Цена 4 р. 50 к. Перепл. 1 р. 25 к.

С. П. ФИНИКОВ

ИЗГИБАНИЕ НА ГЛАВНОМ ОСНОВАНИИ И СВЯЗАННЫЕ С НИМ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

ОБЪЕДИНЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1937 Ленинград

Т 24-5-4
ТКК № 101

К ЧИТАТЕЛЮ

Издательство просит прислать Ваши замечания и отзывы об этой книге по адресу: Москва, Центр, Третьяковский проезд, д. № 1. Главная редакция технико-теоретической литературы ОНТИ.

АННОТАЦИЯ

Книга С. П. Финикова представляет монографию по одному из классических вопросов диференциальной геометрии и требует от читателя знакомства с теорией поверхностей в объеме книги того же автора „Теория поверхностей“.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Среди учредителей Московского Математического Общества особое место занимал Карл Михайлович Петерсон [1]) (13 мая 1828—19 апреля 1881). Он не принадлежал к числу университетских преподавателей и степень доктора (honoris causa) он получил значительно позднее (в 1879 г. от Новороссийского университета за свои работы по уравнениям в частных производных). Он учился в Дерптском университете, где Миндинг внушил ему любовь к геометрии. В Москву Карл Михайлович прибыл как домашний учитель, что в то время не было редкостью. Он с самого начала и весьма деятельно принял участие в собраниях того кружка математиков, из которого выросло Математическое Общество, и одновремено в 1865 г. поступил учителем математики в немецкую гимназию (Петропавловское училище) в Москве, где и остался до конца своих дней, вызывая удивление учеников своей рассеянностью и некоторой отрешенностью от мира, что не мешало ему, однако, возбуждать в своих учениках интерес к изучению математики.

Этот учитель средней школы, не претендовавший на университетскую кафедру, был одним из наиболее талантливых геометров, с живым и ярким воображением, намного опередившим свое время. Его мемуары по диференциальной геометрии поистине являются украшением Математического сборника, поднимая его на уровень лучших европейских журналов. Весьма характерно, что они не получили должной оценки у современных ему математиков. Новороссийский университет, присудив ему степень доктора, выделил на первое место его работы по уравнениям в частных производных, которые не шли впереди работ других авторов. Для математического мира на Западе статьи Петерсона, напечатанные в Математическом сборнике, оставались долгое время совершенно неизвестными, а изданная им в Лейпциге на немецком языке отдельная книжка „Über Kurven und Flächen“ (1868) затерялась среди математической литературы.

Только много лет спустя, когда на Западе передовые геометры стали самостоятельно подходить к идеям изгибания на главном основании, работы Петерсона были вновь открыты, полностью перепечатаны в иностранной математической прессе и получили всеобщее признание.

Изгибание на главном основании было одной из наиболее счастливых идей Петерсона. Здесь идея изгибания получила наиболее яркое осуществление. Вместе с тем эта проблема сразу же оказалась в центре

[1]) Биографические сведения приведены в статье Млодзеевского „Карл Михайлович Петерсон и его геометрические работы“. Мат. Сб. 24, 1—21, 1903. См. также Stäckel. Bibliotheca Mathem. 32, 1901.

наиболее интересных работ по диференциальной геометрии. За последние 40—50 лет почти все более или менее крупные геометры внесли свою долю в разработку этой теории, связав ее с целым рядом новых вопросов самого разнообразного характера.

Можно смело сказать, что целая полоса в развитии диференциальной геометрии была связана с этой замечательной теорией. И до сих пор ее нельзя считать законченной. То оживление интереса к классическим проблемам диференциальной геометрии, которое наблюдалось за последнее десятилетие, не разрешив вполне ни одной задачи нашей теории, обнаружило неполноту найденных ранее решений и поставило в ней новые проблемы, которые каждый год привлекают новых исследователей. Достаточно отметить, что последние номера в списке литературы приходилось вносить уже во время печатания книги.

Светлой памяти Карла Михайловича Петерсона, этого бескорыстного труженика науки, геометра по призванию, основателя нашей теории мне и хотелось бы посвятить эту книгу.

Я пытаюсь здесь дать представление о проблеме во всей ее широте. При этом приходится касаться весьма разнообразных проблем диференциальной геометрии. Чтобы иметь твердые границы того, что надо доказывать и что можно считать известным, я предполагал у читателя знания диференциальной геометрии в объеме моей книжки „Теория поверхностей"; на нее всюду я далее и ссылаюсь. При изложении работ различных авторов я старался дать понятие о своеобразии их методов, но, конечно, слишком часто мне приходилось отступать от этого правила и давать свои выводы.

В конце книги приведены список обозначений, применяемых в тексте, и список литературы, на которую имеются ссылки (цифры жирного шрифта в квадратных скобках).

В заключение считаю приятным долгом выразить благодарность редакции технико-теоретической литературы, которая очень живо откликнулась на мое предложение издать книгу и выпускает ее в короткий срок.

С. Фиников

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Введение.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ ИЗГИБАНИЯ НА ГЛАВНОМ ОСНОВАНИИ.

Глава I.

Стр.

ГЛАВНЫЕ ОСНОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТИ.

§ 1. Основание изгибания двух налагающихся поверхностей 23
§ 2. Главные основания данной поверхности или данного линейного элемента 34
§ 3. Приложения 39
§ 4. Поверхности с бесконечным числом главных оснований 46

Глава II.

КВАДРАТИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА.

§ 1. Главное основание изгибания и его определение с помощью квадратичных решений тангенциального уравнения Лапласа 55
§ 2. Примеры квадратичных решений 61
§ 3. Главные основания при одном или двух семействах цилиндрических или конических линий 73

Глава III.

ПОВЕРХНОСТИ БИАНКИ

§ 1. Конгруэнции W с равной кривизной фокальных полостей в соответствующих точках 81
§ 2. Преобразование поверхности, отнесенной к главному основанию . . 95
§ 3. Бесконечно малое изгибание и присоединенная поверхность 107
§ 4. Поверхности Бианки 115

Глава IV.

ЦИКЛИЧЕСКИЕ КОНГРУЭНЦИИ.

§ 1. Изгибание конгруэнции с сохранением развертывающихся поверхностей 121
§ 2. Циклические системы Рибокура 127
§ 3. Преобразование Рибокура 138

Стр.

Глава V.

ПОВЕРХНОСТИ ФОССА.

§ 1. Конгруэнции Гишара 147
§ 2. Изгибание поверхности, переводящее асимптотические линии в сопряженную систему 155

Глава VI.

ИЗГИБАНИЕ НА КИНЕМАТИЧЕСКОМ ОСНОВАНИИ.

§ 1. Проблема качения поверхности по ее изгибанию 159
§ 2. Изгибание на кинематически сопряженном основании 166
Список обозначений 170
Список литературы по изгибанию на главном основании 171

Введение.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ ИЗГИБАНИЯ НА ГЛАВНОМ ОСНОВАНИИ.

Вскоре после классического мемуара Гаусса „Disquisitiones generales circa superficies curvas" стали появляться работы, посвященные отдельным вопросам изгибания поверхностей или изгибанию определениых семейств поверхностей. Уже среди первых примеров изгибания мы встречаем непрерывное изгибание поверхности с сохранением сопряженной системы линий. Таково опубликованное в 1838 г. Миндингом [5] изгибание поверхностей вращения в поверхности вращения или полученное позднее в 1862 г. Буром [7] изгибание поверхностей каналов.

Миндинг дает уравнения налагающихся поверхностей в форме

$$\left.\begin{aligned} x = a\varphi(u)\sin\frac{v}{a}, \quad y = a\varphi(u)\cos\frac{v}{a}, \\ z = \int\sqrt{f'^2(u)+(1-a^2)\varphi'^2(u)}\,du, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где u и v — криволинейные координаты на поверхности и a — параметр изгибания. Нетрудно заметить, что все эти налагающиеся поверхности отнесены к линиям кривизны; меняя параметр a, мы получаем непрерывное изгибание поверхности с сохранением лииий кривизны. Это — первый пример изгибания на главном основании. Впрочем, автор не придает значения тому, что в его изгибании сохраняется сопряженная система, и не замечает этого. То же самое надо сказать о работе Бура. Хотя он рассматривает наиболее общий случай непрерывного изгибания с сохранением линий кривизны, но нигде не упоминает об этом.

Изгибание на прямоугольиом основании обратило на себя внимание ранее других изгибаиий на главном основании. Уже в 1856 г. Кодацци [6] рассматривает поверхности, которые при изгибаиии сохраняют те же линии кривизны, и показывает, что они или развертываются на плоскость или содержат одно семейство линий кривизны в параллельных плоскостях. Позднее Боине [8] в приложеиии к мемуару, представленному для соискания премии Парижской академии наук 1860 г., снова возвращается к этому вопросу. Пользуясь только что опубликованными тогда уравиениями Кодацци, он ищет коэфициенты второй квадратичной формы поверхности, отнесенной к линиям кривизны. Исключая с помощью уравнения Гаусса один из этих коэфициеитов, он получает для другого два уравнения с частными производными первого порядка.

Обнаружив, что условие интегрируемости — второй степени относительно искомой функции, автор заключает, что не может быть более двух поверхностей, налагающихся друг на друга так, что их линии кривизны остаются сопряженными, без того чтобы их было бесконечное множество. Последний случай получается, если условие интегрируемости удовлетвореио тождественно. Обратив в нули все коэфициенты этого квадратного уравнения, автор получает после интеграции, что единственные поверхности этого рода — поверхности каналов (surfaces moulures de Monge). Бонне пользуется в своем мемуаре уравнениями Кодацци только для ортогональной системы координатных линий, опасаясь в противном случае громоздкости формул, и это обстоятельство, очевидно, помешало ему поставить более широкую задачу об изгибании поверхности с сохранением сопряженной системы линий.

За год до того, как появилось окончание исследований Бонне, Петерсон печатает в первом томе Математического сборннка статью „Об отношениях и сродствах между кривыми поверхностями“ [9], где положены основы нашей теории. Петерсон приходит к изгибанию поверхностей как к частному случаю более общих понятий — отношения и сродства поверхностей. Отношением он называет взаимнооднозначное непрерывное соответствие между точками двух поверхностей; сродство, кроме того, „предполагает особенные свойства, общие этим поверхностям“, это — связь между поверхностями, „которая обусловливается тремя или более уравнениями между координатами или переменными обеих поверхностей“. Как один из видов сродства автор рассматривает сродство изгибания поверхностей. Прежде всего он показывает, что всегда можно выбрать такие общие переменные, чтобы параметрические линии были сопряжены на обеих поверхностях. Такие линии Петерсон называет основанием отношения или сродства, в частности основанием изгибания (или линиями изгибания). Если по тем же линиям поверхность может быть изогнута в две различные формы, то она допускает непрерывное изгибаиие с сохранением сопряженной системы; эту сопряжеиную систему Петерсон называет главным основанием изгибания. Как примеры изгибания на главном основании он приводит изгибание поверхностей переноса и изгибание довольно широкого класса поверхностей, уравнения которых он дает в форме

$$x = a\alpha, \quad y = a\beta, \quad z = b, \tag{2}$$

где a и b — функции одного u, α и β — функции одного v; частным случаем этого класса поверхностей являются поверхности второго порядка. Изгибание тех и других поверхностей автор получает, составляя линейный элемент поверхности и подбирая такие изменения фуикций a, b, α и β, которые оставляют линейный элемент неизменным. Мемуар Петерсона остался незаконченным; свои исследования об изгибании поверхностей он хотел дать в отделе о графическом отношении, который не был напечатан. Из того, что опубликовано Петерсоном в первом томе Математического сборника, к теории изгибания относится еще очень общая теорема, которая, если известно основание у двух налагающихся поверхностей, позволяет найти с помощью только квадратур новую пару налагающихся поверхностей. Основание изгибания на новых поверхностях имеет то же сферическое изображение, как и на первых двух; при том, если на первоначальной поверхности основание было главным, то оно останется главным и на производной. Прилагая эту теорему к поверхностям (2), автор получил изгибание на главном основании поверхностей

$$\left.\begin{aligned} x &= a\alpha + \int \varphi(v)\frac{\partial\alpha}{\partial v}\,dv,\\ y &= a\beta + \int \varphi(v)\frac{\partial\beta}{\partial v}\,dv,\\ z &= b, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где $\varphi(v)$ — произвольная функция одного v. Эти поверхности заключают в себе как частный случай поверхности каналов.

Работу эту автор издал затем отдельной брошюрой [10] на немецком языке. Из дополнений, которые здесь имеются, следует отметить изгибание минимальных поверхностей на мнимом основании и изгибание некоторой поверхности (получаемой вращением цепной линии), где основание изгибания состоит из геодезических линий.

Изгибанию поверхностей второго порядка Петерсон посвятил отдельную работу [12]. Уравнения налагающихся поверхностей автор и здесь дает без вывода и только поверяет совпадение линейного элемента; зато подробно останавливается на исследовании пределов действительности изгибаний, а также рассматривает некоторые предельные случаи, когда, например, длины осей поверхности обращаются в нули, а переменные параметры получают бесконечные значения, что дает ему возможность получить изгибания некоторых поверхностей вращения и псевдосферы. К этим исследованиям Петерсона примыкает работа [1]) Млодзеевского [13], [27], где поверхности второго порядка рассматриваются как производные от поверхностей вращения, если ординаты меридианов изменены в отношении постоянном на одном и том же меридиане и переменном от одного меридиана к другому. Так как поверхность второго порядка можно рассматривать как производную от трех различных поверхностей вращения, смотря по тому, какая из трех осей поверхности будет совпадать с осью вращения, то возможны три изгибания на главном основании, и, следовательно, на поверхности второго порядка имеются три главных основания.

Работы Петерсона не получили должного распространения; несмотря на то, что свои исследования он издал на немецком языке, за границей его работы остались совершенно неизвестными, и его главнейшие результаты были снова найдены значительно позднее другими учеными. В западной литературе на работы Петерсона впервые обратил внимание Штэккель [35], [37] в 1896 г. В 1905 г. все работы Петерсона по геометрии переведены на французский язык.

Разработка вопросов, связанных с изгибанием на главном основании, началась — 20 с лишним лет спустя после появления первой работы Петерсона — с рассмотрения частного случая, отмеченного еще Петер-

[1]) Это сочинение содержит исторический обзор работ по изгибанию поверхностей.

соном, когда основание состоит из геодезических линий. Фосс [14] поставил вопрос о разыскании поверхностей, на которых два семейства геодезических линий сопряжены. Пользуясь уравнениями Кодацци, он без труда определяет коэфициенты второй квадратичной формы поверхности, отнесенной к такой сопряженной системе,

$$D=\sqrt{\frac{EG-F^2}{G}}\,U, \quad D''=\sqrt{\frac{EG-F^2}{E}}\,V. \tag{4}$$

Здесь E, F, G — коэфициенты линейного элемента поверхности, U и V — произвольные функции, соответственно, одного u и одного v. Трудно сказать, почему автор не заметил, что его формулы определяют не одну поверхность, а семейство налагающихся с сохранением этой сопряженной системы поверхностей. Действительно, в уравнение Гаусса входит только произведение функций U и V, и, следовательно, одна из них содержит множителем, другая делителем произвольное постоянное. Впрочем, Фосс, меняя параметры u и v, сейчас же заменяет произвольные функции единицами и переходит к определению сферического изображения. Уравнения (4) позволяют ему установить, что координатные линии на сфере являются изображениями асимптотических линий поверхности постоянной отрицательной кривизны. Разыскание поверхностей Фосса приводит к диференциальному уравнению второго порядка. Как частные случаи своих поверхностей Фосс намечает минимальные поверхности и поверхности вращения. Минимальные поверхности Фосса рассмотрел затем Раццабони [15], который показал, что единственная поверхность этого рода — геликоид — имеет бесчисленное множество таких сопряженных систем, а поверхности вращения подробно исследовал Ташауэр [56].

Важный шаг в развитии теории поверхностей Фосса сделал Гишар [16]. Построив свои прекрасные формулы для конгруэнции, заданной сферическим изображением развертывающихся поверхностей, он прилагает их к тому случаю, когда ребра возврата развертывающихся поверхностей служат линиями кривизны фокальных поверхностей. Сферическое изображение развертывающихся поверхностей этой конгруэнции, как показывает автор, может быть изображением асимптотических линий псевдосферы. Фокальные поверхности конгруэнции составляют особый класс поверхностей; за ними утвердилось название поверхностей Гишара. Поверхности центров поверхностей Гишара имеют сопряженную систему геодезических линий. В следующих работах [17, 21] автор развивает это замечание. Определение поверхности Фосса он приводит к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=\theta\cos\varphi, \tag{5}$$

где φ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}=\sin\varphi. \tag{6}$$

Косинусы нормали и расстояние касательной плоскости поверхности Фосса от начала координат удовлетворяют уравнению (5). Касательные к любому из сопряженных семейств геодезических линий образуют нормальную конгруэнцию. Каждая ортогональная к лучам конгруэнции поверхность есть поверхность Гишара, для которой поверхность Фосса служит одной из полостей поверхности центров кривизны. Другая полость поверхности центров — тоже поверхность Фосса. Таким образом Гишар получает преобразование, которое дает возможность по одной поверхности Фосса строить другие. Это преобразование получает особый интерес благодаря указанной еще Фоссом связи рассматриваемой поверхности с псевдосферой, позволяющей определить псевдосферу с помощью квадратур, если известна поверхность Фосса.

В работе Гишара мы впервые встречаем в частном случае главного основания, состоящего из геодезических линий, конгруэнцию, которая играет такую роль в теории изгибания на главном основании, — конгруэнцию, развертывающиеся поверхности которой имеют своим сферическим изображением изображение главного основания поверхности. В том же году, когда появилась вторая статья Гишара, Бианки опубликовал мемуар [18, 20], в котором он рассматривает общий случай этой конгруэнции, хотя и вне связи с изгибанием на главном основании. Исходной точкой в этой работе служит система кругов, ортогональных к семейству поверхностей, которую Рибокур ввел под названием циклической системы. Бианки в цитированной статье ставит вопрос, когда конгруэнция осей этих циклов будет конгруэнцией Рибокура, т. е. сферическое изображение развертывающихся поверхностей ее будет изображением асимптотических линий какой-либо поверхности. С этой целью автор берет конгруэнцию, отнесенную к развертывающимся поверхностям, и строит циклы, осями которых служат лучи конгруэнции. Требование, чтобы все эти круги были ортогональны к семейству поверхностей, приводит его к системе двух уравнений с частными производными первого порядка, от которой зависит определение циклической системы. Автор показывает, что в случае конгруэнции Рибокура эта система вполне интегрируема, и, следовательно, конгруэнция может служить осями бесконечного множества циклических систем, если можно построить на ней хоть одну систему ортогональных кругов. Сферическое изображение развертывающихся поверхностей конгруэнции удовлетворяет в таком случае условию

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{ {1\,2 \atop 1} \right\}' = \frac{\partial}{\partial v}\left\{ {1\,2 \atop 2} \right\}' = 2\left\{ {1\,2 \atop 1} \right\}'\left\{ {1\,2 \atop 2} \right\}'. \tag{7}$$

Это приводит автора к заключению, что кривизна образующей поверхности такой конгруэнции Рибокура в параметрах асимптотических линий имеет вид

$$K=-\frac{1}{[\varphi(u)+\psi(v)]^2}. \tag{8}$$

Как показывает Бианки в следующей статье [19], конгруэнция, характеризуемая условием (7), — единственная, которую можно назвать циклической бесконечным числом способов. Возвращаясь к поверхностям с кривизной (8), которые теперь носят название поверхностей Бианки, автор доказывает, что они служат фокальными поверхностями той особой конгруэнции, у которой на фокальных поверхностях асимптотические линии соответствуют, и в соответствующих точках кривизны фокальных поверхностей одинаковы. Обратно, по данной поверхности с кривизной (8) можно построить бесконечно много конгруэнций этого типа;

вторая фокальная поверхность каждой из этих конгруэнций будет снова поверхностью с кривизной вида (8). Таким образом Бианки дал преобразование, позволяющее по одной поверхности этого класса строить сколько угодно других. Как пример своих поверхностей Бианки приводит прямые коноиды и равносторонний гиперболический параболоид. Применяя к последнему свое преобразование, автор получает поверхность 4-го порядка. Особенно подробно Бианки останавливается на том случае, когда одна из произвольных функций U или V в выражении (8) обращается в постоянное. Среди теорем, которые он доказывает, можно отметить следующие:

У всех поверхностей этого рода асимптотические линии одной системы суть кривые постоянного кручения.

На асимптотических линиях постоянного кручения асимптотические линии второй системы отсекают пропорциональные дуги; тем же свойством обладает сферическое изображение асимптотических линий.

В конгруэнции Рибокура, образованной посредством рассматриваемой поверхности, одна из фокальных поверхностей пересекается развертывающимися поверхностями по линиям кривизны; коэфициенты линейного элемента этой фокальной поверхности, отнесенной к линиям кривизны, удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}=U, \tag{9}$$

где U — функция одного u.

Ближайшие годы после опубликования этой работы Бианки были очень богаты в истории развития теории изгибания на главном основании. Пользуясь теоремой Дарбу — все циклические системы, расположенные в касательных плоскостях поверхности, происходят из кругов пересечения сфер нулевого радиуса с касательными плоскостями какой-либо из поверхностей, налагающихся на данную поверхность, — Рибокур [22] рассматривает все циклические системы, которые лежат в касательных плоскостях поверхности (g) и происходят из налагающейся на нее поверхности (Ω), и катит одну из этих поверхностей по другой. В каждый момент те круги этих циклических систем, которые лежат в общей касательной плоскости, совпадают; а так как линии кривизны на поверхностях, ортогональных к циклам, соответствуют сопряженной системе на поверхностях, огибаемых плоскостями циклов, то в каждый момент в общей касательной плоскости есть два направления сопряженных на поверхности (g) и на поверхности (Ω). Таким образом Рибокур снова приходит к мысли об единой общей сопряженной системе на двух налагающихся поверхностях, которую Петерсон высказал слишком 20 лет назад. Коссера [23], [24], [33] добавляет, что эта общая на двух налагающихся поверхностях сопряженная система — особая; сферическое изображение такой системы служит изображением развертывающихся поверхностей циклической конгруэнции. Затем этот автор переходит к вопросу Петерсона о сопряженной системе, сохраняющейся на нескольких налагающихся поверхностях. Постановка задачи очень напоминает работу Бонне о сохранении линий кривизны. Коссера относит поверхность к исследуемой сопряженной системе и, пользуясь кинематическим методом Дарбу, получает соотношения

$$p=\lambda\xi_1,\quad q=\lambda\eta_1,\quad p_1=\mu\xi,\quad q_1=\mu\eta,$$

где $p,\ q,\ p_1,\ q_1$ — компоненты вращения соответственно при движении по линии u и по линии v; $\xi,\ \eta,\ \xi_1\ \eta_1$ — компоненты поступательного движения; λ и μ — множители пропорциональности. Внося эти величины в уравнения Гаусса и Кодацци, автор получает систему уравнений для λ и μ

$$\left.\begin{aligned}&\lambda\mu=k^2,\\&\frac{\partial\lambda}{\partial v}+C_2\lambda-A_2\mu=0,\quad \frac{\partial\mu}{\partial u}+A_1\mu-C_1\lambda=0,\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где все величины, кроме λ и μ, выражаются через коэфициенты линейного элемента. Условие совместности уравнений (10) представляет квадратное относительно λ^2 уравнение, и автор получает снова теорему Петерсона: *если система линий сопряжена более чем на одной налагающейся поверхности, то она сопряжена на бесконечном множестве налагающихся поверхностей.* Кроме того, приравнивая нулю коэфициенты при λ^4, λ^2 и свободный член в условии совместности уравнений (10), автор получает условия, которым удовлетворяет поверхность, отнесенная к главному основанию изгибаиия. В коэфициентах линейного элемента сферического изображения поверхности эти условия имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1 & 2\\ & 1\end{Bmatrix}'=\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}1 & 2\\ & 2\end{Bmatrix}'=2\begin{Bmatrix}1 & 2\\ & 1\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}1 & 2\\ & 2\end{Bmatrix}'. \tag{7}$$

Сравнивая эти уравнения с результатами, полученными Бианки, Коссера приходит к заключению, что сопряженная система, сохраняющаяся на бесконечном множестве налагающихся поверхностей, характеризуется тем, что она имеет сферическим изображением изображение развертывающихся поверхностей конгруэнции, которая может служить осями бесконечного множества циклических систем; эти же линии на сфере служат изображением асимптотических линий на поверхности с кривизной

$$K=-\frac{1}{[\varphi(u)+\psi(v)]^2}.$$

Бианки [31] дал этому новое толкование, введя понятие о поверхностях, присоединенных в бесконечно малом изгибании (superficie associate). Поверхностям, изгибающимся на главном основании, присоединены поверхности Бианки, в частности псевдосфера присоединена поверхности Фосса, так что всякая поверхность Фосса изгибается на главном основании из геодезических линий.

Этими работами теория изгибания с сохранением сопряженной системы в главных частях была закончена. Следующие работы большей частью касались отдельных случаев изгибания на главном основании. Гурса [32], рассматривая изгибание поверхности, при котором семейство плоских параллельных сечений сохраняет это свойство, пришел к найденному еще Петерсоном изгибанию, главное основание которого состоит из семейства плоских параллельных сечений поверхности и семейства линий прикосновений описанных конусов (конических линий). Штэккель [35], [37] разыскивает изгибания на главном основании среди указанных Буром изгибаний винтовых поверхностей и, прилагая к ним теорему Петерсона, находит некоторые новые изгибания.

В обширной работе [36], посвященной изгибанию поверхностей, Гишар ставит в связь пары налагающихся поверхностей с поверхностями в пространстве четырех измерений, налагающимися на плоскость; автор стремится установить свойства основания изгибания, но дает сравнительно мало новых результатов. Относительно главного основания следует отметить данное Гишаром определение его в тангенциальных координатах. Преобразуя уравнение Лапласа, которому удовлетворяют тангенциальные координаты поверхности, отнесенной к главному основанию, к каноническому виду Мутара, автор показывает, что задача разыскания поверхности, изгибающейся на главном основании, равносильна задаче нахождения трех решений ξ, η, ζ уравнения

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = M\theta,$$

так чтобы

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = f^2(u)+\varphi^2(v).$$

В нескольких заметках [38], [41], [42] Гишар рассматривает циклическую конгруэнцию, соответствующую главному основанию с одним семейством геодезических линий. Развертывающиеся поверхности такой конгруэнции пересекают одну фокальную поверхность по линиям кривизны.

Почти все известные в то время изгибания на главном основании относились к поверхностям Петерсона, т. е. к поверхностям, обладающим сопряженной системой конических или циклических линий. Ввиду того что знание поверхности Бианки позволяет определить изгибание на главном основании, представлял интерес вопрос, каким изгибаниям соответствуют указанные Бианки примеры его поверхностей: коноид и, в частности, геликоид. Эту задачу разрешил Млодзеевский [43], показав, что всякой поверхности Петерсона присоединен прямой коноид, в частности поверхности каналов — минимальный геликоид, поверхности переноса — равносторонний гиперболический параболоид. Таким образом указанные Бианки решения не дали новых изгибаний. Новый случай изгибания на главном основании был дан Цицейкой [40], [46] и Егоровым [44], [45], [47]. Это — алгебраическая поверхность 18-го порядка

$$\left.\begin{aligned} x &= A_1(u-s_1)^{\frac{3}{2}}(v-s_1)^{\frac{3}{2}},\\ y &= A_2(u-s_2)^{\frac{3}{2}}(v-s_2)^{\frac{3}{2}},\\ z &= A_3(u-s_3)^{\frac{3}{2}}(v-s_3)^{\frac{3}{2}}, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где A_1, A_2, A_3, s_1, s_2, s_3 — постоянные. Ей присоединена поверхность 3-го порядка. Поверхности, получающиеся применением теоремы Петерсона, тоже все алгебраические.

Поверхности, присоединенные поверхностям, получаемым из прямого коноида преобразованием Бианки, дает Егоров [47], применяя метод Гишара к уравнению

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{2}{(u+v)^2}\,\theta.$$

Раффи [50], вычисляя кручение координатных линий, показывает, что главное основание с одним семейством плоских линий содержит другое семейство тоже плоских линий.

Общей теории касаются две интересные заметки Демулена [48], [51]. Сферическое изображение асимптотических линий поверхности Бианки определяется двумя уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \begin{Bmatrix}1\ 2\\ 2\end{Bmatrix} &= -\frac{f'(\alpha)}{2\,[f(\alpha)+\varphi(\beta)]},\\ \begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix} &= -\frac{\varphi'(\beta)}{2\,[f(\alpha)+\varphi(\beta)]}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Смотря по тому, обращаются ли функции $f(\alpha)$ и $\varphi(\beta)$, обе или одна из них в постоянное или же обе они являются переменными, Демулен разделяет сферическое изображение главного основания на три типа. Если ни одна из этих функций не обращается в постоянное, то можно положить $f(\alpha)=\alpha$, $\varphi(\beta)=\beta$. Интегрируя в этом предположении уравнения (12), автор получает линейный элемент сферического изображения в виде

$$ds^2 = \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\frac{d\alpha^2}{\alpha+\beta} - 2\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\,\partial\beta}\,d\alpha\,d\beta + \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\frac{d\beta^2}{\alpha+\beta}, \tag{13}$$

где ψ должно только удовлетворять уравнению Гаусса для сферы, которое будет 4-го порядка. Если одна из функций f или φ — постоянное, то главное основание содержит одно семейство геодезических линий. Демулен полагает $f(\alpha)=0$, $\varphi(\beta)=\beta$ и получает сферическое изображение

$$ds^2 = e^{\beta}\left(d\alpha^2 + 2\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\,d\alpha\,d\beta + \psi\,d\beta^2\right); \tag{14}$$

здесь ψ удовлетворяет уравнению Гаусса, которое при обычном обозначении частных производных имеет вид

$$\frac{\partial r}{\partial\alpha}(\psi-p^2) + \left(r-\frac{1}{2}\right)\left(ps-\frac{1}{2}\,q\right) = e^{\beta}(\psi-p^2)^2.$$

Сферическое изображение главного основания с двумя семействами геодезических линий автор получает, полагая $f(\alpha)=0$, $\varphi(\beta)=1$, в том виде, в каком дал еще Гишар:

$$ds^2 = d\alpha^2 - 2\cos 2\omega\,d\alpha\,d\beta + d\beta^2, \tag{15}$$

где ω удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} = \sin\omega\cos\omega.$$

Во второй заметке Демулен подходит к тому же вопросу определения сферического изображения главного основания с другой стороны, преобразуя какую-либо определенную систему линий на сфере, заданную линейным элементом

$$ds^2 = E\,dz^2 + 2F\,dz\,dz_1 + G\,dz_1^2,$$

так, чтобы новые координатные линии $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$, определяемые уравнениями

$$z = \varphi(\alpha, \beta), \quad z_1 = \psi(\alpha, \beta),$$

служили изображением главного основания. Обозначая кривизну соответствующей поверхности Бианки через $-\lambda^{-2}$, он получает для неизвестных функций z и z_1 два уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\beta}[\lambda(Ep^2 + 2Fpp_1 + Gp_1^2)] + \\ &+ [Epq + F(pq_1 + p_1q) + Gp_1q_1]\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha} = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial\alpha}[\lambda(Eq^2 + 2Fqq_1 + Gq_1^2)] + \\ &+ [Epq + F(pq_1 + p_1q) + Gp_1q_1]\frac{\partial\lambda}{\partial\beta} = 0; \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

здесь p и q — частные производные по α и β от z; p_1 и q_1 — от z_1. Первоначальная система линий на сфере остается, таким образом, произвольной. Принимая за такую систему меридианы и параллели на сфере и считая $\lambda = \alpha + \beta$, автор ищет решения уравнений (16) в форме

$$z_1 = \alpha - \beta, \quad z = f(\alpha + \beta),$$

что приводит его к одному уравнению второго порядка для f:

$$2(\alpha + \beta)f'' + 2f' + (\alpha + \beta)\sin 2f = 0.$$

Если взять поверхность, для которой меридианы и параллели сферы служат изображением асимптотических линий, то на ней линии $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ сопряжены. Таким образом Демулен приходит к заключению, что минимальный геликоид обладает ∞^2 систем сопряженных линий, сохраняющихся в непрерывном изгибании поверхности.

В этом же мемуаре [**51**], [**64**] он отмечает очень интересное свойство поверхности Фосса, рассмотренное позднее Бианки [**61**], Эйзенхартом [**71**] и Гамбье [**109**], [**133**]. Только поверхности Фосса изгибаются так, что асимптотические линии на новой поверхности становятся сопряженными; основанием такого изгибания служит система сопряженных геодезических линий. Здесь же Демулен замечает без доказательства, что на поверхности может быть не более двух систем геодезических сопряженных линий; если их больше, то их на поверхности бесконечное множество.

Общей же теории касаются появившиеся вскоре две заметки Цицейки [**49**], [**58**]. В первой заметке он отмечает изменение данных Демуленом коэфициентов линейного элемента сферического изображения главного основания с изгибанием поверхности, во второй — изменение коэфициен-

тов второй квадратичной формы поверхности, изгибающейся на главном основании.

Серван [**52**] останавливается на характерном свойстве второй квадратичной формы поверхности второго порядка и ее изогнутой формы, отнесенных к основанию, вообще простому, этого изгибания. Поверхность второго порядка автор относит к двум семействам прямолинейных образующих; общая сопряженная система двух рассматриваемых поверхностей в таком случае будет

$$\Delta\,du^2 - \Delta''\,dv^2 = 0, \tag{17}$$

где Δ и Δ'' пропорциональны коэфициентам второй квадратичной формы поверхности, налагающейся на данную поверхность второго порядка. Пользуясь уравнениями Кодацци, которые в этом случае принимают особенно простой вид, автор находит интегрирующий множитель для двух уравнений, на которые распадается уравнение (17). Это дает ему возможность вычислить коэфициенты D, D', D'' обеих поверхностей, отнеся их к общей сопряженной системе. Вторая квадратичная форма поверхности второго порядка обладает в таком случае свойством

$$D + D'' = -\frac{1}{\rho},$$

где $-\rho^4$ — кривизна поверхности; на поверхности, налагающейся на нее, это основание будет изотермически сопряженной системой. Последнее свойство следует также из установленного еще ранее Дарбу соответствия между поверхностью, налагающейся на поверхность второго порядка, и некоторой изотермической поверхностью; в силу этого соответствия всякой сопряженной системе на изогнутой поверхности соответствует ортогональная система на изотермической поверхности, а основанию изгибания — линии кривизны. К этим же свойствам основания, по которому поверхность может быть изогнута в поверхность 2-го порядка, возвращается Бианки в третьем томе 3-го изд. Lezioni di geom. diff. [**2**, 1909 г., 237] и в отдельной статье [**80**]. Здесь он, между прочим, показывает, что касательные к каждому семейству линий, составляющих такое основание, образуют конгруэнцию W. В моей заметке [**78**] в Математическом сборнике я показываю, что все главные основания на поверхности второго порядка даны Млодзеевским.

Драш [**55**], [**75**] отмечает непрерывное изгибание некоторой мнимой поверхности, сферическое изображение главного основания которой соответствует прямолинейным образующим сферы.

Как мы видели, большинство примеров изгибания на главном основании относилось к тому классу, когда главное основание состоит из двух семейств конических или цилиндрических линий. Все поверхности, обладающие главным основанием такого рода, нашел Млодзеевский [**63**], [**70**]. Автор ставит вопрос даже несколько шире, отыскивая поверхности, на которых сопряженная система конических линий будет простым основанием. С этой целью он прежде всего устанавливает уравнение поверхности, отнесенной к сопряженной системе конических линий

$$x = \frac{a + \alpha}{l + \lambda}, \quad y = \frac{b + \beta}{l + \lambda}, \quad z = \frac{c + \gamma}{l + \lambda}, \tag{18}$$

где a, b, c, l — функции одного u; α, β, γ, λ — функции одного v. Если поверхность изгибается с сохранением этой сопряженной системы, то конические линии остаются коническими. Таким образом автор сводит задачу к исследованию вопроса, когда две поверхности вида (18) налагаются друг на друга. Требуя, чтобы функции a', b', c', α', β', γ' второй поверхности содержали произвольный параметр изгибания, он находит поверхности с главным основанием этого рода; это — так называемые производные от поверхностей вращения, поверхности переноса и минимальные поверхности. Исследование Млодзеевского было затем значительно позднее дополнено Масловым [110], который указал еще один случай изгибания на главном основании с двумя семействами конических линий.

Более общий вопрос изыскания поверхностей с главным основанием, содержащим одно семейство конических или цилиндрических линий, значительно позднее решен Егоровым [59], [69], [76]. Он исходит при этом из того соображения, что касательные к коническим линиям образуют конгруэнцию, вторая фокальная поверхность которой сводится к линии, а следовательно, уравнение Лапласа, которому удовлетворяют координаты поверхности, имеет один инвариант, равный нулю. Так как при взаимном преобразовании пространства конические линии преобразуются в цилиндрические, то тангенциальные координаты поверхности, отнесенной к главному основанию с одним семейством плоских линий, удовлетворяют уравнению Лапласа с одним инвариантом, равным нулю. Таким же образом, так как вторая фокальная поверхность конгруэнции касательных к цилиндрическим линиям — развертывающаяся, координаты поверхности, отнесенной к главному основанию с одним семейством конических линий, удовлетворяют уравнению Лапласа, которое помощью одного преобразования Лапласа преобразовывается в уравнение с одним инвариантом, равным нулю. Эти положения позволяют автору свести задачу к отысканию трех решений уравнения

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=0$$

или

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=\frac{2}{(u+v)^2}\theta, \tag{19}$$

удовлетворяющих соотношению

$$\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2=\varphi(u)+\psi(v).$$

Кроме известных уже оснований с двумя семействами конических или цилиндрических линий, он получает, таким образом, новые случаи изгибаний. Это — наиболее обширный класс известных нам поверхностей, изгибающихся на главном основании.

Частные случаи изгибания на главном основании рассматривали еще Смит [67] и Раффи [72], [74]. Первый из них исходит из поверхностей, на которых линии кривизны совпадают и, следовательно, образуют асимптотические линии; так как кривизна таких поверхностей — функция одного параметра, то они принадлежат к поверхностям Бианки. Второй

рассматривает мнимые поверхности, на которых главное основание содержит линии нулевой длины. Изгибания эти уже были указаны Млодзеевским и Егоровым.

Бианки [60], возвращаясь к вопросу о сферическом изображении простого основания изгибания, показывает, что оно совпадает с изображением в смысле Клиффорда асимптотических линий некоторой поверхности в эллиптическом пространстве.

С 1914 г. стали появляться статьи [82], [85], [88] Эйзенхарта, объединенные впоследствии (1923 г.) в его книге [94] по преобразованию сопряженных систем, в частности по преобразованию главного основания изгибания. Теорема Бианки о преобразовании поверхностей с кривизной вида $K=-\frac{1}{(u+v)^2}$ в параметрах асимптотических линий в силу связи между этими поверхностями и поверхностью, отнесенной к главному основанию, естественно переносится и на преобразование главных оснований. Нельзя, однако, сказать, чтобы преобразование Эйзенхарта целиком содержалось в преобразовании Бианки. Поверхность Бианки, отнесенная к асимптотическим линиям, имеет то же сферическое изображение, как и главное основание на присоединенной поверхности. Следовательно, первые три тангенциальные координаты обеих поверхностей совпадают. Эти три координаты по формулам Лёльевра вполне определяют поверхность Бианки, отнесенную к асимптотическим линиям, но их еще недостаточно, чтобы определить поверхность, несущую главное основание. Чтобы определить главное основание, как отметил Гишар, надо еще задать четвертую координату, удовлетворяющую тому же уравнению Мутара. Таким образом преобразование Бианки имеет дело с первыми тремя квадратичными решениями; заслуга Эйзенхарта прежде всего в том, что он показал, как можно преобразовать вместе с первыми тремя и четвертое, неквадратичное решение. Этому преобразованию Эйзенхарт дал изящное геометрическое толкование. В то время как в преобразовании Бианки две поверхности являются фокальными поверхностями конгруэнции W, обладающей особыми метрическими свойствами (сохранение гауссовой кривизны поверхности при преобразовании), — в преобразовании Эйзенхарта соответствующие поверхности пересечением своих касательных плоскостей определяют нормальную конгруэнцию, развертывающиеся поверхности которой соответствуют главному основанию той и другой поверхности. Благодаря тому, что в преобразовании Эйзенхарта участвуют четыре тангенциальных координаты, которые удовлетворяют одним и тем же уравнениям, конфигурация четырех поверхностей, участвующих в теореме переместительности [1]), принимает особенно замечательный вид: все четыре касательные плоскости проходят через одну точку.

Новое направление в теории изгибания на главном основании было открыто в 1917 г. двумя диссертациями Бюшгенса [87] и Финикова [86]. Еще в 1911 г. [78] я поставил задачу об отыскании всех главных оснований на данной поверхности. В то время как вся теория изгибания на главном основании строилась для поверхности, отнесенной к этому осно-

[1]) Четыре поверхности S_1, S_2, S_3, и S_4 расположены так, что преобразованием Эйзенхарта можно перейти от S_1 к S_2, от S_2 к S_3, от S_3 к S_4 и от S_4 к S_1.

ванию, здесь впервые были даны уравнения, которые определяют все главные основания на поверхности. В применении к поверхностям 2-го порядка они дали те самые основания, которые были указаны еще Млодзеевским [13]. Несмотря на то, что этими изгибаниями занималось много авторов (Бианки [80], Руйе [81], Лагалли [89], Террачини [90]), только здесь были даны все главные основания поверхности. И до сих пор поверхности 2-го порядка остаются единственными поверхностями, на которых известны все главные основания.

Бюшгенс в ряде работ [77], [83], [87], которые начинаются тоже с 1911 г., обобщил эту задачу, отыскивая все главные основания данного линейного элемента, т. е. все поверхности, обладающие заданным линейным элементом и изгибающиеся на главном основании. Он впервые поставил задачу определения главных оснований в совершенно произвольных криволинейных координатах. Такое же инвариантное определение он применил к поверхностям Бианки [144], [145] и циклическим конгруэнциям [83].

Свои уравнения Бюшгенс применил к определению главных оснований на поверхностях, налагающихся на поверхности вращения. Не интегрируя уравнения и почти не проводя выкладок, автор сумел довольно точно классифицировать и описать возможные изгибания на главном основании.

Метод Бюшгенса не дает результатов, если поверхность имеет бесконечное число главных оснований. Общий вопрос изыскания поверхностей с бесконечным числом главных оснований был мной разрешен для случая наибольшего числа оснований.

Другой вопрос, поднятый мною в этой работе [86], относится к связи между изгибанием конгруэнции и изгибанием поверхности. Общая задача изгибания конгруэнции с сохранением развертывающихся поверхностей привела к изгибанию поверхности более общего рода, которое было исследовано в отдельной работе [104].

Оживившийся за последнее десятилетие интерес к геометрии вызвал целый ряд работ по изгибанию поверхностей на главном основании из конических или цилиндрических линий (Лагалли [89], Либман [123], Фрейданк [126], Шафф [129], [139]), которые, однако, не дали почти ничего нового. Существенное дополнение к результатам Млодзеевского и Егорова было сделано, с одной стороны, Масловым, с другой — Гамбье и его учеником Вассёром. Маслов [110], пересмотрев задачу изгибания на главном основании из двух семейств конических линий, указал пропущенный Млодзеевским случай. Вассёр [113], [115], [124], [130] указал ошибку в рассуждениях Дарбу, которая затем перешла в работу Егорова и сделала его исследование неполным.

Егоров вместе с Дарбу предполагал, что тангенциальное уравнение Лапласа, соответствующее сопряженной системе с одним семейством конических линий, приводится одним преобразованием Лапласа к уравнению с одним инвариантом, равным нулю; преобразование Лапласа соответствует переходу от поверхности, которая несет сопряженную систему к поверхности, огибаемой касательными к линиям одного из семейств системы; конические линии являются линиями прикосновения описанных конусов; следовательно, касательные сопряженного семейства (образующие конуса) пересекаются и своим пересечением определяют не поверхность, а линию — геометрическое место вершин конусов. Вассёр показал, что тангенциальное уравнение Лапласа, составленное для этой выродившейся в линию поверхности, имеет инвариант, равный нулю, только в том случае, если эта линия (место вершин конусов) — плоская. Если она — двоякой кривизны, то преобразование уравнения Лапласа имеет инварианты, отличные от нуля, и только новое преобразование (второе по счету) приводит к уравнению с одним инвариантом, равным нулю.

Таким образом для решения задачи, поставленной Егоровым, надо найти квадратичные решения всех уравнений, которые двумя преобразованиями Лапласа приводятся к уравнению с одним инвариантом, равным нулю. Этой задачи Вассёр не решил, и она до сих пор остается открытой. Поскольку работа Маслова опиралась на метод Егорова, под сомнением оставалось решение задачи Млодзеевского об основаниях с двумя семействами конических линий. Здесь, однако, вопрос был разрешен исследованием Гамбье о преобразуемых механизмах [93], [127], откуда прямо следовало, что линия вершин конусов (если основание содержит два семейства конических линий) должна быть плоской, и, следовательно, возражение Вассёра отпадает.

Начатое Егоровым [69], [76] изыскание квадратичных решений уравнения Мутара за последнее время значительно продвинулось вперед. Работа Драша [75] не содержит результатов, выходящих за пределы мемуара Егорова, но уже Маслов [98], [121] дал метод, правда, довольно мешкотный, отыскания квадратичных решений уравнения Эйлера $E(n)$ последовательным переходом от n к $n+1$ и применил его к уравнениям $E(2)$ (после того, как Егоров нашел квадратичные решения $E(1)$). Затем общий вопрос об отыскании квадратичных решений $E(n)$ при всяком n был разрешен Гамбье [119], [134] и Демуленом [92]. Гамбье и Маслов искали затем квадратичные решения гармонического уравнения A (3,2). Все эти исследования не дали результатов для задачи изгибания на главном основании; найденные решения либо содержат более трех членов и, следовательно, не имеют приложения в теории изгибания, либо приводят к развертывающимся поверхностям.

Новый способ определения главных оснований получен в моей заметке „О поверхностях, линии кривизны которых соответствуют и соответствующие касательные пересекаются“ [135]. Задача, поставленная в заглавии заметки, приводит, как можно было ожидать, к поверхностям, связанным преобразованием Рибокура, если нормали тоже пересекаются. Если нормали не пересекаются, то обе поверхности являются поверхностями, нормальными к циклам двух различных циклических систем с общими осями. Отсюда следует, что конгруэнция осей — циклическая бесконечным числом способов. Таким образом знание поверхности, допускающей такое преобразование, равносильно знанию сферического изображения главного основания.

Близкие к этому идеи развивает Винченсини [140]. Автор исходит из поверхности Гишара (G) и рассматривает конгруэнцию C, гармоничную к сети линий кривизны поверхности (G), т. е. конгруэнцию, описанную лучом, расположенным в касательной плоскости, так, что развертывающиеся поверхности соответствуют линиям кривизны (G). Такая конгруэнция оказывается циклической и поверхность (G) — одна из поверхностей, нормальных к циклам системы, имеющим осями лучи построенной конгруэнции.

Среди ∞^1 поверхностей, ортогональных к циклам той же системы, найдется одна и только одна вторая поверхность Гишара (G'). Переход от поверхности (G) к поверхности (G') равносилен преобразованию Эйзенхарта над поверхностями Фосса (V) и (V'), которые являются для (G) и (G') поверхностями центров кривизны.

С другой стороны, каждая поверхность Гишара (G) имеет вторую поверхность (G_1), так что обе служат фокальными полостями одной конгруэнции Гишара. Конгруэнция C_1, гармоническая к (G_1) может быть получена, если применить к конгруэнции C преобразование Лапласа. На общей фокальной полости конгруэнций C и C_1 лучи этих конгруэнций огибают „циклическую" сеть.

Глава I.

ГЛАВНЫЕ ОСНОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТИ.

§ 1. Основание изгибания двух налагающихся поверхностей.

1. Возьмем любые две поверхности S и S'. Пусть между точками их установлено взаимноодназначное соответствие. В таком случае существует одна и только одна сопряженная система линий на S, которой соответствует сопряженная система на S'. Эта сопряженная система становится неопределенной только в том случае, когда соответствие сохраняет асимптотические линии.

Действительно, пусть M и M' — пара соответствующих точек поверхностей S и S'. Сопряженные направления на каждой поверхности образуют инволюцию, но каждой касательной $M't'$ к некоторой линии на поверхности S' соответствует касательная Mt к соответствующей линии на поверхности S. Благодаря этому инволюционное соответствие сопряженных направлений в точке M' поверхности S' переносится на касательные к S в точке M. Между касательными Mt в точке M поверхности S устанавливаются, таким образом, две инволюции: в первой — касательной Mt_1 соответствует сопряженная ей касательная Mt_2, во второй — ей соответствует Mt_3 так, что Mt_1 и Mt_3 изображаются на поверхности S' парой сопряженных касательных $M't'_1$ и $M't'_3$.

Но две инволюции на одном носителе имеют одну пару общих сопряженных элементов; если их две, то обе инволюции совпадают. Следовательно, существует одна пара касательных Mt_1 и Mt_2, сопряженных на поверхности S так, что на поверхности S' они изображаются парой сопряженных касательных $M't'_1$ и $M't'_2$. Если существуют две такие пары, то инволюции совпадают, двойные элементы тоже совпадают, следовательно, асимптотические линии поверхности S изображаются асимптотическими линиями поверхности S'.

Пусть S и S' налагаются. Между точками их установлено тем самым взаимноодназначное соответствие. При изгибании асимптотические линии не могут сохраниться. Значит, обе инволюции сопряженных касательных не могут совпадать и существует единственная, вполне определенная пара общих сопряженных элементов. *Пара налагающихся поверхностей S и S' всегда имеет одну общую сопряженную систему.* Эта система называется (Петерсон [9], [10]) *основанием* изгибания.

Два семейства линий, составляющих основание изгибания, могут совпадать. Если два сопряженных направления совпадают, то они образуют асимптотическое направление поверхности. Следовательно, основание изгибания может выродиться в одно семейство асимптотических линий, которые налагаются на асимптотические линии другой поверхности. Если при изгибании поверхности асимптотические линии остаются асимптотическими, то по теореме Бонне поверхность — линейчатая, асимптотические линии являются ее прямолинейными образующими, которые при изгибании остаются также прямолинейными. Следовательно, только при изгибании линейчатой поверхности в линейчатую с сохранением прямолинейных образующих основание изгибания вырождается в прямолинейные образующие поверхности.

Эти соображения нетрудно подтвердить, рассматривая уравнение, определяющее основание изгибания.

Пусть поверхности S и S' отнесены к общим криволинейным координатам u, v, т. е. точка (u, v) поверхности S налагается на точку с теми же координатами (u, v) поверхности S'. Поверхности имеют общий линейный элемент и вторые квадратичные формы Гаусса

$$D\,du^2+2D'du\,dv+D''\,dv^2,$$
$$D_1\,du^2+2D_1'\,du\,dv+D_1''\,dv^2.$$

Сопряженные направления на S и на S' определяются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} D\,du\delta u+D'\,(du\,\delta v+dv\,\delta u)+D''\,dv\,\delta v=0,\\ D_1\,du\delta u+D_1'\,(du\,\delta v+dv\,\delta u)+D_1''\,dv\,\delta v=0.\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Допустим, что $du:dv$ и $\delta u:\delta v$ определяют общую сопряженную систему.

Оба уравнения (1) удовлетворены одновременно. Исключая δu и δv, получим уравнение

$$\begin{vmatrix} D\,du+D'\,dv & D'\,du+D''dv\\ D_1\,du+D_1'\,dv & D_1'\,du+D_1''dv\end{vmatrix}=0$$

или, раскрыв определитель,

$$(DD_1'-D_1D')\,du^2+(DD_1''-D_1D'')\,du\,dv+(D'D_1''-D_1'D'')\,dv^2=0. \qquad (2)$$

Это квадратное относительно $\frac{du}{dv}$ уравнение определяет два сопряженных направления, которые и составят основание изгибания. Исключая du, dv мы придем, очевидно, к тому же уравнению для $\frac{\delta u}{\delta v}$.

Уравнение (2) становится неопределенным, если все коэфициенты обращаются в нуль, но тогда обе вторые квадратичные формы пропорциональны и, следовательно, поверхности подобны.

Если два решения уравнения (2) совпадают, то мы примем эти уравнения за направления линий u. Уравнение (2) будет иметь двойной корень $dv=0$, т. е. мы получим

$$DD_1'-D_1D'=0, \quad DD_1''-D_1D''=0,$$

откуда или все коэфициенты пропорциональны и поверхности подобны или

$$D=0, \quad D_1=0,$$

т. е. линии u асимптотические на той и на другой поверхности.

2. Рассмотрим теперь, при каких условиях система координатных линий u, v может быть основанием изгибания.

Поставим задачу: дана положительная дефинитная форма

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2. \qquad (3)$$

Найти поверхность S с линейным элементом (3) так, чтобы координатные линии были сопряжены.

Найти поверхность — значит, найти ее две квадратичные формы. Одна из них дана, надо найти вторую

$$D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2. \qquad (4)$$

Так как линии u, v сопряжены, то $D'=0$. Остальные два коэфициента D и D'' должны удовлетворять уравнениям Кодацци и Гаусса [Т. П. 197]. Если ввести функции

$$\left.\begin{aligned} \delta=\frac{D}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad \delta'=\frac{D'}{\sqrt{EG-F^2}},\\ \delta''=\frac{D''}{\sqrt{EG-F^2}},\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

то эти уравнения запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\delta}{\partial v}-\frac{\partial\delta'}{\partial u}+\begin{Bmatrix}2\ 2\\ 2\end{Bmatrix}\delta-2\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 2\end{Bmatrix}\delta'+\begin{Bmatrix}1\ 1\\ 2\end{Bmatrix}\delta''=0,\\ \frac{\partial\delta''}{\partial u}-\frac{\partial\delta'}{\partial v}+\begin{Bmatrix}2\ 2\\ 1\end{Bmatrix}\delta-2\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix}\delta'+\begin{Bmatrix}1\ 1\\ 1\end{Bmatrix}\delta''=0,\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

$$\delta\delta''-\delta'^2=K, \qquad (7)$$

где K — полная кривизна поверхности.

Следовательно, задача сводится к отысканию двух функций δ и δ'' так, чтобы они удовлетворяли трем уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\delta}{\partial v}+\begin{Bmatrix}2\ 2\\ 2\end{Bmatrix}\delta+\begin{Bmatrix}1\ 1\\ 2\end{Bmatrix}\delta''=0,\\ \frac{\partial\delta''}{\partial u}+\begin{Bmatrix}2\ 2\\ 1\end{Bmatrix}\delta+\begin{Bmatrix}1\ 1\\ 1\end{Bmatrix}\delta''=0,\\ \delta\delta''=K,\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

где скобки Кристоффеля вычислены для линейного элемента (3) и K — кривизна этой формы:

$$\left.\begin{aligned} K=\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{F}{E\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial G}{\partial u}\right]+\right.\\ \left.+\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{2}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{F}{E\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial E}{\partial u}\right]\right\}.\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Последнее из уравнений (8) наводит на мысль ввести вспомогательное переменное t посредством уравнений

$$\delta=\sqrt{K}\,t, \quad \delta''=\frac{\sqrt{K}}{t}. \qquad (10)$$

Внося эти значения в первые два уравнения (8), получим систему

$$\frac{\partial \ln t}{\partial u}=b_1t^2+a, \quad -\frac{\partial \ln t}{\partial v}=\frac{b}{t^2}+a_1, \tag{11}$$

где

$$\left.\begin{aligned} b=\begin{Bmatrix}1\ 1\\ 2\end{Bmatrix}, \quad b_1=\begin{Bmatrix}2\ 2\\ 1\end{Bmatrix}, \quad a=\begin{Bmatrix}1\ 1\\ 1\end{Bmatrix}+\frac{1}{2}\frac{\partial \ln K}{\partial u},\\ a_1=\begin{Bmatrix}2\ 2\\ 2\end{Bmatrix}+\frac{1}{2}\frac{\partial \ln K}{\partial v}.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Условие интегрируемости системы (11) получится, если первое из этих уравнений продиференцировать по v, второе — по u и исключить производные 1-го и 2-го порядка от t:

$$t^2(b_{1v}-2a_1b_1)+a_v+a_{1u}-4bb_1+\frac{1}{t^2}(b_u-2ab)=0. \tag{13}$$

Уравнение (13) имеет четыре корня. Если одно из этих решений t удовлетворяет системе (11), то существует поверхность S с линейным элементом (3), на которой система линий u, v сопряжена. Очевидно, в этом случае и второе решение t удовлетворит системе (11) и будет определять поверхность, симметричную первой. В дальнейшем мы не будем делать различия между такими поверхностями.

Если два существенно различных корня (13) удовлетворяют системе (11), то и все четыре решения, попарно отличающиеся знаком, удовлетворяют (11). Мы будем иметь две поверхности S и S' (не считая симметричных), обладающих одним и тем же линейным элементом (3), на каждой из которых система линий u, v будет сопряжена. Поверхности налагаются, а линии u, v образуют основание изгибания. Такое основание называется *простым*.

Если существуют три поверхности с тем же самым линейным элементом и общей сопряженной системой u, v, то уравнение (13) должно допускать три существенных различных корня, т. е. три различных корня t^2. В таком случае оно исчезает тождественно, т. е. коэфициенты при t^2, $\frac{1}{t^2}$ и свободный член отдельно равны нулю, т. е.

$$b_{1v}=2a_1b_1, \quad b_u=2ab, \quad a_v+a_{1u}=4bb_1. \tag{14}$$

Система (11) вполне интегрируема и определяет t с произвольным постоянным. В этом случае существует ∞^1 решений t и, следовательно, существует ∞^1 поверхностей S, взаимно налагающихся с общей сопряженной системой u, v. Другими словами, меняя произвольное постоянное, которое входит в t, мы заставим поверхность S непрерывно изгибаться с сохранением сопряженной системы u, v. Эта сопряженная система называется *главным* основанием изгибания.

Теорема. *Если система линий сопряжена на трех налагающихся поверхностях, то она сохраняется при непрерывном изгибании и называется главным основанием изгибания* (Петерсон [**9**], [**10**]).

3. Если в уравнения (14) внести выражения (12), то получим условия, характеризующие главное основание изгибания (Бюшгенс [**77**], [**87**]), а именно:

$$\left.\begin{aligned} \begin{Bmatrix}1\ 1\\ 1\end{Bmatrix}&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\ln\frac{\begin{Bmatrix}1\ 1\\ 2\end{Bmatrix}}{K},\\ \begin{Bmatrix}2\ 2\\ 2\end{Bmatrix}&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\ln\frac{\begin{Bmatrix}2\ 2\\ 1\end{Bmatrix}}{K},\\ \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left[\ln\begin{Bmatrix}1\ 1\\ 2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}2\ 2\\ 1\end{Bmatrix}\right]&=8\begin{Bmatrix}1\ 1\\ 2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}2\ 2\\ 1\end{Bmatrix}.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Уравнения (15) предполагают, что скобки $\begin{Bmatrix}1\ 1\\ 2\end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix}2\ 2\\ 1\end{Bmatrix}$ не равны нулю. Если $\begin{Bmatrix}1\ 1\\ 2\end{Bmatrix}=0$, то линии u — геодезические [Т. П. 117 (3)]. Нетрудно заметить, что уравнение (13) при $b=0$ линейно относительно t^2. Следовательно, если существуют две налагающиеся (несимметричные) поверхности, на которых линии u, v сопряжены, то найдется ∞^1 таких поверхностей, т. е. система u, v будет главным основанием изгибания (Вассёр [130]). Система уравнений (15) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} \begin{Bmatrix}1\ 1\\ 2\end{Bmatrix}=0, \quad \begin{Bmatrix}2\ 2\\ 2\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\ln\frac{\begin{Bmatrix}2\ 2\\ 1\end{Bmatrix}}{K},\\ \frac{\partial\begin{Bmatrix}1\ 1\\ 1\end{Bmatrix}}{\partial v}+\frac{\partial\begin{Bmatrix}2\ 2\\ 2\end{Bmatrix}}{\partial u}+\frac{\partial^2 \ln K}{\partial u\,\partial v}=0.\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Наконец, если оба семейства линий u, v состоят из геодезических линий, т. е. если $\begin{Bmatrix}1\ 1\\ 2\end{Bmatrix}=0$, $\begin{Bmatrix}2\ 2\\ 1\end{Bmatrix}=0$, то уравнение (13) сводится к одному свободному члену. Если он равен нулю, то система (11) вполне интегрируема и линии u, v образуют главное основание; если свободный член в уравнении (13) не нуль, то не найдется ни одной поверхности, на которой система u, v была бы сопряжена.

Сопряженная система геодезических линий всегда является главным основанием некоторого изгибания поверхности (Бианки [**2**] II, 85). Такая система линий называется основанием Фосса [**14**]. Система (14) принимает теперь вид

$$\left.\begin{aligned} \begin{Bmatrix}1\ 1\\ 2\end{Bmatrix}=0, \quad \begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix}=0,\\ \frac{\partial\begin{Bmatrix}1\ 1\\ 1\end{Bmatrix}}{\partial v}+\frac{\partial\begin{Bmatrix}2\ 2\\ 2\end{Bmatrix}}{\partial u}+\frac{\partial^2 \ln K}{\partial u\,\partial v}=0.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Все эти рассуждения изменятся, если задана поверхность S, на которой линии u, v образуют сопряженную систему. В таком случае нам заранее известно одно решение системы (11), именно то значение t^2, которое соответствует поверхности S. Поэтому условие полной интегрируемости системы (11) будет содержать только два уравнения — первые два уравнения (14). Последнее уравнение (14) будет заменено условием, что линии u, v сопряжены на поверхности S. Это условие заменит собой третье уравнение в системе (15), (16) или (17).

Сопряженная система геодезических линий есть главное основание изгибания. Основание изгибания при одном семействе геодезических линий есть главное основание.

4. Замечательно, что свойство поверхности изгибаться на главном основании связано только со сферическим изображением поверхности.

Петерсон [9] показал это, построив преобразование, которое позволяет по заданной поверхности, отнесенной к главному основанию, найти все другие поверхности с тем же сферическим изображением сопряженной системы.

Будем называть *параллельными* две системы линий, у которых касательные соответственно параллельны. Пусть (M) и (M^*) две поверхности, описанные точками M и M^*, у которых системы координатных линий параллельны. Будем обозначать теми же буквами полужирного шрифта $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{M}^*$ радиусы-векторы точек M, M^*. В силу параллельности касательных к координатным линиям имеем равенства

$$\boldsymbol{M}_u^* = \lambda \boldsymbol{M}_u, \quad \boldsymbol{M}_v^* = \mu \boldsymbol{M}_v, \tag{18}$$

где λ и μ — скаляры. Диференцируя уравнения (18) по v и по u и исключая производные от $\boldsymbol{M}^*$, получим

$$\lambda_v \boldsymbol{M}_u + \lambda \boldsymbol{M}_{uv} = \mu_u \boldsymbol{M}_v + \mu \boldsymbol{M}_{uv}. \tag{19}$$

Умножим это равенство скалярно на вектор $\boldsymbol{n}$ нормали к поверхности (M). Члены, содержащие $\boldsymbol{M}_u$, $\boldsymbol{M}_v$ (касательные к поверхности), пропадут при этом и мы получим

$$\lambda \boldsymbol{n} \boldsymbol{M}_{uv} = \mu \boldsymbol{n} \boldsymbol{M}_{uv}. \tag{20}$$

Отсюда или $\lambda = \mu$, или $\boldsymbol{n}\boldsymbol{M}_{uv} = 0$. В первом случае члены со второй производной в (19) сокращаются и тогда

$$\lambda_v \boldsymbol{M}_u = \mu_u \boldsymbol{M}_v.$$

Так как $\boldsymbol{M}_u$ и $\boldsymbol{M}_v$ заведомо не коллинеарны, то уравненне должно исчезать тождественно, т. е.

$$\lambda_v = 0, \quad \mu_u = 0,$$

а так как $\lambda = \mu$, то отсюда следует, что $\lambda = \text{const}$. Уравнения (18) интегрируются

$$\boldsymbol{M}^* = \lambda \boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}_0,$$

где $\boldsymbol{M}_0$ — постоянный вектор. Поверхность $(\boldsymbol{M}^*)$ подобна и подобно расположена относительно поверхности $(\boldsymbol{M})$. Этот случай можно оставить в стороне.

Во втором случае

$$\boldsymbol{n}\boldsymbol{M}_{uv} = 0.$$

Следовательно, система линий u, v сопряжена на поверхности (M); также получим, что она сопряжена и на поверхности (M^*).

Если исключить подобные поверхности, то параллельными могут быть только сопряженные сети.

Умножим равенство (19) скалярно на $\boldsymbol{M}_u$ и $\boldsymbol{M}_v$. Принимая во внимание основные формулы [Т. П. 40]

$$\boldsymbol{M}_u^2 = E, \quad \boldsymbol{M}_u \boldsymbol{M}_v = F, \quad \boldsymbol{M}_v^2 = G,$$

откуда, диференцируя, имеем

$$2\boldsymbol{M}_u \boldsymbol{M}_{uv} = \frac{\partial E}{\partial v}, \quad 2\boldsymbol{M}_v \boldsymbol{M}_{uv} = \frac{\partial G}{\partial u},$$

получим

$$\left.\begin{aligned} \lambda_v E - \mu_u F &= \frac{\mu - \lambda}{2} \frac{\partial E}{\partial v}, \\ \lambda_v F - \mu_u G &= \frac{\mu - \lambda}{2} \frac{\partial G}{\partial u}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Отсюда следует, что λ и μ зависят только от линейного элемента поверхности. Если поверхность (M) дана, то уравнения (21) определяют λ и μ с двумя произвольными функциями одного аргумента и уравнения (18) дают (M^*) квадратурами с произвольным постоянным, которое, конечно, зависит от положения поверхности (M^*) в пространстве.

Возвышая в квадрат или перемножая равенства (18), получим линейный элемент поверхности (M^*)

$$E^* = \lambda^2 E, \quad F^* = \lambda\mu F, \quad G^* = \mu^2 G. \tag{22}$$

Пусть теперь система u, v на поверхности (M) — простое основание, т. е. поверхность изгибается и на ее изгибании (M_1) линии u, v сопряжены.

Применяя формулы (18), (21) к поверхности (M_1), мы получим те же самые значения λ и μ и новую поверхность (M_1^*), но формулы (22) определят один и тот же линейный элемент (M^*) и (M_1^*). Следовательно, простое основание изгибания по формулам Петерсона преобразуется в простое основание другой поверхности. Главное основание — преобразуется в главное основание.

Преобразование Петерсона позволяет по заданному изгибанию на главном основании путем интегрирования системы (21) найти бесконечное множество (с двумя произвольными функциями одного аргумента) других изгибаний на главном основании.

5. Преобразование Петерсона показывает, что поверхность, способная изгибаться на главном основании, может быть охарактеризована только сферическим изображением главного основания. Следовательно, уравнения (16), (17) и (18) можно преобразовать так, что они будут содержать только коэфициенты линейного элемента сферического изображения поверхности.

В самом деле, продиференцируем по u и по v уравнения [Т. П. 72]

$$D = -\boldsymbol{M}_u \boldsymbol{n}_u, \quad D' = -\boldsymbol{M}_u \boldsymbol{n}_v = -\boldsymbol{M}_v \boldsymbol{n}_u,$$
$$D'' = -\boldsymbol{M}_v \boldsymbol{n}_v.$$

Первое из них даст

$$\frac{\partial D}{\partial u} = -\boldsymbol{M}_{uu} \boldsymbol{n}_u - \boldsymbol{M}_u \boldsymbol{n}_{uu}.$$

Внеся сюда вторые производные по формулам [Т. П. 94]

$$M_{uu}=\begin{Bmatrix}1\ 1\\1\end{Bmatrix}M_u+\begin{Bmatrix}1\ 1\\2\end{Bmatrix}M_v+Dn,$$
$$n_{uu}=\begin{Bmatrix}1\ 1\\1\end{Bmatrix}'n_u+\begin{Bmatrix}1\ 1\\2\end{Bmatrix}'n_v-en,$$

где штрихом обозначены скобки Кристоффеля, вычисленные для линейного элемента сферического изображения поверхности

$$ds'^2=e\,du^2+2f\,du\,dv+g\,dv^2, \tag{23}$$

получим

$$\frac{\partial D}{\partial u}=\begin{Bmatrix}1\ 1\\1\end{Bmatrix}D+\begin{Bmatrix}1\ 1\\2\end{Bmatrix}D'+\begin{Bmatrix}1\ 1\\1\end{Bmatrix}'D+\begin{Bmatrix}1\ 1\\2\end{Bmatrix}'D',$$

и таким же образом будем иметь

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial v}&=\begin{Bmatrix}1\ 2\\1\end{Bmatrix}D+\begin{Bmatrix}1\ 2\\2\end{Bmatrix}D'+\begin{Bmatrix}1\ 2\\1\end{Bmatrix}'D+\begin{Bmatrix}1\ 2\\2\end{Bmatrix}'D',\\ \frac{\partial D'}{\partial u}&=\begin{Bmatrix}1\ 1\\1\end{Bmatrix}D'+\begin{Bmatrix}1\ 1\\2\end{Bmatrix}D''+\begin{Bmatrix}1\ 2\\1\end{Bmatrix}'D+\begin{Bmatrix}1\ 2\\2\end{Bmatrix}'D',\\ \frac{\partial D'}{\partial v}&=\begin{Bmatrix}1\ 2\\1\end{Bmatrix}D'+\begin{Bmatrix}1\ 2\\2\end{Bmatrix}D''+\begin{Bmatrix}2\ 2\\1\end{Bmatrix}'D+\begin{Bmatrix}2\ 2\\2\end{Bmatrix}'D'\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

и четыре других уравнения, получаемые заменой u на v.

Если сюда внести $D'=0$, то получим

$$\left.\begin{aligned}&\begin{Bmatrix}1\ 1\\1\end{Bmatrix}=\frac{\partial\ln D}{\partial u}-\begin{Bmatrix}1\ 1\\1\end{Bmatrix}', &&\begin{Bmatrix}2\ 2\\2\end{Bmatrix}=\frac{\partial\ln D''}{\partial v}-\begin{Bmatrix}2\ 2\\2\end{Bmatrix}',\\ &\begin{Bmatrix}1\ 1\\2\end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix}1\ 2\\1\end{Bmatrix}'\frac{D}{D''}, &&\begin{Bmatrix}2\ 2\\1\end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix}1\ 2\\2\end{Bmatrix}'\frac{D''}{D}.\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Первое уравнение (15) примет вид

$$\frac{\partial\ln D}{\partial u}-\begin{Bmatrix}1\ 1\\1\end{Bmatrix}'=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\ln\left[\begin{Bmatrix}1\ 2\\1\end{Bmatrix}'\frac{D}{KD''}\right],$$

но [Т. П. 197]

$$\begin{Bmatrix}1\ 1\\1\end{Bmatrix}'+\begin{Bmatrix}1\ 2\\2\end{Bmatrix}'=\frac{\partial\ln\sqrt{eg-f^2}}{\partial u}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\ln\left[K(DD''-D'^2)\right].$$

Полагая в последнем равенстве $D'=0$ и прибавляя его к предыдущему уравнению, получим

$$\begin{Bmatrix}1\ 2\\2\end{Bmatrix}'=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\ln\begin{Bmatrix}1\ 2\\1\end{Bmatrix}'. \tag{26a}$$

Точно так же второе уравнение (15) даст

$$\begin{Bmatrix}1\ 2\\1\end{Bmatrix}'=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\ln\begin{Bmatrix}1\ 2\\2\end{Bmatrix}'. \tag{26b}$$

Третье будет удовлетворено тождественно в силу (26a), (26b), ибо по условию система u, v на поверхности сопряжена. Оба уравнения (26a), (26b) можно записать в виде

$$\frac{\partial\begin{Bmatrix}1\ 2\\1\end{Bmatrix}'}{\partial u}=\frac{\partial\begin{Bmatrix}1\ 2\\2\end{Bmatrix}'}{\partial v}=2\begin{Bmatrix}1\ 2\\1\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}1\ 2\\2\end{Bmatrix}'. \tag{27}$$

Эти уравнения были получены Коссера [23], [24], [33] и носят его имя.

Нетрудно заметить, что они остаются в силе и в том случае, если $\begin{Bmatrix}1\ 2\\1\end{Bmatrix}'$ или $\begin{Bmatrix}1\ 2\\2\end{Bmatrix}'$ обращаются в нуль, т. е. (ср. (25)) если основание содержит одно или оба семейства геодезических линий. Системы уравнений (16) или (17) могут быть приведены к этому виду.

6. Уравнения Коссера интегрируются.

Диференцируя (26a) по v, а (26b) — по u и пользуясь (27), получим

$$\frac{\partial^2\begin{Bmatrix}1\ 2\\1\end{Bmatrix}'}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial^2\begin{Bmatrix}1\ 2\\2\end{Bmatrix}'}{\partial u\,\partial v},$$

откуда вводя на время новое неизвестное x, имеем

$$\begin{Bmatrix}1\ 2\\1\end{Bmatrix}'=xV',\qquad\begin{Bmatrix}1\ 2\\2\end{Bmatrix}'=xU'\ ^{1)},$$

и оба уравнения (26a), (26b) дадут

$$\frac{dx}{x^2}=2d(U+V).$$

Интегрируя и включая постоянное в произвольные функции U, V, которые были введены своими производными, получим $-\frac{1}{x}=2(U+V)$ и, следовательно,

$$\begin{Bmatrix}1\ 2\\1\end{Bmatrix}'=-\frac{V'}{2(U+V)},\qquad\begin{Bmatrix}1\ 2\\2\end{Bmatrix}'=-\frac{U'}{2(U+V)}. \tag{28}$$

Если U и V действительно содержат переменные u и v, то их можно принять за независимые переменные $U=u$, $V=v$.

Если одна из них, например V, постоянна, то это постоянное можно привести к нулю, если одновременно вычесть это постоянное из V и прибавить его же к U, что, очевидно, не изменит выражений (28). При этом $\begin{Bmatrix}1\ 2\\1\end{Bmatrix}'$, а следовательно, и $\begin{Bmatrix}1\ 1\\2\end{Bmatrix}$ обращаются в нуль и, значит, линии u — геодезические.

---

1) Здесь и везде далее U и V — произвольные функции, ервая — одного переменного u и вторая — одного переменного v. Штрихом обозначены их производвые

$$U'=\frac{dU}{du},\quad V'=\frac{dV}{dv}.$$

Сферическое изображение главного основания с одним семейством геодезических линий определяется системой

$$\left\{ {1\,2 \atop 1} \right\}' = 0, \quad \left\{ {1\,2 \atop 2} \right\}' = -\frac{U'}{2U}. \qquad (29)$$

Наконец, если обе функции постоянны, то основание содержит два семейства геодезических линий.

Чтобы дать хоть одно приложение этих уравнений, допустим, что основание изгибания (u, v) ортогонально, следовательно, содержит два семейства линий кривизны.

Уравнения (28), если внести в них выражение скобок Кристоффеля [Т. П. 197], принимая во внимание $f = 0$, примут вид

$$\frac{\partial \ln e}{\partial v} = -\frac{V'}{U+V}, \quad \frac{\partial \ln g}{\partial u} = -\frac{U'}{U+V},$$

откуда

$$e = \frac{U_1}{U+V}, \quad g = \frac{V_1}{U+V}. \qquad (30)$$

Если ввести новые параметры $\bar{u}$, $\bar{v}$, то линейный элемент сферы примет вид

$$ds'^2 = e\left(\frac{du}{d\bar{u}}\right)^2 d\bar{u}^2 + g\left(\frac{dv}{d\bar{v}}\right)^2 d\bar{v}^2.$$

Следовательно, если положить

$$U_1\left(\frac{du}{d\bar{u}}\right)^2 = 1 \quad \text{и} \quad V_1\left(\frac{dv}{d\bar{v}}\right)^2 = 1,$$

то в новых параметрах $\bar{u}$, $\bar{v}$ функции U_1, V_1 будут приведены к единице. Будем предполагать, что это уже сделано и будем попрежнему писать u, v вместо $\bar{u}$, $\bar{v}$. Эти значения e, g, $f = 0$, должны удовлетворять единственному условию, что кривизна линейного элемента

$$ds'^2 = \frac{du^2 + dv^2}{U+V}$$

равна единице. Внося в гауссово выражение кривизны $f = 0$ и $K = 1$ [Т. П. 197], получим

$$-\sqrt{eg} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v}\right).$$

Если сюда подставить выражения (30), то будем иметь после небольших преобразований

$$(U'' + V'' - 2)(U + V) - U'^2 - V'^2 = 0. \qquad (31)$$

Продиференцировав это уравнение дважды — сначала по u, а затем по v, получим

$$U'''V' + U'V''' = 0.$$

Если U и V действительно содержат свои аргументы, т. е. U' и V' не нули, то, деля на $U'V'$, получим

$$\frac{U'''}{U'} = -\frac{V'''}{V'} = a,$$

где a, очевидно, постоянное. Интегрируя последние уравнения, получим

$$U'' = aU + b, \qquad V'' = -aV + b_1,$$
$$U'^2 = aU^2 + 2bU + c, \qquad V'^2 = -aV^2 + 2b_1V + c_1,$$

где все коэфициенты a, b, b_1, c, c_1 — постоянные. Внеся эти значения в уравнение (31), придем к невозможному равенству

$$(b_1 - b - 2)\, U + (b - b_1 - 2)\, V = c + c_1.$$

В самом деле, если U и V действительно содержат u, v, то коэфициенты при U и V и свободный член в полученном равенстве должны обращаться в нуль, а это приводит к противоречивым уравнениям.

Следовательно, надо допустить, что одна из функций U или V обращается в постоянное. *Прямоугольное основание всегда содержит одно семейство геодезических линий.* Пусть $v = \text{const}$. Увеличивая функцию U, приведем V к нулю, и уравнение (31) даст

$$(U'' - 2)\, U - U'^2 = 0.$$

Отсюда U определится с двумя произвольными постоянными. Это показывает, что за линии u на сфере можно принять любое семейство больших кругов ее; линии v определятся как их ортогональные траектории. Что касается самой поверхности, то нетрудно заметить, что все линии v плоские. В самом деле, они геодезические; следовательно, нормаль к поверхности служит для них главной нормалью, а так как они являются вместе с тем линиями кривизны, то эти нормали образуют развертывающуюся поверхность. Нетрудно заметить, что только плоские линии обладают этим свойством. Все главные нормали кривой лежат при этом в ее плоскости. Значит, плоскости линий v, ортогональные к самой поверхности, ортогональны и к линиям u. Чтобы получить поверхность, можно взять произвольное семейство плоскостей, в одной из плоскостей произвольный профиль и через точки профиля ∞^1 ортогональных к плоскостям траекторий. Геометрическое место этих траекторий и образует поверхность. Ортогональные траектории служат линиями u, их пересечения с плоскостями образуют линии v.

Так как все эти линии u конгруэнтны[1]), то поверхность можно

[1]) Если взять огибающую D семейства плоскостей и обозначить для ребра возврата огибающей через $\boldsymbol{M}$, τ, ν, β, ρ, ρ_1 радиус-вектор какой-либо точки ее M, единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали, радиусы кривизны и кручения, то точка N пересечения ортогональной траектории определяется радиус-вектором $\boldsymbol{M} + a\tau + b\nu$, где a и b — координаты точки N относительно трехгранника Френе. Они удовлетворяют, очевидно, условию

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{M} + a\tau + b\nu) = \lambda\beta,$$

образовать, навертывая плоскость с произвольно начерченным профилем на развертывающуюся поверхность. Монж называет такие поверхности surfaces moulures, Петерсон (и Млодзеевский) — поверхностями каналов.

§ 2. Главные основания данной поверхности или данного линейного элемента.

7. Прием, который привел нас к условиям Коссера, может дать нам все главные основания поверхиости или даже данного линейного элемента.

Начнем с самой общей задачи: пусть дана произвольная положительная определенная форма

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \tag{32}$$

Существует ли поверхность S, имеющая эту форму линейным элементом, так, чтобы два заданных семейства линий

$$\frac{du}{dv} = \varphi(u, v), \quad \frac{\delta u}{\delta v} = \psi(u, v) \tag{33}$$

были на ней сопряжены?

Такая поверхность будет определена, если будет известна вторая квадратичная форма ее или три функции

$$\delta = \frac{D}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad \delta' = \frac{D'}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad \delta'' = \frac{D''}{\sqrt{EG-F^2}}, \tag{34}$$

удовлетворяющие уравнениям Гаусса и Кодацци

$$\delta\delta'' - \delta'^2 = -\frac{1}{r^2}, \tag{35a}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\delta}{\partial v} - \frac{\partial\delta'}{\partial u} + \genfrac\{\}{0pt}{}{2\ 2}{2}\delta - 2\genfrac\{\}{0pt}{}{1\ 2}{2}\delta' + \genfrac\{\}{0pt}{}{1\ 1}{2}\delta'' = 0,\\
&\frac{\partial\delta''}{\partial u} - \frac{\partial\delta'}{\partial v} + \genfrac\{\}{0pt}{}{2\ 2}{1}\delta - 2\genfrac\{\}{0pt}{}{1\ 2}{1}\delta' + \genfrac\{\}{0pt}{}{1\ 1}{1}\delta'' = 0
\end{aligned}\right\} \tag{35b}$$

и, кроме того, специальному условию

$$\delta\varphi\psi + \delta'(\varphi + \psi) + \delta'' = 0, \tag{36}$$

которое показывает, что линии (33) сопряжены. Это уравнение получится, если в условие сопряженности двух направлений $\frac{du}{dv}$, $\frac{\delta u}{\delta v}$

$$D\,du\,\delta u + D'(du\,\delta v + dv\,\delta u) + D''dv\,\delta v = 0$$

где λ — произвольный множитель. Развертывая это равенство с помощью формул Серре-Френе [Т. П. 22 (15)] и сравнивая коэфициенты при τ, ν, β, получим

$$1 + \frac{da}{ds} - \frac{b}{\rho} = 0, \quad \frac{a}{\rho} + \frac{db}{ds} = 0.$$

Эти уравнения не содержат ρ_1, следовательно, при изгибании развертывающейся поверхности D координаты a, b не меняются. Между тем, когда D развернется на плоскость, любая траектория пересечет все плоскости в одной точке. Значит, линии (N) конгруэнтны.

внести $\frac{du}{dv} = \varphi$, $\frac{\delta u}{\delta v} = \psi$ и, кроме того, от D, D', D'' перейти по формулам (34) к δ, δ', δ''. Через $-\frac{1}{r^2}$ обозначена кривизна формы (32); по отношению к этой форме вычислены и скобки Кристоффеля в уравнениях (35a).

Среди уравнений (35a), (35b), (36), наложенных на неизвестные δ, δ', δ'', два уравнения (35a) и (36) конечные. Мы можем им удовлетворить, полагая

$$\left.\begin{aligned}
\delta &= \frac{1}{r\sqrt{\varphi\psi}}\,\frac{(\varphi+\psi)\operatorname{sh}\tau + (\varphi-\psi)\operatorname{ch}\tau}{\varphi-\psi},\\
\delta' &= -\frac{2\sqrt{\varphi\psi}}{r(\varphi-\psi)}\operatorname{sh}\tau,\\
\delta'' &= \frac{\sqrt{\varphi\psi}}{r}\,\frac{(\varphi+\psi)\operatorname{sh}\tau - (\varphi-\psi)\operatorname{ch}\tau}{\varphi-\psi},
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

где τ — новая неизвестная функция.

Внося эти выражения в уравнения (35b), получим уравнения вида

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial 2\tau}{\partial u} &= M\operatorname{sh}2\tau + N\operatorname{ch}2\tau + P,\\
\frac{\partial 2\tau}{\partial v} &= M_1\operatorname{sh}2\tau + N_1\operatorname{ch}2\tau + P_1,
\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

где коэфициенты M, N, P, M_1 N_1 и P_1 суть:

$$\begin{aligned}
M &= \frac{-2}{(\varphi-\psi)^2}\,[\psi\theta(\varphi) + \varphi\theta(\psi)],\\
N &= \frac{2}{(\varphi-\psi)^2}\,[\psi\theta(\varphi) - \varphi\theta(\psi)],\\
M_1 &= \frac{2\varphi\psi}{(\varphi-\psi)^2}\,[\theta(\varphi) + \theta(\psi)],\\
N_1 &= -\frac{2\varphi\psi}{(\varphi-\psi)^2}\,[\theta(\varphi) - \theta(\psi)],\\
P &= \frac{\partial\ln\varphi}{\partial u}\left[1 - \frac{2\psi^2}{(\varphi-\psi)^2}\right] - \frac{\partial\ln\psi}{\partial u}\left[1 - \frac{2\varphi^2}{(\varphi-\psi)^2}\right] -\\
&\quad - \frac{\partial\ln\varphi}{\partial v}\,\frac{2\varphi}{(\varphi-\psi)^2} + \frac{\partial\ln\psi}{\partial v}\,\frac{2\psi}{(\varphi-\psi)^2} +\\
&\quad + 2\,\frac{\varphi+\psi}{\varphi-\psi}\left[\genfrac\{\}{0pt}{}{1\ 1}{1} - \frac{\partial\ln r}{\partial u}\right] - \frac{2\varphi\psi}{\varphi-\psi}\genfrac\{\}{0pt}{}{1\ 1}{2} +\\
&\quad + \frac{2}{\varphi-\psi}\left[\genfrac\{\}{0pt}{}{2\ 2}{2} + 2\genfrac\{\}{0pt}{}{1\ 2}{1} - 2\,\frac{\partial\ln r}{\partial v}\right],\\
P_1 &= \frac{\partial\ln\varphi}{\partial u}\,\frac{2\varphi\psi^2}{(\varphi-\psi)^2} - \frac{\partial\ln\psi}{\partial u}\,\frac{2\varphi^2\psi}{(\varphi-\psi)^2} - \frac{\partial\ln\varphi}{\partial v}\left[1 - \frac{2\psi^2}{(\varphi-\psi)^2}\right] +\\
&\quad + \frac{\partial\ln\psi}{\partial v}\left[1 - \frac{2\varphi^2}{(\varphi-\psi)^2}\right] - 2\,\frac{\varphi+\psi}{\varphi-\psi}\left[\genfrac\{\}{0pt}{}{2\ 2}{2} - \frac{\partial\ln r}{\partial v}\right] -\\
&\quad - \frac{2\varphi\psi}{\varphi-\psi}\left[\genfrac\{\}{0pt}{}{1\ 1}{1} + 2\genfrac\{\}{0pt}{}{1\ 2}{2} - 2\,\frac{\partial\ln r}{\partial u}\right] + \frac{2}{\varphi-\psi}\genfrac\{\}{0pt}{}{2\ 2}{1},
\end{aligned} \tag{39}$$

а $\theta(t)$ означает левую часть уравнения геодезических линий

$$\theta(t)=t\frac{\partial \ln t}{\partial u}+\frac{\partial \ln t}{\partial v}-\left\{ {1\ 1 \atop 2} \right\}t^2+$$
$$+\left[\left\{ {1\ 1 \atop 1} \right\}-2\left\{ {1\ 2 \atop 1} \right\}\right]t-\left[\left\{ {2\ 2 \atop 2} \right\}-2\left\{ {1\ 2 \atop 1} \right\}\right]+\left\{ {2\ 2 \atop 1} \right\}\frac{1}{t}.$$

Условия интегрируемости системы (38) имеют вид

$$\mathfrak{A}\,\mathrm{sh}\,2\tau+\mathfrak{B}\,\mathrm{ch}\,2\tau+\mathfrak{C}=0. \tag{40}$$

Исследование этого уравнения ведется совершенно так же, как выше уравнения (13). Если одно решение уравнения (40) удовлетворяет системе (38), то формулы (37) определят δ, δ', δ'', т. е. поверхность S с линейным элементом (32), на которой система линий (33) сопряжена. Если существуют две налагающиеся поверхности с линейным элементом (32) и общей сопряженной системой (33), то существуют два решения τ_1 и τ_2, удовлетворяющие системе (38), а следовательно, и уравнению (40). Если таких поверхностей три, то уравнение (40) имеет три решения, но это невозможно, ибо уравнение (40) легко приводится к квадратному уравнению относительно $\mathrm{th}\,\tau$. При наличии трех решений уравнение (40) исчезает тождественно, все три коэфициента $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ обращаются в нуль и τ определяется из вполне интегрируемой системы (38) с произвольным постоянным. Имеется целая серия ∞^1 налагающихся поверхностей с общей сопряженной системой (33).

Итак, система (33) является главным основанием некоторого изгибания поверхности с линейным элементом (32), если $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ равны нулю. Мы будем называть такую систему линий главным основанием линейного элемента (32). Она определяется системой трех уравнений

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial M}{\partial v}-\frac{\partial M_1}{\partial u}+NP_1-N_1P=0,\\&\frac{\partial N}{\partial v}-\frac{\partial N_1}{\partial u}+MP_1-M_1P=0,\\&\frac{\partial P}{\partial v}-\frac{\partial P_1}{\partial u}+MN_1-M_1N=0.\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

На две неизвестные функции φ, ψ наложены три уравнения (41). Следовательно, вообще говоря, линейный элемент не имеет главных оснований, т. е. на каждой паре поверхностей с заданным линейным элементом имеется своя собственная общая сопряженная система, которая не будет сопряжена ни на какой другой налагающейся на них поверхности.

Мы не знаем примера, который бы подтвердил эту мысль.

8. Система (41) значительно упрощается, если одно или оба семейства линий (33) геодезические. Если, например, линии $\frac{du}{dv}=\varphi$ геодезические, то $\theta(\varphi)=0$, следовательно,

$$M=N=-\frac{2\varphi\theta(\psi)}{(\varphi-\psi)^2},\quad M_1=N_1=\frac{2\varphi\psi\theta(\psi)}{(\varphi-\psi)^2},$$

и система (41) принимает вид

$$\left.\begin{aligned}&\theta(\varphi)=0,\\&\frac{\partial M}{\partial v}-\frac{\partial M_1}{\partial u}+MP_1-M_1P=0,\\&\frac{\partial P}{\partial v}-\frac{\partial P_1}{\partial u}=0.\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Если оба семейства (33) геодезические, то система (41) принимает вид

$$\theta(\varphi)=0,\quad \theta(\psi)=0,\quad \frac{\partial P}{\partial v}-\frac{\partial P_1}{\partial u}=0. \tag{43}$$

9. Предыдущие рассуждения изменятся, если задана поверхность S_1, на которой система (33) сопряжена, т. е. если задача ставится так: найти главные основания заданной поверхности S_1.

В этой задаче мы уже заранее знаем одно решение τ_1 системы (38), а следовательно, и уравнения (40), — а именно то решение, которое соответствует данной поверхности S_1. Последнее уравнение (41) будет следствием предыдущих, т. е. система, определяющая главные основания данной поверхности, сведется к двум первым уравнениям (41). При этом φ, и ψ надо считать связанным уравнением (36), где δ, δ', δ'' относятся к поверхности S_1.

Главные основания с одним семейством геодезических на поверхности S_1 определяются системой

$$\theta(\varphi)=0,\quad \frac{\partial M}{\partial v}-\frac{\partial M_1}{\partial u}+MP_1-M_1P=0, \tag{42'}$$

а основания Фосса — системой

$$\theta(\varphi)=0,\quad \theta(\psi)=0. \tag{43'}$$

Последнее уравнение еще раз показывает, что всякие два семейства сопряженных геодезических линий образуют главное основание поверхности. Путем довольно длительных выкладок Эйзенхарт показал, что на поверхности постоянной отрицательной кривизны оснований Фосса не имеется [71].

10. Во всех предыдущих рассуждениях координатные линии остаются совершенно произвольными. Подходящий выбор их может значительно упростить систему (41).

Естественно выбрать за координатные линии асимптотические линии поверхности S. Тогда условие (36) примет вид

$$\varphi+\psi=0,$$

и система (41) даст два уравнения для неизвестной функции:

$$2\frac{\partial^2 \ln\varphi}{\partial u\,\partial v}=2\frac{\partial\ln\varphi}{\partial u}\varphi^2\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}+2\frac{\partial\ln\varphi}{\partial v}\frac{1}{\varphi^2}\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}+$$
$$+\varphi^2\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}-\frac{1}{\varphi^2}\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix},$$

$$\frac{\partial^2\ln\varphi}{\partial u^2}\varphi^2+\frac{\partial^2\ln\varphi}{\partial v^2}=\frac{\partial\ln\varphi}{\partial u}\left[\varphi^2\left(\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}-2\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\right)+3\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}\right]+$$
$$+\frac{\partial\ln\varphi}{\partial v}\left[\begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix}-2\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}+3\varphi^2\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}\right]-$$
$$-\left[\begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix}-2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}+\varphi^2\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}\right]^2+$$
$$+\left[\varphi\left(\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}-2\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\right)+\frac{1}{\varphi}\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}\right]^2+$$
$$+\varphi^2\left[\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}-2\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\right)\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial v}\left(\begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix}-2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}. \tag{44}$$

Если эта система совместна, то она определяет главные основания φ заданной поверхности. Если задать начальные значения φ, $\frac{\partial\ln\varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial\ln\varphi}{\partial v}$ и $\frac{\partial^2\ln\varphi}{\partial v^2}$ для $u=u_0$, $v=v_0$, то все остальные производные от $\ln\varphi$ можно вычислить из системы (44) (если не окажется противоречий); можно, следовательно, составить степенной ряд для $\ln\varphi$ по степеням $u-u_0$, $v-v_0$. Если он сходится, то им определяется решение φ, которое, таким образом, может зависеть не больше чем от четырех произвольных постоянных. На самом деле φ может содержать только две произвольных постоянных, и это имеет место только для минимального геликоида (действительного и мнимого).

Для оснований с одним семейством геодезических линий второе уравнение (44) является следствием первого и уравнения геодезических линий $\theta(\varphi)=0$.

11. Введем сферическое изображение поверхности S_1. Если, пользуясь формулами Вейнгартена (24), внести туда выражения (37), производные от τ заменить по формулам (38) и в выражении $\theta(\varphi)$ скобки Кристоффеля для линейного элемента поверхности заменить скобками Кристоффеля для сферического изображения ее, то получим

$$\theta(\varphi)=-\vartheta(\varphi)\ [\operatorname{ch}2\tau_1+\operatorname{sh}2\tau_1], \tag{45}$$

где

$$\left.\begin{aligned}\vartheta(\varphi)=\frac{\partial\ln\psi}{\partial u}\varphi+\frac{\partial\ln\psi}{\partial v}+\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}'\varphi-\begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix}'+\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'\frac{\varphi+\psi}{\psi}-\\-\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'(\varphi+\psi)-\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}'\varphi\psi+\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}'\frac{1}{\psi}.\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

При этом формулы (39) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}M&=n\operatorname{sh}2\tau_1-m\operatorname{ch}2\tau_1,\\M_1&=n_1\operatorname{sh}2\tau_1-m_1\operatorname{ch}2\tau_1,\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

где m, n, m_1, n_1 так же выражаются через ϑ, как M, N, M_1, N_1 выражались через θ. Что касается P и P_1, то они просто обратятся в нуль.

Система (41) принимает вид

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial m}{\partial v}-\frac{\partial m_1}{\partial u}=0,\\&\frac{\partial n}{\partial v}-\frac{\partial n_1}{\partial u}+mn_1-m_1n=0.\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Если φ и ψ связаны условием сопряженности (36), то система (48) определит все главные основания поверхности.

Для главных оснований с одним семейством геодезических мы получим совершенно так же систему

$$\vartheta(\varphi)=0,\quad \frac{\partial m}{\partial v}-\frac{\partial m_1}{\partial u}=0 \tag{49}$$

и для оснований Фосса систему

$$\vartheta(\varphi)=0,\quad \vartheta(\psi)=0. \tag{50}$$

Уравнения (48)—(50) содержат только коэфициенты линейного элемента сферического изображения. Следовательно, их можно интегрировать, не зная самой поверхности S_1. Общий интеграл даст все те линии, которые являются на сфере изображением главного основания какой-нибудь поверхности.

§ 3. Приложения.

12. *Сфера.* Приложим полученные уравнения к определению главных оснований отдельных поверхностей. Вообще ввиду сложности уравнений задача является чрезвычайно трудной, но в отдельных частных случаях может быть доведена до конца.

Возьмем, например, сферу. Если ее отнести к мнимым прямолинейным образующим, то ее уравнения будут

$$x=\frac{1+uv}{u+v},\quad y=i\,\frac{1-uv}{u+v},\quad z=\frac{v-u}{u+v},$$

а основные формы примут вид

$$ds^2=-\frac{4}{(u+v)^2}\,du\,dv,\quad D=0,$$

$$D'=\frac{2}{(u+v)^2},\quad D''=0.$$

Уравнения (44) принимают вид

$$\frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial u\, \partial v} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial u^2}\varphi^2 + \frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial v^2} =$$

$$= -\frac{2\varphi^2}{u+v}\frac{\partial \ln \varphi}{\partial u} - \frac{2}{u+v}\frac{\partial \ln \varphi}{\partial v} - \frac{2}{(u+v)^2} + \frac{2\varphi^2}{(u+v)^2}.$$

Первое уравнение даст

$$\varphi^2 = e^{U-V}.$$

Вносим это значение во второе, получим

$$(u+v)^2(U''e^U - V''e^V) + 2(u+v)(U'e^U - V'e^V) + 4(e^V - e^U) = 0. \quad (a)$$

Диференцируя по u и по v и еще раз по u и по v, получим

$$(u+v)[(U''e^U)' - (V''e^V)'] + U''e^U - V''e^V + (U'e^U)' - (V'e^V)' = 0, \quad (b)$$

$$(U''e^U)'' - (V''e^V)'' = 0.$$

Отсюда можно заключить, что

$$U''e^U = P_2(u), \quad U'e^U = P_3(u), \quad e^U = P_4(u), \qquad (c_1)$$

$$V''e^V = Q_2(v), \quad V'e^V = Q_3(v), \quad e^V = Q_4(v), \qquad (c_2)$$

где P_k, Q_k — многочлены степени k от своих аргументов.

Диференцируя $U = \ln P_4(u)$ и вставляя в первое уравнение (c_1), получим

$$P_2(u) = P_4''(u) - \frac{P_4'^2(u)}{P_4(u)}.$$

Отсюда следует, что $P_4'^2(u)$ делится на $P_4(u)$, все корни $P_4(u)$ принадлежат $P_4'(u)$ и, следовательно, $P_4(u)$ есть полный квадрат:

$$e^U = [f(u)]^2, \quad e^V = [\varphi(v)]^2,$$

$$f(u) = \alpha u^2 + \beta u + \gamma, \quad \varphi(v) = \alpha_1 v^2 + \beta_1 v + \gamma_1.$$

Внося эти выражения в уравнение (a), заметим, что первые два члена делятся на $u+v$, следовательно, делится и последний, т. е. $[f(u) + \varphi(v)]\,[f(u) - \varphi(v)]$ обращается в нуль при $v = -u$. Значит,

$$f(u) = \pm\varphi(-u),$$

и при этом условии уравнение (a) удовлетворено тождественно.

Так как мы можем прибавить любое постоянное к u, вычитая его одновременно из v, то в зависимости от того, равняется ли α или β нулю, мы можем привести решение к одному из трех типов

$$\varphi = \pm\frac{u^2+h}{v^2+h}, \quad \varphi = \pm\frac{u}{v}, \quad \varphi = \pm 1,$$

где h — произвольное постоянное. Два первых типа определяют систему меридианов и параллелей, взятую разными способами; последний тип соответствует мнимой системе.

13. *Поверхности 2-го порядка.* Обратимся теперь к произвольной поверхности 2-го порядка. Отнесем ее к прямолинейным образующим; мы получим $\left\{\begin{matrix}1\ 1\\ 2\end{matrix}\right\} = 0$, $\left\{\begin{matrix}2\ 2\\ 1\end{matrix}\right\} = 0$. Следовательно, первое уравнение (44) даст опять

$$\varphi^2 = \frac{U}{V}.$$

Возьмем сначала центральную поверхность 2-го порядка

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1;$$

параметрические уравнения ее можно написать в виде

$$x = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{1+uv}{u+v}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{b}}\,\frac{u-v}{u+v},$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{c}}\,\frac{1-uv}{u+v}.$$

Второе уравнение (44) принимает вид

$$\left(U'' - \frac{U'^2}{U}\right)A + U'\frac{\partial A}{\partial u} - 2U\frac{\partial^2 A}{\partial u^2} =$$

$$= \left(V'' - \frac{V'}{V}\right)A + V'\frac{\partial A}{\partial v} - 2V\frac{\partial^2 A}{\partial v^2}, \qquad (a)$$

где

$$A = c(uv-1)^2 - a(uv+1)^2 - b(u-v)^2.$$

Уравнение (a) имеет вид

$$U_1 + vU_2 + v^2U_3 = V_1 + uV_2 + u^2V_3.$$

Оно принадлежит к типу уравнений

$$\sum_{i=1}^{6} u_i v_i = 0, \qquad (b)$$

где все u_i — функции одного u, v_i — одного v. Диференцируя уравнение (b) пять раз по u, получим

$$\left.\begin{matrix}\sum u_i'v_i = 0, \quad \sum u_i''v_i = 0, \quad \sum u_i'''v_i = 0,\\ \sum u_i^{\mathrm{IV}}v_i = 0, \quad \sum u_i^{\mathrm{V}}v_i = 0.\end{matrix}\right\} \qquad (c)$$

Отсюда следует, что все v_i равны нулю или определитель [1]) системы равен нулю

$$|\, u_1 u_1' u_1'' u_1''' u_1^{\mathrm{IV}} u_1^{\mathrm{V}} \,| = 0$$

и, следовательно, функции u_i связаны линейным соотношением с постоянными коэфициентами. Исключая при помощи этого соотношения

[1]) Для экономии места записывается только одна первая строка определителя.

одну из функций u_i, мы придем к уравнению того же типа (b), но уже с числом членов 5, причем новые функции v_i будут представлять собой линейные комбинации с постоянными коэфициентами из старых. Применяя к этому уравнению те же рассуждения, придем к заключению, что новые функции v_i равны нулю, т. е. между первоначальными функциями v_i существует пять линейных уравнений с постоянными коэфициентами, или u_i связаны еще одним соотношением. Таким образом уравнение типа (b) имеет следствием некоторое число h $(0 \leqslant h \leqslant 6)$ линейных с постоянными коэфициентами соотношений между u_i и $6-h$ между v_i.

Нетрудно теперь заметить, что между u_i не может быть больше трех соотношений этого вида, ибо три из функций u_i суть 1, u и u^2. Если бы между u_i было четыре независимых соотношения, то все u_i можно было бы выразить через два из них и мы получили бы уравнения между u^2, u и 1, что невозможно. Точно так же не может быть больше трех соотношений между v_i.

Значит, $h=3$, все u_i выражены линейно через u^2, u и 1, т. е. U_1, U_2, U_3 суть трехчлены второй степени относительно u, а V_1, V_2, V_3 — относительно v. С другой стороны, все U_i линейно зависят от U, U' и $U''-\frac{U'^2}{U}$.

Разрешая полученные три соотношения относительно U, U', $U''-\frac{U'^2}{U}$, мы найдем, что каждое из этих выражений — многочлен не выше четвертой степени от u. Следовательно, U'^2 делится на U, т. е. все корни U кратные. Так как предположение, что U есть полный куб, приводит к многочлену третьей степени для U_1, то надо допустить, что U и V — полные квадраты

$$U=[f(u)]^2, \quad V=[\varphi(v)]^2,$$
$$f(u)=\alpha u^2+\beta u+\gamma, \quad \varphi(v)=\alpha_1 v^2+\beta_1 v+\gamma_1.$$

Внося эти значения в уравнение (a), получим, как в случае сферы,

$$\varphi(v)=f(-v)$$

с двумя соотношениями для α, β, γ:

$$\beta(\alpha+\gamma)(b-c)(a-c)=0, \quad \beta(\alpha-\gamma)(b-a)(a-c)=0.$$

Следовательно, центральная поверхность 2-го порядка с тремя различными осями имеет три главных основания

$$\varphi=\pm\frac{u}{v}, \quad \varphi=\pm\frac{u^2+1}{v^2+1}, \quad \varphi=\pm\frac{u^2-1}{v^2-1}. \tag{51}$$

Так как сфера уже рассмотрена, то можно считать $a-c \neq 0$.

Для поверхности вращения $a=b$ мы имеем еще главное основание вида

$$\varphi=\pm\frac{u^2+\beta u-1}{v^2-\beta v-1}.$$

Интегрируя уравнение $\frac{du}{dv}=\varphi$ для трех случаев (51), получим три главных основания

$$x=\text{const}, \quad \frac{z}{y}=\text{const}, \tag{A}$$

$$y=\text{const}, \quad \frac{x}{z}=\text{const}, \tag{B}$$

$$z=\text{const}, \quad \frac{y}{x}=\text{const} \tag{C}$$

и для поверхностей вращения, кроме того,

$$y-\beta x=\text{const}, \quad \frac{x}{z}-\beta\frac{y}{z}=\text{const}. \tag{D}$$

Очевидно, при вращении поверхности около ее оси главные основания (A), (B) и (D) непрерывно переходят одно в другое.

Для параболоида

$$2z=ax^2+by^2$$

получим

$$x=\frac{u+v}{\sqrt{a}}, \quad y=\frac{u-v}{\sqrt{-b}}, \quad z=2uv$$

и то же самое уравнение (a) только с заменой

$$A=1+a(u+v)^2-b(u-v)^2.$$

Такие же рассуждения приводят, если $a \gtrless b$, к основаниям

$$\varphi=\pm\frac{u}{v}$$

или

$$\varphi=\pm 1,$$

т. е.

$$z=\text{const}, \quad \frac{x}{y}=\text{const}, \tag{A}$$

$$x=\text{const}, \quad y=\text{const} \tag{B}$$

и для параболоида вращения; кроме того,

$$x-\beta y=\text{const}, \quad y+\beta x=\text{const}, \quad \beta=\text{const}.$$

Все эти главные основания были указаны Петерсоном [12] и подробно исследованы Млодзеевским [13], [27]. Приведенный метод определения всех главных оснований поверхности дан мной [78].

Поверхности 2-го порядка — единственные поверхности, на которых известны все главные основания.

14. Бюшгенс [87] приложил общие уравнения к определению главных оснований линейного элемента поверхности вращения, ограничиваясь, впрочем, случаем конечного числа главных оснований на каждой поверхности. Мы приведем сейчас с некоторыми сокращениями ход рассуждений Бюшгенса.

Зададимся линейным элементом вида

$$ds^2=du^2+U^2dv^2. \tag{52}$$

Задача сводится к интегрированию системы (41), где M, N, P, M_1, N_1, P_1 определены по формулам (39) для линейного элемента (52).

Если случай бесконечного числа главных оснований исключается, то последовательными диференцированиями и исключениями производных φ и ψ мы придем к двум независимым конечным уравнениям между φ и ψ, откуда φ и ψ могут быть определены. Так как наши уравнения, кроме φ и ψ, содержат только U и его производные, то оба неизвестных φ и ψ суть функции только одного u.

Очевидное решение $\varphi=0, \frac{1}{\psi}=0$ соответствует меридианам и параллелям поверхности вращения. Исключая этот тривиальный случай, мы можем предполагать, что φ и ψ конечны.

Если система (38) допускает в качестве частного решения τ функцию одного u, то ему будут соответствовать по формулам (37) δ, δ', δ'', а следовательно, и коэфициенты второй квадратичной формы D, D', D'', тоже не зависящие от v. Так как обе квадратичные формы имеют коэфициентами функции одного u, то поверхность — или винтовая или же вращения. В дальнейшем мы не будем выделять поверхности вращения из общего класса винтовых поверхностей.

Внося $\frac{\partial\tau}{\partial v}=0$ во второе уравнение (38), получим

$$M_1 \operatorname{sh} 2\tau + N_1 \operatorname{ch} 2\tau + P_1 = 0. \tag{53}$$

Замечательно, что каждое решение этого уравнения удовлетворяет первому уравнению (38). Так как (53) — квадратное уравнение относительно $\operatorname{ch} 2\tau + \operatorname{sh} 2\tau = e^{2\tau}$:

$$(M_1+N_1)(\operatorname{ch} 2\tau + \operatorname{sh} 2\tau)^2 + 2P_1(\operatorname{ch} 2\tau + \operatorname{sh} 2\tau) - (M_1 - N_1) = 0, \tag{53'}$$

то оно допускает два решения τ. Значит, существует две винтовые поверхности среди серии ∞^1 налагающихся поверхностей с общим главным основанием изгибания. Исключение представляют только бесконечно большие корни $\tau=\pm\infty$, а также случай кратных корней.

В зависимости от наличия бесконечных или кратных корней уравнения (53) имеем шесть различных случаев.

I. Два различных, конечных корня τ:

$$M_1^2-N_1^2 \neq 0, \quad M_1^2-N_1^2+P_1^2 \neq 0.$$

Основание не содержит геодезических линий. Среди серии бесконечного числа налагающихся поверхностей существуют две винтовые поверхности.

Внося в уравнения (35a), (35b) $\delta_v=\delta_v'=0$ и подсчитывая скобки Кристоффеля и кривизну для линейного элемента (52), получим

$$\delta\delta''-\delta'^2=-\frac{U''}{U}, \quad \frac{\partial \ln \delta'}{\partial u}=-2\frac{U'}{U}, \quad \frac{\partial\delta''}{\partial u}=UU'\delta,$$

откуда, интегрируя, имеем для винтовой поверхности

$$\left.\begin{aligned} \delta &= \frac{c_2^2-U^3U''}{U^3\sqrt{c_1U^2-U^2U'^2-c^2}}, \quad \delta'=\frac{c_2}{U^2}, \\ \delta'' &= \frac{\sqrt{c_1U^2-U^2U'^2-c_2^2}}{U}. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Вторая винтовая поверхность определяется такими же формулами с другими постоянными c_3, c_4.

Внося эти значения в уравнение (36), мы получим два уравнения, которые определят общую сопряженную систему геликоидов (54), т. е. функции φ и ψ. Система уравнений (38) допускает теперь два очевидных решения, которые соответствуют выбранным геликоидам (54). Поэтому условие интегрируемости ее сводится к одному уравнению, например первому уравнению (41). Если туда внести найденные выражения φ и ψ, то получим одно диференциальное уравнение 4-го порядка для U.

Четыре произвольных постоянных, получаемых при интегрировании этого уравнения, и четыре постоянных c_1, c_2, c_3, c_4, введенных заданием двух геликоидов, составят восемь постоянных, от которых может зависеть U, т. е. линейный элемент поверхности. Конечно, эти постоянные могут и не быть независимыми и могут сводиться к меньшему числу.

IIa. Один двойной корень конечный, не равный нулю:

$$M_1^2-N_1^2 \neq 0, \quad M_1^2-N_1^2+P_1^2=0. \tag{55}$$

Основание не содержит геодезических. Среди ∞^1 налагающихся поверхностей существует только один геликоид, пусть, например, геликоид (54). Из трех уравнений (41) попрежнему только одно независимо, ибо двойной корень (40) удовлетворяет системе (38). Уравнения (36), (55) и первое (41) определяют φ, ψ и U. По исключении φ и ψ получим для U диференциальное уравнение 5-го порядка. Поверхность зависит не более чем от семи постоянных, считая в том числе постоянные c_1, c_2, которые вошли заданием геликоида (54).

IIb. Два различных корня $\operatorname{ch} 2\tau + \operatorname{sh} 2\tau$, из которых один равен нулю (или бесконечности, — эти два случая переходят один в другой изменением знака τ), а другой конечен и отличен от нуля:

$$M_1-N_1=0, \quad P_1 \neq 0, \quad M_1+N_1 \neq 0.$$

В силу (39) первое уравнение дает

$$\theta(\varphi)=0. \tag{56}$$

Семейство линий φ в главном основании состоит из геодезических. Среди ∞^1 налагающихся поверхностей с общим основанием существует один геликоид, пусть, например, геликоид (54). Условия интегрируемости (41) сводятся к двум первым уравнениям, ибо система (38) заведомо имеет одно решение, которое соответствует выбранному геликоиду (54); кроме того, в силу (56) M и N равны между собой; следовательно, и первые два уравнения (41) совпадают между собой. Уравнения (36), (56) и первое (41) определяют φ, ψ и U.

IIIa. Двойной корень $\operatorname{ch} 2\tau + \operatorname{sh} 2\tau$, равный нулю (или бесконечности):

$$M_1-N_1=0, \quad P_1=0, \quad M_1+N_1 \neq 0. \tag{57}$$

Попрежнему получаем уравнение (56); главное основание содержит одно семейство геодезических φ. Среди налагающихся поверхностей нет ни одного геликоида. В силу равенства (56) M и N равны между собой.

Пользуясь уравнениями (57) и помня, что $\frac{\partial P}{\partial v}=0$, ибо все величины — функции одного u, заметим, что три уравнения (41) содержат только одно независимое. Уравнения (57) и первое (41) определят φ, ψ и U с пятью произвольными постоянными.

IIIb. Два различных решения $\operatorname{ch} 2\tau+\operatorname{sh} 2\tau$, из которых одно нулевое, а другое — бесконечность:

$$M_1+N_1=0, \quad M_1-N_1=0.$$

Отсюда непосредственно следует в силу (39)

$$\theta(\varphi)=0, \quad \theta(\psi)=0. \tag{58}$$

Основание содержит два семейства геодезических. Среди налагающихся поверхностей нет ни одного геликоида. Система (41) сводится к последнему уравнению. Уравнения (58) и последнее (41) определят φ, ψ и U с шестью произвольными постоянными. Все найденные поверхности суть поверхности Фосса.

IV. Уравнение (53) исчезает тождественно:

$$M_1=0, \quad N_1=0, \quad P_1=0. \tag{59}$$

Второе уравнение (38) дает $\frac{\partial \tau}{\partial v}=0$; τ зависит только от u; все налагающиеся поверхности — винтовые. Главное основание изгибания содержит два семейства геодезических. В силу (59) система (41) удовлетворена. Уравнения (59) определяют φ, ψ и U с пятью произвольными постоянными.

Поверхности (59) были определены Штэккелем [35], [37], который искал изгибание на главном основании среди ∞^2 налагающихся винтовых поверхностей. Штэккель не заметил, что найденные им поверхности — поверхности Фосса.

Поверхности IIIb были определены затем Гамбье [109].

§ 4. Поверхности с бесконечным числом главных оснований.

15. Основания Фосса на заданной поверхности S определяются системой (50). Если S отнесена к асимптотическим линиям, то эта система принимает вид

$$\frac{\partial \ln \varphi}{\partial u}=-a+\frac{c_1}{\varphi^2}, \quad \frac{\partial \ln \varphi}{\partial v}=a_1-c\varphi^2, \tag{60}$$

где

$$a=\begin{Bmatrix}1\ 1\\ 1\end{Bmatrix}', \quad a_1=\begin{Bmatrix}2\ 2\\ 2\end{Bmatrix}', \quad c=\begin{Bmatrix}1\ 1\\ 2\end{Bmatrix}', \quad c_1=\begin{Bmatrix}2\ 2\\ 1\end{Bmatrix}'. \tag{61}$$

Условие интегрируемости (60) имеет вид

$$\varphi^2\left(\frac{\partial c}{\partial u}-2ac\right)-\frac{\partial a_1}{\partial u}-\frac{\partial a}{\partial v}+4cc_1+\frac{1}{\varphi^2}\left(\frac{\partial c_1}{\partial v}-2a_1c_1\right)=0. \tag{62}$$

Каждому значению $\pm\varphi$ соответствует главное основание поверхности. Так как уравнение (62) — квадратное относительно φ^2, то поверхность не может иметь более двух оснований Фосса, без того чтобы их не было бесконечное множество.

Нетрудно показать существование поверхностей с двумя (и только двумя) основаниями Фосса: если на поверхности вращения есть одно основание Фосса, то существует и второе, симметричное первому относительно плоскости меридиана. Само собой ясно, что при изгибании сохраняется только одно основание.

Если поверхность имеет бесконечное число оснований Фосса, то уравнение (62) исчезает тождественно; в этом случае мы имеем

$$\frac{\partial c}{\partial u}=2ac, \quad \frac{\partial a_1}{\partial u}+\frac{\partial a}{\partial v}=4cc_1, \quad \frac{\partial c_1}{\partial v}=2a_1c_1 \tag{63}$$

и, кроме того, условие Дини [Т. П. 109 (17)]

$$\frac{\partial a}{\partial v}=\frac{\partial a_1}{\partial u}.$$

Система (60) дает теперь $\frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial u \partial v}$, следовательно, $\varphi=UV$. Выбором параметров u, v можно привести для одного какого-нибудь основания φ произвольные функции U и V к единице. Внося в уравнения (60) $\varphi=1$ и пользуясь (63), мы получим все уравнения проблемы в виде системы

$$a=c_1, \quad a_1=c, \quad \frac{\partial c}{\partial u}=\frac{\partial c_1}{\partial v}=2cc_1. \tag{63'}$$

Если ввести новые криволинейные координаты $\alpha=u+v$, $\beta=u-v$, то новые коэфициенты линейного элемента сферы будут

$$e_1=\frac{e+g+2f}{4}, \quad f_1=\frac{e-g}{4}, \quad g_1=\frac{e+g-2f}{4},$$

и между скобками Кристоффеля окажется зависимость

$$\begin{Bmatrix}1\ 1\\ 1\end{Bmatrix}'+\begin{Bmatrix}1\ 1\\ 2\end{Bmatrix}'-\begin{Bmatrix}2\ 2\\ 1\end{Bmatrix}'-\begin{Bmatrix}2\ 2\\ 2\end{Bmatrix}'=2\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix}'_1,$$

$$\begin{Bmatrix}1\ 1\\ 1\end{Bmatrix}'-\begin{Bmatrix}1\ 1\\ 2\end{Bmatrix}'-\begin{Bmatrix}2\ 2\\ 1\end{Bmatrix}'+\begin{Bmatrix}2\ 2\\ 2\end{Bmatrix}'=2\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 2\end{Bmatrix}'_1,$$

где значком 1 внизу отмечены величины, относящиеся к переменным α, β.

Следовательно, первые два уравнения (63') дадут

$$\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix}'_1=0, \quad \begin{Bmatrix}1\ 2\\ 2\end{Bmatrix}'_1=0$$

или, развертывая скобки Кристоффеля [Т. П. 197],

$$\frac{\partial e_1}{\partial \beta}=0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial \alpha}=0.$$

Следовательно, e_1 и g_1 — функции одного α и одного β. Замена параметров $e_1 d\alpha^2=d\alpha_1^2$, $g_1 d\beta^2=d\beta_1^2$ приведет e_1 и g_1 к единице, и линейный элемент примет вид

$$ds'^2=d\alpha_1^2+2\cos\omega\, d\alpha_1 d\beta_1+d\beta_1^2. \tag{64}$$

Преобразуя так же третье уравнение (63), получим

$$\frac{\partial}{\partial\beta_1}\left[\left\{\begin{matrix}1\ 1\\ 1\end{matrix}\right\}_2+\left\{\begin{matrix}2\ 2\\ 1\end{matrix}\right\}_2\sqrt{\frac{B}{A}}\right]=\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left[\left\{\begin{matrix}2\ 2\\ 2\end{matrix}\right\}_2+\left\{\begin{matrix}1\ 1\\ 2\end{matrix}\right\}_2\sqrt{\frac{A}{B}}\right],$$

где

$$A=\left(\frac{d\alpha_1}{d\alpha}\right)^4,\quad B=\left(\frac{\partial\beta_1}{\partial\beta}\right)^4,$$

и значком 2 внизу отмечены скобки Кристоффеля, вычисленные для линейного элемента (64). Развертывая эти выражения, получим

$$A\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha_1^2}-A\left(\frac{\partial\omega}{\partial\alpha_1}\right)^2\operatorname{ctg}\omega+\frac{1}{2}A'\frac{\partial\omega}{\partial\alpha_1}=$$

$$=B\frac{\partial^2\omega}{\partial\beta_1^2}-B\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta_1}\right)^2\operatorname{ctg}\omega+\frac{1}{2}B'\frac{\partial\omega}{\partial\beta_1}. \qquad (a)$$

Диференцируя по α_1 и по β_1 и пользуясь уравнением Гаусса для сферы (кривизна линейного элемента (64) равна единице)

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha_1\partial\beta_1}=-\sin\omega,$$

получим

$$4A\left(\frac{\partial\omega}{\partial\alpha_1}\right)^2+A''=4B\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta_1}\right)^2+B''. \qquad (b)$$

Диференцируя (b) еще раз по α_1 и по β_1 и сокращая на $8\sin\omega$, получим

$$A\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha_1^2}+\left(\frac{\partial\omega}{\partial\alpha_1}\right)^2\operatorname{ctg}\omega\right]+A'\frac{\partial\omega}{\partial\alpha_1}=$$

$$=B\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial\beta_1^2}+\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta_1}\right)^2\operatorname{ctg}\omega\right]+B'\frac{\partial\omega}{\partial\beta_1}$$

или, в силу (a),

$$A\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha_1^2}-3\left(\frac{\partial\omega}{\partial\alpha_1}\right)^2\operatorname{ctg}\omega\right]=B\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial\beta_1^2}-3\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta_1}\right)^2\operatorname{ctg}\omega\right]. \qquad (c)$$

Диференцируя еще раз по α_1 и по β_1, получим в силу (a) и (c)

$$A\left(\frac{\partial\omega}{\partial\alpha_1}\right)^2=B\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta_1}\right)^2. \qquad (d)$$

Из уравнений (a), (c), (d) следует

$$A\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha_1^2}=B\frac{\partial^2\omega}{\partial\beta_1^2},\quad A'\frac{\partial\omega}{\partial\alpha_1}=B'\frac{\partial\omega}{\partial\beta_1}. \qquad (e)$$

Значит,

$$\frac{A'}{\sqrt{A}}=\frac{B'}{\sqrt{B}}.$$

Каждое отношение равно одному и тому же постоянному, ибо левая часть может зависеть только от α_1, а правая — только от β_1. Интегрируя, получим

$$A=(l\alpha_1+m)^2,\quad B=(l\beta_1+n)^2,\quad l,\ m,\ n=\text{const}.$$

Внося эти значения в четвертое уравнение (63′), получим

$$l=0,\quad m=n.$$

Очевидно, постоянное $m=n$ можно привести к единице. Умножая α и β на m, мы получим

$$\alpha_1=\alpha,\quad \beta_1=\beta,\quad \cos\omega=F(\alpha\pm\beta).$$

Два знака в аргументе функции F сводятся к замене u на v. Если остановиться на знаке плюс, то получим линейный элемент сферы в виде

$$ds'^2=2(du^2+dv^2)+2F(u)(du^2-dv^2).$$

Сферическое изображение асимптотических линий ортогонально; следовательно, ортогональны и асимптотические линии на поверхности S, т. е. поверхность минимальная [Т. П. 110]. Линии u на сфере геодезические; эти же линии являются геодезическими и на поверхности, а следовательно, прямыми [Т. П. 115]. Итак, наша поверхность линейчатая, минимальная. Единственная действительная минимальная линейчатая поверхность — минимальный геликоид [Т. П. 154]. Меняя параметры u, v, уравнения этого геликоида можно написать в виде

$$x=\operatorname{sh}u\cos v,\quad y=\operatorname{sh}u\sin v,\quad z=v,$$

$$ds^2=\operatorname{ch}^2u\,(du^2+dv^2),\quad ds'^2=\frac{du^2+dv^2}{\operatorname{ch}^2u},$$

и основания Фосса определяются уравнением

$$\lambda^2du^2-(\operatorname{ch}^2u-\lambda^2)\,dv^2=0,\quad \lambda=\text{const}.$$

Уравнения изогнутой на этом основании поверхности суть

$$x=r\cos\left(\frac{v}{m}+U_1\right),\quad y=r\sin\left(\frac{v}{m}+U_1\right),\quad z=hv+U;$$

$$r^2=m^2(\operatorname{ch}^2u-h^2),\quad U'^2=(\operatorname{ch}^2u-\lambda^2)(1-m^2),\quad U_1'=\frac{-hU'}{m(\operatorname{ch}^2u-h^2)},$$

$$h^2=\lambda^2+(1-\lambda^2)m^2,$$

где m — параметр изгибания.

Гамбье [119] показал существование мнимого минимального геликоида [1]), определяемого формулами

$$x=\frac{u^2-v^2}{2},\quad y+iz=v,\quad y-iz=u^2v-\frac{v^3}{3},$$

$$ds^2=u^2(du^2+dv^2),\quad ds'^2=-\frac{du^2+dv^2}{u^2}.$$

---

[1]) Если написать линейный элемент сферического изображения в виде $ds'^2=a(du^2+dv^2)$, то функция $a=\varphi(u)$ удовлетворяет уравнению Гаусса для сферы $\frac{d^2\ln a}{du^2}=-2a$. Интегрируя, получим $\frac{da}{du}=a\sqrt{C-4a}$. Мнимый геликоид Гамбье соответствует значению произвольного постоянного $C=0$.

Это — алгебраическая поверхность. Обычное (непараметрическое) уравнение этой поверхности в декартовых координатах имеет вид

$$2\,[3x+(y+iz)^2]\,(y+iz)=3\,(y-iz).$$

Прямолинейные образующие параллельны плоскости $y+iz=0$. Эта поверхность тоже несет бесконечное число оснований Фосса, определяемых уравнением

$$\frac{du^2}{u^2-\lambda^2}-\frac{dv^2}{\lambda^2}=0, \quad \lambda=\mathrm{const}.$$

Ее изгибания на главном основании могут быть действительны (если $\lambda \geqslant m > 0$ и $u > \lambda$):

$$x=r\cos\left(\frac{v}{m}+U_1\right), \quad y=r\sin\left(\frac{v}{m}+U_1\right), \quad z=v\sqrt{\lambda^2-m^2}+U,$$

$$r^2=m^2\,[u^2-\lambda^2+m^2], \quad U'^2=u^2-\lambda^2, \quad U_1'=-\frac{\sqrt{(\lambda^2-m^2)(u^2-\lambda^2)}}{m\,(u^2-\lambda^2+m^2)},$$

m — параметр изгибания.

16. Главные основания с одним семейством геодезических линий на поверхности, отнесенной к асимптотическим линиям, определяются системой (49):

$$\left.\begin{aligned} &p\varphi+q+c\varphi^2+a\varphi-a_1-\frac{c_1}{\varphi}=0,\\ &\frac{\partial q}{\partial u}=-cp\varphi^2-\frac{c_1 q}{\varphi^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial c}{\partial u}\varphi^2+\frac{1}{2}\frac{\partial c_1}{\partial v}\frac{1}{\varphi^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (65)$$

где

$$p=\frac{\partial \ln \varphi}{\partial u}, \quad q=\frac{\partial \ln \varphi}{\partial v},$$

a, a_1, c, c_1 сохраняют значения (61).

Если первое уравнение (65) продиференцировать по два раза, а второе — по одному разу по u и по v, то получим всего девять уравнений, из которых можно исключить первые и вторые производные от p и q. Если, кроме того, исключить q с помощью первого уравнения (65), то получим уравнение вида

$$4p^2\,(c\varphi^6-c_1\varphi^3)+p\,(c^2\varphi^7+\ldots+7c_1^2)-\frac{1}{2}\,c\,\frac{\partial c}{\partial u}\,\varphi^7+\ldots-\frac{\partial c_1^2}{\partial v}=0. \qquad (66)$$

Если c и c_1 оба — нули, то асимптотические линии — геодезические, следовательно, прямолинейны и поверхность — 2-го порядка. Этот случай можно исключить. Следовательно, уравнение (66) всегда содержит p. Если мы хотим, чтобы поверхность имела бесконечное число главных оснований 2-го рода (с одним семейством геодезических линий), то необходимо, чтобы система была вполне интегрируема.

Левая часть (66) имеет вид

$$F(p,\varphi)=m_2p^2+m_1p+m_0,$$

где m_k есть многочлен относительно φ. Если этот квадратный трехчлен относительно p неприводим в области рациональных функций φ, то мы его обозначим через $F(p,\varphi)$. Если он распадается на множители первой степени, то мы обозначим через $F(p,\varphi)$ квадрат одного из его множителей.

Продиференцируем $F=0$ по u и по v и заменим производные от p и q с помощью уравнений (65). Мы получим уравнение, содержащее φ и p. Если это уравнение вместе с уравнением (66) определяют p и φ, то поверхность может иметь только конечное число оснований. Если они не определяют p и φ, то по исключении p должно получиться тождество относительно φ. Если F неприводимо, то полученное уравнение должно делиться на F. То же самое будет и в том случае, если F есть точный квадрат.

Итак, имеем два тождества:

$$\begin{aligned} &\Big[p\,(c\varphi^5-c_1\varphi^2)+\frac{1}{2}\frac{\partial c}{\partial u}\varphi^5-cc_1\varphi^3-c_1a\varphi^2-\\ &-\left(\frac{1}{2}\frac{\partial c_1}{\partial v}-c_1a_1\right)\varphi+c_1^2\Big]\frac{\partial F}{\partial p}+(p\varphi^4+c\varphi^5+a\varphi^4-a_1\varphi^3-c_1\varphi^2)\,\varphi\,\frac{\partial F}{\partial \varphi}-\\ &-\varphi^3\frac{\partial F}{\partial v}\equiv(ph\varphi^4+h_5\varphi^5+\ldots+h_0)F \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

и

$$\begin{aligned} &[p^2\varphi^2+p\,(2c\varphi^3+a\varphi^2+c_1)]+\\ &+\left[\frac{\partial c}{\partial u}\varphi^3+\frac{\partial a}{\partial u}\varphi^2-\frac{\partial a_1}{\partial u}\varphi-\frac{\partial c_1}{\partial u}\right]\frac{\partial F}{\partial p}+(c\varphi^3+a\varphi^2-a_1\varphi-c_1)\,\varphi\,\frac{\partial F}{\partial \varphi}-\\ &-\varphi^2\frac{\partial F}{\partial u}-\varphi\frac{\partial F}{\partial v}\equiv(pk\varphi^2+k_3\varphi^3+\ldots+k_0)\,F, \end{aligned} \qquad \text{(b)}$$

где h_i, k_i — некоторые функции u и v.

Внесем сюда $F=m_2\varphi^2+m_1\varphi+m_0$.

Сравним коэфициенты при p^3 в уравнении (a); мы получим

$$\varphi^5\frac{\partial m_2}{\partial \varphi}=\varphi^4 h m_2.$$

Так как производная многочлена $\frac{\partial m_2}{\partial \varphi}$ не может делиться на m_2, то, очевидно, m_2 содержит только одну степень φ. Полагая коэфициент равным единице, имеем

$$m_2=\varphi^n, \quad h=n.$$

Из уравнения (b) получим $k=n$. Сравнение коэфициентов при p^2 в обоих уравнениях дает

$$\left.\begin{aligned} h_5\varphi^5+\ldots+h_0=(n+2)\,c\varphi^5+\\ +na\varphi^4-na_1\varphi^3-(n+2)\,c_1\varphi^2+\varphi^{5-n}\frac{\partial m_1}{\partial y}-nm_1\varphi^{4-n},\\ k_3\varphi^3+\ldots+k_0=(n+4)\,c\varphi^3+\\ +(n+2)\,a\varphi^2-na_1\varphi-(n-2)\,c_1-\varphi^{2-n}m_1. \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

Отсюда следует, что m_1 имеет множителем φ^{n-2}. Аналогично найдем, что m_0 содержит множителем φ^{n-4}. Так как F можно было бы сократить на φ^{n-4}, то можно считать $n=4$. Далее, из (c) следует, что m_1 не свыше пятой степени и, аналогично, m_0 — не свыше шестой.

Сравнение коэфициентов при $p\varphi^{10}$ в (a) и $p\varphi^8$ в (b) приводит к заключению, что коэфициенты при φ^5 в выражении для m_1 и при φ^6 в выражении для m_0 равны нулю. Сравнивая коэфициенты при следующих степенях φ, найдем

$$F(p,\ \varphi)\equiv(p\varphi^2+a\varphi^2-c_1)^2.$$

Таким образом из уравнений (65) и (66) следует

$$p=-a+\frac{c_1}{\varphi^2},\quad q=a_1-c\varphi^2.$$

Это — система (60), которая определяет основания Фосса. Таким образом поверхности, обладающей бесконечным числом главных оснований с одним только семейством геодезических, не существует. Если одно семейство состоит из геодезических, то и линии другого семейства тоже геодезические, и тогда поверхность является одним из двух минимальных геликоидов.

17. Тот же метод применим и к системе (48).

Если поверхность отнесена к асимптотическим, то

$$n_1=m\varphi,\quad n=\frac{m_1}{\varphi},$$

и систему (48) приведем к виду

$$\frac{\partial m}{\partial v}=\frac{\partial m_1}{\partial u},\quad \frac{\partial m}{\partial u}\varphi+m\varphi\left(\frac{c_1}{\varphi^2}-a\right)=\frac{\partial m_1}{\partial v}\frac{1}{\varphi}+\frac{m_1}{\varphi}(c\varphi^2-a_1), \quad (67)$$

$$\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{c_1}{\varphi^2}-a+m,\quad \frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-c\varphi^2+a_1-m_1.$$

Уравнения (67) рациональны относительно m, m_1, φ и их производных. Диференцируя и исключая производные, чтобы пополнить систему,

мы будем получать уравнения того же типа. Например, первые диференцирования приведут к уравнениям

$$2\frac{\partial m}{\partial v}=-\frac{2c_1}{\varphi^2}m_1-2c\varphi^2m+\left(2a_1c_1-\frac{\partial c_1}{\partial v}\right)\frac{1}{\varphi^2}+\left(2ac-\frac{\partial c}{\partial v}\right)\varphi^2+ +\frac{\partial a}{\partial v}+\frac{\partial a_1}{\partial u}-4cc_1; \quad (a)$$

$$\frac{\partial m}{\partial u}\left[6c\varphi^8m-6c_1\varphi^4m_1+\left(3\frac{\partial c}{\partial u}-6ac\right)\varphi^8-\left(3\frac{\partial c_1}{\partial v}-6a_1c_1\right)\varphi^4\right]= =-4c\varphi^8m^3+4c_1\varphi^2m_1^3+P, \quad (b)$$

где P — многочлен квадратный относительно m и m_1 и 10-й степени относительно φ. Новое диференцирование даст конечное уравнение относительно m, m_1 и φ, и это уравнение не исчезает тождественно, если исключить случай поверхностей 2-го порядка ($c=c_1=0$). Полная система, получаемая последовательным пополнением (67), может содержать одно, два или три конечных относительно m, m_1 и φ уравнения, что соответствует ∞^2, ∞^1 или конечному числу главных оснований на поверхности. Ограничимся случаем ∞^2 главных оснований, т. е. одного конечного уравнения типа

$$F(m,\ m_1,\ \varphi)=0.$$

Прежде всего может случиться, что в уравнении (b) обе части обращаются отдельно в нуль:

$$\left.\begin{aligned} 2cm\varphi^4-2c_1m_1+\left(\frac{\partial c}{\partial u}-2ac\right)\varphi^4-\left(\frac{\partial c_1}{\partial v}-2\,a_1c_1\right)=0;\\ 4cm^3\varphi^8-4c_1m_1^3\varphi^2-P=0. \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

Многочлен F, очевидно, должен совпадать с левой частью первого уравнения (c). Второе уравнение (c) при наших предположениях должно являться следствием первого. Допустим, что c_1 не нуль (ибо c и c_1 одновременно не равны нулю по нашему предположению). Исключая m_1, мы должны получить тождество относительно m и φ. Отсюда немедленно получаем, что $c=0$, и первое уравнение (c) принимает вид

$$m_1=a_1-\frac{1}{2}\frac{\partial\ln c_1}{\partial v}.$$

Если это значение m_1 внести в первые уравнения (67) и в уравнение (a) и исключить $\frac{\partial m}{\partial v}$, то получим уравнение (62). Оно должно быть удовлетворено тождественно, ибо, по условию, φ содержит произвольное постоянное. Мы приходим к уравнениям (63), т. е. опять к двум минимальным геликоидам.

Такой же результат получим, если уравнение (b) определяет $\frac{\partial m}{\partial u}$. Тогда мы диференцируем $F=0$, исключаем производные от m, m_1, φ с помощью (67), (a) и (b). Получаемое уравнение должно быть алгебраическим следствием $F=0$. Мы можем предположить, что $F=0$ неприводимо, выбирая за F, в случае надобности, один из его множителей, если F разлагается на рациональные относительно m, m_1, φ множители. При этом предположении производная $\frac{dF}{du}$, после всех исключений, должна делиться на F, и рассуждения, подобные предыдущим, приведут нас к тому же самому результату.

Вся серия ∞^2 главных оснований определяется системой

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \ln \varphi}{\partial u}=\frac{c_1}{\varphi^2}-a+m, \quad \frac{\partial \ln \varphi}{\partial v}=0, \\ &\frac{\partial \ln m}{\partial u}=a-\frac{c_1}{\varphi^2}, \quad \frac{\partial m}{\partial v}=0. \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

ГЛАВА II.

КВАДРАТИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА.

§ 1. Главное основание изгибания и его определение с помощью квадратичных решений тангенциального уравнения Лапласа.

18. Как известно [Т. П. 76], три решения уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}+a\frac{\partial\theta}{\partial u}+b\frac{\partial\theta}{\partial v}=0 \tag{1}$$

определяют декартовы координаты x, y, z произвольной точки поверхности S, отнесенной к сопряженной системе линий u, v. Уравнение (1), очевидно, допускает интеграл $\theta=1$.

Следовательно, можно сказать, что четыре решения x_1, x_2, x_3, $x_4=1$ определяют поверхность S в однородных координатах точки.

Коэфициенты a и b суть скобки Кристоффеля [Т. П. 94]

$$a=-\left\{\begin{matrix}1\ 2\\1\end{matrix}\right\}, \quad b=-\left\{\begin{matrix}1\ 2\\2\end{matrix}\right\},$$

вычисленные для линейного элемента поверхности S.

Если вместо неизвестной функции θ ввести $\theta=\lambda\theta'$, то уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial^2\theta'}{\partial u\,\partial v}+a'\frac{\partial\theta'}{\partial u}+b'\frac{\partial\theta'}{\partial v}+c'\theta'=0, \tag{2}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &a'=a+\frac{\partial\ln\lambda}{\partial v}, \quad b'=b+\frac{\partial\ln\lambda}{\partial u}, \\ &c'=c+a\frac{\partial\ln\lambda}{\partial u}+b\frac{\partial\ln\lambda}{\partial v}+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Нетрудно заметить, что выражения

$$h=\frac{\partial a}{\partial u}+ab-c, \quad k=\frac{\partial b}{\partial v}+ab-c \tag{4}$$

сохраняют свою величину, будем ли мы их вычислять для уравнения (1) или для уравнения (2), поскольку a', b', c' определены формулами (3). Само собой ясно, что, вычисляя их для уравнения (1), мы должны положить $c=0$.

Выражения (4) называются инвариантами Дарбу ([1], II, 23) уравнения Лапласа. Зная эти два инварианта, можно найти коэфициенты a, b, c, по крайней мере, до преобразования $\theta=\lambda\theta'$.

Четыре решения x_1, x_2, x_3, x_4 уравнения Лапласа (2) определяют поверхность, отнесенную к сопряженной системе u, v, в однородных координатах точки.

Если ввести новую неизвестную функцию

$$\theta_1 = \frac{\partial\theta}{\partial v} + a\theta, \tag{5}$$

то уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial u} + b\theta_1 = h\theta \tag{6}$$

или, после исключения θ,

$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial u\,\partial v} + a_1\frac{\partial\theta_1}{\partial u} + b_1\frac{\partial\theta_1}{\partial v} + c_1\theta_1 = 0, \tag{7}$$

где

$$a_1 = a - \frac{\partial \ln h}{\partial v}, \quad b_1 = b, \quad c_1 = c - \frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial v} - b\frac{\partial \ln h}{\partial v}. \tag{8}$$

Нетрудно заметить, что четырем решениям θ по формулам (5) соответствуют четыре решения θ_1; если решения θ суть неоднородные координаты x, y, z точки M поверхности S, то

$$\frac{\theta_1}{a} = \theta + \frac{1}{a}\frac{\partial\theta}{\partial v} \tag{5'}$$

определит тоже неоднородные координаты x_1, y_1, z_1 точки M_1 новой поверхности S_1, отнесенной к сопряженной системе u, v. При этом в силу (5') точка M_1 лежит на прямой, проходящей через точку M с направляющими коэфициентами $\frac{\partial\theta}{\partial v}$, т. е. на касательной к линии v поверхности S. Уравнение (6) показывает, что точка M лежит на касательной к линии u поверхности S_1 в точке M_1. Прямая MM_1 касается в точках M и M_1 обеих поверхностей S и S_1 и описывает, следовательно, конгруэнцию с фокальными полостями S и S_1.

Инварианты уравнения (7) суть

$$h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \ln h}{\partial u\,\partial v}, \quad k_1 = h. \tag{9}$$

Преобразование (5) называется преобразованием Лапласа в сторону линии v. Его можно повторять сколько угодно раз в сторону линии v или, обратно, в сторону линии u, если только инварианты будут отличны от нуля.

19. Так как направляющие косинусы нормали X, Y, Z являются координатами точки сферы, соответствующей точке M в сферическом изображении поверхности, то, очевидно, X, Y, Z удовлетворяют тоже некоторому уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} + A\frac{\partial\theta}{\partial u} + B\frac{\partial\theta}{\partial v} + C\theta = 0, \tag{10}$$

где

$$A = -\left\{\begin{matrix}1\ 2\\ 1\end{matrix}\right\}', \quad B = -\left\{\begin{matrix}1\ 2\\ 2\end{matrix}\right\}', \quad C = f, \tag{11}$$

и скобки Кристоффеля вычислены для линейного элемента сферического изображения [Т. П. 109, сноска]

$$ds'^2 = e\,du^2 + 2f du\,dv + g\,dv^2. \tag{12}$$

Три величины X, Y, Z являются коэфициентами нормального уравнения касательной плоскости поверхности S; свободный член этого уравнения W есть расстояние этой плоскости от начала координат. Если система линий u,v сопряжена на поверхности, то W удовлетворяет тому же уравнению (10).

Действительно, если $\boldsymbol{M}$ — радиус-вектор точки M и $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности S в точке M, то W есть скалярное произведение этих векторов:

$$W = \boldsymbol{nM}, \tag{13}$$

при этом $\boldsymbol{n}$ удовлетворяет уравнению (10), ибо его координаты суть X, Y, Z, а $\boldsymbol{M}$, если линии u, v сопряжены, — уравнению (1). Очевидно,

$$\boldsymbol{nM}_u = 0, \quad \boldsymbol{nM}_v = 0, \quad \boldsymbol{nM}_{uv} = 0, \quad \boldsymbol{n}_v\boldsymbol{M}_u = 0; \tag{a}$$

первые два уравнения показывают, что нормаль перпендикулярна к векторам $\boldsymbol{M}_u$, $\boldsymbol{M}_v$; третье уравнение получится из уравнения (1), а последнее может быть получено диференцированием первого по v.

Диференцируя последовательно (13) и принимая во внимание равенства (a), получим

$$W_u = \boldsymbol{n}_u\boldsymbol{M}, \quad W_v = \boldsymbol{n}_v\boldsymbol{M}, \quad W_{uv} = \boldsymbol{n}_{uv}\boldsymbol{M},$$

откуда прямо следует предложение.

Итак, четыре тангенциальные координаты X, Y, Z, W поверхности, отнесенной к сопряженной системе, удовлетворяют одному и тому же уравнению Лапласа (10). Обратно, имея в виду, что преобразование $\theta = \lambda\theta'$ не меняет вида уравнения (10), придем к заключению, что любые четыре решения уравнения Лапласа (10) определяют в однородных тангенциальных координатах поверхность, отнесенную к сопряженной системе.

Если θ^1, θ^2, θ^3 и θ^4 — четыре решения уравнения (10), то поверхность определяется, как огибающая плоскостей:

$$\sum \theta x = \theta^1 x + \theta^2 y + \theta^3 z + \theta^4 = 0. \tag{14}$$

Точечные координаты поверхности (координаты точки касания) x, y, z определяются уравнением (14) и двумя другими

$$\sum \theta_u x = \theta_u^1 x + \theta_u^2 y + \theta_u^3 z + \theta_u^4 = 0, \tag{15a}$$

$$\sum \theta_v x = \theta_v^1 x + \theta_v^2 y + \theta_v^3 z + \theta_v^4 = 0. \tag{15b}$$

В силу (10) получим также

$$\theta^1_{uv}x+\theta^2_{uv}y+\theta^3_{uv}z+\theta^4_{uv}=0. \tag{15c}$$

Уравнения (14), (15a) определяют характеристику касательных к поверхности S, взятых вдоль линии u. Диференцируя (14), (15a) по v, получим в силу (15b) и (15c)

$$\theta^1x_v+\theta^2y_v+\theta^3z_v=0,$$
$$\theta^1_ux_v+\theta^2_uy_v+\theta^3_uz_v=0.$$

Следовательно, прямая линия [(14), (15a)] совпадает с касательной к линии v поверхности S. Это еще раз доказывает, что линии u, v на поверхности сопряжены [Т. П. 74].

Преобразование Лапласа (5) приведет к новой поверхности S_1. Так как в силу (5)

$$\sum\theta_1x=\sum\theta_vx+a\sum\theta x,$$
$$h\sum\theta x=\sum\theta_{1u}x+b\sum\theta_1x,$$

то касательная плоскость $\sum\theta_1x=0$ к поверхности S_1 проходит через касательную к линии u поверхности S, определяемую уравнениями (14), (15b), а касательная плоскость $\sum\theta x=0$ поверхности S проходит через касательную к линии v поверхности S_1. Две поверхности S и S_1 суть фокальные полости конгруэнции $\sum\theta x=0$, $\sum\theta_1x=0$. Преобразование Лапласа в сторону v в приложении к тангенциальному уравнению Лапласа приводит к той же поверхности, как преобразование Лапласа в сторону u, примененное к точечному уравнению.

20. Приложим теперь эту теорию к главному основанию поверхности. Четыре тангенциальных координаты X, Y, Z, W поверхности, отнесенной к главному основанию u, v, определяются уравнением

$$\frac{\partial^2W}{\partial u\,\partial v}=\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix}'\frac{\partial W}{\partial u}+\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 2\end{Bmatrix}'\frac{\partial W}{\partial v}-fW. \tag{16}$$

При этом первые три координаты (направляющие косинусы нормали) удовлетворяют соотношению

$$X^2+Y^2+Z^2=1. \tag{17}$$

Скобки Кристоффеля определяются формулами (28) главы I. Формулы (4) показывают, что уравнение (10) имеет равные инварианты.

Вводим новую неизвестную функцию

$$\theta=W\sqrt{U+V}. \tag{18}$$

Подсчитывая по формулам (3) коэфициенты нового уравнения и пользуясь формулами (28) главы I, получим уравнение Мутара (Moutard)

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=M\theta, \tag{19}$$

где

$$M=-f-\frac{U'V'}{4(U+V)^2}. \tag{20}$$

Соотношение (17) примет теперь вид

$$\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2=U+V. \tag{21}$$

Решения θ_1, θ_2, θ_3 уравнения (19), удовлетворяющие соотношению (21), где $U=f(u)$ и $V=f(v)$, называются квадратичными (Гишар [36]). Поверхность, отнесенную к главному основанию изгибания, можно определять в тангенциальных координатах четырьмя решениями уравнения Мутара (19), из которых первые три квадратичные.

Обратно, каково бы ни было уравнение Мутара (19), четыре решения его θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, из которых первые три квадратичны, определяют поверхность S, отнесенную к главному основанию.

Такая поверхность определяется, как огибающая плоскостей:

$$\theta_1x+\theta_2y+\theta_3z+\theta_4=0.$$

Допустим, что нам даны четыре решения (19) и первые три удовлетворяют соотношению (21). Вернемся к уравнению (16) с помощью подстановки (18). Соотношение (21) примет вид (17), т. е. X, Y, Z можно считать направляющими косинусами нормали. Это три решения вполне определяют коэфициенты уравнения (16). Так как они имеют вид (28) главы I, то скобки Кристоффеля $\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'$, $\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'$ удовлетворяют условиям Коссера, и координатные линии образуют главное основание на поверхности.

Таким образом определение поверхности, отнесенной к главному основанию, сводится к отысканию четырех решений уравнения Мутара так, чтобы три из них были квадратичны.

Три решения θ_1, θ_2, θ_3 уравнения Мутара определяют по формулам Лельёвра [Т. П. 81] некоторую другую поверхность Σ, отнесенную к асимптотическим линиям. В соответствующих точках поверхностей S и Σ нормали параллельны, и асимптотическим линиям на поверхности Σ соответствует сопряженная система (главное основание) на поверхности S. Поверхность Σ называется *присоединенной* поверхностью в бесконечно малом изгибании S. Она не может быть взята произвольно. К теории этих поверхностей мы перейдем в главе IV.

21. Нетрудно заметить, что коэфициент M в уравнении Мутара, допускающем квадратичные решения, непроизволен. Определение его связывается с определением коэфициента f в линейном элементе сферического изображения поверхности.

Примем функции U и V за независимые переменные (если основание не содержит геодезических линий) и введем, как делает Демулен [48], вспомогательную функцию ψ с помощью уравнения

$$f=-\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}. \tag{22}$$

Уравнения (28) главы I, если выписать полностью скобки $\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix}'$, $\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 2\end{Bmatrix}'$ [Т. П. 197], примут вид

$$\frac{g\frac{\partial e}{\partial v}-f\frac{\partial g}{\partial u}}{eg-f^2}=-\frac{1}{u+v},\quad \frac{e\frac{\partial g}{\partial u}-f\frac{\partial e}{\partial v}}{eg-f^2}=-\frac{1}{u+v}$$

или, разрешая относительно производных $\frac{\partial e}{\partial v}$, $\frac{\partial g}{\partial u}$ и пользуясь (22),

$$(u+v)\frac{\partial e}{\partial v}+e=\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v},\quad (u+v)\frac{\partial g}{\partial u}+g=\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v},$$

откуда

$$e=\frac{1}{u+v}\frac{\partial\psi}{\partial u},\quad g=\frac{1}{u+v}\frac{\partial\psi}{\partial v}.$$

Произвольные функции, полученные при интегрировании, можно включить в функцию ψ, которая определена уравнением (22) вплоть до произвольных слагаемых U_1+V_1.

Если потребовать, чтобы линейный элемент

$$ds'^2=\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{du^2}{u+v}-2\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}du\,dv+\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{dv^2}{u+v} \tag{23}$$

имел кривизну, равную единице (линейный элемент сферы), то получим [Т. П. 197] уравнение 4-го порядка для ψ.

Если линии u геодезические, то можно принять $U=0$, $V=e^{-v}$. Уравнения (28) главы I примут вид

$$\frac{g\frac{\partial e}{\partial v}-f\frac{\partial g}{\partial u}}{eg-f^2}=1,\quad e\frac{\partial g}{\partial u}-f\frac{\partial e}{\partial v}=0,$$

откуда

$$\frac{\partial e}{\partial v}=e,\quad \frac{\partial g}{\partial u}=f.$$

Следовательно, полагая $f=\frac{\partial\psi}{\partial u}e^v$, получим

$$e=e^vU_1,\ g=(\psi+V_1)e^v.$$

Произвольную функцию U_1 приведем к единице выбором параметра u, функцию V_1 включим в функцию ψ и получим линейный элемент вида

$$ds'^2=e^v\left(du^2+2\frac{\partial\psi}{\partial u}du\,dv+\psi dv^2\right). \tag{24}$$

Уравнение Гаусса (кривизна формы равна единице) принимает вид

$$\frac{\partial r}{\partial u}(\psi-p^2)+\left(r-\frac{1}{2}\right)\left(ps-\frac{1}{2}q\right)=e^v(\psi-p^2)^2, \tag{25}$$

где

$$d\psi=p\,du+q\,dv,\quad dp=r\,du+s\,dv.$$

Наконец, для оснований Фосса $U=V=\text{const}$ имеем

$$\frac{\partial e}{\partial v}=\frac{\partial g}{\partial u}=0.$$

Следовательно, выбором соответствующих параметров можно добиться равенства $e=g=1$. Тогда линейный элемент сферы примет вид

$$ds'^2=du^2-2\cos\omega\,du\,dv+dv^2, \tag{26}$$

и уравнение Гаусса

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}=\sin\omega. \tag{27}$$

Нетрудно заметить, что (26) соответствует сферическому изображению асимптотических линий поверхности постоянной отрицательной кривизны [Т. П. 111]. Следовательно, присоединенная поверхность к поверхностям Фосса есть поверхность постоянной отрицательной кривизны.

§ 2. Примеры квадратичных решений.

22. Задача изгибания на главном основании сводится: 1) к отысканию решений уравнения Мутара, 2) к отысканию среди этих решений трех квадратичных.

При интегрировании уравнения Мутара, кроме метода Лапласа, удобно пользоваться преобразованием Мутара, к которому мы будем иметь случай не один раз возвратиться.

Допустим, что нам известен частный интеграл R уравнения (19):

$$\frac{\partial^2R}{\partial u\,\partial v}=MR. \tag{28}$$

В силу (28) имеем

$$R\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}-M\theta\right)=R\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}-\theta\frac{\partial^2R}{\partial u\,\partial v}=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(R\frac{\partial\theta}{\partial v}-\theta\frac{\partial R}{\partial v}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(R\frac{\partial\theta}{\partial u}-\theta\frac{\partial R}{\partial u}\right)=0.$$

Следовательно,

$$\left(R\frac{\partial\theta}{\partial u}-\theta\frac{\partial R}{\partial u}\right)du-\left(R\frac{\partial\theta}{\partial v}-\theta\frac{\partial R}{\partial v}\right)dv$$

есть полный диференциал некоторой функции. Обозначая эту функцию через $-R\vartheta$, имеем

$$-\frac{\partial R\vartheta}{\partial u}=R\frac{\partial\theta}{\partial u}-\theta\frac{\partial R}{\partial u},\quad \frac{\partial R\vartheta}{\partial v}=R\frac{\partial\theta}{\partial v}-\theta\frac{\partial R}{\partial v} \tag{29}$$

или

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial R\vartheta}{\partial u}=-\frac{\partial\left(\frac{\theta}{R}\right)}{\partial u},\quad \frac{1}{R^2}\frac{\partial R\vartheta}{\partial v}=\frac{\partial\left(\frac{\theta}{R}\right)}{\partial v}, \tag{29'}$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial R\vartheta}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial R\vartheta}{\partial v}\right)=0$$

или, развертывая,

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial u\,\partial v}=M_1\vartheta,\quad M_1=R\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{1}{R}\right). \tag{30}$$

Таким образом с помощью квадратур по формулам (29) каждому решению уравнения (28) можно поставить в соответствие частное решение уравнения (30). Говорят, что решение θ преобразовано (преобразование Мутара) с помощью частного решения R в решение ϑ уравнения (30) (Дарбу [1, I, 158]; Бианки [2, II, 42]).

Очевидно, $\frac{1}{R}$ является решением преобразованного уравнения (30). Преобразуя ϑ с помощью решения $\frac{1}{R}$, вернемся к решению θ. Заметим, наконец, что соотношения (29) можно написать в совершенно симметричной форме

$$\frac{\partial(\vartheta+\theta)}{\partial u}=-(\vartheta-\theta)\frac{\partial\ln R}{\partial u},\quad \frac{\partial(\vartheta-\theta)}{\partial v}=-(\vartheta+\theta)\frac{\partial\ln R}{\partial v}. \tag{29''}$$

23. Большинство известных изгибаний на главном основании связано с уравнением Мутара типа Эйлера:

$$E(n)=\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v}-\frac{n(n+1)}{(u+v)^2}\theta=0,\quad n=\text{const}. \tag{31}$$

Оно обладает замечательным свойством (Маслов [121]): существует преобразование Мутара, которое переводит уравнение $E(n)$ в уравнение $E(n+1)$. Допустим, что преобразование Мутара умножает коэфициент M уравнения на постоянный множитель c:

$$M_1=Mc.$$

Внося сюда M и M_1 из уравнений (28) и (30), получим

$$R\frac{\partial^2\frac{1}{R}}{\partial u\,\partial v}=c\frac{1}{R}\frac{\partial^2R}{\partial u\,\partial v}$$

или

$$(c+1)\frac{\partial^2R}{\partial u\,\partial v}+(c-1)\frac{\partial\ln R}{\partial u}\frac{\partial\ln R}{\partial v}=0,$$

откуда, если $c^2\neq 1$,

$$R=(U+V)^{\frac{c+1}{c-1}}.$$

Принимая U и V за независимые переменные u, v и обозначая $n+1=\frac{c+1}{c-1}$ или $-n=\frac{c+1}{c-1}$, придем к уравнению [1]) $E(n)$. Преобразуя

[1]) Если $c=\pm1$, то получаем уравнения $\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=\theta$ и $\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=0$. Если U или V постоянно, то уравнение вырождается.

его с помощью решения уравнения $R=(u+v)^{n+1}$ или решения $R=(u+v)^{-n}$, получим, уравнения $E(n+1)$ и $E(n-1)$.

Это показывает, что достаточно знать общее решение одного из уравнений серии $E(n+k)$, где k — любое целое число, чтобы проинтегрировать любое уравнение этой серии. Это прежде всего относится к уравнению $E(n)$ с целым n, ибо уравнение $E(0)$ интегрируется непосредственно.

24. Уравнение $E(0)=\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=0$ — единственное уравнение типа $E(n)$, у которого инварианты равны нулю. Общий интеграл его имеет вид

$$\theta_i=U_i+V_i,$$

где мы уже заранее поставили значки, чтобы различать отдельные частные интегралы уравнения.

Внося эти значения в соотношение (21), получим

$$\sum_{i=1}^{3}(U_i+V_i)^2=U+V. \tag{32a}$$

Диференцируя по u и по v, получим

$$U_1'V_1'+U_2'V_2'+U_3'V_3'=0. \tag{32b}$$

Уравнение (32b) удовлетворено, если все U_i или все V_i постоянны, но тогда коэфициенты в уравнении касательной плоскости θ_i будут функциями одного независимого переменного, касательная плоскость не будет меняться вдоль координатных линий одного семейства, и поверхность будет развертывающейся. Изгибание развертывающихся поверхностей на главном основании тривиально, ибо на развертывающейся поверхности всякое направление сопряжено с прямолинейными образующими. Этот случай мы будем систематически исключать.

Допустим, что U_3' и V_1' — не нули. Деля (32b) на $U_3'V_1'$ и диференцируя частное по u и по v, получим

$$\left(\frac{U_2'}{U_3'}\right)'\left(\frac{V_2'}{V_1'}\right)'=0.$$

Очевидно, безразлично, какой из множителей приравнять нулю. Если, например, равен нулю первый, то, интегрируя, получим

$$U_2'=bU_3',\quad U_2=bU_3+c_2,\quad b,c_2=\text{const}.$$

Внося это в (32b), имеем

$$\frac{U_1'}{U_3'}+\frac{bV_2'+V_3'}{V_1'}=0,$$

откуда каждое отношение постоянно. Следовательно,

$$U_1=aU_3+c_1,\quad V_3=-aV_1-bV_2+c_3,\quad a,\ c_1,\ c_3=\text{const}.$$

Так как θ_i, очевидно, не изменится, если к U_i прибавить постоянное и из V_i это же постоянное отнять, то, выбирая подходящим образом три постоянных слагаемых для U_1, U_2, U_3, приведем все c_i к нулю. Решения

$$\theta_1 = aU_3 + V_1, \quad \theta_2 = bU_3 + V_2, \quad \theta_3 = U_3 - aV_1 - bV_2, \tag{33}$$

где U_3, V_1, V_2 — произвольные функции, очевидно, квадратичны (удовлетворяют (32a). Определяемая ими поверхность есть огибающая плоскостей

$$(aU_3 + V_1)x + (bU_3 + V_2)y + (U_3 - aV_1 - bV_2)z + \\ + U_4 + V_4 = 0. \tag{34}$$

Точка касания плоскости (34) с ее огибающей определяется уравнением (34) и двумя другими, получаемыми диференцированием (34) по u и по v:

$$U_3'(ax + by + z) + U_4' = 0, \tag{34a}$$

$$V_1'(x - az) + V_2'(y - bz) + V_4' = 0. \tag{34b}$$

Если $u = \text{const.}$, то плоскость (34a) не меняется; следовательно, каждая линия v плоская. Точно так же линии u плоские. При этом плоскости линий v все параллельны плоскости

$$ax + by + z = 0.$$

Принимая эту плоскость за координатную плоскость xy, мы приведем оба постоянных a и b к нулю.

25. Чтобы исследовать получаемые поверхности S, определим ребра возврата тех развертывающихся поверхностей, которые касаются S вдоль координатных линий.

Рассмотрим огибающую касательных плоскостей поверхности вдоль линии u. Ребро возврата определяется уравнением (34) и двумя производными по u. Внося сюда $a = b = 0$ и переходя к однородным координатам по формулам $x = \frac{x_1}{x_4}$, $y = \frac{x_2}{x_4}$, $z = \frac{x_3}{x_4}$, получим

$$V_1x_1 + V_2x_2 + U_3x_3 + (U_4 + V_4)x_4 = 0, \tag{35}$$

$$U_3'x_3 + U_4'x_4 = 0, \tag{35a}$$

$$U_3''x_3 + U_4''x_4 = 0. \tag{35b}$$

Если коэфициенты уравнений (35a) и (35b) пропорциональны, то U_3, U_4 пропорциональны (вплоть до постоянного слагаемого, которое можно привести к нулю, одновременно увеличивая V_4); плоскости (35) вдоль $v = \text{const}$ принадлежат одному пучку, и поверхность S вырождается в линию. Если же исключить это, то уравнения (35a) и (35b) дадут $x_3 = 0$, $x_4 = 0$; следовательно, ребро возврата сводится к одной бесконечно удаленной точке в плоскости xy, а именно: $x_1 : x_2 = -\frac{V_2}{V_1}$. Все развертывающиеся поверхности, описанные около S вдоль линии u, — цилиндры. Образующие цилиндров параллельны плоскости xy.

После Петерсона линии прикосновения описанных цилиндров или конусов называются ц и л и н д р и ч е с к и м и или, соответственно, к о н и ч е с к и м и линиями. Следовательно, главное основание поверхностей (34) содержит одно семейство ($v = \text{const}$) цилиндрических линий.

Ребро возврата огибающей касательных плоскостей вдоль линии v определяется тремя уравнениями:

$$V_1x_1 + V_2x_2 + U_3x_3 + (U_4 + V_4)x_4 = 0, \tag{36}$$

$$V_1'x_1 + V_2'x_2 + V_4'x_4 = 0, \tag{36a}$$

$$V_1''x_1 + V_2''x_2 + V_4''x_4 = 0. \tag{36b}$$

Это ребро возврата вообще не вырождается.

Чтобы геометрическое место точек (36), (36a) и (36b) сводилось к точке, надо, чтобы получаемые отсюда отношения $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ не зависели от v. Это имеет место для (36a) и (36b), если V_1', V_2', V_4' пропорциональны, но тогда плоскости (36) вдоль $u = \text{const}$ образуют пучок, и поверхность S вырождается в линию. Следовательно, надо предположить, что одна из производных V_1', V_2', V_4' обращается в нуль.

1. Пусть $V_4' = 0$; интегрируя, имеем $V_4 = C$; постоянное C можно присоединить к функции U_4 и, следовательно, считать $V_4 = 0$.

Ребро возврата (36), (36a) и (36b) сводится к точке $P\left(x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 : x_4 = -\frac{U_4}{U_3}\right)$. Развертывающаяся поверхность, касательная к S вдоль линии v, образует конус с вершиной в точке P. Линии v — конические. При перемещении от одной линии v к другой точка P перемещается и описывает прямую $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, т. е. ось z.

Неоднородные координаты произвольной точки M поверхности S определяются уравнениями

$$V_1x + V_2y + U_3z + U_4 = 0, \quad V_1'x + V_2'y = 0, \\ U_3'z + U_4' = 0. \tag{37}$$

Отсюда следует, что z есть функция одного u, а отношение $\frac{y}{x}$ — одного v. Полагая $\operatorname{tg} v = -\frac{V_1'}{V_2'}$, $U_3\frac{U_4'}{U_3'} - U_4 = u$, получим

$$x = u\varphi(v)\cos v, \quad y = u\varphi(v)\sin v, \quad z = f(u). \tag{37'}$$

Эти поверхности обладают сопряженной системой из плоских цилиндрических ($v = \text{const}$) и плоских конических ($u = \text{const}$) линий. Вершины конусов расположены на оси z, а образующие цилиндров перпендикулярны к оси z.

Плоскости линий u образуют пучок, осью которого служит ось z; плоскости линий v перпендикулярны к оси z.

Эти поверхности были открыты Петерсоном и носят его имя. Петерсон (и Млодзеевский [13], [27]) получил изгибание этих поверхностей, рассматривая их как производные от поверхности вращения; если радиус u каждой параллели поверхности вращения

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = f(u) \tag{38}$$

умножить на произвольную функцию $\varphi(v)$ с одним и тем же значением вдоль каждого меридиана, то получится поверхность Петерсона (37'). Изгибание ее на главном основании Петерсон [9], [10], [12] дал в виде

$$\left.\begin{aligned} x = u\sqrt{\varphi^2 - t}\cos\psi, \quad y = u\sqrt{\varphi^2 - t}\sin\psi, \\ z = \int \sqrt{f'^2(u) + t}\, du, \\ \psi = \int \frac{\sqrt{\varphi^4 - t\varphi^2 - t\varphi'^2}}{\varphi^2 - t}\, dv. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Для $\varphi = 1$ получается изгибание поверхности вращения [Т. П. 50]. Если положить

$$\varphi(v) = \frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2 v + b^2\cos^2 v}}, \quad f(u) = c\sqrt{1 - u^2}, \quad a, b, c = \text{const},$$

то получим изгибание центральной поверхности 2-го порядка

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

(Террачини [90], Серван [52], Лагалли [89]).

II. Пусть $V_2' = 0$ (очевидно, случаи $V_1' = 0$ и $V_2' = 0$ симметричны); V_2 — постоянно. Эту постоянную нельзя привести к нулю, ибо если $V_2 = 0$, то касательная плоскость (36) не содержит x_2, т. е. параллельна оси y, и S вырождается. Деля все уравнение (36) на постоянную V_2, приведем эту постоянную к единице.

Ребро возврата (36), (36a) и (36b) сводится к бесконечно удаленной точке $x_1 = x_4 = 0$, $x_2 : x_3 = -U_3$. Линии v цилиндрические.

Точечные неоднородные координаты поверхности определяются уравнениями

$$V_1x + y + U_3z + U_4 + V_4 = 0, \quad U_3'z + U_4' = 0, \\ V_1'x + V_4' = 0 \tag{40}$$

или, меняя обозначения,

$$x = v, \quad z = u, \quad y = f(u) + \varphi(v). \tag{40'}$$

Это — поверхность переноса [Т. П, 77], получаемая переносом линии $x = v$, $y = \varphi(v)$, $z = 0$ вдоль линии $x = 0$, $y = f(u)$, $z = u$. В силу произвольности функций $f(u)$ и $\varphi(v)$ это — две произвольные плоские кривые, расположенные во взаимно ортогональных плоскостях (Петерсон [9], [10], Бианки [11], Эйзенхарт [65], Гамбье [91], [108]). Основание содержит два семейства цилиндрических линий.

Изгибание этих поверхностей Петерсон дал в виде

$$x = \int \sqrt{1 + (1 - t^{-2})\varphi'^2(v)}\, dv, \quad y = tf(u) + t^{-1}\varphi(v), \\ z = \int \sqrt{1 + (1 - t^2) f'^2(u)}\, du, \tag{41}$$

где t — параметр изгибания.

В частности, если образующие — минимальные линии, то получим минимальную поверхность [Т. П. 144]. Изгибание минимальной поверхности, при котором она остается минимальной, есть изгибание на главном основании Фосса, состоящем из линии нулевой длины.

26. Если исключить поверхности переноса ($V_2' = 0$), то все остальные поверхности, огибающие плоскостей (35), имеют то же сферическое изображение, что и поверхности Петерсона (37), ибо касательные плоскости параллельны (уравнения их отличаются только свободными членами). Следовательно, наиболее общая поверхность (35) может быть получена из поверхности (37) преобразованием Петерсона.

Точечные координаты определяются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} V_1x + V_2y + U_3z + U_4 + V_4 = 0, \\ U_3'z + U_4' = 0, \quad V_1'x + V_2'y + V_4' = 0 \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

или, при подходящем выборе параметров,

$$\left.\begin{aligned} x &= (u + V)\varphi(v)\cos v - \int V'\varphi(v)\cos v\, dv, \\ y &= (u + V)\varphi(v)\sin v - \int V'\varphi(v)\sin v\, dv, \\ z &= f(u). \end{aligned}\right\} \tag{42'}$$

При $V = 0$ получаются поверхности Петерсона. Если $\varphi(0) = 1$, то получаем поверхности каналов. Следовательно, поверхности (42) можно назвать производными от поверхностей каналов (surface moulure).

Изгибание их Петерсон [9], [10] дает в виде

$$\left.\begin{aligned} x &= (u + V)\sqrt{\varphi^2 - t}\cos\psi - \int V'\sqrt{\varphi^2 - t}\cos\psi\, dv, \\ y &= (u + V)\sqrt{\varphi^2 - t}\sin\psi - \int V'\sqrt{\varphi^2 - t}\sin\psi\, dv, \\ z &= \int \sqrt{f'^2 + t}\, du, \\ \psi &= \int \frac{\sqrt{\varphi^4 - t\varphi^2 - t\varphi'^2}}{\varphi^2 - t}\, dv, \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

где t — параметр изгибания.

27. Квадратичные решения уравнения $E(1)$ были получены Егоровым [47], [59], [76] и независимо от него Драшем [75].

Вывод, который мы даем ниже, принадлежит Маслову [121].

Все решения $E(1)$ могут быть получены преобразованием Мутара из решений уравнения $E(0)$, причем в основу преобразования надо положить частное решение $E(0)$

$$R = (u + v)^{n+1} = u + v.$$

По формулам (29) решение ϑ_i уравнений $E(1)$ равно

$$-(u + v)\vartheta_i = \int \left\{ \left[(u + v)\frac{\partial\theta_i}{\partial u} - \theta_i\right] du - \left[(u + v)\frac{\partial\theta_i}{\partial v} - \theta_i\right] dv \right\}.$$

Если решение θ_i уравнения $E(0)$ взять в виде

$$\theta_i = U_i' - V_i', \tag{44}$$

то для ϑ_i мы получим после интегрирования

$$\vartheta_i = 2\frac{U_i+V_i}{u+v} - U_i' - V_i'. \tag{45}$$

Нетрудно заметить (Егоров [76]), что функции U_i и V_i не вполне определены, именно мы можем заменить их одновременно через

$$U_i + au^2 + bu + c, \quad V_i - av^2 + bv - c, \quad a,\ b,\ c = \text{const}, \tag{46}$$

не меняя решения ϑ_i. Это доказывается непосредственно поверкой.

Умножим теперь первое уравнение (29″) на $\vartheta+\theta$, второе — на $\vartheta-\theta$. Получим

$$\frac{\partial}{\partial u}(\vartheta+\theta)^2 = 2(\theta^2-\vartheta^2)\frac{\partial \ln R}{\partial u},$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(\vartheta-\theta)^2 = 2(\theta^2-\vartheta^2)\frac{\partial \ln R}{\partial v}.$$

Диференцируя первое по v, второе — по u и складывая, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}(\vartheta^2+\theta^2) = 2(\theta^2-\vartheta^2)\frac{\partial^2 \ln R}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial \ln R}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}(\theta^2-\vartheta^2) + \frac{\partial \ln R}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}(\theta^2-\vartheta^2),$$

но так как $2\frac{\partial^2 \ln R}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial u\,\partial v} - R\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{1}{R}\right)$, то последнее уравнение можно переписать в виде

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}(\vartheta^2-\theta^2) + \frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial v}(\vartheta^2-\theta^2) + \frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial u}(\vartheta^2-\theta^2) + \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{1}{R}\right)\cdot(\vartheta^2-\theta^2) = \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 R}{\partial u\,\partial v}(\vartheta^2-\theta^2) + 2\frac{1}{R}\frac{\partial^2 \vartheta^2}{\partial u\,\partial v}$$

или, в силу (28),

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left[\frac{1}{R}(\vartheta^2-\theta^2)\right] = M\left[\frac{1}{R}(\vartheta^2-\theta^2)\right] + 2\frac{1}{R}\frac{\partial^2 \vartheta^2}{\partial u\,\partial v}. \tag{47}$$

Пусть теперь ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 — три квадратичных решения $E(1)$.

Внесем в (47) поочереди эти значения ϑ_i и соответственные значения θ_i и сложим. В силу квадратичности решений ϑ_i имеем

$$\sum \vartheta_i^2 = U + V; \tag{48}$$

последний член (47) после сложения пропадает, и мы получим

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\frac{\sum \vartheta_i^2 - \sum \theta_i^2}{R} = M\frac{\sum \vartheta_i^2 - \sum \theta_i^2}{R}. \tag{47'}$$

Суммирование распространяется на три указателя $i = 1, 2, 3$.

Итак, выражение $\frac{\sum \vartheta_i^2 - \sum \theta_i^2}{R}$ является решением уравнения $E(0)$ и, следовательно, имеет вид $f(u)+\varphi(v)$.

Так как преобразующее решение у нас равно $R = u+v$, то, внося значение (44), получим

$$\sum (U_i' - V_i')^2 - U - V + [f(u)+\varphi(v)](u+v) = 0.$$

Продиференцировав это уравнение два раза по u и два раза по v, получим

$$\sum U_i''' V_i''' = 0.$$

Это уравнение можно трактовать так же, как уравнение (32b). Мы придем, таким образом, к двум существенно различным решениям:

А. Все V_i''' равны нулю; V_i — многочлены второй степени относительно v. С помощью преобразования (46) их все можно привести к нулю. Следовательно, ϑ_i по формулам (45) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta_1 = 2\frac{U_1}{u+v} - U_1', \quad \vartheta_2 = 2\frac{U_2}{u+v} - U_2', \\ &\vartheta_3 = 2\frac{U_3}{u+v} - U_3'. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Внося эти значения в уравнение (48), получим единственное соотношение для U_i

$$U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = 0. \tag{50}$$

В. Решения, которые соответствуют формулам (33):

$$U_1'' = aU_3'', \quad U_2'' = bU_3'', \quad V_3'' = -aV_1'' - bV_2'', \quad a,\ b = \text{const}.$$

Интегрируя и отбрасывая многочлены второй степени, в силу преобразования (46), получим

$$U_1 = aU_3, \quad U_2 = bU_3, \quad V_3 = -aV_1 - bV_2.$$

Наконец, так же как и выше в n° 22, поворотом осей координат x, y, z приводим к нулю постоянные a, b. Мы получаем

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta_1 = 2\frac{V_1}{u+v} - V_1', \quad \vartheta_2 = 2\frac{V_2}{u+v} - V_2', \\ &\vartheta_3 = 2\frac{U_3}{u+v} - U_3'. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Диференцируя (48) по v, имеем

$$2\sum \vartheta_i \frac{\partial \vartheta_i}{\partial v} = V'.$$

Заменяя здесь ϑ его выражением из уравнения $E(1) \equiv \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u\,\partial v} - \frac{2}{(u+v)^2}\vartheta = 0$, получим

$$2\sum \frac{\partial \vartheta_i}{\partial v}\frac{\partial^2 \vartheta_i}{\partial u\,\partial v} = \frac{2V'}{(u+v)^2},$$

откуда, интегрируя, имеем

$$\sum\left(\frac{\partial\vartheta_i}{\partial v}\right)^2=-\frac{2V'}{u+v}+V^*.$$

Если сюда внести выражение (51), то заметим, что функция U_3 войдет только в виде квадрата, и, решая относительно нее, мы получим в правой части многочлен четвертой степени относительно u, коэфициенты которого, конечно, постоянны (ибо переменную v функция U_3 содержать не может),

$$U_3^2=P_4(u). \qquad (52a)$$

Если теперь внести (51) в соотношение (48), умножить обе части на $(u+v)^2$ и положить $u=-v$, то получим

$$V_1^2+V_2^2=-P_4(-v), \qquad (52b)$$

и при этом условии (48) будет удовлетворено.

Можно заметить, что уравнение E (1) сохраняет свой вид, если переменные u и $-v$ подвергнуть дробнолинейному преобразованию $u=\frac{\alpha u_1+\beta}{\gamma u_1+\delta}$, $-v=\frac{-\alpha v_1+\beta}{-\gamma v_1+\delta}$. При этом $P_4(u)$, $P_4(-v)$ переходят в новые многочлены вообще четвертой степени, но при подходящем выборе постоянных α, β, γ, δ эта степень может быть на единицу понижена (Егоров [76]).

28. Перейдем теперь к геометрическому смыслу полученных решений. С этой целью будем опять искать ребра возврата развертывающихся поверхностей, касательных к поверхности S вдоль линий главного основания.

В случае А уравнение касательной плоскости к поверхности S в однородных координатах x_i имеет вид

$$[2U_1-U_1'(u+v)]\,x_1+[2U_2-U_2'(u+v)]\,x_2+[2U_3-U_3'(u+v)]\,x_3+$$
$$+[2(U_4+V_4)-(U_4'+V_4')(u+v)]\,x_4=0. \qquad (53)$$

Дифереицируя это уравнение дважды по v, получим уравнения

$$U_1'x_1+U_2'x_2+U_3'x_3-[V_4'-V_4''(u+v)]\,x_4=0, \qquad (53a)$$
$$V_4'''(u+v)\,x_4=0. \qquad (53b)$$

Если $V_4'''=0$, то V_4 — квадратный трехчлен, который можно привести к нулю; плоскости (53) вдоль линии $u=\text{const}$ принадлежат одному пучку, и поверхность S вырождается в линию. Если V_4''' — не нуль, то (53b) дает $x_4=0$; ребро возврата лежит в бесконечно удаленной плоскости; следовательно, развертывающаяся поверхность — цилиндр и линии v на поверхности S — цилиндрические. Уравнения (53), (53a) принимают вид

$$U_1x_1+U_2x_2+U_3x_3=0,$$
$$U_1'x_1+U_2'x_2+U_3'x_3=0;$$

они определяют направления образующих цилиндра. Условие (50) показывает, что эти направления изотропные и, следовательно, огибают на поверхности S линии нулевой длины. Поверхность S мнимая, главное основание ее состоит из линий нулевой длины ($v=\text{const}$) и цилиндрических линий ($u=\text{const}$).

29. Переходим к случаю В. Ребро возврата развертывающейся поверхности, касающейся S вдоль линии u, определяется тремя уравнениями:

$$[2V_1-V_1'(u+v)]\,x+[2V_2-V_2'(u+v)]\,y+[2U_3-U_3'(u+v)]\,z+$$
$$+2(U_4+V_4)-(U_4'+V_4')(u+v)=0, \qquad (54)$$
$$V_1'x+V_2'y-[U_3'-U_3''(u+v)]\,z-U_4'+V_4'+U_4''(u+v)=0, \qquad (54a)$$
$$U_3'''z+U_4'''=0, \qquad (54b)$$

из которых два последних получены диференцированием первого по u (первое — одним диференцированием, а второе — двумя).

Если $U_4=0$ (при этом U_3''' — не нуль, иначе поверхность вырождается), то система принимает вид

$$V_1x+V_2y+V_4=0,\quad V_1'x+V_2'y+V_4'=0;\quad z=0.$$

Следовательно, ребро возврата сводится к точке в плоскости xy; все развертывающиеся поверхности — конусы; главное основание содержит одно семейство конических линий. Геометрическое место вершин конусов — плоская линия, лежащая в плоскости $z=0$. Обратно, если линии u конические, то геометрическое место вершин конусов необходимо должно лежать в плоскости (54b). Приняв ее за плоскость xy, мы приведем U_4''' к нулю; тогда U_4 — трехчлен второй степени, и преобразование (46) приведет его к нулю.

В общем случае, если U_4 — не нуль, огибающая плоскостей (54) имеет то же самое сферическое изображение, как и в случае $U_4=0$, ибо меняется только свободный член в уравнении касательной плоскости. Следовательно, самая общая поверхность (54) может быть получена преобразованием Петерсона из поверхностей с одним семейством конических линий в главном основании ($U_4=0$).

30. Пусть $U_4=0$, линии u конические. Рассмотрим линии v.

Ребро возврата развертывающейся поверхности, касательной вдоль линий v, определяется уравнениями

$$[2V_1-V_1'(u+v)]\,x+[2V_2-V_2'(u+v)]\,y+[2U_3-U_3'(u+v)]z+$$
$$+2V_4-V_4'(u+v)=0, \qquad (55)$$
$$[V_1'-V_1''(u+v)]\,x+[V_2'-V_2''(u+v)]\,y-U_3'z+$$
$$+V_4'-V_4''(u+v)=0, \qquad (55a)$$
$$V_1'''x+V_2'''y+V_4'''=0. \qquad (55b)$$

Если развертывающаяся поверхность — конус и ребро возврата — сводится к точке, то эта точка лежит всегда в плоскости (55b) и линия вершин — плоская линия. Плоскость (55b) перпендикулярна к плоскости xy. Между тем во всех предыдущих рассуждениях мы выбрали положение только плоскости xy, в остальном система координат произвольна, и мы можем использовать этот произвол, выбирая плоскость (55b) за плоскость yz. При этом, очевидно, $V_2''' = 0$, $V_4''' = 0$, V_2 и V_4 становятся квадратными трехчленами. Привести их к нулю уже нельзя, ибо преобразование (46) уже использовано, чтобы обратить в нуль U_2 и U_4.

Итак, если

$$U_4 = 0, \quad U_3 = P_4(u), \quad V_1^2 + V_2^2 = -P_4(-v), \quad V_2 = Q_2(v), \quad V_4 = R_2(v),$$

то огибающая плоскостей (55) — поверхность, главное основание которой содержит два семейства конических линий. Вершины конусов — плоские линии и плоскости их взаимно перпендикулярны (Маслов [110]).

31. Исследование Гамбье [134] и Демулена [92] по квадратичным решениям $E(n)$ при условии $n \geqslant 2$ привели к отрицательному ответу. Существуют квадратичные решения $E(n)$:

$$\sum_{i=1}^{p} \vartheta_i^2 = U + V,$$

но число членов p в левой части этого соотношения может принимать четные значения и все целые, начиная с $n+2$. Таким образом $p=3$ не дает решений. Не получил Гамбье [128] квадратичных решений $p=3$ и для уравнения

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\, \partial v} = \left[-\frac{6}{(u-v)^2} + \frac{2}{(u+v)^2}\right]\theta.$$

Егоров отмечает, что уравнение $E\left(\frac{1}{2}\right)$ имеет квадратичные решения, приводящие к тетраэдральным поверхностям,

$$\left.\begin{aligned} x &= A(a+u)^{\frac{3}{2}}(a+v)^{\frac{3}{2}}, \\ y &= B(b+u)^{\frac{3}{2}}(b+v)^{\frac{3}{2}}, \\ z &= C(c+u)^{\frac{3}{2}}(c+v)^{\frac{3}{2}}, \\ A, B&, C, a, b, c = \text{const.} \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Впрочем, эти изгибания гораздо проще получить путем следующих элементарных соображений (как они и были получены Егоровым [44], [45] и Цицейкой [40], [46]). Прежде всего нетрудно заметить, что линии u, v сопряжены, ибо x, y, z по формулам (56) удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\theta_{uv} = \frac{3}{2}\,\frac{\theta_u - \theta_v}{v-u}.$$

С другой стороны, подсчитывая линейный элемент поверхности (56), найдем

$$E = \frac{9}{4}\sum A^2(a+u)(a+v)^3,$$

$$F = \frac{9}{4}\sum A^2(a+u)^2(a+v)^2,$$

$$G = \frac{9}{4}\sum A^2(a+u)^3(a+v).$$

Суммирование идет по буквам a, b, c и A, B, C. Этот линейный элемент содержит шесть постоянных a, b, c, A, B, C только в пяти комбинациях $\sum A^2a^4$, $\sum A^2a^3$, $\sum A^2a^2$, $\sum A^2a$, $\sum A^2$. Будем менять наши постоянные так, чтобы эти комбинации сохраняли постоянное значение. Линейный элемент не изменится и, следовательно, поверхность будет изгибаться. При этом уравнение (56) сохраняет свою форму и система линий u, v остается сопряженной.

§ 3. Главные основания при одном или двух семействах цилиндрических или конических линий.

32. Большинство предыдущих результатов относится к главным основаниям с одним или с двумя семействами конических или цилиндрических линий. Это вполне естественно. Изгибание на главном основании сохраняет развертывающиеся поверхности, образованные касательными к линиям основания. Поэтому при классификации оснований надо принимать во внимание не только свойства линий основания, но и свойства развертывающихся поверхностей его. Простейшие линии — плоские, простейшие развертывающиеся поверхности — конические. Отсюда теория оснований с плоскими или с коническими линиями. Впрочем, коррелятивное преобразование пространства, переводя точки в плоскости, преобразует линию в развертывающуюся поверхность. Если линия лежит в одной плоскости, то плоскости, огибающие развертывающуюся поверхность, проходят через одну точку и, следовательно, огибают конус. Таким образом плоские линии переходят в конические.

Естественно теперь поставить вопрос об отыскании всех главных оснований с плоскими или с коническими линиями.

Если линии u поверхности S конические, то касательные к линиям v образуют ∞^1 конусов. Вторая полость S_1 фокальной поверхности конгруэнции этих касательных образована ребрами возврата развертывающихся поверхностей конгруэнции. Если эти поверхности вырождаются в конусы, то ребра возврата их стягиваются в точки. Геометрическое место вершин конусов составит вторую фокальную полость S_1. Она сводится, следовательно, в этом случае к линии.

Пусть точечные координаты S удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\theta_{uv} + a\theta_u + b\theta_v = 0. \tag{57}$$

Координаты поверхности S_1 получаются преобразованием Лапласа в сторону v по формулам (5). Чтобы сохранить значение четвертой координаты, равное единице, и получить неоднородные координаты точек S_1, мы напишем их в форме

$$\theta_1 = \frac{1}{a}\theta_v + \theta. \tag{58}$$

В нашем случае неоднородные координаты точек S_1, очевидно, — функции одного v. Следовательно,

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial u} = \frac{1}{a}\theta_{uv} - \frac{a_u}{a^2}\theta_v + \theta_u = 0.$$

Следовательно, θ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\theta_{uv} + a\theta_u - \frac{a_u}{a}\theta_v = 0, \tag{59}$$

его инварианты по формулам (4) суть

$$h = 0, \quad k = -\frac{\partial^2 \ln a}{\partial u \partial v} - a_u.$$

Таким образом первый инвариант равен нулю. Обратно, если первый инвариант уравнения (57) равен нулю

$$h = a_u + ab = 0,$$

то $b = -\frac{a_u}{a}$, и мы приходим к уравнению (59). По формуле (58) координаты преобразованной поверхности S_1 являются функциями одного v; следовательно, поверхность S_1 вырождается в линию, развертывающиеся поверхности v суть конусы, а линии v на S — конические.

При взаимном преобразовании пространства, как мы видели, конические линии перейдут в плоские. При этом точечные координаты переходят в тангенциальные и инварианты точечного уравнения — в инварианты тангенциального уравнения Лапласа.

Следовательно, если линии одного семейства плоские, то один инвариант тангенциального уравнения Лапласа равен нулю.

Мы видели, что тангенциальное уравнение Лапласа, относящееся к главному основанию поверхности, имеет равные инварианты. Если один инвариант равен нулю, то и другой тоже нуль. Следовательно, если линии одного семейства, составляющие главное основание изгибания, плоские, то и второе семейство состоит из плоских линий (Раффи **[50]**, Егоров **[76]**, Вассёр **[130]**).

Единственное уравнение Мутара с инвариантами, равными нулю, есть $E(0)$, ибо, полагая в формулах (4) $a = b = 0$ и считая $h = 0$, сейчас же получим $c = 0$. Следовательно, в n°24 — 25 § 2 мы нашли все главные основания из двух семейств плоских линий. Минимальные поверхности, поверхности переноса и поверхности Петерсона вместе с поверхностями, получаемыми отсюда преобразованием Петерсона, составляют все поверхности этого рода.

33. Если линии u поверхности S плоские, то конгруэнции их касательных образуют ∞^1 плоскостей. Эти плоскости и огибают вторую фокальную полость S_1 конгруэнции, образованной касательными к линиям u. Следовательно, S_1 — развертывающаяся поверхность; при этом

образующими ее служат характеристики этих плоскостей, т. е. касательные[1]) к линиям u на поверхности S; эти образующие и являются линиями u на S_1.

Если выполнить новое преобразование Лапласа, то надо рассмотреть конгруэнцию касательных к линиям u на поверхности S_1. Эти касательные, конечно, совпадают с самыми образующими; они огибают ребро возврата S_1. Это ребро возврата и надо рассматривать как вторую фокальную полость S_2 конгруэнции или как второе преобразование Лапласа от S.

Если уравнение (57) относится к поверхности S_1, а θ_1 — неоднородные координаты S_2, то θ_1 — функции одного u, $\frac{\partial\theta_1}{\partial v} = 0$. Диференцируя (58) по v и приравнивая нулю, получим

$$\frac{1}{a}\theta_{vv} - \frac{a_v}{a^2}\theta_v + \theta_v = 0,$$

откуда

$$\theta_{vv} = \left(\frac{\partial \ln a}{\partial v} - a\right)\theta_v. \tag{60}$$

Это уравнение должно существовать одновременно с уравнением (57). Условие совместности их получим, диференцируя (57) по v, (60) — по u и вычитая одно из другого:

$$\frac{\partial^2 \ln a}{\partial u\, \partial v} - a_u + b_v - ab = 0. \tag{61}$$

Если ввести сюда инварианты уравнения (57)

$$h = \frac{\partial a}{\partial u} + ab, \quad k = \frac{\partial b}{\partial v} + ab,$$

то уравнению (61) можно придать одну из двух эквивалентных форм

$$\frac{\partial^2 \ln a}{\partial u\, \partial v} + a_u = 2h - k,$$

$$\frac{\partial \ln a}{\partial v} + a = \frac{\partial \ln h}{\partial v},$$

откуда

$$\frac{\partial^2 \ln h}{\partial u\, \partial v} = 2h - k.$$

По формуле (9) немедленно получаем, что инвариант h_1 уравнения для поверхности S_1 равен нулю. Следовательно, уравнение Лапласа (57) для поверхности S_1 одним преобразованием Лапласа приводится к уравнению с инвариантом, равным нулю. Для уравнения, соответствующего поверхности S, потребуется, следовательно, два преобразования Лапласа, чтобы дойти до уравнения с инвариантом, равным нулю. Мы бу-

[1]) При движении по линии v характеристикой касательной плоскости поверхности служит касательная сопряженной линии, т. е. линии u.

дем говорить, что точечное уравнение для поверхности S имеет ранг 3 по отношению к переменному v (Дарбу [1], II, 36).

Положение вещей меняется, если поверхность S_1 есть конус (или цилиндр); тогда S_2 сводится к точке конечной или бесконечно удаленной; координаты θ_1 просто постоянны, $\frac{\partial\theta_1}{\partial u}$ тоже равно нулю, и рассуждениями n° 31 мы придем к заключению, что уже уравнение для S_1 имеет один инвариант, равный нулю. Следовательно, уравнение для S потребует только одного преобразования Лапласа и будет ранга 2 по отношению к v.

Взаимное преобразование пространства заменит плоские линии коническими; при этом плоскость, содержащая плоскую линию, перейдет в вершину конуса; огибающая этих плоскостей перейдет в геометрическое место вершин конусов. Общая развертывающаяся поверхность соответствует геометрическому месту вершин в виде кривой двоякой кривизны. Если касательные плоскости развертывающейся поверхности проходят через одну точку (и огибают конус), то точки линии вершин лежат в одной плоскости. Если плоскости проходят через прямую, то точки расположены на прямой.

Таким образом, если линии u поверхности S конические и геометрическое место вершин конусов образует кривую двоякой кривизны, то тангенциальное уравнение для сопряженной системы u, v поверхности S имеет ранг 3; если линия вершин конусов плоская, то понадобится только одно преобразование Лапласа, чтобы получить уравнения с инвариантом, равным нулю, т. е. уравнение для S будет ранга 2. Наконец, если вершины конусов расположены на прямой, то тангенциальное уравнение поверхности S имеет ранг 1, т. е. уже само имеет инвариант, равный нулю. В этом случае по теореме Кёнигса [Т. П. 76] сопряженное семейство состоит из плоских линий, получаемых сечением поверхности пучком плоскостей с осью в виде прямой, несущей вершины описанных конусов.

Следовательно, уравнение Мутара, ранг которого равен единице, есть $E(0)$. Если ранг уравнения Мутара равен двум, то его инварианты (равные между собой) удовлетворят уравнению $h_1 = 0$ или по формуле (9)

$$\frac{\partial^2 \ln h}{\partial u\, \partial v} = h .$$

Общий интеграл его

$$h = \frac{2U'V'}{(U+V)^2} .$$

Следовательно, выбирая U и V за независимые переменные, получим уравнение E (1). Квадратичные решения его даны Егоровым; мы их исследовали в § 2. Главные основания при одном семействе конических линий, если вершины конусов описывают плоскую линию, все определены. После работ Егорова долгое время полагали, что этим и исчерпываются все основания, содержащие хоть в одном семействе конические линии; Вассёр [130] показал неполноту предыдущих результатов. Исследование главных оснований с коническими линиями, если вершины конусов описывают линию двоякой кривизны, требует отыскания квадратичных решений уравнения третьего ранга. Здесь уравнение Мутара не дает единственного типа. Указав на пропуск в предыдущих работах, Вассёр не сумел его заполнить, и мы до сих пор не знаем, существуют ли главные основания с коническими линиями, у которых вершины конусов описывают пространственную кривую, или приведенные выше результаты Егорова окажутся полными, несмотря на неполноту его рассуждений.

34. Критика Вассёра распространяется и на результаты, относящиеся к главным основаниям с двумя семействами конических линий. Исследование Млодзеевского [63], проведенное самостоятельным приемом, неполно, а результаты Маслова получены, опираясь на метод Егорова. Здесь, однако, ссылаясь на мемуар Гамбье о преобразуемых механизмах, Вассёру [130] удалось доказать, что результаты Маслова исчерпывают вопрос.

Пусть M и M_1 — соответствующие точки поверхности S и ее преобразования Лапласа S_1 в сторону v, $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{M}_1$ — радиусы-векторы этих точек. Координаты этих векторов соответственно равны решениям θ и θ_1, связанным по формуле (58). Отсюда вектор, соединяющий эти точки, равен

$$\overrightarrow{MM_1} = \boldsymbol{M}_1 - \boldsymbol{M} = \frac{1}{a}\boldsymbol{M}_v,$$

а расстояние между точками по абсолютной величине [Т. П. 40]

$$MM_1 = \sqrt{\frac{1}{a^2}\boldsymbol{M}_v^2} = \sqrt{\frac{1}{a^2}G} .$$

Здесь G — последний коэфициент линейного элемента поверхности, а величина a — коэфициент в точечном уравнении Лапласа поверхности S: $a = -\left\{ {12 \atop 1} \right\}$ есть скобка Кристоффеля, вычисленная тоже для линейного элемента поверхности S. Следовательно, при изгибании S отрезок MM_1 сохраняет свою длину. То же относится к расстоянию MM_2 точки M от соответствующей точки преобразования Лапласа S_2 в сторону u. Угол этих двух прямых, $\angle M_1MM_2$, как угол двух касательных, конечно, при изгибании не меняется. Следовательно, и третья сторона M_1M_2 треугольника MM_1M_2 остается во время изгибания S неизменной.

Если поверхность S', полученная из S изгибанием на главном основании из линий u, v, катится по поверхности S так, что точка касания описывает на той и другой поверхности линию v и соответствующие касательные обеих поверхностей в каждый момент совпадают, то развертывающиеся поверхности D и D', описанные около S или S' вдоль этой линии v, тоже катятся одна по другой. Ребра возврата их, т. е. линии v на преобразованиях Лапласа S и S' имеют соответственно равные дуги и в соответствующих точках имеют одинаковую кривизну, ибо при равных дугах и углы поворота касательных соответственно равны. Если одно из этих ребер возврата вырождается в точку, то и другие тоже. Основание, содержащее конические или цилиндрические линии, сохраняет это свойство при изгибании.

Пусть система линий u, v образует на S главное основание с двумя семействами конических линий. Пусть (a) и (b) — линии, описанные вершинами этих конусов, касательных к S соответственно вдоль линий u или линий v. Обозначим через a_i и b_i неоднородные координаты точек a и b. Очевидно, a_i — функции одного v и b_i — одного u. Пусть S' — поверхность, налагающаяся на S с сохранением сопряженной системы u, v, (A) и (B) — линии вершин конусов, соответствующих u и v.

Каковы бы ни были две точки a и b и соответствующие им A и B, всегда

$$ab = AB, \tag{62}$$

ибо a и b можно считать за точки M_1 и M_2, которые на преобразованиях Лапласа S_1 и S_2 соответствуют одной и той же точке M поверхности S. Эта точка M получится как точка пересечения линии прикосновения конуса с вершиной a с линией прикосновения конуса с вершиной b. Равенство (62) прямо вытекает из вышедоказанного предложения о неизменяемости при изгибании отрезка M_1M_2.

Гамбье называет преобразуемым механизмом (mécanisme transformable) пару кривых (a), (b), если существует вторая пара (A), (B), так, что между точками обеих пар установлено взаимнооднозначное соответствие и для всяких двух пар соответствующих точек a, A и b, B имеет место равенство (62). Пара кривых (a), (b) образует изгибаемый механизм (mécanisme déformable), если существует ∞^1 преобразованных пар (A), (B), так, что первоначальная пара (a), (b) входит как составная часть в эту серию.

Мы видим, что теория изгибаемых пар тесно связана с задачей изгибания на главном основании при двух семействах конических линий.

35. Условие (62), если ввести координаты точек, запишется в виде

$$\sum (a_i - b_i)^2 - \sum (A_i - B_i)^2 = 0, \tag{63a}$$

и это равенство должно иметь место при всяких значениях параметров u, v.

Диференцируя по u и по v, получим

$$\sum a_i' b_i' - \sum A_i' B_i' = 0. \tag{63b}$$

Уравнение (63b) принадлежит к классу уравнений

$$\sum_{i=1}^{6} U_i V_i = 0.$$

Следовательно (см. п° 12), существует некоторое число h $(0 \geqslant h \geqslant 6)$ линейных однородных с постоянными коэфициентами соотношений между U_i, а также $6-h$ соотношений между V_i. Коэфициенты вторых соотношений зависят от коэфициентов первых. В зависимости от числа h соотношений между U_i получаются различные решения поставленной задачи. Гамбье [93] получил всего восемь типов преобразуемых механизмов, в том числе пять изгибаемых. Наше исследование

здесь можно ограничить случаем пространственных механизмов, ибо если кривая (a) или (b) плоская, то уравнение Лапласа, относящееся к главному основанию u, v, будет второго ранга, и решения его все уже найдены. Нетрудно сейчас же заметить, что $h = 0, 1, 2, 4, 5, 6$ приводят к плоским механизмам, ибо в этом случае или $6 - h > 3$, или $h > 3$ и, следовательно, между V_i или между U_i — более трех соотношений; если, например, $h > 3$, то все U_i могут быть выражены через два из них. Следовательно, будет существовать соотношеиие вида

$$c_1 a_1' + c_2 a_2' + c_3 a_3' = 0, \quad c_i = \text{const},$$

откуда $c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 + c_4 = 0$ и, значит, кривая (a) лежит в плоскости.

Таким образом нам остается исследовать случай $h = 3$. Тогда можно положить $A_i' = c_{i1} a_1' + c_{i2} a_2' + c_{i3} a_3'$ $(c_{ik} = \text{const})$. Внося это в (63b) и приравнивая нулю коэфициенты при a_k', ибо, по условию, a_k' уже не связаны линейным соотношением, получим

$$b_k' = c_{1k} B_1' + c_{2k} B_2' + c_{3k} B_3'.$$

Интегрируя то и другое соотиошения, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} A_i &= c_{i1} a_i + c_{i2} a_2 + c_{i3} a_3 + c_{i4}, \\ b_k &= c_{1k} B_1 + c_{2k} B_2 + c_{3k} B_3 + c_{4k}, \\ c_{ik} &= \text{const}. \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Каждая из формул (64) определяет аффинное преобразование пространства, которое, например, устанавливает соответствие между точками кривых (a) и (A). Поворачивая пару (a), (b) и пару (A), (B) каждую отдельно, мы можем привести это преобразование к простейшему виду

$$A_1 = c_1 a_1 + c_1', \quad A_2 = c_2 a_2 + c_2', \quad A_3 = c_3 a_3 + c_3', \tag{65a}$$

и тогда вторая из формул (64) примет вид

$$B_1 = \frac{b_1}{c_1} + c_1'', \quad B_2 = \frac{b_2}{c_2} + c_2'', \quad B_3 = \frac{b_3}{c_3} + c_3''. \tag{65b}$$

Внося это в (63a), получим по сокращении подобных членов

$$\sum \left\{ a_i^2 (1 - c_i^2) - 2c_i (c_i' - c_i'') a_i - c_i'^2 + c_i' c_i'' \right\} +$$
$$+ \sum \left\{ b_i^2 \left(1 - \frac{1}{c_i^2}\right) - 2 \frac{c_i'' - c_i'}{c_i} b_i - c_i''^2 + c_i' c_i'' \right\} = 0.$$

Каждая сумма в отдельности равна постоянному, например λ и $-\lambda$ (ибо функция от u не может равняться функции от v), и мы получаем, что каждая кривая (a) и (b) расположена на поверхности 2-го порядка. Если одна из этих поверхностей — центральная поверхность 2-го порядка, то и другая — центральная. Перенося начало координат в центр, получим $c' = c_i''$, и тогда, передвигая пару (A) и (B), приведем c_i' и c_i'' к нулю.

Если теперь обозначить $a=\frac{\lambda}{c_1^2-1}$, $b=\frac{\lambda}{c_2^2-1}$, $c=\frac{\lambda}{c_3^2-1}$, то уравнения обеих поверхностей принимают вид

$$\frac{a_1^2}{a}+\frac{a_2^2}{b}+\frac{a_3^2}{c}=1, \quad \frac{b_1^2}{a+\lambda}+\frac{b_2^2}{b+\lambda}+\frac{b_3^2}{c+\lambda}=1. \tag{66a}$$

Следовательно [Т. П. 191], кривые (a) и (b) лежат на софокусных поверхностях 2-го порядка. Уравнения (65a), (65b) принимают вид

$$A_1=a_1\sqrt{1+\frac{\lambda}{a}}, \quad A_2=a_2\sqrt{1+\frac{\lambda}{b}}, \quad A_3=a_3\sqrt{1+\frac{\lambda}{c}},$$
$$B_1=b_1\sqrt{\frac{a}{\lambda+a}}, \quad B_2=b_2\sqrt{\frac{b}{\lambda+b}}, \quad B_3=b_3\sqrt{\frac{c}{\lambda+c}}. \tag{66b}$$

Очевидно, кривая (A) лежит на поверхности (b) и кривая (B) — на поверхности (a).

Если даны поверхности (66a), то аффинное преобразование (66b) определено (аффинитет Ивори); следовательно, вторая пара (A), (B) вполне определена. Так как невозможно существование двух пучков попарно софокусных поверхностей 2-го порядка, то пара кривых (a), (b), если они лежат на софокусных поверхностях, определяет поверхности (66a) и единственную пару (A), (B), т. е. эта пара (a), (b) — преобразуемая, но не изгибаемая. Она не дает возможности построить главное основание изгибания, и поэтому не существует главного основания с вершинами конусов на пространственной кривой. Все главные основания с двумя семействами конических линий определены Млодзеевским [63] и Масловым [110], [146].

ГЛАВА III.

ПОВЕРХНОСТИ БИАНКИ.

§ 1. Конгруэнции W с равной кривизной фокальных полостей в соответствующих точках.

36. Три решения θ_1, θ_2, θ_3 уравнения Мутара

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=M\theta \tag{1}$$

определяют некоторую поверхность Σ, отнесенную к асимптотическим линиям. По формулам Лельевра [Т. П. 82 (25)] текущие координаты точки M (x, y, z) поверхности Σ равны

$$x=\int\left[\left(\theta_2\frac{\partial\theta_3}{\partial u}-\theta_3\frac{\partial\theta_2}{\partial u}\right)du-\left(\theta_2\frac{\partial\theta_3}{\partial v}-\theta_3\frac{\partial\theta_2}{\partial v}\right)dv\right]; \tag{2}$$

y и z получаются круговой заменой указателей.

Три решения θ_1, θ_2, θ_3 являются компонентами вектора нормали N поверхности Σ, и длина этого вектора определяет кривизну поверхности

$$K=-\frac{1}{\rho^2}, \quad \rho=\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2. \tag{3}$$

Преобразование Мутара (глава II, § 2, n° 12) с помощью частного решения R уравнения (1) преобразует θ_1, θ_2, θ_3 в новые решения θ_1', θ_2', θ_3' другого уравнения Мутара

$$\frac{\partial^2\theta'}{\partial u\,\partial v}=M'\theta', \quad M'=R\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{1}{R}\right). \tag{4}$$

Решения θ и θ' связаны соотношениями (29″) главы II:

$$\frac{\partial}{\partial u}(\theta_i'+\theta_i)=-(\theta_i'-\theta_i)\frac{\partial\ln R}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial v}(\theta_i'-\theta_i)=-(\theta_i'+\theta_i)\frac{\partial\ln R}{\partial v}. \tag{5}$$

Решения θ_i' определят по формулам (2) некоторую новую поверхность Σ'. Гишар [1]) обнаружил, что можно так выбрать постоянные при интеграции (2), т. е. так передвинуть в пространстве Σ и Σ', что они образуют две фокальные полости одной конгруэнции W [Т. П. 172]. Иными словами, при подходящем расположении Σ и Σ' прямая MM',

[1]) Guichard, Détermination des congruences telles que les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes focales CR 110, стр. 126, 1890; Бианки ([2], II, 48); Дарбу ([1], IV, 52).

соединяющая соответствующие точки, касается обеих поверхностей и устанавливает на них соответствие асимптотических линий. Так как асимптотические линии на Σ и Σ' уже соответствуют, то достаточно показать, что при подходящем выборе произвольных постоянных прямая MM' касается той и другой поверхности, т. е. вектор $\overrightarrow{MM'}$ перпендикулярен к нормали N поверхности Σ в точке M и к нормали N' поверхности Σ' в точке M'.

$$(M'-M)N=0, \quad (M'-M)N'=0. \tag{6}$$

Составляя разность $\overrightarrow{MM'}=M'-M$ по формулам (2), имеем

$$M'-M=\int\{([NN_u]-[N'N'_u])\,du-([NN_v]-[N'N'_v])\,dv\},$$

или

$$M'-M=\int\{([N-N',\ N_u+N'_u]+[N'N_u]+[N'_uN])\,du+$$
$$+([N'+N,\ N'_v-N_v]+[N'N_v]+[N'_vN])\,dv\};$$

но в силу (5)

$$N'_u+N_u=(N-N')\frac{\partial \ln R}{\partial u}, \quad N'_v-N_v=-(N'+N)\frac{\partial \ln R}{\partial v}, \tag{5'}$$

следовательно, произведения $[N-N',\ N_u+N'_u]$, $[N'+N,\ N'_v-N_v]$ в формуле, определяющей разность векторов M' и M, пропадают; интегрируя и отбрасывая постоянное, получим

$$M'-M=[N'N]. \tag{7}$$

По свойству векторного произведения вектор $\overrightarrow{MM'}=M'-M$ перпендикулярен к обоим множителям; следовательно, условия (6) удовлетворены.

Если обозначить через σ угол фокальных плоскостей конгруэнции, т. е. угол векторов N, N', и через $-\frac{1}{\rho'^2}$ кривизну второй фокальной полости Σ', то по формулам (3)

$$N^2=\rho, \quad N'^2=\rho', \quad NN'=\sqrt{\rho\rho'}\cos\sigma \tag{8}$$

и, следовательно, для расстояния между фокусами M и M' конгруэнции получим

$$MM'=\sqrt{[N'N]^2}=\sqrt{N^2N'^2-(NN')^2}=\sqrt{\rho\rho'}\sin\sigma. \tag{9}$$

Следовательно [Т. П. 173], расстояние между граничными точками конгруэнции равно $\sqrt{\rho\rho'}$, т. е. произведение кривизн обеих фокальных полостей конгруэнции W в точках, лежащих на одном луче, равно обратной величине четвертой степени расстояния между граничными точками луча.

Обратно, пусть имеем конгруэнцию W и пусть Σ и Σ' две ее фокальные полости; следовательно, прямая MM', соединяющая соответствующие точки Σ и Σ', касается обеих поверхностей и устанавливает соответствие асимптотических лининй. Если отнести обе поверхности к асимптотическим линиям u, v, то каждая из них будет определена по формулам (2) тремя решениями θ_i или θ'_i уравнения Мутара (1) или (4). Нам надо доказать, что уравнения (4) и их решения θ'_i получены преобразованием Мутара из уравнения (1) и решений θ_i.

Из условий теоремы сейчас же следует, что $\overrightarrow{MM'}$ перпендикулярен к обеим нормалям; значит, уравнения (6) имеют место. Обозначая через m подходящий множитель пропорциональности, получим

$$M'-M=m\ [N'N]. \tag{7'}$$

Диференцируя это равенство по u, умножая затем скалярно на N или N' и отбрасывая при этом произведения M_uN и M'_uN' и все тройные произведения с двумя одинаковыми множителями как равные нулю, мы получаем

$$M'_uN=m(NN'N_u), \quad M_uN'=-m(NN'N'_u);$$

но в силу (2)

$$(NN'N_u)=-N'M_u, \quad (NN'N'_u)=NM'_u.$$

Следовательно,

$$M'_uN=-mM_uN', \quad M_uN'=-mNM'_u$$

и аналогично

$$M'_vN=-mM\,N', \quad M_vN'=-mNM'_v;$$

но если $M'_uN=M'_vN=0$, то нормали N, N' параллельны. Это, конечно, невозможно, и поэтому $m=\pm 1$. Мы можем принять $m=1$, меняя в случае надобности направление вектора N'.

Диференцируя теперь (7) и пользуясь формулами (2), мы сейчас же придем к формулам (5′). Следовательно, в самом общем случае фокальные полости конгруэнции W получаются преобразованиями Мутара одна из другой.

37. Конгруэнции W (с помощью преобразования Мутара) дают удобный способ переходить от одной поверхности Σ к другой Σ', причем обе эти поверхности отнесены к асимптотическим линиям. Такие преобразования Демулен называет преобразованиями Гишара, а Бианки — просто асимптотическими преобразованиями. Если от поверхности Σ мы перешли к двум ее асимптотическим преобразованиям Σ' и Σ'', то можно искать новую поверхность Σ^*, которую можно получить асимптотическим преобразованием, отправляясь от Σ' и от Σ''. Бианки ([2], II, 45) доказал, что таких поверхностей Σ^* имеется ∞^1, и в этом состоит его общая теорема переместительности. Ее удобно высказать сначала для преобразований Мутара.

Пусть решения θ уравнения (1) с помощью частных решений R_1 и R_2 преобразованы в решения θ' и θ'' двух новых уравнений Мутара вида (4). Мы можем применить эти преобразования и к решениям R_1, R_2 уравнения (1). Пусть R''_1 получается из R_1 преобразованием с помощью R_2 и R_2', из R_2 преобразованием с помощью R_1. Покажем, что θ', преобразованное с помощью R_2', совпадает с θ'', преобразованным при помощи решения R_1''.

С этой целью заметим прежде всего, что произведение

$$\lambda = R_1 R_2'$$

удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} = R_2 \frac{\partial R_1}{\partial u} - R_1 \frac{\partial R_2}{\partial u}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = R_1 \frac{\partial R_2}{\partial v} - R_2 \frac{\partial R_1}{\partial v}, \tag{10}$$

которые получатся, если в (29) главы II ввести $R = R_1$, $\theta = R_2$, $\vartheta = R_2'$.

Уравнения (10) вполне симметричны относительно R_1 и R_2 (с переменой знака λ). Поэтому мы можем положить

$$\lambda = -R_2 R_1''.$$

Преобразуем теперь θ' при помощи R_2' и θ'' при помощи R_1''; мы получим одно и то же решение θ^* (нового четвертого уравнения Мутара)

$$\theta^* = \theta + \frac{R_1 R_2}{\lambda} (\theta'' - \theta'). \tag{11}$$

Чтобы показать это, заметим прежде всего, что только это значение θ^* может удовлетворить одновременно уравнениям преобразований $\theta_1 \xrightarrow{R_2'} \theta^*$ и $\theta_2 \xrightarrow{R_1''} \theta^*$. Действительно, эти преобразования записываются в силу (5) уравнениями [1])

$$\frac{\partial (\theta^* + \theta')}{\partial u} = (\theta' - \theta^*) \frac{\partial \ln R_2'}{\partial u}, \quad \frac{\partial (\theta^* + \theta'')}{\partial u} = (\theta'' - \theta^*) \frac{\partial \ln R_1''}{\partial u}. \tag{12}$$

Вычитая из одного другое, получим

$$\frac{\partial (\theta' - \theta'')}{\partial u} = \theta^* \frac{\partial}{\partial u} \ln \frac{R_1''}{R_2'} + \theta' \frac{\partial \ln R_2'}{\partial u} - \theta'' \frac{\partial \ln R_1''}{\partial u}.$$

Если сюда ввести θ_u', и θ_u'' по формулам (5) и воспользоваться для $\frac{\partial}{\partial u} \ln (R_1 R_2') = \frac{\partial}{\partial u} \ln (R_2 R_1'')$ выражением (10), то придем как раз к уравнению (11). С другой стороны, если внести значение (11), например, в первое уравнение (12), то, используя формулы (5) и (10), придем к тождеству.

Итак, если два преобразования Мутара переводят $\theta \xrightarrow{R_1} \theta'$ и $\theta \xrightarrow{R_2} \theta''$ и если эти же преобразования переводят $R_1 \xrightarrow{R_2} R_1''$ и $R_2 \xrightarrow{R_1} R_2'$, то, преобразуя θ' при помощи R_2' или θ'' при помощи R_1', мы придем к одному и тому же решению θ^* вида (11).

[1]) Мы ограничиваемся только производными по u; производные по v пишутся аналогично.

Поскольку λ определяется из вполне интегрируемой системы (10) с произвольным постоянным, формула (11) содержит ∞^1 общих решений θ^*.

Эта теорема непосредственно применяется к асимптотическим преобразованиям. Пусть S, S', S'' и S^* — поверхности, соответствующие тройкам решений θ, θ', θ'' и θ^*, пусть M, M', M'', M^* — соответствующие точки их, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{M}'$, $\boldsymbol{M}''$, $\boldsymbol{M}^*$ — радиусы-векторы этих точек, а $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{N}'$, $\boldsymbol{N}''$, $\boldsymbol{N}^*$ — векторы, нормальные к ним, которые имеют компонентами соответственно по три решения θ, θ', θ'' и θ^*. Нам надо только показать, что точка M^*, получаемая преобразованием $S \to S' \to S^*$, совпадает с точкой M^*, получаемой преобразованиями $S \to S'' \to S^*$. Первые преобразования определят радиус-вектор $\boldsymbol{M}^*$ по формуле (7) следующим образом:

$$\boldsymbol{M}^* = \boldsymbol{M}' + [\boldsymbol{N}^* \boldsymbol{N}'].$$

Если сюда внести по формуле (9) $\boldsymbol{N}^* = \boldsymbol{N} + \frac{R_1 R_2}{\lambda} (\boldsymbol{N}'' - \boldsymbol{N}')$ и $\boldsymbol{M}'$ по формуле (7), то получим окончательно

$$\boldsymbol{M}^* = \boldsymbol{M} + \frac{R_1 R_2}{\lambda} [\boldsymbol{N}'' \boldsymbol{N}']; \tag{13}$$

к тому же результату мы придем, если будем рассматривать преобразования $S \to S'' \to S^*$.

Формула (13) показывает, что ∞^1 точек M^*, соответствующих ∞^1 поверхностей S^* с различными значениями произвольного постоянного, содержащегося в λ, расположены на прямой MM^*, проходящей через точку M параллельно вектору $[\boldsymbol{N}'' \boldsymbol{N}']$, т. е. параллельно касательным плоскостям к поверхностям S' и S''. Эта прямая, очевидно, является линией пересечения обеих касательных плоскостей к поверхностям S' и S''. Всякие четыре поверхности S^* определяют на каждом луче MM^* одно и то же сложное отношение, равное отношению их касательных плоскостей определяемых вектором $\boldsymbol{N}^*$. Прямая $M'M''$ тоже несет ∞^1 точек поверхностей, преобразованных из S или из S^*, которые соответствуют решениям $m\theta' + n\theta''$ (m, $n = \mathrm{const}$).

38. Применим эти общие соображения к преобразованию поверхностей Бианки, которые непосредственно связаны с главным основанием изгибаемой поверхности. Бианки [20] пришел к этим поверхностям, поставив задачу: найти конгруэнцию W, у которой фокальные полости имеют одинаковую кривизну в точках, лежащих на одном луче.

Пусть θ_i и θ_i' — решения уравнений Мутара (1) и (4), которые определяют фокальные полости S, S' конгруэнции Бианки. По формуле (8), так как кривизна обеих поверхностей одна и та же, имеем

$$\sum \theta_i^2 = \rho, \quad \sum \theta_i'^2 = \rho, \quad \sum \theta_i \theta_i' = \rho \cos \sigma. \tag{13a}$$

Суммирование каждый раз распространяется на три указателя $i = 1, 2, 3$.

Умножим теперь первое уравнение (5) на $\theta_i' + \theta_i$ и просуммируем по $i = 1, 2, 3$. Пользуясь (13а), в правой части получим нуль:

$$\frac{\partial}{\partial u}(\rho + \rho\cos\sigma) = 0.$$

Определяя отсюда производную от $\cos\sigma$ и поступая так же со вторым уравнением (5) (умножая его на $\theta_i' - \theta_i$), получим для $\cos\sigma$ систему уравнений

$$\frac{\partial\cos\sigma}{\partial u} = -(1 + \cos\sigma)\frac{\partial\ln\rho}{\partial u}, \quad \frac{\partial\cos\sigma}{\partial v} = (1 - \cos\sigma)\frac{\partial\ln\rho}{\partial v}. \tag{14}$$

Условие интегрируемости получается, если первое уравнение продифференцировать по v, второе — по u и исключить производные от $\cos\sigma$. Оно имеет вид

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} = 0,$$

откуда

$$\rho = U + V. \tag{15}$$

Другими словами, обе фокальные полости конгруэнции Бианки имеют в асимптотических параметрах характерное выражение кривизны

$$K = -\frac{1}{(U+V)^2}. \tag{16}$$

Поверхности класса (16) называются поверхностями Бианки. Они тесно связаны с главным основанием поверхности, именно: сферическое изображение асимптотических линий поверхности Бианки совпадает с изображением главного основания изгибания.

39. Нам осталось доказать, что условие (15) является достаточным для существования конгруэнции Бианки. Бианки доказывает это попутно, ставя более общую задачу: найти конгруэнцию Бианки, которая имеет заданную поверхность класса (16) одной своей фокальной полостью.

Пусть поверхность S, принадлежащая к классу поверхностей (16), задана линейным элементом сферического изображения своих асимптотических линий

$$ds'^2 = e\,du^2 + 2\sqrt{eg}\,\cos\omega\,du\,dv + g\,dv^2. \tag{17}$$

Построим в каждой точке M поверхности S прямой трехгранник, вершина которого лежит в точке M, а ребра первые два лежат в касательной плоскости и делят пополам угол между координатными лининями на сфере и третье совпадает с нормалью к поверхности.

Если обозначим через $e_1(X_1, Y_1, Z_1)$, $e_2(X_2, Y_2, Z_2)$, $e_3(X_3, Y_3, Z_3)$ единичные векторы осей трехгранника и их координаты (направляющие косинусы этих прямых), то касательные к координатным линиям на сфере определяются векторами $\frac{\partial e_3}{\partial u}$, $\frac{\partial e_3}{\partial v}$; их модули $\sqrt{e}$ и $\sqrt{g}$; они образуют с осями e_1, e_2 углы $\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega}{2}$ и $\frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega}{2}$ (вторая ось параллельна внутренней биссектрисе координатного угла на сфере). Следовательно,

$$\frac{\partial e_3}{\partial u} = \sqrt{e}\sin\frac{\omega}{2}\,e_1 + \sqrt{e}\cos\frac{\omega}{2}\,e_2,$$

$$\frac{\partial e_3}{\partial v} = -\sqrt{g}\sin\frac{\omega}{2}\,e_1 + \sqrt{g}\cos\frac{\omega}{2}\,e_2.$$

Отсюда сейчас же получаем компоненты вращения нашего трехгранника p, q, p_1, q_1. Диференцируя последние уравнения и заменяя производные по формулам (10) главы II, подсчитываем компоненты вращения r, r_1 около нормали [Т. П. 197] и получим таблицу производных [Т. П. 195]

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial X_1}{\partial u} &= rX_2 - \sqrt{e}\sin\frac{\omega}{2}X_3, & \frac{\partial X_1}{\partial v} &= r_1X_2 + \sqrt{g}\sin\frac{\omega}{2}X_3,\\
\frac{\partial X_2}{\partial u} &= -rX_1 - \sqrt{e}\cos\frac{\omega}{2}X_3, & \frac{\partial X_2}{\partial v} &= -r_1X_1 - \sqrt{g}\cos\frac{\omega}{2}X_3,\\
\frac{\partial X_3}{\partial u} &= \sqrt{e}\sin\frac{\omega}{2}X_1 + \sqrt{e}\cos\frac{\omega}{2}X_2, & \frac{\partial X_3}{\partial v} &= -\sqrt{g}\sin\frac{\omega}{2}X_1 + \sqrt{g}\cos\frac{\omega}{2}X_2,
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$r = -\frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial u} - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}'\sqrt{\frac{e}{g}}\sin\omega, \qquad r_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial v} + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}'\sqrt{\frac{g}{e}}\sin\omega. \tag{19}$$

Конечно, такие же уравнения связывают компоненты Y_i и Z_i. Уравнение Гаусса примет теперь вид [Т. П. 197]

$$\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = \sqrt{eg}\sin\omega. \tag{20}$$

Наконец, так как $\theta_1 = X_3\sqrt{\rho}$, $\theta_2 = Y_3\sqrt{\rho}$, $\theta_3 = Z_3\sqrt{\rho}$, то уравнение (2) можно теперь написать в виде

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u} &= \rho\sqrt{e}\left(X_1\cos\frac{\omega}{2} - X_2\sin\frac{\omega}{2}\right),\\
\frac{\partial x}{\partial v} &= -\rho\sqrt{g}\left(X_1\cos\frac{\omega}{2} + X_2\sin\frac{\omega}{2}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Построим теперь в касательной плоскости поверхности S через точку M луч конгруэнции MM'; допустим, что он образует с первой осью трехгранника T угол α. Угол σ между фокальными плоскостями, как мы видели, определяется системой (14), откуда

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2} = \sqrt{\frac{U+k}{V-k}}, \quad k = \text{const}. \tag{22}$$

Так как расстояние между фокусами MM' по формуле (9) теперь будет равно $\rho\sin\sigma$, то координаты x', y', z' точки M' получатся в виде

$$\left.\begin{aligned}
x' &= x + \rho\sin\sigma\,(X_1\cos\alpha + X_2\sin\alpha),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

С другой стороны, направляющие косинусы X', Y', Z' нормали N' как вектора, перпендикулярного к прямой MM' и образующего с осью e_3 угол σ, определяются формулами

$$\left.\begin{array}{l} X' = \sin\sigma\,(X_2\cos\alpha - X_1\sin\alpha) + \cos\sigma\, X_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (24)$$

Требуя, чтобы этот вектор являлся нормалью к поверхности S', т. е. чтобы $N'M_u' = N'M_v' = 0$, мы получим для α систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_u = -r + \sqrt{e}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma}{2}\sin\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right), \\ \alpha_v = -r_1 - \sqrt{g}\,\mathrm{tg}\,\frac{\sigma}{2}\sin\left(\alpha - \frac{\omega}{2}\right). \end{array}\right\} \qquad (25)$$

Эта система вполне интегрируема в силу (14), (20) и уравнений [Т. П. 109]

$$\frac{\partial \ln\rho}{\partial u} = -2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}', \quad \frac{\partial \ln\rho}{\partial v} = -2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'. \qquad (26)$$

Выбирая любое решение σ и α (22), (25), мы построим конгруэнцию (MM'), для которой поверхности (M) и (M') являются фокальными полостями. Нетрудно непосредственно проверить, что обе полости (M) и (M') отнесены к асимптотическим линиям; значит, это — конгруэнция W. Наконец, сравнивая (9) и (23), мы найдем, что $\rho' = \rho$; следовательно, обе фокальные полости имеют одинаковую кривизну в соответствующих точках.

Таким образом по заданной поверхности Бианки [типа (10)] можно найти ∞^2 конгруэнций Бианки, имеющих эту поверхность своей первой фокальной полостью.

40. Целый ряд замечательных свойств присущ конгруэнции Бианки, и многие из них характеризуют ее.

a) В сферическом изображении конгруэнции (радиусы сферы параллельны лучам конгруэнции) асимптотическим линиям соответствует ортогональная система.

Из формулы (23) имеем для направляющих косинусов луча конгруэнции

$$X^* = X_1\cos\alpha + X_2\sin\alpha.$$

Внося это значение в условие ортогональности $\sum \frac{\partial X^*}{\partial u}\frac{\partial X^*}{\partial v} = 0$, увидим, что оно удовлетворяется в силу (25). Обратно, конгруэнция W, обладающая этим свойством, есть конгруэнция Бианки. Для доказательства надо подсчитать заново формулу (25) для произвольной конгруэнции W, т. е. полагая в (23) фокальное расстояние в виде $d\sin\sigma$, где d — расстояние между граничными точками луча. Тогда мы получим общие формулы

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial\alpha}{\partial u} = -r + \sqrt{e}\,\frac{\rho + d\cos\sigma}{d\sin\sigma}\sin\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right), \\ \frac{\partial\alpha}{\partial v} = -r_1 - \sqrt{g}\,\frac{\rho - d\cos\sigma}{d\sin\sigma}\sin\left(\alpha - \frac{\omega}{2}\right). \end{array}\right\} \qquad (27)$$

Внося эти значения в условие $\sum \frac{\partial X^*}{\partial u}\frac{\partial X^*}{\partial v} = 0$ немедленно [см. ниже (28)], получим, что $d = \rho$, т. е. вернемся к формулам (25), откуда уравнения (15) и (22) получаются как условия интегрируемости (Бианки [2], II, 85).

b) Главные поверхности конгруэнции Бианки секут фокальные поверхности по сопряженной системе [97].

Подсчитывая для конгруэнции (27) линейный элемент сферического изображения, получим

$$\begin{aligned} ds'^{*2} = \sum dX^{*2} = e\,\sin^2\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right)\frac{\rho^2 + 2\rho\, d\cos\sigma + d^2}{d^2\sin^2\sigma}\,du^2 - \\ - 2\sqrt{eg}\,\sin\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\omega}{2}\right)\frac{\rho^2 - d^2}{d^2\sin^2\sigma}\,du\,dv + \\ + g\sin^2\left(\alpha - \frac{\omega}{2}\right)\frac{\rho^2 - 2\rho\, d\cos\sigma + d^2}{d^2\sin^2\sigma}\,dv^2. \end{aligned} \qquad (28)$$

С другой стороны, пользуясь формулами (21), найдем, что луч конгруэнции с направляющими косинусами $X^* = X_1\cos\alpha + X_2\sin\alpha, \ldots$ касается на поверхности S линии

$$\sqrt{e}\sin\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right)du - \sqrt{g}\sin\left(\alpha - \frac{\omega}{2}\right)dv = 0.$$

Так как поверхность S отнесена к асимптотическим линиям, то диференциальное уравнение второй развертывающейся поверхности конгруэнции отличается только знаком при dv. Следовательно, коэфициенты δ, δ', δ'' второй формы Санниа [Т. П. 179] пропорциональны

$$\delta : \delta'' = -\frac{e\sin^2\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right)}{g\sin^2\left(\alpha - \frac{\omega}{2}\right)}, \quad \delta' = 0. \qquad (29)$$

Допустим теперь, что главные поверхности конгруэнции секут поверхность S по сопряженной системе. Так как сопряженные направления отличаются только знаком, то уравнение главных поверхностей не должно содержать члена с произведением диференциалов.

Это приводит [Т. П. 179] к уравнению

$$(e^*\delta'' + g^*\delta)\cos\theta - 2\sqrt{e^*g^*}\,\delta' = 0,$$

где θ — угол между координатными линиями в сферическом изображении конгруэнции. В силу (28) и (29) последнее условие принимает вид

$$eg\sin^2\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right)\sin^2\left(\alpha - \frac{\omega}{2}\right)\frac{4\rho\cos\sigma}{d\sin^2\sigma}\cos\theta = 0.$$

Если $\cos\sigma = 0$, то конгруэнция нормальная, главные поверхности совпадают с развертывающимися и теорема очевидна.

Если $\cos\sigma$ — не нуль, то $\cos\theta = 0$ и, следовательно, асимптотические линии поверхности S в сферическом изображении конгруэнции (радиусы сферы параллельны лучам конгруэнции) имеют своим образом ортогональную систему. Формула (28) показывает, что в этом случае $\rho = d$, т. е. кривизна этой фокальной полости, на которой главные поверхности высекают сопряженную систему, равна вплоть до знака обратной величине второй степени расстояния между граничными точками луча.

Если конгруэнция не является нормальной и главные поверхности секут обе фокальные поверхности по сопряженной системе, то на фокальных поверхностях имеются две общие сопряженные системы: система, высекаемая развертывающимися поверхностями, и система, соответствующая главным поверхностям. По теореме Петерсона отсюда следует, что асимптотические линии соответствуют и конгруэнция принадлежит к классу конгруэнций W. Та и другая полости фокальной поверхности имеют одну и ту же кривизну $-\frac{1}{d^2}$; следовательно, это — конгруэнция Бианки.

c) Фокальные полости конгруэнции Бианки (не псевдосферической) касаются вдоль двух асимптотических [146].

Расстояние между соответствующими точками M, M' двух фокальных полостей равно в силу (15) и (22)

$$MM' = \rho \sin \sigma = 2\sqrt{(U+k)(V-k)}. \qquad (30)$$

Следовательно, точки, лежащие на линиях семейства

$$(U+k)(V-k) = \text{const}, \qquad (31)$$

находятся на одинаковых расстояниях от соответствующих точек второй полости. В частности, асимптотические $U+k=0$ и $V-k=0$, очевидно, совпадают с такими же линиями второй полости. При этом по формуле (22) $\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}=0$ или ∞, т. е. $\sigma=0$ или π и касательные плоскости вдоль целой линии совпадают; поверхности S и S' касаются. Если U или V постоянно (и, конечно, отличны от $\pm k$), то теорема сохраняет силу только для одной асимптотической. Если обе функции постоянны, конгруэнция — псевдосферическая, и MM' имеет всюду одно значение, — теорема теряет смысл.

41. Знание поверхности Бианки равносильно знанию трех квадратичных решений уравнения Мутара. Определение поверхности, отнесенной к главному основанию, сводится в нашем случае к определению какого-нибудь частного решения этого уравнения.

Построение конгруэнции Бианки по заданной поверхности Бианки S позволяет найти вторую поверхность Бианки, следовательно, приводит к преобразованию поверхности этого класса. Если обе функции U, V постоянны, то кривизны поверхностей S и S' также постоянны; отмеченное выше преобразование переходит в преобразование поверхности постоянной отрицательной кривизны, именно преобразование Бэклюнда.

Теорема переместительности для поверхности Бианки принимает специальный вид. По данным двум преобразованиям S' и S'' поверхности S, как мы видели, можно построить ∞^1 поверхностей S^*, которые могут быть получены из S' и S'' подходящими асимптотическими преобразованиями и которые определяются по формулам (13). Если поверхность

Бианки S и первые два преобразования приводят тоже к поверхностям Бианки S', S'', то S^* не обязательно будет поверхностью Бианки, но среди ∞^1 поверхностей S^* найдется одна и только одна поверхность с той же самой кривизной в соответствующих точках, как и у поверхностей S', S'' и S. Обращаясь к формулам (11), мы имеем

$$\sum \theta_i^{*2} = \sum \theta_i^2 + 2\frac{R_1R_2}{\lambda}\left(\sum \theta_i\theta_i'' - \sum \theta_i\theta_i'\right) + $$
$$+\frac{R_1^2R_2^2}{\lambda^2}\left(\sum \theta_i''^2 + \sum \theta_i'^2 - 2\sum \theta_i'\theta_i''\right). \qquad (11')$$

Между тем, если S, S', S'' и S^* имеют одну и ту же кривизну, равную $-\frac{1}{\rho^2}$ в соответственных точках, и если через σ' и σ'' обозначим угол фокальных плоскостей соответственно S и S' или S и S'', то в силу (13a) мы получим

$$\sum \theta^*{}_i^2 = \sum \theta_i^2 = \sum \theta_i'^2 = \sum \theta_i''^2 = \rho,$$
$$\sum \theta_i\theta_i' = \rho\cos\sigma', \qquad \sum \theta_i\theta_i'' = \rho\cos\sigma''.$$

Наконец формулы (24) для X', Y', Z' и аналогичные для X'', Y'', Z'' дадут в силу предыдущего

$$\sum \theta_i'\theta_i'' = \rho\left[\cos\sigma'\cos\sigma'' + \sin\sigma'\sin\sigma''\cos(\alpha'-\alpha'')\right],$$

где α' означает угол луча MM', а α'' — луча MM'' с первой осью трехгранника T, связанного с поверхностью S.

Внося все это в уравнение (11′), получим по сокращении на $\frac{R_1R_2}{\lambda}$

$$\lambda = R_1R_2\frac{\cos\sigma'\cos\sigma'' - 1 + \sin\sigma'\sin\sigma''\cos(\alpha'-\alpha'')}{\cos\sigma'' - \cos\sigma'}. \qquad (32)$$

Следовательно, искомая поверхность Бианки S^* — единственная. Простая поверка обнаружит, что значение λ, определяемое формулой (32), удовлетворяет уравнениям (10). Значит, такая поверхность S^* всегда существует.

42. Специальная форма теоремы переместительности для поверхностей Бианки позволяет по данным двум преобразованным поверхностям S' и S'' найти единственную третью S^*. Поскольку она единственная, она находится без квадратур, в конечном виде по формулам (32) и (13). Отсюда Бианки делает замечательный вывод. Пусть нам известны все преобразования поверхности S, точнее: пусть мы сумеем проинтегрировать в общем виде уравнения (25) так, что имеем поверхность S' с двумя произвольными постоянными. Пользуясь формулами (32), (13), мы построим все вторые преобразования S^*. К ним мы снова можем применить те же формулы, и таким образом, без всяких квадратур, только с помощью алгебраических операций можно найти сколько угодно новых поверхностей Бианки.

Элегантное приложение этих общих соображений дает Маслов [112], [138], [146]. Он берет в качестве исходной поверхности Бианки поверхность, выродившуюся в прямую. Если это так и эта прямая принята за ось z, то исходные функции θ_i можно взять в виде

$$\theta_1=\sqrt{U+V}\cos\varphi,\quad \theta_2=\sqrt{U+V}\sin\varphi,\quad \theta_3=0. \tag{33}$$

Они должны удовлетворять уравнению Мутара (1). Внося туда значения θ_i, заданные формулами (33), мы получим для φ уравнение

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}+\frac{V'}{2(U+V)}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{U'}{2(U+V)}\frac{\partial\varphi}{\partial v}=0, \tag{34a}$$

при этом

$$M=-\frac{U'V'}{4(U+V)^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}. \tag{34b}$$

Интегрирование системы (25) можно здесь вести проще. Преобразованные решения θ_i' удовлетворяют прежде всего уравнениям (13a). Если сюда подставить для ρ и σ значения (15) и (22), то получим, принимая во внимание, что $\theta_3=0$,

$$\theta_1'\theta_1+\theta_2'\theta_2=V-U-2k. \tag{35a}$$

Затем, умножая на θ_i' уравнения (5) и суммируя для $i=1, 2, 3$, получим в силу первых уравнений (13)

$$\left.\begin{aligned}\theta_1'\frac{\partial\theta_1}{\partial u}+\theta_2'\frac{\partial\theta_2}{\partial u}&=-\frac{1}{2}U'-2(U+k)\frac{\partial\ln R}{\partial u},\\ \theta_1'\frac{\partial\theta_1}{\partial v}+\theta_2'\frac{\partial\theta_2}{\partial v}&=\frac{1}{2}V'+2(V-k)\frac{\partial\ln R}{\partial v}.\end{aligned}\right\} \tag{35b}$$

Исключая из (35a), (35b) неизвестные θ_1', θ_2', получим уравнение для преобразующего решения R

$$\frac{2}{V-k}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\ln R}{\partial u}+\frac{2}{U+k}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\ln R}{\partial v}+\frac{U'}{(U+V)(U+k)}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+$$
$$+\frac{V'}{(U+V)(V-k)}\frac{\partial\varphi}{\partial u}=0.$$

Интегрируя, получим

$$R=\sqrt{\frac{U+V}{(U+k)(V-k)}}F(\tau), \tag{36a}$$

где

$$\tau=\int\left\{\sqrt{\frac{V-k}{U+k}}\frac{\partial\varphi}{\partial u}du-\sqrt{\frac{U+k}{V-k}}\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right\}. \tag{36b}$$

Условие интегрируемости (36b) удовлетворено в силу (34a). Функция R должна быть вместе с тем решением уравнения Мутара (1), где M определяется формулой (34b). Внося туда выражения (36a), мы получим уравнение для функции $F(\tau)$

$$F''=F,$$

откуда

$$F(\tau)=A\,\mathrm{ch}(\tau+b),\qquad A,\ b=\mathrm{const},$$

но умножение F на постоянную A приведет к умножению R на A, а это не изменит уравнения (35b). Что касается до постоянного b, то его можно включить в функцию τ, которая определяется из (36b) только вплоть до постоянного слагаемого. Таким образом придем к решению:

$$R=\sqrt{\frac{U+V}{(U+k)(V-k)}}\,\mathrm{ch}\,\tau. \tag{36}$$

Преобразованные решения определяются из (35a), (35b) в виде

$$\left.\begin{aligned}\theta_1'&=\frac{V-U-2k}{\sqrt{U+V}}\cos\varphi+2\,\mathrm{th}\,\tau\sqrt{\frac{(U+k)(V-k)}{U+V}}\sin\varphi,\\ \theta_2'&=\frac{V-U-2k}{\sqrt{U+V}}\sin\varphi-2\,\mathrm{th}\,\tau\sqrt{\frac{(U+k)(V-k)}{U+V}}\cos\varphi,\\ \theta_3'&=2\sqrt{\frac{(U+k)(V-k)}{U+V}}\frac{1}{\mathrm{ch}\,\tau}.\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Последняя из этих формул получается интегрированием уравнений (5). Постоянная интеграции выбрана так, чтобы было удовлетворено уравнение (13a). Конечные уравнения поверхности S получаются по формулам (23) в виде

$$\left.\begin{aligned}x'&=-2\frac{\sqrt{(U+k)(V-k)}}{\mathrm{ch}\,\tau}\sin\varphi,\\ y'&=2\frac{\sqrt{(U+k)(V-k)}}{\mathrm{ch}\,\tau}\cos\varphi,\\ z'&=2\,\mathrm{th}\,\tau\sqrt{(U+k)(V-k)}+\int(U+V)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}du-\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right).\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Таким образом для всякого решения (34a) мы имеем и поверхность исходную S и все ее первые преобразования S' — с двумя произвольными постоянными: постоянное k и постоянное, которое появляется при интегрировании τ.

Таким образом все условия для дальнейшего применения преобразований Бианки имеются и, следовательно, мы можем получить неограниченное число поверхностей Бианки при помощи только алгебраических операций и диференцирования.

43. При выводе теоремы переместительности приходится предполагать, что решения σ' и σ'' различны, т. е. постоянные k' и k'' не равны друг другу, — иначе формула (32) теряет смысл. Маслов пришел к новому преобразованию, рассматривая как предельный случай $k'=k''$. При этом приходится и вторую постоянную, которая возникает при интегрировании системы (25), считать тоже переменной. Мы ее обозначим буквой a и будем считать, что a есть функция от k:

$$a=a(k).$$

Для сокращения письма отбрасываем указатели у величин, относящихся к преобразованию $S\to S''$, и будем рассматривать предельный переход $k'\to k$, причем $\lim\limits_{k'=k} a'=a$.

Прежде всего по формуле (32) найдем, что $\lim\limits_{k'=k} \lambda = 0$. Действительно, раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя, имеем

$$\lim_{k'=k} \frac{\cos\sigma'\cos\sigma - 1 + \sin\sigma'\sin\sigma\cos(\alpha'-\alpha)}{\cos\sigma - \cos\sigma'} =$$
$$= \lim_{k'=k} \frac{[-\sin\sigma'\cos\sigma + \cos\sigma'\sin\sigma\cos(\alpha'-\alpha)]\frac{d\sigma'}{dk'} - \sin\sigma'\sin\sigma\sin(\alpha'-\alpha)\frac{d\alpha'}{dk'}}{\sin\sigma'\frac{d\sigma'}{dk'}}.$$

Так как по формуле (22) $\frac{d\sigma'}{dk'} = \frac{1}{\sqrt{(U+k)(V-k)}}$ — не нуль, то знаменатель конечен, а числитель равен нулю при $\sigma' = \sigma$ и $\alpha' = \alpha$; следовательно, $\lim\limits_{k'=k} \lambda = 0$.

Применяя такой же предельный переход $k' \to k$ к формуле (11), получим

$$\vartheta_i = \lim_{k'=k} \theta_i^* = \theta_i - R^2 \frac{[\theta_i]}{[\lambda]}, \tag{39a}$$

где

$$\left.\begin{aligned} [\theta_i] &= \lim_{k'=k}\left[\frac{\partial\theta'_i}{\partial k'} + \frac{\partial\theta'_i}{\partial a'}\frac{da'}{dk'}\right], \\ [\lambda] &= \lim_{k'=k}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial k'} + \frac{\partial\lambda}{\partial a'}\frac{da'}{dk'}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{39b}$$

По условию ϑ_i должны быть квадратичными решениями

$$\sum \vartheta_i^2 = U + V.$$

Внося сюда (39a), получим по сокращении на $\frac{R^2}{[\lambda]}$

$$\frac{R^2}{[\lambda]} = 2\frac{\sum \theta_i[\theta_i]}{\sum [\theta_i]^2}. \tag{40}$$

Это определяет $[\lambda]$, если известно $[\theta_i]$. Так как θ_i удовлетворяет уравнениям типа (35a), (35b)

$$\left.\begin{aligned} &\sum \theta_i\theta'_i = V - U - 2k, \\ &\sum \theta'_i\frac{\partial\theta_i}{\partial u} = -\frac{1}{2}U' - 2(U+k')\frac{\partial\ln R'}{\partial u}, \\ &\sum \theta'_i\frac{\partial\theta_i}{\partial v} = \frac{1}{2}V' + 2(V-k')\frac{\partial\ln R'}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

то диференцируя (41) по k' и переходя к пределу $k' = k$, получаем

$$\left.\begin{aligned} &\sum \theta_i[\theta_i] = -2, \\ &\sum [\theta_i]\frac{\partial\theta_i}{\partial u} = -2\frac{\partial\ln R}{\partial u} - 2(U+k)\left[\frac{\partial\ln R'}{\partial u}\right], \\ &\sum [\theta_i]\frac{\partial\theta_i}{\partial v} = -2\frac{\partial\ln R}{\partial v} + 2(V-k)\left[\frac{\partial\ln R'}{\partial v}\right], \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

где попрежнему

$$[A] = \lim_{k'=k}\left[\frac{\partial A}{\partial k'} + \frac{\partial A}{\partial a'}\frac{da'}{dk'}\right].$$

Если решение R' известно с двумя произвольными постоянными k и a, то система (42) определит $[\theta_i]$, уравнение (40) определит $[\lambda]$ и поверхность будет определена. В силу уравнений (39a), (40) и уравнения первого системы (42) имеем

$$\vartheta_i = \theta_i + 4\frac{[\theta_i]}{\sum [\theta_i]^2}. \tag{43}$$

Предельный переход, примененный к уравнению (13), дает для определения координат x, y, z для новой поверхности формулы

$$\bar{x} = x - \frac{4}{\sum [\theta_i]^2}\begin{vmatrix} \theta_2 & \theta_3 \\ [\theta_2] & [\theta_3] \end{vmatrix}. \tag{43a}$$

Можно непосредственно проверить, что (43a) удовлетворяет уравнению Мутара.

§ 2. Преобразования поверхности, отнесенной к главному основанию

44. Поверхность Бианки определяет сферическое изображение главного основания изгибания. Преобразование поверхности Бианки, следовательно, есть преобразование сферического изображения главного основания. При этом, конечно, и сама поверхность Σ, несущая главное основание, преобразуется. Это преобразование рассмотрел Эйзенхарт. Аналитически его дополнение к теории Бианки сводится к преобразованию четвертого неквадратичного решения уравнения Мутара, а именно того решения, которое вместе с тремя первыми составляет тангенциальные координаты поверхности Σ. Если это четвертое решение подвергнуть тому же самому преобразованию, что и первые три, то полученная поверхность Σ' вместе с первоначальной Σ образует очень интересную конфигурацию, которая и составляет наибольший интерес в преобразовании Эйзенхарта. Мы будем строить это преобразование независимо от теории Бианки, следуя в общих чертах изложению его в книге Эйзенхарта **[94]**.

Будем называть плоскость

$$\sum \tau_i x_i = \tau_1 x_1 + \tau_2 x_2 + \tau_3 x_3 + \tau_4 x_4 = 0$$

просто плоскостью τ; если τ_i даны как функции u и v, то семейство ∞^2 плоскостей τ имеет огибающую, которую мы будем называть поверхностью (τ), а сопряженную (в наших рассуждениях) систему координатных линий (u, v) на этой поверхности — сетью (τ). Наконец, пересечение двух плоскостей τ и $\bar{\tau}$ определяет прямую $(\tau, \bar{\tau})$, а эта прямая, если τ_i и $\bar{\tau}_i$ суть функции от u и v, описывает конгруэнцию $(\tau, \bar{\tau})$.

Сетью будем называть вообще сопряженную систему линий на поверхности. Сеть (τ) сопряжена конгруэнции C, если в соответствии, при котором луч конгруэнции проходит через соответствующую ему точку поверхности (τ), линии сети изображаются развертывающимися поверхностями конгруэнции C. Сеть (τ) гармонична конгруэнции H, если в соответствии, при котором луч конгруэнции лежит в касательной плоскости к поверхности (τ), линии сети изображаются развертывающимися поверхностями этой конгруэнции.

Будем говорить, что сети (τ) и $(\bar{\tau})$ связаны преобразованием F, если прямая $M\bar{M}$, связывающая соответствующие точки поверхностей (τ) и $(\bar{\tau})$, описывает сопряженную обеим сетям конгруэнцию; при этом, как мы увидим, прямая $(\tau\bar{\tau})$ описывает гармоническую конгруэнцию.

Пусть даны две сети (τ) и $(\bar{\tau})$; координаты τ_i и $\bar{\tau}_i$ удовлетворяют уравнениям Лапласа.

Начнем с определения условий при которых развертывающиеся поверхности конгруэнции $H=(\tau, \bar{\tau})$ соответствуют линиям (u, v). Фокальные плоскости как плоскости, проходящие через луч конгруэнции, принадлежат пучку плоскостей $(\tau, \bar{\tau})$. Пусть

$$\sum (\lambda\tau_i - \bar{\tau}_i)\, x_i = 0$$

— уравнение фокальной плоскости конгруэнции H, и допустим, что она соответствует развертывающейся поверхности u. Характеристика плоскости $\lambda\tau - \bar{\tau}$ при движении вдоль линии u определяется двумя уравнениями

$$\sum (\lambda\tau_i - \bar{\tau}_i)\, x_i = 0, \quad \sum (\lambda_u\tau_i + \lambda\tau_{iu} - \bar{\tau}_{iu})\, x_i = 0,$$

из которых второе получено диференцированием первого по u. Эта характеристика должна совпадать с лучом $\sum \tau_i x_i = 0$, $\sum \bar{\tau}_i x_i = 0$, ибо фокальная плоскость есть касательная плоскость к развертывающейся поверхности и ее характеристика — образующая этой поверхности, т. е. луч конгруэнции. Сравнивая уравнения характеристики с уравнениями луча, придем к условию

$$\lambda_u\tau_i + \lambda\tau_{iu} - \bar{\tau}_{iu} = A\tau_i + B\bar{\tau}_i,$$

где A и B — множители пропорциональности, или, группируя иначе члены и введя функции $\bar{a} = B$ и $a = \frac{\partial \ln \lambda}{\partial u} - \frac{A}{\lambda}$,

$$\bar{\tau}_{iu} + \bar{a}\bar{\tau}_i = \lambda(\tau_{iu} + a\tau_i). \tag{44a}$$

По тем же соображениям плоскость $\mu\tau - \bar{\tau}$ является фокальной плоскостью конгруэнции H, соответствующей развертывающимся поверхностям v, если

$$\bar{\tau}_{iv} + \bar{b}\bar{\tau}_i = \mu(\tau_{iv} + b\tau_i) \tag{44b}$$

Уравнения (44a), (44b) должны определять $\bar{\tau}_i$, если даны τ_i. Условие интегрируемости их получится, если продиференцировать (44a) по v, а (44b) по u и исключить производные от $\bar{\tau}$, а именно

$$(\bar{a}_v - \bar{b}_u)\bar{\tau} = (\lambda - \mu)\tau_{uv} + (\lambda_v - \mu b + \lambda\bar{b})\tau_u - (\mu_u - \lambda a + \mu\bar{a})\tau_v + \\ + (\lambda_v a - \mu_u b + \lambda a_v - \mu b_u + a\bar{b}\lambda - \bar{a}b\mu). \tag{44c}$$

Следовательно, если система (44a), (44b) вполне интегрируема, то

$$\bar{a}_v = \bar{b}_u, \tag{45a}$$

и совершенно так же, рассматривая уравнения (44a), (44b), как систему относительно τ_i, придем к условию

$$a_v = b_u. \tag{45b}$$

Можно, следовательно, ввести две функции φ и $\bar{\varphi}$ посредством уравнений

$$\frac{\partial \ln \varphi}{\partial u} = a, \quad \frac{\partial \ln \varphi}{\partial v} = b, \quad \frac{\partial \ln \bar{\varphi}}{\partial u} = \bar{a}, \quad \frac{\partial \ln \bar{\varphi}}{\partial v} = \bar{b}.$$

Если теперь умножить τ_i на φ и $\bar{\tau}_i$ на $\bar{\varphi}$, то в уравнениях (44a), (44b) коэфициенты $\bar{a}$, $\bar{b}$, a, b будут приведены к нулю, при этом, конечно, λ и μ изменятся. Будем считать, что это преобразование уже выполнено. Тогда мы получим систему уравнений Дарбу ([1], II, 245)

$$\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial u} = \lambda\frac{\partial\tau}{\partial u}, \quad \frac{\partial\bar{\tau}}{\partial v} = \mu\frac{\partial\tau}{\partial v}. \tag{46}$$

Эти уравнения связывают тангенциальные координаты, определяющие поверхности (τ) и $(\bar{\tau})$, которые имеют общую гармоническую конгруэнцию $(\tau, \bar{\tau})$, т. е. связаны преобразованием F.

Уравнение (44c) примет теперь вид уравнения Лапласа

$$(\lambda - \mu)\frac{\partial^2\tau}{\partial u\,\partial v} + \lambda_v\frac{\partial\tau}{\partial u} - \mu_u\frac{\partial\tau}{\partial v} = 0, \tag{47a}$$

которое показывает, что координатная система (u, v) на поверхности (τ) сопряжена. Точно так же, исключая τ_i из уравнения (46), получим уравнение Лапласа для преобразованной сети $(\bar{\tau})$

$$(\lambda - \mu)\frac{\partial^2\bar{\tau}}{\partial u\,\partial v} + \frac{\mu}{\lambda}\lambda_v\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial u} - \frac{\lambda}{\mu}\mu_u\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial v} = 0. \tag{47b}$$

Обратно, если τ_i суть решения уравнения (47a), то система (46) вполне интегрируема и определяет $\bar{\tau}_i$, удовлетворяющие (47b). Конгруэнция $(\tau, \bar{\tau})$ отнесена к развертывающимся поверхностям и, следовательно, гармонична и к (τ) и к $(\bar{\tau})$.

Нетрудно теперь показать, что фокусы конгруэнции $(\tau, \bar{\tau})$ лежат на касательных к линиям сети (τ) и $(\bar{\tau})$. В самом деле, фокус есть точка касания фокальной плоскости со своей огибающей, если рассматривать семейство ∞^2 фокальных плоскостей. Эта точка определяется уравнениями трех плоскостей — $\lambda\tau - \bar\tau$, $\lambda_u\tau + \lambda\tau_u - \bar\tau_u$, $\lambda_v\tau + \lambda\tau_v - \bar\tau_v$. В силу (46) эти уравнения принимают вид

$$\sum \tau_i x_i = 0, \quad \sum \bar\tau_i x_i = 0, \quad \sum \tau_{iv} x_i = 0;$$

при этом первые два уравнения определяют луч конгруэнции, а плоскости τ и τ_v определяют характеристику плоскости τ при изменении v, т. е. касательную к линии u на поверхности (τ).

Плоскость τ_u, очевидно, проходит через точку M, в которой плоскость τ касается поверхности (τ); в силу (46) она совпадает с плоскостью $\bar\tau_u$ и поэтому проходит через точку $\bar M$, где плоскость $\bar\tau$ касается поверхности ($\bar\tau$). Таким образом плоскости τ_u и τ_v содержат и точку M, и точку $\bar M$ и, следовательно, определяют луч $M\bar M$ конгруэнции C. Каждая из них является фокальной плоскостью конгруэнции (τ_u, τ_v). Действительно, характеристика плоскости $\sum \tau_{iu} x_i = 0$ при изменении одного v определяется уравнениями $\sum \tau_{iu} x_i = 0$, $\sum \tau_{iuv} x_i = 0$, но в силу (47a) эта система равносильна $\sum \tau_{iu} x_i = 0$, $\sum \tau_{iv} x_i = 0$, т. е. определяет самый луч конгруэнции. Поскольку огибающая семейства ∞^1 поверхностей τ_u образована лучами конгруэнции, то она является развертывающейся поверхностью конгруэнции, а τ_u — ее касательная плоскость есть фокальная плоскость. Мы видим, что развертывающиеся поверхности конгруэнции C соответствуют линиям u, v сети (τ) и ($\bar\tau$), и фокальные плоскости проходят через касательные к линиям общих сетей и, следовательно, пересекают соответствующий луч конгруэнции H в фокусах.

Чтобы построить преобразование сети (τ) в сеть ($\bar\tau$), надо, очевидно, сначала привести тангенциальное уравнение Лапласа, относящееся к сети (τ), к виду (47a). Коэфициенты λ и μ позволят написать уравнения (46), откуда ($\bar\tau$) получится квадратурами. Так как уравнение (47a) в коэфициентах содержит две произвольные функции λ и μ, то всякое уравнение Лапласа можно привести к этому виду.

45. Допустим теперь, что оба уравнения Лапласа (47a), (47b) — уравнения с равными инвариантами. Формулы (4) главы II дадут нам необходимые и достаточные условия этого:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\lambda\frac{\partial \ln\lambda}{\partial v}}{\lambda-\mu}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mu\frac{\partial \ln\mu}{\partial u}}{\mu-\lambda}\right), \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mu\frac{\partial \ln\lambda}{\partial v}}{\mu-\lambda}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\lambda\frac{\partial \ln\mu}{\partial u}}{\lambda-\mu}\right).$$

Складывая, получим

$$\frac{\partial^2 \ln\lambda}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2 \ln\mu}{\partial u\,\partial v}.$$

Если теперь ввести на один момент новую функцию ν посредством уравнений

$$\lambda = \nu U_1, \quad \mu = \nu V_1,$$

то получим

$$(U_1^2 - V_1^2)\frac{\partial^2 \ln\nu}{\partial u\,\partial v} + U_1 V_1' \frac{\partial \ln\nu}{\partial u} - V_1 U_1' \frac{\partial \ln\nu}{\partial v} = 0.$$

Это уравнение не связывает ν, если U_1^2 и V_1^2 есть одна и та же постоянная. Эту постоянную, очевидно, можно свести к единице, сокращая на нее уравнение (47a). Так как λ и μ не могут быть равны друг другу, без того чтобы уравнение (47a) не вырождалось, то надо положить

$$\mu = -\lambda.$$

Уравнения (47a), (47b) примут вид

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial u\,\partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial \ln\mu}{\partial v}\frac{\partial\tau}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial \ln\mu}{\partial u}\frac{\partial\tau}{\partial v} = 0, \tag{48a}$$

$$\frac{\partial^2\bar\tau}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln\mu}{\partial v}\frac{\partial\bar\tau}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln\mu}{\partial u}\frac{\partial\bar\tau}{\partial v} = 0. \tag{48b}$$

Фокальные плоскости $\lambda\tau - \bar\tau$, $\lambda\tau + \bar\tau$ конгруэнции (τ, $\bar\tau$), очевидно, гармонически делят касательные плоскости τ, $\bar\tau$ обеих сетей. Эйзенхарт называет такое преобразование сетей с равными тангенциальными инвариантами преобразованием Ω.

Пусть первая сеть задана направляющими косинусами нормали X, Y, Z и расстоянием W своей касательной плоскости от начала координат, которые удовлетворяют уравнению Лапласа с равными инвариантами вида

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial \ln\rho}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial \ln\rho}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + fX = 0. \tag{49}$$

Пусть w — какое-то частное решение уравнения (49). Тогда подстановка

$$X = \tau_1 w \tag{50a}$$

приведет уравнение (49) к виду (48a), причем

$$\mu = \rho w^2. \tag{50b}$$

Далее, подстановка

$$\theta = X\sqrt{\rho} \tag{50c}$$

приведет уравнение (49) к виду уравнения Мутара

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = M\theta, \quad M = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{\partial^2\sqrt{\rho}}{\partial u\,\partial v} - f. \tag{51}$$

Для преобразованной сети ($\bar\tau$) мы можем ввести аналогичные величины, обозначая их теми же буквами, но с чертой наверху. Мы будем иметь

$$\bar X = \bar\tau\bar w, \quad \bar\theta = \bar X\sqrt{\bar\rho}, \quad \bar\mu = \frac{1}{\mu} = \bar\rho\,\bar w^2. \tag{52}$$

Таким образом всякая сеть с равными инвариантами, заданная, например, решениями уравнения (49) в виде направляющих косинусов нормали и расстояния касательной плоскости от начала, посредством формул (50a), (50b) и уравнений

$$\frac{\partial\bar\tau}{\partial u} = -\mu\frac{\partial\tau}{\partial u}; \quad \frac{\partial\bar\tau}{\partial v} = \mu\frac{\partial\tau}{\partial v} \tag{53}$$

преобразуется в сеть $(\bar\tau)$ тоже с равными тангенциальными инвариантами. Степень общности преобразования определяется произволом в выборе частного решения (49) функции w.

46. Наложим теперь еще новое ограничение на нашу конфигурацию, а именно потребуем, чтобы конгруэнция $(\tau, \bar\tau)$ была нормальной. Для этого достаточно потребовать, чтобы фокальные плоскости были перпендикулярны [Т. П. 170]. Так как направляющие косинусы фокальных плоскостей пропорциональны первым трем тангенциальным координатам $\mu\tau+\bar\tau$, $\mu\tau-\bar\tau$, то условие ортогональности запишется в виде

$$S(\mu\tau_i+\bar\tau_i)(\mu\tau_i-\bar\tau_i)=0.$$

Здесь и далее сумма S распространяется на указатели $i=1, 2, 3$. Раскрывая скобки, получим

$$\mu^2 S\tau_i^2 - S\bar\tau_i^2 = 0, \tag{54}$$

но в силу (50a) и (52) получим

$$S\tau_i^2=\frac{SX^2}{w^2}=\frac{1}{w^2}, \quad S\bar\tau_i^2=\frac{S\bar X^2}{\bar w^2}=\frac{1}{\bar w^2},$$

и в силу (50b) и третьего уравнения (52) будем иметь

$$S\tau_i^2=\frac{\rho}{\mu}, \quad S\bar\tau_i^2=\mu\bar\rho.$$

Внося это в (54), получим чрезвычайно простое условие

$$\bar\rho=\rho. \tag{55}$$

Переходя в уравнениях (53) к переменным θ, $\bar\theta$ с помощью формул (50c) и (52), мы приведем их к виду

$$\theta_u+\bar\theta_u=(\theta-\bar\theta)\frac{\partial\ln w\sqrt{\rho}}{\partial u}, \quad \theta_v-\bar\theta_v=(\theta+\bar\theta)\frac{\partial\ln w\sqrt{\rho}}{\partial v}. \tag{56}$$

Сравнение этих уравнений с формулами (5) показывает, что преобразование Ω сетей с равными инвариантами есть преобразование Мутара их тангенциальных уравнений.

Умножая первое уравнение (56) на $\theta+\bar\theta$, второе — на $\theta-\bar\theta$ и суммируя для $i=1, 2, 3$, получим

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}S(\theta_i^2+\bar\theta_i^2+2\theta_i\bar\theta_i)=2S(\theta_i^2-\bar\theta_i^2)\frac{\partial\ln w\sqrt{\rho}}{\partial u},\\
&\frac{\partial}{\partial v}S(\theta_i^2+\bar\theta_i^2-2\theta_i\bar\theta_i)=2S(\theta_i^2-\bar\theta_i^2)\frac{\partial\ln w\sqrt{\rho}}{\partial v},
\end{aligned}\right\} \tag{56'}$$

но в силу (50c), (52), если обозначить через σ угол плоскостей τ, $\bar\tau$,

$$S\theta_i^2=\rho, \quad S\bar\theta_i^2=\rho, \quad S\theta_i\bar\theta_i=\rho\cos\sigma. \tag{57}$$

Следовательно, уравнения (56′) принимают вид

$$\frac{\partial\cos\sigma}{\partial u}=-(1+\cos\sigma)\frac{\partial\ln\rho}{\partial u}, \quad \frac{\partial\cos\sigma}{\partial v}=(1-\cos\sigma)\frac{\partial\ln\rho}{\partial v}. \tag{58}$$

Это — уравнение (14), и отсюда получаем

$$\rho=U+V, \quad \operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}=\sqrt{\frac{U+k}{V-k}}. \tag{59}$$

Следовательно, обе тройки решений θ_i и $\bar\theta_i$ квадратичны и, значит, обе сопряженные сети (τ) и $(\bar\tau)$ являются главными основаниями изгибания. Отсюда вытекает преобразование Эйзенхарта.

47. Пусть

$$ds'^2=e\,du^2+2\sqrt{eg}\cos\omega\,du\,dv+g\,dv^2$$

— линейный элемент сферического изображения сети (τ), т. е. сферическое изображение поверхности (τ), отнесенной к главному основанию изгибания. Построим в каждой точке M этой поверхности прямой трехгранник, у которого третья ось совпадает с нормалью к поверхности, а две первые параллельны биссектрисам касательных к координатным линиям на сфере. Направляющие косинусы осей трехгранника удовлетворяют системе (18), (19) n° 39. Нормаль ко второй поверхности $(\bar\tau)$ образует с нормалью к поверхности (τ) угол σ, определяемый формулой (59). Введя еще угол α, образованный линией пересечения касательных плоскостей $(\tau, \bar\tau)$ с первой осью трехгранника, мы получим для направляющих косинусов $\bar X$, $\bar Y$, $\bar Z$ нормали к поверхности $(\bar\tau)$ формулы (24)

$$\left.\begin{aligned}
&\bar X=\sin\sigma(X_2\cos\alpha-X_1\sin\alpha)+\cos\sigma X_3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Подставляя по формулам (50c) и (52) θ и $\bar\theta$, внося их в уравнения (56) и сравнивая отдельно коэфициенты при X_1, X_2, X_3, мы снова получим для α систему (25) и, кроме того, уравнения для определения w:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\alpha}{\partial u}=-r+\sqrt{e}\operatorname{ctg}\frac{\sigma}{2}\sin\left(\alpha+\frac{\omega}{2}\right),\\
&\frac{\partial\alpha}{\partial v}=-r_1-\sqrt{g}\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\sin\left(\alpha-\frac{\omega}{2}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{61a}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\ln w}{\partial u}=-\sqrt{e}\operatorname{ctg}\frac{\sigma}{2}\cos\left(\alpha+\frac{\omega}{2}\right)-\frac{1}{1-\cos\sigma}\frac{\partial\ln\rho}{\partial u},\\
&\frac{\partial\ln w}{\partial v}=-\sqrt{g}\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\cos\left(\alpha-\frac{\omega}{2}\right)-\frac{1}{1+\cos\sigma}\frac{\partial\ln\rho}{\partial v}.
\end{aligned}\right\} \tag{61b}$$

Условие совместности уравнений (61a) удовлетворено тождественно в силу (59) и (26), и при этих условиях w удовлетворяет уравнению (49). Эта функция w и определяет преобразование Эйзенхарта: если известно w, то μ определится из (50b), а $\bar\tau$ найдется квадратурами из (53).

Нетрудно заметить, что уравнения (61a) определяют ту же функцию α, что и (25). Таким образом преобразование Бианки эквивалентно преобразованию Эйзенхарта: луч конгруэнции Бианки, соединяющий соответствующие точки двух связанных преобразованием поверхностей, параллелен лучу конгруэнции $(\tau, \bar\tau)$, т. е. линии пересечения касательных плоскостей главных оснований, связанных преобразованием Эйзенхарта.

При этом асимптотические линии поверхностей Бианки соответствуют общей сопряженной системе (τ) и $(\bar{\tau})$, т. е. развертывающимся поверхностям конгруэнции $(\tau, \bar{\tau})$. В сферическом изображении конгруэнции Бианки асимптотическим линиям фокальных полостей соответствует ортогональная система на сфере. Следовательно, сферическое изображение развертывающихся поверхностей конгруэнции Эйзенхарта $(\tau, \bar{\tau})$ ортогонально; фокальные плоскости перпендикулярны и конгруэнция нормальна, как мы это уже видели.

Поверхность Бианки определена вплоть до перемещения в пространстве сферическим изображением и кривизной $-\frac{1}{\rho^2}$. Этого нельзя сказать о главном основании (τ). Поэтому Эйзенхарту надо найти еще четвертую тангенциальную координату поверхности (τ), в то время как Бианки достаточно иметь три. С этой целью Эйзенхарт дополняет систему (25) уравнениями (61b), определяет функцию w, которая дает преобразующее решение $R = w\sqrt{\rho}$ для уравнения Мутара. Имея это решение, можно определить четвертую координату $\bar{\theta}_4$ из (56) квадратурами. Эта функция w удовлетворяет уравнению Лапласа (49), ее можно принять тоже за четвертую тангенциальную координату некоторой поверхности, отнесенной к главному основанию. Эйзенхарт называет сеть с тангенциальными координатами X, Y, Z, w специальной сетью.

48. Теорема переместительности, установленная для преобразований поверхностей Бианки, распространяется сейчас же и на преобразования главных оснований Эйзенхарта. Для этого достаточно вернуться к общей теореме переместительности для преобразований Мутара п° 37: для данных двух преобразований θ' и θ'' существуют функции θ_i^*, каждая из которых удовлетворяет своему уравнению Мутара и которые могут быть получены из θ' или θ'' соответственно подобранными преобразованиями Мутара. Эти функции θ_i^* определяются по формуле (11), где λ есть решение системы (10). В нашем случае первые три решения θ_1^*, θ_2^*, θ_3^* должны быть квадратичны, следовательно, коэфициент $\frac{R_1 R_2}{\lambda}$ надо искать по формуле (32). Применяя теперь с этими значениями λ формулу (11) к четвертому решению θ_4, мы получим θ_4^*. Таким образом получим наряду с поверхностью (τ) и ее преобразованиями (τ') и (τ'') четвертую поверхность (τ^*). Все поверхности отнесены к главному основанию, ибо первые три решения θ_i, θ_i', θ_i'' или θ_i^* — квадратичны. Прямые (τ, τ') или (τ, τ'') описывают нормальные конгруэнции, гармоничные поверхностям (τ), (τ'), (τ''). То же самое можно сказать и относительно двух других конгруэнций (τ', τ^*) или (τ'', τ^*). Действительно, функции θ_i^* по формуле (11) удовлетворяют уравнениям преобразования Мутара (12). Переходя при помощи (50a), (50c) от θ_i^* к τ^*, преобразуем уравнения (12), имея в виду (53),

$$\frac{\partial \tau^*}{\partial u} = -\mu' \frac{\partial \tau'}{\partial u}, \quad \frac{\partial \tau^*}{\partial v} = \mu' \frac{\partial \tau'}{\partial v},$$

откуда прямо следует, что конгруэнция (τ^*, τ') нормальна и гармонична сетям (τ^*) и (τ').

Уравнение (11) показывает, что четыре тангенциальные координаты плоскости τ^* линейно зависят от соответственных координат плоскостей τ, τ', τ''. Следовательно, четыре плоскости принадлежат одной связке, т. е. четыре соответственных луча конгруэнций Эйзенхарта (τ, τ'), (τ, τ''), (τ', τ^*), (τ'', τ^*) имеют общую точку 0. Таким образом конфигурация теоремы переместительности Эйзенхарта образована четырьмя лучами, исходящими из одной точки. Каждый луч четверки описывает нормальную конгруэнцию так, что развертывающиеся поверхности всех четырех конгруэнций соответствуют. Плоскость, определяемая двумя последовательными лучами, огибает поверхность, отнесенную к главному основанию изгибания.

49. Нормальная конгруэнция Эйзенхарта, конечно, непроизвольна. Пусть она образована нормалями к некоторой поверхности S. Отнесем эту поверхность к линиям кривизны u, v и построим в каждой точке ее M прямой трехграник T, образованный касательными к линиям кривизны и нормалью к поверхности. Поверхность S определена компонентами движения T: ξ, $\eta = \xi_1 = 0$, η_1, $p = 0$, q, p_1, $q_1 = 0$, r, r_1, связанными уравнениями Дарбу [Т. П. 196]:

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = -\eta_1 r, \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial u} = \xi r_1, \tag{62a}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial u} = -q r_1, \quad \frac{\partial q}{\partial v} = r p_1, \tag{62b}$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = -p_1 q. \tag{62c}$$

Бесконечно малое перемещение точки P с координатами x, y, z относительно трехгранника T определяется по формулам [Т. П. 195]

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{P} = \boldsymbol{e}_1 \{ dx + \xi\, du + qz\, du - (r\, du + r_1\, dv) y \} + \\ + \boldsymbol{e}_2 \{ dy + \eta_1\, dv + (r\, du + r_1\, dv) x - p_1 z dv \} + \\ + \boldsymbol{e}_3 \{ dz + p_1 y dv - qx\, du \}, \end{aligned} \tag{63a}$$

где $\boldsymbol{P}$ — радиус-вектор точки P и $\boldsymbol{e}_i$ — единичные векторы осей T. Если точка P при движении трехгранника T остается неподвижной, то местные координаты x, y, z должны удовлетворять соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial u} = -\xi - qz + ry, && \frac{\partial x}{\partial v} = r_1 y, \\ &\frac{\partial y}{\partial u} = -rx, && \frac{\partial y}{\partial v} = -\eta_1 - r_1 x + p_1 z, \\ &\frac{\partial z}{\partial u} = qx, && \frac{\partial z}{\partial v} = -p_1 y. \end{aligned}\right\} \tag{63b}$$

Допустим теперь, что плоскость

$$\Phi(x, y, z) \equiv y + kx = 0 \tag{64}$$

огибает поверхность Σ, гармоничную конгруэнции нормалей к поверхности S, т. е. отнесенную к сопряженной системе (u, v).

Точка касания плоскости Φ с ее огибающей, т. е. точка P поверхности Σ определяется тремя уравнениями

$$\Phi=0, \quad \Phi_u=0, \quad \Phi_v=0. \tag{65}$$

При этом при диференцировании Φ по u или по v мы должны иметь в виду, что точка, определяемая текущими координатами x, y, z, остается на месте, а, следовательно, местные координаты ее x, y, z меняются по формулам (63b). Пользуясь этим методом, мы получим

$$\left.\begin{aligned}\Phi_u&=x(k_u-r)+ykr-zkq-k\xi,\\ \Phi_v&=x(k_v-r_1)+ykr_1+zp_1-\eta_1.\end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Если мы возьмем касательные плоскости к Σ вдоль линии u, то характеристика определяется уравнениями $\Phi=0$, $\Phi_u=0$. Если система (u, v) на поверхности Σ сопряжена, то эта характеристика должна совпадать с касательной к линии v на поверхности Σ.

Направляющие коэфициенты этой касательной пропорциональны компонентам перемещения точки P при изменении одного v. Эти компоненты $\Delta_v x=\alpha$, $\Delta_v y=\beta$, $\Delta_v z=\gamma$ определяются из (63a) в виде

$$\alpha=\frac{\partial x}{\partial v}-r_1 y, \quad \beta=\frac{\partial y}{\partial v}+\eta_1+r_1 x-p_1 z, \quad \gamma=\frac{\partial z}{\partial v}+p_1 y. \tag{63c}$$

Диференцируя уравнеиие (65) по v и исключая производные от x, y, z с помощью (63c), мы получим в силу (65)

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\alpha, \beta, \gamma)=0, \quad &\Phi_{uv}(x, y, z)+\Phi'_u(\alpha, \beta, \gamma)=0,\\ &\Phi_{vv}(x, y, z)+\Phi'_v(\alpha, \beta, \gamma)=0,\end{aligned}\right\} \tag{67}$$

где Φ'_u и Φ'_v означают только однородную часть многочленов Φ_u и Φ_v.

Поскольку прямая $\Phi=0$, $\Phi_u=0$ имеет направляющие коэфициенты α, β, γ, то, очевидно, $\Phi(\alpha, \beta, \gamma)=0$, $\Phi'_u(\alpha, \beta, \gamma)=0$, и система (67) приводит к уравнению

$$\Phi_{uv}(x, y, z)=0. \tag{68}$$

Это уравнение должно быть совместно с уравнениями (65). Это заключение можно было получить быстрее, если заметить, что в координатах относительно неподвижной системы координат коэфициенты уравнения $\Phi=0$ суть тангенциальные координаты Σ. Совместность уравнений (65), (68) будет следствием того, что тангенциальные координаты сопряженной сети удовлетворяют уравнению Лапласа.

Развертывая (68) с помощью (63b), получим

$$\Phi_{uv}=(k_{uv}-krr_1-r_v)x+(k_v r+kr_{1u}-rr_1+r_1k_u)y-k_v qz-k_v\xi,$$

и условие совместности системы (65) и (68) по сокращении на $k^2(q\eta_1+p_1\xi)$ примет вид

$$\frac{\partial^2 \ln k}{\partial u\,\partial v}=(kr_1)_u+\left(\frac{r}{k}\right)_v. \tag{69}$$

Всякое решение k этого уравнения определяет поверхность Σ, гармоничную конгруэнции нормалей.

Допустим теперь, что существуют две плоскости, удовлетворяющие поставленному требованию и симметрично расположенные относительно фокальных плоскостей конгруэнции. Тогда уравнение (69) должно удовлетворяться значениями $\pm k$, отличающимися знаком. Уравнение (69) распадется тогда на два уравнения

$$\frac{\partial^2 \ln k}{\partial u\,\partial v}=0, \tag{70a}$$

$$(kr_1)_u+\left(\frac{r}{k}\right)_v=0. \tag{70b}$$

Первое дает

$$k=\frac{U}{V}.$$

Внося это во второе, получим условие, характеризующее нормальные конгруэнции Эйзенхарта,

$$\left(\frac{Ur_1}{V}\right)_u+\left(\frac{Vr}{U}\right)_v=0. \tag{71}$$

Это, очевидно, — условие на сферическое изображение развертывающихся поверхностей конгруэнции. Мы вернемся к этой конгруэнции в следующей главе.

50. Преобразование Эйзенхарта — не единственное, применимое к главным основаниям поверхности. Прежде всего можно отметить преобразование Петерсона, которое позволяет найти все главные основания с тем же сферическим изображением. Это преобразование, очевидно, не меняет группу квадратичных решений и подставляет вместо четвертого решения θ_4 любое частное решение того же уравнения Мутара.

Другое очевидное преобразование вытекает из самого определения сети и связано с изгибанием поверхности, несущей сеть. Это преобразование для сферического изображения главного основания и для присоединенной поверхности Бианки не тривиально, ибо оно заменяет тройку квадратичных решений $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ другой тройкой решений $\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3$.

Интересно отметить (Маслов [120], [146], Вассёр [130]), что обе тройки решений удовлетворяют одному и тому же уравнению Мутара.

Действительно, коэфициент M уравнения Мутара определяется по формуле (20) главы II в виде

$$M=-f-\frac{U'V'}{4(U+V)^2},$$

но коэфициент линейного элемента сферического изображения поверхности f, поскольку координатные линии сопряжены, равен [Т. П. 107 (13)]

$$f=-FK,$$

где F — средний коэфициент линейного элемента поверхности и K — полная кривизна поверхности. Что касается функций U, V, то они определяются уравнениями (28) главы I, и с помощью (25) той же главы могут быть представлены в виде

$$\frac{U'}{2(U+V)}=\left\{\begin{matrix}2&2\\&1\end{matrix}\right\}\frac{D}{D''},\quad \frac{V'}{2(U+V)}=\left\{\begin{matrix}1&1\\&2\end{matrix}\right\}\frac{D''}{D},\tag{72}$$

где скобки Кристоффеля вычислены для линейного элемента поверхности. Внося это в формулу, определяющую значение M, мы получим

$$M=FK-\left\{\begin{matrix}1&1\\&2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2&2\\&1\end{matrix}\right\},$$

т. е. коэфициент M определяется величинами, не меняющимися при изгибании поверхности с сохранением сопряженной системы (u, v).

Коэфициенты второй квадратичной формы D, D'' при изгибании, конечно, меняются. Если мы снабдим значком h все величины, относящиеся к изогнутой поверхности S_h, и составим разность уравнений (11) главы I, написанных для новой поверхности S_h и для первоначальной S, то получим, имея в виду формулы (10), (12) главы I и (72),

$$\frac{\partial}{\partial u}\ln\frac{t_h}{t}=\frac{U'}{2(U+V)}\left(\frac{t_h^2}{t^2}-1\right);\quad \frac{\partial}{\partial v}\ln\frac{t_h}{t}=\frac{V'}{2(U+V)}\left(1-\frac{t^2}{t_h^2}\right).$$

Здесь U и V относятся, очевидно, к поверхности S. Интегрируя, получим

$$\frac{t_h}{t}=\sqrt{\frac{h+V}{h-U}},$$

и следовательно, в силу (10) главы I

$$D_h=D\sqrt{\frac{h+V}{h-U}},\quad D'=0,\ D_h''=D''\sqrt{\frac{h-U}{h+V}}.\tag{73}$$

Отсюда по основным формулам теории поверхностей [Т. П. 107 (13)] нетрудно получить формулы для изменения линейного элемента сферического изображения поверхности

$$e_h=e\frac{h+V}{h-U},\quad f_h=f,\quad g_h=g\frac{h-U}{h+V}\tag{74}$$

(Цицейка [53], [54]).

Так как при этом $eg-f^2$ не меняется, то, следовательно, при изгибании поверхности S на главном основании, сферическое изображение ее преобразуется с сохранением площадей (Вассёр [130]).

Наконец, сравнивая уравнения (72) для обеих поверхностей S и S_h и опираясь на формулы (73), мы получим после интегрирования

$$U_h=\frac{hU}{h-U},\quad V_h=\frac{hV}{h+V}.\tag{75}$$

Здесь произвольные постоянные интеграции сведены к простейшему виду путем сокращения U и V на общий множитель и переноса постоянных от U к V.

Можно, наконец, отметить, что и преобразующее решение уравнения Мутара $w\sqrt{\rho}$, которым пользуется Эйзенхарт, чтобы строить свое

преобразование главных оснований, не меняется при изгибании поверхности.

Так как для каждого значения постоянного k в формуле (59) можно переносом постоянного от U к V привести это k к нулю, то, пользуясь (75), получим

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma_h}{2}=\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{h+V}{h-U}},\quad \rho_h=h^2\frac{\rho}{(h-U)(h+V)}.\tag{76a}$$

Мы видим теперь, что уравнения (61a) при изгибании не меняются. Значит, мы можем принять $\alpha_h=\alpha$ и тогда уравнения (61b) после интегрирования дают

$$w_h=cw\sqrt{(h-U)(h+V)},\quad c=\text{const}.\tag{76b}$$

В силу (76a) отсюда следует

$$w_h\sqrt{\rho_h}=w\sqrt{\rho},$$

при этом постоянный множитель ch отброшен, ибо он не имеет значения для преобразующего решения.

§ 3. Бесконечно малое изгибание и присоединенная поверхность.

51. Если каждая точка (x, y, z) поверхности S получает бесконечно малое смещение с компонентами по осям координат

$$\varepsilon\bar{x},\quad \varepsilon\bar{y},\quad \varepsilon\bar{z},$$

где $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ — конечные функции переменных u, v, а ε — бесконечно малая величина, квадратом которой можно пренебречь, то говорят, что S бесконечно мало изгибается, если равенство

$$dx^2+dy^2+dz^2=d(x+\varepsilon\bar{x})^2+d(y+\varepsilon\bar{y})^2+d(z+\varepsilon\bar{z})^2$$

справедливо в принятом приближении.

Развертывая это выражение и отбрасывая члены, содержащие ε^2, получим

$$dx\,d\bar{x}+dy\,d\bar{y}+dz\,d\bar{z}=0.\tag{77}$$

Это уравнение допускает простое геометрическое истолкование. Если будем рассматривать $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ как декартовы координаты точки $\bar{M}$, то эта точка опишет поверхность $\bar{S}$, которая соответствует S ортогональностью линейного элемента, именно: между точками S и $\bar{S}$ установлено взаимнооднозначное соответствие так, что всякому перемещению точки M на поверхности S соответствует перпендикулярное к нему перемещение точки $\bar{M}$ на поверхности $\bar{S}$.

Если диференциалы $dx, dy, dz, d\bar{x}, d\bar{y}, d\bar{z}$ в уравнении (77) заменить их выражениями через частные производные $dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv$ и т. д.

и приравнять нулю коэфициенты при du^2, $du\,dv$, dv^2, то получим три уравнения

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}=0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}=0, \quad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\right)=0. \tag{78}$$

Отнесем поверхность S к асимптотическим линиям и воспользуемся формулами Лельёвра [Т. П., 82 (25′)]

$$M_u=[NN_u], \quad M_v=-[NN_v].$$

Внося это в уравнение (78), мы получим тройные скалярные произведения вида

$$(NN_u\bar{M}_u)=0, \quad (NN_v\bar{M}_v)=0, \tag{79a}$$

$$(NN_u\bar{M}_v)-(NN_v\bar{M}_u)=0. \tag{79b}$$

Уравнения (79a) показывают, что векторы $\bar{M}_u$ и $\bar{M}_v$ лежат соответственно в плоскостях N, N_u и N, N_v, следовательно, линейно выражаются через эти векторы:

$$\bar{M}_u=AN+BN_u, \quad \bar{M}_v=A'N+B'N_v. \tag{79c}$$

Внося это в (79b), получим $B+B'=0$. Значит, мы можем положить

$$B=-\bar{\theta}, \quad B'=\bar{\theta}.$$

Условие интегрируемости уравнений (79c) напишется теперь в виде

$$(AN-\bar{\theta}N_u)_v=(A'N+\bar{\theta}N_v)_u$$

или, развертывая и пользуясь уравнением (1) для функции N,

$$(A_v-A'_u-2M\bar{\theta})N-N_u\left(A'+\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial v}\right)+N_v\left(A-\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial u}\right)=0,$$

откуда

$$A=\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial u}, \quad A'=-\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial v}, \quad A_v-A'_u=2M\bar{\theta}. \tag{80}$$

Следовательно, уравнения (79c) принимают вид, если вернуться к декартовым координатам

$$\frac{\partial\bar{x}}{\partial u}=\theta_1\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial u}-\bar{\theta}\frac{\partial\theta_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial\bar{x}}{\partial v}=\bar{\theta}\frac{\partial\theta_1}{\partial v}-\theta_1\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial v}, \tag{79d}$$

причем последнее уравнение (80) дает для $\bar{\theta}$ то же самое уравнение Мутара

$$\frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial u\,\partial v}=M\bar{\theta}. \tag{81}$$

Каждому решению уравнения Мутара (81) соответствует по формулам (79d) бесконечно малое изгибание поверхности S.

Функция $w=\frac{\bar{\theta}}{\sqrt{\rho}}$, где $\rho=\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2$ называется характеристической функцией Вейнгартена. Из уравнений (79d) следует

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial\ln\bar{\theta}}{\partial v}\frac{\partial\bar{x}}{\partial u}+\frac{\partial\ln\bar{\theta}}{\partial u}\frac{\partial\bar{x}}{\partial v}. \tag{81′}$$

Точечные координаты поверхности $\bar{S}$ удовлетворяют уравнению Лапласа с равными инвариантами. Ввиду полной симметрии условия (77) можно сказать, что если две поверхности соответствуют ортогональностью их линейных элементов, то асимптотические линии каждой из двух поверхностей преобразуются в сопряженную систему с равными точечными инвариантами.

Обратно, если на поверхности $\bar{S}$ дана сопряженная система с равными точечными инвариантами, т. е. дано уравнение Лапласа (81), то мы знаем $\bar{\theta}$; вполне интегрируемая система (79d) дает θ_1, θ_2, θ_3 в квадратурах, и поверхность S получается по формулам Лельёвра, а отсюда и бесконечно малое изгибание поверхности $\bar{S}$.

52. В § 1 п° 36 мы видели, что знание частного решения $\bar{\theta}$ уравнения Мутара (81) позволяет построить преобразование Мутара. Три решения θ_1, θ_2, θ_3 переходят в решения θ'_1, θ'_2, θ'_3 преобразованного уравнения. Новые решения θ'_i определяют по формулам Лельёвра вторую поверхность S', отнесенную к асимптотическим линиям. Если ее расположить подходящим образом в пространстве, то вместе с первоначальной поверхностью S она образует две фокальные полости конгруэнции W. Формула (7) определяет это расположение

$$M'-M=[N'N], \tag{82}$$

где M и M' — соответствующие точки поверхностей S и S', а N и N' — векторы нормали поверхностей S и S' соответственно с компонентами θ_i и θ'_i.

Отсюда следует, что луч конгруэнции MM' перпендикулярен к векторам N и N'. Но уравнения (5) в силу (79d) принимают вид, если вспомнить, что теперь $R=\bar{\theta}$,

$$\frac{\partial(\theta'_1\bar{\theta})}{\partial u}=\frac{\partial\bar{x}}{\partial u}, \quad \frac{\partial(\theta'_1\bar{\theta})}{\partial v}=\frac{\partial\bar{x}}{\partial v}, \dots,$$

откуда

$$\theta'_1=\frac{\bar{x}}{\bar{\theta}}, \quad \theta'_2=\frac{\bar{y}}{\bar{\theta}}, \quad \theta'_3=\frac{\bar{z}}{\bar{\theta}}. \tag{83}$$

Постоянные слагаемые при $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ можно отбросить, ибо они соответствуют простому перемещению поверхности $\bar{S}$. Так как $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ пропорциональны компонентам бесконечно малого смещения точки M поверхности S при бесконечно малом изгибании ее, то вектор N' тоже определяет направление этого смещения. Следовательно, луч MM' конгруэнции W расположен в касательной плоскости поверхности S перпендикулярно к смещению соответствующей точки M при бесконечно малом изгибании S. Обратно, каждая фокальная полость конгруэнции W допускает бесконечно малое изгибание, при котором ее точки перемещаются параллельно нормалям в соответствующих точках другой полости.

53. С бесконечно малым изгибанием поверхности можно связать еще одну замечательную конгруэнцию. Будем проводить через точки одной из двух соответствующих ортогональностью линейных элементов поверхностей, например S_1, лучи, параллельные нормалям к другой — S. Мы получаем таким образом конгруэнцию, которая называется конгруэнцией Рибокура [1]).

Уравнения (79d) можно написать, очевидно, в виде

$$\frac{\partial}{\partial u}(\bar{x}+\bar{\theta}\theta_1)=2\theta_1\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial u},\quad \frac{\partial}{\partial v}(\bar{x}-\bar{\theta}\theta_1)=-2\theta_1\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial v}. \qquad (79'd)$$

Точки $F_1(x_1, y_1, z_1)$ и $F_2(x_2, y_2, z_2)$,
где

$$x_1=\bar{x}+\bar{\theta}\theta_1,\quad x_2=\bar{x}-\bar{\theta}\theta_1, \qquad (84)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

лежат на прямой, проходящей через точку $\bar{M}$ параллельно нормали $N(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ к поверхности S. Уравнения (79′d) показывают, что касательная к линии u на поверхности F_1 параллельна N, т. е. совпадает с лучом конгруэнции, и точно так же касательная к линии v на F_2. Следовательно, F_1 и F_2 — фокусы конгруэнции Рибокура, а $v=\text{const}$ и $u=\text{const}$ — соответствующие им развертывающиеся поверхности. Так как F_1 и F_2 лежат на одном и том же расстоянии $\bar{\theta}\sqrt{\rho'}$ от точки $\bar{M}$ поверхности $\bar{S}$, то, следовательно, $\bar{S}$ есть средняя поверхность конгруэнции. Развертывающиеся поверхности $u=\text{const}$ и $v=\text{const}$ соответствуют асимптотическим линиям образующей поверхности S и секут среднюю поверхность $\bar{S}$ по сопряженной системе с равными точечными инвариантами.

Обратно, если конгруэнция отнесена к развертывающимся поверхностям $u=\text{const}$, $v=\text{const}$ и F_1, F_2 — фокусы, то, вводя среднюю поверхность $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, получим формулы (84) и (79′d). Отсюда следует (79d). Допустим теперь, что средняя поверхность пересекается развертывающимися поверхностями $u=\text{const}$ и $v=\text{const}$ по сопряженной системе. Тогда $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ должны удовлетворять уравнению Лапласа. Диференцируя (79d), придем к уравнению Лапласа (81′) и к уравнению Мутара (81) для θ_i и $\bar{\theta}$, т. е. к конгруэнции Рибокура [30].

54. Мы видели, что преобразующее решение $\bar{\theta}$ удовлетворяет тому же самому уравнению Мутара (81), как и три других θ_1, θ_2, θ_3. Четыре решения уравнения Мутара θ_1, θ_2, θ_3, $\bar{\theta}$, если их принять за танген-

1) Ribaucour, Étude des Élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle, n° 188. Mémoires couronnées et Mémoires des savants étrangers publ. par l'Acad. Belgique, 44, 1881.

циальные координаты, определяют поверхность Σ, отнесенную к сопряженной системе с равными тангенциальными инвариантами. Бианки называет такую поверхность присоединенной (associate) в бесконечно малом изгибании. Она обладает, очевидно, следующими свойствами:

I. Если установить соответствие между точками поверхностей S и Σ так, чтобы в соответствующих точках нормали были параллельны, то асимптотическим линиям поверхности S будет соответствовать на поверхности Σ сопряженная система с равными тангенциальными инвариантами.

II. Расстояние касательной плоскости к поверхности Σ от начала координат

$$w=\frac{\bar{\theta}}{\sqrt{\rho}},\quad \rho=\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2$$

является характеристической функцией Вейнгартена в бесконечно малом изгибании поверхности S.

Мы получили сейчас поверхность Σ, исходя из второго свойства ее. Нетрудно видеть, что и первое свойство вполне определяет ее.

Действительно, допустим, что поверхности S и Σ соответствуют параллельностью нормалей так, что асимптотические линии поверхности S переходят в сопряженную систему поверхности Σ. Эта сопряженная система, конечно, обладает равными тангенциальными инвариантами, ибо сферические изображения поверхностей S и Σ одинаковы (сопряженной системы поверхности Σ и асимптотических линий поверхности S). По условию Дини [Т. П. 109] для сферического изображения асимптотических имеет место

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1 & 2\\ & 1\end{Bmatrix}'=\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}1 & 2\\ & 2\end{Bmatrix}'.$$

Подсчитывая для тангенциального уравнения Лапласа (10), (11) главы II инварианты по формулам (4) главы II, немедленно убедимся, что они совпадают.

Приведем это уравнение к виду Мутара и мы получим формулы (79d), (81), которые определяют поверхность $\bar{S}$, соответствующую поверхности S ортогональностью линейных элементов, т. е. бесконечно малое изгибание S, где характеристической функцией Вейнгартена будет $w=\frac{\bar{\theta}}{\sqrt{\rho}}$.

Нетрудно теперь заметить, что соотношение между поверхностями S и Σ — взаимное, т. е. поверхность S тоже присоединена к Σ в ее бесконечно малом изгибании и характеристической функцией Вейнгартена будет служить расстояние W касательной плоскости к поверхности S от начала координат.

Для этого достаточно показать, что асимптотическим линиям на поверхности Σ в установленном соответствии отвечает на поверхности S сопряженная система, но это — очевидно; поскольку поверхность Σ отнесена к сопряженной системе, асимптотические линии на ней определяются уравнением вида (без среднего члена)

$$D_0 du^2+D_0'' dv^2=0.$$

Два значения $\frac{du}{dv}$, определенные этим уравнением, отличаются только знаком, а такие направления на поверхности S, отнесенной к асимптотическим линиям, сопряжены [Т. П. 75].

55. Эта сопряженная система является общей сопряженной системой на поверхностях S и $\bar{S}$. Действительно, так как поверхность S отнесена к асимптотическим линиям, то, по формулам (2) главы I, общая сопряженная система на поверхностях S и $\bar{S}$ определяется уравнением

$$\bar{D}\,du^2 - \bar{D}''dv^2 = 0,$$

где $\bar{D}$ и $\bar{D}''$ — коэфициенты второй квадратичной формы поверхности $\bar{S}$. Записывая только первую строку определителя, мы можем переписать это уравнение в виде [Т. П. 60]

$$|\bar{x}_u \bar{x}_v \bar{x}_{uu}|\,du^2 - |\bar{x}_u \bar{x}_v \bar{x}_{vv}|\,dv^2 = 0,$$

но в силу (79d)

$$\bar{x}_u = -\bar{\theta}^2 \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right), \quad \bar{x}_v = \bar{\theta}^2 \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right),$$

$$\bar{x}_{uu} = -\bar{\theta}^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right) - \frac{\partial\bar{\theta}^2}{\partial u}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right),$$

$$\bar{x}_{vv} = \bar{\theta}^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right) + \frac{\partial\bar{\theta}^2}{\partial v}\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right).$$

Внося это в наше уравнение, отбрасывая в каждом столбце определителя члены, пропорциональные элементам другого столбца, и сокращая на $\bar{\theta}^6$, получим

$$\left|\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right),\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right),\ \frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right)\right| du^2 + \left|\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right),\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right),\ \frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right)\right| dv^2 = 0. \qquad (85)$$

Нетрудно теперь заметить, что полученное уравнение определяет асимптотические линии на поверхности Σ. Уравнение касательной плоскости к поверхности Σ можно написать в виде

$$\frac{\theta_1}{\theta}x + \frac{\theta_2}{\theta}y + \frac{\theta_3}{\theta}z + 1 = 0. \qquad (a)$$

Ребро возврата семейства касательных плоскостей (a) вдоль асимптотической линии должно совпадать с этой асимптотической линией. Значит, уравнения, определяющие ребро возврата (a), (b) и (c),

$$d\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right)\cdot x + d\left(\frac{\theta_2}{\theta}\right)\cdot y + d\left(\frac{\theta_3}{\theta}\right)\cdot z = 0, \qquad (b)$$

$$d^2\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right)\cdot x + d^2\left(\frac{\theta_2}{\theta}\right)\cdot y + d^2\left(\frac{\theta_3}{\theta}\right)\cdot z = 0 \qquad (c)$$

должны быть следствием уравнений (a) и

$$\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right)_u x + \left(\frac{\theta_2}{\theta}\right)_u y + \left(\frac{\theta_3}{\theta}\right)_u z = 0, \qquad (d)$$

$$\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right)_v x + \left(\frac{\theta_2}{\theta}\right)_v y + \left(\frac{\theta_3}{\theta}\right)_v z = 0, \qquad (e)$$

определяющих точку касания плоскости (a) и поверхности Σ. Уравнение (b) есть линейная комбинация уравнений (d) и (e); то же должно быть и для уравнения (c). Следовательно, уравнение асимптотических линий на поверхности Σ напишется в виде

$$\left|\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right)_u\ \left(\frac{\theta_1}{\theta}\right)_v\ d^2\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right)\right| = 0$$

или после развертывания последнего столбца

$$\left|\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right)_u,\ \left(\frac{\theta_1}{\theta}\right)_v,\ \left(\frac{\theta_1}{\theta}\right)_{uu} du^2 + 2\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right)_{uv} du\,dv + \left(\frac{\theta_1}{\theta}\right)_{vv} dv^2\right| = 0.$$

Здесь средний член по раскрытии определителя исчезнет, ибо поверхность Σ отнесена к сопряженной системе, и мы получим в точности уравнение (85).

Замечательно, что уравнение Лапласа, которому удовлетворяют координаты x, y, z произвольной точки поверхности S и $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ поверхности $\bar{S}$, если обе поверхности отнести к общей сопряженной системе (85), будет одно и то же для обеих поверхностей. Если вернуться к координатам u, v, то это уравнение примет вид линейного уравнения в частных производных второго порядка. Ввиду отсутствия среднего члена в уравнении (85) искомое уравнение не должно содержать второй смешанной производной. Этих условий достаточно, чтобы составить это уравнение.

Так как всякий вектор можно разложить по трем направлениям, например по направлениям векторов $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{N}_u$ и $\boldsymbol{N}_v$, то при подходящих коэфициентах $a, b\ c, a_1, b_1, c_1$ можно положить

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{N}_{uu} &= a\boldsymbol{N}_u + b\boldsymbol{N}_v + c\boldsymbol{N}, \\ \boldsymbol{N}_{vv} &= a_1\boldsymbol{N}_u + b_1\boldsymbol{N}_v + c_1\boldsymbol{N}. \end{aligned}\right\} \qquad (86)$$

Диференцируя уравнения (79d) и пользуясь формулами (86), мы получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2\bar{x}}{\partial u^2} &= \theta_1\,[\,\bar{\theta}_{uu} - c\bar{\theta}\,] - \frac{\partial\theta_1}{\partial u}a\bar{\theta} - \frac{\partial\theta_1}{\partial v}b\bar{\theta}, \\ -\frac{\partial^2\bar{x}}{\partial v^2} &= \theta_1\,[\,\bar{\theta}_{vv} - c_1\bar{\theta}\,] - \frac{\partial\theta_1}{\partial u}a_1\theta - \frac{\partial\theta_1}{\partial v}b_1\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (87)$$

Исключая из (79d) и (87) θ_1, $\frac{\partial\theta_1}{\partial u}$, $\frac{\partial\theta_1}{\partial v}$ и сокращая на $\bar{\theta}^2$, получим искомое уравнение второго порядка, которому удовлетворяют $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{z}$,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u^2} & \bar{\theta}_{uu}-c\bar{\theta} & a & b \\ -\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial v^2} & \bar{\theta}_{vv}-c_1\bar{\theta} & a_1 & b_1 \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} & \bar{\theta}_u & 1 & 0 \\ -\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} & \bar{\theta}_v & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{88}$$

Нетрудно теперь убедиться, что этому же уравнению удовлетворяют и координаты x, y, z.

Диференцируя формулы Лельёвра [Т. П. 82 (25′)], получим в силу (86)

$$M_u = [NN_u], \quad -M_v = [NN_v]$$
$$M_{uu} = a\,[NN_u] + b\,[NN_v]$$
$$-M_{vv} = a_1\,[NN_u] + b_1\,[NN_v]$$

откуда, исключая $[NN_u]$, $[NN_v]$ и записывая в координатах, получим

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = a\frac{\partial x}{\partial u} - b\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -a_1\frac{\partial x}{\partial u} + b_1\frac{\partial x}{\partial v}. \tag{89}$$

Если эти значения внести в определитель (88) вместо $\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial v^2}$ и одновременно заменить $\bar{x}$ на x, то получим тождество, именно элементы первого столбца составят линейную комбинацию из соответственных элементов третьего и четвертого.

Таким образом поверхности S и $\bar{S}$ не только имеют общую сопряженную систему (85), но и одно и то же точечное уравнение Лапласа относительно этой системы. Отсюда прямо следует, что тому же самому уравнению будут удовлетворять и координаты изогнутой поверхности $x+\varepsilon\bar{x}$, $y+\varepsilon\bar{y}$, $z+\varepsilon\bar{z}$.

Итак, сопряженная система на поверхности S, соответствующая асимптотическим линиям на присоединенной поверхности Σ, есть та самая единственная сопряженная система, которая сохраняется в этом бесконечно малом изгибании.

56. Применим теперь эти соображения к изгибанию на главном основании. Это изгибание, как всякое непрерывное изгибание, содержит в себе и бесконечно малое изгибание, стоит только дать параметру изгибания бесконечно малое приращение.

Присоединенная поверхность S соответствует поверхности Σ параллельностью нормалей так, что главное основание на поверхности Σ изображается асимптотическими линиями поверхности S. Этим вполне определяется поверхность Бианки. Конгруэнция W, соответствующая бесконечно малому изгибанию поверхности S Бианки и имеющая характеристической функцией расстояние касательной плоскости к поверхности Σ от начала координат, есть конгруэнция Бианки с равной кривизной фокальных полостей в соответствующих точках. Конгруэнция W, связанная с бесконечно малым изгибанием поверхности Σ и имеющая поверхность Σ одной из своих фокальных полостей, не исследована и, повидимому, не представляет интереса. Из четырех конгруэнций Рибокура, связанных с изгибанием на главном основании (две связаны с поверхностью Σ и две — с поверхностью S), имеет значение та, лучи которой исходят из точек поверхности Σ параллельно нормалям к поверхности S. Теорию этой конгруэнции Рибокура мы рассмотрим в следующей главе.

§ 4. Поверхности Бианки.

57. Сообразно трем видам главных оснований поверхности Бианки разделяются на три класса.

Если главное основание содержит два семейства геодезических линий, то обе функции U и V — постоянны; ρ — постоянно. Следовательно, присоединенная поверхность Бианки является поверхностью постоянной отрицательной кривизны. Будем обозначать поверхности этого класса через B_0.

Если только одно семейство линий главного основания состоит из геодезических, то одну из функций, например V, можно привести к нулю. Кривизна присоединенной поверхности Бианки B_1 в этом случае есть функция одного u; следовательно, асимптотические $u = \text{const}$ совпадают с линиями постоянной гауссовой кривизны $K = \text{const}$. В силу теоремы Эннепера [Т. П. 83] кручение этих асимптотических постоянно.

В произвольной системе криволинейных координат u, v поверхность B_1 характеризуется условием, что линии $K = \text{const}$ суть асимптотические. Диференцируя это уравнение, имеем

$$\frac{\partial K}{\partial u}du + \frac{\partial K}{\partial v}dv = 0;$$

внося это в уравнение асимптотических линий, получим

$$D\left(\frac{\partial K}{\partial v}\right)^2 - 2D'\frac{\partial K}{\partial u}\frac{\partial K}{\partial v} + D''\left(\frac{\partial K}{\partial u}\right)^2 = 0. \tag{90}$$

Это — инвариантная характеристика поверхности Бианки второго класса B_1.

Поверхность Бианки третьего класса B_2 соответствует функциям U, V, действительно содержащим свои аргументы.

Если отнести B_2 к асимптотическим параметрам, то в силу (16) получим уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\frac{1}{\sqrt{-K}} = 0, \tag{91}$$

которое в этих параметрах характеризует поверхность. Этому очевидному равенству Бюшгенс [83], [87], [144], [145] придает инвариантный вид. С этой целью он рассматривает вторую ковариантную производную

$$\varphi_{12}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}-\left\{\begin{matrix}1\ 2\\ 1\end{matrix}\right\}\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\left\{\begin{matrix}1\ 2\\ 2\end{matrix}\right\}\frac{\partial\varphi}{\partial v}, \tag{92}$$

вычисленную для линейного элемента поверхности. Допустим, что поверхность B_2 отнесена к асимптотическим линиям u, v. Скобки Кристоффеля легко подсчитываются, если в уравнение Кодацци (6) главы I внести по формулам (5) той же главы

$$\delta=0,\quad \delta'=\sqrt{-K},\quad \delta''=0.$$

Мы получаем

$$\left\{\begin{matrix}1\ 2\\ 1\end{matrix}\right\}=-\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\sqrt{-K}}{\partial v},\quad \left\{\begin{matrix}1\ 2\\ 2\end{matrix}\right\}=-\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\sqrt{-K}}{\partial u},$$

и формула (92) принимает вид

$$\varphi_{12}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}+\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\ln\sqrt{-K}}{\partial v}+\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\ln\sqrt{-K}}{\partial u}.$$

Если теперь вместо φ подставить $\frac{1}{K}$, то получим

$$\left(\frac{1}{K}\right)_{12}=\frac{1}{K}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\ln K}{\partial u}\frac{\partial\ln K}{\partial v}-\frac{\partial^2\ln K}{\partial u\,\partial v}\right)=\frac{2}{\sqrt{-K}}\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{-K}}\right).$$

Следовательно, уравнение (91) можно написать в виде

$$\left(\frac{1}{K}\right)_{12}=0. \tag{93}$$

Уравнение (93) представляет частную форму для случая асимптотических параметров u, v общего уравнения

$$D\left(\frac{1}{K}\right)_{22}-2D'\left(\frac{1}{K}\right)_{12}+D''\left(\frac{1}{K}\right)_{11}=0, \tag{94}$$

а это уравнение имеет простой геометрический смысл. Оно показывает, что два семейства линий, определяемых уравнением

$$\left(\frac{1}{K}\right)_{11}du^2+2\left(\frac{1}{K}\right)_{12}du\,dv+\left(\frac{1}{K}\right)_{22}dv^2=0, \tag{95}$$

сопряжены. Действительно, определяя из (95) сумму и произведение корней

$$\frac{du}{dv}\frac{\delta u}{\delta v}=\frac{\left(\frac{1}{K}\right)_{22}}{\left(\frac{1}{K}\right)_{11}},$$

$$\frac{du}{dv}+\frac{\delta u}{\delta v}=-2\frac{\left(\frac{1}{K}\right)_{12}}{\left(\frac{1}{K}\right)_{11}}$$

и внося их в условия сопряженности

$$D\frac{du}{dv}\frac{\delta u}{\delta v}+D'\left(\frac{du}{dv}+\frac{\delta u}{\delta v}\right)+D''=0,$$

мы прямо получим (94).

Уравнение (95) имеет инвариантный характер. Следовательно, условие (94) характеризует поверхность B_2 в любой системе криволинейных координат u, v.

Если ковариантную производную писать для линейного элемента сферического изображения поверхности B_2, то в силу (26)

$$\left\{\begin{matrix}1\ 2\\ 1\end{matrix}\right\}'=\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\sqrt{-K}}{\partial v},\quad \left\{\begin{matrix}1\ 2\\ 2\end{matrix}\right\}'=\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\sqrt{-K}}{\partial u}$$

мы получим

$$(\ln K)'_{12}=\frac{\partial^2\ln K}{\partial u\,\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\sqrt{-K}}{\partial v}\frac{\partial\ln K}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\sqrt{-K}}{\partial u}\frac{\partial\ln K}{\partial v}=$$

$$=2\sqrt{-K}\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\frac{1}{\sqrt{-K}},$$

где штрихом отмечено, что ковариантная производная написана для сферического изображения.

В силу (91) имеем для B_2:

$$(\ln K)'_{12}=0$$

или

$$D(\ln K)'_{22}-2D'(\ln K)'_{12}+D''(\ln K)'_{11}=0, \tag{96}$$

и, следовательно, система линий

$$(\ln K)'_{11}du^2+2(\ln K)'_{12}du\,dv+(\ln K)'_{22}dv^2=0, \tag{97}$$

на поверхности B_2 сопряжена. Это — инвариантная характеристика сферического изображения поверхности класса B_2.

58. Чтобы дать несколько примеров поверхности Бианки, поставим задачу определения поверхностей B_2, налагающихся на поверхности вращения (Вассёр [130]).

Примем функции U и V за криволинейные координаты точки на поверхности B_2. Вдоль параллели поверхности вращения кривизна поверхности K постоянна. Следовательно, на параллели могут накладываться только линии $u+v=\text{const}$. Линейный элемент поверхности вращения (и поверхностей, налагающихся на нее) характеризуется тем, что все коэфициенты являются функциями одного аргумента. Мы видим, что за этот аргумент можно принять $x=u+v$.

Линейный элемент поверхности B_2 в асимптотических параметрах u, v получится из линейного элемента сферического изображения ее (23) главы II, если принять во внимание, что кривизна поверхности

$$K=-\frac{1}{(u+v)^2}.$$

Он имеет вид [Т. П. 110]

$$ds^2=(u+v)\left[\frac{\partial\psi}{\partial u}\,du^2+2\,(u+v)\,\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}\,du\,dv+\frac{\partial\psi}{\partial v}\,dv^2\right]. \qquad (98)$$

Так как все коэфициенты линейного элемента зависят только от

$$x=u+v,$$

то и ψ есть функция одного x. Таким образом дело сводится к отысканию $\psi=\psi(x)$ так, чтобы линейный элемент (98) имел кривизну $-\frac{1}{x^2}$.

Вассёр вводит вспомогательную функцию

$$H=-x\frac{d\psi}{dx}.$$

Тогда линейный элемент (98) примет вид

$$ds^2=H\,(du^2+dv^2)+2\,(xH'-H)\,du\,dv, \qquad (99)$$

где штрихом обозначена производная от H по x. Если принять H за независимое переменное, то уравнение для x напишется в виде

$$H\,(2\zeta\zeta''-\zeta'^2)+\zeta^2\,(\zeta''-1)=0, \qquad (100)$$

где

$$\zeta=x\frac{dx}{dH}-2H.$$

Можно указать частное решение

$$H=\frac{x^p\,(1+p)^2-x^{-p}\,(1-p)^2}{x^{-p}-x^p}, \quad p=\text{const}.$$

Так как в общем случае (100) [Т. П. 110] коэфициенты второй квадратичной формы тоже зависят только от x, то поверхность допускает движение самой в себе, при котором точки (u, v) переходят в точки $(u+t,\ v-t)$ так, что $u+v$ остается постоянным; следовательно, поверхность — винтовая. Более того, линии $u+v=\text{const}$, $u-v=\text{const}$, очевидно, ортогональны (ибо после преобразования форма (99) не будет содержать среднего члена с произведением дифференциалов) и сопряжены (то же справедливо для второй квадратичной формы $2D'du\,dv$). Следовательно, все поверхности B_2, определяемые системой (100), суть поверхности вращения.

Все поверхности B_0 — постоянной отрицательной кривизны, следовательно, тем самым наложимы на псевдосферу. Что касается поверхностей B_1, то здесь асимптотические $v=\text{const}$ (если $U=0$) — линии постоянной гауссовой кривизны и, следовательно, при наложении B_1 на поверхность вращения переходят в параллели. Геодезическая кривизна [Т. П. 122] параллели постоянна; следовательно, она постоянна и у асимптотических $v=\text{const}$ поверхности B_1, а так как соприкасающаяся плоскость асимптотической линии совпадает с касательной плоскостью к поверхности, то ее кривизна совпадает с геодезической кривизной и, значит, тоже постоянна. Наконец, как мы видели, асимптотические $v=\text{const}$ на поверхности B_1

обладают постоянным кручением. Кривые постоянной кривизны и постоянного кручения суть винтовые линии.

С другой стороны, подсчитывая линейный элемент поверхности по линейному элементу сферического изображения (24) и ее кривизне

$$K=-e^{2v}$$

[Т. П. 110], получим

$$ds^2=e^{-v}\left[du^2-2\frac{\partial\psi}{\partial u}\,du\,dv+\psi\,dv^2\right]. \qquad (101)$$

Так как теперь все коэфициенты суть функции одного v, то и ψ есть функция только одного v, а значит, $\frac{\partial\psi}{\partial u}=0$ и асимптотические $u=\text{const}$, $v=\text{const}$ ортогональны. Следовательно, поверхность B_1 — минимальная [Т. П. 110]. Так же как и раньше, убедимся, что коэфициенты второй квадратичной формы зависят тоже только от v; следовательно, B_1 является винтовой поверхностью, точнее — минимальным геликоидом, действительным или мнимым (ср. главу I, § 4).

Так как линии u, v в сферическом изображении тоже ортогональны, то на присоединенной поверхности главное основание прямоугольно, т. е. это — поверхности каналов (глава I, § 1).

59. В качестве второго примера рассмотрим определение линейчатых поверхностей Бианки (Бюшгенс [**144**], [**145**]).

Отнесем линейчатую поверхность к прямолинейным образующим и их ортогональным траекториям [Т. П. 47]. Основные формы поверхности можно написать в виде

$$ds^2=du^2+[(u-\alpha)^2+\beta^2]\,dv^2,$$

$$\delta=0,\quad \delta'=\frac{\beta}{(u-\alpha)^2+\beta^2},\quad \delta''=-\frac{\beta'\,(u-\alpha)+\beta\alpha'}{(u-\alpha)^2+\beta^2}+\gamma, \qquad (102)$$

$$K=-\frac{\beta^2}{[(u-\alpha)^2+\beta^2]^2},$$

где линии u — прямолинейные образующие, параметр u — отрезок образующей, α, β, γ — функции одного v, α', β' — их производные по v.

Допустим, что линейчатая поверхность (102) принадлежит к классу B_1. Если внести величины (102) в характеристическое уравнение (90), то получим

$$\gamma\,(u-\alpha)^3+(\beta\alpha'+\gamma\beta^2)\,(u-\alpha)-\beta^2\beta'=0.$$

Так как u — независимое переменное, то коэфициенты при степенях u должны быть равны нулю, и мы получаем

$$\gamma=0,\quad \beta\alpha'+\gamma\beta^2=0,\quad \beta^2\beta'=0,$$

или $\gamma=\beta'=\alpha'=0$, и мы получаем снова минимальный геликоид [Т. П. 48].

Если поверхность (102) принадлежит классу B_2, то надо обратиться к уравнению (94). Внося сюда величины (102), мы получим после некоторых вычислений

$$3\gamma\,(u-\alpha)^4+(4\gamma\beta^2+\alpha'\beta)\,(u-\alpha)^2+\gamma\beta^4+\alpha\beta^3=0,$$

откуда, приравнивая нулю коэфициенты при отдельных степенях u, имеем

$$\gamma = 0, \quad \alpha\beta = 0.$$

Так как $\beta = 0$ приведет к развертывающимся поверхностям $K = 0$, то надо положить $\alpha = 0$.

Подсчитывая координаты произвольной точки поверхности [Т. П. 47], получим при подходящем выборе системы координат

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = \int \beta\, dv. \tag{103}$$

Это — прямой коноид, поверхность, обрабованная движением прямой, все время пересекающей под прямым углом ось z ($u = 0$). Она присоединена к поверхностям Петерсона (Млодзеевский [43]).

60. Отметим, наконец, некоторые соображения Бюшгенса [144], [148] об изгибании поверхностей Бианки, при котором поверхность все время считается поверхностью Бианки.

Задача тривиальна для поверхности B_0. Всякое изгибание поверхности постоянной отрицательной кривизны не выводит ее из этого класса. Для поверхности B_1 задача невозможна: на такой поверхности линии $K = \text{const}$ — асимптотические; они должны, следовательно, оставаться асимптотическими во все время изгибания; по теореме Бонне [Т. П. 102] это возможно только для изгибания линейчатой поверхности с сохранением прямолинейных образующих. Между тем мы нашли только одну поверхность B_1 линейчатую — минимальный геликоид.

Допустим теперь, что такое изгибание возможно для поверхностей B_2. Так как на поверхности B_2 система линий (95) сопряжена, то она остается сопряженной во все время изгибания, т. е. если B_2 изгибается, оставаясь поверхностью Бианки, то это есть изгибание на главном основании.

Глава IV.

ЦИКЛИЧЕСКИЕ КОНГРУЭНЦИИ.

§ 1. Изгибание конгруэнции с сохранением развертывающихся поверхностей.

61. Изгибание с сохранением сопряженной системы нельзя правильно понимать, если ограничиваться только рассмотрением поверхности S как геометрического места точек; мы уже упоминали, что развертывающиеся поверхности, описанные около поверхности вдоль линий системы, играют особую роль; при изгибании поверхности они тоже изгибаются. Этому определению изгибания на главном основании можно придать другую форму, если ввести в рассмотрение две конгруэнции касательных к линиям системы. При изгибании поверхности S эти конгруэнции подвергаются преобразованию, которое Рибокур назвал изгибанием. При этом изгибании развертывающиеся поверхности конгруэнции остаются развертывающимися. Мы теперь поставим задачей обобщение этого изгибания конгруэнции.

Пусть с каждой точкой M некоторой поверхности S связан прямой трехгранник T, две оси которого касаются каких-то линий на S, а третья нормальна к S. При изгибании поверхности S такой трехгранник перемещается вместе с точкой M, поворачиваясь так, что его оси касаются все тех же линий на поверхности.

Свяжем с каждым трехгранником T некоторую прямую. Мы можем задать, например, координаты a, b, c некоторой точки A прямой r и косинусы α, β, γ углов, которые эта прямая образует с осями трехгранника. Допустим, что при изгибании S эти шесть величин α, β, γ, a, b, c не меняются. Тогда каждая прямая r увлекается вместе со своим трехгранником T. Мы будем говорить, что конгруэнция C, которая представлена совокупностью лучей r, изгибается. Как частный случай, когда r проходит через точку M или лежит в касательной плоскости к поверхности, мы получаем изгибание Бельтрами или Рибокура. Мы будем говорить, что конгруэнция C изгибается с сохранением развертывающихся поверхностей, если лучи, образующие какую-либо развертывающуюся поверхность конгруэнции, во все время изгибания конгруэнции, как бы они ни перемещались в пространстве, образуют развертывающуюся поверхность.

Мы будем искать непрерывное изгибание конгруэнции C с сохранением развертывающихся поверхностей (особое изгибание конгруэнции — déformation avec développables persistantes).

Пусть поверхность S определена компонентами переноса ξ, η, ξ_1, η_1 и вращения p, q, r, p_1, q_1, r_1 трехгранника T [Т. П. 89].

Если обозначим через t отрезок луча AF, то координаты точки F относительно трехгранника T будут

$$x = a + t\alpha, \quad y, \quad z.$$

Как всегда, мы записываем только одну из трех формул, две другие получаются круговой заменой. Перемещение точки F при изменении u, v определяются компонентами (по осям T) [Т. П. 195]

$$\left.\begin{array}{l} dx + \xi\,du + \xi_1\,dv + (q\,du + q_1\,dv)\,z - (r\,du + r_1\,dv)\,y, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Если F есть фокус, а отношение $du:dv$ определяет соответствующую развертывающуюся поверхность, то перемещение (1) должно быть направлено по лучу r и компоненты (1) должны быть пропорциональны косинусам α, β, γ. Обозначая через λ множитель пропорциональности, получим

$$\left.\begin{array}{l} (a_1 + t\alpha_1)\,du + (a_2 + t\alpha_2)\,dv + \lambda\alpha = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right\} \qquad (2)$$

где

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \xi + \dfrac{\partial a}{\partial u} + qc - rb, \quad a_2 = \xi_1 + \dfrac{\partial a}{\partial v} + q_1 c - r_1 b, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right\} \qquad (3a)$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = \dfrac{\partial\alpha}{\partial u} + q\gamma - r\beta, \quad \alpha_2 = \dfrac{\partial\alpha}{\partial v} + q_1\gamma - r_1\beta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (3b)$$

Исключая λ и t из трех уравнений (2), получим диференциальное уравнение развертывающихся поверхностей конгруэнции C.

Записывая только первую строчку определителя, мы можем придать этому уравнению форму

$$|\, a_1\,du + a_2\,dv, \quad \alpha_1\,du + \alpha_2\,dv, \ \alpha \,| = 0$$

или

$$|\, a_1\alpha_1\alpha \,|\, du^2 + \{|\, a_1\alpha_2\alpha \,| + |\, a_2\alpha_1\alpha \,|\}\, du\,dv + |\, a_2\alpha_2\alpha \,|\, dv^2 = 0. \qquad (4)$$

Отнесем конгруэнцию C к развертывающимся поверхностям; мы получим два условия, накладываемые на наши функции,

$$|\, a_1\alpha_1\alpha \,| = 0, \quad |\, a_2\alpha_2\alpha \,| = 0$$

или в развернутом виде

$$\left.\begin{array}{l} (p\alpha + q\beta)\,[p\,(b\gamma - c\beta) + q\,(c\alpha - a\gamma)] + Lp + Mq + N = 0, \\ (p_1\alpha + q_1\beta)\,[p_1\,(b\gamma - c\beta) + q_1\,(c\alpha - a\gamma)] + L_1 p_1 + M_1 q_1 + N_1 = 0. \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Здесь выражения L, M, N, L_1, M_1, N_1 не содержат p, q, p_1, q_1 и, следовательно, при изгибании не меняются [Т. П. 96].

Таким образом задача сводится к исследованию совместности уравнений (5) с основными уравнениями теории поверхностей (Гаусс-Кодацци); точнее, нам надо найти решение (p, q, p_1, q_1), содержащее произвольное постоянное, меняя которое, мы можем осуществить изгибания поверхности S.

Начнем со случая вырождения условий (5). Уравнения (5) становятся линейными относительно неизвестных функций в следующих трех случаях:

1) $\alpha = \beta = 0$; луч r перпендикулярен к плоскости p, касательной к поверхности S;

2) $\gamma = c = 0$; луч r лежит в плоскости p;

3) $\dfrac{a}{\alpha} = \dfrac{b}{\beta} = \dfrac{c}{\gamma}$; луч r проходит через точку M, где плоскость p касается поверхности S.

62. Если луч r перпендикулярен к плоскости p, то мы выберем за точку A точку пересечения луча r с плоскостью p и получим

$$\alpha = \beta = 0, \quad \gamma = 1, \quad c = 0.$$

Два первых уравнения (2) теперь не содержат λ. Исключая из них t, мы получим уравнения развертывающихся поверхностей в виде

$$(a_1\,du + a_2\,dv)(p\,du + p_1\,dv) + (b_1\,du + b_2\,dv)(q\,du + q_1\,dv) = 0. \quad (6)$$

При этом величины a_1, a_2, b_1, b_2 принимают вид

$$a_1 = \xi + \frac{\partial a}{\partial u} - rb, \quad a_2 = \xi_1 + \frac{\partial a}{\partial v} - r_1 b,$$

$$b_1 = \eta + \frac{\partial b}{\partial u} + ra, \quad b_2 = \eta_1 + \frac{\partial b}{\partial v} + r_1 a.$$

Они не содержат p, q, p_1, q_1 и поэтому не меняются при изгибании. Введем лемму:

Лемма I. Если компоненты вращения p, q, p_1, q_1, относящиеся к какой-либо не развертывающейся поверхности, удовлетворяют уравнению

$$Ap + Bq + A_1 p_1 + B_1 q_1 = 0, \qquad (7)$$

то система линий на поверхности

$$\begin{array}{l} (A_1\xi + B_1\eta)\,\delta u^2 + \\ + (A_1\xi_1 + B_1\eta_1 - A\xi - B\eta)\,\delta u\,\delta v - (A\xi_1 + B\eta_1)\,\delta v^2 = 0 \end{array} \qquad (8)$$

сопряжена.

Действительно, если в условие сопряженности двух направлений (du, dv), (δu, δv) [Т. П. 75]

$$\begin{array}{l} (p\eta - q\xi)\,du\,\delta u + (p_1\eta_1 - q_1\xi_1)\,dv\,\delta v + \\ + \dfrac{1}{2}(p\eta_1 - q\xi_1 + p_1\eta - q_1\xi)(du\,\delta v + dv\,\delta u) = 0 \end{array}$$

ввести вместо $\dfrac{du}{dv}\dfrac{\delta u}{\delta v}$ и $\dfrac{du}{dv} + \dfrac{\delta u}{\delta v}$ произведение и сумму корней уравнения (8), то получим непосредственно уравнение (7), умноженное на множитель $\xi\eta_1 - \xi_1\eta$ (не равный нулю).

Приложим эту лемму к уравнению (6). Уравнение (8) в этом случае распадается на два множителя

$$(\xi\,\delta u+\xi_1\,\delta v)(a_1\,du+a_2\,dv)+(\eta\,\delta u+\eta_1\,\delta v)(b_1\,du+b_2\,dv)=0, \quad (9a)$$

$$\delta u\,dv-du\,\delta v=0. \quad (9b)$$

Здесь отношение $\delta u:\delta v$ соответствует сопряженным направлениям, которые мы ищем, а $du:dv$ — одному или другому семейству развертывающихся поверхностей конгруэнции C. Так как вместо $du:dv$ можно подставлять значение, определяющее первое или второе семейство развертывающихся, то мы имеем всего четыре уравнения (9a), (9b). Каждая пара определяет два сопряженных направления $\delta u:\delta v$. Так как при изгибании может сохраняться только одна сопряженная система, то две системы, определяемые двумя парами уравнений (9a), (9b), должны совпадать.

Выберем эту единственную сопряженную систему за систему координатных линий. Очевидно, (9b) даст $\delta u=0$, если мы туда внесем $du=0$, и $\delta v=0$, если внесем $dv=0$. Следовательно, (9a) должно удовлетворяться, если положить $du=0$, $\delta v=0$ или $dv=0$, $\delta u=0$. Это приведет к условиям

$$\xi a_2+\eta b_2=0, \quad \xi_1 a_1+\eta_1 b_1=0. \quad (10)$$

Система (10) есть система уравнений первого порядка относительно a, b. Она определяет a, b, т. е. положение луча r относительно T.

Лучи конгруэнции параллельны нормалям к поверхности S и развертывающиеся поверхности соответствуют главному основанию. Это, очевидно, та самая конгруэнция Рибокура, которая связана с поверхностью Бианки, присоединенной к поверхности S. Мы вернемся к ее теории в следующем параграфе.

63. Уравнение (6) обращается в тождество и не определяет главное основание, если одно семейство $du:dv$ удовлетворяет диференциальным уравнениям

$$a_1\,du+a_2\,dv=0, \quad b_1\,du+b_2\,dv=0. \quad (11)$$

Второе семейство $du:dv$ в этом случае, наверное, определяет сопряженную систему и одно из семейств сопряженных линий соответствует $du:dv$; примем эту систему за координатную систему и пусть второе семейство развертывающихся поверхностей соответствует линиям $du=0$. В этом случае (9a) должно удовлетворяться значениями $du=0$, $\delta v=0$; следовательно,

$$\xi a_2+\eta b_2=0. \quad (12a)$$

Кроме того, так как из совместности уравнений (11) следует пропорциональность $a_1:b_1=a_2:b_2$, то из (12a) получим еще

$$\xi a_1+\eta b_1=0. \quad (12b)$$

Уравнения (12a), (12b) определяют координаты a, b луча r. Развертывающиеся поверхности второго семейства соответствуют линиям главного основания.

Первое из уравнений (2) дает в силу (11) $t=0$; значит, первый фокус луча расположен всегда в касательной плоскости p.

Это — конгруэнция C'.

64. Если луч r лежит в плоскости p, то мы имеем $\gamma=c=0$; выражения a_i, b_i, α_i, β_i в формулах (3a) (3b) не содержат компонент p, q, p_1, q_1. Два первых из уравнений (2) уже не зависят от них, их решения t, λ точно так же свободны от этих величин и, следовательно, не меняются при изгибании. Оба фокуса луча при изгибании поверхности на луче неподвижны (Рибокур [30]).

Третье уравнение (2) принимает вид

$$p(b+t\beta)du-q(a+t\alpha)du+p_1(b+t\beta)dv-q_1(a+t\alpha)dv=0. \quad (13)$$

Отсюда в силу леммы I следуют уравнения сопряженной системы

$$[(b+t\beta)(\xi\,\delta u+\xi_1\,\delta v)-(a+t\alpha)(\eta\,\delta u+\eta_1\,\delta v)]\,(du\,\delta v-dv\,\delta u)=0\ldots \quad (14)$$

Здесь направления $\delta u:\delta v$ соответствуют линиям сопряженной системы, $du:dv$ — развертывающимся поверхностям конгруэнции. Каждому семейству развертывающихся будет соответствовать своя сопряженная система.

Первый множитель в левой части первого из уравнений (14) исчезает тождественно, если

$$a+t\alpha=0, \quad b+t\beta=0;$$

но тогда луч r содержит точку M и становится касательным к линиям сопряженной системы. Такая конгруэнция, конечно, сохранит во время изгибания поверхности свои развертывающиеся поверхности.

Если исключить этот случай, то из двух уравнений (14) (для двух значений $du:dv$) мы получим две сопряженные системы, которые должны совпадать. Примем эту сопряженную систему за координатную.

Второй множитель (14) покажет, что развертывающиеся поверхности соответствуют линиям главного основания. Внося в первый множитель [1] $\delta u=0$; $dv=0$ или $\delta v=0$, $du=0$ получим

$$\left.\begin{aligned}(b+t_1\beta)\,\xi-(a+t_1\alpha)\,\eta&=0,\\ (b+t_2\beta)\,\xi_1-(a+t_2\alpha)\,\eta_1&=0.\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Эта система определяет положение луча r в касательной плоскости p.

Это — конгруэнция C''. Лучи C' и C'' сопряжены относительно шара, имеющего центр в точке M и расположенного так, что хорда, соединяющая точки касания шара с его огибающей, совпадает с лучом C'.

65. Если r проходит через M, то можно принять $a=b=c=0$.

Поворотом трехгранника T сведем один из косинусов, например β, к нулю, и уравнения (5) становятся линейными, но не однородными относительно p, q, p_1, q_1. Поверхность подчиняется более сложному условию на изгибание. Это — изгибание на кинематическом основании. Мы будем рассматривать это изгибание в последней главе. Здесь мы отметим только лемму:

[1] Два множителя (14) определяют два семейства линий главного основания, поэтому их надо обоих приравнивать нулю, внося в один $\delta u=0$, а в другой $\delta v=0$ или наоборот.

Лемма II. Если компоненты вращения p, q, p_1, q_1 двух налагающихся, не развертывающихся поверхностей, удовлетворяют одному и тому же уравнению

$$Ap+Bq+A_1p_1+B_1q_1=C, \tag{16}$$

где A, B, A_1, B_1, C зависят только от коэфициентов линейного элемента, то два семейства линий, определяемых уравнением (8), кинематически сопряжены.

Для доказательства заметим, что условие кинематической сопряженности (см. гл. VI) совпадает с условием сопряженности в смысле Дюпена, только вместо компонентов p, q, p_1, q_1 стоят разности $p-p'$, $q-q'$, p_1-p_1', q_1-q_1', соответствующих компонентов обеих налагающихся поверхностей. Достаточно теперь вычесть из уравнения (16), написанного для первой поверхности, такое же уравнение, написанное для второй поверхности, чтобы получить

$$A(p-p')+B(q-q')+A_1(p_1-p_1')+B_1(q_1-q_1')=0,$$

и те же рассуждения, что и выше, приведут к уравнению (8), которое теперь определяет кинематически сопряженную систему.

Применяя эту лемму, мы найдем две кинематически сопряженных системы, которые должны совпадать и действительно совпадают, если

$$\gamma^2\xi\xi_1+\eta\eta_1=0.$$

Геометрически это условие выражает требование, чтобы двугранный угол, который имеет ребром луч r, а гранями — плоскости, проходящие через касательные к линиям кинематического основания, был прямым. Поверхность S, если она существует, изгибается, следовательно, на кинематическом основании, которое соответствует развертывающимся поверхностям конгруэнции. В частности, линии основания будут сопряжены в смысле Дюпена, если поверхность S есть поверхность Петерсона. В этом случае существование изгибания доказано.

66. Перейдем теперь к общему случаю, когда уравнения (5) — второй степени относительно p, q, p_1, q_1 и допустим сначала, что каждое уравнение распадается на два множителя. Эти множители, очевидно, будут вида

$$p\alpha+q\beta+l,\quad p(b\gamma-c\beta)+q(c\alpha-a\gamma)+m,$$
$$p_1\alpha+q_1\beta+l_1,\quad p_1(b\gamma-c\beta)+q_1(c\alpha-a\gamma)+m_1,$$

где l, l_1, m, m_1 — некоторые функции, не содержащие p, q, p_1, q_1.

Рассматривая различные комбинации из множителей первого и второго уравнений, придем к двум случаям изгибания: 1) изгибание линейчатой поверхности с сохранением прямолинейных образующих; луч r перпендикулярен к образующей или пересекает ее; 2) изгибание на кинематическом основании; линии основания соответствуют развертывающимся поверхностям конгруэнции; луч r перпендикулярен к касательной одной из линий основания и пересекает касательную к другой.

Допустим теперь, что, по крайней мере, первое уравнение (5) не приводимо в области рациональных функций p, q, p_1, q_1. Вводим [Т. П. 196] коэфициенты второй формы D, D', D''. Наши уравнения принимают вид

$$PD^2+QDD'+RD'^2+SD+TD'+N=0, \tag{17a}$$
$$PD'^2+QD'D''+RD''^2+S_1D'+T_1D''+N_1=0. \tag{17b}$$

При этом, по крайней мере, уравнение (17a) не приводимо в области рациональных функций D, D'. Исключим D'' с помощью уравнения Гаусса.

Мы получим второе уравнение тоже между D и D'

$$D^2[PD'^2+S_1D'+N_1]+D(QD'+T_1)[D'^2+K(EG-F^2)]+$$
$$+R[D'^2+K(EG-F^2)]^2=0. \tag{18}$$

Если (17a) и (18) определяют D, D' и D отлично от нуля, то уравнение Гаусса дает D'' и поверхность неизгибаема. Если при этом $D=0$, то мы получаем изгибание линейчатой поверхности с сохранением образующих. Наконец, если уравнения (17a) и (18) не определяют D и D', а (17a) не приводимо, то левая часть уравнения (18) должна делиться на левую часть уравнения (17a). Нетрудно заметить, что в частном может получиться один из трех многочленов

$$(D'+\sqrt{EG-F^2}\sqrt{-K})^2,\quad (D'-\sqrt{EG-F^2}\sqrt{-K})^2,$$
$$D'^2+K(EG-F^2).$$

В первом из этих случаев по сокращении на $(D'+\sqrt{EG-F^2}\sqrt{-K})^2$ уравнение (18) принимает вид

$$PD^2+QD(D'-\sqrt{-K}\sqrt{EG-F^2})+R(D'-\sqrt{EG-F^2}\sqrt{-K})^2=0.$$

Это — квадратное уравнение относительно $\dfrac{D'-\sqrt{-K}\sqrt{EG-F^2}}{D}$, а потому разлагается на множители; между тем оно должно совпадать с (17a), которое по условию неприводимо. К противоречию придем и во втором случае. В третьем случае по сокращении получим

$$PD^2+D(QD'+T_1)+R[D'^2+K(EG-F^2)]=0$$

и это уравнение совпадает с (17a), но внося $D'^2+K(EG-F^2)=DD''$, мы получим

$$D(PD+QD'+RD''+T_1)=0. \tag{19}$$

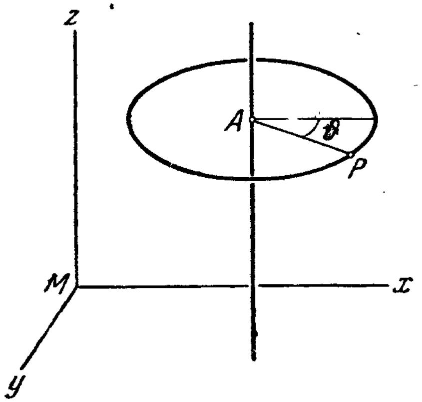
Следовательно, уравнение (17a), неприводимое в области рациональных функций D, D', приводимо, если ввести в него функцию D''.

Обращая в нуль первый множитель (19), приходим к изгибанию линейчатых поверхностей; обращая в нуль второй, получаем изгибание на кинематическом основании. Луч r пересекает касательную к одной из линий основания и образует прямой угол с касательной к другой.

§ 2. Циклические системы Рибокура.

67. Конгруэнцией окружностей называется семейство окружностей, зависящих от двух параметров. Первый и наиболее интересный вопрос относительно такой конгруэнции был поставлен Рибокуром и касается существования поверхностей, пересекающих нормально все окружности конгруэнции.

Возьмем произвольную поверхность S; свяжем с каждой точкой ее M прямой трехгранник T; компоненты движений T: ξ, η, ξ_1, η_1, p, q, r, p_1, q_1, r_1 определяют поверхность. Пусть нам дана какая-то конгруэнция окружностей (K). Рассмотрим ту окружность K, плоскость которой параллельна касательной плоскости к поверхности S в точке M. Пусть центр ее лежит в точке A с координатами a, b, c относительно трехгранника T и радиус ее равен R.



Черт. 1.

Координаты относительно трехгранника T произвольной точки P окружности K можно записать в виде

$$x=a+R\cos\vartheta,$$
$$y=b+R\sin\vartheta,\quad z=c, \qquad (20)$$

если обозначить через ϑ угол, образованный радиусом AP с первой осью трехгранника T.

Когда переменные u, v меняются и точка M описывает поверхность S, точка P опишет некоторую поверхность (P). Допустим, что эта поверхность пересекает каждую окружность K нормально. Диференцируя формулы (20) и внося в (1), мы получим компоненты по осям T произвольного перемещения точки P по поверхности (P). Если воспользоваться обозначениями (3a), то эти компоненты можно написать в виде

$$\left.\begin{aligned}&\cos\vartheta\, dR-R\sin\vartheta\, d\vartheta+[a_1-rR\sin\vartheta]\,du+[a_2-r_1R\sin\vartheta]\,dv,\\&\sin\vartheta\, dR+R\cos\vartheta\, d\vartheta+[b_1+rR\cos\vartheta]\,du+[b_2+r_1R\cos\vartheta]\,dv,\\&[c_1+R(p\sin\vartheta-q\cos\vartheta)]\,du+[c_2+R(p_1\sin\vartheta-q_1\cos\vartheta)]\,dv.\end{aligned}\right\}\quad (21)$$

Вектор, определяемый этими компонентами, должен быть перпендикулярен к вектору, касательному к окружности K, с компонентами

$$-\sin\vartheta,\quad \cos\vartheta,\ 0.$$

Составляя скалярное произведение этих двух векторов и приравнивая его нулю, мы получим условие ортогональности поверхности (P) к окружностям конгруэнции

$$d\vartheta+\left[\frac{-a_1\sin\vartheta+b_1\cos\vartheta}{R}+r\right]du+$$
$$+\left[\frac{-a_2\sin\vartheta+b_2\cos\vartheta}{R}+r_1\right]dv=0. \qquad (22)$$

Это уравнение надо рассматривать, как уравнение в полных диференциалах относительно функции ϑ, которая, собственно, и определяет поверхность (P).

Условие интегрируемости (22)

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{-a_1\sin\vartheta+b_1\cos\vartheta}{R}+r\right]=\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{-a_2\sin\vartheta+b_2\cos\vartheta}{R}+r_1\right]$$

принимает вид

$$M\cos\vartheta+N\sin\vartheta+P=0. \qquad (23)$$

Каждое решение ϑ уравнения (23), если оно удовлетворяет (22), определяет поверхность (P), нормальную к окружностям конгруэнции. Уравнение (23) не допускает более двух существенно различных решений, не исчезая тождественно; следовательно, если существуют три поверхности, ортогональные к окружностям конгруэнции, то коэфициенты уравнения (23) M, N и P равны нулю, уравнение (22) вполне интегрируемо и определяет ϑ с произвольными постоянными; следовательно, существует бесконечное множество ортогональных поверхностей. Такую конгруэнцию окружностей Рибокур назвал *циклической системой*. Циклическая система, следовательно, определяется уравнениями

$$M=0,\quad N=0,\quad P=0. \qquad (24)$$

Формулы (3a) показывают, что a_i и b_i не содержат p, q, p_1, q_1, если $c=0$, т. е. если за поверхность S мы выбрали огибающую плоскостей циклов системы. В таком случае ни одно из уравнений (22) и (23) не содержит величин, меняющихся при изгибании S. Следовательно, циклическая система, расположенная в касательных плоскостях поверхности, остается циклической системой при всяком изгибании поверхности, когда ее циклы переносятся, неразрывно связанные с касательными плоскостями.

68. Нетрудно заметить, что уравнение (относительно трехгранника T) цикла, лежащего в касательной плоскости к поверхности S,

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

может быть написано в виде системы

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-iR)^2=0,\quad z=0.$$

Следовательно, всякий цикл лежит на сфере нулевого радиуса с центром в точке $B(a, b, iR)$. Если эта точка B — одна и та же для всех циклов, т. е. не перемещается вместе с изменением переменных u, v, то все циклы лежат на одной сфере нулевого радиуса. Докажем, что поверхность S можно изогнуть так, что для новой формы поверхности $\bar{S}$ это требование будет выполнено.

Внося в формулы (1) подвижные координаты точки B и приравнивая компоненты нулю, получим

$$a_1+i\bar{q}R=0,\quad a_2+i\bar{q}_1R=0,\quad b_1-i\bar{p}R=0,\quad b_2-i\bar{p}_1R=0, \qquad (25a)$$
$$\bar{p}b-\bar{q}a+iR_u=0,\quad \bar{p}_1b-\bar{q}_1a+iR_v=0. \qquad (25b)$$

Здесь a_i, b_i — величины, определяемые формулами (3a), при значении $c=0$; чертой наверху $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{p}_1$, $\bar{q}_1$ отмечены компоненты поверхности $\bar{S}$.

С другой стороны, величины a_i, b_i, c_i всегда удовлетворяют уравнениям

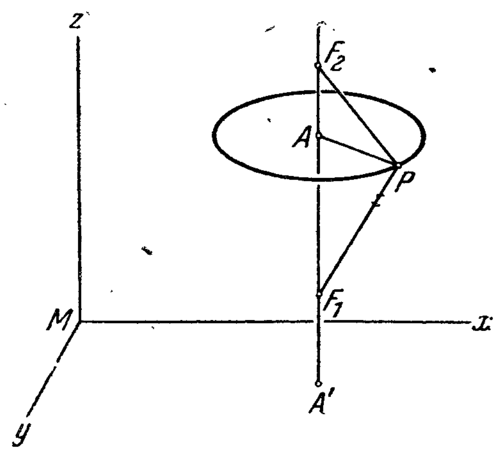
$$\left.\begin{aligned} a_{1v}-a_{2u}&=qc_2-q_1c_1-rb_2+r_1b_1,\\ b_{1v}-b_{2u}&=ra_2-r_1a_1-pc_2+p_1c_1,\\ c_{1v}-c_{2u}&=pb_2-p_1b_1-qa_2+q_1a_1,\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

которые получаются, если написать условия совместности уравнений (3а), рассматривая их как уравнения для a, b, c, и в силу (26) уравнения (24) в самом общем случае имеют вид

$$\left.\begin{aligned} a_1\frac{\partial\ln R}{\partial v}-a_2\frac{\partial\ln R}{\partial u}&=qc_2-q_1c_1,\\ b_1\frac{\partial\ln R}{\partial v}-b_2\frac{\partial\ln R}{\partial u}&=p_1c_1-pc_2,\\ R^2(pq_1-p_1q)&=a_2b_1-a_1b_2.\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Нетрудно заметить теперь, что (25b) удовлетворено в силу (25а) и (27) и что величины $\bar p$, $\bar q$, $\bar p_1$, $\bar q_1$, определяемые из (25а), удовлетворяют основным уравнениям теории поверхности (Гаусса-Кодацци [Т. П. 197]), если принять во внимание уравнения (26), (27) и положить в них $c=0$.

Таким образом (Дарбу), какова бы ни была циклическая система, определяемая системой (27) в касательных плоскостях к поверхности S, всегда можно изогнуть поверхность S так, что все циклы системы будут лежать на одной и той же сфере нулевого радиуса с центром в произвольной точке B пространства. Иначе говоря, все циклические системы можно получить, рассматривая пересечения произвольной сферы нулевого радиуса касательными плоскостями к поверхности $\bar S$ и затем изгибая произвольно эту поверхность $\bar S$ так, чтобы циклы системы увлекались касательными плоскостями к ней.



Черт. 2.

69. Обратимся к рассмотрению конгруэнции осей циклической системы. Осью называется прямая, проходящая через центр цикла перпендикулярно к его плоскости.

Пусть нам дана произвольная конгруэнция C. Возьмем какую-либо поверхность S, свяжем с точками ее трехгранник T и поставим в соответствие каждой касательной плоскости к поверхности S перпендикулярный к ней луч C. Этот луч может быть определен координатами той точки $A'(a, b, 0)$, где луч пересекает касательную плоскость. Допустим, что этот луч несет на себе

цикл, осью которого он служит. Пусть центр его лежит в точке $A(a, b, c)$ и радиус его R. Мы снова придем к уравнениям (27), но теперь здесь a и b надо считать уже заданными, и мы получим три уравнения на две неизвестных функции c и R. Следовательно, надо ставить вопрос о совместности системы.

Чтобы облегчить выкладки, воспользуемся произволом в выборе координатных линий u, v и отнесем конгруэнцию к развертывающимся поверхностям. Пусть F_1, F_2 — фокусы луча, соответствующие развертывающимся поверхностям u и v (черт. 2). Обозначим

$$t_1=AF_1,\quad t_2=AF_2. \tag{28}$$

Внося в уравнения (2) сначала $t=t_1$, $dv=0$, затем $t=t_2$, $du=0$ и помня, что теперь $\alpha=\beta=0$, $\gamma=1$, ибо луч перпендикулярен к касательной плоскости к поверхности S, получим в силу (3b)

$$a_1+t_1q=0,\quad b_1-t_1p=0,\quad a_2+t_2q_1=0,\quad b_2-t_2p_1=0. \tag{29}$$

Уравнения (26) дадут теперь

$$\left.\begin{aligned} qc_2-q_1c_1&=(t_2q_1)_u-(t_1q)_v+t_2rp_1-t_1r_1p,\\ p_1c_1-pc_2&=(t_1p)_v-(t_2p_1)_u+t_2rq_1-t_1r_1q.\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Внося все это в уравнения (27), получим

$$\left(\frac{t_1}{R}\right)_v q-\left(\frac{t_2}{R}\right)_u q_1+\frac{t_1}{R}(q_v+pr_1)-\frac{t_2}{R}(q_{1u}+p_1r)=0, \tag{31a}$$

$$\left(\frac{t_1}{R}\right)_v p-\left(\frac{t_2}{R}\right)_u p_1+\frac{t_1}{R}(p_v-qr_1)-\frac{t_2}{R}(p_{1u}-q_1r)=0, \tag{31b}$$

$$t_1t_2+R^2=0. \tag{31c}$$

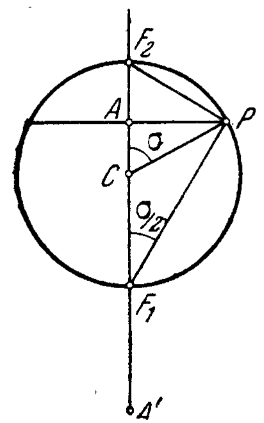
Последнее уравнение имеет простой геометрический смысл.

Так как $R=AP$ перпендикулярно к F_1F_2, то AP есть высота прямоугольного треугольника F_1F_2P, гипотенузой которого служит отрезок F_1F_2.

Иначе: цикл лежит на сфере, диаметром которой служит расстояние между фокусами F_1F_2.

Пусть C — середина расстояния между фокусами (черт. 3); обозначим через σ угол ACP, под которым радиус цикла R виден из центра сферы C. Тогда из чертежа 3 получим

$$t_2=R\,\mathrm{tg}\,\frac{\sigma}{2},\quad t_1=-R\,\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma}{2}. \tag{32}$$



Черт. 3.

Знак минус объясняется тем, что AF_2 направлено противоположно AF_1.

Внося выражения (32) в уравнения (31а), (31b) заметим, что, кроме неизвестной функции σ, они содержат только величины, зависящие от сферического изображения конгруэнции. Если эти уравнения разрешить относительно производных от σ и воспользоваться формулами [Т. П. 197]

$$\left.\begin{aligned}\begin{Bmatrix}1\;2\\1\end{Bmatrix}' &= \frac{q_1p_{1u}-p_1q_{1u}-(p_1^2+q_1^2)\,r}{pq_1-p_1q} = \frac{q_1p_v-p_1q_v-(pp_1+qq_1)\,r_1}{pq_1-p_1q},\\ \begin{Bmatrix}1\;2\\2\end{Bmatrix}' &= \frac{pq_v-qp_v+(p^2+q^2)\,r_1}{pq_1-p_1q} = \frac{pq_{1u}-qp_{1u}+(pp_1+qq_1)\,r}{pq_1-p_1q},\end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

то получим для σ систему уравнений

$$\frac{\partial\cos\sigma}{\partial u} = 2(\cos\sigma+1)\begin{Bmatrix}1\;2\\2\end{Bmatrix}', \qquad \frac{\partial\cos\sigma}{\partial v} = 2(\cos\sigma-1)\begin{Bmatrix}1\;2\\1\end{Bmatrix}', \qquad (34)$$

которую мы уже имели в главе III (уравнения (14) и (58)).

Если существует решение σ системы (34), то найдем дугу F_2P на окружности, имеющей фокальное расстояние F_1F_2 диаметром, и получим цикл с центром в A и радиусом $R=AP$. Очевидно, все конгруэнции с общим сферическим изображением развертывающихся поверхностей одновременно могут служить семейством осей циклической системы.

Условие интегрируемости системы (34) пишется в виде

$$\left[\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}1\;2\\2\end{Bmatrix}' - \frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1\;2\\1\end{Bmatrix}'\right]\cos\sigma + \frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1\;2\\1\end{Bmatrix}' + \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}1\;2\\2\end{Bmatrix}' - 4\begin{Bmatrix}1\;2\\1\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}1\;2\\2\end{Bmatrix}' = 0. \qquad (35)$$

Это уравнение допускает только одно независимое решение. Если с данной конгруэнцией связаны две циклических системы, то их будет бесконечное множество: уравнение (35) будет удовлетворено тождественно и вполне интегрируемая система (34) определит σ с произвольным постоянным. Конгруэнция, обладающая ∞^1 циклических систем, характеризуется сферическим изображением своих развертывающихся поверхностей. Это сферическое изображение удовлетворяет условиям Коссера (27) главы I

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1\;2\\1\end{Bmatrix}' = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}1\;2\\2\end{Bmatrix}' = 2\begin{Bmatrix}1\;2\\1\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}1\;2\\2\end{Bmatrix}'. \qquad (36)$$

Все циклы различных циклических систем, связанные с данным лучом, лежат на одной сфере, построенной на фокальном расстоянии, как на диаметре.

70. Конгруэнция осей циклической системы называется циклической конгруэнцией. Если лучи несут ∞ циклических систем, то конгруэнция называется циклической бесконечным числом способов. Мы будем называть ее циклической в тесном смысле слова или, для краткости, просто циклической.

Сферическое изображение такой циклической конгруэнции, отнесенной к развертывающимся поверхностям, совпадает с изображением главного основания изгибания.

Возьмем какую-либо поверхность, у которой сферическое изображение сопряженной системы совпадает с изображением развертывающихся поверхностей циклической конгруэнции. Мы можем принять такую поверхность за поверхность S нашего построения.

В таком случае компоненты движения трехгранника T удовлетворяют условиям [Т. П. 107]

$$p\eta_1-q\xi_1=0, \quad p_1\eta-q_1\xi=0. \qquad (37)$$

С другой стороны, исключая t_1, t_2 из уравнений (29), получим

$$pa_1+qb_1=0, \quad p_1a_2+q_1b_2=0. \qquad (38)$$

Исключая отсюда p, q, p_1, q_1, придем к уравнениям (10), определяющим первую из конгруэнций, которые при изгибании S на главном основании (u, v) сохраняют свои развертывающиеся поверхности.

71. Допустим теперь, что циклическая (в тесном смысле слова) конгруэнция C дана. Как найти поверхность S, с ней связанную?

Уравнения (29) содержат, кроме величин t_1, t_2, a, b и c, которые взаимно связывают положения луча, точек F_1, F_2, A и точки M поверхности S, еще компоненты переноса трехгранника ξ, η, ξ_1, η_1, которые определяют линейный элемент поверхности S и сейчас нам не нужны:

$$\left.\begin{aligned}\xi+\frac{\partial a}{\partial u}+q(c+t_1)-rb&=0,\\ \xi_1+\frac{\partial a}{\partial v}+q_1(c+t_2)-r_1b&=0,\\ \eta+\frac{\partial b}{\partial u}-p(c+t_1)+ra&=0,\\ \eta_1+\frac{\partial b}{\partial v}-p_1(c+t_2)+r_1a&=0.\end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

Эти компоненты должны удовлетворять основным уравнениям теории поверхности [Т. П. 196] и, кроме того, системе (37), так как, по условию, координатные линии (u, v) на поверхности S сопряжены. Внося ξ, η, ξ_1, η_1 из (39) в (37), получим

$$\left.\begin{aligned}p\frac{\partial b}{\partial v}-q\frac{\partial a}{\partial v}&=(pp_1+qq_1)(c+t_2)-(pa+qb)\,r_1,\\ p_1\frac{\partial b}{\partial u}-q_1\frac{\partial a}{\partial u}&=(pp_1+qq_1)(c+t_1)-(p_1a+q_1b)\,r.\end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

Основные уравнения теории поверхностей приведут к двум первым уравнениям (26) или в силу (29), к уравнениям (30). Внося сюда c_1, c_2 по формулам (3а) и разрешая эти уравнения относительно производных от c, получим с помощью (33)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial u}+\frac{\partial t_2}{\partial u}&=aq-bp+(t_1-t_2)\begin{Bmatrix}1\;2\\2\end{Bmatrix}',\\ \frac{\partial c}{\partial v}+\frac{\partial t_1}{\partial v}&=aq_1-bp_1+(t_2-t_1)\begin{Bmatrix}1\;2\\1\end{Bmatrix}'.\end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

Уравнения (40), (41) содержат, кроме компонентов вращения p, q, r, p_1, q_1, r_1, связанных со сферическим изображением конгруэнции, по существу еще четыре величины: a, b, $T_1=c+t_1$ и $T_2=c+t_2$.

Вычитая из одного уравнения (40) другое, получим [Т. П. 196]

$$\frac{\partial}{\partial v}(aq-bp)-\frac{\partial}{\partial u}(aq_1-bp_1)=(pp_1+qq_1)(t_1-t_2) \tag{42}$$

и, внося сюда a и b из (41), имеем уравнения Гишара для фокального расстояния конгруэнции $2\delta=t_2-t_1$

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial\delta}{\partial u}\left\{\begin{matrix}1\ 2\\1\end{matrix}\right\}'+\frac{\partial\delta}{\partial v}\left\{\begin{matrix}1\ 2\\2\end{matrix}\right\}'+$$
$$+\delta\left[\frac{\partial\left\{\begin{matrix}1\ 2\\1\end{matrix}\right\}'}{\partial u}+\frac{\partial\left\{\begin{matrix}1\ 2\\2\end{matrix}\right\}'}{\partial v}+pp_1+qq_1\right]=0. \tag{43}$$

Если конгруэнция C дана, то δ известно и удовлетворяет уравнению (43). Известны и величины t_1, t_2. Выбирая любое решение σ системы (34), мы получим непосредственно из черт. 3

$$\left.\begin{aligned} t_2=2\delta\sin^2\frac{\sigma}{2},\quad t_1=-2\delta\cos^2\frac{\sigma}{2},\\ R=2\delta\sin\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\sigma}{2}.\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Если внести это в уравнения (41) и воспользоваться (34), то получим

$$\frac{\partial c}{\partial u}=-\frac{\partial R}{\partial u}\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}+aq-bp,\quad \frac{\partial c}{\partial v}=\frac{\partial R}{\partial v}\operatorname{ctg}\frac{\sigma}{2}+aq_1-bp_1. \tag{41'}$$

Так как из уравнений (40) в силу (33) и (34) следует

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[(aq-bp)\operatorname{ctg}\frac{\sigma}{2}\right]+\frac{\partial}{\partial u}\left[(aq_1-bp_1)\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\right]=$$
$$=-(pp_1+qq_1)\frac{c}{\sin\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\sigma}{2}}, \tag{45}$$

то, исключая a и b из (41′) и (45), получим для c уравнение

$$\frac{\partial^2 c}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial c}{\partial u}\left\{\begin{matrix}1\ 2\\1\end{matrix}\right\}'+\frac{\partial c}{\partial v}\left\{\begin{matrix}1\ 2\\2\end{matrix}\right\}'-c(pp_1+qq_1). \tag{46}$$

Это — тангенциальное уравнение Лапласа для сопряженной системы (u, v) на поверхности S. Если дана поверхность S и ищется циклическая система, то (46) определит расстояние плоскости цикла от касательной плоскости; если принять c равным w, расстоянию касательной плоскости от начала, то плоскость цикла будет проходить через неподвижную точку — начало координат.

Если дана конгруэнция и, следовательно, циклическая система, то уравнение (46) определяет положение касательной плоскости к поверхности S, уравнения (41′) дают величины a и b, т. е. положение точки M в касательной плоскости.

Нетрудно заметить, что уравнение (46) всегда допускает решение $c=0$, т. е. плоскость цикла огибает поверхность, на которой развертывающимся поверхностям конгруэнции соответствует сопряженная система. Если конгруэнция несет ∞^1 циклических систем, то эта сопряженная система является главным основанием поверхности S.

Координаты a и b точки пересечения луча с касательной плоскостью к поверхности S относительно трехгранника, связанного с огибающей плоскостей циклов или, что то же, если изменить знак, координаты точки касания плоскости цикла со своей огибающей относительно трехгранника, параллельного первому, но с вершиной на луче, определяются уравнениями (41′). Если внести сюда $c=0$ и

$$R=2\delta\sin\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\sigma}{2}$$

и разрешить относительно a, b, то получим

$$\left.\begin{aligned}&a(pq_1-p_1q)=\\&=\left\{-p_1\delta_u+p\delta_v+2\delta\left[p\left\{\begin{matrix}1\ 2\\1\end{matrix}\right\}'-p_1\left\{\begin{matrix}1\ 2\\2\end{matrix}\right\}'\right]\right\}\cos\sigma+p_1\delta_u+p\delta_v,\\&b(pq_1-p_1q)=\\&=\left\{-q_1\delta_u+q\delta_v+2\delta\left[q\left\{\begin{matrix}1\ 2\\1\end{matrix}\right\}'-q_1\left\{\begin{matrix}1\ 2\\2\end{matrix}\right\}'\right]\right\}\cos\sigma+q_1\delta_u+q\delta_v.\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Если с лучом связано ∞^1 циклов, то δ содержит произвольное постоянное. Меняя это постоянное, мы будем перемещать плоскость цикла, поднимая ее от F_1 до F_2. Расстояние этой плоскости от фокуса F_1 определяется формулой (44): $-t_1=\delta(1+\cos\sigma)$. Все три координаты точки касания плоскости цикла со своей огибающей линейны относительно $\cos\sigma$. Следовательно, все эти точки лежат на одной прямой. Коссера [33], который заметил эту прямую, доказал, что развертывающиеся поверхности конгруэнции, которую она описывает, соответствуют развертывающимся поверхностям конгруэнции C.

72. Когда поверхность S изгибается на главном основании u, v, связанная с нею циклическая конгруэнция изгибается, сохраняя свои развертывающиеся поверхности. Присоединенные к ней циклические системы деформируются; радиус цикла и положения его центра на луче меняются, но тот цикл (действительный или мнимый), который лежит в касательной плоскости к поверхности S, переносится вместе с касательной плоскостью неизменным.

Из формул (39) видно, что при $c=0$ произведения qt_1, pt_1, q_1t_2, p_1t_2 при изгибании не меняются. Так как компоненты переноса ξ, η, ξ_1, η_1 при изгибании не меняются, то, зная изменения коэфициентов второй квадратичной формы по формуле (73) главы III, мы легко подсчитаем изменения компонентов вращения p, q, p_1, q_1 [Т. П. 196].

Снабжая значком h величины, относящиеся к изогнутой поверхности S_h с параметром изгибания h, найдем

$$\left.\begin{aligned} p_h &= p\sqrt{\frac{h+V}{h-U}}, \quad q_h = q\sqrt{\frac{h+V}{h-U}}, \\ p_{1h} &= p_1\sqrt{\frac{h-U}{h+V}}, \quad q_{1h} = q_1\sqrt{\frac{h-U}{h+V}}. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Произведение pq_1 не меняется, а следовательно, неизменно и произведение t_1t_2 — произведение расстояний фокусов луча от касательной плоскости (Рибокур). Отсюда по формуле (31с) прямо следует, что радиус R цикла, лежащего в касательной плоскости, не меняется при изгибании.

Мы видели (теорема Дарбу), что изгибанием поверхности S можно привести все циклы системы, лежащие в касательной плоскости к этой поверхности, на одну сферу нулевого радиуса, и таким образом могут быть получены все циклические системы. Интересно отметить, что это может быть достигнуто изгибанием на главном основании (u, v). Действительно, вычтем из уравнений (25а) уравнения (29); мы получим в силу (32)

$$\left.\begin{aligned} \overline{q} &= iq\operatorname{ctg}\frac{\sigma}{2}, \quad \overline{q}_1 = -iq_1\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}, \\ \overline{p} &= ip\operatorname{ctg}\frac{\sigma}{2}, \quad \overline{p}_1 = -ip_1\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

или, внося сюда значения $\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}$ по формуле (59) главы III,

$$\overline{p} = ip\sqrt{\frac{V-k}{U+k}}, \quad \overline{q} = iq\sqrt{\frac{V-k}{U+k}},$$

$$\overline{p}_1 = -ip_1\sqrt{\frac{U+k}{V-k}}, \quad \overline{q}_1 = -iq_1\sqrt{\frac{U+k}{V-k}}.$$

Сравнивая эти формулы с (48), видим, что $\overline{p} = p_h$, $\overline{q} = q_h$ и т. д., если положить $h = -k$.

Отсюда следует такое построение циклической (в тесном смысле) конгруэнции, связанной с поверхностью S. Берем поверхность S', параллельную поверхности S в смысле Петерсона (преобразование Петерсона); изгибаем эту поверхность S' на главном основании (u, v) в поверхность S'_h; из произвольной точки пространства O опускаем на касательную плоскость к поверхности S'_h перпендикуляры и изгибаем поверхность S'_h обратно в S', увлекая эти перпендикуляры вместе с касательными плоскостями. Мы получим наиболее общую циклическую (в тесном смысле) конгруэнцию, связанную с поверхностью S.

73. Среди частных случаев замечателен случай $\sigma = \text{const}$. Тогда, в силу (34), имеем $\left\{ {12 \atop 1} \right\}' = \left\{ {12 \atop 2} \right\}' = 0$. Значит, в силу (28) главы I, $U' = V' = 0$ и главное основание на поверхности S содержит два семейства геодезических линий. Обратно, со всякой поверхностью Фосса связаны циклические системы, циклы которых делят фокальное расстояние своей оси в постоянном отношении.

Циклическая конгруэнция нормальна, если развертывающиеся поверхности пересекаются под прямым углом. Угол в сферическом изображении прямой, следовательно, сопряженная система на поверхности S ортогональна и состоит из линий кривизны.

Если циклы системы — постоянного радиуса $R = \text{const}$, то, выбирая за поверхность S огибающую плоскостей циклов, из (41′) получим $a = b = 0$, т. е. оси циклов совпадают с нормалями к поверхности S. При этом абсциссы фокусов t_1, t_2, очевидно, становятся главными радиусами кривизны поверхности S и уравнение (31с) показывает, что их произведение постоянно и всегда отрицательно. Главное основание (u, v) образовано линиями кривизны поверхности постоянной отрицательной кривизны. Поверхности, нормальные к циклам системы, являются тоже поверхностями постоянной отрицательной кривизны (Рибокур [22]). Действительно, радиус цикла MP теперь касается и поверхности S и поверхности P, нормальной к циклу. Мы увидим в следующем параграфе, что на поверхностях, нормальных к циклам, развертывающимся поверхностям конгруэнции осей соответствуют линии кривизны. Следовательно, на поверхностях S и P имеются уже две общие сопряженные системы: фокальная сеть и сеть линий кривизны. Отсюда по теореме Петерсона асимптотические линии соответствуют и полученная нами конгруэнция есть конгруэнция W. В таком случае (см. главу III, а также [Т. П. 173]) произведение кривизн фокальных полостей S и P равно обратной величине четвертой степени расстояния между граничными точками луча. Но наша конгруэнция нормальна, — нормаль к поверхности P касается цикла и, следовательно, лежит в касательной плоскости к поверхности S; граничные точки нормальной конгруэнции совпадают с фокусами [Т. П. 170], а расстояние между фокусами M и P постоянно и равно R. Следовательно, произведение кривизн поверхностей S и P равно $\frac{1}{R^4}$. Так как кривизна поверхности S равна $\frac{1}{t_1t_2} = -\frac{1}{R^2}$, то кривизна поверхности P равна тоже $-\frac{1}{R^2}$. Обе фокальные поверхности — одной и той же постоянной отрицательной кривизны. Конгруэнция — псевдосферическая [Т. П. 176]. Геометрическое место циклов $u = \text{const}$ или $v = \text{const}$ образует еще два семейства поверхностей, которые вместе с поверхностями P образуют триортогональную систему (Рибокур).

Каково бы ни было главное основание, можно найти связанные с ними циклические системы так, чтобы все циклы системы проходили через неподвижную точку (Бианки [2], II, 238). Для этого достаточно потребовать, чтобы одна из поверхностей P сводилась к точке.

Записывая, что компоненты (21) равняются нулю, и пользуясь для производных от R и ϑ выражениями (22) и (41′), получим

$$\left.\begin{aligned} a_1\cos\vartheta + b_1\sin\vartheta - c_1\operatorname{ctg}\frac{\sigma}{2} &= 0, \\ a_2\cos\vartheta + b_2\sin\vartheta + c_2\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{50a}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 + R(p\sin\vartheta - q\cos\vartheta) = 0, \\ c_2 + R(p_1\sin\vartheta - q_1\cos\vartheta) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (50b)$$

при этом (50a) переходят в (50b), если принять во внимание (29) и (32). Система (50b) в силу (41′) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \ln R}{\partial u} &= -(q\cos\vartheta - p\sin\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\sigma}{2}, \\ \frac{\partial \ln R}{\partial v} &= (q_1\cos\vartheta - p_1\sin\vartheta)\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (51)$$

Условия интегрируемости (51) удовлетворены тождественно в силу (22) и (34), если принять во внимание соотношения (33).

Вполне интегрируемая система уравнений (22), (34), (51), (41′) и (39), где t_1 и t_2 надо заменить по формулам (32), определит a, b, c, R, σ и ϑ.

Очевидно, что сферы, которые несут эти циклы, тоже проходят через неподвижную точку.

Внося в уравнения (51) по формуле (44) $R = \delta\sin\sigma$, где $2\delta = F_1F_2$ — фокальное расстояние конгруэнции, получим для δ систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \ln \delta}{\partial u} &= (p\sin\vartheta - q\cos\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\sigma}{2} + \frac{2\cos\sigma}{1-\cos\sigma}\left\{\begin{matrix}1\ 2\\ 2\end{matrix}\right\}', \\ \frac{\partial \ln \delta}{\partial v} &= (q_1\cos\vartheta - p_1\sin\vartheta)\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2} + \frac{2\cos\sigma}{1+\cos\sigma}\left\{\begin{matrix}1\ 2\\ 1\end{matrix}\right\}'. \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

Эта система по заданному σ определяет δ, т. е. ту конгруэнцию, которая несет циклическую систему, все окружности которой проходят через неподвижную точку.

Если система (52) допускает одно и то же решение δ для разных значений σ, то с одной конгруэнцией будут связаны две циклические системы с общей точкой у всех циклов. Все сферы, построенные на фокальных расстояниях, будут иметь две общие точки. Обратно, конгруэнция диаметров семейства сфер с двумя общими точками, если концы диаметров служат фокусами, является циклической конгруэнцией (в тесном смысле слова) [86].

§ 3. Преобразование Рибокура.

74. Компоненты движения точки P, которая описывает поверхность, нормальную к циклам системы, определяются формулами (21). Если сюда внести $d\vartheta$ из (22), a_i, b_i, c_i из (29) и (41′) и t_1, t_2 из (32), то получим компоненты перемещения при изменении одного u:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\cos\vartheta\left[R_u\operatorname{ctg}\frac{\sigma}{2} + R(p\sin\vartheta - q\cos\vartheta)\right], \\ &\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\sin\vartheta\left[R_u\operatorname{ctg}\frac{\sigma}{2} + R(p\sin\vartheta - q\cos\vartheta)\right], \\ &R_u\operatorname{ctg}\frac{\sigma}{2} + R(p\sin\vartheta - q\cos\vartheta). \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

Они пропорциональны величинам:

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\cos\vartheta : \operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\sin\vartheta : 1.$$

Отсюда следует (см. черт. 3), что касательная к линии u на поверхности P проходит через точку F_1 — первый фокус оси. Совершенно так же найдем, что касательная к линии v проходит через второй фокус F_2.

Вектор нормали к поверхности P совпадает с касательной к циклу; его компоненты — $\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$ и 0. Компоненты перемещения конца единичного вектора, проведенного из начала координат параллельно нормали, получаются по формулам (1), если там опустить члены с компонентами переноса ξ, η и подставить $x = -\sin\vartheta$, $y = \cos\vartheta$. Пользуясь (22) для производных от ϑ, а также (29), (32), получим компоненты перемещения при $v = \mathrm{const}$, т. е. при изменении одного u, в виде

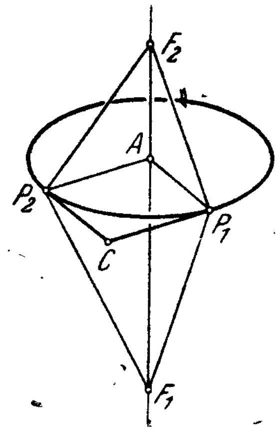
$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\cos\vartheta\,(q\sin\vartheta + p\cos\vartheta), \\ &\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\sin\vartheta\,(q\sin\vartheta + p\cos\vartheta), \\ &q\sin\vartheta + p\cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \quad (54)$$

Компоненты (53) и (54), очевидно, пропорциональны. Следовательно, в силу формулы Родрига [Т. П. 72], линии u на поверхности P суть линии кривизны. Точно так же докажем, что и линии v являются линиями кривизны.

Таким образом на поверхностях, ортогональных к циклам, развертывающимся поверхностям конгруэнции осей соответствуют линии кривизны (Рибокур).

Рассмотрим теперь две поверхности P_1 и P_2, ортогональные к циклам одной системы. Соответствующие нормали их пересекаются как касательные к одному циклу, допустим, в точке C (черт. 4); одноименные касательные к линиям кривизны сходятся в фокусах F_1 и F_2 оси. Два прямых трехгранника $P_1F_1F_2C$ и $P_2F_1F_2C$ взаимным пересечением ребер отсекают равные отрезки

$$P_1C = P_2C, \quad P_1F_1 = P_2F_1, \quad P_1F_2 = P_2F_2. \quad (55)$$



Черт. 4.

В самом деле, если провести плоскость CP_1P_2 через две нормали, то она пересечет обе касательные плоскости и линию пересечения их F_1F_2 под прямым углом. Пусть A — точка пересечения ее с F_1F_2. Очевидно, P_1A и P_2A служат высотами двух прямоугольных треугольников $F_1P_1F_2$ и $F_1P_2F_2$ с общей гипотенузой F_1F_2. Следовательно, эти треугольники не только имеют общую гипотенузу, но и соответственно равные отрезки, отсекаемые высотой на гипотенузе, а тогда и высоты $AP_1 = \sqrt{F_1A \cdot F_2A} = AP_2$ равны между собой и треугольники равны, т. е. два последних равенства (55) уже доказаны. Также докажем и первое.

Проведем сферу Q с центром в C и радиусом P_1C. Она, очевидно, будет касаться обеих поверхностей P_1 и P_2 в точках P_1 и P_2, ибо нормаль к сфере будет направлена к центру и, следовательно, совпадет с касательными к циклу P_1C и P_2C.

По определению, две полости огибающей семейства ∞^2 сфер являются преобразованием Рибокура одна от другой, если на них соответствуют линии кривизны.

Мы видим, что поверхности P_1 и P_2 огибают семейство сфер Q; линии кривизны на них соответствуют. Следовательно, любые две ортогональные к циклам одной системы поверхности являются преобразованиями Рибокура одна от другой.

75. Рассмотрим теперь наиболее общее преобразование Рибокура. Пусть P и P' — две поверхности, которые являются преобразованием Рибокура одна от другой; следовательно, они составляют две полости огибающей семейства ∞^2 сфер Q и соответствуют друг другу линиями кривизны. Пусть C — центр сферы Q и R — ее радиус. Так как сфера касается поверхностей P и P', то C лежит на пересечении их нормалей. Пусть $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{n}'$ — единичные векторы нормалей к поверхностям P и P'; будем обозначать буквами $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}'$ радиусы-векторы точек P и P'. Тогда, очевидно,

$$\boldsymbol{P}+R\boldsymbol{n}=\boldsymbol{P}'+R\boldsymbol{n}'. \qquad \text{(a)}$$

Продиференцируем это равенство вдоль линии кривизны P, P', например по переменному u. В силу формул Родрига [Т. П. 72]

$$\boldsymbol{P}_u=\rho_2\boldsymbol{n}_u, \quad \boldsymbol{P}'_u=\rho'_2\boldsymbol{n}'_u,$$

где ρ_1, ρ_2 и ρ'_1, ρ'_2 — главные радиусы кривизны поверхностей P и P', получим

$$\boldsymbol{P}_u\left(1+\frac{R}{\rho_2}\right)-\boldsymbol{P}'_u\left(1+\frac{R}{\rho_2'}\right)+\frac{\partial \ln R}{\partial u}(\boldsymbol{P}'-\boldsymbol{P})=0, \qquad \text{(b)}$$

где, обратно, $\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}'$ заменено по формуле (a) через $(\boldsymbol{P}'-\boldsymbol{P})\dfrac{1}{R}$.

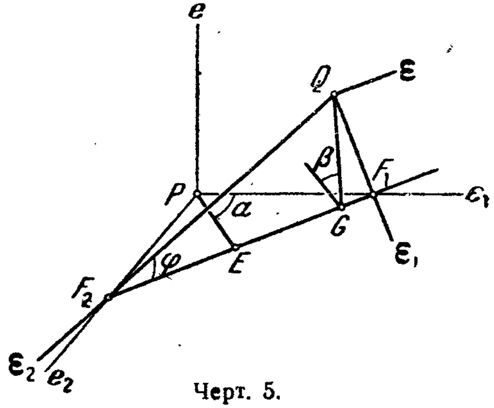
Из уравнения (b) следует, что три вектора $\boldsymbol{P}_u$ и $\boldsymbol{P}'_u$, касательные к линии u на поверхностях P и P', и вектор $\boldsymbol{P}'-\boldsymbol{P}$, соединяющий соответствующие точки двух поверхностей, лежат в одной плоскости. Отсюда следует, что касательные к линиям кривизны двух поверхностей, связанных преобразованием Рибокура, пересекаются.

Эта теорема показывает, что преобразование Рибокура можно найти, отыскивая две поверхности, у которых все три ребра основного трехгранника (касательные к линиям кривизны и нормаль) попарно пересекаются. Мы обобщим эту задачу и будем искать пару поверхностей, соответствующих линиям кривизны с пересечением соответствующих касательных.

76. Пусть P и Q — две поверхности, отнесенные к линиям кривизны u, v и расположенные так, что касательные к линиям u и v пересекаются в точках F_1 и F_2 (черт. 5). Поверхность P определена

компонентами движения ξ, $\eta=0$, $\xi_1=0$, η_1, $p=0$, q, p_1, $q_1=0$, r, r_1 основного трехгранника T, образованного касательными к линиям кривизны и нормалью; единичные векторы осей обозначим через $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}$. Такие же векторы, связанные с поверхностью Q, обозначим через ε_1, ε_2, ε.

Точку Q можно определить по отношению к трехграннику T посредством расстояния $t=PE$ прямой F_1F_2 от точки P, угла β между касательными плоскостями к поверхностям P и Q, угла $\alpha=\angle F_1PE=\angle F_1F_2P$ — угла наклона прямой F_1F_2 к оси $\boldsymbol{e}_2$ и $\varphi=\angle QF_2F_1$ — угла наклона той же прямой к оси ε_2.



Черт. 5.

Наложенные на поверхность Q условия сводятся к двум:

1) линии u, v на поверхности Q являются линиями кривизны,

2) касательные к этим линиям совпадают с прямыми QF_1 и QF_2.

Первое условие можно выразить по формуле Родрига [Т. П. 72] требованием, чтобы касательная ε_u к сферическому изображению линии u была параллельна касательной ε_1 к этой линии на самой поверхности. Так как ε_u заведомо перпендикулярно к ε (как производная единичного вектора), то достаточно потребовать, чтобы ε_u было перпендикулярно к ε_2. Диференцируя $\varepsilon=[\varepsilon_1\varepsilon_2]$ и умножая на ε_2, получим

$$(\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_{2u})=0, \qquad \text{(56a)}$$

где скобками обозначено смешанное произведение трех векторов. Точно так же для линии v получим

$$(\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_{1v})=0. \qquad \text{(56b)}$$

Второе условие выразится требованием, чтобы $\boldsymbol{Q}_u$ было перпендикулярно и к нормали $\varepsilon=[\varepsilon_1\varepsilon_2]$ и к ε_2:

$$\boldsymbol{Q}_u\varepsilon_2=0, \quad \boldsymbol{Q}_v\varepsilon_1=0, \quad (\boldsymbol{Q}_u\varepsilon_1\varepsilon_2)=0, \quad (\boldsymbol{Q}_v\varepsilon_1\varepsilon_2)=0. \qquad \text{(56c)}$$

Подсчитывая по чертежу 5 с помощью введенных углов, имеем

$$\overrightarrow{PE}=t(\boldsymbol{e}_1\cos\alpha+\boldsymbol{e}_2\sin\alpha),$$

$$\overrightarrow{F_1F_2}=\frac{t}{\sin\alpha\cos\alpha}(-\boldsymbol{e}_1\sin\alpha+\boldsymbol{e}_2\cos\alpha),$$

$$\overrightarrow{QG}=\frac{t\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\alpha\cos\alpha}\{(\boldsymbol{e}_1\cos\alpha+\boldsymbol{e}_2\sin\alpha)\cos\beta-\boldsymbol{e}\sin\beta\}$$

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\overrightarrow{QG}}{QG}\cos\varphi - \frac{\overrightarrow{F_1F_2}}{F_1F_2}\sin\varphi = \\
&= \boldsymbol{e}_1(\cos\alpha\cos\beta\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi) + \\
&+ \boldsymbol{e}_2(\sin\alpha\cos\beta\cos\varphi - \cos\alpha\sin\varphi) - \boldsymbol{e}\sin\beta\cos\varphi, \\
\varepsilon_2 &= \frac{\overrightarrow{QG}}{QG}\sin\varphi + \frac{\overrightarrow{F_1F_2}}{F_1F_2}\cos\varphi = \\
&= \boldsymbol{e}_1(\cos\alpha\cos\beta\sin\varphi - \sin\alpha\cos\varphi) + \\
&+ \boldsymbol{e}_2(\sin\alpha\cos\beta\sin\varphi + \cos\alpha\cos\varphi) - \boldsymbol{e}\sin\beta\sin\varphi.
\end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

Наконец,

$$\overrightarrow{GE} = \left(\frac{t\cos^2\varphi}{\sin\alpha\cos\alpha} - t\operatorname{ctg}\alpha\right)(-\boldsymbol{e}_1\sin\alpha + \boldsymbol{e}_2\cos\alpha)$$

и, следовательно, местные координаты a, b, c точки Q равны

$$\left.\begin{aligned}
a &= \frac{t\cos\varphi}{\sin\alpha\cos\alpha}(\sin\alpha\cos\varphi - \cos\alpha\cos\beta\sin\varphi), \\
b &= \frac{t\sin\varphi}{\sin\alpha\cos\alpha}(\cos\alpha\sin\varphi - \sin\alpha\cos\beta\cos\varphi), \\
c &= \frac{t\sin\beta\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\alpha\cos\alpha}.
\end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

Внося эти значения в уравнения (56а), (56b), (56с) и пользуясь общими формулами (1), получим после некоторых преобразований систему уравнений

$$\operatorname{ctg}\varphi\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u} + r\right) + \frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial\beta}{\partial u} + q\,\frac{\cos\alpha\sin\varphi - \sin\alpha\cos\beta\cos\varphi}{\sin\beta\sin\varphi} = 0, \quad (59a)$$

$$-\operatorname{tg}\varphi\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v} + r_1\right) + \frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial\beta}{\partial v} - p_1\,\frac{\sin\alpha\cos\varphi - \cos\alpha\cos\beta\sin\varphi}{\sin\beta\cos\varphi} = 0, \quad (59b)$$

$$\frac{\partial\ln t}{\partial u} + \frac{\xi}{t}\cos\alpha = \operatorname{ctg}\alpha\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u} + r\right), \qquad (60a)$$

$$\frac{\partial\ln t}{\partial v} + \frac{\eta_1}{t}\sin\alpha = -\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v} + r_1\right), \qquad (60b)$$

$$\operatorname{tg}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \operatorname{tg}\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial u}, \quad \operatorname{ctg}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \operatorname{ctg}\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial v}. \qquad (61)$$

Исключая β из (59а), (59b) или t из (60а), (60b), получим одно и то же уравнение

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\operatorname{ctg}\alpha\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u} + r\right)\right] + \frac{\partial}{\partial u}\left[\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v} + r_1\right)\right] = 0, \qquad (62)$$

а диференцируя и исключая производные φ из (61), найдем

$$(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\varphi - \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\varphi)\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\operatorname{ctg}\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\operatorname{tg}\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)\right] = 0. \qquad (63)$$

Далее представляются две возможности. Если первый множитель (63) обращается в нуль, то

$$\varphi = \pm\alpha.$$

Уравнения (61) удовлетворены; (62) определяет α с двумя произвольными функциями одного аргумента и для каждого решения α уравнения (59а), (59b), (60а), (60b) составляют вполне интегрируемую систему, которая определяет β и t с двумя произвольными постоянными. Так как $\varphi = \pm\alpha$, то треугольники F_1PF_2 и F_1QF_2 равны и нормали к поверхностям P и Q пересекаются; следовательно, Q есть преобразование Рибокура от P.

Если φ отлично от α, то в нуль обращается второй множитель (63). Получаемое при этом уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\ln\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0, \qquad (63')$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{U}{V}. \qquad (64)$$

В этом случае уравнение (62) накладывает на поверхность P условие

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{V}{U}r\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{U}{V}r_1\right) = 0. \qquad (65)$$

Это уравнение в точности совпадает с уравнением (71) главы III, и значит, получаемые нами поверхности P — те самые, нормали которых образуют нормальные конгруэнции в преобразовании Эйзенхарта.

Если P принадлежит к этому классу поверхностей и если для α взять значение (64), то уравнения (59а), (59b), (60а), (60b) и (61) составят вполне интегрируемую систему и определят φ, β и t с тремя произвольными постоянными.

77. Перейдем к выяснению геометрического смысла полученных решений. Допустим, что мы выбрали какие-то решения для α, φ, β; система (60а), (60b) определяет t с произвольным постоянным. Меняя это произвольное постоянное, мы будем подобно изменять фигуру PF_1F_2Q. При этом изменении точка Q описывает прямую PQ. Для каждого решения t касательные к линиям кривизны поверхности Q сохраняют свое направление; следовательно, все получаемые таким образом поверхности Q являются преобразованием Комбескюра (Combescure) одна от другой.

Выберем какое-нибудь решение α, φ и закрепим какое-нибудь постоянное t. Система (59а), (59b) определяет β с произвольным постоянным. Меняя это постоянное, мы заставим треугольник F_1QF_2 вращаться около прямой F_1F_2; при этом точка Q опишет окружность, осью которой служит F_1F_2, а радиусом QG. Так как эта окружность, очевидно, касается оси ε, то поверхность Q ортогональна к ней. При переменных u, v эта окружность описывает циклическую систему, для которой различные поверхности Q служат ортогональными поверхностями.

Если $\varphi = \alpha$, то треугольники F_1QF_2 и F_1PF_2 конгруэнтны, точки E

и G совпадают; окружность, описанная точкой Q, проходит через P и, следовательно, поверхность P — тоже одна из поверхностей, ортогональных к циклам получаемой системы. Поверхность Q является преобразованием Рибокура от поверхности P. Таким образом преобразования Рибокура соединяются в пучки (Демулен, CR 1910) так, что соответствующие точки преобразованных поверхностей лежат на циклах некоторой циклической системы. Какова бы ни была поверхность P, уравнение (62) определяет α, т. е. ортогональную к ней циклическую систему с двумя произвольными функциями одного аргумента.

Для поверхностей класса (65) существуют, кроме того, другие решения проблемы. Возьмем поверхность (65) и α из уравнения (64); система (61) определит φ с произвольным постоянным; для каждого выбраниого решения φ система (59a) определит β с произвольным постоянным. При изменении постоянного, содержащегося в решении β, точка Q, как мы видели, описывает цикл некоторой циклической системы с осью F_1F_2. Меняя решение φ, мы не изменим положения прямой F_1F_2, но переместим этот угол и получим другую циклическую систему с теми же осями F_1F_2. Так как угол F_1QF_2 — прямой, то точка Q остается на окружности с диаметром F_1F_2 и, следовательно, все циклы лежат на одной сфере. Конгруэнция F_1F_2 — циклическая (в тесном смысле слова). Сравнив чертежи 3 и 5, мы найдем простое соотношение между углами α и σ (§ 2), а именно $\alpha=\frac{\pi-\sigma}{2}$.

78. Полученные результаты имеют отношение к другой проблеме, связанной с изгибанием на главном основании. Мы уже видели, что уравнение (65) в точности совпадает с уравнением (71) главы III, а (63′) переходит в (70a) главы III, если положить $k=\operatorname{tg}\alpha$. Следовательно, нормаль к поверхности P описывает ту конгруэнцию в преобразовании Эйзенхарта, лучи которой являются пересечением касательных плоскостей двух поверхностей, связанных этим преобразованием. Одна из этих поверхностей, очевидно, является огибающей плоскостей циклов, описанных точкой Q, т. е. плоскостей, проходящих через нормаль к поверхности P перпендикулярно к F_1F_2. Плоскость цикла системы всегда огибает поверхность, отнесенную к главному основанию. Другая плоскость, как мы знаем, располагается симметрично первой относительно фокальных полостей конгруэнции нормалей; следовательно, она определяется углом $\alpha'=-\alpha$. В силу (63) (второй множитель) уравнение (62) допускает изменения знака α; следовательно, со всякой поверхностью класса (65) связаны, по крайней мере, две циклические конгруэнции $\operatorname{tg}\alpha=\frac{U}{V}$ и $\operatorname{tg}\alpha'=-\frac{U}{V}$. Соответствующие циклы, проходящие через точку P, касаются друг друга; лучи циклических конгруэнций пересекаются; развертывающиеся поверхности соответствуют; их фокусы лежат на касательных к линиям кривизны поверхности P.

79. Если дана поверхность P, то α определено уравнениями (62) и (63). Первое из них теперь принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial v}(\operatorname{ctg}\alpha r)+\frac{\partial}{\partial u}(\operatorname{tg}\alpha r_1)=0. \tag{66}$$

Если ввести вспомогательную функцию γ, то это уравнение можно написать в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\alpha}{\partial u}&=-\frac{\partial\ln r_1}{\partial u}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{\gamma}{r_1}\operatorname{ctg}\alpha,\\ \frac{\partial\alpha}{\partial v}&=\frac{\partial\ln r}{\partial v}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{\gamma}{r}\operatorname{tg}\alpha.\end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Внося эти выражения в уравнение (63), получим

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\gamma}{\partial u}&=-\frac{2}{r_1}\gamma^2+\gamma\left[\frac{\partial\ln r}{\partial u}+2\frac{\partial\ln r_1}{\partial u}\sin^2\alpha\right]-\frac{\partial^2\ln r}{\partial u\,\partial v}r\cos^2\alpha,\\ \frac{\partial\gamma}{\partial v}&=\frac{2}{r}\gamma^2+\gamma\left[\frac{\partial\ln r_1}{\partial v}+2\frac{\partial\ln r}{\partial v}\cos^2\alpha\right]+\frac{\partial^2\ln r_1}{\partial u\,\partial v}r_1\sin^2\alpha.\end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Диференцируя уравнения (68) и исключая производные от α и γ при помощи (67) и (68), получим уравнение вида

$$M\gamma+N\cos^2\alpha+P\sin^2\alpha=0. \tag{69}$$

Исследование совместности уравнений (68) и (69) приводит к заключению, что поверхность типа (65) не может иметь более трех семейств ∞^1 циклических систем, без того чтобы M, N, P не обратились в нуль, и в таком случае α и γ определяются из вполне интегрируемой системы (67), (68) с двумя произвольными постоянными; следовательно, поверхность обладает ∞^2 циклических конгруэнций, лучи которых несут каждый ∞^1 циклов различных циклических систем. Приравнивая M, N и P к нулю, получим для определения поверхности уравнения

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\ln\frac{r}{r_1}=0,\quad \frac{\partial^3\ln r}{\partial u\,\partial v^2}=\frac{\partial^2\ln r}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial\ln rr_1}{\partial v},\\ &\frac{\partial^3\ln r_1}{\partial u^2\,\partial v}=\frac{\partial^2\ln r_1}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial\ln rr_1}{\partial u}.\end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Первое из этих уравнений показывает, что отношение $\frac{r_1}{r}$ есть произведение функции одного u на функцию одного v. Следовательно, выбирая подходящим образом параметры u, v, приведем эти функции к единице и будем иметь $r_1=r$. Тогда два других уравнения (70) интегрируются и дают для r^2 уравнение Лиувилля

$$\frac{\partial^2\ln r}{\partial u\,\partial v}=\frac{r^2}{k^2},\quad k=\text{const},$$

откуда

$$r=k\frac{\sqrt{U_1'V_1'}}{U_1+V_1}. \tag{71}$$

Если это выражение внести в основные уравнения теории поверхностей, то получим для U_1, V_1 диференциальные уравнения. Например, если $k=1$, то получим $U_1'=c_1U_1^2+c_2U_1+c_3$, где все $c_i=\text{const}$, и V остается произвольной.

Уравнения (67) имеют смысл только в том случае, если r и r_1 не равны нулю. Если $r=0$, то уравнение (66) дает $r_1 = V_2 \operatorname{ctg} \alpha$, следовательно, во всяком случае

$$\frac{\partial^2 \ln r_1}{\partial u\, \partial v} = 0. \tag{72}$$

Внося $r=0$ в основные уравнения теории поверхностей, получим систему

$$\frac{\partial p_1}{\partial u} = -r_1 q, \quad \frac{\partial q}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial r_1}{\partial u} = q p_1. \tag{73}$$

Система уравнений (72) и (73) имеет два решения:

a) Если $q=0$, то получаем, выбирая параметры u, v, $r = r_1 = q = 0$, $p_1 = 1$. Поверхность P является цилиндром.

Линейный элемент сферического изображения циклической конгруэнции принимает вид

$$ds'^2 = \left(\frac{U'V}{U^2+V^2}\right)^2 du^2 + 2\frac{U'V'UV}{(U^2+V^2)^2}\, du\, dv + \\ + \left[\left(\frac{V'U}{U^2+V^2}\right)^2 + \frac{V^2}{U^2+V^2}\right] dv^2. \tag{74}$$

b) Если q — не нуль, то его можно привести к единице выбором параметра u, и система (72), (73) даст

$$r=0, \quad r_1 = \sin u, \quad q=1, \quad p_1 = \cos u.$$

Поверхность P — произвольная поверхность вращения или ее преобразование Петерсона. Циклическая конгруэнция определена линейным элементом своего сферического изображения

$$\left.\begin{aligned} ds'^2 = \frac{V^2(1+V^2)}{(\sin^2 u + V^2)^2}\, du^2 - 2\frac{VV' \sin u \cos u}{(\sin^2 u + V^2)^2}\, du\, dv + \\ + \left\{\frac{V'^2}{(\sin^2 u + V^2)^2} + \frac{2V' + \cos^2 u}{\sin^2 u + V^2} + 1\right\} \sin^2 u\, dv^2. \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

Глава V.

ПОВЕРХНОСТИ ФОССА.

§ 1. Конгруэнции Гишара.

80. Поверхности Фосса занимают особое место среди поверхностей, обладающих главным основанием, и по своей связи с поверхностями постоянной отрицательной кривизны и благодаря целому ряду задач, которые приводят к поверхностям Фосса.

Фосс [14] поставил задачу отыскания поверхности, обладающей сопряженной системой геодезических линий. Отнесем поверхность к этой сопряженной системе. Так как координатные линии — геодезические, то линейный элемент характеризуется равенствами [Т. П. 117 (3)].

$$\begin{Bmatrix}1\ 1\\2\end{Bmatrix} = 0, \quad \begin{Bmatrix}2\ 2\\1\end{Bmatrix} = 0. \tag{1}$$

В этом случае уравнения (8) главы I дадут

$$\frac{\partial \ln \delta}{\partial v} = -\begin{Bmatrix}2\ 2\\2\end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial \ln \delta''}{\partial u} = -\begin{Bmatrix}1\ 1\\1\end{Bmatrix}. \tag{2}$$

Если написать открыто скобки Кристоффеля, то первое из этих уравнений примет вид [Т. П. 197]

$$\frac{\partial \ln \delta}{\partial v} = \frac{2F\frac{\partial F}{\partial v} - E\frac{\partial G}{\partial v}}{2(EG-F^2)} - \frac{F\frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG-F^2)}.$$

Между тем второе из уравнений (1) дает

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 2\frac{\partial F}{\partial v} - F\frac{\partial \ln G}{\partial v}.$$

Внося это в предыдущие уравнения, получим

$$\frac{\partial \ln \delta}{\partial v} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \ln G}{\partial v}.$$

Следовательно, интегрируя уравнения (2), получим

$$\delta = \frac{U}{\sqrt{G}}, \quad \delta'' = \frac{V}{\sqrt{E}}. \tag{3}$$

Произвольные функции U, V можно привести к единице выбором параметров.

Если ввести угол ω между координатными линиями, так что

$$F = \sqrt{EG} \cos \omega,$$

то уравнения (1) можно привести к виду [Т. П. 197]

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}&=-\sqrt{E}\operatorname{ctg}\omega\frac{\partial\omega}{\partial v}-\sqrt{G}\frac{1}{\sin\omega}\frac{\partial\omega}{\partial u},\\ \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}&=-\sqrt{E}\frac{1}{\sin\omega}\frac{\partial\omega}{\partial v}-\sqrt{G}\operatorname{ctg}\omega\frac{\partial\omega}{\partial u}.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Внося выражения (3) в уравнение Гаусса и пользуясь уравнениями (4), получим для ω уравнение [Т. П. 197]

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}=\sin\omega.\tag{5}$$

Это — то самое уравнение, которое определяет сферическое изображение поверхности постоянной отрицательной кривизны, отнесенной к асимптотическим линиям [Т. П. 111],

$$ds'^2=du^2-2\cos\omega\,du\,dv+dv^2.\tag{6}$$

81. Результаты Фосса были вновь получены Гишаром [16], [17], [21] из совершенно других соображений. Гишар ищет конгруэнцию, у которой фокальные сети (линии фокальных поверхностей, соответствующие развертывающимся поверхностям конгруэнции) состоят из линий кривизны.

Отнесем конгруэнцию к развертывающимся поверхностям u, v и пусть

$$ds'^2=e\,du^2+2\sqrt{eg}\cos\omega\,du\,dv+g\,dv^2\tag{7}$$

— линейный элемент сферического изображения конгруэнции. Построим прямой трехгранник так, как мы это делали в n° 39; две оси e_1 и e_2 делят пополам углы между координатными линиями сферического изображения конгруэнции, а третья ось e_3 параллельна лучу конгруэнции. Направляющие косинусы этих осей удовлетворяют системе уравнений (18), (19) главы III. Пусть радиус-вектор M определяет среднюю точку луча. Обозначим через ρ половину фокального расстояния. Тогда два фокуса луча F_1 и F_2 определяются радиусами-векторами

$$F_1=M+\rho e_3,\quad F_2=M-\rho e_3.\tag{8}$$

Если они соответствуют развертывающимся поверхностям u и v, то касательная к линии u на поверхности F_1 совпадает с лучом. То же справедливо для линии v на поверхности F_2:

$$\frac{\partial F_1}{\partial u}=he_3,\quad\frac{\partial F_2}{\partial v}=le_3,$$

где h и l — множители пропорциональности. Внося сюда значения F_1 и F_2 из соотношений (8), получим

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial u}&=\left(h-\frac{\partial\rho}{\partial u}\right)e_3-\rho\frac{\partial e_3}{\partial u},\\ \frac{\partial M}{\partial v}&=\left(l+\frac{\partial\rho}{\partial v}\right)e_3+\rho\frac{\partial e_3}{\partial v}.\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

Диференцируя соотношения (9) и, исключая производные от M с помощью уравнения [Т. П. 94 (4)]

$$\frac{\partial^2 e_3}{\partial u\,\partial v}=a\frac{\partial e_3}{\partial u}+b\frac{\partial e_3}{\partial v}-\sqrt{eg}\cos\omega e_3,\tag{10a}$$

где

$$a=\left\{\begin{matrix}1\ 2\\ 1\end{matrix}\right\}',\quad b=\left\{\begin{matrix}1\ 2\\ 2\end{matrix}\right\}'\tag{10b}$$

— скобки Кристоффеля, вычисленные для линейного элемента (7), получим уравнение вида

$$A\frac{\partial e_3}{\partial u}+B\frac{\partial e_3}{\partial v}+Ce_3=0.$$

Так как векторы e_3, e_{3u}, e_{3v} не лежат в одной плоскости и, следовательно, не могут быть связаны линейным соотношением, то все три коэфициента A, B, C равны нулю, и мы получаем систему

$$\left.\begin{aligned}&l=-2\left(\frac{\partial\rho}{\partial v}+a\rho\right),\quad h=2\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}+b\rho\right),\\ &\frac{\partial h}{\partial v}-\frac{\partial l}{\partial u}-2\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v}+2\rho\sqrt{eg}\cos\omega=0.\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

Исключая h и l, получим уравнение в частных производных 2-го порядка для ρ

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v}+a\frac{\partial\rho}{\partial u}+b\frac{\partial\rho}{\partial v}+\left(\frac{\partial a}{\partial u}+\frac{\partial b}{\partial v}+\sqrt{eg}\cos\omega\right)\rho=0,\tag{12}$$

которое мы уже встречали [глава IV, стр. 191, (43)].

Внося значения h и l в уравнения (9) и пользуясь для производных от e_3 формулами (18) главы III, получим

$$\left.\begin{aligned}M_u&=\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}+2b\rho\right)e_3-\rho\sqrt{e}\sin\frac{\omega}{2}e_1-\rho\sqrt{e}\cos\frac{\omega}{2}e_2,\\ M_v&=-\left(\frac{\partial\rho}{\partial v}+2a\rho\right)e_3-\rho\sqrt{g}\sin\frac{\omega}{2}e_1+\rho\sqrt{g}\cos\frac{\omega}{2}e_2,\end{aligned}\right\}\tag{13a}$$

а диференцируя (8), будем иметь

$$\left.\begin{aligned}F_{1u}&=2\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}+b\rho\right)e_3,\\ F_{1v}&=-2a\rho e_3-2\rho\sqrt{g}\sin\frac{\omega}{2}e_1+2\rho\sqrt{g}\cos\frac{\omega}{2}e_2,\\ F_{2u}&=2b\rho e_3-2\rho\sqrt{e}\sin\frac{\omega}{2}e_1-2\rho\sqrt{e}\cos\frac{\omega}{2}e_2,\\ F_{2v}&=-2\left(\frac{\partial\rho}{\partial v}+a\rho\right)e_3.\end{aligned}\right\}\tag{13b}$$

Отсюда линейные элементы обеих фокальных полостей будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} ds_1^2 &= 4\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}+b\rho\right)^2 du^2 - 8a\rho\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}+b\rho\right)du\,dv + \\ &\quad + 4\rho^2(a^2+g)\,dv^2, \\ ds_2^2 &= 4\rho^2(b^2+e)\,du^2 - 8b\rho\left(\frac{\partial\rho}{\partial v}+a\rho\right)du\,dv + \\ &\quad + 4\left(\frac{\partial\rho}{\partial v}+a\rho\right)dv^2, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

а единичные векторы $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ нормалей фокальных полостей —

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{n}_1 &= -\boldsymbol{e}_1\cos\frac{\omega}{2} - \boldsymbol{e}_2\sin\frac{\omega}{2}, \\ \boldsymbol{n}_2 &= \boldsymbol{e}_1\cos\frac{\omega}{2} - \boldsymbol{e}_2\sin\frac{\omega}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Следовательно, коэфициенты второй квадратичной формы будут

$$\left.\begin{aligned} &D_1 = 2\sqrt{e}\,\sin\omega\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}+b\rho\right), \\ &D_1' = 0, \quad D_1'' = -2\sqrt{g}\,\rho\left(\frac{\partial\omega}{\partial v}+b\sqrt{\frac{g}{e}}\sin\omega\right), \\ &D_2 = -2\sqrt{e}\,\rho\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}+a\sqrt{\frac{e}{g}}\sin\omega\right), \\ &D_2' = 0, \quad D_2'' = 2\sqrt{g}\,\sin\omega\left(\frac{\partial\rho}{\partial v}+a\rho\right). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

и кривизны

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= -\frac{\sqrt{\frac{e}{g}}\sin\omega\left(\frac{\partial\omega}{\partial v}+b\sqrt{\frac{g}{e}}\sin\omega\right)}{4\rho\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}+b\rho\right)}, \\ K_2 &= -\frac{\sqrt{\frac{g}{e}}\sin\omega\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}+a\sqrt{\frac{e}{g}}\sin\omega\right)}{4\rho\left(\frac{\partial\rho}{\partial v}+a\rho\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

82. Приложим эти формулы к определению конгруэнции Гишара. По условию координатная система u, v должна быть ортогональна и на первой и на второй фокальных полостях. Следовательно, по формулам (14), если поверхности не вырождаются, имеем $a=b=0$, следовательно, в силу (10b)

$$\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix}' = 0, \quad \begin{Bmatrix}1\ 2\\ 2\end{Bmatrix}' = 0.$$

Выписывая полностью эти скобки Кристоффеля [Т. П. 197], получим

$$\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v} - \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\cos\omega = 0, \quad \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u} - \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\cos\omega = 0.$$

Следовательно, $\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v} = \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u} = 0$ и, значит, выбором параметров u, v можно e и g привести к единице.

Таким образом сферическое изображение развертывающихся поверхностей конгруэнции Гишара совпадает с изображением асимптотических линий поверхности постоянной отрицательной кривизны [Т. П. 111].

Уравнение Гаусса (20) главы III для сферического изображения принимает теперь вид

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} = -\sin\omega \tag{18}$$

и уравнение Гишара (12) для фокального расстояния

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} + \rho\cos\omega = 0. \tag{19}$$

Это уравнение всегда допускает решения

$$\rho = \frac{\partial\omega}{\partial u}, \quad \rho = \frac{\partial\omega}{\partial v}.$$

При этом вторая квадратичная форма (16) пропорциональна первой (14); следовательно, одна из фокальных поверхностей является сферой.

Две квадратичные формы первой, например, фокальной поверхности, принимают вид

$$ds_1^2 = 4\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}\right)^2 du^2 + 4\rho^2 dv^2; \quad 2\frac{\partial\rho}{\partial u}\sin\omega\,du^2 - 2\rho\frac{\partial\omega}{\partial v}dv^2. \tag{20}$$

Эти поверхности, очевидно, не произвольны. Они носят название *поверхностей Гишара*.

Луч конгруэнции касается на поверхности F_1 линии u, на поверхности F_2 — линии v.

Рассмотрим поверхности центров кривизны для поверхности F_1. Нормаль $\boldsymbol{n}_1$ поверхности F_1 описывает конгруэнцию, развертывающиеся поверхности которой соответствуют линиям кривизны F_1, т. е. линиям u, v. Два фокуса этой нормали N_1 и N_1' описывают две полости поверхности центров кривизны для F_1. Рассмотрим ту полость поверхности центров N_1, на которой луч $\boldsymbol{n}_1$ касается линии u. Нормаль к этой поверхности параллельна касательной к линии u на поверхности F_1, т. е. параллельна лучу F_1F_2 конгруэнции Гишара [Т. П. 73].

С другой стороны, на поверхности N_1 линии u, v образуют сопряженную систему, ибо они соответствуют развертывающимся поверхностям конгруэнции нормалей $\boldsymbol{n}_1$.

Следовательно, сферическое изображение сопряженной системы u, v на поверхности N_1 совпадает с изображением развертывающихся поверхностей u, v конгруэнции Гишара, т. е. с изображением асимптотических линий поверхности постоянной отрицательной кривизны. Значит, поверхность N_1 есть поверхность Фосса. Таким образом у каждой поверхности Гишара одна полость поверхности центров кривизны, а именно та, нормаль которой параллельна лучу конгруэнции Гишара, является поверхностью Фосса.

83. Обратно, если дана поверхность Фосса V, обладающая сопряженной системой геодезических линий u, v, то конгруэнция касательных к геодезическим u или v является нормальной [Т. П. 170]. Поверхности G, нормальные к такой конгруэнции, суть поверхности Гишара, и та касательная к линии кривизны на поверхности G, которая параллельна нормали к поверхности V, описывает конгруэнции Гишара.

Действительно, развертывающиеся поверхности этой конгруэнции соответствуют линиям кривизны на поверхности G (ибо конгруэнция описана касательной к линии кривизны), а эти линии кривизны соответствуют развертывающимся поверхностям конгруэнции нормалей к поверхности G, т. е. сопряженной системе u, v на поверхности Фосса V. При этом сферическое изображение развертывающихся поверхностей конгруэнции совпадает с изображением сопряженной системы Фосса, т. е. с изображением асимптотических линий поверхности постоянной отрицательной кривизны.

Если подсчитать смешанную производную $\frac{\partial^2 e_3}{\partial u\,\partial v}$ по формулам (18) главы III и принять во внимание, что теперь

$$r = -\frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial u}, \quad r_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial v},$$

то сейчас же заметим, что три направляющих косинуса нормали e_3 поверхности Фосса удовлетворяют одному и тому же уравнению Мутара

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} + \theta\cos\omega = 0. \tag{21}$$

Этому же уравнению, конечно, будет удовлетворять и четвертая тангенциальная координата поверхности Фосса N_1, а именно расстояние ее касательной плоскости от начала координат. Так как эта касательная плоскость перпендикулярна к лучу e_3 конгруэнции Гишара и проходит через первый фокус F_1, то это расстояние равно

$$w = F_1 e_3.$$

Диференцируя это равенство и пользуясь формулами (13в) и (18) главы III, мы сейчас же убедимся, что w удовлетворяет уравнению (21).

Если провести касательные к линиям u на поверхности N_1, взять какую-нибудь ортогональную к этим касательным поверхность F_1, провести касательные к линиям u на выбранной поверхности F_1, перейти ко второй фокальной полости F_2 этой конгруэнции, провести нормали к этой поверхности F_2 и рассмотреть ту фокальную полость N_2 этой конгруэнции нормалей, на которой они огибают линии v, то мы найдем новую поверхность Фосса N_2.

Нормаль этой поверхности параллельна лучу F_1F_2 соответствующей конгруэнции Гишара и, следовательно, параллельна нормали к исходной поверхности N_1. Следовательно, первые три тангенциальные координаты поверхности N_2 остаются теми же, что и у поверхности N_1. Четвертая координата w' есть расстояние ее касательной плоскости от начала координат. Эта касательная плоскость перпендикулярна к лучу F_1F_2 и проходит через точку F_2. Следовательно,

$$w' = F_2 e_3 = (F_1 - 2\rho e_3)\,e_3 = w - 2\rho. \tag{22}$$

Если обозначить

$$w_1 = F_1 e_1, \quad w_2 = F_1 e_2,$$

то, диференцируя $w = F_1 e_3$ и пользуясь (13b) и (18) главы III, получим

$$w_u = 2\rho_u + w_1\sin\frac{\omega}{2} + w_2\cos\frac{\omega}{2},$$

$$w_v = -w_1\sin\frac{\omega}{2} + w_2\cos\frac{\omega}{2},$$

$$w_{uu} = 2\rho_{uu} - w + \left(w_1\cos\frac{\omega}{2} - w_2\sin\frac{\omega}{2}\right)\omega_u,$$

$$w_{vv} = 2\rho - w - \left(w_1\cos\frac{\omega}{2} + w_2\sin\frac{\omega}{2}\right)\omega_v.$$

Отсюда, исключая w_1 и w_2, получим две комбинации

$$\left.\begin{aligned} A &= w_{uu} + w + \omega_u\operatorname{ctg}\omega\, w_u - \frac{\omega_u}{\sin\omega}w_v = 2\rho_{uu} - 2\rho_u\operatorname{ctg}\omega\cdot\omega_u,\\ B &= w_{vv} + w + \frac{\omega_v}{\sin\omega}w_u - \omega_v\operatorname{ctg}\omega\, w_v = 2\rho - 2\rho_u\frac{\omega_v}{\sin\omega},\end{aligned}\right\} \tag{23a}$$

но, очевидно,

$$2\left(\frac{\rho_u}{\sin\omega}\right)_u = \frac{A}{\sin\omega}, \quad 2\left(\frac{\rho_u}{\sin\omega}\right)_v = B\operatorname{ctg}\omega.$$

Следовательно,

$$t = 2\frac{\rho_u}{\sin\omega} = \int\left(\frac{A}{\sin\omega}du + B\operatorname{ctg}\omega\,dv\right) \tag{23b}$$

и

$$2\rho = B + t\omega_v. \tag{23c}$$

Формулы (22), (23a — c) определяют четвертую тангенциальную координату поверхности N_2. Эти формулы дают метод преобразования поверхностей Фосса.

Величина t определяется по формуле (23b) с аддитивной постоянной. Изменяя эту постоянную, мы прибавляем к 2ρ величину $C\omega_v$.

Если проводить касательные к линиям v на поверхности N_1, то можно построить конгруэнцию Гишара $\overline{F_1}\,\overline{F_2}$ и некоторую поверхность Фосса $\overline{N_2}$ как поверхность центров для $\overline{F_2}$. Эта поверхность будет иметь то же сферическое изображение, что и N_1, а четвертая тангенциальная координата $\overline{w}$ определится по формулам

$$\overline{w} = w - A - \overline{t}\omega_u, \quad \overline{t} = \int\left(A\operatorname{ctg}\omega\,du + \frac{B}{\sin\omega}dv\right). \tag{24}$$

Интересно отметить, что соответствующие точки поверхностей N_2 и $\overline{N_2}$ располагаются на двух прямых, которые пересекаются в точке N_1', — втором центре кривизны поверхности F_1 (Гамбье [133]).

84. Преобразования поверхности Фосса, связанные с построением конгруэнции Гишара, не меняют сферического изображения поверхности и поэтому не выходят за пределы преобразования Петерсона.

Преобразование Бианки-Эйзенхарта имеет место и для поверхностей Фосса и для присоединенных к ним поверхностей постоянной отрицательной кривизны, и здесь оно принимает особенно простую форму преобразования Бэклунда.

Потребуем, чтобы в конгруэнции W обе фокальные полости были одной и той же постоянной кривизны.

Так как асимптотические линии на фокальных полостях соответствуют друг другу, то вторые квадратичные формы (16) пропорциональны, т. е.

$$\left(\omega_u + a\sqrt{\frac{e}{g}}\sin\omega\right)\left(\omega_v + b\sqrt{\frac{g}{e}}\sin\omega\right) = \\ = \sin^2\omega\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial u} + b\right)\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial v} + a\right). \tag{25}$$

При этом условии, перемножая кривизны (17)

$$K_1K_2 = \frac{\sin^4\omega}{16\rho^4}, \tag{26}$$

получаем теорему Рибокура (см. § 1 главы III, 114).

Так как по условию обе кривизны K_1 и K_2 постоянны, то

$$K_1 = K_2 = -\frac{1}{4d^2}, \quad \rho = d\sin\omega, \quad d = \text{const}. \tag{27}$$

Внося это в уравнения (17), получим

$$\sqrt{e}\,\frac{\partial\omega}{\partial v} - \sqrt{g}\cos\omega\frac{\partial\omega}{\partial u} = 0, \quad \sqrt{g}\,\frac{\partial\omega}{\partial u} - \sqrt{e}\cos\omega\frac{\partial\omega}{\partial v} = 0,$$

откуда $\frac{\partial\omega}{\partial u} = \frac{\partial\omega}{\partial v} = 0$ и, следовательно,

$$\omega = \text{const}, \quad \rho = \text{const}, \tag{28}$$

ибо предположение $e = 0$ или $g = 0$ приводит к вырождению фокальных поверхностей.

Обратно, если расстояние между фокусами и угол фокальных плоскостей постоянны, т. е. при наличии уравнений (28), — условие (25) обращается в тождество и формулы (17) дают $K_1 = K_2 = -\frac{\sin^2\omega}{4\rho^2}$. Следовательно, конгруэнция W и обе фокальные полости одной и той же постоянной отрицательной кривизны. Нетрудно проверить, что линии кривизны на фокальных полостях соответствуют. Такая конгруэнция называется *псевдосферической*. При помощи этой конгруэнции совершается преобразование Бэклунда.

Если в формулах (23), (24), (25) главы III считать σ (угол фокальных поверхностей) и ρ (расстояние между граничными точками луча) постоянными, то они определят преобразование Бэклунда поверхности постоянной отрицательной кривизны.

Постоянное расстояние между соответствующими точками связанных преобразованиями поверхностей и постоянный угол нормалей приводят к целому ряду замечательных конфигураций. Так, выбрав определенное значение σ, мы получим из (25) главы III угол α с произвольными постоянными, следовательно, ∞^1 преобразованных поверхностей. Соответствующие точки их лежат в касательной плоскости к первоначальной поверхности M на одном и том же расстоянии от точки касания M, следовательно, образуют окружность с центром в точке M. Касательные плоскости проходят через точку M и образуют один и тот же угол σ с касательной плоскостью к поверхности M.

Если $\sigma = \frac{\pi}{2}$, то все конгруэнции нормальны. Касательные плоскости преобразованных поверхностей проходят через нормаль к поверхности M и, следовательно, перпендикулярны к окружности, которую образуют точки их касания. Эта окружность описывает циклическую систему и преобразованные поверхности являются поверхностями, нормальными к циклам системы.

Конфигурация теоремы переместительности по формуле (32) главы III содержит четыре псевдосферические конгруэнции, попарно с одним и тем же углом σ и, следовательно, с одним и тем же расстоянием между фокусами. Косой четырехугольник, определяемый четырьмя соответствующими точками M, M_1, M_2, M' преобразуемых поверхностей, имеет, следовательно, попарно равные стороны $MM_1 = M_2M' = \rho\sin\sigma'$, $MM_2 = M_1M' = \rho\sin\sigma''$ и попарно равные углы между плоскостями (касательными плоскостями наших поверхностей) $\angle M_2MM_1M' = \angle MM_2M'M_1 = \sigma'$ и $\angle M_1MM_2M' = \angle MM_1M'M_2 = \sigma''$. При изменении параметров u, v этот четырехугольник перемещается так, что вершины его описывают четыре поверхности одной и той же постоянной отрицательной кривизны; четыре стороны образуют четыре псевдосферические конгруэнции, фокальными поверхностями которой служат поверхности, описанные вершинами. При этом четырехугольник перемещается как одно неизменяемое целое, ибо длина сторон и величина двугранных углов не меняются.

85. Формулы (61a), (61b) главы III, если там считать σ и ρ постоянными, определят соответствующие преобразованию Бэклунда преобразование Эйзенхарта. В касательной плоскости поверхности Фосса найдется луч нормальной конгруэнции, развертывающиеся поверхности которой соответствуют сопряженным геодезическим, а фокусы лежат на касательных к ним. Фокальные плоскости образуют постоянные углы с касательной плоскостью к поверхности Фосса. Плоскость, симметричная к ней, огибает новую поверхность Фосса, которая связана преобразованием Эйзенхарта с первоначальной. Касательные к сопряженным геодезическим обеих поверхностей Фосса соответственно пересекаются; следовательно, соответствующие им поверхности Гишара пересекаются нормалями и соответствуют линиям кривизны. Было бы интересно выяснить более подробно их взаимное расположение и построить для них преобразование, эквивалентное преобразованию Бэклунда-Эйзенхарта.

§ 2. Изгибание поверхности, переводящее асимптотические линии в сопряженную систему.

86. К поверхностям Фосса можно притти, исходя из другой задачи изгибания. Еще Демулен в небольшой заметке [51], [64] отметил, что только при изгибании поверхностей Фосса асимптотические линии пе-

реходят в сопряженную систему. Эйзенхарт в большом мемуаре [71] рассматривал эту задачу, не замечая, что он при этом имеет дело с поверхностями Фосса. В последнее время Гамбье [109], [133] снова поднял этот вопрос. Исходной точкой ему послужило известное свойство присоединенных минимальных поверхностей [Т. П. 150]: линейная комбинация с постоянными коэфициентами вторых квадратичных форм налагающихся поверхностей S_1 и S_2 определяет внутренним образом ∞^1 налагающихся поверхностей S.

Пусть D_1, D'_1, D''_1 и D_2, D'_2, D''_2 — коэфициенты вторых квадратичных форм на поверхностях S_1 и S_2 и пусть

$$hD_1+kD_2,\quad hD'_1+kD'_2,\quad hD''_1+kD''_2,\quad h,\ k=\text{const}$$

— соответственные коэфициенты третьей поверхности S. Так как все поверхности налагаются, то линейный элемент у них общий.

Нетрудно заметить, что новые коэфициенты удовлетворяют уравнению Кодацци, ибо они линейны и однородны относительно этих коэфициентов.

Если их внести в уравнение Гаусса

$$DD''-D'^2=\Omega,$$

где Ω зависит от линейного элемента поверхности и равно произведению кривизны на двучлен $EG-F^2$, то получим уравнение вида

$$h^2\Omega+hk\Omega_{12}+k^2\Omega=\Omega, \tag{29}$$

где

$$\Omega_{12}=D_1D''_2+D_2D''_1-2\,D'_1D'_2. \tag{30}$$

Уравнение (29), очевидно, равносильно двум условиям

$$\Omega_{12}=m\Omega, \tag{31a}$$

$$k^2+mkh+h^2=1,\quad m=\text{const}. \tag{31b}$$

Если (31a) удовлетворено, то (31b) дает ∞^1 налагающихся поверхностей S; параметры h и k будут связаны только соотношением (31b) так, что один из них останется произвольным.

При этом очевидно, что общая сопряженная система поверхностей S_1 и S_2 будет сопряжена и на всех поверхностях S. Следовательно, при непрерывном изменении h поверхность S изгибается на главном основании.

Особый случай получается, если оба семейства общей сопряженной системы на поверхностях S_1, S_2 совпадают. Эти линии становятся тогда асимптотическими, а так как при изгибании они остаются асимптотическими же, то [Т. П. 102], следовательно, они являются прямолинейными образующими.

Нетрудно заметить, что любая линейчатая поверхность, изгибаемая с сохранением прямолинейных образующих, удовлетворит уравнению (31a). Полагая $D_1=D_2=0$, получим из (30), (31a), что

$$-2D_1'^2=-mD_1'^2.$$

Следовательно, $m=2$. И, наоборот, если $m=2$, то сейчас же придем к линейчатым поверхностям. Действительно, если поверхности S_1 и

S_2 имеют общую сопряженную систему, то, относя их к такой системе, получим $D_1'=D_2'=0$, $D_1D_1''=D_2D_2''$, и следовательно, если в уравнении (31a) заменить $2\Omega=D_1D_1''+D_2D_2''$, то получим невозможное равенство

$$(D_2-D_1)(D_1''-D_2'')=0.$$

К такому же результату придем, если $m=-2$. Оба эти случая мы в дальнейшем исключаем.

Будем называть ассоциированными все ∞^1 поверхностей $S(h,\ k)$, удовлетворяющих условиям (31a), (31b). Вместо заданной пары поверхностей S_1, S_2 можно выбрать любую другую пару из числа $S(h,\ k)$, не меняя при этом семейства, но, конечно, с другой постоянной m. Если, например, взять S_1 и $S(h,\ k)$, то получим новую постоянную

$$m'=2h+km.$$

Выбирая

$$k=\frac{2\varepsilon}{\sqrt{4-m^2}},\quad h=\frac{-\varepsilon m}{\sqrt{4-m^2}},\quad \varepsilon=\pm 1,$$

получим $m'=0$. Такая поверхность S называется присоединенной (adjoint) к поверхности S_1.

Пусть S_1 и S_2 присоединенные поверхности, следовательно, $m=0$. Уравнение (31a) в силу (30) примет вид

$$D_1D''_2+D_2D''_1-2D'_1D'_2=0. \tag{32}$$

Если поверхность S_1 отнести к асимптотическим линиям и внести в (32) $D_1=D''_1=0$, то сейчас же получим $D'_2=0$. Следовательно, асимптотическим линиям на поверхности S_1 соответствует на поверхности S_2 сопряженная система, и наоборот, если асимптотические линии на поверхности S_1 налагаются на сопряженную систему S_2, то уравнение (31a) удовлетворено и m равно нулю.

87. Отнесем пару присоединенных поверхностей S_1, S_2 к общей сопряженной системе, положим $D'_1=0$, $D'_2=0$. Тогда уравнение Гаусса и уравнение (32) дадут

$$D_1D''_1-D_2D''_2=0,\quad D_1D''_2+D_2D''_1=0,$$

откуда

$$D''_2=iD''_1,\quad D_2=-iD_1,\quad D'_1=D'_2=0. \tag{33}$$

Внося эти значения в уравнения Кодацци (5), (6) главы I, немедленно получим

$$\left\{ {1\,1 \atop 2} \right\}=0,\quad \left\{ {2\,2 \atop 1} \right\}=0. \tag{34}$$

Следовательно, координатные линии являются геодезическими [Т. П. 117 (3)], поверхности S_1 и S_2 и все семейство поверхностей $S(h,\ k)$ обладают сопряженной системой геодезических и, значит, являются поверхностями Фосса. Обратно, всякая поверхность Фосса, очевидно, представляет решение нашей задачи, ибо, внося в уравнение (8) главы I значения (34), заметим, что они допускают решения вида (33), откуда следует (31a), причем $m=0$.

Замечательно, что действительная поверхность Фосса S_1 с действительной системой сопряженных геодезических линий имеет всегда мнимую присоединенную поверхность S_2, как это следует из формул (33). Если же обе поверхности S_1 и S_2 действительны и действительные асимптотические переходят в сопряженную систему, то общая сопряженная система (геодезических линий) будет мнима; если в уравнение (2) главы I внести $D_1=D_1''=0$, $D'=0$, то получим для общей сопряженной системы уравнение

$$D\,du^2-D''\,dv^2=0,$$

а это уравнение определяет мнимые линии, ибо кривизна поверхности отрицательна и $DD''<0$.

Глава VI.

ИЗГИБАНИЕ НА КИНЕМАТИЧЕСКОМ ОСНОВАНИИ.

§ 1. Проблема качения поверхности по ее изгибанию.

88. Изгибание поверхности на главном основании, изгибание линейчатой поверхности с сохранением прямолинейных образующих составляют частный случай общей проблемы изгибания поверхности, связанного некоторым условием.

В задаче изгибания поверхности линейный элемент бывает задан и поверхность определяется вполне своей второй квадратичной формой. Следовательно, всякое условие, наложенное на поверхность, может быть выражено одним или несколькими уравнениями, связывающими коэфициенты D, D', D'' ее второй квадратичной формы и линейный элемент. Три количества D, D', D'' связаны прежде всего двумя диференциальными уравнениями Кодацци и одним конечным уравнением Гаусса. Если совокупность всех конечных уравнений, налагаемых на D, D', D'' определяет их, то непрерывное изгибание невозможно, — может существовать только несколько налагающихся поверхностей в зависимости от числа найденных решений D, D', D'', удовлетворяющих диференциальным уравнениям.

Следовательно, совокупность наложенных конечных уравнений в силу уравнения Гаусса должна быть эквивалентна одному уравнению.

Допустим, что условия, наложенные на поверхность, не дают диференциальных уравнений относительно D, D', D''; они сводятся, следовательно, в силу уравнения Гаусса к одному уравнению. Форма этого уравнения, очевидно, определяет характер изгибания.

Простейший вид изгибания получится, если это уравнение имеет вид

$$\alpha D+2\beta D'+\gamma D''=C, \tag{1}$$

где α, β, γ и C — какие-то функции от коэфициентов линейного элемента и их производных.

Рассмотрим диференциальное уравнение

$$\gamma\,du^2-2\beta\,du\,dv+\alpha\,dv^2=0. \tag{2}$$

Если оно определяет два семейства линий на поверхности, то мы выберем эти линии за координатные. Тогда соотношение (1) примет вид

$$\overline{D'}=C\frac{M}{\alpha\gamma-\beta^2}, \tag{3}$$

где M зависит от выбора параметров, но не меняется при изгибании.

Если корни $\frac{du}{dv}$ квадратного уравнения (2) равны, то мы составим новую координатную сеть: из линий (2) и еще, например, из линий u. Тогда уравнение (1) примет вид

$$\overline{D}=\frac{C}{\alpha}M. \tag{4}$$

Оба случая (3) и (4) приводятся к знакомым изгибаниям, если $C=0$. Уравнение (3) показывает тогда, что система (2) сопряжена, следовательно, изгибание — на главном основании (2). Уравнение (4) покажет, что линии (2) — асимптотические. Так как при изгибании они остаются асимптотическими, то в силу теоремы Бонне [Т. П. 102] эти линии являются прямыми, а поверхность — линейчатой и изгибается с сохранением прямолинейных образующих.

Если C — не нуль, то изгибание — более общего характера. Чтобы выяснить его геометрический смысл, надо обратиться к теории качения поверхности по его изгибанию.

89. Пусть S и S' — две налагающиеся поверхности. Между точками поверхностей S и S' установлено, следовательно, соответствие так, что длины дуг соответствующих кривых равны. Пусть M и M' — пара соответствующих точек. Поместим поверхность S так, чтобы точки M и M' совместились и каждая кривая на поверхности S, проходящая через точку M, касалась соответствующей ей кривой на поверхности S' в точке M'. Это, очевидно, возможно; для этого надо только, совместив касательные плоскости к поверхностям S и S' в общей точке их M, M', вращать поверхность S около ее нормали в точке M', пока не совпадет пара соответствующих касательных Mt и $M't'$. В силу равенства углов между соответствующими кривыми на поверхностях S и S' после этого совпадут все соответствующие касательные или расположатся симметрично относительно Mt. В последнем случае надо повернуть S около совпавшей касательной $Mt \equiv Mt'$ на 180° так, чтобы поверхность S поместилась с другой стороны общей касательной плоскости.

Рассмотрим [1] ∞^2 таких положений поверхности, которые получатся, если брать различные пары точек M и M'. Соответствующее движение с двумя степенями свободы называется качением (roulement) поверхности S по ее изгибании S'.

Элементарное движение, переводящее поверхность S из одного положения в другое, бесконечно близкое, очевидно, является вращением поверхности S около мгновенной оси вращения, проходящей через точку касания M и расположенной в общей касательной плоскости к поверхностям S и S'. Действительно, присоединим каждой точке поверхности S прямой трехгранник T. Пусть компоненты вращения этого трехгранника по осям трехгранника при его перемещении по поверхности S будут, как всегда, p, q, r, p_1, q_1, r_1. Обозначим компоненты такого же вращения, но взятые по осям какой-то произвольно выбранной прямоугольной системы координат T_0, неразрывно связанной с по-

[1] Дарбу [1], IV, гл. VI.

верхностью S, через P', Q', R', P_1', Q_1', R_1'. Они, очевидно, получаются из p, q, ... проектированием на новые оси и, следовательно,

$$\left.\begin{array}{ll} P'=a_{11}p+a_{12}q+a_{13}r, & P_1'=a_{11}p_1+a_{12}q_1+a_{13}r_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right\} \tag{5}$$

где через a_{ik} обозначен косинус угла между i-й неподвижной и k-й подвижной осями.

Если введем координаты x, y, z точки M относительно системы T_0, то компоненты ξ, η, ξ_1, η_1 по осям T поступательного движения точки M (вершина трехгранника T) определяются по формулам [Т. П. 67 (A')]

$$\frac{\partial x}{\partial u}=a_{11}\xi+a_{12}\eta, \quad \frac{\partial x}{\partial v}=a_{11}\xi_1+a_{12}\eta_1. \tag{6}$$

Определяя отсюда a_{ik}:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}&=\frac{\eta_1}{\xi\eta_1-\xi_1\eta}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\eta}{\xi\eta_1-\xi_1\eta}\frac{\partial x}{\partial v}, \\ a_{12}&=-\frac{\xi_1}{\xi\eta_1-\xi_1\eta}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\xi}{\xi\eta_1-\xi_1\eta}\frac{\partial x}{\partial v} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

и внося их значения в (5), получим

$$P'=\frac{p\eta_1-q\xi_1}{\xi\eta_1-\xi_1\eta}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{p\eta-q\xi}{\xi\eta_1-\xi_1\eta}\frac{\partial x}{\partial v}+a_{13}r,$$

$$P_1'=\frac{p_1\eta_1-q_1\xi_1}{\xi\eta_1-\xi_1\eta}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{p_1\eta-q_1\xi}{\xi\eta_1-\xi_1\eta}\frac{\partial x}{\partial v}+a_{13}r_1,$$

или, в силу основных формул [Т. П. 69 (15′)] и (5) главы I,

$$P'=\delta'\frac{\partial x}{\partial u}-\delta\frac{\partial x}{\partial v}+a_{13}r, \quad P_1'=\delta''\frac{\partial x}{\partial u}-\delta'\frac{\partial x}{\partial v}+a_{13}r_1. \tag{8}$$

Тот же трехгранник T можно присоединить к точке M' поверхности S'. Его перемещение, когда точка M' двигается по поверхности S', дает компоненты вращения, которые будут вычисляться по таким же формулам с заменой величин, относящихся к поверхности S, величинами, взятыми для поверхности S'.

Если мы обозначим через δ_1, δ_1', δ_1'' коэфициенты, определяемые формулами (5) главы I, для поверхности S', то компоненты P'', Q'', ... по осям T_0 движения трехгранника T при перемещении вершины M' по поверхности S' будут определяться формулами

$$P''=\delta_1'\frac{\partial x}{\partial u}-\delta_1\frac{\partial x}{\partial v}+a_{13}r, \quad P_1''=\delta_1''\frac{\partial x}{\partial u}-\delta_1'\frac{\partial x}{\partial v}+a_{18}r_1. \tag{9}$$

Допустим теперь, что криволинейные координаты u, v точки M получают бесконечно малые приращения. Точки M и M' перемещаются каждая по своей поверхности, трехгранник T перейдет в положение T' на поверхности S и в положение T'' на поверхности S'. Перемещение поверхности S, когда она катится по поверхности S', осуществляется тем движением, которое переводит трехгранник из положения T' в положение T''.

Это движение можно разложить на два: первое переводит T' в положение T, второе переводит его из положения T в положение T''.

Первое перемещение определяется компонентами

$$-P'du - P_1' dv, \ldots,$$

второе — компонентами

$$P''du + P_1''dv, \ldots$$

Следовательно, компоненты вращения трехгранника T, когда поверхность S катится по поверхности S', определяются разностями

$$P = P'' - P', \quad P_1 = P_1'' - P_1'$$

или, в силу (8), (9),

$$\left.\begin{aligned} P &= -(\delta' - \delta_1')\frac{\partial x}{\partial u} + (\delta - \delta_1)\frac{\partial x}{\partial v}, \\ P_1 &= -(\delta'' - \delta_1'')\frac{\partial x}{\partial u} + (\delta' - \delta_1')\frac{\partial x}{\partial v}. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Компоненты вращения являются вместе с тем компонентами вектора (скорости вращения), расположенного на мгновенной оси вращения. Так как они линейно выражены через $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \ldots$, т. е. через компоненты касательных к координатным линиям S в точке M, то, следовательно, мгновенная ось вращения лежит в касательной плоскости к поверхностям S и S'.

Так как мгновенная ось вращения проходит через M и лежит в касательной плоскости, то она совпадает с одной из касательных к поверхности S. Обозначим через $\delta u : \delta v$ отношения диференциалов при движении по кривой в направлении, определяемом этой касательной. Тогда, очевидно, мы будем иметь

$$P\,du + P_1\,dv = \frac{\partial x}{\partial u}\delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\delta v$$

и еще два уравнения, получаемые заменой x на y и z.

Внесем сюда вместо P, P_1 их выражения по формулам (10). Возвращаясь к коэфициентам второй квадратичной формы D, D', D'' и D_1, D_1', D_1'' по формулам (5) главы I, получим

$$-\frac{\partial x}{\partial u}\left[(D' - D_1')\,du + (D'' - D_1'')\,dv + \delta u\sqrt{EG - F^2}\right] +$$
$$+\frac{\partial x}{\partial v}\left[(D - D_1)\,du + (D' - D_1')\,dv - \delta v\sqrt{EG - F^2}\right] = 0$$

и такие же два уравнения для y и z. Так как x_u, y_u, z_u и x_v, y_v, z_v определяют два вектора касательных к линиям u и v, которые заведомо не совпадают, то коэфициенты при $\frac{\partial x}{\partial u}$ и $\frac{\partial x}{\partial v}$ обращаются в нуль.

Абсолютные величины диференциалов δu, δv нас не интересуют;

поэтому мы возьмем отношение $\delta u : \delta v$. Освобождаясь от знаменателя, получим уравнение

$$(D - D_1)\,du\,\delta u + (D' - D_1')(du\,\delta v + dv\,\delta u) +$$
$$+ (D'' - D_1'')\,dv\,\delta v = 0. \qquad (11)$$

Это уравнение связывает отношения диференциалов $du : dv$ и $\delta u : \delta v$. Первое отношение определяет перемещение точки касания M; второе — направление мгновенной оси вращения поверхности S при этом перемещении.

Уравнение (11), очевидно, не меняется, если поменять местами d и δ. Следовательно, соотношение между этими двумя направлениями взаимное. Бианки ([2], II, 113) называет эти два направления кинематически сопряженными.

90. Уравнение (11) определяет инволюцию кинематически сопряженных направлений на поверхностях S и S'. Эта инволюция, следовательно, известна, если даны вторые квадратичные формы налагающихся поверхностей.

Двойные элементы этой инволюции определяются уравнением

$$(D - D_1)\,du^2 + 2(D' - D_1')\,du\,dv + (D'' - D_1'')\,dv^2 = 0. \qquad (12)$$

Линии, определяемые этим уравнением, Фосс [1]) называет характеристической системой.

Если отнести пару налагающихся поверхностей S и S' к их характеристической системе, то уравнение (12) должно допускать корни $du = 0$ и $dv = 0$, следовательно,

$$D = D_1, \quad D'' = D_1''.$$

Внося эти значения в уравнение Гаусса, получим

$$D'^2 = D_1'^2.$$

Если при извлечении корня взять знак плюс, то получим конгруэнтные поверхности. Налагающиеся (но не конгруэнтные) поверхности определяются, следовательно, формулами

$$D_1 = D, \quad D_1' = -D', \quad D_1'' = D''. \qquad (13)$$

Отсюда следует, что линии характеристической сети обладают на каждой поверхности одной и той же нормальной кривизной.

Характеристическая сеть совпадает с асимптотическими линиями, если поверхности S и S' симметричны, ибо тогда $D = D'' = 0$, и квадратичные формы $D'du\,dv$ и $D_1'\,du\,dv$ отличаются только знаком.

Другой специальный случай представляет характеристическая сеть, сопряженная в смысле Дюпена. Тогда $D' = 0$, и обе поверхности конгруэнтны.

Возвращаясь к кинематически сопряженным системам, допустим, что кинематически сопряженная система на одной из поверхностей сопряжена в смысле Дюпена.

---

1) Ueber isometrischen Flächen, Math. Ann. 46, 1895.

Уравнение (11) покажет тогда, что эта система сопряжена и на другой поверхности. Именно на этом пути Рибокур [22] снова пришел к прекрасной теореме Петерсона об основании изгибания.

Если одно семейство кинематически сопряженной системы составлено на одной из поверхностей из асимптотических линий, то и на второй поверхности то же самое или другое семейство состоит из асимптотических линий. Действительно, относя обе поверхности к их общей кинематически сопряженной системе, мы получим, внося в (11) $du=0$, $dv=0$,

$$D'=D'_1.$$

Допустим теперь, что линии u на поверхности S асимптотические. Тогда $D=0$, и уравнение Гаусса

$$DD''-D'^2=D_1D_1''-D_1'^2$$

дает

$$D_1D_1''=0.$$

Если $D_1=0$, то линии u на поверхности S' тоже асимптотические и, следовательно [Т. П. 103], прямые. Обе поверхности линейчатые и налагаются с сохранением прямолинейных образующих.

Если $D_1''=0$, то на поверхности S' второе семейство v состоит из асимптотических линий.

Внося в уравнения Кодацци (6) главы I

$$\delta''=0, \quad \delta_1=0, \quad \delta'=\delta_1',$$

получим

$$\left.\begin{aligned} \delta_u'+2\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 2\end{Bmatrix}\delta' &= \begin{Bmatrix}1\ 1\\ 2\end{Bmatrix}\delta_1'', \\ \delta_v'+2\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix}\delta' &= \begin{Bmatrix}2\ 2\\ 1\end{Bmatrix}\delta, \end{aligned}\right\} \tag{14a}$$

$$\delta_v+\begin{Bmatrix}2\ 2\\ 2\end{Bmatrix}\delta=\begin{Bmatrix}1\ 1\\ 2\end{Bmatrix}\delta_1'', \tag{14b}$$

$$\delta_{1u}''+\begin{Bmatrix}1\ 1\\ 1\end{Bmatrix}\delta_1''=\begin{Bmatrix}2\ 2\\ 1\end{Bmatrix}\delta. \tag{14c}$$

Кривизна поверхности теперь равна $-\delta'^2$. Следовательно, δ' известно вплоть до знака. Из (14a) найдем δ и δ_1''. Внося их в (14b), (14c), получим два уравнения относительно коэфициентов линейного элемента. Следовательно, один коэфициент остается совершенно произвольным, два других определяются с восемью произвольными функциями одного аргумента. Для каждого получаемого линейного элемента существует одна пара поверхностей этого типа (если не считать симметричных, получаемых изменением знака δ, δ', δ'').

Если, например, положить

$$F=0, \quad E=G=a=f(u+v),$$

то получим

$$\delta'^2=\frac{1}{a}(\ln a)'',$$

$$\delta=\delta_1''=-\frac{(\ln a)'''}{(\ln a)'\sqrt{a(\ln a)''}}.$$

Уравнение (14b) интегрируется и дает

$$\delta=-\frac{c}{a}, \quad c=\text{const.}$$

Следовательно, для a получаем уравнение

$$(\ln a)'^2=2c_1^2\ln a-8\frac{cc_1}{\sqrt{a}}-\frac{2c^2}{a}+c_2, \quad c_i=\text{const.}$$

Обе поверхности — винтовые, ибо коэфициенты обеих квадратичных форм зависят только от одного аргумента $u+v$.

Уравнения (14a) не определяют δ или δ_1'', если $\begin{Bmatrix}2\ 2\\ 1\end{Bmatrix}$ или $\begin{Bmatrix}1\ 1\\ 2\end{Bmatrix}$ равно нулю. В таком случае [Т. П. 117 (3)] асимптотические линии являются геодезическими, следовательно [Т. П. 115], прямыми, а поверхность линейчатой. Если обе поверхности линейчатые, то они обе налагаются на поверхность 2-го порядка, ибо, очевидно, уравнения Кодацци будут удовлетворены, если положить $\delta=\delta''=0$, а в таком случае оба семейства геодезических u, v будут асимптотическими, т. е. прямыми, и поверхность, обладая двумя системами прямолинейных образующих, является поверхностью 2-го порядка.

При этом δ и δ_1'' определяются из диференциальных уравнений (14b), (14c); следовательно, поверхность может непрерывно изгибаться, сохраняя эту кинематически сопряженную систему.

91. Возвращаясь к общей кинематически сопряженной системе, рассмотрим две кривые C и C', описанные мгновенным центром вращения M, M' на поверхностях S и S', когда S катится по S', и две линейчатые поверхности R и R', представляющие собой геометрическое место мгновенных осей вращения при этом движении в подвижной системе и в неподвижном пространстве. Эти две поверхности описаны одна около поверхности S, а другая около поверхности S' вдоль кривых C и C'. Когда поверхность S катится по поверхности S', то аксоида R катится по неподвижной аксоиде R'. Отсюда следует, что аксоида R наложима на аксоиду R'.

Конгруэнция касательных к линиям одного семейства системы может быть разложена на ∞^1 линейчатых поверхностей R, которые касаются поверхности S вдоль линий другого семейства. Если поверхность S изгибается с сохранением кинематически сопряженной системы, то конгруэнция касательных тоже изгибается, и все поверхности R преобразуются в поверхности R', налагающиеся на поверхности R. Если система линий u, v сопряжена в смысле Дюпена, то все поверхности R — развертывающиеся и при изгибании остаются развертывающимися. В этом вся разница между обоими случаями изгибания.

§ 2. Изгибание на кинематически сопряженном основании.

92. Две налагающиеся поверхности S и S' определяют во всякой точке M инволюцию кинематически сопряженных направлений. Если задать третью налагающуюся поверхность S'', то пара поверхностей S и S'' определит в точке M другую инволюцию. Две инволюции имеют одну пару общих элементов. Она определит систему линий, кинематически сопряженных на поверхностях S, S' и на поверхностях S, S''. Эта система кинематически сопряжена и на поверхностях S', S''.

Действительно, такая система определяется, если мы исключим $\delta u : \delta v$ из двух уравнений, написанных по формуле (11) для пар поверхностей S, S' и S, S'':

$$\begin{vmatrix} (D-D_1)\,du+(D'-D_1')\,dv & (D'-D_1')\,du+(D''-D_1'')\,dv \\ (D-D_2)\,du+(D'-D_2')\,dv & (D'-D_2')\,du+(D''-D_2'')\,dv \end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая определитель, получим уравнение, симметричное относительно D, D_1, $D_2, \ldots$,

$$\begin{aligned} &[D'(D_2-D_1)+D_1'(D-D_2)+D_2'(D_1-D)]\,du^2+\\ &+[D''(D_2-D_1)+D_1''(D-D_2)+D_2''(D_1-D)]\,du\,dv+\\ &+[D'(D_1''-D_2'')+D_1'(D_2''-D'')+D_2'(D''-D_1'')]\,dv^2=0. \end{aligned} \tag{15}$$

Если поверхности S, S' отнести к характеристической системе Фосса, то это уравнение примет вид

$$(D_2-D)\,du^2-(D_2''-D'')\,dv^2=0. \tag{15'}$$

Как видим, три налагающиеся поверхности имеют вполне определенное кинематически сопряженное основание.

93. Пусть дана поверхность S своими двумя квадратичными формами; существует ли поверхность S', налагающаяся на поверхность S так, чтобы координатные линии образовали кинематически сопряженную систему на паре поверхностей S, S'?

Внося в уравнение (11) $du=0$, $\delta v=0$, получим

$$D_1'=D',$$

и уравнение Гаусса дает

$$D_1D_1''=DD''.$$

Так как случай асимптотических линий уже ранее был рассмотрен, то здесь мы можем считать, что D и D'' не равны нулю. Вводя вспомогательную функцию t, можно положить

$$\delta_1=\delta t,\quad \delta_1''=\frac{\delta''}{t}. \tag{16}$$

Внося это в уравнения Кодацци (6) главы I, получим для t систему уравнений

$$\frac{\partial \ln t}{\partial u}=at^2+bt+c,\quad -\frac{\partial \ln t}{\partial v}=a_1t^{-2}+b_1t^{-1}+c_1, \tag{17}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a&=\left\{{2\;2 \atop 1}\right\}\frac{\delta}{\delta''}, & b&=-\frac{\delta'}{\delta''}\left[\frac{\partial \ln \delta'}{\partial v}+2\left\{{1\;2 \atop 1}\right\}\right],\\ a_1&=\left\{{1\;1 \atop 2}\right\}\frac{\delta''}{\delta}, & b_1&=-\frac{\delta'}{\delta''}\left[\frac{\partial \ln \delta'}{\partial u}+2\left\{{1\;2 \atop 2}\right\}\right],\\ c&=\frac{\partial \ln \delta''}{\partial u}+\left\{{1\;1 \atop 1}\right\}, & c_1&=\frac{\partial \ln \delta}{\partial v}+\left\{{2\;2 \atop 2}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Условие совместности системы (17) получится, если мы продиференцируем оба уравнения и исключим производные 2-го и 1-го порядка от t:

$$\begin{aligned} &t^2[a_v-2ac_1]+t[b_v-3ab_1-bc_1]+c_v+c_{1u}-2bb_1-4aa_1+\\ &+t^{-1}[b_{1u}-3a_1b-b_1c]+t^{-2}[a_{1u}-2a_1c]=0. \end{aligned} \tag{19}$$

Уравнение (19) — четвертой степени относительно t. Если все четыре корня уравнения (19) удовлетворят системе (17), то найдутся четыре поверхности S' такие, что на каждой паре S, S' система u, v кинематически сопряжена. Если существует шесть поверхностей (в том числе и заданная поверхность S) с общей кинематически сопряженной системой (u, v), то уравнение (19) допускает пять корней, следовательно, исчезает тождественно; система (17) вполне интегрируема, определяет t с произвольным постоянным и, следовательно, найдется ∞^1 налагающихся поверхностей S' с общей кинематически сопряженной системой u, v. Мы назовем эту систему главным кинематическим основанием и будем говорить, что поверхность S изгибается на кинематическом основании.

Приравнивая нулю коэфициенты при различных степенях t в уравнении (19), мы получим систему уравнений, которая характеризует кинематические основания u, v:

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\left\{{2\;2 \atop 1}\right\}}{\delta\delta''}=2\left\{{2\;2 \atop 2}\right\}\frac{\left\{{2\;2 \atop 1}\right\}}{\delta\delta''},\quad \frac{\partial}{\partial u}\frac{\left\{{1\;1 \atop 2}\right\}}{\delta\delta''}=2\left\{{1\;1 \atop 1}\right\}\frac{\left\{{1\;1 \atop 2}\right\}}{\delta\delta''}, \tag{20a}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{B}{\delta\delta''}=3\left\{{2\;2 \atop 1}\right\}\frac{A}{\delta\delta''}+\left\{{2\;2 \atop 2}\right\}\frac{B}{\delta\delta''},\quad \frac{\partial}{\partial u}\frac{A}{\delta\delta''}=3\left\{{1\;1 \atop 2}\right\}\frac{B}{\delta\delta''}+\left\{{1\;1 \atop 1}\right\}\frac{A}{\delta\delta''}, \tag{20b}$$

$$\frac{\partial^2 \ln \delta\delta''}{\partial u\,\partial v}=2\frac{AB}{\delta\delta''}+4\left\{{1\;1 \atop 2}\right\}\left\{{2\;2 \atop 1}\right\}-\frac{\partial}{\partial u}\left\{{2\;2 \atop 2}\right\}\frac{\partial}{\partial v}\left\{{1\;1 \atop 1}\right\}, \tag{20c}$$

где

$$A=\frac{\partial \delta'}{\partial u}+2\delta'\left\{{1\;2 \atop 2}\right\},\quad B=\frac{\partial \delta'}{\partial v}+2\delta'\left\{{1\;2 \atop 1}\right\}. \tag{21}$$

К системе (20a — c), (21) надо добавить уравнение Гаусса; мы тогда получим систему восьми диференциальных уравнений на семь неизвестных функций E, F, G, A, B, δ' и произведение $\delta\delta''$. Для каждого решения этой системы уравнения Кодацци образуют вполне интегрируемую систему и определяют δ и δ'' с произвольными постоянными.

94. Система (20a—c) упростится, если кинематическое основание содержит одно или два семейства геодезических линий.

Если линии u — геодезические, то $\left\{ {1\,1 \atop 2} \right\} = 0$. Это уравнение заменит собой второе уравнение (20a).

В качестве примера можно указать винтовые поверхности

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= du^2 + U^2 dv^2, \\ D &= \frac{(U'' + C^2U^{-3})\,U}{\sqrt{C_1U + 2U'^2U - 2C}}, \\ D' &= CU^{-1}, \\ D'' &= \sqrt{C_1U + 2U'^2U - 2C}, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

где U — произвольная функция одного u, C — произвольное постоянное, C_1 — параметр изгибания. Кинематическое основание образовано винтовыми линиями и их ортогональными траекториями.

Если кинематическое основание содержит два семейства геодезических, то

$$\left\{ {1\,1 \atop 2} \right\} = 0, \quad \left\{ {2\,2 \atop 1} \right\} = 0. \tag{23a}$$

Уравнения (20a) удовлетворены. Уравнения (20b) интегрируются. В силу (23a) имеем [Т. П. 197]:

$$\left\{ {2\,2 \atop 2} \right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial \ln G}{\partial v}, \quad \left\{ {1\,1 \atop 1} \right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial \ln E}{\partial u}$$

и, следовательно, интегрируя (20b), получим

$$B = \delta\delta'' \sqrt{G}\,U, \quad A = \delta\delta'' \sqrt{E}\,V, \tag{23b}$$

и (20c) принимает вид уравнения Лиувилля

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v} \ln (\delta\delta'' \sqrt{EG}) = 2UV\delta\delta'' \sqrt{EG}.$$

Интегрируя и выбирая новые произвольные функции за параметры u, v, получим

$$\delta\delta'' \sqrt{EG} = \frac{1}{UV(u+v)^2}. \tag{23c}$$

Уравнения (21), (23a—c) и уравнения Гаусса составят систему восьми уравнений на семь неизвестных функций A, B, E, F, G, δ' и $\delta\delta''$. В качестве частного решения можно указать винтовые поверхности

$$ds^2 = C\,\frac{du^2 + 2\cos\omega\, du\,dv + dv^2}{\sin^4 \frac{\omega}{2}}, \tag{24a}$$

$$D = \alpha \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2}, \quad D' = \frac{C_1}{\sin\omega}, \quad D'' = \frac{1}{\alpha} \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2}, \tag{24b}$$

где α — параметр изгибания, C, C_1 — постоянные и ω — функция от $x = u + v$, определяемая диференциальным уравнением

$$\left[\frac{d\omega}{dx}\right]^2 = -2\cos\omega + \frac{C_1^2}{C\sin^3 \frac{\omega}{2}} + C_2, \quad C_i = \text{const.} \tag{24c}$$

Наконец в общем случае основания, не содержащего геодезических, можно найти решение, если искать $E = G$, F, δ', $\delta\delta''$ и $A = B$ как функции одного аргумента $x = u + v$. Система (20a—c), (21) сведется к четырем независимым уравнениям; добавляя еще уравнение Гаусса, получим на пять функций пять уравнений. Поверхности, очевидно, будут винтовыми.

Пример (22) показывает, что одна и та же система линий может служить кинематическим основанием для нескольких серий налагающихся поверхностей. Исследование системы (20a—c), (21) приводит к заключению [104], что такая система всегда содержит хоть одно семейство геодезических.

Отметим, наконец, что в случае изгибания на кинематическом основании два семейства линий основания всегда различны. Коэфициент D может сохраняться при изгибании поверхности только в том случае, если D равен нулю, т. е. при изгибании линейчатой поверхности с сохранением прямолинейных образующих.

ОБОЗНАЧЕНИЯ.

Линейный элемент поверхности

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2,$$

вторая квадратичная форма

$$Ddu^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2,$$

$$\delta = \frac{D}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad \delta' = \frac{D'}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad \delta'' = \frac{D''}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

Линейный элемент сферического изображения

$$ds'^2 = e\,du^2 + 2f du\,dv + g\,dv^2.$$

Скобки Кристоффеля для линейного элемента поверхности — $\left\{ {i\ j \atop k} \right\}$, для линейного элемента сферы — $\left\{ {i\ j \atop k} \right\}'$; $U = f(u)$, $V = \varphi(v)$ — произвольные функции одного u или одного v; $U' = f'(u)$, $V' = \varphi'(v)$ — их производные.

Значком внизу обозначаются частные производные:

$$E_u = \frac{\partial E}{\partial u}, \quad E_v = \frac{\partial E}{\partial v}, \quad F_{uv} = \frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v} \quad \text{и т. д.}$$

Цифры черным шрифтом в квадратных скобках относятся к списку литературы в конце книги; римские цифры—том сочинения; цифры светлого шрифта—страница; цифра в круглых скобках—номер формулы. Буквы Т. П. относятся к „Теории поверхностей“ С. П. Финикова. ГТТИ—1934.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ ПО ИЗГИБАНИЮ НА ГЛАВНОМ ОСНОВАНИИ.

Список содержит по возможности все сочинения, более или менее близко касающиеся темы.

Принятые сокращения:

Acta Mat. — Acta Matematica.
Ann. di mat. — Annali di matematica pura ed applicata.
Ann. de Toulouse — Annales de la Faculté des sciences de Toulouse.
Ann. Éc. Norm. — Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure.
Ber. München — Sitzungsberichte mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München.
Bull. Amer. — Bulletin of the American mathematical Society.
Bull. Belg. — Académie Rde Belgique. Bulletin de la Classe des Sciences.
Bull. Darboux. — Bulletin des sciences mathématiques.
Bull. Soc. de Fr. — Bulletin de la Société mathématique de France.
C. R. — Comptes Rendus des séances de l'Académie des sciences Paris.
G. Batt. — Giornale di Matematiche di Battaglini.
J. de Math. — Journal de Mathématique pure et appliquée (Liouville).
J. Éc. Pol. — Journal de l'École Polytechnique.
J. für Math. — Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle).
J. of Math. — American Journal of Mathematics.
Lincei Rend. — Atti della reale Accademia die Lincei. Rendiconti. Roma.
Math. — Ann. — Mathematische Annalen.
Math. Z. — Mathematische Zeitschrift.
Mem. Bologna — Memorie delle reale Accademia delle Science di Bologna.
Nouv. Ann. — Nouvelle Annale de Mathématique.
Trans. Amer. — Transaction of the American Mathematical Society.
Мат. Сб. — Московский математический сборник.
Цифра в скобках после названия журнала означает серию, цифра черного шрифта — том, светлого — страницу и в конце — год.

Общие сочинения

1. G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, 4 тома.
2. L. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale, 2 тома по два выпуска, 4-е изд. Есть также более краткое немец. изд. Differentialgeometrie.
3. B. Gambier, Déformation des surfaces étudiées au point de vue infinitesimal, Mémorial des Sciences Mathématiques, **26**, 1927.
4. B. Gambier, Applicabilité des surfaces étudiée au point de vue fini. Mémorial des Sciences Mathématiques, **31**, 1928.

Мемуары

5. F. Minding, Über die Biegung gewisser Flächen, J. für. Math., **18**, 257 u. 365, 1838.
6. Codazzi, Intorno alle superficie le quali deformandosi ritengono le stesse linee di curvatura, Ann. di mat., **7**, 410, 1856.
7. E. Bour, Théorie de la déformation des surfaces, J. Éc. Pol., **22**, 1—148, 1862.
8. O. Bonnet, Théorie des surfaces applicables sur une surface donnée, J. Éc. Pol., **24**, 209, 1865; **25**, 1—151, 1867.
9. К. М. Петерсон, Об отношениях и сродствах между кривыми поверхностями, Мат. сб., **1**, 391—438, 1866. Ann. de Toulouse, (2), **7**, 5, 1905.

10. K. Peterson, Über Curven und Flächen, Moskau und Leipzig 1868.
11. L. Bianchi, Sopra la deformazione di una classe di superficie, G. Batt., **16**, 267, 1878.
12. К. М. Петерсон, Об изгибании поверхностей второго порядка, Мат. сб., **10**, 476—523, 1882.
13. Б. К. Млодзеевский, Исследования об изгибании поверхностей, Ученые записки Московского университета, Отдел физико-математ., **7**, 1886.
14. A. Voss, Über diejenigen Flächen, auf denen zwei Schaaren geodätischer Linien ein conjugiertes System bilden, Ber. München, **18**, 95—102, 1888.
15. A. Razzaboni, Sulle superficie, sulle quali due serie di geodetiche formano un sistema coniugato, Mem. Bologna, (4), **9**, 765, 1888.
16. C. Guichard, Surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques et congruences rapportées à leurs développabels, Ann. Éc. Norm., (3), **6**, 333, 1889.
17. C. Guichard, Sur les surfaces qui possédent un réseau de géodésiques conjuguées, C. R., **110**, 995, 1890.
18. L. Bianchi, Sopra una nuove classe di superficie appartenenti a sistemi tripli ortogonali, Lincei Rend., (4), **6**, 435, 1890.
19. L. Bianchi, Sulle superficie le cui linee assintotiche in un sistema sono curve a torsione constante, Lincei Rend., (4), **6**, 552, 1890.
20. L. Bianchi, Sopra alcune nuove classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali, Ann. di mat., (2), **18**, 301—358, 1890.
21. C. Guichard, Recherches sur les surfaces à courbure constante et sur certaines surfaces qui s'y rattachent. Ann. Éc. Norm., (3), **7**, 233—264, 1890.
22. A. Ribaucour, Sur les systèmes cycliques, C. R., **113**, 304, 324, 1891.
23. E. Cosserat, Sur les systèmes conjugués et sur la déformation des surfaces, C. R., **113**, 460, 1891.
24. E. Cosserat, Sur les systèmes cycliques et sur la déformation des surfaces, C. R., **113**, 498, 1891.
25. L. Raffy, Détermination de toutes les surfaces moulures applicables sur des surfaces de révolution, Bull. Soc. de Fr., **19**, 34—37, 1891.
26. L. Raffy, Sur les surfaces moulures dont les lignes d'égale courbure sont paralléles, Bull. Soc. de Fr., **19**, 54—57, 1891.
27. B. Mlodzieiowski, Sur la déformation des surfaces, Bull. Darboux, (2), **15**, 97—101, 1891.
28. L. Bianchi, Sui sistemi tripli ortogonali che contengono una serie di superficie con un sistema di linee di curvatura piane, Ann. di Mat., (2), **19**, 177—199, 1891.
29. A. Voss, Zur Theorie der Krümmung der Flächen, Math. Ann., **39**, 179—256, 1891.
30. A. Ribaucour, Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes, J. de Math., (4), **7**, 5, 219, 1891.
31. L. Bianchi, Sulle deformazioni infinitesime delle superficie flessibili ed inestendibili, Lincei Rend., (5), **1**, сем. 2, 41, 1892.
32. E. Goursat, Sur un problème relatif à la déformation des surfaces, J. of Math., **14**, 1—9, 1892.
33. E. Cosserat, Sur les congruences de droites et sur la théorie des surfaces, Ann. de Toulouse, **7**, № 1—62, 1893.
34. P. Adam, Sur déformation des surfaces avec conservation des lignes de courbure, Bull. Soc. de Fr., **23**, 195—196, 1895.
35. P. Staeckel, Sur la déformation des surfaces, C. R., **123**, 677, 1896.
36. C. Guichard, Sur la déformation des surfaces, J. de Math., (5), **2**, 677—680, 1896.
37. P. Staeckel, Biegungen und conjugierte Systeme, Math. Ann., **49**, 255—310, 1897.
38. C. Guichard, Sur les réseaux qui correspondent au cas où la suite de Laplace est limitée dans un sens, C. R., **128**, 1149, 1899.
39. G. Darboux, Sur la déformation des surfaces générales du second degré, C. R., **128**, 1264, 1899.
40. G. Tzitzeica, Sur la déformation de certaines surfaces liées aux surfaces du second ordre, C. R., **128**, 1276, 1899.
41. C. Guichard, Sur les réseaux cycliques qui contiennent un système de géodésiques, C. R., **128**, 1308, 1899.

42. C. Guichard, Sur les surfaces de M. Voss, C. R., **129**, 23, 1899.
43. Б. К. Млодзеевский, О поверхностях, связанных с поверхностями Петерсона, Мат. сб., **21**, 450—460, 1900.
44. D. Th. Egorow, Une classe nouvelle de surfaces algébriques qui admettent une déformation continue en restant algébriques, C. R., **132**, 302, 1901.
45. D. Th. Egorow, Sur une certaine surface du troisième ordre, C. R., **132**, 538, 1901.
46. G. Tzitzeica, Sur la déformation continue des surfaces, C. R., **132**, 1100, 1901.
47. D. Th. Egorow, Sur la déformation continue des surfaces, C. R., **132**, 1545, 1901.
48. A. Demoulin, Sur les surfaces susceptibles d'une déformation avec conservation d'un système conjugué, C. R., **133**, 265, 1901.
49. G. Tzitzeica, Sur la déformation continue des surfaces, C. R., **133**, 431, 1901.
50. L. Raffy, Sur les réseaux conjugués persistants, C. R., **133**, 729, 1901.
51. A. Demoulin, Sur les systèmes conjugués persistants, C. R., **133**, 986, 1901.
52. Servant, Sur la déformation des quadriques, Bull. Soc. de Fr., **80**, 18—23, 1902.
53. G. Tzitzeica, Sur la déformation continue des surfaces, C. R., **134**, 894, 1902.
54. G. Tzitzeica, Sur la déformation continue des surfaces, C. R., **135**, 503, 1902.
55. J. Drach, Sur certaines déformations remarquables, C. R., **136**, 996, 1903.
56. A. Tachauer, Über diejenigen Rotationsflächen, auf denen zwei Schaaren geodätischen Linien ein konjugiertes System bilden, Archiv der Math. und Physik, (3), **6**, 60—84, 1903.
57. B. Smith, Condition for the deformation of surfaces referred to a conjugate system of lines, Proceeding Indian Acad. of Sciences, 1904.
58. G. Tzitzeica, Sur la déformation continue des surfaces, C. R., **138**, 553, 1904.
59. D. Th. Egorow, Sur une classe particulière des systèmes conjugués persistants, C. R., **138**, 885, 1904.
60. L. Bianchi, Sopra la representationi equivalenti della sfere e le coppie di superficie applicabile, Lincei Rend., (5), **13**, 6, 1904.
61. L. Bianchi, Sulle coppie di superficie applicabile con assegnata rappresentatione sferica, Lincei Rend., (5), **13**, 147, 1904.
62. L. Bianchi, Sulle equazione di Moutard con gruppi di soluzioni quadratiche, Lincei Rend., (5), **13**, сем. 2, 283, 1904.
63. Б. К. Млодзеевский, Об изгибании поверхностей Петерсона. Мат. сб., **24**, 417—474, 1904.
64. A. Demoulin, Sur les surfaces de Voss de la géometrie non euclidienne, C. R., **140**, 1226, 1572, 1905.
65. L. P. Eisenhart, On the deformation of surfaces of translation, Bull. Amer., (2), **11**, 466—494, 1905.
66. G. Tzitzeica, Sur la déformation des certaines surfaces tetraedrales, C. R., **142**, 1401, 1493, 1906.
67. B. Smith, Certain surfaces admitting of continuous deformation with preservation of conjugate lines, Bull. Amer., **12**, 164—171, 1906.
68. L. Eisenhart, Associate surfaces, Math. Ann., **62**, 504—538, 1906.
69. D. Th. Egorow, Sur la transformation de Laplace et les systèmes conjugués persistants, C. R., **145**, 1256, 1907.
70. B. Mlodzieiowski, Über aufeinander abwickelbare P-Flächen, Math. Ann., **63**, 62—84, 1907.
71. L. Eisenhart, Applicable surfaces with asymptotic lines of one surface corresponding to a conjugate system of another, Trans. Amer., 8, 113—134, 1907.
72. L. Raffy, Sur les réseaux conjugués persistants qui comprennent une famille de lignes minima, C. R., **146**, 740, 1908.
73. Segre, Sulle generazione delle superficie che ammetono un doppio sistema conjugato di coni circonscriti, Atti della R. Accademia di Torino, **43**, 988, 1908.

74. L. Raffy, Étude sur les surfaces imaginaires de Monge à lignes de courbure confondues, Bull. Soc. de Fr., **36**, 150—184, 1908.
75. J. Drach, Recherches sur certaines déformations remarquables à réseau conjugué persistant, Ann. de Toulouse, (2), **10**, 125—164, 1908.
76. Д. Ф. Егоров, Об изгибании на главном основании при одном семействе плоских или конических линий, Мат. сб., **28**, 167—187, 1911.
77. С. С. Бюшгенс, Об изгибании поверхностей на главном основании, Мат. сб., **28**, 507—528, 1911.
78. С. П. Фиников, Об изгибании поверхностей 2-го порядка на главном основании, Мат. сб., **28**, 529—543, 1911.
79. L. Bianchi, Formole generale per le superficie riferiti alle loro linee asintotiche con alcune applicazioni, Lincei Rend., (5), **22**, сем. 1, 403, 1913.
80. L. Bianchi, Sui sistemi coniugati permanenti nelle deformate delle quadriche, Lincei Rend., (5), **22**, сем. 2, 3, 1913.
81. L. Rouyer, Sur la déformation des quadriques et les surfaces conjuguées par rapport à un complexe du second ordre, Ann. de Toulouse, (3), **3**, 377—434, 1913.
82. L. P. Eisenhart, Transformations of surfaces of Voss, Trans. Amer., **15**, 245—265, 1914.
83. С. С. Бюшгенс, О циклических конгруэнциях и поверхностях Бианки, Мат. сб., **30**, 296—313, 1916.
84. L. Bianchi, Sopra una proprieta caratteristica delle superficie della classe $K = \frac{1}{\{\varphi(\alpha) + \psi(\beta)\}^2}$ Lincei Rend., (5), **26**, сем. 1, 575, 1917.
85. L. P. Eisenhart, Certain surfaces of Voss and surfaces associated with them. Rendiconti del Circolo mat. di Palermo, **42**, 145—166, 1917.
86. С. П. Фиников, Общая задача изгибания на главном основании, Москва 1917.
87. С. С. Бюшгенс, Изгибание на главном основании, Москва 1918.
88. L. P. Eisenhart, Transformation of applicable conjugate nets of curves on surfaces, Procedd. Nat. Academ., **3**, 637—640, 1917; Trans. Amer., **19**, 167—185, 1918.
89. Max Lagally, Über gewisse Verbiegungen der achenaffinen Flächen, insbesondere der Flächen 2—ten Ordnung, Ber. München, 369—379, 1919.
90. A. Terracini, Sui sistemi coniugati permanenti nelle deformazioni di una superficie, Lincei Rend., (5), **28**, сем. 2, 69, 1919.
91. B. Gambier, Etude des surfaces de translation de Sophus Lie, Nouv. Ann., (4), **20**, 401—423, 454—479, 1920.
92. A. Demoulin, Sur les équations de Moutard à solutions quadratiques, Bull. Belg., 192—215, 418—438, 503—525, 1920; 10—32, 1921.
93. B. Gambier, Mécanismes transformables ou déformables. Couples de surfaces applicables qui s'en déduisent, J. de Math., (9), **1**, 19—76, 1922.
94. L. P. Eisenhart, Transformations of surfaces. Princeton, 1923.
95. С. П. Фиников, Об изгибании конгруэнции с сохранением развертывающихся поверхностей, Мат. сб., **32**, 241, 1924.
96. S. Finikoff, Sur les surfaces de M. Bianchi, Мат. сб., **32**, 249, 1924.
97. S. Finikoff, Sur les surfaces principales des congruences rectilignes de M. Bianchi, Lincei Rend., (6), **1**, сем. 1, 515, 1925.
98. А. Ф. Маслов, О преобразовании Moutard'a и квадратичных решениях уравнения с равными инвариантами, Мат. сб., **32**, 569, 1925.
99. B. Gambier, Déformation des surfaces tétraédrales avec conservation d'un réseau conjugué et rigidité d'une asymptotique, C. R., **182**, 913, 1926.
100. B. Gambier, Déformation d'une surface avec conservation d'un réseau conjugué, C. R., **182**, 1312, 1926.
101. B. Gambier, Surfaces de Voss-Guichard, C. R., **182**, 1453, 1926.
102. B. Gambier, Déformation continue d'un hélicoïde en hélicoïde avec réseau conjugué permanent, Surfaces de Voss-Guichard, Bull. Darboux, (2), **50**, 308—328, 335—342, 1936.
103. A. Th. Masloff, Sur la déformation des surfaces avec conservation d'un système conjugué, Мат. сб, **33**, 43—48, 1926.
104. S. Finikoff, Sur la déformation des surfaces à réseaux cinématiquement-conjugués persistants, Мат. сб., **33**, 129—159, 1926.

105. A. Th. Masloff, Sur la déformation continue d'une classe de surfaces, Мат. сб., **33**, 367—370, 1926.
106. B. Gambier, Déformation des surfaces tétraédrales, J. de Math., (9), **5**, 227—295, 1926.
107. B. Gambier, Sur certains réseaux conjugués, Bull. Soc. de Fr., **54**, 41—42, 1926.
108. B. Gambier, Surfaces de translation applicables l'une sur l'autre, Nouv. Ann., (6), **3**, 1927.
109. B. Gambier, Surfaces de Voss et Guichard; surfaces assocciées et adjointes. Déformation avec réseau conjugué permanent, Acta Mat., **51**, 83—151, 1927.
110. A. Th. Masloff, Sur la déformation des surfaces avec conservation d'un système conjugué conique, C. R., **186**, 1345, 1928.
111. M. Vasseur, Sur les systèmes conjugués permanents dans la déformation d'une surface, C. R., **186**, 1694, 1928.
112. A. Th. Masloff, Sur une classe de congruence W. C. R., **187**, 794, 1928.
113. M. Vasseur, Déformation d'une surface avec un réseau conjugué conique, C. R., **187**, 1109, 1928.
114. B. Gambier, Sur quelques cas méconnus de la dèformation des surfaces, Bull. Soc. de Fr., **56**, 224—239, 1928.
115. M. Vasseur, Surfaces déformables avec un réseau conique conjugué persistant, C. R., **188**, 29, 1929.
116. A. Demoulin, Sur une classe de congruences, C. R., **188**, 138, 1929.
117. M. Vasseur, Surfaces déformables avec réseau conique permanent, C. R., **188**, 603, 1929.
118. M. Vasseur, Relations entre les deux nappes focales d'une congruence rectiligne, C. R., **188**, 761, 1929.
119. B. Gambier, Solutions quadratiques des équations de Moutard, C. R., **188**, 605, 758, 1078, 1929.
120. A. Th. Masloff, Sur une application du théorème de M. Eisenhart, C. R., **188**, 756, 1929.
121. А. Ф. Маслов, О квадратичных решениях уравнения (E_2), Мат. сб., **36**, 107, 1929.
122. S. Finikoff, Déformation d'une congruence rectiligne avec développables persistantes, Bull. Darboux, (2), **53**, 341—360, 1929.
123. H. Liebmann, Die Verbiegung der konisch-zylindrischen Flächen, Math. Z., **30**, 172—184, 1929.
A. Schur, Bemerkung zu der vorstehender Arbeit von Herrn Liebmann, O. Volk, Anmerkung zu der vorstehender Note des Herrn Liebmann betreffend die Darbouschen Gleichungen, там же, 186—187.
124. M. Vasseur, Sur les équations de Laplace, C. R., **190**, 1176, 1930.
125. B. Gambier, Surfaces de Voss-Guichard, C. R., **194**, 1280, 1930.
126. K. Freidank, Die Verbiegung der konisch-zylindrischen Flächen Mitteilungen des math. Seminars der Univ. Giessen, **18—20**, 1—24, 1930.
127. B. Gambier, Déformation d'une surface avec un réseau conjugué formé des lignes coniques ou cylindriques et remarques sur un article de M. Liebmann, Math. Z., **32**, 291—314, 1930.
128. B. Gambier, Intégrales quadratiques de l'équation $\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \left[-\frac{6}{(u-v)^2} + \frac{2}{(u+v)^3} \right] \theta$, J. de Math., (9), **9**, 333—361, 1930.
129. W. Schaff, Biegung mit Erhaltung zylindrischer konjugierter Systeme, J. für Math., **162**, 205—237, 1930.
130. M. Vasseur, Sur la conservation d'un rèseau conjugué dans la déformation d'une surface, Ann. Éc. Norm., (3), **47**, 93—195, 1930.
131. S. Finikoff, Déformation d'une surface et réseaux conjuguès persistants, Bull. Darboux, (2), **54**, 1930.
132. E. O. Lovett, Sur un problème de M. Gambier dans la déformation des surfaces, C. R., **193**, 565, 1931.
133. B. Gambier, Surfaces de Voss-Guichard, Ann. Éc. Norm., (3), **48**, 359—368, 369—396, 1931.

134. B. Gambier, Intégrales quadratiques de l'équation $\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v}+\frac{n(n+1)}{(u-v)^2}\theta=0$, Ann. Univ. de Jassy, **16**, 301—338, 1931.
135. S. Finikoff, Couples de surfaces dont les lignes de courbure se correspondent, les tangentes correspondantes se coupant, C. R., **196**, 28, 1933.
136. Serge Rossinski, Sur un cas de déformation des congruences isotropes à réseau conjugué persistant, C. R., **197**, 1562, 1933.
137. J. Lebel, Sur les surfaces de Voss et de Guichard, Bull. Darboux, (2), **57**, 69—96, 1933.
138. А. Ф. Маслов, Об одном классе конгруэнций Bianchi, Мат. сб., **40**, 196—209, 1933.
139. W. Schaff, Flächen mit verbiegbaren konjugierten Systemen, Sitzungsberichte Akad. Heidelberg, **63—67**, 8—17, 1934.
140. P. Vincensini, Transformation de Ribaucour des surfaces de Guichard, Réseaux cycliques, Nouvel aspect de la transformation d'Eisenhart, C. R., **200**, 1266, 1935.
141. Serge Rossinski, Sur la déformation des surfaces avec réseau conjugué persistant, C. R., **200**, 1268, 1935.
142. A. Th. Masloff, Fur les solutions quadratiques de l'équation harmonique $(A_{3,3})$, J. de Math., (9), **14**, 229—232, 1935.
143. А. Ф. Маслов, Об одном свойстве прямоугольного основания изгибания, Научные записки МИИВХ (Моск. инст. инж.-водного хоз.), 54—58, 1935.
144. S. Buchguence, Sur la déformation des surfaces de Bianchi, C. R., **202**, 2123, 1936.
145. S. Buchguence, Sur les surfaces de Bianchi, Мат. сб. (печатается).
146. А. Ф. Маслов, Преобразование Bianchi поверхностей класса $K=-\frac{1}{[U(u)+V(v)]^2}$ (рукопись).
147. P. Vincensini, Surfaces déformables avec transformation des réseaux cinématiquement conjugués enréseaux conjugués, C. R., **203**, 973, 1936.
148. S. Bucheguence, Sur les surfaces de Bianchi, C. R., **203**, 762, 1936.

Редактор *А. В. Зансохов.* Технический редактор *Е. Шпак.*

Сдано в производство 21/II 1937 г. Тираж 3000.
Подписано к печати 14/VII 1937 г. Учетный номер 4702.
Формат бум. $62\times 94^1/_{16}$. Технико-теоретич. ред. № 6.
Колич. зн. в печ. листе 50000. Учетно-авт. листов 13,3.
Печ. л. **11**. Зак. 584. Уполном. Главлита № Б-13842.

3-я тип. ОНТИ. Ленинград, ул. Моисеенко, 10.