С. П. ФИНИКОВ

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Курс лекций, читанный на механическом отделении механико-математического факультета МГУ

*Допущено Министерством высшего и среднего специального образования РСФСР в качестве учебного пособия для университетов и педагогических институтов*

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1961

ГЛАВА 1

# ВВЕДЕНИЕ

## § 1. Понятие линии

Геометрическое место точек называется *регулярным куском линии,* если в достаточно малой окрестности каждой точки оно представляет *простую дугу.*

*Простая дуга* определяется двумя условиями:

1. Топологически она эквивалентна отрезку прямой.

2. В каждой точке допускает касательную, которая непрерывно вращается при перемещении точки касания.

Остановимся на первом условии. Более точно оно выражается словами: *простая дуга гомеоморфна отрезку прямой,* где под гомеоморфизмом понимается взаимно однозначное, непрерывное соответствие точек дуги и отрезка прямой.

Следовательно, дуга $AB$ гомеоморфна отрезку $ab$, если каждой точке $m$ отрезка $ab$ соответствует одна определенная точка $M$ дуги, и обратно, каждой точке $M$ дуги соответствует одна точка отрезка $ab$, и это соответствие *непрерывно.*

Понятие непрерывности — обычное: *всякому положительному числу* $\varepsilon$ *можно сопоставить положительное число* $h$ *так, что если расстояние пары точек*

$$m_1m_2 < h,$$

*то расстояние соответствующих точек дуги*

$$M_1M_2 < \varepsilon,$$

*и наоборот.*

Чтобы установить соответствие гомеоморфизма, достаточно дать параметрическое представление трех текущих координат точки $M$ дуги $AB$ (рис. 1)

$$x_1 = f_1(t), \quad x_2 = f_2(t), \quad x_3 = f_3(t) \qquad (1.1:1)^*$$

* В обозначении формулы (1.1 : 1) первая цифра означает главу, вторая — параграф и третья — порядковый номер формулы в этом параграфе.

так, чтобы при изменении параметра $t$ от $t=a$ до $t=b$ точка $M(x_1, x_2, x_3)$ пробегала дугу $AB$.

*Если функции $f_i(t)$ класса $C^1$, т. е. допускают непрерывные производные первого порядка и на отрезке $ab$ эти производные в нуль одновременно не обращаются*

$$\dot{f}_1^2(t) + \dot{f}_2^2(t) + \dot{f}_3^2(t) > 0,$$

$$\dot{f}_i^2(t) = \left(\frac{df_i}{dt}\right)^2, \quad (1.1:2)$$

*то дуга $AB$ — гомеоморфна отрезку $ab$.*

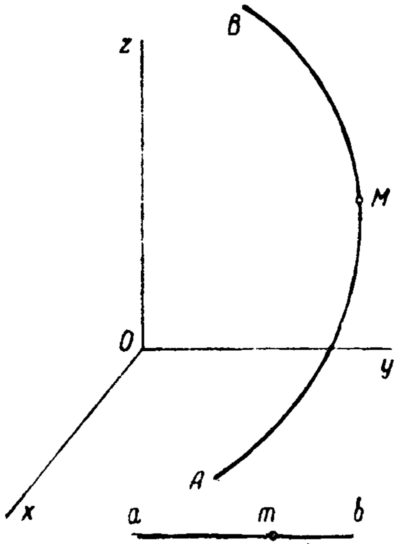

Рис. 1

Действительно, будем рассматривать парамегр $t$ как абсциссу точки

$$m = m(t)$$

прямой $ab$. Тогда система (1.1 : 1) будет определять соответствие точек $m$ на отрезке $ab$ точкам $M$ на дуге $AB$; при этом мы предполагаем, что

$$a = m(a), \quad b = m(b),$$

т. е. значения $t=a$ и $t=b$ соответствуют точкам $a$ и $b$ отрезка $ab$.

Это соответствие однозначно в силу однозначности функций (1.1 : 1); оно непрерывно в силу непрерывности этих функций класса $C^1$. Оно будет взаимно однозначно, если каждой точке $M$ дуги $AB$ соответствует одно значение параметра $t$ на отрезке $ab$ $(a \leqslant t \leqslant b)$. Таким образом, вопрос сводится к решению системы (1.1 : 1) относительно параметра $t$. Заметим, что достаточно найти одно определенное значение $t$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, удовлетворяющее одному из уравнений (1.1 : 1) для точки $M$ дуги $AB$, чтобы этому значению по формулам (1.1 : 1) можно было найти вполне определенную точку $M$.

## § 2. Теорема анализа о существовании неявной функции

**Теорема.** *Если функция $F(x, y)$ — класса $C^1$ (т. е. допускает непрерывные частные производные 1-го порядка), то для существования неявной функции*

$$y = f(x), \quad (1.2:1)$$

*определяемой уравнением $F(x, y)=0$, необходимо и достаточно существование начальной точки, т. е. пары чисел $x_0$, $y_0$, удовлетворяющих условиям:*

$$\text{a)}\ F(x_0, y_0) = 0,$$

$$\text{b)}\ F_y(x_0, y_0) \neq 0, \quad F_y = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

*При этом неявная функция* (1.2 : 1) *удовлетворяет условиям*

$$f(x_0) = y_0, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}. \tag{1.2 : 2}$$

Прилагая эту теорему к системе (1.1 : 1), мы видим, что для начальной точки можно взять любое значение $t=t_0$ $(a \leqslant t_0 \leqslant b)$ и три числа $x_i^0$, которые получаются, если в систему (1.1 : 1) внести значение $t=t_0$. Координаты $x_i=x_i^0$, $t=t_0$, очевидно, удовлетворяют каждому уравнению системы

$$F_i(x_i, t) = f_i(t) - x_i = 0, \tag{1.2 : 3}$$

ибо значения $x_i^0$ отсюда и были получены; следовательно, условие a) удовлетворено. Что касается условия b), то, дифференцируя обе части уравнения (1.2 : 3) по параметру $t$ (мы определяем параметр $t$), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} F_i(x_i, t) = \frac{d}{dt} f_i(t) - \frac{dx_i}{dt} = \dot{f}_i(t),$$

но в силу неравенства (1.1 : 2) по крайней мере одна из производных $\dot{f}_i(t_0)$ отлична от нуля:

$$\dot{f}_i(t_0) \neq 0.$$

Если это будет для $i=1$, то мы возьмем первое уравнение (1.1 : 1). Начальная точка будет тогда удовлетворять требованиям a) и b).

Следовательно, существует однозначная дифференцируемая функция

$$t = \varphi(x_1),$$

которая для $x_1=x_1^0$ принимает значение $t=t_0$ и в не окрестности точки $(x_1^0, t_0)$, не выходящей для $x$ дуги $AB$, а для $t$ за пределы отрезка $ab$, тож летворяет первому уравнению (1.1 : 1); эт удовлетворять и двум другим уравнениям (1.1 : 1), ибо значения $x_2$, $x_3$ были подсчитаны для значений $t$ ($a \leqslant t \leqslant b$) по формулам (1.1 : 1).

Таким образом, геометрическое место точек ($x_1$, $x_2$, $x_3$), определяемых из уравнений (1.1 : 1) для значений $a \leqslant t \leqslant b$, удовлетворяет первому условию «простой дуги». Оно будет удовлетворять и второму условию. Чтобы доказать это, надо определить касательную к нашей линии. Это будет удобнее сделать, пользуясь векторным представлением уравнений кривой.

## § 3. Вектор как функция скалярного аргумента

*Радиусом-вектором* точки $M$ называется вектор $\overrightarrow{OM}$, соединяющий начало координат $O$ с точкой $M$; его обозначают одной буквой $\mathbf{M}$ полужирного шрифта

$$\mathbf{M} = \overrightarrow{OM}.$$

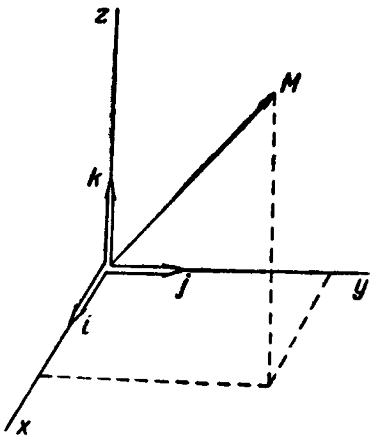


Рис. 2

Если задана прямоугольная (правая) декартова система координат, то единичные векторы осей обозначаются буквами $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ или короче $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ (рис. 2). В этом случае компоненты радиуса-вектора по осям прямоугольной системы совпадают с координатами точки $M$, конца вектора

$$\mathbf{M} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z. \qquad (1.3:1)$$

Вектор $\mathbf{M}$ будет функцией параметра $t$, если для всякого значения $t$ в некотором интервале, например на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$, дано значение вектора $\mathbf{M}$ или его координат (компонентов).

Задание вектора $\mathbf{M}$ как функции параметра $t$ записывается в виде

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(t). \qquad (1.3:2)$$

Это эквивалентно заданию координат точки $M(x_1, x_2, x_3)$ —компонентов вектора

$$x_i = f_i(t) \quad (i = 1, 2, 3). \tag{1.3:3}$$

Вектор равен нулю, если все его координаты равны нулю.

Переменный вектор называется *бесконечно малым порядка h,* если все его координаты — бесконечно малые порядка не ниже $h$ и одна из координат точно порядка $h$, т. е. если модуль вектора — бесконечно малая порядка $h$.

Переменный вектор *стремится к пределу* (постоянному вектору), если разность между переменным вектором и пределом — бесконечно малая

$$\lim_{t\to a} \mathbf{M}(t) = \mathbf{A}, \text{ если } \lim_{t\to a} \{\mathbf{M}(t) - \mathbf{A}\} = \mathbf{0}. \tag{1.3:4}$$

Если три функции (1.3:3) — класса $C^1$, то и вектор (1.3:2)— класса $C^1$.

*Производной вектора* по переменному параметру $t$ называется предел отношения приращения вектора к приращению независимого переменного при стремлении этого приращения к нулю

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \dot{\mathbf{M}} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta \mathbf{M}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\mathbf{M}(t+\Delta t) - \mathbf{M}(t)}{\Delta t}. \tag{1.3:5}$$

Если приложить эту формулу к вектору (1.3:1), то получим

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\mathbf{i}\Delta x + \mathbf{j}\Delta y + \mathbf{k}\Delta z}{\Delta t} = \mathbf{i} \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \mathbf{j} \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \\ + \mathbf{k} \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t},$$

или

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{i} \frac{dx}{dt} + \mathbf{j} \frac{dy}{dt} + \mathbf{k} \frac{dz}{dt}. \tag{1.3:6}$$

## § 4. Касательная к линии

Рассмотрим уравнение (1.3:2) как уравнение линии в пространстве. Возьмем две точки $M$ и $M_1$ (рис. 3), которые соответствуют значениям $t$ и $t_1 = t + \Delta t$.

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(t), \quad \mathbf{M}_1 = \mathbf{M}(t + \Delta t).$$

Тогда хорда, соединяющая точки $M$ и $M_1$, определяет вектор

$$\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M},$$

который назовем приращением радиуса-вектора

$$\Delta \mathbf{M} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M} = \overrightarrow{\mathbf{MM}_1}.$$

Отношение приращения радиуса-вектора к приращению независимого переменного $\Delta t$

$$\frac{\Delta \mathbf{M}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t}$$

представляет вектор, лежащий на секущей $MM_1$, но при малых значениях приращения $\Delta t$ длиной больше хорды $MM_1$. При переходе к пределу при $\Delta t \to 0$ точка $M_1$, спускаясь по дуге $M_1M$, в пределе совпадает с точкой $M$, длина хорды $MM_1$ обращается в нуль, но отношение $\frac{\Delta \vec{\mathbf{M}}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t}$ может сохранить конечное значение. По определению секущая в пределе займет положение касательной $\overrightarrow{MM'}$ к линии в точке $M$. На этой касательной и будет лежать вектор производной

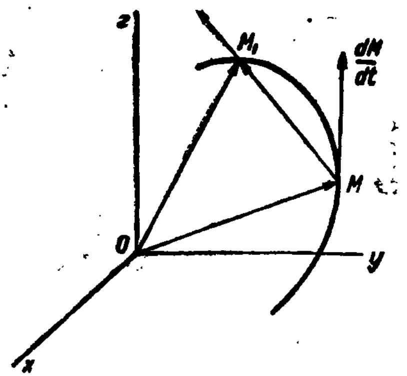


Рис. 3

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{M}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t}. \quad (1.4:1)$$

**Теорема.** *Производная от радиуса-вектора текущей точки кривой имеет направление касательной к кривой.*

Если рассматривать в уравнении (1.3 : 2) параметр $t$ как время, то уравнение (1. 3 : 2) будет определять положение точки $M$ во всякий момент времени $t$, $(a \leqslant t \leqslant b)$, т. е. определять закон движения точки $M$.

Приращение $\Delta\mathbf{M}$, или лучше дуга $\smile MM_1$, определяет при этом путь, пройденный точкой $M$ за промежуток времени $\Delta t$.

Поскольку предел отношения дуги к хорде равен единице, то

$$\lim_{M_1 \to M} \frac{\smile MM_1}{MM_1} = \lim_{M_1 \to M} \frac{\smile MM_1}{|\Delta \mathbf{M}|} = 1. \qquad (1.4:2)$$

Отсюда прямо следует, что *модуль вектора производной радиуса-вектора текущей точки по времени равен линейной скорости точки.* Действительно,

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{M}}{\Delta t},$$

как мы видели, определяет вектор касательной.

С другой стороны,

$$\left|\frac{d\mathbf{M}}{dt}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{M}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{M}}{\smile MM_1} \cdot \frac{\smile MM_1}{\Delta t}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{MM_1}{\smile MM_1} \cdot \frac{\smile MM_1}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\smile MM_1}{\Delta t}$$

есть линейная скорость точки при ее движении по дуге $MM_1$. Отсюда производная радиуса вектора по времени есть вектор линейной скорости движения точки по линии.

Теперь мы можем закончить теорему о параметрическом определении простой дуги.

Мы доказали, что параметрическое представление линии (1.1 : 1) функциями класса $C^1$ с условием (1.1 : 2) топологически эквивалентно отрезку прямой. Теперь мы можем показать, что линия (1.1 : 1) удовлетворяет и второму условию: в каждой точке допускает касательную, которая непрерывно вращается при перемещении точки касания.

Действительно, по формуле (1.3 : 6) вектор касательной

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{i}\frac{dx}{dt} + \mathbf{j}\frac{dy}{dt} + \mathbf{k}\frac{dz}{dt}, \qquad (1.4:3)$$

имея координатами производные функций (1.1 : 1) класса $C^1$ (непрерывно дифференцируемых), будет непрерывно вращаться при изменении параметра $t$, т. е. при непрерывном перемещении точки $M$ по дуге $AB$.

## § 5. Правила дифференцирования векторных функций

1. *Производная суммы равна сумме производных от слагаемых*

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2) = \frac{d\mathbf{M}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{M}_2}{dt}. \qquad (1.5:1)$$

Действительно, приращение суммы функций складывается из приращений слагаемых

$$\Delta(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2) = \Delta\mathbf{M}_1 + \Delta\mathbf{M}_2;$$

отсюда

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{M}_1}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{M}_2}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{M}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{M}_2}{dt}.$$

**2.** *Производная произведения вектора на скалярную функцию* $\varphi(t)$

$$\frac{d}{dt}(\varphi\mathbf{M}) = \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{M} + \varphi\frac{d\mathbf{M}}{dt}. \qquad (1.5:2)$$

Действительно,

$$\Delta(\varphi\mathbf{M}) = (\varphi + \Delta\varphi)(\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M}) - \varphi\mathbf{M} = \Delta\varphi(\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M}) + \varphi\Delta\mathbf{M},$$

откуда

$$\frac{\Delta(\varphi\mathbf{M})}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}(\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M}) + \varphi\frac{\Delta\mathbf{M}}{\Delta t},$$

$$\frac{d(\varphi\mathbf{M})}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta(\varphi\mathbf{M})}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta t \to 0}(\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M}) +$$

$$+ \varphi \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{M}}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{M} + \varphi\frac{d\mathbf{M}}{dt}.$$

**3.** *Производная скалярного произведения векторов*

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2) = \frac{d\mathbf{M}_1}{dt}\mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_1\frac{d\mathbf{M}_2}{dt}. \qquad (1.5:3)$$

Действительно,

$$\Delta(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2) = (\mathbf{M}_1 + \Delta\mathbf{M}_1)\cdot(\mathbf{M}_2 + \Delta\mathbf{M}_2) - \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 =$$

$$= \Delta\mathbf{M}_1(\mathbf{M}_2 + \Delta\mathbf{M}_2) + \mathbf{M}_1\Delta\mathbf{M}_2,$$

откуда

$$\frac{d(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{M}_1}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta t \to 0}(\mathbf{M}_2 + \Delta\mathbf{M}_2) +$$

$$+ \mathbf{M}_1 \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{M}_2}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{M}_1}{dt}\mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_1\frac{d\mathbf{M}_2}{dt}.$$

**4.** *Производная векторного произведения векторов*

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2) = \frac{d\mathbf{M}_1}{dt} \times \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_1 \times \frac{d\mathbf{M}_2}{dt}. \qquad (1.5:4)$$

Действительно,

$$\Delta(\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2) = (\mathbf{M}_1 + \Delta\mathbf{M}_1) \times (\mathbf{M}_2 + \Delta\mathbf{M}_2) -$$
$$- \mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2 = \Delta\mathbf{M}_1 \times (\mathbf{M}_2 + \Delta\mathbf{M}_2) + \mathbf{M}_1 \times \Delta\mathbf{M}_2.$$

Отсюда

$$\frac{d(\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta(\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{M}_1}{\Delta t} \times \lim_{\Delta t \to 0} (\mathbf{M}_2 + \Delta\mathbf{M}_2) +$$
$$+ \mathbf{M}_1 \times \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{M}_2}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{M}_1}{dt} \times \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_1 \times \frac{d\mathbf{M}_2}{dt}.$$

5. *Производная скалярного произведения трех векторов*

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3) = \left(\frac{d\mathbf{M}_1}{dt}\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3\right) + \left(\mathbf{M}_1\frac{d\mathbf{M}_2}{dt}\mathbf{M}_3\right) +$$
$$+ \left(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\frac{d\mathbf{M}_3}{dt}\right).$$

Действительно,

$$(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3) = (\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2)\,\mathbf{M}_3,$$

но по формуле (1.5:2) имеем

$$\frac{d}{dt}\{(\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2)\,\mathbf{M}_3\} = \left[\frac{d}{dt}(\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2)\right]\mathbf{M}_3 + (\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2)\frac{d\mathbf{M}_3}{dt}$$

и по формуле (1.5:4)

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2) = \frac{d\mathbf{M}_1}{dt} \times \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_1 \times \frac{d\mathbf{M}_2}{dt}.$$

Соединяя вместе, получим

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3) = \left(\frac{d\mathbf{M}_1}{dt} \times \mathbf{M}_2\right)\mathbf{M}_3 + \left(\mathbf{M}_1 \times \frac{d\mathbf{M}_2}{dt}\right)\mathbf{M}_3 +$$
$$+ (\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2)\frac{d\mathbf{M}_3}{dt},$$

или

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3) = (\dot{\mathbf{M}}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3) + (\mathbf{M}_1\dot{\mathbf{M}}_2\mathbf{M}_3) + (\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\dot{\mathbf{M}}_3). \quad (1.5:5)$$

6. *Теорема о дифференцировании сложной функции: если* $\mathbf{M} = \mathbf{M}(s)$ *и* $s = f(t)$, *то*

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{d\mathbf{M}}{ds}\,\frac{ds}{dt}, \quad (1.5:6)$$

Действительно,

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{M}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\mathbf{M}}{\Delta s}\,\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) =$$
$$= \lim\frac{\Delta\mathbf{M}}{\Delta s}\lim\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{M}}{ds}\,\frac{ds}{dt}.$$

## § 6. Основные теоремы дифференциального исчисления

Для векторных функций не имеет места ни теорема Ролля, ни теорема Лагранжа. Действительно, теорема Ролля утверждает: если дифференцируемая функция $y=f(x)$ обращается в нуль для $x=a$ и для $x=b$, то ее производная $\frac{dy}{dx}=\dot{f}(x)$ обратится в нуль для некоторого значения $x=c$, где $a \leqslant c \leqslant b$. Для векторной функции (1.3 : 2), если ее истолковывать кинематически (как закон движения точки), то точка $M$ может два раза пройти через начало координат (где радиус-вектор $\mathbf{M}=\overrightarrow{OM}$ обращается в нуль) без того, чтобы производная $\frac{d\mathbf{M}}{dt}$, т. е. скорость движения, когда-либо обращалась в нуль. Например, можно пройти весь замкнутый путь с постоянной скоростью.

**Ряд Тэйлора.** Ряд Тэйлора с остаточным членом можно написать и для векторной функции. Для этого надо разложить в ряд Тэйлора каждую координату вектора и, умножив на единичные векторы осей координат, сложить почленно.

*Если функция*

$$x_i = f_i(t) \quad (i = 1,2,3),$$

*класса* $C^n$ (имеет непрерывную производную порядка $n$) *в интервале* $(t,\ t+h)$ *и в точке* $t$ *существует производная порядка* $n+1$, *то имеет место разложение*

$$\left.\begin{aligned} f_i(t+h) - f_i(t) &= h\dot{f}_i(t) + \frac{h^2}{1\cdot 2}\ddot{f}_i(t) + \dots \\ \dots &+ \frac{h^n}{n!}f_i^{(n)}(t) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}R^{n+1}(t,h), \\ f_i^{(p)}(t) &= \frac{d^p}{dt^p}f_i(t), \end{aligned}\right\} \quad (1.6:1)$$

где

$$\lim_{h\to 0} R^{n+1}(t,h) = f_i^{(n+1)}(t).$$

Выписывая эти разложения для $i=1, 2, 3$, т. е. для трех координат вектора (1.3 : 3), умножая их на соответствующие векторы $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ и почленно складывая, получим по формуле (1.6 : 1)

$$\mathbf{M}(t+h)-\mathbf{M}(t)=h\dot{\mathbf{M}}(t)+\frac{h^2}{1\cdot 2}\ddot{\mathbf{M}}(t)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{h^n}{n!}\overset{(n)}{\mathbf{M}}(t)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\Phi^{n+1}(t,h), \qquad (1.6:2)$$

где

$$\lim_{h\to 0}\Phi^{n+1}(t,h)=\overset{(n+1)}{\mathbf{M}}(t),$$
$$\overset{(n)}{\mathbf{M}}=\frac{d^n\mathbf{M}}{dt^n}.$$

В частности, для $n=0$ имеем теорему о конечном приращении векторной функции

$$\mathbf{M}(t+h)-\mathbf{M}(t)=h\,\Phi(t,h), \qquad (1.6:3)$$
$$\lim_{h\to 0}\Phi(t,h)=\dot{\mathbf{M}}(t).$$

ГЛАВА II

# ФОРМУЛЫ ФРЕНЕ

## § 1. Длина дуги линии

Если линия задана параметрическим уравнением

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(t), \tag{2.1:1}$$

то первая производная по параметру $t$

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \dot{\mathbf{M}}(t) \tag{2.1:2}$$

определяет вектор касательной, т. е. вектор, определяющий направление касательной в точке $M$.

При замене параметра $t$ на новый параметр $s$

$$s = \varphi(t), \qquad \frac{ds}{dt} = \dot{\varphi}(t) > 0 \tag{2.1:3}$$

производная (2.1 : 2) изменится. Согласно теореме о дифференцировании сложной функции (1.5 : 6) имеем

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{d\mathbf{M}}{ds}\,\frac{ds}{dt}. \tag{2.1:4}$$

Мы видим, что направление вектора не меняется, но модуль вектора

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{M}}{dt}\right)^2 &= \left(\frac{d\mathbf{M}}{ds}\right)^2 \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \\ \left|\frac{d\mathbf{M}}{ds}\right| &= \left|\frac{d\mathbf{M}}{dt}\right| : \left|\frac{ds}{dt}\right| \end{aligned}\right\} \tag{2.1:5}$$

делится на производную $\frac{ds}{dt} = \dot{\varphi}(t)$.

При подходящем выборе функции $\dot{\varphi}(t)$ модуль производной приводится к единице

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} = 1.$$

Тогда вектор касательной

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} = \boldsymbol{\tau} \tag{2.1 : 6}$$

становится единичным. Обозначим его буквой $\boldsymbol{\tau}$. Параметр $s$ будем называть *длиной дуги* линии. Из формулы (2.1 : 5) при $\left(\frac{d\mathbf{M}}{ds}\right)^2 = 1$ получим

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\mathbf{M}}{dt}\right)^2,$$

или, если воспользоваться формулой (1.3 : 6),

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

откуда

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2. \tag{2.1 : 7}$$

Эта формула совпадает с формулой, получаемой в анализе при определении длины дуги как предела периметров, вписанных (или описанных) ломаных линий при неограниченном увеличении числа сторон, когда каждая сторона ломаной стремится к нулю.

## § 2. Формулы Френе

Уравнение (2.1 : 6) определяет первый из инвариантных единичных векторов, связанных с изучаемой линией.

**Лемма 1.** *Производная единичного вектора перпендикулярна к самому вектору.*

Рассмотрим единичный вектор

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(s),$$

по определению тождественно для всех значений параметра имеем

$$\boldsymbol{\tau}^2 = 1. \tag{2.2 : 1}$$

Дифференцируя это тождество, получим

$$2\tau \frac{d\tau}{ds} = 0. \tag{2.2:2}$$

Скалярное произведение равно нулю; следовательно, векторы $\tau$ и $\frac{d\tau}{ds}$ — перпендикулярны.

**Лемма 2.** *Если единичный вектор*

$$\overrightarrow{Om} = \mathbf{m}(t)$$

*вращается около неподвижной точки O и независимое переменное t означает время, то модуль производной* $\frac{d\mathbf{m}}{dt}$ *равен скорости вращения.*

Действительно, рассмотрим два положения вектора: $\overrightarrow{Om_1}$ в момент времени $t=0$ и $\overrightarrow{Om_2}$ в момент времени $t=\Delta t$. Эти два положения $\overrightarrow{Om_1}$ и $\overrightarrow{Om_2}$ определяют равнобедренный треугольник $m_1Om_2$ (рис. 4). Обозначим

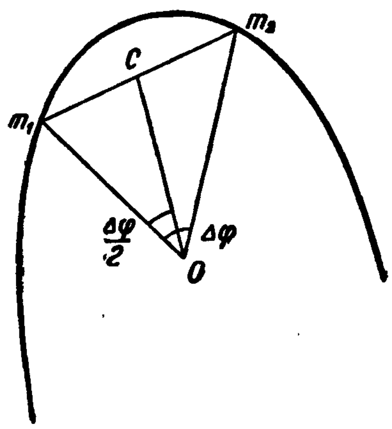


Рис. 4

$$\Delta\varphi = \angle\, m_1Om_2$$

угол при вершине треугольника. Поскольку треугольник $m_1Om_2$ равнобедренный с боковыми сторонами $Om_1 = Om_2 = 1$, основание $m_1m_2$ равно

$$m_1m_2 = 2\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = |\Delta\mathbf{m}|.$$

Вектор $\overrightarrow{m_1m_2}$, очевидно, равен приращению $\Delta\mathbf{m}$ вектора

$$\mathbf{m} = \overrightarrow{Om}.$$

Производная радиуса-вектора $\mathbf{m}$ по времени $t$ равна пределу отношения приращений

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{m}}{\Delta t},$$

а модуль производной — пределу модуля отношения приращений

$$\left|\frac{dm}{dt}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta m}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t},$$

но

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta t}{2}}.$$

Здесь первый множитель имеет пределом единицу, как отношение синуса к его аргументу; второй — производную угла поворота $\Delta\varphi$ по времени, т. е. быстроту вращения вектора:

$$\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} = 1,\qquad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta t}{2}} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Отсюда

$$\left|\frac{dm}{dt}\right| = \frac{d\varphi}{dt},$$

что и доказывает лемму.

Приложим теперь эти леммы к исследованию векторов, инвариантно связанных с кривой в заданной точке, и скалярных (числовых) инвариантов — модулей этих векторов.

## § 3. Главная нормаль и кривизна кривой

При определении первого инвариантного вектора, когда мы рассматривали производную от радиуса-вектора текущей точки кривой по параметру $t$, мы воспользовались модулем этого вектора, чтобы выбрать инвариантный параметр на кривой, который имеет простое геометрическое истолкование — длина дуги кривой. Мы получили его, требуя, чтобы модуль производной равнялся единице

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} = \boldsymbol{\tau},\qquad \boldsymbol{\tau}^2 = 1. \tag{2.3 : 1}$$

Дифференцируя еще раз по длине дуги $s$, мы получим новый вектор

$$\frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds},$$

инвариантный и по направлению, и по модулю, ибо дифференцирование ведется по инвариантному параметру.

Обозначим через $\nu$ единичный вектор, определяющий направление этой производной, и через $k$ — модуль ее. Тогда получим первую из формул Френе

$$\frac{d\tau}{ds} = k\nu. \qquad (2.3:2)$$

В силу леммы 1 вектор $\nu$, коллинеарный вектору $\frac{d\tau}{ds}$, перпендикулярен к вектору $\tau$

$$\tau\nu = 0. \qquad (2.3:3)$$

Прямые, проходящие через точку $M$ кривой перпендикулярно к касательной называются *нормалями* кривой. В пространстве к заданной прямой (касательной) в заданной точке (точке касания) можно провести пучок перпендикулярных прямых (нормалей). Все они лежат в одной плоскости, которая называется *нормальной плоскостью* линии (рис. 5).

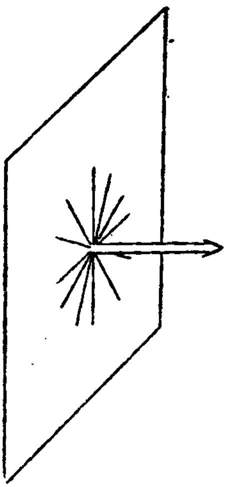

Рис. 5

Вектор $\nu$ определяет одну из нормалей кривой. Поскольку мы нашли ее первой, будем называть *главной нормалью.*

В силу леммы 2 модуль производной единичного вектора

$$k = \left|\frac{d\tau}{ds}\right|$$

показывает быстроту вращения вектора касательной $\tau$ при перемещении точки касания $M$ по кривой.

Точнее следует сказать: если провести из начала координат $O$ (или любой неподвижной точки) вектор, равный вектору $\tau$ в точке $M$ кривой,

$$\overrightarrow{Om} = \tau,$$

то при перемещении точки $M$ по кривой вектор $\overrightarrow{Om}$ будет вращаться около неподвижной точки $O$. Если при этом точка $M$ движется по кривой равномерно, так что в единицу времени проходит единицу пути, то скорость вращения вектора будет характеризовать величину искривления кривой и называется *кривизной* линии.

*Кривизна $k$ пространственной кривой существенно положительна.*

### § 4. Бинормаль и кручение кривой

Имея два инвариантных вектора: вектор касательной и вектор главной нормали, мы можем инвариантно определить третий дополнительный вектор, как векторное произведение двух первых

$$\beta = \tau \times \nu. \tag{2.4 : 1}$$

Поскольку модуль векторного произведения равен произведению модулей множителей (в нашем случае единичных векторов), умноженному на синус угла между ними (в нашем случае прямой угол), вектор $\beta$ будет тоже единичным вектором. По свойству векторного произведения он перпендикулярен к обоим векторам $\tau$ и $\nu$. Как вектор, перпендикулярный к касательной, вектор $\beta$ определяет вторую нормаль, или *бинормаль*. Три вектора $\tau$, $\nu$ и $\beta$ образуют трехгранник (триэдр) той же ориентации (правой), как оси принятой системы (декартовых) координат $x_1$, $x_2$, $x_3$.

Этот подвижной трехгранник, или репер, сопровождающий точку $M$ при ее перемещении по кривой, называется подвижным трехгранником или *трехгранником Френе*. (Френе первый написал формулы для производных по длине дуги трех векторов $\tau$, $\nu$, $\beta$.)

Уравнение (2.3 : 2) представляет первую из формул Френе. Чтобы получить вторую; заметим, что всякий вектор пространства, в том числе и вектор $\frac{d\nu}{ds}$, может быть разложен на компоненты по трем независимым векторам $\tau$, $\nu$, $\beta$. Поскольку производная единичного вектора $\frac{d\nu}{ds}$ перпендикулярна к вектору $\nu$, она по этому вектору компонента не имеет, и мы можем положить

$$\frac{d\nu}{ds} = a\tau + c\beta. \tag{2.4 : 2}$$

Между тем, дифференцируя тождество (2.3 : 3), получим

$$\nu \frac{d\tau}{ds} + \tau \frac{d\nu}{ds} = 0.$$

Внося сюда значения (2.3 : 2) и (2.4 : 2), получим

$$\nu k \nu + \tau (a\tau + c\beta) = 0,$$

или в силу

$$\tau^2 = \nu^2 = 1, \quad \tau\beta = 0,$$

$$a + k = 0, \text{ т. е. } a = -k.$$

Если обозначить коэффициент $c$ греческой буквой каппа $\varkappa$, получим вторую формулу Френе

$$\frac{d\nu}{ds} = -k\tau + \varkappa\beta. \tag{2.4 : 3}$$

Теперь последняя формула Френе получается непосредственным дифференцированием тождества (2.4 : 1)

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{d\tau}{ds} \times \nu + \tau \times \frac{d\nu}{ds};$$

внося сюда значения (2.3 : 2), (2.4 : 3), получим

$$\frac{d\beta}{ds} = k\nu \times \nu + \tau \times (-k\tau + \varkappa\beta),$$

или в силу

$$\tau \times \tau = \nu \times \nu = 0, \quad \tau \times \beta = -\nu,$$

$$\frac{d\beta}{ds} = -\varkappa\nu. \tag{2.4 : 4}$$

Уравнения (2.3 : 2), (2.4 : 3) и (2.4 : 4) образуют *систему уравнений Френе* [к которой можно присоединить уравнение (2.3 : 1)]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dM}{ds} = \tau, \qquad & \frac{d\tau}{ds} = k\nu, \\ & \frac{d\nu}{ds} = -k\tau + \varkappa\beta, \\ & \frac{d\beta}{ds} = -\varkappa\nu. \end{aligned}\right\} \tag{2.4 : 5}$$

Кроме единичных векторов $\tau$, $\nu$, $\beta$, она содержит два скаляра $k$ и $\varkappa$, которые являются *инвариантами* в силу инвариантности формул Френе. Первый из них $k$ является *кривизной* линии, второй $\varkappa$ называется *кручением линии*. Прилагая лемму 2 к уравнению (2.4 : 4), получим

$$\left| \frac{d\beta}{ds} \right| = |-\varkappa| \cdot |\nu| = |\varkappa|.$$

Следовательно, *абсолютная величина второго инварианта $\varkappa$ равна скорости вращения бинормали.*

Если кривизна $k$ существенно положительна (по самому определению), то кручение $\varkappa$ может быть и положительным и отрицательным. Чтобы определить кручение по величине и по знаку, рассмотрим произведение трех векторов

$$(\mathbf{M}'\,\mathbf{M}''\,\mathbf{M}'''),$$

где штрихами обозначено дифференцирование по длине дуги.

Пользуясь формулами Френе (2.4 : 5), имеем:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{M}' &= \tau, \\ \mathbf{M}'' &= k\nu, \\ \mathbf{M}''' &= k'\nu + k(-k\tau + \varkappa\beta) = -k^2\tau + k'\nu + k\varkappa\beta. \end{aligned}\right\} \qquad (2.4:6)$$

Отсюда

$$\mathbf{M}' \times \mathbf{M}'' = \tau \times (k\nu) = k\beta, \quad (\mathbf{M}' \times \mathbf{M}'')^2 = k^2. \qquad (2.4:7)$$

$$(\mathbf{M}'\mathbf{M}''\mathbf{M}''') = (\mathbf{M}' \times \mathbf{M}'')\,\mathbf{M}''' = k\beta\,(-k^2\tau + k'\nu + k\varkappa\beta) = k^2\varkappa$$

и

$$\varkappa = \frac{(\mathbf{M}'\mathbf{M}''\mathbf{M}''')}{(\mathbf{M}' \times \mathbf{M}'')^2}. \qquad (2.4:8)$$

Рассмотрим теперь приращение радиуса-вектора $\Delta\mathbf{M}$ при переходе из точки $\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}(s_0)$ в точку $\mathbf{M} = \mathbf{M}(s_0 + h)$. Разлагая в ряд Тэйлора, получим

$$\overrightarrow{\mathbf{M}_0\mathbf{M}} = \mathbf{M}(s_0 + h) - \mathbf{M}(s_0) =$$

$$= h\mathbf{M}_0' + \frac{h^2}{1\cdot 2}\mathbf{M}_0'' + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}\,\Phi_3(s_0, h), \qquad (2.4:9)$$

где

$$\lim_{h\to 0} \Phi_3(s_0, h) = \mathbf{M}_0''',$$

или в силу (2.4 : 6)

$$\overrightarrow{\mathbf{M}_0\mathbf{M}} = h\tau_0 + \frac{h^2}{2}k_0\nu_0 + \frac{h^3}{6}\Phi_3, \qquad (2.4:10)$$

где в силу (2.4 : 6)

$$\lim_{h\to 0} \Phi_3 = -k_0^2\tau_0 + k_0'\nu_0 + k_0\varkappa_0\beta_0. \qquad (2.4:11)$$

Первые два члена разложения (2.4 : 10) лежат в плоскости векторов $\tau$, $\nu$, которая называется *соприкасающейся* плоскостью. Третий член в своей главной части (бесконечно малая третьего порядка относительно $\Delta s = h$) содержит член

$$\frac{h^3}{6} k_0\varkappa_0\beta_0.$$

При движении по кривой в положительном направлении, т. е. в сторону возрастания $\Delta s = h > 0$, направление смещения $\overrightarrow{M_0M}$ относительно бинормали $\beta_0$ зависит от знака кручения $\varkappa_0$, ибо кривизна $k$ всегда положительна. Отсюда:

**Теорема.** *Если кручение $\varkappa_0 > 0$, то точка $M$ переходит по кривой с одной стороны соприкасающейся плоскости на другую в положительном направлении бинормали; если $\varkappa_0 < 0$, то в отрицательном.*

## § 5. Соприкасающаяся плоскость

Определение 1. *Порядком касания линии с плоскостью в точке $M_0$ называется наибольшее целое число, строго меньшее порядка малости расстояния $PM$ точки кривой $M$ от плоскости в окрестности их общей точки $M_0$, если за бесконечно малую первого порядка принимать приращение длины дуги $\Delta s = \smile M_0M$* (рис. 6).

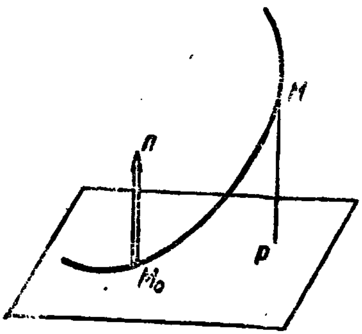

Рис. 6

Определение 2. *Соприкасающейся плоскостью линии в точке $M_0$ называется плоскость, проходящая через точку $M_0$ линии и имеющая с ней в этой точке касание наибольшего порядка.*

Обозначим буквой $\mathbf{n}$ единичный вектор нормали к выбранной плоскости, проходящей через точку $M_0$ кривой. Тогда расстояние $d = PM$ точки от плоскости равно проекции радиуса-вектора $\overrightarrow{M_0M}$ на вектор нормали, т. е. скалярному произведению

$$d = \mathbf{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}.$$

Пользуясь разложением (2.4 : 10), получим

$$d = \mathbf{n}\left(h\tau_0 + \frac{h^2}{2} k_0 \nu_0 + \frac{h^3}{6} \Phi_3\right), \qquad (2.5:1)$$

$$\lim_{h \to 0} \Phi_3 = -k_0^2\tau_0 + k_0'\nu_0 + k_0\varkappa_0\beta_0.$$

a) Если $\mathbf{n}\tau_0 \neq 0$, т. е. касательная пересекает плоскость, то порядок малости $d$ равен 1, порядок касания равен нулю. *Линия пересекает плоскость.*

b) Если

$$\mathbf{n}\tau_0 = 0, \quad \mathbf{n}\nu_0 \neq 0, \qquad (2.5:2)$$

то первый член в разложении (2.5 : 1) пропадает, порядок малости $d$ определяется вторым членом

$$\frac{1}{2} h^2 k_0 \mathbf{n}\nu_0$$

и будет равен 2. Порядок касания равен 1. *Линия касается плоскости.*

Из равенства (2.5 : 2) следует перпендикулярность векторов $\mathbf{n}$ и $\tau_0$. Вектор касательной $\tau_0$ проходит через точку $M_0$ плоскости и перпендикулярен к перпендикуляру $\mathbf{n}$ плоскости, следовательно, лежит в плоскости.

Следствие. *Линия касается плоскости, если ее касательная лежит в этой плоскости.*

c) Если

$$\mathbf{n}\tau_0 = 0, \quad \mathbf{n}\nu_0 = 0,$$

то вектор перпендикуляра $\mathbf{n}$ к плоскости параллелен бинормали $\beta_0$, плоскость содержит касательную и главную нормаль линии.

Порядок малости $d$ определяется третьим членом разложения (2.5 : 1)

$$\frac{h^3}{6} \mathbf{n}\Phi_3 = \frac{h^3}{6} k_0\varkappa_0\mathbf{n}\beta_0 = \frac{h^3}{6} k_0\varkappa_0 \qquad (2.5:3)$$

и равен 3; порядок касания равен 2. Это наибольший порядок касания плоскости с кривой в общей точке, ибо произведение (2.5 : 3) может обратиться в нуль только при условии, что в этой точке обращается в нуль кривизна $k_0 = 0$ или кручение $\varkappa_0 = 0$, а это *особенные* точки линии.

Теорема. *Соприкасающаяся плоскость проходит через касательную и главную нормаль; она имеет с кривой касание второго порядка.*

## § 6. Соприкасающаяся окружность

Определение. *Соприкасающейся окружностью линии в точке $M_0$ называется окружность, проходящая через точку $M_0$ и имеющая с линией в этой точке касание наибольшего порядка.*

Понятие порядка касания остается прежним. Определим кратчайшее расстояние от точки $M$ нашей линии до заданной окружности. Для этого достаточно опустить из точки $M$ перпендикуляр $MQ$ на плоскость окружности и соединить основание перпендикуляра $Q$ с центром окружности $C$. Одна из точек ($P$, $P'$) пересечения прямой $CQ$ с окружностью дает кратчайшее расстояние $PQ$ от точки $Q$ до окружности, другая — наибольшее $P'Q$. Соединяя точки $P$ и $M$, получим прямоугольный треугольник с гипотенузой $PM$. Следовательно,

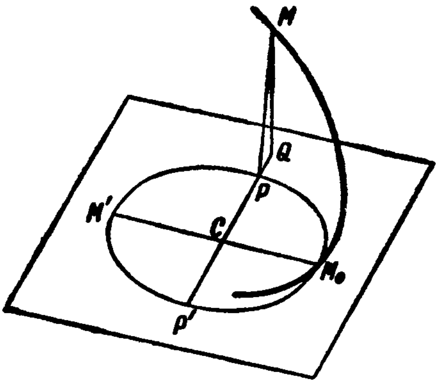


Рис. 7

$$\overrightarrow{PM}^2 = \overrightarrow{PQ}^2 + \overrightarrow{QM}^2.$$

Порядок малости $PM$ равен наименьшему из порядков малости $PQ$ и $QM$.

a) Порядок малости $\overrightarrow{QM}$ — расстояния от точки $M$ до плоскости — определяется порядком касания линии с плоскостью (рис. 7). Наибольший порядок касания (второй) в общей точке линии достигается соприкасающейся плоскостью. Строим в точке $M_0$ соприкасающуюся плоскость; расстояние $QM$ будет бесконечно малым 3-го порядка по отношению к дуге $h = \smile M_0M$.

b) Теперь нам надо подсчитать порядок малости отрезка $PQ$. Оба отрезка $PQ$ и $P'Q$ выражаются через $CQ$ и радиус окружности $R$:

$$PQ = CQ - R, \quad P'Q = CQ + R;$$

но $P'Q$ при $M \to M_0$ стремится к пределу $2R$. Следовательно, порядок малости $PQ$ совпадает с порядком малости

$$\delta = PQ \cdot P'Q = \overrightarrow{CQ}^2 - R^2. \qquad (2.6:1)$$

Отрезок $CQ$ можно получить, проектируя на плоскость $(\tau_0, \nu_0)$ вектор $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{M_0M} - \overrightarrow{M_0C}$. Пользуясь разложениями (2.4 : 10), (2.4 : 11) и отбрасывая члены с вектором $\beta$, получим до бесконечно малых $h^3$ включительно

$$\overrightarrow{CQ} = \tau_0\left(h - \frac{h^3}{6} k_0^2\right) + \nu_0\left(\frac{1}{2} h^2 k_0 + \frac{1}{6} h^3 k_0' - R\right),$$

где $\overrightarrow{M_0C} = R\nu_0$; внося это в (2.6 : 1), получим до $h^3$ включительно

$$\delta = \left(h - \frac{h^3}{6} k_0^2\right)^2 + \left(- R + \frac{h^2}{2} k_0 + \frac{h^3}{6} k_0'\right)^2 - R^2 =$$

$$= h^2 (1 - Rk_0) - \frac{1}{3} h^3 R k_0'.$$

Чтобы величина $\delta$ была бесконечно малой 3-го порядка, надо взять

$$1 - Rk_0 = 0, \quad \text{т. е.} \quad k_0 = \frac{1}{R}. \qquad (2.6:2)$$

Тогда порядок малости $\delta$ определится членом $\frac{1}{3} h^3 R k_0'$ и будет равен 3, т. е. такой же, как и порядок малости $QM$. Порядок малости расстояния $PM$ от точки $M$ до окружности тоже равен трем; порядок касания 2, и мы получаем соприкасающуюся окружность.

Формула (2.6 : 2) показывает, что *радиус соприкасающейся окружности равен радиусу кривизны, т. е. обратной величине кривизны*. Центр соприкасающейся окружности называется *центром кривизны*.

## § 7. Кинематическая интерпретация

С каждой точкой кривой связан трехгранник Френе. Все эти трехгранники — ортогональны, правые с единичными векторами осей. Такие трехгранники все конгруэнтны. Поэтому мы можем рассматривать их как различные положения одного трехгранника, перемещающегося вдоль кривой вместе с его вершиной $M$, которая описывает кривую. При этом мы будем рассматривать равномерное движение, когда вершина $M$, описывая кривую, проходит в единицу времени единицу пути, т. е. будем полагать $s=t$.

Движение трехгранника Френе надо рассматривать как движение твердого тела. Известно, что всякое перемещение твердого тела можно разложить на два перемещения: 1) *поступательное,* когда все точки тела перемещаются на один и тот же вектор, и 2) *вращательное,* когда твердое тело совершает поворот около неподвижной оси. Такое разложение возможно и при инфинитезимальном смещении. В частности, мгновенная скорость твердого тела разлагается на поступательную и вращательную.

1. *Скорость поступательного движения* можно принять равной скорости любой точки тела. Для движения трехгранника Френе скорость поступательного движения определяется как скорость вершины трехгранника.

2. Если скорость поступательного движения вычесть из скорости каждой точки тела, то полученное движение будет

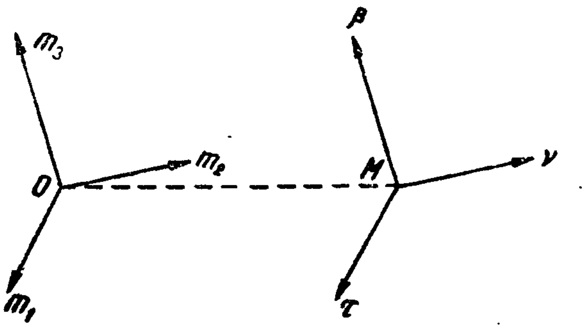


Рис. 8

представлять вращение. Действительно, для второго компонента движения точка $M$ — вершина трехгранника — не перемещается. Если при движении твердого тела имеется неподвижная точка, то в каждый момент движения найдется и неподвижная прямая — *мгновенная ось вращения.*

Можно наглядно представить эту операцию (рис. 8). Проведем из неподвижной точки, например начала координат, векторы, равные (а следовательно, параллельные) единичным векторам осей трехгранника Френе. Новый трехгранник имеет, очевидно, неподвижную вершину. При движении трехгранника Френе вдоль кривой трехгранник с вершиной в начале будет поворачиваться так, что его оси остаются параллельными осям трехгранника Френе.

*Вектор скорости вращения* определяется условиями:

а) модуль вектора равен производной $\frac{d\varphi}{dt}$, где $t$ — время и $\varphi$ — угол поворота,

b) вектор скорости вращения откладывается на оси вращения (или ей параллелен);

c) положительное направление определяется условием: если ось вращения совпадает с третьей осью репера $\mathbf{e}_3$, то вращение в положительном направлении идет от оси $\mathbf{e}_1$ к оси $\mathbf{e}_2$.

## § 8. Определение линейной скорости точки по заданному вектору мгновенной скорости вращения

Предположим, что заданная скорость вращения отложена на оси $\mathbf{e}_3$ ортогональной системы координат

$$\mathbf{V} = \mathbf{e}_3 \frac{d\varphi}{dt},$$

следовательно, тело вращается около оси $\mathbf{e}_3$. Рассмотрим точку $m$ вращающегося тела, расположенную на оси $\mathbf{e}_1$ на расстоянии $r$ от оси вращения (рис. 9).

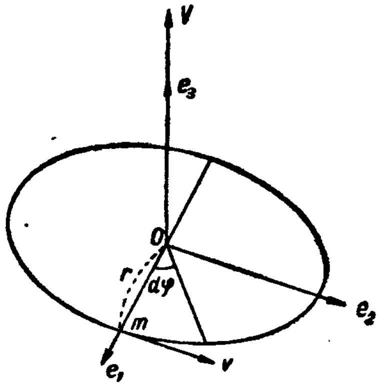


Рис. 9

Если бы точка $\mathbf{m} = r\mathbf{e}_1$ равномерно вращалась с этой скоростью, то она описывала бы окружность с центром $O$ в плоскости векторов ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$) в направлении от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$. Поскольку скорость вращения равна $\frac{d\varphi}{dt}$, за время $dt$ тело повернется на угол $d\varphi$ (в абсолютной мере углов) и точка $m$ пройдет по окружности радиуса $r$ расстояние $rd\varphi$; отсюда *линейная скорость* точки $m$ равна $r\frac{d\varphi}{dt}$. Линейная скорость направлена по касательной к траектории в направлении движения, т. е. от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$; а так как касательная к окружности в точке $m$ перпендикулярна к радиусу в точке касания, то вектор линейной скорости точки $m$ перпендикулярен к вектору $\mathbf{e}_1$ и параллелен вектору $\mathbf{e}_2$, а при положительном вращении и одинаково направлен. Отсюда

$$\mathbf{v} = r \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_2;$$

но

$$r\frac{d\varphi}{dt}\mathbf{e}_2 = r\frac{d\varphi}{dt}\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1 = \left(\mathbf{e}_3\frac{d\varphi}{dt}\right)\times(r\mathbf{e}_1) = \mathbf{V}\times\overrightarrow{Om}.$$

Эта формула

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}\times\overrightarrow{Om} \qquad (2.8:1)$$

верна для определения линейной скорости любой точки $M$ твердого тела

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}\times\overrightarrow{OM}, \qquad (2.8:2)$$

где $O$ — произвольная точка оси вращения (рис. 10).

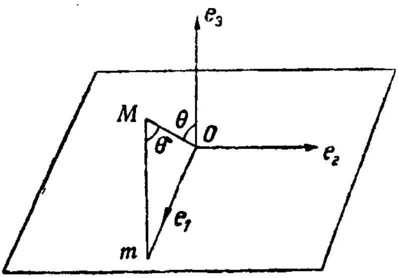

Рис. 10

Действительно, опустим из точки $M$ перпендикуляр на плоскость ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$) и пусть основанием перпендикуляра будет точка $m$ на оси $\mathbf{e}_1$. Очевидно, все точки прямой $mM$, параллельной оси вращения, вращаются с одной и той же линейной скоростью, и ту же скорость получим по формуле (2.8:2).

Действительно, если обозначить буквой $R$ расстояние точки $M$ от начала $O$ и буквой $\theta$ угол наклона вектора $\overrightarrow{OM}$ к оси $\mathbf{e}_3$, то по формуле (2.8:2) получим

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}\times\overrightarrow{OM} = \mathbf{e}_3\frac{d\varphi}{dt}\times\overrightarrow{OM} = \mathbf{e}_2 R\sin\theta\cdot\frac{d\varphi}{dt},$$

так как вектор $\mathbf{e}_2$ перпендикулярен к плоскости ($\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1$), которая содержит вектор $\overrightarrow{OM}$, а $R\sin\theta$ равно произведению модулей $\overrightarrow{OM}$ и $\mathbf{e}_3$, умноженному на синус угла между ними; из прямоугольного треугольника $OmM$ имеем

$$r = R\sin\theta$$

и окончательно

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_2 r\frac{d\varphi}{dt}. \qquad (2.8:3)$$

Таким образом, линейная скорость точки $\mathbf{v}$ и скорость вращения $\mathbf{V}$ связаны соотношением (2.8:2).

Если скорость вращения разложить на два компонента

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2,$$

то и линейная скорость $\mathbf{v}$ разложится на два компонента:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) \times \overrightarrow{OM} = \mathbf{V}_1 \times \overrightarrow{OM} + \mathbf{V}_2 \times \overrightarrow{OM} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2.$$

## § 9. Компоненты вектора скорости вращения трехгранника Френе

Уравнения Френе дают линейные скорости точек $m_1$, $m_2$, $m_3$, лежащих на концах единичных векторов:

$$\tau = \overrightarrow{Om_1}, \quad \nu = \overrightarrow{Om_2}, \quad \beta = \overrightarrow{Om_3},$$

проведенных из начала координат параллельно касательной, главной нормали и бинормали.

Разбиваем уравнения Френе на две подсистемы, сохраняя в первой только члены с инвариантом $k$, а во второй только с $\varkappa$.

Первая подсистема Вторая подсистема

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\tau}{ds} &= k\nu, \\ \frac{d\nu}{ds} &= -k\tau, \\ \frac{d\beta}{ds} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (2.9:1) \qquad \left.\begin{aligned} \frac{d\tau}{ds} &= 0, \\ \frac{d\nu}{ds} &= \varkappa\beta, \\ \frac{d\beta}{ds} &= -\varkappa\nu. \end{aligned}\right\} \quad (2.9:2)$$

Мы рассматриваем только вращение трехгранника, или. лучше, движение параллельного трехгранника с вершиной в начале координат. Полагая (рис. 11)

$$\overrightarrow{Om_1} = \mathbf{m}_1, \quad \overrightarrow{Om_2} = \mathbf{m}_2, \quad \overrightarrow{Om_3} = \mathbf{m}_3,$$

имеем для первой подсистемы

$$\frac{d\mathbf{m}_1}{ds} = k\nu, \quad \frac{d\mathbf{m}_2}{ds} = -k\tau, \quad \frac{d\mathbf{m}_3}{ds} = 0. \qquad (2.9:3)$$

Последнее уравнение показывает, что точка $m_3$ стоит на месте, а поскольку и точка $O$ неподвижна, то осью вращения служит ось $\overrightarrow{Om_3}$ (бинормаль). Следовательно, вектор скорости вращения будет иметь вид

$$\mathbf{V}_1 = \beta \frac{d\varphi}{dt} .$$

Внося это выражение в формулу (2.8 : 2), получим **для линейных скоростей** (2.9 : 3)

$$\mathbf{v}_1 = k\nu = \beta \times \tau \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\nu,$$

$$\mathbf{v}_2 = -k\tau = \beta \times \nu \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}\tau,$$

откуда

$$\frac{d\varphi}{dt} = k \text{ и } \mathbf{V}_1 = k\beta. \qquad (2.9:4)$$

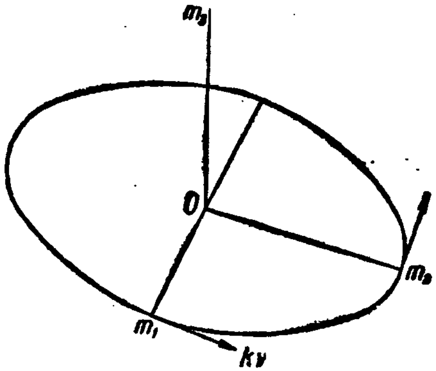


Рис. 11

Вторая подсистема (2.9 : 2) приводит к уравнениям

$$\frac{dm_1}{ds} = 0, \quad \frac{dm_2}{ds} = \varkappa\beta, \quad \frac{dm_3}{ds} = -\varkappa\nu; \qquad (2.9:5)$$

неподвижны точки $m_1$ и $O$, ось вращения $\overrightarrow{Om_1}$ (касательная); вектор скорости вращения имеет вид

$$\mathbf{V}_2 = \tau \frac{d\varphi}{dt}.$$

Внося эти выражения в формулу (2.8 : 2), получим

$$\mathbf{v}_1 = \varkappa\beta = \tau \times \nu \frac{d\varphi}{dt} = \beta \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\mathbf{v}_2 = -\varkappa\nu = \tau \times \beta \frac{d\varphi}{dt} = -\nu \frac{d\varphi}{dt},$$

откуда

$$\frac{d\varphi}{dt}=\varkappa,\quad V_2=\varkappa\tau.$$

Вторая подсистема приводит к вращению со скоростью

$$V_2=\varkappa\tau. \tag{2.9:6}$$

Складывая оба компонента (2.9:4) и (2.9:6), получим полную скорость вращения

$$\Phi=k\beta+\varkappa\tau. \tag{2.9:7}$$

Два компонента скорости вращения вместе со скоростью поступательного движения, которая совпадает со скоростью движения точки $M$ по линии и равна $\tau$, позволяют хорошо описать движение трехгранника.

В каждый момент трехгранник движется в положительном направлении вектора касательной $\tau$. При этом первый компонент скорости вращения $k\beta$ поворачивает касательную $\tau$, т. е. направление скорости поступательного движения, около бинормали, т. е. в соприкасающейся плоскости, и, таким образом, в первом приближении позволяет точке $M$ описывать кривую. Второй компонент скорости вращения $\varkappa\tau$ вращает соприкасающуюся плоскость около касательной. Поступательное движение вдоль касательной и вращение около касательной придает перемещению трехгранника характер винтового движения, а для самой касательной напоминает закручивание нити, откуда и происходит название кручения для инварианта $\varkappa$, определяющего быстроту такого закручивания.

Двум знакам кручения соответствуют два направления винтового движения. При положительном знаке $\varkappa\tau$ трехгранник вращается около касательной от главной нормали к бинормали, т. е. так, как ввинчивается обыкновенный буравчик.

## § 10. Примеры интегрирования натуральных уравнений кривой

Уравнения Френе (2.4:5) содержат, кроме единичных векторов $\tau$, $\nu$, $\beta$ и их производных, только два инварианта $k$ и $\varkappa$. Теорема о существовании линии (и только одной с точностью до положения в пространстве) для заданных функциями длины дуги $s$ двух инвариантов $k$ и $\varkappa$ — будет доказана позднее (2.12).

Уравнения

$$k=f(s),\quad \varkappa=g(s), \tag{2.10:1}$$

определяющие линию, носят название *натуральных уравнений* кривой, ибо не зависят от системы координат. Задача определения уравнений (1.1 : 1) в параметрическом виде для трех текущих координат называется *интегрированием натуральных уравнений кривой.*

Теперь мы рассмотрим несколько замечательных случаев интегрирования натуральных уравнений.

**Первый пример.** Дано $k=0$.

Первое уравнение (2.4 : 5) запишется

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds}=\boldsymbol{\tau}, \qquad \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}=0.$$

Второе уравнение показывает, что вектор $\boldsymbol{\tau}$ сохраняет постоянное значение

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}_0=\text{const}.$$

Интегрируя первое уравнение $\frac{d\mathbf{M}}{ds}=\boldsymbol{\tau}_0$, получим

$$\mathbf{M}=\boldsymbol{\tau}_0 s+\mathbf{M}_0, \tag{2.10 : 2}$$

где $\mathbf{M}_0$ — постоянный вектор. Если обозначить координаты векторов

$$\mathbf{M}(x, y, z), \quad \mathbf{M}_0(x_0, y_0, z_0), \quad \boldsymbol{\tau}(\alpha, \beta, \gamma),$$

то уравнение (2.10 : 2) запишется в виде уравнений прямой линии

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}=s.$$

**Второй пример.** Дано кручение $\varkappa=0$. Теперь третье уравнение Френе будет

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}=0 \text{ и } \boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_0=\text{const}.$$

Выберем оси неподвижной системы координат так, чтобы единичный вектор $\mathbf{J}_3$ третьей оси был параллелен постоянному вектору $\boldsymbol{\beta}_0$. Тогда векторы $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$ будут перпендикулярны к бинормали. Касательная $\boldsymbol{\tau}$ и главная нормаль $\boldsymbol{\nu}$ будут разлагаться только по векторам $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$. Обозначая буквой $\theta$ угол касательной $\boldsymbol{\tau}$ с вектором $\mathbf{J}_1$, можем записать

$$\boldsymbol{\tau}=\mathbf{J}_1\cos\theta+\mathbf{J}_2\sin\theta,$$

$$\boldsymbol{\nu}=-\mathbf{J}_1\sin\theta+\mathbf{J}_2\cos\theta.$$

Внося эти значения в остальные уравнения Френе:

$$\frac{d\tau}{ds} = k\nu, \quad \frac{d\nu}{ds} = -k\tau,$$

получим

$$k = \frac{d\theta}{ds}. \tag{2.10:3}$$

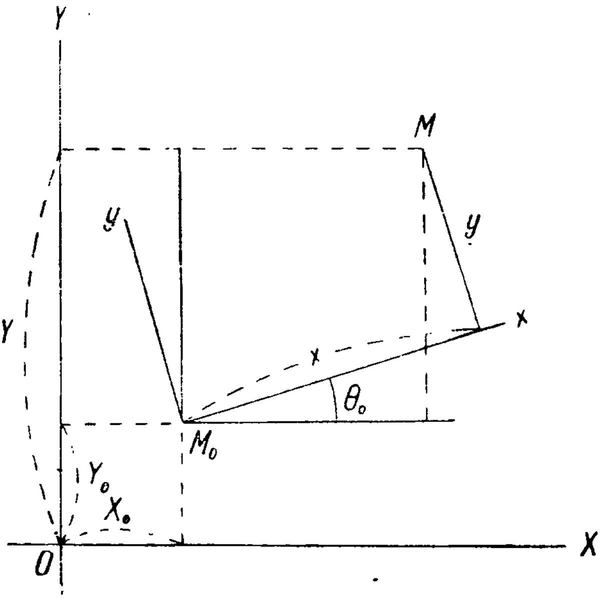


Рис. 12

Если кривизна задана уравнением (2.10:1)

$$\frac{d\theta}{ds} = f(s), \tag{2.10:4}$$

то, интегрируя, получим

$$\theta = \varphi(s) + \theta_0, \qquad \varphi(s) = \int\limits_0^s f(s)\,ds, \tag{2.10:5}$$

где $\theta_0$=const — начальное значение функции $\theta$.

Интегрируя уравнение

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} = \boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}_1 \cos(\varphi + \theta_0) + \mathbf{J}_2 \sin(\varphi + \theta_0), \qquad (2.10:6)$$

или

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} = \mathbf{J}_1 (\cos\varphi \cos\theta_0 - \sin\varphi \sin\theta_0) + \mathbf{J}_2 (\sin\varphi \cos\theta_0 + \cos\varphi \sin\theta_0),$$

получим (рис. 12)

$$\mathbf{M} - \mathbf{M}_0 = \mathbf{J}_1 (x\cos\theta_0 - y\sin\theta_0) + \mathbf{J}_2 (x\sin\theta_0 + y\cos\theta_0), \qquad (2.10:7)$$

где

$$\mathbf{M}_0 = \mathrm{const} \text{ и } x = \int_0^s \cos\varphi\, ds, \qquad y = \int_0^s \sin\varphi\, ds$$

Нетрудно заметить, что новые координаты

$$\mathbf{M} = X\mathbf{J}_1 + Y\mathbf{J}_2,$$

где

$$X = x\cos\theta_0 - y\sin\theta_0 + X_0,$$
$$Y = x\sin\theta_0 + y\cos\theta_0 + Y_0$$

соответствуют переходу к новой системе координат, повернутой на угол $_0$, с началом в точке $\mathbf{M}_0 = \mathbf{J}_1 X_0 + \mathbf{J}_2 Y_0$ или, иначе, соответствуют перемещению плоскости вместе с кривой: поступательно на вектор $\mathbf{M}_0 = \mathbf{J}_1 X_0 + \mathbf{J}_2 Y_0$ и повороту на угол $\theta_0$.

**Теорема.** *Задание кривизны функцией длины дуги определяет линию на плоскости с точностью до произвольного перемещения на плоскости.*

**Третий пример.** *Найти линии, у которых кручение пропорционально кривизне с постоянным множителем пропорциональности*

$$\varkappa = \lambda k, \quad \lambda = \mathrm{ctg}\, \alpha = \mathrm{const}. \qquad (2.10:8)$$

Составляем линейную комбинацию из первого и третьего уравнений Френе

$$\lambda\left(\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} - k\boldsymbol{\nu}\right) + \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} + \varkappa\boldsymbol{\nu} = 0.$$

В силу (2.10 : 8) члены с вектором $\boldsymbol{\nu}$ сокращаются и мы получаем

$$\frac{d}{ds}(\lambda\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{\beta})=0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{ds}(\boldsymbol{\tau}\cos\alpha+\boldsymbol{\beta}\sin\alpha)=0.$$

Поскольку производная равна нулю, вектор

$$\mathbf{n}=\boldsymbol{\tau}\cos\alpha+\boldsymbol{\beta}\sin\alpha \qquad (2.10:9)$$

будет постоянным; его квадрат равен единице, мы его примем за единичный вектор оси $z$.

Умножая почленно равенство (2.10 : 9) на векторы $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ получим:

$$\mathbf{n}\boldsymbol{\tau}=\cos\alpha, \quad \mathbf{n}\boldsymbol{\nu}=0, \quad \mathbf{n}\boldsymbol{\beta}=\sin\alpha.$$

Первое равенство показывает, что *касательная образует постоянный угол* $\alpha$ *с осью* $z$.

Спроектируем нашу линию на плоскость $xy$. Проектирующие прямые (перпендикуляры, опущенные из точек кривой

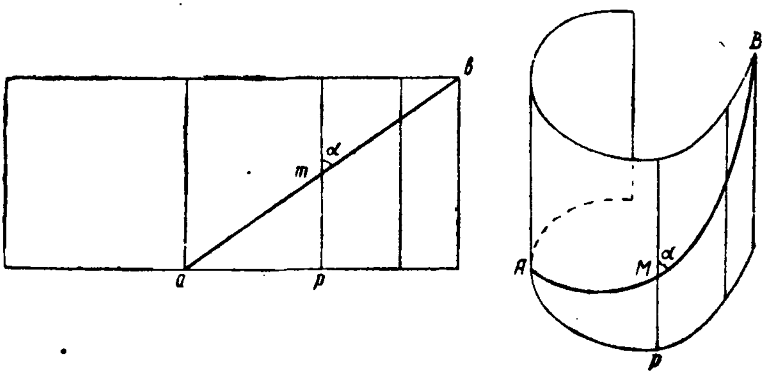


Рис. 13

на плоскость $xy$) образуют цилиндр, на котором лежит наша линия. Так как все образующие цилиндра имеют направление оси $z$, то линия (2.10 : 8) пересекает все образующие цилиндра под постоянным углом $\alpha$ *(локсодрома прямого цилиндра)*.

Разрежем цилиндрическую поверхность по двум образующим и развернем на плоскость. Тогда линия (2.10 : 8) будет пересекать под постоянным углом $\alpha$ все ординаты (прямые, параллельные оси $y$, если развернутую плоскую направляющую цилиндра принять за ось $x$); следовательно, после развертывания наша линия станет прямой.

Линии, определяющие кратчайшие расстояния на поверхиости между двумя ее точками, называются *геодезическими;* на плоскости это будут прямые линии. Когда наш лист бумаги навернем обратно на цилиндр, прямая $amb$ (рис. 13) займет положение $AMB$, но сохранит свойство определять кратчайшее расстояние в некоторой области поверхности и, следовательно, будет геодезической линией цилиндра.

Обозначим буквой $s$ длину дуги $AM$, буквой $\sigma$ длину дуги $AP$. После развертывания они образуют вместе с отрезком образующей цилиндра $pm$ прямоугольный треугольник $apm$ с острым углом $\alpha$ при вершине $m$. Следовательно,

$$ap = am\cdot\sin\alpha, \quad pm = am\cdot\cos\alpha, \qquad (2.10:10)$$

или

$$\sigma = s\cdot\sin\alpha, \quad z - z_0 = s\cdot\cos\alpha. \qquad (2.10:11)$$

Радиус-вектор точки $M$ можно представить суммой

$$\mathbf{M} = \mathbf{P} + \overrightarrow{PM} = \mathbf{P} + \mathbf{n}\cdot(z - z_0). \qquad (2.10:12)$$

Для координаты $z—z_0$ мы имеем второе уравнение (2.10 : 11), вектор $\mathbf{n}$ — единичный вектор оси $z$; остается только определить направляющую цилиндра

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\sigma)$$

как плоскую линию. Для этого надо найти кривизну направляющей. Дифференцируя по длине дуги $s$ равенство

$$\mathbf{M} = \mathbf{P} + \mathbf{n}s\cdot\cos\alpha,$$

получим

$$\tau = \frac{d\mathbf{P}}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds} + \mathbf{n}\cos\alpha.$$

Но $\frac{d\mathbf{P}}{d\sigma} = \mathbf{T}$ — единичный вектор касательной к направляющей; между тем $\frac{d\sigma}{ds} = \sin\alpha$ в силу первой формулы (2.10 : 11); следовательно,

$$\tau = \mathbf{T}\sin\alpha + \mathbf{n}\cos\alpha.$$

Дифференцируя еще раз, получим

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds}\sin\alpha, \text{ или } k\mathbf{v} = K\mathbf{N}\sin^2\alpha.$$

Здесь $\nu$ — главная нормаль линии $(M)$, $\mathbf{N}$ — нормаль плоской кривой $(P)$; если $K$ — кривизна плоской кривой — положительна, то $\mathbf{N} = \nu$ и

$$k = K \sin^2 \alpha, \text{ или } K = \frac{k}{\sin^2 \alpha}, \qquad (2.10:13)$$

что и требовалось найти.

Линии, определяемые уравнением (2.10 : 8), которые мы рассматривали, называются *общими винтовыми линиями*.

Замечательный специальный случай определяется уравнениями

$$k = \text{const}; \quad \varkappa = \text{const}.$$

Отсюда по формуле (2.10 : 13) кривизна $K$ плоской направляющей цилиндра будет тоже постоянна. Уравнения (2.10 : 4), (2.10 : 5), (2.10 : 6) второго примера легко теперь интегрируются. Отбрасывая постоянные интеграции, имеем

$$\frac{d\theta}{ds} = K, \ \theta = Ks,$$

$$x = -\frac{1}{K} \sin (Ks), \qquad y = \frac{1}{K} \cos (Ks),$$

откуда

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{K^2},$$

направляющая цилиндра — окружность.

Следовательно, линии постоянной кривизны и постоянного кручения — *винтовые линии круглого цилиндра*, или *обыкновенные винтовые линии*.

Частным случаем обыкновенной винтовой линии для $\alpha = \frac{\pi}{2}$ будет окружность. Действительно, при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ винтовая линия сечет образующие ортогонально и совпадает с направляющей цилиндра.

## § 11. Эйлеровы углы

При интегрировании уравнений Френе (2.4 : 5) дополнительным затруднением является то, что координаты векторов $\tau$, $\nu$, $\beta$ должны удовлетворять, кроме того, конечным соотношениям, вытекающим из ортонормированности трехгранника Френе

$$\tau^2 = \nu^2 = \beta^2 = 1, \quad \tau\nu = \nu\beta = \beta\tau = 0. \qquad (2.11:1)$$

Так как на девять координат векторов $\tau$, $\nu$, $\beta$ накладывается 6 соотношений, то независимых координат, определяющих поворот трехгранника около начала $O$, останется три. Эйлер ввел эти три угла.

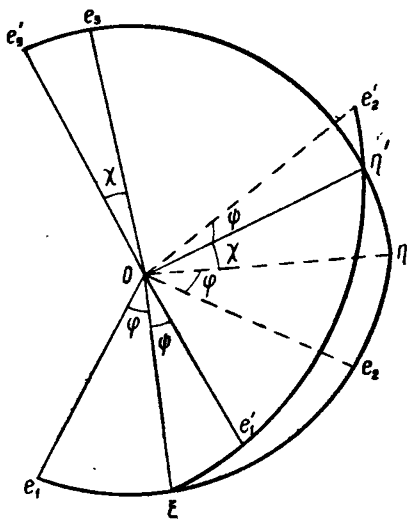


Рис. 14

Если два ортонормированных правых трехгранника имеют общую вершину, то одним из этих углов будет угол между векторами третьих осей (рис. 14)

$$\chi = \angle \mathbf{e}_3 O \mathbf{e}_3' .$$

Линия $\xi$ пересечения плоскостей ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$) и ($\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$) будет перпендикулярна к обоим векторам $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_3$, потому что она лежит в плоскостях, перпендикулярных одна из них к вектору $\mathbf{e}_3$, другая к вектору $\mathbf{e}'_3$. Следовательно, повернув на угол $\chi$ около оси $\xi$ второй трехгранник, мы совместим ось $\mathbf{e}'_3$ с осью $\mathbf{e}_3$.

Если предварительно повернуть первый трехгранник около оси $\mathbf{e}_3$ на угол

$$\varphi = \angle \mathbf{e}_1 O \xi,$$

а второй — около оси $\mathbf{e}_3'$ на угол

$$\psi = \angle \xi O \mathbf{e}_1' ,$$

то будут совмещенными и оси $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_1$.

Остается выразить векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ через $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$. Для этого мы проведем еще векторы $\eta$, $\eta'$ так, чтобы векторы $\xi$, $\eta$, $\mathbf{e}_3$ и $\xi'$, $\eta'$, $\mathbf{e}_3'$ определяли ортонормированные трехгранники.

Тогда последовательность преобразований, переводящая репер ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) в репер ($\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$), будет от трехгранника ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) к ($\xi$, $\eta$, $\mathbf{e}_3$), затем к ($\xi$, $\eta'$, $\mathbf{e}_3'$) и, наконец, к ($\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$).

Каждый раз два соседних трехгранника имеют общую ось: для первой пары — вектор $\mathbf{e}_3$, для второй — $\xi$, для третьей — $\mathbf{e}_3'$.

В первой паре преобразуются векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ в векторы $\xi$, $\eta$ по правилу преобразования декартовых прямоугольных координат поворотом на угол $\varphi$:

$$\xi = \mathbf{e}_1 \cos\varphi + \mathbf{e}_2 \sin\varphi, \quad \eta = -\mathbf{e}_1 \sin\varphi + \mathbf{e}_2 \cos\varphi; \qquad (a)$$

во второй паре преобразуются $\eta$, $\mathbf{e}_3$ в $\eta'$, $\mathbf{e}_3'$ поворотом на угол $\chi$:

$$\eta' = \eta\cos\chi + \mathbf{e}_3 \sin\chi; \quad \mathbf{e}_3' = -\eta\sin\chi + \mathbf{e}_3\cos\chi; \qquad (b)$$

в третьей паре векторы $\xi$, $\eta'$ преобразуются в $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ поворотом на угол $\psi = \angle \xi O \mathbf{e}_1'$:

$$\mathbf{e}_1' = \xi\cos\psi + \eta'\sin\psi; \quad \mathbf{e}_2' = -\xi\sin\psi + \eta'\cos\psi. \qquad (c)$$

Исключая последовательно $\xi$, $\eta$, $\eta'$, получаем сначала

$$\eta' = (-\mathbf{e}_1 \sin\varphi + \mathbf{e}_2\cos\varphi)\cos\chi + \mathbf{e}_3\sin\chi,$$
$$\mathbf{e}_3' = -(-\mathbf{e}_1\sin\varphi + \mathbf{e}_2\cos\varphi)\sin\chi + \mathbf{e}_3\cos\chi,$$

затем

$$\mathbf{e}_1' = (\mathbf{e}_1\cos\varphi + \mathbf{e}_2\sin\varphi)\cos\psi + \{(-\mathbf{e}_1\sin\varphi + \mathbf{e}_2\cos\varphi)\cos\chi + $$
$$+ \mathbf{e}_3\sin\chi\}\sin\psi,$$
$$\mathbf{e}_2' = -(\mathbf{e}_1\cos\varphi + \mathbf{e}_2\sin\varphi)\sin\psi +$$
$$+ \{(-\mathbf{e}_1\sin\varphi + \mathbf{e}_2\cos\varphi)\cos\chi + \mathbf{e}_3\sin\chi\}\cos\psi,$$

наконец

$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\chi) +$$
$$+ \mathbf{e}_2(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\chi) + \mathbf{e}_3\sin\psi\sin\chi,$$
$$\mathbf{e}_2' = -\mathbf{e}_1(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\chi) -$$
$$- \mathbf{e}_2(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\chi) + \mathbf{e}_3\cos\psi\sin\chi,$$
$$\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1\sin\varphi\sin\chi - \mathbf{e}_2\cos\varphi\sin\chi + \mathbf{e}_3\cos\chi. \qquad (2.11:2)$$

Если $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ — векторы ортонормированного репера, то для любых заданных углов $\varphi$, $\psi$, $\chi$ репер $(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$ будет ортонормирован и таким образом в виде (2.11 : 2) получим все единичные, прямоугольные правые трехгранники пространства.

## § 12. Интегрирование натуральных уравнений пространственной кривой

Обратимся теперь к уравнениям Френе (2.4 : 5) и будем искать трехгранник Френе в виде (2.11 : 2), полагая векторы $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ равными $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ и принимая векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ за базисные векторы $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$, $\mathbf{J}_3$ неподвижной декартовой системы координат:

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} &= \mathbf{J}_1(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\chi) + \\
&+ \mathbf{J}_2(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\chi) + \mathbf{J}_3\sin\psi\sin\chi, \\
\boldsymbol{\nu} &= -\mathbf{J}_1(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\chi) - \\
&- \mathbf{J}_2(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\chi) + \mathbf{J}_3\cos\psi\sin\chi, \\
\boldsymbol{\beta} &= \mathbf{J}_1\sin\varphi\sin\chi - \mathbf{J}_2\cos\varphi\sin\chi + \mathbf{J}_3\cos\chi.
\end{aligned}\right\} \quad (2.12:1)$$

Тогда, обозначая через $x$, $y$, $z$ текущие координаты точки $M$, запишем первое уравнение (2.4 : 5), (2.12 : 1) в виде системы:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{ds} &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\chi, \\
\frac{dy}{ds} &= \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\chi, \\
\frac{dz}{ds} &= \sin\psi\sin\chi.
\end{aligned}\right\} \quad (2.12:2)$$

Что касается второго уравнения Френе (2.4 : 5), то в силу шести конечных соотношений (2.11 : 1) мы получим только 3 независимых уравнения. Дифференцируя третьи компоненты векторов $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\nu}$ и второй компонент вектора $\boldsymbol{\beta}$ получим:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{ds} &= \varkappa\frac{\sin\psi}{\sin\chi}, \\
\frac{d\psi}{ds} &= k - \varkappa\sin\psi\operatorname{ctg}\chi, \\
\frac{d\chi}{ds} &= \varkappa\cos\psi.
\end{aligned}\right\} \quad (2.12:3)$$

Система уравнений (2.12 : 2), (2.12 : 3) является системой Коши для неизвестных функций $x$, $y$, $z$, $\varphi$, $\psi$, $\chi$, ибо разрешена относительно производных от неизвестных функций и имеет регулярные правые части. Следовательно, система допускает одно и только одно решение в виде регулярных функций:

$$x = x(s),\quad y = y(s),\quad z = z(s),\quad \varphi = \varphi(s),$$
$$\psi = \psi(s),\quad \chi = \chi(s),$$

удовлетворяющих системам (2.12:2), (2.12:3) и начальным условиям:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0, & \varphi &= \varphi_0, \\ y &= y_0, & \psi &= \psi_0, \\ z &= z_0, & \chi &= \chi_0, \text{ для } s = s_0 \end{aligned}\right\} \quad (2.12:4)$$

Начальные условия (2.12:4) имеют простой геометрический смысл: координаты $(x_0, y_0, z_0)$ определяют начальную точку $M_0$ кривой, а эйлеровы углы $(\varphi_0, \psi_0, \chi_0)$ по формулам (2.12:1) определят присоединенный репер.

Таким образом имеем теорему:

**Теорема существования I.** *Если заданы кривизна и кручение в функциях длины дуги класса $C^1$, то существует одна и только одна линия с этими инвариантами, проходящая через произвольно заданную точку $M_0$ и обладающая в этой точке заданным репером Френе.*

Нетрудно обнаружить, что все это шестипараметрическое семейство с параметрами $x_0, y_0, z_0, \varphi_0, \psi_0, \chi_0$ состоит из конгруэнтных линий. Действительно, очевидно, что кривизна и кручение кривой не зависят от ее положения в пространстве и при перемещении кривой, как одно целое, как твердое тело, не меняются. Следовательно, при движении пространства уравнения (2.12:2), (2.12:3) не меняются (ибо, кроме $k$ и $\varkappa$, других коэффициентов не содержат).

С другой стороны, два произвольных ортогональных трехгранника с единичными векторами осей правой ориентации конгруэнтны. Допустим теперь, что система (2.12:2), (2.12:3) определяет две кривые $L$ и $L'$ с начальными трехгранниками $T_0$ и $T_0'$; перенесем линию $L$ со всеми ее трехгранниками Френе $T$ как одно целое так, чтобы начальный трехгранник $T_0$ совместился с начальным трехгранником $T_0'$. Допустим, что после перемещения линия $L$ займет положение $L^*$. Система (2.12:2), (2.12:3) при перемещении не меняется и обе линии $L'$ и $L^*$, как и раньше, будут удовлетворять одной и той же системе уравнений, но, кроме того, после перемещения обе линии $L'$ и $L^*$ будут обладать одним и тем же начальным трехгранником $T_0^* \equiv T_0'$. Система Коши (2.12:2), (2.12:3) при заданных начальных условиях (2.12 : 4) имеет только одно решение. Следовательно, линии $L'$ и $L^*$ совпадают.

**Теорема существования II.** *Кривизна и кручение определяют одну и только одну кривую до положения в пространстве.*

Итак, *если заданы две функции $f_1(s)$, $f_2(s)$ класса $C^1$, из которых первая существенно положительна, то существует одна и только одна до положения в пространстве линия, кривизна и кручение которой в функциях от длины дуги будут*

$$k = f_1(s), \quad \varkappa = f_2(s). \tag{2.12 : 5}$$

Действительно, интегрирование системы Коши (2.12 : 2), (2.12 : 3) с произвольными начальными условиями (2.12 : 4) дает: первая группа (2.12 : 2) — непосредственно координаты $x$, $y$, $z$ текущей точки некоторой кривой $L$, вторая группа — эйлеровы углы $\varphi$, $\psi$, $\chi$ и по формулам Эйлера (2.11 : 2), если считать $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ за орты неподвижной ортогональной декартовой системы координат, — единичные ортогональные векторы $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$, образующие правый трехгранник.

Из уравнений (2.12 : 2) простым подсчетом получаем

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1, \text{ т. е.}$$

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = d\mathbf{M}^2,$$

откуда следует, что $ds$ есть элемент длины дуги постоянной кривой $L$.

Уравнения (2.12 : 3) были получены из уравнений Френе (2.4 : 5) и эквивалентны им, что можно проверить непосредственным подсчетом, дифференцируя систему (2.11 : 2) и полагая $\mathbf{e}_1' = \boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{e}_2' = \boldsymbol{\nu}$, $\mathbf{e}_3' = \boldsymbol{\beta}$.

Первое уравнение Френе показывает, что вектор $\mathbf{e}_1'$ является единичным вектором касательной кривой $L$.

Три уравнения второго столбца (2.4 : 5) показывают: первое, что единичный вектор $\mathbf{e}_2'$ является вектором главной нормали, а скаляр $k=f_1(s)$ есть кривизна кривой $L$.

Поскольку

$$\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1' \times \mathbf{e}_2' = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu},$$

вектор $\mathbf{e}_3'$ будет вектором бинормали, а коэффициент $\varkappa=f_2(s)$ — кручением кривой $L$.

## § 13. Эволюта и эвольвента

*Эволютой* плоской кривой называется геометрическое место ее центров кривизны. По отношению к своей эволюте исходная кривая называется *эвольвентой.*

Если

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(s) \qquad (2.18:1)$$

уравнение плоской кривой, $\boldsymbol{\nu}$ — главная нормаль (она лежит в плоскости кривой, перпендикулярно к касательной; ее положительное направление идет в ту сторону от касательной, где расположена кривая; точки перегиба, где линия располагается по обе стороны от касательной, исключаются, так как в точке перегиба кривизна обращается в нуль, а радиус кривизны — в бесконечность) и

$$k = \frac{1}{\rho} \qquad (2.13:2)$$

кривизна кривой ($\rho$ — радиус кривизны), то центр кривизны лежит на положительном направлении главной нормали на расстоянии радиуса кривизны от точки кривой

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{M} + \rho\boldsymbol{\nu}. \qquad (2.13:3)$$

Дифференцируя обе части уравнения (2.13 : 3) по длине дуги $s$ кривой (2.13 : 1), получим

$$\frac{d\mathbf{M}_1}{ds} = \frac{d\mathbf{M}}{ds} + \rho\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} + \boldsymbol{\nu}\frac{d\rho}{ds},$$

или по формулам Френе (2.4 : 5) при $\varkappa=0$

$$\frac{d\mathbf{M}_1}{ds} = \boldsymbol{\tau} - \rho k\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\nu}\frac{d\rho}{ds};$$

здесь в силу (2.13 : 2) первые два члена правой части сократятся и мы получим

$$\frac{d\mathbf{M}_1}{ds} = \boldsymbol{\nu}\frac{d\rho}{ds}.$$

Если обозначить длину дуги эволюты буквой $s_1$, то

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \frac{d\mathbf{M}_1}{ds_1} = \frac{d\mathbf{M}_1}{ds}\frac{ds}{ds_1} = \boldsymbol{\nu}\frac{d\rho}{ds}\frac{ds}{ds_1},$$

откуда

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \varepsilon\boldsymbol{\nu}, \quad \frac{d\rho}{ds}\frac{ds}{ds_1} = \varepsilon, \quad \text{где } \varepsilon = \pm 1. \qquad (2.13:4)$$

Отсюда следствие:

**Следствие I.** *Касательная к эволюте совпадает с главной нормалью исходной кривой.*

Из формулы (2.13 : 4) видно, что вектор касательной к эволюте $\tau_1$ и вектор главной нормали $\nu$ кривой совпадают с точностью до знака ($\varepsilon = \pm 1$). Уравнение (2.13 : 3) показывает, что точка $M_1$ лежит на главной нормали; в этой точке эволюта касается нормали кривой (рис. 15).

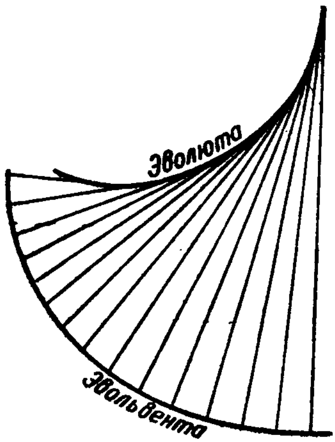


Рис. 15

Второе уравнение (2.13 : 4) для $\varepsilon = +1$ можно написать в виде

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{ds_1}{ds}; \qquad (2.13:5)$$

откуда, интегрируя в пределах от $s = s'$ до $s = s''$, получим

$$\rho'' - \rho' = s_1'' - s_1'.$$

или, полагая

$$\rho' = \overline{M'M_1'}. \quad \rho'' = \overline{M''M_1''},$$

$$s_1'' - s_1' = \smile M_1'M_1'';$$

имеем

$$\smile M_1'M_1'' = \overline{M''M_1''} - \overline{M'M_1'}. \qquad (2.13:6)$$

Отсюда следствие:

**Следствие II.** *Дуга эволюты равна разности радиусов кривизны эвольвенты в начале и в конце дуги.*

Заметим, что изменение знака параметра $\varepsilon$ имеет следствием изменение знака $s_1$, т. е. изменение положительного направления на эволюте на противоположное.

**Теорема.** *Одной эволюте соответствует однопараметрическое семейство эвольвент.*

Действительно, элементы эволюты $\mathbf{M}_1$, $\tau_1$, $s_1$ и эвольвенты $\mathbf{M}$, $\nu$, $\rho$, $s$ связаны соотношениями (2.13 : 3), (2.13 : 4), (2.13 : 5). Интегрируя уравнение (2.13 : 5), получим

$$\rho = s_1 + a, \quad a = \text{const}, \qquad (2.13:7)$$

где $a$ — произвольное постоянное. Уравнение (2.13 : 4) теперь определяет вектор нормали эвольвенты. Полагая опять $\varepsilon=1$, получим

$$\nu = \tau_1, \qquad (2.13:8)$$

и уравнение (2.13 : 3) определит однопараметрическое семейство эвольвент (параметр семейства — произвольное постоянное $a$):

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 - (s_1 + a)\,\tau_1. \qquad (2.13:9)$$

Действительно, дифференцируя по длине дуги $s_1$ обе части уравнения (2.13 : 9), получим

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds}\,\frac{ds}{ds_1} = \tau_1 - (s_1 + a)\,k_1\,\nu_1 - \tau_1,$$

или

$$\tau\,\frac{ds}{ds_1} = -\,\nu_1\,(s_1 + a)\,k_1.$$

Отсюда

$$\tau = -\,\nu_1, \quad ds = (s_1 + a)\,k_1 ds_1. \qquad (2.13:10$$

Первое уравнение (2.13 : 10) хорошо согласуется с уравнением (2.13 : 8), ибо, перемножая векторно векторы $\tau$ и $\nu$, получим по формулам (2.13 : 8), (2.13 : 10)

$$\beta = \tau \times \nu = -\,\nu_1 \times \tau_1 = \tau_1 \times \nu_1 = \beta_1,$$

так как для всех плоских кривых направление бинормали одно и то же и совпадает с выбранным положительным направлением перпендикуляра к плоскости кривой.

Дифференцируя теперь обе части уравнения (2.13 : 8), получим

$$-\,k\tau ds = k_1\nu_1 ds_1,$$

или в силу (2.13 : 10)

$$\nu_1 k\,(s_1 + a)\,k_1 ds_1 = k_1\,\nu_1 ds_1$$

и

$$k\,(s_1 + a) = 1, \text{ т. е. } \rho = s_1 + a,$$

согласно с формулой (2.13 : 7). Значит точка $M_1$, определяемая уравнением (2.13 : 9), будет центром кривизны для эвольвенты $(M)$.

Таким образом, при изменении постоянного $a$ имеем семейство эвольвент. В соответствующих точках, т. е. при одном и том же значении $s$, они имеют общую нормаль $\nu$, а радиусы кривизны $\rho$ отличаются на одну и ту же величину $a$. *Из одной эвольвенты получаются другие, если на всех нормалях отложить один и тот же отрезок.* Касательные в соответствующих точках к различным эвольвентам параллельны, поэтому их называют *семейством параллельных кривых.*

*ГЛАВА III*

# ТЕОРИЯ ОГИБАЮЩИХ

## § 1. Огибающая однопараметрического семейства линий на плоскости

1. Определение. *Огибающей однопараметрического семейства линий на плоскости называется кривая, которая в каждой своей точке касается одной из линий семейства.*

Такое семейство линий можно задать в параметрической форме уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t, \alpha) \\ y &= \psi(t, \alpha) \end{aligned}\right\} \qquad (3.1:1)$$

$$\text{или} \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}(t, \alpha). \qquad (3.1:2)$$

Здесь $t$ — параметр, определяющий точку на линии, $\alpha$ — параметр, определяющий линию семейства.

Поскольку огибающая в каждой своей точке касается одной из линий семейства, то ее можно определить, если для каждой кривой семейства, т. е. для каждого значения $\alpha$ задать значение $t$

$$t = f(\alpha), \qquad (3.1:3)$$

определяющее ту точку линии, которая принадлежит огибающей. В этой точке вектор касательной к кривой семейства $\alpha = \mathrm{const}$.

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \mathbf{M}_t$$

и вектор касательной к огибающей совпадают. Вектор касательной к огибающей получится, если будем дифференцировать уравнение (3.1 : 2) по параметру $\alpha$, принимая во внимание уравнение (3.1 : 3):

$$\frac{d\mathbf{M}}{d\alpha} = \mathbf{M}_t \dot{f}(\alpha) + \mathbf{M}_\alpha, \quad \mathbf{M}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha}, \quad \dot{f}(\alpha) = \frac{df}{d\alpha}. \qquad (3.1:5)$$

Если касательные совпадают, то векторное произведение этих векторов равно нулю

$$\frac{d\mathbf{M}}{d\alpha} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \{\mathbf{M}_t \dot{f}(\alpha) + \mathbf{M}_\alpha\} \times \mathbf{M}_t = 0,$$

или

$$\mathbf{M}_\alpha \times \mathbf{M}_t = 0.$$

По правилу векторного произведения двух векторов

$$\mathbf{M}_\alpha = \mathbf{J}_1 x_\alpha + \mathbf{J}_2 y_\alpha, \quad \mathbf{M}_t = \mathbf{J}_1 x_t + \mathbf{J}_2 y_t$$

получим

$$\begin{vmatrix} x_\alpha & y_\alpha \\ x_t & y_t \end{vmatrix} = \frac{\partial (x, y)}{\partial (\alpha, t)} = 0. \qquad (3.1:6)$$

Если уравнение (3.1 : 6) определяет функцию (3.1 : 3), то внося полученное выражение $t$ в уравнение (3.1 : 2), получим уравнение огибающей.

2. Иногда более удобно задавать семейство кривых одним уравнением в неявной форме

$$F(x, y, \alpha) = 0. \qquad (3.1:7)$$

Мы будем предполагать, что это уравнение допускает параметрическое представление (3.1 : 2), которое тождественно удовлетворяет уравнению (3.1 : 7).

Дифференцируя в этом предположении уравнение (3.1 : 7) по $t$ и по $\alpha$, получим:

$$\left.\begin{aligned} F_x x_t + F_y y_t &= 0, \\ F_x x_\alpha + F_y y_\alpha + F_\alpha &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.1:8)$$

Если семейство (3.1 : 7) допускает огибающую, то *якобиан* (3.1 : 6) равен нулю, т. е. равен нулю определитель из коэффициентов при $F_x$, $F_y$ системы (3.1 : 8); следовательно, чтобы система (3.1 : 8) имела решения, ранг расширенной матрицы из коэффициентов при $F_x$, $F_y$ и свободных членов

$$\left\| \begin{matrix} x_t & y_t & 0 \\ x_\alpha & y_\alpha & F_\alpha \end{matrix} \right\|$$

должен равняться единице, а это при $x_t\, y_t \neq 0$ возможно только при обращении в нуль $F_\alpha$

$$F_\alpha = 0. \qquad (3.1:9)$$

С другой стороны, если уравнение (3.1 : 9) имеет место, то система (3.1 : 8) относительно неизвестных $F_x$, $F_y$ становится однородной и будет допускать только нулевые решения $F_x = 0$, $F_y = 0$, которые исключаются (особая точка). Таким образом, из уравнения (3.1 : 9) вытекает обращение в нуль якобиана (3.1 : 6).

Система уравнений

$$F(x, y, \alpha) = 0, \quad F_\alpha(x, y, \alpha) = 0 \qquad (3.1:10)$$

определяет огибающую семейства кривых (3.1 : 7) при произвольном $\alpha$. Если $\alpha$ закрепить, то первое уравнение (3.1 : 10) определит линию семейства (3.1 : 7), а второе уравнение определит точку, в которой эта кривая касается огибающей. Такая точка называется *характеристической*. Геометрическое место характеристических точек образует огибающую, если только $F_x$ и $F_y$ не равны нулю одновременно, т. е. кроме особых точек.

Заметим, что особая точка всегда удовлетворяет системе (3.1 : 8). Действительно, особая точка удовлетворяет системе

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F = 0; \qquad (3.1:11)$$

между тем полный дифференциал от обеих частей (3.1 : 7) дает

$$F_x\, dx + F_y\, dy + F_\alpha d\alpha = 0,$$

первые два члена обращаются в нуль в силу (3.1 : 1) и мы имеем

$$F_\alpha\, d\alpha = 0;$$

но $\alpha$, как произвольный параметр, имеет дифференциал $d\alpha \neq 0$ следовательно,

$$F_\alpha = 0$$

и предложение доказано.

3. **Пример.** *Найти огибающую однопараметрического семейства окружностей*

$$F(X, Y, s) = (X - x)^2 + (Y - y)^2 - R^2 = 0, \qquad (3.1:12)$$

где $X$, $Y$ — текущие координаты окружности, $R$ — ее радиус, $x$, $y$ — координаты центра.

Параметром семейства окружности $\alpha = s$ возьмем длину дуги линии центров

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad R = f(s). \qquad (3.1:13)$$

Теперь

$$F_\alpha = \frac{\partial F}{\partial s} = -2x'(X - x) - 2y'(Y - y) - 2RR' = 0,$$

где

$$x' = \frac{dx}{ds}, \quad y' = \frac{dy}{ds}, \quad R' = \frac{dR}{ds}.$$

Сокращая на $-2$, получим *нормальное* уравнение прямой

$$x'(X - x) + y'(Y - y) + RR' = 0, \qquad (3.1:14)$$

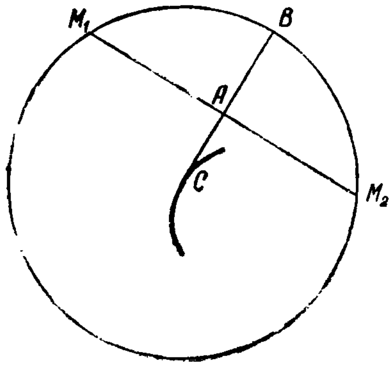


Рис. 16

ибо

$$(x')^2 + (y')^2 = 1.$$

Прямая (3.1 : 14) перпендикулярна к вектору касательной линии центров (3.1 : 13)

$$\mathbf{C} = \mathbf{J}_1 x + \mathbf{J}_2 y,$$

откуда

$$\frac{d\mathbf{C}}{ds} = \mathbf{J}_1 x' + \mathbf{J}_2 y'.$$

Чтобы определить расстояние $d$ прямой (3.1 : 14) от центра $C(x, y)$, достаточно подставить в левую часть нормального уравнения прямой (3.1 : 14) вместо текущих координат $X$, $Y$ координаты центра. Мы получим

$$d = RR'.$$

На чертеже (рис. 16) прямая (3.1 : 14) изображается линией $M_1M_2$, касательная к линии центров—линией $AB$. Если расстояние $CA$ прямой $M_1M_2$ от центра $C$ меньше радиуса $R = CB$, т. е.

$$d = RR' < R, \text{ т. е. } R' < 1,$$

то прямая $F_\alpha = 0$ пересекает окружность $F = 0$ в двух точках $M_1$ и $M_2$ и окружность касается огибающей в двух точках.

Если

$$d = RR' = R, \text{ т. е. } R' = 1,$$

то прямая $F_\alpha$ касается окружности в точке $B$ и две точки пересечения $M_1$ и $M_2$ сливаются в одну точку $B$. Можно показать, что в этом случае порядок касания огибающей с

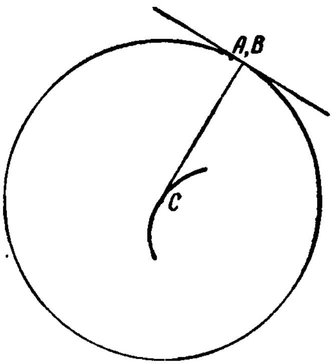


Рис. 17

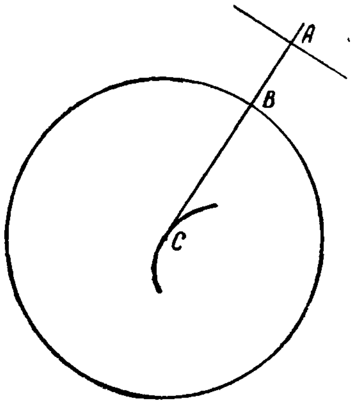


Рис. 18

окружностью повышается; окружность будет служить для огибающей соприкасающейся окружностью (рис. 17).

Если

$$d = RR' > R, \text{ т. е. } R' > 1,$$

то прямая $F_\alpha = 0$ не имеет общих точек с окружностью; точки $M_1$, $M_2$ — мнимые сопряженные; семейство окружностей не допускает огибающей (рис. 18).

## § 2. Понятие поверхности в дифференциальной геометрии

Прежде чем говорить об огибающей семейства поверхностей, надо определить понятие поверхности в дифференциальной геометрии. Мы будем следовать тем же путем, которым мы шли при определении понятия линии.

**Простой кусок поверхности**

Определение. *Простым куском поверхности называется геометрическое место точек, удовлетворяющее двум условиям:*

a) *оно гомеоморфно куску плоскости, например площади прямоугольника;*

b) *в каждой точке допускает касательную плоскость, непрерывно вращающуюся при перемещении точки касания.*

a) **Первое условие.** Многообразие точек гомеоморфно куску плоскости.

Соответствие гомеоморфизма — взаимно однозначное непрерывное соответствие. Чтобы установить такое соответствие, достаточно дать параметрическое представление точек поверхности функциями класса $C^1$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(u, v), \qquad (3.2:1)$$

или

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \qquad (3.2:2)$$

где однозначные функции (3.2 : 2) класса $C^1$ допускают непрерывные частные производные по обоим аргументам с дифференциальной матрицей ранга 2

$$\text{ранг} \begin{Vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{Vmatrix} = 2. \qquad (3.2:3)$$

Сопоставляя криволинейные координаты $u$, $v$ точек поверхности (в некоторой области) координатам (например, декартовым) точек $m(u, v)$ плоскости (в соответствующей области), мы получим однозначное, непрерывное отображение куска плоскости на рассматриваемую область поверхности. Отображение непрерывно в силу непрерывности функций (3.2 : 2).

Чтобы доказать взаимную однозначность, надо сослаться на теорему анализа — существования неявной функции.

**II теорема существования неявной функции.** *Если система уравнений*

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y;\ u, v) &= 0, \\ F_2(x, y;\ u, v) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.2:4)$$

*допускает начальную точку*

$$x = x_0, \quad y = y_0; \quad u = u_0, \quad v = v_0, \qquad (3.2:5)$$

*удовлетворяющую системе* (3.2 : 4), *и в окрестности начальной точки левые части уравнений* (3.2 : 4) — *функции клас-*

*са* $C^1$ (непрерывные частные производные по всем аргументам) *с неравным нулю якобианом*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial u} \\ \frac{\partial F_1}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (3.2:6)$$

*то существует решение и только одно*

$$u = f_1(x, y), \quad v = f_2(x, y) \qquad (3.2:7)$$

*с функциями класса* $C^1$, *удовлетворяющее системе* (3.2:4) *и проходящее через начальную точку.*

Опираясь на эту теорему, мы можем показать, что система (3.2:2) может быть разрешена относительно параметров $u$, $v$ и, следовательно, каждой точке поверхности $(x, y, z)$ в рассматриваемой области соответствует только одна пара значений $(u, v)$.

Действительно, поскольку матрица (3.2:3) ранга 2, существует определитель 2-го порядка, не равный нулю. Если это будет определитель

$$\begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (3.2:8)$$

то мы возьмем систему (3.2:4) в виде

$$\left.\begin{aligned} F_1(u, v;\quad x, y) &= \varphi(u, v) - x = 0, \\ F_2(u, v;\quad x, y) &= \psi(u, v) - y = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.2:9)$$

Начальную точку (3.2:5) построим, выбрав произвольную пару значений $u_0$, $v_0$ в рассматриваемой области и соответствующие им значения $x_0$, $y_0$ (3.2:2). В окрестности этой точки определитель (3.2:6) примет вид

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial u} \\ \frac{\partial F_1}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (3.2:10)$$

так как при дифференцировании уравнений (3.2:9) все четыре аргумента считаются независимыми, связанными только уравнениями (3.2:9). Определитель (3.2:10) отличен от нуля в силу (3.2:8).

Следовательно, в силу теоремы II существует решение (3.2 : 7), которое каждой паре значений $(x, y)$ в соответствующей области сопоставляет пару значений $(u, v)$, а эти последние по формулам (3.2 : 2) дадут определенное значение $z$ и каждой точке $(x, y, z)$ сопоставляется точка (аналитической) плоскости $(u, v)$.

Таким образом, устанавливается непрерывно дифференцируемый гомеоморфизм и топологическая эквивалентность области $M(u, v)$ на поверхности соответствующей области $m(u, v)$ плоскости.

## § 3. Касательная плоскость

b) **Второе условие.** Многообразие в каждой точке допускает непрерывно вращающуюся касательную плоскость.

Определение. *Касательной плоскостью в точке* $(u_0, v_0)$ *называется плоскость, содержащая касательные ко всем линиям на поверхности в точке* $(u_0, v_0)$.

Рассмотрим полный дифференциал векторной функции (3.2 : 1)

$$d\mathbf{M} = (\mathbf{M}_u)_0\, du + (\mathbf{M}_v)_0\, dv, \tag{3.3 : 1}$$

где

$$(\mathbf{M}_u)_0 = \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}\right)_{\substack{u = u_0 \\ v = v_0}}, \quad (\mathbf{M}_v)_0 = \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}\right)_{\substack{u = u_0 \\ v = v_0}}.$$

Для всякой линии на поверхности, определяемой уравнениями

$$u = f_1(t), \quad v = f_2(t), \tag{3.3 : 2}$$

где в правых частях стоят функции класса $C^1$ с необращающимися одновременно в нуль в точке $u_0 = f_1(t_0)$, $v_0 = f_2(t_0)$ производными $\dot{f}_1(t_0)$, $\dot{f}_2(t_0)$, вектор касательной в точке $(u_0, v_0)$ будет

$$\left(\frac{d\mathbf{M}}{dt}\right)_0 = (\mathbf{M}_u)_0 \left(\frac{du}{dt}\right)_{t = t_0} + (\mathbf{M}_v)_0 \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t = t_0}. \tag{3.3 : 3}$$

Эта производная не обращается в нуль в достаточно малой окрестности точки $(u_0, v_0)$. В зависимости от выбора линии (3.3 : 2), проходящей через точку $(u_0, v_0)$, меняются только скалярные коэффициенты — производные:

$$\frac{du}{dt} = \frac{df_1(t)}{dt}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{df_2(t)}{dt} \text{ для } t = t_0.$$

Базисные векторы $(\mathbf{M}_u)_0, (\mathbf{M}_v)_0$ зависят только от выбранной точки (и заданной поверхности). Из полученного равенства (3.3 : 3) вытекает, что *все касательные к линиям на поверхности* (3.2 : 1) *в точке* $(u_0, v_0)$ *лежат в плоскости, проходящей через точку* $M_0$ *и определяемой векторами* $(\mathbf{M}_u)_0, (\mathbf{M}_v)_0$ если, конечно, эти векторы линейно независимы.

Независимость векторов $(\mathbf{M}_u)_0, (\mathbf{M}_v)_0$ вытекает из того, что их векторное произведение не обращается в нуль

$$\mathbf{M}_u \times \mathbf{M}_v = (\mathbf{J}_1 x_u + \mathbf{J}_2 y_u + \mathbf{J}_3 z_u) \times$$

$$\times (\mathbf{J}_1 x_v + \mathbf{J}_2 y_v + \mathbf{J}_2 z_v) = \begin{vmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_3 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{J}_1 \frac{\partial (y, z)}{\partial (u, v)} + \mathbf{J}_2 \frac{\partial (z, x)}{\partial (u, v)} + \mathbf{J}_3 \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \neq 0, \qquad (3.3:4)$$

что вытекает из (3.2 : 3).

Возвращаясь к нашему «второму условию» простого куска поверхности, мы видим, что поверхность (3.2 : 1) с функциями (3.2 : 2) класса $C^1$ допускает в каждой точке $(u_0, v_0)$ касательную плоскость и вектор, перпендикулярный к этой плоскости, *нормаль к поверхности,* определяется векторным произведением (3.3 : 4)

$$\mathbf{N} = \mathbf{M}_u \times \mathbf{M}_v; \qquad (3.3:5)$$

оба множителя — производные функции класса $C^1$ — непрерывны; отсюда при перемещении точки касания $M(u, v)$ нормаль к поверхности, а вместе с ней и касательная плоскость непрерывно вращаются. Имеем теорему:

**Теорема.** *Уравнение*

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(u, v) \qquad (3.3:6)$$

*в области значений* $(u, v)$, *где векторная функция* (или ее компоненты) *непрерывно дифференцируема* (класса $C^1$) и *векторное произведение*

$$\mathbf{M}_u \times \mathbf{M}_v$$

*отлично от нуля* [*матрица* (3.2 : 3) ранга 2], *в окрестности каждой точки представляет простой кусок поверхности.*

## § 4. Область регулярности поверхности

Определение. *Поверхность регулярна в области $\mathfrak{D}$, если в достаточно малой окрестности каждой точки области представляет простой кусок поверхности.*

**Теорема.** *Уравнение*

$$F(x, y, z) = 0, \qquad (3.4:1)$$

*где функция $F(x, y, z)$ класса $C^1$ в некоторой области $\mathfrak{D}$ и допускает в этой области начальную точку $(x_0, y_0, z_0)$, удовлетворяющую уравнению* (3.4 : 1), *определяет поверхность, проходящую через начальную точку и регулярную в области $\mathfrak{D}$, если частные производные $F_x$, $F_y$, $F_z$ не обращаются в нуль одновременно.*

Действительно, допустим, что в точке $(x_0, y_0, z_0)$ не равна нулю производная

$$F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0; \qquad (3.4:2)$$

в силу непрерывности производной (функция $F$ класса $C^1$) неравенство (3.4 : 2) будет сохраняться в некоторой окрестности этой точки. В достаточно малой окрестности уравнение (3.4 : 1) должно допускать решение класса $C^1$ вида

$$z = f(x, y), \qquad (3.4:3)$$

ибо 1) уравнение допускает начальную точку $(x_0, y_0, z_0)$ и 2) в этой точке производная (3.4 : 2) отлична от нуля. После этого можно взять любую точку этой окрестности с координатами

$$x_1, \quad y_1, \quad z_1 = f(x_1, y_1);$$

они удовлетворяют уравнению (3.4 : 1) и принадлежат области $\mathfrak{D}$; все будет повторяться с той только разницей, что в новой окрестности, возможно, поверхность будет представлена уравнением вида (3.4 : 3), но разрешенным относительно $y$ или $x$.

## § 5. Огибающая однопараметрического семейства поверхностей

Мы возвращаемся к теории огибающих и рассмотрим сначала семейство поверхностей, заданных уравнением в параметрической форме

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(u, v, \alpha), \quad \mathbf{M}_u \times \mathbf{M}_v \neq 0, \qquad (3.5:1)$$

где функция $\mathbf{M}(u, v, \alpha)$ класса $C^1$ относительно всех трех аргументов; первые два $u$, $v$ определяют точку на поверхности (криволинейные координаты на поверхности); третий аргумент $\alpha$ определяет поверхность семейства.

По определению огибающая в каждой своей точке касается одной из поверхностей семейства; поэтому можно искать огибающую в виде уравнения (3.5 : 1), где аргументы $u$, $v$, $\alpha$ связаны одним уравнением, например

$$\alpha = f(u, v). \tag{3.5 : 2}$$

Теперь огибающая определяется двумя уравнениями (3.5 : 1), (3.5 : 2), где независимыми переменными будут параметры $u$, $v$. Ищем на ней касательные к координатным линиям $v=\text{const}$ и $u=\text{const}$.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} &= \mathbf{M}_u + \mathbf{M}_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \\ \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} &= \mathbf{M}_v + \mathbf{M}_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \tag{3.5:3}$$

здесь $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}$ — частная производная по независимому переменному $u$ при $v=\text{const}$, причем аргумент $\alpha$ зависит от $u$ по формуле (3.5 : 2). Производные $\mathbf{M}_u$, $\mathbf{M}_v$, $\mathbf{M}_\alpha$ — частные производные функции (3.5 : 1) по аргументам $u$, $v$, $\alpha$ в предположении, что два других аргумента сохраняют постоянные значения.

Если в точке $(u, v)$ огибающая касается поверхности семейства (3.5 : 1) со значением $\alpha=\alpha_1$, определяемым уравнением (3.5 : 2), то оба вектора (3.5 : 3), касательные к огибающей, должны лежать в касательной плоскости поверхности (3.5 : 1) со значением $\alpha=\alpha_1$, а потому будут перпендикулярны к ее нормали

$$\mathbf{N} = \mathbf{M}_u \times \mathbf{M}_v.$$

Ортогональность векторов выражается обращением в нуль их скалярного произведения:

$$\left(\mathbf{M}_u + \mathbf{M}_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u}\right) \cdot (\mathbf{M}_u \times \mathbf{M}_v) = 0,$$

$$\left(\mathbf{M}_v + \mathbf{M}_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial v}\right) \cdot (\mathbf{M}_u \times \mathbf{M}_v) = 0,$$

или

$$\left.\begin{aligned}\left(\mathbf{M}_u + \mathbf{M}_\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial u}, \ \mathbf{M}_u, \ \mathbf{M}_v\right) = (\mathbf{M}_\alpha \mathbf{M}_u \mathbf{M}_v) \frac{\partial\alpha}{\partial u} = 0, \\ \left(\mathbf{M}_v + \mathbf{M}_\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial v}, \ \mathbf{M}_u, \ \mathbf{M}_v\right) = (\mathbf{M}_\alpha \mathbf{M}_u \mathbf{M}_v) \frac{\partial\alpha}{\partial v} = 0.\end{aligned}\right\} \quad (3.5:4)$$

Отсюда, если скалярное произведение трех векторов не равно нулю, то

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial v} = 0,$$

откуда

$$\alpha = \mathrm{const}$$

и мы получаем одну из поверхностей семейства (3.5 : 1). Если $\alpha$ не постоянно, то (3.5 : 4) дает

$$(\mathbf{M}_\alpha \mathbf{M}_u \mathbf{M}_v) = 0, \qquad (3.5:5)$$

или обращение в нуль функционального определителя

$$\begin{vmatrix} x_\alpha & y_\alpha & z_\alpha \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, \alpha)} = 0. \qquad (3.5:6)$$

**Теорема.** *Если уравнение* (3.5 : 6) *определяет* $\alpha$ *как функцию параметров* $u$, $v$ *в виде* (3.5 : 2), *то, внося это выражение в уравнение* (3.5 : 1), *получим уравнение огибающей семейства поверхностей* (3.5 : 1).

## § 6. Случай, когда семейство поверхностей задано одним уравнением в неявной форме

Рассмотрим теперь ту же задачу определения огибающей для случая задания семейства уравнением

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \qquad (3.6:1)$$

где по-прежнему $\alpha$ — параметр, определяющий поверхность семейства, в рассматриваемой области функция $F$ класса $C^2$ по всем четырем аргументам и три производных $F_x$, $F_y$, $F_z$ не обращаются в нуль одновременно.

Для поверхности семейства, т. е. при постоянном $\alpha$, компоненты вектора касательной к произвольной линии на поверхности

$$\tau ds = \mathbf{J}_1 dx + \mathbf{J}_2 dy + \mathbf{J}_3 dz \qquad (3.6:2)$$

удовлетворяют уравнению, которое получится, если взять полный дифференциал от обеих частей уравнения (3.6 : 1)

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0 \tag{3.6:3}$$

Следовательно, вектор нормали к поверхности (3.6 : 1) будет

$$\mathbf{N} = \mathbf{J}_1 F_x + \mathbf{J}_2 F_y + \mathbf{J}_3 F_z, \tag{3.6:4}$$

ибо скалярное произведение $\tau\mathbf{N}$ в силу (3.6 : 3) обращается в нуль.

Для огибающей, которая определяется тем же уравнением (3.6 : 1), если задать $\alpha$ подходящей функцией

$$\alpha = f(x, y, z), \tag{3.6:5}$$

уравнение (3.6 : 3) запишется в виде

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz + F_\alpha d\alpha = 0. \tag{3.6:6}$$

В общей точке (точке касания огибающей с поверхностью семейства) и в общем направлении (для общей касательной) первые три члена уравнений (3.6 : 3) и (3.6 : 6) для огибающей и для поверхности семейства будут одни и те же.

Составляя разность левых частей уравнений (3.6 : 3) и (3.6 : 6), получим

$$F_\alpha d\alpha = 0.$$

Если $d\alpha = 0$, то повторяя эти рассуждения для каждого направления и каждой точки огибающей, получим

$$\alpha = \text{const},$$

что недопустимо. Следовательно. надо принять

$$F_\alpha = 0. \tag{3.6:7}$$

Обратно, если имеет место уравнение (3.6 : 7), то уравнения (3.6 : 3) и (3.6 : 6) в каждой общей точке огибающей и поверхности семейства совпадают; следовательно, совпадают нормали (3.6 : 4), и огибающая касается поверхности семейства.

Таким образом, огибающая определяется системой

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \qquad F_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0. \tag{3.6:8}$$

Если второе уравнение определяет $\alpha$ как функцию координат $x, y, z$ в виде (3.6 : 5), то, подставляя это выражение в уравнение (3.6 : 1), получим уравнение огибающей.

## § 7. Характеристики и огибающая характеристик

Фиксируем значение $\alpha$ в уравнениях (3.6 : 8)

$$\alpha=\alpha_1.$$

Тогда первое уравнение (3.6 : 8) определит поверхность семейства, а второе выделит на этой поверхности линию, которая принадлежит огибающей и вдоль которой огибающая касается поверхности $\alpha=\alpha_1$ семейства.

Линию прикосновения поверхности семейства с огибающей называют *характеристикой*. Поскольку огибающая в каждой своей точке касается какой-нибудь поверхности семейства, а все точки касания лежат на характеристиках, то огибающая образована геометрическим местом характеристик.

**Огибающая характеристик.** Однопараметрическое семейство линий в пространстве вообще не имеет огибающей, но, поскольку характеристики лежат на одной поверхности, можно искать их огибающую, т. е. линию, которая в каждой своей точке касается одной из линий семейства.

Допустим, что характеристика определяется системой

$$F(x,\ y,\ z,\ \alpha)=0, \qquad F_\alpha(x,\ y,\ z,\ \alpha)=0 \tag{3.7:1}$$

при постоянном $\alpha$, причем функция $F(x, y, z, \alpha)$ класса $C^2$ по всем четырем аргументам.

Поскольку каждая точка огибающей принадлежит одной из линий семейства, можно определять огибающую той же системой (3.7 : 1), рассматривая $\alpha$ как функцию переменных $x, y, z$

$$\alpha=f(x,\ y,\ z). \tag{3.7:2}$$

Вектор касательной к характеристике

$$\boldsymbol{\tau}d\sigma=\mathbf{J}_1dx+\mathbf{J}_2dy+\mathbf{J}_3dz \tag{3.7:3}$$

определяется уравнениями, которые получаются при дифференцировании уравнений системы (3.7 : 1) при постоянном $\alpha$

$$\left.\begin{aligned} F_x dx+F_y dy+F_z dz&=0,\\ F_{\alpha x}dx+F_{\alpha y}dy+F_{\alpha z}dz&=0.\end{aligned}\right\} \tag{3.7:4}$$

Компоненты вектора касательной к огибающей характеристик определяются уравнениями, которые получаются дифференцированием тех же уравнений (3.7 : 1), но в предположении, что четвертый аргумент $\alpha$ есть функция (3.7:2) от независимых переменных $x$, $y$, $z$:

$$\left.\begin{aligned} F_x dx + F_y dy + F_z dz + F_\alpha \, d\alpha = 0, \\ F_{\alpha x} dx + F_{\alpha y} dy + F_{\alpha z} dz + F_{\alpha\alpha} d\alpha = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.7:5)$$

В силу второго уравнения (3.7:1) последний член первого уравнения (3.7:5) отпадает.

Рассмотрим характеристику семейства и огибающую характеристик в общей точке касания. Координаты $x$, $y$, $z$ в этой точке одни и те же в уравнениях (3.7:4) и (3.7:5); значения $\alpha$, вычисляемые по формуле (3.7:2), тоже должны совпадать. Наконец, в силу совпадения касательных в точке касания можно считать дифференциалы $dx$, $dy$, $dz$ в уравнениях (3.7:4), (3.7:5) совпадающими. В таком случае первые уравнения (3.7:4), (3.7:5) совпадают, а второе уравнение (3.7:5) отличается от второго уравнения (3.7:4) только последним членом. Таким образом, условие касания сводится к равенству

$$F_{\alpha\alpha} d\alpha = 0.$$

Здесь, как и выше, обращение в нуль $d\alpha=0$ приводит к вырождению. Следовательно, надо принять

$$F_{\alpha\alpha} = 0. \qquad (3.7:6)$$

Обратно, если уравнение (3.7:6) имеет место, то последний член второго уравнения (3.7:5), как и первого, пропадает. Системы (3.7:4), (3.7:5) совпадают, и огибающая характеристик касается характеристики семейства. Имеем теорему:

**Теорема.** *Семейство характеристик однопараметрического семейства поверхностей*

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \quad F_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0 \qquad (3.7:7)$$

*имеет огибающую, если уравнение*

$$F_{\alpha\alpha}(x, y, z, \alpha) = 0 \qquad (3.7:8)$$

*определяет $\alpha$ как функцию от $x$, $y$, $z$ в виде* (3.7:2). Уравнение огибающей получается, если выражение (3.7:2) внести в уравнения (3.7:7).

## § 8. Ребро возврата огибающей

Определение. Огибающая характеристик однопараметрического семейства поверхностей называется *ребром возврата* огибающей семейства поверхностей. Это название объясняется следующей теоремой.

**Теорема.** *Сечение огибающей семейства* $\infty^1$ *поверхностей плоскостью, которая пересекает* (не касается!) *ребро возврата огибающей, является плоской кривой с особой точкой в точке пересечения ребра возврата.*

Заметим, что линия

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(t) \tag{3.8:1}$$

имеет при $t=t_0$ особую точку, если

$$\dot{\mathbf{M}}(t_0) = 0, \qquad \dot{\mathbf{M}} = \frac{d\mathbf{M}}{dt}. \tag{3.8:2}$$

Если при этом

$$\ddot{\mathbf{M}}(t_0) \neq 0,$$

то по формуле Тэйлора (1.6 : 2) предел отношения хорды к квадрату $(\Delta t)^2$ при $\Delta t \to 0$ будет равен второй производной

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{M}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{M}(t_0)}{\frac{1}{2}(\Delta t)^2} = \lim_{\Delta t \to 0} \Phi_2(t_0, \Delta t) = \ddot{\mathbf{M}}(t_0). \tag{3.8:3}$$

Следовательно, $\ddot{\mathbf{M}}(t_0)$ или вообще первая, не обращающаяся в нуль производная, определяет касательную. Та же формула Тэйлора

$$\overrightarrow{\mathbf{M}_0\mathbf{M}} = \mathbf{M}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{M}(t_0) = \frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{\mathbf{M}}(t_0) + \frac{(\Delta t)^3}{6}\Phi_3(t_0, \Delta t)$$

показывает, что первый член правой части, который при достаточно малом приращении $\Delta t$ определяет проекцию смещения $\overrightarrow{M_0M}$ на касательную $\ddot{\mathbf{M}}(t_0)$, не меняет знака при изменении знака приращения $\Delta t$. Следовательно, кривая будет располагаться по одну сторону нормальной плоскости в точке $t=t_0$ (для плоской линии по одну сторону нормали); подойдя к точке $M_0$ вдоль касательной $\ddot{\mathbf{M}}(t_0)$, она как бы останавливается и возвращается уже по другому пути назад. Отсюда название *точки возврата*. Вернемся к доказательству теоремы о ребре возврата огибающей.

Поскольку оси координат у нас произвольны, мы можем принять секущую плоскость за плоскость $z=0$. Тогда уравнение линии пересечения огибающей будет

$$F(x,\ y,\ 0,\ \alpha)=0,\quad F_\alpha(x,\ y,\ 0,\ \alpha)=0. \tag{3.8:4}$$

Мы можем рассматривать $\alpha$ как независимый параметр, определяющий положение текущей точки $(x,\ y,)$ на кривой (3.8 : 4). Дифференцируя уравнения (3.8 : 4) по параметру $\alpha$, получим

$$\left.\begin{aligned} &F_x\frac{dx}{d\alpha}+F_y\frac{dy}{d\alpha}=0,\\ &F_{\alpha x}\frac{dx}{d\alpha}+F_{\alpha y}\frac{dy}{d\alpha}+F_{\alpha\alpha}=0. \end{aligned}\right\} \tag{3.8:5}$$

Если функции $F$ и $F_\alpha$ функционально независимы

$$\frac{\partial(F,F_\alpha)}{\partial(x,\ y)}=\begin{vmatrix} F_xF_y\\ F_{\alpha x}F_{\alpha y}\end{vmatrix}\neq 0 \text{ в точке } t=t_0 \tag{3.8:6}$$

и производная $F_{\alpha\alpha}$ отлична от нуля

$$F_{\alpha\alpha}\neq 0,$$

то система (3.8 : 5) в точке $t=t_0$ дает значения производных $\frac{dx}{d\alpha}$, $\frac{dy}{d\alpha}$, не равные одновременно нулю. В точке пересечения с ребром возврата

$$F_{\alpha\alpha}=0,$$

при сохранении неравенства (3.8 : 6) система (3.8 : 5) приводит к нулевым решениям $\frac{dx}{d\alpha}=0,\frac{dy}{d\alpha}=0$, и тогда точка линии (3.8 : 5) будет особой.

Исключение может быть только при понижении ранга системы (3.8 : 5), когда якобиан (3.8 : 6) равен нулю; но тогда касательная к ребру возврата

$$\mathbf{T}ds=\mathbf{J}_1dx+\mathbf{J}_2dy+\mathbf{J}_3dz,$$

определяемая из уравнений (3.7 : 5), которые теперь совпадают с уравнениями (3.7 : 4), приводит к пропорциональности

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial(F,F_\alpha)}{\partial(y,\ z)}}=\frac{dy}{\dfrac{\partial(F,F_\alpha)}{\partial(z,\ x)}}=\frac{dz}{\dfrac{\partial(F,F_\alpha)}{\partial(x,\ y)}},$$

которая при обращении якобиана (3.8 : 6) в нуль показывает, что касательная к ребру возврата **T** не имеет компонента по оси $z$ и, следовательно, лежит в секущей плоскости $z=0$.

Следовательно, *линия пересечения огибающей семейства поверхностей плоскостью $z=0$ в общей точке огибающей характеристик может и не иметь особой точки, но только тогда, когда секущая плоскость $z=0$ касается ребра возврата.*

## § 9. Огибающая семейства плоскостей

Рассмотрим семейство плоскостей

$$F = Ax + By + Cz + D = 0, \tag{3.9:1}$$

где коэффициенты $A$, $B$, $C$, $D$ — функции параметра $\alpha$. Дифференцируя по параметру $\alpha$, получим опять уравнение плоскости

$$F_\alpha = \dot{A}x + \dot{B}y + \dot{C}z + \dot{D} = 0. \tag{3.9:2}$$

Пересечение плоскостей (3.9 : 1) и (3.9 : 2) будет прямой, которая служит характеристикой плоскости (3.9 : 1). Геометрическое место их, огибающая, будет, следовательно, линейчатой поверхностью (поверхность, образованная движением прямой линии).

Дифференцируем еще раз по параметру $\alpha$:

$$F_{\alpha\alpha} = \ddot{A}x + \ddot{B}y + \ddot{C}z + \ddot{D} = 0. \tag{3.9:3}$$

Три уравнения (3.9 : 1—3) определяют ребро возврата огибающей — пространственной линии, которая касается всех прямых (3.9 : 1—2).

**Теорема.** *Ребро возврата огибающей однопараметрического семейства плоскостей — произвольная не плоская линия.*

Возьмем произвольную пространственную линию

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(s) \tag{3.9:4}$$

и рассмотрим семейство ее соприкасающихся плоскостей.

Если $P$ — призвольная точка соприкасающейся плоскости, то вектор

$$\overrightarrow{MP} = \mathbf{P} - \mathbf{M}$$

перпендикулярен к бинормали $\boldsymbol{\beta}$. Отсюда уравнение соприкасающейся плоскости

$$F = (\mathbf{P} - \mathbf{M})\boldsymbol{\beta} = 0. \tag{3.9:5}$$

Здесь вектор **P** имеет своими компонентами текущие координаты плоскости. Радиус-вектор **M** зависит от параметра $s$ и определяется уравнением (3.9 : 4), вектор бинормали $\beta$ тоже зависит от $s$ и определяется уравнениями Френе. Параметр $s$ следует рассматривать как параметр, определяющий

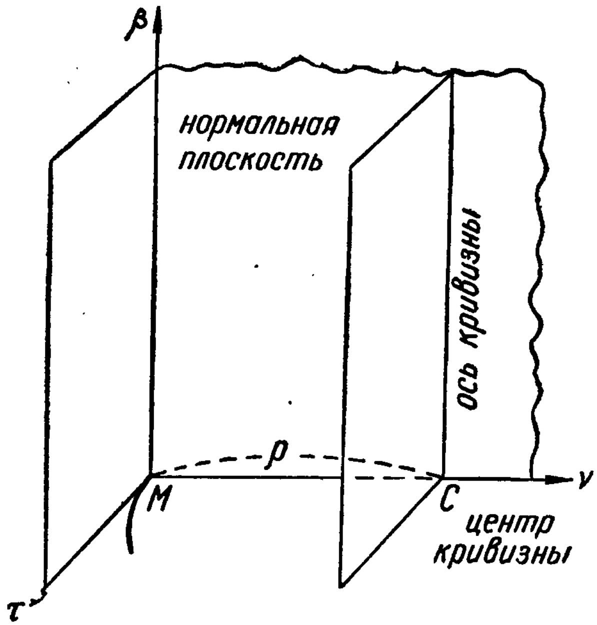


Рис. 19

плоскость в семействе соприкасающихся плоскостей (3.9 : 5). Чтобы найти огибающую семейства (3.9 : 5), надо дифференцировать это уравнение по параметру $s$

$$F_s = -\frac{d\mathbf{M}}{ds}\beta + (\mathbf{P}-\mathbf{M})\frac{d\beta}{ds} = -\tau\beta - (\mathbf{P}-\mathbf{M})\varkappa\nu = 0,$$

или в силу $\tau\beta = 0$

$$-\frac{1}{\varkappa}F_s \equiv (\mathbf{P}-\mathbf{M})\nu = 0. \qquad (3.9:6)$$

Это уравнение определяет плоскость, проходящую через касательную и бинормаль, так называемую *спрямляющую* плоскость. Плоскости (3.9 : 5), (3.9 : 6) пересекаются по касательной, которая и будет характеристикой.

Огибающей характеристик будет, следовательно, исходная кривая (3.9 : 4), откуда и следует теорема, ибо кривая была взята произвольно.

Надо заметить, что, кроме *развертывающихся поверхностей*, которые образованы касательными пространственной кривой, огибающими семейства $\infty^1$ плоскостей будут *конические поверхности*, у которых все касательные плоскости проходят через вершину конуса и характеристиками служат образующие конуса, и *цилиндрические поверхности*, у которых все касательные плоскости параллельны одной прямой. У конических поверхностей ребро возврата вырождается в точку — вершину конуса, у цилиндрической поверхности ребро возврата вырождается в несобственную точку.

Конические, цилиндрические и собственно развертывающиеся поверхности, и только эти поверхности, касаются каждой касательной плоскости вдоль образующей.

Как следствие имеем предложение: *плоскости семейства служат соприкасающимися плоскостями ребра возврата огибающей семейства* .

## § 10. Огибающая нормальных и спрямляющих плоскостей

1. *Семейство нормальных плоскостей* линии (3.9 : 4) определяется уравнением

$$F \equiv (\mathbf{P} - \mathbf{M})\,\boldsymbol{\tau} = 0. \qquad (3.10:1)$$

Дифференцируя по параметру семейства—длине дуги $s$ кривой, получим

$$F_s \equiv (\mathbf{P} - \mathbf{M})\,k\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\tau}^2 = 0.$$

Если умножить обе части на радиус кривизны кривой $\rho = \frac{1}{k}$ и заменить $\boldsymbol{\tau}^2 = 1$, то получим

$$(\mathbf{P} - \mathbf{M})\,\boldsymbol{\nu} - \rho = 0. \qquad (3.10:2)$$

Эта плоскость (рис. 19) параллельна спрямляющей плоскости (3.9 : 6), но, в отличие от нее, не проходит через вершину трехгранника Френе, точку кривой $M$; зато она содержит центр кривизны кривой, точку $C$, ибо уравнение (3.10 : 2) удовлетворяется значением

$$\mathbf{P} = \mathbf{C} = \mathbf{M} + \rho\boldsymbol{\nu}.$$

Линия пересечения плоскостей (3.10 : 1) и (3.10 : 2) — характеристика плоскости (3.10 : 1) проходит через центр кривизны $C$ параллельно бинормали. Эта прямая называется *осью кривизны.* Огибающая нормальных плоскостей, геометрическое место осей кривизны, называется *полярной поверхностью.*

2. *Семейство спрямляющих плоскостей* определяется уравнением

$$F \equiv (\mathbf{P} - \mathbf{M})\,\boldsymbol{\nu} = 0. \qquad (3.10:3)$$

Дифференцируя по длине дуги $s$ — параметру семейства, получим

$$F_s \equiv (\mathbf{P} - \mathbf{M})\cdot(-k\boldsymbol{\tau} + \varkappa\boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\nu} = 0. \qquad (3.10:4)$$

Последний член обращается в нуль. Если обозначить проекции вектора $\mathbf{M} - \mathbf{P} = \overrightarrow{MP}$ на векторы $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ буквами

$$\xi = (\mathbf{P} - \mathbf{M})\,\boldsymbol{\tau}, \quad \eta = (\mathbf{P} - \mathbf{M})\,\boldsymbol{\nu},$$

$$\zeta = (\mathbf{P} - \mathbf{M})\,\boldsymbol{\beta},$$

то уравнения (3.10 : 3), (3.10 : 4) дадут

$$\eta = 0, \ \varkappa\zeta - k\xi = 0. \qquad (3.10:5)$$

Это уравнение характеристики в координатах $\xi$, $\eta$, $\zeta$ относительно трехгранника Френе. Первое уравнение (3.10 : 5) показывает, как и следовало ожидать, что характеристика лежит на спрямляющей плоскости. Второе показывает, что

$$\xi : \zeta = \varkappa : k,$$

т. е. характеристика параллельна вектору мгновенной скорости вращения

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\tau}\varkappa + \boldsymbol{\beta}k.$$

Огибающая спрямляющих плоскостей будет *неподвижной аксоидой.*

## ГЛАВА IV

# ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

## § 1. Первая квадратичная форма поверхности

Мы уже дали определение поверхности в дифференциальной геометрии. В окрестности каждой точки регулярной области поверхность допускает параметрическое представление

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(u, v), \tag{4.1:1}$$

где вектор — функция, стоящая в правой части, класса $C^3$ и частные производные удовлетворяют неравенству

$$\mathbf{M}_u \times \mathbf{M}_v \neq 0. \tag{4.1:2}$$

Параметры $u$, $v$ определяют положение точки $M$ на поверхности, поэтому их называют координатами, обычно *криволинейными координатами*, так как *координатные линии*, т. е. линии, вдоль которых одна из координат сохраняет постоянное значение, т. е. линии $v$=const или $u$=const, вообще будут кривыми линиями.

Линия $v$=const обычно называется линией $u$, а линия $u$=const — линией $v$.

*Координатная сеть* называется *правильной*, если в данной области каждая линия $u$ пересекает в одной точке каждую линию $v$. Условие (4.1 : 2) обеспечивает правильную сеть координатных линий.

Линия на поверхности в параметрическом представлении определяется уравнениями

$$u = \varphi(t), \quad v = \psi(t), \tag{4.1:3}$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ класса $C^3$ и первые производные их одновременно в нуль не обращаются.

Полный дифференциал

$$d\mathbf{M} = \mathbf{M}_u du + \mathbf{M}_v dv \tag{4.1:4}$$

определяет касательные ко всем линиям (4.1 : 3) на поверхности; вектор касательной будет

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{M}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{M}_v \frac{dv}{dt},$$

где

$$\frac{du}{dt} = \dot{\varphi}(t), \quad \frac{dv}{dt} = \dot{\psi}(t). \tag{4.1:5}$$

Производные $\mathbf{M}_u$, $\mathbf{M}_v$ определяют касательные к координатным линиям $v=\text{const}$; $u=\text{const}$.

Формула (4.1 : 4) или (4.1 : 5) показывает, что все касательные к линиям на поверхности, проходящим через точку $(u, v)$, лежат в одной *(касательной)* плоскости.

*Вектор нормали* определяется векторным произведением

$$\mathbf{N} = \mathbf{M}_u \times \mathbf{M}_v. \tag{4.1:6}$$

Дифференциал длины дуги любой линии (4.1 : 3) на поверхности определяется, если возвысить в квадрат левую и правую часть равенства (4.1 : 4)

$$ds^2 = d\mathbf{M}^2 = (\mathbf{M}_u)^2 du^2 + 2\mathbf{M}_u\mathbf{M}_v\, du\, dv + (\mathbf{M}_v)^2 dv^2;$$

коэффициенты

$$E = (\mathbf{M}_u)^2, \ F = \mathbf{M}_u\mathbf{M}_v, \ G = (\mathbf{M}_v)^2 \tag{4.1:7}$$

зависят только от криволинейных координат $u, v$ точки поверхности и не зависят от уравнений линии (4.1 : 3). Поэтому квадратичная форма

$$ds^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2 \tag{4.1:8}$$

называется *линейным элементом поверхности.* Это основная метрическая форма поверхности. Она инвариантна в том смысле, что не меняется при перемещении поверхности в пространстве как твердое тело, не зависит от преобразования декартовой системы координат. При замене переменных

$$u = \varphi(u^*, v^*), \ v = \psi(u^*, v^*), \tag{4.1:9}$$

где функции $\varphi$, $\psi$ функционально независимы класса $C^3$,

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(u^*, v^*)} \neq 0, \tag{4.1:10}$$

коэффициенты $E$, $F$, $G$ преобразуются подстановкой (4.1 : 9), дифференциалы $du$, $dv$ заменяются полными дифференциалами:

$$\left.\begin{aligned} du &= \frac{\partial\varphi}{\partial u^*}\, du^* + \frac{\partial\varphi}{\partial v^*}\, dv^*, \\ dv &= \frac{\partial\psi}{\partial u^*}\, du^* + \frac{\partial\psi}{\partial v^*}\, dv^* \end{aligned}\right\} \qquad (4.1:11)$$

и линейный элемент (4.1 : 8) сохраняет свое значение.

Если обозначить модули векторов

$$|\mathbf{M}_u| = a, \ |\mathbf{M}_v| = b, \qquad (4.1:12)$$

а угол между ними, т. е. угол, под которым пересекаются координатные линии, буквой $\gamma$, то из формулы (4.1 : 7) получим

$$E = a^2, \ G = b^2, \ F = ab\cos\gamma, \qquad (4.1:13)$$

откуда

$$EG - F^2 = a^2b^2(1 - \cos^2\gamma) = a^2b^2\sin^2\gamma. \qquad (4.1:14)$$

Следовательно, коэффициенты $E$, $G$ и дискриминант $EG-F^2$ действительной поверхности — положительны и квадратичная форма (4.1 : 8) — *положительно определена*. Средний коэффициент $F$ может быть и положительным и отрицательным в зависимости от знака $\cos\gamma$, т. е. в зависимости от того, будет ли координатный угол (т. е. угол поворота от вектора $\mathbf{M}_u$ до вектора $\mathbf{M}_v$) острым или тупым.

Если $\gamma = \frac{\pi}{2}$, т. е. координатные линии ортогональны, то

$$F = 0.$$

Заметим еще, что модуль векторного произведения (4.1 : 6) равен произведению модулей множителей на синус угла между ними

$$|\mathbf{N}| = |\mathbf{M}_u \times \mathbf{M}_v| = ab|\sin\gamma| = \sqrt{EG - F^2}. \qquad (4.1:15)$$

## § 2. Угол пересечения двух линий на поверхности

Рассмотрим две линии на поверхности в точке $M(u, v)$:

$$\left.\begin{aligned} u &= f_1(t), \qquad & u &= f_1^*(t^*), \\ v &= f_2(t), \qquad & v &= f_2^*(t^*). \end{aligned}\right\} \qquad (4.2:1)$$

Присвоим дифференцированию вдоль первой линии символ $d$, вдоль второй — символ $\delta$. Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} du &= \dot{f}_1(t)\,dt, & \delta u &= \dot{f}_1^{*}(t^*)\,\delta t^*, \\ dv &= \dot{f}_2(t)\,dt, & \delta v &= \dot{f}_2^{*}(t^*)\,\delta t^*. \end{aligned}\right\} \qquad (4.2:2)$$

Тогда единичные векторы касательных к этим линиям в общей точке $M$ будут:

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} = \mathbf{M}_u \frac{du}{ds} + \mathbf{M}_v \frac{dv}{ds}, \quad \frac{\delta \mathbf{M}}{\delta s} = \mathbf{M}_u \frac{\delta u}{\delta s} + \mathbf{M}_v \frac{\delta v}{\delta s}. \qquad (4.2:3)$$

Отсюда по известной формуле: скалярное произведение векторов равно произведению модулей множителей на косинус угла между ними, получим, обозначая буквой $\varphi$ угол пересечения линий (4.2 : 3)

$$\cos\varphi = \frac{d\mathbf{M}}{ds}\cdot\frac{\delta\mathbf{M}}{\delta s} = (\mathbf{M}_u)^2 \frac{du}{ds}\cdot\frac{\delta u}{\delta s} + \mathbf{M}_u\mathbf{M}_v \frac{du\,\delta v + dv\,\delta u}{ds\,\delta s} +$$

$$+ (\mathbf{M}_v)^2 \frac{dv}{ds}\cdot\frac{\delta v}{\delta s},$$

или с помощью обозначений (4.1 : 7)

$$\cos\varphi = \frac{E\,du\,\delta u + F\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{ds\,\delta s}, \qquad (4.2:4)$$

где

$$\delta s^2 = E\,(\delta u)^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,(\delta v)^2.$$

Отсюда условие ортогональности линий (4.2 : 1)

$$\cos\varphi = 0,$$

или

$$E\,du\,\delta u + F\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = 0. \qquad (4.2:5)$$

**Приложение.** Ортогональная система линий на поверхности.

Рассмотрим семейство линий на поверхности в области ее регулярности

$$\Phi(u,\ v) = c, \qquad (4.2:6)$$

где $\Phi$ — функция класса $C^2$ и $c$ — параметр семейства. Нетрудно заметить, что через каждую точку области проходит одна и только одна линия семейства. Действительно, внося в уравнение (4.2 : 6) координаты $(u_1,\ v_1)$, определим параметр

$c=c_1$ той единственной линии, которая проходит через эту точку

$$\Phi(u_1, v_1) = c_1.$$

Присвоим этим линиям символ дифференцирования $\delta$. Дифференцируя равенство (4.2:6) при постоянном $c_1$, получим

$$\Phi_u \delta u + \Phi_v \delta v = 0. \qquad (4.2:7)$$

Будем искать линию, которая в каждой точке пересекает линию семейства (4.2:6) под прямым углом. Такая линия называется *ортогональной траекторией* семейства (4.2:6). Если присвоить дифференцированию вдоль ортогональной траектории символ дифференцирования $d$, то искомая линия будет определяться уравнением (4.2:5).

Исключая с помощью уравнения (4.2:7) отношение дифференциалов $\delta u : \delta v$, получим

$$\{E\Phi_v(u, v) - F\Phi_u(u, v)\}\, du + \\ + \{F\Phi_v(u, v) - G\Phi_u(u, v)\}\, dv = 0. \qquad (4.2:8)$$

В левой части стоит дифференциальный бином

$$A(u, v)\, du + B(u, v)\, dv.$$

Дифференциальный бином класса $C^1$ допускает интегрирующий множитель $\lambda\ (u, v)$ так, что

$$\lambda\{A(u, v)\, du + B(u, v)\, dv\} = d\Psi, \quad \Psi = \Psi(u, v).$$

Таким образом, дифференциальное уравнение (4.2:8) имеет общий интеграл

$$\Psi(u, v) = c, \qquad (4.2:9)$$

где $c$ — произвольное постоянное интеграции. Если рассматривать произвольное постоянное $c$ как параметр семейства кривых, то уравнение (4.2:9) определит второе семейство кривых так, что через всякую точку области будет проходить одна линия семейства $\Phi$ и одна линия семейства $\Psi$, пересекающихся под прямым углом.

Если рассматривать $\Phi$ и $\Psi$ как новые криволинейные координаты на поверхности, то система координатных линий

$$\Phi = \text{const}, \ \Psi = \text{const}$$

будет ортогональной, и линейный элемент примет вид

$$ds^2 = A^2 (d\Phi)^2 + B^2 (d\Psi)^2. \qquad (4.2:10)$$

## § 3. Дифференциал площади поверхности

Рассмотрим координатную сеть линий на поверхности и криволинейный четырехугольник, образованный линиями с постоянными значениями координат $u$ и $u+\Delta u$, $v$, и $v+\Delta v$, пересекающихся в точках $M(u, v)$, $M_1(u+\Delta u, v)$, $M_2(u, v+$ $+\Delta v)$, $M_3(u+\Delta u, v+\Delta v)$ (рис. 20).

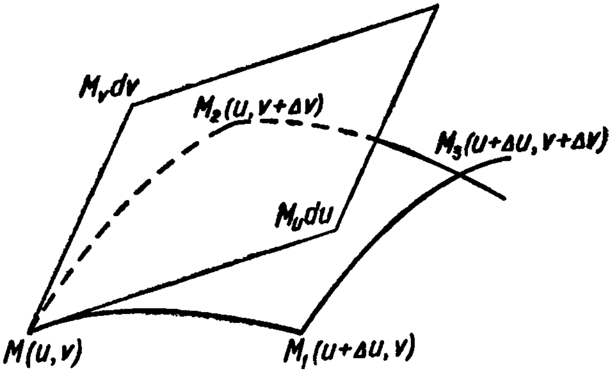


Рис. 20

Хорды $\overrightarrow{MM_1}$, $\overrightarrow{MM_2}$ определяют векторы

$$\Delta_u \mathbf{M} = \mathbf{M}(u+\Delta u, v) - \mathbf{M}(u, v)$$

$$\Delta_v \mathbf{M} = \mathbf{M}(u, v+\Delta v) - \mathbf{M}(u, v);$$

их можно аппроксимировать векторами

$$d\mathbf{M} = \mathbf{M}_u\, du, \qquad \delta\mathbf{M} = \mathbf{M}_v\, dv,$$

а площадь криволинейного четырехугольника $MM_1M_3M_2$ площадью параллелограмма, построенного на векторах $d\mathbf{M}$, $\delta\mathbf{M}$. Площадь такого параллелограмма равна модулю векторного произведения

$$|d\mathbf{M} \times \delta\mathbf{M}| = |\mathbf{M}_u \times \mathbf{M}_v|\, du\, dv = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Отсюда дифференциал площади поверхности

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv. \tag{4.3:1}$$

## § 4. Примеры

**1. Геликоид.** Прямой *геликоид* описывается винтовым движением прямой, параллельной плоскости $xy$ и пересекающей ось $z$ (ось винтового движения); проекция прямой на плоскость $xy$ равномерно вращается около начала координат, а точка пересечения прямой с осью $z$ равномерно перемещается по этой оси (рис. 21).

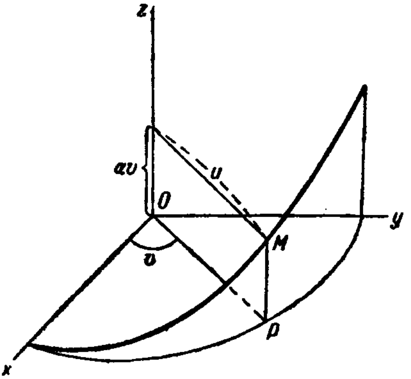


Рис. 21

В приведенной таблице в первом столбце стоят координаты $x$, $y$, $z$ радиуса-вектора $\mathbf{M}$, во втором и третьем — координаты касательных к линиям $u$ и $v$ векторов $\mathbf{M}_u$ и $\mathbf{M}_v$, в четвертом — координаты нормали $\mathbf{N} = \mathbf{M}_u \times \mathbf{M}_{vu}$ ($a=\mathrm{const}$).

| $\mathbf{M}$ | $\mathbf{M}_u$ | $\mathbf{M}_v$ | $\mathbf{N}$ |
|---|---|---|---|
| $x = u\cos v$ | $\cos v$ | $-u\sin v$ | $a\sin v$ |
| $y = u\sin v$ | $\sin v$ | $u\cos v$ | $-a\cos v$ |
| $z = av$ | $0$ | $a$ | $u$ |

(4.4:1)

Коэффициенты линейного элемента:

$$E = (\mathbf{M}_u)^2 = 1,\quad F = \mathbf{M}_u\mathbf{M}_v = 0,$$

$$G = (\mathbf{M}_v)^2 = u^2 + a^2,$$

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\,dv^2. \qquad (4.4:2)$$

Линия $v=\mathrm{const}$ во всех точках имеет одну и ту же аппликату $z=av$; ее проекция на плоскость $xy$ определяется уравнением

$$y = x \operatorname{tg} v.$$

Линия $u=\mathrm{const}$ — винтовая линия; при повороте проекции $OP$ на $2\pi$ точка $M$ поднимается на $2\pi a$. Величина $a$ — *шаг винта.*

**2. Поверхность вращения.** Зададим в плоскости, проходящей через ось $z$, произвольную линию

$$z = f(r), \tag{4.4:3}$$

где $r$ и $z$ — прямоугольные декартовы координаты в плоскости $rz$ и ось $Or$ лежит на пересечении плоскости $rz$ с координатной плоскостью $xy$.

Рассмотрим поверхность вращения, описанную линией (4.4:3), когда плоскость $rz$ вращается около оси $z$. Если произвольную точку $M$ линии (4.4:3) спроектировать на плоскость $xy$, т. е. на ось $Or$ в плоскости, в точку $P$ с координатой по этой оси $OP=r$ и обозначить угол поворота (рис. 22)

$$\angle xOP = \varphi,$$

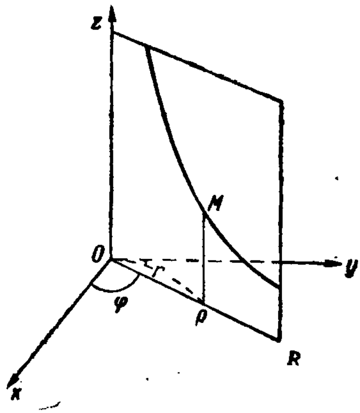

Рис. 22

то координаты точки $P$ будут

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi \tag{4.4:4}$$

формулы перехода от полярных $(r, \varphi)$ к декартовым $(x, y)$ координатам точки $P$. Точка $M$ имеет эти две координаты $(x, y)$ и еще третью координату $z$, определяемую уравнением (4.4:3). Имеем таблицу

| $\mathbf{M}$ | $\mathbf{M}_r$ | $\mathbf{M}_\varphi$ | $\mathbf{N}$ |
|---|---|---|---|
| $x = r\cos\varphi$ | $\cos\varphi$ | $-r\sin\varphi$ | $-r\dot{f}\cos\varphi$ |
| $y = r\sin\varphi$ | $\sin\varphi$ | $r\cos\varphi$ | $-r\dot{f}\sin\varphi$ |
| $z = f(r)$ | $\dot{f}(r)$ | $0$ | $r$ |

(4.4:5)

Коэффициенты линейного элемента:

$$E = (\mathbf{M}_r)^2 = 1 + \dot{f}^2(r),\quad F = \mathbf{M}_r\mathbf{M}_\varphi = 0,$$

$$G = (\mathbf{M}_\varphi)^2 = r^2;$$

линейный элемент

$$ds^2 = [1 + \dot{f}^2(r)]\,dr^2 + r^2\,d\varphi^2; \tag{4.4:6}$$

координатные линии образуют ортогональную сеть.

Линии $\varphi$=const — сечения поверхности плоскостями, проходящими через ось вращения, называются *меридианами* поверхности вращения; они все между собой конгруэнтны и представляют различные положения вращающегося профиля (4.4 : 3).

Линии $r$=const — сечения поверхности плоскостями, перпендикулярными к оси вращения, ибо при постоянном

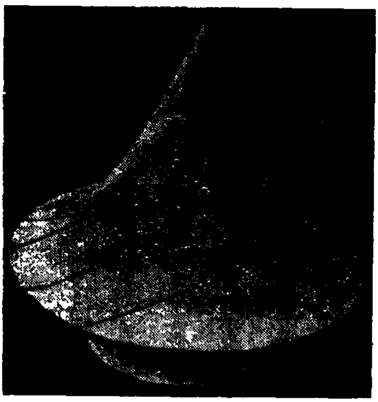

Рис. 23

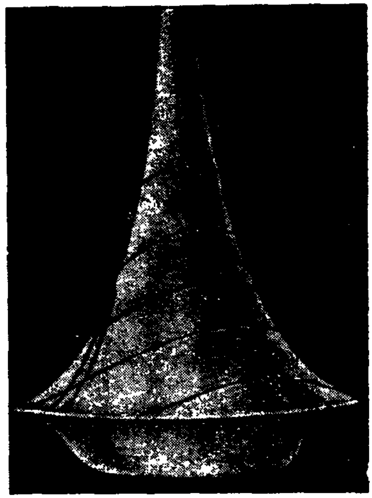

Рис. 24

$r$=const и $z$=const. Они называются *параллелями,* ибо лежат в параллельных плоскостях. Проекция такой линии на плоскость $xy$ конгруэнтна самой линии и имеет уравнение

$$x^2+y^2=r^2.$$

Это окружность с центром на оси вращения и радиусом $r$.

На рис. 23 и 24 изображены поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны. Поверхность, данная на рис. 24, называется *псевдосферой.*

**3. Катеноид.** *Катеноидом* называется поверхность вращения цепной линии около своего основания. *Цепная линия* есть линия, форму которой принимает тяжелая цепь, если ее свободно подвесить за два конца (рис. 25).

При подходящем выборе осей цепная линия определяется уравнением

$$r = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right). \qquad (4.4:7)$$

Если воспользоваться гиперболическими функциями:

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2},$$

$$\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

$$\operatorname{th} t = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}, \quad \operatorname{cth} t = \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t},$$

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1,$$

$$\frac{d \operatorname{ch} t}{dt} = \operatorname{sh} t, \quad \frac{d \operatorname{sh} t}{dt} = \operatorname{ch} t,$$

то уравнение цепной линии (4.4 : 7) примет вид

$$r = a \operatorname{ch} \frac{z}{a}.$$

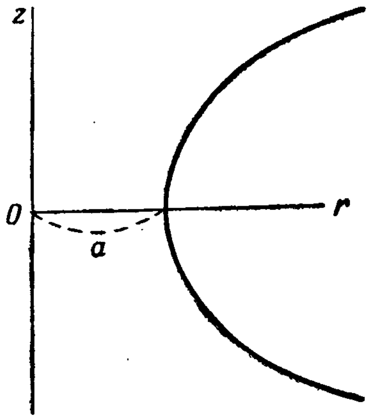


Рис. 25

Отсюда, дифференцируя, получим

$$dr = \operatorname{sh} \frac{z}{a} \cdot dz.$$

Следовательно,

$$\dot{f}(r) = \frac{dz}{dr} = \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{z}{a}}$$

и

$$1 + \dot{f}^2(r) = 1 + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{z}{a}} = \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{z}{a} + 1}{\operatorname{sh}^2 \frac{z}{a}} = \operatorname{cth}^2 \frac{z}{a} = \frac{r^2}{r^2 - a^2}$$

и по формуле (4.4 : 6) линейный элемент катеноида будет

$$ds^2 = \frac{r^2 dr^2}{r^2 - a^2} + r^2 d\varphi^2. \qquad (4.4:8)$$

Если положить

$$u = \sqrt{r^2 - a^2}, \quad v = \varphi; \tag{4.4:9}$$

то

$$du = \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - a^2}}, \quad dv = d\varphi,$$

и линейный элемент геликоида (4.4 : 2) совпадает с линейным элементом катеноида.

## § 5. Изгибание поверхностей

Определение. Если между точками области $U$ поверхности $S$ и точками области $U^*$ поверхности $S^*$ можно установить взаимно однозначное соответствие

$$u = \varphi(u^*, v^*), \quad v = \psi(u^*, v^*),$$
$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(u^*, v^*)} \neq 0 \tag{4.5:1}$$

так, что после подстановки вместо $u$, $v$ этих функций линейный элемент $ds^2$ первой поверхности совпадает с линейным

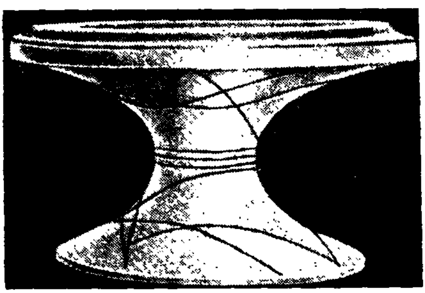

Рис. 26

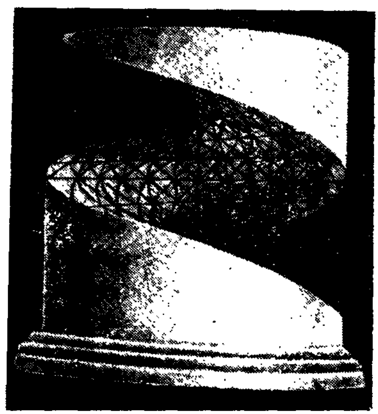

Рис. 27

элементом второй, то говорят, что поверхности $S$ и $S^*$ *изометричны*, или, что поверхность $S$ налагается на поверхность $S^*$, или, что поверхность $S^*$ является *изгибанием* поверхности $S$, а соответствие (4.5 : 1) называется *соответствием наложимости.*

Следовательно, геликоид налагается на катеноид и соответствие наложимости определяется формулами (4.4 : 9); при этом линии $v=\text{const}$, т. е. прямолинейные образующие геликоида налагаются на линии $\varphi=\text{const}$, т. е. меридианы катеноида, а линии $u=\text{const}$, т. е. винтовые линии геликоида, налагаются на линии $r=\text{const}$, т. е. параллели катеноида; а линия $u=0$, т. е. ось винтового движения геликоида, налагается на линию $r=0$, т. е. горловую (минимальную) параллель катеноида (рис. 26 и 27).

Очевидно, бесконечная прямая (ось геликоида) не может совместиться с окружностью длиной $2\pi a$ наименьшей параллели катеноида; но проблема наложимости всегда рассматривается локально, т. е. наложение ограниченной области одной поверхности на ограниченную область другой.

Изгибание называется *непрерывным,* если имеется непрерывное однопараметрическое семейство поверхностей, линейный элемент которых не зависит от параметра семейства так, что с непрерывным изменением параметра поверхность, меняясь (изгибаясь), переходит от одной формы к другой.

## § 6. Наложение развертывающейся поверхности на плоскость

Примером непрерывного изгибания может служить изгибание развертывающейся поверхности. Развертывающейся поверхностью мы назвали поверхность, образованную касательными пространственной кривой.

Рассмотрим кривую, описываемую точкой

$$\mathbf{P}=\mathbf{P}(v); \tag{4.6:1}$$

примем за параметр $v$ длину дуги кривой $(P)$ и воспользуемся формулами Френе

$$\frac{d\mathbf{P}}{dv}=\boldsymbol{\tau},\quad \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dv}=k\boldsymbol{\nu},\quad \frac{d\boldsymbol{\nu}}{dv}=-k\boldsymbol{\tau}+\varkappa\boldsymbol{\beta},$$

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{dv}=-\varkappa\boldsymbol{\nu}. \tag{4.6:2}$$

Отложим на касательной $\boldsymbol{\tau}$ от точки $P$ отрезок длиной $u$. Тогда развертывающаяся поверхность касательных кривой $(P)$ будет определяться уравнением

$$\mathbf{M}=\mathbf{P}+u\boldsymbol{\tau}. \tag{4.6:3}$$

Здесь $\mathbf{P}$ и $\tau$ — функции криволинейной координаты $v$, параметр $u$ входит в уравнение (4.6:3) явно.

Дифференцируя равенство (4.6:3) почленно с помощью формул (4.6:2), получим

$$d\mathbf{M} = \tau\, dv + \tau\, du + uk\nu\, dv = \tau\,(du + dv) + \nu uk\, dv.$$

Возвышая обе части равенства в квадрат, получим

$$ds^2 = (du + dv)^2 + u^2k^2\, dv^2. \tag{4.6:4}$$

Линейный элемент (4.6:4) зависит только от кривизны $k$ линии (4.6:1). Между тем мы знаем (2.12), что линия (4.6:1) определяется двумя инвариантами: кривизной $k$ и кручением $\varkappa$; произвольно заданные функциями длины дуги класса $C^1$, кривизна и кручение определяют пространственную линию до положения в пространстве. Зададим же непрерывное семейство линий кривизной и кручением в виде:

$$k = \varphi(v),\ \varkappa = \alpha\psi(v), \tag{4.6:5}$$

где $v$ — длина дуги, $\varphi(v)$ и $\psi(v)$ — функции класса $C^1$ и $\alpha$ — параметр линии в семействе кривых. Мы получим непрерывное семейство различных кривых и непрерывное семейство различных развертывающихся поверхностей, зависящих от параметра $\alpha$; все поверхности независимо от значения параметра $\alpha$ имеют один и тот же линейный элемент (4.6:4).

Будем стремить параметр $\alpha$ к нулю; поверхность (4.6:3) будет изгибаться, сохраняя свой линейный элемент (4.6:4). В пределе при $\alpha=0$ линейный элемент (4.6:4) не изменится, ибо он не содержит параметра $\alpha$, а кривая $(P)$ станет плоской, ибо кручение линии по формуле (4.6:5) обратится в нуль, и все ее касательные будут лежать в этой плоскости. Линейный элемент (4.6:4) не изменится, но он уже будет принадлежать плоскости. Следовательно, развертывающаяся поверхность наложится на плоскость. Если первоначально взять обыкновенную винтовую линию с постоянной кривизной и постоянным кручением, то после приведения кручения к нулю при $\alpha \to 0$ мы будем иметь плоскую линию постоянной кривизны, т. е. окружность. Огибающая с ребром возврата в виде обыкновенной винтовой линии, после того как отрезок винтовой линии перейдет в окружность, наложится своими двумя полостями — по одну и по другую сторону ребра возврата — на ту часть плоскости, которая лежит вне окружности, покрыв ее два раза, ибо из внешней точки можно провести две касательные к окружности.

## § 7. Изгибание поверхности вращения в поверхность вращения с сохранением меридианов и параллелей

Рассмотрим две поверхности вращения $S$ и $\bar{S}$, определяемые уравнениями (4.4 : 3), (4.4 : 4):

$$\left.\begin{array}{ll} x = r\cos\varphi, & \bar{x} = \bar{r}\cos\bar{\varphi}, \\ y = r\sin\varphi, & \bar{y} = \bar{r}\sin\bar{\varphi}, \\ z = f(r). & \bar{z} = \bar{f}(\bar{r}). \end{array}\right\} \qquad (4.7:1)$$

Потребуем, чтобы они налагались так, чтобы меридианы $\varphi=\text{const}$ переходили в меридианы $\bar{\varphi}=\text{const}$, а параллели $r=\text{const}$ — в параллели $\bar{r}=\text{const}$.

Тогда соответствие наложимости должно быть вида

$$\bar{r} = h(r), \quad \bar{\varphi} = g(\varphi), \qquad (4.7:2)$$

откуда

$$d\bar{r} = \dot{h}(r)\,dr, \quad d\bar{\varphi} = \dot{g}(\varphi)\,d\varphi. \qquad (4.7:3)$$

При этом условии линейные элементы (4.4 : 6) поверхностей $S$ и $\bar{S}$ должны совпадать

$$[1+\dot{\bar{f}}^2(\bar{r})]\,d\bar{r}^2 + \bar{r}^2\,d\bar{\varphi}^2 = [1+\dot{f}^2(r)]\,dr^2 + r^2\,d\varphi^2, \qquad (4.7:4)$$

или в силу (4.7 : 2—3)

$$[1+\dot{\bar{f}}^2(\bar{r})]\,\dot{h}^2(r)\,dr^2 + h^2(r)\,\dot{g}^2(\varphi)\,d\varphi^2 = [1+\dot{f}^2(r)]\,dr^2 + r^2\,d\varphi^2.$$

Сравнивая коэффициенты при независимых дифференциалах $dr^2$, $d\varphi^2$, получим

$$[1+\dot{\bar{f}}^2(\bar{r})]\,\dot{h}^2(r) = 1+\dot{f}^2(r), \qquad (4.7:5)$$

$$h^2(r)\,\dot{g}^2(\varphi) = r^2. \qquad (4.7:6)$$

Уравнение (4.7 : 6) можно переписать в виде

$$\frac{h^2(r)}{r^2} = \frac{1}{\dot{g}^2(\varphi)}\,;$$

левая часть не меняется при изменении независимого переменного $\varphi$, правая часть не зависит от $r$. Следовательно, они обе равны одному и тому же постоянному. Возвращаясь к обозначениям (4.7 : 2—3),

$$\frac{\bar{r}^2}{r^2} = \frac{d\varphi^2}{d\bar{\varphi}^2} = \lambda^2 = \text{const}.$$

Всегда можно выбрать знак $\lambda$ так, чтобы

$$\bar{r} = \lambda r; \tag{4.7:7}$$

меняя в случае надобности знак $\bar{\varphi}$ и начало отсчета, получим

$$d\bar{\varphi} = \frac{1}{\lambda} d\varphi \text{ и } \bar{\varphi} = \frac{1}{\lambda} \varphi. \tag{4.7:8}$$

Внося значения (4.7 : 7), (4.7 : 8) в уравнение (4.7 : 5) и помня, что $dz = \dot{f}(r)\,dr$, получим

$$dr^2 + dz^2 = \lambda^2 dr^2 + d\bar{z}^2,$$

или

$$d\bar{z} = \sqrt{1 - \lambda^2 + \dot{f}^2(r)}\, dr,$$

откуда, интегрируя, имеем

$$\bar{z} = \int_{r_0}^{r} \sqrt{1 - \lambda^2 + \dot{f}^2(r)}\, dr.$$

Получаем уравнения новой поверхности вращения $\bar{S}$, налагающейся на поверхность $S$:

$$\bar{x} = \lambda r \cos\frac{\varphi}{\lambda}, \quad \bar{y} = \lambda r \sin\frac{\varphi}{\lambda}, \quad \bar{z} = \int_{r_0}^{r} \sqrt{1 - \lambda^2 + \dot{f}^2(r)}\, dr. \tag{4.7:9}$$

Постоянное $\lambda$ можно рассматривать как параметр изгибания. Если $\lambda < 1$, то радиусы параллели $\bar{r}$ становятся меньше соответствующих радиусов $r$; поверхность становится у́же; при этом границы изменения угла $\bar{\varphi} = \frac{1}{\lambda}\varphi$, которые соответствуют изменению

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

становятся больше $2\pi$, т. е. при изгибании поверхность сжимается и «запахивается», т. е. близким к $2\pi$ значениям $\varphi$ будут соответствовать после изгибания точки $\bar{\varphi} > 2\pi$, проходимые уже по второму разу.

Если $\lambda > 1$, то радиусы параллелей $\bar{r}$ становятся больше $r$, зато полный обход $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ будет соответствовать только части оборота второй поверхности: $0 \leqslant \bar{\varphi} < 2\pi$.

Кроме того, при $\lambda > 1$ разность $1 - \lambda^2$ будет отрицательной и, чтобы выражение под корнем в подынтегральной функции для $\bar{z}$ (4.7 : 9) не стало отрицательным, придется накладывать ограничение

$$\dot{f}^2(r) > \lambda^2 - 1$$

на тангенс угла наклона к оси $r$ касательной к меридиану исходной поверхности.

## ГЛАВА V

# ТЕОРИЯ КРИВИЗНЫ ПОВЕРХНОСТИ

## § 1. Кривизна линии на поверхности

Рассмотрим какую-нибудь линию на поверхности

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(u,v).$$

Дифференцируя по длине дуги этой линии, получим единичный вектор касательной

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{M}}{ds} = \mathbf{M}_u \frac{du}{ds} + \mathbf{M}_v \frac{dv}{ds}. \qquad (5.1:1)$$

Вторичное дифференцирование дает по формуле Френе *вектор кривизны*, т. е. вектор, отложенный в положительном направлении по главной нормали, с модулем, равным кривизне кривой

$$k\boldsymbol{\nu} = \frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2} = \mathbf{M}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\mathbf{M}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} +$$

$$+ \mathbf{M}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \mathbf{M}_u\frac{d^2u}{ds^2} + \mathbf{M}_v\frac{d^2v}{ds^2}. \qquad (5.1:2)$$

Чтобы освободиться от вторых производных $\frac{d^2u}{ds^2}, \frac{d^2v}{ds^2}$, умножаем обе части равенства на единичный вектор нормали $\mathbf{n}$, т. е. *проектируем вектор кривизны на нормаль к поверхности.*

Полагая

$$\boldsymbol{\nu}\mathbf{n} = \cos\vartheta, \qquad (5.1:3)$$

$$k\cos\vartheta = k_n, \qquad (5.1:4)$$

будем называть *нормальной кривизной* линии на поверхности проекцию вектора кривизны на нормаль к поверхности (рис. 28).

Имеем

$$k_n = \mathbf{n}\frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2} = \frac{Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2}{ds^2}, \qquad (5.1:5)$$

где

$$D = \mathbf{n}\mathbf{M}_{uu}, \quad D' = \mathbf{n}\mathbf{M}_{uv},$$
$$D'' = \mathbf{n}\mathbf{M}_{vv}; \qquad (5.1:6)$$

или, поскольку

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{N}|}\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\mathbf{M}_u \times \mathbf{M}_v,$$

можно писать

$$D = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}(\mathbf{M}_u\mathbf{M}_v\mathbf{M}_{uu}) = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \qquad (5.1:7)$$

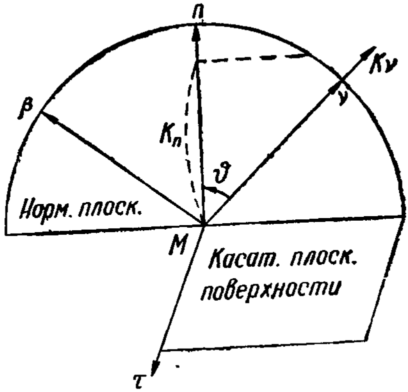


Рис. 28

и аналогично для $D'$ и $D''$.

Два последних члена разложения (5.1 : 2) при умножении на $\mathbf{n}$ пропадают, ибо

$$\mathbf{n}\mathbf{M}_u = 0, \quad \mathbf{n}\mathbf{M}_v = 0.$$

Дифференцируя первое тождество по переменному $u$, получим

$$\mathbf{n}_u\mathbf{M}_u + \mathbf{n}\mathbf{M}_{uu} = 0, \text{ или } D + \mathbf{n}_u\mathbf{M}_u = 0,$$

откуда

$$D = -\mathbf{n}_u\mathbf{M}_u, \quad D' = -\mathbf{n}_u\mathbf{M}_v = -\mathbf{n}_v\mathbf{M}_u, \quad D'' = -\mathbf{n}_v\mathbf{M}_v. \qquad (5.1:8)$$

## § 2. Вторая квадратичная форма

Выражение, стоящее в числителе правой части формулы (5.1 : 5), называется *второй основной квадратичной формой поверхности*

$$\varphi_2 = Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2. \qquad (5.2:1)$$

Нормальная кривизна кривой равна отношению двух квадратичных форм поверхности

$$k_n = \frac{\varphi_2}{ds^2} = \frac{Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}. \qquad (5.2:2)$$

Поскольку нормальная кривизна имеет внутреннее значение, не зависящее ни от выбора декартовой системы координат или перемещения поверхности в пространстве, ни от выбора криволинейных координат на поверхности, и такой же внутренний смысл имеет линейный элемент $ds^2$, то и вторая квадратичная форма $\varphi_2$ будет инвариантна в том же смысле, как и первая квадратичная форма.

Заметим, что выражение (5.2 : 2) однородно нулевого измерения относительно дифференциалов $du$, $dv$, следовательно, зависит только от их отношения $du : dv$, которое вполне определено, если дана касательная (5.1 : 1) кривой. Отсюда следует теорема:

**Теорема.** *Все линии на поверхности, проходящие через точку $M_0$ поверхности с общей касательной, имеют одну и ту же нормальную кривизну.*

Если обратить внимание на формулу (5.1 : 4), откуда следует

$$k = \frac{k_n}{\cos\vartheta}, \qquad (5.2:3)$$

то можно усилить эту теорему. Поскольку $\vartheta$, как угол главной нормали с нормалью к поверхности, определяет угол соприкасающейся плоскости с нормалью к поверхности, то при заданной соприкасающейся плоскости мы будем знать не только касательную как пересечение касательной плоскости с соприкасающейся, следовательно, знать нормальную кривизну $k_n$ линии, но по формуле (5.2 : 3) с помощью угла $\vartheta$ можем определить всю кривизну $k$ линии. Отсюда имеем следствие.

**Следствие.** *Все линии на поверхности, имеющие в заданной точке заданную соприкасающуюся плоскость, имеют в этой точке одну и ту же кривизну.*

Среди всех линий с общей соприкасающейся плоскостью простейшей будет плоская линия, т. е. линия пересечения поверхности этой плоскостью.

Рассмотрим теперь касательную $\tau$ к поверхности и две плоскости, секущие поверхность и проходящие через касательную $\tau$: одна нормальная плоскость, т. е. плоскость, проходящая через нормаль, другая — наклонная, образующая с первой угол $\vartheta$.

Для нормального сечения угол наклона его плоскости к нормали поверхности равен 0 или $\pi$ и с точностью до знака ее кривизна равна нормальной кривизне, которая соответствует этой касательной $\tau$; обозначим ее $k_n$. Для второй плоскости этот угол равен $\vartheta$, а кривизна получается по формуле (5.2 : 3). Введем теперь радиусы кривизны: для первой $k_n = \frac{1}{\rho_n}$, для второй $k = \frac{1}{\rho}$. Внося эти значения в уравнение (5.2 : 3) и освобождаясь от знаменателя, получим

$$\rho = \rho_n \cos \vartheta. \qquad (5.2:4)$$

Радиус кривизны измеряет расстояние от точки $M$ до центра кривизны $C$. Следовательно,

$$\rho_n = MC_n, \quad \rho = MC, \quad \angle C_n MC = \vartheta$$

и формула (5.2 : 4) запишется:

$$MC = MC_n \cos \vartheta.$$

Это формула для катета $MC$ прямоугольного треугольника, определяемого по гипотенузе $MC_n$ и прилежащему углу $C_n MC$. Следовательно, в точке $C$ треугольник имеет прямой угол, и прямая $C_nC$ — перпендикуляр, опущенный из центра нормальной кривизны на наклонную (секущую) плоскость.

**Теорема.** *Центр кривизны наклонного сечения является проекцией на плоскость сечения центра кривизны нормального сечения с той же касательной.*

## § 3. Главные направления в точке поверхности

Перейдем теперь к исследованию изменения нормальной кривизны при повороте касательной $\tau$ в касательной плоскости точки $M$.

Согласно обычаю радиус кривизны нормального сечения поверхности берется с противоположным знаком

$$k_n = -\frac{1}{R}.$$

Следовательно, при отрицательном знаке радиуса кривизны $R$ нормального сечения центр кривизны лежит на нормали к поверхности в ее положительном направлении.

Исследование поведения всякой функции естественно начинается с отыскания точек максимума и минимума функции. Мы рассматриваем функцию

$$-\frac{1}{R}=\frac{Ddu^2+2D'dudv+D''dv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2} \tag{5.3:1}$$

в зависимости от направления касательной к линии на поверхности, т. е. в зависимости от отношения дифференциалов $du:dv$. Чтобы не иметь дело с дробями, освобождаемся от знаменателей

$$\begin{gathered}Ddu^2+2D'dudv+D''dv^2+\\+\frac{1}{R}(Edu^2+2Fdudv+Gdv^2)=0.\end{gathered} \tag{5.3:2}$$

Изменения отношения $du:dv$ можно достигнуть, меняя числитель $\xi=du$ при постоянном знаменателе или знаменатель $\eta=dv$ при постоянном числителе. Поэтому мы можем дифференцировать обе части равенства (5.3:2) по переменному $\xi$ или по переменному $\eta$; при этом, производную функции $\frac{1}{R}$ будем полагать равной нулю, потому что экстремум функции может быть только при обращении в нуль ее производной. Мы получим по сокращении на 2:

$$\left.\begin{aligned}Ddu+D'dv+\frac{1}{R}(Edu+Fdv)=0,\\ D'du+D''dv+\frac{1}{R}(Fdu+Gdv)=0.\end{aligned}\right\} \tag{5.3:3}$$

Каждое из этих уравнений вместе с уравнением (5.3:2) определяет отношение $du:dv$ в точке экстремума и значение функции $\frac{1}{R}$ в этой точке. Впрочем непосредственно видно, что из этих трех уравнений независимы только два: если уравнения (5.3:3) умножить первое на $du$, второе на $dv$ и сложить, то получим уравнение (5.3:2).

Исключая из уравнений (5.3:3) неизвестное $\frac{1}{R}$, получим уравнение

$$\begin{vmatrix}Ddu+D'dv & Edu+Fdv\\ D'du+D''dv & Fdu+Gdv\end{vmatrix}=0, \tag{5.3:4}$$

которое определяет те направления $du:dv$ на поверхности, которым соответствует экстремум нормальной кривизны.

Определение. Те направления в точке поверхности, которые дают экстремум нормальной кривизны, называются *главными направлениями;* соответствующие им экстремальные значения $R$ (или $\frac{1}{R}$) — *главными радиусами кривизны* (или *главными кривизнами*).

**Теорема.** *В каждой точке всякой поверхности* (кроме сферы) *существуют в касательной плоскости два действительных, взаимно перпендикулярных главных направления. На сфере главные направления неопределенны.*

Надо доказать, что квадратное уравнение (5.3 : 4) имеет действительные корни для отношений $\frac{du}{dv}$. Так как вопрос существования главных направлений не может зависеть от выбора координатных линий, то для облегчения выкладок будем считать координатную сеть ортогональной, т. е. будем полагать $F=0$. Уравнение (5.3 : 4) примет вид

$$(Ddu + D'dv)\,Gdv - (D'du + D''dv)\,Edu = 0,$$

или

$$ED'du^2 + (ED'' - GD)\,dudv - GD'dv^2 = 0 \qquad (5.3:5)$$

и его дискриминант очевидно положителен

$$(ED'' - GD)^2 + 4EGD'^2 > 0,$$

ибо $E>0$ и $G>0$.

Действительность главных направлений доказана. Чтобы доказать ортогональность главных направлений, которые соответствуют решениям $\frac{du}{dv}$ и $\frac{\delta u}{\delta v}$ уравнения (5.3 : 5), достаточно заметить, что произведение решений квадратного уравнения (5.3 : 5) при $D' \neq 0$ будет

$$\frac{du}{dv}\,\frac{\delta u}{\delta v} = -\,\frac{G}{E},$$

откуда

$$Edu\delta u + Gdv\delta v = 0,$$

что при $F=0$ совпадает с условием ортогональности (4.2 : 5).

Если $D'=0$, то уравнение (5.3 : 5) принимает вид

$$(ED'' - GD)\,dudv = 0 \qquad (5.3:6)$$

и координатные линии $du=0$ и $dv=0$ при $F=0$ ортогональны; если же

$$ED'' - GD = 0, \tag{5.3:7}$$

то главные направления неопределенны.

## § 4. Линии кривизны

Определение. Линия, которая в каждой точке имеет касательную главного направления, называется *линией кривизны.*

**Следствие 1.** *Через каждую точку поверхности проходят две линии кривизны.*

**Следствие 2.** *На каждой поверхности (кроме сферы) есть два семейства линий кривизны; они всегда действительны и образуют ортогональную сеть.*

На сфере (5.3 : 7) линии кривизны неопределенны.

**Следствие 3.** *Обращение в нуль средних коэффициентов двух квадратичных форм поверхности необходимо и достаточно, чтобы поверхность была отнесена к линиям кривизны.*

Мы видели достаточность этого признака. Докажем необходимость. Если поверхность отнесена к линиям кривизны, то уравнение (5.3 : 4) допускает решения $du=0$ и $dv=0$. Полагая по очереди $du=0$ и $dv=0$, получим:

$$D'G - D''F = 0, \quad D'E - DF = 0, \tag{5.4:1}$$

их можно рассматривать как линейные однородные уравнения относительно $D'$ и $F$. Такая система допускает только нулевые решения $D'=0$, $F=0$, если только определитель системы (5.3 : 7) не обратится в нуль, что мы рассмотрим ниже в § 6.

## § 5. Формулы Родрига

Вернемся к уравнениям (5.3 : 3), которые дают повод к хорошему геометрическому истолкованию.

Если $E$, $F$, $G$ заменить по формулам (4.1 : 7), а $D$, $D'$, $D''$ по формулам (5.1 : 8), то легко заметить, что в первом уравнении выносится за скобку множитель $\mathbf{M}_u$, а во втором $\mathbf{M}_v$

$$\mathbf{M}_u\left\{\mathbf{n}_u\,du + \mathbf{n}_v dv - \frac{1}{R}(\mathbf{M}_u\,du + \mathbf{M}_v\,dv)\right\} = 0,$$

$$\mathbf{M}_v\left\{\mathbf{n}_u du + \mathbf{n}_v dv - \frac{1}{R}(\mathbf{M}_u\,du + \mathbf{M}_v\,dv)\right\} = 0,$$

или

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{M}_u\left(d\mathbf{n}-\frac{1}{R}\,d\mathbf{M}\right)&=0,\\ \mathbf{M}_v\left(d\mathbf{n}-\frac{1}{R}\,d\mathbf{M}\right)&=0,\\ \mathbf{n}\left(d\mathbf{n}-\frac{1}{R}\,d\mathbf{M}\right)&=0. \end{aligned}\right\}\quad(5.5:1)$$

Последнее равенство — очевидное тождество: дифференциал единичного вектора $d\mathbf{n}$ перпендикулярен к самому вектору и касательный вектор $d\mathbf{M}$ перпендикулярен к нормали $\mathbf{n}$.

Поскольку векторы $\mathbf{M}_u$, $\mathbf{M}_v$, $\mathbf{n}$ не компланарны, имеем

$$d\mathbf{n}=\frac{1}{R}\,d\mathbf{M}. \qquad (5.5:2)$$

Уравнения (5.3 : 2) определяют главные направления $du : dv$ и главные радиусы кривизны $R_1$, $R_2$. Их следствие, уравнение в полных дифференциалах (5.5 : 2), имеет место для каждого из главных направлений и соответствующего главного радиуса кривизны $R$ и только для этих направлений. Чтобы дать геометрическую формулировку уравнению (5.5 : 2), надо ввести понятие сферического изображения поверхности.

Рассмотрим поверхность

$$\mathbf{M}=\mathbf{M}(u,v)$$

и единичный вектор нормали $\mathbf{n}$. Если провести из произвольной фиксированной точки, например начала координат $O$, вектор нормали $\mathbf{n}$

$$\overrightarrow{Om}=\mathbf{m}=\mathbf{n},$$

то конец этого радиуса-вектора, точка $m$, будет лежать на сфере радиуса единицы с центром в начале координат. Отсюда взаимно однозначное соответствие достаточно малой области поверхности и соответствующей области на сфере, которое называется *сферическим изображением поверхности*. Уравнение (5.5 : 2) теперь можно записать в виде

$$d\mathbf{m}=\frac{1}{R}\,d\mathbf{M}. \qquad (5.5:3)$$

Здесь $d\mathbf{M}$ — инфинитезимальное смещение точки $M$ на поверхности в главном направлении, $d\mathbf{m}$ — соответствующее смещение в сферическом отображении. Отсюда теорема:

**Теорема.** *Главные направления поверхности параллельны соответствующим направлениям в сферическом изображении поверхности. Предел отношения этих смещений на сфере и на поверхности равен главной кривизне этого направления.*

Формулы Родрига (5.5 : 3) приводят к замечательной характеристике линий кривизны.

**Теорема.** *Нормали к поверхности вдоль линии кривизны и только вдоль линии кривизны образуют развертывающуюся поверхность; ребро возврата при этом описывает соответствующий главный центр кривизны.*

Действительно, из уравнения (5.5 : 2) следует

$$d\mathbf{M} - Rd\mathbf{n} = 0, \tag{5.5:4}$$

или

$$d(\mathbf{M} - R\mathbf{n}) = d\mathbf{M} - Rd\mathbf{n} - \mathbf{n}dR = -\mathbf{n}dR. \tag{5.5:5}$$

Следовательно, главный центр кривизны

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} - R\mathbf{n} \tag{5.5:6}$$

при движении точки $M$ вдоль линии кривизны описывает линию, которая касается нормалей $\mathbf{n}$ к поверхности, а эти нормали тем самым образуют развертывающуюся поверхность.

Обратно, если нормали к поверхности образуют развертывающуюся поверхность, то ребро возврата должно описываться некоторой точкой нормали (5.5 : 6) при подходящем выборе отрезка $R$. Дифференцируя равенство (5.5 : 6) и требуя, чтобы вектор касательной $d\mathbf{C}$ был коллинеарен вектору $\mathbf{n}$, получим (5.5 : 5) и отсюда (5.5 : 4), что эквивалентно равенству (5.5 : 2). Следовательно, смещение точки $M$ идет по главному направлению, и $R$ — соответствующий главный радиус кривизны.

## § 6. Неопределенность главных направлений

Уравнение (5.3 : 4) обратится в тождество и главные направления будут неопределенны, если коэффициенты двух квадратичных форм поверхности будут пропорциональны

$$\frac{D}{E} = \frac{D'}{F} = \frac{D''}{G}. \tag{5.6:1}$$

Уравнение (5.3 : 1) показывает, что при этом кривизна нормального сечения по всем направлениям одна и та же. Уравнение (5.5 : 2) теперь будет иметь место для всякого смещения $d\mathbf{M}$. Следовательно, мы можем рассматривать уравнение (5.5 : 2), как уравнение в полных дифференциалах и разбить на два уравнения в частных производных

$$\mathbf{n}_u = \frac{1}{R}\mathbf{M}_u, \quad \mathbf{n}_v = \frac{1}{R}\mathbf{M}_v, \tag{5.6 : 2}$$

откуда, дифференцируя первое уравнение по $v$, второе по $u$ и вычитая из одного другое, получим

$$\left(\frac{1}{R}\right)_v \mathbf{M}_u - \left(\frac{1}{R}\right)_u \mathbf{M}_v = 0.$$

Поскольку векторы $\mathbf{M}_u$, $\mathbf{M}_v$ линейно независимы, коэффициенты обращаются в нуль:

$$\left(\frac{1}{R}\right)_v = 0, \quad \left(\frac{1}{R}\right)_u = 0.$$

Следовательно, $R=\mathrm{const}$ и уравнения (5.6 : 2) можно заменить одним уравнением в полных дифференциалах

$$d(\mathbf{M} - R\mathbf{n}) = 0,$$

откуда

$$\mathbf{M} - R\mathbf{n} = \mathbf{A} \quad \text{и} \quad \mathbf{M} - \mathbf{A} = R\mathbf{n}, \quad \mathbf{A} = \mathrm{const},$$

где $\mathbf{A}$ — произвольный постоянный радиус-вектор, и возвышая обе части в квадрат, получим

$$(\mathbf{M} - \mathbf{A})^2 = R^2;$$

это означает, что радиус-вектор $\overrightarrow{AM}$ имеет постоянный модуль и все точки $M$ лежат на одном и том же расстоянии $R$ от точки $A$, т. е. поверхность является сферой радиуса $R$ с центром в точке $A$.

## § 7. Полная и средняя кривизна поверхности

Система (5.3 : 3) относительно неизвестных $du$, $dv$ является однородной системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Такая система имеет нулевые решения, для нас непригодные, если определитель системы не равен нулю. Обращение его в нуль

$$\begin{vmatrix} D + \frac{1}{R}E & D' + \frac{1}{R}F \\ D' + \frac{1}{R}F & D'' + \frac{1}{R}G \end{vmatrix} = 0$$

приводит к квадратному уравнению относительно главных кривизн

$$(EG-F^2)\cdot\left(\frac{1}{R}\right)^2+(DG+D''E-2FD')\,\frac{1}{R}+$$
$$+DD''-D'^2=0. \qquad (5.7:1)$$

Обозначая через $R_1$, $R_2$ два главных радиуса кривизны нормальных сечений поверхности, получим по формулам Вьета:

$$\left.\begin{aligned} H&=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{2FD'-ED''-GD}{EG-F^2},\\ K&=\frac{1}{R_1R_2}=\frac{DD''-D'^2}{EG-F^2}.\end{aligned}\right\} \qquad (5.7:2)$$

$H$ и $K$ называются соответственно средней и полной (гауссовой) кривизной поверхности. Это основные скалярные инварианты поверхности. Если говорят о поверхностях постоянной кривизны, то имеют в виду полную кривизну поверхности. Обращение в нуль средней кривизны $H=0$ выделяет замечательный класс минимальных поверхностей, которые при заданном контуре имеют наименьшую площадь.

Впервые получил эти инварианты, в другом виде, Эйлер.

## § 8. Формула Эйлера

Отнесем поверхность к линиям кривизны. Тогда $D'=0$, $F=0$ и формула (5.3 : 1) примет вид

$$-\frac{1}{R}=\frac{Ddu^2+D''dv^2}{Edu^2+Gdv^2}. \qquad (5.8:1)$$

Главным направлениям соответствуют главные радиусы кривизны. Обозначим через $R_1$ и $R_2$ соответственно главные радиусы кривизны направлений $dv=0$ и $du=0$. Внося по очереди эти значения в равенство (5.8 : 1), получим:

$$\frac{1}{R_1}=-\frac{D}{E},\qquad \frac{1}{R_2}=-\frac{D''}{G}. \qquad (5.8:2)$$

Исключая с помощью (5.8 : 2) коэффициенты $D$, $D''$ в формуле (5.8 : 1), получим

$$\frac{1}{R}=\frac{E}{R_1}\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\frac{G}{R_2}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2. \qquad (5.8:3)$$

Между тем по формулам (4.2 : 4) угол $\varphi$ между касательной $\frac{du}{ds}:\frac{dv}{ds}$ и главным направлением $\delta v=0$ или $\delta u=0$ определяется формулами:

$$\cos\varphi=\frac{E\,du\,\delta u}{ds\sqrt{E}\,\delta u},\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{G\,dv\,\delta v}{ds\sqrt{G}\,\delta v},$$

или

$$\cos\varphi=\sqrt{E}\,\frac{du}{ds},\quad \sin\varphi=\sqrt{G}\,\frac{dv}{ds}. \qquad (5.8:4)$$

Внося эти значения в уравнение (5.8 : 3), получим

$$\frac{1}{R}=\frac{\cos^2\varphi}{R_1}+\frac{\sin^2\varphi}{R_2}. \qquad (5.8:5)$$

Это и есть формула Эйлера. Она позволяет дать полную картину изменения кривизны нормального сечения.

Будем предполагать, что главные радиусы кривизны $R_1$, $R_2$ не равны между собой, и положим, учитывая знак,

$$\frac{1}{R_1}<\frac{1}{R_2}.$$

Тогда, заменяя $\cos^2\varphi$ на $1-\sin^2\varphi$, получим:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\sin^2\varphi\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right);\qquad \frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}>0. \quad (5.8:6)$$

Второе слагаемое правой части положительно; следовательно, наименьшее значение кривизны нормального сечения (с учетом знака) будет при

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1};$$

при возрастании угла $\varphi$ второе слагаемое возрастает, а вместе с ним возрастает и кривизна нормального сечения и достигает наибольшего значения при $\varphi=\frac{\pi}{2}$, т. е. при $\sin\varphi=1$, когда

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)=\frac{1}{R_2}.$$

Таким образом, если рассматривать кривизну нормального сечения как алгебраическую величину, то экстремальными значениями кривизны нормального сечения для главных направлений будет один минимум и один максимум.

Иначе дело обстоит, если рассматривать перемещение по нормали центра кривизны нормального сечения

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} + R\mathbf{n}.$$

a) Если главные радиусы кривизны одного знака

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} > 0,$$

то, меняя в случае надобности положительное направление нормали на противоположное, можно считать

$$R_1 > R_2 > 0.$$

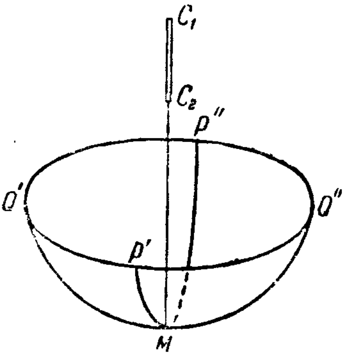


Рис. 29

Тогда по формуле (5. 8 : 5) кривизна нормального сечения для любого направления положительна, и центр кривизны нормального сечения при вращении касательной будет пробегать отрезок $C_1$ $C_2$ положительной нормали между точками

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{M} + R_1\mathbf{n} \text{ и } \mathbf{C}_2 = \mathbf{M} + R_2\mathbf{n}.$$

На рис. 29 в точке $M$ поверхность имеет положительную кривизну; линии $P'MP''$ и $Q'MQ''$ касаются главных направлений в точке $M$; $C_1$ и $C_2$ — главные центры кривизны. Отрезок $C_1C_2$ содержит все центры кривизны нормальных сечений.

b) Если кривизна

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} < 0,$$

мы будем считать $R_1 > 0$, $R_2 < 0$, точки $C_1$ и $C_2$ будут расположены по разные стороны поверхности, а так как кривизна нормального сечения в регулярной области не обращается в бесконечность, то следует предположить, что центр кривизны нормального сечения $C$, выходя из точки $C_1$, будет подниматься, удаляясь от поверхности; найдутся направления (асимптотические), которые соответствуют нулевой нормальной кривизне и бесконечно удаленному центру кривизны; после этого центр кривизны $C$ будет приближаться к поверхности, поднимаясь уже по отрицательной нормали до точки $C_2$.

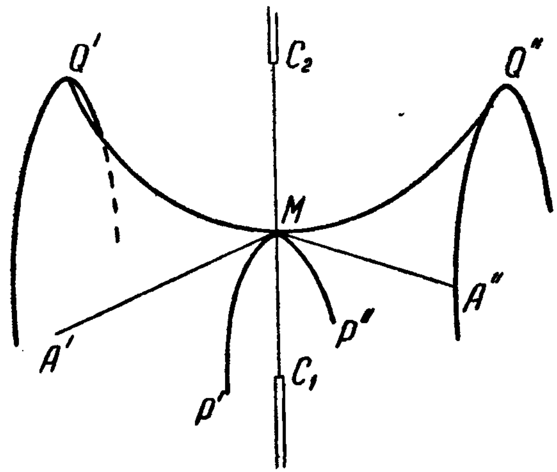

Рис. 30

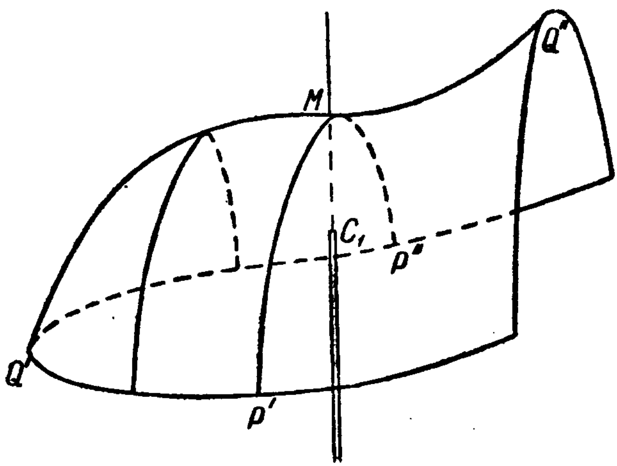

Рис. 31

На рис. 30 в точке $M$ полная кривизна поверхности отрицательна. $C_1$ и $C_2$ — главные центры кривизны. Между $C_1$ и $C_2$ нет ни одного центра кривизны нормального сечения. Они расположены выше $C_2$ и ниже $C_1$.

c) Если кривизна поверхности

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} = 0,$$

то одна из главных кривизн равна нулю

$$\frac{1}{R_2} = 0,$$

и центр кривизны нормального сечения пробегает полупрямую от точки $C_1$ в бесконечность (рис. 31).

## § 9. Индикатриса Дюпена

Наглядно можно представить изменение кривизны нормального сечения с помощью индикатрисы Дюпена.

Обозначим

$$\bar{x} = \sqrt{|R|}\cos\varphi, \quad \bar{y} = \sqrt{|R|}\sin\varphi \qquad (5.9:1)$$

так, что если положить

$$\overrightarrow{MP} = \bar{x}\,\mathbf{J}_1 + \bar{y}\,\mathbf{J}_2,$$

где $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$ — единичные векторы касательных главных направлений в точке $M$ поверхности, то точка $P$ будет все время лежать в касательной плоскости, так что расстояние ее от точки касания $M$ равно радиусу кривизны того нормального сечения поверхности, которое проходит через касательную $\overrightarrow{MP}$.

Внося значения $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ по формулам (5.9 : 1) в уравнение (5.8 : 5), получим уравнение индикатрисы Дюпена в виде кривой 2-го порядка

$$\frac{\bar{x}^2}{R_1} + \frac{\bar{y}^2}{R_2} = 1,$$

отнесенной к осям.

Если $K>0$, то можно считать $R_1>R_2>0$; индикатриса представляет каноническое уравнение эллипса с полуосями $\sqrt{R_1}$, $\sqrt{R_2}$; главные направления эллипса совпадают с главными направлениями поверхности (рис. 32).

Если $K = \frac{1}{R_1 R_2} < 0$ и $R_1 > 0$, $R_2 < 0$, то индикатриса представляет гиперболу, вернее две сопряженные гиперболы. Если положить

$$R_1 = a^2, \qquad R_2 = -b^2,$$

то уравнение индикатрисы будет (рис. 33)

$$\frac{\overline{x}^2}{a^2} - \frac{\overline{y}^2}{b^2} = \pm 1.$$

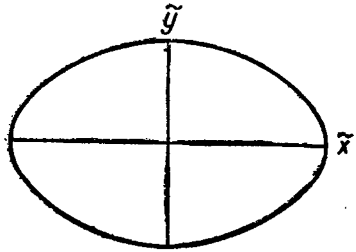


Рис. 32

Наконец, если

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} = 0 \text{ и}$$

$$\frac{1}{R_2} = 0, \; R_1 = a^2,$$

то уравнение индикатрисы

$$\frac{\overline{x}^2}{a^2} = 1, \text{ или } \overline{x} = \pm a,$$

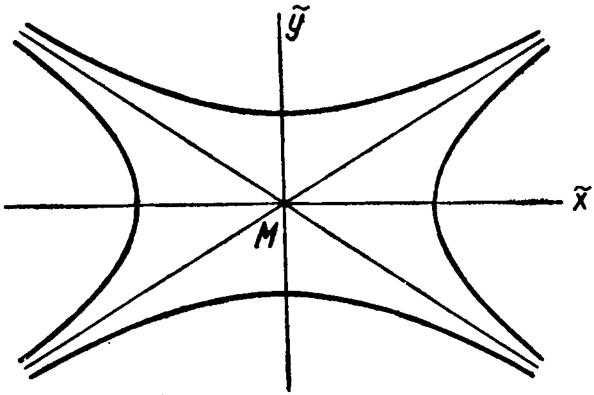


Рис. 33

представляет пару параллельных прямых. Одно из главных направлений совпадает с асимптотическим направлением (рис. 34).

## § 10. Асимптотические линии

*Асимптотической линией* на поверхности называется линия, нормальная кривизна которой в каждой ее точке равна нулю.

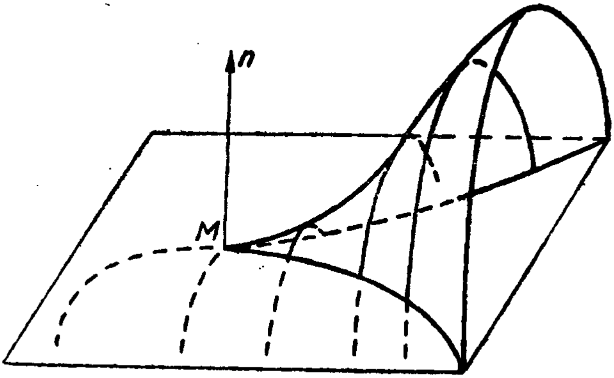


Рис. 34

По формуле (5.1 : 4) нормальная кривизна линии обращается в нуль в двух случаях: 1) когда кривизна $k=0$; в этом случае (если во всех точках линии кривизна равна нулю) линия будет прямой; 2) когда

$$\cos\vartheta = 0, \text{ т. е. } \vartheta = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Это показывает, что главная нормаль перпендикулярна к нормали поверхности и лежит в касательной плоскости, а поскольку касательная плоскость всегда содержит касательную к кривой, то касательная плоскость поверхности совпадает с соприкасающейся плоскостью асимптотической линии, а нормаль к поверхности — с ее бинормалью.

Поскольку нормальная кривизна асимптотической линии в каждой точке равна нулю, уравнение асимптотических линий поверхности получается обращением в нуль второй квадратичной формы (5.2 : 1), которая стоит в числителе нормальной кривизны (5.2 : 2)

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''dv^2 = 0. \qquad (5.10:1)$$

Дискриминант этой формы

$$DD'' - D'^2$$

стоит в числителе гауссовой кривизны (5.7 : 2) при положительном знаменателе $EG - F^2$. Следовательно, уравнение (5.10 : 1) имеет действительные корни, и асимптотические линии существуют, образуя сеть линий, только в той области поверхности, где ее кривизна отрицательна.

**Пример.** Найдем асимптотические линии геликоида. Подсчитывая коэффициенты второй квадратичной формы по формулам (5.1 : 7)

| | $\mathbf{M}$ | $\mathbf{M}_u$ | $\mathbf{M}_v$ | $\mathbf{M}_{uu}$ | $\mathbf{M}_{uv}$ | $\mathbf{M}_{vv}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $u\cos v$ | $\cos v$ | $-u\sin v$ | $0$ | $-\sin v$ | $-u\cos v$ |
| $y$ | $u\sin v$ | $\sin v$ | $u\cos v$ | $0$ | $\cos v$ | $-u\sin v$ |
| $z$ | $av$ | $0$ | $a$ | $0$ | $0$ | $0$ |

получим

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{u^2 + a^2},$$

$$D = 0, \quad D'' = 0, \quad D' = \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v & -\sin v \\ \sin v & u\cos v & \cos v \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{-a}{\sqrt{u^2 + a^2}},$$

$$\varphi_2 = -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}}\, du\, dv,$$

и уравнение асимптотических линий

$$du\, dv = 0,$$

т. е. семейство $u = \mathrm{const}$ — винтовые линии и семейство $v = \mathrm{const}$ — прямолинейные образующие.

## § 11. Сопряженные семейства линий

Рассмотрим произвольную линию $C$ на поверхности. Касательные плоскости к поверхности в точках линии $C$ образуют однопараметрическое семейство плоскостей. Если обозначить буквой $P$ текущую точку касательной плоскости к поверхности в некоторой точке $M$ линии $C$, то ее уравнение запишется

$$(\mathbf{P} - \mathbf{M})\,\mathbf{n} = 0, \qquad (5.11:1)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности в точке $M$. Если линия $C$ задана уравнением (4.1 : 3), то за параметр семейства плоскостей можно принять $\alpha=t$, т. е. параметр, определяющий положение точки $M$ на линии $C$.

Чтобы найти характеристику плоскости (5.11 : 1), достаточно продифференцировать обе части уравнения (5.11 : 1) по параметру $t$; при этом текущие координаты плоскости и, следовательно, текущий радиус-вектор $\mathbf{P}$ не дифференцируются:

$$-\frac{d\mathbf{M}}{dt}\,\mathbf{n} + (\mathbf{P} - \mathbf{M})\,\frac{d\mathbf{n}}{dt} = 0.$$

Первый член обращается в нуль в силу ортогональности вектора касательной $\frac{d\mathbf{M}}{dt}$ к нормали $\mathbf{n}$; имеем

$$(\mathbf{P} - \mathbf{M})\,\frac{d\mathbf{n}}{dt} = 0. \qquad (5.11:2)$$

Таким образом, характеристика касательной плоскости определяется уравнениями (5.11 : 1), (5.11 : 2). Первое уравнение показывает, что вектор

$$\overrightarrow{MP} = \mathbf{P} - \mathbf{M} = \lambda\,\frac{\delta\mathbf{M}}{\delta s}, \qquad (5.11:3)$$

как касательный вектор поверхности, может быть представлен производной радиуса-вектора точки поверхности, взятой вдоль касательной к характеристике $\overrightarrow{MP}$. Внося выражение (5.11 : 3) во второе уравнение характеристики (5.11 : 2) и отбрасывая множитель пропорциональности $\lambda$, получим

$$\frac{\delta\mathbf{M}}{\delta s}\,\frac{d\mathbf{n}}{dt} = 0,$$

или, опуская дифференциалы $\delta s$, $dt$ и помня, что $d$ — символ дифференцирования вдоль линии $C$ и $\delta$ — вдоль характеристики, получим

$$\delta\mathbf{M}\,d\mathbf{n} = 0;$$

внося вместо $\delta\mathbf{M}$ выражение (4.1 : 4) и аналогично для $d\mathbf{n}$, получим

$$(\mathbf{M}_u\,\delta u + \mathbf{M}_v\,\delta v)\cdot(\mathbf{n}_u\,du + \mathbf{n}_v\,dv) = 0,$$

или, пользуясь обозначениями (5.1 : 8),

$$D\,du\,\delta u + D'\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + D''\,dv\,\delta v = 0. \quad (5.11:4)$$

В уравнение (5.11 : 4) символы дифференцирования $d$ и $\delta$ входят симметрично. Следовательно, *если точку $M$ смещать в направлении $\delta\mathbf{M}$, то характеристика касательной плоскости будет иметь направление $d\mathbf{M}$.*

Два направления $d\mathbf{M}$ и $\delta\mathbf{M}$, удовлетворяющие условию (5.11 : 4), называются *сопряженными.*

Нетрудно заметить аналогию между условием ортогональности (4.2 : 5) и условием сопряженности (5.11 : 4). Повторяя рассуждения (4.2), придем к результату:

*При произвольно заданном регулярном семействе линий на поверхности*

$$\Phi(u, v) = C \quad (5.11:5)$$

*можно найти единственное второе семейство линий*

$$\Psi(u, v) = C \quad (5.11:6)$$

*так, что через всякую точку области будут проходить по одной линии каждого семейства, пересекающихся по сопряженным направлениям.*

Говорят, что такие два семейства линий (5.11 : 5 и 6) образуют *сопряженную систему линий.* Если координатные линии $u$=const и $v$=const сопряжены, то уравнение (5.11 : 4) должно удовлетворяться значениями

$$du = 0, \quad \delta v = 0.$$

Отсюда признак сопряженности координатных линий

$$D' = 0. \quad (5.11:7)$$

Рассуждения (5.4) следствия 3 (стр. 90) показывают, что при отнесении поверхности к линиям кривизны (5.4 : 1)

$$F=0, \quad D'=0.$$

Следовательно, *линии кривизны и только линии кривизны образуют систему одновременно ортогональную и сопряженную.*

Наконец, если в условии сопряженности (5.11 : 4) положить $\delta u = du$, $\delta v = dv$, то придем к уравнению асимптотических линий (5.10 : 1). Следовательно, *асимптотические линии сами себе сопряжены.*

ГЛАВА VI

# ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТИ

## § 1. Ортогональный репер, присоединенный к точкам поверхности

Так же, как к каждой точке кривой присоединяется ортонормированный трехгранник Френе, так к каждой точке поверхности можно присоединить прямоугольный трехгранник с единичными векторами осей.

Две первые оси $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$ располагаются в касательной плоскости, третья ось $\mathbf{J}_3$ совмещается с нормалью к поверхности.

Поскольку касательные к любой линии на поверхности лежат в касательной плоскости, вектор

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{M}}{ds}$$

имеет компоненты только по осям $\mathbf{J}_1$ и $\mathbf{J}_2$. Следовательно, вектор

$$d\mathbf{M} = \mathbf{M}_u\, du + \mathbf{M}_v\, dv \qquad (6.1:1)$$

можно представить в виде

$$d\mathbf{M} = \omega^1 \mathbf{J}_1 + \omega^2 \mathbf{J}_2; \qquad (6.1:2)$$

при этом компоненты $\omega^1$, $\omega^2$, очевидно, будут линейными формами дифференциалов $du$, $dv$:

$$\left.\begin{aligned} \omega^1 &= a^1\, du + b^1\, dv, \\ \omega^2 &= a^2\, du + b^2\, dv. \end{aligned}\right\} \qquad (6.1:3)$$

Точно так же дифференциалы единичных векторов осей $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$, $\mathbf{J}_3$ будут:

$$\left.\begin{aligned} d\mathbf{J}_1 &= \omega_1{}^2\mathbf{J}_2 + \omega_1{}^3\mathbf{J}_3,\\ d\mathbf{J}_2 &= \omega_2{}^1\mathbf{J}_1 + \omega_2{}^3\mathbf{J}_3,\\ d\mathbf{J}_3 &= \omega_3{}^1\mathbf{J}_1 + \omega_3{}^2\mathbf{J}_2. \end{aligned}\right\} \qquad (6.1:4)$$

Третьего компонента в правых частях нет, так как дифференциалы единичных векторов перпендикулярны к самому вектору и компонентов по этому вектору не имеют.

Следовательно,

$$\omega_1{}^1 = \omega_2{}^2 = \omega_3{}^3 = 0. \qquad (6.1:5)$$

Кроме того, базисные векторы $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$, $\mathbf{J}_3$ попарно ортогональны и единичны, например:

$$\mathbf{J}_1\mathbf{J}_2 = 0, \quad \mathbf{J}_1{}^2 = \mathbf{J}_2{}^2 = 1. \qquad (6.1:6)$$

Дифференцируя первое тождество, получим

$$\mathbf{J}_2 d\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_1 d\mathbf{J}_2 = \mathbf{J}_2(\omega_1{}^2\mathbf{J}_2 + \omega_1{}^3\mathbf{J}_3) +$$
$$+ \mathbf{J}_1(\omega_2{}^1\mathbf{J}_1 + \omega_2{}^3\mathbf{J}_3) = 0.$$

Раскрывая скобки, убедимся, что в силу соотношений (6.1 : 5, 6) останутся только квадраты векторов, и мы получим:

$$\omega_1{}^2 + \omega_2{}^1 = 0, \quad \omega_2{}^3 + \omega_3{}^2 = 0, \quad \omega_3{}^1 + \omega_1{}^3 = 0; \qquad (6.1:7)$$

последние два тождества написаны по аналогии.

Следовательно, существуют только три линейно-независимые формы с двумя индексами, для которых мы даем выражения через дифференциалы $du$, $dv$ в обозначениях Дарбу:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1{}^2 &= r\,du + r'\,dv,\\ \omega_2{}^3 &= p\,du + p'\,dv\\ \omega_3{}^1 &= q\,du + q'\,dv. \end{aligned}\right\} \qquad (6.1:8)$$

Здесь сопоставляются трем указателям 1, 2, 3 три последовательные буквы латинского алфавита $p$, $q$, $r$. Если форма, например, $\omega_1{}^2$ несет две первые цифры, то сопоставляется третья буква $r$. Коэффициенты при дифференциале $dv$ снабжаются штрихом. Переход от первой строки ко второй и третьей совершается круговой подстановкой, когда после указателя 3 снова идет указатель 1 и после буквы $r$ снова буква $p$.

Линейный элемент поверхности получается возвышением в квадрат дифференциала $d\mathbf{M}$

$$ds^2 = d\mathbf{M}^2 = (\omega^1\mathbf{J}_1 + \omega^2\mathbf{J}_2)^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2. \qquad (6.1:9)$$

В силу ортогональности репера сохранились только квадраты компонентов.

Если принять ортогональную систему координатных линий $u$, $v$ и направить векторы $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$ по касательным к линиям $v=\text{const}$ и $u=\text{const}$, то форма $\omega^1$ сохранит только дифференциал $du$, а $\omega^2$ — только дифференциал $dv$. Меняя несколько обозначения коэффициентов, будем писать:

$$\omega^1 = a\,du, \quad \omega^2 = b\,dv, \qquad (6.1:10)$$

$$ds^2 = a^2\,du^2 + b^2\,dv^2. \qquad (6.1:11)$$

## § 2. Нормальная и геодезическая кривизна линии на поверхности

Рассмотрим произвольную линию на поверхности в области ее регулярности и обозначим буквой $\alpha$ угол наклона ее касательной $\boldsymbol{\tau}$ к первой оси $\mathbf{J}_1$ (рис. 35). Тогда

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}_1\cos\alpha + \mathbf{J}_2\sin\alpha. \qquad (6.2:1)$$

Отсюда, дифференцируя по длине дуги $s$ этой кривой, получим

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{d\mathbf{J}_1}{ds}\cos\alpha + \frac{d\mathbf{J}_2}{ds}\sin\alpha + (-\mathbf{J}_1\sin\alpha + \mathbf{J}_2\cos\alpha)\frac{d\alpha}{ds},$$

или, пользуясь формулами (6.1 : 4),

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \left(\frac{\omega_1^{\ 2}}{ds}\mathbf{J}_2 + \frac{\omega_1^{\ 3}}{ds}\mathbf{J}_3\right)\cos\alpha +$$
$$+\left(\frac{\omega_2^{\ 1}}{ds}\mathbf{J}_1 + \frac{\omega_2^{\ 3}}{ds}\mathbf{J}_3\right)\sin\alpha + (-\mathbf{J}_1\sin\alpha + \mathbf{J}_2\cos\alpha)\frac{d\alpha}{ds},$$

или, выделяя члены с вектором $\mathbf{J}_3$,

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = (-\mathbf{J}_1\sin\alpha + \mathbf{J}_2\cos\alpha)\left(\frac{d\alpha}{ds} + \frac{\omega_1^{\ 2}}{ds}\right) +$$
$$+\mathbf{J}_3\frac{\omega_1^{\ 3}\cos\alpha + \omega_2^{\ 3}\sin\alpha}{ds}. \qquad (6.2:2)$$

Левую часть можно преобразовать по формулам Френе

$$\frac{d\tau}{ds} = k\nu$$

и представить в виде вектора кривизны (отрезок, отложенный на главной нормали в положительную сторону, равный кривизне кривой). В правой части мы видим два слагаемых:

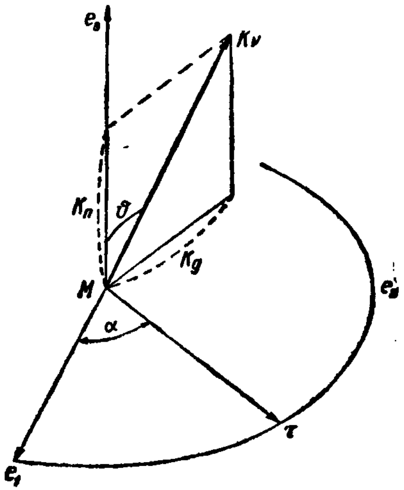


Рис. 35

а) Второе слагаемое — вектор, отложенный по нормали; следовательно, коэффициент при единичном векторе $\mathbf{J}_3$ — проекция вектора кривизны на нормаль к поверхности, т. е. *нормальная кривизна* кривой

$$k_n = \frac{\omega_1{}^3 \cos\alpha + \omega_2{}^3 \sin\alpha}{ds}.$$

По формулам Дарбу (6.1 : 8), (6.1 : 7):

$$-\omega_1{}^3 = \omega_3{}^1 = q\,du + q'\,dv,$$

$$\omega_2{}^3 = p\,du + p'dv. \quad (6.2:3)$$

С другой стороны, сравнивая формулы (6.2 : 1) и (6.1 : 2), получим:

$$\cos\alpha = \frac{\omega^1}{ds}, \quad \sin\alpha = \frac{\omega^2}{ds}. \qquad (6.2:4)$$

Следовательно,

$$k_n = \frac{\omega_1{}^3\,\omega^1 + \omega_2{}^3\,\omega^2}{ds^2} =$$

$$= \frac{D\,du^2 + 2D'\,du dv + D''\,dv^2}{ds^2}, \qquad (6.2:5)$$

или, пользуясь для $\omega^1$, $\omega^2$ выражением (6.1 : 10), а для $\omega_1{}^3$, $\omega_2{}^3$ формами Дарбу,

$$-(q du + q'dv)\,a du + (p du + p'dv)\,b dv =$$

$$= D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D'dv^2.$$

Отсюда

$$\frac{D}{a} = -q, \qquad \frac{D''}{b} = p', \qquad D' = \frac{pb - q'a}{2}. \qquad (6.2:6)$$

b) Первое слагаемое правой части (6.2:2), тоже имеет множителем единичный вектор

$$-\mathbf{J}_1 \sin\alpha + \mathbf{J}_2 \cos\alpha = \mathbf{J}_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) +$$

$$+ \mathbf{J}_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right). \qquad (6.2:7)$$

Сравнивая с вектором касательной (6.2:1), видим, что вектор (6.2:7) — тоже единичный вектор $\tau$, но повернутый в положительном направлении на $\frac{\pi}{2}$.

Коэффициент, который стоит при этом векторе, определяет проекцию вектора кривизны на касательную плоскость. Эта проекция называется *геодезической кривизной* линии и обозначается

$$k_g = \frac{d\alpha}{ds} + \frac{\omega_1^2}{ds}, \qquad (6.2:8)$$

Нетрудно заметить, что $d\alpha$ означает элементарный поворот вектора касательной относительно трехгранника, $\omega_1^2$ — поворот самого трехгранника так, что сумма их дает полный поворот касательной за время, в течение которого точка $M$ сместилась на $ds$.

Если сохранить обозначение $\vartheta$ за углом между вектором главной нормали и нормалью к поверхности, то угол между вектором главной нормали и касательной плоскостью будет $\frac{\pi}{2} - \vartheta$. Следовательно, геодезическая кривизна равна

$$k_g = k \sin\vartheta. \qquad (6.2:9)$$

**Теорема.** *Геодезическая кривизна линии на поверхности зависит только от линейного элемента поверхности и уравнения кривой относительно выбранного репера.*

Действительно, первое слагаемое $\frac{d\alpha}{ds}$ зависит от угла $\alpha$ между касательной и первой осью репера, т. е. определяется уравнением кривой и линейным элементом (выбранным репером). Покажем, что и второе слагаемое $\frac{\omega_1^2}{ds}$ определяется коэффициентами линейного элемента.

Умножая первое уравнение (6.1 : 4) на вектор $\mathbf{J}_2$, получим

$$\omega_1^2 = \mathbf{J}_2\, d\mathbf{J}_1.$$

Пользуясь для простоты ортогональной системой координатных линий и формулами (6.1 : 9), (6.1 : 10), заметим, что единичные векторы репера будут

$$\mathbf{J}_1 = \frac{1}{a}\,\mathbf{M}_u, \qquad \mathbf{J}_2 = \frac{1}{b}\,\mathbf{M}_v.$$

Следовательно,

$$\omega_1^2 = \frac{1}{b}\,\mathbf{M}_v \left\{ \mathbf{M}_u\, d\,\frac{1}{a} + \frac{1}{a}\,(\mathbf{M}_{uu}\, du + \mathbf{M}_{uv}\, dv) \right\},$$

или в силу ортогональности координатных линий

$$\mathbf{M}_u \mathbf{M}_v = 0 \qquad (6.2:10)$$

имеем

$$\omega_1^2 = \frac{1}{ab}\,\{\mathbf{M}_v \mathbf{M}_{uu}\, du + \mathbf{M}_v \mathbf{M}_{uv}\, dv\},$$

но, очевидно,

$$\mathbf{M}_v \mathbf{M}_{uv} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial u}\,(\mathbf{M}_v)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{\partial b^2}{\partial u} = b\,\frac{\partial b}{\partial u},$$

а, дифференцируя по переменному $u$ тождество (6.2 : 10), получим

$$\mathbf{M}_{uu} \mathbf{M}_v + \mathbf{M}_u \mathbf{M}_{uv} = 0,$$

значит

$$\mathbf{M}_v \mathbf{M}_{uu} = -\mathbf{M}_u \mathbf{M}_{uv} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial v}\,(\mathbf{M}_u)^2 = -a\,\frac{\partial a}{\partial v}.$$

Таким образом, имеем

$$\omega_1^2 = -\frac{1}{b}\,\frac{\partial a}{\partial v}\, du + \frac{1}{a}\,\frac{\partial b}{\partial u}\, dv, \qquad (6.2:11)$$

и геодезическая кривизна

$$k_g = \frac{d\alpha}{ds} - \frac{1}{b}\,\frac{\partial a}{\partial v}\,\frac{du}{ds} + \frac{1}{a}\,\frac{\partial b}{\partial u}\,\frac{dv}{ds}. \qquad (6.2:12)$$

Следовательно, *геодезическая кривизна линии зависит от уравнения кривой на поверхности и линейного элемента поверхности.*

**Следствие.** *При изгибании поверхности геодезическая кривизна линий на поверхности не меняется.*

## § 3. Геодезические линии

Определение. *Геодезическими* называются линии с нулевой геодезической кривизной.

**Следствие.** *Всякая прямая линия на поверхности будет геодезической.*

Действительно, кривизна прямой равна нулю $k=0$, а следовательно, по формуле (6.2 : 9) и геодезическая кривизна $k_g$ (и $k_n$) равна нулю.

Из этой же формулы следует, что, кроме прямой, геодезическими могут быть только те линии, у которых

$$\sin\vartheta = 0, \text{ т. е. } \vartheta = 0 \text{ или } \pi.$$

В обоих случаях (0 или $\pi$) главная нормаль с точностью до положительного направления совпадает с нормалью к поверхности и соприкасающаяся плоскость проходит через нормаль к поверхности. Отсюда

**Теорема.** *Соприкасающаяся плоскость геодезической линии проходит через нормаль к поверхности или неопределенна* (случай прямой линии). Обратно, *если соприкасающаяся плоскость проходит через нормаль к поверхности, то линия — геодезическая.*

**Уравнения геодезической линии.** Чтобы определить на поверхности геодезическую линию, надо к уравнению $k_g=0$, например, в форме (6.2 : 12), добавить выражения для $\frac{du}{ds}$, $\frac{dv}{ds}$, исключая $\omega^1$, $\omega^2$ из уравнений (6.2 : 4), (6.1 : 10)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\alpha}{\partial s} &= \frac{1}{b}\frac{\partial a}{\partial v}\frac{du}{ds} - \frac{1}{a}\frac{\partial b}{\partial u}\frac{dv}{ds}, \\ \frac{du}{ds} &= \frac{1}{a}\cos\alpha, \\ \frac{dv}{ds} &= \frac{1}{b}\sin\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (6.3:1)$$

или, подставляя в первое уравнение значения $\frac{du}{ds}$, $\frac{dv}{ds}$ из второго и третьего,

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varkappa}{ds} &= \frac{1}{ab}\frac{\partial a}{\partial v}\cos\alpha - \frac{1}{ab}\frac{\partial b}{\partial u}\sin\alpha, \\ \frac{du}{ds} &= \frac{1}{a}\cos\alpha, \quad \frac{dv}{ds} = \frac{1}{b}\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (6.3:2)$$

Если линейный элемент поверхности задан и, следовательно, функции $a$, $b$ (коэффициенты линейного элемента) известны, то для определения $\alpha$, $u$, $v$ надо проинтегрировать систему обыкновенных дифференциальных уравнений (6.3:2). Это система Коши, разрешенная относительно производных трех неизвестных функций $u$, $v$, $\alpha$ по независимому переменному $s$.

Для системы Коши, если правые части — регулярные функции переменных $u$, $v$, $\alpha$, имеет место теорема существования решения. Система Коши допускает решение и только одно, удовлетворяющее системе (6.3:2) и начальным условиям: неизвестные функции принимают значения

$$u = u_0, \quad v = v_0, \quad \alpha = \alpha_0 \quad \text{для } s = s_0, \qquad (6.3:3)$$

если правые части системы (6.3:2) регулярны в окрестности точки $(u_0, v_0, \alpha_0, s_0)$.

Начальные значения (6.3:3) допускают геометрическое истолкование.

**Теорема.** *Через всякую точку поверхности $M_0(u_0, v_0)$ в области ее регулярности под произвольным углом $\alpha_0$ наклона касательной к первой оси репера проходит одна и только одна геодезическая линия.*

Эту теорему можно сопоставить с теоремой на плоскости: через всякую точку $M_0(x_0, y_0)$ по всякому направлению (под произвольным углом наклона к оси $x$) проходит одна прямая. Заметим, что второе предложение планиметрии: через каждые две точки плоскости проходит одна и только одна прямая — уже не всегда удовлетворяется для геодезических на поверхности.

Если взять сферу, то легко заметить, что геодезическими будут плоские сечения сферы плоскостями, проходящими через центр сферы $C$ (окружности большого круга). Действительно, нормаль к сфере совпадает с продолженным радиусом; следовательно, плоскость окружности большого круга всегда (во всех своих точках) проходит через нормаль к сфере.

Для двух точек $A$ и $B$, если они не лежат в концах одного диаметра, можно провести одну плоскость $ABC$, где $C$ — центр сферы. Она определит одну замкнутую геодезическую (окружность большого круга) и две дуги $\smile AB$ и $\smile AA'B$, где $A'$ — точка, диаметрально противоположная точке $A$.

Если $A$ и $B$ — диаметрально противоположные точки сферы, то центр $C$ лежит на прямой $AB$, и мы имеем пучок плоскостей, каждая из которых сечет сферу по окружности большого круга, проходящего через точки $A$ и $B$. Имеем однопараметрическое семейство геодезических одной длины, соединяющих точки $A$ и $B$.

## § 4. Геодезическая линия как кратчайшее расстояние между двумя точками поверхности

Обратимся теперь к условиям, при выполнении которых дуга $AB$ геодезической осуществляет кратчайшее расстояние между точками $A$ и $B$ по сравнению с другими линиями, проходящими на поверхности между этими точками.

Проведем из точки $A$ по всем направлениям пучок геодезических линий с общей точкой $A$. К этому семейству линий проведем семейство ортогональных траекторий. Мы получим правильную ортогональную сеть линий, за исключением самой точки $A$, через которую проходят все геодезические пучка $A$. Чтобы исключить особую точку $A$, можно ограничить двумя геодезическими линиями по обе стороны от геодезической $AB$ и двумя ортогональными траекториями, из которых одну проведем через точку $B$, а другую сколь угодно близко от точки $A$, но так, чтобы точка $A$ осталась вне рассматриваемой области.

Будем предполагать, что в рассматриваемой области геодезические не пересекают друг друга, в частности, не пересекают геодезическую $AB$. Примем эту сеть линий за координатную сеть; пусть линейный элемент будет

$$ds^2 = a^2du^2 + b^2dv^2. \tag{6.4:1}$$

Будем предполагать, что линии $v=\text{const}$ будут геодезическими нашего семейства и линия $v=0$ — геодезическая $AB$. Выразим условие, что линии $v=\text{const}$ геодезические; поскольку вектор касательной совпадает с единичным вектором $\mathbf{J}_1$, угол $\alpha$ равен нулю; первое уравнение (6.3:2) дает

$$\frac{\partial a}{\partial v} = 0, \quad a = \varphi(u),$$

и линейный элемент принимает вид

$$ds^2 = [\varphi(u)\,du]^2 + b^2dv^2.$$

Если ввести вместо $u$ новый параметр $\sigma$ посредством формулы

$$\sigma = \int\limits_{u_0}^{u} \varphi(u)\,du,$$

полагая $\sigma$ равным нулю для $u=u_0$, т. е. для значения, соответствующего точке $A$, то линейный элемент примет вид

$$ds^2 = d\sigma^2 + b^2dv^2. \qquad (6.4:2)$$

Следовательно, $\sigma$ — длина дуги геодезической семейства, отсчитываемой от точки $A$.

Покажем, что геодезическая $AB$ короче всякой линии, проходящей внутри выделенной области, соединяющей точки $A$ и $B$.

Кривую сравнения можно выбрать так, чтобы она пересекала каждую линию $u=\text{const}$, т. е. $\sigma=\text{const}$, только в одной точке. Если бы она пересекала в двух точках, то можно было бы ее спрямить, отбрасывая петли или заменяя отрезком линии $u=\text{const}$.

Таким образом, кривую сравнения можно определить, полагая

$$v = \psi(\sigma), \qquad (6.4:3)$$

где $\psi(\sigma)$ — однозначная, кусочно непрерывная функция класса $C^1$. Длина дуги между точками $A$ и $B$ для кривой сравнения определяется, если внести выражение (6.4 : 3) в линейный элемент (6.4 : 2); мы получим

$$ds^2 = d\sigma^2 + b^2\psi'^2(\sigma)\,d\sigma^2,$$

откуда

$$ds = \sqrt{1 + b^2\psi'^2(\sigma)}\,d\sigma,$$

и длина кривой сравнения между точками $A_*$ и $B$ будет

$$\sum\nolimits_{v=\psi(\sigma)} = \int\limits_{\sigma=\varepsilon}^{\sigma=\sigma_1} \sqrt{1+b^2\psi'^2(\sigma)}\,d\sigma, \qquad (6.4:4)$$

где $\varepsilon$ — значение параметра $\sigma$ в точке $A_*$ пересечения кривой сравнения с ортогональной траекторией геодезических

$v=\text{const}$, проведенной сколь угодно близко от точки $A$; $\sigma_1$ — значение параметра $\sigma$ в точке $B$. Для всех линий $A_\varepsilon B$ пределы интеграла (6.4 : 4) — одни и те же; следовательно, наименьшее значение интеграла получится при наименьшем значении подынтегральной функции. Оба слагаемых под знаком корня в подынтегральной функции положительны; первое слагаемое остается постоянным; значит, наименьшее значение интеграла получится при наименьшем значении второго слагаемого. Поскольку оно не отрицательно, наименьшее значение будет нулем. Это заключение не изменится, если мы будем стремить $\varepsilon \to 0$.

Значит, рассматривая длину всей линии (6.4 : 3) от точки $A$ до точки $B$, мы найдем наименьшей длины линию (6.4 : 3), удовлетворяющую равенству

$$b\psi'(\sigma) = 0,$$

или в силу $b \neq 0$

$$\psi'(\sigma) = 0, \text{ т. е. } \psi(\sigma) = c,$$

где $c$ — постоянное. Чтобы линия проходила через точки $A$ и $B$, надо выбрать произвольное постоянное нулем

$$c = 0, \text{ т. е. } v = 0,$$

и мы приходим к геодезической $AB$. Теорема доказана.

Следует обратить внимание на те оговорки, при которых теорема доказана:

a) Кривые сравнения протекали в достаточно малой окрестности выбранной геодезической.

b) Точка $B$ расположена на геодезической не слишком далеко от точки $A$ так, чтобы геодезические, выходящие из точки $A$, не пересекали дугу $AB$.

Необходимость первого условия подтверждается примером винтовой линии на круглом цилиндре. Если развернуть цилиндр на плоскость (рис. 36), то винтовая линия $ACB$ обратится в прямую, которая дает кратчайшее расстояние, однако на цилиндре отрезок образующей цилиндра $AB$, конечно, короче винтовой линии $ACB$.

Необходимость второго ограничения показывает пример сферы, где дуга окружности большого круга (геодезической) дает кратчайшее расстояние только до тех пор, пока эта дуга меньше полуокружности.

Вообще семейство геодезических, выходящих из точки $A$, имеет огибающую. Если геодезическая $AB$ первый раз касается огибающей в точке $A^*$, то $A^*$ называется точкой, со-

*пряженной* точке $A$. Геодезическая $AB$ может определять кратчайшее расстояние между точками $A$ и $B$ только в том случае, если на дуге $AB$ нет точки $A^*$, сопряженной точке $A$.

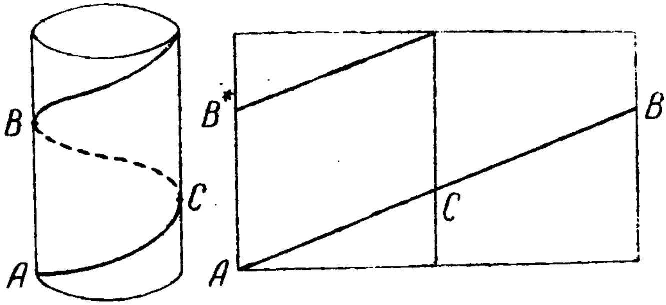


Рис. 36

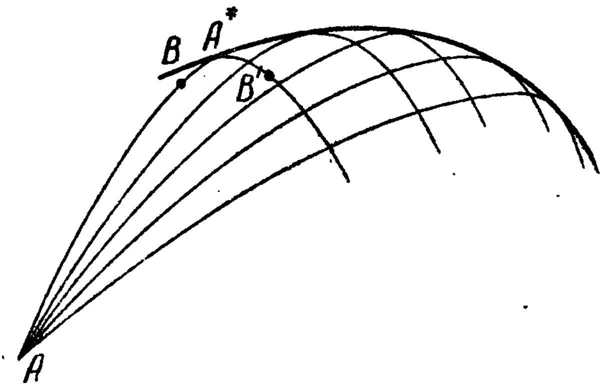


Рис. 37

На чертеже (рис. 37) дуга $AB$ дает кратчайшее расстояние, дуга $AA^*B'$ не дает его, потому что на ней лежит точка $A^*$, сопряженная точке $A$.

## § 5. Развертывание линии на плоскость

Как известно, геодезическая кривизна и, в частности, геодезические линии зависят только от линейного элемента поверхности и при изгибании поверхности не меняются. Таким образом, если на поверхности построен треугольник из геодезических линий, то при изгибании поверхности он сохраняет все свои «внутренние» свойства. Если поверхность наложена на плоскость, то геодезические станут прямыми и сумма углов треугольника останется равной $\pi$. Однако не все поверхности налагаются на плоскость. Мы увидим, что на плоскость налагаются только развертывающиеся поверхности. Тем не менее мы можем развернуть на плоскость линию и обнаружить, что после развертывания на плоскость геодезическая станет прямой и вообще всякая линия сохранит только геодезическую кривизну.

Рассмотрим произвольную поверхность $S$ и на ней линию $L$ с геодезической кривизной $k_g$ и нормальной $k_n$. Рассмотрим многообразие касательных плоскостей в точках линии $L$. Огибающая этого однопараметрического семейства плоскостей образована характеристиками, которые, как мы видели (5.10), проходят через точки касания этих плоскостей и представляют собой многообразие касательных к поверхности, сопряженных в каждой точке касательным к линии $L$.

Развертывающаяся поверхность $D$, образованная этими характеристиками, в каждой точке линии $L$ имеет ту же самую касательную плоскость, что и поверхность $S$, стало быть ту же самую нормаль. Линия $L$ принадлежит и той и другой поверхности: и поверхности $S$ и развертывающейся поверхности $D$. Нормальная $k_n$ и геодезическая $k_g$ кривизна линии $L$ на поверхности $S$ и на поверхности $D$ будут совпадать. Но поверхность $D$ мы можем развернуть на плоскость. При этом главная нормаль и вектор кривизны будут лежать в этой плоскости, а нормалью будет служить перпендикуляр к плоскости; проекция вектора кривизны на этот перпендикуляр будет равна нулю. Значит после изгибания нормальная кривизна линии $L$ будет равна нулю, а геодезическая кривизна останется без изменения

$$\tilde{k}_n = 0, \quad \tilde{k}_g = k_g$$

и будет совпадать с кривизной той плоской линии $\tilde{L}$, в которую после изгибания обратится произвольная пространственная линия $L$.

Это построение принадлежит почетному академику АН СССР Леви-Чивита и дает наглядное представление внутренней геометрии произвольной линии на поверхности.

## ГЛАВА VII

# ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

## § 1. Внешнее дифференцирование линейных форм

Теперь мы возвращаемся к уравнениям (6.1 : 1), (6.1 : 2), (6.1 : 4), которые определяют движения ортонормированного трехгранника, чтобы исследовать совместность этих уравнений для неизвестных функций $\mathbf{M}$, $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$, $\mathbf{J}_3$ при заданных формах $\omega^i$, $\omega_i^j$ $(i,\ j=1,\ 2\ ,3)$.

Для этого нам придется рассматривать различные смещения (смещения по различным направлениям)

$$d\mathbf{M},\quad d\mathbf{J}_i\quad (i=1,\ 2,\ 3).$$

Будем обозначать различными символами дифференцирование по различным линиям, как это мы, например, делали при определении косинуса угла пересечения двух линий на поверхности (4.2 : 3) или (5.11 : 4).

Например, можно обозначить

$$d=\frac{\partial}{\partial u},\quad \delta=\frac{\partial}{\partial v}, \qquad (7.1:1)$$

следовательно,

$$d\mathbf{M}=\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial u},\quad \delta\mathbf{M}=\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial v}. \qquad (7.1:2)$$

Поскольку дифференциал независимого переменного — произвольное приращение этого переменного, мы нередко будем полагать $du=1$, $\delta v=1$.

Рассмотрим уравнение (6.1 : 2) для двух символов дифференцирования (которые не обязательно совпадают со значениями (7.1 : 1)):

$$\begin{array}{r|l} -\delta & dM = \omega^1(d)\,\mathbf{J}_1 + \omega^2(d)\,\mathbf{J}_2, \\ +d & \delta M = \omega^1(\delta)\,\mathbf{J}_1 + \omega^2(\delta)\,\mathbf{J}_2. \end{array}$$

Дифференцируя первое уравнение с символом дифференцирования $\delta$, а второе — с символом $d$ и вычитая из нижнего верхнее, получим:

$$d\delta\mathbf{M} - \delta d\mathbf{M} = \{ d\omega^1(\delta) - \delta\omega^1(d) \}\,\mathbf{J}_1 + d\mathbf{J}_1\,\omega^1(\delta) - \delta\mathbf{J}_1\,\omega^1(d) +$$
$$+ \{d\omega^2(\delta) - \delta\omega^2(d)\}\,\mathbf{J}_2 + d\mathbf{J}_2\omega^2(\delta) - \delta\mathbf{J}_2\omega^2(d). \quad (7.1:3)$$

Если принять для символов дифференцирования значения (7.1 : 1), то

$$d(\delta\mathbf{M}) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2\mathbf{M}}{\partial u\partial v},$$

$$\delta(d\mathbf{M}) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2\mathbf{M}}{\partial u\partial v}.$$

Поскольку при дифференцировании функций по любым переменным $\alpha$, $\beta$ результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования при любых значениях $d$ и $\delta$, будем считать

$$d(\delta\mathbf{M}) = \delta(d\mathbf{M})$$

и, следовательно, в левой части равенства (7.1 : 3) будет нуль.

Согласно первому уравнению (6.1 : 4) имеем:

$$d\mathbf{J}_1 = \omega_1{}^2(d)\,\mathbf{J}_2 + \omega_1{}^3(d)\,\mathbf{J}_3,$$

$$\delta\mathbf{J}_1 = \omega_1{}^2(\delta)\,\mathbf{J}_2 + \omega_1{}^3(\delta)\,\mathbf{J}_3$$

и аналогично для $d\mathbf{J}_2$, $\delta\mathbf{J}_2$.

Внося эти значения в правую часть равенства (7.1 : 3) и собирая члены с одинаковыми векторами $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$, $\mathbf{J}_3$, получим:

$$\mathbf{J}_1\left\{d\omega^1(\delta) - \delta\omega^1(d) + \left(\omega_2{}^1(d)\,\omega^2(\delta) - \omega_2{}^1(\delta)\,\omega^2(d)\right)\right\} +$$

$$+ \mathbf{J}_2\left\{d\omega^2(\delta) - \delta\omega^2(d) + \left(\omega_1{}^2(d)\,\omega^1(\delta) - \omega_1{}^2(\delta)\,\omega^1(d)\right)\right\} +$$

$$+ \mathbf{J}_3\left\{\left(\omega_1{}^3(d)\,\omega^1(\delta) - \omega_1{}^3(\delta)\,\omega^1(d)\right) + \left(\omega_2{}^3(d)\omega^2(\delta) - \omega_2{}^3(\delta)\omega^2(d)\right)\right\} = 0$$
$$(7.1:4)$$

Здесь векторы $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$, $\mathbf{J}_3$ линейно независимы (взаимно перпендикулярны), следовательно, равенство (7.1 : 4) может быть удовлетворено только обращением в нуль коэффициентов (фигурных скобок)

$$d\omega^1(\delta) - \delta\omega^1(d) + \left[\omega_2{}^1(d)\,\omega^2(\delta) - \omega_2{}^1(\delta)\,\omega^2(d)\right] = 0 \quad (7.1:5)$$

и т. д.

## § 2. Внешнее произведение линейных форм

А. Нетрудно заметить, что выражение, стоящее в квадратных скобках (7.1 : 5), представляет определитель

$$\omega_2{}^1(d)\,\omega^2(\delta) - \omega_2{}^1(\delta)\,\omega^2(d) = \begin{vmatrix} \omega_2{}^1(d) & \omega^2(d) \\ \omega_2{}^1(\delta) & \omega^2(\delta) \end{vmatrix};$$

в каждой строке определителя стоят одни и те же формы $\omega_2^1$, $\omega^2$ с разными символами дифференцирования: в первой строке символ $d$, во второй—$\delta$. Такие определители мы будем обозначать символом

$$[\omega_2{}^1\omega^2] = \begin{vmatrix} \omega_2{}^1(d) & \omega^2(d) \\ \omega_2{}^1(\delta) & \omega^2(\delta) \end{vmatrix} \quad (7.2:1)$$

и называть *внешним произведением* форм $\omega_2{}^1$ и $\omega^2$.

Внешние произведения подчиняются следующим правилам:

1. *Внешнее произведение меняет знак при перестановке множителей:*

$$[\omega_2{}^1\omega^2] = -[\omega^2\,\omega_2{}^1], \quad (7.2:2)$$

ибо определитель в правой части равенства (7.2 : 1) меняет знак при перестановке двух столбцов.

**Следствие.** *Внешнее произведение с двумя равными (или пропорциональными) множителями равно нулю.*

2. *Функциональный множитель выходит за скобку внешнего произведения:*

$$[\varphi\omega_2{}^1\omega^2] = \varphi\,[\omega_2{}^1\omega^2], \quad (7.2:3)$$

ибо в определителе в правой части равенства (7.2 : 1) общий множитель элементов одного столбца выходит за знак определителя.

3. *Внешнее произведение подчиняется правилу дистрибутивности:*

$$[\omega_1{}^2 + \omega_1{}^3, \quad \omega^1] = [\omega_1{}^2\omega^1] + [\omega_1{}^3\omega^1], \quad (7.2:4)$$

ибо этому правилу подчиняются определители

$$\begin{vmatrix} \omega_1^{\ 2}(d)+\omega_1^{\ 3}(d), & \omega^1(d) \\ \omega_1^{\ 2}(\delta)+\omega_1^{\ 3}(\delta), & \omega^1(\delta) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \omega_1^{\ 2}(d) & \omega^1(d) \\ \omega_1^{\ 2}(\delta) & \omega^1(\delta) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \omega_1^{\ 3}(d) & \omega^1(d) \\ \omega_1^{\ 3}(\delta) & \omega^1(\delta) \end{vmatrix}.$$

**В.** Первые два члена в левой части равенства (7.1 : 5)

$$d\omega^1(\delta) - \delta\omega^1(d)$$

представляют собой билинейную форму, т. е. линейную относительно форм с символом дифференцирования $d$ и с символом дифференцирования $\delta$.

Действительно, допустим, что форма $\omega^1$ имеет вид (6.1 : 3). Тогда

$$\omega^1(d) = a^1du + b^1dv,$$

$$\omega^1(\delta) = a^1\delta u + b^1\delta v.$$

Отсюда

$$d\omega^1(\delta) = da^1\delta u + db^1\delta v + a^1d\delta u + b^1d\delta v,$$

$$\delta\omega^1(d) = \delta a^1du + \delta b^1dv + a^1\delta du + b^1\delta dv.$$

При вычитании последние два члена сократятся, ибо при дифференцировании функций результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования, и мы получаем

$$d\omega^1(\delta) - \delta\omega^1(d) = \begin{vmatrix} da^1 & du \\ \delta a^1 & \delta u \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} db^1 & dv \\ \delta b^1 & \delta v \end{vmatrix}. \qquad (7.2:5)$$

Выражение, стоящее в левой части, называется внешним дифференциалом формы $\omega^1$ и обозначается

$$\mathrm{D}\omega^1 = d\omega^1(\delta) - \delta\omega^1(d). \qquad (7.2:6)$$

Выражение в правой части (7.2 : 5) называется *значением внешнего дифференциала.*

Пользуясь для внешнего произведения обозначением (7.2 : 1), получим

$$\mathrm{D}\omega^1 = [da^1du] + [db^1dv].$$

Отсюда правило внешнего дифференцирования:

$$\mathrm{D}\omega^1 = \mathrm{D}(a^1du + b^1dv) = [da^1du] + [db^1dv]. \qquad (7.2:7)$$

Теперь мы можем переписать уравнение (7.1 : 4) в виде

$$\mathbf{J}_1 (D\omega^1 + [\omega_2{}^1\omega^2]) + \mathbf{J}_2 (D\omega^2 + [\omega_1{}^2\omega^1]) + \mathbf{J}_3 ([\omega_1{}^3\omega^1] + [\omega_2{}^3\omega^2]) = \mathbf{0},$$

откуда в силу линейной независимости векторов $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$, $\mathbf{J}_3$, имеем:

$$D\omega^1 + [\omega_2{}^1\omega^2] = 0,$$
$$D\omega^2 + [\omega_1{}^2\omega^1] = 0,$$
$$[\omega_1{}^3\omega^1] + [\omega_2{}^3\omega^2] = 0.$$

В двух первых уравнениях перенесем второй член в правую часть с обратным знаком и одновременно переставим множители с изменением знака; в третьем уравнении переставим в каждом произведении множители с изменением знака и одновременно у обоих членов изменим знак. Получим:

$$\left.\begin{aligned} D\omega^1 &= [\omega^2\omega_2{}^1], \\ D\omega^2 &= [\omega^1\omega_1{}^2], \\ [\omega^1\omega_1{}^3] + [\omega^2\omega_2{}^3] &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7.2:8)$$

Теперь нам надо дифференцировать внешним образом уравнения (6.1 : 4). Будет целесообразно предварительно формулировать правила внешнего дифференцирования.

## § 3. Правила внешнего дифференцирования

1. *Внешний дифференциал от полного дифференциала равен нулю:*

$$D(d\mathbf{M}) = d(\delta\mathbf{M}) - \delta(d\mathbf{M}) = 0. \qquad (7.3:1)$$

2. *Внешний дифференциал от суммы форм равен сумме внешних дифференциалов от слагаемых:*

$$D(\omega^1 + \omega^2) = D\omega^1 + D\omega^2. \qquad (7.3:2)$$

Действительно,

$$D(\omega^1 + \omega^2) = d\omega^1(\delta) + d\omega^2(\delta) - \delta\omega^1(d) - \delta\omega^2(d) =$$
$$= \{d\omega^1(\delta) - \delta\omega^1(d)\} + \{d\omega^2(\delta) - \delta\omega^2(d)\} = D\omega^1 + D\omega^2$$

## § 4. Уравнения структуры

Дифференцируя внешним образом основные деривационные уравнения:

$$d\mathbf{M} = \mathbf{J}_1\omega^1 + \mathbf{J}_2\omega^2, \quad \omega^3 = 0, \tag{7.4 : 1}$$

$$\left.\begin{aligned} d\mathbf{J}_1 &= \omega_1{}^2\mathbf{J}_2 + \omega_1{}^3\mathbf{J}_3, \\ d\mathbf{J}_2 &= \omega_2{}^1\mathbf{J}_1 + \omega_2{}^3\mathbf{J}_3, \\ d\mathbf{J}_3 &= \omega_3{}^1\mathbf{J}_1 + \omega_3{}^2\mathbf{J}_2, \end{aligned}\right\} \tag{7.4 : 2}$$

мы получили уравнения структуры:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{D}\omega^1 &= [\omega^2\omega_2{}^1], \\ \mathrm{D}\omega^2 &= [\omega^1\omega_1{}^2], \\ [\omega^1\omega_1{}^3] + [\omega^2\omega_2{}^3] &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{7.4 : 3}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{D}\omega_1{}^2 &= [\omega_1{}^3\omega_3{}^2], \\ \mathrm{D}\omega_2{}^3 &= [\omega_2{}^1\omega_1{}^3], \\ \mathrm{D}\omega_3{}^1 &= [\omega_3{}^2\omega_2{}^1]. \end{aligned}\right\} \tag{7.4 : 4}$$

Это *основные уравнения в теории поверхностей.* Мы увидим далее, что они не только необходимы, но и достаточны для существования поверхности.

## § 5. Формулы Дарбу

Мы уже писали формы $\omega_i{}^j$ в обозначениях Дарбу (6.1 : 8). Внося их в первое уравнение (7.4 : 4), получим

$$[drdu] + [dr'dv] = [qdu + q'dv,\ pdu + p'dv],$$

или

$$\frac{\partial r}{\partial v}\,[dvdu] + \frac{\partial r'}{\partial u}[dudv = (qp' - q'p)\,[dudv],$$

или сокращая на $[du\,dv]$ и меняя знаки:

$$\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r'}{\partial u} = pq' - p'q \tag{7.5 : 1}$$

и далее круговой заменой $(p, q, r)$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial v}-\frac{\partial p'}{\partial u}&=qr'-q'r,\\ \frac{\partial q}{\partial v}-\frac{\partial q'}{\partial u}&=rp'-r'p.\end{aligned}\right\} \tag{7.5 : 2}$$

Два первых уравнения (7.4 : 3) приводят к уравнению [ср. (6.2 : 11)]

$$\omega_1^2=-\frac{1}{b}\frac{\partial a}{\partial v}du+\frac{1}{a}\frac{\partial b}{\partial u}dv, \tag{7.5 : 3}$$

откуда, сравнивая с первым уравнением (6.1 : 8), имеем:

$$r=-\frac{1}{b}\frac{\partial a}{\partial v}, \quad r'=\frac{1}{a}\frac{\partial b}{\partial u}. \tag{7.5 : 4}$$

Наконец, третье уравнение (7.4 : 3) дает

$$-aq'[dudv]-bp[dudv]=0,$$

или

$$bp=-aq'. \tag{7.5 : 5}$$

Если исходить из двух квадратичных форм поверхности

$$ds^2=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2=a^2du^2+b^2dv^2, \tag{7.5 : 6}$$

$$\mathbf{n}\frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2}=-\frac{d\mathbf{n}}{ds}\frac{d\mathbf{M}}{ds}=\frac{Ddu^2+2D'dudv+D''dv^2}{ds^2}, \tag{7.5 : 7}$$

или в силу

$$-\frac{d\mathbf{n}}{ds}=-\frac{d\mathbf{J}_3}{ds}=\frac{\omega_1{}^3\mathbf{J}_1+\omega_2{}^3\mathbf{J}_2}{ds}, \quad \frac{d\mathbf{M}}{ds}=\frac{\omega^1\mathbf{J}_1+\omega^2\mathbf{J}_2}{ds}$$

и

$$-\frac{d\mathbf{n}}{ds}\frac{d\mathbf{M}}{ds}=\frac{\omega^1\omega_1{}^3+\omega^2\omega_2{}^3}{ds^2}=\frac{Ddu^2+2D'dudv+D''dv^2}{ds^2},$$

или

$$\frac{-adu\,(qdu+q'dv)+bdv(pdu+p'dv)}{ds^2}=\frac{Ddu^2+2D'dudv+D''dv^2}{ds^2}.$$

Отсюда в силу (7.5 : 5) имеем:

$$D=-aq, \quad D''=bp', \quad D'=bp=-aq'. \tag{7.5 : 8}$$

Таким образом, знание двух квадратичных форм поверхности позволяет вычислить значение всех форм $\omega^i$, $\omega_i^j$. Действительно, величины $a$, $b$ — коэффициенты первой квадратичной формы. Уравнение (7.5 : 4) позволяет вычислить коэффициенты $r$, $r'$, т. е. форму $\omega_1^2$, а уравнения (7.5 : 8) определяют через коэффициенты второй квадратичной формы последние компоненты вращения $p$, $p'$, $q$, $q'$.

## § 6. Уравнения Петерсона—Кодацци

Если с помощью уравнений (7.5 : 4), (7.5 : 8) исключить $p$, $q$, $r$, $p'$, $q'$, $r'$ в уравнениях (7.5 : 1), (7.5 : 2), то получим непосредственно уравнения, налагающие условия на коэффициенты первой и второй квадратичных форм.

Уравнения (7.5 : 2) принимают вид уравнений Кодацци*:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'}{b}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{b}\right) &= -\frac{1}{a}\frac{\partial b}{\partial u}\frac{D}{a} - \frac{1}{b}\frac{\partial a}{\partial v}\frac{D'}{a}, \\ -\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D}{a}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D'}{a}\right) &= -\frac{1}{b}\frac{\partial a}{\partial v}\frac{D''}{b} - \frac{1}{a}\frac{\partial b}{\partial u}\frac{D'}{b}. \end{aligned}\right\} \quad (7.6:1)$$

Уравнение (7.5 : 1) дает уравнение Гаусса

$$\frac{DD'' - D'^2}{ab} = -\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{b}\frac{\partial a}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial b}{\partial u}\right). \quad (7.6:2)$$

Это основные единственные уравнения, связывающие коэффициенты линейного элемента и второй квадратичной формы поверхности.

## § 7. Теорема Гаусса о полной кривизне поверхности

Если обе части уравнения (7.6 : 2) разделить на произведение $ab$ и воспользоваться формулой (5.7 : 2) для полной кривизны поверхности, то получим

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{ab}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial b}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{b}\frac{\partial a}{\partial v}\right)\right\}, \quad (7.7:1)$$

откуда прямо следует знаменитая теорема Гаусса.

---

* Уравнения Петерсона—Кодацци были получены К. М. Петерсоном в 1953 г. вместе с полным доказательством теоремы существования поверхности, определяемой двумя квадратичными формами. Кодацци независимо опубликовал уравнения (7.6 : 1) в 1956 г. Теорему существования поверхности опубликовал Бонне в 1867 г.

**Теорема.** *Полная* (гауссова) *кривизна поверхности зависит только от коэффициентов* (и их производных первого и второго порядка) *линейного элемента поверхности, а потому не меняется при изгибании поверхности.*

**Следствие 1.** *На плоскость налагаются только развертывающиеся поверхности, конусы и цилиндры.*

Действительно, гауссова кривизна плоскости равна нулю

$$K = 0.$$

Следовательно, у поверхностей, налагающихся на плоскость, кривизна тоже равна нулю и все точки — параболические:

$$DD'' - D'^2 = 0. \qquad (7.7:2)$$

Имеется только одно (сдвоенное) семейство асимптотических линий. Примем за линии $v = \text{const}$ (линии $u$) асимптотические линии поверхности. Уравнение (5.10 : 1) покажет, что в этом случае

$$D = 0, \quad D' = 0. \qquad (7.7:3)$$

Второе уравнение (7.7 : 3) вытекает из уравнения (7.7 : 2). Формулы (5.1 : 8) позволяют переписать систему (7.7 : 3) в виде

$$\mathbf{n}_u \mathbf{M}_u = 0, \quad \mathbf{n}_u \mathbf{M}_v = 0, \quad \mathbf{n}_u \mathbf{n} = 0. \qquad (7.7:4)$$

Последнее уравнение следует из леммы 1 (2.2).

Поскольку проекции вектора $\mathbf{n}_u$ на три некомпланарные направления $\mathbf{M}_u$, $\mathbf{M}_v$, $\mathbf{n}$ равны нулю, то

$$\mathbf{n}_u = 0 \text{ и } \mathbf{n} = \Phi(v) \qquad (7.7:5)$$

и в уравнении касательной плоскости

$$(\mathbf{P} - \mathbf{M})\,\mathbf{n} = 0$$

не только коэффициенты при текущих координатах вектора $\mathbf{P}$ будут функциями одного параметра $v$, но и свободный член

$$h = \mathbf{M}\mathbf{n}$$

не зависит от $u$. Действительно,

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \mathbf{M}_u \mathbf{n} + \mathbf{M}\mathbf{n}_u = 0.$$

Здесь первый член правой части равен нулю в силу ортогональности касательной $\mathbf{M}_u$ и нормали $\mathbf{n}$, а второй обращается в нуль в силу (7.7 : 5).

Таким образом, касательные плоскости поверхности (7.7:3) образуют однопараметрическое семейство плоскостей, и огибающая этого семейства, т. е. поверхность (7.7 : 2), **может** быть только развертывающейся, конусом или цилиндром.

## § 8. Наложимость поверхностей одной и той же постоянной кривизны

**Следствие 2.** *Каждая поверхность постоянной гауссовой кривизны налагается на любую другую поверхность той же самой постоянной кривизны так, что произвольная точка и направление в этой точке совмещается с любой точкой и направлением в точке другой* (или той же самой) *поверхности.*

Рассмотрим произвольную поверхность постоянной гауссовой кривизны $K=\text{const}$. Отнесем ее к полярно-геодезической системе координатных линий. Берем произвольную точку $O$ и произвольное направление, определяемое единичным вектором **e**, выходящим из точки $O$ и лежащим в касательной плоскости поверхности в этой точке. Из точки $O$ проводим пучок геодезических линий и дополняем семейством ортогональных траекторий. Если за параметр $u$ взять длину геодезической с началом в точке $O$, то линейный элемент поверхности примет вид

$$ds^2 = du^2 + b^2 dv^2. \tag{7.8 : 1}$$

Будем предполагать, кроме того, что параметр $v$ равен углу наклона касательной к геодезической $v=\text{const}$ в точке $O$ к выбранному вектору **e**. Для линейного элемента (7.8 : 1) уравнение Гаусса (7.7 : 1) примет вид

$$K = -\frac{1}{b}\frac{\partial^2 b}{\partial u^2}, \text{ или } \frac{\partial^2 b}{\partial u^2} + bK = 0. \tag{7.8 : 2}$$

Это уравнение интегрируется в квадратурах. Умножая обе части уравнения на $b_u = \dfrac{\partial b}{\partial u}$ и рассматривая параметр $u$ как одно независимое переменное, получим

$$b_u \frac{db_u}{du} + Kb\frac{db}{du} = 0$$

и после интеграции

$$(b_u)^2 + Kb^2 = V^2, \text{ где } V = f(v); \tag{7.8 : 3}$$

произвольная функция переменного $v$ стоит вместо произвольного постоянного, потому что при интегрировании по переменному $u$ мы считаем $v$ постоянным. Разрешая уравнение (7.8 : 3) относительно производной $b_u = \frac{db}{du}$, получим

$$\frac{db}{\sqrt{V^2 - Kb^2}} = du.$$

а) Случай положительной кривизны $K = \frac{1}{R^2} > 0$.

$$\int \frac{d\left(\frac{b}{RV}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{b}{RV}\right)^2}} = \int \frac{1}{R}\, du + V_1, \quad V_1 = f_1(v),$$

или

$$\arcsin \frac{b}{RV} = \frac{u}{R} + V_1$$

и

$$b = RV \sin\left(\frac{u}{R} + V_1\right); \qquad (7.8:4)$$

но длина дуги замкнутой линии $u = \text{const}$ стремится к нулю при $u \to 0$. Следовательно,

$$\lim_{u \to 0} \int_0^{2\pi} b\,dv = \lim_{u \to 0} \int_0^{2\pi} RV \sin\left(\frac{u}{R} + V_1\right) dv = \int_0^{2\pi} RV \sin V_1 dv = 0.$$

Поскольку при $V = 0$ в силу (7.8 : 4) получим $b = 0$, что исключается, то

$$V_1 = 0. \qquad (7.8:5)$$

С другой стороны, вращение вектора $\mathbf{e}_1$ вокруг нормали определяется уравнением

$$d\mathbf{e}_1 = \omega_1^2 \mathbf{e}_2,$$

и инфинитезимальное смещение в силу (7.5 : 4) и (7.8 : 1) равно

$$\omega_1^2 = r\,du + r'\,dv = \frac{\partial d}{\partial u}\, dv,$$

а так как в точке $O$ вращение определяется параметром $v$, то

$$\lim_{u\to 0}\frac{\partial b}{\partial u}=1.$$

Отсюда в силу (7.8 : 4—5) имеем

$$\lim_{u\to 0}\frac{\partial b}{\partial u}=\lim_{u\to 0}\left(V\cos\frac{u}{R}\right)=V=1. \tag{7.8 : 6}$$

Таким образом, и вторая произвольная функция определена, и линейный элемент не содержит никаких произвольных величин

$$ds^2=du^2+R^2\sin^2\left(\frac{u}{R}\right)dv^2. \tag{7.8 : 7}$$

Мы взяли произвольную поверхность с кривизной

$$K=\frac{1}{R^2}$$

и, выбрав произвольно точку $O$ и вектор **e**, нашли вполне определенный линейный элемент (7.8 : 7). Следовательно, всякая другая поверхность с кривизной $K=\frac{1}{R^2}$ с произвольной точкой $O'$ и вектором **e**$'$ будет иметь тот же линейный элемент; значит, такие две поверхности налагаются произвольно выбранными точкой $O'$ и вектором **e**$'$ на точку $O$ и вектор **e**.

b) Случай отрицательной кривизны $K=-\frac{1}{R^2}<0$. Тогда уравнение (7.8 : 3) после разрешения относительно $b_u=\frac{db}{du}$ примет вид

$$\frac{db}{\sqrt{V^2+\frac{b^2}{R^2}}}=du,$$

или

$$\int\frac{d\,\frac{\quad}{RV}}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{RV}\right)^2}}=\int\frac{du}{R}+V_1,\quad V_1=f_1(v),$$

и, полагая

$$\frac{b}{RV}=\operatorname{sh}x,\quad 1+\left(\frac{b}{RV}\right)^2=\operatorname{ch}^2x,\quad x=\operatorname{argsh}\frac{b}{RV},$$

получим

$$\int \frac{d\,\dfrac{b}{RV}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{RV}\right)^2}} = \int \frac{\operatorname{ch} x\,dx}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}} = \int dx = x = \operatorname{argsh}\frac{b}{RV}$$

и

$$\frac{b}{RV} = \operatorname{sh}\left(\frac{u}{R}+V_1\right), \text{ или } b = RV\operatorname{sh}\left(\frac{u}{R}+V_1\right).$$

Следовательно,

$$ds^2 = du^2 + R^2V^2\operatorname{sh}^2\left(\frac{u}{R}+V_1\right)dv^2. \qquad (7.8:8)$$

Между тем первое требование

$$\lim_{u\to 0} b = \lim_{u\to 0} RV\operatorname{sh}\left(\frac{u}{R}+V_1\right) = RV\operatorname{sh}V_1 = 0$$

дает

$$V_1 = 0$$

и второе требование дает

$$\lim_{u\to 0} b_u = \lim_{u\to 0} V\operatorname{ch}\left(\frac{u}{R}\right) = V = 1.$$

Следовательно, опять вполне определенный линейный элемент

$$ds^2 = du^2 + R^2\operatorname{sh}^2\left(\frac{u}{R}\right)dv^2, \qquad (7.8:9)$$

откуда следует наложимость всех поверхностей постоянной кривизны

$$K = -\frac{1}{R^2},$$

причем произвольная точка $O'$ второй поверхности и произвольный единичный вектор $\mathbf{e}'$ в точке $O'$ совпадают с точкой $O$ и вектором $\mathbf{e}$ первой поверхности.

*ГЛАВА VIII*

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ДВУМЯ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

## § 1. Преобразование пфаффовой системы уравнений к каноническому виду

В предыдущей главе мы получили необходимые условия, которым должны удовлетворять формы $\omega^i$, $\omega_i^j$, чтобы система (6.1 : 2), (6.1 : 4) определяла поверхность. Эти необходимые условия (7.4 : 3), (7.4 : 4) вместе с тем будут и достаточными; но, чтобы доказать это, будет удобно предварительно преобразовать их, представив в более общем каноническом виде.

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} \Theta_0 &= d\mathbf{M} - \omega^1\mathbf{J}_1 - \omega^2\mathbf{J}_2 \\ \Theta_1 &= d\mathbf{J}_1 - \omega_1{}^2\mathbf{J}_2 - \omega_1{}^3\mathbf{J}_3, \\ \Theta_2 &= d\mathbf{J}_2 - \omega_2{}^1\mathbf{J}_1 - \omega_2{}^3\mathbf{J}_3, \\ \Theta_3 &= d\mathbf{J}_3 - \omega_3{}^1\mathbf{J}_1 - \omega_3{}^2\mathbf{J}_2. \end{aligned}\right\} \qquad (8.1:1)$$

Дифференцируя внешним образом первое уравнение, получим

$$D\Theta_0 = -[d\mathbf{J}_1\omega^1] - [d\mathbf{J}_2\omega^2] - \mathbf{J}_1 D\omega^1 - \mathbf{J}_2 D\omega^2.$$

Внося сюда значения

$$d\mathbf{J}_1 = \Theta_1 + \omega_1{}^2\mathbf{J}_2 + \omega_1{}^3\mathbf{J}_3,$$
$$d\mathbf{J}_2 = \Theta_2 + \omega_2{}^1\mathbf{J}_1 + \omega_2{}^3\mathbf{J}_3$$

и $D\omega^1$, $D\omega^2$ по формулам (7.4 : 3), а так же используя третье уравнение (7.4 : 3), получим

$$D\Theta_0 = -[\Theta_1\omega^1] - [\Theta_2\omega^2]. \qquad (8.1:2)$$

Аналогично, дифференцируя внешним образом последние три уравнения (8.1 : 1) и исключая дифференциалы $d\mathbf{J}_i$, а также $D\omega_i^k$, получим:

$$\left.\begin{aligned} D\Theta_1 &= -[\Theta_2\omega_1{}^2] - [\Theta_3\omega_1{}^3], \\ D\Theta_2 &= -[\Theta_1\omega_2{}^1] - [\Theta_3\omega_2{}^3], \\ D\Theta_3 &= -[\Theta_1\omega_3{}^1] - [\Theta_2\omega_3{}^2]. \end{aligned}\right\} \qquad (8.1:3)$$

Систему (8.1 : 1—3) можно короче записать в виде:

$$\Theta_k = 0, \quad D\Theta_k = -[\Theta_j \tilde{\omega}_k{}^j], \quad j \neq k = 0,\ 1,\ 2,\ 3. \quad (8.1:4)$$

Система (8.1 : 4) имеет две независимые переменные — криволинейные координаты на поверхности — $u$, $v$; их дифференциалы представлены формами $\omega^1$, $\omega^2$. Все формы $\tilde{\omega}_k{}^j$ заданы линейными формами относительно дифференциалов $du$, $dv$ (или форм $\omega^1$, $\omega^2$) с коэффициентами в виде регулярных функций переменных $u$, $v$. Формы $\Theta_k$, кроме того, содержат дифференциалы неизвестных функций $z_j$ — координаты вектора $\mathbf{M}(x, y, z)$ и три эйлеровы угла $\varphi$, $\psi$, $\chi$ (2.11).

Вид системы (8.1 : 4) обнаруживает ее замечательное свойство: квадратичные уравнения системы (внешние дифференциалы $D\Theta_k$ ) обращаются в нуль в силу линейных уравнений системы $\Theta_k = 0$, ибо в каждом произведении правой части один из множителей — линейная форма $\Theta_j = 0$, которая равна нулю в силу линейных уравнений системы. Такая система называется *вполне интегрируемой.*

Рассмотрим вспомогательную аналитическую плоскость независимых переменных $u$, $v$.

**Теорема 1.** *Система* $\Theta_k = 0$ (8.1 : 4) *позволяет определить значения шести неизвестных функций* $z_j$ *в произвольной точке аналитической плоскости* $P(u, v)$, *если даны их значения в начальной точке* $P_0$ $z_j = \overset{0}{z_j}$ *для* $u = u_0$, $v = v_0$ *и задан путь интеграции, т. е. даны функции:*

$$u = f_1(t), \quad v = f_2(t), \qquad (8.1:5)$$

*соединяющий точку* $P_0$ (для $t = 0$) *с точкой* $P_1$ *(для* $t = t_1$*).*

Действительно, каждое из уравнений (8.1 : 1), т. е. каждая из форм $\Theta_k$, содержит дифференциал одной из шести неизвестных функций; первое уравнение (8.1 : 1), повторенное три раза для трех координат $x$, $y$, $z$ вектора **M**, определяет их дифференциалы; три остальных определяют дифференциалы эйлеровых углов $d\varphi$, $d\psi$, $d\chi$, ибо из девяти координат векторов $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$, $\mathbf{J}_3$, связанных уравнениями ортогональности и нормированием модулей, сохранятся только три независимые величины. Все остальные формы $\omega^i$, $\omega_i^j$ выражаются через дифференциалы $du$, $dv$, которые на заданном пути (8.1 : 5) будут иметь вид:

$$du = \dot{f}_1(t)\,dt, \quad dv = \dot{f}_2(t)\,dt, \qquad \dot{f}_1 = \frac{df_1}{dt}. \tag{8.1 : 6}$$

После деления на дифференциал $dt$ уравнения (8.1 : 1) принимают вид системы Коши:

$$\frac{dz_j}{dt} = F_j(t, z_k), \qquad j, k = 1, \ldots, 6, \tag{8.1 : 7}$$

с начальными условиями:

$$z_j = z_j^0 \text{ для } t = 0. \tag{8.1 : 8}$$

Система Коши имеет одно и только одно решение, удовлетворяющее начальным условиям. Это и доказывает теорему 1.

## § 2. Теорема существования решения вполне интегрируемой системы

Соединим начальную точку $P_0$ регулярными путями со всеми точками области; мы получим значения неизвестных $z_j$ во всех точках области. Однако это решение вообще зависит от выбора путей интеграции.

Покажем, что *для вполне интегрируемой системы полученные значения не зависят от пути интеграции.*

Допустим, что мы имеем в односвязной области непрерывно дифференцируемое семейство путей

$$u = f_1(t, \alpha), \; v = f_2(t, \alpha), \tag{8.2 : 1}$$

соединяющих начальную точку $P_0$ с некоторой точкой $P_1$. Значения неизвестных функций $z_j$, полученные интегрированием по различным путям, выходящим из точки $P_0$ и оканчивающимся в точке $P_1$, зависят от двух независимых переменных: параметра $t$, определяющего положение точки на пути, и параметра $\alpha$, определяющего путь интеграции. Значит, решение системы вообще имеет вид

$$z_j = F_j(t, \alpha).$$

Покажем, что для вполне интегрируемой системы неизвестные функции $z_j$ не зависят от $\alpha$.

Введем два символа дифференцирования:

$$d = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \delta = \frac{\partial}{\partial \alpha}.$$

В точках $P_0$ и $P_1$ все пути сходятся, следовательно,

$$\breve{\omega}(\delta) = 0 \text{ для } t = 0, \text{ т. е. в точке } P_0, \qquad (8.2:2)$$

$$\breve{\omega}(\delta) = 0 \text{ для } t = 1, \text{ т. е. в точке } P_1. \qquad (8.2:3)$$

Формы $\Theta_k$ в начальной точке $P_0$, где заданы начальные значения $z_k = \overset{0}{z}_k$, не зависят от параметра $\alpha$, следовательно для $t=0$, т. е. в точке $P_0$,

$$\Theta_k(\delta) = 0. \qquad (8.2:4)$$

С другой стороны, так как наши решения получены интегрированием вдоль пути, т. е. при изменении переменного $t$, то в произвольной точке любого пути

$$\Theta_k(d) = 0. \qquad (8.2:5)$$

Напишем теперь в билинейной форме квадратичные уравнения (8.1 : 4) для двух символов дифференцирования $d$ и $\delta$, получим

$$d\Theta_k(\delta) - \delta\Theta_k(d) = \sum_j \breve{\omega}_k^j(d)\,\Theta_j(\delta) - \sum \breve{\omega}_k^j(\delta)\,\Theta_j(d),$$

или в силу (8.2:5)

$$d\Theta_k(\delta) = \sum_j \breve{\omega}_k^j(d)\,\Theta_j(\delta), \qquad (8.2:6)$$

или, обозначая

$$\Theta_k(\delta) = H_k, \quad \breve{\omega}_k^j(d) = p_k^j\,dt, \qquad (8.2:7)$$

получим из (8.2:6) систему Коши

$$\frac{dH_k}{dt} = \sum_j p_k^j H_j \qquad (8.2:8)$$

с начальными условиями в силу (8.2:4)

$$H_k = 0 \text{ для } t = 0. \qquad (8.2:9)$$

Система Коши, как известно, допускает одно и только одно решение, удовлетворяющее системе (8.2 : 8) и начальным условиям (8.2 : 9); это решение очевидно. Поскольку система (8.2 : 8) относительно $H_k$ — линейно однородна, она будет удовлетворена значением

$$H_k = 0 \text{ для всех значений } t.$$

Это очевидно удовлетворяет и начальным условиям (8.2 : 9). По теореме Коши других решений нет.

Следовательно, в силу (8.2 : 7) во всех точках пути интегрирования будет

$$\theta_k(\delta) = 0. \qquad (8.2:10)$$

Между тем в силу линейной независимости форм $\Theta_k$ относительно дифференциалов $dz_j$ мы можем разрешить однородную систему (8.2 : 10) относительно $dz_i$ и получим

$$\delta z_j = 0,$$

т. е. найденное решение не зависит от параметра $\alpha$.

**Теорема 1.** *Для вполне интегрируемой системы решение, получаемое интегрированием по произвольному пути, не зависит от выбора пути интеграции.*

**Теорема 2.** *Вполне интегрируемая система уравнений допускает решение и только одно, удовлетворяющее начальным условиям.*

Более подробно эта же теорема формулируется так:

**Теорема 3.** *Если пфаффова система*

$$\theta_k = 0, \quad k = 1, \dots, p, \qquad (8.2:11)$$

*содержащая p уравнений и p неизвестных функций $z_i$, может быть разрешена относительно дифференциалов p неизвестных функций, а система внешних дифференциалов*

$$\mathrm{D}\theta_k = 0, \qquad k = 1, \dots, p, \qquad (8.2:12)$$

*будет алгебраическим следствием пфаффовой системы* (8.2 : 11) *и после подстановки полученных из уравнений* (8.2 : 11) *выражений $dz_j$ в систему* (8.2 : 12) *все уравнения этой системы обратятся в тождества относительно неизвестных функций $z_j$ независимых переменных $x^i$ и их дифференциалов $dx^i$, то система* (8.2 : 11) *допускает решение*

$$z_j = F_j(x^1, \dots, x^n)$$

*и только одно, удовлетворяющее начальному условию*

$$z_j = z_j^0 \text{ для } x^i = x_0^i.$$

## § 3. Теорема существования поверхности

Мы доказали, что пять (шесть) линейных форм

$$\omega^1,\ \omega^2,\ \omega^3=0,\quad \omega_1{}^2,\ \omega_2{}^3,\ \omega_3{}^1, \tag{8.3 : 1}$$

заданных относительно двух независимых переменных $u$, $v$ и их дифференциалов $du$, $dv$ и удовлетворяющих уравнениям структуры (7.4 : 3), (7.4 : 4) и соотношениям (6.1 : 5), (6.1 : 7), обеспечивают полную интегрируемость системы (6.1 : 2), (6.1 : 4) и существование решения.

Однако здесь встречается затруднение. Ниоткуда непосредственно не видно, что получаемые координаты векторов репера действительно будут определять ортонормированный трехгранник; и действительно, если начальный трехгранник не будет ортогонален, то и трехгранники, определяемые решениями вполне интегрируемой системы, не обязаны быть ортогональными. Надо было бы доказывать, что полученные трехгранники при ортонормированном начальном репере будут такими же; но в этом нет необходимости; с помощью эйлеровых углов (2.11 : 2) и координат вершины трехгранника мы можем представить все ортонормированные реперы евклидова пространства и вычислить компоненты действительных инфинитезимальных смещений

$$\overset{\frown}{\omega}{}^1,\ \overset{\frown}{\omega}{}^2,\ \overset{\frown}{\omega}{}^3,\quad \overset{\frown}{\omega}_1{}^2,\ \overset{\frown}{\omega}_2{}^3,\ \overset{\frown}{\omega}_3{}^1, \tag{8.3 : 2}$$

которые несомненно удовлетворяют уравнениям структуры.

Среди этих смещений должны быть и те (8.3 : 1), которые зависят от изменения переменных $u$, $v$ при движении вершины по поверхности. Требуя совпадения формы (8.3 : 1) и (8.3 : 2), мы получим пфаффову систему

$$\overset{\frown}{\omega}{}^i=\omega^i,\quad \overset{\frown}{\omega}_i{}^j=\omega_i{}^j,\quad i,\ j=1,\ 2,\ 3. \tag{8.3 : 3}$$

Она содержит 6 уравнений, 6 неизвестных функций: 3 координаты вершины и 3 эйлеровых угла при двух независимых переменных. Дифференцируя внешним образом обе части каждого уравнения (8.3 : 3), мы получим, пользуясь уравнениями структуры, одни и те же выражения в левой и правой части уравнения; только слева будут формы с титлами $\overset{\frown}{\omega}{}^i$, $\overset{\frown}{\omega}{}_i^j$, а справа те же формы, но без титлов. В силу уравнений

$$\overset{\frown}{\omega}{}^i=\omega^i,\quad \overset{\frown}{\omega}_i{}^j=\omega_i{}^j$$

все полученные квадратичные равенства обращаются в тождества. Следовательно, система вполне интегрируема, допускает решение и только одно, удовлетворяющее начальным условиям. При этом мы прямо получаем координаты $x$, $y$, $z$ вершины и эйлеровы углы $\varphi$, $\psi$, $\chi$ как функции переменных $u$, $v$, и все трехгранники будут ортонормированы, ибо других эйлеровы углы не определяют. Остается показать, что поверхность, определяемая координатами точек $x$, $y$, $z$ и эйлеровыми углами $\varphi$, $\psi$, $\chi$, действительно обладает двумя заданными квадратичными формами:

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2, \tag{a}$$

$$\varphi_2 = \omega^1\omega_1{}^3 + \omega^2\omega_2{}^3. \tag{b}$$

Шесть неизвестных функций $x$, $y$, $z$, $\varphi$, $\psi$, $\chi$ получены интегрированием пфаффовой системы (8.3 : 3):

$$\breve{\omega}^i = \omega_i, \quad \breve{\omega}_i{}^j = \omega_i{}^j, \qquad i, j = 1, 2, 3. \tag{c}$$

Здесь формы

$$\omega^1, \ \omega^2, \ \omega^3 = 0, \quad \omega_1{}^2, \ \omega_2{}^3, \ \omega_3{}^1$$

построены, например, в виде (6.1 : 10), (6.1 : 8), (6.2 : 11), (6.2 : 6) так, что выражения (a) и (b) будут заданными первой и второй квадратичными формами.

Линейные формы

$$\breve{\omega}^1, \ \breve{\omega}^2, \ \breve{\omega}^3, \ \breve{\omega}_1{}^2, \ \breve{\omega}_2{}^3, \ \breve{\omega}_3{}^1$$

выражаются через координаты $x$, $y$, $z$ и эйлеровы углы $\varphi$, $\psi$, $\chi$, т. е. через элементы найденной интегрированием пфаффовой системы (c) поверхности. Поскольку из (a), (b) и (c) следует

$$ds^2 = (\breve{\omega}^1)^2 + (\breve{\omega}^2)^2,$$

$$\varphi_2 = \breve{\omega}^1 \ \breve{\omega}_1{}^3 + \breve{\omega}^2 \ \breve{\omega}_2{}^3,$$

то определенная интегрированием системы (c) поверхность обладает заданными первой и второй квадратичными формами.

### § 4. Конгруэнтность поверхностей, определяемых формами $\omega^i$, $\omega_i{}^j$ при различных начальных условиях

**Лемма.** *Компоненты инфинитезимальных смещений репера инвариантны относительно движения пространства.*

Движение пространства эквивалентно преобразованию декартовой системы координат. Действительно, если пространство вместе с системой координат перемещается, то координаты всех точек фигуры, отнесенной к этой системе координат, сохраняются. Компоненты инфинитезимальных смещений $\omega^i$, $\omega_i^j$ являются проекциями векторов $d\mathbf{M}$, $d\mathbf{J}_j$ подвижного репера на векторы этого же репера. Как видим, преобразование декартовой системы координат не может влиять на величину этой проекции. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь два решения, определяющие две поверхности, которые относятся к одним и тем же формам $\omega^i$, $\omega_j^i$, но с разными начальными трехгранниками $\mathrm{T}_0$, $T_0$. Они определяют двупараметрическое семейство трехгранников (T) и соответственно семейство $(T)$. Перенесем в пространстве все трехгранники $(T_0, T)$ как одно целое так, чтобы начальный репер $T_0$ совпал с репером $\mathrm{T}_0$; это всегда возможно, ибо все реперы ортонормированы, следовательно, конгруэнтны.

Обозначим через $(T_0^*, T^*)$, где $T_0^*\equiv\mathrm{T}_0$, семейство трехгранников $(T^*)$ после перенесения; начальный репер $T_0^*\equiv\mathrm{T}_0$ совпадает с начальным репером первого семейства.

Посмотрим, как определяется семейство трехгранников $(T^*)$. В силу инвариантности компонентов $\omega^i$, $\omega_i^j$ система уравнений сохранится одна и та же и для трехгранников (T) и для $(T^*)$. Начальные условия после совмещения трехгранников $T_0^*=\mathrm{T}_0$ тоже совпадают. Между тем вполне интегрируемая система имеет одно и только одно определенное решение, удовлетворяющее начальным условиям. Следовательно, после совмещения начальных реперов оба семейства $(T^*)$ и (T) совместятся. Отсюда теорема:

**Теорема 4.** *Формы $\omega^i$, $\omega_i^j$, удовлетворяющие уравнениям структуры, определяют поверхность и только одну до положения в пространстве.*

## § 5. Определение поверхиости двумя квадратичными формами

Теперь мы выскажем теорему существования поверхности в той форме, как ее доказал впервые Петерсон и затем Бонне.

**Теорема.** *Две квадратичные формы поверхности*

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \\ \varphi_2 &= Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2, \end{aligned}\right\} \qquad (8.5:1)$$

*удовлетворяющие уравнениям Гаусса и Петерсона—Кодацци, определяют поверхность до положения в пространстве.*

Ради простоты выкладок мы будем предполагать, что поверхность отнесена к ортогональной системе координатных линий

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= a^2du^2 + b^2dv^2, \\ \varphi_2 &= Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2. \end{aligned}\right\} \qquad (8.5:2)$$

Мы видели, что это всегда можно сделать (4.2:9). Формы $\omega^i$ запишутся:

$$\omega^1 = adu, \quad \omega^2 = bdv, \quad \omega^3 = 0. \qquad (8.5:3)$$

Формула (6.2:11) дает выражение для формы

$$\omega_1{}^2 = -\frac{1}{b}\frac{\partial a}{\partial v}du + \frac{1}{a}\frac{\partial b}{\partial u}dv. \qquad (8.5:4)$$

Формулы (6.1:8) и (7.5:8) дают возможность найти $\omega_2{}^3$, $\omega_3{}^1$:

$$\left.\begin{aligned} \omega_2{}^3 &= \frac{D'}{b}du + \frac{D''}{b}dv, \\ \omega_3{}^1 &= -\frac{D}{a}du - \frac{D'}{a}dv. \end{aligned}\right\} \qquad (8.5:5)$$

Уравнения структуры (7.4:3) удовлетворяются выбором форм (8.5:4—5). Первое уравнение структуры (7.4:4) приводит к уравнению Гаусса (7.6:2), два остальных — к уравнениям Петерсона—Кодацци (7.6:1).

Таким образом, знание коэффициентов двух квадратичных форм (8.5:2) дает нам возможность построить формы $\omega^i$, $\omega_i{}^j$ (8.5:3—5). Если коэффициенты основных квадратичных форм удовлетворяют уравнениям Гаусса (7.6:2) и Петерсона—Кодацци (7.6:1), то уравнения структуры (7.4:3, 4) будут удовлетворены, и вполне интегрируемая система (8.3:3) своими интегралами определит эйлеровы углы и координаты $x$, $y$, $z$ вершины $M$, описывающей поверхность. Все остальные поверхности конгруэнтны полученной.

*Задача интегрирования системы* сводится к интегрированию системы Коши. Примем координаты начальной точки нулямн

$$u_0 = v_0 = 0.$$

Тогда путь интеграции можно задать равенствами:

$$u = tu_1, \quad v = tv_1, \tag{8.5:6}$$

где $u_1$, $v_1$ — произвольные постоянные координаты точки области. Тогда

$$\left.\begin{aligned}
&\omega^1 = au_1\,dt, \quad \omega^2 = bv_1 dt, \quad \omega^3 = 0,\\
&\omega_1^{\ 2} = \left(-\frac{1}{b}\frac{\partial a}{\partial v}u_1 + \frac{1}{a}\frac{\partial b}{\partial u}v_1\right)dt,\\
&\omega_2^{\ 3} = \left(\frac{D'}{b}u_1 + \frac{D''}{b}v_1\right)dt,\\
&\omega_1^{\ 3} = \left(\frac{D}{a}u_1 + \frac{D'}{a}v_1\right)dt,
\end{aligned}\right\} \tag{8.5:7}$$

и везде в коэффициентах сделана подстановка (8.5:6).

После интегрирования системы (8.5:7) можно положить $t=1$, а координаты $u_1$, $v_1$ заменить на $u$, $v$ и рассматривать их как независимые переменные.

*ГЛАВА IX*

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## § 1. Минимальные поверхности

Определение. *Минимальной* называется поверхность, которая при заданном контуре имеет наименьшую площадь.

Рассмотрим поверхность $(M)$ и на ней заданный контур $L$. Отнесем поверхность к линиям кривизны и пусть компоненты инфинитезимальных смещений будут:

$$\left.\begin{aligned} d\mathbf{M} &= \omega^1\mathbf{J}_1 + \omega^2\mathbf{J}_2, \\ d\mathbf{n} &= \omega_3{}^1\mathbf{J}_1 + \omega_3{}^2\mathbf{J}_2. \end{aligned}\right\} \qquad (9.1:1)$$

Тогда по формулам Родрига (5.5:3), если воспользоваться уравнениями (9.1:1), получим:

$$\omega_3{}^1 = \frac{1}{R_1}\,\omega^1, \quad \omega_3{}^2 = \frac{1}{R_2}\,\omega^2, \qquad (9.1:2)$$

где $R_1$ и $R_2$ — главные радиусы кривизны.

Допустим, что площадь поверхности $(M)$, ограниченная контуром $L$, — наименьшая по сравнению со всеми поверхностями $(M^*)$, проходящими через контур $L$ и достаточно мало от нее отличающимися.

Поверхность $(M^*)$ можно получить, откладывая на каждой нормали $\mathbf{n}$ поверхности $(M)$ достаточно малый отрезок

$$\varepsilon\varphi,$$

где

$$\varphi = \varphi(u, v)$$

регулярная функция, обращающаяся в нуль на контуре $L$, и $\varepsilon$ — постоянный параметр, достаточно малый, чтобы поверхность $(M^*)$ считалась мало отличающейся от поверхности $(M)$; очевидно, радиус-вектор $\mathbf{M}^*$ определяется уравнением

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{M} + \varepsilon\varphi\mathbf{n}. \tag{9.1 : 3}$$

Площадь поверхности $(M)$ должна быть наименьшей и в том семействе поверхностей $(M^*)$, которое получается при $\varepsilon \to 0$ и фиксированной функции $\varphi(u, v)$. Поэтому в дальнейшем мы можем пренебрегать степенями $\varepsilon$, выше первой.

Дифференцируя равенство (9.1 : 3), получим

$$d\mathbf{M}^* = \omega^1\mathbf{J}_1 + \omega^2\mathbf{J}_2 + \varepsilon\varphi\,(\omega_3{}^1\mathbf{J}_1 + \omega_3{}^2\mathbf{J}_2) + \mathbf{J}_3\varepsilon d\varphi,$$

пренебрегая $d\varepsilon$; отсюда в силу (9.1 : 2)

$$d\mathbf{M}^* = \mathbf{J}_1\omega^1\left(1 + \frac{\varepsilon\varphi}{R_1}\right) + \mathbf{J}_2\omega^2\left(1 + \frac{\varepsilon\varphi}{R_2}\right) + \mathbf{J}_3\varepsilon d\varphi.$$

Наконец, линейный элемент, если отбросить члены с $\varepsilon^2$, будет

$$(ds^*)^2 = (\omega^1)^2\left(1 + 2\frac{\varepsilon\varphi}{R_1}\right) + (\omega^2)^2\left(1 + 2\frac{\varepsilon\varphi}{R_2}\right),$$

и элемент площади поверхности

$$dS^* = \sqrt{\left(1 + 2\frac{\varepsilon\varphi}{R_1}\right)\left(1 + 2\frac{\varepsilon\varphi}{R_2}\right)}\,\omega^1\omega^2,$$

а площадь поверхности

$$S^* = \iint\limits_L \sqrt{1 + 2\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + 4\frac{\varepsilon^2\varphi^2}{R_1R_2}}\;\omega^1\omega^2.$$

Мы должны потребовать для минимума площади, чтобы производная $\dfrac{dS^*}{d\varepsilon}$ в рассматриваемой точке обращалась в нуль, а поскольку мы требуем, чтобы минимум площади осуществляла поверхность $(M)$, которая соответствует значению $\varepsilon = 0$, то надо потребовать

$$\left(\frac{dS^*}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \left\{\iint\limits_L \frac{d}{d\varepsilon}\sqrt{1 + 2\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + 4\varepsilon^2\frac{\varphi^2}{R_1R_2}}\;\times\right.$$

$$\left.\times\,\omega^1\omega^2\right\}_{\varepsilon=0} = 0,$$

или

$$\left\{\iint\limits_L \frac{\varphi\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+4\varepsilon\frac{\varphi^2}{R_1R_2}}{\sqrt{1+2\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+4\varepsilon^2\frac{\varphi^2}{R_1R_2}}}\,\omega^1\omega^2\right\}_{\varepsilon=0}=$$

$$=\iint\limits_L \varphi\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\omega^1\omega^2=0.$$

Допустим, что существует область $\sigma$ внутри контура $L$ такая, что во всех ее точках

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}>0;$$

тогда мы выберем произвольную функцию $\varphi$ так, чтобы она равнялась нулю вне области $\sigma$, а внутри ее была бы положительна; интеграл от существенно положительной подынтегральной функции будет строго положителен, т. е. не равен нулю.

Следовательно, минимальная поверхность определяется условием

$$H=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=0, \tag{9.1 : 4}$$

или в силу (5.7 : 2)

$$2FD'-ED''-GD=0. \tag{9.1 : 5}$$

Отсюда теорема:

**Теорема.** *Средняя кривизна минимальной поверхности равна нулю.*

**Следствие 1.** *Полная* (гауссова) *кривизна минимальной поверхности отрицательна.*

Действительно, из равенства (9.1 : 4) следует

$$R_1=-R_2 \text{ и } K=\frac{1}{R_1R_2}=-\frac{1}{(R_2)^2}. \tag{9.1 : 6}$$

**Следствие 2.** *Асимптотические линии на минимальной поверхности действительны и ортогональны.*

Первая половина предложения следует из (9.1 : 6). Если поверхность отнести к асимптотическим линиям, то уравнение асимптотической линии (5.10 : 1) должно допускать решения $u=\text{const}$ и $v=\text{const}$, а это возможно только при

$$D = 0, \quad D'' = 0. \qquad (9.1:7)$$

Внося эти выражения в левую часть уравнения (9.1 : 5), получим

$$2FD' = 0,$$

но обращение в нуль $D'$ приводит к вырождению поверхности, ибо в силу (9.1 : 7) вторая квадратичная форма тождественно обращается в нуль и нормальная кривизна всякой линии равна нулю.

Обращение в нуль $F$,

$$F = 0,$$

показывает, что координатные линии (теперь асимптотические) ортогональны.

**Следствие 3.** *Сферическое изображение минимальных поверхностей конформно.*

*Сферическим изображением поверхности* называется изображение на сферу по принципу параллельности нормалей. Следовательно, точке $\mathbf{M}$ поверхности сопоставляется точка $\mathbf{n}$ сферы. Отображение называется конформным, если пары соответствующих линий пересекаются под одинаковыми углами. Для этого необходимо и достаточно, чтобы линейные элементы $ds^2$ и $ds^{*2}$ двух поверхностей были пропорциональны

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = \lambda (E^*du^2 + 2F^*dudv + G^*dv^2).$$

Действительно, при такой пропорциональности

$$E = \lambda E^*, \quad F = \lambda F^*, \quad G = \lambda G^*$$

в числителе и знаменателе выражения (4.2 : 4) для косинуса угла $\varphi$, под которым пересекаются линии $du : dv$ и $\delta u : \delta v$, множитель $\lambda$ сократится и углы будут равны.

Если мы отнесем минимальную поверхность к линиям кривизны, то будут иметь место равенства (9.1 : 1, 2), которые в силу (9.1 : 6) принимают вид:

$$\omega_3{}^1 = \frac{1}{R_1}\omega^1, \quad \omega_3{}^2 = -\frac{1}{R_1}\omega^2$$

и

$$d\mathbf{M} = \omega^1\mathbf{J}_1 + \omega^2\mathbf{J}_2, \; d\mathbf{n} = \frac{1}{R_1}(\omega^1\mathbf{J}_1 - \omega^2\mathbf{J}_2).$$

Отсюда получим линейные элементы поверхности $ds^2$ и сферы $ds'^2$:

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2, \quad ds'^2 = \frac{1}{R_1^2} \{ (\omega^1)^2 + (\omega^2) \}.$$

## § 2. Изгибание минимальных поверхностей

**Теорема.** *Минимальные поверхности допускают непрерывное изгибание с сохранением главных радиусов кривизны, оставаясь все время минимальными.*

Такое изгибание возможно только при условии, что главные направления в каждой точке поверхности меняются. Так как они остаются взаимно перпендикулярными, то при изгибании поверхности главные направления поворачиваются.

Рассмотрим две минимальные поверхности $S$ и $S_\alpha$ с компонентами инфинитезимальных смещений трехгранника, построенного на главных направлениях,

$$\omega^i, \ \omega_i{}^j; \ \bar{\omega}^i, \ \bar{\omega}_i{}^j$$

с одними и теми же радиусами главных кривизн

$$R_1 = R; \quad R_2 = -R. \tag{9.2:1}$$

Эти формы будут:

$$\omega_3{}^1 = \frac{\omega^1}{R}, \ \omega_2{}^3 = \frac{\omega^2}{R}; \quad \bar{\omega}_3{}^1 = \frac{\bar{\omega}^1}{R}, \ \bar{\omega}_2{}^3 = \frac{\bar{\omega}^2}{R}. \tag{9.2:2}$$

Если главные направления на второй поверхности повернуты на постоянный угол $\alpha = \text{const}$ относительно главных направлений первой поверхности, то

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\omega}^1 = \omega^1 \cos\alpha + \omega^2 \sin\alpha, \quad \bar{\omega}^2 = -\omega^1 \sin\alpha + \omega^2 \cos\alpha, \\ &\bar{\omega}_1{}^2 = \omega_1{}^2, \\ &\bar{\omega}_3{}^1 = \omega_3{}^1 \cos\alpha + \omega_2{}^3 \sin\alpha, \quad \bar{\omega}_2{}^3 = -\omega_3{}^1 \sin\alpha + \omega_2{}^3 \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{9.2:3}$$

Дифференцируя внешним образом, получим:

$$D\bar{\omega}^1 = [\bar{\omega}^2 \bar{\omega}_2{}^1] = [\omega^2 \omega_2{}^1] \cos\alpha + [\omega^1 \omega_1{}^2] \sin\alpha =$$
$$= [-\omega^1 \sin\alpha + \omega^2 \cos\alpha, \ \omega_2{}^1],$$

$$D\bar{\omega}^2 = [\bar{\omega}^1 \bar{\omega}_1{}^2] = -[\omega^2 \omega_2{}^1] \sin\alpha + [\omega^1 \omega_1{}^2] \cos\alpha =$$
$$= [\omega^1 \cos\alpha + \omega^2 \sin\alpha, \ \omega_1{}^2].$$

$$D\bar{\omega}_1{}^2 = [\bar{\omega}_1{}^3\bar{\omega}_3{}^2] =$$

$$= [\omega_3{}^1 \cos\alpha + \omega_2{}^3 \sin\alpha, - \omega_3{}^1 \sin\alpha + \omega_2{}^3 \cos\alpha] = [\omega_1{}^3\omega_3{}^2],$$

$$D\bar{\omega}_3{}^1 = [\bar{\omega}_3{}^2\bar{\omega}_2{}^1] = [\omega_3{}^2\omega_2{}^1]\cos\alpha +$$

$$+ [\omega_2{}^1\omega_1{}^3]\sin\alpha = [\omega_3{}^2\cos\alpha - \omega_1{}^3\sin\alpha, \ \omega_2{}^1],$$

$$D\bar{\omega}_2{}^3 = [\bar{\omega}_2{}^1\bar{\omega}_1{}^3] = -[\omega_3{}^2\omega_2{}^1]\sin\alpha +$$

$$+ [\omega_2{}^1\omega_1{}^3]\cos\alpha = [\omega_2{}^1, \ \omega_1{}^3\cos\alpha + \omega_3{}^2\sin\alpha].$$

Следовательно, формы $\bar{\omega}^i$, $\bar{\omega}_i{}^j$ в силу соотношений (9.2 : 3) удовлетворяют уравнениям структуры (7.4 : 3, 4), и поверхность $(M^*)$ существует; она — минимальная в силу уравнений (9.2 : 2); она налагается на поверхность $(M)$, ибо линейные элементы совпадают

$$(ds^*)^2 = (\bar{\omega}^1)^2 + (\bar{\omega}^2)^2 = (\omega^1\cos\alpha + \omega^2\sin\alpha)^2 +$$

$$+ (-\omega^1\sin\alpha + \omega^2\cos\alpha)^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 = ds^2.$$

Соответствие наложимости устанавливается первыми уравнениями (9.2 : 3).

Если положить

$$\omega^1 = a\,du, \qquad \omega^2 = b\,dv,$$

$$\bar{\omega}^1 = \bar{a}\,d\bar{u}, \quad \bar{\omega}^2 = \bar{b}\,d\bar{v},$$

то первые уравнения (9.2 : 3) запишутся

$$\bar{a}\,d\bar{u} = a\cos\alpha\,du + b\sin\alpha\,dv,$$

$$\bar{b}\,d\bar{v} = -a\sin\alpha\,du + b\cos\alpha\,dv.$$

Если $\lambda$ и $\mu$ будут интегрирующими множителями дифференциальных биномов в правых частях, то достаточно положить

$$\bar{a} = \frac{1}{\lambda}, \qquad \bar{b} = \frac{1}{\mu},$$

чтобы получить

$$\bar{u} = \int\limits_{u_0,v_0}^{u,v} \frac{1}{\bar{a}}\,(a\cos\alpha\,du + b\sin\alpha\,dv),$$

$$\bar{v} = \int\limits_{u_0,v_0}^{u,v} \frac{1}{\bar{b}}\,(-a\sin\alpha\,du + b\cos\alpha\,dv).$$

Постоянные интеграции подобраны так, что точка $u=0$, $v=0$ поверхности $S_\alpha$ соответствует точке $u_0$, $v_0$ поверхности $S$. Угол $\alpha$ можно рассматривать как параметр изгибания; при изменении $\alpha$ поверхность $S_\alpha$ непрерывно изгибается.

При $\alpha=0$ она совпадает с поверхностью $S$.

При $\alpha=\frac{\pi}{2}$ имеем

$$\bar{\omega}^1=\omega^2, \quad \bar{\omega}^2=-\omega^1, \quad \bar{\omega}_1^2=\omega_1^2,$$

$$\bar{\omega}_1^3=-\omega_2^3, \quad \bar{\omega}_2^3=\omega_1^3.$$

Линия $u$ переходит в линию $v$.

При $\alpha=\frac{\pi}{4}$ получается *ассоциированная* поверхность

$$\bar{\omega}^1=\frac{\omega^1+\omega^2}{\sqrt{2}}, \quad \bar{\omega}^2=\frac{\omega^2-\omega^1}{\sqrt{2}},$$

$$\bar{\omega}_1^3=\frac{\omega_1^3-\omega_2^3}{\sqrt{2}}, \quad \bar{\omega}_2^3=\frac{\omega_1^3+\omega_2^3}{\sqrt{2}}.$$

Линии кривизны $\omega^2=0$, $\omega^1=0$ налагаются на асимптотические линии.

Действительно, асимптотические линии на поверхности $S_\alpha$ определяются уравнением

$$\bar{\omega}^1\,\bar{\omega}_1^3+\bar{\omega}^2\,\bar{\omega}_2^3=0,$$

или по сокращении на $\frac{1}{R}$ в силу (9.2 : 2)

$$\frac{(\bar{\omega}^2)^2}{R}-\frac{(\bar{\omega}^1)^2}{R}=-\frac{2\omega^1\omega^2}{R}=0.$$

**Теорема.** *При наложении минимальной поверхности на ассоциированную линии кривизны переходят в асимптотические линии и наоборот.*

## § 3. Геодезические на поверхностях вращения

Линейный элемент поверхности вращения

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi, \quad z=f(r)$$

имеет вид

$$ds^2=[1+\dot{f}^2(r)]\,dr^2+r^2\,d\varphi^2.$$

Следовательно, в обозначениях (6.1 : 10)

$$a^2 = 1 + \dot{f}^2(r), \quad b^2 = r^2$$

и уравнения геодезической (6.3 : 2) запишутся:

$$\frac{d\alpha}{ds} = -\frac{\sin\alpha}{r\sqrt{1+\dot{f}^2(r)}},$$

$$\frac{dr}{ds} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\dot{f}^2(r)}},$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{r}\sin\alpha.$$

Деля почленно первое и третье уравнение на второе, мы исключим параметр $ds$

$$\frac{d\alpha}{dr} = -\frac{\operatorname{tg}\alpha}{r}, \quad \frac{d\varphi}{dr} = \frac{\sqrt{1+\dot{f}^2(r)}}{r}\operatorname{tg}\alpha. \tag{9.3:1}$$

Первое уравнение интегрируется разделением переменных

$$\operatorname{ctg}\alpha\, d\alpha + \frac{dr}{r} = 0,$$

откуда первый интеграл

$$r\sin\alpha = h = \text{const}. \tag{9.3 : 2}$$

Исключая из второго уравнения (9.3 : 1) с помощью первого (9.3 : 2) угол $\alpha$, получим

$$\frac{d\varphi}{dr} = h\,\frac{\sqrt{1+\dot{f}^2(r)}}{r\sqrt{r^2-h^2}} \tag{9.3 : 3}$$

и

$$\varphi = h\int_0^r \frac{\sqrt{1+\dot{f}^2(r)}}{r\sqrt{r^2-h^2}}\,dr + \varphi_0. \tag{9.3 : 4}$$

Первый интеграл (9.3 : 2) показывает, что *в каждой точке геодезической линии произведение радиуса параллели $r$ на синус угла наклона геодезической линии к меридиану постоянно* (теорема Клеро).

Из неравенства

$$\sin\alpha = \frac{h}{r} \leqslant 1 \tag{9.3 : 5}$$

следует, что радиус параллели не может быть меньше параметра $h$ геодезической линии; если $r=h$, то $\sin\alpha=1$, $\alpha=\frac{\pi}{2}$ и геодезическая касается параллели.

Рассмотрим кусок поверхности между двумя параллелями. для которых радиус параллели достигает минимума $r=m$ и максимума $r=M$. В этом интервале в силу (9.3 : 5) не может быть геодезической с параметром $h>M$.

1. Геодезическая с параметром $h=M$. Единственное возможное значение радиуса параллели в точках этой геодезической

$$r = M.$$

*Параллель наибольшего радиуса — геодезическая линия* (например, экватор на сфере).

2. Геодезические с параметром $h$ между $m$ и $M$:

$$m < h < M.$$

Геодезическая пересекает наибольшую параллель $r=M$ под острым углом

$$\sin\alpha_M = \frac{h}{M} < 1.$$

По мере уменьшения радиуса параллели угол $\alpha$ геодезической с меридианом

$$\sin\alpha = \frac{h}{r}$$

увеличивается и для $r=h$ будет равен $\frac{\pi}{2}$. Геодезическая касается параллели $r=h$, поворачивается назад, снова пересекает наибольшую параллель $r=M$ под тем же углом, но с противоположным знаком, доходит до параллели $r=h$ по другую сторону наибольшей параллели (если параллель $r=h$ там существует), снова возвращается назад и т. д.

Колебанию геодезической от одной параллели $r=h$ до другой соответствует поворот поверхности на конечный угол (9.3 : 4)

$$\delta = 2h\int_h^M \frac{\sqrt{1+f'^2(r)}}{r\sqrt{r^2-h^2}}\,dr, \qquad (9.3:6)$$

ибо, хотя интеграл (9.3 : 6) не собственный, поскольку знаменатель подынтегральной функции в точке $r=h$ обращается в нуль, но порядок малости

$$\sqrt{r^2-h^2} = (r-h)^{\frac{1}{2}} (r+h)^{\frac{1}{2}}$$

равен $\frac{1}{2}$, и интеграл сходится.

Если угол $\delta$ соизмерим с $\pi$, то геодезическая замыкается.

3. $h = m$. Так же, как выше, геодезическая подходит к параллели $r = m$, но теперь под знаком интеграла (9. 3 : 6) для $r = m$ не только знаменатель обращается в нуль порядка малости $\frac{1}{2}$, но и числитель обращается в бесконечность, ибо для наименьшей параллели

$$\dot{f}(r) = \frac{dz}{dr} \to \infty \text{ при } r \to h$$

(касательная к меридиану параллельна оси $z$). Нетрудно обнаружить, что $\delta$ стремится к бесконечности. Следовательно, геодезическая подходит асимптотически к наименьшей параллели $r = m$, совершая бесчисленное множество оборотов по поверхности (рис. 38). Сама параллель $r = m$ тоже геодезическая линия.

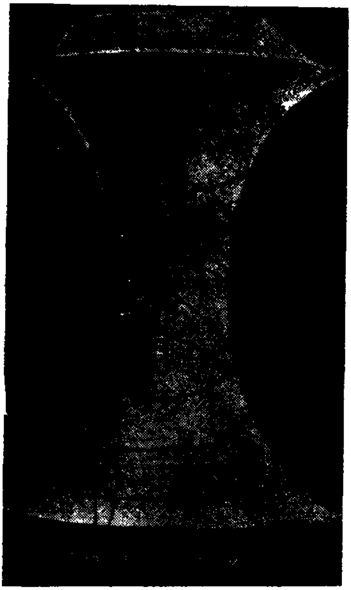

Рис. 38

4. $h=0$. Геодезическая совпадает с меридианом.

## § 4. Геодезическое кручение

Мы рассматривали две основные квадратичные формы поверхности: первая дает линейный элемент поверхности, вторая, если ее разделить на первую, определяет нормальную кривизну линии на поверхности. При отнесении к ортогональному реперу они имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2, \\ \varphi_2 &= \omega^1\omega_1^{\ 3} + \omega^2\omega_2^{\ 3}. \end{aligned}\right\} \qquad (9.4:1)$$

По формулам Дарбу формы $\omega_1^3$, $\omega_2^3$ выражаются через дифференциалы $du$, $dv$, но поскольку

$$du = \frac{1}{a}\,\omega^1, \quad dv = \frac{1}{b}\,\omega^2, \tag{9.4:2}$$

мы можем представить их в виде:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1^{\ 3} &= a_{11}\omega^1 + a_{12}\omega^2, \\ \omega_2^{\ 3} &= a_{21}\omega^1 + a_{22}\omega^2. \end{aligned}\right\} \tag{9.4:3}$$

Внося эти значения в третье уравнение (7.2:8), получим

$$a_{12}\,[\omega^1\,\omega^2] + a_{21}\,[\omega^2\,\omega^1] = 0.$$

Следовательно,

$$a_{21} = a_{12}, \tag{9.4:4}$$

и в силу (9.4:1)

$$\varphi_2 = a_{11}\,(\omega^1)^2 + 2a_{12}\omega^1\omega^2 + a_{22}\,(\omega^2)^2. \tag{9.4:5}$$

Двумя формами (9.4:1) не ограничивается совокупность квадратичных форм поверхности; например, линейный элемент сферы в сферическом отображении поверхности имеет вид

$$(d\mathbf{J}_3)^2 = (\omega_3^{\ 1}\mathbf{J}_1 + \omega_3^{\ 2}\mathbf{J}_2)^2 = (\omega_3^{\ 1})^2 + (\omega_3^{\ 2})^2.$$

Нас будет сейчас интересовать якобиан первых двух квадратичных форм

$$\psi = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\omega^1} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\omega^2} \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\omega^1} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\omega^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega^1 & \omega^2 \\[2ex] a_{11}\omega^1 + a_{12}\omega^2 & a_{12}\omega^1 + a_{22}\omega^2 \end{vmatrix},$$

или

$$\psi = a_{12}\,(\omega^1)^2 + (a_{22} - a_{11})\,\omega^1\omega^2 - a_{12}\,(\omega^2)^2, \tag{9.4:6}$$

или в силу (9.4:3)

$$\psi = \begin{vmatrix} \omega^1 & \omega^2 \\ \omega_1^{\ 3} & \omega_2^{\ 3} \end{vmatrix}. \tag{9.4:7}$$

*Нулевые линии этой формы определяют главные направления в касательной плоскости поверхности.*

Действительно, сравнивая выражения (5.2 : 2) и (9.4 : 5) для второй квадратичной формы и учитывая формулы (9.4 : 2), получим

$$a_{11} = \frac{D}{a^2}, \quad a_{12} = \frac{D'}{ab}, \quad a_{22} = \frac{D''}{b^2};$$

откуда прямо следует совпадение уравнения (5.3 : 5) с уравнением

$$\psi = 0.$$

Форма $\psi$ имеет непосредственный геометрический смысл: это площадь инфинитезимального параллелограмма, построенного на векторах

$$d\mathbf{M} = \omega^1 \mathbf{J}_1 + \omega^2 \mathbf{J}_2,$$

$$d\mathbf{J}_3 = \omega_3{}^1 \mathbf{J}_1 + \omega_3{}^2 \mathbf{J}_2,$$

ибо модуль векторного произведения совпадает с модулем $\psi$:

$$d\mathbf{M} \times d\mathbf{J}_3 = \mathbf{J}_3 \begin{vmatrix} \omega^1 & \omega^2 \\ \omega_3{}^1 & \omega_3{}^2 \end{vmatrix} = -\psi \mathbf{J}_3.$$

Рассмотрим теперь, подобно отношению квадратичных форм $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$, отношение

$$\frac{\psi}{\varphi_1} = \frac{\omega^1 \omega_2{}^3 + \omega^2 \omega_3{}^1}{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2}. \tag{9.4:8}$$

Так же, как и отношение (5.2 : 2), отношение (9,4 : 8) зависит только от отношения форм $\omega^1 : \omega^2$, т. е. от направления касательной к кривой на поверхности. Чтобы выяснить геометрический смысл отношения (9.4 : 8), мы можем фиксировать эту касательную и совместить с ней вектор $\mathbf{J}_1$. Тогда надо положить $\omega^2 = 0$ и мы получим

$$\frac{\psi}{ds^2} = \frac{\omega_2{}^3}{\omega^1}.$$

Так как

$$d\mathbf{J}_2 = \omega_2{}^1 \mathbf{J}_1 + \omega_2{}^3 \mathbf{J}_3,$$

то в силу (9.4 : 3)

$$\mathbf{J}_3 \, d\mathbf{J}_2 = \omega_2{}^3 = a_{12} \omega^1. \tag{9.4:9}$$

Поскольку вектор $\mathbf{J}_1$ совпадает с касательной, главная нормаль $\nu$ и бинормаль $\beta$ лежат в плоскости $\mathbf{J}_2$, $\mathbf{J}_3$. Обозначим буквой $\vartheta$ угол, на который надо повернуть в положительном направлении вектор $\nu$, чтобы он совпал с вектором $\mathbf{J}_3$. Тогда

$$\mathbf{J}_2 = \nu \sin\vartheta - \beta\cos\vartheta,$$

$$\mathbf{J}_3 = \nu\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta$$

и, дифференцируя по длине дуги $ds$, получим

$$\frac{d\mathbf{J}_2}{ds} = \frac{d\nu}{ds}\sin\vartheta - \frac{d\beta}{ds}\cos\vartheta + (\nu\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta)\frac{d\vartheta}{ds},$$

или по формулам Френе

$$\frac{d\mathbf{J}_2}{ds} = (-\tau k + \varkappa\beta)\sin\vartheta + \varkappa\nu\cos\vartheta + (\nu\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta)\frac{d\vartheta}{ds},$$

или

$$\frac{d\mathbf{J}_2}{ds} = -\tau k\sin\vartheta + (\nu\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta)\left(\varkappa + \frac{d\vartheta}{ds}\right) \qquad (9.4:10)$$

и

$$\mathbf{J}_3\frac{d\mathbf{J}_2}{ds} = \frac{\omega_2{}^3}{\omega^1} = a_{12} = \varkappa + \frac{d\vartheta}{ds}. \qquad (9.4:11)$$

Аналогично геодезической кривизне

$$k_g = k\sin\vartheta$$

второй компонент вектора (9.4 : 10) будем обозначать

$$\varkappa_g = \varkappa + \frac{d\vartheta}{ds}$$

и называть *геодезическим кручением.*

Для геодезической линии главная нормаль совпадает с нормалью к поверхности и $\vartheta=0$; поэтому для геодезической линии геодезическое кручение совпадает с ее кручением.

Поскольку геодезическое кручение

$$\varkappa_g = \frac{\psi}{ds^2},$$

все линии на поверхности с общей касательной в точке поверхности имеют в общей точке одну и ту же нормальную кривизну и одно и то же геодезическое кручение.

Поэтому нормальная кривизна кривой на поверхности равна кривизне геодезической линии с той же касательной, а геодезическое кручение равно кручению этой геодезической. Поскольку нулевые линии формы $\psi$ определяют главные направления, т. е. направления линий кривизны, то *геодезическое кручение линий кривизны равно нулю.*

Для асимптотических линий соприкасающаяся плоскость совпадает с касательной плоскостью и бинормаль — с нормалью к поверхности. Поэтому $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ и геодезическое кручение совпадает с кручением линии.

Если отнести поверхность к линиям кривизны, то

$$a_{12} = 0,\ a_{11} = \frac{1}{R_1},\ a_{22} = \frac{1}{R_2},$$

и согласно (9.4 : 6)

$$\frac{\psi}{ds^2} = \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\frac{\omega^1\omega^2}{ds^2}$$

и в силу (5.8 : 4)

$$\varkappa_g = \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}\sin\varphi\cos\varphi, \qquad (9.4:12)$$

где для асимптотических линий в силу (9.4 : 5) имеет место уравнение

$$\frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2} = 0. \qquad (9.4:13)$$

Отсюда прежде всего видно, что для двух асимптотических направлений

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\sqrt{-\frac{R_2}{R_1}},$$

следовательно, геодезические кручения для асимптотических линий в заданной точке равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

Из соотношений (9.4 : 13) следует

$$\frac{\cos^2\varphi}{R_1} = -\frac{\sin^2\varphi}{R_2} = \frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{R_1 - R_2} = \frac{1}{R_1 - R_2}. \qquad (9.4:14)$$

Возвышая в квадрат формулу (9.4 : 12) для геодезического кручения, в силу формул (9.4 : 14) получаем

$$(\varkappa_g)^2 = \frac{(R_1 - R_2)^2}{(R_1)^2 (R_2)^2} \sin^2\varphi \cos^2\varphi = -\frac{1}{R_1 R_2}.$$

Отсюда **теорема Эннепера.** *Кручения асимптотических линий в точке их пересечения равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, а их произведение равно полной кривизне поверхности.*

## СОДЕРЖАНИЕ

Сергей Павлович Фиников

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Редактор *В. С. Капустина*

Технический редактор *Т. А. Масленникова*

Сдано в набор 14/XII 1960 г. Подписано к печати 30/IX 1961 г.
Л-103939 Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Печ. л. 10.
Уч.-изд. л. 6,58. Изд. № 1564.
Заказ 1874. Тираж 25 000. Цена 30 коп.

Издательство Московского университета, Москва, Ленинские горы

Типография Изд-ва МГУ, Москва, Ленинские горы