \omega_4^2,\ \omega_1^3 + \omega_2^4] + [\omega_3^1 + \omega_4^2,\ \omega_1^3 - \omega_2^4] + 4[\omega_2^1 \omega_1^2] = 0. \tag{14γ}$$

Уравнения (14β) показывают, что формы ω_3^2, ω_4^1, $\omega_3^1 - \omega_4^2$, $\omega_3^1 + \omega_4^2$ не зависят от форм ω_1^2, ω_2^1. Следовательно, в уравнении (14γ) последний член не может сократиться с предыдущими, что приводит к противоречию, ибо ω_1^2, ω_2^1 по условию линейно независимы.

ГЛАВА XXIII

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИЖДЫ СОПРЯЖЕННЫХ СИСТЕМ *R* И РАССЛОЕНИЕ ПАРЫ КОМПЛЕКСОВ

233. Основные определения. Трижды сопряженной системой называется совокупность трех однопараметрических семейств поверхностей таких, что через каждую точку пространства (в рассматриваемой области) проходит по одной поверхности каждого семейства и на каждой поверхности два других семейства поверхностей высекают сопряженную систему линий.

Трижды сопряженная система называется системой R, если она содержит по крайней мере одно семейство поверхностей R и на каждой поверхности семейства сопряженная система линий R высекается поверхностями двух других семейств системы.

Две трижды сопряженные системы находятся в отношении асимптотического преобразования, если между ними можно установить взаимно однозначное точечное соответствие, которое сохраняет поверхности системы, т. е. переводит каждую поверхность одного из трех однопараметрических семейств первой системы в поверхность соответствующего семейства второй системы, и прямые, соединяющие соответствующие точки двух систем, касаются в этих точках поверхностей одной пары соответствующих семейств первой и второй системы.

Если выделим одну пару таких поверхностей, то нетрудно заметить, что они в общем случае будут находиться в отношении асимптотического преобразования. Действительно, прямые, соединяющие соответствующие точки этих поверхностей, касаются их, следовательно, описывают конгруэнцию, для которой эти поверхности служат фокальными поверхностями. На этих поверхностях соответствуют линии двух сопряженных систем: первая образована фокальной сетью, вторая высекается попарно соответствующими поверхностями двух других семейств.

Между тем по теореме Петерсона при всяком взаимно однозначном соответствии точек двух поверхностей найдется только одна сопряженная система, которая переходит в сопряженную систему (основание соответствия); если таких систем будет две, то все сопряженные системы одной поверхности переходят в сопряженные системы другой, и асимптотические линии соответствуют.

Таким образом, или фокальная сеть конгруэнции совпадает с сетью, высекаемой на фокальных поверхностях поверхностями первой или второй трижды сопряженной системы, и тогда одна поверхность является преобразованием Лапласа от другой относительно этой сети, или эти две сопряженные сети различны, и тогда на фокальных поверхностях конгруэнции соответствуют асимптотические линии и конгруэнция будет конгруэнцией W.

234. Преобразование Бианки триортогональных псевдосферических систем. Первое преобразование этого рода дал Бианки. Он рассматривал триортогональную систему поверхностей с одним семейством поверхностей постоянной отрицательной кривизны. Поскольку поверхности триортогональной системы пересекаются по линиям кривизны, триортогональная система представляет специальный случай трижды сопряженной, когда высекаемые поверхностями системы сопряженные сети становятся ортогональными. Пользуясь преобразованием поверхностей постоянной отрицательной кривизны с помощью псевдосферической конгруэнции (преобразование Бэклюнда), Бианки подбирает так параметры преобразования, что семейство преобразованных псевдосферических поверхностей образует новую триортогональную систему.

Линии кривизны на поверхности постоянной отрицательной кривизны представляют сопряженную систему R. Поэтому естественно поставить задачу распространения асимптотического преобразования (Шульман [1]) на трижды сопряженные системы R общего вида.

Это вернет нас к задаче расслоения теперь уже применительно к паре комплексов прямых, именно: соответствующие касательные к линиям R первой и второй трижды сопряженной системы R составляют два комплекса, допускающих расслоение посредством двух семейств систем R того же рода.

235. Уравнения трижды сопряженной системы. Пусть мы имеем две трижды сопряженные системы ($\boldsymbol{A}$) и ($\boldsymbol{B}$). Присоединим к точкам каждой системы тетраэдр с вершинами в точке $\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{A}_0$ и точках $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$ на касательных к линиям пересечения поверхностей системы и аналогично репер $\{\boldsymbol{B}_i\}$.

Компоненты инфинитезимальных проективных перемещений *)

$$d\boldsymbol{A}_i = \omega_i^\alpha \boldsymbol{A}_\alpha, \quad d\boldsymbol{B}_j = \Omega_j^\beta \boldsymbol{B}_\beta \qquad (i,\ j,\ \alpha,\ \beta = 0,\ 1,\ 2,\ 3) \tag{1}$$

должны удовлетворять условию сопряженности: развертывающиеся поверхности конгруэнции $\omega^3 = 0$, описываемой лучом ($\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1$) или ($\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2$), должны определяться уравнением $\omega^1\omega^2 = 0$. Для первой конгруэнции уравнение развертывающихся поверхностей пишется:

$$(d\boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega^3),$$

*) Здесь и далее в этой главе по греческим индексам α, β, γ, ... производится суммирование; латинские i, j, k, ... произвольно фиксированы.

или

$$(\omega^2 A_2,\ \omega_1^2 A_2 + \omega_1^3 A_3,\ AA_1) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega^3),$$

или

$$\omega^2\omega_1^3 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega^3).$$

Чтобы это уравнение совпадало с уравнением $\omega^1\omega^2 = 0$, необходимо и достаточно

$$\omega_1^3 = l_{11}^3\omega^1 + l_{13}^3\omega^3.$$

Вообще формы ω_i^k ($i \neq k$, i, $k = 1, 2, 3$) и аналогично Ω_i^k должны иметь вид

$$\omega_i^k = l_{ii}^k\omega^i + l_{ik}^k\omega^k, \qquad \Omega_i^k = L_{ii}^k\omega^i + L_{ik}^k\omega^k. \tag{2}$$

Если уравнения (2) удовлетворены, то каждое уравнение

$$\omega^k = 0 \qquad (k = 1, 2, 3)$$

вполне интегрируемо и определяет одно из трех семейств поверхностей системы. Действительно, условие полной интегрируемости пишется:

$$[D\omega^k\,\omega^k] = 0,$$

или

$$\left[[\omega^i\omega_i^k] + [\omega^j\omega_j^k],\ \omega^k\right] = 0.$$

Внося сюда значения (2)

$$\left[[\omega^i,\ l_{ii}^k\omega^i + l_{ik}^k\omega^k] + [\omega^j,\ l_{jj}^k\omega^j + l_{jk}^k\omega^k],\ \omega^k\right] = 0,$$

обнаружим, что все члены сокращаются.

Таким образом, трижды сопряженная система определяется шестью уравнениями:

$$[\omega_i^k\omega^i\omega^k] = 0 \qquad (i,\ k = 1, 2, 3). \tag{3}$$

Характеристическая система, кроме форм $[\omega^1\omega^2\omega^3] \neq 0$, содержит шесть форм: ω_1^2, ω_2^1, ω_2^3, ω_3^2, ω_3^1, ω_1^3. Интегральный элемент $\mathfrak{E}_3$ определяется уравнениями (2) с $N = 12$ параметрами. Поскольку $s_1 = 0$, $s_2 = 6$, $s_3 = 0$, $Q = s_1 + 2s_2 = 12 = N$, система — в инволюции и определяет трижды сопряженные системы с 12 произвольными функциями от двух аргументов.

236. Уравнения пары систем R в отношении асимптотического преобразования. Мы видели (п. 52), что поверхности R обладают замечательным свойством. Все преобразования Лапласа поверхности R относительно сети R будут тоже поверхностями R. Если имеется асимптотическое преобразование поверхности R в поверхность R с сохранением сети R, то все преобразования Лапласа первой и второй поверхности относительно этой сети будут попарно находиться в отношении асимптотического преобразования и этим свойством обладают только поверхности R.

Пусть системы (A) и (B) находятся в отношении асимптотического соответствия, образуют системы R и, именно, поверхности $\omega^3 = 0$ поверхности R.

Поместим вершины A_1, A_2 в преобразования Лапласа точки A относительно сопряженной сети $\omega^3 = 0$. Тогда

$$(dA_1AA_1) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega^1, \omega^3),$$
$$(dA_2AA_2) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega^2, \omega^3),$$

или

$$\omega_1^2 = l_{11}^2\omega^1, \qquad \omega_2^1 = l_{22}^1\omega^2, \tag{4α}$$

и аналогично для вершин B_1, B_2

$$\Omega_1^2 = L_{11}^2\omega^1, \qquad \Omega_2^1 = L_{22}^1\omega^2, \tag{4β}$$

т. е.

$$l_{12}^2 = l_{21}^1 = L_{12}^2 = L_{21}^1 = 0. \tag{4$'$}$$

Если теперь установить зависимость между вершинами обоих реперов

$$A_i = a_i^\alpha B_\alpha,\ B_i = b_i^\alpha A_\alpha,\ a_i^\alpha b_\alpha^j = \delta_i^j,\ b_i^\alpha a_\alpha^j = \delta_i^j,\ (i,\ j,\ \alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3), \tag{5α}$$

то, дифференцируя, получим:

$$da_i^j = a_\alpha^j\omega_i^\alpha - a_i^\alpha\Omega_\alpha^j, \qquad db_i^j = b_\alpha^j\Omega_i^\alpha - b_i^\alpha\omega_\alpha^j, \tag{5β}$$

и в силу соответствия сопряженных систем

$$\Omega^i = L^i\omega^i. \tag{6}$$

Поскольку прямая AB является линией пересечения касательных плоскостей (AA_1A_2), (BB_1B_2) поверхностей $\omega^3 = 0$ первой и второй сопряженных систем, имеем:

$$a_0^3 = 0, \qquad b_0^3 = 0, \tag{7α}$$

откуда, дифференцируя с помощью уравнений (5β), получим:

$$a_1^3\omega^1 + a_2^3\omega^2 + a_3^3\omega^3 = a_0^0\Omega^3 + a_0^1\Omega_1^3 + a_0^2\Omega_2^3,$$
$$b_1^3\Omega^1 + b_2^3\Omega^2 + b_3^3\Omega^3 = b_0^1\omega_1^3 + b_0^2\omega_2^3 + b_0^0\omega^3$$

и с помощью уравнений (2), (4$'$), (6), в силу независимости форм ω^1, ω^2, ω^3:

$$\left.\begin{aligned} &a_1^3 = a_0^1L_{11}^3, \quad a_2^3 = a_0^2L_{22}^3, \quad a_3^3 = a_0^0L^3 + a_0^1L_{13}^3 + a_0^2L_{23}^3,\\ &b_1^3L^1 = b_0^1l_{11}^3, \quad b_2^3L^2 = b_0^2l_{22}^3, \quad b_3^3L^3 = b_0^0 + b_0^1l_{13}^3 + b_0^2l_{23}^3. \end{aligned}\right\} \tag{7β}$$

Поскольку прямые A_1B_1 и A_2B_2 касаются при $\omega^3 = 0$ соответственно поверхностей (A_1), (B_1) и (A_2), (B_2), имеют место сравнения

$$\left.\begin{aligned} &(dA_1A_1AB_1) \equiv 0, \quad (dA_2A_2AB_2) \equiv 0,\\ &(dB_1B_1BA_1) \equiv 0, \quad (dB_2B_2BA_2) \equiv 0 \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{mod}\ \omega^3), \tag{7γ}$$

откуда получаем:

$$b_1^2 l_{11}^3 = b_1^3 l_{11}^2, \quad b_2^1 l_{22}^3 = b_2^3 l_{22}^1, \quad a_1^2 L_{11}^3 = a_1^3 L_{11}^2, \quad a_2^1 L_{22}^3 = a_2^3 L_{22}^1. \qquad (7\gamma')$$

Уравнения (2), (4′), (6), (7α, β, γ′) составляют все уравнения нашей задачи.

237. Продолжение основной системы уравнений. Дифференцируя внешним образом уравнения (2), (6), получим:

$$[\Delta l_{ii}^j \omega^i] + [\Delta l_{ij}^i \omega^j] = 0, \qquad [\Delta L_{ii}^j \omega^i] + [\Delta L_{ij}^j \omega^j] = 0, \ [\Delta L^i \omega^i] = 0, \qquad (8\alpha)$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta l_{ii}^j &= dl_{ii}^j + l_{ii}^j(\omega_0^0 - 2\omega_i^i + \omega_j^j) + l_{ii}^j l_{ji}^i \omega^j + l_{ii}^j l_{ki}^i \omega^k + l_{ii}^k \omega_k^j, \\
\Delta l_{ij}^j &= dl_{ij}^j + l_{ij}^j(\omega_0^0 - \omega_i^i) + (l_{ij}^j)^2 \omega^i + l_{ij}^j l_{kj}^j \omega^k - l_{ik}^k l_{kj}^j \omega^k - \omega_i^0, \\
\Delta L_{ii}^j &= dL_{ii}^j + L_{ii}^j(\omega_0^0 - \omega_i^i - \Omega_i^i + \Omega_j^j) + L_{ii}^j l_{ji}^i \omega^j + L_{ii}^j l_{ki}^i \omega^k + L_{ii}^k \Omega_k^j, \\
\Delta L_{ij}^j &= dL_{ij}^j + L_{ij}^j(\omega_0^0 - \omega_j^j - \Omega_i^i + \Omega_j^j) + L_{ij}^j l_{ij}^j \omega^i + \\
&\qquad + (L_{ij}^j l_{kj}^j - L_{ik}^k L_{kj}^j)\omega^k - L^j \Omega_i^0, \qquad (8\beta) \\
\Delta L^i &= dL^i + L^i(\omega_0^0 - \omega_i^i - \Omega_0^0 + \Omega_i^i) + \\
&\qquad + (L^j l_{ji}^i - L^j L_{ji}^i)\omega^j + (L^i l_{ki}^i - L^k L_{ki}^i)\omega^k, \quad i \neq j \neq k \neq 0,
\end{aligned}$$

причем, в силу (4′),

$$\begin{aligned}
\Delta l_{12}^2 &= -l_{13}^3 l_{32}^2 \omega^3 - \omega_1^0, & \Delta l_{21}^1 &= -l_{23}^3 l_{31}^1 \omega^3 - \omega_2^0, \\
\Delta L_{12}^2 &= -L_{13}^3 L_{32}^2 \omega^3 - L^2 \Omega_1^0, & \Delta L_{21}^1 &= -L_{23}^3 L_{31}^1 \omega^3 - L^1 \Omega_2^0.
\end{aligned} \qquad (8\gamma)$$

Дифференцируя конечные уравнения (7β, γ′) и имея в виду (5β), (8β), получим пфаффовы уравнения:

$$\begin{aligned}
a_0^1 \Delta L_{11}^3 &= A_1 \omega^1 + C_1 \omega^3, & a_0^2 \Delta L_{22}^3 &= B_2 \omega^2 + C_2 \omega^3, \\
b_1^3 \Delta L^1 - b_0^1 \Delta l_{11}^3 &= A_1' \omega^1 + C_1' \omega^3, & b_2^3 \Delta L^2 - b_0^2 \Delta l_{22}^3 &= B_2' \omega^2 + C_2' \omega^3;
\end{aligned} \qquad (9\alpha)$$

$$\begin{aligned}
a_0^0 \Delta L^3 + a_0^1 \Delta L_{13}^3 + a_0^2 \Delta L_{23}^3 &= A_1'' \omega^1 + B_1'' \omega^2 + C_1'' \omega^3, \\
b_3^3 \Delta L^3 - b_0^1 \Delta l_{13}^3 - b_0^2 \Delta l_{23}^3 &= A_2'' \omega^1 + B_2'' \omega^2 + C_2'' \omega^3;
\end{aligned} \qquad (9\beta)$$

$$\begin{aligned}
b_1^2 \Delta l_{11}^3 - b_1^3 \Delta l_{11}^2 - \frac{b_0^2 l_{11}^3}{L^2} \Delta L_{12}^2 &= A_1^* \omega^1 + B_1^* \omega^2 + C_1^* \omega^3, \\
b_2^1 \Delta l_{22}^3 - b_2^3 \Delta l_{22}^1 - \frac{b_0^1 l_{22}^3}{L^1} \Delta L_{21}^1 &= A_2^* \omega^1 + B_2^* \omega^2 + C_2^* \omega^3;
\end{aligned} \qquad (9\gamma)$$

$$\begin{aligned}
a_1^2 \Delta L_{11}^3 - a_1^3 \Delta L_{11}^2 - a_0^2 L_{11}^3 \Delta l_{12}^2 &= \widetilde{A}_1 \omega^1 + \widetilde{B}_1 \omega^2 + \widetilde{C}_1 \omega^3, \\
a_2^1 \Delta L_{22}^3 - a_2^3 \Delta L_{22}^1 - a_0^1 L_{22}^3 \Delta l_{21}^1 &= \widetilde{A}_2 \omega^1 + \widetilde{B}_2 \omega^2 + \widetilde{C}_2 \omega^2,
\end{aligned} \qquad (9\delta)$$

где A_i, B_i, C_i и штрихованные — известные функции переменных a_i^k, b_i^k, l_{ij}^j и т. д.

238. Конечные уравнения системы. Из уравнений (8α) следует, что каждая из форм Δl_{ii}^j, Δl_{ij}^j, ΔL_{ii}^j, ΔL_{ij}^j, ΔL^i линейно зависит только от ω^i, ω^j с теми индексами, которые несет определяемая форма; в том числе и форма ΔL^i зависит только от ω^i.

Умножая уравнения (9α—δ) на подходящие формы ω^i, получим алгебраические следствия

$$\begin{aligned}
a_0^1 [\Delta L_{11}^3 \omega^1 \omega^2] &= C_1 [\omega^3 \omega^1 \omega^3], & a_1^2 [\Delta L_{11}^3 \omega^1 \omega^2] &= \widetilde{C}_1 [\omega^3 \omega^1 \omega^2], \\
-b_0^1 [\Delta l_{11}^3 \omega^1 \omega^2] &= C_1' [\omega^3 \omega^1 \omega^2], & b_1^2 [\Delta l_{11}^3 \omega^1 \omega^2] &= C_1^* [\omega^3 \omega^1 \omega^2]
\end{aligned}$$

и симметричные, откуда

$$a_1^2 C_1 = a_0^1 \widetilde{C}_1, \quad a_2^1 C_2 = a_0^2 \widetilde{C}_2, \quad b_0^1 C_1^* + b_1^2 C_1' = 0, \quad b_0^2 C_2^* + b_2^1 C_2' = 0. \qquad (10\alpha)$$

Аналогично, используя уравнения (8α), получим более сложную комбинацию

$$[\Delta l_{11}^3 \omega^1 \omega^2] + [\Delta l_{13}^3 \omega^3 \omega^2] = 0, \quad b_1^2 [\Delta l_{11}^3 \omega^1 \omega^2] = C_1^* [\omega^3 \omega^1 \omega^2],$$
$$-b_0^1 [\Delta l_{13}^3 \omega^3 \omega^2] = A_2'' [\omega^1 \omega^3 \omega^2],$$

откуда

$$\begin{aligned}
b_0^1 C_1^* + b_1^2 A_2'' &= 0, & b_0^2 C_2^* + b_2^1 A_1'' &= 0, \\
a_0^2 \widetilde{C}_2 - a_2^1 B_1'' &= 0, & a_0^1 \widetilde{C}_1 - a_1^2 A_1'' &= 0
\end{aligned} \qquad (10\beta)$$

и аналогично

$$C_1 = A_1'', \quad C_2 = B_1'', \quad C_1' = A_2'', \quad C_2' = B_2''. \qquad (10\gamma)$$

Если подсчитать коэффициенты A_i, B_i, C_i и штрихованные, то соотношения (10α—γ) сведутся к четырем новым конечным уравнениям на переменные a_i^k, b_i^k, l_{ij}^k, L_{ij}^k:

$$\begin{aligned}
a_0^1 L_{11}^3 \{L_{11}^2 (a_3^1 - a_0^1 l_{31}^1) - l_{13}^3 (a_3^2 - a_0^2 l_{32}^2)\} &= 0, \\
a_0^2 L_{22}^3 \{L_{22}^1 (a_3^2 - a_0^2 l_{32}^2) - l_{23}^3 (a_3^1 - a_0^1 l_{31}^1)\} &= 0,
\end{aligned} \qquad (11)$$

$$b_0^1 l_{11}^3 \left\{ L_{13}^3 \left(b_3^2 - b_0^2 \frac{L_{\cdot 2}^2}{L^2}\right) - l_{11}^2 \frac{L^3}{L^1} \left(b_3^1 - b_0^1 \frac{L_{\cdot 1}^1}{L^1}\right) \right\} = 0,$$

$$b_0^2 l_{22}^3 \left\{ L_{23}^3 \left(b_3^1 - b_0^1 \frac{L_{\cdot 1}^1}{L^1}\right) - l_{22}^1 \frac{L^3}{L^2} \left(b_3^2 - b_0^2 \frac{L_{\cdot 2}^2}{L^2}\right) \right\} = 0.$$

Обращение в нуль одной из переменных a_0^1, a_0^2, b_0^1, b_0^2 приводит к вырождению асимптотического преобразования системы R в преобразование Лапласа относительно сопряженной сети R, ибо в этом случае точка $\boldsymbol{B}$ будет лежать на касательной AA_1 или $\boldsymbol{AA_2}$.

Обращение в нуль одного из параметров L_{11}^3, L_{22}^3, l_{11}^3, l_{22}^3, в силу (7β), приводит к обращению в нуль одной из координат a_1^3, a_2^3, b_1^3, b_2^3 и, следовательно, опять к вырождению асимптотического преобразования.

Таким образом, если не равны нулю определители

$$L_{11}^2 L_{22}^1 - l_{15}^3 l_{23}^3 \neq 0, \quad L_{15}^3 L_{23}^3 L^1 L^2 - l_{11}^2 l_{22}^1 (L^3)^2 \neq 0,$$

то уравнения (11) эквивалентны системе

$$a_3^1 = a_0^1 l_{31}^1, \quad a_3^2 = a_0^2 l_{32}^2, \quad b_3^1 = b_0^1 \frac{L_{31}^1}{L^1}, \quad b_3^2 = b_0^2 \frac{L_{32}^2}{L^2}. \tag{12}$$

Дифференцируя эти уравнения, получим:

$$\begin{gathered} a_0^1 \Delta l_{31}^1 = \hat{A}_1 \omega^1 + \hat{C}_1 \omega^3, \quad a_0^2 \Delta l_{32}^2 = \hat{B}_2 \omega^2 + \hat{C}_2 \omega^3, \\ b_0^1 \Delta L_{31}^1 - b_3^1 \Delta L^1 = \check{A}_1 \omega^1 + \check{C}_1 \omega^3, \quad b_0^2 \Delta L_{32}^2 - b_3^2 \Delta L^2 = \check{B}_2 \omega^2 + \check{C}_2 \omega^3. \end{gathered} \tag{13}$$

239. Преобразование уравнений системы. Таким образом, мы имеем систему из пфаффовых уравнений (2), (6), (9α — γ), (13), 15 квадратичных уравнений (8α) и 14 конечных уравнений (7β, γ′), (12).

Все конечные уравнения были продифференцированы, и новые пфаффовы уравнения присоединены к системе. Пфаффовы уравнения (2α), (6) были продифференцированы внешним образом, и полученные квадратичные уравнения присоединены к системе. Уравнения (9α — γ), (13) были получены дифференцированием конечных уравнений, следовательно, внешние дифференциалы их равны нулю. Таким образом, система замкнута относительно операции внешнего дифференцирования.

Уравнения (2), (6) разрешены относительно форм ω_i^k, Ω_i^k, Ω^i, и эти формы исключены из квадратичных уравнений. Уравнения (9α—δ), (13) разрешим относительно 14 форм: ΔL_{11}^3, Δl_{11}^3, Δl_{22}^3, ΔL_{22}^3, ΔL_{23}^3, Δl_{23}^3, Δl_{11}^2, Δl_{22}^1, ΔL_{11}^2, ΔL_{22}^1, Δl_{31}^1, Δl_{32}^2, ΔL_{31}^1, ΔL_{32}^2 и полученные выражения внесем в квадратичные уравнения (8α). Мы получим только 13 уравнений:

$$\begin{gathered} [\nabla l_{13}^3 \omega^3] = 0, \quad [\nabla L_{13}^3 \omega^3] = 0, \quad [\nabla l_{33}^1 \omega^1] = 0, \quad [\nabla l_{33}^2 \omega^2] = 0, \\ [\nabla L_{33}^1 \omega^3] = 0, \quad [\nabla L_{33}^2 \omega^3] = 0, \\ b_0^2 L^1 [\nabla L_{12}^2 \omega^1] - b_0^1 L^2 [\nabla l_{12}^2 \omega^2] = 0, \quad b_0^1 L^2 [\nabla L_{21}^1 \omega^2] - b_0^2 L^1 [\nabla l_{21}^1 \omega^1] = 0, \\ a_0^1 [\nabla L_{12}^2 \omega^2] - a_0^2 [\nabla l_{12}^2 \omega^1] = 0, \quad a_0^2 [\nabla L_{21}^1 \omega^1] - a_0^1 [\nabla l_{21}^1 \omega^2] = 0, \\ [\Delta L^1 \omega^1] = 0, \quad [\Delta L^2 \omega^2] = 0, \quad [\Delta L^3 \omega^3] = 0, \end{gathered} \tag{14α}$$

где

$$\begin{gathered} \nabla l_{13}^3 = \Delta l_{13}^3 + \frac{C_1'}{b_0^1} \omega^1, \qquad \nabla L_{13}^3 = \Delta L_{13}^3 - \frac{C_1}{a_0^1} \omega^1, \\ \nabla l_{33}^1 = \Delta l_{33}^1 - \frac{\hat{C}_1}{a_0^1} \omega^1, \qquad \nabla l_{33}^2 = \Delta l_{33}^2 - \frac{\hat{C}_2}{a_0^2} \omega^2, \\ \nabla L_{33}^1 = \Delta L_{33}^1 - \frac{\check{C}_1}{b_0^1} \omega^1, \qquad \nabla L_{33}^2 = \Delta L_{33}^2 - \frac{\check{C}_2}{b_0^2} \omega^2, \\ \nabla l_{12}^2 = \Delta l_{12}^2 + \frac{\widetilde{B}_1}{a_0^2 L_{11}^3} \omega^2, \qquad \nabla l_{21}^1 = \Delta l_{21}^1 + \frac{\widetilde{A}_2}{a_0^1 L_{22}^3} \omega^1, \\ \nabla L_{12}^2 = \Delta L_{12}^2 + \frac{L^2 B_1^*}{b_0^2 l_{11}^3} \omega^2, \quad \nabla L_{21}^1 = \Delta L_{21}^1 + \frac{L^1 A_2^*}{b_0^1 l_{22}^3} \omega^1. \end{gathered} \tag{14β}$$

Характеристическая система, кроме форм ω^i $(i = 1, 2, 3)$, независимых на интегральном многообразии, и левых частей пфаффовых уравнений, содержит еще $q = 13$ форм (14β) и ΔL^i $(i = 1, 2, 3)$.

Система ковариантов (14α) правильная. Ранг полярной матрицы равен $s_1 = 13$. Характеры системы $s_1 = 13$, $s_2 = s_3 = 0$, $Q = 13$.

Поскольку произвол наиболее общего интегрального элемента $\mathfrak{E}_3$ равен $N = 13$, система — в инволюции и определяет пары систем R в отношении асимптотического преобразования с произволом $s_1 = 13$ функций от одного аргумента.

240. Преобразования Лапласа трижды сопряженных систем. Комплекс касательных AA_3 к линиям $\omega^1 = \omega^2 = 0$, описываемым точкой A пространства, распадается тремя способами на однопараметрическое семейство конгруэнций: 1) $\omega^1 = 0$, 2) $\omega^2 = 0$ и 3) $\omega^3 = 0$. Фокусы $A + \rho A_3$ луча AA_3 этих конгруэнций удовлетворяют условию

$$(d(A + \rho A_3), A, A_3) = 0$$

или

$$\begin{gathered} \omega^1 (1 + \rho l_{31}^1) + \omega^3 \rho l_{33}^1 = 0, \\ \omega^2 (1 + \rho l_{32}^2) + \omega^3 \rho l_{33}^2 = 0, \end{gathered}$$

откуда получаем три значения координаты ρ:

$$\rho (1 + \rho l_{31}^1)(1 + \rho l_{32}^2) = 0$$

и три точки на луче:

$$A, \quad F_1 = l_{31}^1 A - A_3, \quad F_2 = l_{32}^2 A - A_3, \tag{15}$$

в которых луч AA_3 касается линий $\omega^1 = \omega^2 = 0$, $\omega^2 = \omega^3 = 0$ и $\omega^3 = \omega^1 = 0$. Каждая из этих точек описывает трижды сопряженную систему. Для точки A это будет исходная система R.

Точка F_1 вместе с точкой A служат фокусами луча AA_3 конгруэнции $\omega^2=0$, развертывающимися поверхностями которой служат поверхности $\omega^1=\omega^3=0$ и $\omega^3=\omega^2=0$. Им соответствует сопряженная сеть линий на фокальной поверхности (F_1), описываемой точкой F_1 при $\omega^2=0$.

Луч AA_3 конгруэнции $\omega^3=0$ имеет фокусами точки F_1 и F_2 и развертывающимися поверхностями $\omega^2=\omega^3=0$ и $\omega^1=\omega^3=0$, которые высекают на фокальной поверхности (F_1) сопряженную сеть.

Наконец, сеть линий $\omega^1=\omega^2=0$, $\omega^1=\omega^3=0$, описанных точкой F_1, сопряжена, ибо является фокальной сетью конгруэнции (F_1A_2) с фокальными поверхностями (F_1) и (A_2). Действительно, нетрудно обнаружить справедливость сравнений

$$(dF_1F_1A_2)=0 \quad (\mathrm{mod}\,\omega^1,\ \omega^3), \quad (dA_2A_2F_1)\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\,\omega^1,\ \omega^3). \tag{16α}$$

В самом деле, дифференцируя A_2 и $F_1=l_{31}^1A-A_3$, получим, в силу (8β, γ), (13), (14α, β),

$$\begin{aligned} dF_1 &\equiv \omega_3^3F_1+(l_{31}^1-l_{32}^2)\omega^2A_2 && (\mathrm{mod}\,\omega^1,\omega^3),\\ dA_2 &\equiv \omega_2^2A_2-l_{23}^3\omega^3F_1 && (\mathrm{mod}\,\omega^1,\ \omega^2), \end{aligned} \tag{16β}$$

откуда прямо следует теорема.

Эти рассуждения можно повторить относительно каждой касательной AA_1, AA_2 сопряженных линий системы.

Таким образом, комплекс касательных каждого семейства линий трехсопряженной сети распадается тремя способами на семейство конгруэнций, развертывающиеся поверхности которых соответствуют линиям сети, а фокусы описывают трижды сопряженные системы, три семейства линий которых соответствуют линиям исходной системы.

Трижды сопряженные системы, описываемые фокусами касательных, называются *преобразованиями Лапласа* исходной системы.

241. «Нормальная» конгруэнция в системе R. Будем называть конгруэнцию $\omega^3=0$, описанную лучом AA_3, или конгруэнцию (AA_3) $(\mathrm{mod}\,\omega^3)$ *«нормальной»* конгруэнцией системы. Эта конгруэнция, как мы видели, имеет фокусами точки F_1, F_2 и сопряжена поверхности A $(\mathrm{mod}\,\omega^3)$, ибо луч AA_3 проходит через точку A, а развертывающиеся поверхности конгруэнции соответствуют на поверхности линиям сопряженной системы. Первое сравнение (16β) показывает, что преобразование Лапласа $(F_1\,dF_1)$ $(\mathrm{mod}\ \omega^1,\ \omega^3)$ этой конгруэнции (F_2F_1) проходит через точку A_2, которая сама является преобразованием Лапласа поверхности (A) $(\mathrm{mod}\,\omega^3)$ в направлении линии $\omega^1=\omega^3=0$.

Этим свойством будут обладать все последующие преобразования Лапласа соответственно конгруэнций и комплексов. О порождаемых таким образом последовательностях $\{F_1F_2\}$ и $\{A\}$ говорят: последовательность $\{F_1F_2\}$ описана около последовательности $\{A\}$.

Поскольку выбор вершины A_3 остается произволен, мы можем совместить ее с первым фокусом F_1 луча AA_3. Формула (15) показывает, что при этом l_{31}^1 обратится в нуль. Совмещая вершину B_3 с первым фокусом луча BB_3, мы придем к равенствам

$$l_{31}^1=0, \quad L_{31}^1=0. \tag{17α}$$

Отсюда, в силу формул (12), следует

$$a_3^1=0, \quad b_3^1=0 \tag{17β}$$

и

$$\begin{aligned} A_3 &= a_3^0B+a_3^2B_2+a_3^3B_3,\\ B_3 &= b_3^0A+b_3^2A_2+b_3^3A_3, \end{aligned}$$

т. е. первые фокусы $F_1\equiv A_3$, $\Phi_1\equiv B_3$ конгруэнций (AA_3), (BB_3) $(\mathrm{mod}\,\omega^3)$ лежат в плоскостях BB_2B_3, AA_2A_3.

Между тем мы видели в п. 240, что луч AA_3 касается на поверхности (F_1) $(\mathrm{mod}\,\omega^3)$ линии $\omega^2=\omega^3=0$, а луч F_1A_2 — линии $\omega^1=\omega^3=0$; следовательно, плоскость AA_2A_3 является касательной плоскостью поверхности (F_1) $(\mathrm{mod}\,\omega^3)$, а плоскость BB_2B_3 — касательной плоскостью поверхности (Φ_1) $(\mathrm{mod}\,\omega^3)$, и луч $F_1\Phi_1$ касается обеих поверхностей (F_1), (Φ_1) $(\mathrm{mod}\,\omega^3)$. Также докажем, что прямая $F_2\Phi_2$, соединяющая вторые фокусы F_2, Φ_2 конгруэнций (F_1F_2), $(\Phi_1\Phi_2)$ $(\mathrm{mod}\,\omega^3)$, касается этих фокальных поверхностей.

Следовательно, «нормальные» конгруэнции (AA_3), (BB_3) в этих системах R образуют пару T. Поскольку развертывающиеся поверхности их соответствуют прямо, они образуют (п. 50) сопряженную пару. Таким образом получаем т е о р е м у:

Если две системы R находятся в отношении асимптотического преобразования, то «нормальные» конгруэнции к поверхностям R попарно образуют сопряженные пары.

С л е д с т в и е. *В системе R «нормальная» конгруэнция к поверхностям R является конгруэнцией R.*

Т е о р е м а. *Асимптотические линии на фокальных поверхностях «нормальной» конгруэнции соответствуют асимптотическим поверхности R трижды сопряженной системы.*

Поскольку конгруэнция (F_1F_2) $(\mathrm{mod}\,\omega^3)$ есть конгруэнция R, асимптотические линии на фокальных поверхностях соответствуют. Значит, достаточно доказать соответствие асимптотических на поверхностях (A) и (A_3) $(\mathrm{mod}\,\omega^3)$. Уравнения асимптотических суть

$$(d^2AAA_1A_2)\equiv 0, \quad (d^2A_3A_3AA_2)\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\,\omega^3),$$

или

$$\omega^1\omega_1^3+\omega^2\omega_2^3\equiv 0, \quad \omega_3^0\omega^1+\omega_3^2\omega_2^1\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\,\omega^3),$$

но, в силу (17α), $l_{31}^1 = 0$ и с помощью (8β) и (13) получим:

$$\omega_3^0 = -\Delta l_{31}^1 = -\frac{\hat{A}_1}{a_0^1}\omega^1 - \frac{\hat{C}_1}{a_0^1}\omega^3,$$

и уравнения асимптотических принимают вид в силу (4′)

$$l_{11}^3(\omega^1)^2 + l_{22}^3(\omega^2)^2 = 0, \quad -\frac{\hat{A}_1}{a_0^1}(\omega^1)^2 + l_{32}^2 l_{22}^1(\omega^2)^2 = 0. \tag{18}$$

242. Расслояемая пара комплексов R. Конгруэнции (AA_1), (BB_1) $(\mathrm{mod}\,\omega^3)$, описанные касательными к одному семейству линий R поверхностей (A) и (B) $(\mathrm{mod}\,\omega^3)$, образуют пару T с соответствием развертывающихся поверхностей $\omega^2 = \omega^3 = 0$ и $\omega^1 = \omega^3 = 0$ (п. 236).

Следовательно, они составляют расслояемую сопряженную пару.

Мы хотим показать, что расслояющие поверхности можно соединить в семейства так, что каждое семейство образует сопряженную систему R.

Для этого будет удобно перейти к новому реперу, выбрав вершины

$$C_1 = A_0, \quad C_2 = A_1, \quad C_3 = B_0, \quad C_4 = B_1. \tag{19α}$$

Если инфинитезимальные проективные перемещения тетраэдра $\{C_i\}$ определять уравнениями

$$dC_i = \theta_i^k C_k, \tag{19β}$$

то, дифференцируя уравнения (19α), получим формулы перехода:

$$\omega_0^0 = \theta_1^1 + b_0^0\theta_1^3 + b_1^0\theta_1^4, \quad \omega_1^0 = \theta_2^1 + b_0^0\theta_2^3 + b_1^0\theta_2^4, \tag{19δ}$$

$$\omega^2 = b_0^2\theta_1^3 + b_1^2\theta_1^4, \quad \omega^1 = \theta_1^2 + b_0^1\theta_1^3 + b_1^1\theta_1^4, \quad \omega^3 = b_1^3\theta_1^4, \tag{19ε}$$

$$\omega_1^2 = b_0^2\theta_2^3 + b_1^2\theta_2^4, \quad \omega_1^1 = \theta_2^2 + b_0^1\theta_2^3 + b_1^1\theta_2^4, \quad \omega_1^3 = b_1^3\theta_2^4, \tag{19ζ}$$

и аналогично

$$\Omega_0^0 = a_0^0\theta_3^1 + a_1^0\theta_3^2 + \theta_3^3, \quad \Omega_1^0 = a_0^0\theta_4^1 + a_1^0\theta_4^2 + \theta_4^3, \tag{19δ'}$$

$$\Omega^1 = a_1^1\theta_3^2 + a_0^1\theta_3^1 + \theta_3^4, \quad \Omega^2 = a_0^2\theta_3^1 + a_1^2\theta_3^2, \quad \Omega^3 = a_1^3\theta_3^2, \tag{19ε'}$$

$$\Omega_1^2 = a_0^2\theta_4^1 + a_1^2\theta_4^2, \quad \Omega_1^1 = a_0^1\theta_4^1 + a_1^1\theta_4^2 + \theta_4^4, \quad \Omega_1^3 = a_1^3\theta_4^2. \tag{19ζ'}$$

Если точка

$$M = C_1 + \lambda C_2$$

описывает расслояющую поверхность пары (C_1C_2); (C_3C_4), то

$$(dMMC_3C_4) = 0.$$

Подсчитывая dM с помощью формул (19β), получим уравнение

$$d\lambda + \lambda(\theta_2^2 - \theta_1^1) + \theta_1^2 - \lambda^2\theta_2^1 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\,\theta_1^4)$$

или на всем комплексе

$$d\lambda + \lambda(\theta_2^2 - \theta_1^1) + \theta_1^2 - \lambda^2\theta_2^1 = \nu\theta_1^4, \tag{20}$$

где ν — новая неизвестная функция.

Теперь дифференциал dM примет вид

$$dM = (\theta_1^1 + \lambda\theta_2^1)M + \nu\theta_1^4 C_2 + (\theta_1^3 + \lambda\theta_2^3)C_3 + (\theta_1^4 + \lambda\theta_2^4)C_4. \tag{21α}$$

При $\omega^2 = \omega^3 = 0$, т. е. по модулю θ_1^3, θ_1^4, касательная к линии многообразия (M) должна идти в точку C_4; при $\omega^1 = \omega^3 = 0$, т. е. по модулю θ_1^4, $\theta_1^2 + b_0^1\theta_1^3$, касательная к линии многообразия (M) должна идти во второй фокус луча B_0B_1, т. е. в точку C_3, ибо касательные к линиям, высекаемым развертывающимися поверхностями конгруэнции расслояемой пары на расслояющих поверхностях, проходят через фокусы соответствующего луча второй конгруэнции пары. Наконец, при $\omega^1 = \omega^2 = 0$ формулы (19ε, ζ) дают в силу (2)

$$\left.\begin{aligned} b_1^3\theta_2^4 = \omega_1^3 \equiv l_{13}^3\omega^3, \quad b_0^2\theta_2^3 + b_1^2\theta_2^4 = \omega_1^2 \equiv 0,\\ b_0^2\theta_1^3 + b_1^2\theta_1^4 \equiv 0\end{aligned}\right\}(\mathrm{mod}\,\omega^1,\ \omega^2). \tag{21β}$$

Следовательно,

$$\omega^3 = b_1^3\theta_1^4, \quad \theta_2^4 \equiv l_{13}^3\theta_1^4, \quad \theta_1^3 \equiv -\frac{b_1^2\theta_1^4}{b_0^2}, \quad \theta_2^3 \equiv -\frac{b_1^2 l_{13}^3}{b_0^2}\theta_1^4\ (\mathrm{mod}\,\omega^1,\ \omega^2), \tag{21γ}$$

и в силу (21α), касательная к линии $\omega^1 = \omega^2 = 0$ многообразия (M) пройдет через точку

$$M_3 = \nu C_2 + (1 + \lambda l_{13}^3)\left(C_4 - \frac{b_1^2}{b_0^2}C_3\right). \tag{22α}$$

Мы обозначим также

$$M_1 = C_4, \quad M_2 = C_3, \tag{22β}$$

а инфинитезимальные проективные перемещения тетраэдра $\{M_i\}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ запишем в виде

$$dM_i = \vartheta_i^k M_k. \tag{22γ}$$

243. Расслояющие трижды сопряженные системы $\mathfrak{M}_3$. Мы теперь переходим к доказательству теоремы об организации расслояющих поверхностей семейства конгруэнций R в трижды сопряженные системы R.

Если многообразие, описываемое точкой M, является трижды сопряженной системой, то компоненты ϑ_i^k построенного репера $\{M_i\}$ должны удовлетворять уравнениям, аналогичным формулам (2), т. е. системе уравнений

$$[\vartheta_1^3\omega^1\omega^3] = 0, \quad [\vartheta_2^3\omega^2\omega^3] = 0, \tag{23α}$$

$$[\vartheta_1^2\omega^1\omega^2] = 0, \quad [\vartheta_2^1\omega^1\omega^2] = 0, \tag{23β}$$

$$[\vartheta_3^1\omega^1\omega^3] = 0, \quad [\vartheta_3^2\omega^2\omega^3] = 0. \tag{23γ}$$

Дифференцируя равенства (22β), получим:

$$\vartheta_1^3 = \frac{1}{\nu}(\theta_4^2 - \lambda\theta_4^1), \quad \vartheta_2^3 = \frac{1}{\nu}(\theta_3^2 - \lambda\theta_3^1), \tag{24α}$$

$$\begin{aligned} \vartheta_1^2 &= \theta_4^3 + \frac{(1+\lambda l_{13}^3)\, b_1^2}{b_0^2 \nu}\, b_1^2(\theta_4^2 - \lambda\theta_4^1), \\ \vartheta_2^1 &= \theta_3^4 - \frac{1+\lambda l_{13}^3}{\nu}(\theta_3^2 - \lambda\theta_3^1). \end{aligned} \tag{24β}$$

Между тем, в силу уравнений (2) и (4α, β), имеем:

$$[\omega_1^2\omega^1] = 0, \quad [\omega_1^3\omega^1\omega^3] = 0,$$
$$[\Omega_1^2\omega^1] = 0, \quad [\Omega_1^3\omega^1\omega^3] = 0$$

и по формулам (19ζ′, ε′) получим:

$$[\theta_4^2\omega^1\omega^3] = 0, \quad [\theta_4^1\omega^1\omega^3] = 0, \quad [\theta_3^2\omega^3] = 0, \quad [\theta_3^1\omega^2\omega^3] = 0.$$

Следовательно, подстановка выражений (24α) в уравнения (23α) приведет их к тождеству.

Далее, внося выражения (24β) в уравнения (23β), получим:

$$[\theta_4^3\omega^1\omega^2] + \frac{(1+\lambda l_{13}^3)\, b_1^2}{b_0^2\nu}([\theta_4^2\omega^1\omega^2] - \lambda[\theta_4^1\omega^1\omega^2]) = 0, \tag{a₁}$$

$$[\theta_3^4\omega^1\omega^2] - \frac{1+\lambda l_{13}^3}{\nu}([\theta_3^2\omega^1\omega^2] - \lambda[\theta_3^1\omega^1\omega^2]) = 0. \tag{a₂}$$

Между тем из уравнений (8α) п. 237, очевидно, следует

$$[\Delta L_{12}^2\omega^1\omega^2] = 0.$$

Внося сюда выражение (8γ) п. 237, получим:

$$[\Omega_1^0\omega^1\omega^2] + \frac{L_{13}^3 L_{32}^2}{L^2}[\omega^3\omega^1\omega^2] = 0.$$

С другой стороны, первое и второе уравнения (19ζ′) и второе (19δ′) дают в силу (2)

$$a_1^3[\theta_4^2\omega^1\omega^2] = L_{13}^3[\omega^3\omega^1\omega^2],$$
$$[\theta_4^3\omega^1\omega^2] + a_0^0[\theta_4^1\omega^1\omega^2] + a_1^0[\theta_4^2\omega^1\omega^2] = [\Omega_1^0\omega^1\omega^2],$$
$$a_0^2[\theta_4^1\omega^1\omega^2] + a_1^2[\theta_4^2\omega^1\omega^2] = 0.$$

Эти уравнения вместе с уравнением (a₁) при $[\theta_4^2\omega^1\omega^2] \neq 0$ приведут, в силу (12), к конечному уравнению

$$\nu = \frac{(1+\lambda l_{13}^3)(a_0^2+\lambda a_1^2)\, b_1^2}{b_0^2(a_0^2 a_1^0 - a_0^0 a_1^2) + b_3^2 a_1^3 a_0^2}. \tag{25α}$$

Таким же образом, используя уравнение (a₂), а также уравнения (19ε′), получим при $[\theta_3^2\omega^1\omega^2] \neq 0$

$$\nu = \frac{(1+\lambda l_{13}^3)(a_0^2+\lambda a_1^2)}{a_1^2 a_0^1 - a_0^2 a_1^1}. \tag{25β}$$

Поскольку, в силу (5α), (7α) п. 237,

$$a_1^0 b_0^2 + a_1^1 b_1^2 + a_1^3 b_3^2 + a_1^2 b_2^2 = 0,$$
$$a_0^0 b_0^2 + a_0^1 b_1^2 + a_0^2 b_2^2 = 0,$$

уравнения (25α, β) дают одно и то же значение ν.

Наконец, уравнения (23γ) получаются внешним дифференцированием тождеств

$$[\vartheta^1\omega^1] = [\vartheta^2\omega^2] = [\vartheta^3\omega^3] = 0.$$

Это и доказывает теорему.

244. Три расслояемые пары асимптотического преобразования системы R. Комплекс прямых AA_1 составлен касательными линий $\omega^2 = 0$, $\omega^3 = 0$ многообразия (A), образующего трижды сопряженную систему R. Вместе с тем лучи комплекса являются касательными линий $\omega^1 = 0$, $\omega^3 = 0$ многообразия (A_1), представляющего тоже систему R (п. 237). Также построен второй комплекс BB_1; лучи его касаются линий R двух трижды сопряженных систем (B) и (B_1). К этой паре комплексов присоединено два однопараметрических семейства трехмерных многообразий $\mathfrak{M}_3$ и $\mathfrak{M}_3'$, каждое из которых представляет трижды сопряженную систему R; тройная сопряженная сеть линий на каждом многообразии соответствует тройной сети исходной системы (A), (A_1), (B) или (B_1). При этом в точке пересечения с лучом AA_1 касательная плоскость поверхности R трижды сопряженной системы $\mathfrak{M}_3$ проходит через соответствующий луч BB_1 и, наоборот, в точке пересечения многообразия $\mathfrak{M}_3'$ с лучом BB_1 касательная плоскость поверхности R этого многообразия проходит через луч AA_1.

Такую пару комплексов можно назвать *расслояемой*.

Мы доказали, что, собирая поверхности R, расслояющие сопряженную пару конгруэнций (AA_1), (BB_1) (mod ω^3) так, чтобы уравнение (25α) было удовлетворено, мы получим трижды сопряженную систему. Поскольку поверхности $\omega^3 = 0$ этой системы будут поверхностями R, трижды сопряженная система $\mathfrak{M}_3$ будет системой R. Для многообразий $\mathfrak{M}_3'$ доказательство проводится аналогично.

Каждая пара многообразий $\mathfrak{M}_3$, $\mathfrak{M}_3'$ будет находиться в отношении асимптотического преобразования, ибо каждое многообразие распадается на ∞^1 поверхностей R и соответствующие поверхности системы $\mathfrak{M}_3$ или $\mathfrak{M}_3'$ служат фокальными поверхностями конгруэнций прямых, соединяющих соответствующие точки этих поверхностей.

24 Зак. 1277. С. П. Фиников

Нетрудно заметить, что при доказательстве мы использовали только одно предположение, что многообразие $(\boldsymbol{A})$ образует трижды сопряженную систему R и комплекс $(\boldsymbol{AA}_1)$ образован касательными к линиям R этой системы. Поэтому наши рассуждения прямо прилагаются к паре комплексов $(\boldsymbol{AA}_2)$ и $(\boldsymbol{BB}_2)$, но они применяются и к комплексам $(\boldsymbol{AA}_3)$, $(\boldsymbol{BB}_3)$, ибо, как мы видели, эти комплексы распадаются на ∞^1 конгруэнций R.

Фокальные поверхности этих конгруэнций, в силу теорем общей теории преобразований Лапласа трижды сопряженных систем, образуют тоже трижды сопряженные системы и, конечно, системы R.

Таким образом, с каждой парой систем R, которые находятся в отношении асимптотического преобразования, связаны три расслояемые пары комплексов R. Поверхности (и конгруэнции) R во всех случаях определяются уравнением

$$\omega^3 = 0.$$

ГЛАВА XXIV

ПРОБЛЕМА РАССЛОЕНИЯ ПАРЫ КОМПЛЕКСОВ

245. Расслоение пары комплексов системой расслояющих линий. Определение понятия расслояемой пары комплексов, к которому мы пришли в предыдущей главе, по существу сводится к распадению пары комплексов на однопараметрическое семейство расслояемых пар конгруэнций. Чтобы избежать этого, можно обратиться к расслоению семействами линий, у которых в точках пересечения с лучом одного комплекса соприкасающиеся плоскости проходят через соответствующий луч другого (ср. гл. XX).

Сохраняя обозначения (5), (10α′) пп. 182, 187, допустим, что семейство линий, расслояющих комплекс $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$ пары $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$, $(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4)$, определяется уравнением

$$\omega_1^4 = \mu\omega_1^3, \quad \omega_2^4 = \nu\omega_1^3, \tag{1}$$

и точка $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}_1 + \rho\boldsymbol{A}_2$ является точкой пересечения одной из линий (1) с лучом $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2$. Условие пересечения касательной $(\boldsymbol{P}\,d\boldsymbol{P})$ с лучом $\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4$ записывается уравнением

$$(d\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4) = 0,$$

откуда получаем:

$$d\rho + \omega_1^2 + \rho(\omega_2^2 - \omega_1^1) - \rho^2\omega_2^1 = 0. \tag{2}$$

Это уравнение при одной независимой форме ω_1^3, в силу уравнений (1) всегда имеет решение с одним произвольным постоянным. При этом будем иметь:

$$d\boldsymbol{P} = (\omega_1^1 + \rho\omega_2^1)\boldsymbol{P} + \omega_1^3\{(1+\rho\mu)\boldsymbol{A}_3 + (\mu+\rho\nu)\boldsymbol{A}_4\}.$$

Соприкасающаяся плоскость $(\boldsymbol{P}\,d\boldsymbol{P}\,d^2\boldsymbol{P})$ пройдет через луч $\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4$, если имеет место сравнение

$$(d^2\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{A}_3\,\boldsymbol{A}_4) \equiv 0, \qquad \left(\operatorname{mod}\,(\omega_1^4 - \mu\omega_1^3),\ (\omega_2^4 - \nu\omega_1^3)\right),$$

откуда

$$[(1+\rho\mu)(\rho\omega_3^1 - \omega_3^2) + (\mu+\rho\nu)(\rho\omega_4^1 - \omega_4^2),\ \omega_1^4 - \mu\omega_1^3,\ \omega_2^4 - \nu\omega_1^3] = 0. \tag{3}$$

Допустим, что все семейство кривых (1) при заданных μ и ν удовлетворяет требованию расслоения. Тогда уравнение (3) должно удовлетворяться при всяком значении ρ. Отсюда имеем три уравнения:

$$[\omega_3^2+\mu\omega_4^2,\quad \omega_1^4-\mu\omega_1^3,\quad \omega_2^4-\nu\omega_1^3]=0,$$
$$[\omega_3^1-\mu\omega_3^2+\mu\omega_4^1-\nu\omega_4^2,\quad \omega_1^4-\mu\omega_1^3,\quad \omega_2^4-\nu\omega_1^3]=0,$$
$$[\mu\omega_3^1+\nu\omega_4^1,\quad \omega_1^4-\mu\omega_1^3,\quad \omega_2^4-\nu\omega_1^3]=0.$$

Умножая первое уравнение на μ^2, второе на μ, а третье на -1 и складывая их, получим:

$$(\mu^2-\nu)\,[\mu\omega_4^2+\omega_4^1,\quad \omega_1^4-\mu\omega_1^3,\quad \omega_2^4-\nu\omega_1^3]=0.$$

Обращение в нуль первого множителя эквивалентно требованию, чтобы семейство линий (1) удовлетворяло уравнению

$$\omega_2^3\omega_1^4-\omega_1^3\omega_2^4=0$$

или

$$(dA_1dA_2A_1A_2)=0,$$

а это равенство выражает требование, чтобы касательная плоскость к линейчатой поверхности (1), описываемой лучом A_1A_2, не зависела от положения точки касания на луче. Следовательно, условие $\nu=\mu^2$ приводит к развертывающимся поверхностям комплекса.

Оставляя этот случай в стороне, имеем основную систему уравнений:

$$[\omega_3^2+\mu\omega_4^2,\quad \omega_1^4-\mu\omega_1^3,\quad \omega_2^4-\nu\omega_1^3]=0,$$
$$[\mu\omega_3^1+\nu\omega_4^1,\quad \omega_1^4-\mu\omega_1^3,\quad \omega_2^4-\nu\omega_1^3]=0, \qquad (4)$$
$$[\omega_3^2-\omega_4^1,\quad \omega_1^4-\mu\omega_1^3,\quad \omega_2^4-\nu\omega_1^3]=0.$$

246. Система уравнений расслояемой пары. Допустим теперь, что пара комплексов [12], [34] расслояема в обе стороны, расслояющие линии комплекса [34] определяются уравнениями

$$\omega_1^4=\mu'\omega_1^3,\quad \omega_2^4=\nu'\omega_1^3, \qquad (1')$$

и точка $P'=A_3+\rho'A_4$ является точкой пересечения одной из линий (1′) с лучом A_3A_4. Тогда функция ρ' будет определяться уравнением

$$d\rho'+\omega_3^4+\rho'(\omega_4^4-\omega_3^3)-\rho'^2\omega_4^3=0, \qquad (2')$$

а точка пересечения касательной $(P'dP')$ с лучом A_1A_2

$$Q'=A_1+\sigma A_2$$

будет определяться из условия

$$\omega_3^2+\rho'\omega_4^2-\sigma(\omega_3^1+\rho'\omega_4^1)\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\,(\omega_1^4-\mu'\omega_1^3),\ \ (\omega_2^4-\nu'\omega_1^3)).$$

Наконец, требование, чтобы соприкасающаяся плоскость принадлежала пучку с осью [12], имеет вид

$$\omega_1^4+\sigma\omega_2^4-\rho'(\omega_1^3+\sigma\omega_2^3)=0 \quad (\mathrm{mod}\,(\omega_1^4-\mu'\omega_1^3),\ \ (\omega_2^4-\nu'\omega_1^3)),$$

откуда

$$\sigma=\frac{\rho'-\mu'}{\nu'-\rho'\mu'},$$

а исключая σ, приходим к одному кубичному уравнению

$$[(\nu'-\rho'\mu')(\omega_3^2+\rho'\omega_4^2)-(\rho'-\mu')(\omega_3^1+\rho'\omega_4^1),$$
$$\omega_1^4-\mu'\omega_1^3,\quad \omega_2^4-\nu'\omega_1^3]=0.$$

Это уравнение не должно связывать ρ', чтобы при заданных μ', ν' все семейство кривых (1′) удовлетворяло требованию расслоения. Отсюда опять имеем три уравнения, которые, отбрасывая случай развертывающихся поверхностей, можно привести к виду системы (4), записанной для штрихованных коэффициентов μ' и ν'. Следовательно, всякое семейство линий (1), расслояющее первый комплекс, расслояет и второй.

Если считать функции μ и ν заданными, то для определения комплексов получим систему уравнений (5) п. 182, (10α') п. 187, (4). При этом первый комплекс остается произвольным, а второй будет определяться с тремя функциями двух аргументов.

Потребуем, чтобы уравнения (4) имели место при всяком выборе μ и ν.

Сравнивая с нулями коэффициенты при различных степенях μ и ν, мы получим 12 кубичных уравнений, которые легко приводятся к равносильной системе

$$\omega_4^2=\xi\omega_1^3,\quad \omega_3^1=\xi\omega_2^4,\quad \omega_3^2=\omega_4^1=-\xi\omega_1^4, \qquad (5)$$

где коэффициент ξ — новая неизвестная функция.

Дифференцируя уравнения (5) внешним образом, получим три независимых квадратичных уравнения:

$$[\Delta\xi\omega_1^3]=0,\quad [\Delta\xi\omega_2^4]=0,\quad [\Delta\xi\omega_1^4]=0.$$

Эти квадратичные уравнения имеют следствием

$$\Delta\xi=d\ln\xi+\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4=0. \qquad (6)$$

Наконец, внешний дифференциал уравнения (6) обращается в тождество. Уравнения (5) п. 182, (10α') п. 187 определяют наиболее общий (не особый) комплекс [12] с одной произвольной функцией от трех аргументов. Если произвольное решение этой системы внести в уравнения (5), (6), то система (5), (6) будет вполне интегрируема и определит второй комплекс с пятью произвольными параметрами,

247. Пара комплексов с общими касательными линейными комплексами. Уравнения

$$\omega_2^3 = \omega_1^4, \quad \omega_3^2 = \omega_4^1 \tag{7}$$

имеют простой геометрический смысл: два комплекса [12] и [34] имеют общий касательный линейный комплекс (гл. XVIII).

Действительно, отнесем произвольный комплекс [12] к тетраэдру первого порядка, и пусть линейный комплекс, изображаемый в пространстве P_5 точкой

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{ik}[ik],$$

имеет касание первого порядка с комплексами [12] и [34], т. е. содержит их дифференциальную окрестность 1-го порядка. Это означает, что будут справедливы с точностью до бесконечно малых 1-го порядка включительно уравнения

$$\{\mathfrak{a},\ [12] + d[12] + \ldots\} = 0,$$
$$\{\mathfrak{a},\ [34] + d[34] + \ldots\} = 0.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} d[12] &= (\omega_1^1 + \omega_2^2)[12] + \omega_1^3[32] + \omega_1^4[42] + \omega_2^3[13] + \omega_2^4[14], \\ d[34] &= (\omega_3^3 + \omega_4^4)[34] + \omega_3^1[14] + \omega_3^2[24] + \omega_4^1[31] + \omega_4^2[32], \end{aligned} \tag{8}$$

наши требования сводятся к уравнениям:

$$\{\mathfrak{a}[12]\} = 0, \qquad \{\mathfrak{a}[34]\} = 0,$$
$$\{\mathfrak{a}[23]\} = 0, \qquad \{\mathfrak{a},\ [13] - [24]\} = 0, \qquad \{\mathfrak{a}[14]\} = 0,$$
$$\{\mathfrak{a},\ \omega_3^2[24] - \omega_4^1[13]\} = 0.$$

Первые пять уравнений определяют коэффициенты линейного комплекса

$$a^{34} = a^{12} = a^{14} = a^{23} = 0, \qquad a^{13} - a^{24} = 0;$$

последнее приводит к соотношению (7) на формы

$$\omega_3^2 - \omega_4^1 = 0.$$

Геометрический смысл остальных уравнений (5), (6) вытекает из того вида, который теперь получают разложения (8):

$$d[12] = (\omega_1^1 + \omega_2^2)[12] - \omega_1^3[23] + \omega_1^4([13] - [24]) + \omega_2^4[14],$$
$$d[34] = (\omega_3^3 + \omega_4^4)[34] + \xi\{-\omega_1^3[23] + \omega_1^4([13] - [24]) + \omega_2^4[14]\},$$

откуда для всех перемещений внутри комплекса получаем:

$$d[34] = (\omega_3^3 + \omega_4^4)[34] + \xi\{d[12] - (\omega_1^1 + \omega_2^2)[12]\},$$

или, в силу уравнения (6),

$$d\{[34] - \xi[12]\} = (\omega_3^3 + \omega_4^4)\{[34] - \xi[12]\}. \tag{9}$$

Уравнение (9) есть условие стационарности линейного комплекса

$$\mathfrak{b} = [34] - \xi[12]. \tag{10}$$

Нетрудно заметить, что в нулевой системе этого комплекса каждой точке $A_1 + \rho A_2$ соответствует плоскость, проходящая через луч [34], и каждой точке прямой A_3A_4 — плоскость, проходящая через луч A_1A_2. Таким образом, соответствующие лучи комплексов [12] и [34] полярно сопряжены относительно нулевой системы комплекса (10).

248. Пара T комплексов. Если уравнения (5) не имеют места, то мы можем положить:

$$\begin{aligned} &\omega_3^2 = p^\alpha\omega_\alpha, \quad \omega_4^2 = q^\alpha\omega_\alpha, \quad \omega_4^1 = r^\alpha\omega_\alpha, \quad \omega_3^1 = s^\alpha\omega_\alpha, \\ &\omega_1 = \omega_1^3, \quad \omega_2 = \omega_1^4, \quad \omega_3 = \omega_2^4 \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ 3), \end{aligned} \tag{11}$$

и система (4), определяющая величины μ, ν, т. е. расслояющие кривые (1), по сокращению на $[\omega_1\omega_2\omega_3]$ имеет вид

$$\begin{aligned} p^1 + \mu q^1 + \mu(p^2 + \mu q^2) + \nu(p^3 + \mu q^3) &= 0, \\ \mu s^1 + \nu r^1 + \mu(\mu s^2 + \nu r^2) + \nu(\mu s^3 + \nu r^3) &= 0, \\ p^1 - r^1 + \mu(p^2 - r^2) + \nu(p^3 - r^3) &= 0. \end{aligned} \tag{12α}$$

Если последнее уравнение не исчезает, то должен быть отличным от нуля один из последних двух коэффициентов; полагая $p^3 - r^3 \neq 0$, разрешим последнее уравнение относительно ν:

$$\nu = a_1 + a_2\mu, \quad a_1 = -\frac{p^1 - r^1}{p^3 - r^3}, \quad a_2 = -\frac{p^2 - r^2}{p^3 - r^3}. \tag{12β}$$

По исключении ν первые два уравнения примут вид квадратных уравнений относительно μ

$$\begin{aligned} A_1\mu^2 + A_2\mu + A &= 0, \\ B_1\mu^2 + B_2\mu + a_1A &= 0, \end{aligned} \tag{12γ}$$

где A_i, B_i, A — многочлены относительно p^α, q^α, r^α, s^α.

Следовательно, умножая первое уравнение (12γ) на a_1 и вычитая второе, получим квадратное уравнение с корнями

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = -\frac{a_1A_2 - B_2}{a_1A_1 - B_1}.$$

Если одно или два из этих решений удовлетворяют системе (12γ), то пара комплексов (11) допускает одно или два семейства расслояющих кривых, так что через каждую точку каждого луча первого и второго комплекса пары проходит по одной линии первого и второго семейства.

Если воспользоваться терминологией гл. XX, то можно сказать, что такая пара комплексов расслояется одним или двумя способами на семейства ∞^2 пар расслояемых линейчатых поверхностей.

В особом случае, если

$$p^{\alpha}=r^{\alpha} \quad (\alpha=1,\ 2,\ 3), \tag{13}$$

последнее уравнение (12α) исчезает; два первых уравнения (12α) составят систему двух уравнений 2-й степени относительно неизвестных μ, ν, которая определит четыре решения, соответствующие четырем семействам расслояющих кривых. В силу (11), линейные соотношения (13) эквивалентны пфаффовому уравнению

$$\omega_3^2-\omega_4^1=0, \tag{14α}$$

которое вместе с уравнением

$$\omega_2^3-\omega_1^4=0 \tag{14β}$$

определяют пару T комплексов.

Каждая пара T и только пара T комплексов допускает четыре семейства расслояющих кривых.

249. Расслоение посредством двух семейств ∞^2 поверхностей. Новое определение понятия расслояемой пары комплексов дала Г. Г. Бикматова [1].

С каждой парой комплексов, лучи которых находятся во взаимно однозначном соответствии, естественно связываются два семейства плоских элементов H_4, H_4'.

Надо только каждой точке луча r первого комплекса присоединить плоскость, проходящую через эту точку и соответствующий луч r' второго комплекса, и наоборот. Поскольку каждый луч несет однопараметрическое многообразие точек, а комплекс содержит трехпараметрическое семейство лучей, система плоских элементов H_4 (и H_4') будет четырехпараметрической.

Такую систему естественно считать расслояемой, если существует семейство ∞^2 поверхностей таких, что многообразие плоских элементов, образованных касательными плоскостями этих поверхностей с центрами в точках касания, совпадает с системой H_4 (или H_4').

При этом через каждую точку пространства в рассматриваемой области будет проходить семейство ∞^1 расслояющих поверхностей первого семейства, касательные плоскости которых проходят через лучи r' второго комплекса, соответствующие образующим конуса из лучей первого комплекса с вершиной в рассматриваемой точке, и аналогично для поверхностей второго комплекса.

Через каждую точку на определенном луче r проходит одна расслояющая поверхность, касательная плоскость которой проходит через соответствующий луч r'.

Если точка

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}_1+\rho\boldsymbol{A}_2$$

описывает одну из таких поверхностей, то параметр ρ удовлетворяет уравнению (2):

$$\Delta\rho=d\rho+\omega_1^2+\rho(\omega_2^2-\omega_1^1)-\rho^2\omega_2^1=0. \tag{15α}$$

Поскольку многообразие лучей комплекса трехпараметрическое, для того чтобы точка $\boldsymbol{P}$ описывала поверхность, параметры луча u, v, w должны быть связаны конечным уравнением, а дифференциальные формы ω_1^3, ω_1^4, ω_2^4 — линейным соотношением, например

$$\omega_1^4=x\omega_1^3+y\omega_2^4. \tag{15β}$$

Система (15α, β) должна определять двухпараметрическое многообразие поверхностей; следовательно, она должна быть вполне интегрируема, и ее внешние дифференциалы должны быть алгебраическими следствиями системы. Умножая внешние дифференциалы уравнений (15α, β) внешним образом на левые части (15α, β), получим два внешних уравнения: одно кубичное, а другое четырех измерений относительно форм ω_i^k, $\Delta\rho$, dx и dy. Действительно, в первом уравнении множитель $\Delta\rho$ можно опустить, так как уравнение содержит ρ только явно и $d\rho$ исключается с помощью уравнения (15α); во втором уравнении переменные x, y, вообще говоря, зависят от ρ.

Если пара комплексов дана, то все формы ω_i^k являются линейными комбинациями главных форм ω_1^3, ω_1^4, ω_2^4. Неизвестными функциями от независимых переменных u, v, w и ρ будут коэффициенты x и y. Дифференциалы независимых переменных представлены формами ω_1^3, ω_1^4, ω_2^4 и $\Delta\rho$, дифференциалы неизвестных функций — формами dx, dy. Кубичное уравнение не содержит дифференциалов dx, dy и приводится к конечному соотношению на x, y, ρ и коэффициенты разложения ω_i^k по формам базиса.

Аналогично взяв точку

$$\boldsymbol{P}'=\boldsymbol{A}_3+\rho'\boldsymbol{A}_4,$$

мы придем к уравнению

$$d\rho'+\omega_3^4+\rho'(\omega_4^4-\omega_3^3)-\rho'^2\omega_4^3=0, \tag{15α'}$$

которое надо рассматривать совместно с уравнением

$$\omega_1^4=x'\omega_1^3+y'\omega_2^4. \tag{15β'}$$

Два уравнения (15α′, β′) определяют второе семейство ∞^2 расслояющих поверхностей, если они образуют вполне интегрируемую систему.

250. Пара комплексов, обладающих укороченной системой W. Два семейства поверхностей $(\boldsymbol{P})$ и $(\boldsymbol{P}')$ не дают возможности без дополнительных ограничений получить семейство конгруэнций W.

Пара расслояющих поверхностей (P) и (P'), проходящих через любые две точки P и P' соответствующих лучей [12] и [34] такие, что касательная плоскость поверхности (P) в точке P проходит через [34], а касательная плоскость поверхности (P') в точке P' проходит через [12] (п. 251), имеют общую касательную PP'. Однако другому лучу r_1 из конгруэнции (15β), присоединенной к поверхности (P), может соответствовать во втором комплексе луч r'_1, не принадлежащий конгруэнции (15β′), присоединенной к поверхности (P'), а потому расслояющей поверхностью, проходящей через точку пересечения P'_1 луча r'_1 с поверхностью (P'), касательная плоскость которой содержит луч r, не будет поверхность (P'). Тогда касательная плоскость к поверхности (P') в точке P'_1 не будет проходить через r_1, и линия пересечения касательных плоскостей поверхностей (P) и (P') в точках пересечения их с соответствующими лучами r_1 и r'_1 не будет общей касательной.

Потребуем, чтобы каждая поверхность (P) по крайней мере с одной поверхностью (P') порождала конгруэнцию W, фокальными поверхностями которой они являлись бы. При этом будем считать расслоение пары комплексов тривиальным, если эта пара распадается на ∞^1 расслояемых пар конгруэнций, откуда следует, что уравнение (15β) должно существенно зависеть от ρ (посредством своих коэффициентов x, y), ибо в противном случае оно будет вполне интегрируемо само по себе, и пара комплексов разобьется на семейство ∞^1 расслояемых пар конгруэнций.

Обратимся теперь к построению системы уравнений расслояемой пары комплексов в новом определении.

Рассмотрим одну из расслояющих поверхностей (P), определяемую частным решением системы (15α, β). Ей, по условию, соответствует поверхность (P'), т. е. частное решение системы (15α′, β′). Отсюда вытекает, что каждому решению ρ первой системы соответствует по крайней мере одно решение ρ' второй системы, и для этих решений уравнения (15β, β′) совпадают, т. е.

$$x' = x, \quad y' = y. \tag{16}$$

Этого достаточно, чтобы выбранные поверхности (P), (P') определяли конгруэнцию, для которой они служат фокальными поверхностями.

Потребуем, чтобы эта конгруэнция была конгруэнцией W.

Уравнение асимптотических линий поверхности (P) будет

$$(d^2\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{A}_3\,\boldsymbol{A}_4) = 0, \tag{17α}$$

но

$$d\boldsymbol{P} = (\omega_1^1 + \rho\omega_2^1)\,\boldsymbol{P} + (\omega_1^3 + \rho\omega_2^3)\,\boldsymbol{A}_3 + (\omega_1^4 + \rho\omega_2^4)\,\boldsymbol{A}_4,$$

и уравнение (17α) примет вид

$$(\omega_1^3 + \rho\omega_1^4)(\rho\omega_3^1 - \omega_3^2) + (\omega_1^4 + \rho\omega_2^4)(\rho\omega_4^1 - \omega_4^2) = 0. \tag{17β}$$

Аналогично для соответствующей поверхности (P') уравнение асимптотических примет вид

$$(\omega_3^1 + \rho'\omega_4^1)(\rho'\omega_1^3 - \omega_1^4) + (\omega_3^2 + \rho'\omega_4^2)(\rho'\omega_1^4 - \omega_2^4) = 0. \tag{17β′}$$

Нам надо потребовать, чтобы уравнения (17β, β′) были равносильны. Нетрудно указать простое решение этой задачи. Если положить

$$\rho' = -\frac{1}{\rho}, \tag{18α}$$

то уравнение (17β′) примет вид

$$(\omega_1^3 + \rho\omega_1^4)(\rho\omega_3^1 - \omega_4^1) + (\omega_1^4 + \rho\omega_2^4)(\rho\omega_3^2 - \omega_4^2) = 0$$

и будет совпадать с уравнением (17β) при

$$\omega_3^2 = \omega_4^1, \tag{18β}$$

т. е. когда два комплекса [12] и [34] образуют пару T.

Мы ограничимся рассмотрением этого случая — единственного, допускающего не вырожденное решение, и примем, что соответствие точек P и P' на каждой паре соответствующих лучей определяется формулой (18α), отсылая за подробностями к оригинальной работе Г. Г. Бикматовой.

Внося выражение $\rho' = -\frac{1}{\rho}$ в уравнение (15α′) и исключая $d\rho$ с помощью уравнения (15α), получим:

$$\rho^2(\omega_3^4 + \omega_2^1) + \rho(\omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_4^4) - (\omega_4^3 + \omega_1^2) = 0. \tag{19}$$

Это уравнение, очевидно, эквивалентно уравнению (15β) и вместе с уравнениями (15α) и (18α) определяет двупараметрическое многообразие конгруэнций W, фокальные поверхности которых расслояют системы плоских элементов H_4, H'_4.

251. Система уравнений расслоения. Отнесем пару комплексов к реперу 2-го порядка (п. 190), определяемому условием

$$\omega_4^1 = -\omega_1^4. \tag{20}$$

Дифференцируя внешним образом уравнение (19), исключая $d\rho$ с помощью (15α) и умножая полученное квадратичное уравнение на левую часть уравнения (19), мы обнаружим, что все коэффициенты при степенях ρ сократятся и уравнение обратится в тождество.

Дифференцируя внешним образом уравнение (15α) и исключая $d\rho$ с помощью этого же уравнения, получим:

$$\rho^2 [\omega_1^4, \ \omega_2^4 + \omega_3^1] - \rho \{ [\omega_2^4 \omega_4^2] + [\omega_3^1 \omega_1^3] \} - [\omega_1^4, \ \omega_4^2 + \omega_1^3] = 0.$$

Это уравнение должно быть алгебраическим следствием уравнения (19). Следовательно, внешнее произведение их должно быть тождественным относительно ρ. Собирая коэффициенты при степенях ρ и сравнивая их с нулем, получим основиую систему уравнений, определяющую расслояемую пару комплексов:

$$\begin{gathered}
[\varphi, \ \omega_1^4, \ \omega_2^4 + \omega_3^1] = 0, \\
[\chi, \ \omega_1^4, \ \omega_2^4 + \omega_3^1] - \big[\varphi, \ [\omega_2^4 \omega_4^2] + [\omega_3^1 \omega_1^3]\big] = 0, \\
[\psi, \ \omega_1^4, \ \omega_2^4 + \omega_3^1] + \big[\chi, \ [\omega_2^4 \omega_4^2] + [\omega_3^1 \omega_1^3]\big] + [\varphi, \ \omega_1^4, \ \omega_4^2 + \omega_1^3] = 0, \\
[\chi, \ \omega_1^4, \ \omega_4^2 + \omega_1^3] - \big[\psi, \ [\omega_2^4 \omega_4^2] + [\omega_3^1 \omega_1^3]\big] = 0, \\
[\psi, \ \omega_1^4, \ \omega_4^2 + \omega_1^3] = 0,
\end{gathered} \tag{21α}$$

где

$$\begin{gathered}
\varphi = \omega_3^4 + \omega_2^1, \quad \psi = \omega_4^3 + \omega_1^2, \quad \varphi_1 = \omega_3^4 - \omega_2^1, \quad \psi_1 = \omega_4^3 - \omega_1^2, \\
\chi = \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_4^4, \quad \chi_1 = \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4.
\end{gathered} \tag{21β}$$

К этим уравнениям надо добавить линейные уравнения, которые вытекают из определения пары T, а также следуют из канонизации репера (14α, β), (18β)

$$\omega_2^3 - \omega_1^4 = 0, \quad \omega_3^2 - \omega_4^1 = 0, \quad \omega_4^1 + \omega_1^4 = 0 \tag{22α}$$

и их внешние дифференциалы

$$\begin{gathered}
[\chi \omega_1^4] - [\varphi \omega_1^3] + [\psi \omega_2^4] = 0, \\
-[\chi \omega_1^4] + [\varphi \omega_4^2] - [\psi \omega_3^1] = 0, \\
2[\chi_1 \omega_1^4] + [\varphi_1, \ \omega_4^2 - \omega_1^3] + [\psi_1, \ \omega_3^1 - \omega_2^4] = 0.
\end{gathered} \tag{22β}$$

Система (21α) теперь принимает вид

$$\begin{gathered}
[\varphi, \ \omega_1^4, \ \omega_2^4 + \omega_3^1] = 0, \quad \big[\varphi, \ [\omega_2^4 \omega_4^2] + [\omega_3^1 \omega_1^3]\big] = 0, \\
[\psi, \ \omega_1^4, \ \omega_4^2 + \omega_1^3] = 0, \quad \big[\psi, \ [\omega_2^4 \omega_4^2] + [\omega_3^1 \omega_1^3]\big] = 0 \\
\big[\chi, \ [\omega_2^4 \omega_4^2] + [\omega_3^1 \omega_1^3]\big] + 2[\varphi, \ \omega_1^4, \ \omega_4^2 + \omega_1^3] = 0.
\end{gathered} \tag{21α'}$$

252. Расслояемая пара комплексов I. Система (21α'), (22α, β) — не в инволюции. Внося в уравнения (21α'), (22β) разложения форм характеристической системы по формам базиса $\omega_1 = \omega_1^3$, $\omega_2 = \omega_1^4$, $\omega_3 = \omega_2^4$, мы получим ряд конечных соотношений, которые приводят по отбрасывании тривиальных случаев распадения пары комплексов на расслояемые пары конгруэнций к трем основным типам расслояемых пар комплексов.

Расслояемые пары I типа определяются после продолжения системы уравнениями:

$$\begin{gathered}
\omega_2^3 = \omega_2, \quad \omega_3^2 = -\omega_2, \quad \omega_4^1 = -\omega_2, \\
\alpha\psi - \beta\varphi + 2\chi = 0, \qquad \chi_1 = k\omega_2, \\
\omega_3^1 = \alpha\omega_2 - \omega_3, \qquad \omega_4^2 = \beta\omega_2 - \omega_1, \\
d\alpha + \alpha(\omega_1^1 - \omega_3^3) - 2\varphi_1 - \frac{1}{4}\alpha(\alpha\psi_1 - \beta\varphi_1) = k(\alpha\omega_2 - \omega_3), \\
d\beta + \beta(\omega_2^2 - \omega_4^4) + 2\psi_1 - \frac{1}{4}\beta(\alpha\psi_1 - \beta\varphi_1) = k(\beta\omega_2 - \omega_1), \\
dk + k(\omega_1^1 - \omega_4^4) + \frac{1}{2}k(\alpha\omega_1^2 - \beta\omega_3^4) - 2(\alpha\omega_1 + \beta\omega_3) + \\
+ \frac{4\alpha\beta - k^2}{2}\omega_2 = 0;
\end{gathered} \tag{23α}$$

$$\begin{gathered}
[\varphi, \ \beta\omega_2 - 2\omega_1] - [\psi, \ \alpha\omega_2 - 2\omega_3] = 0, \\
[\varphi_1, \ \beta\omega_2 - 2\omega_1] - [\psi_1, \ \alpha\omega_2 - 2\omega_3] = 0.
\end{gathered} \tag{23β}$$

Система в инволюции с характерами $s_1 = 2$, $s_2 = 2$, $s_3 = 0$ и определяет расслояемые пары комплексов I с произволом двух функций двух аргументов.

Характеристическая система содержит независимые формы ω_i только в двух комбинациях: $\beta\omega_2 - 2\omega_1$, $\alpha\omega_2 - 2\omega_3$. Следовательно, интегральное многообразие обладает характеристиками

$$\beta\omega_2 = 2\omega_1, \quad \alpha\omega_2 = 2\omega_3. \tag{24α}$$

Характеристическое многообразие состоит из ∞^2 расслояемых пар линейчатых поверхностей, на которые распадается пара комплексов. Эти линейчатые поверхности пересекают расслояющие поверхности по одному семейству асимптотических линий, определяемых на расслояющих поверхностях уравнением

$$\alpha\omega_1 - \beta\omega_3 = 0. \tag{24β}$$

253. Расслояемая пара комплексов II. Она определяется системой:

$$\begin{aligned}
&\omega_2^3=\omega_2,\quad \omega_3^2=-\omega_2,\quad \omega_4^1=-\omega_2,\quad \psi+s_1\varphi=0,\\
&\varphi=-a\{ta(\omega_1+s_1\omega_3)+\omega_2\},\quad \chi=a(\omega_1+s_1\omega_3)-a'\omega_2,\\
&\omega_3^1=\alpha_1(\omega_1+s_1\omega_3)+\alpha_2\omega_2-\omega_3,\quad \omega_4^2+s_1\omega_3^1=\omega_1+s_1\omega_3,\\
&\chi_1=s_2(\omega_3^1-\omega_3),\quad \omega_1^2+s_1\omega_3^4=-s_2\omega_2,\\
&ds_1-s_1\chi=s_2(\omega_1+s_1\omega_3),\\
&ds_2+s_2(\omega_2^2-\omega_4^4)+2(s_1\omega_3^1-\omega_1)+s_2^2\omega_3=0.
\end{aligned}\tag{25α}$$

$$\begin{aligned}
&[\Delta t,\ \omega_1+s_1\omega_3]+[\Delta a\omega_2]=0,\\
&[\Delta a,\ \omega_1+s_1\omega_3]-[\Delta a'\omega_2]=0,\\
&[\Delta\alpha_1,\ \omega_1+s_1\omega_3]+[\Delta\alpha_2\omega_2]=0,
\end{aligned}\tag{25β}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta t={}&a^2\{dt+t(\omega_3^3-\omega_2^2)+(2t^2as_1-1)\omega_2-4t^2a(\omega_1^2-s_1\omega_3^4)\}+\\
&+2ta\,\Delta a-2a(1-ta')\omega_3^4-ta^2s_2\omega_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta a=da+a(\omega_1^1-\omega_3^3)-a'\omega_3^4+2ta^2(\omega_1^2-s_1\omega_3^4)+as_2\omega_3,\\
&\Delta a'=da'+a'(\omega_1^1-\omega_4^4)-a\psi_1-as_1\varphi_1+2a(\omega_1^2-s_1\omega_3^4)+a's_2\omega_3,\\
&\Delta\alpha_1=d\alpha_1+2\alpha_1(\omega_1^1-\omega_3^3)-\alpha_2\omega_3^4+2\alpha_1s_2\omega_3,\\
&\Delta\alpha_2=d\alpha_2+\alpha_2(2\omega_1^1-\omega_3^3-\omega_4^4)-\alpha_1\psi_1+(2-\alpha_1s_1)\varphi_1+2\alpha_2s_2\omega_3.
\end{aligned}\tag{25γ}$$

Система (25α, β) — в инволюции с характерами $s_1=3$, $s_2=2$, $s_3=0$ и определяет расслояемые пары II с произволом двух функций от двух аргументов. Она допускает характеристические многообразия

$$\omega_2=0,\quad \omega_1+s_1\omega_3=0. \tag{26α}$$

Они образованы двупараметрическим семейством расслояемых пар линейчатых поверхностей. Эти поверхности пересекают расслояющие поверхности по асимптотическим линиям одного семейства, которые на расслояющей поверхности определяются уравнением

$$\omega_1+s_1\omega_3=0 \tag{26β}$$

и сами служат расслояющими линиями на паре линейчатых поверхностей (26α).

254. Расслояемая пара комплексов III. Она определяется системой

$$\begin{aligned}
&\omega_2^3=\omega_2,\quad \omega_3^2=-\omega_2,\quad \omega_4^1=-\omega_2,\quad \chi=la_2\omega_2,\\
&\varphi=a_1\omega_1+a_3\omega_3,\quad \psi=a_3\omega_1+a_4\omega_3,\\
&\omega_3^1+a_2\varphi+\omega_3=0,\quad \omega_4^2-a_2\psi+\omega_1=0,\\
&(a_3)^2-a_1a_4+la_2a_3=l=\text{const},
\end{aligned}\tag{27α}$$

$$\begin{aligned}
&[\Delta a_1\omega_1]+[\Omega_2\omega_2]+[\Delta a_3\omega_3]=0,\\
&[\Omega_2\omega_1]+l[\Delta a_2\omega_2]+[\Omega_1\omega_3]=0,\\
&[\Delta a_3\omega_1]+[\Omega_1\omega_2]+[\Delta a_4\omega_3]=0,\\
&[a_4\Delta a_1-a_1\Delta a_4,\ \ \omega_1]-[a_4(l\Delta a_2-2\Delta a_3)+(la_2+2a_3)\Delta a_4,\ \ \omega_2]=0,\\
&[a_1(l\Delta a_2-2\Delta a_3)+(la_2+2a_3)\Delta a_1,\ \ \omega_1]+[a_4\Delta a_1-a_1\Delta a_4,\ \ \omega_2]=0,\\
&a_1[\Omega_1\omega_1]-[(la_2+2a_3)\Delta a_3-a_4\Delta a_1-a_1\Delta a_4,\ \omega_2]+a_4[\Omega_2\omega_3]=0,
\end{aligned}\tag{27β}$$

где

$$\begin{aligned}
&\Omega_1=(la_2+2a_3)\omega_1^2-2a_4\omega_3^4,\qquad \Omega_2=2a_1\omega_1^2-(la_2+2a_3)\omega_3^4,\\
&\Delta a_1=da_1+a_1(2\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3)+2a_1a_3\omega_2,\\
&\Delta a_2=da_2+a_2(\omega_1^1-\omega_4^4)-\{2+l(a_2)^2\}\omega_2,\\
&\Delta a_3=da_3+a_3(\omega_1^1-\omega_4^4)+\{(a_3)^2+a_1a_4\}\omega_2,\\
&\Delta a_4=da_4+a_4(\omega_2^2+\omega_3^3-2\omega_4^4)+2a_3a_4\omega_2.
\end{aligned}$$

Система — в инволюции с характерами $s_1=6$, $s_2=0$, $s_3=0$ и определяет расслояемые пары III с произволом шести функций от одного аргумента.

Расслояемая пара комплексов III не разлагается на расслояемые пары линейчатых поверхностей.

ГЛАВА XXV

ПРОБЛЕМА РАССЛОЕНИЯ В P_n

255. Расслояемая пара комплексов плоскостей в P_5 *). Будем называть *плоскостью* в пятимерном проективном пространстве P_5 двумерное линейное подпространство P_2, *комплексом плоскостей* — трехпараметрическое семейство их.

Рассмотрим два комплекса плоскостей (P_2), (P'_2), между элементами которых установлено взаимно однозначное соответствие. Будем предполагать, что соответствующие плоскости P_2, P'_2 не имеют общих точек.

Будем говорить, что пара комплексов (P_2), (P'_2) *расслояема* (двусторонне), если существует два семейства ∞^2 трехмерных многообразий (3-поверхности) $(\mathfrak{M}_3)$, $(\mathfrak{M}'_3)$, которые имеют с каждой плоскостью, соответственно, P_2, P'_2 по крайней мере одну общую точку, и в этой точке касательная трехмерная плоскость P_3 поверхности $\mathfrak{M}_3$ проходит через соответствующую плоскость P'_2, а касательная P'_3 поверхности $\mathfrak{M}'_3$ содержит плоскость P_2.

Проективный репер в пространстве P_5 состоит из шести аналитических точек в общем положении. Поскольку плоскости P_2, P'_2 не имеют общих точек, можно выбрать по три вершины сексаэдра $\{A_i\}$ $(i=1, \ldots, 6)$ в каждой плоскости так, что плоскости можно обозначить $P_2=(A_1A_2A_3)=[123]$, $P'_2=(A_4A_5A_6)=[456]$. Инфинитезимальные проективные смещения репера будем определять уравнениями

$$dA_\alpha=\omega_\alpha^\beta A_\beta \qquad (\alpha,\ \beta=1, \ldots, 6), \tag{1}$$

где формы ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры

$$D\omega_\alpha^\beta=[\omega_\alpha^\gamma\omega_\gamma^\beta] \qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma=1, \ldots, 6). \tag{2}$$

Поскольку плоскость [123] (и также [456]) описывает комплекс плоскостей, т. е. зависит от трех параметров, существует три главные формы, независимые на комплексе. Ввиду произвола выбора вершин репера можно считать независимыми $[\omega_1^4\omega_2^5\omega_3^6]\neq 0$.

*) Коровин В. И. [2].

256. Фокальные свойства комплекса плоскостей. Будем называть точку F

$$F=xA_1+yA_2+zA_3$$

фокусом плоскости [123], если при некотором смещении, которое будем называть *фокальным*

$$\omega_2^5=p\omega_1^4, \quad \omega_3^6=q\omega_1^4, \tag{3α}$$

дифференциал dF лежит в плоскости [123]. Поскольку тогда компоненты dF по вершинам A_4, A_5, A_6 равны нулю, фокусы и фокальные направления удовлетворяют системе:

$$\begin{aligned} x\omega_1^4+y\omega_2^4+z\omega_3^4&=0,\\ x\omega_1^5+y\omega_2^5+z\omega_3^5&=0,\\ x\omega_1^6+y\omega_2^6+z\omega_3^6&=0. \end{aligned} \tag{3β}$$

Поскольку все главные формы ω_i^ν $(i=1, 2, 3;\ \nu=4, 5, 6)$ линейно зависят от форм ω_1^4, ω_2^5, ω_3^6, каждое из уравнений (3β) является линейным уравнением относительно ω_1^4, ω_2^5, ω_3^6. Чтобы система (3β) допускала не нулевые решения, определитель из коэффициентов при ω_1^4, ω_2^5, ω_3^6 должен равняться нулю. Этот определитель — 3-го порядка, а каждый элемент его — линейная форма от x, y, z. Весь определитель — кубичная форма относительно x, y, z, и обращение его в нуль приводит к уравнению кривой 3-го порядка на плоскости $A_1A_2A_3$, которая является геометрическим местом фокусов плоскости [123] (фокальной кривой). Выберем вершины A_1, A_2, A_3 на фокальной кривой и допустим, что фокальные направления определяются уравнениями

$$(A_1)\quad \omega_1^4=\omega_2^5=0, \quad (A_2)\quad \omega_2^5=\omega_3^6=0, \quad (A_3)\quad \omega_3^6=\omega_1^4=0.$$

Первая точка определяется координатами $x=1$, $y=z=0$. Внося эти значения в уравнения (3β) и имея в виду, что фокальное направление есть $\omega_1^4=\omega_2^5=0$, получим, что все три коэффициента при x, т. е. формы ω_1^4, ω_1^5, ω_1^6, линейно зависят от ω_1^4, ω_2^5; следовательно,

$$\omega_1^5=a_2\omega_2^5+a'_2\omega_1^4, \quad \omega_1^6=b_2\omega_2^5+b'_2\omega_1^4.$$

Аналогично для двух других вершин получим:

$$\omega_2^4=b_3\omega_3^6+b'_3\omega_2^5, \quad \omega_2^6=a_3\omega_3^6+a'_3\omega_2^5,$$
$$\omega_3^4=a_1\omega_1^4+a'_1\omega_3^6, \quad \omega_3^5=b_1\omega_1^4+b'_1\omega_3^6.$$

Теперь касательные к кривым, которые описывает точка A_1 при $\omega_3^6=0$, лежат в плоскости, которая пересекает противоположную плоскость $A_4A_5A_6$ по прямой S_1S_2:

$$S_1 = A_4 + a_2'A_5 + b_2'A_6, \quad S_2 = a_2A_5 + b_2A_6;$$

аналогично касательные плоскости для точки A_2 при $\omega_1^4 = 0$ и точки A_3 при $\omega_2^5 = 0$ пересекут плоскость $A_4A_5A_6$ по прямым Q_1Q_2 и R_1R_2:

$$Q_1 = b_3'A_4 + A_5 + a_3'A_6, \quad Q_2 = b_3A_4 + a_3A_6,$$

$$R_1 = a_1'A_4 + b_1'A_5 + A_6, \quad R_2 = a_1A_4 + b_1A_5.$$

Совместим теперь вершины A_4, A_5, A_6 с точками P_1, Q_1, R_1. Тогда все штрихованные a_i', b_i' обратятся в нуль, и мы получим компоненты канонизированного сексаэдра в виде

$$\begin{aligned} &\omega_3^4 = a_1\omega_1^4, \quad \omega_1^5 = a_2\omega_2^5, \quad \omega_2^6 = a_3\omega_3^6, \\ &\omega_3^5 = b_1\omega_1^4, \quad \omega_1^6 = b_2\omega_2^5, \quad \omega_2^4 = b_3\omega_3^6. \end{aligned} \tag{4}$$

257. Уравнения расслояемой пары. Если точка

$$M = A_1 + \lambda A_2 + \mu A_3$$

описывает поверхность $\mathfrak{M}_3$, касательная 3-плоскость которой проходит через плоскость P_2', следовательно, определяется точками M, A_4, A_5, A_6, то дифференциал dM для всех перемещений внутри $\mathfrak{M}_3$ удовлетворяет уравнению

$$(dMMA_4A_5A_6) = 0.$$

Выполняя дифференцирование и собирая члены при [12456], [13456], получим два пфаффовых уравнения для определения λ и μ:

$$\begin{aligned} &d\lambda + \lambda(\omega_2^2 - \omega_1^1) + \omega_1^2 + \mu\omega_3^2 - \lambda^2\omega_2^1 - \lambda\mu\omega_3^1 = 0, \\ &d\mu + \mu(\omega_3^3 - \omega_1^1) + \omega_1^3 + \lambda\omega_2^3 - \lambda\mu\omega_2^1 - \mu^2\omega_3^1 = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Поскольку поверхности $\mathfrak{M}_3$ образуют двухпараметрическое семейство, система (5) должна быть вполне интегрируема; следовательно, внешний дифференциал каждого уравнения должен обращаться в тождество в силу уравнений системы. Дифференцируя внешним образом и исключая $d\lambda$, $d\mu$ с помощью (5), получим:

$$[\omega_1^\nu\omega_\nu^2] + \lambda\{[\omega_2^\nu\omega_\nu^2] - [\omega_1^\nu\omega_\nu^1]\} + \mu[\omega_3^\nu\omega_\nu^2] - \lambda^2[\omega_2^\nu\omega_\nu^1] - \lambda\mu[\omega_3^\nu\omega_\nu^1] = 0,$$

$$[\omega_1^\nu\omega_\nu^3] + \lambda[\omega_2^\nu\omega_\nu^3] + \mu\{[\omega_3^\nu\omega_\nu^3] - [\omega_1^\nu\omega_\nu^1]\} - \mu^2[\omega_3^\nu\omega_\nu^1] - \lambda\mu[\omega_2^\nu\omega_\nu^1] = 0.$$

$$(\nu = 4, 5, 6)$$

Эти уравнения должны удовлетворяться тождественно относительно λ, μ. Следовательно, коэффициенты при степенях λ, μ равны нулю:

$$\begin{aligned} &[\omega_1^\nu\omega_\nu^2] = 0, \quad [\omega_1^\nu\omega_\nu^3] = 0, \quad [\omega_2^\nu\omega_\nu^3] = 0, \\ &[\omega_2^\nu\omega_\nu^1] = 0, \quad [\omega_3^\nu\omega_\nu^1] = 0, \quad [\omega_3^\nu\omega_\nu^2] = 0, \qquad (\nu = 4, 5, 6). \\ &[\omega_1^\nu\omega_\nu^1] = [\omega_2^\nu\omega_\nu^2] = [\omega_3^\nu\omega_\nu^3] \end{aligned} \tag{6α}$$

Аналогично, если

$$M' = A_4 + \lambda'A_5 + \mu'A_6$$

описывает поверхность, расслояющую $\mathfrak{M}_3'$, то λ', μ' удовлетворяют вполне интегрируемой системе уравнений, получаемых из уравнений (5) подстановкой $\begin{pmatrix} \lambda & \mu & 1 & 2 & 3 \\ \lambda' & \mu' & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Условия интегрируемости запишутся в виде системы квадратичных уравнений:

$$\begin{aligned} &[\omega_4^i\omega_i^5] = 0, \quad [\omega_4^i\omega_i^6] = 0, \quad [\omega_5^i\omega_i^6] = 0, \\ &[\omega_5^i\omega_i^4] = 0, \quad [\omega_6^i\omega_i^4] = 0, \quad [\omega_6^i\omega_i^5] = 0, \qquad (i = 1, 2, 3). \\ &[\omega_4^i\omega_i^4] = [\omega_5^i\omega_i^5] = [\omega_6^i\omega_i^6] \end{aligned} \tag{6β}$$

Система квадратичных уравнений (6α, β) определяет расслояемую пару комплексов двумерных плоскостей в P_5.

258. Случай вырожденной пары. Система (6α, β) содержит 18 характеристических форм

$$\omega_i^\nu, \ \omega_\nu^i \qquad (i = 1, 2, 3; \ \nu = 4, 5, 6).$$

Внося значения форм (4), приведем уравнения (6α, β) к виду

$$[\omega_4^i\omega^1] + [a_2\omega_5^i + b_2\omega_6^i, \ \omega^2] = 0 \qquad (i = 2, 3), \tag{7α}$$

$$[\omega_5^i\omega^2] + [a_3\omega_6^i + b_3\omega_4^i, \ \omega^3] = 0 \qquad (i = 3, 1), \tag{7β}$$

$$[\omega_6^i\omega^3] + [a_1\omega_4^i + b_1\omega_5^i, \ \omega^1] = 0 \qquad (i = 1, 2), \tag{7γ}$$

$$[\omega_\nu^1 + a_1\omega_\nu^3, \ \omega^1] + b_3[\omega_\nu^2\omega^3] = 0 \qquad (\nu = 5, 6), \tag{7δ}$$

$$[\omega_\nu^2 + a_2\omega_\nu^1, \ \omega^2] + b_1[\omega_\nu^3\omega^1] = 0 \qquad (\nu = 6, 4), \tag{7ε}$$

$$[\omega_\nu^3 + a_3\omega_\nu^2, \ \omega^3] + b_2[\omega_\nu^1\omega^2] = 0 \qquad (\nu = 4, 5), \tag{7ι}$$

$$[\omega_4^1 + a_1\omega_1^3, \ \omega^1] - b_2[\omega_6^1\omega^2] - [\omega_6^3 + a_3\omega_6^2 - b_3\omega_4^2, \ \omega^3] = 0, \tag{7κ}$$

$$[\omega_4^1 + a_1\omega_4^3 - b_1\omega_5^3, \ \omega^1] - [\omega_5^2 + a_2\omega_5^1, \ \omega^2] + b_3[\omega_4^2\omega^3] = 0, \tag{7λ}$$

$$[\omega_4^1\omega^1] - [\omega_5^2 - a_2\omega_5^1 - b_2\omega_6^1, \ \omega^2] - [b_3\omega_4^2 + a_3\omega_6^2, \ \omega^3] = 0, \tag{7μ}$$

$$[\omega_4^1 - a_1\omega_4^3 - b_1\omega_5^3, \ \omega^1] + [a_2\omega_5^1 + b_2\omega_6^1, \ \omega^2] - [\omega_6^3, \ \omega^3] = 0, \tag{7ν}$$

где

$$\omega^1 = \omega_1^4, \quad \omega^2 = \omega_2^5, \quad \omega^3 = \omega_3^6.$$

Из уравнений (7α), в силу леммы Картана, следует, что формы ω_4^2, ω_4^3 разлагаются только по формам ω^1, ω^2. Применяя эти соображения к остальным уравнениям (7α — ι), задаемся разложениями:

$$\begin{aligned} &\omega_4^2 = l_{41}^2\omega^1 + l_{42}^2\omega^2, \quad \omega_4^3 = l_{41}^3\omega^1 + l_{42}^3\omega^2, \quad \omega_6^3 = l_{61}^3\omega^1 + l_{62}^3\omega^2, \\ &\omega_5^3 = l_{52}^3\omega^2 + l_{53}^3\omega^3, \quad \omega_5^1 = l_{52}^1\omega^2 + l_{53}^1\omega^3, \quad \omega_4^1 = l_{42}^1\omega^2 + l_{43}^1\omega^3, \\ &\omega_6^1 = l_{63}^1\omega^3 + l_{61}^1\omega^1, \quad \omega_6^2 = l_{63}^2\omega^3 + l_{61}^2\omega^1, \quad \omega_5^2 = l_{53}^2\omega^3 + l_{51}^2\omega^1. \end{aligned} \tag{a}$$

Внося эти значения в уравнения ($7\alpha - \iota$), получим конечные уравнения:

$$l^2_{42} = a_2 l^2_{51} + b_2 l^1_{61}, \quad l^3_{53} = a_3 l^3_{62} + b_3 l^3_{42}, \quad l^1_{61} = a_1 l^1_{43} + b_1 l^1_{53}, \tag{8α}$$

$$l^3_{42} = b_2 l^3_{61}, \quad l^1_{53} = b_3 l^1_{42}, \quad l^2_{61} = b_1 l^2_{53}, \quad a_1 l^1_{42} + b_1 l^1_{52} = 0, \tag{8β}$$

$$l^1_{52} = -a_1 l^3_{52}, \quad l^2_{63} = -a_2 l^1_{63}, \quad l^3_{41} = -a_3 l^2_{41}, \quad a_2 l^2_{53} + b_2 l^2_{63} = 0, \tag{8γ}$$

$$l^1_{63} = b_3 l^2_{61}, \quad l^2_{41} = b_1 l^3_{42}, \quad l^3_{52} = b_2 l^1_{53}, \quad a_3 l^3_{61} + b_3 l^3_{41} = 0, \tag{8δ}$$

$$l^1_{53} = -a_1 l^3_{53} + b_3 l^2_{51}, \quad l^2_{61} = -a_2 l^1_{61} + b_1 l^3_{62}, \quad l^3_{42} = -a_3 l^2_{42} + b_2 l^1_{43}, \tag{8ε}$$

$$a_2 l^3_{53} = 0, \quad a_3 l^1_{61} = 0, \quad a_1 l^2_{42} = 0, \quad a_1 l^3_{62} = 0, \quad a_2 l^1_{43} = 0, \quad a_3 l^2_{51} = 0. \tag{8ζ}$$

Из (8ζ) при $a_1 a_2 a_3 \neq 0$ следует

$$l^2_{42} = l^1_{43} = l^3_{53} = l^2_{51} = l^1_{61} = l^3_{62} = 0,$$

а тогда ($8\gamma - \varepsilon$) дадут

$$l^1_{53} = l^2_{61} = l^3_{42} = 0,$$
$$l^1_{63} = l^2_{41} = l^3_{52} = 0,$$
$$l^1_{52} = l^2_{63} = l^3_{41} = 0.$$

Из остальных уравнений (8β), ($7\varkappa - \nu$) при $b_1 b_2 b_3 \neq 0$ получим:

$$l^1_{42} = l^2_{53} = l^3_{61} = l^1_{63} = 0$$

и по формулам (a)

$$\omega^i_4 = \omega^i_5 = \omega^i_6 = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Поскольку все главные формы плоскости [456] равны нулю, плоскость неподвижна, и пара вырождается.

259. Теорема существования решения. Рассмотрим теперь случай $a_i = b_i = 0$ ($i = 1,\ 2,\ 3$). Уравнения (4) принимают вид

$$\omega^5_1 = \omega^6_1 = \omega^4_2 = \omega^6_2 = \omega^4_3 = \omega^5_3 = 0. \tag{9α}$$

Система ($7\alpha - \nu$) записывается в виде

$$[\omega^2_4\omega^1] = [\omega^3_4\omega^1] = [\omega^3_5\omega^2] = [\omega^1_5\omega^2] = [\omega^1_6\omega^3] = [\omega^2_6\omega^3] = 0,$$

$$[\omega^1_4\omega^1] = [\omega^2_5\omega^2] = [\omega^3_6\omega^3],$$

$$[\omega^1_5\omega^1] = [\omega^1_6\omega^1] = [\omega^2_6\omega^2] = [\omega^2_4\omega^2] = [\omega^3_4\omega^3] = [\omega^3_5\omega^3] = 0,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}&\omega^2_4 = \omega^3_4 = \omega^3_5 = \omega^1_5 = \omega^1_6 = \omega^2_6 = 0,\\ &\omega^1_4 = a\omega^1, \quad \omega^2_5 = b\omega^2, \quad \omega^3_6 = c\omega^3.\end{aligned}\right\} \tag{9β}$$

Дифференцируя уравнения (9α, β) внешним образом, получим:

$$\left.\begin{aligned}
&[\omega^2_1\omega^2] + [\omega^1\omega^5_4] = 0, && [\omega^3_1\omega^3] + [\omega^1\omega^6_4] = 0,\\
&[\omega^1_2\omega^1] + [\omega^3\omega^4_5] = 0, && [\omega^3_2\omega^3] + [\omega^2\omega^6_5] = 0,\\
&[\omega^1_3\omega^1] + [\omega^3\omega^4_6] = 0, && [\omega^2_3\omega^2] + [\omega^3\omega^5_6] = 0,\\
&a[\omega^1\omega^2_1] + b[\omega^5_4\omega^2] = 0, && a[\omega^1\omega^3_1] + c[\omega^6_4\omega^3] = 0,\\
&b[\omega^2\omega^3_2] + c[\omega^6_5\omega^3] = 0; && b[\omega^2\omega^1_2] + a[\omega^4_5\omega^1] = 0,\\
&c[\omega^3\omega^1_3] + a[\omega^4_6\omega^1] = 0, && c[\omega^3\omega^2_3] + b[\omega^5_6\omega^2] = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{9γ}$$

$$[\Delta a\omega^1] = 0, \quad [\Delta b\omega^2] = 0, \quad [\Delta c\omega^3] = 0, \tag{9δ}$$

где

$$\Delta a = da + 2a(\omega^1_1 - \omega^4_4), \quad \Delta b = db + 2b(\omega^2_2 - \omega^5_5),$$

$$\Delta c = dc + 2c(\omega^3_3 - \omega^6_6).$$

Развертывая по лемме Картана системы (9γ, δ), получим разложения:

$$\left.\begin{aligned}
&\omega^5_4 = l^5_{41}\omega^1 + l^5_{42}\omega^2, && \omega^6_4 = l^6_{41}\omega^1 + l^6_{43}\omega^3,\\
&-\omega^2_1 = l^5_{42}\omega^1 + l^2_{12}\omega^2, && -\omega^3_1 = l^6_{43}\omega^1 + l^3_{13}\omega^3,\\
&\omega^1_2 = l^1_{21}\omega^1 + l^1_{22}\omega^2, && \omega^6_5 = l^6_{52}\omega^2 + l^6_{53}\omega^3,\\
&-\omega^4_5 = l^1_{22}\omega^1 + l^4_{52}\omega^2, && -\omega^3_2 = l^6_{53}\omega^2 + l^3_{23}\omega^3,\\
&\omega^1_3 = l^1_{31}\omega^1 + l^1_{33}\omega^3, && \omega^2_3 = l^2_{32}\omega^2 + l^2_{33}\omega^3,\\
&-\omega^4_6 = l^1_{33}\omega^1 + l^4_{63}\omega^3, && -\omega^5_6 = l^2_{33}\omega^2 + l^5_{63}\omega^3
\end{aligned}\right\} \tag{10α}$$

и систему конечных соотношений на коэффициенты:

$$\left.\begin{aligned}
&al^2_{12} - bl^5_{41} = 0, \quad bl^3_{23} - cl^6_{52} = 0, \quad cl^1_{31} - al^4_{63} = 0.\\
&bl^1_{21} - al^4_{52} = 0, \quad cl^2_{32} - bl^5_{63} = 0, \quad al^3_{13} - cl^6_{41} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{10β}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (10α), получим:

$$\left.\begin{aligned}
&[\Delta l^5_{41}\omega^1] + [\Delta l^5_{42}\omega^2] = 0, && [\Delta l^6_{41}\omega^1] + [\Delta l^6_{43}\omega^3] = 0,\\
&[\Delta l^5_{42}\omega^1] + [\Delta l^2_{12}\omega^2] = 0, && [\Delta l^6_{43}\omega^1] + [\Delta l^3_{13}\omega^3] = 0,\\
&[\Delta l^1_{21}\omega^1] + [\Delta l^1_{22}\omega^2] = 0, && [\Delta l^6_{52}\omega^2] + [\Delta l^6_{53}\omega^3] = 0,\\
&[\Delta l^1_{22}\omega^1] + [\Delta l^4_{52}\omega^2] = 0, && [\Delta l^6_{53}\omega^2] + [\Delta l^3_{23}\omega^3] = 0,\\
&[\Delta l^1_{31}\omega^1] + [\Delta l^1_{33}\omega^3] = 0, && [\Delta l^2_{32}\omega^2] + [\Delta l^2_{33}\omega^3] = 0,\\
&[\Delta l^1_{33}\omega^1] + [\Delta l^4_{63}\omega^3] = 0, && [\Delta l^2_{33}\omega^2] + [\Delta l^5_{63}\omega^3] = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{11α}$$

Уравнения (10β) после дифференцирования дадут

$$\begin{aligned} &a\,\Delta l^2_{12} - b\,\Delta l^5_{41} = 0, \quad b\,\Delta l^3_{23} - c\,\Delta l^6_{52} = 0, \quad c\,\Delta l^1_{31} - a\,\Delta l^4_{63} = 0, \\ &b\,\Delta l^1_{21} - a\,\Delta l^4_{52} = 0, \quad c\,\Delta l^2_{32} - b\,\Delta l^5_{63} = 0, \quad a\,\Delta l^3_{13} - c\,\Delta l^6_{41} = 0, \end{aligned} \tag{11β}$$

где формы Δl^j_{ik}, $\Delta l^\mu_{\lambda k}$ содержат дифференциалы dl^j_{ik}, $dl^\mu_{\lambda k}$ вместе с подходящим набором форм ω^i_i, ω^λ_λ и форм ω^i.

Исключая формы Δl^2_{12}, Δl^3_{13}, Δl^3_{23}, Δl^1_{21}, Δl^1_{31}, Δl^2_{32} с помощью (11β), мы получим 12 квадратичных уравнений (11α) на 12 форм Δl^5_{41}, Δl^5_{42}, Δl^6_{41}, Δl^6_{43}, Δl^1_{22}, Δl^4_{52}, Δl^6_{52}, Δl^6_{53}, Δl^1_{33}, Δl^4_{63}, Δl^2_{33}, Δl^5_{63} и три уравнения (9δ) на три формы Δa, Δb, Δc. Хотя здесь и частичное продолжение, но оно законно, так как в системы (9γ) и (9δ) входят разные неизвестные формы *). Система ковариантов правильная. Характеры $s_1 = 15$, $s_2 = s_3 = 0$. Наиболее общий интегральный $\mathfrak{E}_3$ зависит от $N = 15$ параметров. Система — в инволюции и определяет расслояемые пары комплексов плоскостей с 15 функциями одного аргумента.

260. Фокальные свойства комплексов расслояемой пары. В силу уравнений (9α) система (3β), определяющая фокусы и фокальные направления плоскости [123], принимает вид

$$x\omega^4_1 = 0, \quad y\omega^5_2 = 0, \quad z\omega^6_3 = 0. \tag{12}$$

Определитель коэффициентов при формах ω^i ($i = 1, 2, 3$) теперь равен произведению xyz; уравнение фокальной линии на плоскости [123]

$$xyz = 0$$

показывает, что кривая третьего порядка распалась на три прямые — стороны координатного треугольника $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3$. Для произвольной точки стороны $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3$ ($x = 0$) фокальные направления — $\omega^5_2 = \omega^6_3 = 0$, для каждой вершины $\boldsymbol{A}_i$ ($i = 1, 2, 3$) имеется пучок фокальных направлений. Например, для точки $\boldsymbol{A}_1$ все направления, удовлетворяющие уравнению

$$\omega^1_1 = 0, \tag{13}$$

фокальные. Нетрудно заметить, что в силу (9α β) внешний дифференциал любого уравнения $\omega^i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) обращается в нуль вследствие самого уравнения $\omega^i = 0$. Следовательно, трехмерное многообразие, описанное точкой $\boldsymbol{A}_1$, распадается на семейство поверхностей (13), которые касаются плоскости $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3$, причем стороны $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_3$ координатного треугольника служат касательными линий $\omega^1 = \omega^3 = 0$ и $\omega^1 = \omega^2 = 0$. На многообразии ($\boldsymbol{A}_2$) луч $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2$ касается линии $\omega^2 = \omega^3 = 0$. Следовательно, для конгруэнции $\omega^3 = 0$ точки $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ служат фокусами, и на поверхности $\omega^3 = 0$, описываемой точ-

*) Cartan E., Sur les variétés de courbure constante d'ún espace euclidien ou non-euclidien, Bull. Soc. math., 1919, 47, p. 144.

кой $\boldsymbol{A}_1$, линии $\omega^1 = \omega^3 = 0$ и $\omega^3 = \omega^2 = 0$ сопряжеиы. Аналогично доказывается сопряженность линий $\omega^1 = \omega^2 = 0$ и $\omega^3 = \omega^2 = 0$ (на поверхности $\omega^2 = 0$). Что касается до линий $\omega^1 = \omega^3 = 0$ и $\omega^1 = \omega^2 = 0$, то самый вид компонентов ω^2_1, ω^3_1, ω^1_2, ω^1_3, ω^3_2, ω^2_3, удовлетворяющих условию сопряженности

$$[\omega^k_i\omega^i\omega^k] = 0 \text{ (не суммировать!)},$$

показывает, что трехмерное многообразие $\{\boldsymbol{A}_1\}$ представляет совокупность трех семейств двумерных поверхностей, пересекающихся попарно по сопряженным системам линий, т. е. сопряженную систему. Три трижды сопряженные системы $\{\boldsymbol{A}_i\}$ связаны между собой преобразованием Лапласа: каждое ребро $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2$ при $\omega^3 = 0$ описывает конгруэнцию с фокальными поверхностями ($\boldsymbol{A}_1$), ($\boldsymbol{A}_2$).

Все сказанное переносится и на вершины $\boldsymbol{A}_\nu$ ($\nu = 4, 5, 6$) координатного треугольника плоскости [456]. Сопряженные системы на многообразиях $\{\boldsymbol{A}_i\}$ и $\{\boldsymbol{A}_\nu\}$ соответствуют. При этом каждая пара многообразий $\{\boldsymbol{A}_i\}$ и $\{\boldsymbol{A}_{i+3}\}$ расположена так, что прямая $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_4$ является пересечением касательных пространств P_3, P'_3 многообразий $\{\boldsymbol{A}_i\}$, $\{\boldsymbol{A}_{i+3}\}$.

В таком виде распространяются на расслояемые пары комплексов ∞^3 плоскостей [123], [456] те соотношения между фокальными элементами расслояемой пары конгруэнций, которые составляют понятие пары T конгруэнций.

261. Присоединенная система W. По самому определению касательное пространство P_3 многообразия $\mathfrak{M}_3$, расслояющего пару комплексов плоскостей, содержит соответствующую плоскость [456] второго комплекса пары, следовательно, содержит соответствующие точки всех расслояющих многообразий $\mathfrak{M}'_3$ второго семейства, и наоборот. Таким образом, прямая $\boldsymbol{MM}'$, соединяющая соответствующие точки $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{M}'$ многообразий $\mathfrak{M}_3$, $\mathfrak{M}'_3$, является пересечением касательных подпространств P_3, P'_3 и тем самым касается обоих многообразий.

Интересно отметить, что при этом *на всех многообразиях $\mathfrak{M}_3$, $\mathfrak{M}'_3$ асимптотические линии соответствуют*. В силу уравнений (5), а также формул (9α, β), дифференциал $d\boldsymbol{M}$ произвольной точки

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A}_1 + \lambda\boldsymbol{A}_2 + \mu\boldsymbol{A}_3$$

расслояемого многообразия $\mathfrak{M}_3$ принимает вид

$$d\boldsymbol{M} = (\omega^1_1 + \lambda\omega^1_2 + \mu\omega^1_3)\boldsymbol{M} + \omega^1\boldsymbol{A}_4 + \omega^2\lambda\boldsymbol{A}_5 + \omega^3\mu\boldsymbol{A}_6. \tag{14}$$

Уравнение асимптотической линии многообразия $\mathfrak{M}_3$, т. е. линии, соприкасающаяся плоскость которой лежит в касательном подпространстве, имеет вид

$$(d^2\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{A}_4\,\boldsymbol{A}_5\,\boldsymbol{A}_6) = 0$$

или

$$(\omega^1 dA_4 + \omega^2\lambda\, dA_5 + \omega^3\mu\, dA_6, \quad M, A_4, A_5, A_6) = 0,$$

или, в силу (9α, β),

$$(a(\omega^1)^2 A_1 + \lambda b(\omega^2)^2 A_2 + \mu c(\omega^3)^2 A_3, \; A_1 + \lambda A_2 + \mu A_3, \; A_4, A_5, A_6) = 0,$$

откуда получаем два квадратных уравнения:

$$b(\omega^2)^2 - a(\omega^1)^2 = 0, \quad c(\omega^3)^2 - a(\omega^1)^2 = 0. \tag{15}$$

Для многообразия $\mathfrak{M}'_3$ аналогично получим:

$$dM' = (\omega_4^4 + \lambda'\omega_5^4 + \mu'\omega_6^4)\, M' + a\omega^1 A_1 + \lambda' b\omega^2 A_2 + \mu' c\omega^3 A_3$$

и уравнение асимптотических

$$(d^2M' M' A_1 A_2 A_3) = 0,$$

или

$$(a\omega^1 dA_1 + \lambda' b\omega^2 dA_2 + \mu' c\omega^3 dA_3, \quad M', A_1, A_2, A_3) = 0,$$

или

$$(a(\omega^1)^2 A_4 + \lambda' b(\omega^2)^2 A_5 + \mu' c(\omega^3)^2 A_6, \; A_4 + \lambda' A_5 + \mu' A_6, \; A_1, A_2, A_3) = 0,$$

и те же два квадратных уравнения (15).

Таким образом доказывается, что на фокальных многообразиях $\{A_i\}$ и $\{A_{i+3}\}$ асимптотические соответствуют.

Уравнение (14) напишется в виде

$$dM = \bar\omega_0^0 M + \bar\omega_0^1 M_1 + \bar\omega_0^2 M_2 + \bar\omega_0^3 M_3,$$

если положить

$$M_1 = A_4, \quad M_2 = A_5, \quad M_3 = A_6,$$
$$\bar\omega^1 = \omega^1, \quad \bar\omega^2 = \lambda\omega^2, \quad \bar\omega^3 = \mu\omega^3.$$

По формулам (10α) п. 249 для компонент $\bar\omega_i^k$, определяемых формулами

$$dM_i = \bar\omega_i^k M_k + \omega_i^j A_j,$$

получим выражения:

$$\bar\omega_1^2 = \omega_4^5 = l_{41}^5 \bar\omega^1 + \frac{1}{\lambda} l_{42}^5 \bar\omega^2,$$

$$\bar\omega_2^1 = \omega_5^4 = -l_{22}^1 \bar\omega^1 - \frac{1}{\lambda} l_{52}^4 \bar\omega^2,$$

$$\bar\omega_1^3 = \omega_4^6 = l_{41}^6 \bar\omega^1 + \frac{1}{\mu} l_{43}^6 \bar\omega^3,$$

$$\bar\omega_3^1 = \omega_6^4 = -l_{33}^1 \bar\omega^1 - \frac{1}{\mu} l_{63}^4 \bar\omega^3,$$

$$\bar\omega_2^3 = \omega_5^6 = \frac{1}{\lambda} l_{52}^6 \bar\omega^2 + \frac{1}{\mu} l_{53}^6 \bar\omega^3,$$

$$\bar\omega_3^2 = \omega_6^5 = -\frac{1}{\lambda} l_{35}^2 \bar\omega^2 - \frac{1}{\mu} l_{63}^5 \bar\omega^3.$$

Они удовлетворяют условиям сопряженности тройки касательных MM_1, MM_2, MM_3.

$$[\bar\omega_i^k \bar\omega^i \bar\omega^k] = 0.$$

Следовательно, каждое расслояющее многообразие $\mathfrak{M}_3$, $\mathfrak{M}'_3$ представляет трижды сопряженную систему — картановское многообразие особого проективного типа, асимптотические формы которого (15) сводятся к сумме квадратов форм ω^1, ω^2, ω^3.

Семейство ∞^3 прямых MM', касаясь первого и второго многообразия, переводит многообразие $\{M\}$ в многообразие $\{M'\}$ с соответствием асимптотических направлений и сопряженной системы.

Семейство ∞^3 прямых MM' не содержит развертывающихся поверхностей.

262. Расслояемые пары в P_n. Все эти соображения легко распространяются (Гейдельман, [2]) на n-мерное пространство P_n. Рассмотрим два семейства линейных подпространств P_{p-1} размерности $p-1$. Каждое подпространство определяется p точками A_i $(i = 1, \ldots, p)$ в общем положении. Чтобы два соответствующих подпространства P_{p-1} и P'_{p-1} первого и второго семейства не имели общих точек, пространство P_n должно содержать $2p$ линейно независимых аналитических точек A_i, A_ν $(i = 1, \ldots, p, \; \nu = p+1, \ldots, 2p)$. Следовательно, размерность пространства $n \geqslant 2p - 1$.

Расслояющее многообразие $\mathfrak{M}_q$ в точке M $(p-1)$-плоскости P_{p-1} имеет касательное подпространство P_q, содержащее точку M и все точки A_ν $(\nu = p+1, \ldots, 2p)$ соответствующей $(p-1)$-плоскости P'_{p-1}. Следовательно, размерность q касательного подпространства P_q (и размерность многообразия $\mathfrak{M}_q$) следует считать равной $q \geqslant p$. Для определенности возьмем $q = p$. Поскольку многообразие $\mathfrak{M}_q$ описывается точкой M при движении $(p-1)$-плоскости P_{p-1} внутри семейства (P_{p-1}), это семейство зависит от p параметров.

Таким образом, мы приходим к задаче расслоения пары p-параметрических семейств $(p-1)$-мерных подпространств P_{p-1}, между элементами которых установлено взаимно однозначное соответствие, посредством двух $(p-1)$-параметрических семейств p-мерных многообразий $(\mathfrak{M}_p)$, $(\mathfrak{M}'_p)$, касательные p-плоскости которых проходят через соответствующее подпространство P'_{p-1} или P_{p-1}.

263. Размерность объемлющего пространства P_n. Выберем проективный репер A_i, A_λ, A_ξ $(i = 1, \ldots, p; \; \lambda = p+1, \ldots, 2p; \; \xi = 2p+1, \ldots, n)$ так, чтобы точки A_i определяли плоскость P_{p-1}, а точки A_λ — плоскость P'_{p-1}.

Если точки

$$M = A_1 + \lambda^j A_j, \quad M' = A_{p+1} + \lambda'^\nu A_\nu \; (j = 2, \ldots, p; \; \nu = p+2, \ldots, 2p)$$

описывают многообразия $\mathfrak{M}_p$, $\mathfrak{M}'_p$, касательные p-плоскости которых определяются соответственно точками M, A_λ $(\lambda = p+1, \ldots, 2p)$ и

M', A_i $(i=1, \ldots, p)$, то имеют место равенства

$$(dM\, MA_{p+1}, \ldots, A_{2p})=0, \quad (dM'M'A_1, \ldots, A_p)=0.$$

Внося сюда

$$dM=(\omega_1^1+\lambda^k\omega_k^1)\,A_1+(d\lambda^k+\omega_1^k+\lambda^j\omega_j^k)\,A_k+(\omega_1^\xi+\lambda^k\omega_k^\xi)\,A_\xi$$

$$dM'=(\omega_{p+1}^{p+1}+\lambda'^\mu\omega_\mu^{p+1})\,A_{p+1}+(d\lambda'^\mu+\omega_{p+1}^\mu+\lambda'^\nu\omega_\nu^\mu)\,A_\mu+$$

$$+(\omega_{p+1}^\xi+\lambda'^\mu\omega_\mu^\xi)\,A_\xi, \qquad (k, j=2, \ldots, p;\ \xi=2p+1, \ldots, n)$$

получим систему уравнений:

$$d\lambda^k+\lambda^j\omega_j^k-\lambda^k\lambda^j\omega_j^1+\omega_1^k-\lambda^k\omega_1^1=0, \tag{16α}$$

$$\omega_1^\xi+\lambda^j\omega_j^\xi=0 \tag{16β}$$

$$d\lambda'^\mu+\lambda'^\nu\omega_\nu^\mu-\lambda'^\mu\lambda'^\nu\omega_\nu^{p+1}+\omega_{p+1}^\mu-\lambda'^\mu\omega_{p+1}^{p+1}=0, \tag{16α'}$$

$$\omega_{p+1}^\xi+\lambda'^\mu\omega_\mu^\xi=0 \tag{16β'}$$

$$\begin{pmatrix} k, j=2, \ldots, p, \\ \mu, \nu=p+1, \ldots, 2p, \\ \xi=2p+1, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Поскольку системы (16α, β), (16α′, β′) определяют $(p-1)$-параметрические семейства многообразий $(\mathfrak{M}_p)$, $(\mathfrak{M}'_p)$, начальные значения координат λ^j, λ'^μ остаются произвольными, и уравнения (16β, β′) приводят к системе

$$\omega_i^\xi=0, \quad \omega_\lambda^\xi=0 \qquad (i=1, \ldots, p;\ \lambda=p+1, \ldots, 2p).$$

Теперь подсистема

$$\begin{aligned} dA_i&=\omega_i^lA_l+\omega_i^\lambda A_\lambda \\ dA_\lambda&=\omega_\lambda^lA_l+\omega_\lambda^\rho A_\rho \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} i, l=1, \ldots, p, \\ \lambda, \rho=p+1, \ldots, 2p \end{pmatrix}$$

с уравнениями структуры

$$D\omega_i^l=[\omega_i^m\omega_m^l]+[\omega_i^\lambda\omega_\lambda^l], \qquad D\omega_\lambda^i=[\omega_\lambda^m\omega_m^i]+[\omega_\lambda^\rho\omega_\rho^i],$$

$$D\omega_i^\lambda=[\omega_i^m\omega_m^\lambda]+[\omega_i^\rho\omega_\rho^\lambda], \qquad D\omega_\lambda^\rho=[\omega_\lambda^m\omega_m^\rho]+[\omega_\lambda^\sigma\omega_\sigma^\rho]$$

$$(i, l, m=1, \ldots, p;\ \lambda, \rho, \sigma=p+1, \ldots, 2p)$$

вполне интегрируема и определяет пару семейств (P_{p-1}), (P'_{p-1}), лежащую в проективном пространстве P_{2p-1}.

Следовательно, *расслояемая пара p-параметрических семейств $(p-1)$-мерных подпространств (P_{p-1}), (P'_{p-1}), если она существует, лежит в пространстве $n=2p-1$ измерений.*

264. Фокальные свойства p-параметрического семейства $(p-1)$-плоскостей в P_{2p-1}. В пространстве P_{2p-1} репер будет содержать $2p$ линейно независимых аналитических точек, за которые можно принять точки A_i, A_λ, расположенные в подпространствах P_{p-1}, P'_{p-1}. Поскольку $(p-1)$-плоскость P_{p-1} описывает p-параметрическое семейство, проективные инфинитезимальные смещения ее зависят от p линейно независимых форм, за которые мы можем принять компоненты

$$\omega^i=\omega_i^{p+i} \qquad (i=1, \ldots, p).$$

Точка

$$F=\lambda^iA_i \qquad (i=1, \ldots, p) \tag{17α}$$

будет фокусом с фокальным направлением

$$\omega^j=p^j\omega^1 \qquad (j=2, \ldots, p), \tag{17β}$$

если для этого направления

$$(dF\,A_1, \ldots, A_p)=0. \tag{17γ}$$

Дифференцируя уравнение (17α) и внося dF в равенство (17γ), получим систему уравнений

$$\lambda^i\omega_i^\nu=0 \qquad (i=1, \ldots, p;\ \nu=p+1, \ldots, 2p). \tag{17δ}$$

Чтобы эта система допускала не нулевые решения λ^i, определитель системы

$$\det|\omega_i^\nu|=0$$

должен равняться нулю. Таким образом получаем уравнения для фокальных направлений.

Если же внести в уравнения (17δ) разложения

$$\omega_i^\nu=l_{ik}^\nu\omega^k$$

и в полученной системе

$$\lambda^il_{ik}^\nu\omega^k=0 \tag{17δ'}$$

приравнять нулю определитель из коэффициентов при ω^k

$$\det|\lambda^il_{ik}^\nu|=0, \tag{17ε}$$

то получим однородное уравнение степени p для координат λ^i фокуса, которое выделит в подпространстве P_{p-1} алгебраическое $(p-2)$-мерное многообразие порядка p, каждая точка которого будет фокусом $(p-1)$-мерной плоскости P_{p-1}.

Если поместить вершины A_i в точках многообразия (17ε), то при подходящем выборе вершин A_λ $(\lambda=p+1, \ldots, 2p)$ фокальные направления для фокуса A_i будут определяться уравнениями

$$\omega^1=0, \quad \omega^2=0, \ \ldots, \quad \omega^{i-2}=0, \quad \omega^i=0, \ \ldots, \quad \omega^p=0,$$

а касательная к линии $\omega^1 = \ldots = \omega^{i-1} = 0$, $\omega^{i+1} = \ldots = \omega^p = 0$, описываемой точкой $\boldsymbol{A}_i$, проходит через вершину $\boldsymbol{A}_{p+i}$.

Внося значения $\lambda^i = \delta^i_j$, $\omega^k = \delta^k_{j-1}$ в уравнения (17δ′), получим:

$$l^{\nu}_{jj-1} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, p). \tag{18α}$$

Второе поставленное условие приводит к сравнению

$$(d\boldsymbol{A}_i\, \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{A}_{p+i}) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\,(\omega^1, \ldots, \omega^{i-1}, \omega^{i+1}, \ldots, \omega^p)),$$

откуда

$$l^k_{ii} = 0, \quad l^{p+k}_{ii} = 0 \qquad (k \neq i). \tag{18β}$$

265. Уравнения расслояемой пары. Вернемся к уравнениям (16α, α′). Чтобы они определяли $(p-1)$-параметрические семейства расслояющих многообразий $(\mathfrak{M}_p)$, $(\mathfrak{M}'_p)$, каждое уравнение (16α, α′) должно быть вполне интегрируемо, т. е. внешний дифференциал должен быть алгебраическим следствием самого уравнения.

Дифференцируя внешним образом уравнения (16α) и по исключении $d\lambda^k$, приравнивая нулю коэффициенты при степенях λ^i, получим систему

$$[\omega^{\nu}_i \omega^j_{\nu}] = 0 \quad (i \neq j), \qquad \sum_{\nu=p+1}^{2p} [\omega^{\nu}_i \omega^i_{\nu}] = \sum_{\nu=p+1}^{2p} [\omega^{\nu}_j \omega^j_{\nu}], \tag{19α}$$

$$[\omega^k_{\lambda} \omega^{\nu}_k] = 0 \quad (\lambda \neq \nu), \qquad \sum_{k=1}^{p} [\omega^k_{\lambda} \omega^{\lambda}_k] = \sum_{k=1}^{p} [\omega^k_{\nu} \omega^{\nu}_k]. \tag{19β}$$

Уравнения левого столбца удовлетворены, если положить

$$\omega^{\nu}_i = 0, \quad \omega^i_{\nu} = 0 \qquad (\nu \neq p+i). \tag{19γ}$$

Уравнения (19α, β) правого столбца примут вид

$$[\omega^{p+i}_i \omega^i_{p+i}] = [\omega^{p+j}_j \omega^j_{p+j}]. \tag{19δ}$$

Поскольку $\omega^i = \omega^{p+i}_i$ независимы на интегральном многообразии, из уравнений (19δ) следует, что формы ω^i_{p+i} линейно зависят только от ω^i и ω^j, но j может принять любое значение $j = 1, \ldots, p$. Следовательно, ω^i_{p+i} линейно зависит только от ω^i

$$[\omega^i_{p+i} \omega^i] = 0 \quad (\text{не суммировать!}). \tag{20α}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (19γ), получим, в силу (19γ),

$$\left.\begin{aligned} &[\omega^k_i \omega^k] + [\omega^i \omega^{p+k}_{p+i}] = 0 && (i \neq k), \\ &[\omega^k_{p+k} \omega^i_k] + [\omega^{p+i}_{p+k} \omega^i_{p+i}] = 0 && (\text{не суммировать!}), \end{aligned}\right\} \tag{20β}$$

откуда, развертывая по лемме Картана, получим:

$$\omega^i_{p+i} = a^i \omega^i, \tag{20α′}$$

$$\left.\begin{aligned} &\omega^k_i = a^k b^k_i \omega^k - c^k_i \omega^i && (\text{не суммировать!}), \\ &\omega^{p+k}_{p+i} = c^k_i \omega^k - a^i b^k_i \omega^i && (i \neq k). \end{aligned}\right\} \tag{20β′}$$

Пфаффовы уравнения (19γ) и квадратичные (20α, β) составляют все уравнения системы, определяющей расслояемую пару p-параметрических семейств $(p-1)$-мерных плоскостей.

Система замкнута относительно операции внешнего дифференцирования. Кроме левых частей пфаффовых уравнений (19γ) и форм ω^i $(i = 1, \ldots, p)$, независимых на интегральном многообразии, характеристическая система содержит $q = p + 2p(p-1) = 2p^2 - p$ форм

$$\omega^i_{p+i}, \quad \omega^k_i, \quad \omega^{p+k}_{p+i}.$$

Характеры системы $s_1 = 2p^2 - p$, $s_2 = \ldots = s_p = 0$, а поскольку наиболее общий интегральный элемент $\mathcal{E}_p$ по формулам (20α′, β′) зависит от $N = 2p^2 - p$ произвольных параметров, то система — в инволюции и расслояемые пары семейств $(p-1)$-мерных плоскостей существуют с произволом $2p^2 - p$ функций одного аргумента.

266. Фокальные свойства многообразия $(p-1)$-мерных плоскостей расслояемой пары. Уравнения (17δ) для координат фокусов и фокальных направлений $(p-1)$-мерной плоскости P_{p-1} теперь, в силу (19γ), принимают вид

$$\lambda^1 \omega^{p+1}_1 = 0, \quad \lambda^2 \omega^{p+2}_2 = 0, \quad \ldots, \quad \lambda^p \omega^{2p}_p = 0.$$

Следовательно, фокальная сеть линий совпадает с координатными линиями — ребрами p-эдра $\{\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_p\}$. Алгебраическое многообразие, образованное фокусами подпространства ([12 ... p]), распадается на $(p-1)$-мерные грани подвижного репера $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_p$. Точкам одной грани $\boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{A}_2 \ldots \boldsymbol{A}_{p-1}$ соответствует фокальное направление $\omega^1 = \ldots = \omega^{p-1} = 0$. Точкам пересечения двух, трех и т. д. граней соответствуют фокальные направления тех граней, которым принадлежит точка.

Вершины репера $\boldsymbol{A}_i$ имеют $p-1$ независимых фокальных направлений

$$\omega^{p+k}_k = \delta^k_i.$$

Поскольку, в силу (19γ), (20α′, β′),

$$d\boldsymbol{A}_i = \omega^i_i \boldsymbol{A}_i + \sum_{k=1}^{p} \omega^k a^k b^k_i \boldsymbol{A}_k + \omega^i \left(\boldsymbol{A}_{p+i} - \sum_{k=1}^{p} c^k_i \boldsymbol{A}_k\right),$$

каждое ребро A_iA_k репера касается многообразия (A_k) вдоль линии $\omega^\alpha = \delta_k^\alpha$ и многообразия (A_i) вдоль линии $\omega^\alpha = \delta_i^\alpha$.

Поскольку, в силу (19γ),

$$D\omega^i = D\omega_i^{p+i} = \sum_k [\omega_i^k \omega_k^{p+i}] + \sum_\lambda [\omega_i^\lambda \omega_\lambda^{p+i}] = [\omega_i^i - \omega_{p+i}^{p+i},\ \omega^i],$$

внешний дифференциал уравнения

$$\omega^i = 0$$

обращается в нуль в силу самого уравнения, которое тем самым вполне интегрируемо, p-мерное многообразие (A_i) распадается p способами на однопараметрическое семейство $(p-1)$-мерных подмногообразий.

Формулы (20β′) показывают, что эта система $(p-1)$-мерных поверхностей есть p-сопряженная система (см. Смирнов [1]). Ребра репера $[12\ldots p]$ описывают p-параметрические семейства прямых с фокусами в вершинах репера.

Все это относится и к реперу $[p+1, \ldots, 2p]$ в подпространстве P_{p-1}. При этом сопряженные системы на многообразиях (A_i) и (A_i) соответствуют и пары многообразий (A_i) и (A_{p+i}) касаются прямой A_iA_{p+i}.

267. Расслояющие многообразия $\mathfrak{M}_p$. В силу уравнений (16α, β) дифференциал произвольной точки

$$M = \lambda^i A_i, \qquad \lambda^1 = 1 \qquad (i = 1, \ldots, p)$$

расслояющего многообразия $\mathfrak{M}_p$ принимает вид

$$dM = \lambda^k \omega_k^1 M + \sum_{i=1}^p \lambda^i \omega^i A_{p+i}.$$

Это многообразие, в силу полной интегрируемости уравнений $\omega^i=0$, тоже распадается на семейства $(p-1)$-мерных подмногообразий $\omega^i=0$. Касательные к линиям $\omega^\alpha=\delta_k^\alpha$ $(k=1, \ldots, p)$, по которым пересекаются каждые $p-1$ подмногообразия $\omega^i=0$, проходят через вершины A_{p+k} репера $[p+1, \ldots, 2p]$. В силу формул (19γ), (20β′), многообразия $\mathfrak{M}_p$ представляют p-сопряженные системы.

Асимптотические линии многообразия $\mathfrak{M}_p$ определяются уравнениями, вытекающими из условия

$$(d^2M,\ M,\ A_{p+1}, \ldots, A_{2p}) = 0$$

или

$$\left(\sum_{i=1}^p \lambda^i \omega^i \omega_{p+i}^i A_i,\ A_{p+1}, \ldots, A_{2p},\ M\right) = 0.$$

Отсюда вытекают $p-1$ уравнений

$$a^i(\omega^i)^2 = a^k(\omega^k)^2, \tag{21}$$

определяющих сеть асимптотических линий многообразия $\mathfrak{M}_p$. Поскольку это уравнение не содержит λ^j, асимптотические линии на всех многообразиях $\mathfrak{M}_p$ соответствуют. Подсчет асимптотических на многообразиях $\mathfrak{M}'_p$ приводит к тем же уравнениям (21). Поскольку прямая, соединяющая точки M, M' любой пары многообразий $\mathfrak{M}_p$, $\mathfrak{M}'_p$, принадлежит их касательным подпространствам и асимптотические линии на $\mathfrak{M}_p$ и $\mathfrak{M}'_p$ соответствуют, два $(p-1)$-мерных семейства многообразий $(\mathfrak{M}_p)$, $(\mathfrak{M}'_p)$ вместе с p-параметрическими семействами прямых MM' представляют аналог системы Бианки в P_n.

ГЛАВА XXVI

МЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАССЛОЯЕМЫХ ПАР *)

268. Выбор репера. В евклидовом пространстве всякая пара прямых, не лежащих в одной плоскости, определяет единственную прямую (общий перпендикуляр), пересекающую под прямым углом ту и другую прямую пары. Если дана пара конгруэнций (r_1) и (r_2) и между лучами установлено взаимно однозначное соответствие так, что соответствующие лучи r_1, r_2 находятся в косом положении, то две конгруэнции (r_1), (r_2) определяют третью — конгруэнцию их общих перпендикуляров (r). Обратно, с произвольной конгруэнцией (r) связано бесчисленное множество таких пар (r_1), (r_2). Найдется ли среди них расслояемая пара?

Присоединим к каждому лучу заданной конгруэнции (r) прямоугольный трехгранник T с вершиной O и единичными векторами осей $\boldsymbol{I}_1$, $\boldsymbol{I}_2$, $\boldsymbol{I}_3$, из которых третья ось $\boldsymbol{I}_3$ совпадает с лучом r. Инфинитезимальные перемещения трехгранника можно определить уравнениями

$$d\boldsymbol{O} = \boldsymbol{I}_\alpha \omega^\alpha, \qquad d\boldsymbol{I}_i = \omega_i^\alpha \boldsymbol{I}_\alpha \qquad (i, \ \alpha = 1, \ 2, \ 3), \tag{1α}$$

где линейные формы ω^i, ω_i^k удовлетворяют системе

$$\omega_i^k = -\omega_k^i, \qquad D\omega^i = [\omega^\alpha \omega_\alpha^i], \qquad D\omega_i^k = [\omega_i^\alpha \omega_\alpha^k]. \tag{1β}$$

Они содержат дифференциалы двух независимых параметров конгруэнции (r) (главные переменные).

Каждый луч r пересекается под прямым углом лучами r_i $(i = 1, 2)$ в некоторых точках $\boldsymbol{N}_i$ с абсциссами $h_i = ON_i$; угол, образуемый лучом r_i с вектором $\boldsymbol{I}_1$, обозначим α_i.

Если ввести обозначения $\omega^i = \omega_i$, $\omega_i^k = \omega_{ik}$,

$$\begin{gathered}\underset{i}{\Omega}{}^1 = \omega_1 \cos\alpha_i + \omega_2 \sin\alpha_i, \qquad \underset{i}{\Omega}{}^2 = -\omega_1 \sin\alpha_i + \omega_2 \cos\alpha_i, \\ \underset{i}{\Omega}{}_1^3 = \omega_{13} \cos\alpha_i + \omega_{23} \sin\alpha_i, \qquad \underset{i}{\Omega}{}_2^3 = -\omega_{13} \sin\alpha_i + \omega_{23} \cos\alpha_i, \\ \underset{i}{A} = \frac{d\alpha_i + \omega_{12}}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}, \qquad \underset{i}{H} = \frac{dh_i + \omega_3}{h_1 - h_2},\end{gathered} \tag{2α}$$

*) Бианки [2], Бюшгенс, Россинский [2], [2], Бахвалов [3], [4], [5], [6], Ермолаев [1], Фиников [15], Россинский [1], [2], [3], [4], [5], Березина [2], [3], [4].

но для прямоугольных трехгранников T_i с вершинами N_i и единичными векторами осей

$$\underset{i}{\boldsymbol{\eta}}_1 = \boldsymbol{I}_1 \cos\alpha_i + \boldsymbol{I}_2 \sin\alpha_i, \qquad \underset{i}{\boldsymbol{\eta}}_2 = -\boldsymbol{I}_1 \sin\alpha_i + \boldsymbol{I}_2 \cos\alpha_i, \ \boldsymbol{I}_3 \tag{2β}$$

инфинитезимальные перемещения будут определяться уравнениями

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{N}_i &= \underset{i}{\boldsymbol{\eta}}_1 (\underset{i}{\Omega}{}^1 + h_i \underset{i}{\Omega}{}_3^1) + \underset{i}{\boldsymbol{\eta}}_2 (\underset{i}{\Omega}{}^2 + h_i \underset{i}{\Omega}{}_3^2) + \boldsymbol{I}_3 (h_1 - h_2) \underset{i}{H}, \\ d\underset{i}{\boldsymbol{\eta}}_1 &= \underset{i}{\boldsymbol{\eta}}_2 \underset{i}{A} \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + \boldsymbol{I}_3 \underset{i}{\Omega}{}_1^3, \\ d\underset{i}{\boldsymbol{\eta}}_2 &= -\underset{i}{\boldsymbol{\eta}}_1 \underset{i}{A} \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + \boldsymbol{I}_3 \underset{i}{\Omega}{}_2^3, \\ d\boldsymbol{I}_3 &= \underset{i}{\Omega}{}_3^1 \underset{i}{\boldsymbol{\eta}}_1 + \underset{i}{\Omega}{}_3^2 \underset{i}{\boldsymbol{\eta}}_2. \end{aligned} \tag{2γ}$$

269. Уравнения расслояющих поверхностей. Если пара (r_1), (r_2) расслояема, то существует два семейства поверхностей (P_i) $(i = 1, 2)$, касательные плоскости которых в точках пересечения с лучом $\boldsymbol{r}_i$ проходят через противоположный луч r_{i+1}. (Индексы i берутся по mod 2.)

Обозначая через $t_i = N_i P_i$ абсциссу точки P_i на прямой r_i, получим:

$$\boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{O} + \underset{i}{\boldsymbol{\eta}}_1 t_i + \boldsymbol{I}_3 h_i.$$

Поскольку плоскость, проходящая через точку P_i и прямую r_{i+1}, определяется векторами $\underset{i+1}{\boldsymbol{\eta}}_1$ и $\overrightarrow{N_{i+1}P_i}$, условие касания этой плоскости с поверхностью (P_i) в точке P_i напишется в виде уравнения

$$(d\boldsymbol{P}_i, \ \overrightarrow{N_{i+1}P_i}, \ \underset{i+1}{\boldsymbol{\eta}}_1) = 0, \tag{a}$$

где круглые скобки означают скалярное произведение трех векторов.

Между тем простой подсчет по формулам (2α, γ) дает

$$\begin{gathered} d\boldsymbol{P}_i = \underset{i}{\boldsymbol{\eta}}_1 (dt_i + \underset{i}{\Omega}{}^1 + h_i \underset{i}{\Omega}{}_3^1) + \underset{i}{\boldsymbol{\eta}}_2 (\underset{i}{\Omega}{}^2 + h_i \underset{i}{\Omega}{}_3^2 + t_i \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \underset{i}{A}) + \\ + \boldsymbol{I}_3 \{ (h_1 - h_2) \underset{i}{H} + t_i \underset{i}{\Omega}{}_1^3 \}, \quad \varepsilon_i = (-1)^i, \end{gathered} \tag{b}$$

и

$$\overrightarrow{N_{i+1}P_i} = \underset{i}{\boldsymbol{\eta}}_1 t_i - \varepsilon_i \boldsymbol{I}_3 (h_1 - h_2),$$

$$\underset{i+1}{\boldsymbol{\eta}}_1 = \underset{i}{\boldsymbol{\eta}}_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \varepsilon_i \underset{i}{\boldsymbol{\eta}}_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Внося это в уравнение (a), приведем его к виду

$$dt_i = \underset{i}{\mathscr{A}} t_i^2 + \underset{i}{\mathscr{B}} t_i + \underset{i}{\mathscr{C}}, \tag{3α}$$

где

$$\begin{gathered} \underset{i}{\mathscr{A}} = -\varepsilon_i \frac{\underset{i}{\Omega}{}_1^3}{h_1 - h_2}, \qquad \underset{i}{\mathscr{B}} = -\varepsilon_i \underset{i}{H} + \varepsilon_i \underset{i}{A} \cos(\alpha_1 - \alpha_2), \\ \underset{i}{\mathscr{C}} = \varepsilon_i \frac{\underset{i+1}{\Omega}{}^2 + h_i \underset{i+1}{\Omega}{}_3^2}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}. \end{gathered} \tag{3β}$$

270. Система уравнений расслояемой пары. Уравнение (3α) определяет однопараметрическое семейство поверхностей (P_i), следовательно, должно быть вполне интегрируемо, и его внешний дифференциал должен быть алгебраическим следствием самого уравнения.

Между тем по исключении dt_i внешний дифференциал уравнения (3α) принимает вид

$$t_i^2\{D\mathcal{A}+[\mathcal{B}\mathcal{A}]\}+t_i\{D\mathcal{B}+2[\mathcal{C}\mathcal{A}]\}+D\mathcal{C}+[\mathcal{C}\mathcal{B}]=0.$$

Поскольку это равенство должно быть тождеством не только относительно независимых переменных и их дифференциалов, но также и относительно неизвестной функции t_i, коэффициенты при степенях t_i обращаются в нуль, и мы получаем три уравнения:

$$D\mathcal{A}+[\mathcal{B}\mathcal{A}]=0,\quad D\mathcal{B}+2[\mathcal{C}\mathcal{A}]=0,\quad D\mathcal{C}+[\mathcal{C}\mathcal{B}]=0. \tag{a}$$

Для преобразования этих уравнений, а также и в дальнейшем нам понадобятся тождественные соотношения между формами (2α) и их внешними дифференциалами. Они легко проверяются:

$$\begin{aligned}
&\underset{1}{\Omega_2^3}\sin(\alpha_1-\alpha_2)=\underset{1}{\Omega_1^3}\cos(\alpha_1-\alpha_2)-\underset{2}{\Omega_1^3},\\
&\underset{2}{\Omega_2^3}\sin(\alpha_1-\alpha_2)=\underset{1}{\Omega_1^3}-\underset{2}{\Omega_1^3}\cos(\alpha_1-\alpha_2),\\
&\underset{1}{\Omega^1}\sin(\alpha_1-\alpha_2)=\underset{2}{\Omega^2}-\underset{1}{\Omega^2}\cos(\alpha_1-\alpha_2),\\
&\underset{2}{\Omega^1}\sin(\alpha_1-\alpha_2)=\underset{2}{\Omega^2}\cos(\alpha_1-\alpha_2)-\underset{1}{\Omega^2},
\end{aligned} \tag{4α}$$

$$\begin{aligned}
&[\underset{1}{\Omega_k^3}\underset{2}{\Omega_k^3}]=-\sin(\alpha_1-\alpha_2)[\omega_{13}\omega_{23}] \qquad (k=1,\ 2),\\
&[\underset{i}{\Omega_1^3}\underset{i}{\Omega_2^3}]=[\omega_{13}\omega_{23}],\quad [\underset{1}{\Omega_1^3}\underset{2}{\Omega_2^3}]=[\underset{2}{\Omega_1^3}\underset{1}{\Omega_2^3}]=[\omega_{13}\omega_{23}]\cos(\alpha_1-\alpha_2),\\
&D\underset{i}{\Omega_1^3}=[\underset{i}{A}\underset{i}{\Omega_2^3}]\sin(\alpha_1-\alpha_2),\qquad D\underset{i}{\Omega_2^3}=-[\underset{i}{A}\underset{i}{\Omega_1^3}]\sin(\alpha_1-\alpha_2),\\
&D\underset{i}{\Omega^1}=[\underset{i}{A}\underset{i}{\Omega^2}]\sin(\alpha_1-\alpha_2)-[\omega_3\underset{i}{\Omega_1^3}],\\
&D\underset{i}{\Omega^2}=-[\underset{i}{A}\underset{i}{\Omega^1}]\sin(\alpha_1-\alpha_2)-[\omega_3\underset{i}{\Omega_2^3}],
\end{aligned} \tag{4β}$$

$$\begin{aligned}
&D\underset{i}{A}=-[\underset{1}{A}\underset{2}{A}]\cos(\alpha_1-\alpha_2)-\frac{[\omega_{13}\omega_{23}]}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)},\\
&D\underset{i}{H}=-[\underset{1}{H}\underset{2}{H}]+\frac{[\omega_1\omega_{13}]+[\omega_2\omega_{23}]}{h_1-h_2}=\\
&\qquad=-[\underset{1}{H}\underset{2}{H}]+\frac{[\underset{2}{\Omega^2}\underset{1}{\Omega_1^3}]-[\underset{1}{\Omega^2}\underset{2}{\Omega_1^3}]}{(h_1-h_2)\sin(\alpha_1-\alpha_2)}.
\end{aligned} \tag{4γ}$$

С помощью этих тождеств, а также формул (3γ) мы приведем уравнения (a) к виду

$$[\underset{i}{A}\underset{i+1}{\Omega_1^3}]-[\underset{i+1}{H}\underset{i}{\Omega_1^3}]=0, \tag{5α}$$

$$[\underset{1}{A}\underset{2}{A}]-[\underset{1}{H}\underset{2}{H}]+\varepsilon_i\frac{[\underset{1}{\Omega^2}\underset{2}{\Omega_1^3}]+[\underset{2}{\Omega^2}\underset{1}{\Omega_1^3}]}{(h_1-h_2)\sin(\alpha_1-\alpha_2)}+
\\ +\varepsilon_i\frac{h_1+h_2}{h_1-h_2}\operatorname{ctg}(\alpha_1-\alpha_2)[\omega_{13}\omega_{23}]=0, \tag{5β}$$

$$[\underset{i+1}{A},\ \underset{i}{\Omega^2}-h_i\underset{i}{\Omega_2^3}]-[\underset{i}{H},\ \underset{i+1}{\Omega^2}-h_{i+1}\underset{i+1}{\Omega_2^3}]=0. \tag{5γ}$$

Полагая здесь $i=1,\ 2$, мы получим шесть внешних квадратичных уравнений, которые при заданной конгруэнции (r) должны удовлетворяться выбором четырех неизвестных функций α_i, h_i. Если уравнения (5α — γ) удовлетворены, то функции α_i, h_i определяют расслояемую пару, присоединенную к конгруэнции (r).

271. Теорема об асимметрии и эксцентриситете. Уравнение (5β) содержит индекс i только в коэффициенте $\varepsilon_i=(-1)^i$, определяющем знак двух последних членов. Беря сумму или разность двух уравнений, получаемых при $i=1,\ 2$, мы придем по сокращении на не равные нулю множители $\frac{1}{h_1-h_2}$, $\frac{1}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}$ к двум уравнениям:

$$[\underset{1}{A}\underset{2}{A}]-[\underset{1}{H}\underset{2}{H}]=0, \tag{6α}$$

$$[\underset{1}{\Omega^2}\underset{2}{\Omega_1^3}]+[\underset{2}{\Omega^2}\underset{1}{\Omega_1^3}]+(h_1+h_2)\cos(\alpha_1-\alpha_2)[\omega_{13}\omega_{23}]=0. \tag{6β}$$

Второе уравнение содержит неизвестные α_i, h_i в конечном виде и допускает простое геометрическое истолкование. Чтобы получить его, надо канонизировать репер T, присоединенный к лучу конгруэнции (r).

Рассмотрим сначала случай действительных различных фокусов луча r; случай мнимых фокусов приводится к предыдущему, если воспользоваться комплексным репером.

Если

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{O}+\rho\boldsymbol{I}_3 \tag{a}$$

есть фокус луча r и φ — угол касательной плоскости поверхности (F) с осью $\boldsymbol{I}_1$, то для всех перемещений точки $\boldsymbol{F}$ смещение $d\boldsymbol{F}$ лежит в плоскости, определяемой векторами $\boldsymbol{I}_1\cos\varphi+\boldsymbol{I}_2\sin\varphi$ и $\boldsymbol{I}_3$, откуда

$$(d\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{I}_1\cos\varphi+\boldsymbol{I}_2\sin\varphi,\ \boldsymbol{I}_3)=0. \tag{b}$$

Дифференцируя равенство (a) по формулам (1α) и внося результат в уравнение (b), получим:

$$\rho(\omega_{13}\sin\varphi-\omega_{23}\cos\varphi)=\omega_1\sin\varphi-\omega_2\cos\varphi. \tag{7α}$$

Если поместить вершину трехгранника O в середину фокального отрезка F_1F_2, а грани I_1I_3 и I_2I_3 совместить с биссекторами углов между фокальными плоскостями так, чтобы координаты фокусов и углы, определяющие фокальные плоскости, были (трехгранник Гишара)

$$\rho_1=\rho, \qquad \rho_2=-\rho, \qquad \varphi_1=\varphi, \qquad \varphi_2=-\varphi,$$

то уравнение (7α) даст

$$\omega_1=-\rho\operatorname{ctg}\varphi\omega_{23}, \qquad \omega_2=-\rho\operatorname{tg}\varphi\omega_{13} \tag{7β}$$

и по формулам (2α)

$$\begin{aligned}\Omega^1_i&=-\rho(\omega_{13}\sin\alpha_i\operatorname{tg}\varphi+\omega_{23}\cos\alpha_i\operatorname{ctg}\varphi),\\ \Omega^2_i&=-\rho(\omega_{13}\cos\alpha_i\operatorname{tg}\varphi-\omega_{23}\sin\alpha_i\operatorname{ctg}\varphi)\end{aligned} \tag{7γ}$$

и

$$[\Omega^2_1\Omega^3_2]+[\Omega^2_2\Omega^3_1]=-\rho\frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\varphi\cos\varphi}[\omega_{13}\omega_{23}].$$

Уравнение (6β) теперь по сокращении на $[\omega_{13}\omega_{23}]\neq 0$ примет вид

$$\frac{2\rho}{\sin 2\varphi}\sin(\alpha_1+\alpha_2)=(h_1+h_2)\cos(\alpha_1-\alpha_2). \tag{8}$$

Уравнение (8) допускает словесную формулировку. Здесь 2ρ есть расстояние между фокусами F_1F_2, 2φ — угол между фокальными плоскостями; следовательно, $\frac{2\rho}{\sin 2\varphi}$ — расстояние между граничными точками луча r *).

Разность $\alpha_1-\alpha_2$ равняется углу между соответствующими лучами r_1, r_2 пары конгруэнций.

Если через ось I_3 трехгранника T провести плоскости, содержащие лучи r_1 или r_2, то биссектор угла $\alpha_1-\alpha_2$ между этими плоскостями образует с гранью I_1I_3 трехгранника угол $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$. При обращении в нуль этого угла биссектор угла между плоскостями I_3r_1 и I_3r_2 совпадает с биссекторной плоскостью угла между фокальными плоскостями луча r, и мы будем говорить, что лучи r_1, r_2 расположены *симметрично* относительно фокальных плоскостей общего перпендикуляра r. Угол $A=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$ мы будем называть *асимметрией* пары (r_1, r_2). Аналогично расстояние $\frac{h_1+h_2}{2}$ между центром O луча r и srединой отрезка N_1N_2, отсекаемого лучами r_1, r_2 на их общем перпендикуляре r, мы будем называть *эксцентриситетом* расслояемой пары (r_1, r_2).

*) Т. К., стр. 73.

Пользуясь этой терминологией, мы можем высказать теорему, эквивалентную равенству (8).

Теорема. *Если общий перпендикуляр двух соответствующих лучей расслояемой пары имеет два различных, собственных фокуса, то отношение двойного эксцентриситета пары к синусу двойной асимметрии равно отношению расстояния между граничными точками общего перпендикуляра двух лучей к косинусу угла между ними.*

272. Случай параболической конгруэнции (r). Доказанная теорема сохраняет силу и в случае параболической конгруэнции общих перпендикуляров.

Если конгруэнция (r) параболическая, то мы совместим вершину O трехгранника T с единственным фокусом луча, а вектор I_1 расположим в касательной плоскости фокальной поверхности. Тогда в уравнении (7α) можно положить $\rho=0$, $\varphi=0$, что дает

$$\omega_2=0 \tag{9α}$$

на всей конгруэнции. Полагая в уравнении (7α)

$$\omega_1=a\omega_{13}+b\omega_{23},$$

получим, сравнивая коэффициенты при ω_{13}, ω_{23}:

$$(\rho-a)\sin\varphi=0, \qquad \rho\cos\varphi+b\sin\varphi=0.$$

Из первого уравнения получаем или $\varphi=0$, и тогда второе даст $\rho=0$, что соответствует первому фокусу в точке O, или $\rho=a$, что даст второй фокус. Так как фокусы совпадают, то $a=0$ и

$$\omega_1=b\omega_{23}. \tag{9β}$$

Теперь по формулам (2α)

$$\Omega^1_i=b\cos\alpha_i\omega_{23}, \qquad \Omega^2_i=-b\sin\alpha_i\omega_{23}, \tag{9γ}$$

и уравнение (6β) по сокращении на $[\omega_{13}\omega_{23}]\neq 0$ даст

$$b\sin(\alpha_1+\alpha_2)=-(h_1+h_2)\cos(\alpha_1-\alpha_2). \tag{9δ}$$

Между тем нормаль в точке $M=O+tI_3$ к линейчатой поверхности

$$\omega_{13}=\lambda\omega_{23}$$

конгруэнции (r) определяется вектором

$$I_3\times dM=I_3\times\{I_1(\omega_1-t\omega_{13})+I_2(\omega_2-t\omega_{23})\},$$

или по сокращении на ω_{23}

$$I_1t+I_2(b-\lambda t).$$

При $t\to\infty$ нормаль становится параллельной вектору $I_1-\lambda I_2$; в центре образующей она перпендикулярна к этому вектору. Отсюда, согласно теореме Шаля *), абсцисса t центра определяется уравнением

$$\{I_1 t + I_2(b - \lambda t)\}(I_1 - \lambda I_2) = 0,$$

или

$$t - \lambda(b - t\lambda) = 0, \quad \text{т. е.} \quad t = \frac{\lambda}{1+\lambda^2} b.$$

При изменении $-\infty < \lambda < +\infty$ центр дважды проходит отрезок $-\frac{b}{2} < t < \frac{b}{2}$, достигая крайних значений при $\lambda = \pm 1$. Отсюда $t_1 = -\frac{b}{2}$, $t_2 = \frac{b}{2}$ — граничные точки луча, и расстояние между ними равно b.

Теорема предыдущего пункта сохраняет силу и для параболической конгруэнции.

273. Исследование системы. Обратимся к исследованию системы (5α, γ), (6α, β).

В проективной теории расслояемых пар, как мы видели, из шести внешних квадратичных уравнений, определяющих пару, независимых было только пять. К такому же результату мы придем и при исследовании системы (5α, γ), (6α, β). Однако здесь это может произойти двумя различными способами.

Чтобы показать это, надо дать алгебраическое разрешение системы (5α, γ) линейными уравнениями по лемме Картана.

Будем предполагать, что конгруэнция (r) не распадается на семейство цилиндров (имеет невырожденное сферическое изображение); следовательно, формы ω_{13}, ω_{23}, определяющие инфинитезимальные смещения dI_3, линейно независимы. Тогда будут линейно независимы при $\alpha_1 - \alpha_2 \neq 0$ и формы $\underset{1}{\Omega_1^3}$, $\underset{2}{\Omega_1^3}$, определяемые формулами (2α).

Прилагая лемму Картана к квадратнчным уравнениям (5α), получим:

$$\begin{aligned} \underset{1}{A} &= a_1 \underset{1}{\Omega_1^3} + a_2 \underset{2}{\Omega_1^3}, & \underset{2}{A} &= -b_3 \underset{1}{\Omega_1^3} + b_1 \underset{2}{\Omega_1^3}, \\ \underset{2}{H} &= a_3 \underset{1}{\Omega_1^3} - a_1 \underset{2}{\Omega_1^3}, & \underset{1}{H} &= -b_1 \underset{1}{\Omega_1^3} - b_2 \underset{2}{\Omega_1^3}. \end{aligned} \tag{10α}$$

Внося эти выражения в уравнения (5γ), получим два уравнения, из которых первое пишется:

$$\begin{aligned} a_1 \{[\underset{1}{\Omega_1^3},\ \underset{2}{\Omega^2} - h_2 \underset{2}{\Omega_2^3}] + [\underset{2}{\Omega_1^3},\ \underset{1}{\Omega^2} - h_1 \underset{1}{\Omega_2^3}]\} &+ \\ + a_2 [\underset{2}{\Omega_1^3},\ \underset{2}{\Omega^2} - h_2 \underset{2}{\Omega_2^3}] - a_3 [\underset{1}{\Omega_1^3},\ \underset{1}{\Omega^2} - h_1 \underset{1}{\Omega_2^3}] &= 0, \end{aligned} \tag{a}$$

а второе получается заменой a_k на b_k.

*) С. П. Фиников, Теория поверхностей, Москва, 1934, стр. 48.

Между тем уравнение (6β), в силу последних соотношений (4β), можно записать в виде

$$[\underset{1}{\Omega_1^3} \underset{2}{\Omega^2}] + [\underset{2}{\Omega_1^3} \underset{1}{\Omega^2}] - h_1 [\underset{2}{\Omega_1^3} \underset{1}{\Omega_2^3}] - h_2 [\underset{1}{\Omega_1^3} \underset{2}{\Omega_2^3}] = 0, \tag{6β'}$$

что прямо совпадает с коэффициентом при a_1 в уравнении (а). Таким образом, в силу уравнения (6β) уравнение (а) и то, которое получается из него заменой a_k на b_k, принимают вид

$$\begin{aligned} a_2 [\underset{2}{\Omega_1^3},\ \underset{2}{\Omega^2} - h_2 \underset{2}{\Omega_2^3}] - a_3 [\underset{1}{\Omega_1^3},\ \underset{1}{\Omega^2} - h_1 \underset{1}{\Omega_2^3}] &= 0, \\ b_2 [\underset{2}{\Omega_1^3},\ \underset{2}{\Omega^2} - h_2 \underset{2}{\Omega_2^3}] - b_3 [\underset{1}{\Omega_1^3},\ \underset{1}{\Omega^2} - h_1 \underset{1}{\Omega_2^3}] &= 0. \end{aligned} \tag{10β}$$

Отсюда две возможности:

1. Общий случай. Внешние произведения, стоящие множителями при a_k и b_k, не равны нулю. Тогда из уравнений (10β) следует пропорциональность

$$a_2 : a_3 = b_2 : b_3. \tag{10α'}$$

Между тем после подстановки выражений (10α) в уравнение (6α) оно привимает вид

$$[\underset{1}{\Omega_1^3} \underset{2}{\Omega_1^3}](a_3 b_2 - a_2 b_3) = 0,$$

следовательно, является следствием уравнений (10β). Таким образом, из уравнений (5α, γ), (6β) вытекает справедливость уравнения (6α). Система (5α, γ) эквивалентна системе пяти уравнений (5α, γ), (6β) с наиболее общим интегральным элементом $\mathfrak{E}_2$, определяемым уравненнями (10α, γ):

$$\underset{2}{\Omega^2} - h_2 \underset{2}{\Omega_2^3} = c_1 \underset{1}{\Omega_1^3} + c_2 \underset{2}{\Omega_1^3}, \qquad \underset{1}{\Omega^2} - h_1 \underset{1}{\Omega_2^3} = c_2 \underset{1}{\Omega_1^3} + c_3 \underset{2}{\Omega_1^3}, \tag{10γ}$$

где параметры a_i, b_i, c_i связаны уравнениями ($10\alpha'$, β'):

$$a_2 c_1 + a_3 c_3 = 0. \tag{10β'}$$

2. Специальный случай. Если внешние произведения в уравнениях (10β) обращаются в нуль:

$$\begin{aligned} [\underset{1}{\Omega_1^3} \underset{1}{\Omega^2}] &= h_1 [\underset{1}{\Omega_1^3} \underset{1}{\Omega_2^3}], \\ [\underset{2}{\Omega_1^3} \underset{2}{\Omega^2}] &= h_2 [\underset{2}{\Omega_1^3} \underset{2}{\Omega_2^3}], \end{aligned} \tag{11α}$$

то уравнение (а) исчезает; следовательно, уравнения (5γ) являются следствием уравнений (5α), (6β), (11α). Развертывая уравнения (11α) по лемме Картана

$$\begin{aligned} \underset{1}{\Omega^2} &= h_1 \underset{1}{\Omega_2^3} + \lambda \underset{1}{\Omega_1^3}, \\ \underset{2}{\Omega^2} &= h_2 \underset{2}{\Omega_2^3} + \lambda' \underset{2}{\Omega_1^3} \end{aligned} \tag{11β}$$

и внося в уравнения (6β) или, что то же, в уравнения (6β′), немедленно получим:

$$\lambda' = \lambda, \qquad (11\gamma)$$

а уравнение (6α) попрежнему дает

$$a_3 b_2 - a_2 b_3 = 0. \qquad (11\delta)$$

Таким образом, особое решение системы (5α—γ), если оно существует, определяется шестью линейными уравнениями (10α), (11β), где дополнительные неизвестные a_k, $b_k \lambda$, λ' связаны двумя конечными соотношениями (11γ, δ).

274. Теорема существования. Мы видели, что при $[\omega_{13}\omega_{23}] \neq 0$ в общем случае система приводится к пяти уравнениям (5α, γ), (6β). Характеристическая система, кроме форм ω_{13}, ω_{23} или эквивалентной пары $\underset{1}{\Omega}{}^3_1$, $\underset{2}{\Omega}{}^3_1$, независимых на интегральном многообразии, содержит четыре формы

$$\underset{1}{A},\ \underset{2}{A},\ \underset{1}{H},\ \underset{2}{H}, \qquad (a)$$

эквивалентных дифференциалам $d\alpha_i$, $dh_i\ (i = 1,\ 2)$, и две формы

$$\underset{1}{\Omega}{}^2,\quad \underset{2}{\Omega}{}^3 \qquad (b)$$

эквивалентных формам ω_1, ω_2. Все формы $\underset{i}{\Omega}{}^3_k$ линейно зависят от ω_{13}, ω_{23}, а стало быть от $\underset{1}{\Omega}{}^3_1$, $\underset{2}{\Omega}{}^3_1$.

Если конгруэнция (r) дана, то формы (b) линейно зависят от ω_{13}, ω_{23}, система пяти независимых квадратичных уравнений будет содержать только четыре неизвестные функции и без дополнительных условий на конгруэнцию (r) будет не совместна. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что в проективном пространстве произвольная расслояемая пара зависит от одной функции двух аргументов. Поскольку с расслояемой парой связана только одна конгруэнция общих перпендикуляров, а произвольная конгруэнция зависит от двух функций двух аргументов, конгруэнция (r) не произвольная.

Если мы будем искать расслояемую пару вместе с ее конгруэнцией общих перпендикуляров, то все шесть форм (a) и (b) будут независимы; характеристическая система будет содержать шесть неизвестных функций, дифференциалы которых представлены формами (a) и (b). Интегральный элемент $\mathfrak{E}_2$ определяется формулами (10α, γ), (10α′, β′) с произволом $N = 7$ параметров. На первом линейном элементе цепи формы (a), (b) все имеют произвольные значения; на втором пять из них определяются из билинейных уравнений, присоединенных к квадратичным (5α, γ), (6β′); например, могут быть определены значения форм $\underset{i}{A}$, $\underset{i}{H}$, $\underset{1}{\Omega}{}^3$, если значения форм $\underset{i}{\Omega}{}^2$, $\underset{i}{\Omega}{}^3_1$ на первом линейном элементе выбраны так, чтобы произведение

$$\{(\underset{1}{\Omega}{}^2 - h_1 \underset{1}{\Omega}{}^3_2)\, \underset{2}{\Omega}{}^3_1 - (\underset{2}{\Omega}{}^2 - h_2 \underset{2}{\Omega}{}^3_2)\, \underset{1}{\Omega}{}^3_1\}\, \underset{1}{\Omega}{}^3_1$$

было отлично от нуля. Значение формы $\underset{2}{\Omega}{}^2$ и на втором линейном элементе цепи будет произвольно. Система — в инволюции с характерами $s_1 = 5$, $s_2 = 1$ и определяет интегральное многообразие с произволом одной функции от двух аргументов.

275. Особое решение — специальные пары. Как мы видели (п. 273), особое решение определяется системой линейных уравнений (10α), (11β) с конечными уравнениями (11γ, δ) или алгебраически эквивалентной системой уравнений (5α), (6α), (11β, γ).

В силу (11γ), уравнения (11β) принимают вид

$$\begin{aligned} \underset{1}{\Omega}{}^2 &= h_1 \underset{1}{\Omega}{}^3_2 + \lambda \underset{1}{\Omega}{}^3_1, \\ \underset{2}{\Omega}{}^2 &= h_2 \underset{2}{\Omega}{}^3_2 + \lambda \underset{2}{\Omega}{}^3_1. \end{aligned} \qquad (12\alpha)$$

Дифференцируя их внешним образом с учетом уравнений (5α), получим:

$$\begin{aligned} &\left[d\lambda - \frac{h_1 - h_2}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)} \{\underset{1}{A} + \underset{2}{A} - (\underset{1}{H} + \underset{2}{H}) \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\},\ \underset{1}{\Omega}{}^3_1\right] = 0, \\ &\left[d\lambda + \frac{h_1 - h_2}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)} \{\underset{1}{A} + \underset{2}{A} - (\underset{1}{H} + \underset{2}{H}) \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\},\ \underset{2}{\Omega}{}^3_1\right] = 0. \end{aligned} \qquad (12\beta)$$

Характеристическая система уравнений (5α), (6α), (12α, β) содержит, кроме форм $\underset{1}{\Omega}{}^3_1$, $\underset{2}{\Omega}{}^3_1$, независимых на интегральном многообразии, и двух форм $\underset{1}{\Omega}{}^2$, $\underset{2}{\Omega}{}^2$, значения которых на интегральном многообразии определяются уравнениями (12α), еще пять форм:

$$\underset{1}{A},\ \underset{2}{A},\ \underset{1}{H},\ \underset{2}{H},\ d\lambda. \qquad (a)$$

Наиболее общий двумерный интегральный элемент определяется уравнениями (10α), где коэффициенты a_i, b_i связаны соотношением (11δ) и равенством

$$\begin{aligned} d\lambda = \frac{h_1 - h_2}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)} \Big(&\{-a_1 + b_3 + (a_3 - b_1)\cos(\alpha_1 - \alpha_2)\}\, \underset{1}{\Omega}{}^3_1 + \\ &+ \{a_2 + b_1 + (a_1 + b_2)\cos(\alpha_1 - \alpha_2)\}\, \underset{2}{\Omega}{}^3_1 \Big), \end{aligned} \qquad (12\gamma)$$

и зависит от $N = 5$ произвольных параметров.

На первом линейном элементе цепи значения форм (a) произвольны, на втором они определяются из билинейных уравнений, которые присоединены к квадратичным (5α), (6α), (12β) и имеют вид

$$\underset{1}{A}\eta-\underset{2}{H}\xi=0,\quad \underset{2}{A}\xi-\underset{1}{H}\eta=0,$$

$$\underset{1}{A}(-b_1\eta+b_3\xi)+\underset{2}{A}(a_1\xi+a_2\eta)+\underset{1}{H}(a_3\xi-a_1\eta)+\underset{2}{H}(b_1\xi+b_2\eta)=0,$$

$$\left(d\lambda-\frac{h_1-h_2}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}\{\underset{1}{A}+\underset{2}{A}-(\underset{1}{H}+\underset{2}{H})\cos(\alpha_1-\alpha_2)\}\right)\xi=0, \tag{b}$$

$$\left(d\lambda+\frac{h_1-h_2}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}\{\underset{1}{A}+\underset{2}{A}-(\underset{1}{H}+\underset{2}{H})\cos(\alpha_1-\alpha_2)\}\right)\eta=0.$$

Здесь через ξ и η обозначены значения форм $\underset{1}{\Omega_1^3}$, $\underset{2}{\Omega_1^3}$ на первом линейном элементе цепи, а правые части уравнений (известные члены) отброшены (полярная система). Система линейных уравнений (b) относительно неизвестных (a) имеет ранг $s_1=5$ и определяет эти неизвестные, если определитель системы

$$(\xi+\eta)\{(b_2\eta^2+b_3\xi^2)(\eta-\xi\cos(\alpha_1-\alpha_2))-$$
$$-(a_2\eta^2+a_3\xi^2)(\xi-\eta\cos(\alpha_1-\alpha_2))\} \tag{c}$$

отличен от нуля. Система уравнений (12α, β), (5α), (6α) при этом будет в инволюции с характерами $s_1=5$, $s_2=0$ и определит специальные расслояемые пары с произволом пяти функций одного аргумента.

276. Особый случай специальных пар. Поскольку определитель (c) после раскрытия скобок приводится к виду

$$(\xi+\eta)(\eta^3\{b_2+a_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)\}-\eta^2\xi\{a_2+b_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)\}+$$
$$+\xi^2\eta\{b_3+a_3\cos(\alpha_1-\alpha_2)\}-\xi^3\{a_3+b_3\cos(\alpha_1-\alpha_2)\}),$$

обращение его в нуль независимо от выбора ξ, η может иметь место только при условии

$$a_2=0,\qquad a_3=0,\qquad b_2=0,\qquad b_3=0.$$

Уравнения (10α) теперь принимают вид

$$\underset{1}{A}=a_1\underset{1}{\Omega_1^3},\qquad \underset{2}{A}=b_1\underset{2}{\Omega_1^3},\qquad \underset{1}{H}=-b_1\underset{1}{\Omega_1^3},\qquad \underset{2}{H}=-a_1\underset{2}{\Omega_1^3}. \tag{13α}$$

Их внешние дифференциалы будут:

$$\left[da_1+\left\{a_1^2-a_1b_1\cos(\alpha_1-\alpha_2)+\frac{1}{\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}\right\}\underset{2}{\Omega_1^3},\ \underset{1}{\Omega_1^3}\right]=0,$$

$$\left[da_1+\left\{-2a_1b_1-\frac{\operatorname{ctg}(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}-\frac{2\lambda}{(h_1-h_2)\sin(\alpha_1-\alpha_2)}\right\}\underset{1}{\Omega_1^3},\ \underset{2}{\Omega_1^3}\right]=0,$$

$$\left[db_1+\left\{-2a_1b_1-\frac{\operatorname{ctg}(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}-\frac{2\lambda}{(h_1-h_2)\sin(\alpha_1-\alpha_2)}\right\}\Omega_1^3,\ \underset{1}{\Omega_1^3}\right]=0,$$

$$\left[db_1+\left\{b_1^2-a_1b_1\cos(\alpha_1-\alpha_2)+\frac{1}{\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}\right\}\underset{1}{\Omega_1^3},\ \underset{2}{\Omega_1^3}\right]=0.$$

Отсюда

$$da_1=\left\{2a_1b_1+\frac{\operatorname{ctg}(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}+\frac{2\lambda}{(h_1-h_2)\sin(\alpha_1-\alpha_2)}\right\}\underset{1}{\Omega_1^3}-$$
$$-\left\{a_1^2-a_1b_1\cos(\alpha_1-\alpha_2)+\frac{1}{\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}\right\}\underset{2}{\Omega_1^3}, \tag{13β}$$

$$db_1=\left\{b_1^2-a_1b_1\cos(\alpha_1-\alpha_2)+\frac{1}{\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}\right\}\underset{1}{\Omega_1^3}-$$
$$-\left\{-2a_1b_1-\frac{\operatorname{ctg}(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}-\frac{2\lambda}{(h_1-h_2)\sin(\alpha_1-\alpha_2)}\right\}\underset{2}{\Omega_1^3}, \tag{13γ}$$

и уравнение (12γ) примет вид

$$d\lambda=\frac{h_1-h_2}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}(\{-a_1-b_1\cos(\alpha_1-\alpha_2)\}\underset{1}{\Omega_1^3}+$$
$$+\{b_1+a_1\cos(\alpha_1-\alpha_2)\}\underset{2}{\Omega_1^3}). \tag{13δ}$$

Внешние дифференциалы уравнений ($13\beta-\delta$) удовлетворены в силу уравнений системы. Система (12α), ($13\alpha-\delta$) вполне интегрируема и определяет особые специальные пары с девятью произвольными постоянными.

Геометрический смысл уравнений (12α), (13α) нетрудно выяснить. Уравнения (2γ) теперь принимают вид

$$dN_i=\underset{i}{\eta_1}(\underset{i}{\Omega^1}-h_i\underset{i}{\Omega_1^3})+\underset{i}{\eta_2}\lambda\underset{i}{\Omega_1^3}-I_3 2hc_{i+1}\underset{i}{\Omega_1^3}, \tag{a}$$
$$d\underset{i}{\eta_1}=\{\underset{i}{\eta_2}c_i\sin(\alpha_1-\alpha_2)+I_3\}\underset{i}{\Omega_1^3},$$

где

$$c_1=a_1,\qquad c_2=b_1,\qquad \frac{h_1-h_2}{2}=h.$$

При $\underset{i}{\Omega_1^3}=0$ дифференциал $d\underset{i}{\eta_1}$ обращается в нуль, а dN_i пропорционален $\underset{i}{\eta_1}$; следовательно, луч r_i стоит на месте. Каждая конгруэнция пары вырождается в линейчатую поверхность.

277. Геометрическая характеристика специальных пар. Рассмотрим сначала случай гиперболической конгруэнции (r). Отнесем ее к трехграннику Гишара (7β, γ) п. 271. Пользуясь формулами (2α), (7β), мы получим, сравнивая коэффициенты при ω_{13}, ω_{23} в уравнениях (12α):

$$\rho\operatorname{ctg}\varphi\cos\alpha_i=h_i\sin\alpha_i-\lambda\cos\alpha_i,$$
$$\rho\operatorname{tg}\varphi\sin\alpha_i=h_i\cos\alpha_i+\lambda\sin\alpha_i,$$

откуда, исключая λ или h_i, получим:

$$\frac{h_i}{\sin 2\alpha_i}=\frac{\rho}{\sin 2\varphi},\qquad \lambda=-\frac{\rho}{\sin 2\varphi}(\cos 2\varphi+\cos 2\alpha_i). \tag{14α}$$

Поскольку λ не зависит от выбора $i=1,\ 2$, два значения α_i могут отличаться только знаком, а тогда, в силу первого равенства, и два значения h_i отличаются только знаком:

$$h_1=h, \quad h_2=-h, \quad \alpha_1=\alpha, \quad \alpha_2=-\alpha. \tag{14α'}$$

Эксцентриситет и асимметрия (п. 271) пары равны нулю. Такие пары мы будем называть *симметричными*.

Таким образом, *специальные пары, присоединенные к гиперболической конгруэнции общих перпендикуляров, симметричны*.

Формулы (14α) теперь принимают вид

$$\frac{h}{\sin 2\alpha}=\frac{\rho}{\sin 2\varphi}, \quad \lambda=-\frac{\rho}{\sin 2\varphi}(\cos 2\varphi+\cos 2\alpha). \tag{14β}$$

Соотношения (14α') позволяют записать уравнения (12α), а также (4α) в виде

$$\begin{aligned}
&\underset{1}{\Omega^2}=-\rho \operatorname{ctg} 2\varphi\, \underset{1}{\Omega^3_1}-\frac{\rho}{\sin 2\varphi}\underset{2}{\Omega^3_1},\\
&\underset{1}{\Omega^1}=-\frac{\rho}{\sin 2\varphi}\left\{\underset{1}{\Omega^3_1}\frac{1-\cos 2\varphi\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}+\underset{2}{\Omega^3_1}\frac{\cos 2\varphi+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\right\},\\
&\underset{2}{\Omega^2}=-\rho \operatorname{ctg} 2\varphi\, \underset{2}{\Omega^3_1}-\frac{\rho}{\sin 2\varphi}\underset{1}{\Omega^3_1},\\
&\underset{2}{\Omega^1}=\frac{\rho}{\sin 2\varphi}\left\{\underset{1}{\Omega^3_1}\frac{\cos 2\alpha+\cos 2\varphi}{\sin 2\alpha}+\underset{2}{\Omega^3_1}\frac{1-\cos 2\varphi\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\right\},\\
&\underset{1}{\Omega^3_2}=\underset{1}{\Omega^3_1}\operatorname{ctg} 2\alpha-\underset{2}{\Omega^3_1}\frac{1}{\sin 2\alpha},\\
&\underset{2}{\Omega^3_2}=\underset{1}{\Omega^3_1}\frac{1}{\sin 2\alpha}-\underset{2}{\Omega^3_1}\operatorname{ctg} 2\alpha.
\end{aligned} \tag{14γ}$$

Формулы (2γ) принимают вид

$$\begin{aligned}
dN_i&=\underset{i}{\eta_1}(\underset{i}{\Omega^1}-h_i\underset{i}{\Omega^3_1})+\underset{i}{\eta_2}\lambda\underset{i}{\Omega^3_1}+2I_3 h\underset{i}{H},\\
d\underset{i}{\eta_1}&=\underset{i}{\eta_2}\underset{i}{A}\sin 2\alpha+I_3\underset{i}{\Omega^3_1},\\
d\underset{i}{\eta_2}&=-\underset{i}{\eta_1}\underset{i}{A}\sin 2\alpha+I_3\underset{i}{\Omega^3_2},\\
dI_3&=-\underset{i}{\eta_1}\underset{i}{\Omega^3_1}-\underset{i}{\eta_2}\underset{i}{\Omega^3_2}.
\end{aligned} \tag{14δ}$$

278. Фокальные свойства конгруэнций специальной расслояемой пары. Если F_1, F_2 — пара соответствующих фокусов конгруэнций (r_1), (r_2), определяемых радиусами-векторами

$$F_i=N_i+f_i\underset{i}{\eta_1}, \tag{a}$$

то касательная плоскость каждой фокальной поверхности (F_i) про-

ходит через луч $\underset{i}{\eta_1}$ и соответствующий ему фокус F_{i+1}. Отсюда — уравнения на абсциссы f_1, f_2 фокусов F_i

$$(dF_i,\ F_1-F_2,\ \underset{i}{\eta_1})=0,$$

справедливые для всех перемещений dF_i. Дифференцируя вектор (a) и пользуясь формулами (14γ, δ), получим в зависимости от значения $i=1,\ 2$ уравнения:

$$f_1f_2\underset{1}{\Omega^3_1}\sin 2\alpha-2f_1h\underset{1}{A}\sin 2\alpha+2f_2h\underset{1}{H}\sin 2\alpha+4h^2\frac{\cos 2\varphi+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\underset{1}{\Omega^3_1}=0,$$

$$f_1f_2\underset{2}{\Omega^3_1}\sin 2\alpha+2f_1h\underset{2}{H}\sin 2\alpha-2f_2h\underset{2}{A}\sin 2\alpha+4h^2\frac{\cos 2\varphi+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\underset{2}{\Omega^3_1}=0,$$

откуда, в силу (11δ), следуют только два независимых конечных соотношения:

$$f_1f_2-2h(a_1f_1+b_1f_2)+\frac{4h^2}{\sin^2 2\alpha}(\cos 2\varphi+\cos 2\alpha)=0, \tag{15α}$$

$$a_2f_1+b_2f_2=0; \tag{15β}$$

по исключении f_2 получим для определения координат f_1, f_1' двух фокусов F_1, F_1' луча r_1 квадратное уравнение

$$(a_2f_1)^2+2h(a_1b_2-b_1a_2)a_2f_1-4a_2b_2\frac{h^2}{\sin^2 2\alpha}(\cos 2\varphi+\cos 2\alpha)=0. \tag{15γ}$$

Отсюда для абсциссы центра на луче r_1 или r_2 (эксцентриситета e_i луча r_i) и фокального расстояния $2\rho_1$ или $2\rho_2$ имеем формулы:

$$e_1=\frac{f_1+f_1'}{2}=-h\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_2}, \quad e_2=\frac{f_2+f_2'}{2}=h\frac{a_1b_2+a_2b_1}{b_2}, \tag{15δ}$$

$$\begin{aligned}
\rho_1&=h\sqrt{\left(\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_2}\right)^2+4\frac{b_2}{a_2}\frac{\cos 2\varphi+\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}},\\
\rho_2&=h\sqrt{\left(\frac{a_1b_2-a_2b_1}{b_2}\right)^2+4\frac{a_2}{b_2}\frac{\cos 2\varphi+\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}}.
\end{aligned} \tag{15ε}$$

Нормаль к фокальной поверхности (F_i) параллельна вектору

$$\overrightarrow{F_1F_2}\times\underset{i}{\eta_1}=(-2hI_3-f_1\underset{1}{\eta_1}+f_2\underset{2}{\eta_1})\times\underset{i}{\eta_1}=-2h\underset{i}{\eta_2}+t_{i+1}\sin 2\alpha I_3. \tag{b}$$

Если теперь обозначить через $2\varphi_i$ угол фокальных плоскостей луча r_i, а через β_i угол общего перпендикуляра r с биссектором фокальных плоскостей луча r_i, так что нормали первой и второй фокальной поверхности (b) будут образовывать с вектором $\underset{i}{\eta_2}$ углы $\beta_i+\varphi_i$, то из формулы (b) получим:

$$f_{i+1}'=-\frac{2h}{\sin 2\alpha}\operatorname{tg}(\beta_i+\varphi_i), \quad f_{i+1}=-\frac{2h}{\sin 2\alpha}\operatorname{tg}(\beta_i-\varphi_i). \tag{16α}$$

Следовательно,

$$e_1+\rho_1=-\frac{2h}{\sin 2\alpha}\operatorname{tg}(\beta_2+\varphi_2),$$
$$e_1-\rho_1=-\frac{2h}{\sin 2\alpha}\operatorname{tg}(\beta_2-\varphi_2)$$

и

$$2e_{i-1}=-\frac{2h}{\sin 2\alpha}\,\frac{\sin 2\beta_i}{\cos(\beta_i-\varphi_i)\cos(\beta_i+\varphi_i)},$$
$$2\rho_{i-1}=-\frac{2h}{\sin 2\alpha}\,\frac{\sin 2\varphi_i}{\cos(\beta_i-\varphi_i)\cos(\beta_i+\varphi_i)}, \tag{16β}$$

а в силу (15β),

$$\operatorname{tg}(\beta_1-\varphi_1)\operatorname{ctg}(\beta_2-\varphi_2)=\operatorname{tg}(\beta_1+\varphi_1)\operatorname{ctg}(\beta_2+\varphi_2)=-\frac{a_2}{b_2}, \tag{16γ}$$

$$\rho_1:\rho_2=e_1:e_2=-\frac{b_2}{a_2}. \tag{16δ}$$

Значит,

$$e_i:\rho_i=\frac{\sin 2\beta_i}{\sin 2\varphi_i},\qquad \frac{\sin 2\beta_1}{\sin 2\beta_2}=\frac{\sin 2\varphi_1}{\sin 2\varphi_2}=\frac{\cos(\beta_1+\varphi_1)\sin(\beta_1-\varphi_1)}{\cos(\beta_2+\varphi_2)\sin(\beta_2-\varphi_2)},$$
$$\operatorname{tg}(\beta_1+\varphi_1)\operatorname{tg}(\beta_2-\varphi_2)=\operatorname{tg}(\beta_2+\varphi_2)\operatorname{tg}(\beta_1-\varphi_1), \tag{16ε}$$

откуда теоремы (Березина [1]):

Теорема 1. *Отношение удвоенного эксцентриситета к синусу удвоенной асимметрии каждой конгруэнции специальной пары равно расстоянию между граничными точками луча*

$$\frac{2e_i}{\sin 2\beta_i}=\frac{2\rho_i}{\sin 2\varphi_i}. \tag{17α}$$

Теорема 2. *Произведение расстояния между граничными точками луча на синусы углов наклона общего перпендикуляра к фокальным плоскостям его одно и то же для обеих конгруэнций специальной пары:*

$$\frac{2\rho_i}{\sin 2\varphi_i}\sin(\beta_i-\varphi_i)\sin(\beta_i+\varphi_i)=-\frac{2h}{\sin 2\alpha}\operatorname{tg}(\beta_1+\varphi_1)\operatorname{tg}(\beta_2-\varphi_2). \tag{17β}$$

279. Фокальные свойства конгруэнций общей расслояемой пары. Вернемся к расслояемой паре общего вида и рассмотрим фокальные свойства конгруэнций пары. Начнем со случая гиперболической конгруэнции общих перпендикуляров (r). Отнесем ее к трехграннику Гишара и воспользуемся формулами (7β)

$$\omega_1=-\rho\operatorname{ctg}\varphi\,\omega_{23},\qquad \omega_2=-\rho\operatorname{tg}\varphi\,\omega_{13}, \tag{7β′}$$

откуда следует

$$\underset{i}{\Omega}^2=\frac{\rho}{\sin 2\varphi}\left\{\frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)+\sin(\alpha_i-\alpha_{i+1})\cos 2\varphi}{\sin(\alpha_i-\alpha_{i+1})}\underset{i}{\Omega}{}_1^3-\right.$$
$$\left.-\frac{\sin 2\alpha_i}{\sin(\alpha_i-\alpha_{i+1})}\underset{i+1}{\Omega}{}_1^3\right\}. \tag{18α}$$

Если, как и в п. 278, векторы

$$\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{N}_i+f_i\underset{i}{\boldsymbol{\eta}}{}_1 \tag{a}$$

определяют пару соответствующих фокусов $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ конгруэнций (r_1), (r_2), то абсциссы их f_i должны удовлетворять уравнениям

$$(d\boldsymbol{F}_i,\ \boldsymbol{F}_1-\boldsymbol{F}_2,\ \underset{i}{\boldsymbol{\eta}}{}_1)=0, \tag{b}$$

выражающим условие расположения фокуса $\boldsymbol{F}_{i+1}$ в фокальной плоскости $\boldsymbol{F}_i$, и наоборот. Если воспользоваться формулами (2γ), а также иметь в виду соотношения

$$\underset{i+1}{\boldsymbol{\eta}}{}_1=\underset{i}{\boldsymbol{\eta}}{}_1\cos(\alpha_i-\alpha_{i+1})-\underset{i}{\boldsymbol{\eta}}{}_2\sin(\alpha_i-\alpha_{i+1}),$$
$$\boldsymbol{F}_1-\boldsymbol{F}_2=\{f_1-f_2\cos(\alpha_1-\alpha_2\}\,\underset{1}{\boldsymbol{\eta}}{}_1+f_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)\,\underset{1}{\boldsymbol{\eta}}{}_2+(h_1-h_2)\,\boldsymbol{I}_3, \tag{18β}$$

то уравнения (b) для $i=1,\ 2$ преобразуются к виду

$$f_1f_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)\,\underset{1}{\Omega}{}_1^3-f_1(h_1-h_2)\sin(\alpha_1-\alpha_2)\underset{1}{A}+$$
$$+f_2(h_1-h_2)\sin(\alpha_1-\alpha_2)\underset{1}{H}-(h_1-h_2)(\underset{1}{\Omega}{}^2-h_1\underset{1}{\Omega}{}_2^3)=0,$$
$$f_1f_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)\,\underset{2}{\Omega}{}_1^3+f_1(h_1-h_2)\sin(\alpha_1-\alpha_2)\underset{2}{H}-$$
$$-f_2(h_1-h_2)\sin(\alpha_1-\alpha_2)\underset{2}{A}-(h_1-h_2)(\underset{2}{\Omega}{}^2-h_2\underset{2}{\Omega}{}_2^3)=0,$$

откуда в силу соотношений (4α), (10α), (18α) вновь получаем уравнение (8) и еще три равенства:

$$f_1f_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)-(h_1-h_2)(a_1f_1-b_1f_2)\sin(\alpha_1-\alpha_2)+$$
$$+\frac{(h_1-h_2)^2}{2}\operatorname{ctg}(\alpha_1-\alpha_2)-(h_1-h_2)\operatorname{ctg}2\varphi=0, \tag{19α}$$

$$a_2f_1+b_2f_2=\frac{\sin 2\alpha_1}{\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}\left(\frac{\rho}{\sin 2\varphi}-\frac{h_1}{\sin 2\alpha_1}\right), \tag{19β}$$

$$a_3f_1+b_3f_2=\frac{\sin 2\alpha_2}{\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}\left(\frac{\rho}{\sin 2\varphi}-\frac{h_2}{\sin 2\alpha_2}\right). \tag{19γ}$$

Два последних уравнения относительно f_1, f_2 совпадают в силу уравнений (10β), которые теперь напишутся в виде

$$\frac{a_2}{a_3}=\frac{b_2}{b_3}=\frac{\dfrac{\rho\sin 2\alpha_1}{\sin 2\varphi}-h_1}{\dfrac{\rho\sin 2\alpha_2}{\sin 2\varphi}-h_2}. \tag{19δ}$$

Складывая уравнения (19β, γ), в силу соотношения (8), получим:

$$(a_2+a_3)f_1+(b_2+b_3)f_2+(h_1+h_2)=0. \tag{19β′}$$

Исключая из уравнений (19α, β′) неизвестное f_2, получим для f_1 квадратное уравнение

$$(a_2+a_3)f_1^2+\{h_1+h_2+(h_1-h_2)(a_1b_2+a_1b_3+a_2b_1+a_3b_1)\}f_1-$$

$$-b_1(h_1^2-h_2^2)+(b_2+b_3)\frac{h_1-h_2}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}\rho\operatorname{ctg}\varphi-$$

$$-(b_2+b_3)\frac{(h_1-h_2)^2}{2\sin(\alpha_1-\alpha_2)}\operatorname{ctg}(\alpha_1-\alpha_2)=0. \qquad (20)$$

Отсюда для абсциссы e_i центра O_i на луче r_i относительно начала N_i (эксцентриситета луча) и для фокального расстояния $2\rho_i$ имеем формулы

$$e_1=\frac{f+f_1'}{2}=-\frac{h_1+h_2}{2(a_2+a_3)}-\frac{h_1-h_2}{2(a_2+a_3)}\{a_1(b_2+b_3)+b_1(a_3+a_3)\},$$

$$2\rho_1=f_1-f_1',$$

где f_1' обозначена абсцисса второго фокуса луча r_1.

Уравнение (b) показывает, что нормали $\underset{1}{n}$, $\underset{1}{n'}$ к фокальным поверхностям (F_1), (F_1') параллельны векторным произведениям

$$(F_1-F_2)\times\underset{1}{\eta_1},\qquad (F_1'-F_2')\times\underset{1}{\eta_1},$$

откуда, в силу (18β), имеем:

$$\underset{1}{n}=\frac{h_{12}\underset{1}{\eta_2}-f_2\sin\alpha_{12}I_3}{\sqrt{h_{12}^2+(f_2)^2\sin^2\alpha_{12}}},\qquad \underset{1}{n'}=\frac{h_{12}\underset{1}{\eta_2}-f_2'\sin\alpha_{12}I_3}{\sqrt{h_{12}^2+(f_2')^2\sin^2\alpha_{12}}},$$

где

$$h_{12}=h_1-h_2,\qquad \alpha_{12}=\alpha_1-\alpha_2.$$

Обозначая через $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{a}_i'$ углы наклона общего перпендикуляра пары лучей I_3 к касательным плоскостям (F_1), (F_1'), получим:

$$\cos\mathfrak{a}_1=\frac{h_{12}}{\sqrt{h_{12}^2+(f_2)^2\sin^2\alpha_{12}}},\qquad \sin\mathfrak{a}_1=-\frac{f_2\sin\alpha_{12}}{\sqrt{h_{12}^2+(f_2)^2\sin^2\alpha_{12}}},$$

$$\cos\mathfrak{a}_1'=\frac{h_{12}}{\sqrt{h_{12}^2+(f_2')^2\sin^2\alpha_{12}}},\qquad \sin\mathfrak{a}_1'=-\frac{f_2'\sin\alpha_{12}}{\sqrt{h_{12}^2+(f_2')^2\sin^2\alpha_{12}}}.$$

Отсюда для угла $2\varphi_1=\mathfrak{a}_1-\mathfrak{a}_1'$ между фокальными плоскостями и для угла наклона общего перпендикуляра I_3 к биссектору фокальных плоскостей — асимметрии $A_1=\frac{\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_1'}{2}$ дифференциальной окрестности

луча r_1 относительно общего перпендикуляра, получаем формулы:

$$\sin 2\varphi_1=\sin(\mathfrak{a}_1-\mathfrak{a}_1')=\frac{(f_2'-f_2)h_{12}\sin\alpha_{12}}{\sqrt{h_{12}^2+(f_2)^2\sin^2\alpha_{12}}\sqrt{h_{12}^2+(f_2')^2\sin^2\alpha_{12}}},$$

$$\sin 2A_1=\sin(\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_1')=-\frac{(f_2'+f_2)h_{12}\sin\alpha_{12}}{\sqrt{h_{12}^2+(f_2)^2\sin^2\alpha_{12}}\sqrt{h_{12}^2+(f_2')^2\sin^2\alpha_{12}}}.$$

280. Теоремы Березиной [1]. Теперь сумма двойного эксцентриситета и произведения граничного расстояния на синус удвоенной асимметрии для луча r_1 имеет вид

$$2e_1+\frac{2\rho_1}{\sin 2\varphi_1}\sin 2A_1=f_1+f_1'+\frac{f_1-f_1'}{f_2-f_2'}(f_2+f_2'),$$

а произведение граничного расстояния на косинусы углов наклона общего перпендикуляра I_3 к фокальным плоскостям луча r_1 и частное от деления расстояния h_{12} между лучами r_1 и r_2 на синус угла между ними $\alpha_1-\alpha_2$ будут

$$\frac{2\rho_1}{\sin 2\varphi_1}\cos\mathfrak{a}_1\cos\mathfrak{a}_1'=\frac{(f_1-f_1')h_{12}}{(f_2-f_2')\sin\alpha_{12}},$$

где

$$\frac{h_1-h_2}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}=\frac{h_{12}}{\sin\alpha_{12}}.$$

Отсюда первая теорема:

Теорема 1. *Сумма двойного эксцентриситета и произведения граничного расстояния на синус удвоенной асимметрии луча r_1 относится к такой же сумме для луча r_2, как произведение граничного расстояния луча r_1 на косинусы углов его фокальных плоскостей с общим перпендикуляром пары относится к частному от деления расстояния между лучами r_1, r_2 на синус угла между ними.*

Аналогично доказываются остальные теоремы.

Теорема 2. *Произведение тангенсов углов наклона общего перпендикуляра r к фокальным плоскостям луча r_1 относится к произведению расстояний фокусов луча r_2 от общего перпендикуляра r, как квадрат синуса угла лучей r_1, r_2 к квадрату длины общего перпендикуляра r.*

Теорема 3. *Произведение синусов углов наклона общего перпендикуляра r к фокальным плоскостям луча r_1 на косинусы углов наклона его к фокальным плоскостям луча r_2 равно отношению произведения расстояний фокусов луча r_2 от общего перпендикуляра r к произведению граничных расстояний r_1 и r_2.*

Теорема 4. *Произведение синусов углов наклона общего перпендикуляра r к фокальным плоскостям лучей r_1 и r_2 относится к произведению расстояний фокусов обоих лучей r_1 и r_2 от общего перпендикуляра r так же, как квадрат синуса угла между лучами r_1, r_2 к произведению граничных расстояний этих лучей.*

Теорема 5. *Произведение граничных расстояний лучей r_1 и r_2 на косинусы углов наклона общего перпендикуляра r к их фокальным плоскостям равно квадрату отношения расстояния между лучами к синусу угла между ними.*

Теорема 6. *Произведение отношений удвоенного эксцентриситета к синусу удвоенной асимметрии для двух лучей r_1 и r_2 пары равно произведению граничных расстояний этих лучей.*

Нетрудно заметить, что не все эти теоремы независимы. Например, теорема 2 является непосредственным следствием теорем 1 и 3. С другой стороны, если для двух конгруэнций, лучи которых находятся во взаимно однозначном соответствии, имеют место теорема об эксцентриситете и асимметрии п. 271 и теоремы 1 и 2, то эти конгруэнции образуют расслояемую пару.

ГЛАВА XXVII

СИММЕТРИЧНЫЕ РАССЛОЯЕМЫЕ ПАРЫ

281. Пары ортогональные. Мы видели (п. 276), что особое решение задачи определения расслояемых пар конгруэнций, связанных с конгруэнцией их общих перпендикуляров, приводит всегда к симметричным парам, т. е. к парам с нулевым значением асимметрии и эксцентриситета. Это — пары, у которых соответствующие лучи обеих конгруэнций располагаются симметрично относительно центра и фокальных плоскостей конгруэнции общих перпендикуляров, т. е. каждые два соответствующих луча пары пересекают их общий перпендикуляр на одинаковом расстоянии по обе стороны от его центра и образуют равные углы с биссектором его фокальных плоскостей.

Теория симметричных пар не ограничивается специальными парами особого решения и в общем случае приводит к замечательной конфигурации Бахвалова из ∞^1 расслояемых пар, присоединенных к одной конгруэнции общих перпендикуляров.

Мы начнем с пар, у которых только асимметрия равна нулю. Если отнести конгруэнцию общих перпендикуляров к трехграннику Гишара (7β, γ) п. 271, когда она гиперболическая, или трехграннику ($9\alpha - \gamma$) п. 272, когда она параболическая, так, чтобы имели место уравнения (8), (8′) пп. 271, 272, то обращение в нуль асимметрии

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \tag{1α}$$

имеет следствием равенство

$$(h_1 + h_2)\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 0.$$

Отсюда два случая: или

$$h_1 + h_2 = 0, \tag{1β}$$

т. е. обращение в нуль эксцентриситета, что приводит к симметричным парам, или

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\pi}{2}, \tag{1γ}$$

т. е. ортогональность лучей r_1, r_2 пары.

Обратно, если пара ортогональна, т. е. имеет место уравнение (1γ), то уравнения (8), ($8'$) дадут (1α) и асимметрия равна нулю; если равен нулю эксцентриситет (1β), то снова получим (1α) и пара будет симметричной.

Вернемся к общим уравнениям (5α, γ), (6β) пп. 270, 271 и присоединим равенство (1γ). Уравнение (6β) теперь примет вид

$$[\underset{1}{\Omega^2}\,\underset{2}{\Omega_1^3}]+[\underset{2}{\Omega^2}\,\underset{1}{\Omega_1^3}]=0, \tag{2α}$$

а поскольку из (2α) п. 269 и (1γ) следует

$$\underset{1}{A}=\underset{2}{A}=A, \tag{2β}$$

уравнение (6α) п. 271 показывает, что формы $\underset{1}{H}$ и $\underset{2}{H}$ пропорциональны:

$$\underset{1}{H}=H,\quad \underset{2}{H}=\lambda H. \tag{2γ}$$

Дифференцируя это уравнение внешним образом с помощью формул (4γ) п. 270, получим, в силу (2α):

$$[d\lambda H]+2\frac{\lambda-1}{h_1-h_2}[\underset{1}{\Omega^2}\,\underset{2}{\Omega_1^3}]=0, \tag{2δ}$$

и уравнения (10α) п. 273 и (2α) дадут

$$\begin{aligned} &A=\lambda x\underset{1}{\Omega_1^3}+y\underset{2}{\Omega_1^3}, && H=-y\underset{1}{\Omega_1^3}-x\underset{2}{\Omega_1^3},\\ &\underset{2}{\Omega^2}=\xi\underset{1}{\Omega_1^3}+\eta\underset{2}{\Omega_1^3}, && \underset{1}{\Omega^2}=\eta\underset{1}{\Omega_1^3}+\zeta\underset{2}{\Omega_1^3}. \end{aligned} \tag{3α}$$

Внося эти значения в уравнения (5γ) п. 271, получим с помощью формул (4α)

$$x(\lambda h_1+h_2+\lambda\zeta-\xi)=0,\quad y(\lambda h_1+h_2+\lambda\zeta-\xi)=0;$$

но $x=y=0$ обращает в нуль A и H, и тогда по формулам (4γ) п. 270 $DA=-[\omega_{13}\omega_{23}]=0$, что невозможно.

Следовательно,

$$\lambda h_1+h_2+\lambda\zeta-\xi=0,$$

или, вводя вспомогательную переменную θ,

$$\xi=h_2+\lambda\theta,\quad \zeta=-h_1+\theta. \tag{3β}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (3α) с учетом соотношений (3β) и присоединяя уравнение (2δ), получим систему:

$$\left.\begin{aligned} x[d\lambda\underset{1}{\Omega_1^3}]+\lambda[dx\underset{1}{\Omega_1^3}]+[dy\underset{2}{\Omega_1^3}]&=(\lambda^2x^2+y^2-1)[\underset{1}{\Omega_1^3}\,\underset{2}{\Omega_1^3}],\\ [dy\underset{1}{\Omega_1^3}]+[dx\underset{2}{\Omega_1^3}]&=\left\{(\lambda+1)xy+\frac{2\eta}{h_1-h_2}\right\}[\underset{1}{\Omega_1^3}\,\underset{2}{\Omega_1^3}],\\ [d\eta\underset{1}{\Omega_1^3}]+[d\theta\underset{2}{\Omega_1^3}]&=\{\theta y(\lambda+1)+2\lambda x\eta\}[\underset{1}{\Omega_1^3}\,\underset{2}{\Omega_1^3}],\\ \theta[d\lambda\underset{1}{\Omega_1^3}]+\lambda[d\theta\underset{1}{\Omega_1^3}]+[d\eta\underset{2}{\Omega_1^3}]&=\{2y\eta+\lambda(\lambda-1)\theta x\}[\underset{1}{\Omega_1^3}\,\underset{2}{\Omega_1^3}],\\ y[d\lambda\underset{1}{\Omega_1^3}]+x[d\lambda\underset{2}{\Omega_1^3}]&=2\eta\frac{\lambda-1}{h_1-h_2}[\underset{1}{\Omega_1^3}\,\underset{2}{\Omega_1^3}]. \end{aligned}\right\} \tag{3γ}$$

Таким образом, для определения ортогональных пар мы имеем замкнутую систему уравнений (2γ), (3α, γ). Характеристическая система, кроме левых частей линейных уравнений (2γ), (3α) и форм $\underset{1}{\Omega_1^3}$, $\underset{2}{\Omega_1^3}$, независимых на интегральном многообразии, содержит еще $q=5$ форм: dx, dy, $d\eta$, $d\theta$, $d\lambda$. Система квадратичных уравнений состоит из $s_1=5$ независимых уравнений (3γ) с не равным нулю определителем полярной матрицы элемента $\underset{1}{\Omega_1^3}=u$, $\underset{2}{\Omega_1^3}=v$:

$$(\lambda u^2-v^2)(\theta xv^2+\lambda yu^2-yuv)\,u\neq 0.$$

Следовательно, система — в инволюции с характерами $s_1=5$, $s_2=0$ и определяет ортогональные пары с произволом пяти функций от одного аргумента.

282. Симметричные пары. При отнесении к трехграннику Гишара (7β, γ) п. 271 симметричные пары определяются конечными уравнениями (1α, γ); можно положить

$$\alpha_1=-\alpha_2=\alpha,\quad h_1=-h_2=h.$$

Уравнения (7β) п. 271 можем написать в виде

$$\omega_1=a\omega_{23},\quad \omega_2=b\omega_{13}. \tag{4α}$$

Теперь уравнения (10β) п. 273 дают

$$a_2+a_3=0,\quad b_2+b_3=0, \tag{4β}$$

и уравнения (10α) принимают вид

$$\begin{aligned} &\underset{1}{A}=a_1\underset{1}{\Omega_1^3}+a_2\underset{2}{\Omega_1^3}, && \underset{2}{A}=b_2\underset{1}{\Omega_1^3}+b_1\underset{2}{\Omega_1^3},\\ &\underset{2}{H}=-a_2\underset{1}{\Omega_1^3}-a_1\underset{2}{\Omega_1^3}, && \underset{1}{H}=-b_1\underset{1}{\Omega_1^3}-b_2\underset{2}{\Omega_1^3}. \end{aligned} \tag{4γ}$$

Внешнее дифференцирование уравнений (4α, γ) дает

$$
\begin{aligned}
&[\Delta a\omega_{23}]=0, && [\Delta b\omega_{13}]=0,\\
&[\Delta a_1\underset{1}{\Omega}{}_1^3]+[\Delta a_2\underset{2}{\Omega}{}_1^3]=0, && [\Delta b_2\underset{1}{\Omega}{}_1^3]+[\Delta b_1\underset{2}{\Omega}{}_1^3]=0,\\
&[\Delta a_2\underset{1}{\Omega}{}_1^3]+[\Delta a_1\underset{2}{\Omega}{}_1^3]=0, && [\Delta b_1\underset{1}{\Omega}{}_1^3]+[\Delta b_2\underset{2}{\Omega}{}_1^3]=0,
\end{aligned}
\tag{4δ}
$$

где каждая форма Δa_i, Δb_i содержит дифференциал da_i, db_i вместе с некоторой комбинацией форм $\underset{1}{\Omega}{}_1^3$, $\underset{2}{\Omega}{}_1^3$.

Система (4α, γ, δ) замкнута относительно операции внешнего дифференцирования. Характеристическая система, кроме левых частей линейных уравнений (4α, γ) и форм ω_{13}, ω_{23} или их линейных комбинаций $\underset{1}{\Omega}{}_1^3$, $\underset{2}{\Omega}{}_1^3$, содержит $q=6$ форм: Δa, Δb, Δa_i, Δb_i. Система содержит $s_1=6$ независимых квадратичных уравнений. Система — в инволюции с характерами $s_1=6$, $s_2=0$ и определяет симметрические пары с произволом шести функций одного аргумента.

283. Определение симметричных пар по заданной конгруэнции общих перпендикуляров. Поставим вопрос, сколько расслояемых пар можно связать с одной и той же конгруэнцией общих перпендикуляров.

Пусть нам задана конгруэнция (r) и положим

$$
\begin{aligned}
\omega_3&=\mu\omega_{13}+\nu\omega_{23},\\
\omega_{12}&=-\sigma\omega_{13}+\tau\omega_{23}.
\end{aligned}
\tag{5α}
$$

Внося эти выражения в уравнения

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{A}+\underset{2}{A}&=(a_1+b_2)\underset{1}{\Omega}{}_1^3+(a_2+b_1)\underset{2}{\Omega}{}_1^3,\\
\underset{1}{H}+\underset{2}{H}&=-(a_2+b_1)\underset{1}{\Omega}{}_1^3-(a_1+b_2)\underset{2}{\Omega}{}_1^3,
\end{aligned}
\tag{a}
$$

получим с помощью (2α):

$$
\begin{aligned}
(a_1+b_2+a_2+b_1)\cos\alpha&=-\frac{2\sigma}{\sin 2\alpha}=-\frac{\mu}{h},\\
(a_1+b_2-a_2-b_1)\sin\alpha&=\frac{2\tau}{\sin 2\alpha}=\frac{\nu}{h}.
\end{aligned}
\tag{5β}
$$

Отсюда следует пропорциональность коэффициентов

$$\mu:\sigma=\nu:\tau,$$

и если ввести их отношение k, полагая

$$\mu=2k\sigma,\qquad \nu=2k\tau, \tag{5γ}$$

где множитель пропорциональности k вполне определяется конгруэнцией общих перпендикуляров (r), то уравнения (5β) дадут замечательную зависимость величин h и α, определяющих присоединенную расслояемую пару

$$h=k\sin 2\alpha. \tag{5δ}$$

Составляя разности уравнений (4γ), получим:

$$
\begin{aligned}
\frac{2d\alpha}{\sin 2\alpha}&=(a_1-b_2+a_2-b_1)\cos\alpha\,\omega_{13}+(a_1-b_2-a_2+b_1)\sin\alpha\,\omega_{23},\\
\frac{dh}{h}&=(a_2-b_1+a_1-b_2)\cos\alpha\,\omega_{13}+(a_2-b_1-a_1+b_2)\sin\alpha\,\omega_{23}.
\end{aligned}
\tag{5ε}
$$

Вводя обозначения

$$d\ln k=k_1\omega_{13}+k_2\omega_{23}, \tag{6α}$$

где k_1, k_2 тоже вполне определяются конгруэнцией (r), получим, дифференцируя соотношение (5δ) с учетом (5ε):

$$
\begin{aligned}
a_1+a_2-b_1-b_2&=\frac{k_1}{\sin 2\alpha\sin\alpha},\\
a_1-a_2+b_1-b_2&=\frac{-k_2}{\sin 2\alpha\cos\alpha}.
\end{aligned}
\tag{5ζ}
$$

Следовательно, система (4γ) эквивалентна совокупности конечных уравнений (5γ, δ) и уравнения Пфаффа

$$2d\alpha=k_1\operatorname{ctg}\alpha\,\omega_{13}-k_2\operatorname{tg}\alpha\,\omega_{23}. \tag{6β}$$

Внешний дифференциал уравнения (6α) имеет вид

$$[dk_1+k_1\sigma\omega_{23},\ \omega_{13}]+[dk_2+k_2\tau\omega_{13},\ \omega_{23}]=0. \tag{6γ}$$

Внешний дифференциал уравнения (6β) будет

$$\operatorname{ctg}\alpha\,[dk_1+k_1\sigma\omega_{23},\ \omega_{13}]-\operatorname{tg}\alpha\,[dk_2+k_2\tau\omega_{13},\ \omega_{23}]=\frac{k_1k_2}{\sin\alpha\cos\alpha}\,[\omega_{13}\omega_{23}],$$

или, в силу (6γ),

$$[dk_1+k_1\sigma\omega_{23},\ \omega_{13}]=k_1k_2\,[\omega_{13}\omega_{23}]. \tag{6δ}$$

Оба уравнения (6γ, δ) налагаются на конгруэнцию общих перпендикуляров (r). Присоединенная расслояемая пара (h,α) определяется вполне интегрируемым уравнением (6β) и конечным уравнением (5δ) с одним произвольным параметром.

Следовательно, *симметричные пары, кроме специальных, существуют однопараметрическими семействами с одной конгруэнцией общих перпендикуляров.*

284. Конфигурация Бахвалова [6]. Конгруэнция общих перпендикуляров (r), допускающая симметрические пары, определяется системой линейных уравнений (4α), (5α, γ), (6α), двумя квадратичными уравнениями (6γ, δ) и их внешними дифференциалами. Вся замкнутая система имеет вид

$$\omega_1 = a\omega_{23}, \qquad \omega_2 = b\omega_{13},$$
$$\omega_{12} = -\sigma\omega_{13} + \tau\omega_{23}, \qquad \omega_3 = 2k(\sigma\omega_{13} + \tau\omega_{23}); \tag{7α}$$
$$d \ln k = k_1\omega_{13} + k_2\omega_{23},$$
$$[\Delta k_1\omega_{13}] = 0,\ [\Delta k_2\omega_{23}] = 0,\ [\Delta a\omega_{23}] = 0,\ [\Delta b\omega_{13}] = 0,$$
$$[\Delta\sigma\omega_{13}] = 0, \quad [\Delta\tau\omega_{23}] = 0, \tag{7β}$$

где

$$\Delta k_1 = dk_1 + k_1(\sigma + k_2)\,\omega_{23}, \qquad \Delta k_2 = dk_2 + k_2(\tau + k_1)\,\omega_{13},$$
$$\Delta a = da + \tau(a + b - 2k)\,\omega_{13}, \quad \Delta b = db + \sigma(a + b - 2k)\,\omega_{23},$$
$$\Delta\sigma = d\sigma + \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2k} - k_1\tau + k_2\sigma + 2\sigma^2 + 1\right)\omega_{23}, \tag{7γ}$$
$$\Delta\tau = d\tau + \frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{2k} + k_1\tau - k_2\sigma + 2\tau^2 + 1\right)\omega_{13}.$$

Система — в инволюции и определяет конгруэнцию (r), допускающую семейство симметричных пар с произволом шести функций одного аргумента.

Присоединенное семейство симметричных пар образует конфигурацию Бахвалова. Лучи этих пар, пересекающие один и тот же общий перпендикуляр, образуют коноид, уравнение которого относительно подвижной системы координат (O; I_1, I_2, I_3) немедленно получается, если заметить, что в формуле (5δ) отрезок h является аппликатой z, а угол α — полярным углом, так что

$$x = \sqrt{x^2 + y^2}\cos\alpha, \quad y = \sqrt{x^2 + y^2}\sin\alpha,$$

и уравнение коноида будет

$$z = \frac{2kxy}{x^2 + y^2}. \tag{8}$$

Точки пересечения лучей r_1, r_2 с их перпендикуляром r выделяют на нем отрезок ($-k$, $+k$) длиной $2k$. Каждому углу α соответствует определенный отрезок z, но для заданного значения $z = h$ соответствует два значения α:

$$\alpha = \frac{1}{2}\ \arcsin\frac{h}{k}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\ \arcsin\frac{h}{k}.$$

Следовательно, через каждую точку отрезка ($-k$, k) луча r проходит два луча присоединенного семейства, одинаково наклоненных к осям I_1, I_2. В концах отрезка они взаимно перпендикулярны.

285. Формула Гамильтона. Уравнения (5δ) по своей форме напоминают формулу Гамильтона, определяющую направление общего перпендикуляра двух инфинитезимально близких лучей конгруэнции.

Оно совпадает с формулой Гамильтона, если отрезок $2k$, высекаемый на прямой r лучами присоединенных симметричных пар, совпадает с отрезком длиной $\frac{2\rho}{\sin 2\varphi}$ между граничными точками луча r. Сравнивая формулы (7β) п. 271 с уравнениями (4α) п. 282, мы получим:

$$\rho\operatorname{ctg}\varphi = -a, \quad \rho\operatorname{tg}\varphi = -b \tag{9α}$$

и

$$\frac{2\rho}{\sin 2\varphi} = -(a + b). \tag{9α'}$$

Следовательно, симметричные пары, высекающие на лучах конгруэнции общих перпендикуляров отрезок между граничными точками, определяются системой (7α, β), если к ней присоединить уравнение

$$2k + a + b = 0$$

или

$$2k = a + b. \tag{9β}$$

Первый случай не приводит к решению; во втором случае, внося выражение (9β) в формулы (7γ) п. 284, получим:

$$\Delta a = da, \quad \Delta b = db,$$

и уравнения (7β) дадут

$$da = \lambda\omega_{23}, \quad db = \mu\omega_{13}.$$

Коэффициенты λ, μ получим из последнего уравнения (7α), если туда подставить (9β):

$$\mu = 2kk_1, \quad \lambda = 2kk_2$$

и

$$da = 2kk_2\omega_{21}, \quad db = 2kk_1\omega_{13}. \tag{9γ}$$

Внешние дифференциалы их обращаются в тождество в силу уравнений (7α, β).

Система будет содержать семь пфаффовых уравнений (7α), (9γ) и четыре квадратичных:

$$[\Delta k_1\omega_{13}] = 0, \quad [\Delta k_2\omega_{23}] = 0, \quad [\Delta\sigma\omega_{13}] = 0, \quad [\Delta\tau\omega_{23}] = 0 \tag{9δ}$$

с $q = 4$ формами характеристической системы: Δk_1, Δk_2, $\Delta\sigma$, $\Delta\tau$, кроме форм ω_{13}, ω_{23} и левых частей линейных уравнений (7α), (9β). Система в инволюции с характерами $s_1 = 4$, $s_2 = 0$ и определяет эти симметричные пары с произволом четырех функций одного аргумента.

286. Задача Бахвалова. Бахвалов [5] поставил задачу определения расслояемых пар, у которых одна пара расслояющих поверхностей описывается точками пересечения лучей с их общим перпендикуляром. В этом случае уравнение (3α) п. 269 должно иметь решение $t_i = 0$. По формулам (3α, β) п. 269 получим:

$$\underset{1}{\Omega}{}^2 = h_2 \underset{1}{\Omega}{}^3_2, \quad \underset{2}{\Omega}{}^2 = h_1 \underset{2}{\Omega}{}^3_2, \tag{10α}$$

или, обращаясь к тетраэдру Гищара и используя формулы (7γ) п. 271, (2α) п. 268 и обозначения (9α), будем иметь:

$$\begin{aligned} &h_2 \sin\alpha_1 + b\cos\alpha_1 = 0, \quad h_2\cos\alpha_1 + a\sin\alpha_1 = 0,\\ &h_1 \sin\alpha_2 + b\cos\alpha_2 = 0, \quad h_1\cos\alpha_2 + a\sin\alpha_2 = 0, \end{aligned} \tag{10β}$$

откуда по исключении a, b

$$h_2 \sin\alpha_1\cos\alpha_2 = h_1\sin\alpha_2\cos\alpha_1,$$

$$h_2 \sin\alpha_2\cos\alpha_1 = h_1\sin\alpha_1\cos\alpha_2$$

и

$$(h_1 + h_2)\sin(\alpha_1 - \alpha_2) = 0, \quad (h_1 - h_2)\sin(\alpha_1 + \alpha_2) = 0.$$

Следовательно, для невырождающихся пар

$$h_1 + h_2 = 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0,$$

значит, пары должны быть симметричны.

Внося теперь в уравнения (10β)

$$\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha, \quad h_1 = -h_2 = h,$$

мы получим, в силу (5δ):

$$a = 2k\cos^2\alpha, \quad b = 2k\sin^2\alpha$$

и

$$2k = a + b, \tag{10γ}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{b}{a}} = \operatorname{tg}\varphi \quad h = \frac{a+b}{2}\sin 2\varphi = -\rho. \tag{10δ}$$

Знак при ρ согласован с формулой ($9\alpha'$).

Уравнение (10γ) показывает, что симметричные пары, дающие решение задачи Бахвалова, совпадают с парами (9β) п. 285.

Формулы (10δ) показывают, что лучи той расслояемой пары этого семейства симметричных пар, которая удовлетворяет требованиям задачи, проходят через фокусы луча r и лежат в касательных плоскостях фокальных поверхностей. Фокальные поверхности конгруэнции (r) входят в состав расслояющих поверхностей этой пары.

287. Конгруэнция Бианки как конгруэнция общих перпендикуляров. Рассмотрим фокальную поверхность, описываемую фокусом

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{O} - \rho \boldsymbol{I}_3.$$

Дифференцируя это выражение с учетом формул (7β) п. 271, (2α) п. 268, (4γ) п. 282, получим, в силу (10δ):

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{F} = {} & (\boldsymbol{I}_1\cos\varphi - \boldsymbol{I}_2\sin\varphi)\frac{2\rho}{\sin 2\varphi}(\omega_{13}\sin\varphi - \omega_{23}\cos\varphi) + \\ & + \boldsymbol{I}_3 2\rho\,\{(b_1 + b_2)\cos\varphi\,\omega_{13} + (b_1 - b_2)\sin\varphi\,\omega_{23}\}; \end{aligned} \tag{11α}$$

аналогично для нормали $\boldsymbol{n}_1$ фокальной поверхности

$$\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{I}_1\sin\varphi - \boldsymbol{I}_2\cos\varphi$$

получим:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{n}_1 = {} & \\ = {} & (\boldsymbol{I}_1\cos\varphi - \boldsymbol{I}_2\sin\varphi)\sin 2\varphi\,\{(b_1 + b_2)\cos\varphi\,\omega_{13} - (b_1 - b_2)\sin\varphi\,\omega_{23}\} - \\ & - \boldsymbol{I}_3(\omega_{13}\sin\varphi + \omega_{23}\cos\varphi). \end{aligned} \tag{11β}$$

Отсюда уравнение асимптотических

$$d\boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{n}_1 = 0$$

принимает вид

$$-4\rho(b_1 + b_2\cos 2\varphi)\,\omega_{13}\omega_{23} = 0. \tag{12}$$

Для второй фокальной поверхности уравнение асимптотических получается изменением знака при ρ и φ.

Таким образом, асимптотические на фокальных поверхностях соответствуют и конгруэнция (r) есть конгруэнция W.

Обозначим через $\tilde\omega_i$, $\tilde\omega_{ik}$ компоненты инфинитезимальных перемещений трехгранника (F; $I_1\cos\varphi - I_2\sin\varphi$, I_3, $-I_1\sin\varphi - I_2\cos\varphi$), присоединенного к фокальной поверхности (F). Формулы (11α, β) дают нам

$$\begin{aligned} \tilde\omega_1 &= \frac{2\rho}{\sin 2\varphi}(\omega_{13}\sin\varphi - \omega_{23}\cos\varphi),\\ \tilde\omega_2 &= 2\rho\,\{(b_1 + b_2)\cos\varphi\,\omega_{13} + (b_1 - b_2)\sin\varphi\,\omega_{23}\},\\ \tilde\omega_{13} &= -\sin 2\varphi\,\{(b_1 + b_2)\cos\varphi\,\omega_{13} - (b_1 - b_2)\sin\varphi\,\omega_{23}\},\\ \tilde\omega_{23} &= \omega_{13}\sin\varphi + \omega_{23}\cos\varphi. \end{aligned}$$

Отсюда кривизна фокальной поверхности

$$k = \frac{[\tilde\omega_{13}\tilde\omega_{23}]}{[\tilde\omega_1\tilde\omega_2]} = -\frac{\sin^2\varphi}{4\rho^2}.$$

Замена ρ и φ на $-\rho$ и $-\varphi$ не меняет величины k, следовательно, *фокальные поверхности в точках касания с одним лучом конгруэнции имеют одну и ту же кривизну.*

Этим определяется *конгруэнция Бианки.*

Обратно, ко всякой конгруэнции Бианки можно присоединить семейство симметричных пар, у которых одна пара описана лучами, проходящими через фокусы конгруэнции Бианки и лежащими в ее фокальных плоскостях.

288. Конфигурация Бахвалова с постоянным отрезком $2k = \mathrm{const}$. Отрезок, высекаемый присоединенными симметричными парами на общих перпендикулярах, будет постоянен, если по формуле (6α) п. 283

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0.$$

Тогда из уравнений (6β) и (5δ) п. 283

$$\alpha = \text{const}, \quad h = \text{const},$$

т. е. для всех присоединенных пар расстояние между соответствующими лучами и угол между ними постоянны. Обратно, если α и h постоянны, то из уравнений (5ε) получим:

$$a_1 + a_2 - b_1 - b_2 = 0, \quad a_1 - a_2 + b_1 - b_2 = 0,$$

и формулы (5ζ) п. 283 дадут $k_1 = k_2 = 0$, т. е. $k = \text{const}$.

Теперь по формулам (7γ) п. 284 имеем $\Delta k_1 = \Delta k_2 = 0$, и первые два квадратичных уравнения (7β) п. 284 обращаются в тождества. Система (7β) п. 284 попрежнему будет в инволюции с характерами $s_1 = 4$, $s_2 = 0$ и определит этот класс симметричных пар с произволом четырех функций от одного аргумента.

289. Задача Ермолаева. Л. С. Ермолаев [1] поставил задачу определения конгруэнции, у которой нормали фокальных поверхностей описывают расслояемую пару. Обращаясь к трехграннику Гишара и формулам (7β, γ) п. 271, мы должны потребовать, чтобы основная система уравнений удовлетворялась значениями

$$h = \pm r, \quad \alpha = \pm\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Эти формулы показывают, что искомая пара, если она существует, симметричная. Поэтому мы можем обратиться к формулам п. 283. По формуле (5δ) п. 283 получаем:

$$k = -\frac{\rho}{\sin 2\varphi}. \tag{13α}$$

Внося значения α и k в уравнения (6α, β), получим:

$$2d\varphi = -k_1 \operatorname{tg}\varphi\, \omega_{13} + k_2 \operatorname{ctg}\varphi\, \omega_{23}, \tag{13β}$$

$$2\frac{d\rho}{\rho} = \frac{k_1}{\cos^2\varphi}\omega_{13} + \frac{k_2}{\sin^2\varphi}\omega_{23}.$$

Между тем, дифференцируя внешним образом уравнения (7β) п. 271 и внося значения (13β), а также (7α) п. 284, получим по сокращении на $[\omega_{13}\omega_{23}]\dfrac{2\rho}{\sin 2\varphi}$:

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0.$$

Следовательно, $d\varphi = d\rho = 0$ и

$$\varphi = \text{const}, \quad \rho = \text{const},$$

и конгруэнция (r) псевдосферическая.

Только псевдосферическая конгруэнция обладает расслояемой парой из конгруэнций, образованных нормалями фокальных поверхностей.

Поскольку на фокальных поверхностях псевдосферической конгруэнции соответствуют не только асимптотические линии, но и линии кривизны, а развертывающиеся поверхности конгруэнции нормалей соответствуют линиям кривизны, расслояемая пара Ермолаева как пара с соответствием развертывающихся поверхностей является сопряженной парой.

290. Симметричные пары с параболической конгруэнцией общих перпендикуляров. В п. 272 мы определили параболическую конгруэнцию уравнениями (9α, β)

$$\omega_2 = 0, \quad \omega_1 = b\omega_{23}. \tag{14α}$$

Дифференцируя внешним образом, получим:

$$[b\omega_{12} + \omega_3,\ \omega_{23}] = 0, \quad [db\omega_{23}] + [\omega_3 - b\omega_{12},\ \omega_{13}] = 0. \tag{14β}$$

Поскольку центр луча (средина фокального отрезка) совпадает с единственным фокусом O, а из двух биссекторных плоскостей фокальных плоскостей луча одна совпадает со сдвоенной фокальной плоскостью, а другая к ней перпендикулярна, симметричные пары, присоединенные к параболической конгруэнции общих перпендикуляров, определяются теми же условиями:

$$h_1 + h_2 = 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

Поэтому рассуждения п. 283 сохраняют свою силу и для случая параболической конгруэнции общих перпендикуляров.

Симметричные пары, кроме специальных, существуют только однопараметрическими семействами с одной общей конгруэнцией общих перпендикуляров.

Уравнения (4γ) п. 282 напишутся:

$$\frac{\omega_{12}}{\sin 2\alpha} = A_1\cos\alpha\,\omega_{13} + A_2\sin\alpha\,\omega_{23}, \quad \frac{\omega_3}{2h} = -A_1\cos\alpha\,\omega_{13} + A_2\sin\alpha\,\omega_{23},$$

$$\frac{d\alpha}{\sin 2\alpha} = A_3\cos\alpha\,\omega_{13} + A_4\sin\alpha\,\omega_{23}, \quad \frac{dh}{2h} = A_2\cos\alpha\,\omega_{13} - A_4\sin\alpha\,\omega_{23},$$

откуда вытекает эквивалентная система квадратичных уравнений:

$$\left[\frac{d\alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{dh}{2h},\ \omega_{13}\right] = 0, \quad \left[\frac{d\alpha}{\sin 2\alpha} - \frac{dh}{2h},\ \omega_{23}\right] = 0, \tag{15α}$$

$$\left[\frac{\omega_{12}}{\sin 2\alpha} - \frac{\omega_3}{2h},\ \omega_{13}\right] = 0, \quad \left[\frac{\omega_{12}}{\sin 2\alpha} + \frac{\omega_3}{2h},\ \omega_{23}\right] = 0. \tag{15β}$$

Если $b \neq \dfrac{2h}{\sin 2\alpha}$, то из первого уравнения (14β) и последнего (15β) будет следовать

$$[\omega_{12}\omega_{23}] = 0, \quad [\omega_3\omega_{23}] = 0,$$

и, поскольку все формы ω_1, ω_2, ω_3 линейно зависят только от одной формы ω_{23}, фокальная поверхность (O) вырождается в линию.

Оставляя этот случай в стороне, имеем:

$$h = b\sin\alpha\cos\alpha, \tag{16α}$$

и система (14β), (15β) сводится к трем уравнениям:

$$[b\omega_{12}+\omega_3,\ \omega_{23}]=0,\quad [b\omega_{12}-\omega_3,\ \omega_{13}]=0,\quad [db\omega_{23}]=0. \quad (15\beta')$$

Система (15α) после подстановки h по формуле (16α) принимает вид

$$\left[\operatorname{ctg}\alpha\, d\alpha+\frac{1}{2}\,d\ln b,\ \omega_{13}\right]=0,\quad [d\alpha\omega_{23}]=0. \qquad (15\alpha')$$

Уравнения (15α′) и последнее уравнение (15β′) имеют следствием пфаффово уравнение

$$\operatorname{ctg}\alpha\, d\alpha+\frac{1}{2}\,d\ln b=0;$$

следовательно,

$$\sin\alpha=\frac{k}{\sqrt{b}},\quad k=\mathrm{const}. \qquad (16\beta)$$

Уравнения (16α, β) определяют однопараметрическое семейство расслояемых пар, присоединенных к параболической конгруэнции.

291. Конгруэнция касательных к асимптотическим линиям постоянного кручения. Сама параболическая конгруэнция общих перпендикуляров определяется системой (14α), (15β′).

Характеристическая система, кроме левых частей пфаффовых уравнения (14α) и форм ω_{13}, ω_{23}, содержит $q=3$ формы: ω_3, ω_{12}, db. Система квадратичных уравнений (15β′) содержит три независимых уравнения. Следовательно, система — в инволюции с характерами $s_1=3$, $s_2=0$ и определяет параболические конгруэнции, допускающие присоединение семейств симметричных пар с произволом трех функций от одного аргумента.

Нетрудно заметить, что система (14α), (15β′) получается из общей системы уравнений параболической конгруэнции (14α, β) присоединением одного квадратичного уравнения

$$[db\omega_{23}]=0. \qquad (17)$$

Выяснить геометрический смысл его не представляет труда.

Перемножая внешним образом почленно уравнения (62) п. 27, получим для гауссовой кривизны поверхности $\omega^3=0$ формулу

$$k=\frac{1}{R_1R_2}=\frac{[\omega_{13}\omega_{23}]}{[\omega_1\omega_2]},$$

которая в силу инвариантного характера внешних произведений, стоящих в правой части, остается справедливой при любом выборе осей I_1, I_2 в касательной плоскости.

Поскольку фокальная поверхность (O) параболической конгруэнции определяется уравнением $\omega^2=0$, ее гауссова кривизна равна

$$k=\frac{[\omega_{12}\omega_{32}]}{[\omega_1\omega_3]},$$

но, в силу первого уравнения (15β) и второго (14α),

$$b\,[\omega_{12}\omega_{23}]=[\omega_{23}\omega_3],$$
$$b\,[\omega_{23}\omega_3]=[\omega_1\omega_3].$$

Следовательно,

$$k=\frac{[\omega_{12}\omega_{32}]}{[\omega_1\omega_3]}=-\frac{1}{b^2}. \qquad (18)$$

В силу уравнения (17) вдоль линии $\omega_{23}=0$ фокальной поверхности имеем $db=0$, следовательно, гауссова кривизна (18) постоянна. Уравнения (14α) показывают, что линии $\omega_{23}=0$ касаются лучей конгруэнции I_3 и являются асимптотическими.

Следовательно, *параболические конгруэнции, допускающие семейство расслояемых симметричных пар, имеют в качестве фокальной такую поверхность, у которой одно семейство асимптотических состоит из линий постоянной гауссовой кривизны, и описываются касательными к этим линиям.*

Поскольку квадрат кручения асимптотической линии в каждой точке равен абсолютной величине отрицательной гауссовой кривизны, эту теорему можно высказать еще в другой форме:

Параболические конгруэнции, допускающие семейства симметрических пар, описаны касательными асимптотических линий постоянного кручения.

292. Расслояемые пары с изотропной конгруэнцией общих перпендикуляров. Конгруэнция называется *изотропной*, если стрикционные линии любой линейчатой поверхности конгруэнции пересекают каждый луч в его центре.

Допустим, что конгруэнция (1α, β) п. 268 изотропная, и пусть вершина репера O есть центр луча.

Если точка

$$M=O+tI_3$$

описывает стрикционную линию линейчатой поверхности $\omega_{23}=\lambda\omega_{13}$ конгруэнции, то элемент дуги этой линейчатой поверхности

$$dM^2=(\omega_1-t\omega_{13})^2+(\omega_2-t\omega_{23})^2+(\omega_3+dt)^2 \qquad (\mathrm{a})$$

должен принимать наименьшее значение при $t=0$. Дифференцируя равенство (a) по t и требуя, чтобы производная обращалась в нуль при $t=0$, получим:

$$\omega_1\omega_{13}+\omega_2\omega_{23}=0. \qquad (\mathrm{b})$$

Для изотропной конгруэнции это равенство удовлетворяется при произвольном выборе ω_{13}, ω_{23}, т. е. тождественно относительно ω_{13}, ω_{23}. Поскольку ω_{13}, ω_{23} независимы, при обращении в нуль формы ω_{23} должна обращаться в нуль форма ω_1; значит, имеем $\omega_1=b\omega_{23}$, а тогда из равенства (b) получим:

$$\omega_1=b\omega_{23},\quad \omega_2=-b\omega_{13}. \qquad (19\alpha)$$

Уравнения (19α) определяют изотропную конгруэнцию.

Дифференцируя внешним образом, получим:

$$[db\omega_{13}]+[\omega_3\omega_{23}]=0,\quad [\omega_3\omega_{13}]+[db\omega_{23}]=0 \qquad (19\beta)$$

и, развертывая по лемме Картана, получим:

$$\omega_3 = \mu\omega_1^3 + \nu\omega_2^3, \quad db = \nu\omega_1^3 - \mu\omega_2^3. \tag{19γ}$$

Система (19α, β) содержит два независимых квадратичных уравнения (19β); характеристическая система, кроме левых частей уравнений (19α) и форм ω_{13}, ω_{23}, содержит только $q = 2$ формы: ω_3, db. Система — в инволюции с характерами $s_1 = 2$, $s_2 = 0$ и определяет изотропную конгруэнцию с произволом двух функций от одного аргумента.

293. Расслояемые пары, присоединенные к изотропной конгруэнции. Внося значения (19α) в формулы (2α) п. 268, получим:

$$\underset{i}{\Omega^1} = b\underset{i}{\Omega_2^3}, \quad \underset{i}{\Omega^2} = -b\underset{i}{\Omega_1^3}. \tag{20α}$$

Внося теперь эти значения в уравнения (6β), (10β) п. 271, получим, пользуясь таблицей (4β), конечные соотношения:

$$a_2h_2 = a_3h_1, \quad (h_1 + h_2)\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 0. \tag{20β}$$

Второе из этих уравнений может удовлетвориться двумя способами:

1) $h_1 + h_2 = 0$; 2) $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$.

В первом случае эксцентриситет равен нулю, а поскольку в характеристических системах уравнений (19α — γ) нет формы ω_{12}, следовательно, эта форма должна считаться вторичной, подходящим поворотом осей I_1, I_2 около оси I_3 можно привести к нулю сумму углов $\alpha_1 + \alpha_2$, образованных лучами расслояемой пары с первой осью I_1. Следовательно, в первом случае расслояемую пару можно считать симметричной.

Во втором случае $\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ и пара является ортогональной. Если привести к нулю $\alpha_1 + \alpha_2$, то оба угла будут постоянны $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$, $\alpha_2 = -\frac{\pi}{4}$.

294. Симметричные пары с изотропной конгруэнцией общих перпендикуляров. Первое уравнение (20β) при $h_1 + h_2 = 0$ дает

$$a_2 + a_3 = 0, \quad b_2 + b_3 = 0,$$

и мы возвращаемся к системе (4γ) п. 282.

Допустим, что мы имеем решения $h_1 = -h_2$, α_1, α_2 системы. Поворачивая оси I_1, I_2, мы можем положить

$$h_1 = -h_2 = h, \quad \alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha, \tag{21α}$$

$$h = k \sin 2\alpha. \tag{21β}$$

Тогда рассуждения п. 283 приведут нас к системе (5γ), (6α — δ) п. 283, но поскольку теперь первое уравнение (5α) нам задано системой (19γ), а второго — нет, уравнение (5γ) п. 283 надо решать относительно переменных σ, τ. Получим систему:

$$2\,d\alpha = k_1 \operatorname{ctg} \alpha\omega_{13} - k_2 \operatorname{tg} \alpha\omega_{23}, \tag{22α}$$

$$d \ln k = k_1\omega_{13} + k_2\omega_{23}, \quad [\Delta k_1\omega_{13}] = 0, \quad [\Delta k_2\omega_{23}] = 0, \tag{22β}$$

$$2k\omega_{12} = -\mu\omega_{13} + \nu\omega_{23}, \tag{22γ}$$

где

$$\Delta k_1 = dk_1 + \frac{k_1\mu}{2k}\,\omega_{23} + k_1k_2\omega_{23}, \quad \Delta k_2 = dk_2 + \frac{k_2\nu}{2k}\,\omega_{13} + k_1k_2\omega_{13}.$$

Если система допускает одно решение h_0, α_0, то система (19α — γ) п. 292, (22β, γ) совместна и определяет изотропную конгруэнцию (19α — γ) и функцию k. Тогда уравнение (22α) будет вполне интегрируемо и определит α с произвольным постоянным. Следовательно, будет существовать однопараметрическое семейство симметрических расслояемых пар, присоединенных к изотропной конгруэнции и образующих конфигурацию Бахвалова.

Если изотропная конгруэнция допускает хотя бы одну не ортогональную пару, то она допускает всю конфигурацию Бахвалова.

Существование расслояемых пар с изотропной конгруэнцией общих перпендикуляров было доказано С. Д. Россинским [3].

ЛИТЕРАТУРА

Акивис М. А.

[1] Пары T комплексов. *ДАН* 1948, **61**, 181—184, *Мат. сб.* 1950, 27, 351—378.

[2] Фокальное семейство лучей как образ пары T-комплексов при перенесении Плюккера. *ДАН* 1949, **65**, 429—432.

Базылев В. Т.

[1] Квазилапласовы преобразования p-поверхностей пространства P_n. *ДАН* 1953, **92**, 453—455. *Уч. зап. М. гор. ПИ* 1955, **35**, 261—322.

Бакс Ф. (Backes F.)

[1] Un cas de congruences doublement stratifiables. *CR* 1948, 227, 257—258.

[2] Sur un couple de cercles engendrant des congruences doublement stratifiables. *Bull. Ac. Belg.* 1954, **40**, 613—620.

Бам-Зеликович Г. М.

[1] О фокальных поверхностях расслояемых конгруенций. *ДАН* 1947, **56**, 671—674.

Бахвалов С. В.

[1] О некоторых свойствах пары конгруенций. *ДАН* 1936, **1**, 207—210.

[2] Sur les couples de congruences rectilignes stratifiables. *CR* 1937, 204, 1859—1861.

[3] Пара расслояемых конгруенций. *ДАН* 1938, **21**, 275—276.

[4] О паре параболических конгруенций. *ДАН* 1938, **21**, 419—421.

[5] О расслояемых парах конгруенций, связанных с конгруенциями Bianchi. *ДАН* 1938, **23**, 743—745.

[6] Пара расслояемых конгруенций. *Мат. сб.* 1939, **6** (48), 67—76.

[7] Об одном инварианте асимптотических преобразований. *ДАН* 1944, **44**, 95—96.

Березина Л. Я.

[1] Исследование конфигураций лучей, которые образуют постоянный угол с нормалями средних поверхностей, при помощи триэдра С. Д. Россинского. *Изв. АН Латв. ССР* 1951, **8**, 1317—1325.

[2] Некоторые соотношения о двусторонне расслояемых парах конгруенций. *ДАН* 1952, **86**, 5—6.

[3] Некоторые теоремы о двусторонне расслояемых парах с действительными фокальными поверхностями. *Мат. сб.* 1953, **33**, 101—110.

[4] Некоторые двусторонне расслояемые пары конгруенций. *Изв. АН Латв. ССР* 1953, **3**, 132—134.

Березман А. М.

[1] Преобразование расслояемых и сопряженных пар конгруенций посредством преобразования Лапласа в P_5. Москва, 1955. Автореферат кандидатской диссертации.

Бианки Л. (Bianchi L.)

[1]. Sulle configurazioni di Möbius nelle transformazioni asintotiche delle curve e delle superficie. *Rend. Palermo* 1908, **25**, 291—325.

[2] Sopra una classe di coppie di congruenze rettilinee stratificabili. *Lincei Rend.* 1924, (5) **33**, 309—377.

[3] Sopra coppie di congruenze rettilinee stratificabili. Ib. 1924, (5) **33**, 521—532.

[4] Lezioni di geometria differenziale. vol. I, II, Bologna, 1923.

Бляшке В. (Blaschke W.)

[1] Vorlesungen über Differentialgeometrie. II. Affine Differentialgeometrie, 1923; III. Differentialgeometrie der Kreis und Kugel, 1929.

Бюшгенс С. С.

[1] Расслояемые пары конгруенций (проективное обобщение случая Bianchi). *Уч. зап. МГУ* 1946, **100**, 140—149.

Бюшгенс С. С. и Россинский С. Д.

[1] Deformation des congruences stratifiables. *CR* 1929, **189**, 140—143.

[2] Sur les couples des congruences stratifiables et sur la deformation des surfaces. *Мат. сб.* 1929, **36**, 339—370.

Васильев А. М.

[1] Инволютивные системы комплексов прямых. *ДАН* 1948, **61**, 189—191.

Вильчинский Е. И. (Wilczynski E. J.)

[1] Project.-diff. geometrie of curves and ruled surfaces. Leipzig, 1906.

[2] Project.-diff. geometrie curved surfaces. *Trans. Am. Math. Soc.* 1907, **8**, 233; 1908, **9**, 79; ib. 293; **10**, 176; ib. 279.

[3] The general theory of congruences. *Trans. Am. Math. Soc.* 1915, **18**, 311.

Винченсини П. (Vincensini P.)

[1] Sur les congruences stratifiables. *CR* 1933, 196, 1272.

[2] Sur certaines questions métriques liées aux congruences stratifiables. *Toulouse Ann.* 1934, (3) **26**, 203—319.

[3] Sur les congruences stratifiables. *J. de Math.* 1934, (9) **13**, 419—442.

Гейдельман Р. М.

[1] Расслоение двупараметрических семейств прямых в многомерном проективном пространстве. *ДАН* 1953, **93**, 957—960.

[2] Расслоение k-параметрических семейств $(k-1)$-мерных плоскостей. *Мат. сб.* 1954, **34**, 499—524.

Глаголева П. Н.

[1] К вопросу о существовании трижды сопряженных систем поверхностей. *Уч. зап. М. гор. ПИ* 1948, **2**, 59—63.

Григорьев И. Н.

[1] Асимптотические преобразования p-ортогонально-сопряженных систем в n-мерном пространстве. *ДАН* 1954, **97**, 765—767.

Грове В. Г. (Grove V. G.)

[1] The transformation T of congruences. *Ann. of Math.* 1942, (2) **43**, 623—633.

Дарбу Г. (Darboux G.)

[1] Leçons sur la theorie des surfaces, Paris, 1888.

[2] Systèmes triplement orthogonaux.

Демулен А. (Demoulin A.)

[1] Sur la transformation de Guichard et sur les systèmes K. *Bull. Ac. Belg.* 1919, N 2—3, 101—112.

Дубнов Я. С.

[1] Sur les caractéristiques tensorielles des surfaces et de leurs reseaux. *CR* 1931, **192**, 261—264.

Егоров Д. Ф.

[1] Потенциальные системы, Москва, 1901.

Ермолаев Л. С.
[1] Congruences rectilignes dont les normales des deux nappes focales engendrent un couple stratifiable. *Bull. Sc. Math.* 1934, (2) **58**, 78—79.

Йонас Г. (Jonas H.)
[1] Ueber die Konstruktion der W — Kongruenzen zu einem gegebenen Brennflächenmantel und über die Transformation der *R*-Flächen. 1920, **29**, 40—74.
[2] Ueber neue zweifach-unendliche Systeme windschiefer Vierecke, deren Seiten paarweise die Ortsflächen der Eckpunkte berühren. *Berl. Math. Ges.* 1930, **29**, 34—51.
[3] Allgemeine Transformations — Theorie der konjugierten Systeme mit vierglidrigen Laplaceschen Zyklen. *Math. Ann.* 1937, **114**, 749—780.

Калапсо Р. (Calapso R.)
[1] Sur la configuration (*T*) de Finikoff et sur les éléments projectifs qui s'y rattachent. *ДАН* 1935, **2**, 441—446.
[2] Sur la configuration de M. Finikoff ez sur les élément projectifs qui s'y rattachent. *Мат. сб.* 1935, **42**, 451—458.
[3] Sur la configuration (*T*) de M. Finikoff à caracteristique 1. Ib 461—464.
[4] Sur les transformation des réseaux O. Ib. 465—469.
[5] Sur la transformation des surfaces minimales — projectives. Ib 471—472.

Карапетян С. Е.
[1] Конфигурация θ Попова. *Сб. Науч. трудов Армян. ПИ* 1955, **5**.

Картан Э. (Cartan E.)
[1] Sur les variétès de courbure constante d'un espace euclidiene ou non euclidiene. *Bull. Soc. M. de Fr.* 1919, **47**, 125—161; 1920, **48**, 132—208.
[2] Sur les développantes d'une surface reglée. *Bull. Ac. Roumaine.* 1931, **14**, 167—174.

Козьмин М.
[1] Démonstration synthétiques du théorème de M. Finikoff sur les congruences stratifiables appartenant à un complexe linéaire. *Bull. Sc. Math.* 1933, **57**, 173—175.

Козьмина Т. Л.
[1] Преобразование Лапласа трижды сопряженных систем поверхностей. *ДАН* 1947, **55**, 187—189.

Коровин В. И.
[1] Преобразование комплекса прямых в проективном пространстве с сохранением его инвариантной формы. *ДАН* 1949, **70**, 753—755.
[2] Расслоение пары комплексов двумерных плоскостей в пятимерном проективном пространстве. *ДАН* 1950, **72**, 837—840.

Кук А. И. (Cook A. J.)
[1] Pairs of rectilinear congruences with generators in one-to-one correspondences. *Trans. Am. Math. Soc.* 1930, **32**, 31—46.

Лактанова Н. В.
[1] Расслояемая пара поверхностей. *ДАН* 1953, **92**, 473—474; *Уч. зап. М. гор. ПИ* 1955, **35**, 109—157.

Лаптев Г. Ф.
[1] Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. *Труды Мат. общ.* 1953, **2**, 275—382.

Мантре П. (Mentre Paul)
[1] Les variétés de l'espace règlée; leur étude par le calul exterieure, Paris, 1923.

Маркус Ф. (Marcus F.)
[1] Sur la definition des couples de congruences de droites stratifiables. *Bull. S. R. Sc. Liége* 1949, **18**, 96—99.
[2] On the transformation T of congruences. *Ann. of Math.* 1951, (2) **54**, 552—553.
[3] Asupra unei cvadruple si a unei perechi de congruente dé drepte stratificabile. *Studii si cercet. Ac. Rum.* 1955, (1) **6**, 155—161.

Норден А. П.
[1] Пространство афинной связности. М., Гостехиздат, 1950, 1—463.

Пантази А. (Pantazi A.)
[1] Sur les couples de congruences stratifiables *Bull. M. S. Roum.* 1932, **33—34**, 51—62.
[2] Sur les couples de congruences stratifiables. *CR* 1933, **197**, 1566.
[3] Sur certaines congruences speciales. *Bull. Soc. M. Roum.* 1933, **35**, 205—217.
[4] Sur les quadruples stratifiables conjugués. *CR* 1934, **193**, 1668.
[5] Sur les couples de congruences stratifiables par familles de surfaces réglées. *Bull. S. M. Roum.* 1934, **36**, 3—25.
[6] Sur les couples de congruences stratifiables par familles de quadriques. *Mathematica Cluj.* 1935, **9**, 223—233.
[7] Sur les couples transformables. *Ann. Roum de Math.* 1935, **2**, 3—34.
[8] Sur les couples de congruences stratifiables appartenant á des complexes. *Bull. M. S. Roum.* 1936, **38**, 53—56.
[9] Sur la déformation projective des quadruples stratifiables. *Bull. M. S. Roum.* 1940, **42**, 47—67.

Розенфельд Б. А.
[1] Дифференциальная геометрия образов симметрии. *ДАН* 1948, **59**, 1057—1060.
[2] Метрический метод в проективно-дифференциальной геометрии и ее конформных и контактных аналогах. *Мат. сб.* 1948, **22**, 457—492.

Российский С. Л.
[1] Sopra una classe di coppia di congruenze rettilinee straficabili. *Мат. сб.* 1929, **36**, 7—32.
[2] Sur une classe de couples de congruences rectilignes stratifiables. *CR* 1929, **188**, 215.
[3] Теорема существования не ортогональной двусторонне-расслояемой пары конгруенций с изотропной конгруенцией общих перпендикуляров. *ДАН* 1943, **41**, 6.
[4] Ортогональный репер, связанный внутренним образом с произвольной конгруенцией, и условия расслоения пары конгруенций. *ДАН* 1943, **41**, 58.
[5] К вопросу о произволе, с которым может существовать ортогональная двусторонне расслояемая пара конгруенций с изотропной конгруенцией общих перпендикуляров. *ДАН* 1943, **41**, 105.

Смирнов Р. В.
[1] Преобразование Лапласа *p*-сопряженных систем. *ДАН* 1950, **71**, № 3.

Су Бу-цин (Su Buchin)
[1] On the surfaces whose asymptotic curves belong to linear complexes. I. *Tohoku Math. J.* 1935, **40**, 408—420; II, 433—448; III, **41**, 1—19; IV, 203—215; V. *Tohoku Science Rep.* 1936, **24**, 601—633; VI, 634—642.

[2] On certain configuration (*T*) of Finikoff and the transformation of Calapso. *J. Chin. M. Soc.* 1936, **1**, 174—200.
[3] A note on the sequences of Laplace of period four. *Tohoku Math. J.* 1937, **43**, 4—10.
[4] Configuration (*T*) of Finikoff, 1937.

Террачини А. (Terracini A.)
[1] Caratterisazione del sistemi del Bianchi di superficie *Lincei Rend.* 1926, (6) **4**, 348—352.

Торторичи (Tortorici)
[1] Sulle deformazioni infinitesimale delle superficie e sul teorema di permutabilita. *Rend. Palermo* 1913, **35**, 289—316.

Фиников С. П.
[1] О парах конгруенций. *Труды В. М. Съезда* 1927, 37.
[2] Sur les congruences stratifiables. *CR* 1927, **185**, 379—381, *Rend. Palermo* 1929, **53**, 313—364.
[3] Transformation des couples de congruences stratifiables. *CR* 1930, **191**, 642—644.
[4] Transformation *T* des congruences de droites. *Rend. Lincei* 1931, (5) **14**, 421—427.
[5] Congruences parabolique stratifiables; transformation des surfaces R_0. *CR* 1931, 812—814.
[6] Transformation *T* des congruences de droites. *Ann Scuola N. di Pisa.* 1933, (2) **2**, 59—88.
[7] Congruences stratifiables paraboliques. *Math. Z.* 1933, **36**, 344—357,
[8] Déformation projective d'un couple de congruence. *CR* 1934, **199**, 177—178.
[9] Couples stratifiables attachés aux surfaces dont les asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires. *CR* 1935, **201**, 1090—1091.
[10] Transformation de M. Calapso. *CR* 1936, **203**, 548.
[11] Surfaces ayant aux points homologues les mêmes directrices de Wilczynski. *Изв. Каз. физ.-мат. об.* 1936, (3) **7**, 41—54.
[12] Configuration (*T*) admettant une infinité de transformations de Calapso. *CR* 1937, **204**, 166.
[13] Изгибание на главном основании и связанные с ним геометрические задачи, М., ГТТИ, 1937.
[14] Déformation projective d'une configuration (*T*). *J. de Math.* 1939, **18**, 405—415.
[15] Sur le problème de S. Bachvaloff dans la théorie des couples stratifiables. *Мат. Сб.* 1939, **6** (48), 287—314.
[16] Пара линейчатых поверхностей расслояемых двумя семействами кривых. *ДАН* 1945, **9**, 79—112. *ИАН* 1945, **9**, 79—112.
[17] О расслояемых парах конгруенций, присоединенных к изотропной конгруенции. *ДАН* 1950, **73**, 899—900.
[18] Система конгруенций *W* с функциональным произволом. *ДАН* 1951, **79**, 197—199. *Уч. зап. Моск. гор. Пед. инст.* 1955, **35**, 17—32.
[19] Системы *W*. *Мат. сб.* 1951, **29**, 349—370.
[20] Расслояемые пары, присоединенные к параболической конгруенции общих перпендикуляров. *Мат. сб.* 1953, **33**, 3—12.
[21] К проблеме расслоения пары комплексов. *УМН* 1954, **2**, 125—130.
[22] Расслояемые пары кривых. *Уч. зап. М. гор. ПИ* 1948, **2**, 16—37.
[23] Расслояемые сопряженные четверки. *Уч. зап. М. гор. ПИ* 1955, **35**, 33—76.

Фубини Г. (Fubini G.)
[1] Su alcune classi di congruenze di rette e sulle transformazioni delle superficie R. *Ann. di Mat.* 1924, (4) **1**, 241—257,

Фубини Г., Чех Е. (Fubini G., Čech E.)
[1] Geometria proiettiva differenziale. I, 1926, 19—26; II, 1927.
[2] Introduction à la geometrie projective differentielle des surfaces, Paris, 1931, 249.

Цицейка (Tzitzeica)
[1] Géometrie différentielle projective des réseaux, 1923.

Черн Ш. Ч. (Chern Shiing Chen)
[1] Lapllace transforms of a klass of higher dimensional varieties in a projective space of *n* dimensions. *Proc. Nat. Ac. Sc. USA* 1944, 30.
[2] Triads of rectilinear congruences with generators in correspondences. *Tohoku Math. J.* 1935, 40, 179—188.

Шульман Т. А.
[1] Асимптотические преобразования трижды сопряженных систем поверхностей. *ДАН* 1952, **85**, 501—504.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ