С. П. ФИНИКОВ

# ПРОЕКТИВНО-ДИФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Цена 3 р. 25 к. Перепл. 1 р. 50 к.

ОБЪЕДИНЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1937 ЛЕНИНГРАД

Т 24-5-2
ТКК № 70

## АННОТАЦИЯ

Аннотируемая книга представляет собой первое в нашей литературе сочинение по проективно-диференциальной геометрии. Начиная с простейших понятий проективной геометрии, автор подробно излагает общую теорию (работы Вильчинского, Грина, Фубини, Чеха и др.), развивая ряд специальных вопросов геометрии поверхностей и конгруэнций (проективное изгибание поверхностей и конгруэнций, асимптотические преобразования, расслояемые пары конгруэнций). Во всех исследованиях автор реализует общую идею выбора специальных систем локальных координат, инвариантно связанных с геометрическим объектом.

Книга рассчитана на читателя, вполне владеющего основами анализа и диференциальной геометрией. Основной контингент ее читателей—студенты, интересующиеся геометрией, аспиранты и научные работники.

# ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой книге я попытался дать изложение основных фактов проективно-диференциальной геометрии методом подвижного тетраэдра.

В 1926 г. при решении задачи о расслояемой паре конгруэнций я получил канонический тетраэдр, связанный с конгруэнцией. Этот метод дал мне возможность решить целый ряд задач в теории конгруэнций прямых. Затем я применил его к решению задач из проективной теории поверхности.

Исторически метод, используемый в этой книге, представляет из себя видоизменение метода Картана для случая двух независимых переменных. Приложение его настолько просто и плодотворно, что мне казалось полезным дать полное изложение проективно-диференциальной геометрии одним методом.

Все литературные указания приведены в конце книги. Ссылки на них в тексте отмечены цыфрами в прямых скобках [ ].

В конце книги приведена также сводка обозначений, которыми я систематически пользуюсь.

*С. Фиников.*

## ОГЛАВЛЕНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Аналитическая геометрия Декарта (Descartes) и особенно анализ бесконечных малых, которому она открыла путь приложений в геометрии, казалось, убили синтетическую геометрию. С легкостью были разрешены проблемы геометрии кривых, оставшиеся еще от эпохи греков, и после Эйлера (Euler) Монж со своими учениками заложил основы теории поверхностей. Казалось, что развитие синтетической геометрии закончилось и будущее принадлежит анализу. Но уже Монж в своей начертательной геометрии открывает новую область синтетическому методу, а Понселе кладет основы проективной геометрии, публикуя по возвращении из русского плена в 1822 г. сочинение „Traité des propriétés projectives des figures". Здесь он вводит понятие центральной проекции, основывает на ней метод проективного преобразования фигур. Впервые здесь были разделены проективные и метрические свойства фигур.

Идеи Понселе нашли живой отклик в трудах современных ему и последующих геометров, и проективная геометрия сделалась той областью, где синтетический метод достиг наибольшего развития.

Уже в 1832 г. Штейнер мог дать систематическое изложение этой дисциплины („Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander", Berlin 1832). Если Шаль и Мёбиус еще пользуются для вывода проективных свойств аналитическими операциями, то строгое изложение Штаудта (Staudt „Geometrie der Lage", Nürenberg 1847) совершенно освободило эту ветвь геометрии от всякой примеси метрики.

Казалось, что вся геометрия делится на метрическую,— где основным является понятие расстояния, где, следовательно, естественно вводится число и все аналитические операции,— и геометрию проективную, чуждую метрике, изучаемую методами чистой геометрии. Само ангармоническое отношение, которое у Понселе и Шаля было еще сложным отношением отрезков, превращается теперь в некоторое свойство (Wurf) четырех элементов образа первой ступени, доступное чисто геометрическому восприятию, подчиненное строго геометрическим операциям, которым можно только поставить в параллель аналитические операции над числами.

Это смешение предмета и метода исследования не могло продолжаться долго.

Еще Мёбиус („Der barycentrische Calcül", Leipzig 1827) вполне открыто классифицирует свойства фигур в зависимости от тех преобразований — гомография, корреляция, подобие,— по отношению к которым эти свойства являются инвариантными; с другой стороны, он же вводит обобщение декартовых координат (трилинейные координаты), которое значительно расширило область приложения аналитического метода; однако понадобилось полное развитие понятия группы преобразований, чтобы Клейн (Klein) мог дать последовательную и рациональную классификацию геометрии.

Аналитически всякое преобразование определяется системой уравнений:

$$x_i^* = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad (1)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — первоначальные переменные, $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ — преобразованные.

С точки зрения геометрии можно рассматривать переменные $x_i$ как координаты какого-нибудь геометрического образа (точки, прямой, плоскости или сферы и т. д.), который мы будем обозначать одной буквой $(x)$, переменные $x_i^*$ — как координаты такого же или другого образа $(x^*)$. Уравнения (1) устанавливают тогда преобразование, т. е. соответствие между теми и другими образами. Так, проективное преобразование переводит точку $(x)$ в точку $(x^*)$, коррелятивное преобразует точку $(x)$ в плоскость $(x^*)$ и т. д.

Всякая фигура, образуемая элементами пространства $(x)$, преобразуется в фигуру, образованную соответственными элементами $(x^*)$. Если при этом обе фигуры имеют общее свойство, например порядок кривой, то говорят, что это свойство инвариантно относительно преобразования (1).

Совокупность преобразований (1) образует группу преобразований, если преобразование $(x) \to (x^{**})$, образованное последовательным выполнением двух каких-либо преобразований совокупности, т. е. переводящих точку $(x)$ в $(x^*)$ и затем $(x^*)$ в $(x^{**})$ (произведение двух преобразований), равносильно одному преобразованию той же совокупности, которое переводит $(x)$ непосредственно в $(x^{**})$ [1]).

Нас будет интересовать только непрерывная конечная группа преобразований. В таком случае общее преобразование $T_a$ группы зависит от одного или нескольких параметров $a_1, a_2, \ldots, a_r$; его можно определить уравнениями:

$$x_i^* = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_r) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (2)$$

Совокупность преобразований (2) составляет группу, если система уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_i^* &= f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_r) \\ x_i^{**} &= f_i(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*; b_1, b_2, \ldots, b_r) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

по исключении $x_i^*$ принимает вид:

$$x_i^{**} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; c_1, c_2, \ldots, c_r) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $c_j$ суть функции только от $a_1, a_2, \ldots, a_r$ и $b_1, b_2, \ldots, b_r$:

$$c_j = \varphi_j(a_1, a_2, \ldots, a_r; b_1, b_2, \ldots, b_r) \quad (j = 1, 2, \ldots, r).$$

Понятие группы преобразований естественно возникает в геометрии. Совокупность всех движений твердого тела есть группа преобразований, совокупность подобных преобразований и движений тоже группа и т. д.

[1]) Кроме того, обычно предполагают, что группа содержит тождественное преобразование.



Это понятие было точно формулировано Галуа (Galois) по отношению к группе подстановок, в частности в теории алгебраических уравнений. Затем оно нашло применение в теории инвариантов линейных подстановок.

Жордан (Jordan) первый показал возможность приложения этого понятия к различным проблемам геометрии и теории функций („Mémoire sur les grouppes de mouvements“, 1868—1869). Клейн и в особенности Софус Ли создали из теории непрерывных групп особую дисциплину.

Понятие группы преобразований и свойств фигур, инвариантных по отношению ко всем преобразованиям группы, и послужило основой для нового определения геометрии и рациональной классификации отдельных направлений ее, которые Клейн дал в 1872 г. При вступлении на кафедру Эрлангенского университета он прочел перед факультетом лекцию (так называемую Эрлангенскую программу) [Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Programm zum Eintritt in die philosophische Fakultät zu Erlangen, 1872, „Math. Annalen“, 43, 1893, стр. 63], впоследствии перепечатанную в „Math. Annalen“, которую смело можно рассматривать как программу развития диференциальной геометрии до наших дней.

В основе каждой геометрии, по мысли Клейна, лежит некоторая группа преобразований. Только те свойства фигур могут быть названы геометрическими и подлежат рассмотрению в этой геометрии, которые сохраняются при всех преобразованиях этой группы.

Так, элементарная геометрия ставит себе целью изучение тех свойств фигур, которые не зависят от положения фигур в пространстве, от их абсолютных размеров или ориентации. Следовательно, всякое движение фигуры, как целое, как твердое тело, какое угодно подобное преобразование или симметрия не изменят этих свойств, которые можно назвать геометрическими. Все эти преобразования (движение, подобное преобразование и симметрия) и их произведения образуют так называемую фундаментальную группу пространства.

Следовательно, элементарная геометрия изучает свойства фигур, инвариантные по отношению к преобразованиям фундаментальной группы; это, можно сказать,— теория инвариантов фундаментальной группы.

Проективная геометрия с этой точки зрения есть учение о свойствах фигур, инвариантных по отношению к группе проективных преобразований. Аффинная геометрия кладет в основу группу аффинных преобразований и т. д.

Вообще задачу всякой геометрии Клейн определяет словами:

„Дано многообразие и в нем группа преобразований; изучить свойства фигур этого многообразия, инвариантных по отношению к преобразованиям группы“.

Таким образом геометрия проективная, метрическая, аффинная определяется вне всякой зависимости от того метода, который кладется в основу ее изучения, и, естественно, возникает вопрос о приложении метода диференциальной геометрии, который обнаружил такую силу в метрической геометрии, к изучению геометрии другой группы преобразований, кроме фундаментальной группы Клейна.

Эта задача была в общем выполнена в течение следующих пятидесяти лет.

Первой возникла проективно-диференциальная геометрия, затем в работах Блашке и его школы — аффинная, наконец, Томсен, Вессио и другие создают конформную геометрию.

Собственно говоря, рассматривая с точки зрения Клейна диференциальную геометрию Дарбу (Darboux) или Бианки (Bianchi), можно заметить, что целые отделы ее отходят от метрической геометрии и должны быть отнесены или к проективно-диференциальной или даже к конформной.

Многие свойства сопряженных систем или асимптотических линий, например вся теория лапласовых преобразований поверхности, их инвариантов, периодических последовательностей Лапласа и т. д., принадлежат проективно-диференциальной геометрии. Теория линий кривизны, циклиды Дюпена и в особенности те главы „Théorie des surfaces", где Дарбу пользуется пентасферической системой координат, должны отойти к конформной геометрии и т. д.

Если первые исследования по проективно-диференциальной геометрии плоских и пространственных кривых были проведены еще Альфаном [1], то первое систематическое изложение теории и самое название ее принадлежат Вильчинскому (E. I. Wilczynski).

Вильчинский, начиная с 1901 г., опубликовал ряд заметок и мемуаров по теории инвариантов и ковариантов линейных диференциальных уравнений и по геометрии кривых и развертывающихся поверхностей. В 1906 г. он объединил эти исследования в книгу „Projective differential geometry of curves and ruled surfaces", Leipzig 1906, стр. 298, которая является первым трактатом, посвященным проективно-диференциальной геометрии.

Автор пользуется для определения точек в пространстве четырьмя однородными координатами $(x_1, x_2, x_3, x_4)$, так что наиболее общее проективное преобразование пространства, которое переводит точку $(x)$ в точку $(x^*)$, определяется системой линейных уравнений:

$$x_i^* = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (3)$$

где коэфициенты $a_{ik}$ суть произвольные постоянные числа, ограниченные только одним условием, чтобы определитель системы

$$|a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пусть теперь дана кривая $C$ уравнениями в параметрической форме:

$$x_i = f_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (4)$$

После проективного преобразования эти уравнения примут вид:

$$x_i^* = a_{i1}f_1(t) + a_{i2}f_2(t) + a_{i3}f_3(t) + a_{i4}f_4(t), \quad (5)$$

где все $a_{ik}$ — постоянные.



Продиференцируем это равенство четыре раза по $t$. Мы получим вместе с заданным уравнением (5) всего пять уравнений. Исключая отсюда постоянные $a_{ik}$, мы придем к одному однородному линейному уравнению четвертого порядка относительно производных $x_i^*$ по $t$:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^4x_i^*}{dt^4} & f_1^{IV}(t) & f_2^{VI}(t) & f_3^{IV}(t) & f_4^{IV}(t) \\ \frac{d^3x_i^*}{dt^3} & f_1'''(t) & . & . & . \\ \frac{d^2x_i^*}{dt^2} & f_1''(t) & . & . & . \\ \frac{dx_i^*}{dt} & f_1'(t) & . & . & . \\ x^* & f_1(t) & . & . & . \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Коэфициенты этого уравнения зависят только от заданных функций $f_i(t)$, но не от постоянных проективного преобразования $a_{ik}$. Следовательно, каково бы ни было преобразование (3), все четыре текущих координаты (5) какой-либо точки преобразованной кривой $C^*$ удовлетворяют одному и тому же диференциальному уравнению, линейному однородному четвертого порядка.

Обратно, всякое линейное однородное уравнение четвертого порядка

$$\frac{d^4y}{dt^4} + \alpha\frac{d^3y}{dt^3} + \beta\frac{d^2y}{dt^2} + \gamma\frac{dy}{dt} + \delta y = 0, \quad (6')$$

где коэфициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — произвольно заданные функции независимого переменного $t$, имеет общим решением выражение вида:

$$y = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 + C_4x_4,$$

где $C_i$ — произвольные постоянные интеграции и $x_1, x_2, x_3, x_4$ — основная система линейно независимых решений уравнения.

Возьмем систему четырех линейно независимых решений:

$$y_i = C_{i1}x_1 + C_{i2}x_2 + C_{i3}x_3 + C_{i4}x_4, \quad (7)$$

т. е. выберем 16 чисел $C_{ik}$ так, чтобы определитель $|C_{ik}|$ не равнялся нулю. Точка с координатами $(y_i)$ опишет кривую, которую можно рассматривать как проективное преобразование кривой $C$, определяемое системой коэфициентов $C_{ik}$.

Таким образом кривая $C$ вместе с ее проективными преобразованиями $C^*$ вполне определяется уравнением четвертого порядка (6').

Все проективные свойства кривой $C$ должны определяться коэфициентами уравнения $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Это первое основное положение в рассуждениях Вильчинского; оно совершенно освобождает его от необходимости когда-нибудь принимать во внимание проективное преобразование (3) или думать об инвариантах этого преобразования.

Это, однако, не освобождает его от необходимости иметь дело с теорией групп Ли и от докучливого занятия искать инварианты группы преобразований. Только эта группа преобразований совершенно иного происхождения.

Если каждому уравнению (6′) соответствует одна кривая $C$, которую теперь с точки зрения проективной геометрии мы не отличаем от ее проективных преобразований $C^*$, то нельзя сказать обратно, что каждой кривой $C$ соответствует только одно уравнение (6′). Уравнение (6) вполне определено, если заданы конечные уравнения кривой (4), но эти уравнения отнюдь нельзя считать для заданной кривой неизмененными. Они могут меняться, и причины тому две.

1) Параметр $t$ может быть заменен другим; всякий новый выбор параметра изменит функции $f_i(t)$ и, следовательно, коэфициенты $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, уравнения (6).

2) Четыре координаты точки $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ — однородные координаты. Умножая их все на один и тот же множитель, отличный от нуля, мы не изменим точку; притом этот общий множитель может меняться от одной точки кривой к другой, т. е. сам может быть функцией независимого переменного $t$.

Необходимость искать величины, инвариантные по отношению к этим двум преобразованиям, и является источником всех трудностей в методе Вильчинского. Надо признать, что несмотря на всю утомительность тех выкладок, которые ведут к установлению полной системы инвариантов и ковариантов уравнения (6′), автор своей цели достигает, но не всегда может дать этим инвариантам геометрическое толкование.

Тем не менее не следует преуменьшать заслуг Вильчинского; его труд является первой книгой, где систематически изложена наша теория. Ему удалось создать вокруг себя в Америке школу проективно-диференциальных геометров — одну из самых многочисленных среди работающих в этой области. Он и его ученики получили большинство тех результатов, которые мы теперь имеем.

Впрочем, работы Вильчинского по теории поверхностей в проективно-диференциальной геометрии гораздо более интересны и гораздо менее страдают аналитическими отступлениями в область изыскания инвариантов. Он перешел к этим работам сейчас же после опубликования своей книги [2].

При построении теории поверхности Вильчинский прежде всего отказался от полной общности параметров. Он и его школа всегда относят поверхность к асимптотическим линиям.

Это сразу же значительно упрощает исследование.

Будем обозначать одной буквой $(x)$ четыре однородных координаты $(x^1, x^2, x^3, x^4)$ точки $(x)$, и пусть $(x)$ и $(x_1)$ — две точки какой-либо кривой, соответствующие значениям параметра $u$ и $u_1$. Тогда в силу основной теоремы аналитической геометрии о делении отрезка в данном отношении четыре координаты

$$\left(\frac{x_1 - x}{u_1 - u}\right)$$

определяют какую-то точку на прямой, соединяющей точки $(x)$ и $(x_1)$.



В пределе при $u_1 = u$ эта прямая обращается в касательную, а отношение $\frac{x_1 - x}{u_1 - u}$ — в производную $x$ по $u$, которую мы просто обозначим через $x_u$, приписывая указатель $u$ к букве $x$.

Итак, если при изменении параметра $u$ точка $(x)$ движется по кривой $C$, то точка $(x_u)$ лежит на касательной к кривой $C$.

Так же легко показать, что точка $(x_{uu})$ лежит в соприкасающейся плоскости кривой $C$.

Пусть теперь поверхность $S$ задана в однородных координатах четырьмя уравнениями:

$$x^i = f_i(u, v).$$

Тогда две точки $(x_u)$ и $(x_v)$, расположенные на касательных к линиям $u$ и $v$ нашей поверхности, вместе с точкой $(x)$ определяют, очевидно, касательную плоскость поверхности $(x\ x_u\ x_v)$, а три точки $(x)$, $(x_u)$, $(x_{uu})$ определяют соприкасающуюся плоскость кривой $u$. Если линия $u$ — асимптотическая линия поверхности $S$, то по определению асимптотической линии, ее соприкасающаяся плоскость совпадает с касательной плоскостью поверхности. Значит, точка $(x_{uu})$ лежит в плоскости, определенной точками $(x)$, $(x_u)$, $(x_v)$, а потому ее координаты могут быть линейно выражены через координаты этих трех точек.

Мы получаем таким образом основное равенство, которое писал еще Дарбу в первом томе своей „Théorie des surfaces" (стр. 205):

$$x_{uu} = \alpha x + \beta x_u + \gamma x_v$$

и таким же образом, если линии $v$ — тоже асимптотические:

$$x_{vv} = \alpha' x + \beta' x_u + \gamma' x_v.$$

Коэфициенты $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ не произвольны — они удовлетворяют довольно сложным условиям совместности, которые получатся, если сравнить два выражения для четвертой производной $x_{uuvv}$, вычисленных из первого и из второго уравнения.

Существенно то, что, если эти условия выполнены и система

$$\left.\begin{aligned} x_{uu} &= \alpha x + \beta x_u + \gamma x_v, \\ x_{vv} &= \alpha' x + \beta' x_u + \gamma' x_v, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

вполне интегрируема, то любые четыре линейно независимых решения ее, если их принять за четыре однородных координаты точки в пространстве, определяют или поверхность $S$ или одно из ее проективных преобразований $S^*$.

Действительно, диференцируя уравнения (8) по $u$ и по $v$ достаточное число раз, можно выразить любую производную от $x$ через $x$, $x_u$, $x_v$ и $x_{uv}$ и все эти получаемые выражения будут линейны и однородны относительно названных четырех функций. Зададим теперь их значение для $u = u_0$, $v = v_0$, например:

$$x = C_1, \quad x_u = C_2, \quad x_v = C_3, \quad x_{uv} = C_4 \quad \text{для} \quad u = u_0, \quad v = v_0.$$

Тогда все производные от $x$ для $u=u_0$, $v=v_0$ будут линейно выражены через $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ и, разлагая общее решение $x$ в ряд по степеням $u-u_0$, $v-v_0$, мы увидим, что и это решение будет линейно выражено через те же четыре произвольных постоянных $C_i$. Обозначая через $x^i$ коэфициенты при этих постоянных $C_i$, получим:

$$x=C_1x^1+C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4.$$

Величины $x^i$ — очевидно, функции от $u$ и $v$, а так как постоянные $C^i$ можно выбрать произвольно (например $C_1=1$, $C_2=C_3=C_4=0$), то это все частные решения нашей системы (8).

Те же рассуждения, которые мы применили в случае кривой, покажут нам, что любые четыре решения $x^{i*}$:

$$x^{i*}=C_{i1}x^1+C_{i2}x^2+C_{i3}x^3+C_{i4}x^4$$

определяют поверхность $S^*$, получаемую из поверхности $S$ с текущими координатами ($x^1$, $x^2$, $x^3$, $x^4$) проективным преобразованием с коэфициентами $C_{ik}$.

Система (8) является основной в теории поверхности Вильчинского и его школы.

Самый произвол в выборе общего множителя четырех координат $x^i$ позволяет еще упростить систему (8), приводя к нулю два из шести коэфициентов $\beta$ и $\gamma'$ (нормирование координат).

Американская школа геометров сделала очень много в области геометрии около данной точки поверхности: установлен целый ряд инвариантно связанных с поверхностью прямых, исследованы линейчатые образы (комплексы и конгруэнции прямых), связанные с данной точкой поверхности и т. д. Особо следует отметить работы безвременно погибшего Грина (Green) [3], который рассмотрел пары сопряженных относительно поверхности конгруэнций.

В таком же направлении использования особенностей геометрического образа идет Вильчинский (Wilczynski) в своих последних работах при построении теории конгруэнций прямых [4]. Здесь он вводит две точки ($y$) и ($z$) — фокусы луча, и относит конгруэнцию к развертывающимся поверхностям $u$ и $v$.

Основная система уравнений имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} y_v&=mz, \qquad z_u=ny,\\ y_{uu}&=ay+bz+cy_u+dz_v,\\ z_{vv}&=a'y+b'z+c'y_u+d'z_v. \end{aligned}\right\}$$

Координаты ($y$) и ($z$) нормированы. Нетрудно заметить, что все производные от $y$ и $z$ могут быть линейно выражены через $y$, $z$, $y_u$ и $z_v$. Таким образом общее решение $y$ и $z$ линейно зависит от четырех произвольных постоянных; отсюда — те же заключения, как и в случае поверхности или кривой.

Новую страницу в истории развития проективно-диференциальной геометрии открыл Фубини (Fubini). Он заново построил теорию поверхностей, которая также отличается от теории Вильчинского, как метрическая теория поверхностей Бианки, основанная на рассмотрении двух квадратичных форм и использующая символы Кристоффеля, отличается от работ Монжа.



Почти все мемуары Фубини собраны в книге, которую он выпустил вместе со своим учеником, чехословацким геометром Чехом (Čech): Geometria proiettiva-differenziale, т. I и II, 1926—1927.

Фубини строит теорию поверхности, отнесенной к произвольной системе координатных линий $u$, $v$, и в этом его первое основное отличие от теории Вильчинского. Чтобы преодолеть неизбежную при таком подходе сложность формул, он пользуется абсолютным диференцированием Риччи (Ricci) и в основу кладет несколько фундаментальных диференциальных форм.

Пусть поверхность задана в однородных координатах уравнениями:

$$x^i=f_i(u, v) \qquad (i=1, 2, 3, 4), \quad (9)$$

причем $u$ и $v$ — произвольные параметры.

Первая квадратичная форма поверхности есть определитель, составленный из четырех функций $x^i$, их производных по $u$ и по $v$ и диференциалов второго порядка $d^2x^i$.

Мы будем писать такие определители, заключая в скобки четыре члена одной строки и опуская указатель $i$

$$\Phi_2=(xx_ux_vd^2x).$$

Четыре строки определителя могут быть получены, если букве $x$ во всех четырех членах приписывать по очереди указатели 1, 2, 3 и 4.

Первые три столбца $\Phi_2$ содержат координаты точек ($x$), ($x_u$), ($x_v$), лежащих в касательной плоскости поверхности. Поэтому в последнем столбце $d^2x$ можно опустить все члены, пропорциональные координатам какой-нибудь точки касательной плоскости. В частности пропадают вторые диференциалы от независимых переменных. Таким образом, полагая $u_1=u$, $u_2=v$ и распространяя суммирование на все перестановки указателей 1, 2, можно записать:

$$\Phi_2=\sum b_{ik}\,du_i\,du_k.$$

Проективное преобразование пространства умножит $\Phi_2$ на определитель преобразования $|a_{ik}|$; замена переменных $u$, $v$ введет множителем якобиан $\frac{\partial(u^*, v^*)}{\partial(u, v)}$; наконец, умножая все четыре координаты на $\rho(u, v)$, мы умножим $\Phi_2$ на $\rho^4$.

Сложнее дело обстоит со второй, кубической формой. Определитель

$$(xx_ux_vd^3x)$$

не содержит третьих диференциалов от $u$ и $v$, но содержит вторые $d^2u$ и $d^2v$. Чтобы уничтожить их, Фубини вычитает диференциал формы $\Phi_2$, умножив его на подходящий множитель.

Тогда форма

$$\Phi_3 = (xx_u x_v d^3x) - \frac{3}{2} d\Phi_2$$

содержит только первые диференциалы $du$, $dv$, но, конечно, в третьей степени.

Однако допустимые преобразования, именно: умножение четырех координат $x^i$ на $\rho(u, v)$ и замена переменных $u$, $v$, вводят в форму $\Phi_3$ лишние члены, пропорциональные $\Phi_2$. Это побудило Фубини умножить $\Phi_2$ и $\Phi_3$ на один и тот же множитель:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt[4]{|b_{11}b_{22} - b_{12}^2|}}.$$

Путем довольно сложных выкладок, которые мы опускаем, обнаруживается, что две формы

$$F_2 = \lambda\Phi_2, \quad F_3 = \lambda(xx_u x_v d^3x) - \frac{3}{2} dF_2.$$

1) при проективном преобразовании пространства умножаются на корень квадратный из определителя преобразования $\sqrt{|a_{ik}|}$,

2) при замене переменных $u$, $v$ умножаются на квадратный корень из якобиана: $\sqrt{\frac{\partial(u^*, v^*)}{\partial(u, v)}}$,

3) при умножении четырех координат $x^i$ на общий множитель $\rho$ умножаются на $\rho^2$.

Следовательно, только отношение этих форм инвариантно. Это отношение Фубини называет проективным линейным элементом поверхности.

Уравнение $F_2 = 0$ определяет асимптотические направления поверхности, уравнение $F_3 = 0$ — направления Дарбу (см. дальше, гл. IV, § 1).

Однако этих двух форм оказалось недостаточно, чтобы определить поверхность.

Положив квадратичную форму $F_2$ в основу ковариантного диференцирования, Фубини вводит наряду с тремя точками $(x)$, $(x_u)$, $(x_v)$ еще четвертую, которая заведомо не лежит в касательной плоскости поверхности:

$$X = \frac{1}{2}\Delta_2 x,$$

где $\Delta_2 x$ — второй диференциальный параметр. Вторые ковариантные производные $x_{ik}$ от $x$ и первые от $X$ могут быть, следовательно, линейно выражены через $(x)$, $(x_u)$, $(x_v)$ и $(X)$.

Таким образом Фубини приходит к основным формулам:

$$x_{ik} = \sum_{\alpha\beta} a_{ik\alpha} A_{\alpha\beta} x_\beta + a_{ik} X + p_{ik} x \tag{10}$$

и аналогично для первых производных от $X$.



Здесь

$$F_2 = \sum a_{ik}\, du_i\, du_k,$$

$$F_3 = \sum a_{ikl}\, du_i\, du_k\, du_l$$

суть две первые формы — квадратичная и кубическая; выражения $A_{ik}$ — приведенные миноры [1]) определителя первой формы $|a_{ik}|$ и, наконец,

$$P_2 = \sum p_{ik}\, du_i\, du_k$$

— третья, тоже квадратичная, форма. Эти три формы определяют поверхность вплоть до проективного преобразования. Координаты $x$ получаются интегрированием системы (10) с четырьмя произвольными постоянными.

Не следует преувеличивать значение этих общих исследований. Хотя благодаря искусству и трудолюбию талантливого ученика и сотрудника Фубини, чешского геометра Чеха, полностью написаны условия совместности основных уравнений (10) и сделаны некоторые приложения их (например, к изысканию проективно налагающихся поверхностей), но надо сознаться, что эти главы большого трактата принадлежат к числу наиболее трудно читаемых и наименее богатых геометрическими результатами. Недаром во второй, очень интересно составленной французской книжке „Introduction àla géométrie projective-différentielle des surfaces" (Paris 1931) тех же авторов они отказались от изложения этой общей теории, а сам Фубини в конце первого тома дает метод элементарного решения одного из наиболее интересных вопросов о проективно-изгибаемых поверхностях.

Уравнения, которыми обычно пользуется итальянская школа, мало отличаются от основных уравнений Вильчинского, хотя и получаются как частный случай из общих формул.

Тем не менее вклад Фубини в проективно-диференциальную геометрию велик.

На первом месте следует поставить его идею проективного изгибания поверхности. Этим он не только выделил один из наиболее интересных классов поверхностей (поверхности $R$), но и разделил элементы поверхности на два рода: сохраняющиеся при изгибании и не сохраняющиеся. Затем помимо целого ряда частных результатов ему принадлежит теория конгруэнций $W$, или, правильнее сказать, проективная теория преобразования поверхности с помощью конгруэнций $W$.

Наконец, — и в этом немалая его заслуга — он поднял интерес к вопросам проективно-диференциальной геометрии. Фубини в Италии, его друг Чех в Чехословакии создали обширную школу геометров, которая вместе с американской школой Вильчинского привлекла к проективно-диференциальной геометрии внимание геометров и во Франции, и в Бельгии, и в Японии и сделала из нее одно из самых популярных направлений в диференциальной геометрии наших дней.

Не следует думать, что это большое движение укладывается в рамки теории Вильчинского или Фубини. Изящная книга Г. Цицейка (Tzitzeica) „Géométrie différentielle projective des réseaux", 1923, стр. 291, почти

[1]) Т. е. миноры, деленные на определитель.

вся посвящена проективно-диференциальной геометрии поверхностей и конгруэнций, но автор нигде не пользуется ни теорией Вильчинского, ни диференциальными формами Фубини. Правда, он не задается целью проективного определения поверхности и исследует скорее сопряженную систему на поверхности (réseau), чем самую поверхность. Это позволяет ему определять ее четырьмя решениями одного уравнения Лапласа подобно тому, как это делает Дарбу, но, кроме того, он использует изображение касательных к поверхности точками на четырехмерной гиперповерхности второго порядка в пятимерном пространстве. Эту идею [5] выдвинул Сегре (B. Segre), ее развил и построил на ней теорию поверхностей Бомпиани, наконец, ею широко пользовались Цицейка и Годо (Godaux) [6].

Если $(x)$ и $(y)$ — две точки прямой $l$, то шесть миноров второго порядка из матрицы

$$\begin{Vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ y^1 & y^2 & y^3 & y^4 \end{Vmatrix}$$

не зависят от выбора точек $(x)$, $(y)$ на прямой, вполне определяют прямую $(xy)$ и носят название координат прямой Плюккера (Plücker). Записывая определитель только членами по главной диагонали, мы представим их в виде:

$$p_{12}=(x^1y^2),\quad p_{13}=(x^1y^3),\quad p_{14}=(x^1y^4),$$
$$p_{23}=(x^2y^3),\quad p_{42}=(x^4y^2),\quad p_{34}=(x^3y^4)$$

или, еще короче, опуская указатели:

$$p=(x,\ y).$$

Это — координаты однородные в том смысле, что две точки $(x)$ и $(y)$ определяют только отношения их, ибо четыре координаты названных точек $x^i$ и $y^i$ могут быть все сразу умножены на произвольное число.

Линейные координаты $p_{ik}$ удовлетворяют, кроме того, тождеству Плюккера:

$$p_{12}p_{34}+p_{13}p_{42}+p_{14}p_{23}=0, \tag{11}$$

которое сейчас же получается, если в очевидном равенстве

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ y^1 & y^2 & y^3 & y^4 \\ x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ y^1 & y^2 & y^3 & y^4 \end{vmatrix}=0$$

развернуть определитель по правилу Лапласа о сумме произведений сопряженных миноров.

Таким образом из величин $p_{ik}$ остаются произвольными четыре.

Если принять шесть величин $p_{ik}$ за однородные координаты точки в пятимерном пространстве $E_5$, то уравнение (11) покажет, что все точки,



изображающие различные прямые нашего пространства, образуют в этом пространстве гиперповерхность $Q_2$ второго порядка, определяемую уравнением (11).

Все прямые, касательные к поверхности $S$ трехмерного пространства в ее точке $(x)$, имеют плюккеровы координаты

$$(x,\ x_u+\lambda x_v),$$

где $\lambda$—произвольный параметр, определяющий в касательной плоскости направление касательной прямой.

Разлагая этот определитель по элементам второго столбца, получим:

$$(x,\ x_u+\lambda x_v)=(xx_u)+\lambda(xx_v)=p_1+\lambda p_2,$$

если обозначить через

$$p_1=(xx_u),\quad p_2=(xx_v)$$

линейные координаты касательных к координатным линиям $u$ и $v$.

Мы видим, что все касательные к поверхности $S$ в данной точке изображаются в пятимерном пространстве $E_5$ точками одной прямолинейной образующей гиперповерхности $Q_2$.

Пусть линии $u$ и $v$ — асимптотические на поверхности $S$ и, следовательно, $x$ удовлетворяет системе уравнений Вильчинского:

$$x_{uu}=\alpha x+\beta x_u+\gamma x_v,$$
$$x_{vv}=\alpha' x+\beta' x_u+\gamma' x_v.$$

Диференцируя $p_1$ по $u$, мы немедленно получим, применяя правило диференцирования определителя:

$$p_{1u}=(x_ux_u)+(xx_{uu})=(xx_{uu});$$

внося сюда $x_{uu}$ из уравнений Вильчинского, имеем:

$$p_{1u}=(x,\ \alpha x+\beta x_u+\gamma x_v)=\alpha(xx)+\beta(xx_u)+\gamma(xx_v),$$

или

$$p_{1u}=\beta p_1+\gamma p_2$$

и аналогично:

$$p_{2v}=\beta' p_1+\gamma' p_2.$$

Эти уравнения показывают, что при изменении параметра $u$ точка $(p_1)$ на гиперповерхности $Q_2$ описывает кривую, которая имеет своей касательной образующую $(p_1p_2)$, ибо производная $p_{1u}$, которая всегда лежит на касательной к кривой, поместилась теперь на этой прямой. Таким же образом увидим, что при изменении $v$ точка $(p_2)$ описывает кривую, которая касается нашей прямой $(p_1p_2)$ во второй точке $(p_2)$.

Итак, совокупность касательных к поверхности в одной точке ее имеет своим образом точки одной прямолинейной образующей гиперповерхности $Q_2$.

Многообразию $\infty^3$ точек поверхности $S$ соответствует многообразие $\infty^2$ образующих гиперповерхности $Q_2$. Все эти прямые касаются линий $u$ на поверхности $(p_1)$ и линий $v$ на поверхности $(p_2)$.

Система $\infty^2$ прямых в пространстве $n$ измерений ($n>3$) не всегда имеет развертывающиеся поверхности. Если она обладает ими, то она называется конгруэнцией.

Мы видим, следовательно, что совокупность всех касательных к поверхности $S$ нашего пространства имеет своим образом в пятимерном пространстве точки, расположенные на лучах конгруэнции образующих $Q_2$. Каждый луч конгруэнции соответствует касательным поверхности $S$ в одной точке ее, и касательные к асимптотическим линиям изображаются фокусами луча.

Это отображение позволяет обратно по свойствам квадратичной конгруэнции в пространстве $E_5$ заключать о свойствах поверхности $S$. Именно таким путём были получены наиболее интересные свойства поверхностей $R$; это отображение дало возможность Годо построить целый ряд связанных с данной точкой поверхности $S$ поверхностей второго порядка, а Бомпиани выводит отсюда всю теорию поверхности.

Наконец, следует отметить в проективно-диференциальной геометрии метод Картана (Cartan), который все более и более приобретает сторонников среди работающих в этой области геометров. К сожалению, это не такой метод, идею которого можно передать в немногих словах. Поэтому я отсылаю читателя к лекциям Картана [7], читанным в Московском институте математики и механики, где он в немногих словах дал сущность своего метода и его разнообразные приложения к метрической, аффинной и проективной геометрии. Затем сущность этого метода и его применение в проективно-диференциальной геометрии изложена в последних главах цитированной выше французской книги Фубини-Чеха: „Introduction à la géométrie etc.“.

---

Глава первая

# ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

**§ 1. Проективное преобразование.** Если $(x, y, z)$ — декартовы координаты точки в пространстве, безразлично прямоугольные или косоугольные, то четыре числа $x^1, x^2, x^3, x^4$, выбранные так, что

$$\frac{x^1}{x^4}=x, \quad \frac{x^2}{x^4}=y, \quad \frac{x^3}{x^4}=z,$$

называются однородными координатами этой точки. Они, очевидно, определены только с точностью до общего множителя.

В однородных координатах поверхность $n$-го порядка определяется однородным уравнением $n$-й степени. Уравнение плоскости имеет вид:

$$\xi^1x^1+\xi^2x^2+\xi^3x^3+\xi^4x^4=0.$$

Коэфициенты в этом уравнении $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ — однородные координаты плоскости. Четыре уравнения

$$\overline{x}^i=c_{i1}x^1+c_{i2}x^2+c_{i3}x^3+c_{i4}x^4 \qquad (i=1,2,3,4), \tag{1}$$

где $c_{ik}$ — любые числа, подчиненные только одному требованию, чтобы определитель

$$|c_{ik}|=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix}$$

не был равен нулю, определяют проективное преобразование пространства. Оно переводит точку $(x)=(x^1, x^2, x^3, x^4)$ в точку $(\overline{x})=(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \overline{x}^3, \overline{x}^4)$.

Совокупность проективных преобразований, очевидно, образует группу:

1) Она содержит обратное преобразование $(\overline{x})\to(x)$, ибо при условии, что определитель $|c_{ik}|$ не равен нулю, систему четырех уравнений (1) можно разрешить относительно координат $x^i$ и полученные решения будут тоже линейны и однородны относительно $\overline{x}^i$.

2) Два последовательно выполненных преобразования

$$(x)\to(\overline{x}) \quad \text{и} \quad (\overline{x})\to(\overline{\overline{x}})$$

с любыми коэфициентами $c_{ik}$ и $c'_{ik}$ равносильны одному преобразованию той же совокупности

$$(x)\to(\overline{\overline{x}}),$$

Это преобразование определяется теми же формулами (1) с коэффициентами

$$c''_{ik} = c'_{i1}c_{1k} + c'_{i2}c_{2k} + c'_{i3}c_{3k} + c_{i4}c_{4k},$$

в чем нетрудно убедиться непосредственным подсчетом.

Проективное преобразование, очевидно, преобразует плоскость в плоскость, причем плоскость

$$\bar{\xi}^1 \bar{x}^1 + \bar{\xi}^2 \bar{x}^2 + \bar{\xi}^3 \bar{x}^3 + \bar{\xi}^4 \bar{x}^4 = 0$$

получается из плоскости

$$\bar{\xi}^1 (c_{11}x^1 + c_{12}x^2 + c_{13}x^3 + c_{14}x^4) + \bar{\xi}^2 (c_{21}x^1 + \ldots) + \ldots = 0.$$

Следовательно, координаты первоначальной $(\xi)$ и преобразованной $(\bar{\xi})$ плоскости связаны уравнениями:

$$\xi^i = c_{1i}\bar{\xi}^1 + c_{2i}\bar{\xi}^2 + c_{3i}\bar{\xi}^3 + c_{4i}\bar{\xi}^4 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (2)$$

Отсюда следует, что прямая переходит в прямую. Это преобразование непрерывно, поэтому касательная к кривой переходит в касательную к преобразованной кривой, соприкасающаяся плоскость — в соприкасающуюся плоскость и т. д.

Можно показать, обратно, что всякое однозначное преобразование пространства, которое, во-первых, различные точки переводит в различные, во-вторых, точки, лежащие в одной плоскости, — в точки, лежащие в одной плоскости, и в-третьих, четыре точки, не лежащие в одной плоскости, — в четыре точки, не лежащие в одной плоскости, есть проективное преобразование (1).

**§ 2. Проективные координаты точки.** Возьмем четыре точки $A$, $B$, $C$, $D$ с координатами $a^i$, $b^i$, $c^i$, $d^i$, не лежащие в одной плоскости, т. е. так, что определитель $(a\ b\ c\ d)$ не равен нулю. Какова бы ни была точка $M$ с координатами $x^i$, четыре уравнения

$$x^i = y_1 a^i + y_2 b^i + y_3 c^i + y_4 d^i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (3)$$

определяют четыре числа $y_i$, которые мы будем называть проективными координатами точки $M$. Так как определитель системы не равен нулю, то они вполне определены так же, как и декартовы координаты $x^i$ точки $M$, т. е. до общего множителя. В свою очередь при заданных точках $A$, $B$, $C$, $D$ координаты $(y)$ вполне определяют величины $(x)$, т. е. точку $M$.

Тетраэдр $ABCD$ называется координатным тетраэдром.

Сравнивая уравнения (3) с уравнениями (1), мы видим, что на координаты $y_i$ можно смотреть как на координаты преобразованной точки $\bar{x}^i$, если коэффициенты преобразования $c_{ik}$ отождествить с координатами вершин тетраэдра $ABCD$. Следовательно, проективное преобразование пространства эквивалентно преобразованию проективных координат.

Обратно, если в формуле (1) считать $c_{i1}$, $c_{i2}$, $c_{i3}$, $c_{i4}$ за координаты вершин некоторого тетраэдра $ABCD$:

$$c_{i1} = a^i, \quad c_{i2} = b^i, \quad c_{i3} = c^i, \quad c_{i4} = d^i,$$

то преобразованная точка $(x)$ будет по отношению к этому тетраэдру



иметь те же самые координаты, как первоначальная $(x)$ по отношению к декартовой системе координат

$$y_1 = x^1, \quad y_2 = x^2, \quad y_3 = x^3, \quad y_4 = x^4.$$

Поэтому можно считать, что всякое проективное преобразование меняет только координатный тетраэдр, а проективные координаты всякой точки (до и после преобразования) остаются неизменными.

Впрочем, недостаточно задать четыре точки $A, B, C, D$, чтобы определить новую систему координат и, следовательно, проективное преобразование пространства. При неизменных точках $A, B, C, D$ координаты

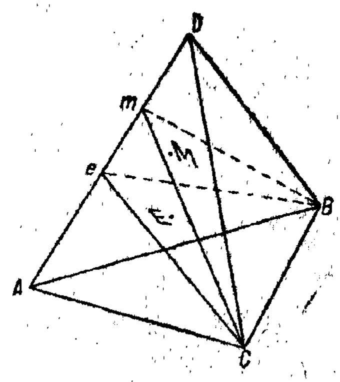



Рис. 1.

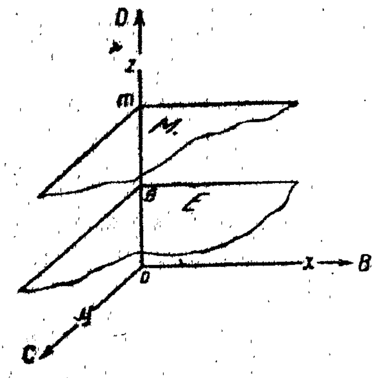



Рис. 2.

их $(a)$, $(b)$, $(c)$, $(d)$ можно умножить каждые на произвольное число. Если теперь $E$ — произвольная точка пространства (не лежащая в координатных плоскостях $A\ B\ C\ D$), то по общему правилу ее координаты по старой системе координат $(e^i)$ и по новой $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ связаны уравнениями:

$$e^i = \alpha a^i + \beta b^i + \gamma c^i + \delta d^i.$$

Если мы умножим координаты $(a)$, $(b)$, $(c)$ и $(d)$ соответственно на $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\delta$, то в этой системе координат точка $E$ будет определяться четырьмя координатами, равными единице.

Итак, координатная система определена, если дан координатный тетраэдр и точка, координаты которой равны единицам (точка единиц); иначе говоря, проективное преобразование в пространстве определяется заданием пяти пар соответствующих точек.

Декартова система координат, очевидно, составляет частный случай тетраэдральной, когда одна грань тетраэдра $(x^4 = 0)$ ушла в бесконечность.

В проективных координатах, так же как и в декартовых, поверхность $n$-го порядка определяется уравнением $n$-й степени, плоскость определяется уравнением первой степени; коэффициенты при текущих координатах в уравнении плоскости называются проективными координатами плоскости.

**§ 3. Сложное или аигармоничное отношение** четырех точек на прямой $(x_1)$, $(x_2)$, $(x_3)$ и $(x_4)$ в декартовых неоднородных координатах равно любому из трех отношений:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} : \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_4} = \frac{y_1 - y_3}{y_1 - y_4} : \frac{y_2 - y_3}{y_2 - y_4} =$$

$$= \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}.$$

Оно остается неизменным при проективном преобразовании.

Действительно, в однородных координатах, т. е. после замены $x_i = \frac{x_i^1}{x_i^4}$, это отношение примет вид:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_1^1 x_3^4 - x_3^1 x_1^4}{x_1^1 x_4^4 - x_4^1 x_1^4} : \frac{x_2^1 x_3^4 - x_3^1 x_2^4}{x_2^1 x_4^4 - x_4^1 x_2^4};$$

если принять преобразованную прямую за ось абсцисс, то

$$\bar{x}_i^2 = \bar{x}_i^3 = 0$$

и формулы преобразований будут:

$$x_i^1 = c_{11}\bar{x}_i^1 + c_{14}\bar{x}_i^4,$$

$$x_i^4 = c_{41}\bar{x}_i^1 + c_{44}\bar{x}_i^4.$$

Легко убедиться в справедливости равенств:

$$x_i^1 x_k^4 - x_k^1 x_i^4 = (c_{11}c_{44} - c_{14}c_{41})(\bar{x}_i^1 \bar{x}_k^4 - \bar{x}_k^1 \bar{x}_i^4)$$

при любых указателях $i$, $k = 1, 2, 3, 4$, из которых непосредственно вытекает инвариантность сложного отношения при проективном преобразовании. Отсюда нетрудно увидеть геометрический смысл проективных координат.

Пусть $ABCD$ — координатный тетраэдр, $E$ — точка единиц и $M$ — точка с координатами $(x^i)$ (см. черт. на стр. 23). Пусть плоскости $EBC$ и $MBC$ пересекают прямую $AD$ в точках $e$ и $m$. Тогда *отношение координат $\frac{x^4}{x^1}$ равно сложному отношению четырех точек*:

$$(ADem) = \frac{x^4}{x^1}.$$

Действительно, преобразуя проективно пространство, мы приведем тетраэдр $ABCD$ к совпадению с трехгранником прямоугольной системы координат $Oxyz$, так, чтобы точка $D$ совпала с вершиной $O$, прямые $AD$, $DB$, $DC$ — с осями $x$, $y$, $z$ и плоскость $ABC$ ушла в бесконечность. Плоскости $EBC$ и $MBC$ станут параллельны координатной плоскости $yz$, а так как координаты всех точек сохранят свои величины, то точка $A$ будет иметь абсциссу $\infty$, $D \to 0$, $e \to 1$ и $m \to \frac{x^1}{x^4}$.



Следовательно, сложное отношение будет равно:

$$(ADem) = \left(\infty, 0, 1, \frac{x^1}{x^4}\right) = \frac{\infty - 1}{0 - 1} : \frac{\infty - \frac{x^1}{x^4}}{0 - \frac{x^1}{x^4}} = \frac{x^4}{x^1},$$

а так как оно не меняет своей величины при проективном преобразовании, то оно имеет ту же величину и до преобразования.

**§ 4. Проективные координаты прямой** [8]. Если $(x)$ и $(y)$ — две точки прямой $(xy)$, то всякая другая точка ее $(z)$ определяется формулой:

$$z = \lambda x + \mu y. \tag{4}$$

Здесь координатам $x$, $y$, $z$ можно приписать одновременно любой из указателей 1, 2, 3, 4; $\lambda$ и $\mu$ — произвольные числа, которые можно рассматривать как координаты точки на прямой.

Чтобы доказать это предложение, достаточно так преобразовать пространство, чтобы система координат $ABCD$ стала декартовой системой координат. Предложение тогда станет очевидным, а формула (4), очевидно, не изменится.

Уравнение (4) можно рассматривать как параметрическое уравнение прямой, если считать $\lambda$ или $\mu$ переменным параметром.

Шесть различных определителей матрицы

$$\begin{Vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ y^1 & y^2 & y^3 & y^4 \end{Vmatrix}$$

называются проективными координатами прямой $(xy)$. Выписывая только члены по главной диагонали определителя, их можно записать коротко в виде:

$$p^{12} = (x^1y^2), \quad p^{13} = (x^1y^3), \quad p^{14} = (x^1y^4),$$

$$p^{23} = (x^2y^3), \quad p^{42} = (x^4y^2), \quad p^{34} = (x^3y^4),$$

или еще короче, опуская указатели:

$$p = (xy).$$

Очевидно, они определены только до общего множителя и в этом смысле не меняются, если $(x)$ или $(y)$ заменить какой-либо другой точкой $(z)$ той же прямой.

Если две прямые $p = (xy)$ и $q = (zt)$ имеют общую точку, то их координаты удовлетворяют условию (Плюккера):

$$P(p, q) \equiv p^{12}q^{34} + p^{34}q^{12} + p^{13}q^{42} + p^{42}q^{13} + p^{14}q^{23} + p^{23}q^{14} = 0. \tag{5}$$

Чтобы доказать это, заметим, что четыре точки $(x)$, $(y)$, $(z)$, $(t)$ лежат теперь в одной плоскости и, следовательно, координаты их удовлетворяют уравнению:

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ y^1 & y^2 & y^3 & y^4 \\ z^1 & z^2 & z^3 & z^4 \\ t^1 & t^2 & t^3 & t^4 \end{vmatrix} = 0.$$

Если к этому определителю применить теорему Лапласа и разложить его на сумму произведений сопряженных миноров, составленных из элементов двух первых или двух последних строк, то непосредственно получим равенство (5).

В равенстве (5) можно положить $p=q$, ибо сама себя прямая всегда пересекает. Следовательно, координаты $p^{ik}$ всегда удовлетворяют соотношению:

$$P(p) \equiv p^{12}p^{34} + p^{13}p^{42} + p^{14}p^{23} = 0. \qquad (6)$$

Обратно, любые шесть чисел $p^{ik}$, удовлетворяющие условию Плюккера (6), определяют прямую.

Действительно, какую бы точку $(t)$ мы ни взяли, прямая $q=(zt)$, пересекающая прямую $(p)$, удовлетворяет условию (5). Это — уравнение первой степени относительно координат $(z)$ и определяет плоскость, проходящую через прямую $(p)$ и точку $(t)$. При переменном $t$ эти плоскости образуют в силу условия (6) пучок; ось пучка — искомая прямая $(p)$.

**§ 5. Геометрические образы в пространстве прямых** [9]. Так как среди шести координат $p$ только четыре существенно произвольных, то пространство содержит $\infty^4$ прямых.

Многообразие $\infty^3$ прямых называется комплексом, $\infty^2$ — конгруэнцией, многообразие $\infty^1$ прямых составляет линейчатую поверхность.

Чтобы определить комплекс, надо задать уравнение:

$$F(p) = 0, \qquad (7)$$

которое связывает шесть текущих координат прямой. Два таких уравнения определяют конгруэнцию, а три — линейчатую поверхность.

Если уравнение (7) — алгебраическое, то и комплекс алгебраический и степень уравнения есть степень комплекса[1]).

Линейный комплекс определяется уравнением первой степени:

$$\sum ap = a_{34}p^{12} + a_{12}p^{34} + a_{42}p^{13} + a_{13}p^{42} + a_{23}p^{14} + a_{14}p^{23} = 0. \qquad (8)$$

Коэфициенты $a_{ik}$ или их отношения называются координатами линейного комплекса (7).

Если коэфициенты $a_{ik}$ удовлетворяют условию Плюккера (6), то комплекс — особый. Тогда существует прямая (a)[2]) (ось комплекса), которая удовлетворяет условию (5) по отношению к каждой прямой $(p)$ комплекса и, следовательно, все их пересекает. Особый комплекс состоит, следовательно, из всех прямых, пересекающих его ось.

Если величины $(a_{ik})$ не удовлетворяют условию Плюккера (6), то комплекс — обыкновенный.

---

[1]) Следует иметь в виду, что уравнение (7) и уравнение

$$F(p) + \varphi(p)\cdot P(p) = 0$$

определяют один и тот же комплекс.

[2]) Т. е. прямая с плюккеровыми координатами:

$$q^{ik} = a_{ik}.$$



Два линейных уравнения

$$\sum ap = 0, \quad \sum bp = 0$$

определяют линейную конгруэнцию — пересечение двух линейных комплексов $(a)$ и $(b)$. Так как всякая линейная комбинация этих уравнений является следствием их, то конгруэнция $(a, b)$ будет содержаться также во всяком линейном комплексе пучка $(a+\lambda b)$:

$$\sum (a+\lambda b)p = 0,$$

где $\lambda$ — произвольный параметр.

В этом пучке, очевидно, содержится два особых комплекса, которые соответствуют двум корням $\lambda$ квадратного уравнения:

$$P(a+\lambda b) \equiv (a_{12}+\lambda b_{12})(a_{34}+\lambda b_{34}) + (a_{13}+\lambda b_{13})(a_{42}+\lambda b_{42}) + (a_{14}+\lambda b_{14})(a_{23}+\lambda b_{23}) = 0.$$

Следовательно, линейная конгруэнция состоит из прямых, которые пересекают две неподвижные прямые — оси этих особых линейных комплексов. Эти прямые называются директрисами конгруэнции. Они могут быть мнимы. Три уравнения:

$$\sum ap = 0, \quad \sum bp = 0, \quad \sum cp = 0$$

определяют простейшую линейчатую поверхность — $\infty^1$ прямолинейных образующих одной системы какой-либо поверхности второго порядка (demi-quadrique по Кёнигсу [10]).

Действительно, заменяя в трех уравнениях (1), (2), (3) и в уравнении Плюккера (6) линейные координаты $p$ их выражениями

$$p = (xy),$$

мы получим для координат двух точек $(x)$ и $(y)$, лежащих на луче, четыре уравнения: три линейных и одно второй степени. Исключение $(y)$ приведет, очевидно, к уравнению второй степени относительно $(x)$. Это уравнение поверхности второго порядка, которая несет на себе все лучи системы $(a, b, c)$.

Линейная система лучей $(a, b, c)$ содержится, очевидно, во всех линейных комплексах связки $(a+\lambda b+\mu c)$:

$$\sum (a+\lambda b+\mu c)p = 0.$$

В этой связке линейных комплексов содержится $\infty^1$ особых линейных комплексов, соответствующих тем значениям $\lambda$ и $\mu$, которые удовлетворяют уравнению Плюккера:

$$P(a+\lambda b+\mu c) = 0.$$

Оси этих комплексов пересекают все лучи системы $(a, b, c)$ и являются, следовательно, образующими второй системы той же самой поверхности второго порядка.

**§ 6. Нулевая система линейного комплекса.** Если в уравнении линейного комплекса (8) координаты $p$ заменить по формуле $p=(xy)$ и одну точку $(x)$ считать неподвижной, то уравнение (8) обратится в уравнение первой степени относительно координат $(y)$ и определит ту плоскость, в которой лежат все лучи комплекса, проходящие через данную точку $(x)$.

Таким образом линейный комплекс устанавливает соответствие между точками и плоскостями пространства.

Выполняя указанное выше преобразование, мы получим уравнение искомой плоскости в виде:

$$(-a_{34}x^2-a_{42}x^3-a_{23}x^4)y^1+(a_{34}x^1+a_{13}x^4-a_{14}x^3)y^2+$$
$$+(-a_{12}x^4+a_{42}x^1+a_{14}x^2)y^3+(a_{12}x^3-a_{13}x^2+a_{23}x^1)y^4=0.$$

Следовательно, координаты $(\xi)$ плоскости, которая соответствует точке $(x)$, получаются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} \xi^1 &= -a_{34}x^2-a_{42}x^3-a_{23}x^4,\\ \xi^2 &= \phantom{-}a_{34}x^1-a_{14}x^3+a_{13}x^4,\\ \xi^3 &= \phantom{-}a_{42}x^1+a_{14}x^2-a_{12}x^4,\\ \xi^4 &= \phantom{-}a_{23}x^1-a_{13}x^2+a_{12}x^3. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Это, очевидно, частный случай общего коррелятивного преобразования

$$\xi^i=C_{i1}x^1+C_{i2}x^2+C_{i3}x^3+C_{i4}x^4 \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4), \tag{10}$$

где коэфициенты $C_{ik}$ удовлетворяют единственному условию, что определитель $|C_{ik}|$ не равен нулю.

Коррелятивное преобразование, очевидно, переводит точку $(x)$ в плоскость $(\xi)$. Обратное преобразование переводит плоскость в точку.

При этом точкам, лежащим на одной прямой, соответствуют плоскости одного пучка. Действительно, если $(x_1)$ и $(x_2)$ — две точки этой прямой, то координаты всякой другой точки $(x)$ ее будут:

$$x=x_1+\lambda x_2.$$

Внося эти значения в формулу (10), получим:

$$\xi=\xi_1+\lambda\xi_2, \tag{11}$$

где

$$\xi_1^i=\sum_k C_{ik}x_1, \quad \xi_2^i=\sum_k C_{ik}x_2^k.$$

Плоскости (11), очевидно, составляют пучок плоскостей. Прямые $(x_1x_2)$ и $(\xi_1\xi_2)$ сопряжены в корреляции (10).

Отсюда следует, что точкам, лежащим в одной плоскости, соответствуют плоскости, проходящие через одну точку. Если точка $(x)$ описывает кривую, то $\infty^1$ плоскостей $(\xi)$ огибает развертывающуюся поверхность. Точкам $(x)$ поверхности $n$-го порядка $S$ соответствуют касательные плоскости $(\xi)$ поверхности $n$-го класса $\Sigma$ и т. д.



Условие

$$\sum\xi\bar{x}=0,$$

что точка $(\bar{x})$ лежит в плоскости $(\xi)$, имеет вид:

$$\begin{aligned} &C_{11}\bar{x}^1x^1+C_{12}\bar{x}^1x^2+C_{13}\bar{x}^1x^3+C_{14}\bar{x}^1x^4+\\ &+C_{21}\bar{x}^2x^1+C_{22}\bar{x}^2x^2+C_{23}\bar{x}^2x^3+C_{24}\bar{x}^2x^4+\\ &+C_{31}\bar{x}^3x^1+C_{32}\bar{x}^3x^2+C_{33}\bar{x}^3x^3+C_{34}\bar{x}^3x^4+\\ &+C_{41}\bar{x}^4x^1+C_{42}\bar{x}^4x^2+C_{43}\bar{x}^4x^3+C_{44}\bar{x}^4x^4=0. \end{aligned} \tag{12}$$

Оно, вообще говоря, несимметрично относительно координат точек $(x)$ и $(\bar{x})$; следовательно, если точка $(\bar{x})$ лежит в плоскости $(\xi)$, соответствующей точке $(x)$, то точка $(x)$ не лежит в плоскости $(\xi)$, которая будет соответствовать точке $(\bar{x})$.

Это уравнение симметрично относительно $(x)$ и $(\bar{x})$ в двух случаях:

1) Если

$$C_{ik}=C_{ki}.$$

В этом случае корреляция (10) есть соответствие полюсов и полярных плоскостей поверхности второго порядка. Уравнение этой поверхности сейчас же получится, если потребовать, чтобы полюс $(x)$ лежал в полярной плоскости $(\xi)$, т. е. если положить в уравнении (d) $\bar{x}=x$:

$$\begin{aligned} C_{11}(x^1)^2+C_{22}(x^2)^2+C_{33}(x^3)^2+C_{44}(x^4)^2&+\\ +2C_{12}x^1x^2+2C_{13}x^1x^3+2C_{14}x^1x^4&+\\ +2C_{23}x^2x^3+2C_{24}x^2x^4+2C_{34}x^3x^4&=0. \end{aligned}$$

2) Условие (12) симметрично относительно $(x)$ и $(\bar{x})$, если

$$C_{ii}=0, \quad C_{ik}=-C_{ki}.$$

В этом случае точка $(x)$ всегда лежит в соответствующей плоскости $(\xi)$, ибо условие (12) обращается в тождество, если $\bar{x}=x$. Это нуль-система, определяемая линейным комплексом.

Непосредственно видно, что уравнения (10) совпадают теперь с уравнениями (9). Лучи комплекса — те прямые, которые сопряжены сами себе.

## Глава вторая

# НОРМАЛЬНЫЙ ТЕТРАЭДР ПОВЕРХНОСТИ

**§ 1. Определение поверхности компонентами движения тетраэдра.** Пусть нам задана поверхность $(M)$ четырьмя текущими координатами $M^i$ своей произвольной точки $M$ относительно любого координатного тетраэдра $(A_1A_2A_3A_4)$ в функциях от параметров $u$ и $v$:

$$M^i = f_i(u, v).$$

Присоединяя к каждой точке $M$ еще три точки $M_1$, $M_2$, $M_3$ так, чтобы они не лежали в одной плоскости, т. е. задаваясь еще 12 функциями

$$M_k^i = f_{k,i}(u, v) \qquad \begin{matrix} k = 1, 2, 3, \\ i = 1, 2, 3, 4, \end{matrix}$$

так, чтобы определитель $(MM_1M_2M_3)$ не равнялся нулю, мы в каждой точке $M$ нашей поверхности определим тетраэдр $T(M, M_1, M_2, M_3)$, который будем принимать за координатный тетраэдр при определении всех точек и линий, связанных с точкой $M$ поверхности.

С изменением параметров $u$, $v$ точка $M$ передвигается по поверхности и тетраэдр $T$ переходит в новое положение. Это преобразование тетраэдра мы будем называть его движением.

Движение тетраэдра, очевидно, характеризуется производными:

$$\frac{\partial M_i^k}{\partial u} = M_{iu}^k, \quad \frac{\partial M_i^k}{\partial v} = M_{iv}^k.$$

Четыре производные $M_{iu}^1$, $M_{iu}^2$, $M_{iu}^3$, $M_{iu}^4$ определяют точку $M_{iu}$. Обозначая местные координаты точек $M_{iu}$, $M_{iv}$ относительно тетраэдра $T$ буквами $a_i^k$, $b_i^k$, мы по формулам преобразования координат напишем:

$$\left.\begin{aligned} M_{iu} &= a_i^0 M + a_i^1 M_1 + a_i^2 M_2 + a_i^3 M_3, \\ M_{iv} &= b_i^0 M + b_i^1 M_1 + b_i^2 M_2 + b_i^3 M_3. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Каждой из букв $M_i$ здесь можно приписывать наверху один и тот же любой из указателей 1, 2, 3, 4. Следовательно, каждое уравнение (1) для определенного значка $i$ содержит четыре уравнения. Эти четыре уравнения можно разрешить относительно новых координат $a_i^k$ или $b_i^k$, ибо по условию определитель системы $(M\,M_1\,M_2\,M_3)$ не равен нулю. Эти решения имеют форму отношения двух определителей, например:

$$a_i^2 = \frac{(MM_1M_{iu}M_3)}{(MM_1M_2M_3)}.$$



Отсюда следует:

проективное преобразование пространства не меняет компонент движения тетраэдра $T$.

Действительно, после проективного преобразования координаты какой-нибудь точки $M_i$ принимают вид:

$$M_i^{*j} = c_{j1}M_i^1 + c_{j2}M_i^2 + c_{j3}M_i^3 + c_{j4}M_i^4.$$

Если $|c_{jk}|$ — определитель преобразования, то

$$(M^*M_1^*M_{iu}^*M_3^*) = (MM_1M_{iu}M_3)\,|c_{jk}|,$$

и, следовательно, отношения определителей $a_i^k$, $b_i^k$ останутся неизменными. Таким образом на 32 функции $a_i^k$, $b_i^k$ можно смотреть как на инварианты поверхности в проективном преобразовании пространства. Естественно поставить вопрос: определяют ли они поверхность $(M)$?

Заметим прежде всего, что величины $a_i^k$, $b_i^k$ нельзя задать произвольно. Система уравнений (1) содержит восемь уравнений с четырьмя неизвестными функциями $M$, $M_1$, $M_2$, $M_3$. Диференцируя первое уравнение (1) по $v$, а второе по $u$ и заменяя производные $M_{iu}$, $M_{i\alpha}$ в правой части их значениями из той же системы, мы получим два значения для второй производной $M_{iuv}$:

$$M_{iuv} = \sum_k a_{iv}^k M_k + \sum_k a_i^k \sum_j b_k^j M_j,$$

$$M_{iuv} = \sum_k b_{iu}^k M_k + \sum_k b_i^k \sum_j a_k^j M_j.$$

Сравнивая эти два значения и заменяя в двойной сумме значок $j$ на значок $k$ и наоборот, мы получим линейное соотношение между четырьмя координатами:

$$\sum_k \Big(a_{iv}^k + \sum_j a_i^j b_j^k\Big) M_k = \sum_k \Big(b_{iu}^k + \sum b_i^j a_j^k\Big) M_k.$$

Так как четыре точки $M$, $M_1$, $M_2$, $M_3$ не лежат в одной плоскости, то после перенесения всех членов в одну сторону коэфициенты при координатах $M_k$ должны тождественно равняться нулю, и мы получим систему уравнений, которым должны удовлетворять компоненты $a_i^k$, $b_i^k$:

$$\frac{\partial a_i^k}{\partial v} - \frac{\partial b_i^k}{\partial u} = \sum \left(b_i^j a_j^k - a_i^j b_j^k\right) \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3). \qquad (2)$$

Система (2), очевидно, содержит 16 уравнений.

Эти условия не только необходимы, но и достаточны. Инварианты поверхности, 32 компоненты движения тетраэдров $a_i^k$, $b_i^k$, удовлетворяющие системе (2), определяют поверхность в проективной геометрии пространства.

ТЕОРЕМА. *32 функции $a_i^k$, $b_i^k$, удовлетворяющие системе (2), определяют движение тетраэдра $T$ вплоть до проективного преобразования пространства.*

Нетрудно заметить прежде всего, что система (1) имеет единственное определенное решение $M_i$, которое для $u = u_0$, $v = v_0$ принимает заданное числовое значение $M_i = A_i$. Действительно, диференцируя последовательно уравнения (1) по $u$ и по $v$, мы выразим единственным способом все производные от функций $M_i$ через производные от $a_i^k$, $b_i^k$ и величины $M_i$. Так как значения $M_i$ для $u = u_0$, $v = v_0$ известны, то мы будем знать значения любой производной $M_i$ в начальной точке, а следовательно можем разложить функции $M_i$ в ряд Тейлора по степеням $u - u_0$, $v - v_0$. В достаточно малой области эти ряды сходятся [1]) и, следовательно, определяют единственное решение $M_i$, принимающее значение $A_i$ для $u = u_0$, [illegible] $v_0$.

Зададимся теперь [illegible]ьмя четверками чисел $A_i^1$, $A_i^2$, $A_i^3$, $A_i^4$; мы получим четыре чет[illegible]н функций $M_i^1$, $M_i^2$, $M_i^3$, $M_i^4$, которые для $u = u_0$, $v = v_0$, принима[illegible]т значения:

$$M_i^k = A_i^k.$$

Таким образом все движение тетраэдра $T$ с двумя степенями свободы $u$, $v$, т. е. все $\infty^2$ тетраэдров $T$ для различных значений $u$, $v$ будут известны единственным способом, если задать начальное положение тетраэдра $(A_0, A_1, A_2, A_3)$ для $u = u_0$, $v = v_0$. Выбирая иначе начальный тетраэдр $(A_0^*, A_1^*, A_2^*, A_3^*)$, мы получим новое семейство тетраэдров $T$. Возьмем теперь проективное преобразование, которое перевело бы тетраэдр $(A_0^*, A_1^*, A_2^*, A_3^*)$ в тетраэдр $(A_0, A_1, A_2, A_3)$. Это преобразование, очевидно, переведет каждый тетраэдр $T^*$ в соответствующий ему тетраэдр $T$. Иначе говоря, семейство $\infty^2$ тетраэдров $T^*$ проективно эквивалентно семейству тетраэдров $T$.

Если найдено семейство $\infty^2$ тетраэдров $T$, то известна каждая из четырех поверхностей $M_i$. Итак, 32 компоненты $a_i^k$, $b_i^k$, удовлетворяющие системе (2), определяют поверхность (M) вплоть до проективного преобразования пространства.

**§ 2. Выбор нормального тетраэдра. Асимптотические касательные.** Система 32 функций $a_i^k, b_i^k$ представляет, следовательно, полную систему инвариантов поверхности в проективно-диференциальной геометрии, но, конечно, их излишне много. При частном выборе тетраэдра $T$ число их может быть значительно уменьшено.

Выберем точку $M_1$ на касательной к линии $u$. Если $M^*$ и $M$ — точки поверхности (M), лежащие на линии $u$ и соответствующие значениям параметров $u^*$ и $u$, то четыре координаты

$$\frac{M^* - M}{u^* - u}$$

определяют какую-то точку прямой $MM^*$, а

$$M = \lim_{u^* = u} \frac{M^* - M}{u^* - u}$$

определяет некоторую точку на касательной к линии $u$. Так как теперь

[1]) Доказательство существования решения приведено в приложении к этой главе (стр. 52).



касательная к линии $u$ определяется двумя точками $M$ и $M_1$, то все четыре координаты $M_u$ линейно выражаются через $M$ и $M_1$:

$$M_u = AM + BM_1.$$

Сравнивая это уравнение с первым из уравнений (1), немедленно получим:

$$a_0^2 = 0, \quad a_0^3 = 0. \tag{3}$$

Совершенно так же, если точка $M_2$ выбрана на касательной к линии $v$, то аналогично найдем:

$$b_0^1 = 0, \quad b_0^3 = 0. \tag{4}$$

Касательная плоскость поверхности (M) определяется теперь тремя точками $M$, $M_1$ и $M_2$.

Следовательно, точка $M^*$ лежит в касательной плоскости, если ее координаты удовлетворяют уравнению

$$(MM_1M_2M^*) = 0. \tag{5}$$

Подставляя сюда координаты произвольной точки нашей поверхности

$$M^* = M + dM + \frac{1}{2} d^2M + \ldots,$$

мы получим уравнение линии пересечения поверхности (M) с ее касательной плоскостью $(MM_1M_2)$.

Так как по формулам (1), (3) и (4)

$$dM = M(a_0^0\,du + b_0^0\,dv) + M_1 a_0^1\,du + M_2 b_0^2\,dv,$$
$$d^2M = AM + BM_1 + CM_2 + M_3\,[a_0^1a_1^3\,du^2 + (a_0^1b_1^3 + b_0^2a_2^3)\,du\,dv + b_0^2b_2^3\,dv^2],$$

где $A$, $B$, $C$ — некоторые функции, не имеющие для нас значения, то уравнение (5) примет вид:

$$a_0^1a_1^3\,du^2 + (a_0^1b_1^3 + b_0^2a_2^3)\,du\,dv + b_0^2b_2^3\,dv^2 + \ldots = 0, \tag{6}$$

где не написанные члены по крайней мере третьей степени относительно $du$, $dv$.

Уравнение (6) показывает, что линия пересечения имеет в точке $M$ $(du = 0,\ dv = 0)$ двойную точку. Две ее касательные определяются уравнением:

$$a_0^1a_1^3\,du^2 + (a_0^1b_1^3 + b_0^2a_2^3)\,du\,dv + b_0^2b_2^3\,dv^2 = 0. \tag{7}$$

Направления этих касательных называются асимптотическими направлениями на поверхности. Кривые на поверхности, имеющие во всякой точке своими касательными асимптотические касательные, называются асимптотическими.

Асимптотические линии определяются уравнением:

$$(MM_1M_2\,d^2M) = 0.$$

Примем их за координатные линии.

Тогда уравнение (7) должно удовлетворяться значением $v = \text{const.}$ или $u = \text{const.}$, откуда следует:

$$a_0^1 a_1^3 = 0, \quad b_0^2 b_2^3 = 0.$$

Первые множители $a_0^1$, $b_0^2$, очевидно, не равны нулю, иначе точки $M_u$ или $M_v$ совпадали бы с точкой $M$ и кривые $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$ вырождались бы в точку.

Следовательно,

$$a_1^3 = 0, \quad b_2^3 = 0. \tag{8}$$

Асимптотическая линия есть ребро возврата семейства касательных плоскостей к поверхности. Действительно, нетрудно заметить, что характеристикой касательных плоскостей вдоль линии $u$ служит касательная к линии $u$ прямая $MM_1$: эта прямая лежит и в касательной плоскости $MM_1M_2$ в точке $M$ и в касательной плоскости $M^*M_1^*M_2^*$ в точке $M^*$, бесконечно близкой к точке $M$ на линии $u$, ибо все точки прямой $MM_1$ в силу формул (3), (4), (8) при изменении $u$ получают бесконечно малые перемещения, не выводящие их из плоскости $MM_1M_2$.

Вносяя значение (3), (4), (8) в основную систему уравнений (2), мы получнм для $i = 0$, $k = 3$:

$$b_0^2 a_2^3 = a_0^1 b_1^3. \tag{9}$$

Очевидно, $a_0^1$ и $b_0^2$ не могут обращаться в нуль, ибо если, например, $a_0^1 = 0$, то первое уравнение (1) сводится к одному члену:

$$\mathrm{M}_u = a_0^0 \mathrm{M},$$

точка $M$ при изменении $u$ останется на месте и иоверхность $(M)$ вырождается в линию.

Нормируя координаты $\mathrm{M}_1^i$ и $\mathrm{M}_2^i$ точек $M_1$ и $M_2$ (т. е. умножая все четыре координаты $\mathrm{M}_1^i$ или $\mathrm{M}_2^i$ на одну и ту же функцию), мы приведем обе эти компоненты к единице:

$$a_0^1 = 1, \quad b_0^2 = 1. \tag{10}$$

Уравнение (9) покажет теперь, что

$$a_2^3 = b_1^3.$$

Очевидно, и эти компоненты не могут обращаться в нуль.

В противном случае первые три уравнения (1) совсем не будут содержать $\mathrm{M}_3$; они образуют полную в себе систему и, следовательно, определяют движение треугольника $MM_1M_2$ в плоскости; поверхность $(M)$ вырождается в плоскость.

Нормируя координаты точки $M_3$, мы приведем обе эти компоненты к единице:

$$a_2^3 = 1, \quad b_1^3 = 1. \tag{11}$$

Уравнения (2) дадут теперь для $i = 0$, $k = 1$ и 2, $i = 1$, $k = 3$ и $i = 2$, $k = 3$:

$$\left.\begin{aligned} a_2^1 &= b_1^1 - b_0^0 = b_2^2 - b_3^3, \\ b_1^2 &= a_2^2 - a_0^0 = a_1^1 - a_3^3. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$



**§ 3. Поверхность второго порядка Софуса Ли.** Поверхность $(M)$ в трехмерном пространстве можно рассматривать как геометрическое место точек $M$ или как огибающую ее касательных плоскостей $MM_1M_2$. В первом случае поверхность есть геометрический образ в пространстве точек, во втором случае — в пространстве плоскостей. Обе точки зрения равноправны. Поэтому при выборе координатного тетраэдра $T$ надо стремиться к тому, чтобы он строился одинаково просто и в точечных и в тангенциальных координатах.

Сделанные до сих пор допущения были именно такого рода — асимптотические линии на поверхности сами себе двойственны. Для асимптотической линии и только для нее одной совпадают оба определения линии на поверхности как геометрического места точек и как геометрического места плоскостей: касательные плоскости к поверхности являются вместе с тем соприкасающимися плоскостями кривой.

Сложнее дело обстоит с другими образами, связанными с поверхностями в данной точке. Например, соприкасающаяся поверхность второго порядка как место точек, как мы увидим далее, отлична от соприкасающейся поверхности как огибающей плоскостей. Поэтому для построения инвариантного тетраэдра удобнее будет выбрать за образующий элемент пространства не точку и не плоскость, а прямую.

В 1878 г. Ли [11] (Sophus Lie) ввел понятие соприкасающейся поверхности второго порядка, как некоторый образ линейчатой геометрии. Рассмотрим асимптотическую линию $u$, проходящую через точку $M$, и три касательных к асимптотическим линиям другого семейства в трех точках $M$, $M^*$, $M^{**}$ линии $u$. Эти три касательные определяют единственную линейную систему $\infty^1$ прямых — семейство прямолинейных образующих поверхности второго порядка (demiquadrique). В пределе, когда все три точки совпадут с точкой $M$, это будет линейная система $D_1$, лежащая на соприкасающейся поверхности второго порядка $Q$. Если мы за основу возьмем линию $v$, на ней три точки $M$, $M'$, $M''$ и будем в этих точках проводить касательные к линии $u$, то таким образом в пределе мы получим линейную систему $D_2$ — второе семейство прямолинейных образующих той же поверхности $Q$. Эта поверхность второго порядка $Q$ носит название поверхности Ли и имеет основное значение в проективной теории поверхности. Будем пользоваться обыкновенными точечными координатами и запишем уравнение искомой поверхности в однородных координатах в виде:

$$\sum a_{ik} \mathrm{P}^i \mathrm{P}^k = 0, \tag{13}$$

или, короче, опуская указатели:

$$\sum a \mathrm{PP} = 0,$$

где $\mathrm{P}^i$ — текущие координаты точки поверхности второго порядка $Q$.

Наша поверхность проходит через прямые $(\mathrm{MM}_2)$, $(\mathrm{M}^*\mathrm{M}_2^*)$, $(\mathrm{M}^{**}\mathrm{M}_2^{**})$.
Первая из них — просто второе ребро нашего тетраэдра, а две остальные получаются изменением параметра $u$. Любая точка прямой $(MM_2)$ имеет координаты $\mathrm{M} + \lambda \mathrm{M}_2$, где $\lambda$ — произвольный параметр.

Внося эти значения вместо $\mathrm{P}$ в уравнение (13), получим:

$$\sum a (\mathrm{M} + \lambda \mathrm{M}_2)^2 = 0, \tag{14}$$

откуда, так как это уравнение должно быть удовлетворено при всяком $\lambda$, имеем:

$$\sum a\mathrm{M}^2 = 0, \quad \sum a\mathrm{M}\mathrm{M}_2 = 0, \quad \sum a\mathrm{M}_2^2 = 0. \tag{15}$$

Подставляя вместо $\mathrm{P}$ координаты произвольной точки второй прямой $M^* + \lambda M^*$ и вычитая уравнение (14), получим:

$$\sum a\,[(\mathrm{M}^* + \lambda\mathrm{M}_2^*)^2 - (\mathrm{M} + \lambda\mathrm{M}_2)^2] = 0, \tag{16}$$

где попрежнему верхние указатели, непременно одинаковые у всех членов первой и второй скобки, опущены.

Если мы теперь разделим уравнение (16) на разность параметров $u^* - u$ и перейдем к пределу при $u^* = u$, то получим, очевидно, обыкновенную производную по $u$:

$$\sum a \frac{\partial}{\partial u}\,[(\mathrm{M} + \lambda\mathrm{M}_2)^2] = 0.$$

Внося сюда значения производных из формул (1), развертывая по степеням $\lambda$ и обращая в нуль каждый коэфициент, мы получим три уравнения, которые можно было бы также получить, диференцируя по $u$ уравнения (15) при постоянных $a_{ik}$.

Имея в виду формулы (3), (4), (8), (10), (11), получим:

$$\sum a\mathrm{M}\,(a_0^0\mathrm{M} + \mathrm{M}_1) = 0,$$
$$\sum a\,[\mathrm{M}_2\,(a_0^0\mathrm{M} + \mathrm{M}_1) + \mathrm{M}\,(a_2^0\mathrm{M} + a_2^1\mathrm{M}_1 + a_2^2\mathrm{M}_2 + \mathrm{M}_3)] = 0,$$
$$\sum a\mathrm{M}_2\,[a_2^0\mathrm{M} + a_2^1\mathrm{M}_1 + a_2^2\mathrm{M}_2 + \mathrm{M}_3] = 0$$

или в силу уравнения (15)

$$\sum a\mathrm{M}\mathrm{M}_1 = 0, \quad \sum a\,(\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 + \mathrm{M}\mathrm{M}_3) = 0, \quad \sum a\,(a_2^1\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 + \mathrm{M}_2\mathrm{M}_3) = 0. \tag{17}$$

Совершенно так же третье условие [прохождения через третью прямую $(M^{**}M_2^{**})$] в пределе можно записать, диференцируя уравнения (17) еще раз по $u$ при постоянных $a_{ik}$. Пользуясь уравнениями (1) и принимая во внимание уже имеющиеся уравнения (15) и (17), получим:

$$\sum a\mathrm{M}_1^2 = 0, \tag{18$_1$}$$

$$\sum a\,[(a_1^1 + a_2^2 - a_0^0 - a_3^3)\,\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 + 2\mathrm{M}_1\mathrm{M}_3] = 0, \tag{18$_2$}$$

$$\sum a\left\{\left[\frac{\partial a_2^1}{\partial u} + a_2^1(a_0^0 - a_2^2) + a_3^1 - a_2^0\right]\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 + \mathrm{M}_3^2\right\} = 0. \tag{18$_3$}$$

В силу уравнений (12) второе из этих уравнений можно написать в виде:

$$\sum a\,(b_1^2\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 + \mathrm{M}_1\mathrm{M}_3) = 0. \tag{18$_2'$}$$

Уравнения (15), (17) и (18) вполне определяют поверхность $Q$. Если мы будем исходить из линии $v$ и проводить касательные к линиям $u$, то мы придем к уравнению того же вида, которое, очевидно, получим, если в уравнениях (15), (17), (18) поменять указатели 1 и 2 и диференцирование по $u$ заменить диференцированием по $v$.



Первые восемь уравнений, очевидно, при этом не изменятся; что касается последнего уравнения (18$_3$), то эквивалентность вновь полученного уравнения

$$\sum a\left\{\left[\frac{\partial b_1^2}{\partial v} + b_1^2(b_0^0 - b_1^1) + b_3^2 - b_1^0\right]\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 + \mathrm{M}_3^2\right\} = 0 \tag{19}$$

первоначальному (18$_3$) станет очевидным, если из уравнений системы (2)

$$a_{0v}^0 - b_{0u}^0 = a_2^0 - b_1^0,$$
$$a_{1v}^1 - b_{1u}^1 = b_1^0 + a_3^1 + b_1^2 a_2^1 - a_1^2 b_2^1,$$
$$a_{2v}^2 - b_{2u}^2 = -a_2^0 - b_3^2 + a_1^2 b_2^1 - a_2^1 b_1^2,$$
$$a_{3v}^3 - b_{3u}^3 = b_3^2 - a_3^1,$$

принимая во внимание соотношения (12):

$$2a_2^1 = b_1^1 + b_2^2 - b_0^0 - b_3^3,$$
$$2b_1^2 = a_1^1 + a_2^2 - a_0^0 - a_3^3$$

составить комбинацию:

$$\frac{\partial b_1^2}{\partial v} - \frac{\partial a_2^1}{\partial u} = b_1^0 - b_3^2 - (a_2^0 - a_3^1). \tag{20}$$

Таким образом в том и другом случае мы приходим к одним и тем же уравнениям и, следовательно, к одной и той же поверхности $Q$.

До сих пор система координат оставалась произвольной. Остановимся теперь на определенной системе координат и примем за координатный тетраэдр наш тетраэдр $T(M, M_1, M_2, M_3)$. В таком случае каждая из точек $M_i$ имеет все координаты равные нулю, кроме одной $i$-й, которую примем равной единице. Внося эти значения в уравнения (15), (17), (18), мы немедленно получим:

$$a_{00} = 0, \quad a_{02} = 0, \quad a_{22} = 0, \quad a_{01} = 0,$$
$$a_{11} = 0, \quad a_{12} + a_{03} = 0, \quad a_2^1 a_{12} + a_{23} = 0, \quad b_1^2 a_{12} + a_{13} = 0,$$
$$\left(\frac{\partial a_2^1}{\partial u} + a_3^1 - a_2^0 - a_2^1 b_1^2\right) a_{12} + a_{33} = 0.$$

Полагая еще $a_{12} = 1$, мы получим уравнение поверхности Ли в виде

$$x_1x_2 - x_0x_3 - a_2^1x_2x_3 - b_1^2x_1x_3 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_2^1}{\partial u} + a_3^1 - a_2^0 - a_2^1 b_1^2\right)x_3^2 = 0. \tag{21}$$

Поверхность Ли особенно тесно связана с бесконечно малой окрестностью точки $M$ нашей поверхности. Поэтому естественно при выборе инвариантного тетраэдра руководствоваться расположением его относительно этой соприкасающейся поверхности второго порядка.

Мы видим прежде всего, что поверхность Ли всегда содержит обе асимптотические касательные $MM_1$ и $MM_2$, следовательно, проходит через три вершины тетраэдра. Выберем и четвертую вершину $M_3$ на поверхности (21) и потребуем, чтобы четвертая грань $M_1M_2M_3$ касалась поверхности Ли в этой точке.

Тогда поверхность (21) должна содержать ребра $(M_1M_3)$ и $(M_2M_3)$, и ее уравнение примет вид:

$$x_1x_2-x_0x_3=0. \tag{21'}$$

Следовательно,

$$a_2^1=0,\quad b_1^2=0,\quad a_3^1-a_2^0=0. \tag{22}$$

**§ 4. Соприкасающийся линейный комплекс.** Условия (22) не вполне определяют тетраэдр, так как можно еще произвольно выбрать ось $MM_3$. Эту ось мы выберем, опираясь на понятие директрис Вильчинского.

Мы уже видели, какую основную роль в теории поверхности играют асимптотические линии. Оставаясь в области линейчатой геометрии, мы должны рассматривать их как огибающие семейства $\infty^1$ их касательных. Вполне естественно, как это делает Вильчинский [12], поставить задачу об отыскании соприкасающегося к этому семейству прямых линейного комплекса.

Возьмем на асимптотической линии $u$ пять точек $M$, $M^*$, $M^{**}$, $M^{***}$, $M^{****}$ и проведем в каждой точке касательную к этой же асимптотической $u$. Пять прямых $MM_1$, $M^*M_1^*$ и т. д. определят единственный линейный комплекс. В пределе, когда все пять точек совпадут, это будет соприкасающийся комплекс $K_1$.

Если мы обозначим символами $(ik)$ линейные координаты прямой, то уравнение любого линейного комплекса напишется в виде:

$$\sum c_{ik}(ik)=0.$$

Подставляя сюда шесть координат прямой $MM_1$, мы получим первое условие:

$$\sum c_{ik}(M^iM_1^k)=0$$

или, короче, опуская указатели:

$$\sum c\,(MM_1)=0. \tag{23}$$

Подставим координаты второй прямой $M^*M_1^*$ и, вычитая уравнение (23), получим:

$$\sum c\,[(M^*M_1^*)-(MM_1)]=0.$$

Здесь попрежнему в первой и во второй скобке надо приписывать буквам одинаковые указатели.

Деля левую часть этого уравнения на разность параметров $u^*-u$ и переход к пределу, мы получим:

$$\sum c\,\frac{\partial}{\partial u}\cdot(MM_1)=0,$$

или

$$\sum c\,(M_uM_1)+\sum c\,(MM_{1u})=0,$$

или в силу формул (1):

$$\sum c\,\{a_0^0(MM_1)+a_1^1(MM_1)+a_1^2(MM_2)\}=0.$$

Здесь уже опущены как равные нулю те члены, которые содержат две одинаковые буквы в скобке. Каждая скобка есть определитель (или, вернее, один из шести определителей матрицы), а определитель с равными строками равен нулю.



Кроме того, два члена пропадают в силу уравнения (23). Если величина $a_1^2$ равна нулю, то первые две строки уравнения (1), не содержащие совершенно $M_2$ и $M_3$, давали бы полную в себе систему и определяли бы движение отрезка $MM_1$ по прямой. Асимптотическая $u$ обращалась бы в прямолинейную образующую. Исключая линейчатые поверхности, мы можем считать $a_1^2$ отличным от нуля. Сокращая на $a_1^2$, получим:

$$\sum c\,(MM_2)=0. \tag{24}$$

Мы видим, что вторая ось тетраэдра тоже принадлежит комплексу.

Такие же рассуждения покажут нам, что третье условие (принадлежность прямой $M^{**}M_1^{**}$ комплексу) в пределе дает:

$$\sum c\,\frac{\partial^2}{\partial u^2}(MM_1)=0.$$

Проще всего мы получим требуемое условие, диференцируя уравнение (24) по $u$ при постоянных $c_{ik}$.

С помощью уравнений (1) получаем:

$$\sum c\,[(a_0^0+a_2^2)(MM_2)+(M_1M_2)+(MM_3)]=0$$

или в силу уравнения (24):

$$\sum c\,[(M_1M_2)+(MM_3)]=0. \tag{25}$$

Таким же образом получим четвертое условие, диференцируя еще раз по $u$; в силу предыдущих уравнений и соотношений (12) и (22) это условие примет вид:

$$\sum c\,(M_1M_3)=0. \tag{26}$$

Диференцируем еще раз по $u$ и опускаем члены, которые сокращаются в силу уравнений (23), (24), (26):

$$\sum c\,\{a_1^0(MM_3)+a_1^2(M_2M_3)+a_3^2(M_1M_2)\}=0$$

или в силу (25):

$$\sum c\,[(a_1^0-a_3^2)(MM_3)+a_1^2(M_2M_3)]=0. \tag{27}$$

Уравнения (23), (24), (25), (26), (27) определят искомый комплекс.

**§ 5. Директрисы Вильчинского.** Уравнения (23)—(27) справедливы, как бы мы ни выбрали координатный тетраэдр. Если координатный тетраэдр совпадает с тетраэдром $T(M, M_1, M_2, M_3)$, то любая из прямых $M_iM_k$ имеет только одну координату, равную единице:

$$p_{ik}=1,$$

а все остальные — нули.

Внося эти значения в уравнения (23)—(27), мы получим сейчас же коэфициенты $c_{ik}$:

$$c_{01}=0, \quad c_{02}=0, \quad c_{13}=0, \quad c_{12}+c_{03}=0, \quad (a_1^0-a_3^2)c_{03}+a_1^2c_{23}=0$$

и уравнение комплекса в местных координатах $p_{ik}$:

$$p_{12}-p_{03}+\frac{a_1^0-a_3^2}{a_1^2}p_{23}=0. \tag{28}$$

Уравнение линейного комплекса $K_2$, соприкасающегося к асимптотической $v$, пишется по аналогии:

$$p_{21}-p_{03}+\frac{b_2^0-b_3^1}{b_2^1}p_{13}=0. \tag{28'}$$

Два комплекса (28) и (28') пересекаются по конгруэнции, которая принадлежит также всем комплексам пучка:

$$(1-\lambda)p_{12}-(1+\lambda)p_{03}+\frac{a_1^0-a_3^2}{a_1^2}p_{23}+\lambda\frac{b_2^0-b_3^1}{b_2^1}p_{13}=0, \tag{29}$$

где $\lambda$ — произвольный параметр.

Этот пучок содержит два специальных комплекса. Действительно, коэфициенты $c_{ik}$ специального комплекса удовлетворяют соотношению:

$$c_{01}c_{23}+c_{02}c_{31}+c_{03}c_{12}=0.$$

Прилагая его к комплексу (29), получим:

$$\lambda^2-1=0.$$

Два специальных комплекса суть:

$$\left.\begin{aligned} p_{12}+\frac{a_1^0-a_3^2}{2a_1^2}p_{23}-\frac{b_2^0-b_3^1}{2b_2^1}p_{13}=0,\\ p_{03}-\frac{a_1^0-a_3^2}{2a_1^2}p_{23}-\frac{b_2^0-b_3^1}{2b_2^1}p_{13}=0.\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Так как они содержат только те прямые, которые пересекают их оси, то соприкасающаяся линейная конгруэнция [пересечение комплексов (28) и (28')], которая образована прямыми, принадлежащими всем комплексам пучка, в том числе и двум специальным, содержит прямые, пересекающие оси пучков ($K$).

Две директрисы соприкасающейся линейной конгруэнции называются *директрисами Вильчинского*.

Линейные координаты директрис, т. е. оси специальных комплексов (24), суть

первой директрисы:

$$p_{03}=1, \quad p_{01}=\frac{a_1^0-a_3^2}{2a_1^2}, \quad p_{02}=\frac{b_2^0-b_3^1}{2b_2^1}, \quad p_{12}=0,$$

$$p_{31}=0, \quad p_{23}=0;$$



второй директрисы:

$$p_{01}=-\frac{a_1^0-a_3^2}{2a_1^2}, \quad p_{02}=\frac{b_2^0-b_3^1}{2b_2^1}, \quad p_{03}=0,$$

$$p_{12}=1, \quad p_{31}=0, \quad p_{23}=0.$$

Так как координаты первой прямой все равны нулю за исключением только тех, которые содержат один указатель 0, то, следовательно, первая директриса проходит через точку $M$. Наоборот у второй директрисы равны нулю все координаты, носящие указатель 3; следовательно, вторая директриса лежит в плоскости $x_3=0$, т. е. в касательной плоскости поверхности.

Выберем первую директрису за ребро $MM_3$ тетраэдра $T$. Тогда

$$p_{01}=0, \quad p_{02}=0.$$

Следовательно,

$$a_1^0=a_3^2, \quad b_2^0=b_3^1. \tag{31}$$

Координаты второй директрисы тоже все обратятся в нуль, кроме $p_{12}=1$.

Следовательно, вторая директриса совпадает с ребром $M_1M_2$ тетраэдра.

Так как первая директриса $MM_3$ соединяет две точки $M$ и $M_3$, лежащие на поверхности Ли, а вторая есть линия пересечения касательных плоскостей к поверхности Ли в этих точках, то они сопряжены относительно этой поверхности второго порядка.

**§ 6. Нормальный тетраэдр.** Условия (3), (4), (8), (22), (31) вполне определяют положение вершин тетраэдра $T$; координаты трех вершин $M_1, M_2, M_3$ уже нормированы, остается еще свободный выбор общего множителя (нормирование) координат точки $M$.

Четыре вершины тетраэдра $T$ не лежат в одной плоскости. Поэтому определитель из всех координат его вершин заведомо не равен нулю. Умножая координаты точки $M$ на подходящую функцию, мы его приведем к единице:

$$(MM_1M_2M_3)=1. \tag{32}$$

Этим координаты $M$ нормируются и, следовательно, все компоненты движения тетраэдра $T$ будут определены.

Диференцируем уравнения (32), например, по параметру $u$. По правилу диференцирования определителя получим:

$$(M_uM_1M_2M_3)+(MM_{1u}M_2M_3)+(MM_1M_{2u}M_3)+(MM_1M_2M_{3u})=0.$$

Внося сюда значения производных из уравнений (1) и отбрасывая как равные нулю определители с двумя равными колонками, получим в силу равенства (32):

$$a_0^0+a_1^1+a_2^2+a_3^3=0, \tag{33}$$

и аналогично:

$$b_0^0+b_1^1+b_2^2+b_3^3=0. \tag{33'}$$

Введем обозначения:

$$a_1^2=\beta,\quad b_2^1=\gamma,\quad a_2^0=a_3^1=k,\quad b_1^0=b_3^2=l,$$
$$a_1^0=a_3^2=B,\quad b_2^0=b_3^1=A.$$

Система уравнений (2) примет вид:

$$b_0^0=b_1^1,\quad b_2^2=b_3^3,\quad b_0^0-b_2^2=\frac{\partial\ln\beta}{\partial v},$$
$$a_0^0=a_2^2,\quad a_1^1=a_3^3,\quad a_0^0-a_1^1=\frac{\partial\ln\gamma}{\partial u},$$
$$a_{0v}^0-b_{0u}^0=k-l,\qquad a_{1v}^1-b_{1u}^1=k+l-\beta\gamma,$$
$$a_3^0=A\beta,\qquad b_3^0=B\gamma,$$
$$B_v-l_u=(a_0^0-a_1^1)\,l,\quad A_u-k_v=(b_0^0-b_2^2)\,k,$$
$$a_{3v}^0-b_{3u}^0=(a_0^0-a_3^3)\,b_3^0-(b_0^0-b_3^3)\,a_3^0.$$

Присоединяя сюда уравнения (33), (33′), мы определим все компоненты $a_i^i$, $b_i^i$ с одинаковыми значками. Внося их в систему (1), придадим ей окончательную форму:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial u}&=\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\gamma}{\partial u}M+M_1,\\
\frac{\partial M}{\partial v}&=\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\beta}{\partial v}M+M_2,\\
\frac{\partial M_1}{\partial u}&=BM-\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\gamma}{\partial u}M_1+\beta M_2,\\
\frac{\partial M_1}{\partial v}&=lM+\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\beta}{\partial v}M_1+M_3,\\
\frac{\partial M_2}{\partial u}&=kM+\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\gamma}{\partial u}M_2+M_3,\\
\frac{\partial M_2}{\partial v}&=AM+\gamma M_1-\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\beta}{\partial v}M_2,\\
\frac{\partial M_3}{\partial u}&=A\beta M+kM_1+BM_2-\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\gamma}{\partial u}M_3,\\
\frac{\partial M_3}{\partial v}&=B\gamma M+AM_1+lM_2-\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\beta}{\partial v}M_3.
\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{I})$$

Коэфициенты в этой системе связаны уравнениями:

$$2k=\beta\gamma-\frac{\partial^2\ln\beta}{\partial u\,\partial v},\qquad 2l=\beta\gamma-\frac{\partial^2\ln\gamma}{\partial u\,\partial v},\qquad(\mathrm{II}_1)$$
$$\frac{\partial A}{\partial u}=\frac{\partial k}{\partial v}+k\frac{\partial\ln\beta}{\partial v},\qquad \frac{\partial B}{\partial v}=\frac{\partial l}{\partial u}+l\frac{\partial\ln\gamma}{\partial u},\qquad(\mathrm{II}_2)$$
$$\frac{\partial A}{\partial v}\beta+2A\frac{\partial\beta}{\partial v}=\frac{\partial B}{\partial u}\gamma+2B\frac{\partial\gamma}{\partial u}.\qquad(\mathrm{II}_3)$$



Мы видим, что система (I) содержит кроме координат $M_i$ только шесть величин; из них две — $k$ и $l$ — непосредственно выражены через $\beta$ и $\gamma$ при помощи формулы $(\mathrm{II}_1)$. Таким образом поверхность определяется четырьмя инвариантами $\beta$, $\gamma$, $A$, $B$, которые связаны тремя уравнениями $(\mathrm{II}_{2,3})$. В следующей главе, с точки зрения теории проективного изгибания поверхности, мы увидим существенное различие между двумя первыми инвариантами $\beta$, $\gamma$ и двумя последними $A$, $B$.

Инварианты поверхности $\beta$, $\gamma$, $A$, $B$ и сами координаты вершин $M_i$ (нормированные) зависят от выбора параметров асимптотических линий $u$, $v$.

Введем новые параметры $u^*=u^*(u)$, $v^*=v^*(v)$; тогда координаты $M_i$ умножатся на некоторые функции $U_i$, $V_i$, где $U_i$ есть функция одного $u$ и $V_i$ — одного $v$. Внося в систему (I) новые значения:

$$M_i^*=M_iU_iV_i,$$

мы без труда получим:

$$\left.\begin{aligned}
M^*&=M\sqrt{\varepsilon\varepsilon'\frac{du^*}{du}\frac{dv^*}{dv}},\qquad & M_1^*&=M_1\varepsilon\sqrt{\varepsilon\varepsilon'\frac{du}{du^*}\frac{dv^*}{dv}},\\
M_2^*&=M_2\varepsilon'\sqrt{\varepsilon\varepsilon'\frac{du^*}{du}\frac{dv}{dv^*}},\qquad & M_3^*&=M_3\varepsilon\varepsilon'\sqrt{\varepsilon\varepsilon'\frac{du}{du^*}\frac{dv}{dv^*}}.
\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{III}_1)$$

Здесь $\varepsilon=\pm1$, $\varepsilon'=\pm1$ выбраны так, что произведения $\varepsilon\frac{du}{du^*}$ и $\varepsilon'\frac{dv}{dv^*}$ положительны.

$$\beta^*=\beta\left(\frac{du}{du^*}\right)^2\frac{dv^*}{dv},\quad \gamma^*=\gamma\frac{du^*}{du}\left(\frac{dv}{dv^*}\right)^2,$$
$$A^*=A\left(\frac{dv}{dv^*}\right)^2,\quad B^*=B\left(\frac{du}{du^*}\right)^2,\qquad(\mathrm{III}_2)$$
$$k^*=k\frac{du}{du^*}\frac{dv}{dv^*},\quad l^*=l\frac{du}{du^*}\frac{dv}{dv^*}.\qquad(\mathrm{III}_3)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\beta\,du^3+\gamma\,dv^3}{du\,dv},\qquad(34)$$
$$B\,du^2+A\,dv^2\qquad(35)$$

суть инвариантные диференциальные формы. Первая есть линейный элемент Фубини, а вторая — его третья квадратичная форма [1]).

**§ 7. Нормальный тетраэдр линейчатой поверхности.** Если

$$a_1^2=\beta=0,$$

то первые два уравнения (I):

$$M_u=a_0^0M+M_1,$$
$$M_{1u}=a_1^0M+a_1^1M_1$$

при постоянном $v$ определяют прямую. Все линии $u$ — прямые и поверхность линейчатая.

[1]) Или отличается от нее на величину, зависящую только от линейного элемента.

Так же, как и раньше, можно определить поверхности Ли, но уже нельзя найти единственного соприкасающегося линейного комплекса $K_1$. Поэтому тетраэдр $T$ придется выбирать, исходя из других соображений.

Если $b_2^1=\gamma$ не нуль, т. е. линии $v$ не прямые, то мы попрежнему найдем линейный соприкасающийся к линиям $v$ комплекс $K_2$:

$$p_{21}-p_{03}+\frac{b_2^0-b_3^1}{b_2^1}p_{13}=0. \tag{28''}$$

Он устанавливает нуль-систему, где точке $(x)$ соответствует плоскость

$$X_0x_3+X_1\left(x_2-\frac{b_2^0-b_3^1}{b_2^1}x_3\right)-X_2x_1+X_3\left(-x_0+\frac{b_2^0-b_3^1}{b_2^1}x_1\right)=0;$$

здесь $X_i$ — текущие координаты плоскости.

В этой корреляции прямой, соединяющей точку $M$ с какой-нибудь точкой $(0, x_1, x_2, x_3)$, соответствует сопряженная ей прямая — ось пучка плоскостей

$$X_0x_3+X_1\left(x_2-\frac{b_2^0-b_3^1}{b_2^1}x_3\right)-X_2x_1+\lambda X_3=0,$$

где $\lambda$ — параметр пучка.

Той же прямой в полярном соответствии, устанавливаемом поверхностью Ли

$$x_1x_2-x_0x_3=0,$$

соответствует ось пучка полярных плоскостей

$$X_0x_3-X_1x_2-X_2x_1+\lambda X_3=0.$$

Эти прямые совпадают, если

$$x_2=\frac{b_2^0-b_3^1}{2b_2^1}x_3.$$

Следовательно, существует пучок прямых [1])

$$\left(\mathrm{M},\ \mathrm{M}_1\frac{x_1}{x_3}+\mathrm{M}_2\frac{b_2^0-b_3^1}{2b_2^1}+\mathrm{M}_3\right), \tag{36}$$

которые сопряжены и относительно поверхности Ли и в нуль-системе комплекса $K_2$ с прямыми пучка

$$X_3=0,\quad X_0-X_1\frac{b_2^0-b_3^1}{2b_2^1}-X_2\frac{x_1}{x_3}=0.$$

Выберем одну из прямых первого пучка за ось $MM_3$, тогда

$$b_2^0=b_3^1.$$

---

[1]) Здесь отношение $x_1:x_3$ играет роль параметра.



Внося это в формулы (I) и пользуясь соотношениями (2), мы придем, полагая $b_0^0=\alpha$, к системе:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial u}=\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\gamma}{\partial u}\mathrm{M}+\mathrm{M}_1, && \frac{\partial\mathrm{M}}{\partial v}=\alpha\mathrm{M}+\mathrm{M}_2,\\
&\frac{\partial\mathrm{M}_1}{\partial u}=B\mathrm{M}-\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\gamma}{\partial u}\mathrm{M}_1, && \frac{\partial\mathrm{M}_1}{\partial v}=l\mathrm{M}+\alpha\mathrm{M}_1+\mathrm{M}_3,\\
&\frac{\partial\mathrm{M}_2}{\partial u}=k\mathrm{M}+\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\gamma}{\partial u}\mathrm{M}_2+\mathrm{M}_3, && \frac{\partial\mathrm{M}_2}{\partial v}=A\mathrm{M}+\gamma\mathrm{M}_1-\alpha\mathrm{M}_2,\\
&\frac{\partial\mathrm{M}_3}{\partial u}=k\mathrm{M}_1+B\mathrm{M}_2-\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\gamma}{\partial u}\mathrm{M}_3, && \frac{\partial\mathrm{M}_3}{\partial v}=B\gamma\mathrm{M}+A\mathrm{M}_1+l\mathrm{M}_2-\alpha\mathrm{M}_3.
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Коэфициенты связаны уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}
&l=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\ln\gamma}{\partial u\,\partial v}, && k=-\frac{\partial\alpha}{\partial u},\\
&\frac{\partial A}{\partial u}=\frac{\partial k}{\partial v}+2k\alpha, && \frac{\partial B}{\partial v}=\frac{\partial l}{\partial u}+l\frac{\partial\ln\gamma}{\partial u},\quad \frac{\partial}{\partial u}(B\gamma^2)=0,
\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

которые можно получить из уравнений (I) и (II), полагая

$$\beta=0,\quad \frac{\partial\ln\beta}{\partial v}=2\alpha. \tag{38'}$$

Построенный тетраэдр не единственный, поскольку за ось $MM_3$ выбрана одна из прямых пучка (36). Впрочем, и непосредственно видно, что система (37) сохраняет свой вид при замене

$$\mathrm{M}_2=\mathrm{M}_2^*+c\mathrm{M},\quad \mathrm{M}_3=\mathrm{M}_3^*+c\mathrm{M}_1.$$

Выбором

$$c=\alpha$$

можно привести $\alpha$ к нулю, но этот выбор не устанавливает инвариантного тетраэдра, ибо положение точки $M_3$ зависит от выбора параметра $v$.

Если и $\beta$ и $\gamma$ равны нулю, то оба семейства асимптотических состоят из прямых и поверхность (M) есть поверхность второго порядка. Тетраэдр остается неопределенным. Случай развертывающихся поверхностей, когда асимптотические совпадают, мы исключаем из рассмотрения.

**§ 8. Определение инвариантов поверхности.** Нормальный тетраэдр нелинейчатой поверхности (M) вполне определен, если дана поверхность, а потому должны быть известны и все компоненты его.

Исключая $\mathrm{M}_1$ и $\mathrm{M}_2$ из первых уравнений системы (I), получим два уравнения второго порядка для M:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2\mathrm{M}}{\partial u^2}&=\beta\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial v}+\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2\ln\gamma}{\partial u^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\ln\gamma}{\partial u}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\partial\beta}{\partial v}+B\right]\mathrm{M},\\
\frac{\partial^2\mathrm{M}}{\partial v^2}&=\gamma\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial u}+\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2\ln\beta}{\partial v^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\ln\beta}{\partial v}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma}{\partial u}+A\right]\mathrm{M}.
\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Эти уравнения позволяют легко определить коэфициенты $\beta$, $\gamma$, $A$, $B$, если известны нормированные координаты точки $M$.

Нормирование $M$ определялось условием (32):

$$(\mathrm{M}\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3)=1.$$

Если сюда внести $M_1$, $M_2$, $M_3$ из системы (I), то получим:

$$(\mathbf{M}\mathbf{M}_u\mathbf{M}_v\mathbf{M}_{uv}) = 1. \tag{32'}$$

Уравнения (39) приводят нас к следующим формулам:

$$\beta = \frac{(\mathbf{M}\mathbf{M}_u\mathbf{M}_{uu}\mathbf{M}_{uv})}{(\mathbf{M}\mathbf{M}_u\mathbf{M}_v\mathbf{M}_{uv})}, \quad \gamma = \frac{(\mathbf{M}\mathbf{M}_{vv}\mathbf{M}_v\mathbf{M}_{uv})}{(\mathbf{M}\mathbf{M}_u\mathbf{M}_v\mathbf{M}_{uv})},$$

$$A = \frac{1}{2}\gamma\frac{\partial \ln \gamma\psi}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln \beta\psi}{\partial v^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \ln \psi}{\partial v}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \ln \beta}{\partial v}\right)^2 + \frac{1}{\psi^2}(\mathbf{M}_u\mathbf{M}_v\mathbf{M}_{vv}\mathbf{M}_{uv}), \tag{40}$$

$$B = \frac{1}{2}\beta\frac{\partial \ln \beta\psi}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln \gamma\psi}{\partial u^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \ln \psi}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \ln \gamma}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{\psi^2}(\mathbf{M}_u\mathbf{M}_v\mathbf{M}_{uu}\mathbf{M}_{uv}),$$

где

$$\psi^2 = (\mathbf{M}\mathbf{M}_u\mathbf{M}_v\mathbf{M}_{uv}).$$

Нетрудно проверить, что формулы (40) верны, если координаты **M** нормированы, но они сохраняют свою силу, если вместо **M** внести туда

$$\mathbf{M}' = \theta\mathbf{M},$$

где $\theta$ — любая функция от $u$ и $v$.

Действительно,

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{M}'_u = \theta_u\mathbf{M} + \theta\mathbf{M}_u, && \mathbf{M}'_v = \theta_v\mathbf{M} + \theta\mathbf{M}_v,\\ &\mathbf{M}'_{uu} = \theta_{uu}\mathbf{M} + 2\theta_u\mathbf{M}_u + \theta\mathbf{M}_{uu}, && \mathbf{M}'_{vv} = \theta_{vv}\mathbf{M} + 2\theta_v\mathbf{M}_v + \theta\mathbf{M}_{vv},\\ &\mathbf{M}'_{uv} = \theta_{uv}\mathbf{M} + \theta_u\mathbf{M}_v + \theta_v\mathbf{M}_u + \theta\mathbf{M}_{uv}, \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

следовательно,

$$(\mathbf{M}'\mathbf{M}'_u\mathbf{M}'_v\mathbf{M}'_{uv}) = \theta^4(\mathbf{M}\mathbf{M}_u\mathbf{M}_v\mathbf{M}_{uv}),$$

$$(\mathbf{M}'\mathbf{M}'_u\mathbf{M}'_{uu}\mathbf{M}'_{uv}) = \theta^4(\mathbf{M}\mathbf{M}_u\mathbf{M}_{uu}\mathbf{M}_{uv}),$$

$$(\mathbf{M}'\mathbf{M}'_{vv}\mathbf{M}'_v\mathbf{M}'_{uv}) = \theta^4(\mathbf{M}\mathbf{M}_{vv}\mathbf{M}_v\mathbf{M}_{uv}),$$

$$(\mathbf{M}'_u\mathbf{M}'_v\mathbf{M}'_{vv}\mathbf{M}'_{uv}) = \theta^4(\mathbf{M}_u\mathbf{M}_v\mathbf{M}_{uu}\mathbf{M}_{uv}) + [\theta_{vv}\theta^3 - 2(\theta_v)^2\theta^2 - \gamma\theta_u\theta^3]\,\psi^2,$$

$$(\mathbf{M}'_u\mathbf{M}'_v\mathbf{M}'_{uu}\mathbf{M}'_{uv}) = \theta^4(\mathbf{M}_u\mathbf{M}_v\mathbf{M}_{vv}\mathbf{M}_{uv}) + [\theta_{uu}\theta^3 - 2(\theta_u)^2\theta^2 - \beta\theta_v\theta^3]\,\psi^2,$$

откуда прямо следует справедливость формул (40) при всяком нормировании координат **M** точки поверхности.

Формулы (41) показывают, что уравнения (39) при произвольном нормировании принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{M}'}{\partial u^2} &= 2\frac{\partial \ln \theta}{\partial u}\mathbf{M}'_u + \beta\mathbf{M}'_v + \\ &+ \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln \gamma\theta^2}{\partial u^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \ln \gamma}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial \ln \theta}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{2}\beta\frac{\partial \ln \beta\theta^2}{\partial v} + B\right]\mathbf{M}',\\ \frac{\partial^2 \mathbf{M}'}{\partial v^2} &= \gamma\mathbf{M}'_u + 2\frac{\partial \ln \theta}{\partial v}\mathbf{M}'_v + \\ &+ \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln \beta\theta^2}{\partial v^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \ln \beta}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial \ln \theta}{\partial v}\right)^2 - \frac{1}{2}\gamma\frac{\partial \ln \gamma\theta^2}{\partial u} + A\right]\mathbf{M}'. \end{aligned}\right\} \tag{39'}$$



Отсюда следует, что коэфициенты $\beta$ и $\gamma$ не зависят от нормирования поверхности. Нетрудно заметить, что все формулы этого параграфа применимы и к линейчатым поверхностям, если иметь в виду замену (38').

Уравнения (39), (39') позволяют легко сравнить полученные инварианты поверхности с коэфициентами дифференциальных форм Фубини.

Коэфициенты $\beta$ и $\gamma$ прямо совпадают с одноименными коэфициентами кубичной формы Фубини:

$$\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3.$$

Величины $A$ и $B$ связаны с коэфициентами третьей квадратичной формы Фубини:

$$p_{11}\, du^2 + p_{22}\, dv^2$$

соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln \gamma}{\partial u^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \ln \gamma}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial \beta}{\partial v} + B,\\ p_{22} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln \beta}{\partial v^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \ln \beta}{\partial v}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma}{\partial u} + A. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

**§ 9. Поверхности линейного комплекса.** Нормальный тетраэдр интимно связан с поверхностью; поэтому его компоненты имеют особенно важное значение для характеристики поверхности. В частности обращение в нуль того или другого инварианта определяет особые классы поверхностей.

Мы уже видели, что обращение в нуль коэфициентов линейного элемента $\beta$ и $\gamma$ показывает, что поверхность (**M**) — линейчатая.

Перейдем теперь к исследованию вопроса, какое значение для поверхности имеет исчезновение других инвариантов.

ТЕОРЕМА. *Если*

$$k = 0,$$

*то асимптотические линии* $v = \text{const.}$ *принадлежат линейному комплексу.*

Вернемся к рассуждениям § 4. Соприкасающийся комплекс $K_1$ определялся уравнениями (24)—(27), которые мы теперь запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} &\sum c(\mathbf{M}\mathbf{M}_1) = 0, \quad \sum c(\mathbf{M}\mathbf{M}_2) = 0,\\ &\sum c\{(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2) + (\mathbf{M}\mathbf{M}_3)\} = 0,\\ &\sum c(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3) = 0, \quad \sum c(\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{24—27}$$

Продиференцируем последнее равенство по $u$ при постоянных $c_{ik}$. Принимая во внимание первые равенства, мы получим в силу формул (I):

$$k\sum c(\mathbf{M}\mathbf{M}_3) = 0. \tag{43}$$

Если $k$ не нуль, то это равенство для комплекса $K_1$

$$p_{12} - p_{03} = 0$$

не выполняется и, следовательно, этот комплекс, содержащий пять бесконечно близких касательных линий $u$, не проходит через шестую. Это —

комплекс, соприкасающийся системы касательных к асимптотической линии $u$ в данной точке $M$, и в каждой точке асимптотической линии имеется свой, отличный от предыдущего, комплекс $K_1$.

Если

$$k=0,$$

то равенство (43) выполняется тождественно; следовательно, комплекс $K_1$, определяемый уравнениями (24)—(27), т. е. проходящий через пять бесконечно близких касательных, проходит и через шестую. Пусть $k$ тождественно равняется нулю. Сколько бы раз ни диференцировать уравнения (24)—(27), мы всегда будем иметь тождественное выполнение новых условий в силу предыдущих равенств (24)—(27). Следовательно, комплекс $K_1$ содержит все касательные к асимптотическим $u$. Асимптотическая $u$ принадлежит линейному комплексу.

Если равенство $k=0$ имеет место для всякого значения $u$ и $v$, то все асимптотические $u$ принадлежат различным линейным комплексам.

Уравнения (II$_1$) сейчас же дают:

$$\frac{\partial^2 \ln\beta}{\partial u\,\partial v}=\beta\gamma,\quad \frac{\partial A}{\partial u}=0. \qquad (44)$$

$A$ есть функция только одного $v$.

Если при этом

$$\gamma=0,$$

т. е. если поверхность (M) — линейчатая (с прямолинейными образующими $u=\text{const.}$), то и первое уравнение (44) интегрируется:

$$\beta=UV,$$

где $U$ есть функция одного переменного $u$, а $V$ — одного $v$.

Оставляя в стороне отдельные образующие, во всех точках которых $\beta$ исчезает, т. е. отдельные значения $u$, для которых $U=0$, мы видим, что равенство

$$\beta=0$$

сводится к условию, налагаемому на параметр $v$:

$$V=0,$$

т. е. $\beta$ обращается в нуль вдоль отдельных асимптотических $v=\text{const.}$

Каждая такая асимптотическая есть прямая линия, ибо при $\beta=0$ первое и третье из уравнений системы (I) определяют прямую.

Итак, наша линейчатая поверхность обладает направляющими прямыми. Общее число их не более двух. Действительно, они пересекают все образующие поверхности; если бы их было три, то система образующих как система прямых, пересекающих три заданные прямые, образовала бы систему образующих поверхности второго порядка. Следовательно, мы имели бы тогда $\infty^1$ направляющих, а наша поверхность была бы поверхностью второго порядка.



Если оба семейства асимптотических линий состоят из кривых различных линейных комплексов, то одновременно

$$k=0,\quad l=0.$$

Уравнения (II) в таком случае интегрируются.

**§ 10. Прямые Демулена.** Пусть теперь

$$A=0.$$

Чтобы выяснить геометрический смысл этого равенства, возвратимся к § 3 и рассмотрим огибающую семейства поверхностей Ли вдоль асимптотической $u$ поверхности (M).

Уравнение поверхности Ли в произвольных координатах писалось нами в форме:

$$\sum a_{ik}\mathrm{P}^i\mathrm{P}^k=0, \qquad (13')$$

где $\mathrm{P}^i$ — текущие координаты точки поверхности и коэфициенты $a_{ik}$ определяются системой уравнений (индексы везде опущены):

$$\sum a\mathrm{MM}=0,\quad \sum a\mathrm{MM}_2=0,\quad \sum a\mathrm{M}_2\mathrm{M}_2=0, \qquad (15')$$
$$\sum a\mathrm{MM}_1=0,\quad \sum a(\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2+\mathrm{MM}_3)=0,\quad \sum a\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3=0, \qquad (15'')$$
$$\sum a\mathrm{M}_1\mathrm{M}_1=0,\quad \sum a\mathrm{M}_1\mathrm{M}_3=0,\quad \sum a\mathrm{M}_3\mathrm{M}_3=0. \qquad (16')$$

Когда параметр $u$ меняется, уравнение (13) определяет семейство поверхностей. Характеристика этого семейства определяется уравнением (13′) и уравнением

$$\sum \frac{\partial a_{ik}}{\partial u}\mathrm{P}^i\mathrm{P}^k=0. \qquad (13'')$$

Чтобы определить производные $\frac{\partial a_{ik}}{\partial u}$, диференцируем равенства (15′), (15″), (16′) по $u$. Если иметь в виду, что равенство (15″) было получено диференцированием (15′) при постоянных $a_{ik}$ и совершенно так же уравнения (16′) были получены из уравнений (15″), то сейчас же следует:

$$\sum\frac{\partial a}{\partial u}\mathrm{MM}=0,\quad \sum\frac{\partial a}{\partial u}\mathrm{MM}_2=0,\quad \sum\frac{\partial a}{\partial u}\mathrm{M}_2\mathrm{M}_2=0, \qquad (45)$$
$$\sum\frac{\partial a}{\partial u}\mathrm{MM}_1=0,\quad \sum\frac{\partial a}{\partial u}(\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2+\mathrm{MM}_3)=0,\quad \sum\frac{\partial a}{\partial u}\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3=0. \qquad (46)$$

Диференцирование уравнений (16′) дает нам, если принять во внимание уравнения (15′), (15″), (16′):

$$\left.\begin{aligned}\sum\frac{\partial a}{\partial u}\mathrm{M}_1\mathrm{M}_1+2\beta\sum a\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2=0,\\ \sum\frac{\partial a}{\partial u}\mathrm{M}_1\mathrm{M}_3=0,\\ \sum\frac{\partial a}{\partial u}\mathrm{M}_3\mathrm{M}_3+2A\beta\sum a\mathrm{MM}_3=0.\end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

Примем теперь за координатный тетраэдр тетраэдр $T(\mathrm{M},\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2,\mathrm{M}_3)$ в точке $M$. Уравнения (15′), (15″), (16′) определяют уравнение поверхности Ли:

$$x_1x_2-x_0x_3=0. \qquad (21')$$

Что касается уравнений (45), (46), (47), то они дадут значения производных $\frac{\partial a_{ik}}{\partial u}$ в точке $M$ и определят уравнение (13″) в местных координатах:

$$x_1x_2 - x_0x_3 + \beta(Ax_3^2 - x_1^2) = 0.$$

Очевидно, характеристика распадается на пару прямых:

$$x_1 = \pm\sqrt{A}\,x_3, \quad x_0 = \pm\sqrt{A}\,x_2 \tag{48}$$

(знаки берутся одновременно оба верхние или оба нижние) и дважды взятую касательную к асимптотической $v$:

$$x_1 = 0, \quad x_3 = 0.$$

Аналогично характеристика семейства поверхностей Ли вдоль асимптотической $v$ распадается на две прямые:

$$x_2 = \pm\sqrt{B}\,x_3, \quad x_0 = \pm\sqrt{B}\,x_1 \tag{48'}$$

и дважды взятую асимптотическую касательную $u$.

Эти прямые носят название прямых Демулена [13].

Если

$$A = 0,$$

то две прямые Демулена (48) совпадают с ребром $M_2M_3$ тетраэдра.

Огибающая семейства всех $\infty^2$ поверхностей Ли поверхности (M) образована точками пересечения прямых (48), (48′). Она состоит, кроме поверхности (M), из четырех полостей. Если $A = 0$, то две полости совпадают.

**§ 11. Пара поверхностей Годо.** Если одновременно

$$A = 0, \quad B = 0,$$

то прямые Демулена попарно совпадают и все четыре полости огибающей совпадают с поверхностью $(\mathbf{M}_3)$.

Формулы (I) показывают, что

$$(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_{3u}\mathbf{M}_{3v}\mathbf{M}_{3uu}) = 0, \quad (\mathbf{M}_3\mathbf{M}_{3u}\mathbf{M}_{3v}\mathbf{M}_{3vv}) = 0.$$

Следовательно, поверхность $(\mathbf{M}_3)$ отнесена тоже к асимптотическим $(u, v)$. При этом касательные к линиям $u$ и $v$ обеих поверхностей (M) и $(\mathbf{M}_3)$ пересекаются в точках $M_1$ и $M_2$.

Если иначе нормировать координаты точек $M_i$, полагая

$$\mathbf{M}^* = \sqrt{kl}\,\mathbf{M}, \quad \mathbf{M}_1^* = \sqrt{\frac{k}{l}}\,\mathbf{M}_1, \quad \mathbf{M}_2^* = \sqrt{\frac{l}{k}}\,\mathbf{M}_2, \quad \mathbf{M}_3^* = \frac{1}{\sqrt{kl}}\,\mathbf{M}_3,$$



то формулы (I) примут вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{M}^*_{3u} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\gamma kl}{\partial u}\mathbf{M}_3^* + \mathbf{M}_1^*, && \mathbf{M}^*_{3v} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\beta kl}{\partial v}\mathbf{M}_3^* + \mathbf{M}_2^*,\\
&\mathbf{M}^*_{1u} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\gamma\frac{l}{k}}{\partial u}\mathbf{M}_1^* + \frac{\beta k}{l}\mathbf{M}_2^*, && \mathbf{M}^*_{1v} = k\mathbf{M}_3^* + \frac{1}{2}\frac{\partial\ln\frac{\beta k}{l}}{\partial v}\mathbf{M}_1^* + \mathbf{M}^*,\\
&\mathbf{M}^*_{2u} = l\mathbf{M}_3^* + \frac{1}{2}\frac{\partial\ln\gamma\frac{l}{k}}{\partial u}\mathbf{M}_2^* + \mathbf{M}^*, && \mathbf{M}^*_{2v} = \frac{\gamma l}{k}\mathbf{M}_1^* - \frac{1}{2}\frac{\partial\ln\beta\frac{k}{l}}{\partial v}\mathbf{M}_2^*,\\
&\mathbf{M}^*_u = l\mathbf{M}_1^* + \frac{1}{2}\frac{\partial\ln\gamma kl}{\partial u}\mathbf{M}^*, && \mathbf{M}^*_v = k\mathbf{M}_2^* + \frac{1}{2}\frac{\partial\ln\beta kl}{\partial v}\mathbf{M}^*.
\end{aligned}\right\}\tag{I*}$$

Уравнения $(\mathrm{II}_2)$ дают теперь:

$$k = \frac{U}{\beta}, \quad l = \frac{V}{\gamma}, \tag{II$_2^*$}$$

где $U$ — функция одного $u$ и $V$ — одного $v$. Если $U$ и $V$ не нули, то изменением параметров их можно привести к единице. Очевидно, что при новом нормировании тетраэдр $T$ станет основным тетраэдром для поверхности $(\mathbf{M}_3)$. Следовательно, поверхность $(\mathbf{M}_3)$ обладает той же самой поверхностью Ли, при этом

$$\beta_3 = \gamma, \quad \gamma_3 = \beta.$$

Луч $M_1M_2$ касается обеих поверхностей $(\mathbf{M}_1)$ и $(\mathbf{M}_2)$ по линиям $u$ и $v$ [фокальные поверхности конгруэнции $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$]. Совпадение прямых Демулена было отмечено еще самим Демуленом („Sur la quadrique de Lie“, CR, 147, 1908, стр. 493); подробно исследовал эту конфигурацию Годо („Sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie“, „Bulletin de l'Ac. Belg.“, 14, 1928, стр. 158, 174, 345 и ряд других статей [14]). Мы будем называть поверхности (M) и $(\mathbf{M}_3)$ парой поверхностей Годо.

Подставляя значения $(\mathrm{II}_2^*)$ в уравнение $(\mathrm{II}_1)$, мы получим для определения поверхности Годо два уравнения:

$$\frac{\partial^2\ln\beta}{\partial u\,\partial v} = \beta\gamma - \frac{2}{\beta}, \quad \frac{\partial^2\ln\gamma}{\partial u\,\partial v} = \beta\gamma - \frac{2}{\gamma}. \tag{49}$$

Если

$$U = 0,$$

то поверхность $(\mathbf{M}_3)$ вырождается в линию. Асимптотические линии поверхности (M) принадлежат к линейным комплексам. Поверхности Ли вдоль одной асимптотической проходят через одну и ту же точку $(\mathbf{M}_3)$.

Если

$$U = 0, \quad V = 0,$$

то поверхность $(\mathbf{M}_3)$ сводится к одной неподвижной точке. Асимптотические линии обеих семейств поверхности (M) принадлежат к линейным комплексам. Все поверхности Ли проходят через одну неподвижную точку $M_3$. Нетрудно заметить, что в этой точке они касаются одной и той же неподвижной плоскости $M_1M_2M_3$.

Действительно, координатами (тангенциальными) этой плоскости служат миноры $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3)$ матрицы, составленной из координат трех точек $M_1$, $M_2$ и $M_3$. Диференцируя эти миноры по правилу диференцирования определителя, получим с помощью формул (I):

$$(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3)_u=(\mathbf{M}_{1u}\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3)+(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_{2u}\mathbf{M}_3)+(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_{3u})=-\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\gamma}{\partial u}(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3),$$

$$(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3)_v=-\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\beta}{\partial v}(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3).$$

Следовательно, при изменении $u$ или $v$ эти координаты только умножаются на некоторый множитель, и плоскость остается неподвижной. Так как мы эту плоскость выбирали (§ 3) так, чтобы она касалась поверхности Ли, то предложение доказано.

Удалим ее в бесконечность подходящим проективным преобразованием. Тогда все поверхности Ли становятся параболоидами. Такие поверхности рассматривал П. Франк. Блашке их называет аффинно-минимальными („Vorlesungen über Differentialgeometrie" II, § 68).

Приложение. **Совместность системы (1).**

Пусть даны значения $\mathbf{M}_i=\mathbf{A}_i$ в начальной точке $u=u_0$, $v=v_0$. Нетрудно найти значения $\mathbf{M}_i$ во всякой другой точке $u_1$, $v_1$. Соединим две точки $(u_0, v_0)$ и $(u_1, v_1)$ линией $L$,

$$u=\varphi(t),\quad v=\psi(t),$$

и пусть значения $u_1, v_1$ получаются при $t=t_1$.

На этой линии $\mathbf{M}_i$ удовлетворяет системе обыкновенных диференциальных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{M}_i}{dt}=\sum_k c_i^k\mathbf{M}_k, \tag{50}$$

$$c_i^k=a_i^k\frac{du}{dt}+b_i^k\frac{dv}{dt}.$$

Интегрируя систему (50) при начальных значениях $\mathbf{M}_i=\mathbf{A}_i$, мы найдем значение $\mathbf{M}_i$ в любой точке линии $L$, в том числе и в точке $t=t_1$, но будет ли это значение единственным? Придем ли мы к тому же значению $\mathbf{M}_i$, если будем итти от точки $(u_0, v_0)$ к точке $(u_1, v_1)$ по другой кривой $L_1$, определяемой уравнениями

$$u=\varphi_1(t),\quad v=\psi_1(t).$$

Рассмотрим многообразие кривых $L_\alpha$:

$$u=\varphi+\alpha(\varphi_1-\varphi),\quad v=\psi+\alpha(\psi_1-\psi).$$

Очевидно, кривая $L$ получается, если положить $\alpha=0$, $L_1$ — если положить $\alpha=1$; для промежуточных значений $\alpha$ кривые $L_\alpha$ заполняют всю область $G$ между $L$ и $L_1$. Интегрируя вдоль одной из таких кривых, мы найдем значение $\mathbf{M}_i$ в любой точке области $G$. Эти значения будут функциями и от $t$ и от $\alpha$.



Составим теперь выражение

$$E_i=\frac{\partial\mathbf{M}_i}{\partial\alpha}-\sum e_i^k\mathbf{M}_k,$$

$$e_i^k=a_i^k\frac{\partial u}{\partial\alpha}+b_i^k\frac{\partial v}{\partial\alpha}.$$

Нетрудно убедиться, что $E_i$ удовлетворяют системе:

$$\frac{\partial E_i}{\partial t}=\sum_k c_i^kE_k. \tag{51}$$

Действительно, диференцируя $E_i$ по $t$, а уравнение (50) по $\alpha$ и исключая вторые производные, мы получим:

$$\frac{\partial E_i}{\partial t}=\sum_k c_i^k\frac{\partial\mathbf{M}_k}{\partial\alpha}+\sum_k\frac{\partial c_i^k}{\partial\alpha}\mathbf{M}_k-\sum_k\frac{\partial e_i^k}{\partial t}\mathbf{M}_k-\sum_k e_i^k\frac{\partial\mathbf{M}_k}{\partial t}=$$

$$=\sum_k c_i^k\frac{\partial\mathbf{M}_k}{\partial\alpha}+\sum_j\mathbf{M}_j\left(\frac{\partial c_i^j}{\partial\alpha}-\frac{\partial e_i^j}{\partial t}-\sum_k e_i^kc_k^j\right).$$

Здесь производные $\frac{\partial\mathbf{M}_k}{\partial t}$ заменены по формуле (50):

$$\frac{\partial\mathbf{M}_k}{\partial t}=\sum_j c_k^j\mathbf{M}_j,$$

и во второй и третьей суммах указатели $k$ и $j$ заменены на $j$ и $k$.

Почти очевидно, и это нетрудно проверить непосредственно, что коэфициенты $c_i^k$ и $e_i^k$ удовлетворяют уравнениям (2):

$$\frac{\partial c_i^j}{\partial\alpha}-\frac{\partial e_i^j}{dt}=\sum_k\left(e_i^kc_k^j-c_i^ke_k^j\right).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial E_i}{\partial t}=\sum_k c_i^k\frac{\partial\mathbf{M}_k}{\partial\alpha}-\sum_j\mathbf{M}_j\sum_k c_i^ke_k^j=\sum_k c_i^k\left[\frac{\partial\mathbf{M}_k}{\partial\alpha}-\sum_j e_k^j\mathbf{M}_j\right],$$

откуда непосредственно следуют уравнения (51).

Нетрудно заметить, что все $E_i$ в точке $t=t_0$ обращаются в нуль: в начальной точке, для всякого $\alpha$, $\mathbf{M}_i=\mathbf{A}_i$, следовательно, $\frac{\partial\mathbf{M}_i}{\partial\alpha}=0$, а так как производные

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha}=\varphi_1-\varphi,\quad\frac{\partial v}{\partial\alpha}=\psi_1-\psi$$

тоже обращаются в этой точке в нуль [ибо $\varphi_1(t_0)=\varphi(t_0)=u_0$, $\psi_1(t)=\psi(t_0)=v_0$], то и величины $e_i^k$ все равны нулю и, значит, $E_i$ — тоже равны нулю.

При этих начальных данных система (51) имеет единственное решение и это решение — очевидное:

$$E_i=0.$$

Следовательно, для всяких $\alpha$ и $t$

$$\frac{\partial \mathrm{M}_i}{\partial \alpha} = \sum_k e_i^k \mathrm{M}_k.$$

Нетрудно заметить, что в точке $t = t_1$ все $e_i^k$ равны нулю, ибо $\varphi_1(t_1) = \varphi(t_1) = u_1$; $\psi_1(t_1) = \psi(t_1) = v_1$. Следовательно, в точке $(u_1, v_1)$

$$\frac{\partial \mathrm{M}_i}{\partial \alpha} = 0.$$

$\mathrm{M}_i$ не меняются с изменением $\alpha$, т. е. по какому бы пути $L$ или $L_1$ ни итти от точки $(u_0, v_0)$ к точке $(u_1, v_1)$, мы придем с одним и тем же значением $\mathrm{M}_i$. Значит, задавая начальные значения $\mathrm{M}_i = \mathrm{A}_i$, мы тем самым определяем единственное вполне определенное значение $\mathrm{M}_i$ для всех значений $u$, $v$.

Задать начальное значение $\mathrm{A}_i$ (16 чисел) значит дать начальное положение тетраэдра $T$; следовательно, различные решения системы (1) отличаются друг от друга только начальным положением тетраэдра. Совершая подходящее проективное преобразование пространства, мы можем совместить два любых тетраэдра, а тогда совпадут и все те тетраэдры, которые получаются из этих начальных положений. Следовательно, различные решения системы (1) тождественны вплоть до проективного преобразования пространства.

32 функции $a_i^k$, $b_i^k$, удовлетворяющие системе (2), вполне определяют поверхность.

# Глава третья

## ПРОЕКТИВНОЕ ИЗГИБАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ

**§ 1. Общая проблема изгибания.** Основная задача метрической теории поверхностей есть изгибание поверхности. Понятие изгибания дает возможность распределить поверхности на классы, собирая в один класс все поверхности с общей метрикой, с одной и той же геометрией на поверхности. С другой стороны, идея изгибания дает возможность разбить элементы, определяющие поверхность, на элементы, общие всем налагающимся поверхностям, — линейный элемент поверхности, и элементы, определяющие форму рассматриваемой поверхности из всего класса изометрических поверхностей, — вторая квадратичная форма Гаусса.

Одной из наиболее счастливых идей Фубини [15] было распространение на проективную геометрию понятия изгибания поверхности. Затем Картан [16] обобщил понятие изгибания на геометрию любой группы преобразования.

Изгибанием поверхности в метрической геометрии называется изменение ее формы с сохранением линейного элемента; при этом сохраняются длины всех линий, величины всех углов, площадей и т. д. При таком определении изгибания оно является, очевидно, исключительной особенностью метрической геометрии, ибо в геометрии другой группы преобразований понятие длины не сохраняется.

Чтобы иметь возможность обобщить понятие изгибания, Фубини придает его определению другую форму, которую применял еще Рибокур, а затем широко использовал Бианки, рассматривая качение одной поверхности по другой.

Если две поверхности $S$ и $\Sigma$ налагаются, то между точками обеих поверхностей существует однозначное соответствие, и одну поверхность можно катать по другой так, что они всегда будут касаться соответствующими точками и соответствующими направлениями. Говоря точнее, поверхность $\Sigma$ налагается на поверхность $S$, если, сохраняя неподвижной поверхность $S$, можно каждой паре соответствующих точек $N$ и $M$ поверхностей поставить в соответствие такое перемещение в пространстве поверхности $\Sigma$, которое переведет ее в положение $\Sigma'$, обладающее нижеследующими свойствами: 1) точка $N$ на поверхности $\Sigma'$ совместится с соответствующей ей точкой $M$ поверхности $S$; 2) каждая кривая на поверхности $\Sigma'$, проходящая через точку $N$, имеет в этой точке касание первого порядка с соответствующей кривой поверхности $S$, т. е. расстояние между двумя соответствующими точками $N^*$ и $M^*$, близкими к общей точке $N = M$, будет бесконечно малым второго порядка по сравнению с расстоянием их от общей точки.

В таком виде это определение может быть легко распространено на геометрию любой группы преобразования, надо только эвклидово движение поверхности $\Sigma$ заменить преобразованиями данной группы.

Пусть мы имеем группу преобразований $(E)$. Поверхность $\Sigma$ налагается на поверхность $S$ в геометрии группы $(E)$, если между точками их устанавливается взаимно однозначное соответствие так, что каждой паре сходственных точек $N$ и $M$ можно присоединить преобразование $E$ группы $(E)$, которое переводит поверхность $\Sigma$ в положение $\Sigma'$ под условием: 1) точка $N$ на поверхности $\Sigma'$ совместится с соответствующей ей точкой $M$ поверхности $S$; 2) каждая кривая на поверхности $\Sigma'$, проходящая через точку $N$, будет иметь в этой точке касание $n$-го порядка с соответствующей кривой поверхности $S$, т. е. расстояние между точками $N^*$ и $M^*$, близкими к общей точке $N=M$, будет бесконечно малого порядка $n+1$ по сравнению с расстоянием их от общей точки.

Это сродство поверхностей $\Sigma$ и $S$, очевидно, характеризуется числом $n$, так что его надо назвать наложением $n$-го порядка. Оно содержит понятие расстояния в определении касания двух кривых, но это не вносит ограничения на геометрию группы, ибо, очевидно, можно подвергнуть обе поверхности $S$ и $\Sigma'$ одновременно любому преобразованию группы $(E)$, не изменяя их взаимного положения: в силу непрерывности преобразований группы $(E)$ порядок малости расстояний $M^* N^*$ и $M M^*$, конечно, сохранится. Возможно дать определение порядка касания независимо от понятия длины, например, введя понятие числа общих точек (если рассматривать одну из линий как предельное положение кривой, имеющей $n+1$ общих точек со второй кривой), но следует иметь в виду, что речь идет о порядке касания кривых в несколько более тесном, чем обычно, смысле слова. Фубини даже называет такое касание аналитическим, противопоставляя его обычному геометрическому касанию. Аналитическое касание отличается тем, что соответствие между точками обеих кривых уже установлено наложением обеих поверхностей, тогда как обычно оно устанавливается только при определении порядка касания.

Это последнее замечание может иметь существенное значение; например, в метрической геометрии любые две поверхности $S$ и $\Sigma$, в конформном отображении одной на другую, можно было бы назвать налагающимися, если иметь в виду только геометрическое касание сходственных линий.

Действительно, всегда можно переместить поверхность $\Sigma$ так, чтобы заданная точка $N$ совместилась со сходственной точкой $M$, чтобы касательные плоскости совпали и чтобы в общей касательной плоскости совпали два сходственных направления. В силу конформности отображения в общей точке $N=M$ совпадут все сходственные направления, и, очевидно, все сходственные кривые в этой точке будут иметь касание первого порядка. Однако это касание будет только геометрическим, но не аналитическим, ибо длины сходственных дуг $MM^*$ и $NN^*$ будут разные, и поэтому расстояние $M^* N^*$ будет бесконечно малым не второго, а только первого порядка. В геометрическом касании этих кривых соответствующими будут точки $M^*$ и $\bar{N}^*$ с равными дугами $MM^* = N\bar{N}^*$, т. е. соответствие точек $M^*$ и $\bar{N}^*$ в определении порядка касания не



совпадает с соответствием, установленным при определении наложимости, т. е. с соответствием конформности $M^*$ и $N^*$.

Определение изгибания может стать иллюзорным, если окажется, что любые две поверхности допускают наложение $n$-го порядка и никакие две не налагаются друг на друга с порядком наложения $n+1$. Так обстоит дело в аффинной геометрии. Каковы бы ни были две поверхности $S$ и $\Sigma$, они допускают наложение первого порядка, притом любыми точками, ибо при всяком непрерывном соответствии точек $S$ и $\Sigma$ между сходственными направлениями в соответствующих точках устанавливается аффиннитет и коэфициент искажения меняется при повороте направления, как диаметры эллипса. Следовательно, аффинное преобразование позволит совместить сходственные направления в данной точке и установить требуемый коэфициент искажения по каждому направлению. Преобразованная поверхность $\Sigma'$ будет иметь аналитическое касание первого порядка с поверхностью $S$ в заданной точке. Вместе с тем две поверхности, налагающиеся с порядком наложения 2, аффинно тождественны, т. е. то аффинное преобразование, которое преобразует одну поверхность так, чтобы она имела касание второго порядка с другой, полностью совместит обе поверхности.

**§ 2. Условия наложимости двух поверхностей.** Пусть поверхности (M) и (N) проективно налагаются.

Подходящее проективное преобразование, произведенное над поверхностью (N), совместит соответствующие точки $M$ и $N$. Основные величины второй поверхности $\beta_1$, $\gamma_1$, $A_1$, $B_1$, $k_1$, $l_1$ при этом не изменятся.

Если после этого поверхности (M) и (N) имеют в общей точке $M$ касание второго порядка, то две соответствующие соседние точки

$$\mathrm{M}^* = \mathrm{M} + d\mathrm{M} + \frac{1}{2} d^2\mathrm{M} + \dots$$

$$\mathrm{N}^* = \mathrm{N} + d\mathrm{N} + \frac{1}{2} d^2\mathrm{N} + \dots$$

должны совпадать до бесконечно малых второго порядка включительно. Так как наши координаты однородные, то совпадение точек означает пропорциональность координат. Обозначая через [1])

$$\lambda + d\lambda + \frac{1}{2} d^2\lambda + \dots$$

множитель пропорциональности, мы имеем основное равенство:

$$\mathrm{M} + d\mathrm{M} + \frac{1}{2} d^2\mathrm{M} + \dots =$$
$$= \left(\lambda + d\lambda + \frac{1}{2} d^2\lambda + \dots\right)\left(\mathrm{N} + d\mathrm{N} + \frac{1}{2} d^2\mathrm{N} + \dots\right). \quad (1)$$

[1]) Здесь $d\lambda$ и $d^2\lambda$ не означают полного диференциала первого или второго порядка от $\lambda$. Это произвольные функции, бесконечно малые соответственно первого или второго порядка.

Развертывая это равенство и сравнивая бесконечно малые первого и второго порядка, получим:

$$\mathbf{M} = \lambda \mathbf{N}, \tag{$1_1$}$$

$$d\mathbf{M} = \lambda\, d\mathbf{N} + \mathbf{N}\, d\lambda, \tag{$1_2$}$$

$$d^2\mathbf{M} = \lambda\, d^2\mathbf{N} + 2\, d\lambda\, d\mathbf{N} + \mathbf{N}\, d^2\lambda. \tag{$1_3$}$$

Из этих уравнений непосредственно следует:

$$(\mathbf{M}\mathbf{M}_u\mathbf{M}_v\, d^2\mathbf{M}) = \lambda^4 (\mathbf{N}\mathbf{N}_u\mathbf{N}_v\, d^2\mathbf{N}).$$

Следовательно, асимптотическим линиям одной поверхности

$$(\mathbf{M}\mathbf{M}_u\mathbf{M}_v\, d^2\mathbf{M}) = 0$$

соответствуют асимптотические линии другой:

$$(\mathbf{N}\mathbf{N}_u\mathbf{N}_v\, d^2\mathbf{N}) = 0.$$

Так как обе поверхности отнесены к асимптотическим линиям $(u, v)$, $(u_1, v_1)$, то, изменив в случае надобности параметры $u_1$, $v_1$ второй поверхности, мы можем положить

$$u_1 = u, \quad v_1 = v.$$

Внося эти значения в уравнение $(1_2)$ и сравнивая коэфициенты при $du$ и $dv$, мы разобьем его на два уравнения.

Полагая

$$d\lambda = \lambda_1\, du + \lambda_2\, dv,$$

$$d^2\lambda = \lambda_{11}\, du^2 + 2\,\lambda_{12}\, du\, dv + \lambda_{22}\, dv^2,$$

где все $\lambda_i$, $\lambda_{ik}$ — произвольные функции от $u$ и $v$ (см. сноску на предыдущей странице), мы получим с помощью формул (I) систему уравнений:

$$\mathbf{M}\frac{1}{2}\frac{\partial \ln \gamma}{\partial u} + \mathbf{M}_1 = \mathbf{N}\lambda\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \ln \gamma_1}{\partial u} + \frac{\lambda_1}{\lambda}\right) + \mathbf{N}_1\lambda,$$

$$\mathbf{M}\frac{1}{2}\frac{\partial \ln \beta}{\partial v} + \mathbf{M}_2 = \mathbf{N}\lambda\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \ln \beta_1}{\partial v} + \frac{\lambda_2}{\lambda}\right) + \mathbf{N}_2\lambda,$$

откуда в силу уравнения $(1_1)$

$$\mathbf{N}_1\lambda = \mathbf{M}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \ln \gamma}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \gamma_1}{\partial u} - \frac{\lambda_1}{\lambda}\right) + \mathbf{M}_1, \tag{$2_1$}$$

$$\mathbf{N}_2\lambda = \mathbf{M}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \ln \beta}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \beta_1}{\partial v} - \frac{\lambda_2}{\lambda}\right) + \mathbf{M}_2. \tag{$2_2$}$$

Каковы бы ни были две поверхности (M) и (N), эти уравнения могут быть удовлетворены, ибо всегда можно выбрать проективное преобразование, переводящее четыре вершины тетраэдра $T_1$ $(N, N_1, N_2, N_3)$ в любые четыре точки пространства, не лежащие в одной плоскости.

Каковы бы ни были две поверхности (M) и (N), они проективно наложимы, если рассматривать наложение первого порядка.



Прилагая то же преобразование к уравнению $(1_3)$, мы разобьем его на три уравнения:

$$\mathbf{M}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln \gamma}{\partial u^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \ln \gamma}{\partial u}\right)^2 + B\right] + \mathbf{M}_2\beta =$$
$$= \mathbf{N}\lambda\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln \gamma_1}{\partial u^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \ln \gamma_1}{\partial u}\right)^2 + B_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial \ln \gamma_1}{\partial u} + \frac{\lambda_{11}}{\lambda}\right] + 2\mathbf{N}_1\lambda_1 + \mathbf{N}_2\lambda\beta_1, \tag{$3_1$}$$

$$\mathbf{M}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln \beta\gamma}{\partial u\, \partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \gamma}{\partial u}\frac{\partial \ln \beta}{\partial v} + k + l\right] +$$
$$+ \mathbf{M}_1\frac{\partial \ln \beta}{\partial v} + \mathbf{M}_2\frac{\partial \ln \gamma}{\partial u} + 2\mathbf{M}_3 =$$
$$= \mathbf{N}\lambda\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln \beta_1\gamma_1}{\partial u\, \partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \gamma_1}{\partial u}\frac{\partial \ln \beta_1}{\partial v} + k_1 + l_1 +\right.$$
$$\left. + \frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial \ln \beta_1}{\partial v} + \frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial \ln \gamma_1}{\partial u} + 2\frac{\lambda_{12}}{\lambda}\right] +$$
$$+ \mathbf{N}_1\lambda\left[\frac{\partial \ln \beta_1}{\partial v} + 2\frac{\lambda_2}{\lambda}\right] + \mathbf{N}_2\lambda\left[\frac{\partial \ln \gamma_1}{\partial u} + 2\frac{\lambda_1}{\lambda}\right] + 2\mathbf{N}_3\lambda, \tag{$3_2$}$$

$$\mathbf{M}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln \beta}{\partial v^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \ln \beta}{\partial v}\right)^2 + A\right] + \mathbf{M}_1\gamma =$$
$$= \mathbf{N}\lambda\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln \beta_1}{\partial v^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \ln \beta_1}{\partial v}\right)^2 + A_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial \ln \beta_1}{\partial v} + \frac{\lambda_{22}}{\lambda}\right] + \mathbf{N}_1\lambda\gamma_1 + 2\mathbf{N}_2\lambda_2. \tag{$3_3$}$$

Если сюда внести значения $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ из уравнений $(1_1)$, $(2_1)$, $(2_2)$, то каждое из уравнений $(3_1)$ и $(3_3)$ примет вид линейного однородного относительно $\mathbf{M}_i$ уравнения. Так как точки $M$, $M_1$, $M_2$ не лежат на одной прямой и, следовательно, координаты их не могут быть связаны линейным соотношением, то каждое из полученных уравнений распадается на три:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 0, \ \ \beta_1 = \beta, \ \gamma_1 = \gamma, \\ &\lambda_{11} = \lambda(B - B_1), \ \lambda_{22} = \lambda(A - A_1). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Уравнение $(3_2)$ определяет положение точки $N_3$ после преобразования в связи с выбором $\lambda_{12}$

$$\mathbf{N}_3\lambda = -\mathbf{M}\frac{\lambda_{12}}{\lambda} + \mathbf{M}_3. \tag{$3_2'$}$$

Таким образом единственное условие проективной наложимости второго порядка есть равенство коэфициентов $\beta$ и $\gamma$ обеих поверхностей.

Следовательно, проективное изгибание есть преобразование поверхности с сохранением проективного линейного элемента

$$\frac{\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3}{du\, dv}.$$

Отсюда следует, что линейчатая поверхность $(\beta = 0)$ может налагаться только на линейчатую поверхность $(\beta_1 = 0)$, что поверхность второго порядка ($\beta = 0$, $\gamma = 0$) всегда налагается на поверхность второг порядка. Последнее предложение, впрочем, тривиально, ибо все поверх ности второго порядка с проективной точки зрения тождественны.

С точки зрения теории изгибания инварианты поверхности делятс на две категории:

1) $\beta$, $\gamma$ и связанные с ними конечными уравнениями $k$, $l$ остаютс при изгибании неизменными; это — величины, характеризующие вес класс проективно налагающихся поверхностей;

2) величины $A$ и $B$ определяют только одну поверхность среди е проективных изгибаний.

**§ 3. Основание изгибания.** Если две поверхности имеют касани $n$-го порядка в точке $\mathbf{M}$, то все сходственные кривые, проходящие чере общую точку, имеют тоже касание $n$-го порядка; но могут существо вать кривые, имеющие в этой точке касание более высокого, $n+1$-г порядка. В задаче изгибания такие направления, определенные в каждо точке поверхности, огибают систему кривых, имеющих особое значени В метрической геометрии эти направления дают ту единственную сис тему линий, вдоль которой вторые квадратичные формы Гаусса обеи поверхностей равны друг другу и которую Фосс (Voss) назвал характе ристическими линиями, а Биаики — кинематически самосопряженной си темой (cinematicamento autoconjugato).

По аналогии мы будем называть основанием проективного изгибани ту систему линий, которые при наложении поверхности имеют в рас сматриваемой точке касание третьего порядка.

Сравнивая в уравнении (1) бесконечно малые третьего порядка, м получим для искомых направлений $du : dv$ уравнение:

$$d^3\mathbf{M} = \lambda d^3\mathbf{N} + 3\,d\lambda\, d^2\mathbf{N} + 3\,d^2\lambda\, d\mathbf{N} + \mathbf{N}\, d^3\lambda. \qquad (5$$

С помощью формул (I) и уравнений (1), $(2_1)$, $(2_2)$, $(3_2)$ это равенств расчленяется иа четыре уравнения, устанавливающих равенство коэф циентов при координатах отдельных точек $M_i$. Первое из них (коэф циент при $\mathbf{M} = \lambda\mathbf{N}$) определяет множитель пропорциональности. Сокр щая члены, содержащие $\beta_1 = \beta$, $\gamma_1 = \gamma$, $k_1 = k$, $l_1 = l$, мы придади двум другим уравнениям (коэфициенты при $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$) вид:

$$(B\,du^2 + A\,dv^2)\,du + 2A\,du\,dv^2 = (B_1\,du^2 + A_1 dv^2)\,du + 2A_1 du\,dv^2 + \\ + 3\left[(B - B_1)\,du^2 + 2\lambda_{12}\,du\,dv + (A - A_1)\,dv^2\right] du, \qquad (6$$

$$(B\,du^2 + A\,dv^2)\,dv + 2B\,du^2\,dv = (B_1 du^2 + A_1 dv^2)\,dv + 2B_1 du^2\,dv + \\ + 3\left[(B - B_1)\,du^2 + 2\lambda_{12}\,du\,dv + (A - A_1)\,dv^2\right] dv. \qquad (6$$

Наконец, четвертое уравнение (коэфициент при $\mathbf{M}_3$) будет удовлетво рено тождественно.

Исключая из двух уравнений $(6_{1,2})$ неизвестный еще множитель про порциональности $\lambda_{12}$, мы получим единственное уравнение, определя щее отношение $du : dv$, т. е. то направление в точке $\boldsymbol{M}$, по которо имеет место касание третьего порядка:

$$\left[(B - B_1)\,du^2 - (A - A_1)\,dv^2\right] du\,dv = 0. \qquad (7)$$



Кроме двух асимптотических направлений

$$du = 0, \quad dv = 0$$

касание третьего порядка имеет место по сопряженной системе

$$(B - B_1)\,du^2 - (A - A_1)\,dv^2 = 0, \qquad (8)$$

которую мы и будем называть основанием изгибания.

**§ 4. Поверхности $R$.** В параграфе втором мы видели, что проективно налагающиеся поверхности, если они существуют, обладают одними и теми же коэфициентами $\beta$ и $\gamma$ и различными величинами $A$ и $B$. Все величины, определяющие поверхность, связаны уравнениями (II); первые два уравнения $(II_1)$ определяют $k$ и $l$ через $\beta$ и $\gamma$ в конечном виде. Эти две величины тоже не меняются при проективном изгибании. Таким образом задача проективного изгибания сводится к отысканию величин $A$ и $B$, коэфициентов третьей квадратичной формы Фубини, при заданных коэфициентах кубической формы $\beta$ и $\gamma$ из уравнений:

$$\frac{\partial A}{\partial u} = \frac{\partial k}{\partial v} + k\frac{\partial \ln \beta}{\partial v}, \quad \frac{\partial B}{\partial v} = \frac{\partial l}{\partial u} + l\,\frac{\partial \ln \gamma}{\partial u}, \qquad (II_2)$$

$$\frac{\partial A}{\partial v}\,\beta + 2A\,\frac{\partial \beta}{\partial v} = \frac{\partial B}{\partial u}\,\gamma + 2B\,\frac{\partial \gamma}{\partial u}. \qquad (II_3)$$

Исключая $A$ и $B$, мы получим, очевидно, уравнение, содержащее только $\beta$ и $\gamma$. Это показывает, что не при всяком выборе проективного линейного элемента существует поверхность. Уравнение это достаточно сложной формы, и мы не будем его писать.

Допустим теперь, что нам дана поверхность (M), т. е. известны величины $A$, $B$, $\beta$, $\gamma$, удовлетворяющие системе $(II_{2,3})$. Существует ли вторая поверхность (N), налагающаяся на первую?

Если такая поверхность существует, то можно найти другое решение $A$, $B$ той же системы. Вычитая из первоначальных уравнений $(II_{2,3})$ новые уравнения, полученные заменой $A$, $B$ на $A_1$, $B_1$ мы получим систему линейных однородных уравнений для разностей $A - A_1$, $B - B_1$:

$$\frac{\partial}{\partial u}(A - A_1) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v}(B - B_1) = 0, \qquad (9_1)$$

$$\beta\frac{\partial}{\partial v}(A - A_1) + 2(A - A_1)\frac{\partial \beta}{\partial v} = \gamma\frac{\partial}{\partial u}(B - B_1) + 2\,(B - B_1)\frac{\partial \gamma}{\partial u}. \qquad (9_2)$$

Отсюда прежде всего следует, что если существует одна поверхность (N), налагающаяся на (M) и проективно не эквивалентная ей, то их существует бесчисленное множество. Следовательно, проективное изгибание поверхности — всегда непрерывное изгибание. Действительно, так как наши уравнения линейны и однородны, то всякое решение системы можно умножить на произвольное постоянное.

Могут представиться различные случаи:

а) Поверхность (M) линейчатая, например линии $u$ — прямые, следовательно, $\beta = 0$.

Каково бы ни было $\gamma$, мы можем положить

$$B - B_1 = 0$$

и выбрать для $A-A_1$ произвольную функцию одного переменного $v$. Всякая линейчатая поверхность может проективно изгибаться. Ее изгибание зависит от произвольной функции.

Основание изгибания совпадает с прямолинейными образующими.

Если система $(9_{1,2})$ допускает решение $B-B_1$, отличное от нуля, то, как видно из второго уравнения $(9_1)$, $B-B_1$ зависит только от переменного $u$. Выбирая параметр $u$, мы можем привести $B-B_1$ к единице, как это явствует из уравнений $(\mathrm{III}_2)$, и в таком случае уравнение $(9_2)$ даст:

$$\gamma_u = 0,$$

т. е. $\gamma$ будет функцией одного $v$; эту функцию тоже можно привести к единице выбором параметра $v$. Основание изгибания — сопряженная система

$$du^2 - (A - A_1)\, dv^2 = 0.$$

Поверхности

$$\beta = 0, \quad \gamma = 1$$

называются линейчатыми поверхностями $R$.

b) Поверхность (M) не линейчатая, но система $(9_{1,2})$ допускает решение:

$$B - B_1 = 0.$$

Так как $A-A_1$, очевидно, не равняется нулю, иначе поверхности (M) и (N) были бы проективно тождественны, то, выбирая подходящим образом параметр $v$, мы приведем $A-A_1$ к единице:

$$A - A_1 = 1,$$

и тогда уравнение $(9_2)$ даст:

$$\beta_v = 0.$$

Следовательно, $\beta$ есть функция одного $u$, которую можно привести к единице выбором параметра $u$:

$$\beta = 1.$$

Такие поверхности называются поверхностями $R_0$. Основание изгибания (8) совпадает с асимптотическими $v = \mathrm{const}$.

c) Если $A-A_1$ и $B-B_1$ оба отличны от нуля, то в силу уравнений $(9_1)$ первая величина есть функция одного $v$, а вторая — одного $u$. Выбором параметров мы приведем их к единице, и тогда уравнение $(9_2)$ покажет, что $\beta$ и $\gamma$ удовлетворяют условию:

$$\beta_v = \gamma_u. \tag{10}$$

Основание изгибания (8) примет вид:

$$du^2 - dv^2 = 0. \tag{8'}$$

Поверхности, обладающие этим свойством, называются поверхностями $R$, а основание изгибания (8′) — сопряженной системой $R$.

Очевидно, поверхности $R_0$ можно рассматривать как предельный случай поверхностей $R$, когда два семейства линий системы $R$ совпадают с асимптотическими линиями одного семейства.



Таким образом, кроме линейчатых поверхностей, только поверхности $R$ могут проективно изгибаться; все остальные поверхности неизгибаемы, т. е. коэфициенты кубической формы $\beta$ и $\gamma$ вполне их определяют.

Таким образом проективная геометрия занимает среднее положение между метрической, где всякая поверхность может изгибаться, и аффинной, где понятие изгибания не имеет места: любые две поверхности допускают наложение первого порядка и никакие две аффинно различные не могут иметь наложения порядка 2.

**§ 5. Конгруэнции $W$.** Поверхности $R$ занимают в проективной геометрии исключительное место как единственные поверхности (кроме линейчатых), которые допускают проективное изгибание. Весьма замечательно, что эти поверхности были введены Цицейкой и Демуленом [17], незадолго до работ Фубини и Картана по проективному изгибанию, как поверхности, обладающие особой сопряженной системой $R$. Рассмотрим касательные к линиям одного из семейств, образующих систему $R$. Они составят $\infty^2$ лучей, т. е. конгруэнцию. Каждый луч касается поверхности (M) в точке $M$ и еще некоторой другой поверхности (N) — второй фокальной поверхности конгруэнции. Если на поверхностях (M) и (N) соответствуют асимптотические линии, то конгруэнция называется конгруэнцией $W$. Система $R$ замечательна тем, что обе конгруэнции касательных к линиям и первого и второго семейства суть конгруэнции $W$.

Пусть точка $N$ — соответствующая точка второй фокальной поверхности конгруэнции (MN). Так как луч $MN$ касается и первой и второй поверхности, то точка $N$ лежит в касательной плоскости поверхности (M), и наоборот.

Отсюда следует прежде всего, что координаты $\mathbf{N}$ линейно выражаются через координаты трех точек $M$, $M_1$, $M_2$ в касательной плоскости поверхности (M):

$$\mathbf{N} = a\mathbf{M}_1 + b\mathbf{M}_2 + c\mathbf{M}. \tag{11}$$

С другой стороны, так как точка $M$ тоже лежит в касательной плоскости поверхности (N), то четыре точки $M$, $N$, $N_u$, $N_v$ лежат в одной плоскости, т. е.

$$(\mathbf{M}\mathbf{N}\mathbf{N}_u\mathbf{N}_v) = 0. \tag{12}$$

С помощью формул (I) получим следующие выражения производных от $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{N}_u = \left(c_u + \frac{1}{2} c \frac{\partial \ln \gamma}{\partial u} + aB + bk\right)\mathbf{M} + \left(a_u + c - \frac{1}{2} a \frac{\partial \ln \gamma}{\partial u}\right)\mathbf{M}_1 + b\left(\theta_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \gamma}{\partial u}\right)\mathbf{M}_2 + b\mathbf{M}_3,$$

$$\mathbf{N}_v = \left(c_v + \frac{1}{2} c \frac{\partial \ln \beta}{\partial v} + bA + al\right)\mathbf{M} + a\left(\theta_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \beta}{\partial v}\right)\mathbf{M}_1 + \left(b_v + c - \frac{1}{2} b \frac{\partial \ln \beta}{\partial v}\right)\mathbf{M}_2 + a\mathbf{M}_3,$$

где

$$\theta_1 = \frac{\partial \ln b}{\partial u} + \frac{a}{b}\beta, \quad \theta_2 = \frac{\partial \ln a}{\partial v} + \frac{b}{a}\gamma.$$

Внося это в уравнение (12), мы получим в левой части произведение определителей:

$$(\mathrm{MM_1M_2M_3}) \begin{vmatrix} a & a_u + c - \frac{a}{2}\frac{\partial \ln \gamma}{\partial u} & a\left(\theta_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \beta}{\partial v}\right) \\ b & b\left(\theta_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \gamma}{\partial u}\right) & b_v + c - \frac{b}{2}\frac{\partial \ln \beta}{\partial v} \\ 0 & b & a \end{vmatrix} = 0,$$

откуда следует по сокращении на $ab$:

$$a_u + b_v + 2c - a\frac{\partial \ln \gamma}{\partial u} - b\frac{\partial \ln \beta}{\partial v} - a\theta_1 - b\theta_2 = 0. \qquad (13)$$

Это уравнение при заданных $a$ и $b$ определяет $c$.

Нетрудно заметить, что точка $\mathrm{N}$ лежит на касательной к линиям

$$\frac{du}{dv} = \frac{a}{b}. \qquad (14)$$

Следовательно, отношение $a:b$ определяет нашу конгруэнцию. Ввиду однородности координат $\mathrm{N}$ мы можем произвольно выбрать один из коэфициентов $a$ или $b$, уравнение (14) даст нам другой и тогда уравнение (12) определит $c$, т. е. положение точки $N$ — второго фокуса на каждом луче конгруэнции.

Потребуем теперь, чтобы конгруэнция $(\mathrm{MN})$ была конгруэнцией $W$, т. е. чтобы на обеих полостях фокальной поверхности асимптотические линии соответствовали друг другу. Так как поверхность $(\mathrm{M})$ отнесена к асимптотическим линиям, то надо потребовать, чтобы линии $u$ и $v$ были асимптотическими и на поверхности $(\mathrm{N})$.

Если линия $u$ — асимптотическая, то точка $N_{uu}$ лежит в касательной плоскости $NMN_v$, т. е.

$$(\mathrm{MNN}_v\mathrm{N}_{uu}) = 0. \qquad (15)$$

Чтобы облегчить выкладки, воспользуемся произволом в выборе общего множителя четырех координат $\mathrm{N}$ и возьмем $b$ так, чтобы $\theta_1$ обращалось в нуль. Тогда уравнение (15) по исключении $c$ с помощью (13) примет вид:

$$\begin{vmatrix} a & a\left(\theta_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \beta}{\partial v}\right) & a\left[B + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln \gamma}{\partial u^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \ln \gamma}{\partial u}\right)^2\right] + b\theta_{2u} \\ b & \frac{1}{2}\left(b_v - a_u + a\frac{\partial \ln \gamma}{\partial u} + b\theta_2\right) & \begin{array}{l} b\left[B + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \ln \gamma}{\partial u^2} + \frac{1}{4}\frac{\partial \ln \gamma}{\partial u}\right)^2 + \beta\theta_2 + \frac{1}{2}\beta_v\right] - \\ -\frac{1}{2}\beta\left[b_v - a_u + a\frac{\partial \ln \gamma}{\partial u} + b\theta_2\right] \end{array} \\ 0 & a & -a\beta \end{vmatrix} = 0,$$



или, прибавляя дважды к элементам одного столбца величины, пропорциональные элементам другого:

$$\begin{vmatrix} a & a\left(\theta_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \beta}{\partial v}\right) & b\theta_{2u} \\ b & \frac{1}{2}\left[b_v - a_u + a\frac{\partial \ln \gamma}{\partial u} + b\theta_2\right] & 0 \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

и, развертывая и сокращая на $ab^2$:

$$\theta_{2u} = 0,$$

откуда $\theta_2$ есть функция одного $v$; но, очевидно, умножая $a$, $b$ и $c$ на функции одного $v$, мы не изменим $\theta_1$ и можем привести $\theta_2$ к нулю. Таким образом приходим к заключению, что при подходящем нормировании величин $a$ и $b$ конгруэнция $W$ определяется системой уравнений:

$$a_v = -b\gamma, \quad b_u = -a\beta. \qquad (16)$$

Эти уравнения получены Фубини [18] и дают один из наиболее простых способов определения конгруэнции $W$ по заданной первой полости ее фокальной поверхности.

Обозначая

$$\lambda = \frac{a}{b},$$

получим:

$$\frac{\partial \ln \lambda}{\partial v} + \frac{\partial \ln b}{\partial v} + \frac{\gamma}{\lambda} = 0, \quad \frac{\partial \ln b}{\partial u} + \lambda\beta = 0,$$

откуда, исключая $b$, имеем:

$$\frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial u\, \partial v} + \left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)_u - (\lambda\beta)_v = 0. \qquad (16')$$

**§ 6. Конгруэнции $R$.** Допустим теперь, что семейство

$$\frac{du}{dv} = -\lambda,$$

сопряженное семейству (14), тоже определяет своими касательными конгруэнцию $W$.

Вносяя $-\lambda$ в уравнение (16′) и сравнивая с первоначальным, мы сейчас же получим:

$$\frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial u\, \partial v} = 0, \quad \left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)_u = (\lambda\beta)_v.$$

Первое уравнение показывает, что $\lambda$ равно произведению функции одного переменного $u$ на функцию одного переменного $v$. Так как $\lambda$ определяет уравнение кривых

$$\frac{du}{dv} = \lambda,$$

которые огибаются лучами конгруэнции, то выбором параметров можно привести $\lambda$ к единице и тогда второе уравнение примет вид:

$$\gamma_u = \beta_v.$$

Это — то самое условие, которое определяет поверхность, способную проективно изгибаться. Мы видим, что касательные к кривым обеих сопряженных семейств

$$\frac{du}{dv} = \pm 1$$

образуют две конгруэнции $W$. Семейства эти составляют сопряженную систему $R$, которая играет особую роль при проективном наложении поверхности.

Мы увидим далее, что поверхность (N) обладает тем же свойством: она проективно изгибается, и касательные к линиям двух сопряженных семейств

$$\frac{du}{dv} = \pm 1$$

образуют две конгруэнции $W$ и т. д.; сколько бы раз мы ни переходили ко второй фокальной поверхности по касательным к линиям сопряженного семейства $R$, мы всегда будем получать поверхности $R$ и две конгруэнции $W$, которые касаются на ней линий сопряженной системы.

**§ 7. Поверхности, допускающие $\infty^3$ изгибаний.** Если ввести вспомогательную функцию $C_1$, то систему $(9_{1,2})$ можно написать в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u}(A-A_1)=0, \quad \frac{\partial}{\partial u}(B-B_1)=-2(B-B_1)\frac{\partial \ln \gamma}{\partial u}+\frac{C_1}{\gamma}, \\ &\frac{\partial}{\partial v}(A-A_1)=-2(A-A_1)\frac{\partial \ln \beta}{\partial v}+\frac{C_1}{\beta}, \quad \frac{\partial}{\partial v}(B-B_1)=0. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Диференцируя уравнения первой строки по $v$, вторые — по $u$ и сравнивая вторые смешанные производные от $A-A_1$ или от $B-B_1$, мы напишем условия интегрируемости системы в виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial C_1}{\partial u} &= 2(A-A_1)\beta\frac{\partial^2 \ln \beta}{\partial u\,\partial v}+C_1\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}, \\ \frac{\partial C_1}{\partial v} &= 2(B-B_1)\gamma\frac{\partial^2 \ln \gamma}{\partial u\,\partial v}+C_1\frac{\partial \ln \gamma}{\partial v}. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Диференцируя первое уравнение по $v$, второе по $u$ и сравнивая вторые смешанные производные от $C_1$, найдем:

$$\begin{aligned} &2(A-A_1)\beta\left[\frac{\partial^3 \ln \beta}{\partial u\,\partial v^2}-\frac{\partial^2 \ln \beta}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial \ln \beta\gamma}{\partial v}\right]- \\ &-2(B-B_1)\gamma\left[\frac{\partial^3 \ln \gamma}{\partial u^2\,\partial v}-\frac{\partial^2 \ln \gamma}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial \ln \beta\gamma}{\partial u}\right]+3C_1\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\ln\frac{\beta}{\gamma}=0. \end{aligned} \qquad (19)$$

Если это уравнение удовлетворяется тождественно, то система (17, 18) вполне интегрируема и величины $A_1$, $B_1$, $C_1$ определяются с тремя произвольными постоянными. В этом случае существует $\infty^3$ проективных изгибаний поверхности.



Если уравнение (19) действительно содержит $A_1$, $B_1$ или $C_1$, то, диференцируя его по $u$ и по $v$ и пользуясь системой (17, 18), мы получим два новых линейных однородных уравнения $(19_1)$ и $(19_2)$, содержащих $A_1$, $B_1$ и $C_1$ только в первой степени.

Если эти три линейных уравнения (19), $(19_1)$, и $(19_2)$ алгебраически независимы, то они определяют единственное решение $A-A_1=0$, $B-B_1=0$, $C_1=0$; следовательно, существует единственная поверхность (M) с данным линейным элементом

$$\frac{\beta\,du^3+\gamma\,dv^3}{du\,dv}$$

и инвариантами

$$A_1=A, \quad B_1=B.$$

Если одно из уравнений (19), $(19_1)$ и $(19_2)$ есть алгебраическое следствие двух других и новые диференцирования не дадут других независимых уравнений, конечных относительно $A_1$, $B_1$, $C_1$, то $A_1$, $B_1$, $C_1$ определяются из систем (17, 18) с одним произвольным постоянным, т. е. поверхность (M) проективно изгибается в $\infty^1$ проективно отличных от нее поверхностей (N). Это — поверхность $R$ (или $R_0$) с одним основанием $R$.

Наконец, если уравнения (19), $(19_1)$ и $(19_2)$ содержат только одно алгебраически независимое уравнение, то $A_1$, $B_1$, $C_1$ определяются из системы (17, 18) с двумя произвольными постоянными. Мы имеем $\infty^2$ проективных изгибаний поверхности (M). Это — поверхности $R$, обладающие $\infty^1$ оснований $R$.

Таким образом, если поверхность обладает двумя системами $R$, то у нее их бесконечное множество.

Поверхности, допускающие наибольшее число $\infty^3$ проективных изгибаний, получаются, следовательно, если мы приравняем нулю коэфициенты при $A-A_1$, $B-B_1$ и $C_1$ в уравнении (19):

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\ln\frac{\beta}{\gamma}=0, \qquad (20_1)$$

$$\frac{\partial^3 \ln \beta}{\partial u\,\partial v^2}-\frac{\partial^2 \ln \beta}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial \ln \beta\gamma}{\partial v}=0, \qquad (20_2)$$

$$\frac{\partial^3 \ln \gamma}{\partial u^2\,\partial v}-\frac{\partial^2 \ln \gamma}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}=0. \qquad (20_3)$$

Первое уравнение показывает, что отношение $\frac{\beta}{\gamma}$ равно произведению функции одного $u$ на функцию одного $v$. Меняя параметры, мы в силу формулы $(\mathrm{III}_2)$ можем привести это отношение к единице:

$$\beta=\gamma. \qquad (21)$$

Поверхности, удовлетворяющие условию (21) или, что то же, уравнению $(20_1)$, Фубини называет изотермически асимптотическими, по аналогии с изотермически сопряженными системами Бианки; Чех предложил называть эти поверхности поверхностями Фубини.

Итак, только изотермически асимптотические поверхности Фубини мо-гут обладать $\infty^3$ оснований $R$.

Интегрируя уравнения $(20_{2,3})$ и подставляя $\beta=\gamma$, мы придем к одному уравнению:

$$\frac{\partial^2 \ln\beta}{\partial u\,\partial v}=c\beta^2, \qquad (22_1$$

где $c$ — произвольное постоянное интеграции.

Подсчитывая $k$, $l$ по формулам $(\mathrm{II}_1)$, имеем:

$$k=l=\frac{1-c}{2}\beta^2.$$

Если $c=1$, то

$$k=0,\quad l=0 \qquad (23$$

и уравнения $(\mathrm{II}_{1,\,2})$ имеют очевидное решение:

$$A=0,\quad B=0.$$

Обратно, из условий (23) сейчас же вытекают и уравнения $(20_1)$ и $(22_1)$ Если вспомнить, что обращение в нуль инварианта $k$ означает, чт асимптотические линии $u$ принадлежат к линейным комплексам, т можно высказать теорему:

Поверхности с асимптотическими линиями (обоих семейств), прина лежащими линейным комплексам, допускают $\infty^3$ проективных изгибани

Подвергая такую поверхность проективному изгибанию, мы, следо вательно, всегда можем привести инварианты $A$, $B$ к нулю:

$$A=0,\quad B=0,$$

т. е. все поверхности Фубини налагаются на аффинно-минимальн поверхности Франка-Блашке.

Если $c$ не равно единице, то на $\beta$ накладывается еще одно услови уравнения $(\mathrm{II}_{1,\,2,\,3})$ должны допускать хотя бы одно (и тогда $\infty$ решение $A$, $B$.

Уравнения $(\mathrm{II}_{2,\,3})$ принимают теперь вид:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial u}&=\frac{3(1-c)}{4}\frac{\partial\beta^2}{\partial v}, & \frac{\partial B}{\partial u}&=-B\frac{\partial\ln\beta^2}{\partial u}+C,\\ \frac{\partial A}{\partial v}&=-A\frac{\partial\ln\beta^2}{\partial v}+C, & \frac{\partial B}{\partial v}&=\frac{3(1-c)}{4}\frac{\partial\beta^2}{\partial u},\end{aligned}\right\}\qquad (17$$

где $C$ — новая вспомогательная функция.

Условия совместности этой системы суть:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial u}&=2Ac\beta^2+\frac{3(1-c)}{4}\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\beta^2\frac{\partial\beta^2}{\partial v}\right),\\ \frac{\partial C}{\partial v}&=2Bc\beta^2+\frac{3(1-c)}{4}\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\beta^2\frac{\partial\beta^2}{\partial u}\right),\end{aligned}\right\}\qquad (1$$

откуда искомое дополнительное условие

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\beta^2\frac{\partial\beta^2}{\partial v}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\beta^2\frac{\partial\beta^2}{\partial u}\right)\right]. \qquad (1$$



Уравнение $(22_1)$ имеет общий интеграл в виде:

$$\beta^2=\frac{U'V'}{c(U+V)^2}, \qquad (24)$$

где $U$ и $V$ — произвольные функции одного переменного $u$ и одного переменного $v$, через $U'$, $V'$ обозначены их производные $U'=\frac{dU}{du}$ и $V'=\frac{dV}{dv}$.

Подставляя это выражение в уравнение $(18_2)$, получим по сокращении на $U'V'$:

$$\frac{1}{3}(U+V)^3\left(\frac{d^3U'^3}{dU^3}-\frac{d^3V'^3}{dV^3}\right)-4(U+V)^2\left(\frac{d^2U'^3}{dU^2}-\frac{d^2V'^3}{dV^2}\right)+$$
$$+20(U+V)\left(\frac{dU'^3}{dU}-\frac{dV'^3}{dV}\right)-40(U'^3-V'^3)=0. \qquad (25)$$

Так как $U'$ и $V'$, очевидно, не равны нулю, если поверхность не линейчатая, то функции $U$ и $V$ всегда содержат переменные $u$ и $v$, и мы могли диференцировать по $U$ и по $V$.

Диференцируя уравнение (25) по $U$ и по $V$ по три раза подряд, мы получим:

$$\frac{d^6U'^3}{dU^6}-\frac{d^6V'^3}{dV^6}=0.$$

Отсюда сейчас же следует, что каждая из этих производных постоянна. Обозначая эту общую постоянную через $\frac{a}{6!}$, имеем после интегрирования:

$$\left.\begin{aligned}U'^3&=aU^6+\sum_{k=0}^{k=5}b_kU^k,\\ V'^3&=aV^6+\sum_{k=0}^{k=5}c_kV^k.\end{aligned}\right\}\qquad (26)$$

Внося эти значения в уравнения (25), мы должны получить тождество, справедливое при всех значениях $U$ и $V$. Полагая $U=-V$, мы без труда найдем:

$$c_5=-b_5,\ c_4=b_4,\ c_3=-b_3,\ c_2=b_2,\ c_1=-b_1,\ c_0=b_0, \qquad (26_1)$$

и при этих значениях коэфициентов все члены в левой части (25) взаимно уничтожаются.

Если принять $U$ и $V$ за новые переменные, то по формулам $(\mathrm{III}_2)$ новые коэфициенты $\beta^*$, $\gamma^*$ будут иметь вид:

$$\beta^*=\frac{1}{\sqrt{c}(U+V)}\sqrt{\frac{V'^3}{U'^3}},\quad \gamma^*=\frac{1}{\sqrt{c}(U+V)}\sqrt{\frac{U'^3}{V'^3}}, \qquad (24_1)$$

где $U'^3$, $V'^3$ суть многочлены (26) с коэфициентами $(26_1)$. $A$ и $B$ определяются без большого труда из уравнений $(17_1)$, $(18_2)$.

**§ 8. Проективный линейный элемент.** Проективное изгибание поверхности обнаружило особое значение проективного линейного элемента

$$\frac{\beta\,du^3+\gamma\,dv^3}{du\,dv},$$

который сохраняется при проективном изгибании поверхности так же, как линейный элемент $ds^2$ при метрическом изгибании. Было сделано много попыток найти геометрический смысл его подобно тому, как это имеет место для линейного элемента метрического (бесконечно малая дуга кривой, лежащей на поверхности). Наиболее остроумная интерпретация принадлежит Террачини [19].

Возьмем на поверхности две бесконечно близких точки $M(u, v)$ и $M^*(u+du, v+dv)$. Касательные плоскости к поверхности в этих точках пересекаются по прямой $t$. Асимптотические касательные (касательные к асимптотическим линиям) в точке $M$ и в точке $M^*$ пересекают прямую $t$ в четырех точках. Главная часть сложного отношения этих четырех точек отличается от проективного линейного элемента только числовым множителем.

Пользуясь формулами (I), мы получим для координат точек $M^*$ и $M_1^*$ разложения:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^* &= \mathbf{M} + \mathbf{M}_u\,du + \mathbf{M}_v\,dv + \frac{1}{2}d^2\mathbf{M} + \ldots = \\ &= \mathbf{M}(1+\ldots) + \mathbf{M}_1\left(du + \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \beta}{\partial v}du\,dv + \frac{\gamma}{2}dv^2 + \ldots\right) + \\ &\quad + \mathbf{M}_2\left(dv + \frac{\beta}{2}du^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \gamma}{\partial u}du\,dv + \ldots\right) + \\ &\quad + \mathbf{M}_3\left(du\,dv + \frac{\beta}{6}du^3 + \frac{\gamma}{6}dv^3 + \ldots\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_1^* &= \mathbf{M}(B\,du + l\,dv + \ldots) + \mathbf{M}_1\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \gamma}{\partial u}du + \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \beta}{\partial v}dv + \ldots\right) + \\ &\quad + \mathbf{M}_2(\beta\,du + \ldots) + \mathbf{M}_3\left(dv + \frac{\beta}{2}du^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \gamma}{\partial u}du\,dv + \ldots\right).\end{aligned}$$

Точка пересечения асимптотической касательной $M^*M_1^*$ с касательной плоскостью поверхности $(M)$ в точке $M$

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{M}^* + \lambda\mathbf{M}_1^*$$

определяется из условия, что коэфициент при $\mathbf{M}_3$ должен равняться нулю:

$$\begin{aligned}&du\,dv + \frac{\beta}{6}du^3 + \frac{\gamma}{6}dv^3 + \ldots + \\ &+ \lambda\left(dv + \frac{\beta}{2}du^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \gamma}{\partial u}du\,dv + \ldots\right) = 0,\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}\lambda &= -\left[du + \frac{\beta}{6}\frac{du^3}{dv} + \frac{\gamma}{6}dv^2 + \ldots\right] : \left[1 + \frac{\beta}{2}\frac{du^2}{dv} - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \gamma}{\partial u}du + \ldots\right] = \\ &= -\left[du + \frac{\beta}{6}\frac{du^3}{dv} + \frac{\gamma}{6}dv^2 + \ldots\right]\left[1 - \frac{\beta}{2}\frac{du^2}{dv} + \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \gamma}{\partial u}du + \ldots\right] = \\ &= -du + \frac{\beta}{3}\frac{du^3}{dv} - \frac{\gamma}{6}dv^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \gamma}{\partial u}du^2 + \ldots\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{M}(1+\ldots) + \mathbf{M}_1\left(\frac{\beta}{3}\frac{du^3}{dv} + \frac{\gamma}{3}dv^2 + \ldots\right) + \mathbf{M}_2(dv + \ldots);$$



аналогично, точка пересечения касательной ко второй асимптотической линии $(M^*M_2^*)$ с плоскостью $MM_1M_2$ имеет координаты

$$\mathbf{N}_2 = \mathbf{M}(1+\ldots) + \mathbf{M}_1(du + \ldots) + \mathbf{M}_2\left(\frac{\beta}{3}du^2 + \frac{\gamma}{3}\frac{dv^3}{du} + \ldots\right).$$

Проектируя эти две точки и точки пересечения прямой $N_1N_2$ с асимптотическими касательными $MM_1$, $MM_2$ на ребро $M_1M_2$ нашего тетраэдра, т. е. отбрасывая слагаемое $\mathbf{M}$, получим четыре точки:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_1,\ \mathbf{M}_2,\ \mathbf{N}_1' &= \mathbf{M}_1\left(\frac{\beta}{3}\frac{du^3}{dv} + \frac{\gamma}{3}dv^2 + \ldots\right) + \mathbf{M}_2(dv + \ldots), \\ \mathbf{N}_2' &= \mathbf{M}_1(du + \ldots) + \mathbf{M}_2\left(\frac{\beta}{3}du^2 + \frac{\gamma}{3}\frac{dv^3}{du} + \ldots\right).\end{aligned}$$

Сложное отношение их равно сложному отношению четырех точек пересечения двух пар асимптотических касательных с линией пересечения касательных плоскостей.

Это сложное отношение

$$(\mathbf{M}_2, \mathbf{M}_1, \mathbf{N}_1', \mathbf{N}_2') = \frac{1}{9}\left(\frac{\beta\,du^3 + \gamma\,dv^3}{du\,dv}\right)^2 + \ldots$$

в своей главной части отличается только числовым множителем от квадрата проективного линейного элемента.

Глава четвертая

## СОПРИКАСАЮЩИЕСЯ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**§ 1. Линии Дарбу.** Пусть $M$ — обыкновенная точка поверхности ($M$). Тогда вблизи точки $M$ уравнение поверхности можно разрешить относительно одной из координат. Если координаты неоднородные, $x$, $y$, $z$, и уравнение разрешено относительно координаты $z$, то это решение можно написать в виде ряда, расположенного по степеням $x$ и $y$. Как бы ни выбирать координатный тетраэдр, если одну из вершин его поместить в точке $M$, а две другие вершины $M_1$ и $M_2$ расположить в касательной плоскости поверхности, то это разложение начинается с членов второй степени:

$$z = \frac{1}{1\cdot 2}(a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2) + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}(a_{30}x^3 + \ldots) + \ldots \qquad (1)$$

Пересечение поверхности с касательной плоскостью определяется уравнением (1), если в нем положить $z = 0$. Эта кривая имеет особую точку (двойную) в начале координат $M$, ибо уравнение не содержит членов первой степени и совокупность двух касательных в особой точке определяется членами второй степени:

$$a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 = 0. \qquad (2)$$

Два направления (2) называются асимптотическими направлениями поверхности.

Если асимптотические направления в начале координат принять за оси $x$ и $y$, то уравнение (2) должно допускать решения $x = 0$, $y = 0$, следовательно,

$$a_{20} = 0, \quad a_{02} = 0.$$

Так как $a_{11}$ не равно нулю [1]), то, меняя, например, масштаб по оси $z$, можно привести $a_{11}$ к единице. Разложение (1) напишется тогда в виде:

$$z = xy + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}(a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + a_{03}y^3) + \\ + \frac{1}{4!}(a_{40}x^4 + \ldots). \qquad (3)$$

Две поверхности имеют в общей точке касание $n$-го порядка, если любая кривая одной поверхности, проходящая через общую точку, имеет в этой точке со второй поверхностью касание $n$-го порядка. Следова-

[1]) Если при этом и $a_{11}$ равно нулю, то точка особая; если $a_{11} = 0$ во всякой точке, то поверхность — плоскость. Мы предполагаем, что $a_{11}$ не нуль.



тельно, в общей точке $z$ как функция от $x$ и $y$ и все ее производные до $n$-го порядка включительно у обеих поверхностей должны быть равны. Если одна из поверхностей алгебраическая и общая точка — начало координат, то по исключении $z$ все младшие относительно $x$ и $y$ члены до $n$-го порядка включительно должны исчезать тождественно. Нетрудно подсчитать, что это налагает $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ условий, а так как поверхность $m$-го порядка зависит от $\frac{m(m^2+6m+11)}{6}$ независимых параметров, то легко видеть, что обычно нет одной соприкасающейся поверхности $m$-го порядка, а существует семейство поверхностей, каждая из которых имеет касание одного и того же наивысшего возможного порядка [1]).

Поверхность второго порядка

$$\sum b_{ik}x_ix_k = 0 \qquad (4)$$

зависит от 9 параметров; поэтому существует $\infty^3$ соприкасающихся поверхностей второго порядка, имеющих с поверхностью (4) касание второго порядка. Чтобы получить уравнение этого семейства поверхностей, надо в общее уравнение (4) подставить вместо $z = \frac{x_3}{x_0}$ разложение (3) и приравнять нулю свободный член и коэфициенты при $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$, $x^2$, $xy$ и $y^2$.

Это приведет нас к уравнению:

$$xy - z + z(\lambda x + \mu y + \nu z) = 0, \qquad (5)$$

где $\lambda$, $\mu$, $\nu$ — произвольные параметры.

Совокупность уравнений (3) и (5) определяет линию пересечения поверхности (3) с соприкасающейся поверхностью второго порядка.

Исключая $z$ и рассматривая полученное уравнение как уравнение кривой в плоскости $xy$, мы найдем проекцию линии пересечения на общую касательную плоскость. Нетрудно заметить, что это уравнение не содержит членов первой и второй степени, следовательно, линия пересечения имеет тройную точку в начале координат.

Члены третьей степени

$$a_{30}x^3 + 3(a_{21} - 2\lambda)x^2y + 3(a_{12} - 2\mu)xy^2 + a_{03}y^3 = 0 \qquad (6)$$

определят три касательных к линии пересечения [2]) наших поверхностей в общей точке $M$.

В метрической геометрии поверхность имеет в заданной точке $\infty$ соприкасающихся сфер. Каждая сфера имеет касание первого порядка, и, следовательно, ее пересечение с поверхностью имеет двойную точку в точке касания, но среди всех сфер можно найти две, у которых ка-

[1]) Так же обстоит дело с любым заданным семейством поверхностей. Например, в метрической геометрии нет одной сферы, соприкасающейся к данной поверхности в заданной ее точке, а есть пучок сфер, имеющих касание первого порядка, ибо семейство сфер зависит от четырех параметров, а касание первого порядка определяется тремя условиями.

[2]) Ибо в точке $M$ кривая касается плоскости $xy$ и, следовательно, касательные у рассматриваемой линии и у ее проекции — общие.

сательные в двойной точке совпадают. Два направления этих касательных[1]) суть главные направления в касательной плоскости.

Они определяют линии кривизны на поверхности, а центры этих двух сфер являются главными центрами кривизны поверхности.

По аналогии будем искать те соприкасающиеся поверхности второго порядка, у которых линия пересечения имеет особую точку с тремя совпадающими касательными. Левая часть уравнения (6) в таком случае представляет полный куб, следовательно,

$$a_{30}=a^3,\quad a_{03}=b^3,\quad 2\lambda=a_{21}-a^2b,\quad 2\mu=a_{12}-ab^2,$$

и три совпавшие касательные определяются уравнениями:

$$z=0,\quad \sqrt[3]{a_{30}}\,x+\sqrt[3]{a_{03}}\,y=0.$$

Таких направлений три, ибо кубический корень имеет три значения. Они называются направлениями Дарбу [20], а те линии, которые они огибают, называются линиями Дарбу. Линии Дарбу, таким образом, представляют аналог [21] линий кривизны метрической геометрии.

**§ 2. Поверхности Дарбу.** Три направления Дарбу определяются уравнениями:

$$z=0,\quad a_{30}x^3+a_{03}y^3=0. \tag{7}$$

Так как параметр $\nu$ остается произвольным, то каждому направлению соответствует $\infty^1$ соприкасающихся поверхностей второго порядка. Несравненно важнее то семейство соприкасающихся поверхностей второго порядка, которое имеет в точке касания три различных касательных к своей линии пересечения с поверхностью (M), но эти три касательных

---

1) Если в разложении (1) считать $x, y, z$ декартовыми прямоугольными координатами, то уравнение семейства соприкасающихся сфер можно написать в виде:

$$\frac{1}{2}\lambda(x^2+y^2+z^2)-2z=0,$$

где $\lambda$ — произвольный параметр. Касательные к линии пересечения в общей точке определяются уравнениями:

$$(\lambda-a_{20})x^2+(\lambda-a_{02})y^2-2a_{11}xy=0,\quad z=0.$$

Две касательные совпадут, если

$$(\lambda-a_{20})(\lambda-a_{02})=a_{11}^2.$$

Исключая $\lambda$, получим уравнение двух пар совпавших касательных:

$$a_{11}(x^2-y^2)+(a_{02}-a_{20})xy=0,\quad z=0.$$

Нетрудно видеть, что эти направления ортогональны (произведение двух корней уравнения $\frac{y}{x}$ равно $-1$); если эти направления принять за оси $x$ и $y$, то $a_{12}$ обратится в нуль, и мы заметим, что асимптотические направления

$$a_{20}x^2+a_{02}y^2=0$$

гармонически делят угол между осями $x=0$, $y=0$. Следовательно, направления новых осей сопряжены. Это показывает, что новые оси координат совпадают с главными направлениями поверхности.



совпадают с тремя направлениями Дарбу. Такие поверхности второго порядка называются поверхностями Дарбу.

Требуя, чтобы уравнения (6) и (7) совпали, получим:

$$2\lambda=a_{21},\quad 2\mu=a_{12}$$

и уравнение пучка поверхностей Дарбу:

$$xy-z+\frac{1}{2}a_{21}xz+\frac{1}{2}a_{12}yz+\nu z^2=0. \tag{8}$$

Уравнение полярной плоскости поверхности (8), соответствующей полюсу $(x_i)$, напишется в виде:

$$X_1\left(x_2+\frac{1}{2}a_{21}x_3\right)+X_2\left(x_1+\frac{1}{2}a_{12}x_3\right)+$$
$$+X_3\left(\frac{1}{2}a_{21}x_1+\frac{1}{2}a_{12}x_2-x_0+2\nu x_3\right)-X_0x_3=0,$$

где $(X_i)$ — текущие координаты и $x=\frac{x_1}{x_0}$, $y=\frac{x_2}{x_0}$, $z=\frac{x_3}{x_0}$ — координаты полюса.

Нетрудно видеть, что оси $MM_1$ и $MM_2$ в этой полярности сопряжены сами себе. Прямой $M_1M_2$, т. е. $x_0=x_3=0$, соответствует одна и та же прямая

$$X_1+\frac{1}{2}a_{12}X_3=0,\quad X_2+\frac{1}{2}a_{21}X_3=0,$$

как ни выбирать параметр $\nu$, определяющий поверхность Дарбу. Эта прямая проходит через точку $M$ поверхности; если мы потребуем, чтобы она совпала с ребром $MM_3$, т. е. будем выбирать тетраэдр так, чтобы ребра $MM_3$ и $M_1M_2$ были сопряжены, то

$$a_{12}=0,\quad a_{21}=0.$$

Это требование, очевидно, при заданном ребре $M_1M_2$ определяет $MM_3$ или, наоборот, при произвольно данном $MM_3$ определяет точки $M_1$ и $M_2$.

Разложение (3) можно теперь написать в виде[1]):

$$z=xy-\frac{1}{3}(\beta x^3+\gamma y^3)+\frac{1}{4!}(a_{40}x^4+4a_{31}x^3y+\ldots)+\ldots \tag{9}$$

В новых обозначениях направления Дарбу определяются уравнениями:

$$z=0,\quad \beta x^3+\gamma y^3=0, \tag{7'}$$

пучок поверхностей Дарбу — уравнением:

$$xy-z+\nu z^2=0. \tag{8'}$$

**§ 3. Флекнодальные линии.** Если в данной точке

$$\beta=0, \tag{10}$$

то прямая $y=0$ имеет с поверхностью по крайней мере четыре общих

---

1) Мы увидим, что коэфициенты $\beta$ и $\gamma$ имеют тот же смысл, что и в формулах (I) главы второй.

точки $x=0$. Если это равенство имеет место в каждой точке поверхности, то прямая целиком принадлежит поверхности и, следовательно, поверхность — линейчатая. Все три семейства линий Дарбу в этом случае совпадают с прямолинейными образующими.

Если равенство (10) не выполняется тождественно, то оно определяет на поверхности линию. В обычной точке поверхности касательная к асимптотической $y=0$ пересекает поверхность в трех слившихся точках. Всякое плоское сечение поверхности через прямую $y=0$ имеет с ней тоже три общих точки, и, следовательно, линия, касающаяся асимптотической линии, имеет в точке касания точку перегиба. Сечение поверхности касательной плоскостью состоит из двух ветвей. Прямая $y=0$ одну из ветвей пересекает и таким образом с другой ветвью она имеет только две общие точки. Для асимптотической линии это — обыкновенная точка. Иначе дело обстоит, если $\beta=0$. Тогда прямая $y=0$ имеет с поверхностью четыре общих точки; считая одну точку точкой пересечения ее с одной ветвью (одной асимптотической), лежащей в касательной плоскости, мы имеем три общих точки касательной $y=0$ с другой ветвью. Поэтому для этой второй асимптотической такая точка — точка перегиба. Соединяя вместе flec (перегиб) и node (узел), американская школа назвала такую точку и всю линию $\beta=0$ словом flecnode. Это название утвердилось и в Европе. На каждой поверхности, следовательно, имеется две флекнодальные линии $\beta=0$ и $\gamma=0$. На линейчатой поверхности одна из этих линий совпадает с прямолинейными образующими.

В дальнейшем мы будем предполагать, что имеем дело с обыкновенной точкой поверхности и, следовательно, $\beta$ и $\gamma$ оба не равны нулю.

**§ 4. Компоненты движения тетраэдра.** Разложение (9) предполагает, что система координат $(MM_1M_2M_3)$ в данной точке поверхности $M$ выбрана так, что определено положение двух ребер $MM_1$ и $MM_2$, а положение ребра $M_1M_2$ связано с выбором ребра $MM_3$. Если разложение вида (9) имеет место во всякой точке поверхности, то тетраэдр $T$ в известной мере определен во всякой точке поверхности и, следовательно, движения его при переходе из точки в точку известны.

Таким образом из разложения (9), если оно существует для всякой точки поверхности (причем коэфициенты, очевидно, будут зависеть от параметров $u$ и $v$), можно вывести таблицу коэфициентов системы (I) главы второй. С этой целью допустим, что мы имеем в некоторой точке $M$ нашей поверхности тетраэдр $T$ и разложение (9). Возьмем какую-нибудь точку $P$ с координатами $x, y, z$ на нашей поверхности.

По формулам преобразования координаты точки $P$ относительно неподвижного тетраэдра могут быть записаны в виде:

$$\mathbf{P}=\mathbf{M}+x\mathbf{M}_1+y\mathbf{M}_2+z\mathbf{M}_3, \tag{11}$$

где попрежнему всем буквам $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}_i$ можно одновременно приписать наверху один из четырех значков 1, 2, 3, 4.

Будем перемещать точку $M$ и тетраэдр $T$ по поверхности, сохраняя при этом неподвижной точку $P$; ее координаты $x, y, z$ относительно тетраэдра $T$, конечно, будут меняться. Тогда, очевидно, может меняться



только общий множитель четырех однородных координат $\mathbf{P}$, т. е. производные $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v}$ будут пропорциональны $\mathbf{P}$:

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u}=\lambda\mathbf{P}, \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v}=\mu\mathbf{P}. \tag{12}$$

Диференцируя выражение (11), найдем $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v}$ и подставим их в уравнения (12). При этом производные от координат $\mathbf{M}_i$ вычисляются по формулам (I) главы второй, а $z$ рассматривается как функция от $x$ и $y$, определяемая разложением (9). После этого и левая и правая части каждого из уравнений (12) будут линейно выражены через координаты $\mathbf{M}_i$. Так как эти четыре точки не лежат в одной плоскости и, следовательно, координаты их не могут быть связаны линейным соотношением, то коэфициенты при отдельных множителях $M_i$ должны быть в левой и в правой частях уравнения равны; каждое из уравнений распадается на четыре.

Первое уравнение (12), например, приведет нас к такой системе:

$$\left.\begin{aligned}
&a_0^0+xa_1^0+ya_2^0+za_3^0 = \lambda,\\
&\frac{\partial x}{\partial u}+a_0^1+xa_1^1+ya_2^1+za_3^1=\lambda x,\\
&\frac{\partial y}{\partial u}+a_0^2+xa_1^2+ya_2^2+za_3^2=\lambda y,\\
&\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial u}+a_0^3+xa_1^3+ya_2^3+za_3^3=\lambda z.
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Здесь $\frac{\partial z}{\partial u}$ означает производную по параметру $u$, входящему в коэфициенты разложения (9).

Из уравнений (13) сейчас же находим:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u}&=-a_0^1+x(a_0^0-a_1^1)-ya_2^1+x^2a_1^0+xya_2^0-za_3^1+xza_3^0,\\
\frac{\partial y}{\partial u}&=-a_0^2-xa_1^2+y(a_0^0-a_2^2)+xya_1^0+y^2a_2^0-za_3^2+yza_3^0.
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Так как асимптотическая $u$ касается в точке $\mathbf{M}$ оси $x$, то производная $\frac{\partial y}{\partial u}$ должна для $x=0$, $y=0$, $z=0$ обращаться в нуль. Следовательно,

$$a_0^2=0. \tag{$15_1$}$$

Если внести значения (14) в последнее уравнение (13), исключить $\lambda$ и заменить $z$ его разложением (9), то мы должны получить тождество и относительно параметров $u, v$, ибо точку $M$ можно брать где угодно на поверхности (M), и относительно $x, y$, ибо точка $P$ при заданной точке $M$ все же остается произвольной точкой нашей поверхности.

Сравнивая коэфициенты при одинаковых степенях $x$ и $y$ в левой и правой частях равенства, немедленно получим:

$$\left.\begin{gathered}
a_0^3=0, \quad a_1^3=0, \quad a_2^3=a_0^1, \quad a_1^2=\beta a_0^1, \quad a_2^1=0,\\
a_3^3-a_2^2+a_0^0-a_1^1=0.
\end{gathered}\right\} \tag{$15_2$}$$

Следующие члены содержат уже коэфициенты при членах четвертой степени в разложении (9).

Примем, как и в главе второй, что координаты четырех точек $M$, $M_1$, $M_2$, $M_3$ нормированы так, что определитель

$$(\mathrm{M}\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3)=1.$$

Тогда, диференцируя это равенство по $u$, получим:

$$a_0^0+a_1^1+a_2^2+a_3^3=0.$$

Следовательно,

$$a_0^0+a_3^3=0, \quad a_1^1+a_2^2=0.$$

Нормируя координаты $\mathrm{M}_1$ и $\mathrm{M}_2$, мы приведем $a_0^1$ и $b_0^2$ к единице.

Так как теперь условия совместности (2) главы второй дают:

$$a_0^0+a_1^1=0, \quad b_0^0+b_2^2=0,$$

то мы можем положить

$$a_0^0=a, \quad a_1^1=-a, \quad a_2^2=a, \quad a_3^3=-a,$$
$$b_0^0=b, \quad b_1^1=b, \quad b_2^2=-b, \quad b_3^3=-b.$$

Разлагая так же второе уравнение (12), мы придем к следующей таблице коэфициентов системы, определяющей движения тетраэдра:

| | M | $\mathrm{M}_1$ | $\mathrm{M}_2$ | $\mathrm{M}_3$ | M | $\mathrm{M}_1$ | $\mathrm{M}_2$ | $\mathrm{M}_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M | $a$ | 1 | 0 | 0 | $b$ | 0 | 1 | 0 |
| $\mathrm{M}_1$ | $a_1^0$ | $-a$ | $\beta$ | 0 | $b_1^0$ | $b$ | 0 | 1 |
| $\mathrm{M}_2$ | $a_2^0$ | 0 | $a$ | 1 | $b_2^0$ | $\gamma$ | $-b$ | 0 |
| $\mathrm{M}_3$ | $a_3^0$ | $a_3^1$ | $a_3^2$ | $-a$ | $b_3^0$ | $b_3^1$ | $b_3^2$ | $-b$ |

(16)

Из условий совместности, между прочим, получится:

$$\left.\begin{aligned} a_2^0-a_3^1&=b_1^0-b_3^2,\\ b&=\frac{a_1^0-a_3^2}{2\beta}+\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\beta}{\partial v},\\ a&=\frac{b_2^0-b_3^1}{2\gamma}+\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\gamma}{\partial u}. \end{aligned}\right\} \qquad (15a)$$

**§ 5. Поверхность в тангенциальных координатах.** В тангенциальных координатах поверхность (M) определяется координатами своей касательной плоскости $\mathrm{m}=(\mathrm{M}\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2)$.



Сохраняя тот же тетраэдр $(M, M_1, M_2, M_3)$, естественно принять за координатные плоскости $m_1$ и $m_2$ плоскости, содержащие касательные к асимптотическим линиям:

$$\mathrm{m}_1=(\mathrm{M}\mathrm{M}_1\mathrm{M}_3), \quad \mathrm{m}_2=-(\mathrm{M}\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3)$$

и, следовательно,

$$\mathrm{m}_3=-(\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3).$$

Диференцируя, например, первое из этих уравнений, получим:

$$\mathrm{m}_u=(\mathrm{M}_u\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2)+(\mathrm{M}\mathrm{M}_{1u}\mathrm{M}_2)+(\mathrm{M}\mathrm{M}_1\mathrm{M}_{2u});$$

пользуясь таблицей (16), немедленно получим:

$$\mathrm{m}_u=(\mathrm{M}\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2)\,a+(\mathrm{M}\mathrm{M}_1\mathrm{M}_3), \quad \text{или} \quad \mathrm{m}_u=a\mathrm{m}+\mathrm{m}_1.$$

Поступая так и дальше, мы придем к таблице компонент движения нашего тетраэдра в пространстве плоскостей, где левая половина соответствует диференцированию по параметру $u$, правая — по параметру $v$:

| | m | $\mathrm{m}_1$ | $\mathrm{m}_2$ | $\mathrm{m}_3$ | m | $\mathrm{m}_1$ | $\mathrm{m}_2$ | $\mathrm{m}_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| m | $a$ | 1 | 0 | 0 | $b$ | 0 | 1 | 0 |
| $\mathrm{m}_1$ | $a_3^2$ | $-a$ | $-\beta$ | 0 | $b_3^2$ | $b$ | 0 | 1 |
| $\mathrm{m}_2$ | $a_3^1$ | 0 | $a$ | 1 | $b_3^1$ | $-\gamma$ | $-b$ | 0 |
| $\mathrm{m}_3$ | $-a_3^0$ | $a_2^0$ | $a_1^0$ | $-a$ | $-b_3^0$ | $b_2^0$ | $b_1^0$ | $-b$ |

$(16_1)$

Как видим, по сравнению с таблицей (16) наша таблица перешла в симметричную относительно второй диагонали, и, кроме того, коэфициенты, расположенные на второй диагонали, изменили знак. Обозначим через $\xi$, $\eta$, $\zeta$ тангенциальные координаты касательной плоскости поверхности относительно тетраэдра $(m, m_1, m_2, m_3)$ так, что $p=m+m_1\xi+m_2\eta+m_3\zeta$. Отсюда следует, что в разложении $\zeta$ по степеням $\xi$ и $\eta$ по крайней мере первые члены те же самые, как и в разложении (9), только с изменением знака $\beta$ и $\gamma$:

$$\zeta=\xi\eta+\frac{1}{3}(\beta\xi^3+\gamma\eta^3)+\ldots \qquad (17)$$

Это уравнение показывает прежде всего, что оси $\xi=0$, $\zeta=0$ и $\eta=0$, т. е. асимптотические касательные являются характеристиками семейства касательных плоскостей вдоль линий $u=\mathrm{const.}$ или $v=\mathrm{const.}$[1]).

[1]) Так как касательная к линии $v=\mathrm{const.}$ совпадает с осью $\eta=0$, то можно искать характеристику касательных плоскостей вдоль линии $\eta=0$. Вдоль этой ли-

Следовательно, касательная плоскость поверхности служит соприкасаю-щейся плоскостью асимптотической линии.

Уравнение соприкасающейся поверхности второго класса [имеюще[й] с поверхностью (17) вдоль всякой линии в данной точке три общих каса[-]тельных плоскости] напишется так же:

$$\xi\eta-\zeta+\zeta(\lambda\xi+\mu\eta+\nu\zeta)=0.$$

Линия пересечения ее с поверхностью (17) имеет в начале координат касательные

$$\zeta=0,\quad \frac{1}{3}(\beta\xi^3+\gamma\eta^3)-\xi\eta(\lambda\xi+\mu\eta)=0.$$

Они могут совпадать вместе тремя различными способами. Направлени[я] этих тройных касательных изываются направленнями Сегре [22] (Segre). В тангенциальных координатах они определяются уравнениями:

$$\zeta=0,\quad \beta\xi^3+\gamma\eta^3=0. \tag{18}$$

Точка

$$P=M+xM_1+yM_2+zM_3$$

лежит в плоскости

$$p=m+\xi m_1+\eta m_2+\zeta m_3,$$

если удовлетворено уравнение

$$\sum_{i=1}^{4} P^i p^i=0.$$

Внося сюда значения P и p и помня выражения координат $m_i$, мы не медленно получим:

$$z-\xi y-\eta x+\zeta=0. \tag{18$_1$}$$

Внося сюда из уравнений (18) $\zeta=0$, $\eta=-\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}\,\xi$, мы получим урав-нение пучка плоскостей (18) в точечных координатах:

$$z-\xi\left(y-\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}\,x\right)=0.$$

Следовательно, в точечных координатах уравнение совокупности тре[х] касательных Сегре есть

$$z=0,\quad \beta x^3-\gamma y^3=0. \tag{18}$$

---

нии касательные плоскости имеют координаты:

$$\xi,\quad \eta=0,\quad \zeta=\frac{1}{3}\beta\xi^3+\dots$$

при переменном параметре $\xi$. Характеристика есть линия пересечения это[й] плоскости с плоскостью бесконечно близкой или в пределе с плоскостью, опр[е-]деляемой производными

$$1,\quad \frac{d\eta}{d\xi}=0,\quad \frac{d\zeta}{d\xi}=\beta\xi^2+\dots$$

Для $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=0$ это — прямая

$$\eta=0,\quad \zeta=0.$$



Имея в виду равенства (14), диференциальные уравнения линий Дарбу и Сегре напишем в виде:

$$\beta\,du^3+\gamma\,dv^3=0,\quad \beta\,du^3-\gamma\,dv^3=0. \tag{19}$$

Отсюда следует, что направления Сегре попарно сопряжены с направлениями Дарбу.

**§ 6. Соприкасающаяся поверхность второго порядка Бомпиани.** Нетрудно заметить, что всегда существует такая поверхность Дарбу [$\nu=0$ в уравнении (8)], что координатный тетраэдр, выбранный нами для уравнения (9), автополярен: точка $M$ полярна плоскости с координатами $m=(MM_1M_2)$, точки $M_1$ и $M_2$ соответствуют плоскостям с координатами $m_1=(MM_1M_3)$ и $m_2=-(MM_2M_3)$ и вершина $M_3$ полярна плоскости с координатами $m_3=-(M_1M_2M_3)$. Обратно: тот или иной выбор поверхности Дарбу наложит новое ограничение на свободу выбора тетраэдра $(M, M_1, M_2, M_3)$.

Существует целый ряд замечательных соприкасающихся поверхностей Дарбу. На первом месте следует поставить знакомую уже нам поверхность Ли [23], затем каноническую поверхность второго порядка Вильчинского [24] и поверхность Фубини [25].

Если в трех точках $M$, $M'$, $M''$ одной асимптотической *и* провести касательные к асимптотическим линиям второго семейства $v$, то эти три прямые определят поверхность второго порядка. В пределе, когда точки $M'$ и $M''$ совпадут с точкой $M$, эта поверхность обратится в поверхность Ли. Эту идею обобщил Клобучек и Бомпиани [26]; они построили таким же образом соприкасающуюся поверхность второго порядка, исходя из любой кривой $L$ на поверхности. В зависимости от выбора линии $L$ можно получить таким образом любую поверхность Дарбу.

Зададимся на поверхности $(M)$ некоторой линией $L$:

$$v=\varphi(u); \tag{20}$$

возьмем на ней три точки $M$, $M'$, $M''$, проведем через эти точки касательные, например, к асимптотической $v$ и будем искать поверхность второго порядка $Q$, которая содержала бы эти три касательные. Предельное положение этой поверхности, когда точки $M'$ и $M''$, двигаясь по линии $L$, совпадают с точкой $M$, и есть поверхность $Q_v$ Бомпиани-Клобучека.

Мы будем искать ее тем же методом, которым мы нашли в главе второй поверхность Ли.

Пусть в произвольной системе координат $(P^i)$ уравнение искомой поверхности имеет вид:

$$\sum c_{ik}P^iP^k=0. \tag{21}$$

Мы его запишем коротко, опуская индексы, в виде:

$$\sum cPP=0.$$

Так как эта поверхность проходит через касательную к асимптотической $v$, то ребро $MM_2$ лежит на ней; следовательно, уравнение удовлетворится тождественно при всяком значении параметра $t$, если положить

$$P=M+tM_2.$$

Отсюда сейчас же следуют три равенства:

$$\left.\begin{aligned}&\sum cMM = 0,\\ &\sum cMM_2 = 0,\\ &\sum cM_2M_2 = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (2$$

На той же поверхности лежит ребро $M'M_2'$, которое можно провест
если передвинуть тетраэдр в точку $M'$.

Составляя разность двух уравнений (21), написанных для точек с к
ординатами $P' = M' + tM_2'$ и $P = M + tM_2$, и деля, например, на разнос
значений параметра $u$ в точках $M$ и $M'$, мы получим:

$$\sum \frac{c\left(M' + tM_2'\right)\left(M' + tM_2'\right) - c\left(M + tM_2\right)\left(M + tM_2\right)}{u' - u}.$$

В пределе при $u' \longrightarrow u$ мы получим, как и ранее, в главе второ
производную, но теперь эта производная берется по $u$ в предположени
что параметр $v$ тоже меняется, будучи связан с $u$ при помощи ур
нения (20).

Итак, диференцируем в этом предположении при постоянных $c$
уравнения (22). Обращаясь к таблице (16) и принимая во внимание у
полученные уравнения, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}&\sum cMM_1 = 0,\\ &\sum cM_1M_2 + \sum cMM_3 = 0,\\ &\sum cM_2M_3 + v'\gamma \sum cM_1M_2 = 0,\end{aligned}\right\} \qquad (2$$

где $v' = \dfrac{dv}{du}$ есть производная, полученная диференцированием ур
нения (20).

Совершенно так же, диференцируя еще раз уравнение (23) при п
стоянных коэфициентах $c_{ik}$, считая, попрежнему, что $v$ связано с $u$ уравн
нием (20), можно получить в пределе условия, что поверхность (21) пр
ходит через ребро $M''M_2''$, проведенное в точке $M''$.

Принимая во внимание предыдущие равенства, мы получим:

$$\left.\begin{aligned}&\sum cM_1M_1 = 0,\\ &\sum cM_1M_3 + v' \sum cM_2M_3 = 0,\end{aligned}\right\} \qquad (24$$

$$\begin{aligned}&\left(a_3^1 - a_2^0\right)\sum cM_1M_2 + \sum cM_3M_3 +\\ &+ v'\left[\left(b_3^1 - b_2^0\right)\sum cM_1M_2 - 2b\sum cM_2M_3 + 2\gamma\sum cM_1M_3 + \frac{\partial\gamma}{\partial u}\sum cM_1M_2\right] +\\ &+ v'^2\left[\frac{\partial\gamma}{\partial v}\sum cM_1M_2 + \gamma\sum cM_2M_3\right] + v''\gamma\sum cM_1M_2 = 0. \qquad (24\end{aligned}$$

Примем теперь за координатный тетраэдр наш тетраэдр $(M, M, M_2, M$
тогда каждая из точек $M_i$ будет иметь только одну $i$-ю координат



равную единице, а все остальные обратятся в нуль и уравнения (22), (23), $(24_{1,2})$ примут вид:

$$c_{00} = 0, \quad c_{02} = 0, \quad c_{22} = 0, \quad c_{01} = 0, \quad c_{11} = 0, \quad c_{12} + c_{03} = 0,$$

$$c_{23} + v'\gamma c_{12} = 0, \quad c_{13} + v'c_{23} = 0,$$

$$\begin{aligned}&c_{33} + c_{12}\left[a_3^1 - a_2^0 + v'\left(b_3^1 - b_2^0\right) + v'\gamma_u + v'^2\gamma_v + v''\gamma\right] +\\ &+ c_{23}\left[-2bv' + v'^2\gamma\right] + 2v'\gamma c_{13} = 0.\end{aligned}$$

Полагая

$$c_{12} = 1,$$

получим уравнение искомой поверхности $Q_v$ в форме:

$$\begin{aligned}&xy - z - v'\gamma yz + v'^2\gamma xz =\\ &= \frac{1}{2}z^2\left[a_3^1 - a_2^0 + v'\left(b_3^1 - b_2^0\right) + v'\gamma_u +\right.\\ &\left. + v'^2\gamma\left(2b + \frac{\partial \ln \gamma}{\partial v}\right) + v'^3\gamma^2 + v''\gamma\right]. \qquad (25)\end{aligned}$$

Если за координатный тетраэдр принять нормальный тетраэдр, построенный на директрисах, с компонентами (I), то уравнение (25) примет вид

$$xy - z - v'\gamma yz + v'^2\gamma xz = \frac{1}{2}z^2\left(v'\gamma_u + v'^2\gamma\,\frac{\partial \ln \beta\gamma}{\partial v} + v'^3\gamma^2 + v''\gamma\right). \qquad (25')$$

Уравнение второй асимптотической поверхности $Q_u$, построенной на касательных к линиям $u$, напишется по аналогии заменой $x$ на $y$ и $u$ на $v$.

**§ 7. Пучок поверхностей Дарбу.** Обе поверхности $Q_u$ и $Q_v$, очевидно, — соприкасающиеся поверхности второго порядка, ибо уравнение (25) входит в общую схему уравнения (5), но не являются еще поверхностями Дарбу. Сравнение уравнения (25′) с уравнением (8′) показывает, что поверхность Бомпиани (и та и другая) обратится в поверхность Дарбу, если $v' = 0$ в точке $M$, т. е. если кривая $L$ касается асимптотической линии. При этом вторая производная $v''$ может сохранять произвольную величину и, следовательно, получаемая поверхность

$$xy - z = \frac{1}{2}z^2\left(a_3^1 - a_2^0 + v''\gamma\right) \qquad (26)$$

или относительно тетраэдра $(A)$:

$$xy - z = \frac{1}{2}z^2 v''\gamma \qquad (26')$$

— произвольная поверхность Дарбу. Обратно, всякую поверхность Дарбу можно, очевидно, получить таким способом.

Нетрудно заметить, что кривая $L$ имеет теперь в точке $M$ ту же соприкасающуюся плоскость, как и асимптотическая $u$.

Действительно, соприкасающейся плоскостью асимптотической служит касательная плоскость к поверхности

$$(MM_uM_{uu}) = \beta\,(MM_uM_v).$$

Диференцируя вдоль линии $L$, мы получим для точки $M$ в силу $v'=0$

$$\frac{dM}{du} = M_u + M_v v' = M_u,$$

$$\frac{d^2M}{du^2} = M_{uu} + 2M_{uv}v' + M_{vv}v'^2 + M_v v'' = M_{uu} + M_v v'',$$

откуда

$$\left(M\frac{dM}{du}\frac{d^2M}{du^2}\right) = (M, M_u, M_{uu}+M_v v'') = (\beta + v'')(MM_uM_v).$$

Отношение

$$\left(M\frac{dM}{du}\frac{d^2M}{du^2}\right):(MM_uM_{uu}) = \frac{\beta+v''}{\beta} \qquad (27)$$

есть проективный инвариант касания двух кривых. Самый вид выражения (27) показывает, что оно не меняется при проективном преобразовании пространства, не зависит от нормирования координат $M$ или от выбора параметра $u$ при условии, конечно, что новое нормирование или замена переменного $u$ происходит одновременно для обеих кривых. Ему нетрудно дать геометрическое толкование.

Спроектируем обе кривые на их общую соприкасающуюся плоскость $MM_1M_2$. Пусть произвольная прямая $M_2N$ пересекает проекцию асимптотической $u$ в точке $N_1$, проекцию линии $L$ в точке $N_2$ и их общую касательную — в точке $N$. Координаты $N_1$ и $N_2$ получаются, если в разложениях

$$\left.\begin{array}{l} M + M_u du + \frac{1}{2} M_{uu}du^2+\dots,\\ M+M_u du + \frac{1}{2}(M_{uu}+M_v v'')du^2+\dots\end{array}\right\} \qquad (28)$$

по координатам вершин тетраэдра $M, M_1, M_2, M_3$ отбросить члены, содержащие $M_3$. Сложное отношение четырех точек $(M_2, N, N_1, N_2)$ сохранится, если эту четверку точек спроектировать из вершины $M$ на прямую $M_1M_2$. При этом точка $N$ перейдет в точку $M_1$, а координаты проекций $N_1$ и $N_2$ получатся, если в разложениях (28) отбросить еще члены, содержащие $M$. Нетрудно заметить, что сложное отношение четырех точек

$$\left(M_2, M_1, M_1du+\frac{1}{2}\beta M_2du^2+\dots, M_1du+\frac{1}{2}(\beta+v'')M_2du^2+\dots\right)$$

в своей главной части равно инварианту (27).

Наконец, если в плоскости $MM_1M_2$ выбрать неоднородные декартовы координаты $x$, $y$, так что $M^* = M + xM_1 + yM_2$, а за параметр $u$ выбрать абсциссу $x$, то

$$\left(M^*\frac{dM^*}{du}\frac{d^2M^*}{du^2}\right) = \begin{vmatrix}1&0&0\\x&1&0\\y&\frac{dy}{dx}&\frac{d^2y}{dx^2}\end{vmatrix} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

**Следовательно, инвариант (27) равен отношению вторых производных $\frac{d^2y}{dx^2}$, т. е. отношению радиусов кривизны (метрических) обеих кривых в общей точке.**



Проективный инвариант касания (27) носит название инварианта Смит-Мемке [27] (Smith-Mehmke). Обозначим его через $1+h$, тогда

$$v'' = h\beta, \qquad (29)$$

и уравнение (26) примет вид:

$$xy - z = \frac{1}{2} z^2(a_3^1 - a_2^0 + h\beta\gamma). \qquad (30)$$

Обращаясь к уравнению поверхности в тангенциальных координатах и, следовательно, к таблице компонент $(16_1)$, мы получим для каждой кривой $L$ еще две асимптотические поверхности второго порядка. Если линия $L$ касается асимптотической, то уравнение поверхности двойственной поверхности (30) получится заменой $a_3^1$ на $a_2^0$, $a_2^0$ на $a_3^1$ и изменением знака $\beta$ и $\gamma$. При этом инвариант $h$ тоже изменит знак, ибо $v''$ сохранится, а $\beta$ меняет знак. Мы получаем таким образом:

$$\xi\eta - \zeta + \frac{1}{2}\zeta^2(a_3^1 - a_2^0 + h\beta\gamma) = 0. \qquad (31)$$

Уравнение (31) связывает координаты $\xi$, $\eta$, $\zeta$ касательной плоскости искомой поверхности. Помня условия расположения точки $(x, y, z)$ в плоскости $(\xi\ \eta\ \zeta)$ [см. уравнение $(18_1)$ на стр. 80]

$$z - \xi y - \eta x + \zeta = 0, \qquad (32)$$

приходим к заключению: как геометрическое место точек, поверхность (31) есть огибающая семейства плоскостей (32), где параметры $\xi$, $\eta$, $\zeta$ связаны соотношением (31).

Диференцируя (32) по $\xi$ и по $\eta$ и исключая производные $\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}$, получим:

$$\xi = x[1-\zeta(a_3^1-a_2^0+h\beta\gamma)], \qquad (32_1)$$

$$\eta = y[1-\zeta(a_3^1-a_2^0+h\beta\gamma)]. \qquad (32_2)$$

Исключая $\xi$, $\eta$, $\zeta$ из уравнений (31), (32), $(32_1)$, $(32_2)$, получим уравнение поверхности (31) в координатах точки снова в виде:

$$xy - z = \frac{1}{2} z^2(a_3^1 - a_2^0 + h\beta\gamma). \qquad (30)$$

Таким образом для каждой поверхности Дарбу с определенным значением инварианта $h$ имеется двойственная поверхность.

Число $h$ называется индексом (Чех [28]) поверхности Дарбу. Двойственная поверхность отличается знаком индекса. Обе поверхности совпадают, т. е. поверхность Дарбу будет сама себе двойственна, если

$$h = 0,$$

но в таком случае

$$v'' = 0,$$

т. е., если линия $L$ имеет с асимптотической $u$ касание второго порядка.

В частности за линию $L$ можно принять саму асимптотическую линию. Уравнение поверхности $Q_u$ примет вид:

$$xy - z = \frac{1}{2} z^2 (a_3^1 - a_2^0). \tag{33}$$

Следовательно, полученная поверхность есть соприкасающаяся поверхность второго порядка Ли. Только поверхность Ли сама себе двойственна в построении Бомпиани. Этим она выделяется из всех поверхностей Дарбу; поэтому она занимает совершенно исключительное место в проективной теории поверхности. В частности соответствие полюсов и полярных плоскостей относительно поверхности Ли является таким же основным коррелятивным соответствием в данной точке поверхности, как соприкасающаяся нулевая система для кривой.

Естественно, что именно эту поверхность Дарбу мы положили в основу выбора автополярного тетраэдра, т. е. наш нормальный тетраэдр был выбран так, чтобы грань $M_1 M_2 M_3$ касалась поверхности Ли и вершина $M_3$ являлась точкой касания.

Уравнение (33) поэтому не содержит члена с квадратом $z$, и, следовательно,

$$a_3^1 = a_2^0.$$

**§ 8. Поверхности Вильчинского и Фубини.** Для всякого постоянного значения $h$ мы имеем ту или другую каноническую поверхность Дарбу:

1) $h = 0$ — поверхность Ли,
2) $h = -1$ — поверхность Вильчинского-Бомпиани,
3) $h = -\frac{1}{3}$ — поверхность Фубини,
4) $h = \infty$ — дважды взятая касательная плоскость.

По формулам (28) § 7, полагая $v'' = h\beta$, получим координаты точки $M'$ кривой $L$, соседней с точкой $M$:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M} + \mathbf{M}_u\, du + \frac{1}{2}(\mathbf{M}_{uu} + h\beta \mathbf{M}_v)\, du^2 + \ldots =$$

$$= \mathbf{M}(1 + a\, du + \ldots) + \mathbf{M}_1 (du + \ldots) + \mathbf{M}_2 \left[\frac{1}{2}\beta(1+h)\, du^2 + \ldots\right] + \ldots$$

Следовательно, полагая $du = \alpha$, мы получим неоднородные координаты этой точки в виде:

$$x = \alpha + \ldots,$$
$$y = \frac{1}{2}\beta(1+h)\alpha^2 + \ldots,$$
$$z = xy - \frac{1}{3}(\beta x^3 + \gamma y^3) + \ldots =$$
$$= \frac{1}{2}\beta(1+h)\alpha^3 - \frac{1}{3}\beta\alpha^3 + \ldots =$$
$$= \frac{1}{2}\beta\left(\frac{1}{3} + h\right)\alpha^3 + \ldots$$

Последняя формула получена с помощью разложения (9). Мы видим,



что касательная плоскость $z = 0$ содержит точку $M'$ до членов второго порядка включительно, т. е. соприкасающейся плоскостью является касательная плоскость поверхности.

Соприкасающаяся плоскость неопределенна, если

$$h = -1.$$

В этом случае кривая $L$ имеет точку перегиба (касание второго порядка с касательной).

Итак, каноническая поверхность Вильчинского есть поверхность Бомпиани, которая соответствует кривой, имеющей в этой точке точку перегиба. Нетрудно заметить, что такая кривая всегда касается асимптотической линии ($v' = 0$), причем безразлично, какой асимптотической линии она касается.

Плоскость $z = 0$ имеет касание третьего порядка, и, следовательно, кривая $L$ имеет в точке $M$ стационарную соприкасающуюся плоскость, если

$$h = -\frac{1}{3}.$$

Следовательно, поверхность Фубини есть поверхность Бомпиани, соответствующая кривой, имеющей касательную плоскость поверхности стационарной соприкасающейся плоскостью.

Если принять за основу каноническую поверхность Вильчинского, в таблице (16) надо положить

$$a_3^1 - a_2^0 = \beta\gamma;$$

если координатный тетраэдр автополярен относительно поверхности Фубини, то

$$a_3^1 - a_2^0 = \frac{1}{3}\beta\gamma.$$

Вообще, если за основную поверхность выбрать поверхность с индексом $h$, то

$$a_3^1 - a_2^0 = -\beta\gamma h,$$
$$b_3^2 - b_1^0 = -\beta\gamma h.$$

**§ 9. Проблема проективной нормали.** Нетрудно заметить, что наложенными до сих пор условиями координатный тетраэдр еще не определен: к выбранной канонической поверхности Дарбу $Q$ можно построить не один автополярный тетраэдр. Сохраняя первые две оси касательными к асимптотическим линиям, мы можем выбрать совершенно произвольно третью ось. Точка пересечения ее с избранной поверхностью Дарбу $Q$ будет тогда вершиной $M_3$, и касательная плоскость к поверхности $Q$ в точке $M_3$ — гранью $M_1 M_2 M_3$. Таким образом координатный тетраэдр вполне определен, если выбрана ось $MM_3$.

Точка $M_3$ — единственная вершина тетраэдра, не лежащая в касательной плоскости, и, следовательно, ось $MM_3$, на которой она лежит, играет такую же роль в проективном определении поверхностей, как нормаль в метрической геометрии, где она является единственной осью координатного трехгранника, не лежащей в касательной плоскости. Нормаль в метрической геометрии вполне определяется окрестностью рассматриваемой точки (бесконечно близкие точки) первого порядка — первыми производными от текущих координат. Иначе дело обстоит в проективной геометрии. Мы видели, что даже и члены третьей степени в разложении $z$ не определяют прямой $MM_3$. Это естественно: проективная группа значительно шире группы эвклидовых движений, а потому ее инварианты должны быть более высокого порядка; но и окрестность четвертого порядка не определяет одной единственной прямой. Мы имеем целый ряд замечательных прямых, которые можно с успехом принять за третью ось тетраэдра.

Мы имеем директрису Вильчинского, ребро Грина, ось Чеха и проективную нормаль Фубини (= псевдонормаль Грина). Проективная нормаль Фубини обладает тем преимуществом, что развертывающиеся поверхности описываемой ею конгруэнции пересекают поверхность по сопряженной системе, которая, очевидно, является проективным аналогом линий кривизны. Это — не единственная прямая, обладающая этим свойством, но в известном смысле наиболее простая. Кроме того, она является осью пучка соприкасающихся плоскостей геодезических линий Фубини (= экстремали квадратичной формы) подобно тому, как соприкасающиеся плоскости всех геодезических линий метрической геометрии проходят через нормаль. Однако в других отношениях более замечательны директрисы Вильчинского.

К этому вопросу мы еще вернемся, а сейчас покажем, что, преобразуя координатный тетраэдр, можно придать любые значения трем из пяти коэфициентов, стоящих при членах четвертого порядка в разложении $z$ по степеням $x$, $y$.

Общее проективное преобразование неоднородных координат, определяется дробнолинейными функциями координат, но так как касательная плоскость ($z = 0$) переходит в касательную плоскость ($\bar{z} = 0$) и касательные к асимптотическим линиям тоже остаются на месте [($x = 0$, $z = 0$) переходит в $\bar{x} = 0$, $\bar{z} = 0$)], то формулы преобразования можно написать в виде:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{p_1 x + r_1 z}{1 + px + qy + rz}, \\ \bar{y} &= \frac{q_2 y + r_2 z}{1 + px + qy + rz}, \\ \bar{z} &= \frac{r_3 z}{1 + px + qy + rz}. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Так как члены второго и третьего порядка не должны меняться, то после преобразования мы должны получить:

$$\bar{z} = \bar{x}\bar{y} - \frac{1}{3}(\beta \bar{x}^3 + \gamma \bar{y}^3) + \frac{1}{4!}(\bar{a}_{40}\bar{x}^4 + \ldots) + \ldots$$

Внося сюда $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, по формулам преобразования (34), получим:

$$r_3 z = \frac{(p_1 x + r_1 z)(q_2 y + r_2 z)}{1 + px + qy + rz} - \frac{1}{3}\frac{\beta(p_1 x + r_1 z)^3 + \gamma(q_2 y + r_2 z)^3}{(1 + px + qy + rz)^2} + \ldots$$



Разложим по формуле бинома Ньютона:

$$\frac{1}{1 + px + qy + rz} = 1 - (px + qy + rz) + (px + qy + rz)^2 + \ldots$$

$$(1 + px + qy + rz)^{-2} = 1 - 2(px + qy + rz) + \ldots,$$

внесем в предыдущее уравнение $z$ по формуле (9) и сравним члены с одинаковыми степенями $x$ и $y$. Мы получим:

$$p_1 = \varepsilon, \quad q_2 = \varepsilon^2, \quad r_3 = 1, \quad r_1 = q\varepsilon, \quad r_2 = p\varepsilon^2,$$

$$\begin{aligned} \varepsilon\bar{a}_{40} &= a_{40} - 8p\beta, \\ \varepsilon^2\bar{a}_{31} &= a_{31} + 4q\beta, \\ \bar{a}_{22} &= a_{22} + 4(r - pq), \\ \varepsilon\bar{a}_{13} &= a_{13} + 4p\gamma, \\ \varepsilon^2\bar{a}_{04} &= a_{04} - 8q\gamma, \end{aligned} \tag{34'}$$

где $\varepsilon$ есть кубический корень из единицы.

Мы можем, следовательно, выбором $p$, $q$, $r$ привести к нулю $\bar{a}_{31}$, $\bar{a}_{22}$, $\bar{a}_{13}$ или придать им любое значение.

Кроме того, меняя точку единиц, мы можем еще два коэфициента, например $\beta$ и $\gamma$, привести к единице (если они не равнялись нулю).

Таким образом получается каноническое разложение Вильчинского [29]:

$$z = xy - \frac{x^3 + y^3}{3} + Ix^4 + Jy^4 + \ldots \tag{35}$$

$I$ и $J$, очевидно, зависят уже только от самой поверхности, ибо тетраэдр более меняться не может, если не считать произвола в выборе кубического корня из единицы. Это — два инварианта Вильчинского.

Координатный тетраэдр автополярен по отношению к поверхности второго порядка Вильчинского.

Нормаль в метрической геометрии вполне определяется касательной плоскостью поверхности; если совместить соответствующие точки двух поверхностей так, чтобы касательные плоскости совпали, то и нормали совпадут. Иначе, если перемещать (вращать) поверхность $S$ так, чтобы точка $M$ оставалась на месте и касательная плоскость двигалась сама в себе, то нормаль останется на месте.

В проективной геометрии мы не найдем аналога этому свойству нормали.

Если закрепить члены третьего порядка, то допустимые преобразования (34) сдвинут всякую прямую, проходящую через точку $M$ поверхности.

Если закрепить и члены четвертого порядка, например в виде разложения Вильчинского (35), то поверхность вообще не допускает преобразования и, следовательно, все прямые сразу станут неподвижны. Несколько иначе дело обстоит для поверхностей

$$I = J.$$

Эти поверхности допускают преобразование

$$\bar{x}=y,\quad \bar{y}=x,\quad \bar{z}=z,$$

меняющее оси $x$ и $y$.

При этом прямая

$$x=rz,\quad y=sz$$

перейдет в прямую

$$\bar{x}=s\bar{z},\quad \bar{y}=r\bar{z},$$

которая не совпадает с предыдущей. Из всех прямых останутся на месте только прямые

$$x=rz,\quad y=rz.$$

Это — прямые канонического пучка [30].

ГЛАВА ПЯТАЯ

# КАНОНИЧЕСКИЙ ПУЧОК

**§ 1. Пара взаимных конгруэнций Грина.** Обратимся теперь к выбору третьей оси $MM_3$ тетраэдра. Грин [31] ввел понятие пары конгруэнций, находящихся в отношении $R$ к данной системе линий $N$ на поверхности. Луч $l_1$ одной конгруэнции (первой) проходит через точку $M$ поверхности и не лежит в касательной плоскости, соответствующий луч $l_2$ второй конгруэнции лежит в касательной плоскости $MM_1M_2$ и не проходит через точку $M$. Эти два луча связаны, кроме того, с системой (два семейства) линий $N$, именно: пусть $t_1$ и $t_2$ — касательные к двум линиям $C_1$ и $C_2$ системы $N$, проходящим через точку $M$. Проведем через первый луч $l_1$ и соответственно через $t_1$ и $t_2$ две плоскости $\Pi_1$ и $\Pi_2$. Касательные к линиям первого семейства $(C_1)$ в точках кривой $C_2$ образуют линейчатую поверхность $R_1$. Если эта поверхность не развертывающаяся (т. е. система линий $N$ не сопряжена), то плоскость $\Pi_1$, проходящая через одну из образующих $t_1$ поверхности $R_1$, касается ее в какой-либо точке $P_1$. Совершенно так же плоскость $\Pi_2$ касается поверхности $R_2$, образованной касательными к семейству линий $(C_2)$ вдоль линии $C_1$, в точке $P_2$. Прямая $P_1P_2$ и является лучом $l_2$ второй конгруэнции.

Таким образом определение Грина может относиться к любой системе линий $N$ на поверхности, если только два семейства линий $(C_1)$ и $(C_2)$ не сопряжены. Наиболее интересен тот случай, когда система $N$ образована двумя семействами асимптотических линий. Тогда поверхность Ли касается линейчатой поверхности $R_1$ вдоль образующей $t_1$ и линейчатой поверхности $R_2$ вдоль прямой $t_2$. Следовательно, точки $P_1$ и $P_2$ суть точки касания плоскостей $\Pi_1$ и $\Pi_2$ с поверхностью Ли, и прямая $l_2=(P_1P_2)$ взаимно полярна прямой $l_1=(\Pi_1, \Pi_2)$ в соответствии полюсов и поляр поверхности $Q$, т. е., коротко говоря, $l_1$ и $l_2$ соответствуют друг другу в полярном соответствии в точке $M$ поверхности $(M)$.

Конгруэнции $(l_1)$ и $(l_2)$ называются взаимными.

Возьмем какую-нибудь точку $P$ на луче $l_1$ с местными координатами $(x_i)$. Когда точка $M$ будет перемещаться по поверхности, описывая с изменением $u, v$ некоторую линию $L$, луч $l_1$ опишет линейчатую поверхность $R$ первой конгруэнции; точка $P$ опишет линию $C$, лежащую на поверхности $R$. Касательная плоскость $\Pi$ к поверхности $R$ в точке $P$, очевидно, содержит образующую $l_1$ и касательную $P\,dP$ к линии $C$. Следовательно, эта касательная плоскость определяется матрицей

$$(\mathbf{M},\ \mathbf{P},\ d\mathbf{P}).$$

Плоскость становится неопределенной, если все миноры этой матрицы обращаются в нуль.

Тогда, очевидно,

$$d\mathbf{P} = \lambda \mathbf{M} + \nu \mathbf{P}, \tag{1}$$

где $\lambda$ и $\nu$ — какие-то функции, и уравнению удовлетворяют все одноименные координаты $\mathbf{M}^i$ и $\mathbf{P}^i$.

Уравнение (1) показывает, что касательная $\mathbf{P}d\mathbf{P}$ к линии $C$ совпадает с лучом $(\mathbf{M}, \mathbf{P})$. Следовательно, поверхность $R$ — развертывающаяся и $C$ — ребро возврата ее.

Точка $P$ в таком случае называется фокусом луча.

Если обозначим

$$\mathbf{P} = \mathbf{M}x_0 + \mathbf{M}_1 x_1 + \mathbf{M}_2 x_2 + \mathbf{M}_3 x_3,$$

то по формулам (16) главы четвертой

$$d\mathbf{P} = \mathbf{M}Dx_0 + \mathbf{M}_1 Dx_1 + \mathbf{M}_2 Dx_2 + \mathbf{M}_3 Dx_3,$$

где

$$\left.\begin{aligned} Dx_0 &= dx_0 + \omega_0^0 x_0 + \omega_1^0 x_1 + \omega_2^0 x_2 + \omega_3^0 x_3, \\ Dx_1 &= dx_1 + \omega_0^1 x_0 + \omega_1^1 x_1 + \omega_2^1 x_2 + \omega_3^1 x_3, \\ Dx_2 &= dx_2 + \omega_0^2 x_0 + \omega_1^2 x_1 + \omega_2^2 x_2 + \omega_3^2 x_3, \\ Dx_3 &= dx_3 + \omega_0^3 x_0 + \omega_1^3 x_1 + \omega_2^3 x_2 + \omega_3^3 x_3, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и

$$\omega_i^k = a_i^k du + b_i^k dv.$$

Внося эти значения в таблицу $\Pi = (\mathbf{M}, \mathbf{P}, d\mathbf{P})$ увидим, что тангенциальные координаты плоскости $\Pi$ относительно тетраэдра $(M, M_1, M_2, M_3)$ суть миноры матрицы

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ Dx_0 & Dx_1 & Dx_2 & Dx_3 \end{matrix} \right\|,$$

где величины $Dx_i$ определены формулами (2).

С изменением $x_i$, т. е. при перемещении точки $P$ вдоль луча $MP$, эти координаты меняются и, следовательно, касательная плоскость поворачивается около образующей, но если

$$Dx_i = \lambda x_i \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{3}$$

то все четыре минора равны нулю и касательная плоскость в точке $P(x_0, x_1, x_2, x_3)$ к выбранной поверхности $du : dv$ неопределенна (особая точка), а во всякой другой точке $P^*(x_0^*, x_1, x_2, x_3)$ к этой поверхности или в точке $P$ ко всякой другой линейчатой поверхности — одна и та же

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & \omega_0^1 & \omega_0^2 & \omega_0^3 \end{matrix} \right\|. \tag{4}$$



Уравнения (3) определяют отношение $du : dv$, которое соответствует развертывающимся поверхностям конгруэнции, ибо касательная плоскость касается поверхности вдоль всей образующей; оно определяет и точку $P(x_0, x_1, x_2, x_3)$ на луче — фокус луча. Так как при выполнении условий (3) точка $dP$ лежит, очевидно, на прямой $MP$, то кривая $P$, описываемая этой точкой на поверхности (D), очевидно, касается луча $MP$; кривая $P$ — ребро возврата поверхности.

В раскрытом виде уравнения (3) имеют вид:

$$\begin{aligned} dx_1 + \omega_1^1 x_1 + \omega_2^1 x_2 + \omega_3^1 x_3 &= -\omega_0^1 x_0 + \lambda x_1, \\ dx_2 + \omega_1^2 x_1 + \omega_2^2 x_2 + \omega_3^2 x_3 &= -\omega_0^2 x_0 + \lambda x_2, \\ dx_3 + \omega_1^3 x_1 + \omega_2^3 x_2 + \omega_3^3 x_3 &= -\omega_0^3 x_0 + \lambda x_3. \end{aligned}$$

Исключая $x_0$ и $\lambda$, получим:

$$\begin{vmatrix} dx_1 + \omega_1^1 x_1 + \omega_2^1 x_2 + \omega_3^1 x_3, & \omega_0^1, & x_1 \\ dx_2 + \omega_1^2 x_1 + \omega_2^2 x_2 + \omega_3^2 x_3, & \omega_0^2, & x_2 \\ dx_3 + \omega_1^3 x_1 + \omega_2^3 x_2 + \omega_3^3 x_3, & \omega_0^3, & x_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Так как $\omega_i^k = a_i^k\, du + b_i^k\, dv$, то это — уравнение второй степени относительно отношения диференциалов $du : dv$. Два корня этого уравнения определяют две поверхности $(D_1)$ и $(D_2)$, проходящие через луч $MP$, а в конгруэнции два семейства развертывающихся поверхностей конгруэнции. Эти два семейства могут быть действительными или мнимыми или могут совпасть. Каждому отношению $du : dv$ соответствует фокус на луче.

Следовательно, на каждом луче два фокуса — действительных, мнимых или совпадающих. Общие касательные плоскости ко всем линейчатым поверхностям в фокусе или, что то же, касательные плоскости развертывающихся поверхностей называются фокальными плоскостями.

Так как $(x_i)$ — однородные координаты и точка $P$ не лежит в плоскости $MM_1M_2$, то мы можем положить $x_3 = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$. Пользуясь таблицей (16) главы четвертой, мы напишем уравнение (5) в виде:

$$\begin{vmatrix} (x_u - ax + a_3^1)\, du + (x_v + bx + \gamma y + b_3^1)\, dv, & du, & x \\ (y_u + \beta x + ay + a_3^2)\, du + (y_v - by + b_3^2)\, dv, & dv, & y \\ (y - a)\, du + (x - b)\, dv, & 0, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(y_u + \beta x + 2ay - y^2 + a_3^2)\, du^2 - (x_v + 2bx + \gamma y - x^2 + b_3^1)\, dv^2 + \\ + (y_v - x_u + b_3^2 - a_3^1)\, du\, dv = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) определяет на поверхности (M) систему линий, по которым развертывающиеся поверхности первой конгруэнции $\Gamma_1$ пересекают поверхность. Американская школа называет их $\Gamma_1$ — линиями на поверхности.

Луч второй конгруэнции соответствует первому в основном полярном соответствии. Следовательно, если луч $l_1$ определяется двумя точками:

$$(1, 0, 0, 0) \quad \text{и} \quad (0, x, y, 1),$$

то луч $l_2$, как прямая полярная относительно поверхности

$$xy - z = 0,$$

есть пересечение двух плоскостей с теми же самыми тангенциальными координатами (1, 0, 0, 0) и (0, $x$, $y$, 1).

Пусть плоскость $p(x_i)$ есть касательная плоскость линейчатой поверхности $R$, содержащей луч $l_2$. Три плоскости (m, p, $d$p) определят точку касания ее. При выполнении условий (3) точка касания неопределенна; линейчатая поверхность развертывающаяся, но теперь величины $Dx_i$ должны вычисляться с помощью таблицы ($16_1$) главы четвертой. Следовательно, развертывающиеся поверхности конгруэнции определяются уравнением:

$$(y_u - \beta x + 2ay - y^2 + a_1^0)\,du^2 - (x_v + 2bx - \gamma y - x^2 + b_2^0)\,dv^2 + \\ + (y_v - x_u + b_1^0 - a_2^0)\,du\,dv = 0. \quad (7)$$

Фокальные плоскости первой конгруэнции всегда проходят через касательные к линиям (6). Действительно, координаты фокальной плоскости, которая соответствует развертывающейся поверхности $du:dv$, будут минорами матрицы (4):

$$y\,du - x\,dv, \quad -du, \quad dv, \quad 0,$$

откуда теорема непосредственно следует [1]). Впрочем, она вполне очевидна, ибо линии (6) суть линии пересечения развертывающихся поверхностей с поверхностью (M), а фокальные плоскости суть касательные плоскости развертывающихся поверхностей.

Совершенно так же получим, что фокусы второго луча всегда лежат на касательных к линиям (7).

**§ 2. Конгруэнция, сопряженная поверхности.** Обратимся теперь к выделению более замечательных конгруэнций $\Gamma$. Прежде всего по аналогии с нормалью метрической геометрии будем искать конгруэнции, сопряженные поверхности. По определению это — конгруэнции, развертывающиеся поверхности которых пересекают поверхность по сопряженной системе.

Так как поверхность (M) отнесена к асимптотическим линиям, то сопряженные направления отличаются только знаком отношения $du:dv$. Если два корня $du:dv$ уравнения (6) отличаются только знаком, то сумма их равна нулю и коэфициент при произведении $du:dv$ равен нулю. Следовательно, конгруэнции, сопряженные поверхности, определяются уравнением:

$$y_v - x_u + b_1^2 - a_3^1 = 0. \quad (8)$$

Мы имеем одно диференциальное уравнение на две неизвестных функции $x$ и $y$. Следовательно, одну из них можно выбрать произвольно.

[1]) Плоскость

$$(\mathrm{MM_1M_2})(y\,du - x\,dv) + (\mathrm{MM_1M_3})\,du + (\mathrm{MM_2M_3})\,dv,$$

очевидно, пересекает касательную плоскость $MM_1M_2$ по прямой

$$(\mathrm{M}, \mathrm{M_1}\,du + \mathrm{M_2}\,dv) = (\mathrm{M}, \mathrm{M_u}\,du + \mathrm{M_v}\,dv),$$

а это и есть касательная линии $du:dv$.



Таких конгруэнций бесчисленное множество. Для определения проективной нормали надо наложить новые требования, которые Фубини получил из совсем других соображений. На этом пути мы не получим определения проективной нормали.

Мы видим, что при выполнении условия (8) исчезает средний член и в уравнении (7). Значит, развертывающиеся поверхности второй конгруэнции тоже соответствуют сопряженной системе. Конгруэнция $\Gamma_2$ в таком случае гармонична поверхности $M$.

Следовательно, если первая конгруэнция сопряжена поверхности, то вторая, ей взаимная, гармонична поверхности.

Потребуем теперь, чтобы развертывающиеся поверхности обеих конгруэнций соответствовали друг другу. Тогда уравнения (6) и (7) должны быть равносильны и коэфициенты при одинаковых степенях $du$, $dv$ пропорциональны, но так как коэфициенты при произведении $du\,dv$ в обоих уравнениях равны, то и два других коэфициента тоже должны быть попарно равны и мы получаем, возвращаясь к однородным координатам $x_i$, два уравнения:

$$2\beta x_1 = (a_1^0 - a_3^2)\,x_3, \quad 2\gamma x_2 = (b_2^0 - b_3^1)\,x_3. \quad (9)$$

Эти уравнения определяют единственную линию $l_1$ — первую директрису Вильчинского; ей сопряженная — вторая директриса [32]. Если первую директрису Вильчинского принять за ось $MM_3$ нашего тетраэдра, как это мы сделали в главе второй, то в уравнение (9) надо внести $x = 0$, $y = 0$; мы снова получим:

$$a_1^0 = a_3^2, \quad b_2^0 = b_3^1.$$

**§ 3. Ребра Грина.** Спроектируем асимптотическую линию $u$ из вершины $M$ ребра $MM_3$ на касательную плоскость $MM_1M_2$. Уравнение проекций получается, очевидно, отбрасыванием четвертой координаты $M_3$ из уравнения кривой.

Будем искать коническое сечение, имеющее касание третьего порядка с нашей проекцией.

Пусть

$$\sum c_{ik}\mathrm{P}^i\mathrm{P}^k = 0, \quad (\mathrm{MM_1M_2P}) = 0,$$

где $\mathrm{P}^i$ — текущие координаты, или, опуская индексы:

$$\sum c\mathrm{PP} = 0, \quad (\mathrm{MM_1M_2P}) = 0 \quad (10)$$

суть уравнения поверхности второго порядка и плоскости $MM_1M_2$, т. е. уравнение конического сечения в плоскости $MM_1M_2$.

Так как второе уравнение — уравнение плоскости — удовлетворено тождественно для нашей проекции, то нам остается только подобрать коэфициенты $c_{ik}$ в первом уравнении так, чтобы поверхность второго порядка, а следовательно, и ее сечение плоскостью $MM_1M_2$, проходила через четыре бесконечно близких точки нашей проекции.

Итак, разлагаем координаты (M) как функции от $u$ в ряд по степеням приращения $du$ и сохраняем в разложении только те члены, которым соответствуют точки, лежащие в касательной плоскости $MM_1M_2$, постоянно отбрасывая четвертую координату $\mathrm{M_3}$. Если обозначить звадочкой значение получаемой производной в заданной точке, то мы должны внести в уравнение (10)

$$\mathrm{P}=\mathrm{M}+\mathrm{M}_u^{*}\,du+\frac{1}{2}\,\mathrm{M}_{uu}^{*}\,du^2+\ldots$$

и потребовать, чтобы свободный член и коэфициенты при первых трех степенях $du$ обращались в нуль. Это, очевидно, приведет нас к четырем уравнениям:

$$\sum c\mathrm{MM}=0,\quad \sum c\mathrm{MM}_u^{*}=0,\quad \sum c\,(\mathrm{M}_u^{*}\mathrm{M}_u^{*}+\mathrm{MM}_{uu}^{*})=0,$$
$$\sum c(\mathrm{MM}_{uuu}^{*}+3\mathrm{M}_u^{*}\mathrm{M}_{uu}^{*})=0,$$

которые можно получить также, диференцируя последовательно первое из этих уравнений при постоянных $c_{ik}$, пользуясь таблицей (16) главы четвертой и отбрасывая члены с $\mathrm{M}_3$.

Это приведет нас к уравнениям:

$$\sum c\mathrm{MM}=0,\quad \sum c\mathrm{MM}_1=0,\quad \sum c\,(\mathrm{M}_1\mathrm{M}_1+\beta\mathrm{MM}_2)=0,$$
$$\sum c\mathrm{M}_2\left[3\mathrm{M}_1+\mathrm{M}\left(\frac{\partial\ln\beta}{\partial u}+4a\right)\right]=0.$$

Эти формулы сохранят свою силу, как ни выбирать координатный тетраэдр. В частности, если за координатный тетраэдр принять тетраэдр $(M, M_1, M_2, M_3)$, то они примут вид:

$$c_{00}=0,\quad c_{01}=0,\quad c_{11}+\beta c_{02}=0,$$
$$3c_{12}+\left(\frac{\partial\ln\beta}{\partial u}+4a\right)c_{02}=0,$$

и уравнения (10) примут вид:

$$3\beta x^2+2\left(\frac{\partial\ln\beta}{\partial u}+4a\right)xy-6y+c_{22}y^2=0,\ z=0. \qquad (11)$$

Последний коэфициент $c_{22}$ остается произвольным, ибо коническое сечение определяется пятью точками и, следовательно, соприкасающееся коническое сечение имеет с кривой касание четвертого порядка. Мы получили, следовательно, пучок конических сечений, имеющих касание третьего порядка с проекцией линии $u$ на касательную плоскость. Заметим, кроме того, что тот же результат мы получили бы, проектируя линию $u$ из любой другой точки ребра $MM_3$. Действительно, если в таблицу (16) главы четвертой вместо точки $M_3$ внести точку $\mathrm{N}_3=M_3+\lambda M$, то в первых трех строчках изменится только компонента $a_3^0$, но она не входит в уравнение (11).

Коническое сечение (11) при любом значении $c_{22}$ устанавливает соответствие полюсов и поляр в плоскости $MM_1M_2$. Полюсу $(\bar{x}, \bar{y})$ соответствует поляра

$$x\left[3\beta\bar{x}+\left(\frac{\partial\ln\beta}{\partial u}+4a\right)\bar{y}\right]+y\left[\left(\frac{\partial\ln\beta}{\partial u}+4a\right)\bar{x}+c_{22}\bar{y}-3\right]-3\bar{y}=0.$$



Каково бы ни было $c_{22}$, касательной к асимптотической $v$

$$x=0$$

соответствует один и тот же полюс:

$$\bar{x}=\frac{3}{\dfrac{\partial\ln\beta}{\partial u}+4a},\quad \bar{y}=0,$$

который всегда лежит на касательной к линии $u$.

Совершенно так же получим на касательной к линии $v$ полюс:

$$\bar{x}=0,\quad \bar{y}=\frac{3}{\dfrac{\partial\ln\gamma}{\partial v}+4b}$$

ребра $MM_2$ относительно конических сечений, имеющих касание третьего порядка с проекцией асимптотической $v$ на касательную плоскость из любой точки ребра $MM_3$*.

Преобразуем координатный тетраэдр $(M,M_1,M_2,M_3)$. На стр. 89 мы получили формулы (34), (34') § 9 гл. IV общего проективного преобразования, не меняющего членов до третьего порядка включительно в разложении поверхности, а следовательно, сохраняющего вид таблицы (16) главы четвертой.

Это преобразование в однородных координатах можно записать в виде:

$$\bar{x}_0=x_0+px_1+qx_2+rx_3,\quad \bar{x}_1=\varepsilon(x_1+qx_3),$$
$$\bar{x}_2=\varepsilon^2(x_2+px_3),\quad \bar{x}_3=x_3.$$

Если оно переводит вершины тетраэдра $(M,M_1,M_2,M_3)$ в положение $(M,\overline{M}_1,\overline{M}_2,\overline{M}_3)$, то, очевидно,

$$\mathrm{M}x_0+\mathrm{M}_1x_1+\mathrm{M}_2x_2+\mathrm{M}_3x_3=\mathrm{M}\bar{x}_0+\overline{\mathrm{M}}_1\bar{x}_1+\overline{\mathrm{M}}_2\bar{x}_2+\overline{\mathrm{M}}_3\bar{x}_3$$

или, полагая $\varepsilon=1$,

$$\mathrm{M}x_0+\mathrm{M}_1x_1+\mathrm{M}_2x_2+\mathrm{M}_3x_3=\mathrm{M}(x_0+px_1+qx_2+rx_3)+$$
$$+\overline{\mathrm{M}}_1(x_1+qx_3)+\overline{\mathrm{M}}_2(x_2+px_3)+\overline{\mathrm{M}}_3x_3,$$

откуда, сравнивая коэфициенты при $x_i$, получим

$$\mathrm{M}_1=\overline{\mathrm{M}}_1+p\mathrm{M},\quad \mathrm{M}_2=\overline{\mathrm{M}}_2+q\mathrm{M},\quad \mathrm{M}_3=\overline{\mathrm{M}}_3+q\overline{\mathrm{M}}_1+p\overline{\mathrm{M}}_2+r\mathrm{M}.$$

Следовательно, если проектировать асимптотические $u$ и $v$ на касательную плоскость из точек прямой $M\overline{M}_3$, то два соприкасающихся конических сечения будут иметь полюсами, соответственно для той и другой асимптотической касательной, точки (в неоднородных координатах):

$$\left(\frac{3}{\dfrac{\partial\ln\beta}{\partial u}+4a+3p},\ 0,\ 0\right)\quad\text{и}\quad\left(0,\ \frac{3}{\dfrac{\partial\ln\gamma}{\partial v}+4b+3q},\ 0\right).$$

Так как новые вершины координатного тетраэдра $M, \bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$ связаны со старыми уравнениями:

$$\bar{M}_1 = M_1 - pM, \quad \bar{M}_2 = M_2 - qM,$$
$$\bar{M}_3 = M_3 - qM_1 - pM_2 + (2pq - r)M,$$

то, очевидно, новые компоненты $\bar{a}_i^k$, $\bar{b}_i^k$ связаны со старыми соотношениями:

$$\bar{a} = a + p, \quad \bar{b} = b + q.$$

Следовательно, координаты полюсов, связанных с прямой

$$(\bar{M}, \quad \bar{M}_3 + q\bar{M}_1 + p\bar{M}_2), \tag{12}$$

равны

$$\left(\frac{3}{\frac{\partial \ln \beta}{\partial u} + 4\bar{a} - p}, 0, 0\right), \quad \left(0, \frac{3}{\frac{\partial \ln \gamma}{\partial v} + 4\bar{b} - q}, 0\right). \tag{13}$$

Эти рассуждения устанавливают соответствие между двумя прямыми: между прямой (12), проходящей через точку $M$ поверхности, и прямой, лежащей в касательной плоскости поверхности и определяемой двумя точками (13).

С другой стороны, между прямыми связки с центром в $M$ и прямыми плоского поля $MM_1M_2$ уже установлено полярное соответствие по отношению к поверхности Ли или даже к любой поверхности Дарбу, ибо для этих прямых всякая соприкасающаяся поверхность Дарбу устанавливает одно и то же полярное соответствие.

Действительно, уравнение поверхности Дарбу (8) главы четвертой в однородных координатах имеет вид:

$$2(x_1x_2 - x_0x_3) + \nu x_3^2 = 0.$$

Полярная плоскость, соответствующая полюсу $(x_i')$, определяется уравнением:

$$x_1x_2' + x_2x_1' + x_3(-x_0' + \nu x_3') - x_0x_3' = 0.$$

Произвольной точке $(q, p, 1, r)$ прямой (12) соответствует пучок полярных плоскостей

$$px_1 + qx_2 - x_0 + (\nu - r)x_3 = 0,$$

где $\nu - r$ можно рассматривать как произвольный параметр.

Ось пучка определяется двумя уравнениями, которые не содержат $\nu$:

$$z = 0, \quad px + qy = 1. \tag{14}$$

Когда же прямые, соответствующие в соответствии (12, 13), полярно сопряжены между собой?



В таком случае обе точки (13) должны удовлетворять уравнениям (14). Это дает:

$$4p = 4a + \frac{\partial \ln \beta}{\partial u}, \quad 4q = 4b + \frac{\partial \ln \gamma}{\partial v}.$$

Здесь мы уже опустили черту над компонентами $a_i^k$, $b_i^k$, предполагая, что наши прямые отнесены к первоначальному тетраэдру.

Таким образом существует только единственная пара прямых

$$\left.\begin{aligned}&\left[M, \; M_1\left(b + \frac{1}{4}\frac{\partial \ln \gamma}{\partial v}\right) + M_2\left(a + \frac{1}{4}\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}\right) + M_3\right],\\ &\left[M_1 + M\left(a + \frac{1}{4}\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}\right), \; M_2 + M\left(b + \frac{1}{4}\frac{\partial \ln \gamma}{\partial v}\right)\right],\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

сопряженных и в том и в другом соответствии.

Эти прямые носят название ребер Грина [33].

Если принять ребра Грина за оси $MM_3$ и $M_1M_2$ нашего тетраэдра, то компоненты его движений будут удовлетворять условиям:

$$a = -\frac{1}{4}\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}, \quad b = -\frac{1}{4}\frac{\partial \ln \gamma}{\partial v}. \tag{16}$$

Это условие и выбор соприкасающихся поверхностей Дарбу вполне определяют тетраэдр, как мы это увидим дальше.

**§ 4. Огибающая соприкасающихся плоскостей семейства кривых.** Другие замечательные прямые получаются, если рассматривать огибающую соприкасающихся плоскостей того или другого семейства кривых на поверхности.

Соприкасающаяся плоскость любой кривой

$$v = \varphi(u) \tag{17}$$

определяется тремя точками $M$, $dM$ и $d^2M$, где диференцирование производится по кривой (17).

Пользуясь таблицей (16) главы четвертой получим координаты плоскости

$$(M, dM, d^2M) = \{M, M_1 + mM_2, M_2(\beta + 2am - 2bm^2 - \gamma m^3 + n) + M_3 2m\}, \tag{18}$$

где

$$m = \frac{dv}{du}, \quad n = \frac{d^2v}{du^2}.$$

Умножая тангенциальные координаты (18) на текущие координаты точки

$$P = M + M_1x + M_2y + M_3z,$$

получим точечное уравнение плоскости:

$$2m^2x - 2my + z(\beta + 2am - 2bm^2 - \gamma m^3 + n) = 0. \tag{19}$$

Уравнение плоскости в данной точке $M$ зависит от двух параметров $m$ и $n$.

Для каждой системы $\infty^1$ кривых на плоскости $n$ является функцией от $m$. Чтобы найти характеристику семейства плоскостей (19) при переменном параметре $m$, надо продиференцировать по $m$ уравнение (19):

$$4mx - 2y + z\left(2a - 4bm - 3\gamma m^2 + \frac{dn}{dm}\right) = 0 \qquad (20)$$

и рассмотреть линию пересечения плоскостей (20) и (19).

А. Рассмотрим прежде всего семейство ангармонических кривых. Это — кривые, образующие во всякой точке постоянное ангармоническое отношение к трем направлениям Дарбу.

Три касательные Дарбу суть:

$$y = \varepsilon\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}\,x,\quad y = \varepsilon^2\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}\,x,\quad y = \varepsilon^3\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}\,x,$$

где $\varepsilon$ есть кубический корень из $-1$.

Касательная к кривой (17) определяется координатами $(M,\ M_1 du + M_2 dv)$, следовательно, уравнение касательной имеет вид:

$$y = mx.$$

Потребуем, чтобы сложное отношение этих четырех прямых было постоянно:

$$\left(m,\ \varepsilon\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}},\ \varepsilon^2\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}},\ \varepsilon^3\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}\right) = \text{const}.$$

Мы приходим к заключению:

$$m = \lambda\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}},$$

где $\lambda$ есть постоянный параметр, и, следовательно,

$$n = \lambda\left(\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}\right)_u + \lambda^2\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}\left(\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}\right)_v = \frac{1}{3}\,m\frac{\partial}{\partial u}\left(\ln\frac{\beta}{\gamma}\right) + \frac{m^2}{3}\frac{\partial}{\partial v}\left(\ln\frac{\beta}{\gamma}\right).$$

Коэфициенты в уравнении плоскости (19) содержат по исключении параметр $m$ в третьей степени. Значит, через произвольную точку $(x, y, z)$ проходят вообще три плоскости, определяемые из уравнения:

$$m^3\gamma z - 2m^2\left[x - bz + \frac{1}{6}z\frac{\partial}{\partial v}\left(\ln\frac{\beta}{\gamma}\right)\right] + 2m\left[y - az - \frac{1}{6}z\frac{\partial}{\partial u}\left(\ln\frac{\beta}{\gamma}\right)\right] - \beta z = 0. \qquad (19')$$

Семейство плоскостей (19') огибает конус третьего класса, ибо через произвольную точку проходят три касательных плоскости к конусу. Две бесконечно близкие плоскости (19) и (20) определяют образующую конуса; если мы потребуем, чтобы через ту же прямую проходила еще одна бесконечно близкая плоскость, то получим стационарную плоскость, которая аналогична точке перегиба плоской кривой.



Диференцируя дважды уравнение (19'):

$$3m^2\gamma z - 4m\left[x - bz + \frac{1}{6}z\frac{\partial}{\partial v}\left(\ln\frac{\beta}{\gamma}\right)\right] + 2\left[y - az - \frac{1}{6}\frac{\partial}{\partial u}\left(\ln\frac{\beta}{\gamma}\right)\right] = 0,$$

$$6m\gamma z - 4\left[x - bz + \frac{1}{6}z\frac{\partial}{\partial v}\left(\ln\frac{\beta}{\gamma}\right)\right] = 0 \qquad (20')$$

и требуя, чтобы три уравнения (19'), (20') были относительно $x, y, z$ совместны, мы придем к одному уравнению относительно $m$:

$$m^3\gamma = \beta. \qquad (21)$$

Итак, конус третьего класса (19') имеет три стационарные касательные плоскости, подобно тому, как кривая третьего порядка имеет три точки перегиба. Эти три плоскости проходят через одну прямую так же, как три точки перегиба лежат на одной прямой.

Действительно, внося в уравнение (19') значение $m^3 = \frac{\beta}{\gamma}$, получим:

$$-2m^2\left[x - bz + \frac{1}{6}z\frac{\partial}{\partial v}\left(\ln\frac{\beta}{\gamma}\right)\right] + 2m\left[y - az - \frac{1}{6}z\frac{\partial}{\partial u}\left(\ln\frac{\beta}{\gamma}\right)\right] = 0. \qquad (19'')$$

Мы видим, что три плоскости (19''), соответствующие трем значениям $m$ из уравнения $m^3 = \frac{\beta}{\gamma}$, образуют пучок. Осью пучка служит прямая

$$\left.\begin{aligned} x &= \left[b - \frac{1}{6}\frac{\partial}{\partial v}\left(\ln\frac{\beta}{\gamma}\right)\right]z,\\ y &= \left[a + \frac{1}{6}\frac{\partial}{\partial u}\left(\ln\frac{\beta}{\gamma}\right)\right]z. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Это — ось Чеха [34].

Уравнение (21) показывает, что наши стационарные плоскости проходят через три прямые

$$\gamma y^3 - \beta x^3 = 0.$$

Это — три касательные, определяющие направление Сегре. Так как направления Сегре в каждой точке образуют одно и то же ангармоническое отношение с направлениями Дарбу, то, следовательно, наши стационарные плоскости суть соприкасающиеся плоскости к кривым Сегре.

Мы имеем теорему Чеха:

Соприкасающиеся плоскости к трем кривым Сегре в каждой точке поверхности проходят через ось Чеха в этой точке.

**§ 5. Нормаль.** В. Нормаль Фубини. Понятие линейного элемента в проективной геометрии не является твердо установленным. В главе второй мы встретились с линейным элементом

$$\frac{\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3}{du\, dv};$$

он сохраняется в проективном изгибании. В других случаях бывает удоб-нее называть линейным элементом форму

$$(\mathbf{m}d_2\mathbf{M}) = (\mathbf{M}\mathbf{M}_u\mathbf{M}_v d^2\mathbf{M}) = 2du\,dv.$$

При произвольном нормировании координат **M** и **m**, т. е. если вмест **M** ввести сюда **M**$\rho$ и вместо **m** ввести **m**$\sigma$, форма принимает вид:

$$2\rho\sigma du\,dv. \qquad (23)$$

Экстремали интеграла

$$\int\sqrt{2\rho\sigma du\,dv} = \int\sqrt{2\rho\sigma v'}\,du$$

Фубини [35] называет геодезическими линиями.

Выписывая уравнение Эйлера-Лагранжа, получим:

$$v'' = v'\frac{\partial \ln \rho\sigma}{\partial u} - v'^2\frac{\partial \ln \rho\sigma}{\partial v}.$$

Следовательно,

$$n = m\frac{\partial \ln \rho\sigma}{\partial u} - m^2\frac{\partial \ln \rho\sigma}{\partial v}$$

и уравнение соприкасающейся плоскости:

$$m^2x - my + z\left[\frac{1}{2}\beta + m\left(a + \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \rho\sigma}{\partial u}\right) - m^2\left(b + \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \rho\sigma}{\partial v}\right) - \frac{1}{2}\gamma m^3\right] = 0. \quad (24)$$

Эти плоскости огибают конус третьего класса, ибо через каждую точк $(x, y, z)$ проходят три касательные плоскости этого конуса. Значени параметра $m$ определяются уравнением:

$$m^3\gamma z - 2m^2\left[x - bz - \frac{1}{2}z\frac{\partial \ln \rho\sigma}{\partial v}\right] + $$
$$+ 2m\left[y - az - \frac{1}{2}z\frac{\partial \ln \rho\sigma}{\partial u}\right] - \beta z = 0. \qquad (24')$$

Стационарная касательная плоскость получится при условии, ч уравнение (24') и два других уравнения, получаемые диференцировани по $m$, будут определять одну и ту же прямую, т. е. будут совмест относительно $x, y, z$.

Диференцируя, имеем:

$$3m^2\gamma z - 4m\left[x - bz - \frac{1}{2}z\frac{\partial \ln \rho\sigma}{\partial v}\right] + 2\left[y - az - \frac{1}{2}z\frac{\partial \ln \rho\sigma}{\partial u}\right] = 0,$$

$$6m\gamma z - 4\left[x - bz - \frac{1}{2}z\frac{\partial \ln \rho\sigma}{\partial v}\right] = 0.$$

Исключая отсюда $x, y, z$, получим опять:

$$m^3 = \frac{\beta}{\gamma}.$$



Соответствующие три плоскости проходят через одну прямую — ось пучка плоскостей

$$-m^2\left[x - bz - \frac{1}{2}z\frac{\partial \ln \rho\sigma}{\partial v}\right] + m\left[y - az - \frac{1}{2}z\frac{\partial \ln \rho\sigma}{\partial u}\right] = 0,$$

уравнения которой:

$$x = \left(b + \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \rho\sigma}{\partial v}\right)z, \quad y = \left(a + \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \rho\sigma}{\partial u}\right)z. \qquad (25)$$

Все эти прямые при любом значении $\rho$ сопряжены поверхности (описывают конгруэнцию, сопряженную поверхности).

Действительно, полагая $z = 1$ в уравнениях (25) и внося значения $x$, $y$ в уравнение (8), мы получим условие сопряженности конгруэнции (25) в виде:

$$a_v - b_u + b_3^2 - a_3^1 = 0, \qquad (26)$$

а это является тождеством. В самом деле, мы получим его, если напишем условие совместности (2) главы второй для таблицы (16) главы четвертой, полагая

$$i = 3, \quad k = 3.$$

Таким образом мы получаем бесконечное множество прямых, каждую из которых можно принять за проективную нормаль.

Фубини делает выбор нормали среди прямых (25), нормируя определенным образом координаты точки $M$.

Изменим общий множитель однородных координат, полагая

$$\overline{\mathbf{M}} = \rho\mathbf{M}, \quad \overline{\mathbf{M}}_1 = \rho_1\mathbf{M}_1, \quad \overline{\mathbf{M}}_2 = \rho_2\mathbf{M}_2, \quad \overline{\mathbf{M}}_3 = \rho_3\mathbf{M}_3.$$

Коэфициенты таблицы (16) главы четвертой изменятся, очевидно, по формулам:

$$\left.\begin{aligned} \overline{a}_i^k &= a_i^k\frac{\rho_i}{\rho_k}, & \overline{b}_i^k &= b_i^k\frac{\rho_i}{\rho_k} \qquad (i \lessgtr k), \\ \overline{a}_i^i &= a_i^i + \frac{\partial \ln \rho_i}{\partial u}, & \overline{b}_i^i &= b_i^i + \frac{\partial \ln \rho_i}{\partial v}. \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Сохраним условие, наложенное на коэфициенты $\rho_i$:

$$(\overline{\mathbf{M}}\,\overline{\mathbf{M}}_1\,\overline{\mathbf{M}}_2\,\overline{\mathbf{M}}_3) = 1$$

и потребуем (Картан) [36], чтобы компоненты $\overline{a}_0^1$, $\overline{a}_1^2$, $\overline{a}_2^3$ так же, как компоненты $\overline{b}_0^2$, $\overline{b}_1^3$, $\overline{b}_2^1$, были равны между собой. Формулы (27) немедленно дадут:

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \beta\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\rho_2}{\rho_3}, \quad \frac{\rho}{\rho_2} = \gamma\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\rho_1}{\rho_3}, \quad \rho\rho_1\rho_2\rho_3 = 1,$$

откуда

$$\rho\rho_3 = \rho_1\rho_2 = 1, \quad \rho\rho_2 = \beta\rho_1^2, \quad \rho\rho_1 = \gamma\rho_2^2,$$

и, следовательно,

$$\rho = \sqrt{\beta\gamma}.$$

Так как

$$\overline{\mathfrak{m}} = (\overline{M}\,\overline{M}_1\,\overline{M}_2) = \rho\rho_1\rho_2\,(MM_1M_2) = \rho\mathfrak{m},$$

то надо положить

$$\sigma = \rho = \sqrt{\beta\gamma}.$$

Диференциальная форма (23) принимает вид нормальной формы φ
Фубини:

$$\varphi_2 = 2\beta\gamma\,du\,dv, \qquad (28)$$

и прямая (25) будет проективной нормалью:

$$\left.\begin{aligned} x &= \left(b + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\ln\beta\gamma\right) z, \\ y &= \left(a + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\ln\beta\gamma\right) z. \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Существует большое число различных интерпретаций линейного эле-
мента (28).

Так, например [37], четыре прямых

$$(MM_1),\quad (MM_2),\quad (M^*M_1^*),\quad (M^{**}M_2^{**}), \qquad (30)$$

где точка $M^*$ соответствует значениям параметров $u + du, v$ и $M^{**}$ — зна-
чениям $u, v + dv$, пересекаясь с произвольной плоскостью $a$ дают четыр
точки так, что четыре плоскости одного пучка, проходящие через ни
имеют сложное отношение, главная часть которого равна $\varphi_2$.

Действительно, очевидно,

$$(M^*M_1^*) = (MM_1) + (MM_2)\,\beta\,du + \ldots,$$
$$(M^{**}M_1^{**}) = (MM_1)\gamma\,dv + (MM_2) + \ldots$$

Четыре прямых (30) пересекают плоскость $(M_1M_2M_3)$ в точках

$$M_1,\quad M_2,\quad M_1 + M_2\beta\,du,\quad M_1\gamma\,dv + M_2,$$

сложное отношение которых, очевидно, равно $\frac{1}{2}\varphi_2$.

**§ 6. Другие замечательные прямые.** C. Экстремали проективно
длины дуги (пангеодезические [38] линии)

$$\int \frac{\beta\,du^3 + \gamma\,dv^3}{du\,dv} = \int \left[\beta\frac{du^2}{dv} + \gamma\frac{dv^2}{du}\right] = \int \left(\frac{\beta}{v'} + \gamma v'^2\right) du.$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа имеет вид:

$$2\frac{\beta_v}{v'} - \gamma_v v'^2 + \frac{\beta_u}{v'^2} - 2\gamma_u v' - \left(2\frac{\beta}{v'^3} + 2\gamma\right) v'' = 0,$$

откуда

$$n = \frac{-m^5\gamma_v - 2\gamma_u m^4 + 2\beta_v m^2 + \beta_u m}{2(\gamma m^3 + \beta)}$$



и, следовательно, соприкасающиеся плоскости огибают конус шестого класса. С ним тоже могут быть связаны некоторые прямые. Например, если взять три пангеодезические линии, касающиеся направлений Сегре, т. е. положить

$$m = \varepsilon\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}},$$

где $\varepsilon$ — кубический корень из единицы, то уравнение соприкасающейся плоскости будет:

$$2x\varepsilon^2\sqrt[3]{\frac{\beta^2}{\gamma^2}} - 2y\varepsilon\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}} +$$
$$+ z\left\{\varepsilon\left[2a\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}} + \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}\frac{\partial\ln\frac{\beta}{\gamma^2}}{\partial u}\right] - \varepsilon^2\left[2b\sqrt[3]{\frac{\beta^2}{\gamma^2}} + \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{\beta^2}{\gamma^2}}\frac{\partial\ln\frac{\gamma}{\beta^2}}{\partial v}\right]\right\} = 0.$$

Следовательно, все три плоскости проходят через одну прямую

$$x = \left[b - \frac{1}{8}\frac{\partial\ln\frac{\beta^2}{\gamma}}{\partial v}\right] z,$$
$$y = \left[a + \frac{1}{8}\frac{\partial\ln\frac{\beta}{\gamma^2}}{\partial u}\right] z.$$

Эту прямую отметил Картан [39].

Конус шестого класса, к которому мы пришли, есть конус Сегре.

D. Линейный элемент

$$\frac{\beta\,du^3 + \gamma\,dv^3}{du\,dv}$$

можно рассматривать как отношение двух форм:
нормальной формы Фубини:

$$\varphi_2 = 2\beta\gamma\,du\,dv$$

и его кубичной формы

$$\varphi_3 = \beta\gamma\,(\beta\,du^3 + \gamma\,dv^3).$$

Поэтому наряду с экстремалями (геодезические) формы $\varphi_2$, наряду с экстремалями (пангеодезические) линейного элемента можно искать экстремали формы $\varphi_3$.

Уравнение Эйлера-Лагранжа для интеграла

$$\int \sqrt[3]{\beta\gamma\,(\beta + \gamma v'^3)}\,du$$

принимает вид:

$$v' = \frac{\beta^2\frac{\partial\ln\beta^2\gamma}{\partial v} + \beta\gamma\frac{\partial\ln\frac{\beta}{\gamma^4}}{\partial u}v'^2 + \beta\gamma\frac{\partial\ln\frac{\beta^4}{\gamma}}{\partial v}v'^3 - \gamma^2\frac{\partial\ln\beta\gamma^2}{\partial u}v'^5}{6v'\beta\gamma}.$$

Следовательно, соприкасающиеся плоскости огибают конус пятого класса, Для кривых, которые касаются направлений Сегре

$$v' = \varepsilon \sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}},$$

где $\varepsilon$ — кубичный корень из единицы, имеем:

$$v'' = -\varepsilon \sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}} \left( \frac{\partial \ln \gamma}{\partial u} - \varepsilon \sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}} \frac{\partial \ln \beta}{\partial v} \right)$$

и уравнение соприкасающейся плоскости

$$2x\varepsilon^2 \beta^{\frac{2}{3}} \gamma^{-\frac{2}{3}} - 2y\varepsilon \beta^{\frac{1}{3}} \gamma^{-\frac{1}{3}} +$$
$$+ z \left( 2\varepsilon a \beta^{\frac{1}{3}} \gamma^{-\frac{1}{3}} - \varepsilon \beta^{\frac{1}{3}} \gamma^{-\frac{1}{3}} \frac{\partial \ln \gamma}{\partial u} - 2\varepsilon^2 b \beta^{\frac{2}{3}} \gamma^{-\frac{2}{3}} + \varepsilon^2 \beta^{\frac{2}{3}} \gamma^{-\frac{2}{3}} \frac{\partial \ln \beta}{\partial v} \right) = 0.$$

Эти три плоскости (для трех значений $\varepsilon$) проходят через прямую

$$x = \left[ b - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \beta}{\partial v} \right] z,$$
$$y = \left[ a - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \gamma}{\partial u} \right] z.$$

Для тетраэдра (I) (стр. 42) эта прямая совпадает с осью $MM_3$, следовательно, — это директриса Вильчинского.

**§ 7. Канонический пучок.** Мы имеем теперь целый ряд замечательных прямых: директрисы Вильчинского, проективную нормаль Фубини, ось Чеха, ребро Грина. Все они лежат в одной плоскости и образуют пучок.

Уравнения этого пучка можно написать в виде[1]):

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \left[ \frac{a_1^0 - a_3^2}{\beta} + \lambda \frac{\partial \ln \gamma\beta^2}{\partial v} \right] z, \\ y &= \frac{1}{2} \left[ \frac{b_2^0 - b_3^1}{\gamma} + \lambda \frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u} \right] z. \end{aligned} \right\} \qquad (31)$$

Сопряженная прямая (вторая директриса, вторая нормаль и т. д.) имеет уравнение:

$$z = 0, \ \frac{1}{2} \left[ \frac{b_2^0 - b_3^1}{\gamma} + \lambda \frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u} \right] x + \frac{1}{2} \left[ \frac{a_1^0 - a_3^2}{\beta} + \lambda \frac{\partial \ln \gamma\beta^2}{\partial v} \right] y = 1. \qquad (31')$$

---

[1]) Чтобы привести уравнения (15), (22), (29) к виду (31), надо воспользоваться формулами (15а) гл. IV:

$$b = \frac{a_1^0 - a_3^2}{2\beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \beta}{\partial v},$$
$$a = \frac{b_2^0 - b_3^1}{2\gamma} + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \gamma}{\partial u}.$$



При этом мы получим:

| | | |
|---|---|---|
| директрисы Вильчинского | для | $\lambda = 0$ |
| проективную нормаль | „ | $\lambda = 1$ |
| ребро Грина | „ | $\lambda = \frac{1}{2}$ |
| ось Чеха | „ | $\lambda = \frac{1}{3}$ |
| прямую Картана | „ | $\lambda = \frac{1}{4}$ |
| каноническую касательную | „ | $\lambda = \infty$. |

Каноническая касательная в первом пучке есть пересечение канонической плоскости с касательной плоскостью. Ей соответствует во втором пучке прямая, соединяющая точку касания (точку поверхности) с центром второго пучка.

Обе прямые

$$z = 0, \quad x \frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u} = y \frac{\partial \ln \gamma\beta^2}{\partial v},$$
$$z = 0, \quad x \frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u} + y \frac{\partial \ln \gamma\beta^2}{\partial v} = 0$$

всегда сопряжены на поверхности.

Мы видим, что проективная нормаль гармонически делит угол между директрисой и касательной плоскостью по отношению к ребру Грина.

Таким образом в свое время Грин [40] ввел проективную нормаль под названием „псевдонормали".

Проективная нормаль — единственная прямая канонического пучка, которая образует конгруэнцию, сопряженную с поверхностью.

Действительно, выбирая тетраэдр (I), напишем условие сопряженности (8) в виде:

$$y_v + l = x_u + k.$$

Вносся сюда значения $x$ и $y$ из уравнений (31), где надо положить $z = 1$:

$$x = \frac{\lambda}{2} \frac{\partial \ln \gamma\beta^2}{\partial v}, \quad y = \frac{\lambda}{2} \frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u},$$

получим в силу уравнения (II):

$$\frac{\lambda}{2} \frac{\partial^2 \ln \frac{\gamma}{\beta}}{\partial u \, \partial v} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln \frac{\gamma}{\beta}}{\partial u \, \partial v}, \qquad (32)$$

откуда

$$\lambda = 1,$$

если только $\dfrac{\partial^2 \ln \frac{\gamma}{\beta}}{\partial u \, \partial v}$ не равно нулю.

Это свойство (Фубини) более всего оправдывает название проективной нормали для прямой $\lambda = 1$.

Если

$$\frac{\partial^2 \ln \frac{\beta}{\gamma}}{\partial u \partial v} = 0, \tag{33}$$

то уравнение (32) выполняется тождественно и $\lambda$ неопределенно. Все прямые канонического пучка образуют сопряженные к поверхности (M) конгруэнции.

Интегрируя уравнение (33), получим:

$$\frac{\beta}{\gamma} = UV,$$

где $U$ и $V$ — функции одного переменного $u$ и одного переменного $v$. Изменяя параметры, мы можем привести их к единице; тогда

$$\beta = \gamma.$$

Такие поверхности Фубини назвал изотермически асимптотическими.

**§ 8. Совпадение прямых канонического пучка** [41]. Могут ли все канонические прямые совпадать?

Если это так, то уравнения (31) сейчас же дадут:

$$\frac{\partial \ln \gamma\beta^2}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u} = 0.$$

Интегрируя, получим:

$$\gamma\beta^2 = U, \quad \beta\gamma^2 = V,$$

где $U$ и $V$ — функции одного $u$ и одного $v$. Изменяя параметры $u$ и $v$, мы их приведем к единице и будем иметь:

$$\beta = 1, \quad \gamma = 1.$$

Уравнения (II) дадут:

$$k = \frac{1}{2}, \quad l = \frac{1}{2},$$

$$A_u = 0, \quad B_v = 0, \quad A_v = B_u.$$

Отсюда

$$A = V_1, \quad B = U_1,$$

и, значит,

$$V_1' = U_1' = \text{const.},$$

т. е.

$$B = U_1 = cu + c_1, \quad A = V_1 = cv = c_2.$$

Изменение постоянных $c$, $c_1$ и $c_2$ соответствует проективному изгибанию поверхности.



1) Если $c$ не нуль, то, вводя новые параметры:

$$u_1 = u + \frac{c_1}{2}, \quad v_1 = v + \frac{c_2}{2}, \tag{34}$$

мы приведем к одной и той же величине значения $A$, $B$ на всех поверхностях с одним и тем же $c$, не меняя $\beta$ и $\gamma$. Это показывает, что все такие поверхности (с одним и тем же значением $c$, не равным нулю) проективно тождественны. Следовательно, изменение постоянных $c_1$ и $c_2$ производит только смещение поверхности (проективное преобразование). Уравнения (34) устанавливают соответствие между совпадающими точками.

2) Если

$$c = 0$$

и $c_1$, $c_2$ различны, то поверхности нельзя привести к совпадению; изменение $c_1$ и $c_2$ производит теперь проективное изгибание поверхности.

Каковы бы ни были эти три постоянные, поверхность является проективным изгибанием поверхности

$$c = 0, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 0.$$

В этом случае система (I) принимает вид:

$$\begin{aligned} &M_u = M_1, && M_v = M_2, \\ &M_{1u} = M_2, && M_{1v} = \frac{1}{2} M + M_3, \\ &M_{2u} = \frac{1}{2} M + M_3, && M_{2v} = M_1, \\ &M_{3u} = \frac{1}{2} M_1, && M_{3v} = \frac{1}{2} M_2. \end{aligned}$$

Полагая

$$M = e^{ru + su}, \qquad \text{(где } r, s = \text{const.)}$$

немедленно найдем:

$$s = r^2, \quad r^4 = r.$$

Следовательно, обозначая через $\varepsilon$ один из кубичных корней из единицы, имеем четыре линейно независимых решения системы:

$$M^1 = e^{\varepsilon u + \varepsilon^2 v}, \quad M^2 = e^{\varepsilon^2 u + \varepsilon v}, \quad M^3 = e^{u+v}, \quad M^4 = 1.$$

Принимая их за координаты точки M поверхности, видим, что наша поверхность определяется уравнением:

$$xyz = 1,$$

где принято

$$x = \frac{M^1}{M^4}, \quad y = \frac{M^2}{M^4}, \quad z = \frac{M^3}{M^4}.$$

Так как линии Дарбу и линии Сегре теперь определяются уравнениями:

$$du^3 + dv^3 = 0, \quad du^3 - dv^3 = 0,$$

то, очевидно, каждое из семейств линий Дарбу состоит из сечений плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Например, линии

$$du + dv = 0$$

соответствуют плоскостям

$$z = \text{const}.$$

Сопряженное с ним семейство линий Сегре состоит в силу теоремы[1]) Кенигса (Koenigs) из сечений поверхности плоскостями, проходящими через соответствующую ось координат.

Например,

$$\frac{y}{x} = e^{(\varepsilon^2-\varepsilon)u+(\varepsilon-\varepsilon^2)v} = e^{(\varepsilon^2-\varepsilon)(u-v)},$$

очевидно, постоянно на линиях

$$du - dv = 0.$$

Таким же образом можно получить поверхности

$$c = 0, \quad c_1, \quad c_2.$$

Четыре координаты произвольной точки поверхности суть:

$$\mathbf{M} = e^{ru+(r^2-c_1)v},$$

где $r$ есть один из четырех корней уравнения

$$(r^2 - c_1)^2 = r + c_2.$$

Уравнение поверхности в однородных координатах:

$$(\mathbf{M}^1)^{\alpha_1}(\mathbf{M}^2)^{\alpha_2}(\mathbf{M}^3)^{\alpha_3}(\mathbf{M}^4)^{\alpha_4} = 1,$$

где $\alpha_i = \text{const.}$, удовлетворяет соотношениям:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0,$$
$$\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \alpha_3 r_3 + \alpha_4 r_4 = 0,$$
$$\alpha_1 r_1^2 + \alpha_2 r_2^2 + \alpha_3 r_3^2 + \alpha_4 r_4^2 = 0.$$

**§ 9. Различный выбор нормального тетраэдра.** Выбор той или другой канонической прямой (31) в качестве ребра $MM_3$ тетраэдра и одной из соприкасающихся поверхностей Дарбу (30) главы четвертой,

[1]) Линии прикосновения описанных конусов с вершинами на прямой $l$ и сечение поверхности пучком плоскостей с осью $l$ сопряжены.



как поверхности, относительно которой тетраэдр автополярен, вполне определяет тетраэдр.

Если мы остановимся на поверхности

$$xy - z = \frac{1}{2} z^2 \left[a_3^1 - a_2^0 + h\beta\gamma\right]$$

с заданным значением $h$ и на прямой

$$x = \frac{1}{2}\left[\frac{a_1^0 - a_3^2}{\beta} + \lambda \frac{\partial \ln \beta^2\gamma}{\partial v}\right] z,$$
$$y = \frac{1}{2}\left[\frac{b_2^0 - b_3^1}{\gamma} + \lambda \frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u}\right] z$$

с заданной постоянной $\lambda$, то соответствующий тетраэдр имеет компоненты, удовлетворяющие уравнениям:

$$a_3^1 - a_2^0 + h\beta\gamma = 0,$$
$$\frac{a_1^0 - a_3^2}{\beta} + \lambda \frac{\partial \ln \beta^2\gamma}{\partial v} = 0,$$
$$\frac{b_2^0 - b_3^1}{\gamma} + \lambda \frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u} = 0.$$

Условия совместности дают нам такую таблицу компонент:

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \gamma}{\partial u} - \frac{\lambda}{2}\frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u}, \\
a_1^0 &= \overline{B} - \frac{\lambda}{2}\beta\frac{\partial \ln \beta^2\gamma}{\partial v}, & a_3^2 &= \overline{B} + \frac{\lambda}{2}\beta\frac{\partial \ln \beta^2\gamma}{\partial v}, \\
a_2^0 &= k + \frac{h}{2}\beta\gamma + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial^2 \ln \beta^2\gamma}{\partial u\,\partial v}, & a_3^1 &= k - \frac{h}{2}\beta\gamma + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial \ln \beta^2\gamma}{\partial u\,\partial v}, \\
a_3^0 &= \beta\overline{A} - \frac{\lambda}{2}\left(\beta\frac{\partial \ln \beta^2\gamma}{\partial v}\right)_v + \frac{h(\lambda-1)}{2}\beta\gamma\frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u}, \\
b &= \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \beta}{\partial v} - \frac{\lambda}{2}\frac{\partial \ln \beta^2\gamma}{\partial v}, \\
b_2^0 &= \overline{A} - \frac{\lambda}{2}\gamma\frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u}, & b_3^1 &= \overline{A} + \frac{\lambda}{2}\gamma\frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u}, \\
b_1^0 &= l + \frac{h}{2}\beta\gamma + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial^2 \ln \beta\gamma^2}{\partial u\,\partial v}, & b_3^2 &= l - \frac{h}{2}\beta\gamma + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial^2 \ln \beta\gamma^2}{\partial u\,\partial v}, \\
b_3^0 &= \gamma\overline{B} - \frac{\lambda}{2}\left(\gamma\frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u}\right)_u + \frac{h(\lambda-1)}{2}\beta\gamma\frac{\partial \ln \beta^2\gamma}{\partial v},
\end{aligned}
\tag{35}
$$

причем

$$\overline{A} = A + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial^2 \ln \beta^2\gamma}{\partial v^2} + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial \ln \beta}{\partial v}\frac{\partial \ln \beta^2\gamma}{\partial v} - \frac{\lambda^2}{4}\left(\frac{\partial \ln \beta^2\gamma}{\partial v}\right)^2,$$
$$\overline{B} = B + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial^2 \ln \beta\gamma^2}{\partial u^2} + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial \ln \gamma}{\partial u}\frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u} - \frac{\lambda^2}{4}\left(\frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u}\right)^2,$$

$A$, $B$, $k$, $l$, $\beta$, $\gamma$ удовлетворяют системе (II).

Если

$$h = 0, \quad \lambda = 0,$$

то таблица (35) переходит в таблицу (I). При всяком $h$ и $\lambda$ тетраэд инвариантно связан с поверхностью; этого, однако, нельзя сказать о вы боре общего множителя у четырех однородных координат вершин тетр эдра (нормирование).

Меняя нормирование, мы будем получать другую таблицу, связаниу с первоначальной по формулам (27). В частности, выбирая тетраэдр (I и общие множители, как это было сделано на стр. 103, мы получи таблицу Картана:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{3}{2}\frac{\partial \ln b}{\partial u}$ | $a$ | $0$ | $0$ | $\frac{3}{2}\frac{\partial \ln a}{\partial v}$ | $0$ | $b$ | $0$ |
| $\frac{B}{a}$ | $-\frac{1}{2}\frac{\partial \ln b}{\partial u}$ | $a$ | $0$ | $\frac{l}{a}$ | $\frac{1}{2}\frac{\partial \ln a}{\partial v}$ | $0$ | $b$ |
| $\frac{k}{b}$ | $0$ | $\frac{1}{2}\frac{\partial \ln b}{\partial u}$ | $a$ | $\frac{A}{b}$ | $b$ | $-\frac{1}{2}\frac{\partial \ln a}{\partial v}$ | $0$ |
| $\frac{a}{b^2}A$ | $\frac{k}{b}$ | $\frac{B}{a}$ | $-\frac{3}{2}\frac{\partial \ln b}{\partial u}$ | $\frac{b}{a^2}B$ | $\frac{A}{b}$ | $\frac{l}{a}$ | $-\frac{3}{2}\frac{\partial \ln a}{\partial v}$ |

где

$$\beta = \frac{a^2}{b}, \qquad \gamma = \frac{b^2}{a},$$

---

Глава шестая

# ТЕОРИЯ КОНГРУЭНЦИЙ

**§ 1. Общие свойства.** Мы уже несколько раз встречались с понятием конгруэнции прямых, но каждый раз рассматривали ее только в связи с теорией поверхности. Теперь мы переходим к систематическому исследованию конгруэнции прямых.

Если дано семейство тетраэдров $T(M_1, M_2, M_3, M_4)$, зависящее от двух параметров $u$, $v$, то каждое ребро описывает конгруэнцию. Следовательно, таблица компонент движений тетраэдра $a_i^k, b_i^k$, удовлетворяющих системе уравнениий:

$$\frac{\partial a_i^k}{\partial v} - \frac{\partial b_i^k}{\partial u} = \sum_j \left(b_i^j a_j^k - a_i^j b_j^k\right), \tag{1}$$

определяет конгруэнцию $(M_1M_2)$ до проективного преобразования.

Рассмотрим какую-нибудь линейчатую поверхность $L$

$$v = \varphi(u), \tag{2}$$

образованиую $\infty^1$ лучей $M_1M_2$.

Касательную плоскость к поверхности $L$ в некоторой точке ее, определяемой координатами $M_1 + \lambda M_2$, можно определить как плоскость, содержащую луч конгруэнции $(M_1M_2)$ и касательную, например, к линии $\lambda =$ const. на поверхности $L$.

Эта касательная в свою очередь определяется точками $M_1 + \lambda M_2$ и производной (или диференциалом):

$$d(M_1 + \lambda M_2) = \sum_k (\omega_1^k + \lambda\omega_2^k) M_k \quad (\omega_i^k = a_i^k du + b_i^k dv), \tag{3}$$

где отношение диференциалов $du : dv$ определено уравнением (2).

Следовательно, рассматриваемая касательная плоскость определяется тремя точками $M_1$, $M_2$, и $d(M_1 + \lambda M_2)$.

Формула (3) содержит параметр $\lambda$ линейно; следовательно, прямолинейный ряд точек на луче $M_1M_2$ и соответствующие касательные плоскости находятся в коррелятивном соответствии (Шаль) [42]: сложное отношение четырех точек равно сложному отношению четырех касательных плоскостей.

Будем сохранять неподвижной точку $M_1 + \lambda M_2$ на луче $M_1M_2$, т. е. зададимся постоянным значением $\lambda$ и будем менять отношение диференциалов $du : dv$, т. е. рассмотрим касательные плоскости в точке $M_1 + \lambda M_2$ к различным линейчатым поверхностям $L$, проходящим через луч $M_1M_2$.

Мы получим пучок плоскостей, ибо отношение диференциалов $du:dv$ входит линейно, но если три точки $M_1$, $M_2$ и $d(M_1+\lambda M_2)$ лежат в одной и той же плоскости независимо от величины отношения $du:dv$, т. е. если равен нулю определитель

$$\left\{M_1,\ M_2,\ \sum_k (a_1^k+\lambda a_2^k)M_k,\ \sum_k (b_1^k+\lambda b_2^k)M_k\right\}=0, \qquad (4)$$

то все поверхности $L$ касаются одной и той же плоскости.

Левую часть уравнения (4) можно представить, как произведение двух определителей:

$$(M_1M_2M_3M_4)\begin{vmatrix} a_1^3+\lambda a_2^3 & b_1^3+\lambda b_2^3 \\ a_1^4+\lambda a_2^4 & b_1^4+\lambda b_2^4 \end{vmatrix}=0;$$

первый по условию равен единице, раскрывая второй, получим для $\lambda$ квадратное уравнение:

$$\lambda^2(a_2^3b_2^4-a_2^4b_2^3)+\lambda(a_1^3b_2^4+a_2^3b_1^4-a_1^4b_2^3-a_2^4b_1^3)+a_1^3b_1^4-a_1^4b_1^3=0. \qquad (4')$$

Каждый корень этого уравнения определяет точку $M_1+\lambda M_2$ на луче, обладающую тем свойством, что все линейчатые поверхности конгруэнции в этой точке имеют одну и ту же касательную плоскость. Такая точка называется фокусом. На каждом луче, следовательно, есть два действительных, мнимых или совпадающих фокуса.

При изменении параметров $u$, $v$ фокусы описывают фокальные поверхности.

В главе пятой мы определяли фокусы иначе; чтобы примирить оба определения, докажем теорему:

ТЕОРЕМА. *В фокусах все линейчатые поверхности конгруэнции касаются фокальной поверхности.*

В фокусе $M_1+\lambda M_2$ все линейчатые поверхности имеют одну и ту же касательную плоскость, координаты которой можно записать в виде

$$[M_1,\ M_2,\ \sum (a_1^k+\lambda a_2^k)M_k], \qquad (5)$$

или

$$[M_1,\ M_2,\ \sum (b_1^k+\lambda b_2^k)M_k].$$

Касательная плоскость к фокальной поверхности $(M_1+\lambda M_2)$ определяется тремя точками:

$$M_1+\lambda M_2,\quad (M_1+\lambda M_2)_u,\quad (M_1+\lambda M_2)_v.$$

Первая из них, конечно, лежит в плоскости (5); что касается остальных, то координаты их можно записать в форме:

$$(M_1+\lambda M_2)_u=\sum_k (a_1^k+\lambda a_2^k)M_k+\lambda_u M_2,$$
$$(M_1+\lambda M_2)_v=\sum_k (b_1^k+\lambda b_2^k)M_k+\lambda_v M_2.$$

Легко видеть, что действительно каждая из этих точек лежит в плоскости (5).

Доказанная таким образом теорема имеет два исключения — две развертывающиеся поверхности конгруэнции.



Развертывающаяся поверхность имеет одну и ту же касательную плоскость во всех точках луча и, следовательно, не может касаться обеих фокальных поверхностей в двух фокусах.

Требуя, чтобы координаты касательной плоскости

$$[M_1,\ M_2,\ d(M_1+\lambda M_2)]$$

не зависели от $\lambda$, мы придем к условию:

$$[M_1, M_2,\ \sum_k (a_1^k du+b_1^k dv)M_k,\ \sum_k (a_2^k du+b_2^k dv)M_k]=0, \qquad (6)$$

которое определит отношение диференциалов $du:dv$.

Рассматривая левую часть уравнения (6) как произведение определителей, один из которых $(M_1M_2M_3M_4)$ равен единице, мы приведем это уравнение к виду:

$$\begin{vmatrix} a_1^3du+b_1^3dv & a_2^3du+b_2^3dv \\ a_1^4du+b_1^4dv & a_2^4du+b_2^4dv \end{vmatrix}=0,$$

или

$$(a_1^3a_2^4-a_1^4a_2^3)du^2+(b_1^3b_2^4-b_1^4b_2^3)dv^2+$$
$$+(a_1^3b_2^4+a_2^4b_1^3-a_1^4b_2^3-a_2^3b_1^4)\,du\,dv=0, \qquad (7)$$

которое является диференциальным уравнением двух развертывающихся поверхностей конгруэнции.

Касательная плоскость развертывающихся поверхностей $du:dv$ определяется точками

$$M_1, M_2, \sum_k (a_1^k du+b_1^k dv)M_k.$$

Она совпадает с плоскостью (5), если

$$[M_1,\ M_2,\ \sum (a_1^k du+b_1^k dv)M_k,\ \sum (a_1^k+\lambda a_2^k)M_k]=0.$$

Это уравнение первой степени относительно $\lambda$; оно определяет один из двух фокусов. Развертывающаяся поверхность касается фокальной поверхности в этом фокусе. Второй фокус описывает ребро возврата этой развертывающейся поверхности.

Действительно, касательная к линии $du:dv$ на фокальной поверхности $(M_1+\lambda M_2)$ совпадает с лучом $M_1M_2$, если точка

$$d(M_1+\lambda M_2)=\sum_k\left[(a_1^k+\lambda a_2^k)du+(b_1^k+\lambda b_2^k)dv\right]M_k \qquad (8)$$

лежит на луче $M_1M_2$.

В таком случае $d(M_1+\lambda M_2)$ линейно выражается через соответствующие координаты точек $M_1$ и $M_2$, а следовательно, координаты $M_3$ и $M_4$ в правой части равенства (8) должны сокращаться.

$$(a_1^3+\lambda a_2^3)du+(b_1^3+\lambda b_2^3)dv=0,$$
$$(a_1^4+\lambda a_2^4)du+(b_1^4+\lambda b_2^4)dv=0.$$

Исключение $\lambda$ приводит нас к уравнению (7), откуда и следует теорема.

**§ 2. Канонический тетраэдр.** Выбор канонического тетраэдра д конгруэнции гораздо проще, чем это имело место для поверхности.

На каждом луче конгруэнции имеется два действительных, мним или сливающихся фокуса.

Если фокусы действительны, то естественно принять их за вершины тетраэдра $M_1$ и $M_2$. Случай мнимых фокусов по существу ни не отличается, — надо только ввести мнимые элементы (подобно то как в теории поверхности мы не ограничивали себя случаем действите ных асимптотических линий).

Особое место занимает случай совпадающих фокусов.

Если совпадение фокусов имеет место для отдельных лучей или одной линейчатой поверхности $L$, то мы просто исключаем эти лу как особые.

Если же фокусы совпадают на всех лучах конгруэнции (парабо ческая конгруэнция), то нетрудно показать, что конгруэнция образова касательными к одному семейству асимптотических линий своей еди ственной фокальной поверхности.

Действительно, каждая развертывающаяся поверхность конгруэнц касается фокальной поверхности в одном фокусе луча и имеет реб возврата в другом фокусе.

Если фокусы совпадают, то она касается фокальной поверхности том же фокусе (единственном), который описывает ее ребро возвра

Таким образом касательная плоскость развертывающейся поверхнос одновременно является касательной плоскостью фокальной поверхнос и соприкасающейся плоскостью ребра возврата, которая лежит на т же поверхности. Отсюда непосредственно следует, что ребро возвр служит асимптотической линией фокальной поверхности, а лучи конг энции — ее асимптотическими касательными.

Таким образом теория параболической конгруэнции неразрыв связана с теорией поверхности, и изучение ее надо вести при помо инвариантного тетраэдра поверхности. В этой главе параболичес конгруэнции мы будем исключать.

Поместив вершины $M_1$ и $M_2$ тетраэдра в двух фокусах, которые для определенности будем предполагать действительными, мы по сооб жениям двойственности совместим две грани тетраэдра $M_1M_2M$ $M_1M_2M_4$ с фокальными плоскостями, т. е. с соответствующими касате ными плоскостями фокальной поверхности.

Этим мы и ограничимся в стеснении свободы выбора тетраэд Положение вершин $M_3$ и $M_4$ в фокальных плоскостях лучше остав произвольным, чтобы выбором этих точек можно было воспользоват при решении той или другой задачи.

Вполне естественно принять развертывающиеся поверхности конг энции за координатные поверхности, подобно тому как в теории верхности за координатные линии были приняты асимптотические.

При выборе канонического тетраэдра конгруэнции особенно хор можно провести нормирование координат его вершин.

Если фокус $M_1$ описывает ребро возврата развертывающейся верхности $v = \text{const.}$, то луч конгруэнции $(M_1M_2)$ является касател к линии $u$ на поверхности $(M_1)$. Следовательно, точка $M_{1u}$ лежит



прямой $M_1M_2$, и ее координаты линейно выражаются через координаты точек $M_1$ и $M_2$.

То же можно сказать о точке $M_2$. Значит,

$$\mathbf{M}_{1u} = a_1^1 \mathbf{M}_1 + a_1^2 \mathbf{M}_2, \quad \mathbf{M}_{2v} = b_2^1 \mathbf{M}_1 + b_2^2 \mathbf{M}_2.$$

Если мы умножим координаты $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ на множители $\theta_1$ и $\theta_2$, то эти уравнения примут вид:

$$(\mathbf{M}_1\theta_1)_u = \left(a_1^1 + \frac{\partial \ln \theta_1}{\partial u}\right)\mathbf{M}_1\theta_1 + a_1^2 \frac{\theta_1}{\theta_2} \mathbf{M}_2\theta_2,$$

$$(\mathbf{M}_2\theta_2)_v = b_2^1 \frac{\theta_2}{\theta_1} \mathbf{M}_1\theta_1 + \left(b_2^2 + \frac{\partial \ln \theta_2}{\partial v}\right)\mathbf{M}_2\theta_2.$$

Выбирая $\theta_1$ и $\theta_2$ так, чтобы

$$\frac{\partial \ln \theta_1}{\partial u} = -a_1^1, \quad \frac{\partial \ln \theta_2}{\partial v} = -b_2^2, \tag{9}$$

мы приведем к нулю компоненты $a_1^1$ и $b_2^2$ для нового тетраэдра.

Будем предполагать, что такое нормирование координат уже проведено, и будем обозначать новые величины

$$a_1^2 = \delta, \quad b_2^1 = \delta_1.$$

Заметим, что уравнение (9) определяет $\theta_1$ и $\theta_2$ только до множителя, зависящего от одного $v$ (для $\theta_1$) или от одного $u$ (для $\theta_2$).

Так как по условию точка $M_3$ лежит в фокальной плоскости, т. е. в касательной плоскости поверхности $(M_1)$, то плоскость $M_1M_{1u}M_{1v}$ должна совпадать с плоскостью $M_1M_2M_3$. Точка $M_{1u}$ заведомо лежит в этой плоскости — она лежит на прямой $M_1M_2$; следовательно, надо потребовать только, чтобы $M_{1v}$ линейно выражалась через координаты точек $M_1$, $M_2$, $M_3$.

Точно так же координаты точки $M_{2u}$ линейно выражаются через $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ и $\mathbf{M}_4$:

$$\mathbf{M}_{1v} = b_1^1\mathbf{M}_1 + b_1^2\mathbf{M}_2 + b_1^3\mathbf{M}_3,$$

$$\mathbf{M}_{2u} = a_2^1\mathbf{M}_1 + a_2^2\mathbf{M}_2 + a_2^4\mathbf{M}_4.$$

Компоненты $b_1^3$ и $a_2^4$, очевидно, не равны нулю; если, например, $b_1^3 = 0$, то точка $M_{1v}$ тоже лежит на луче $M_1M_2$ и поверхность $(M_1)$ вырождается.

Нормируя координаты точек $M_3$ и $M_4$, мы приведем $b_1^3$ и $a_2^4$ к единице.

Компоненты $b_1^1, b_1^2, a_2^1, a_2^2$, очевидно, определяют положение точек $M_3$ и $M_4$ в фокальных плоскостях $M_1M_2M_3$ и $M_1M_2M_4$. Выбор этих величин закрепляет тетраэдр. Мы их оставляем произвольными.

Условия совместности (1) для $i = 1$, $k = 4$ или для $i = 2$, $k = 3$ дадут нам:

$$a_3^4 = -b_1^2, \quad b_4^3 = -a_2^1.$$

Вводя новые обозначения, мы придем к таблице [43]:

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{M}_{1u} &= \delta \mathbf{M}_2,\\
\mathbf{M}_{2u} &= q_1\mathbf{M}_1 + p_1\mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_4,\\
\mathbf{M}_{3u} &= m\mathbf{M}_1 + n\mathbf{M}_2 - q\mathbf{M}_4,\\
\mathbf{M}_{4u} &= N_1\mathbf{M}_1 + R_1\mathbf{M}_2 - \Delta_1\mathbf{M}_3 - P_1\mathbf{M}_4,\\
\mathbf{M}_{1v} &= p\mathbf{M}_1 + q\mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3,\\
\mathbf{M}_{2v} &= \delta_1\mathbf{M}_1,\\
\mathbf{M}_{3v} &= R\mathbf{M}_1 + N\mathbf{M}_2 - P\mathbf{M}_3 - \Delta\mathbf{M}_4,\\
\mathbf{M}_{4v} &= n_1\mathbf{M}_1 + m_1\mathbf{M}_2 - q_1\mathbf{M}_3.
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

Условия совместности примут вид:

$$\left.\begin{aligned}
p_u - P_u &= \delta\delta_1 - \Delta\Delta_1, & p_{1v} - P_{1v} &= \delta\delta_1 - \Delta\Delta_1,\\
p_u &= \delta\delta_1 - qq_1 - m, & p_{1v} &= \delta\delta_1 - qq_1 - m_1,\\
\delta_v - q_u &= p\delta + p_1 q + n, & \delta_{1u} - q_{1v} &= p_1\delta_1 + pq_1 + n_1,\\
\Delta_u - q_v &= P_1\Delta + Pq + N, & \Delta_{1v} - q_{1u} &= P\Delta_1 + P_1 q_1 + N_1,\\
m_v - R_u &= -m(P+p) - \Delta N_1 - \delta_1 n + Nq_1 + n_1 q, &&\\
m_{1u} - R_{1v} &= -m_1(P_1+p_1) - \Delta_1 N - \delta n_1 + N_1 q + nq_1, &&\\
n_v - N_u &= R\delta - R_1\Delta + Np_1 - Pn - q(m - m_1), &&\\
n_{1u} - N_{1v} &= R_1\delta_1 - R\Delta_1 - N_1 p - P_1 n_1 + q_1(m - m_1). &&
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II})$$

Коэфициенты системы (I) можно привести в виде таблицы:

| | $\mathbf{M}_1$ | $\mathbf{M}_2$ | $\mathbf{M}_3$ | $\mathbf{M}_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{M}_{1u}$ | 0 | $\delta$ | 0 | 0 |
| $\mathbf{M}_{2u}$ | $q_1$ | $p_1$ | 0 | 1 |
| $\mathbf{M}_{3u}$ | $m$ | $n$ | 0 | $-q$ |
| $\mathbf{M}_{4u}$ | $N_1$ | $R_1$ | $-\Delta_1$ | $-P_1$ |

| | $\mathbf{M}_1$ | $\mathbf{M}_2$ | $\mathbf{M}_3$ | $\mathbf{M}_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{M}_{1v}$ | $p$ | $q$ | 1 | 0 |
| $\mathbf{M}_{2v}$ | $\delta_1$ | 0 | 0 | 0 |
| $\mathbf{M}_{3v}$ | $R$ | $N$ | $-P$ | $-\Delta$ |
| $\mathbf{M}_{4v}$ | $n_1$ | $m_1$ | $-q_1$ | 0 |

**§ 3. Тангенциальные и линейные координаты.** Построенный нами канонический тетраэдр также удобно может быть использован для изучения конгруэнции в тангенциальных координатах.

Введем координаты граней тетраэдра посредством формул:

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{m}_1 &= \vartheta(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3), & \mathbf{m}_2 &= \vartheta(\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{M}_4),\\
\mathbf{m}_3 &= \vartheta(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_4\mathbf{M}_3), & \mathbf{m}_4 &= \vartheta(\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4),
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

где множитель пропорциональности $\vartheta$ определяется уравнениями:

$$\frac{\partial \ln \vartheta}{\partial u} = P_1 - p_1, \quad \frac{\partial \ln \vartheta}{\partial v} = P - p, \quad (11)$$

которые совместны в силу (II).



Диференцируя формулы (10) и пользуясь таблицей (I) и формулами (11), мы получим:

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{m}_{1v} &= \Delta\mathbf{m}_2,\\
\mathbf{m}_{2v} &= q_1\mathbf{m}_1 + P\mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_4,\\
\mathbf{m}_{3v} &= m_1\mathbf{m}_1 + N\mathbf{m}_2 - q\mathbf{m}_4,\\
\mathbf{m}_{4v} &= n_1\mathbf{m}_1 + R\mathbf{m}_2 - \delta_1\mathbf{m}_3 - p\mathbf{m}_4,\\
\mathbf{m}_{1u} &= P_1\mathbf{m}_1 + q\mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_3,\\
\mathbf{m}_{2u} &= \Delta_1\mathbf{m}_1,\\
\mathbf{m}_{3u} &= R_1\mathbf{m}_1 + n\mathbf{m}_2 - p_1\mathbf{m}_3 - \delta\mathbf{m}_4,\\
\mathbf{m}_{4u} &= N_1\mathbf{m}_1 + m\mathbf{m}_2 - q_1\mathbf{m}_3.
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{III})$$

Компоненты системы (III) можно привести в виде таблицы:

| | $\mathbf{m}_1$ | $\mathbf{m}_2$ | $\mathbf{m}_3$ | $\mathbf{m}_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{m}_{1v}$ | 0 | $\Delta$ | 0 | 0 |
| $\mathbf{m}_{2v}$ | $q_1$ | $P$ | 0 | 1 |
| $\mathbf{m}_{3v}$ | $m_1$ | $N$ | 0 | $-q$ |
| $\mathbf{m}_{4v}$ | $n_1$ | $R$ | $-\delta_1$ | $-p$ |

| | $\mathbf{m}_1$ | $\mathbf{m}_2$ | $\mathbf{m}_3$ | $\mathbf{m}_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{m}_{1u}$ | $P_1$ | $q$ | 1 | 0 |
| $\mathbf{m}_{2u}$ | $\Delta_1$ | 0 | 0 | 0 |
| $\mathbf{m}_{3u}$ | $R_1$ | $n$ | $-p_1$ | $-\delta$ |
| $\mathbf{m}_{4u}$ | $N_1$ | $m$ | $-q_1$ | 0 |

Мы видим, что в этой таблице переменные $u$ и $v$ поменялись местами. Это объясняется тем, что при перемещении точки $M_1$ по линии $u$ касательные плоскости $m_1$ имеют характеристиками касательные к линии $v$ в силу сопряженности линий $u$ и $v$ на поверхности $(\mathbf{M}_1)$. Это, впрочем, непосредственно следует и из таблицы (III): меняя параметр $v$, мы получаем плоскость $m_{1v}$, которая проходит через ось пучка плоскостей $(m_1, m_2)$.

Мы видим, что при переходе от точечных к тангенциальным координатам величины, обозначенные малыми буквами: $\delta$, $\delta_1$, $p$, $p_1$, $n$, $n_1$, переходят в одноименные прописные, иногда с заменой указателя $\Delta$, $\Delta_1$, $P_1$, $P$, $N$, $N_1$; величины $q$, $q_1$, $m$, $m_1$, $R$, $R_1$ или сохраняются или переходят в симметричные (меняется указатель) $q$, $q_1$, $m_1$, $m$, $R_1$, $R$.

Мы можем использовать тот же тетраэдр и для изучения конгруэнции в линейных координатах луча.

Обозначим линейные координаты ребер тетраэдра через

$$\mathbf{r}_{ik} = \sqrt{\vartheta}\,(\mathbf{M}_i\mathbf{M}_k),$$

где $\vartheta$ сохраняет то же значение, что и раньше.

Диференцируя эти формулы и пользуясь таблицей (I), получим таблицу компонент движения тетраэдра:

Очевидно, условия совместности системы (III) или системы (IV) те же самые, как и системы (I).

| | 12 | 13 | 14 | 23 | 42 | 34 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{r}_{12u}$ | $\frac{1}{2}(P_1+p_1)$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $\mathbf{r}_{13u}$ | $n$ | $\frac{P_1-p_1}{2}$ | $-q$ | $\delta$ | 0 | 0 |
| $\mathbf{r}_{14u}$ | $R_1$ | $-\Delta_1$ | $-\frac{P_1+p_1}{2}$ | 0 | $-\delta$ | 0 |
| $\mathbf{r}_{23u}$ | $-m$ | $q_1$ | 0 | $\frac{P_1+p_1}{2}$ | $q$ | $-1$ |
| $\mathbf{r}_{42u}$ | $N_1$ | 0 | $-q_1$ | $\Delta_1$ | $-\frac{P_1-p_1}{2}$ | 0 |
| $\mathbf{r}_{34u}$ | 0 | $-N_1$ | $m$ | $-R_1$ | $-n$ | $-\frac{P_1+p_1}{2}$ |

(IV)

| | 12 | 13 | 14 | 23 | 42 | 34 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{r}_{12v}$ | $\frac{P+p}{2}$ | 0 | 0 | $-1$ | 0 | 0 |
| $\mathbf{r}_{13v}$ | $N$ | $-\frac{P-p}{2}$ | $-\Delta$ | $q$ | 0 | 0 |
| $\mathbf{r}_{14v}$ | $m_1$ | $-q_1$ | $\frac{P+p}{2}$ | 0 | $-q$ | 1 |
| $\mathbf{r}_{23v}$ | $-R$ | $\delta_1$ | 0 | $-\frac{P+p}{2}$ | $\Delta$ | 0 |
| $\mathbf{r}_{42v}$ | $n_1$ | 0 | $-\delta_1$ | $q_1$ | $\frac{P-p}{2}$ | 0 |
| $\mathbf{r}_{34v}$ | 0 | $-n_1$ | $R$ | $-m_1$ | $-N$ | $-\frac{P+p}{2}$ |

Нетрудно проверить, что координаты $\mathbf{r}_{ik}$ тождественно удовлетворяют условию Плюккера. В частности всегда

$$\mathbf{r}_{12}\mathbf{r}_{34u}+\mathbf{r}_{34}\mathbf{r}_{12u}+\mathbf{r}_{13}\mathbf{r}_{42u}+\mathbf{r}_{42}\mathbf{r}_{13u}+\mathbf{r}_{14}\mathbf{r}_{23u}+\mathbf{r}_{23}\mathbf{r}_{14u}=0.$$

Конгруэнции прямых, как образ линейчатого пространства, естественно изучать в координатах прямой, т. е., казалось бы, естественно положить



в основу таблицу (IV). Мы видим, однако, что она, являясь следствием таблицы (I), содержит значительно больше членов. Следовательно, пользование этой таблицей более сложно. Поэтому мы будем, как правило, обращаться к точечным координатам.

**§ 4. Различные формы канонического тетраэдра.** Различный выбор вершин $M_3, M_4$ в фокальных плоскостях $M_1M_2M_3$ и $M_1M_2M_4$, т. е. различный выбор величин $p, q, p_1, q_1$, приводит к различным формам тетраэдра $T$.

А. Можно прежде всего положить все эти величины равными нулю:

$$p=0,\quad q=0,\quad p_1=0,\quad q_1=0.$$

Так делает Вильчинский в своем первом мемуаре.

Этот выбор тетраэдра зависит от выбора параметров $u, v$ и поэтому не является инвариантным (см. следующий параграф), но он значительно упрощает всю таблицу.

Если мы обозначим чертой наверху все величины, относящиеся к этому тетраэдру Вильчинского, то, очевидно,

$$\overline{\mathbf{M}}_3=p\mathbf{M}_1+q\mathbf{M}_2+\mathbf{M}_3,$$
$$\overline{\mathbf{M}}_4=q_1\mathbf{M}_1+p_1\mathbf{M}_2+\mathbf{M}_4.$$

Диференцируя эти формулы и пользуясь таблицей (I), мы заметим что величины $\delta, \delta_1, \Delta, \Delta_1$ не зависят от выбора величины $p, q, p_1, q_1$; что касается остальных, то они связаны соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}&\overline{P}=P-p,\quad \overline{m}=m+p_u+qq_1,\quad \overline{n}=n+q_u+p_1q+p\delta,\\&\overline{R}=R+Pp+q_1\Delta+p_v+q\delta_1,\\&\overline{N}=N+Pq+p_1\Delta+q_v\end{aligned}\right\}\qquad(V)$$

и аналогичными с заменой $u$ на $v$.

Таблица (II) принимает вид:

$$\left.\begin{aligned}\overline{P}_u=\overline{P}_{1v}&=\Delta\Delta_1-\delta\delta_1,\\\overline{N}&=\Delta_u-\overline{P}_1\Delta,\\\overline{N}_1&=\Delta_{1v}-\overline{P}\Delta_1,\quad \overline{n}=\delta_v,\quad \overline{n}_1=\delta_{1u},\\\overline{R}\delta-\overline{R}_1\Delta&=\overline{n}_v-\overline{N}_u+\overline{P}\delta_v,\\\overline{R}_1\delta_1-\overline{R}\Delta_1&=\overline{n}_{1u}-\overline{N}_{1v}+\overline{P}_1\delta_{1u},\\\overline{R}_u&=\overline{N}_1\Delta+2\delta_v\delta_1+\delta\delta_{1v}+\overline{P}\delta\delta_1,\\\overline{R}_{1v}&=\overline{N}\Delta_1+2\delta_{1u}\delta+\delta_1\delta_u+\overline{P}_1\delta\delta_1.\end{aligned}\right\}\qquad(VI)$$

B. Можно выбрать точки $M_3$ и $M_4$ в соответствующих точках двух преобразований Лапласа [44].

Касательные к линии $u$ на поверхности $(M_1)$ или к линии $v$ на поверхности $(M_2)$ описывают конгруэнцию с двумя фокусами $M_1$ и $M_2$. Касательные к линии $v$ на поверхности $(M_1)$ тоже описывают конгруэнцию, которая называется преобразованием Лапласа от конгруэнции $(M_1M_2)$. Один из фокусов луча $M_1M_{1v}$ есть точка $M_1$; другой фокус описывает поверхность, которая называется преобразованием Лапласа от поверхности $(M_1)$.

Другое преобразование Лапласа для поверхности $(M_1)$ является поверхностью $(M_2)$. Совершенно так же поверхность $(M_2)$ имеет два преобразования Лапласа: поверхность $(M_1)$ в сторону параметра $v$ и поверхность, описанную вторым фокусом луча $M_2M_{2u}$, в сторону параметра $u$.

Итак, допустим, что $M_3$ есть второй фокус луча $M_1M_{1v}$ и $M_4$ — второй фокус луча $M_2M_{2u}$. В таком случае точка $M_{1v}$ лежит на прямой $M_1M_3$, ее координаты линейно выражаются через координаты точек $M_1$ и $M_3$. Таблица (I) показывает, что в этом случае $q$ равно нулю.

С другой стороны, так как $M_3$ — фокус луча $M_1M_3$, то при подходящем выборе диференциалов $du : dv$ точка $dM_3 = M_{3u}du + M_{3v}dv$ должна тоже лежать на луче $M_1M_3$.

Таблица (I) дает:

$$n\,du + N\,dv = 0, \quad -\Delta\,dv = 0.$$

Равенство $\Delta$ нулю означает вырождение поверхности $(M_1)$, как это ясно из таблицы (III), ибо тогда

$$m_{1v} = 0;$$

касательная плоскость $m_1$ вдоль линии $v$ одна и та же, и поверхность $(M_1)$ — развертывающаяся.

Оставляя этот случай, имеем:

$$dv = 0, \quad n = 0.$$

Итак, преобразования Лапласа переводят развертывающиеся поверхности конгруэнции в развертывающиеся.

Выбранный тетраэдр характеризуется равенствами:

$$q = 0, \quad q_1 = 0, \quad n = 0, \quad n_1 = 0, \tag{12}$$

из которых два написаны по аналогии заменой $u$ на $v$.

Таблица (II) дает теперь:

$$\left.\begin{aligned}
&p = \frac{\partial \ln \delta}{\partial v}, \quad p_1 = \frac{\partial \ln \delta_1}{\partial u}, \quad m = \delta\delta_1 - \frac{\partial^2 \ln \delta}{\partial u\,\partial v}; \quad m_1 = \delta\delta_1 - \frac{\partial^2 \ln \delta_1}{\partial u\,\partial v},\\
&N = \Delta_u - P_1\Delta, \quad N_1 = \Delta_{1v} - P\Delta_1,\\
&N_{1v} + N_1\frac{\partial \ln \delta}{\partial v} = R\Delta_1 - R_1\delta_1, \quad N_u + N\frac{\partial \ln \delta_1}{\partial u} = R_1\Delta - R\delta,\\
&m_v - R_u = -m(P+p) - \Delta N_1, \quad m_{1u} - R_{1v} = -m_1(P_1 + p_1) -\\
&\qquad\qquad - \Delta_1 N,\\
&P_u = \frac{\partial^2 \ln \delta}{\partial u\,\partial v} - \delta\delta_1 + \Delta\Delta_1,\\
&P_{1v} = \frac{\partial^2 \ln \delta_1}{\partial u\,\partial v} - \delta\delta_1 + \Delta\Delta_1.
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$



Этот тетраэдр, очевидно, инвариантен по отношению к выбору параметров $u$, $v$.

Оба построенные тетраэдра вполне определены. Отсюда следует, например, что восемь величин

$$\begin{matrix} \delta, & \Delta, & P, & R, \\ \delta_1, & \Delta_1, & P_1, & R_1, \end{matrix}$$

удовлетворяющие системе (13), определяют конгруэнцию, и, обратно, заданная конгруэнция их вполне определяет.

Откидывая первые шесть уравнений системы (13), которые дают величины $p, p_1, m, m_1, N, N_1$, мы имеем на восемь величин всего шесть независимых уравнений. Значит, две величины остаются совершенно произвольными.

Произвольная конгруэнция зависит от двух произвольных функций двух независимых переменных.

С. Всякий раз, как мы наложим на $p, q, p_1, q_1$ четыре уравнения, мы выделим ту или другую форму канонического тетраэдра.

Например, полагая

$$m = 0, \quad m_1 = 0, \quad n = 0, \quad n_1 = 0,$$

что дает для $p, q, p_1, q_1$ уравнения:

$$p_u = p_{1v} = \delta\delta_1 - qq_1, \quad q_u = \delta_v - p\delta - p_1q, \quad q_{1v} = \delta_{1u} - p_1\delta_1 - pq_1,$$

мы получим тетраэдр, в котором ребро $M_3M_4$ описывает конгруэнцию, отнесенную к развертывающимся поверхностям $u$, $v$ и имеющую фокусами точки $M_3$, $M_4$.

Если положить

$$n = 0, \quad n_1 = 0, \quad N = 0, \quad N_1 = 0,$$

что дает для $p, q, p_1, q_1$ систему уравнений:

$$\begin{aligned} q_u &= \delta_v - p\delta - p_1q, & q_{1u} &= \Delta_{1v} - P\Delta_1 - P_1q_1,\\ q_v &= \Delta_u - P_1\Delta - Pq, & q_{1v} &= \delta_{1u} - p_1\delta_1 - pq_1, \end{aligned}$$

мы придем к тетраэдру, четыре ребра которого $M_1M_2$, $M_1M_3$, $M_2M_4$ и $M_3M_4$ описывают конгруэнции, фокусами которых служат вершины $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$.

Так как $p, q, p_1, q_1$ оба раза определяются из диференциальных уравнений, то тетраэдр такого рода для данной конгруэнции не будет единственным.

**§ 5. Изменение параметров.** Если даже тетраэдр $T$ закреплен, то количества $\delta$, $\delta_1$, $\Delta$, $\Delta_1$ не будут вполне определены. Нетрудно заметить, что мы можем: 1) произвести замену переменных $u$, $v$, 2) изменить нормирование координат вершин тетраэдра, умножив четыре координаты точек $M_1$ и $M_3$ на функцию $V$ одного переменного $v$ и четыре координаты точек $M_2$ и $M_3$ на функцию $U$ одного переменного — $u$.

Обозначая звездочкой новые параметры $u^*$, $v^*$ и новые компоненты $\delta^*$, $\delta_1^*$ и т. д., мы получим таблицу:

$$\left.\begin{aligned}
\delta^* &= \delta \frac{V}{U}\frac{du}{du^*}, & \delta_1^* &= \delta_1 \frac{U}{V}\frac{dv}{dv^*},\\
\Delta^* &= \Delta \frac{V}{U}\left(\frac{dv}{dv^*}\right)^2 \frac{du^*}{du}, & \Delta_1^* &= \Delta_1 \frac{U}{V}\left(\frac{du}{du^*}\right)^2 \frac{dv^*}{dv},\\
R^* &= R\left(\frac{dv}{dv^*}\right)^2, & R_1^* &= R_1\left(\frac{du}{du^*}\right)^2,\\
m^* &= m\frac{du}{du^*}\frac{dv}{dv^*}, & m_1^* &= m_1\frac{du}{du^*}\frac{dv}{dv^*},\\
N^* &= N\frac{V}{U}\left(\frac{dv}{dv^*}\right)^2, & N_1^* &= N_1\frac{U}{V}\left(\frac{du}{du^*}\right)^2,\\
n^* &= n\frac{V}{U}\frac{du}{du^*}\frac{dv}{dv^*}, & n_1^* &= n_1\frac{U}{V}\frac{du}{du^*}\frac{dv}{dv^*},\\
q^* &= q\frac{V}{U}\frac{dv}{dv^*}, & q_1^* &= q_1\frac{U}{V}\frac{du}{du^*},\\
p^* &= p\frac{dv}{dv^*}+\frac{d\ln V}{dv^*}, & p_1^* &= p_1\frac{du}{du^*}+\frac{d\ln U}{du^*},\\
P^* &= P\frac{dv}{dv^*}-\frac{d}{dv^*}\ln\left(V\frac{dv}{dv^*}\right), & P_1^* &= P_1\frac{du}{du^*}-\frac{d}{du^*}\ln\left(U\frac{du}{du^*}\right).
\end{aligned}\right\}\quad \text{(VII)}$$

Таблица формул (V) давала нам те величины, которые не меняются с изменением положения вершин $M_3$, $M_4$ тетраэдра, Нетрудно теперь составить такие комбинации, которые не менялись бы и при изменении нормирования координаты $\mathbf{M}_i$, т. е. при изменении множителей $U$, $V$:

$$\delta\delta_1,\quad \Delta\Delta_1,\quad \frac{\Delta}{\delta},\quad \frac{\Delta_1}{\delta_1},$$

$$m+p_u+qq_1,\quad R+Pp+q_1\Delta+p_v+q\delta,$$

$$\delta_1(n+q_u+p_1q+p\delta),\quad \delta_1(N+Pq+p_1\Delta+q_v).$$

Не меняются и при замене параметров выражения:

$$\frac{\delta\delta_1}{\Delta\Delta_1},\quad \frac{m+p_u+qq_1}{\delta\delta_1},\quad \frac{R+Pp+q_1\Delta+p_v+q\delta}{\delta_1\sqrt{\Delta\delta}},$$

$$\frac{n+q_u+p_1q+p\delta}{\delta\sqrt[4]{\Delta^2\Delta_1\delta_1}},\quad \frac{N+Pq+p_1\Delta+q_v}{\delta\sqrt{\delta_1\Delta\sqrt{\frac{\Delta}{\delta}}}}.$$

**§ 6. Конгруэнции с линейчатыми фокальными поверхностями.** Если фокальная поверхность $(M_1)$ вырождается в линию, то в каждой точке такой линии сходятся $\infty^1$ лучей конгруэнции. Одно семейство развертывающихся поверхностей состоит из конусов, вершины которых лежат в точках $M_1$. Следовательно, линия $u$ на поверхности $(M_1)$ сводится к точке. Производная $\mathbf{M}_{1u}$ пропорциональна координатам точки $M_1$; значит,

$$\delta = 0$$



есть условие, что первая полость фокальной поверхности вырождается в кривую.

Аналогично из таблицы (III) мы получим, что

$$\Delta = 0$$

есть условие того, что поверхность $(M_1)$ есть развертывающаяся поверхность.

Когда поверхность $(M_1)$ есть линейчатая поверхность?

Пусть $M_1M_3$ — прямолинейная образующая поверхности $(M_1)$. Произвольная точка $P$ этой прямой имеет координаты

$$\mathbf{P} = \mathbf{M}_1\lambda + \mathbf{M}_3\nu.$$

При перемещении точки $P$ по прямой меняются только функции $\lambda$ и $\nu$. Следовательно, не только первая производная от $\mathbf{P}$, но и вторая будет лежать на той же прямой.

Если диференциал $d\mathbf{M}_1$ соответствует перемещению точки $M_1$ по образующей $M_1M_3$, то точка $d^2\mathbf{M}_1$ так же, как точка $d\mathbf{M}_1$, лежит на прямой $M_1M_3$ и, следовательно, координаты ее линейно выражаются через координаты точек $M_1$ и $M_3$.

Исключая $M_2$ из двух первых уравнений таблицы (I), получаем:

$$d\mathbf{M}_1 = \delta\mathbf{M}_{1v} - q\mathbf{M}_{1u} = \delta(p\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3),$$

где для простоты мы приняли [45]

$$du = -q,\quad dv = \delta$$

для перемещения вдоль образующей $M_1M_3$.

Диференцируя вторично, получим:

$$\begin{aligned}
d^2\mathbf{M}_1 &= \delta\,[\delta(p\mathbf{M}_1+\mathbf{M}_3)]_v - q\,[\delta(p\mathbf{M}_1+\mathbf{M}_3)]_u =\\
&= A\mathbf{M}_1 + B\mathbf{M}_3 + \delta(N\delta - nq)\,\mathbf{M}_2 + \delta(q^2-\delta\Delta)\,\mathbf{M}_4,
\end{aligned}$$

где $A$ и $B$ — два выражения, которые нас не интересуют.

Очевидно, $d^2\mathbf{M}_1$ лежит на прямой $M_1M_3$, если

$$q^2 = \delta\Delta,\quad N\delta = nq. \tag{14}$$

С помощью уравнений (V) мы их преобразуем к виду:

$$q^2 = \delta\Delta,\quad qq_u - \delta q_v = \bar{n}q - \bar{N}\delta + \bar{P}q\delta.$$

Первое уравнение дает два значения $q$. Если они оба удовлетворяют второму уравнению, то через точку $M_1$ проходят две прямолинейных образующих, т. е. поверхность $(M_1)$ — поверхность с двумя системами прямолинейных образующих, поверхность второго порядка.

Два значения $q$ отличаются знаком. Выбирая во втором уравнении члены, меняющие и не меняющие знак вместе с $q$, мы напишем условие, что $(M_1)$ — поверхность второго порядка, в виде:

$$q^2 = \delta\Delta,\quad qq_u + \bar{N}\delta = 0,\quad \delta q_v + \bar{n}q + \bar{P}\delta q = 0. \tag{15}$$

Исключая $q$, получим в силу уравнений (VI):

$$2\overline{P}_1 = \frac{\partial}{\partial u} \ln (\delta\Delta^3),$$

$$2\overline{P} = -\frac{\partial}{\partial v} \ln (\delta^3\Delta),$$

откуда следует:

$$\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} \ln (\delta\Delta) = 0, \quad \frac{\partial^2 \ln \delta}{\partial u\, \partial v} = \delta\delta_1 - \Delta\Delta_1. \tag{16}$$

Если обе полости фокальной поверхности — поверхности второго порядка, то по аналогии

$$\left.\begin{aligned} 2\overline{P}_1 &= \frac{\partial}{\partial u} \ln (\delta\Delta^3) = -\frac{\partial}{\partial u} \ln (\delta_1^3\Delta_1), \\ 2\overline{P} &= \frac{\partial}{\partial v} \ln (\delta_1\Delta_1^3) = -\frac{\partial}{\partial v} \ln (\delta^3\Delta), \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

откуда, интегрируя, имеем:

$$\delta\delta_1^3\Delta^3\Delta_1 = V, \quad \delta_1\delta^3\Delta\Delta_1^3 = U, \tag{17'}$$

где $U$ и $V$ суть соответственно функции одного $u$ и одного $v$. Они, очевидно, не равны нулю, если фокальная поверхность не вырождается; меняя параметр $u$ и $v$, мы их приведем к единице, как это сейчас же следует из уравнений (VII).

Перемножая уравнения (17′) и извлекая корень четвертой степени, получим:

$$\delta\delta_1\Delta\Delta_1 = \pm 1,$$

а взяв отношение, получим:

$$\delta\Delta_1 = \pm \delta_1\Delta,$$

откуда

$$\Delta = \frac{1}{\delta_1}, \quad \Delta_1 = \frac{1}{\delta}. \tag{18}$$

Мы здесь взяли положительный знак перед $\delta$ и $\delta_1$; если бы он был отрицателен, то, меняя знак параметра $u$, мы его сделали бы положительным.

Если теперь внести значение $\overline{P}$ и $\overline{P}_1$ из уравнений:

$$2\overline{P} = \frac{\partial}{\partial v} \ln \frac{\delta_1}{\delta^3}, \quad 2\overline{P}_1 = \frac{\partial}{\partial u} \ln \frac{\delta}{\delta_1^3} \tag{17}$$

в первое уравнение (VI), то получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} \ln \frac{\delta}{\delta_1} = 0,$$

и, следовательно,

$$\frac{\delta}{\delta_1} = \frac{U_1}{V_1},$$



где $U_1$ и $V_1$ — снова две произвольные функции одного переменного $u$ и одного переменного $v$. Умножая четыре координаты точек $M_1$ и $M_2$ на подходящие функции, мы приведем $U_1$ и $V_1$ к единице, не меняя соотношений (18) [см. уравнения (VII)].

Итак, конгруэнция, обе фокальные поверхности которой суть поверхности второго порядка, определяется при подходящем выборе параметра $u$ и $v$ и при соответствующей нормировке координат $M_1$ и $M_2$ из уравнений:

$$\delta = \delta_1, \quad \Delta = \Delta_1 = \frac{1}{\delta}. \tag{19}$$

## Глава седьмая

## КОНГРУЭНЦИИ W

**§ 1. Соприкасающийся комплекс.** Уравнение соприкасающегося к конгруэнции комплекса можно искать так же, как мы искали соприкасающийся комплекс к линейчатой поверхности, образованной касательными одной асимптотической линии на поверхности.

Поскольку мы имеем таблицу производных (IV) для линейных координат ребер тетраэдра, мы можем упростить выкладки, записывая уравнения комплекса в виде:

$$\sum a_{ik}\mathbf{r}^{ik} = 0,$$

где $\mathbf{r}^{ik}$ — текущие линейные координаты луча комплекса. Так же, как и ранее, здесь будем опускать указатели:

$$\sum a\mathbf{r} = 0. \tag{1}$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты первого ребра нашего тетраэдра и всех бесконечно близких

$$\sum a(\mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{12u}\,du + \mathbf{r}_{12v}\,dv + \ldots) = 0.$$

Обращая в нуль коэфициенты при различных степенях $du$, $dv$, мы получим условие касания того или другого порядка линейного комплекса (1) и конгруэнции

$$\sum a\mathbf{r}_{12} = 0, \quad \sum a\mathbf{r}_{12u} = 0, \quad \sum a\mathbf{r}_{12v} = 0\ldots$$

Внося сюда значение производных из таблицы (IV), мы получим условия касания первого порядка в форме:

$$\sum a\mathbf{r}_{12} = 0, \quad \sum a\mathbf{r}_{14} = 0, \quad \sum a\mathbf{r}_{23} = 0. \tag{2}$$

Дифереицируя два последние уравнения еще раз по $u$ и по $v$, получим условия касания второго порядка:

$$\left.\begin{aligned} &\sum a(\Delta_1\mathbf{r}_{13} + \delta\mathbf{r}_{42}) = 0, \quad \sum a(q_1\mathbf{r}_{13} + q\mathbf{r}_{42} - \mathbf{r}_{34}) = 0,\\ &\sum a(\delta_1\mathbf{r}_{13} + \Delta\mathbf{r}_{42}) = 0.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Примем теперь за координатный тетраэдр канонический тетраэдр $(M_1, M_2, M_3, M_4)$ и будем обозначать буквами $\rho_{ik}$ координаты прямой по отношению к этому тетраэдру.



Тогда из всех координат $\mathbf{r}_{ik}^{\alpha\beta}$ не будут равны нулю только те, у которых верхние указатели совпадают с нижними $\mathbf{r}_{ik}^{ik}$. Условия (2) и (3) примут вид:

$$a_{12} = 0, \quad a_{14} = 0, \quad a_{23} = 0, \tag{4}$$

$$\Delta_1 a_{13} + \delta a_{42} = 0, \quad q_1 a_{13} + q a_{42} - a_{34} = 0, \quad \delta_1 a_{13} + \Delta a_{42} = 0. \tag{5}$$

Мы видим, что касание второго порядка налагает всего шесть условий на коэфициенты в уравнении комплекса, а так как это уравнение содержит только пять независимых отношений, то с произвольной конгруэнцией линейный комплекс может иметь касание только первого порядка. Касательный комплекс содержит два произвольных параметра, за которые можно принять, например, отношение коэфициентов $a:b:c$:

$$a\rho_{34} + b\rho_{13} + c\rho_{42} = 0. \tag{6}$$

Меняя параметры $a:b:c$, получим связку $\infty^2$ комплексов; они имеют общую линейчатую поверхность — одну систему образующих поверхности второго порядка. В нашем случае эта поверхность разлагается на пару фокальных плоскостей.

Комплекс имеет более высокий порядок касания вдоль линейчатых поверхностей

$$(\Delta_1 b + \delta c)\,du^2 + 2(bq_1 + cq - a)\,du\,dv + (\delta_1 b + \Delta c)\,dv^2 = 0. \tag{7}$$

Если условия (4), (5) содержат только пять независимых уравнений, то существует соприкасающийся комплекс, имеющий с конгруэнцией касание второго порядка.

Исключая $a_{13}$ и $a_{42}$ из двух крайних уравнений (5), мы получим условие, которому должна удовлетворять конгруэнция, чтобы такой комплекс существовал:

$$\delta\delta_1 - \Delta\Delta_1 = 0. \tag{8}$$

Уравнение соприкасающегося комплекса:

$$\delta\rho_{13} - \Delta_1\rho_{42} + (\delta q_1 - \Delta_1 q)\rho_{34} = 0. \tag{9}$$

**§ 2. Конгруэнции** $W$. Конгруэнции, обладающие в каждом луче соприкасающимся линейным комплексом, очевидно, занимают особое место. Бианки дал им название конгруэнции $W$ по имени Вейнгартена (Weingarten), который встречался с частным случаем таких конгруэнций в задаче, имеющей строго метрический характер. В прекрасной теореме (1863, „Journ. de Math.“ 62), которая значительно двинула вперед трудную задачу изгибания поверхности, Вейнгартен поставил в связь изгибание поверхности вращения с изысканием особого класса поверхностей, главные радиусы кривизны которых связаны соотношением. Эти поверхности носят имя Вейнгартена. Рибокур (Ribaucour) в 1872 г. (С. R., т. 74, стр. 1399) открыл замечательное свойство конгруэнции нормалей к поверхности Вейнгартена: на фокальных поверхностях ее асимптотические линии соответствуют друг другу. Это дало повод Бианки назвать конгруэнцией $W$, всякую конгруэнцию, которая обладает этим свойством.

Нетрудно показать, что конгруэнция (3) действительно является конгруэнцией $W$, т. е. что асимптотическим линиям одной ее фокальной поверхности на другой соответствуют также асимптотические.

Асимптотические линии на поверхности $(M_1)$ определяются уравнением:

$$(M_1 M_{1u} M_{1v}\, d^2 M_1) = 0.$$

Если сюда внести производные от $M_1$ из таблицы (I), то получим:

$$(M_1 M_2 M_3\, d^2 M_1) = 0,$$

или

$$(M_1 M_2 M_3 M_4)(\delta\, du^2 - \Delta\, dv^2) = 0,$$

или, так как первый определитель не нуль:

$$\delta\, du^2 - \Delta\, dv^2 = 0. \qquad (10)$$

По аналогии асимптотические линии на второй полости фокальной поверхности определяются уравнением:

$$\Delta_1\, du^2 - \delta_1\, dv^2 = 0. \qquad (10')$$

Если асимптотические линии на обеих полостях фокальной поверхности соответствуют, то коэфициенты в обоих уравнениях пропорциональны. Это непосредственно приводит к условию (8).

Уравнения (II) дают для конгруэнций $W$:

$$\frac{\partial}{\partial u}(p - P) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v}(p_1 - P_1) = 0,$$

следовательно,

$$P = p + V, \quad P_1 = p_1 + U,$$

где $U$ и $V$ — произвольные функции одного $u$ и одного $v$. Таблица (VII) показывает, что выбором параметров $u$, $v$ или, по желанию, подходящим нормированием координат $M_1^i$ и $M_2^i$ можно привести $U$ и $V$ к нулю.

Таким образом как следствие уравнения (8) имеем:

$$P = p, \quad P_1 = p_1. \qquad (11)$$

Основное свойство конгруэнции $W$ — то, что она обладает соприкасающимся линейным комплексом, — может быть выражено еще иначе.

Мы видели, что условие (8) явилось простым следствием того, что среди шести уравнений (4), (5) линейно независимых только пять. Но уравнения (4), (5) равносильны уравнениям (2), (3), а эти последние можно написать в виде:

$$\sum a\mathbf{r}_{12} = 0, \quad \sum a\mathbf{r}_{12u} = 0, \quad \sum a\mathbf{r}_{12v} = 0,$$
$$\sum a\mathbf{r}_{12uu} = 0, \quad \sum a\mathbf{r}_{12uv} = 0, \quad \sum a\mathbf{r}_{12vv} = 0.$$

Отсюда следует, что между линейными координатами луча и их производными первого и второго порядка должно существовать линейное соотношение или, иначе, что все шесть линейных координат луча удовлетворяют одному и тому же линейному уравнению в частных производных второго порядка.



Действительно, полагая для простоты выкладок

$$p = 0, \quad p_1 = 0, \quad q = 0, \quad q_1 = 0$$

и, следовательно, в силу (11)

$$P = 0, \quad P_1 = 0,$$

мы из таблицы (IV) получим, обозначая координаты луча $(M_1 M_2)$ буквой $\mathbf{r}$ без указателей:

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{r}_{1u}, \quad \mathbf{r}_v = -\mathbf{r}_{28},$$
$$\mathbf{r}_{uu} = -\Delta_1 \mathbf{r}_{13} - \delta \mathbf{r}_{42} + R_1 \mathbf{r},$$
$$\mathbf{r}_{vv} = -\delta_1 \mathbf{r}_{18} - \Delta \mathbf{r}_{42} + R\mathbf{r}.$$

откуда

$$\Delta \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2} - \delta \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2} = (R_1 \Delta - R\delta)\, \mathbf{r},$$

или в силу уравнений (VI):

$$\Delta \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2} - \delta \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2} = (\Delta_{uu} - \delta_{vv})\, \mathbf{r}. \qquad (12)$$

Так как преобразование тетраэдра не меняет компонент $\Delta$ и $\delta$, то, очевидно, уравнения (12) сохраняют силу для всякого канонического тетраэдра.

Отсюда следует теорема Дарбу („Thèorie des surfaces", т. II, стр. 345): шесть линейных координат луча произвольной конгруэнции $W$ удовлетворяют одному и тому же уравнению Лапласа.

Характеристиками уравнения (12) являются общие асимптотические линии (10) на фокальных поверхностях. Следовательно, в параметрах асимптотических линий $\alpha$ и $\beta$ уравнение (12) примет вид:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha\, \partial \beta} = K\mathbf{r}, \qquad (12')$$

где $K$ есть функция от $\alpha$ и $\beta$.

Найти конгруэнцию $W$ значит найти шесть решений уравнений Лапласа (12'), связанных соотношением:

$$\mathbf{r}^{12}\mathbf{r}^{34} + \mathbf{r}^{14}\mathbf{r}^{23} + \mathbf{r}^{13}\mathbf{r}^{42} = 0.$$

Это соотношение — второй степени и линейной подстановкой координат $\mathbf{r}$ может быть преобразовано в любое другое уравнение второй степени, в частности его можно привести к виду, когда левая часть представляет сумму шести квадратов (координаты Клейна). Отсюда название квадратичных решений.

**§ 3. Конгруэнции линейного комплекса.** Диференцируя еще раз уравнение (3), мы находим, что соприкасающийся комплекс имеет с конгруэнцией $W$ касание третьего порядка по направлениям

$$\left(\frac{\Delta}{\delta_1}\right)_u (\Delta_1\, du^2 - 3\delta_1\, dv^2)\, du + \left(\frac{\Delta}{\delta_1}\right)_v (3\Delta_1\, du^2 - \delta_1\, dv^2)\, dv = 0. \qquad (13)$$

Эти направления становятся неопределенными, если

$$\left(\frac{\Delta}{\delta_1}\right)_u = 0, \quad \left(\frac{\Delta}{\delta_1}\right)_v = 0.$$

Интегрируя, мы получим:

$$\frac{\Delta}{\delta_1} = \text{const}.$$

Таблица (VII) показывает, что, умножая на постоянный множитель один из параметров $u$, $v$ или увеличивая координаты точек $M_1$ или $M_2$ в постоянном отношении, что не изменит уравнений (11), мы можем привести произвольную постоянную интеграции к единице.

Следовательно, мы будем иметь:

$$\Delta = \delta_1, \quad \Delta_1 = \delta. \tag{14}$$

В таком случае соприкасающийся комплекс имеет касание третьего порядка.

Нетрудно, однако, заметить, что теперь комплекс останется неизменным для всех лучей конгруэнции, т. е. конгруэнция принадлежит линейному комплексу.

Действительно, диференцируя уравнения (2) и (3) в предположении, что мы переходим от одного луча конгруэнции к другому и, следовательно, от одного соприкасающегося комплекса к другому, т. е., считая коэфициенты $a_{\lambda\mu}$ так же, как и координаты $\mathbf{r}_{ik}^{\lambda\mu}$, переменными, мы сейчас же найдем в силу (14), если положить для простоты $q=0$, $q_1=0$, $p=0$, $p_1=0$:

$$\sum a_u \mathbf{r}_{12} = 0, \quad \sum a_u \mathbf{r}_{14} = 0, \quad \sum a_u \mathbf{r}_{23} = 0,$$
$$\sum a_u (\mathbf{r}_{13} + \mathbf{r}_{42}) = 0, \quad \sum a_u \mathbf{r}_{34} = 0$$

и аналогично для производных по $v$; а так как один из коэфициентов $a_{\lambda\mu}$ всегда можно считать постоянным (например равным единице), то мы немедленно получим, что все производные $a_u$, $a_v$ равны нулю, т. е. комплекс при изменении параметров $u$, $v$ не меняется.

Мы получим тот же результат иначе, если заметим, что теперь линейные координаты луча конгруэнции, которые мы опять будем обозначать одной буквой $\mathbf{r}$, удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r}_u = \mathbf{r}_{14},\\
&\mathbf{r}_v = -\mathbf{r}_{23},\\
&\mathbf{r}_{uu} = \overline{R}_1\mathbf{r} - \delta\mathbf{r}_{13} - \delta\mathbf{r}_{42},\\
&\mathbf{r}_{vv} = \overline{R}\mathbf{r} - \delta_1\mathbf{r}_{13} - \delta_1\mathbf{r}_{42},\\
&\mathbf{r}_{uuu} = \overline{R}_{1u}\mathbf{r} + \overline{R}_1\mathbf{r}_{14} - \delta_u(\mathbf{r}_{13}+\mathbf{r}_{42}) - 2\delta\delta_v\mathbf{r} - 2\delta^2\mathbf{r}_{23},\\
&\mathbf{r}_{vvv} = \overline{R}_v\mathbf{r} - \overline{R}\mathbf{r}_{23} - \delta_{1v}(\mathbf{r}_{13}+\mathbf{r}_{42}) - 2\delta_1\delta_{1u}\mathbf{r} + 2\delta_1^2\mathbf{r}_{14},
\end{aligned}$$



или, исключая все $\mathbf{r}_{ik}$:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{r}_{uuu} = \frac{\partial \ln \delta}{\partial u}\mathbf{r}_{uu} + \overline{R}_1\mathbf{r}_u + 2\delta^2\mathbf{r}_v + \left(\overline{R}_{1u} - \overline{R}_1\frac{\partial \ln \delta}{\partial u} - 2\delta\delta_v\right)\mathbf{r},\\
&\mathbf{r}_{vvv} = \frac{\partial \ln \delta_1}{\partial v}\mathbf{r}_{vv} + \overline{R}\mathbf{r}_v + 2\delta_1^2\mathbf{r}_u + \left(\overline{R}_v - \overline{R}\frac{\partial \ln \delta_1}{\partial v} - 2\delta_1\delta_{1u}\right)\mathbf{r},\\
&\delta_1\mathbf{r}_{uu} - \delta\mathbf{r}_{vv} = (\delta_{1uu} - \delta_{vv})\mathbf{r}.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Эта система вполне интегрируема в силу уравнений (II), ибо она получилась из вполне интегрируемой системы (IV). Общий интеграл зависит линейно от пяти произвольных постоянных, за которые можно, например, принять начальные значения $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$, $\mathbf{r}_{uv}$ и $\mathbf{r}_{vv}$. Действительно, все остальные производные от $\mathbf{r}$ могут быть определены из системы (15). Отсюда следует, что любые шесть решений этой системы связаны линейными соотношениями с постоянными коэфициентами, т. е. удовлетворяют уравнению одного и того же комплекса.

**§ 4. Комплекс, содержащий только конгруэнции $W$.** Мы видим, что все конгруэнции линейного комплекса суть конгруэнции $W$.

Обратная теорема тоже верна.

Если все конгруэнции комплекса

$$F(\mathbf{r}) = 0 \tag{16}$$

суть конгруэнции $W$, то комплекс линейный [46].

Присоединим к уравнению (16) уравнение еще какого-нибудь произвольного комплекса

$$\Phi(\mathbf{r}) = 0. \tag{17}$$

Конгруэнция, определяемая уравнениями (16) и (17), по условию — конгруэнция $W$, и, следовательно, все шесть координат $\mathbf{r}$ удовлетворяют одному и тому же уравнению в частных производных второго порядка:

$$A\mathbf{r}_{uu} + 2B\mathbf{r}_{uv} + C\mathbf{r}_{vv} + 2D\mathbf{r}_u + 2E\mathbf{r}_v + G\mathbf{r} = 0. \tag{18}$$

Коэфициенты суть функции от $u$ и $v$.

Примем одну из однородных координат $\mathbf{r}^{\lambda\mu}$; например $\mathbf{r}^{12}$, равной единице. Примем за независимые переменные какие-либо две другие координаты и будем обозначать

$$r^{34} = z, \quad r^{13} = x, \quad r^{42} = -v, \quad r^{14} = y, \quad r^{23} = -u.$$

Тогда уравнение Плюккера примет вид:

$$z = xv + yu.$$

Внося эти значения в уравнение (18), получим для $\mathbf{r}=1$, $\mathbf{r}=u$, $\mathbf{r}=v$:

$$G = 0, \quad D = 0, \quad E = 0.$$

Наконец, для $\mathbf{r}=x$, $\mathbf{r}=y$, $\mathbf{r}=xv+yu$ уравнение примет вид:

$$\begin{aligned}
&Ax_{uu} + 2Bx_{uv} + Cx_{vv} = 0,\\
&Ay_{uu} + 2By_{uv} + Cy_{vv} = 0,\\
&A(x_{uu}v + y_{uu}u + 2y_u) + C(x_{vv}v + y_{vv}u + 2x_v) +\\
&\quad + 2B(x_{uv}v + y_{uv}u + x_u + y_v) = 0.
\end{aligned}$$

Исключая $A$, $B$, $C$, придем к одному уравнению:

$$\begin{vmatrix} x_{uu} & x_{uv} & x_{vv} \\ y_{uu} & y_{uv} & y_{vv} \\ 2y_u & x_u + y_v & 2x_v \end{vmatrix} = 0. \tag{19}$$

Уравнение (16) связывает по исключении $z$ четыре переменных: $x$, $y$, $u$, $v$. Оно, очевидно, содержит $x$ или $y$ — иначе нельзя было бы принять $u$ и $v$ за независимые переменные, и мы должны были бы изменить обозначения.

Пусть уравнение (16) содержит $y$. Мы тогда можем написать его в форме:

$$y = f(x, u, v). \tag{16'}$$

Уравнение (17) мы можем взять, например, в виде:

$$x = \varphi(u, v). \tag{17'}$$

Внося эти значения в уравнение (19), мы получим уравнение в частных производных второго порядка для искомой функции $f(x, u, v)$ как функции трех независимых переменных $x$, $u$, $v$. Это уравнение должно удовлетворяться при всяком выборе функции $\varphi(u, v)$. В силу произвольности этой функции мы можем для любой пары значений $u$, $v$ дать произвольное числовое значение не только $x = \varphi(u, v)$, но и ее производным $x_u$, $x_v$, $x_{uu}$, $x_{uv}$, $x_{vv}$ и т. д.

Итак, мы должны смотреть на уравнение (19) после замены $y$ по формуле (16') как на уравнение, содержащее одну искомую функцию $y = f(x, u, v)$, три независимых переменных $x$, $u$, $v$ и пять произвольных параметров $x_u$, $x_v$, $x_{uu}$, $x_{uv}$, $x_{vv}$, которым можно придавать любые числовые значения.

Полагая

$$x_{uu} = 1, \quad x_v = a, \quad x_u = 0, \quad x_{uv} = 0, \quad x_{vv} = 0,$$

где $a$ — произвольное число, получим:

$$y_v = f_v + af_x, \quad y_u = f_u, \quad y_{uu} = f_{uu} + f_x,$$
$$y_{vv} = f_{vv} + 2af_{vx} + a^2 f_{xx}, \quad y_{uv} = f_{uv} + af_{ux}.$$

Уравнение (19) примет вид:

$$(af_x + f_v)(f_{vv} + 2af_{vx} + a^2 f_{xx}) - 2a(f_{uv} + af_{ux}) = 0, \tag{20}$$

откуда, приравнивая нулю коэфициенты при отдельных степенях $a$, имеем:

$$\left.\begin{aligned} &f_{vv} f_v = 0, \quad 2f_{vx} f_v + f_{vv} f_x - 2f_{uv} = 0, \\ &f_{xx} f_x = 0, \quad f_{xx} f_v + 2f_{vx} f_x - 2f_{ux} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

С другой стороны, полагая

$$x_u = 0, \quad x_v = 1, \quad x_{uu} = 0, \quad x_{uv} = 1, \quad x_{vv} = 0,$$

получим:

$$f_{uu} - f_u (f_{vv} + 2f_{vx} + f_{xx}) = 0. \tag{22}$$



Уравнения (21) и (22), очевидно, приводят к такой системе уравнений:

$$f_{vv} = 0, \quad f_{xx} = 0, \quad f_{ux} = f_x f_{vx}, \quad f_{uv} = f_v f_{vx}, \quad f_{uu} = 2f_u f_{vx}. \tag{23}$$

Интегрируя два первых, получим:

$$y = U_1 x + U_2 v + U_3 vx + U_4,$$

где все $U_i$ — функции одного $u$.

Внося эти значения в остальные уравнения (23) и сравнивая коэфициенты при различных степенях $v$ и $x$, получим:

$$U_1' = U_3 U_1, \quad U_2' = U_3 U_2, \quad U_3' = U_3^2,$$
$$U_1'' = 2U_3 U_1', \quad U_2'' = 2U_3 U_2', \quad U_3'' = 2U_3 U_3', \quad U_4'' = 2U_3 U_4',$$

где штрихами обозначены производные.

Интегрируя, получим:

$$U_1 = \frac{a_1}{u - a_3}, \quad U_2 = \frac{a_2}{u - a_3}, \quad U_3 = -\frac{1}{u - a_3}, \quad U_4 = \frac{a_4}{u - a_3} + a_5,$$

где все $a_i$ суть постоянные.

Итак, уравнение искомого комплекса имеет вид:

$$y = \frac{a_1 x + a_2 v - vx + a_4}{u - a_3} + a_5$$

или по освобождении от знаменателя и замены $z = vx + uy$:

$$z = a_3 y + a_1 x + a_2 v + a_5 u + a_4 - a_3 a_5.$$

Это, очевидно, уравнение произвольного линейного комплекса.

Если задать комплекс (16), то уравнение (19) будет определять функцию $\varphi(u, v)$, т. е. конгруэнции $W$, содержащиеся в комплексе (16). Так как для $\varphi$ получается таким образом уравнение в частных производных второго порядка, то каждый комплекс содержит бесконечное множество конгруэнций $W$, зависящее от двух произвольных функций одного аргумента.

**§ 5. Конгруэнции Вильчинского.** Вильчинский [47] первый исследовал конгруэнцию, которая и сама принадлежит к линейному комплексу и ее преобразования Лапласа тоже обладают этим свойством.

Иными словами, он искал такую сопряженную систему на поверхности, чтобы касательные и к первому и ко второму семейству системы описывали конгруэнции, принадлежащие к двум вообще различным линейным комплексам.

Пусть наша конгруэнция $(M_1 M_2)$ есть конгруэнция Вильчинского. Тогда прежде всего имеют место при подходящем выборе параметров $u$, $v$ формулы (14) и (11):

$$\Delta = \delta_1, \quad \Delta_1 = \delta, \quad P = p, \quad P_1 = p_1. \tag{24}$$

Выберем наш тетраэдр так, чтобы ребра $M_1 M_3$ и $M_2 M_4$ описывали конгруэнции, полученные преобразованием Лапласа, т. е. касались соответственно линий $v$ и линий $u$ на поверхностях $(M_1)$ и $(M_2)$ и чтобы вершины $M_3$ и $M_4$ были вторыми фокусами лучей $M_1 M_3$ и $M_2 M_4$.

Мы видели, что такой тетраэдр характеризуется равенствами (12) главы шестой:

$$q=0, \quad q_1=0, \quad n=0, \quad n_1=0, \tag{25}$$

откуда следует в силу (24) и (II):

$$p=\frac{\partial \ln \delta}{\partial v}, \quad p_1=\frac{\partial \ln \delta_1}{\partial u}, \quad N=0,\ N_1=0, \tag{26$_1$}$$

$$m=\delta\delta_1-\frac{\partial^2 \ln \delta}{\partial u\, \partial v}, \quad m_1=\delta\delta_1-\frac{\partial^2 \ln \delta_1}{\partial u\, \partial v}, \tag{26$_2$}$$

$$R\delta-R_1\delta_1=0, \tag{26$_3$}$$

$$\begin{gathered} m_v-R_u=-2m\,\frac{\partial \ln \delta}{\partial v}, \\ m_{1u}-R_{1u}=-2m_1\frac{\partial \ln \delta_1}{\partial u}. \end{gathered} \tag{26$_4$}$$

Потребуем теперь, чтобы конгруэнция ($\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3$) принадлежала тоже к некоторому линейному комплексу

$$\sum b\mathbf{r}=0. \tag{27}$$

Необходимые условия мы получим, внося сюда координаты нашего луча $\mathbf{r}_{13}$ и диференцируя при постоянных коэфициентах $b$ достаточное число раз по $u$ и по $v$.

Таблица (IV) дает нам немедленно:

$$\left.\begin{array}{l} \sum b\mathbf{r}_{13}=0, \quad \sum b\mathbf{r}_{23}=0, \quad \sum b\mathbf{r}_{14}=0, \\ m\sum b\mathbf{r}_{12}+\sum b\mathbf{r}_{34}=0, \\ m_1\sum b\mathbf{r}_{12}+\sum b\mathbf{r}_{34}=0, \\ -R\sum b\mathbf{r}_{12}+\delta_1\sum b\mathbf{r}_{42}=0. \end{array}\right\} \tag{28}$$

Отсюда прежде всего следует, так как конгруэнция ($\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3$) имеет соприкасающийся комплекс, что

$$m=m_1; \tag{29}$$

впрочем, это сейчас же следует из уравнений (10), (24), если заметить, что асимптотические линии на поверхности ($\mathbf{M}_3$) определяются уравнениями:

$$m\delta\, du^2-m_1\delta_1\, dv^2=0.$$

Переходя в уравнениях (28) к местным координатам относительно канонического тетраэдра, получим:

$$b_{13}=0, \quad b_{23}=0, \quad b_{14}=0, \quad mb_{12}+b_{34}=0, \quad \delta_1 b_{42}=Rb_{12}.$$

Следовательно, уравнение соприкасающегося комплекса будет:

$$\delta_1(\rho_{12}-m\rho_{34})+R\rho_{42}=0. \tag{30}$$



Диференцируя уравнения (28) еще раз, получим:

$$\left.\begin{array}{l} m_u\sum b\mathbf{r}_{12}-2\dfrac{\partial \ln \delta_1}{\partial u}\sum b\mathbf{r}_{34}=0, \\ m_v\sum b\mathbf{r}_{12}-2\dfrac{\partial \ln \delta}{\partial v}\sum b\mathbf{r}_{34}=0, \end{array}\right\} \tag{31}$$

$$-R_u\sum b\mathbf{r}_{12}=0,$$
$$-R_{1v}\sum b\mathbf{r}_{12}=0.$$

В силу уравнения (26$_4$) уравнения (31) по исключении коэфициентов $b_{ik}$ приводят только к двум соотношениям:

$$R_u=0, \quad R_{1v}=0. \tag{32}$$

Уравнение (29) в силу (26$_2$) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \ln \delta}{\partial u\, \partial v}=\frac{\partial^2 \ln \delta_1}{\partial u\, \partial v},$$

откуда

$$\delta=\delta_1 UV,$$

где $U$, $V$ — функции одного $u$ и одного $v$, которые можно привести к единице [см. таблицу (V)], меняя нормировку координат точек $M_1$ и $M_2$ и не нарушая равенств (24).

Уравнение (26$_3$) дает теперь:

$$R=R_1.$$

Уравнение (32) покажет, что

$$R=R_1=\text{const}.$$

Итак, конгруэнция Вильчинского определяется при подходящем выборе параметров и подходящей нормировке координат уравнениями:

$$\Delta=\Delta_1=\delta=\delta_1, \quad R=R_1=\text{const}. \tag{33}$$

Так как эти уравнения вполне симметричны относительно $u$ и $v$, то, очевидно, и второе преобразование Лапласа, конгруэнция ($\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4$), тоже принадлежит к линейному комплексу.

**§ 6. Последовательность конгруэнций Вильчинского.** Будем называть последовательностью Лапласа последовательность конгруэнций, получаемых одна из другой преобразованиями Лапласа. Очевидно, каждые две рядом стоящие конгруэнции последовательности имеют одну общую фокальную поверхность; на этой поверхности лучи той и другой конгруэнции огибают линии одной и той же сопряженной системы.

Если две последовательные конгруэнции в такой последовательности Лапласа принадлежат к каким-то линейным комплексам, то и следующие конгруэнции принадлежат к линейному комплексу. Отсюда следует, что все конгруэнции последовательности суть конгруэнции Вильчинского, т. е. принадлежат вместе со своими преобразованиями Лапласа некоторым линейным комплексам.

Если условия (33) внести в уравнения (26), то заметим, что они сведутся к уравнениям:

$$m_v + 2m\frac{\partial \ln \delta}{\partial v} = 0,$$

$$m_u + 2m\frac{\partial \ln \delta}{\partial u} = 0,$$

$$m = \delta^2 - \frac{\partial^2 \ln \delta}{\partial u\, \partial v},$$

откуда, интегрируя, получим:

$$m\delta^2 = C = \text{const}.$$

Постоянное $C$ не может равняться нулю, иначе поверхность $(M_3)$ вырождается в линию. Умножая параметры $u$ и $v$ на одно и то же постоянное, мы не нарушим формулы (33) и приведем $C$ к единице.

Следовательно, $\delta$ удовлетворяет единственному уравнению:

$$\frac{\partial^2 \ln \delta}{\partial u\, \partial v} = \delta^2 - \frac{1}{\delta^2}. \tag{34}$$

Таблица (I) принимает теперь вид:

$$\left.\begin{aligned}
&M_{1u} = \delta M_2, && M_{1v} = \frac{\partial \ln \delta}{\partial v} M_1 + M_3,\\
&M_{2u} = \frac{\partial \ln \delta}{\partial u} M_2 + M_4, && M_{2v} = \delta M_1,\\
&M_{3u} = \frac{1}{\delta^2} M_1, && M_{3v} = RM_1 - \frac{\partial \ln \delta}{\partial v} M_3 - \delta M_4,\\
&M_{4u} = RM_2 - \delta M_3 - \frac{\partial \ln \delta}{\partial u} M_4, && M_{4v} = \frac{1}{\delta^2} M_2.
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Определим вершины канонического тетраэдра, связанного с конгруэнцией $(M_1M_3)$. Пусть $M_5$ — второе преобразование Лапласа в сторону линии $v$, т. е. фокус, лежащий на касательной к линии $v$ поверхности $(M_3)$.

Таблица (35) показывает, что

$$M_5 = RM_1 - \delta M_4 + \lambda M_3,$$

где $\lambda$ — подходящая функция от $u$ и $v$.

Дифференцируя по $u$ и требуя, чтобы $M_{5u}$ лежала на луче $M_1M_5$, получим:

$$\delta^2 M_3 + \lambda m M_1 = A(RM_1 - \delta M_4) + BM_3,$$

где $A$ и $B$ — подходящие множители.

Отсюда

$$\lambda = 0, \quad A = 0.$$

Следовательно, называя первым, вторым и т. д. преобразованием Лапласа поверхности $(M_1)$ преобразования в сторону линии $u$, т. е. поверхности $(M_2)$, $(M_4)$ и т. д., и минус первым, минус вторым — поверхности $(M_3)$, $(M_5)$, ..., мы скажем, что минус второе преобразование описано точкой

$$M_5 = RM_1 - \delta M_4,$$

которая лежит на прямой $M_1M_4$.



Ввиду полной симметрии второе преобразование Лапласа описывается точкой $M_6$, которая лежит на прямой $M_2M_3$:

$$M_6 = RM_2 - \delta M_3.$$

Вводя новое нормирование координат точек $M_i$ и новые обозначения:

$$N_1 = M_3, \quad N_2 = \frac{1}{\delta} M_1, \quad N_3 = M_5, \quad N_4 = M_2,$$

мы напишем таблицу (35) в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&N_{1u} = \frac{1}{\delta} N_2, && N_{1v} = -\frac{\partial \ln \delta}{\partial v} N_1 + N_3,\\
&N_{2u} = -\frac{\partial \ln \delta}{\partial u} N_2 + N_4, && N_{2v} = \frac{1}{\delta} N_1,\\
&N_{3u} = \delta^2 N_1, && N_{3v} = RN_1 - \frac{1}{\delta} N_4 + \frac{\partial \ln \delta}{\partial v} N_3,\\
&N_{4u} = RN_2 - \frac{1}{\delta} N_3 + \frac{\partial \ln \delta}{\partial u} N_4, && N_{4v} = \delta^2 N_2.
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Мы видим, что таблица (36) в точности соответствует таблице (35) если произвести замену $\delta$ на $\frac{1}{\delta}$.

Если $\delta$ удовлетворяет уравнению (34), то ему, очевидно, удовлетворяет также и $\frac{1}{\delta}$. Это еще раз подтверждает, что конгруэнция $(M_1M_3)$ — тоже конгруэнция Вильчинского.

Мы видим, что последовательные преобразования Лапласа меняют по-очереди коэфициент $\delta$ на $\frac{1}{\delta}$, и наоборот. Поэтому в последовательности Вильчинского все четные или нечетные конгруэнции между собою проективно эквивалентны.

Соответствующие фокусы все лежат на двух прямых $M_1M_4$ и $M_2M_3$.

Нетрудно видеть, что лучи $M_1M_4$ и $M_2M_3$ принадлежат и первому и второму линейным комплексам. Следовательно, конгруэнция $(M_1M_4)$ линейная и тождественна конгруэнции $(M_2M_3)$; все комплексы, связанные с последовательностью Вильчинского, принадлежат одному пучку.

Нетрудно непосредственно обнаружить тождественность конгруэнции $(M_1M_4)$ и $(M_2M_3)$.

Допустим, что точка

$$\lambda M_1 + M_4$$

прямой $(M_1M_4)$ лежит на директрисе конгруэнции. При изменении параметров $u$ или $v$ эта точка двигается по одной и той же прямой.

Следовательно,

$$(\lambda M_1 + M_4)_u = A(\lambda M_1 + M_4) + B(\lambda M_1 + M_4)_v,$$

где $A$ и $B$ — подходящие коэфициенты.

Выполняя диференцирование с помощью таблицы (35) и сравнивая коэфициенты при отдельных буквах $\mathbf{M}_i$, получим:

$$\lambda_u = A\lambda + B\left(\lambda_v + \lambda \frac{\partial \ln \delta}{\partial v}\right),$$

$$\lambda\delta + R = \frac{B}{\delta^2}, \quad -\delta = B\lambda, \quad -\frac{\partial \ln \delta}{\partial u} = A.$$

Исключая множители пропорциональности $A$ и $B$, получим два уравнения:

$$\lambda^2\delta + \lambda R + \frac{1}{\delta} = 0,$$

$$\lambda \frac{\partial \ln \lambda\delta}{\partial u} + \delta \frac{\partial \ln \lambda\delta}{\partial v} = 0.$$

Первое уравнение дает два значения $\lambda$:

$$\lambda = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4}}{2\delta};$$

второе удовлетворено этими значениями тождественно.

Так как директриса проходит через точки $\lambda\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_4$, $(\lambda\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_4)_v$, то, следовательно, координаты той и другой директрисы суть

$$(c\mathbf{M}_1 + \delta\mathbf{M}_4, \frac{1}{c}\mathbf{M}_2 + \delta\mathbf{M}_3),$$

где [48]

$$c = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4}}{2}.$$

Каждому решению $\delta$ уравнения (34) соответствует бесчисленное множество последовательностей Вильчинского, получаемых изменением постоянного $R$. Все такие последовательности проективно наложимы (см. § 8).

Если

$$R = 0,$$

то точка $M_5$ совпадает с точкой $M_4$ и последовательность будет замкнутой. Она состоит из четырех конгруэнций, имеющих последовательно общие фокальные поверхности.

В этом случае (как вообще при $R < 2$) директрисы мнимы.

**§ 7. Конгруэнции $R$.** Мы встречались с поверхностями $R$ как единственными поверхностями, допускающими проективное изгибание. Эти поверхности обладают одной или несколькими сопряженными системами линий $R$, которые имели особое значение при изгибании поверхности: если две налагающиеся поверхности поместить так, чтобы пара соответствующих точек совпала и поверхности имели касание второго порядка, то по направлениям, касательным к линиям этой системы $R$, и по асимптотическим направлениям порядок касания обеих поверхностей повышается до третьего.

Теорема об изгибании поверхностей $R$ была доказана Картаном в 1920 г., но еще раньше поверхности $R$ вошли в круг интересов гео-



метрии и заняли там выдающееся место. В 1911 г. почти одновременно Демулен и Цицейка стали рассматривать поверхности $R$ как обладающие сопряженной системой линий $R$, касательные к которым образуют две конгруэнции $W$.

Эту теорему мы уже доказали в главе третьей, § 6. Мы теперь снова беремся за эту тему, пользуясь более удобным тетраэдром отнесения.

Отнесем конгруэнцию $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$ к инвариантному тетраэдру, построенному на двух преобразованиях Лапласа, т. е. примем, что

$$q = 0, \quad q_1 = 0, \quad n = 0, \quad n_1 = 0.$$

Условие, что конгруэнция $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$ есть конгруэнция $W$:

$$\delta\delta_1 - \Delta\Delta_1 = 0. \tag{8}$$

Потребуем теперь, чтобы и конгруэнция $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3)$ была конгруэнцией $W$.

Для этого достаточно потребовать соответствия асимптотических линий на поверхностях $(\mathbf{M}_1)$ и $(\mathbf{M}_3)$.

Уравнение асимптотических линий на поверхности $(M_1)$:

$$\delta\, du^2 - \Delta\, dv^2 = 0. \tag{37}$$

Уравнение асимптотических линий на поверхности $(\mathbf{M}_3)$:

$$(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_{3u}\mathbf{M}_{3v}\, d^2\mathbf{M}_3) = 0,$$

или с помощью таблицы (I):

$$(\mathbf{M}_3, \mathbf{M}_1, N\mathbf{M}_2 - \Delta\mathbf{M}_4, d^2\mathbf{M}_3) = 0;$$

развертывая второй диференциал $d^2\mathbf{M}_3$ и преобразуя определитель в произведение двух определителей:

$$(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4)\begin{vmatrix} N & m\delta\, du^2 + (N_v - m_1\Delta)\, dv^2 \\ -\Delta & -\Delta_v\, dv^2 \end{vmatrix} = 0,$$

получим, так как первый множитель не нуль:

$$m\delta\Delta\, du^2 + (\Delta N_v - N\Delta_v - \Delta^2 m_1)\, dv^2 = 0. \tag{38}$$

Асимптотические линии соответствуют, если коэфициенты в уравнениях (37) и (38) пропорциональны, т. е. если

$$N_v - N\frac{\partial \ln \Delta}{\partial v} + \Delta(m - m_1) = 0. \tag{39}$$

Внося сюда из таблицы (13) главы шестой

$$N = \Delta_u - P_1\Delta, \quad P_{1v} = \frac{\partial \ln \delta_1}{\partial u\, \partial v},$$

$$m - m_1 = \frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} \ln \frac{\delta_1}{\delta},$$

найдем:

$$\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} \ln \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{40}$$

Так как уравнение (8) дает:

$$\frac{\Delta}{\delta}=\frac{\delta_1}{\Delta_1},$$

то из уравнения (40) непосредственно следует, что

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\ln\frac{\Delta_1}{\delta_1}=0. \tag{40'}$$

Это показывает, что конгруэнции $(M_2M_4)$ — тоже конгруэнция $W$. Значит, если две соседние конгруэнции $(M_1M_2)$ и $(M_1M_3)$ в какой-нибудь последовательности Лапласа суть конгруэнции $W$, то и следующая конгруэнция этой последовательности $(M_2M_4)$ того же вида. Последовательно прилагая эту лемму, получим, что вся последовательность Лапласа состоит из конгруэнций $W$. Такая последовательность называется последовательностью $R$, каждая конгруэнция есть конгруэнция $R$, фокальные поверхности — поверхности $R$, а система линий, которые на них определяются развертывающимися поверхностями конгруэнции, — система $R$.

Конгруэнция $R$ характеризуется равенствами (8), (40), которые, очевидно, не зависят от выбора канонического тетраэдра, ибо величины $\Delta$, $\Delta_1$, $\delta$, $\delta_1$ сохраняют то же значение при всяком выборе его.

Интегрируя уравнение (40), получим:

$$\Delta=\delta\,UV,$$

где $U$, $V$ — функции одного $u$ и одного $v$. Таблица (VII) показывает, что подходящим выбором параметров $u$, $v$ и нормированием координат $M_1$, $M_2$ можно привести эти функции к единице, не нарушая равенства (11).

Таким образом при подходящем выборе параметров и однородных координат для конгруэнции $R$ имеем:

$$\Delta=\delta,\quad \Delta_1=\delta_1,\quad P=p,\quad P_1=p_1. \tag{41}$$

*Следствие.* Сеть линий $R$ — изотермически сопряженная.

Действительно, уравнение асимптотических линий на поверхности $(M_1)$ принимает вид:

$$du^2-dv^2=0. \tag{42}$$

Следовательно, во второй квадратичной форме поверхности (метрической геометрии), отнесенной к системе $R$, первый и третий коэфициенты равны между собой (с обратными знаками).

Сопряженная система, обладающая этим свойством, называется (Бианки) изотермически сопряженной.

Обратно, если фокальная сеть конгруэнции $W$ изотермически сопряжена, то конгруэнция есть конгруэнция $R$.

Действительно, если выбором параметров уравнение (37) может быть приведено к виду (42), то, очевидно,

$$\frac{\Delta}{\delta}=UV,$$

и, следовательно, условие (40) выполнено, а уравнение (8) характеризует конгруэнцию $W$.



Если выбрать тетраэдр Вильчинского и внести в уравнения (VI) значения (41), то получим:

$$\overline{R}-\overline{R}_1=\frac{\delta_{vv}-\delta_{uu}}{\delta}=\frac{\delta_{1vv}-\delta_{1uu}}{\delta_1},$$

$$\overline{R}_u=2(\delta\delta_1)_v,\quad \overline{R}_{1v}=2(\delta\delta_1)_u,$$

откуда, полагая

$$\overline{R}_1-\overline{R}=2\theta,$$

получим для определения конгруэнции $R$ для трех неизвестных функций $\delta$, $\delta_1$ и $\theta$ систему уравнений:

$$\begin{aligned}\delta_{uu}-\delta_{vv}&=2\delta\theta,\\ \delta_{1uu}-\delta_{1vv}&=2\delta_1\theta,\\ (\delta\delta_1)_{uu}-(\delta\delta_1)_{vv}&=\theta_{uv}.\end{aligned}$$

Если ввести новый тетраэдр $(N, N_1, N_2, N_3)$ посредством формул:

$$N=\frac{M_1}{\sqrt{\delta}},\quad N_1=\overline{M}_2\sqrt{\delta}+\frac{\overline{M}_3}{\sqrt{\delta}},\quad N_2=\overline{M}_2\sqrt{\delta}-\frac{\overline{M}_3}{\sqrt{\delta}},\quad N_3=2M_4\sqrt{\delta},$$

то для асимптотических параметров

$$\alpha_1=\frac{u+v}{2},\quad \alpha_2=\frac{u-v}{2}$$

получим таблицу компонент:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $-\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\delta}{\partial\alpha_1}$ | $1$ | $0$ | $0$ |
| $\overline{R}+2\delta\delta_1$ | $\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\delta}{\partial\alpha_1}$ | $\frac{\partial\ln\delta}{\partial\alpha_1}$ | $0$ |
| $-\overline{R}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\delta}{\partial\alpha_1}$ | $1$ |
| $2\delta\delta_{1\alpha_1}$ | $\overline{R}$ | $\overline{R}+2\delta\delta_1$ | $\frac{\partial\ln\delta}{\partial\alpha_1}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $-\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\delta}{\partial\alpha_2}$ | $0$ | $1$ | $0$ |
| $-\overline{R}$ | $-\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\delta}{\partial\alpha_2}$ | $0$ | $1$ |
| $\overline{R}-2\delta\delta_1$ | $\frac{\partial\ln\delta_1}{\partial\alpha_2}$ | $\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\delta}{\partial\alpha_2}$ | $0$ |
| $-2\delta\delta_{1\alpha_2}$ | $\overline{R}-2\delta\delta_1$ | $\overline{R}$ | $\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\delta}{\partial\alpha_2}$ |

Сравнение с таблицей (6) главы четвертой показывает, что коэфициенты проективного линейного элемента Фубини определяются соотношениями:

$$\beta=\frac{\partial\ln\delta}{\partial u}+\frac{\partial\ln\delta}{\partial v},\quad \gamma=\frac{\partial\ln\delta}{\partial u}-\frac{\partial\ln\delta}{\partial v}.$$

Так как они удовлетворяют условию

$$\frac{\partial\beta}{\partial\alpha_2}=\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha_1},$$

то поверхность $(M_1)$ может проективно изгибаться и, следовательно, еще раз доказано тождество поверхности, полученной Картаном, как поверхности, обладающей способностью проективно изгибаться, и поверхности $R$, определяемой Демуленом и Цицейкой, как одной из фокальных поверхностей последовательности Лапласа, состоящей из конгруэнций $W$.

Последовательность Вильчинского, очевидно, представляет частный случай последовательности $R$, когда все конгруэнции последовательности принадлежат линейным комплексам.

**§ 8. Проективное изгибание конгруэнции.** Определение проективного изгибания поверхности, которое дал Фубини, распространяется, как это показал Картан, на геометрию любой группы преобразований и на любые геометрические образования. В частности большой интерес представляют проективные изгибания конгруэнции — вопрос еще далеко не получивший разрешения [49].

Две конгруэнции $(M_1M_2)$ и $(N_1N_2)$ проективно наложимы порядка $n$, если для каждой пары соответствующих лучей можно построить проективное преобразование, которое переводит одну из конгруэнций $(N_1N_2)$ в положение $(N_1^*N_2^*)$ так, что пара соответствующих лучей $M_1M_2$ и $N_1^*N_2^*$ совпадает, также как и их бесконечно близкие, до $n$-го порядка включительно.

Отнесем каждую из конгруэнций к своему тетраэдру Вильчинского ($p=0$, $p_1=0$, $q=0$, $q_1=0$) и будем обозначать звездочкой величину, относящуюся ко второй конгруэнции.

Так как лучи, бесконечно близкие к лучам $M_1M_2$ и $N_1^*N_2^*$, совпадают, то координаты их отличаются только множителем.

Следовательно, равенство

$$(N_1^*N_2^*)+d(N_1^*N_2^*)+\frac{1}{2}\,d^2(N_1^*N_2^*)+\cdots=$$
$$=\left[\lambda_0+(\lambda)_1+\frac{1}{2}\,(\lambda)_2+\cdots\right]\{(M_1M_2)+d\,(M_1M_2)+\cdots\} \tag{43}$$

справедливо до бесконечно малых $n$-го порядка.

Буквами $\lambda_0$, $(\lambda)_1$, $(\lambda)_2$ обозначены бесконечно малые нулевого, первого, второго и т. д. порядков, которые в сумме составляют множитель пропорциональности, так, что

$$\left.\begin{aligned}(\lambda)_1&=\lambda_1\,du+\lambda_2\,dv\\ (\lambda)_2&=\lambda_{11}\,du^2+2\,\lambda_{12}\,du\,dv+\lambda_{22}\,dv^2.\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Сравнивая в равенстве (43) бесконечно малые одного порядка, мы разобьем его на ряд уравнений:

$$(N_1^*N_2^*)=\lambda_0\,(M_1M_2), \tag{$43_0$}$$
$$d\,(N_1^*N_2^*)=\lambda_0 d\,(M_1M_2)+(\lambda)_1\,(M_1M_2), \tag{$43_1$}$$
$$d^2\,(N_1^*N_2^*)=\lambda_0 d^2\,(M_1M_2)+2\,(\lambda)_1\,d\,(M_1M_2)+(\lambda)_2\,(M_1M_2). \tag{$43_2$}$$

Чтобы быстрее провести исследование этой системы, заметим, что в случае касания хотя бы первого порядка совпадают не только лучи $M_1M_2$, $N_1^*N_2^*$, но и весь пучек бесконечно близких первого порядка лучей. При этом два луча, пересекающие (до бесконечно малых второго порядка) луч $N_1^*N_2^*$, должны совпадать с лучами, пересекающими луч



$M_1M_2$. Отсюда следует, что фокусы $N_1^*$, $N_2^*$ одного луча совпадают с фокусами $M_1$, $M_2$ другого,

$$N_1^*=aM_1,\quad N_2^*=bM_2, \tag{45}$$

и развертывающиеся поверхности совпадают.

Следовательно, мы можем выбрать параметры $u$, $v$ одинаковыми на обеих конгруэнциях:

$$u^*=u,\quad v^*=v.$$

Принимая это во внимание, из уравнения ($43_0$) получим:

$$\lambda_0=ab. \tag{$46_0$}$$

Уравнение ($43_1$) распадается на два, которые получаются, если воспользоваться выражением (44) для $(\lambda)$ и сравнить коэфициенты при $du$ и $dv$:

$$(N_1^*N_2^*)_u=\lambda_0\,(M_1M_2)_u+\lambda_1\,(M_1M_2),$$
$$(N_1^*N_2^*)_v=\lambda_0\,(M_1M_2)_v+\lambda_2\,(M_1M_2),$$

или в силу таблицы (I):

$$(N_1^*N_4^*)=ab\,(M_1M_4)+\lambda_1\,(M_1M_2),$$
$$(N_3^*N_2^*)=ab\,(M_3M_2)+\lambda_2\,(M_1M_2).$$

Полагая

$$\begin{aligned}N_3^*&=A_1M_1+A_2M_2+A_3M_3+A_4M_4,\\ N_4^*&=B_1M_1+B_2M_2+B_3M_3+B_4M_4,\end{aligned} \tag{45'}$$

получим:

$$aB_2\,(M_1M_2)+aB_4\,(M_1M_4)+aB_3\,(M_1M_3)=ab\,(M_1M_4)+\lambda_1\,(M_1M_2),$$
$$A_1b\,(M_1M_2)+A_3b\,(M_3M_2)+A_4b\,(M_4M_2)=ab\,(M_3M_2)+\lambda_2\,(M_1M_2),$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1&=B_2a,\quad B_3=0,\quad B_4=b,\\ \lambda_2&=A_1b,\quad A_3=a,\quad A_4=0.\end{aligned}\right\} \tag{$46_1$}$$

Так как уравнения ($43_0$), ($43_1$) удовлетворены, то наложение первого порядка обеспечено. Любые две конгруэнции проективно наложимы первого порядка.

Чтобы осуществить проективное изгибание первого порядка одной конгруэнции в другую, надо установить между лучами обеих конгруэнций соответствие, при котором развертывающиеся поверхности переходят в развертывающиеся. Проективное преобразование, которое осуществляет касание первого порядка для каждой пары соответствующих лучей, переводит тетраэдр $(N_1, N_2, N_3, N_4)$ в тетраэдр $(N_1^*, N_2^*, N_3^*, N_4^*)$, определяемый уравнениями (45), (45'):

$$\left.\begin{aligned}N_1^*&=aM_1,\quad N_3^*=A_1M_1+A_2M_2+aM_3,\\ N_2^*&=bM_2,\quad N_4^*=B_1M_1+B_2M_2+bM_4.\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Заметим, что в метрической геометрии такое преобразование не всегда возможно. Ввиду произвольности коэфициентов $a$, $b$, $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$ оно в сущности должно совместить два луча так, чтобы совпали фокусы и фокальные плоскости. Следовательно, если две конгруэнции наложимы в метрическом смысле, то можно установить такое соответствие между их лучами, чтобы развертывающиеся плоскости соответствовали, расстояние между фокусами и угол между фокальными плоскостями на соответствующих лучах были равны [50].

Потребуем теперь, чтобы выполнялись уравнения $(43_0)$, $(43_1)$ и $(43_2)$, т. е. перейдем к конгруэнциям, проективно наложимым второго порядка.

Вычисляя вторые диференциалы с помощью таблицы (I), внося значение $(\lambda)_2$ по формулам (44) и сравнивая коэфициенты при различных степенях диференциалов $du$, $dv$, мы разобьем уравнение $(43_2)$ на три:

$$\begin{aligned}
&\delta^*(\mathrm{N}_2^*\mathrm{N}_4^*)+\overline{R}_1^*(\mathrm{N}_1^*\mathrm{N}_2^*)-\Delta_1^*(\mathrm{N}_1^*\mathrm{N}_3^*)-\overline{P}_1^*(\mathrm{N}_1^*\mathrm{N}_4^*)=\\
&\qquad=\lambda_0[\delta(\mathrm{M}_2\mathrm{M}_4)+\overline{R}_1(\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2)-\Delta_1(\mathrm{M}_1\mathrm{M}_3)-\overline{P}_1(\mathrm{M}_1\mathrm{M}_4)]+\\
&\qquad\qquad+2\lambda_1(\mathrm{M}_1\mathrm{M}_4)+\lambda_{11}(\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2),\\
&\delta^*\delta_1^*(\mathrm{N}_1^*\mathrm{N}_2^*)+(\mathrm{N}_3^*\mathrm{N}_4^*)=\lambda_0[\delta\delta_1(\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2)+(\mathrm{M}_3\mathrm{M}_4)]-\\
&\qquad\qquad-\lambda_1(\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3)+\lambda_2(\mathrm{M}_1\mathrm{M}_4)+\lambda_{12}(\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2),\\
&\overline{R}^*(\mathrm{N}_1^*\mathrm{N}_2^*)-\delta_1^*(\mathrm{N}_1^*\mathrm{N}_3^*)+\overline{P}^*(\mathrm{N}_2^*\mathrm{N}_3^*)+\Delta^*(\mathrm{N}_2^*\mathrm{N}_4^*)=\\
&\qquad=\lambda_0[\overline{R}(\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2)-\delta_1(\mathrm{M}_1\mathrm{M}_3)+\overline{P}(\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3)+\Delta(\mathrm{M}_2\mathrm{M}_4)]-\\
&\qquad\qquad-2\lambda_2(\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3)+\lambda_{22}(\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2),
\end{aligned}$$

или, внося $\mathrm{N}_i^*$ по формулам (47) и собирая члены при отдельных координатах $(\mathrm{M}_i\mathrm{M}_k)$:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_{11}&=-ab\overline{R}_1+ab\overline{R}_1^*-\overline{P}_1^*\,aB_2,\\
\lambda_{12}&=-ab\,\delta\delta_1+ab\,\delta^*\delta_1^*+A_1B_2,\\
\lambda_{22}&=-ab\,\overline{R}+ab\,\overline{R}^*-\overline{P}^*\,bA_1.
\end{aligned}\right\}\qquad(48_1)$$

$$A_2=0,\quad B_1=0,\quad A_1=\frac{a}{2}(\overline{P}-\overline{P}^*),\quad B_2=\frac{b}{2}(\overline{P}_1-\overline{P}_1^*),\qquad(48_2)$$

$$b\delta^*=a\delta,\quad a\delta_1^*=b\delta_1,\quad b\Delta^*=a\Delta,\quad a\Delta_1^*=b\Delta_1.\qquad(48_3)$$

Уравнения $(48_1)$ определяют коэфициенты пропорциональности $\lambda_{ik}$, уравнения $(48_2)$ определяют проективное преобразование; наконец, уравнения $(48_3)$ по исключении $a$, $b$ дают единственные условия наложимости конгруэнций:

$$\delta^*\delta_1^*=\delta\delta_1,\quad \Delta^*\Delta_1^*=\Delta\Delta_1,\quad \Delta^*\delta_1^*=\Delta\delta_1.\qquad(49)$$

Эти условия, как мы видели, не зависят ни от выбора канонического тетраэдра, ни от выбора параметров $u$, $v$ или однородных координат.

Из уравнений (49) следует, что при изгибании конгруэнции асимптотические линии на фокальных поверхностях переходят в асимптотические.

Действительно, в силу $(48_3)$ уравнения асимпотических линий на первой или второй фокальной поверхности конгруэнции $(\mathrm{N}_1\mathrm{N}_2)$ по сокращении на $a$ или на $b$ получают тот же самый вид, что и для конгруэнции $(\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2)$.



Уравнения (49) показывают далее, что конгруэнция $W$ может налагаться только на конгруэнцию $W$, конгруэнция $R$ — только на конгруэнцию $R$.

**§ 9. Конгруэнции, допускающие проективное изгибание.** Если внести

$$\Delta^*=a\Delta,\quad \Delta_1^*=\frac{\Delta_1}{a},\quad \delta^*=a\delta,\quad \delta_1^*=\frac{\delta_1}{a}$$

в первые два уравнения (VI), написанные для конгруэнции $(\mathrm{N}_1\mathrm{N}_2)$, то получим прежде всего:

$$(\overline{P}^*-\overline{P})_u=0,\quad (\overline{P}_1^*-\overline{P}_1)_v=0.$$

Интегрируя, получим:

$$\overline{P}^*=\overline{P}+V,\quad \overline{P}_1^*=\overline{P}_1+U,$$

где $U$ и $V$ — функции одного $u$ и одного $v$.

Изменим однородные координаты $\mathrm{N}_1$ и $\mathrm{N}_2$, умножая их на подходящие функции от $u$ или от $v$. Таблица (VII) покажет, что мы можем таким образом привести $U$ и $V$ к нулю.

Положим

$$\overline{R}^*=\overline{R}+r,\quad \overline{R}_1^*=\overline{R}_1+r_1;$$

тогда для определения конгруэнции $(\mathrm{N}_1\mathrm{N}_2)$ будем иметь систему уравнений:

$$\begin{aligned}
r\delta-r_1\Delta&=\delta\left(\frac{a_{vv}}{a}+\overline{P}\frac{\partial\ln a}{\partial v}+2\frac{\partial\ln a}{\partial v}\frac{\partial\ln\delta}{\partial v}\right)-\\
&\quad-\Delta\left(\frac{a_{uu}}{a}-\overline{P}_1\frac{\partial\ln a}{\partial u}+2\frac{\partial\ln a}{\partial u}\frac{\partial\ln\Delta}{\partial u}\right),\qquad(50)\\
r_1\delta_1-r\Delta_1&=-\delta_1\left[\frac{a_{uu}}{a}+\overline{P}_1\frac{\partial\ln a}{\partial u}+2\frac{\partial\ln a}{\partial u}\frac{\partial\ln\delta_1}{\partial u}-2\left(\frac{\partial\ln a}{\partial u}\right)^2\right]+\\
&\quad+\Delta_1\left[\frac{a_{vv}}{a}-\overline{P}\frac{\partial\ln a}{\partial v}+2\frac{\partial\ln a}{\partial v}\frac{\partial\ln\Delta_1}{\partial v}-2\left(\frac{\partial\ln a}{\partial v}\right)^2\right],\\
r_u&=(\delta\delta_1-\Delta\Delta_1)\frac{\partial\ln a}{\partial v},\quad r_{1v}=(\delta\delta_1-\Delta\Delta_1)\frac{\partial\ln a}{\partial u}.
\end{aligned}$$

Так как для трех неизвестных функций $r$, $r_1$ и $a$ мы имеем здесь четыре уравнения, то система вообще допускает только решение $r=0$, $r_1=0$, $a=0$, т. е. вообще конгруэнции проективно неизгибаемы.

Если к уравнениям (50) присоединить систему уравнений (VI), написанную для конгруэнции $(\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2)$, и считать неизвестными функциями величины, определяющие обе конгруэнции:

$$r,\ r_1,\ a,\ \delta,\ \delta_1,\ \Delta,\ \Delta_1,\ \overline{P},\ \overline{P}_1,\ \overline{R},\ \overline{R}_1,$$

то получим систему 10 уравнений для 11 неизвестных функций.

Более подробное исследование (Картан) показывает, что класс проективно изгибаемых конгруэнций зависит от одной произвольной функции двух независимых переменных [51].

Возвращаясь к формулам (48), мы видим, что проективное преобразование, совмещающее два луча $M_1M_2$ и $N_1N_2$:

$$(\mathrm{N}_1^*\mathrm{N}_2^*) = ab\,(\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2),$$

совмещает и их фокусы и фокальные плоскости, т. е. осуществляет касание первого порядка фокальных поверхностей $(\mathrm{N}_1)$ и $(M_1)$, $(\mathrm{N}_2)$ и $(M_2)$; касание второго порядка вообще не имеет места, и, следовательно, когда конгруэнции налагаются, их фокальные поверхности не налагаются.

Потребуем, чтобы наложение имело место и для фокальных поверхностей $(\mathrm{N}_1)$ и $(M_1)$. Тогда при подходящих множителях пропорциональности $\mu$ должны удовлетворяться равенства:

$$\mathrm{N}_1^* = \mu_0\mathrm{M}_1,\quad d\mathrm{N}_1^* = \mu_0 d\mathrm{M}_1 + (\mu)_1\,\mathrm{M}_1, \qquad (51_1)$$

$$d^2\mathrm{N}_1^* = \mu_0 d^2\mathrm{M}_1 + 2\,(\mu)_1 d\mathrm{M}_1 + (\mu)_2\,\mathrm{M}_1, \qquad (51_2)$$

где

$$(\mu)_1 = \mu_1\,du + \mu_2\,dv,\quad (\mu)_2 = \mu_{11}\,du^2 + 2\,\mu_{12}\,du\,dv + \mu_{22}\,dv^2.$$

Пользуясь таблицей (I) и сравнивая в уравнении $(51_1)$ коэфициенты при диференциалах $du$, $dv$, получим:

$$\mathrm{N}_1^* = \mu_0\mathrm{M}_1,\quad \delta^*\mathrm{N}_2^* = \mu_0\delta\mathrm{M}_2 + \mu_1\mathrm{M}_1,\quad \mathrm{N}_3^* = \mu_0\mathrm{M}_3 + \mu_2\mathrm{M}_1. \qquad (51_1')$$

Внося сюда значения $\mathrm{N}_i^*$ из формул (47), полагая $\overline{P} = \overline{P}^*$, $\overline{P}_1 = \overline{P}_1^*$, т. е. $A_1 = 0$, $B_2 = 0$ [см. $(48_2)$], и используя $(51_2)$, получим:

$$\mu_0 = a,\quad \mu_1 = 0,\quad \mu_2 = 0,\quad \mu_{11} = 0,\quad \mu_{12} = 0,\quad \mu_{22} = a\,(\overline{R}^* - \overline{R}),$$
$$b\delta^* = a\delta,\quad b\delta_u^* = a\delta_u,\quad b\delta_v^* = a\delta_v,$$

откуда прямо следует:

$$\left(\frac{a}{b}\right)_u = 0,\quad \left(\frac{a}{b}\right)_v = 0,\quad \frac{a}{b} = \mathrm{const}.$$

Следовательно, меняя однородные координаты, можно привести $\frac{a}{b}$ к единице; величины $\delta, \delta_1$, $\Delta, \Delta_1$ при этом изгибании не меняются, и тетраэдр $(N_1, N_2, N_3, N_4)$ совпадает с тетраэдром $(M_1, M_2, M_3, M_4)$.

Уравнения (50) принимают вид:

$$r_u = 0,\quad r_{1v} = 0,\quad r\delta - r_1\Delta = 0,\quad r_1\delta_1 - r\Delta_1 = 0\ ^1).$$

Если $r$ и $r_1$ равны нулю, то конгруэнции проективно тождественны; если же они отличны от нуля, то, исключая $r$ и $r_1$, получим:

$$\Delta\Delta_1 - \delta\delta_1 = 0,\quad \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\ln\frac{\Delta}{\delta} = 0,$$

а эти равенства характеризуют конгруэнции $R$.

Итак, конгруэнции $R$, и только они одни, способны изгибаться так, что вместе с конгруэнцией проективно изгибаются и обе фокальные поверхности.

[1]) Следует иметь в виду, что величина $a$ в уравнениях (50) равна $\frac{a}{b}$ в обозначениях этой страницы.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

# ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ЛАПЛАСА

**§ 1. Инварианты Дарбу.** Исключая из системы уравнений (I) неизвестные функции $M_2$, $M_3$, $M_4$, мы получим для $M_1$ систему двух уравнений второго порядка.

Полагая для простоты $p = 0$, $p_1 = 0$, $q = 0$, $q_1 = 0$, имеем:

$$\Delta\mathrm{M}_{1uu} + \delta\mathrm{M}_{1vv} = \left(\overline{N} + \Delta\,\frac{\partial\ln\delta}{\partial u}\right)\mathrm{M}_{1u} - \overline{P}\delta\mathrm{M}_{1v} + \overline{R}\delta\mathrm{M}_1,$$
$$\mathrm{M}_{1uv} = \frac{\partial\ln\delta}{\partial v}\,\mathrm{M}_{1u} + \delta\delta_1\mathrm{M}_1. \qquad (1)$$

Эта система вполне интегрируема в силу уравнений (II) и определяет поверхности $(\mathrm{M}_1)$ вплоть до проективного преобразования. Из этой системы уравнений второе наиболее замечательно. Взятое отдельно оно, конечно, не определяет поверхности, но все различные поверхности, которые определяются любой четверкой решений уравнения (1), отнесены к сопряженной системе линий.

Этим свойством обладает всякое уравнение Лапласа

$$\mathrm{M}_{uv} = a\mathrm{M}_u + b\mathrm{M}_v + c\mathrm{M}. \qquad (2)$$

Действительно, оно показывает, что для любой четверки решений определитель

$$(\mathrm{M}\mathrm{M}_u\mathrm{M}_v\mathrm{M}_{uv}) = 0$$

равен нулю, следовательно, уравнение асимптотических линий

$$(\mathrm{M}\mathrm{M}_u\mathrm{M}_v d^2\mathrm{M}) = 0$$

не содержит среднего члена.

В системе уравнений (1) координаты $\mathrm{M}_1$ определенным образом нормированы.

Если в уравнение (2) ввести новое переменное

$$X = \mathrm{M}_1\theta, \qquad (3)$$

то нетрудно убедиться, что мы получим для $X$ уравнение такого же вида. Производя выкладки, получим:

$$X_{uv} = a_1X_u + b_1X_v + c_1X,$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= a + \frac{\partial\ln\theta}{\partial v},\quad b_1 = b + \frac{\partial\ln\theta}{\partial u},\\ c_1 &= c - a\,\frac{\partial\ln\theta}{\partial u} - b\,\frac{\partial\ln\theta}{\partial v} + \frac{\partial^2\ln\theta}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial\ln\theta}{\partial u}\,\frac{\partial\ln\theta}{\partial v}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Исключая из этих уравнений $\theta$, придем к двум уравнениям между коэфициентами первоначального и преобразованного уравнений Лапласа:

$$a_{1u}-a_1b_1-c_1=a_u-ab-c,$$
$$b_{1v}-a_1b_1-c_1=b_v-ab-c.$$

Эти уравнения показывают, что величины

$$k_1=ab+c-a_u, \quad k_2=ab+c-b_v \tag{5}$$

суть инварианты преобразования.

Очевидно, инварианты определяют уравнение вплоть до преобразования вида (3). Действительно, уравнения (4) показывают, что всегда можно так выбрать $\theta$, чтобы $a$ равнялось нулю, и тогда

$$c=k_1, \quad b=\int(k_1-k_2)\,dv.$$

Инварианты уравнения (1), очевидно, равны:

$$k_1=\delta\delta_1-\frac{\partial^2\ln\delta}{\partial u\,\partial v}, \quad k_0=\delta\delta_1. \tag{6}$$

Совершенно так же для второй фокальной поверхности имеем:

$$M_{2uv}=\frac{\partial\ln\delta_1}{\partial u}M_{2v}+\delta\delta_1 M_2 \tag{1'}$$

и инварианты

$$k_0=\delta\delta_1, \quad k_{-1}=\delta\delta_1-\frac{\partial^2\ln\delta_1}{\partial u\,\partial v}. \tag{6'}$$

Нетрудно заметить связь между инвариантами двух фокальных сетей одной конгруэнции: один инвариант, средний $k_0$, у них общий; что касается двух крайних, то они связаны соотношением

$$k_1+k_{-1}=-\frac{\partial^2\ln k_0}{\partial u\,\partial v}+2k_0. \tag{7}$$

Это соотношение позволяет вычислять инварианты последовательных преобразований Лапласа.

Преобразование Лапласа переводит одно уравнение Лапласа в другое. На этом основан каскадный метод интегрирования Лапласа, который привлек большое внимание различных геометров. Почти весь второй том „Théorie des surfaces" Дарбу [52] и в особенности первая часть „Géométrie différentielle projective des réseaux" Цицейка посвящены исследованию последовательностей Лапласа, обрывающихся, т. е. оканчивающихся фокальной поверхностью, выродившейся в линию или в развертывающуюся поверхность, последовательностей периодических, сопряженных сетей с равными инвариантами и т. д.

Так же, как мы получили, исключая $M_2$, $M_3$, $M_4$ из системы (I), систему уравнений второго порядка для $M_1$, среди которых особое место занимает уравнение Лапласа, мы можем получить уравнение Лапласа для тангенциальных координат $\mathrm{m}_1$, исключая $\mathrm{m}_2$, $\mathrm{m}_3$, $\mathrm{m}_4$ из системы (III):



$$\frac{\partial^2\mathrm{m}_1}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial\ln\Delta}{\partial u}\mathrm{m}_{1v}+\Delta\Delta_1\mathrm{m}_1. \tag{8}$$

Инварианты этого уравнения

$$K_{-1}=\Delta\Delta_1-\frac{\partial^2\ln\Delta}{\partial u\,\partial v}, \quad K_0=\Delta\Delta_1 \tag{9}$$

называются тангенциальными инвариантами сопряженной сети линий $(u, v)$. Мы их перенумеровали в обратном порядке, чтобы удобнее сравнивать с точечными инвариантами.

Фокальная сеть линий на второй фокальной поверхности имеет уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2\mathrm{m}_2}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial\ln\Delta_1}{\partial v}\mathrm{m}_{2u}+\Delta\Delta_1\mathrm{m}_2$$

и инварианты

$$K_0=\Delta\Delta_1, \quad K_1=\Delta\Delta_1-\frac{\partial^2\ln\Delta_1}{\partial u\,\partial v}. \tag{9'}$$

Они связаны с инвариантами первой полости соотношением:

$$K_1+K_{-1}=-\frac{\partial^2\ln K_0}{\partial u\,\partial v}+2K_0, \tag{10}$$

которое позволяет последовательно вычислять тангенциальные инварианты сетей, полученных преобразованиями Лапласа.

**§ 2. Характеристика конгруэнций инвариантами Дарбу.** Сравнивая формулы (6), (6′) и (9), (9′), мы немедленно получаем теорему Фубини [53]:

Конгруэнция $W$ характеризуется равенством тангенциального и точечного инвариантов, общих обеим фокальным сетям конгруэнции.

Если два тангенциальных инварианта одной сети равны соответствующим точечным инвариантам, то конгруэнция есть конгруэнция $R$.

Уравнения (7), (10) покажут, что все тангенциальные и точечные инварианты последовательности Лапласа соответственно равны. Если заметить, что $K_{-1}$ есть общий инвариант сети $(M_1)$ и ее преобразования Лапласа $(M_3)$, и, следовательно, равенство $k_{-1}$ и $K_{-1}$ означает, что конгруэнция $(M_1M_3)$, полученная преобразованием Лапласа из конгруэнции $(M_1M_2)$, есть конгруэнция $W$, то станет очевидной теорема Демулена [54]: если две соседние конгруэнции в последовательности Лапласа суть конгруэнции $W$, то и все конгруэнции последовательности будут конгруэнциями $W$.

Аналогично [55]: если первый тангенциальный инвариант первой фокальной сети равен второму точечному инварианту второй сети и общие инварианты обеих сетей равны между собой, то конгруэнция принадлежит линейному комплексу.

Если две соседние конгруэнции последовательности принадлежат линейным комплексам, то имеем равенства инвариантов:

$$k_{-1}=K_1, \quad k_1=K_{-1}, \quad k_0=K_0,$$
$$k_0=K_2, \quad k_2=K_0, \quad k_1=K_1,$$

откуда следует:

$$k_{-1} = k_1, \quad k_0 = k_2,$$

т. е. инвариаиты равны через один.

Этот ряд равенств можно продолжить. По формуле (7) в силу равенства $k_0$ и $k_2$ получим:

$$k_{-1} + k_1 = -\frac{\partial \ln k_0}{\partial u\, \partial v} + 2k_0 = -\frac{\partial \ln k_2}{\partial u\, \partial v} + 2k_2 = k_1 + k_3.$$

Следовательно,

$$k_{-1} = k_3.$$

Отсюда следует теорема Вильчинского [56]: точечные инварианты всей последовательности равны через один, и, следовательно, все конгруэнции последовательности принадлежат линейным комплексам.

Наконец, с помощью инвариантов можно формулировать условия наложимости двух конгруэнций (Фубини [57]):

Конгруэнции проективно наложимы, если развертывающиеся поверхности соответствуют, асимптотические линии на фокальных полостях первой конгруэнции соответствуют асимптотическим линиям на фокальных полостях второй и общий инвариант обеих фокальных сетей первой конгруэнции равен такому же второй конгруэнции.

Нетрудно заметить, что перечисленные условия в точности соответствуют равенствам (49) главы седьмой.

Все это показывает, что точечные и тангенциальные инварианты конгруэнции в значительной степени ее определяют.

**§ 3. Теорема Кёнигса.** Одно из замечательных уравнений Лапласа — уравнение с равными инвариантами [58]. Теория его хорошо разработана и связана с наиболее изящными вопросами диференциальной геометрии. Поэтому сопряженная система с равными точечными или тангенциальными инвариантами, несомненно, представляет интерес. Кёнигс выяснил геометрический смысл этого аналитического признака.

ТЕОРЕМА КЁНИГСА [59]. *Если сопряженная система линий $u$, $v$ на поверхности* ($\mathbf{M}_1$) *обладает равными точечными инвариантами, то существует коническое сечение, которое проходит через два преобразования Лапласа* ($\mathbf{M}_2$) и ($\mathbf{M}_3$) *и имеет там касание второго порядка с линией $v$ на поверхности* ($\mathbf{M}_2$) *и с линией $u$ на поверхности* ($\mathbf{M}_3$), *и это свойство характеризует сеть.*

Выберем инвариантный тетраэдр, построенный на преобразованиях Лапласа.

Коническое сечение лежит в плоскости $M_1M_2M_3$ и является пересечением этой плоскости с поверхностью второго порядка, уравнение которого мы напишем, опуская индексы, в виде:

$$\sum a\mathbf{PP} = 0. \tag{11}$$

Нам надо потребовать, чтобы эта поверхность проходила через точки $M_2$ и $M_3$, т. е. чтобы имели место соотношения:

$$\sum a\mathbf{M}_2\mathbf{M}_2 = 0, \quad \sum a\mathbf{M}_3\mathbf{M}_3 = 0, \tag{12}$$



и чтобы она имела там касание второго порядка соответственно с линией $u$ и с линией $v$, т. е. содержала точки

$$\mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_{2v}\, dv + \frac{1}{2}\mathbf{M}_{2vv}\, dv^2, \quad \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_{3u}\, du + \frac{1}{2}\mathbf{M}_{3uu}\, du^2.$$

Проще всего мы получим необходимое условие, диференцируя равенства (b) соответственно по $v$ и по $u$ два раза при постоянных $a_{ik}$.

Пользуясь таблицей (I), куда надо теперь внести значения (12), (13) из § 4 главы шестой, получим:

$$\left.\begin{aligned} &\sum a\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1 = 0, \quad \delta_1 \sum a\mathbf{M}_1\mathbf{M}_1 + \sum a\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3 = 0, \\ &\sum a\mathbf{M}_3\mathbf{M}_1 = 0, \quad m \sum a\mathbf{M}_1\mathbf{M}_1 + \delta \sum a\mathbf{M}_3\mathbf{M}_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Чтобы эти уравнения были совместны, необходимо, чтобы

$$m = \delta\delta_1, \tag{14}$$

а это и есть условие того, что точечные инварианты фокальной сети ($M_1$) равны между собой.

Если принять тетраэдр ($M_1, M_2, M_3, M_4$) за координатный тетраэдр и обозначить буквами $x_i$ однородные координаты, то уравнения (12) и (13) дадут:

$$a_{22} = 0, \quad a_{33} = 0, \quad a_{21} = 0, \quad a_{31} = 0, \quad \delta_1 a_{11} + a_{23} = 0$$

и уравнение конического сечения напишется в виде:

$$x_1^2 - 2\delta_1 x_2 x_3 = 0.$$

Уравнение (14) в силу таблицы (II) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \ln \delta}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

Следовательно, выбором однородных координат можно привести $\delta$ к единице:

$$\delta = 1.$$

Если два соседних инварианта в последовательности Лапласа равны между собой, то и все остальные симметрично расположенные инварианты попарно равны.

Действительно, применяя два раза уравнение (7), получим:

$$k_{-1} + k_1 = -\frac{\partial^2 \ln k_0}{\partial u\, \partial v} + 2k_0,$$

$$k_{-2} + k_0 = -\frac{\partial^2 \ln k_{-1}}{\partial u\, \partial v} + 2k_{-1}.$$

Если $k_0 = k_{-1}$, то

$$k_{-2} = k_1.$$

Вообще, если

$$k_0 = k_{-1}, \ldots, k_n = k_{-n-1},$$

то из уравнений

$$k_{n-1}+k_{n+1}=-\frac{\partial^2 \ln k_n}{\partial u\,\partial v}+2k_n,$$

$$k_{-n-2}+k_{-n}=-\frac{\partial^2 \ln k_{-n-1}}{\partial u\,\partial v}+2k_{-n-1}$$

следует:

$$k_{n+1}=k_{-n-2}.$$

Отсюда прямо вытекает [60], что если обе фокальные сети конгруэнции обладают равными точечными инвариантами, то все конгруэнции последовательности Лапласа обладают этим свойством.

Такая конгруэнция характеризуется равенствами:

$$\frac{\partial^2 \ln \delta}{\partial u\,\partial v}=0,\quad \frac{\partial^2 \ln \delta_1}{\partial u\,\partial v}=0,$$

откуда следует, что каждая из величин $\delta$ и $\delta_1$ есть произведение функции одного $u$ на функцию одного $v$. Таблица (VII) показывает, что ту и другую можно привести к единице выбором параметров $u$ и $v$ однородных координат $M_1$ и $M_2$.

Отнесенная к инвариантному тетраэдру (§ 4 гл. VI B) конгруэнция определяется уравнениями:

$$\left.\begin{array}{lll} p=p_1=q=q_1=0, & n=n_1=0, & m=m_1=1,\\ P_u=P_{1v}=\Delta\Delta_1-1, & N=\Delta_u-P_1\Delta, & N_1=\Delta_{1v}-P\Delta_1.\\ R_u=P+\Delta N_1, & N_u=R_1\Delta-R, & \\ R_{1v}=P_1+\Delta_1 N, & N_{1v}=R\Delta_1-R_1. & \end{array}\right\} \quad (15)$$

Эта система определяет конгруэнцию с восемью произвольными функциями одного аргумента.

Аналогично нетрудно показать [61], что если в последовательности Лапласа две фокальные сети через одну имеют равные точечные инварианты, то все фокальные сети через одну будут обладать этим свойством.

Действительно, пусть

$$k_0=k_{-1},\quad k_1=k_2.$$

Уравнения (4) дадут теперь две цепи равенства:

$$k_0=k_{-1},\quad k_1=k_{-2},\quad k_2=k_{-3},\ldots,\quad k_n=k_{-n-1},$$
$$k_2=k_1,\quad k_3=k_0,\quad k_4=k_{-1},\ldots,\quad k_n=k_{-n+3},$$

откуда следует:

$$k_{-1}=k_0=k_3=k_4=k_{-4}=k_{-5}=k_7=k_8=\ldots,$$
$$k_1=k_2=k_{-2}=k_{-3}=k_5=k_6=\ldots$$

Конгруэнции, входящие в такие последовательности, характеризуются равенствами:

$$\frac{\partial^2 \ln \delta}{\partial u\,\partial v}=0,\quad \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left[\frac{\partial^2 \ln \delta_1}{\partial u\,\partial v}-\delta\delta_1\right]+\frac{\partial^2 \ln \delta_1}{\partial u\,\partial v}=0.$$



Интегрируя и выбирая параметры и однородные координаты так, чтобы привести произвольные функции от $u$ и $v$ к единице, получим:

$$\delta=1;\quad \frac{\partial^2 \ln \delta_1}{\partial u\,\partial v}=\delta_1+\frac{1}{\delta_1}. \quad (16)$$

Нетрудно видеть, что конгруэнции Вильчинского представляют частный случай конгруэнций этого типа.

**§ 4. Конгруэнция Гурса.** Теорема Кёнигса была обобщена Цицейкой на случай конгруэнции, у которой первый инвариант одной фокальной сети равен второму инварианту другой.

ТЕОРЕМА ЦИЦЕЙКИ [62]. *Если первый точечный инвариант фокальной сети* ($M_1$) *равен второму точечному инварианту второй сети* ($M_2$), *и только в этом случае, существует поверхность второго порядка, проходящая через точки* $M_1, M_2$ *и их преобразования Лапласа* $M_3, M_4$ *и имеющая касание третьего порядка с линией и на поверхности* ($M_3$) *и с линией* $v$ *на поверхности* ($M_4$).

Уравнение такой поверхности можно написать, опуская индексы, в виде:

$$\sum a\mathrm{PP}=0.$$

Внося сюда координаты точек $M_1, M_2, M_3, M_4$, получим:

$$\sum a\mathrm{M}_1\mathrm{M}_1=0,\quad \sum a\mathrm{M}_2\mathrm{M}_2=0,\quad \sum a\mathrm{M}_3\mathrm{M}_3=0,\quad \sum a\mathrm{M}_4\mathrm{M}_4=0. \quad (17)$$

Так как наша поверхность имеет касание третьего порядка с линией $u$ на поверхности ($M_3$) и линией $v$ на поверхности ($M_4$), то мы можем диференцировать два последние уравнения (17) соответственно три раза по $u$ и по $v$ при постоянных коэфициентах $a_{ik}$.

Полагая, что наш тетраэдр ($M_1, M_2, M_3, M_4$) построен на преобразованиях Лапласа, и пользуясь таблицей (I) и формулами (12), (13) § 4 главы шестой, получим:

$$\left.\begin{array}{llll} \sum a\mathrm{M}_1\mathrm{M}_3=0, & \sum a\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3=0, & \sum a\mathrm{M}_3\mathrm{M}_4+m\sum a\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2=0,\\ \sum a\mathrm{M}\mathrm{M}_4=0, & \sum a\mathrm{M}_1\mathrm{M}_4=0, & \sum a\mathrm{M}_3\mathrm{M}_4+m_1\sum a\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2=0. \end{array}\right\} \quad (18)$$

Два последних уравнения совместны только при условии

$$m=m_1, \quad (19$$

а это и показывает, что первый инвариант ($M_3$) равен второму ($M_1$).

Переходя к местным координатам по отношению к тетраэдру ($M_1, M_2, M_3, M_4$), напишем уравнения (17), (18) в виде:

$$a_{11}=0,\quad a_{22}=0,\quad a_{33}=0,\quad a_{44}=0,\quad a_{13}=0,\quad a_{24}=0,$$
$$a_{23}=0,\quad a_{14}=0,\quad a_{34}+ma_{12}=0,$$

и уравнение соприкасающейся поверхности второго порядка будет:

$$mx_3x_4-x_1x_2=0.$$

Такую конгруэнцию Цицейка назвал конгруэнцией Гурса.

Преобразуя с помощью таблицы (II) уравнение (19), мы получим характеристику конгруэнций Гурса в виде:

$$\frac{\partial^2 \ln \delta}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 \ln \delta_1}{\partial u\, \partial v}.$$

Интегрируя и приводя к единице выбором параметров произвольные функции от $u$ и от $v$, получим:

$$\delta = \delta_1. \tag{20}$$

Прилагая формулу (7):

$$k_{-2} + k_0 = -\frac{\partial^2 \ln k_{-1}}{\partial u\, \partial v} + 2k_{-1}, \quad k_0 + k_2 = -\frac{\partial^2 \ln k_1}{\partial u\, \partial v} + 2k_1, \tag{21}$$

мы получим в случае

$$k_{-1} = k_1$$

также и

$$k_{-2} = k_2$$

и таким же образом

$$k_{-1} = k_1, \quad k_{-2} = k_2, \quad k_{-3} = k_3, \ldots, k_{-n} = k_n. \tag{22}$$

Отсюда следует, если две соседние конгруэнции последовательности Лапласа суть конгруэнции Гурса, то и все конгруэнции последовательности обладают этим свойством. Действительно, если допустить

$$k_0 = k_2.$$

и, следовательно,

$$k_0 = k_2, \quad k_{-1} = k_3, \quad k_{-2} = k_4, \ldots, k_{-n} = k_{n+2},$$

то сравнение этого ряда равенства с рядом (22) дает сейчас же:

$$k_0 = k_2 = k_{-2} = k_4 = k_{-4} = \ldots,$$
$$k_1 = k_{-1} = k_3 = k_{-3} = k_5 = \ldots$$

Все четные инварианты, также как и нечетные, равны между собой.

Если воспользоваться вторым уравнением (21) и поставить туда $k_0 = k_2$, то условия, характеризующие нашу конгруэнцию, напишутся так:

$$k_{-1} = k_1, \quad 2k_0 = -\frac{\partial^2 \ln k_1}{\partial u\, \partial v} + 2k_1$$

или, подставляя значение инвариантов:

$$\frac{\partial^2 \ln \delta}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 \ln \delta_1}{\partial u\, \partial v}, \quad \frac{\partial^2 \ln k_1}{\partial u\, \partial v} + 2\frac{\partial^2 \ln \delta_1}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

Интегрируя и приводя к единице произвольные функции, которые войдут при интеграции, за счет выбора параметров и однородных координат, мы напишем эти условия в виде:

$$\delta = \delta_1, \quad \frac{\partial^2 \ln \delta}{\partial u\, \partial v} = \delta^2 - \frac{1}{\delta^2}. \tag{23}$$

Конгруэнция определяется из уравнения (23) и (II) с 10 произвольными функциями одного аргумента.



Аналогично докажем: если две конгруэнции последовательности Лапласа через одну суть конгруэнции Гурса, то все конгруэнции последовательности через одну обладают этим свойством.

Конгруэнция, у которой два преобразования Лапласа суть конгруэнции Гурса, характеризуется при подходящем выборе параметров и однородных координат уравнениями:

$$\frac{\partial^2 \ln \delta}{\partial u\, \partial v} = \delta\delta_1 - \frac{1}{\delta^2}, \quad \frac{\partial^2 \ln \delta_1}{\partial u\, \partial v} = \delta\delta_1 - \frac{1}{\delta_1^2}.$$

Все рассмотренные конгруэнции характеризовались соотношениями между точечными инвариантами фокальных сетей и их преобразований Лапласа.

Двойственные построения приведут к конгруэнциям, которые обладают аналогичными свойствами по отношению к тангенциальным инвариантам. Наконец, возможно наложить требование и на точечные и на тангенциальные инварианты. Таким образом мы получим, например, последовательность Лапласа с равными точечными и равными тангенциальными инвариантами, которая характеризуется равенствами:

$$\frac{\partial^2 \ln \delta}{\partial u\, \partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 \ln \delta_1}{\partial u\, \partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 \ln \Delta}{\partial u\, \partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 \ln \Delta_1}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

Как пример можно указать конгруэнцию Вильчинского

$$\delta = \delta_1 = \Delta = \Delta_1 = 1.$$

Все фокальные поверхности такой последовательности суть поверхности второго порядка.

Конгруэнция, которая является вдвойне конгруэнцией Гурса, т. е.

$$k_{-1} = k_1, \quad K_{-1} = K_1,$$

при подходящем выборе параметров и однородных координат характеризуется уравнениями:

$$\delta = \delta_1, \quad \Delta = \Delta_1.$$

Она зависит от 10 произвольных функций одного аргумента.

Как пример последовательности, которая состоит из конгруэнций дважды Гурса, можно указать конгруэнции Вильчинского:

$$\delta = \delta_1 = \Delta = \Delta_1, \quad \frac{\partial^2 \ln \delta}{\partial u\, \partial v} = \delta^2 - \frac{1}{\delta^2}. \tag{24}$$

## § 5. Последовательности, содержащие несколько конгруэнций $W$

[56]. Мы видели, что большинство замечательных конгруэнций: конгруэнции $W$, конгруэнции $R$, конгруэнции линейного комплекса получаются, если установить зависимость между точечными и тангенциальными инвариантами.

Таким образом можно выделить несколько новых типов конгруэнций.

ТЕОРЕМА. *Если конгруэнция $N$ не является конгруэнцией $W$, но ее оба преобразования Лапласа суть конгруэнции линейного комплекса, то и все нечетные преобразования Лапласа суть конгруэнции линейного комплекса.*

Если первое и минус первое преобразования Лапласа $N_{-1}$ и $N_1$ суть конгруэнции линейного комплекса, то каждый раз общие двум фокальным сетям точечные и тангенциальные инварианты равны между собой, а соседние инварианты равны крест-на-крест

$$k_{-1}=K_{-1}\,,\quad k_1=K_1,$$
$$k_{-2}=K_0,\quad k_0=K_{-2}\,,\quad k_0=K_2,\quad k_2=K_0. \tag{25}$$

Применяя общую формулу:

$$k_n+k_{n+2}=\frac{\partial^2\ln k_{n+1}}{\partial u\,\partial v}+2k_{n+1}\,, \tag{26}$$

справедливую и для тангенциальных инвариантов, получим:

$$k_{-3}+k_{-1}=k_1+k_3=K_{-1}+K_1,\quad k_{-1}+k_1=K_{-1}+K_{-3}=K_1+K_3;$$

следовательно,

$$k_{-3}=K_1,\quad k_3=K_{-1}\,,\quad k_1=K_{-3},\quad k_{-1}=K_3$$

и далее

$$k_{-4}+k_{-2}=K_0+K_2,\quad k_4+k_2=K_0+K_{-2},\quad k_0+k_2=K_{-2}+K_{-4},$$
$$k_0+k_{-2}=K_2+K_4,$$

откуда в силу (25) прямо следует:

$$k_{-3}=K_{-3}\,,\quad k_3=K_3,$$
$$k_{-4}=K_{-2}\,,\quad k_{-2}=K_{-4}\,,\quad k_4=K_2,\quad k_2=K_4,$$

т. е. конгруэнции $N_{-3}$ и $N_3$ суть конгруэнции линейного комплекса.

Это предложение можно обобщить.

Если последовательность Лапласа содержит две конгруэнции линейного комплекса, например, $N$ и $N_n$, то все конгруэнции $N_{2n}$, и $N_{3n}$ и т. д. суть конгруэнции линейного комплекса.

Действительно, по условиям теоремы

$$k_0=K_0,\quad k_n=K_n\,,$$
$$k_{-1}=K_1,\quad k_1=K_{-1},\quad k_{n-1}=K_{n+1}\,,\quad k_{n+1}=K_{n-1}\,. \tag{27}$$

Применяя формулу (26), получим в силу (27):

$$k_{-2}=K_2,\quad k_2=K_{-2}\,,\quad k_{n-2}=K_{n+2}\,,\quad k_{n+2}=K_{n-2}\,.$$

Применяя ее еще раз, имеем:

$$k_{-3}=K_3,\quad k_3=K_{-3}\,,\quad k_{n-3}=K_{n+3}\,,\quad k_{n+3}=K_{n-3}\,.$$

Повторяя систематически эти преобразования, получим:

$$k_{-n}=K_n,\quad k_n=K_{-n}\,,\quad k_{-n-1}=K_{n+1}\,,\quad k_{n-1}=K_{-n+1}$$

или в силу уравнения (27):

$$k_{-n}=K_{-n},$$
$$k_{-n-1}=K_{-n+1},$$

и конгруэнция $N_{-n}$ тоже принадлежит линейному комплексу.



Итак, если две конгруэнции $N$ и $N_n$ одной последовательности Лапласа принадлежат каким-нибудь линейным комплексам, то и все конгруэнции $N_{-n}$, $N_{2n}$, $N_{3n}, \ldots$ — тоже конгруэнции каких-то линейных комплексов.

Возвращаясь к конгруэнции $N$, оба преобразования Лапласа, которой суть конгруэнции линейного комплекса, мы можем написать уравнения (25) в форме:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2\ln\delta}{\partial u\,\partial v}-\delta\delta_1&=\frac{\partial^2\ln\Delta}{\partial u\,\partial v}-\Delta\Delta_1,\\
\frac{\partial^2\ln\delta_1}{\partial u\,\partial v}-\delta\delta_1&=\frac{\partial^2\ln\Delta_1}{\partial u\,\partial v}-\Delta\Delta_1,\\
\frac{\partial^2\ln(k_1\delta^2)}{\partial u\,\partial v}&=\delta\delta_1-\Delta\Delta_1,\\
\frac{\partial^2\ln(k_{-1}\,\delta_1^2)}{\partial u\,\partial v}&=\delta\delta_1-\Delta\Delta_1.
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Вычитая из первого уравиения второе, интегрируя и приводя к единице произвольные функции интеграцин за счет выбора параметров, получим:

$$\delta\Delta_1=\Delta\delta_1. \tag{28'}$$

Точно так же, составляя разность двух последних уравнений (28), интегрируя и приводя к единице произвольные функции интеграции за счет нормирования вершин тетраэдра, получим:

$$k_1\delta_1{}^2=k_{-1}\,\delta^2$$

или

$$\left(\delta\delta_1-\frac{\partial\ln\delta_1}{\partial u\,\partial v}\right)\delta_1{}^2=\left(\delta\delta_1-\frac{\partial\ln\delta}{\partial u\,\partial v}\right)\delta^2. \tag{28''}$$

Таким образом система (28) определяет $\delta$, $\delta_1$, $\Delta$, $\Delta_1$ с 8 произвольными функциями одного аргумента.

Глава девятая

## АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

**§ 1. Преобразование Ионаса.** Конгруэнция $R$ преобразует поверхность $R$ в новую поверхность $R$. Повторяя преобразование Лапласа, мы будем получать новые и новые поверхности $R$. Кроме этого преобразования поверхности $R$, вытекающего из самого определения ее, Ионас (Jonas) [63] указал еще другое преобразование, тоже с помощью конгруэнций $W$, т. е. построил конгруэнции $W$, у которых обе фокальные поверхности суть поверхности $R$, но фокальные сети отличны от сетей $R$. До сих пор не выяснен вопрос, охватывают ли конгруэнции Ионаса все конгруэнции этого типа. Зато можно указать другое свойство этих преобразований, которое их вполне характеризует: преобразование Ионаса — единственное преобразование, которое переводит систему линий $R$ в систему линий $R$, преобразуя одновременно всю последовательность Лапласа, т. е., применяя подходящее преобразование Ионаса к каждой фокальной поверхности последовательности Лапласа, можно перевести их в фокальные поверхности новой последовательности Лапласа.

Пусть $(M_1)$ — поверхность, на которой линии $(u, v)$ образуют сеть $R$ и $(M_1M_2)$ — конгруэнция $R$, образованная касательными к линиям $u$.

Пусть поверхность $(M_1)$ преобразуется в поверхность $(M_3)$, на которой линии $(u, v)$ образуют сопряженную систему, и $(M_3M_4)$ — конгруэнция касательных к линиям $u$ на поверхности $(M_3)$.

Если $(M_4)$ — вторая фокальная поверхность конгруэнции $(M_3M_4)$, то по условию она должна быть связана с поверхностью $(M_2)$ преобразованием Ионаса, и обе конгруэнции $(M_1M_3)$ и $(M_2M_4)$ — конгруэнции $W$.

По условиям задачи точки $M_3$ и $M_4$ лежат в фокальных плоскостях конгруэнции $(M_1M_2)$, поэтому мы можем принять точки $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ за вершины нормального тетраэдра, связанного с конгруэнцией $(M_1M_2)$. Прямая $M_3M_4$ огибает на поверхности $(M_3)$ линии $u$, на поверхности $(M_4)$ — линии $v$. Значит, точки $M_{3u}$ и $M_{4v}$ лежат на луче $M_3M_4$. Таблица (I) дает сейчас же:

$$m=0, \quad n=0, \quad m_1=0, \quad n_1=0. \tag{1}$$

Кроме того, $M_1$ и $M_3$ служат фокусами луча $M_1M_3$. Точка $M_1$ должна лежать в касательной плоскости поверхности $(M_3)$, и, следовательно, эта плоскость определяется точками $M_1$, $M_3$, $M_4$. Поэтому производная $M_{3v}$ линейно выражается только через эти три координаты и также производная $M_{4u}$ — через $M_2$, $M_3$, $M_4$. Таблица (I) дает:

$$N=0, \quad N_1=0. \tag{2}$$



Четыре последние уравнения системы (II) принимают вид:

$$R_u=0, \quad R_{1v}=0, \quad R\delta-R_1\Delta=0, \quad R\Delta_1-R_1\delta_1=0.$$

Отсюда следует, что $R$ есть функция одного $v$, $R_1$ — одного $u$. Следовательно, отношения $\delta:\Delta$ и $\Delta_1:\delta_1$ могут быть приведены к единице, например, выбором параметров $u$ и $v$. Тогда, очевидно, обе функции $R$ и $R_1$ будут равны между собой и, следовательно, обе равны одной и той же постоянной

$$R=R_1=\text{const}.$$

Кроме того, нормированием координат $M_1$, $M_2$ получим:

$$P=p, \quad P_1=p_1. \tag{3}$$

Таблица (I) принимает теперь вид:

$$\left.\begin{aligned} &M_{1u}=\delta M_2, && M_{1v}=pM_1+qM_2+M_3,\\ &M_{2u}=q_1M_1+p_1M_2+M_4, && M_{2v}=\delta_1M_1,\\ &M_{3u}=-qM_4, && M_{3v}=RM_1-pM_3-\delta M_4,\\ &M_{4u}=RM_2-\delta_1M_3-p_1M_4, && M_{4v}=-q_1M_3. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Эта таблица показывает, что тот же тетраэдр служит нормальным тетраэдром и для второй конгруэнции $(M_3M_4)$, если четыре координаты $M_1$ и $M_2$ умножить на постоянную $R$. Компонентами $\delta$, $\delta_1$, $\Delta$, $\Delta_1$ для этой новой конгруэнции служат величины:

$$\delta^*=-q, \quad \delta_1^*=-q_1, \quad \Delta^*=-q, \quad \Delta_1^*=-q_1.$$

Следовательно, конгруэнция $(M_3M_4)$ — тоже конгруэнция $R$.

Наконец, нетрудно заметить, что обе конгруэнции $(M_1M_3)$ и $(M_2M_4)$ суть конгруэнции $W$.

Действительно, обе фокальные поверхности $(M_1)$ и $(M_3)$ всегда имеют одну общую сопряженную систему — это система линий, соответствующая развертывающимся поверхностям конгруэнции $(M_1M_3)$; теперь к этой системе добавляется вторая — система линий, соответствующая развертывающимся поверхностям конгруэнции $(M_2M_4)$; эта система сопряжена на поверхности $(M_2)$ и $(M_4)$ и, следовательно, сопряжена и на поверхностях $(M_1)$ и $(M_3)$, ибо обе конгруэнции $(M_1M_2)$ и $(M_3M_4)$ — конгруэнции $W$ и, следовательно, на фокальных поверхностях сопряженные системы соответствуют.

Итак, поверхности $(M_1)$ и $(M_3)$ имеют две общие сопряженные системы, но две пары сопряженных направлений определяют всю инволюцию сопряженных касательных, а следовательно, и общие элементы ее — асимптотические направления поверхности (теорема Петерсона) [64]. Асимптотические линии на фокальных поверхностях $(M_1)$ и $(M_3)$ соответствуют, значит, конгруэнция $(M_1M_3)$ есть конгруэнция $W$ и совершенно так же конгруэнция $(M_2M_4)$.

**§ 2. Образование конгруэнций Ионаса помощью проективного изгибания поверхности.** Чтобы определить это преобразование Ионаса, т. е. по заданной поверхности $(M_1)$ или конгруэнции $(M_1M_2)$ определить

$p$, $q$, $p_1$, $q_1$, ибо, зная эти величины, мы найдем преобразованную поверхность $(M_3)$ из уравнения (1):

$$M_3 = M_{1v} - pM_1 - qM_2.$$

Конгруэнцию $(M_1M_2)$ можно задать, например, величинами $\delta$, $\delta_1$, $\overline{R}$, $\overline{R}_1$ относительно тетраэдра Вильчинского $(M_1M_2M_{1v}M_{2u})$ при условии, что они удовлетворяют системе:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{R}-\overline{R}_1 = \frac{\delta_{vv}-\delta_{uu}}{\delta} = \frac{\delta_{1vv}-\delta_{1uu}}{\delta_1}, \\ &\overline{R}_u = 2(\delta\delta_1)_v, \quad \overline{R}_{1v} = 2(\delta\delta_1)_u. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Внося значения (I), (2) и (3) в системы (II) и (V), получим:

$$\left.\begin{aligned} &p_u = \delta\delta_1 - qq_1, && p_v = -p^2 - q\delta_1 - q_1\delta + \overline{R} - R, \\ &p_{1u} = -p_1^2 - q\delta_1 - q_1\delta + \overline{R}_1 - R, && p_{1v} = \delta\delta_1 - qq_1, \\ &q_u = \delta_v - p\delta - p_1q, && q_v = \delta_u - p_1\delta - pq, \\ &q_{1u} = \delta_{1v} - p\delta_1 - p_1q_1, && q_{1v} = \delta_{1u} - p_1\delta_1 - pq_1. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Система (6) вполне интегрируема, если $\delta$, $\delta_1$, $\overline{R}$, $\overline{R}_1$ удовлетворяют уравнениям (5). Следовательно, задавая произвольно постоянное $R$, мы получим $p$, $q$, $p_1$, $q_1$ с четырьмя произвольными постоянными. Таким образом преобразование Ионаса зависит от пяти произвольных постоянных.

Уравнение (5) определяет $\overline{R}$ и $\overline{R}_1$ только до постоянного слагаемого: прибавляя к $\overline{R}$ и к $\overline{R}_1$ одно и то же постоянное, мы не нарушим систему. Сохраняя одни и те же $\delta$, $\delta_1$ и меняя $\overline{R}$, $\overline{R}_1$, мы производим проективное изгибание конгруэнции и поверхности.

Система (6) сохранит свой вид, если мы увеличим $\overline{R}$, $\overline{R}_1$ и постоянное $R$ на одну и ту же постоянную величину. Это показывает, что при проективном изгибании поверхности $(M_1)$ изгибается и вся связанная с нею конфигурация, изгибаются обе конгруэнции $(M_1M_2)$, $(M_3M_4)$ так, что точки $M_2$, $M_3$, $M_4$ увлекаются, неразрывно связанные с касательной плоскостью поверхности $(M_1)$.

Меняя произвольное постоянное, содержащееся в $\overline{R}$, $\overline{R}_1$, мы можем привести постоянное $R$ к нулю.

Две последние строчки таблицы (3)

$$\begin{aligned} &M_{3u} = -qM_4, && M_{3v} = -pM_3 - \delta M_4, \\ &M_{4u} = -\delta_1M_3 - p_1M_4, && M_{4v} = -q_1M_3 \end{aligned}$$

показывают, что конгруэнция $(M_3M_4)$ при этом вырождается: точки $M_3$ и $M_4$ двигаются только вдоль неподвижной прямой $M_3M_4$, т. е. все лучи конгруэнции совмещаются с одной и той же прямой. Эта прямая занимает произвольное положение в пространстве, ибо, располагая четырьмя произвольными постоянными, получаемыми при интеграции системы (6), произвольными постоянными, получаемыми при интеграции системы (6), можно дать точкам $M_3$, $M_4$ любое начальное положение, и этим неподвижная прямая $M_3M_4$ будет вполне определена.



Исходя из этого, Фубини [65] предложил такое построение преобразований Ионаса: присоединяем к поверхности $(M_1)$ произвольную прямую в пространстве $M_3M_4$; затем изгибаем проективно поверхность $(M_1)$; если считать, что с каждой касательной плоскостью поверхности $(M_1)$ связана прямая, которая занимает в пространстве одно и то же положение $M_3M_4$, то после проективного изгибания эти прямые займут различные положения и образуют конгруэнцию $(M_3M_4)$.

Четыре произвольных постоянных, определяющих положение прямой $M_3M_4$ (неподвижной), и постоянная изгибания составят все пять произвольных постоянных, которые содержатся в общем преобразовании Ионаса.

**§ 3. Конгруэнции $W$ с одной линейчатой фокальной поверхностью.** Различные геометры рассматривали конгруэнцию $W$ с линейчатыми фокальными поверхностями. Наиболее полные результаты получил Сегре [66].

*Если конгруэнция $W$ имеет одну фокальную поверхность линейчатую, то прямолинейным образующим ее на другой фокальной поверхности соответствуют асимптотические линии, принадлежащие линейным комплексам.*

Пусть поверхность $(M_1)$ — линейчатая поверхность и прямые $M_1M_3$ — ее прямолинейные образующие. Таблица (I) сейчас же дает нам зависимости между компонентами движения тетраэдра.

Пусть диференциал $dM_1$ означает перемещение вдоль линии $M_1M_3$. Исключая $M_2$ из первого уравнения (I), получим:

$$dM_1 = M_{1u}q - M_{1v}\delta = -\delta pM_1 - \delta M_3,$$

где принято $du = q$, $dv = -\delta$.

Диференцируем еще раз в том же направлении:

$$\begin{aligned} d^2M_1 &= q\frac{\partial}{\partial u}(-\delta pM_1 - \delta M_3) - \delta\frac{\partial}{\partial v}(-\delta pM_1 - \delta M_3) = \\ &= AM_1 + BM_3 + (-\delta qn + \delta^2N)M_2 + (\delta q^2 - \delta^2\Delta)M_4. \end{aligned}$$

Здесь $A$ и $B$ — какие-то функции от $u$ и $v$, которые нас не интересуют.

Если $M_1M_3$ — прямолинейная образующая, то не только $dM_1$, но и $d^2M_1$ лежит на этой прямой, а следовательно, $d^2M_1$ линейно выражается через координаты $M_1$ и $M_3$.

Сокращая на $\delta$, очевидно, не равное нулю, имеем:

$$qn - \delta N = 0, \tag{$7_1$}$$

$$q^2 - \delta\Delta = 0. \tag{$7_2$}$$

Пусть конгруэнция $(M_1M_2)$ есть конгруэнция $W$:

$$\delta\delta_1 - \Delta\Delta_1 = 0, \quad P = p, \quad P_1 = p_1. \tag{8}$$

Диференцируя в том же направлении $M_2$, получим [45]:

$$dM_2 = M_{2u}q - M_{2v}\delta = (qq_1 - \delta\delta_1)M_1 + p_1qM_2 + qM_4.$$

Если ребро $M_2M_4$ касается той асимптотической линии на поверхности

$(M_2)$, которая соответствует прямолинейной образующей $M_1M_3$ поверх- ности $(M_1)$, то $dM_2$ должно лежать на прямой $M_2M_4$, а следовательно,

$$qq_1-\delta\delta_1=0. \tag{9}$$

Наконец, для упрощения выкладок выбираем $p$ и $p_1$ так, чтобы $n=$ и, следовательно, $N=0$.

Покажем теперь, что касательные $M_2M_4$ к асимптотическим линиям $du:dv=\sqrt{\frac{\delta_1}{\Delta_1}}$ поверхности $(M_2)$, соответствующим прямолинейным об- разующим $M_1M_3$, принадлежат линейным комплексам.

Пусть

$$\sum c_{ik}(P^iQ^k)=0$$

— уравнение такого комплекса.

Ему удовлетворяют координаты $(M_2M_4)$. Опуская указатели, имеем:

$$\sum c(M_2M_4)=0. \tag{10}$$

Тому же уравнению удовлетворяют касательные в бесконечно близких точках, т. е. производные от $(M_2M_4)$ до любого порядка. Диференцируя уравнение (10) при постоянных $c_{ik}$ вдоль кривой

$$du:dv=q:-\delta,$$

получим:

$$\sum c\left[q\frac{\partial}{\partial u}(M_2M_4)-\delta\frac{\partial}{\partial v}(M_2M_4)\right]=0,$$

или в силу (9):

$$(-N_1q+n_1\delta)\sum c(M_1M_2)+(-\Delta_1q+\delta q_1)\sum c(M_2M_3)=0. \tag{11}$$

Из уравнений (7), (8), (9) следует:

$$q_1=\frac{\delta\delta_1}{q}=q\frac{\Delta\Delta_1}{\delta\Delta}=q\frac{\Delta_1}{\delta},$$

и уравнение (11) принимает вид:

$$\sum c(M_1M_2)=0.$$

Диференцируя еще раз, имеем:

$$\delta\sum c(M_2M_3)+q\sum c(M_1M_4)=0.$$

Новое диференцирование дает:

$$(q_uq-q_v\delta-p_1q^2-pq\delta)\sum c(M_1M_4)+$$
$$+(\delta_uq-\delta_v\delta+p_1q\delta+R\delta^2)\sum c(M_2M_3)-2\delta q\sum c(M_3M_4)=0.$$

Если сюда внести из уравнения $(7_2)$

$$q=\sqrt{\delta\Delta}$$



и воспользоваться уравнениями системы (II):

$$\delta_v-\frac{1}{2}\sqrt{\delta\Delta}\,\frac{\partial\ln\delta\Delta}{\partial u}=p\delta+p_1q,$$

$$\Delta_u-\frac{1}{2}\sqrt{\delta\Delta}\,\frac{\partial\ln\delta\Delta}{\partial v}=p_1\Delta+pq,$$

то получим:

$$(nq-N\delta)\sum c(M_1M_4)-2\delta q\sum c(M_3M_4)=0,$$

т. е. в силу уравнения $(7_1)$

$$\sum c(M_3M_4)=0.$$

Следующее диференцирование в том же направлении дает

$$(-N_1q+n_1\delta)\sum c(M_1M_3)+(mq-R\delta+R_1\Delta-m_1q)\sum c(M_1M_4)=0;$$

но предпоследнее уравнение (II) теперь принимает вид:

$$R\delta-R_1\Delta=(m-m_1)q,$$

и, следовательно, мы имеем:

$$\sum c(M_1M_3)=0.$$

Новые диференцирования дают только тождества. Следовательно, асимптотические линии поверхности $(M_2)$, соответствующие прямолинейным образующим $(M_1)$, принадлежат линейным комплексам [1].

Обратная теорема тоже справедлива, мы на ней не останавливаемся.

**§ 4. Конгруэнции Сегре.** Если обе фокальные поверхности — линейчатые, то прямолинейным образующим одной соответствуют прямолинейные образующие другой или же одна из этих поверхностей — поверхность второго порядка и тогда одному семейству образующих ее соответствуют прямолинейные образующие другой фокальной поверхности, другому семейству — асимптотические, принадлежащие к линейным комплексам.

Пусть обе фокальные поверхности $(M_1)$ и $(M_2)$ — линейчатые и прямые $M_1M_3$ или $M_2M_4$ — их прямолинейные образующие. Так же, как и раньше, мы получим теперь уже две группы уравнений:

$$qn-\delta N=0,\qquad q^2-\delta\Delta=0, \tag{$7_{1,\,2}$}$$

$$q_1n_1-\delta_1N_1=0,\qquad q_1^2-\delta_1\Delta_1=0. \tag{$7_{3,\,4}$}$$

Кроме того, если конгруэнция $(M_1M_2)$ есть конгруэнция $W$, то при подходящем выборе параметров будем иметь:

$$\delta\delta_1-\Delta\Delta_1=0,\quad P=p,\quad P_1=p_1. \tag{12}$$

Из уравнений $(7_2)$, $(7_4)$ и (12) следует:

$$q^2q_1^2=\delta^2\delta_1^2.$$

В зависимости от выбора знака при извлечении корня могут представиться два случая.

---
[1] См. Fubini „Geom. pr.-diff.", т. I, стр. 278.

Если

$$qq_1 = \delta\delta_1,$$

то, как это мы только что видели, асимптотические линии $M_1M_3$ и
$M_2M_4$ соответствуют друг другу.

Если же

$$qq_1 = -\delta\delta_1,$$

то при

$$n = 0, \quad n_1 = 0 \qquad (13$$

в силу уравнений (II) будем иметь:

$$p\delta + p_1 q = \delta_v - q_u,$$
$$p_1\delta_1 + pq_1 = \delta_{1u} - q_{1v}.$$

Эти уравнения могут быть разрешены относительно $p$ и $p_1$ (определи-
тель системы $\delta\delta_1 - qq_1$ не равен нулю). Мы можем, следовательно, вы-
брать $p$, $p_1$ так, чтобы уравнения (13) имели место, и тогда уравнени-
($7_1$), ($7_8$) дадут:

$$N = 0, \quad N_1 = 0. \qquad (13$$

Вводя новую неизвестную функцию

$$t = \sqrt{\frac{\Delta}{\delta}} = \sqrt{\frac{\delta_1}{\Delta_1}},$$

мы получим:

$$q = t\delta, \quad q_1 = -\frac{\delta_1}{t}, \quad \Delta = t^2\delta, \quad \Delta_1 = \frac{\delta_1}{t^2}, \qquad (1$$

и система (II) примет вид:

$$p_u = 2\delta\delta_1 - m, \quad p_{1v} = 2\delta\delta_1 - m_1, \qquad (15$$
$$\frac{\partial \ln t}{\partial u} = 2p_1, \qquad \frac{\partial \ln t}{\partial v} = -2p, \qquad (15$$
$$\frac{\partial \ln \delta}{\partial v} - t\frac{\partial \ln \delta}{\partial u} = p + 3tp_1, \qquad (15$$
$$t\frac{\partial \ln \delta_1}{\partial u} + \frac{\partial \ln \delta_1}{\partial v} = tp_1 - 3p, \qquad (1$$
$$R = R_1 t^2, \qquad m = m_1, \qquad (1$$
$$R_u = m_v + 2mp, \quad R_{1v} = m_u + 2mp_1. \qquad (1$$

Условие совместности уравнений ($15_2$):

$$p_{1v} + p_u = 0;$$

а так как из уравнений ($15_1$), ($15_5$) следует:

$$p_{1v} = p_u,$$



то обе эти производные равны нулю. Следовательно, $p_1$ есть функция одного $u$, $p$ — одного $v$. Меняя общий множитель у координат $\mathbf{M}_1$ или $\mathbf{M}_2$, мы приведем эти функции к нулю:

$$p = 0, \quad p_1 = 0, \quad t = \text{const}.$$

Полагая в уравнениях (VII) $\frac{dv}{dv^*} = t$, мы не нарушим равенства нулю $p$ и $p_1$ и приведем $t$ к единице.

Уравнения ($15_{3,4}$) теперь интегрируются так, что

$$\delta = \varphi(u + v), \quad \delta_1 = \psi(u - v),$$

а условие совместности уравнений ($15_6$) в силу ($15_5$) и ($15_1$) дает:

$$(\delta\delta_1)_{uu} = (\delta\delta_1)_{vv},$$

т. е., обозначая производные штрихами:

$$\varphi'\psi' = 0.$$

Следовательно, или $\varphi$, или $\psi$ есть постоянное. Пусть, например, $\varphi = \text{const}$. Это постоянное можно привести к единице, умножая на нее четыре координаты $\mathbf{M}_1$ (что не нарушит предыдущие условия). В силу (14) мы будем иметь:

$$\delta = 1, \quad \Delta = 1, \quad \Delta_1 = \delta_1 = \psi(u - v). \qquad (16)$$

Условие (16) § 6 гл. VI выполнено, следовательно, поверхность ($\mathbf{M}_1$) — поверхность второго порядка. Наконец, рассуждения начала этого параграфа показывают, что асимптотические кривые поверхности ($\mathbf{M}_2$) принадлежат различным линейным комплексам.

Следует еще обратить внимание, что уравнение (16) прямо показывает, что рассматриваемая конгруэнция есть конгруэнция $R$.

Обратная теорема не верна: существуют конгруэнции $R$, у которых одна полость фокальной поверхности — поверхность второго порядка, и прямолинейным образующим на другой полости соответствуют кривые асимптотические линии.

В самом деле, возьмем конгруэнцию $W$ с одной фокальной поверхностью — поверхностью второго порядка.

Условие, что первая полость фокальной поверхности ($\mathbf{M}_1$) есть поверхность второго порядка, имеет вид (см. § 6 главы шестой):

$$P_1 - p_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \delta\Delta^3}{\partial u}, \quad P - p = -\frac{1}{2}\frac{\partial \ln \delta^3\Delta}{\partial v},$$

откуда

$$\frac{\partial^2 \ln \delta\Delta}{\partial u\, \partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 \ln \delta}{\partial u\, \partial v} = \delta\delta_1 - \Delta\Delta_1.$$

Если конгруэнция ($\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$) есть конгруэнция $W$, то

$$\Delta\Delta_1 - \delta\delta_1 = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial^2 \ln \delta}{\partial u\, \partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 \ln \Delta}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

Мы видим, что конгруэнция $W$ с одной фокальной полостью — поверхностью второго порядка — всегда конгруэнция $R$.

Обе функции $\delta$ и $\Delta$ суть произведение функции одного $u$ на функцию одного $v$; выбором параметров $u$, $v$ и нормированием координат мы приведем их к единице:

$$\delta=1,\quad \Delta=1,\quad \Delta_1=\delta_1.$$

Выберем вершины $M_3$, $M_4$ тетраэдра так, чтобы

$$p=0,\quad p_1=0,\quad q=1,\quad q_1=\delta_1.$$

Тогда, очевидно,

$$P=0,\quad P_1=0,\quad n=0,\quad N=0,\quad n_1=\delta_{1u}-\delta_{1v},\quad N_1=\delta_{1v}-\delta_{1u},$$
$$m=0,\quad m_1=0,\quad R=R_1$$

и для определения $\delta_1$ и $R$ имеем уравнения:

$$\delta_{1uu}-\delta_{1vv}=0,\quad R_u=2(\delta_{1v}-\delta_{1u}),\quad R_{1v}=2(\delta_{1u}-\delta_{1v}),$$

откуда

$$\delta_1=\varphi(u+v)+\psi(u-v),\quad R=-4\psi(u-v)+C.$$

Вторая фокальная полость будет линейчатой только в том случае, если одна из функций $\varphi$ или $\psi$ обратится в постоянное. Изменение постоянного $C$ производит проективное изгибание конгруэнции, при котором поверхность второго порядка преобразуется в поверхность второго порядка.

**§ 5. Конгруэнции $R$ с линейчатыми фокальными поверхностями** [67]. Рассмотрим теперь конгруэнцию $R$ с одной линейчатой фокальной поверхностью.

Выбирая тетраэдр так, чтобы ребро $M_1M_3$ служило прямолинейной образующей поверхности $(M_1)$, имеем, как в начале § 4:

$$qn-\delta N=0,\quad q^2-\delta\Delta=0.$$

Условие того, что конгруэнция $(M_1M_2)$ есть конгруэнция $R$, можно записать при подходящем выборе параметров в виде:

$$\Delta=\delta,\quad \Delta_1=\delta_1;\quad P=p,\quad P_1=p_1.$$

Следовательно, меняя в случае надобности знак параметра $u$, получим:

$$q=\delta.$$

Кроме того, перемещая точку $M_3$ по прямой $M_1M_3$ и точку $M_4$ — в плоскости $M_1M_2M_4$, можем положить

$$q_1=\delta_1,\quad p=0,\quad p_1=0,$$

и система (II) примет вид:

$$\left.\begin{gathered} m=0,\quad m_1=0,\quad n=0,\quad N=0,\quad N_1=-n,\quad R=R_1,\\ \delta_u-\delta_v=0,\quad \delta_{1u}-\delta_{1v}=n_1,\\ R_u=-2n_1\delta,\quad R_v=2n_1\delta,\\ n_{1u}+n_{1v}=0. \end{gathered}\right\}\qquad (17)$$



Интегрируя и обозначая производные от $\varphi$ и $\psi$ штрихами, имеем:

$$\delta=\varphi(u+v),\quad R=\psi(u-v),$$
$$n_1=-\frac{\psi'}{2\varphi}.$$

Наконец, последнее уравнение (17) дает:

$$\frac{\varphi'\psi'}{\varphi^2}=0.$$

Если

$$\varphi'=0,$$

то

$$\delta=\mathrm{const}.$$

и, следовательно, поверхность $(M_1)$ — поверхность второго порядка. Этот случай мы уже рассматривали и можем теперь оставить в стороне.

Если

$$\psi'=0,$$

то система (17) дает:

$$R=\mathrm{const.},\quad n_1=0,\quad \delta_1=\chi(u+v).\qquad (18)$$

Вторая фокальная поверхность — тоже линейчатая.

Так как полученная преобразованием Лапласа конгруэнция имеет заведомо одну фокальную поверхность линейчатую, то, применяя последовательно полученную теорему, придем к заключению, что все поверхности, полученные преобразованием Лапласа, будут линейчатыми поверхностями. Сомнение может возникнуть только в том случае, если одно из преобразований окажется поверхностью второго порядка, ибо, как мы видели, возможна конгруэнция $R$ с одной фокальной поверхностью — поверхностью второго порядка, а другой не линейчатой.

Чтобы разрешить этот вопрос, заметим, что если обе фокальные поверхности — линейчатые, то формулы (17) и (18) сохраняют свою силу и для поверхности $(M_1)$ второго порядка; в этом случае надо только полагать $\delta$ равным постоянному, которое всегда можно привести к единице.

Перейдем прежде всего к асимптотическим параметрам, полагая:

$$2\alpha=u+v,\quad 2\beta=u-v.$$

Таблица (I) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} M_{1\alpha}&=2\delta M_2+M_3, & M_{1\beta}&=-M_3,\\ M_{2\alpha}&=2\delta_1M_1+M_4, & M_{2\beta}&=M_4,\\ M_{3\alpha}&=RM_1-2\delta M_4, & M_{3\beta}&=-RM_1,\\ M_{4\alpha}&=RM_2-2\delta_1M_3, & M_{4\beta}&=RM_2, \end{aligned}\right\}\qquad (19)$$

…да снова следует, что линии $\beta$ на обеих поверхностях $(M_1)$ и $(M_2)$ — …ые.

Введем теперь тетраэдр

$$\mathbf{N}_1 = \delta \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \delta}{\partial \alpha}\mathbf{M}_1, \quad \mathbf{N}_2 = \frac{\mathbf{M}_1}{\delta},$$

$$\mathbf{N}_3 = R\mathbf{M}_1 - \delta \mathbf{M}_4 - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \delta}{\partial \alpha}\mathbf{M}_3, \quad \mathbf{N}_4 = -\frac{\mathbf{M}_3}{\delta}.$$

Таблица (19) примет вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{N}_{1\alpha} = 2\delta\left(\delta\delta_1 - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 \ln \delta}{\partial \alpha^2}\right)\mathbf{N}_3 + \mathbf{N}_3, && \mathbf{N}_{1\beta} = -\mathbf{N}_3,\\
&\mathbf{N}_{2\alpha} = 2\frac{\mathbf{N}_1}{\delta} + \mathbf{N}_4, && \mathbf{N}_{2\beta} = \mathbf{N}_4,\\
&\mathbf{N}_{3\alpha} = R\mathbf{N}_1 - 2\delta\left(\delta\delta_1 - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 \ln \delta}{\partial \alpha^2}\right)\mathbf{N}_4, && \mathbf{N}_{3\beta} = -R\mathbf{N}_1,\\
&\mathbf{N}_{4\alpha} = R\mathbf{N}_2 - \frac{2}{\delta}\mathbf{N}_3, && \mathbf{N}_{4\beta} = R\mathbf{N}_2.
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Нетрудно заметить, что точка $N_1$ лежит на касательной к линии $v$ поверхности $(M_1)$. Таблица (20), вполне аналогичная таблице (19), показывает, что конгруэнция $(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)$, полученная преобразованием Лапласа из конгруэнции $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$, того же самого вида, как и конгруэнция $(M_1M_2)$; обе фокальные поверхности ее — линейчатые, ибо новые величины $\delta$ и $\delta_1$

$$\delta\left(\delta\delta_1 - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 \ln \delta}{\partial \alpha^2}\right), \quad \frac{1}{\delta}$$

попрежнему — функции от $2\alpha = u + v$, хотя бы $\delta$ было постоянно, т. е. и в том случае, когда поверхность $(M_1)$ — поверхность второго порядка.

Таблица (19) дает для точек:

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_1\sqrt{R}, \quad \mathbf{P}_2 = \mathbf{M}_3 - \mathbf{M}_1\sqrt{R},$$
$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{M}_4 + \mathbf{M}_2\sqrt{R}, \quad \mathbf{Q}_2 = \mathbf{M}_4 - \mathbf{M}_2\sqrt{R}$$

производные:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_{1\alpha} = \mathbf{P}_1\sqrt{R} - 2\delta\mathbf{Q}_2, && \mathbf{P}_{1\beta} = -\mathbf{P}_1\sqrt{R},\\
&\mathbf{P}_{2\alpha} = -\mathbf{P}_2\sqrt{R} - 2\delta\,\mathbf{Q}_1, && \mathbf{P}_{2\beta} = \mathbf{P}_2\sqrt{R},\\
&\mathbf{Q}_{1\alpha} = \mathbf{Q}_1\sqrt{R} - 2\delta_1\mathbf{P}_2, && \mathbf{Q}_{1\beta} = \mathbf{Q}_1\sqrt{R},\\
&\mathbf{Q}_{2\alpha} = -\mathbf{Q}_2\sqrt{R} - 2\delta_1\mathbf{P}_1, && \mathbf{Q}_{2\beta} = -\mathbf{Q}_2\sqrt{R}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что все четыре точки остаются неизменными при изменении $\beta$ и описывают прямые $P_1Q_2$, $P_2Q_1$ с изменением $\alpha$. Эти прямые, следовательно, пересекают все образующие $M_1M_3$, $M_2M_4$ обеих фокальных поверхностей $(M_1)$ и $(M_2)$. Обе линейчатые поверхности имеют одни и те же две прямолинейные директрисы. Естественно, что таблица (20) приведет к тем же двум неподвижным прямым.

Следовательно, все преобразования Лапласа имеют одни и те же директрисы, т. е. все линейчатые поверхности этой последовательности Лапласа принадлежат к одной и той же линейной конгруэнции.



Обратно, две линейчатые поверхности $(M_1)$ и $(M_2)$ линейной конгруэнции определяют конгруэнцию $R$, для которой они служат фокальными поверхностями.

Пусть $M_1$ и $M_2$ — те точки поверхностей $(M_1)$ и $(M_2)$, где их касается луч $M_1M_2$; $M_1M_3$ и $M_2M_4$ — прямолинейные образующие поверхностей $(M_1)$ и $(M_2)$; $P_1$, $P_2$ и $Q_1$, $Q_2$ — точки пересечения образующих с директрисами; $u$, $v$ — параметры развертывающихся поверхностей конгруэнции $(M_1M_2)$. Выберем точки $M_3$ и $M_4$ на образующих так, чтобы

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3, \quad \mathbf{P}_2 = \mathbf{M}_3 - \mathbf{M}_1, \quad \mathbf{Q}_1 = \mathbf{M}_4 + \mathbf{M}_2, \quad \mathbf{Q}_2 = \mathbf{M}_4 - \mathbf{M}_2.$$

Так как при изменении $u$, $v$ точки $P_i$, $Q_i$ могут описывать только прямые $P_1Q_2$ и $P_2Q_1$, то

$$\mathbf{P}_{1u} = a\mathbf{P}_1 + b\mathbf{Q}_2, \quad \mathbf{P}_{2u} = a_1\mathbf{P}_2 + b_1\mathbf{Q}_1,$$
$$\mathbf{Q}_{1u} = a'\mathbf{Q}_1 + b'\mathbf{P}_2, \quad \mathbf{Q}_{2u} = a_1'\mathbf{Q}_2 + b_1'\mathbf{P}_1,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{M}_{1u} &= \frac{a + a_1}{2}\mathbf{M}_1 + \frac{a - a_1}{2}\mathbf{M}_3 - \frac{b + b_1}{2}\mathbf{M}_2 + \frac{b - b_1}{2}\mathbf{M}_4,\\
\mathbf{M}_{3u} &= \frac{a - a_1}{2}\mathbf{M}_1 + \frac{a + a_1}{2}\mathbf{M}_3 - \frac{b - b_1}{2}\mathbf{M}_2 + \frac{b + b_1}{2}\mathbf{M}_4,\\
\mathbf{M}_{2u} &= \frac{a' + a_1'}{2}\mathbf{M}_2 + \frac{a' - a_1'}{2}\mathbf{M}_4 - \frac{b' + b_1'}{2}\mathbf{M}_1 + \frac{b' - b_1'}{2}\mathbf{M}_3,\\
\mathbf{M}_{4u} &= \frac{a' - a_1'}{2}\mathbf{M}_2 + \frac{a' + a_1'}{2}\mathbf{M}_4 - \frac{b' - b_1'}{2}\mathbf{M}_1 + \frac{b' + b_1'}{2}\mathbf{M}_3,
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

и аналогичные формулы для производных по $v$.

Так как тетраэдр $(M_1, M_2, M_3, M_4)$ удовлетворяет требованиям, предъявляемым к нормальному тетраэдру конгруэнции $(M_1M_2)$, то таблица (21) при подходящем нормировании координат $M_1$, $M_2$ должна совпадать с таблицей (4). Сравнивая их, имеем:

$$a = 0, \quad a_1 = 0, \quad b = b_1, \quad b' = b_1',$$

и, следовательно,

$$m = 0, \quad m_1 = 0, \quad n = 0, \quad n_1 = 0, \quad N = 0, \quad N_1 = 0,$$
$$q = \delta = \Delta, \quad q_1 = \delta_1 = \Delta_1,$$

откуда прямо следует, что рассматриваемая конгруэнция есть конгруэнция $R$.

**§ 6. Разложение конгруэнции на линейчатые поверхности второго порядка** [68]. Нетрудно заметить, что конгруэнция $W$ с двумя линейчатыми фокальными поверхностями может быть разложена на $\infty^1$ поверхностей второго порядка, именно: линейчатые поверхности конгруэнции, пересекающие фокальные поверхности по прямолинейным образующим, суть поверхности второго порядка.

Действительно, выберем точки $M_3$ и $M_4$ на прямолинейных образующих $M_1M_3$ и $M_2M_4$ так, чтобы прямая $M_3M_4$ была лучом нашей конгруэнции, т. е. чтобы она касалась поверхностей $(M_3)$ и $(M_4)$, которые теперь совпадают с поверхностями $(M_1)$ и $(M_2)$.

Так как теперь касательная плоскость к поверхности $(M_3)$ содержит образующую $M_1M_3$ и луч $M_3M_4$, т. е. совпадает с плоскостью $M_1M_3M_4$, то разложение производных $\mathbf{M}_{3u}$ и $\mathbf{M}_{3v}$ в формулах (4) не должно содержать члена с $\mathbf{M}_2$; аналогично производные $\mathbf{M}_{4u}$, $\mathbf{M}_{4v}$ линейно выражаются только через $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$, $\mathbf{M}_4$, т. е. не содержат члена с $\mathbf{M}_1$. Отсюда

$$n = 0, \quad n_1 = 0, \quad N = 0, \quad N_1 = 0.$$

Кроме того, так как наша конгруэнция есть конгруэнция $W$ и прямые $M_1M_3$, $M_2M_4$ — соответствующие друг другу прямолинейные образующие фокальных поверхностей, то

$$\Delta\Delta_1 - \delta\delta_1 = 0, \quad P = p, \quad P_1 = p_1, \quad q^2 = \Delta\delta, \quad q_1^2 = \Delta_1\delta_1, \quad qq_1 = \delta\delta_1.$$

Возьмем теперь какую-нибудь точку

$$\mathbf{N} = \mathbf{M}_1 + \lambda\mathbf{M}_2$$

на луче $M_1M_2$; покажем, что при движении точек $M_1$ и $M_2$ вдоль образующих $M_1M_3$, $M_2M_4$ она описывает прямую при подходящем $\lambda$.

Дифеpéнцируем $N$, полагая $du = q$, $dv = -\delta$. Мы получим:

$$d(\mathbf{M}_1 + \lambda\mathbf{M}_2) = -p\delta(\mathbf{M}_1 + \lambda\mathbf{M}_2) - \delta\left(\mathbf{M}_3 - \frac{q}{\delta}\lambda\mathbf{M}_4\right), \tag{22}$$

если положить

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u}q - \frac{\partial\lambda}{\partial v}\delta + \lambda(qp_1 + p\delta) = 0. \tag{23}$$

Тиким же образом получим:

$$d\left(\mathbf{M}_3 - \frac{q}{\delta}\lambda\mathbf{M}_4\right) = \mathbf{M}_1(mq - R\delta) + \lambda(m_1q - R_1\Delta)\mathbf{M}_2 +$$

$$+ p\delta\left(\mathbf{M}_3 - \frac{q}{\delta}\lambda\mathbf{M}_4\right) + \lambda\mathbf{M}_4\left\{-\left[\left(\frac{q}{\delta}\right)_u q - \left(\frac{q}{\delta}\right)_v \delta\right] + 2(pq + p_1\Delta)\right\};$$

но предпоследнее уравнение (II) дает:

$$mq - R\delta = m_1q - R_1\Delta$$

и

$$\left(\frac{q}{\delta}\right)_u q - \left(\frac{q}{\delta}\right)_v \delta = 2\frac{q_uq}{\delta} - \frac{q_uq}{\delta} - \frac{q^2}{\delta^2}\delta_u - q_v + \frac{q}{\delta}\delta_v =$$

$$= \frac{q}{\delta}(\delta_v - q_u) + \Delta_u - q_v = 2(p_1\Delta + pq),$$

ибо

$$\delta_v - q_u = p\delta + p_1q, \quad \Delta_u - q_v = p_1\Delta + pq.$$

Следовательно,

$$d\left(\mathbf{M}_3 - \frac{q}{\delta}\lambda\mathbf{M}_4\right) = (mq - R\delta)(\mathbf{M}_1 + \lambda\mathbf{M}_2) + p\delta\left(\mathbf{M}_3 - \frac{q}{\delta}\lambda\mathbf{M}_4\right). \tag{24}$$

Уравнения (22) и (24) показывают, что точка $N$ описывает прямую, если $\lambda$ удовлетворяет уравнению (23). Умножая $\lambda$ на произвольное постоянное, получим $\infty^1$ прямых, расположенных на линейчатой поверхности конгруэнции, опирающейся на пару соответствующих образующих $M_1M_3$, $M_2M_4$. Эта поверхность, обладая двумя системами прямолинейных образующих, является поверхностью второго порядка $Q$.



Образующие одного семейства $\infty^1$ таких поверхностей $Q$ составляют нашу конгруэнцию $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$. Образующие вторых семейств составят, очевидно, тоже некоторую конгруэнцию. Нетрудно обнаружить, что это — конгруэнция $W$ с линейчатыми фокальными поверхностями.

Умножая $\lambda$ на произвольное постоянное $t$ и принимая $t$ и $u$ за независимые переменные второй конгруэнции, мы получим для фокуса:

$$P = \mu(\mathbf{M}_1 + \lambda t\mathbf{M}_2) + \mathbf{M}_3 - \frac{q}{\delta}\lambda t\mathbf{M}_4$$

уравнение:

$$\left(P_u,\ P_t,\ \mathbf{M}_1 + \lambda t\mathbf{M}_2,\ \dot{\mathbf{M}}_3 - \frac{q}{\delta}\lambda t\mathbf{M}_4\right) = 0,$$

которое по раскрытии принимает вид:

$$\mu^2\delta + \mu\left[-\left(\frac{q}{\delta}\right)_u\delta + 2p_1q\right] + R_1\Delta - mq = 0.$$

Так как это уравнение не содержит $t$, то $\mu$ не зависит от $t$, т. е. при изменении $t$ фокусы перемещаются по образующим — по двум лучам конгруэнции $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$.

Если конгруэнция $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$ есть конгруэнция $R$, то фокусы дополнительной конгруэнции лежат на двух общих директрисах двух фокальных поверхностей первой конгруэнции. Фокальные поверхности второй конгруэнции вырождаются в две прямые. Следовательно, вторая конгруэнция — линейная.

Глава десятая

# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОНГРУЭНЦИЙ

**§ 1. Обобщение на линейчатое пространство асимптотически преобразований Бианки** [69]. Если рассматривать конгруэнцию как обра в пространстве прямых, то мы имеем здесь многообразие $\infty^2$ элементов которое в этом смысле можно сравнивать с поверхностью как многооб разием $\infty^2$ точек. С этой точки зрения можно обобщить на конгруэн ции то преобразование, которое Бианки называет асимптотическим пре образованием поверхности, — преобразование с помощью конгруэнции $W$

Две поверхности $S$ и $S_1$ являются двумя полостями фокальной по верхности одной и той же конгруэнции $K$. Это значит, что соотве ствующие точки обеих поверхностей связаны прямой $d$, которая касаетс и первой и второй поверхности.

В пространстве прямых вместо поверхностей $S$ и $S_1$ мы имеем дв конгруэнции $C$ и $C_1$. Прямая линия $d$ — линейная серия $\infty^1$ точек — соответствует линейной серии $\infty^1$ прямых — одной системе образующих поверхности второго порядка (demi-quadrique по терминологии Кёнигса)

Линейчатая поверхность $D$ проходит через соответствующие луч конгруэнций $C$, $C_1$ и при этом касается их, т. е. содержит и лучи беско нечно близкие.

Конгруэнции $K$ соответствует здесь семейство $F$, содержащее $\infty$ линейчатых поверхностей $D$. Конгруэнции $C$ и $C_1$ служат двумя поло стями огибающей (в пространстве прямых) семейства $F$.

Любые две поверхности $S$ и $S_1$ могут быть соединены конгруэнцие $K$, для которой они служат двумя полостями фокальной поверхност Конгруэнция $K$ состоит, очевидно, из общих касательных обеих повер ностей. Чтобы получить преобразование поверхностей, надо стесни произвол в выборе второй поверхности. С этой целью Бианки требуе чтобы конгруэнция $K$ была конгруэнцией $W$, т. е. чтобы на поверхностях $S_1$ соответствовали асимптотические линии.

Здесь в пространстве прямых отношение несколько меняется. П прежнему две произвольные конгруэнции $C$, $C_1$ определяют семейст $F$, для которого они служат двумя полостями огибающей, но выбо ограничения приходится делать иначе, ибо аналога асимптотическим ли ниям у конгруэнций $C$, $C_1$ нет.

Пусть $(M_1M_2)$ и $(M_3M_4)$ — две произвольные конгруэнции, $M_1$, $M_2$ — фокусы луча $M_1M_2$; $M_3$, $M_4$ — точки пересечения второго луча с фо кальными плоскостями первого так, что $(M_1, M_2, M_3, M_4)$ является канониче ским тетраэдром для первой конгруэнции.



Линейчатая поверхность $D$ — одно семейство образующих поверхности второго порядка — определяется как пересечение трех линейных комплексов уравнениями:

$$\sum ar=0, \quad \sum br=0, \quad \sum cr=0, \tag{1}$$

где мы опустили значки у коэфициентов $a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}$ и у координат $r^{ik}$.

По условию линейчатая поверхность $D$ содержит соответствующие лучи $M_1M_2$ и $M_3M_4$ и их бесконечно близкие. Следовательно, удовлетворяются уравнения:

$$\sum a(M_1M_2)=0, \quad \sum a[(M_1M_2)_u du+(M_1M_2)_v dv]=0,$$
$$\sum a(M_3M_4)=0, \quad \sum a[(M_3M_4)_u \delta u+(M_3M_4)_v \delta v]=0,$$

где $du:dv$ и $\delta u:\delta v$ — два направления (две линейчатые поверхности конгруэнций $C$ и $C_1$), вдоль которых $D$ касается обеих конгруэнций.

Развертывая получим:

$$\sum a(M_1M_2)=0, \quad \sum a[(M_1M_4)du-(M_2M_3)dv]=0,$$
$$\sum a(M_3M_4)=0, \quad \sum a\{[-N_1(M_1M_3)+ m(M_1M_4)-R_1(M_2M_3)-n(M_4M_2)]\delta u + [-n_1(M_1M_3)+R(M_1M_4) - m_1(M_2M_3)-N(M_4M_2)]\delta v\}=0$$

и такие же уравнения с заменой $a$ на $b$ и $c$.

Принимая за координатный тетраэдр тетраэдр $(M_1M_2M_3M_4)$ получим:

$$a_{12}=0,\ b_{12}=0,\ c_{12}=0,\ a_{34}=0,\ b_{34}=0,\ c_{34}=0, \tag{$2_1$}$$
$$a_{14}du-a_{23}dv=0, \tag{$2_2$}$$
$$(N_1a_{13}-ma_{14}+R_1a_{23}+na_{42})\delta u+(n_1a_{13}-Ra_{14}+m_1a_{23}+Na_{42})\delta v=0 \tag{$2_3$}$$

и такие же уравнения для $b_{ik}$, $c_{ik}$.

Три уравнения $(2_2)$ по исключении отношения $du:dv$ дают пропорциональность коэфициентов:

$$a_{14}:a_{23}=b_{14}:b_{23}=c_{14}:c_{23}.$$

Мы можем, следовательно, исключить эти члены из двух уравнений (1) и переписать всю систему (1) в местных координатах $\rho_{ik}$ в виде:

$$\rho^{13}=0, \quad \rho^{42}=0, \quad a_{14}\rho^{14}+a_{23}\rho^{23}=0. \tag{$1_1$}$$

Внося эти значения в уравнение $(2_3)$, получим:

$$N_1\delta u+n_1\delta v=0, \quad n\delta u+N\delta v=0,$$
$$a_{14}(m\delta u+R\delta v)=a_{23}(R_1\delta u+m_1\delta v). \tag{3}$$

Исключение отношения $\delta u:\delta v$ приведет нас к уравнениям:

$$NN_1-nn_1=0, \tag{$4_1$}$$
$$a_{14}(mN-Rn)=a_{23}(R_1N-m_1n). \tag{$4_2$}$$

Последнее из этих уравнений определяет отношение коэфициентов $a_{14}:a_{23}$, т. е. уравнения (1) поверхности $D$. Следовательно, уравнение $(4_1)$ — единственное условие, налагаемое на тетраэдр $(M_1M_2M_3M_4)$, т. е. единственное условие, которому должны удовлетворять конгруэнции $(M_1M_2)$, $(M_3M_4)$, чтобы существовало семейство $F$ $\infty^2$ поверхности $D$.

Каковы бы ни были две произвольно заданные конгруэнции $C$ и $C_1$ (не вырождающиеся, с различными фокусами), вообще говоря, можно установить такое соответствие между их лучами, чтобы условие $(4_1)$ имело место. Действительно, уравнение $(4_1)$, если сюда внести значения $N$, $N_1$, $n$, $n_1$ по формулам (V) § 4 главы шестой, есть диференциальное уравнение для величин $p$, $q$, $p_1$, $q_1$, определяющих положение точек $M_3$ и $M_4$, в которых луч второй конгруэнции $C_1$ пересекает соответственные фокальные плоскости первой.

Через всякую точку первой фокальной плоскости проходит один или несколько лучей конгруэнции $C_1$. Можно сказать, что конгруэнция $C_1$ устанавливает соответствие между точками обеих фокальных плоскостей: каждой точке $M_3$ соответствует одна или несколько точек $M_4$. Следовательно, если конгруэнция $C_1$ дана, то $p_1$, $q_1$ можно рассматривать как заданные функции от $p$ и $q$. Внося эти функции в уравнение $(4_1)$, получим одно уравнение для двух неизвестных величин $p$, $q$. Каждое решение этого уравнения устанавливает требуемое соответствие между лучами обеих конгруэнций.

Так как на две функции $p$, $q$ мы имеем только одно уравнение $(4_1)$, то одна из них остается произвольной, и мы могли бы наложить еще одно условие; два условия уже стеснят выбор конгруэнции $C_1$.

**§ 2. Преобразование конгруэнции помощью $\infty$ семейств $F$.** Итак, каковы бы ни были конгруэнции $C$ и $C_1$, существует семейство $F$ $\infty^2$ поверхностей $D$, которые касаются обеих конгруэнций по соответствующим лучам, подобно тому, как две произвольные поверхности $S$ и $S_1$ определяют конгруэнцию общих касательных.

Чтобы определить преобразование конгруэнций, надо наложить новое требование на соответствие лучей $C$ и $C_1$, подобно тому, как асимптотическое преобразование Бианки определяется добавочным требованием соответствия асимптотических линий на обеих поверхностях $S$ и $S_1$. Но здесь это добавочное условие можно ввести гораздо более просто и естественно.

Мы видели, что всякая пара конгруэнций может быть поставлена в соответствие своими лучами так, что существует семейство $F$ касающихся в этих лучах поверхностей $D$. Не может ли существовать несколько таких семейств $F$ при одном и том же соответствии между лучами $C$ и $C_1$?

Если это так, то уравнение $(4_2)$ не может определять отношения коэфициентов $a_{14}:a_{23}$, т. е. должны иметь место равенства

$$mN - Rn = 0, \quad R_1N - m_1n = 0, \tag{5}$$

и тогда существует $\infty^1$ семейств $F$, обладающих указанным свойством. Нетрудно выяснить геометрический смысл уравнения (5).



Таблица (I) дает в силу (5):

$$\left.\begin{aligned} &RM_{3u} - mM_{3v} = PmM_3 + (m\Delta - Rq)M_4, \\ &m_1M_{4u} - R_1M_{4v} = (q_1R_1 - m_1\Delta_1)M_3 - P_1m_1M_4. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Производные от $M_3$ и $M_4$ соответственно в направлениях:

$$du:dv = R:-m, \quad du:dv = m_1:-R_1 \tag{7}$$

лежат на прямой $M_3M_4$, следовательно, $M_3$, $M_4$ — фокусы луча $M_3M_4$.

Аналогично фокусы первого луча лежат в фокальных плоскостях второго. Действительно, из уравнений (5) следует, если $N$, $n$ не нули:

$$R:m = m_1:R_1,$$

и значит, развертывающиеся поверхности (7) второй конгруэнции совпадают. Это приводит к вырождению конгруэнции, ибо фокусы ее различны. Оставляя этот случай в стороне, мы должны положить

$$N = 0, \quad n = 0 \tag{8a}$$

и аналогично

$$N_1 = 0, \quad n_1 = 0. \tag{8b}$$

Таблица (I) сейчас же покажет, что касательные плоскости фокальных поверхностей $(M_3)$ и $(M_4)$ суть плоскости $M_1M_3M_4$, $M_2M_4M_3$, т. е. фокусы первого луча $M_1$ и $M_2$ лежат в фокальных плоскостях второго.

Пучок линейчатых поверхностей $D$ определится теперь уравнениями (в местных координатах):

$$\rho^{13} = 0, \quad \rho^{42} = 0, \quad \rho^{14} = a\rho^{23},$$

где $a = -\dfrac{a_{23}}{a_{14}}$ — произвольный параметр. Они касаются обеих конгруэнций вдоль поверхностей

$$(m + aR_1)\,du + (R + am_1)\,dv = 0, \quad du + a\,dv = 0. \tag{9}$$

Уравнения (9) устанавливают соответствие между линейчатыми поверхностями обеих конгруэнций. В этом соответствии развертывающиеся поверхности соответствуют сами себе. Соответствие инволюционно, если $m = m_1$.

**§ 3. Преобразование $T$.** Будем называть преобразованием $T$ конгруэнций $C$ и $C_1$ преобразование, осуществляемое пучком $\infty^1$ семейств $F$ из $\infty^2$ поверхностей $D$, касающихся обеих конгруэнций по соответственным лучам.

Это определение, как мы видим, равносильно следующему.

Две конгруэнции $C$ и $C_1$ связаны преобразованием $T$, если фокусы каждой конгруэнции лежат в соответственных фокальных плоскостях другой.

Пусть первая конгруэнция $(M_1M_2)$ дана, например, компонентами тетраэдра Вильчинского:

$$\delta, \ \delta_1, \ \Delta, \ \Delta_1, \ \bar{P}, \ \bar{P}_1, \ \bar{R}, \ \bar{R}_1,$$

удовлетворяющими системе (VI).

Вторая конгруэнция определяется координатами $p$, $q$, $p_1$, $q_1$ точек пересечения луча $M_3M_4$ с фокальными плоскостями первой конгруэнции. По формулам (V) уравнения (8а, 6) преобразуются в систему четырех уравнений для $p$, $q$, $p_1$, $q_1$:

$$\left.\begin{aligned} q_u &= -p_1 q - p\delta + \delta_v, \quad q_v = -p_1\Delta - pq + \Delta_u - \overline{P}_1\Delta - \overline{P}q, \\ q_{1u} &= -p\Delta_1 - p_1 q_1 + \Delta_{1v} - \overline{P}\Delta_1 - \overline{P}_1 q_1, \quad q_{1v} = -pq_1 - p_1\delta_1 + \delta_{1u}. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Уравнения (10) определяют, следовательно, преобразование $T$.

Система (10) содержит $p$ и $p_1$ в конечном виде. По исключении $p$ и $p_1$ получается система двух уравнений в частных производных первого порядка для $q$, $q_1$. Эту систему можно разрешить относительно $q_u$, $q_{1u}$, если $\delta_1 q - \Delta q_1$ не равно нулю, относительно $q_v$, $q_{1v}$, если $\Delta_1 q - \delta q_1$ не нуль.

Следовательно, за этими исключениями существует одна и только одна конгруэнция, полученная преобразованием $T$ так, что вспомогательные конгруэнции $(M_1M_3)$, $(M_2M_4)$ содержат заданные линейчатые поверхности, описанные около поверхностей $(M_1)$ и $(M_2)$ вдоль линий $v = \text{const.}$ или $u = \text{const.}$

Рассмотрим теперь эти исключения.

1. Прежде всего система (10) может быть не разрешима относительно $p$, $p_1$. Это будет иметь место при наличии уравнений:

$$q^2 = \Delta\delta, \quad q_1^2 = \Delta_1\delta_1, \quad \Delta\Delta_1 = \delta\delta_1.$$

Последнее уравнение показывает, что конгруэнция $(M_1M_2)$ есть конгруэнции $W$. Что касается двух первых, то, сравнивая их с уравнением (14) § 6 главы шестой, приходим к заключению, что обе поверхности $(M_1)$ и $(M_2)$ — линейчатые и лучи $M_1M_3$, $M_2M_4$ — прямолинейные, образующие их.

Следовательно, точки $M_3$ и $M_4$ лежат на тех же поверхностях $(M_1)$, $(M_2)$. Итак, обе конгруэнции $(M_1M_3)$ и $(M_3M_4)$ образованы общими касательными одной и той же пары поверхностей $(M_1)$, $(M_2)$. В частности, за конгруэнцию $(M_3M_4)$ можно принять ту же самую конгруэнцию $(M_1M_2)$.

Итак, конгруэнция $W$ с линейчатыми фокальными поверхностями может быть $\infty$ числом способов преобразована преобразованием $T$ сама в себя; за соответствующий луч $M_3M_4$ можно принять любой луч, пересекающий те же образующие $M_1M_3$ и $M_2M_4$.

**§ 4. Преобразование конгруэнций одного линейного комплекса.** Если

$$\delta_1 q - \Delta q_1 = 0,$$
$$\Delta_1 q - \delta q_1 = 0,$$

то, вводя вспомогательную функцию $t$, можем положить

$$q = \Delta t, \quad q_1 = \delta_1 t, \quad \Delta\Delta_1 - \delta\delta_1 = 0.$$



Внося эти значения в уравнения (10), получим:

$$\left.\begin{aligned} t_u + t\left(\frac{\partial \ln \Delta}{\partial u} + p_1\right) &= \left(\frac{\partial \ln \delta}{\partial v} - p\right)\frac{\delta}{\Delta}, \\ t_u + t\left(\frac{\partial \ln \delta_1}{\partial u} + p_1 + \overline{P}_1\right) &= \left(\frac{\partial \ln \Delta_1}{\partial v} - p - \overline{P}\right)\frac{\Delta_1}{\delta_1}, \\ t_v + t\left(\frac{\partial \ln \Delta}{\partial v} + p + \overline{P}\right) &= \frac{\partial \ln \Delta}{\partial u} - p_1 - \overline{P}_1, \\ t_v + t\left(\frac{\partial \ln \delta_1}{\partial v} + p\right) &= \frac{\partial \ln \delta_1}{\partial u} - p_1, \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

или, исключая производные $t_u$, $t_v$, так как $\frac{\delta}{\Delta} = \frac{\Delta_1}{\delta_1}$:

$$\left.\begin{aligned} t\left(\frac{\partial \ln \Delta}{\partial u} - \frac{\partial \ln \delta_1}{\partial u} - \overline{P}_1\right) &= \left(\frac{\partial \ln \delta}{\partial v} - \frac{\partial \ln \Delta_1}{\partial v} + \overline{P}\right)\frac{\delta}{\Delta}, \\ t\left(\frac{\partial \ln \Delta}{\partial v} - \frac{\partial \ln \delta_1}{\partial v} + \overline{P}\right) &= \frac{\partial \ln \Delta}{\partial u} - \frac{\partial \ln \delta_1}{\partial u} - \overline{P}_1. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Если эти уравнения совместны, то $t$ имеет единственное значение; если оно удовлетворяет уравнению (11), то существует помимо преобразований $T$ общего типа одно преобразование этого рода.

Уравнения (12) удовлетворяются тождественно, если

$$\frac{\partial \ln \frac{\Delta}{\delta_1}}{\partial u} = \overline{P}_1, \quad \frac{\partial \ln \frac{\Delta}{\delta_1}}{\partial v} = -\overline{P}.$$

Исключая $\overline{P}$ и $\overline{P}_1$ с помощью уравнения (VI), немедленно получим

$$\frac{\partial^2 \ln \frac{\Delta}{\delta_1}}{\partial u\, \partial v} = 0;$$

это уравнение характеризует конгруэнцию линейного комплекса.

Обратно, пусть $(M_1M_2)$ — конгруэнция линейного комплекса. При подходящем выборе параметров $u$, $v$ имеем:

$$\delta = \Delta_1, \quad \delta_1 = \Delta, \quad \overline{P} = 0, \quad \overline{P}_1 = 0.$$

Система (10) принимает вид:

$$q_u + p_1 q + p\delta = \delta_v, \quad q_v + pq + p_1\delta_1 = \delta_{1u}, \quad (10'a)$$
$$q_{1u} + p_1 q_1 + p\delta = \delta_v, \quad q_{1v} + pq_1 + p_1\delta_1 = \delta_{1u}. \quad (10'b)$$

Вычитая из верхних уравнений нижние, получим:

$$(q - q_1)_u = -p_1(q - q_1), \quad (q - q_1)_v = -p(q - q_1). \quad (10'c)$$

Если $q$ не равно $q_1$, то система (10'a, b, c) определит решение с двумя произвольными функциями одного аргумента, но кроме того, эта система имеет особое решение

$$q = q_1.$$

Уравнения (10'а) определяют в таком случае $p$, и $p_1$; $q$ остает произвольной функцией.

Вторая конгруэнция $(M_3M_4)$ принадлежит тому же комплексу. Эт прямо следует из уравнений (3) § 1 главы седьмой, если принять в внимание, что $q$ и $q_1$ пропорциональны $\Delta$ и $\delta_1$. Обратно, нетрудно п казать, что любые две конгруэнции одного и того же линейного ко плекса всегда связаны преобразованием $T$.

Пусть $C$ и $C_1$ — две конгруэнции одного линейного комплекса $L$ $A$ — конгруэнция общих касательных двух каких-либо фокальных пол стей первой и второй конгруэнции. Луч конгруэнции $A$, соединяющ фокусы $M_1$ и $M_3$ конгруэнции $C$ и $C_1$, устанавливает между лучами соответствие, в котором луч $M_1M_2$ соответствует лучу $M_3M_4$. Точ $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$, как всегда, их фокусы.

Плоскость $M_1M_2M_3$ содержит луч $M_1M_2$ и бесконечно близк ему луч конгруэнции $C$, пересекающиеся в фокусе $M_2$. Оба луча пр надлежат комплексу $L$. Следовательно, плоскость $M_1M_2M_3$ сопряже точке $M_2$ в нулевой системе комплекса $L$. Совершенно так же плоско $M_3M_4M_1$ сопряжена точке $M_4$.

Прямые $M_1M_3$ и $M_2M_4$ взаимны: точкам одной прямой $M_2M_4$ соо ветствуют плоскости, проходящие через другую $M_1M_3$. Следователь справедливо и обратное положение: точкам, лежащим на прямой $M_1M$ например точками $M_1$ и $M_3$, должны соответствовать плоскости, про дящие через прямую $M_2M_4$, т. е. плоскости $M_1M_2M_4$ и $M_3M_2M$ Каждая из этих точек служит, следовательно, фокусом своего луча, к точка, где этот луч пересекается с бесконечно близким лучом конгруэнци Четыре фокуса обеих конгруэнций взаимно лежат в фокальных плоскост следовательно, одна из конгруэнций есть преобразование $T$ от друго

Возвращаясь к общему случаю, имеем теорему:

Для произвольной конгруэнции $C$ существует $\infty$ конгруэнции $C$ которые являются преобразованием $T$ от $C$. Многообразие конгруэнц $C_1$ зависит от двух функций одного аргумента. Конгруэнция линейно комплекса, кроме того, может быть преобразована в любую конгру цию того же комплекса; конгруэнция $W$ с линейчатыми фокальны поверхностями — сама в себя.

**§ 5. Преобразование $S$.** Налагая на конгруэнции $C$ и $C_1$, соедине ные семейством $F\infty^2$ поверхностей $D$, какое-нибудь новое требован мы построим новое преобразование конгруэнций.

Будем называть конгруэнцию $C_1$ преобразованием $S$ от конгруэнц $C$, если $C$ и $C_1$ связаны семейством $F$ так, что развертывающиеся пове ности $C$ и $C_1$ соответствуют друг другу.

Требуя, чтобы касательная плоскость к поверхности $u$ или $v$ во в точках луча $M_3M_4$ была одна и та же, мы получим условия, ч конгруэнция $(M_3M_4)$ отнесена к развертывающимся поверхностям:

$$(M_{3u}M_{4u}M_3M_4) = 0,$$
$$(M_{3v}M_{4v}M_3M_4) = 0.$$

С помощью таблицы (I) мы их представим в виде:

$$mR_1 - N_1n = 0, \quad m_1R - Nn_1 = 0. \qquad (1$$



Эти два уравнения и уравнение $(4_1)$ § 1

$$NN_1 - nn_1 = 0 \qquad (14)$$

определяют преобразования $S$.

Три уравнения (13), (14), очевидно, оставляют одну из функций $p$, $q$, $p_1$, $q_1$ произвольной.

Выясним, в каком случае оба преобразования $T$ и $S$ совпадают. Это может осуществиться двумя различными способами. В преобразовании $T$ фокусы каждой конгруэнции лежат в фокальных плоскостях другой конгруэнции, в преобразовании $S$ они попарно соответствуют друг другу так, что принадлежат соответствующим развертывающимся поверхностям. Поэтому совпадение обоих преобразований может осуществиться: 1) так, что каждый фокус будет лежать в фокальной плоскости своего соответствующего или 2) противоположного.

Будем исходить из формулы (10) для преобразования $T$. В первом случае надо потребовать, чтобы луч $M_3M_4$ касался на поверхности $(M_3)$ линии $u$, на поверхности $(M_4)$ — линии $v$:

$$M_{3u} = AM_3 + BM_4, \quad M_{4v} = A_1M_3 + B_1M_4.$$

Таблица в таком случае дает сейчас же:

$$m = 0, \quad m_1 = 0.$$

Внося эти значения и значения (8а, b) в последние уравнения системы (II), получим:

$$R_u = 0, \quad R_{1v} = 0, \quad R\delta - R_1\Delta = 0, \quad R\Delta_1 - R_1\delta_1 = 0. \qquad (15)$$

Если $R$, $R_1$ равны нулю, то вторая конгруэнция $(M_3M_4)$ вырождается, а именно: обе фокальные поверхности вырождаются в линии. Если $R$, $R_1$ не нули, то изменением параметров $u$, $v$ каждую из этих величин можно привести к единице, ибо $R$ есть функция одного $v$ и $R_1$ — одного $u$. Два последних уравнения (15) сейчас же дают:

$$\Delta = \delta, \quad \Delta_1 = \delta_1.$$

Следовательно, конгруэнция $(M_1M_2)$ есть конгруэнция $R$. В силу симметрии вторая конгруэнция $(M_3M_4)$ — тоже конгруэнция $R$, в чем нетрудно убедиться непосредственно.

Мы еще вернемся к этой замечательной конфигурации. Теперь перейдем к рассмотрению преобразования $T$ с обратным соответствием развертывающихся поверхностей.

**§ 6. Обратное соответствие развертывающихся поверхностей.** При обратном соответствии развертывающихся поверхностей луч $M_3M_4$ касается линии $v$ на поверхности $(M_3)$ и линии $u$ на $(M_4)$.

Следовательно, при подходящих функциях $A_i$ и $B_i$

$$M_{3v} = A_1M_3 + B_1M_4, \quad M_{4u} = A_2M_3 + B_2M_4.$$

Таблица (I) дает нам теперь:

$$R = 0, \quad R_1 = 0.$$

Внося эти значения и значения (8a, b) в последние уравнения (II), получим:

$$(m-m_1)\,q=0, \quad (m-m_1)\,q_1=0, \tag{16}$$

1. Если

$$m=m_1,$$

то обе вспомогательные конгруэнции $(M_1M_3)$ и $(M_2M_4)$ принадлежат одному и тому же линейному комплексу.

Действительно, диференцируя шесть раз подряд уравнения

$$\sum a\,(M_1M_3)=0, \quad \sum a\,(M_2M_4)=0$$

при постоянных коэфициентах $a_{ik}$, сначала получим:

$$\left.\begin{aligned}
&q\sum a\,(M_1M_4)-\delta\sum a\,(M_2M_3)=0,\\
&\Delta\sum a\,(M_1M_4)-q\sum a\,(M_2M_3)=0,\\
&q_1\sum a\,(M_1M_4)-\Delta_1\sum a\,(M_2M_3)=0,\\
&\delta_1\sum a\,(M_1M_4)-q_1\sum a\,(M_2M_3)=0.
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Если

$$q^2=\delta\Delta, \quad q_1^2=\delta_1\Delta_1, \quad qq_1=\delta\delta_1, \tag{18}$$

то вся прямая $M_1M_3$ принадлежит поверхности $(M_1)$ (см. § 4 гл. 9), она, следовательно, принадлежит и поверхности $(M_3)$, ибо $M_1M_3$ проходит через точку $M_3$, т. е. точки $M_1$ и $M_3$ лежат на одной и той же линейчатой поверхности. Точно так же точки $M_2$ и $M_4$ лежат на одной и той же линейчатой поверхности, прямолинейными образующими которой служат прямые $M_2M_4$.

Следовательно, обе конгруэнции образованы общими касательными одной и той же пары линейчатых поверхностей.

Если уравнения (18) не имеют места, то система (17) равносильна двум уравнениям:

$$\sum a\,(M_1M_4)=0, \quad \sum a\,(M_2M_3)=0.$$

Новые диференцирования дают:

$$R_1\sum a\,(M_1M_2)=0, \quad m_1\sum a\,(M_1M_2)+\sum a\,(M_3M_4)=0,$$
$$R\sum a\,(M_1M_2)=0, \quad m\sum a\,(M_1M_2)+\sum a\,(M_3M_4)=0.$$

Так как все шесть ребер тетраэдра не могут принадлежат одному линейному комплексу, то, очевидно:

$$R=0, \quad R_1=0, \quad m=m_1. \tag{19}$$

Новые диференцирования приведут к тождествам в силу уравнений (19) и (II).

Итак, в этом случае вспомогательные конгруэнции принадлежат одному линейному комплексу и, следовательно, конгруэнции $(M_1M_3)$ $(M_2M_4)$ взаимны относительно линейного комплекса.



Внося значения (8a, b) и (19) в уравнение (V), получим для определения преобразования конгруэнции систему:

$$\left.\begin{aligned}
&q_u=-p_1q-p\delta+\delta_v, && q_v=-p_1\Delta-pq+\Delta_u-\bar P_1\Delta-\bar Pq,\\
&q_{1u}=-p\Delta_1-p_1q_1+\Delta_{1v}-\bar P\Delta_1-\bar P_1q_1, && q_{1v}=-pq_1-p_1\delta_1+\delta_{1u},\\
&p_u=\delta\delta_1-qq_1-m, && p_v=\bar R-p^2-p\bar P-q_1\Delta-q\delta_1,\\
&p_{1u}=\bar R_1-p_1^2-p_1\bar P_1-q\Delta_1-q_1\delta, && p_{1v}=\delta\delta_1-qq_1-m,\\
&m_u=-m\,(2p+\bar P), && m_v=-m\,(2p_1+\bar P_1).
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Эта система в силу (VI) вполне интегрируема, как в этом легко убедиться непосредственным диференцированием; она определяет преобразованную конгруэнцию с пятью произвольными постоянными.

2. Если $m$ не равно $m_1$, то из уравнения (16) следует:

$$q=0, \quad q_1=0.$$

Таблица (I) покажет теперь, что каждая из сторон косого четырехугольника $(M_1, M_2, M_4, M_3)$ касается на двух поверхностях, описанных его вершинами, на предшествующей—линии $u$, на последующей — линии $v$. Каждая из четырех конгруэнций является преобразованием Лапласа своих двух соседних. Вся конфигурация составляет замкнутую последовательность Лапласа с периодом из четырех конгруэнций.

Система (II) принимает теперь вид:

$$\left.\begin{aligned}
&p_u=\delta\delta_1-m, && p_{1v}=\delta\delta_1-m_1,\\
&P_u-p_u=\Delta\Delta_1-\delta\delta_1, && P_{1v}-p_{1v}=\Delta\Delta_1-\delta\delta_1,\\
&p=\frac{\partial\ln\delta}{\partial v}, \quad p_1=\frac{\partial\ln\delta_1}{\partial u}, && P=\frac{\partial\ln\Delta_1}{\partial v}, \quad P_1=\frac{\partial\ln\Delta}{\partial u},\\
&m_v=-m\,(P+p), && m_{1u}=-m_1\,(P_1+p_1).
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Последние два уравнения интегрируются, если для исключения $p$, $p_1$, $P$, $P_1$ воспользоваться уравнениями предпоследней строки. При подходящем выборе параметров интеграл можно записать в виде:

$$m=\frac{1}{\delta\Delta_1}, \quad m_1=\frac{1}{\delta_1\Delta}.$$

С другой стороны, уравнения второй строки после такой же замены дадут:

$$\frac{\Delta_1}{\delta}=\frac{\Delta}{\delta_1}, \tag{22}$$

где произвольные функции интегрирования приведены к единице за счет подходящего нормирования координат.

Обозначая общие отношения (22) буквой $t$, получим для определения такой последовательности систему уравнений:

$$\Delta_1=\delta t, \quad \Delta=\delta_1 t,$$

$$\frac{\partial^2\ln\delta}{\partial u\,\partial v}=\delta\delta_1-\frac{1}{\delta^2 t}, \quad \frac{\partial^2\ln\delta_1}{\partial u\,\partial v}=\delta\delta_1-\frac{1}{\delta_1^2 t}, \quad \frac{\partial^2\ln t}{\partial u\,\partial v}=\delta\delta_1\,(t^2-1). \tag{23}$$

Если первая конгруэнция $(M_1M_2)$ есть конгруэнция $W$, т. е.

$$\Delta\Delta_1 = \delta\delta_1,$$

то, меняя в случае надобиости зиак нормирующего множителя, имеем:

$$t = 1, \quad \Delta = \delta_1, \quad \Delta_1 = \delta.$$

Следовательно, конгруэнция $(M_1M_2)$ принадлежит линейному комплексу. В силу $q = 0$, $q_1 = 0$ вторая конгруэнция $(M_3M_4)$ принадлежит тому же комплексу, как это сейчас же видно из уравнения (3) § 1 главы седьмой.

Итак, преобразование $T$ и преобразование $S$ совпадают:

1. Если конгруэнция $R$ преобразуется в конгруэнцию $R$; соответствие развертывающихся поверхностей прямое.

2a. Если конфигурация $T$ есть периодическая последовательность Лапласа, состоящая из четырех конгруэнций.

2b. Если обе конгруэнции взаимно сопряжены относительно линейного комплекса. В двух последних случаях соответствие развертывающихся поверхностей обратное.

**§ 7. Расслоение конгруэнций.** Фубини [70] первый поставил задачу расслоения конгруэнций.

Пусть даны две конгруэнции $C$ и $C_1$, лучи которых находятся в взаимно однозначном соответствии.

Рассмотрим плоские элементы $p$ в смысле, который придан этому слову Ли, т. е. элементы, состоящие из точки (центр элемента) и проходящей через нее плоскости. Центры элементов расположим на луче конгруэнции $C$, а их плоскости проведем через соответствующий луч $C_1$. Каждой паре лучей $C$, $C_1$, таким образом, присоединено $\infty^1$ элементов $p$, а паре конгруэнций — $\infty^3$.

Нельзя ли сгруппировать их в $\infty^1$ семейств по $\infty^2$ элементов так, чтобы центры элементов каждого отдельного семейства образовали поверхность $\Sigma$, а плоскости элементов служили касательными плоскостями этой поверхности $\Sigma$?

Мы будем говорить в таком случае, что конгруэнции $C$, $C_1$ расслоемы в одном направлении или одностороние, и семейство $\infty^1$ поверхностей $\Sigma$ расслояет конгруэнции $C$, $C_1$.

Если существует второе семейство $\infty^1$ поверхностей $\Sigma'$ так, что точки их лежат на лучах $C_1$, а касательные плоскости в этих точках проходят через соответствующие лучи $C$, то конгруэнции $C$, $C_1$ расслоемы вдвойне или образуют расслояемую *пару* конгруэнций.

Отнесем первую конгруэнцию $(M_1M_2)$ к ее каноническому тетраэдру и выберем величины $p$, $q$, $p_1$, $q_1$ так, чтобы ребро $M_3M_4$ служило соответствующим лучом второй конгруэнции.

Пусть $M_1 + \lambda M_2$ — точка пересечения луча $M_1M_2$ с одной из поверхностей $\Sigma$. Касательная плоскость поверхности $\Sigma$ по условию проходит через луч $M_3M_4$; следовательно, уравнение плоскости в текущих координатах $P$ напишется в виде определителя:

$$(P, M_3, M_4, M_1 + \lambda M_2) = 0. \quad (24)$$



Эта плоскость огибает нашу поверхность $\Sigma$, характеристическая точка ее совпадает с точкой $M_1 + \lambda M_2$; следовательно, два уравнения, полученные диференцированием уравнения (24) при постоянном $P$:

$$(P, M_3, M_4, M_1 + \lambda M_2)_u = 0, \quad (P, M_3, M_4, M_2 + \lambda M_2)_v = 0, \quad (25)$$

удовлетворяются значением:

$$P = M_1 + \lambda M_2. \quad (26)$$

Согласно правилу диференцирования определителя первое из этих уравнений имеет вид:

$$(P, M_{3u}, M_4, M_1 + \lambda M_2) + (P, M_3, M_{4u}, M_1 + \lambda M_2) + \\ + (P, M_3 M_4, M_{1u} + \lambda_u M_2 + \lambda M_{2u}) = 0.$$

Внося сюда значение (26), заметим, что первые два члена обратятся в нуль как определители с равными столбцами.

Следовательно, для определения $\lambda$ мы получим два уравнения:

$$(M_1 + \lambda M_2, M_3, M_4, M_{1u} + \lambda_u M_2 + \lambda M_{2u}) = 0,$$
$$(M_1 + \lambda M_2, M_3, M_4, M_{1v} + \lambda_v M_2 + \lambda M_{2v}) = 0.$$

Внося сюда производные по формулам таблицы (I), получим:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_u &\doteq q_1\lambda_2 - p_1\lambda - \delta, \\ \lambda_v &= \delta_1\lambda^2 + p\lambda - q. \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Условие совместности имеет вид:

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0.$$

Следовательно, для произвольной пары конгруэнций $C$, $C_1$ существует не больше двух поверхностей, обладающих этим свойством. Так как по условию мы имеем семейство $\infty^1$ поверхностей $\Sigma$, то условие совместности должно удовлетворяться тождественно и все коэфициенты при степенях $\lambda$ должны быть равны нулю

$$\left.\begin{aligned} p_u + p_{1v} &= 2(\delta\delta_1 - qq_1), \\ q_u &= -p\delta - p_1 q + \delta_v, \\ q_{1v} &= -p_1\delta_1 - pq_1 + \delta_{1u}. \end{aligned}\right\} \quad (28a)$$

Так как для четырех неизвестных функций $p, q, p_1, q_1$ мы имеем только три уравнения, то для конгруэнции $C$ можно подобрать $\infty$ конгруэнций $C_1$ так, чтобы обе конгруэнции $C$, $C_1$ были расслоемы в одном направлении. Поэтому всякая конгруэнция может быть расслоена в одном направлении с подходящей конгруэнцией $C_1$.

Пусть теперь существует $\infty^1$ поверхностей $\Sigma'$, точки которых лежат на лучах $M_3M_4$, а касательные плоскости проходят через соответствующие лучи $M_1M_2$, и $M_3 + \nu M_4$ — точка одной из таких поверхностей. Такие же рассуждения приведут нас к системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \nu_u &= -\Delta_1\nu^2 + P_1\nu + q, \\ \nu_v &= -q_1\nu^2 - P\nu + \Delta. \end{aligned}\right\} \quad (27')$$

Требуя, чтобы система была вполне интегрируема, т. е. чтобы существовало $\infty^1$ поверхностей $\Sigma'$, получим еще три уравнения:

$$\left.\begin{aligned} P_u + P_{1v} &= 2(\Delta\Delta_1 - qq_1), \\ q_v &= \Delta_u - P_1\Delta - Pq, \\ q_{1u} &= \Delta_{1v} - P\Delta_1 - P_1 q_1. \end{aligned}\right| \qquad (28b)$$

Сравнивая эти уравнения с уравнениями таблицы (II), мы увидим, что конфигурация вполне расслояемой пары определяется уравнениями:

$$N = 0, \quad N_1 = 0, \quad n = 0, \quad n_1 = 0, \qquad (29a)$$

$$m + m_1 = 0. \qquad (29b)$$

Система (29a) показывает, что расслояемая пара есть частный случай преобразования $T$, характеризуемый уравнением (29b).

**§ 8. Определение расслояемых пар.** Пусть первая конгруэнция $(M_1M_2)$ задана, например, компонентами тетраэдра Вильчинского. С помощью системы (V, VI) мы обнаружим эквивалентность первых уравнений (10a, b) и всю систему представим в виде:

$$\left.\begin{aligned} &p_u + p_{1v} = 2(\delta\delta_1 - qq_1), \\ &q_u = \delta_v - p_1 q - p\delta, \qquad\qquad\quad q_v = -pq - \Delta p_1 - \overline{P}q + \overline{N}, \\ &q_{1u} = -p_1q_1 - \Delta_1 p - \overline{P}_1 q_1 + \overline{N}_1, \quad q_{1v} = -pq_1 - p_1\delta_1 + \delta_{1u}. \end{aligned}\right\} \quad (28c)$$

Введем вспомогательные функции $m$, $R$, $R_1$, которые имеют тот же самый смысл, как и раньше, и перепишем нашу систему в виде:

$$\left.\begin{aligned} p_u &= \delta\delta_1 - qq_1 - m, \\ p_{1u} &= -p_1^2 - \overline{P}_1 p_1 - q_1\delta - \Delta_1 q + \overline{R}_1 - R_1, \\ q_u &= -p_1 q - p\delta + \delta_v, \\ q_{1u} &= -p_1 q_1 - \Delta_1 p - \overline{P}_1 q_1 + \overline{N}_1, \\ p_v &= -p^2 - \overline{P}p - q\delta_1 - \Delta q_1 + \overline{R} - R, \\ p_{1v} &= -qq_1 + \delta\delta_1 + m, \\ q_v &= -pq - \Delta p_1 - \overline{P}q + \overline{N}, \\ q_{1v} &= -pq_1 - p_1\delta_1 + \delta_{1u}. \end{aligned}\right| \qquad (30)$$

Условия совместности системы (30) имеют вид:

$$R_u = m_v + m(\overline{P} + 2p), \quad R_{1v} = -m_u - m(\overline{P}_1 + 2p_1), \qquad (30a)$$

$$R\delta - R_1\Delta = 2mq, \qquad R\Delta_1 - R_1\delta_1 = 2mq_1. \qquad (30b)$$

Уравнения (30), (30a) непосредственно вытекают из системы (II) в силу уравнений (29a, b).

Система (30a) имеет очевидное решение:

$$m = 0, \quad R = 0, \quad R_1 = 0. \qquad (31)$$

Система (30) в таком случае вполне интегрируема и, следовательно, дает $p$, $q$, $p_1$, $q_1$ с четырьмя произвольными постоянными, но вторая конгруэнция при этом вырождается: обе фокальные поверхности $(M_3)$, $(M_4)$ вырождаются в линии, как это сейчас же видно из таблицы (I).



Если

$$m = 0, \qquad (32)$$

то из уравнений (30a) следует, что $R$ есть функция одного $v$, $R_1$ — одного $u$. Изменением параметров $u$, $v$ их можно привести к единице, и тогда уравнения (30b) примут вид:

$$\Delta = \delta, \quad \Delta_1 = \delta_1, \qquad (33)$$

откуда видно, что конгруэнция $(M_1M_2)$ есть конгруэнция $R$. Эта конфигурация вполне совпадает с тем случаем совпадения преобразований $T$ и $S$, когда развертывающиеся поверхности обеих конгруэнций прямо соответствуют друг другу.

Если условия (32) и (33) выполнены, то уравнения (30a, b) дают:

$$R = R_1 = \text{const.},$$

система (30) будет вполне интегрируемой и определит $p$, $q$, $p_1$, $q_1$ с четырьмя произвольными постоянными. Таким образом с каждой конгруэнцией $R$ связано $\infty^5$ расслояемых пар.

Нетрудно показать, что в этом случае обе конгруэнции сопряжены всем расслояющим поверхностям (см. далее). Мы будем называть такую пару конгруэнций *сопряженной парой*.

Мы имеем таким образом теорему Фубини:

Если две конгруэнции $C$ и $C_1$ соответствуют друг другу развертывающимися поверхностями и фокусы каждой конгруэнции лежат в соответствующих фокальных плоскостях другой, то обе конгруэнции образуют сопряженную пару.

Если $m$ не равно нулю, что всегда имеет место, если условие (b) не выполнено, т. е. если конгруэнция $(M_1M_2)$ не является конгруэнцией $R$, то исследование системы (30), (30a, b) значительно более сложно.

Мы отметим прежде всего, что расслояемые пары существуют и помимо сопряженных пар, которые представляют только частный случай, правда, наиболее замечательный.

Внося в систему (II) значения (29a, b), мы получим для определения компонент движения тетраэдра, описывающего двумя противоположными ребрами расслояемую пару, т. е. для величин $\delta$, $\delta_1$, $\Delta$, $\Delta_1$, $R$, $R_1$, $p$, $q$, $p_1$, $q_1$, $P$, $P_1$ систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} p_u &= -qq_1 + \delta\delta_1 - m, & P_u &= \Delta\Delta_1 - qq_1 - m, \\ p_{1v} &= -qq_1 + \delta\delta_1 + m, & P_{1v} &= \Delta\Delta_1 - qq_1 + m, \\ q_u &= -p_1 q - p\delta + \delta_v, & q_v &= -P_1\Delta - Fq + \Delta_u, \\ q_{1v} &= -pq_1 - p_1\delta_1 + \delta_{1u}, & q_{1u} &= -P\Delta_1 - P_1 q_1 + \Delta_{1v}, \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

$$R_u = m_v + m(P + p),$$

$$R_{1v} = -m_u - m(P_1 + p_1),$$

$$R\delta - R_1\Delta = 2mq, \quad R\Delta_1 - R_1\delta_1 = 2mq_1.$$

Мы можем, следовательно, выбрать для $m$ произвольную функцию двух переменных $u$ и $v$ (не равную нулю), и система (34) определит остальные компоненты с 10 произвольными функциями одного аргумента.

С другой стороны, мы увидим, что существуют конгруэнции, которые не входят ни в одну расслояемую пару, так что конгруэнции $C$, которые можно расслоить с какой-нибудь конгруэнцией $C_1$, образуют особый класс конгруэнций. Такие конгруэнции мы будем называть расслояемыми конгруэнциями.

Нетрудно заметить, что многообразие расслояемых конгруэнций зависит от одной функции двух аргументов и шести функций одного аргумента, именно, сохраняя одни и те же начальные значения $p, q, p_1, q_1$ и выбирая различные начальные значения других неизвестных функций в системе (34), мы будем получать заведомо различные конгруэнции $C$, как это сейчас же видно, если подсчитать, например, компоненты тетраэдра Вильчинского по формулам (V).

**§ 9. Расслояемые конгруэнции $W$.** Чтобы доказать существование нерасслояемых конгруэнций, поставим задачу о разыскании всех расслояемых конгруэнций $W$.

Если

$$\Delta\Delta_1-\delta\delta_1=0,$$

то, исключая из двух последних уравнений (34) одновременно $R$ и $R_1$, получим:

$$m(q\Delta_1-q_1\delta)=0.$$

Если

$$m=0,$$

то конгруэнции $(M_1M_2)$, а следовательно, в силу симметрии и конгруэнция $(M_3M_4)$ — конгруэнция $R$. Пара — сопряженная.

Если $m$ не нуль, то

$$q\Delta_1-q_1\delta=0.$$

Полагая

$$q=t\delta,\quad q_1=t\Delta_1, \tag{35}$$

мы получим, внося эти значения в систему (34) и исключая производные от $t$, два конечных уравнения:

$$t\frac{\partial\ln\frac{\delta}{\Delta_1}}{\partial u}=\frac{\partial\ln\frac{\delta}{\Delta_1}}{\partial v},\quad t\frac{\partial\ln\frac{\delta}{\Delta_1}}{\partial v}=\frac{\Delta}{\delta}\frac{\partial\ln\frac{\delta}{\Delta_1}}{\partial u}. \tag{36}$$

Здесь мы приняли $P=p$, $P_1=p_1$, как это имеет место для конгруэнции $W$ при подходящем нормировании координат.

Могут представиться две возможности:

1. Оба уравнения удовлетворены тождественно, если

$$\frac{\partial\ln\frac{\delta}{\Delta_1}}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial\ln\frac{\delta}{\Delta_1}}{\partial v}=0.$$



Интегрируя и выбирая подходящим образом параметры $u$, $v$, получим:

$$\Delta_1=\delta,\quad \Delta=\delta_1.$$

Конгруэнция $(M_1M_2)$ принадлежит линейному комплексу.

Нетрудно убедиться, что всякая конгруэнция линейного комплекса расслояема с конгруэнцией того же комплекса. Именно, уравнение (35) дает теперь:

$$q=q_1,$$

откуда непосредственно следует, что конгруэнция $(M_3M_4)$ принадлежит тому же линейному комплексу (см. § 4 главы десятой).

Внося эти значения в уравнение (28c), получим для определения $p$, $p_1$, $q$ систему трех уравнений:

$$\left.\begin{aligned} p_u+p_{1v}&=2(\delta\delta_1-q^2),\\ q_u&=\delta_v-p_1q-p\delta,\\ q_v&=\delta_{1u}-pq-p_1\delta_1.\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Два последних уравнения определяют $p$, $p_1$ по заданному $q$ (если только $q^2$ не равно $\delta\delta_1$).

Внося эти значения в первое уравнение, получим уравнение второго порядка для $q$.

Каждое решение этого уравнения, если оно не обращает в нуль $q^2-\delta\delta_1$, определяет расслояемую пару с двумя конгруэнциями одного линейного комплекса.

Итак, каждая конгруэнция линейного комплекса расслояема с бесконечным множеством, зависящим от двух произвольных функций одного аргумента, конгруэнций того же комплекса.

Мы видим, что конгруэнция линейного комплекса может образовывать расслояемые пары только с конгруэнциями того же комплекса.

Исключение составляют сопряженные пары

$$m=0.$$

Система (30a, b) дает теперь:

$$R_u=0,\quad R_{1v}=0,\quad R\delta-R_1\Delta=0,\quad R\Delta_1-R_1\delta_1=0.$$

Следовательно, при специальном выборе параметров $u$, $v$,

$$R=R_1=\text{const.},\quad \Delta=\delta,\quad \Delta_1=\delta_1.$$

Если же первая конгруэнция принадлежит линейному комплексу, то

$$\frac{\partial^2\ln\frac{\Delta_1}{\delta}}{\partial u\,\partial v}=0,\quad P-p=\frac{\partial\ln\frac{\Delta_1}{\delta}}{\partial v},\quad P_1-p_1=\frac{\partial\ln\frac{\Delta_1}{\delta}}{\partial u},$$

и следовательно, подходящим нормированием координат достигнем

$$\Delta=\Delta_1=\delta=\delta_1,\quad P=p,\quad P_1=p_1.$$

Это — конгруэнция Вильчинского, что, впрочем, можно было предвидеть, ибо это — единственные конгруэнции $R$, принадлежащие линейному комплексу.

Так как теперь

$$p_u = p_{1v},$$

то мы можем положить, вводя новую неизвестную функцию:

$$p = \frac{\partial \ln t}{\partial v}, \quad p_1 = \frac{\partial \ln t}{\partial u},$$

и система (34) дает:

$$\frac{\partial^2 \ln t}{\partial u\, \partial v} = \delta^2 - q q_1,$$

$$(qt)_u = t^2\left(\frac{\delta}{t}\right)_v, \quad (qt)_v = t^2\left(\frac{\delta}{t}\right)_u,$$

$$(q_1 t)_u = t^2\left(\frac{\delta}{t}\right)_v, \quad (q_1 t)_v = t^2\left(\frac{\delta}{t}\right)_u,$$

откуда

$$(qt)_u = (q_1 t)_u, \quad (qt)_v = (q_1 t)_v$$

и

$$q_1 = q + \frac{c}{t},$$

$$c = \text{const}.$$

Если $c$ не нуль, то вторая конгруэнция не принадлежит линейному комплексу.

Это вместе с тем единственная конгруэнция $R$, которая может образовать не сопряженные пары.

Если $(M_1M_2)$ есть конгруэнция $R$, то при подходящем выборе параметров и нормировании координат

$$\Delta = \delta, \quad \Delta_1 = \delta_1, \quad P = p, \quad P_1 = p_1.$$

Уравнения (30b) дают:

$$\delta(R - R_1) = 2mq, \quad \delta_1(R - R_1) = 2mq_1,$$

т. е. если $m$ не нуль, то:

$$q = t\delta, \quad q_1 = t\delta_1, \quad t = \frac{R - R_1}{2m}.$$

Два последних уравнения (30) дадут по исключении производных $t_u$, $t_v$:

$$t\frac{\partial \ln \frac{\delta}{\delta_1}}{\partial u} = \frac{\partial \ln \frac{\delta}{\delta_1}}{\partial v}, \quad t\frac{\partial \ln \frac{\delta}{\delta_1}}{\partial v} = \frac{\partial \ln \frac{\delta}{\delta_1}}{\partial u},$$

откуда или

$$\frac{\partial \ln \frac{\delta}{\delta_1}}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \ln \frac{\delta}{\delta_1}}{\partial v} = 0,$$

и мы имеем конгруэнцию Вильчинского, или

$$t = \pm 1, \quad q = \pm \delta, \quad q_1 = \pm \delta_1.$$



Внося эти значения в уравнение (34) и принимая для определенности $t = 1$, получим, что

$$p = -p_1, \quad \delta, \ \delta_1, \quad m = -p_u, \quad R = -p_v - p^2 + C,$$
$$R_1 = p_u - p^2 + C$$

суть функции одного аргумента $u + v$. Обе конгруэнции образованы общими касательными одной и той же пары линейчатых поверхностей.

**§ 10. Пара, составленная из дважды взятой конгруэнции Сегре.** Если уравнения (36) не удовлетворены тождественно, то они дают для $t$ значение:

$$t^2 = \frac{\Delta}{\delta}.$$

Следовательно, по формулам (35)

$$q = \sqrt{\delta\Delta}, \quad q_1 = \sqrt{\delta_1\Delta_1}. \tag{38}$$

Это показывает, что вспомогательные конгруэнции $(M_1M_3)$, $(M_2M_4)$ образованы прямолинейными образующими общих фокальных поверхностей $(M_1)$, $(M_3)$ и $(M_2)$, $(M_4)$.

Мы уже видели, что конгруэнция $W$ с двумя линейчатыми фокальными поверхностями может быть преобразованием $T$ преобразована в конгруэнцию $W$ с теми же фокальными поверхностями. Нетрудно заметить теперь, что среди этих преобразований найдутся и такие, которые образуют вместе с первоначальной конгруэнцией расслояемую пару.

Внося значение (38) в уравнения (28c), получим для $p$ и $p_1$ два уравнения, из которых одно конечное:

$$p\sqrt{\delta} + p_1\sqrt{\Delta} = \sqrt{\delta}\,\frac{\partial \ln \sqrt[4]{\frac{\delta}{\Delta}}}{\partial v} + \sqrt{\Delta}\,\frac{\partial \ln \sqrt[4]{\frac{\Delta}{\delta}}}{\partial u},$$

$$p_u + p_{1v} = 0.$$

Отмеченный выше случай $q^2 = \delta\delta$, конгруэнции линейного комплекса, представляет частный случай этого.

Итак, существует только три вида расслояемых конгруэнций $W$:

1. Конгруэнции $R$, которые образуют $\infty^6$ расслояемых пар с конгруэнциями того же типа.

2. Конгруэнции линейного комплекса, которые образуют расслояемые пары с конгруэнциями того же комплекса.

3. Конгруэнции $W$ с линейчатыми фокальными поверхностями, которые образуют расслояемые пары с конгруэнциями $W$, образованными касательными к тем же самым линейчатым поверхностям.

Конгруэнции Вильчинского, естественно, входят и в первую и во вторую группу.

В заключение укажем некоторые общие свойства расслояемых пар. Составим уравнение асимптотических линий расслояющей поверхности $\Sigma$. Полагая $\mathbf{P} = \mathbf{M}_1 + \lambda\mathbf{M}_2$, напишем это уравнение в виде:

$$(\mathbf{P}\mathbf{P}_u\mathbf{P}_v d^2\mathbf{P}) = 0.$$

Пользуясь таблицей (I) и заменяя производные от $\lambda$ их значением из уравнений (27), мы представим это уравнение в виде:

$$\lambda(\lambda N_1 - R_1)\,du^2 + 2m\lambda\, du\, dv + (\lambda R - N)\,dv^2 = 0.$$

Для вполне расслояемой пары

$$N = 0, \quad N_1 = 0.$$

В таком случае уравнение асимптотических линий сокращается на $\lambda$ и, следовательно, не будет зависеть от выбора поверхности

$$R_1\,du^2 - 2m\,du\,dv - R\,dv^2 = 0. \tag{39}$$

Асимптотические линии на всех расслояющих поверхностях $\Sigma$ соответствуют друг другу.

Нетрудно заметить, что это — характерный признак вполне расслояемой пары.

Совершенно так же получим, что и на втором семействе расслояющих поверхностей $\Sigma'$ асимптотические линии определяются тем же самым уравнением (39).

Таким образом на любой паре поверхностей $\Sigma$ и $\Sigma'$ асимптотические соответствуют друг другу. Соединим соответствующие точки их прямой. Эта прямая лежит в касательной плоскости $\Sigma$, ибо эта плоскость проходит через весь луч $M_3M_4$ второй конгруэнции, следовательно, содержит соответствующую точку $\Sigma'$.

По такой же причине эта прямая лежит и в касательной плоскости поверхности $\Sigma'$ и, следовательно, касается обеих поверхностей.

Итак, любые две поверхности $\Sigma$ и $\Sigma'$ определяют конгруэнцию $W$. Одна какая-нибудь поверхность $\Sigma$ и $\infty^1$ поверхностей $\Sigma'$ определяют пучок асимптотических преобразований, а всякие две пары поверхностей $\Sigma$ и $\Sigma'$ позволяют построить косой четырехугольник теоремы Бианки о переместительности асимптотических преобразований. Соответствующие лучи $M_1M_2$ и $M_3M_4$ расслояемой пары служат его диагоналями. Обратно, если взять любую поверхность $\Sigma$ и два асимптотических преобразования ее $\Sigma'_1$ и $\Sigma'_2$, то они определят $\infty^1$ поверхностей $\Sigma$, которые дополняют первые три поверхности до четверки поверхностей, составляющих конфигурацию Бианки. Прямые, соединяющие соответствующие точки $\Sigma$ и $\Sigma'$, описывают расслояемую пару наиболее общего типа.

Так как

$$\left.\begin{aligned} (M_1 + \lambda M_2)_u &= \lambda M_4 + \lambda q_1 (M_1 + \lambda M_2), \\ (M_1 + \lambda M_2)_v &= M_3 + (\lambda\delta_1 + p)(M_1 + \lambda M_2), \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

то, очевидно, касательные к гомологичным линиям $du:dv$ в соответствующих точках поверхностей $\Sigma$ образуют поверхность второго порядка; касательные к линиям $u$ и $v$ сходятся в фокусах расслояемой пары конгруэнций.

Наконец, из уравнения (39) сейчас же следует, что все поверхности $\Sigma$ и $\Sigma^1$ сопряжены (и гармоничны) конгруэнциям $(M_1M_2)$, $(M_3M_4)$, если $m = 0$.

Глава одиннадцатая

# КОНФИГУРАЦИИ КОНГРУЭНЦИЙ

**§ 1. Преобразование $T$ конгруэнции $W$.** Вернемся к общим преобразованиям $T$ и применим его к преобразованию конгруэнции $W$.

Теорема. *Преобразование $T$ переводит конгруэнцию $W$ в конгруэнцию $W$.*

Внося значения

$$N = 0, \quad N_1 = 0, \quad n = 0, \quad n_1 = 0$$

в последнее уравнение системы (II), получим:

$$\left.\begin{aligned} R\delta - R_1\Delta &= (m - m_1)\,q, \\ R\Delta_1 - R_1\delta_1 &= (m - m_1)\,q_1. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Если конгруэнция $(M_1M_2)$ — конгруэнция $W$, т. е., если

$$\Delta\Delta_1 - \delta\delta_1 = 0,$$

то из уравнений (1) можно исключить $R$ и $R_1$; мы получим:

$$(m - m_1)(q\delta_1 - q_1\Delta) = 0. \tag{2}$$

Очевидно, могут иметь место два случая:

1) $m = m_1$,

2) $q\delta_1 = q_1\Delta$.

Составляя уравнения асимптотических линий на фокальных поверхностях $(M_3)$, $(M_4)$ преобразованной конгруэнции

$$(M_3 M_{3u} M_{3v} d^2M_3) = 0, \quad (M_4 M_{4u} M_{4v} d^2M_4) = 0,$$

получим:

$$\left.\begin{aligned} (m\delta - qR_1)\,du^2 + 2(m - m_1)\,q\,du\,dv + (Rq - m_1\Delta)\,dv^2 &= 0, \\ (R_1q_1 - m\Delta_1)\,du^2 + 2(m_1 - m)\,q_1\,du\,dv + (m_1\delta_1 - q_1R)\,dv^2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Если

$$m = m_1,$$

то, исключая $R_1$ с помощью уравнения (1):

$$R_1 = R\,\frac{\delta}{\Delta},$$

преобразуем уравнения (3) к виду:

$$\delta\left(m - R\frac{q}{\Delta}\right)du^2 - \Delta\left(m - R\frac{q}{\Delta}\right)dv^2 = 0,$$

$$(\delta\,du^2 - \Delta\,dv^2)\left(m\frac{\Delta_1}{\delta} - R\frac{q_1}{\Delta}\right) = 0.$$

По сокращении на подходящий множитель (обращение его в нуль приводит к вырождению конгруэнции) оба эти уравнения совпадают:

$$\delta\,du^2 - \Delta\,dv^2 = 0.$$

Итак, в этом случае асимптотические линии соответствуют на всех четырех фокальных полостях $(M_1), (M_2), (M_3), (M_4)$. Все четыре конгруэнции, описанные сторонами косого четырехугольника $(M_1, M_2, M_4, M_3)$, — конгруэнции $W$.

Условие

$$m = m_1$$

характеризует, следовательно, построение в теореме Бианки о переместительности асимптотических преобразований: конгруэнции $(M_1M_2)$, $(M_1M_3)$ дают два преобразования поверхности $(M_1)$ в поверхности $(M_2)$ и $(M_3)$, а поверхность $(M_4)$ получается как вторая полость фокальной поверхности конгруэнции $W$ и для поверхности $(M_2)$ и для поверхности $(M_3)$.

Мы будем коротко называть это построение конфигурацией Бианки. Если

$$q\delta_1 - q_1\Delta = 0,$$

то по исключении $q_1$ второе уравнение (3) совпадет с первым; теорема, следовательно, доказана во всех случаях.

Как нетрудно убедиться, развертывающиеся поверхности вспомогательных конгруэнций соответствуют теперь обратно.

Такое соответствие, как мы видели, может осуществляться в двух случаях:

1) если вспомогательные конгруэнции сопряжены относительно линейного комплекса, т. е. если две конгруэнции, связанные преобразованием $T$, принадлежат одному линейному комплексу;

2) если вся конфигурация представляет собой периодическую последовательность Лапласа, состоящую из четырех конгруэнций.

Мы видели, что в этом случае обе конгруэнции принадлежат линейному комплексу.

Итак, за исключением преобразований конгруэнций одного и того же линейного комплекса, преобразование $T$ конгруэнции $W$ всегда приводит к построению теоремы переместительности Бианки.

Это почти очевидно, если заметить, что поверхности $(M_1)$ и $(M_3)$ всегда имеют одну общую сопряженную систему, которая соответствует развертывающимся поверхностям конгруэнции. Если конгруэнции $(M_1M_2)$ и $(M_3M_4)$ суть конгруэнции $W$, то к первой сопряженной системе прибавляется вторая: та система, которая соответствует развертывающимся поверхностям конгруэнции $(M_2M_4)$. Эти развертывающиеся



поверхности пересекают поверхности $(M_2)$ и $(M_4)$ по сопряженной системе, а в силу соответствия асимптотических линий всякой сопряженной системе поверхности $(M_2)$ или $(M_4)$ соответствует сопряженная система на поверхностях $(M_1)$ и $(M_3)$.

Таким образом эти поверхности имеют уже две общих сопряженных системы, а следовательно (теорема Петерсона), и вся инволюция сопряженных направлений у них общая, асимптотические линии соответствуют как двойные элементы ее, и, следовательно, конгруэнция $(M_1M_3)$ — конгруэнция $W$.

Рассуждение теряет силу, если обе отмеченные системы совпадают, т. е. если развертывающиеся поверхности конгруэнций $(M_1M_3)$ и $(M_2M_4)$ соответствуют друг другу, но тогда мы имеем преобразования конгруэнций одного линейного комплекса.

**§ 2. Конфигурации Бианки.** Обратимся к конфигурации Бианки. Она определяется системой:

$$m = m_1,\quad P = p,\quad P_1 = p_1,\quad \Delta\Delta_1 - \delta\delta_1 = 0,$$
$$p_u = p_{1v} = \delta\delta_1 - qq_1 - m,$$

$$\left.\begin{aligned} &\delta_v - q_u = p\delta + p_1 q, && \delta_{1u} - q_{1v} = p_1\delta_1 + pq_1,\\ &\Delta_u - q_v = p_1\Delta + pq, && \Delta_{1v} - q_{1u} = p\Delta_1 + p_1 q_1,\\ &R_u = m_v + 2mp, && R_{1v} = m_u + 2mp_1.\\ &R\delta - R_1\Delta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Введем вспомогательную функцию $\varphi$:

$$p = \frac{\partial \ln \varphi}{\partial v},\quad p_1 = \frac{\partial \ln \varphi}{\partial u}. \tag{4'}$$

Система (4) примет теперь вид:

$$(q\varphi)_u = \varphi^2\left(\frac{\delta}{\varphi}\right)_v,\quad (q\varphi)_v = \varphi^2\left(\frac{\Delta}{\varphi}\right)_u,$$
$$(q_1\varphi)_u = \varphi^2\left(\frac{\Delta_1}{\varphi}\right)_v,\quad (q_1\varphi)_v = \varphi^2\left(\frac{\delta_1}{\varphi}\right)_u.$$

Два условия совместности

$$\left.\begin{aligned} &\delta\varphi_{vv} - \Delta\varphi_{uu} = \varphi\,(\delta_{vv} - \Delta_{uu}),\\ &\delta_1\varphi_{uu} - \Delta_1\varphi_{vv} = \varphi\,(\delta_{1uu} - \Delta_{1vv}) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

совпадают в силу уравнения

$$\delta_1(\delta_{vv} - \Delta_{uu}) + \Delta\,(\delta_{1uu} - \Delta_{1vv}) = 0, \tag{5'}$$

тождественно выполняющегося для конгруэнций $W$, как это сейчас же следует из уравнений (VI), если исключить $\overline{R}$ и $\overline{R}_1$.

Уравнения (5) однородны относительно $\varphi$. Следовательно, по двум решениям $\varphi'$ и $\varphi''$ можно составить третье:

$$\varphi = C_1\varphi' + C_2\varphi'', \tag{6}$$

где $C_1$, $C_2$ — любые постоянные. Этому решению соответствуют значения:

$$p=\frac{C_1\varphi' p' + C_2\varphi'' p''}{C_1\varphi' + C_2\varphi''}, \quad p_1=\frac{C_1\varphi' p_1' + C_2\varphi'' p_1''}{C_1\varphi' + C_2\varphi''},$$

$$q=\frac{C_1\varphi' q' + C_2\varphi'' q''}{C_1\varphi' + C_2\varphi''}, \quad q_1=\frac{C_1\varphi' q_1' + C_2\varphi'' q_1''}{C_1\varphi' + C_2\varphi''},$$

где $p_i'$, $q_i'$ и $p_i''$, $q_i''$ соответствуют решениям $\varphi'$ и $\varphi''$. Не имеющие значения произвольные постоянные отброшены.

Но $p$, $q$, 1 — координаты точки $M_3$ по отношению к координатному треугольнику $(M_1M_2M_{1v})$. Поэтому, умножая координаты $M_3$ и $M_4$ на соответствующие им решения $\varphi$, $\varphi'$ или $\varphi''$, можем написать:

$$M_3=C_1M_3'+C_2M_3'', \quad M_4=C_1M_4'+C_2M_4''.$$

Следовательно, пучок [71] (при произвольных $C_1$, $C_2$) преобразований $T$, определенных формулой (6), располагается так, что соответствующие фокусы преобразованных конгруэнций лежат на прямых. Фокусы делят расстояния $M_3'M_3''$ и $M_4'M_4''$ в одном и том же постоянном отношении.

Значит, соответствующие лучи конгруэнций пучка образуют одно семейство образующих поверхностей второго порядка $D$, которое опирается на прямые $M_3'M_3''$, $M_4'M_4''$ — место фокусов этих конгруэнций.

**§ 3. Переместительность преобразований $T$ для конгруэнции $W$.**

Пусть выполнены над одной и той же конгруэнцией $C$ два преобразования $T$ и $T'$, дающие конгруэнции $C_1$ и $C_1'$; можно ли найти такие преобразования $T_1'$ и $T_1$, которые переводили бы $C_1$ и $C_1'$ в одну и ту же конгруэнцию $C_2$?

Если это так, то мы будем говорить, что два преобразования $T_1$ и $T_2$ *переместительны.*

ТЕОРЕМА. *Только для конгруэнции $W$ все преобразования переместительны.*

Пусть $(M_3M_4)$ и $(M_3'M_4')$ — две конгруэнции $C_1$ и $C_1'$, полученные из конгруэнции $(M_1M_2)$ преобразованием $T$ и $T'$, и $(N_1N_2)$ — конгруэнция $C_2$, которая может быть получена из $(M_3M_4)$ преобразованием $T_1'$ и из конгруэнции $(M_3'M_4')$ преобразованием $T_1$.

По свойству преобразования $T$ фокусы $N_1$, $N_2$ конгруэнции $C_2$ лежат в фокальных плоскостях конгруэнций $C_1$ и $C_1'$, и наоборот, конгруэнция $C_2$ содержит фокусы конгруэнций $C_1$, $C_1'$, т. е. точки $M_3$, $M_4$, $M_3'$, $M_4'$ в своих фокальных плоскостях.

Отсюда следует прежде всего, что $N_1$ лежит в плоскости $M_1M_3M_4$, $N_2$ — в плоскости $M_2M_3M_4$. Значит, можно подобрать функции $a_i$, $b_i$ так, что

$$\left.\begin{aligned} N_1&=M_1+a_3M_3+a_4M_4,\\ N_2&=M_2+b_3M_3+b_4M_4.\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Кроме того, точка $N_1$ лежит в плоскости $M_1M_3'M_4'$, $N_2$ — в плоскости $M_2M_3'M_4'$, $M_3'$ — в плоскости $M_3N_1N_2$, $M_4'$ — в плоскости $M_4N_1N_2$. Таким образом:

$$\left.\begin{aligned} &(M_1M_3'M_4'N_1)=0, \quad (M_2M_3'M_4'N_2)=0,\\ &(M_3N_1N_2M_3')=0, \quad (M_4N_1N_2M_4')=0.\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$



Сравнивая значения $M_{1v}$, $M_{2u}$ из уравнений системы (I), написанных для тетраэдров $(M_1,M_2,M_3,M_4)$ и $(M_1,M_2,M_3',M_4')$:

$$q_1M_1+p_1M_2+M_4=q_1'M_1+p_1'M_2+M_4',$$
$$pM_1+qM_2+M_3=p'M_1+q'M_2+M_3',$$

мы получим:

$$\left.\begin{aligned} M_3'&=(p-p')M_1+(q-q')M_2+M_3,\\ M_4'&=(q_1-q_1')M_1+(p_1-p_1')M_2+M_4.\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Внося значения (7) и (9) в уравнения (8), найдем:

$$\begin{vmatrix} 0 & q-q' & p_1-p_1' \\ a_3 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} 0 & p-p' & q_1-q_1' \\ b_3 & 1 & 0 \\ b_4 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & p-p' \\ 0 & 1 & q-q' \\ a_4 & b_4 & 0 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & q_1-q_1' \\ 0 & 1 & p_1-p_1' \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Эти уравнения можно разрешить, вводя вспомогательную функцию $\lambda$:

$$\left.\begin{aligned} a_3&=\lambda(p_1-p_1'), \quad & a_4&=-\lambda(q-q'),\\ b_3&=-\lambda(q_1-q_1'), \quad & b_4&=\lambda(p-p').\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Нам остается потребовать, чтобы плоскость $N_1N_2M_3$ касалась поверхности $(N_1)$ и плоскость $N_1N_2M_4$ — поверхности $(N_2)$, т. е. чтобы они содержали соответственно точки $N_{1u}$, $N_{1v}$ и $N_{2u}$, $N_{2v}$:

$$(N_1N_2M_3N_{1u})=0, \quad (N_1N_2M_3N_{1v})=0,$$
$$(N_1N_2M_4N_{2u})=0, \quad (N_1N_2M_4N_{2v})=0.$$

Внося сюда значения (7) и (9), мы получим систему:

$$\begin{aligned} a_{4u}&=qa_3+P_1a_4+\delta b_4+(ma_3+R_1b_4)a_4,\\ a_{4v}&=\Delta a_3+pa_4+qb_4+(Ra_3+m_1b_4)a_4,\\ b_{3u}&=q_1a_3+p_1b_3+\Delta_1b_4+(ma_3+R_1b_4)b_3,\\ b_{3v}&=\delta_1a_3+Pb_3+q_1b_4+(Ra_3+m_1b_4)b_3.\end{aligned}$$

Если же $a_i$, $b_i$ заменить по формуле (10), то они сведутся только к двум независимым уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \ln\lambda}{\partial u}&=p_1'+P_1+\lambda\,[m(p_1-p_1')+R_1(p-p')],\\ \frac{\partial \ln\lambda}{\partial v}&=p'+P+\lambda\,[R(p_1-p_1')+m_1(p-p')].\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Условие совместности — первой степени относительно $\lambda$.

Для конфигурации Бианки в силу уравнений (4) и (4′) система (11) принимает вид:

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial \ln \lambda}{\partial u} &= \frac{\partial \ln \varphi\varphi'}{\partial u} + \lambda \left[ m \frac{\partial}{\partial u} \ln \frac{\varphi}{\varphi'} + R_1 \frac{\partial}{\partial v} \ln \frac{\varphi}{\varphi'} \right], \\
\frac{\partial \ln \lambda}{\partial v} &= \frac{\partial \ln \varphi\varphi'}{\partial v} + \lambda \left[ R \frac{\partial}{\partial u} \ln \frac{\varphi}{\varphi'} + m \frac{\partial}{\partial v} \ln \frac{\varphi}{\varphi'} \right].
\end{aligned}
\right\} \qquad (11')
$$

Условие совместности выполняется тождественно в силу (4), (5), (5′) и система (11′) определяет $\lambda$ с произвольной постоянной. Меняя ее, мы заставим точки $N_1$, $N_2$ пройти две прямые

$$[\mathbf{M}_1,\ (p_1 - p_1')\,\mathbf{M}_3 - (q - q')\,\mathbf{M}_4], \qquad [\mathbf{M}_2,\ (q_1 - q_1')\,\mathbf{M}_3 - (p - p')\,\mathbf{M}_4].$$

Имеется, следовательно, $\infty^1$ общих преобразований $C_2$.

**§ 4. Конфигурация $P$.** 4 соответственных луча конгруэнций $C$, $C_1$, $C_1'$, $C_2$ и 8 лучей вспомогательных конгруэнций, которые попарно строят преобразования $T$, $T'$, $T_1$, $T_1'$, образуют всего 12 прямых. Они пересекаются в 8 точках и содержатся в 8 плоскостях. В каждой вершине сходятся 3 луча, 4 плоскости; в каждой плоскости лежат 3 луча, 4 вершины. Это — конфигурация Мёбиуса [72] $8_4$.

Когда переменные $u$, $v$ меняются, конфигурация двигается, каждая вершина описывает поверхность, каждое ребро — конгруэнцию, так, что описанные поверхности служат фокальными поверхностями для конгруэнций.

На всех поверхностях асимптотические линии соответствуют, все конгруэнции — конгруэнции $W$. Каждый косой четырехугольник $(M_1 M_2, M_4, M_3)$, $(M_3, M_4, N_2, N_1)$ и т. д. описывает конфигурацию Бианки, каждая пара диагоналей — расслояемую пару конгруэнций.

Будем менять произвольное постоянное, которое определяет решение $\lambda$ системы (11′). Мы получим пучок $\infty^1$ конгруэнций $C_2$. Как сказано выше, фокусы этих конгруэнций лежат на двух прямых $M_1N_1$ и $M_2N_2$.

Луч конгруэнции $N_1N_2$, очевидно, пересекает обе прямые $M_3M_3'$ и $M_4M_4'$, ибо они лежат в фокальных плоскостях $N_1M_3M_3'$ и $N_2M_4M_4'$ луча $N_1N_2$.

Следовательно, когда, меняя $\lambda$, мы заставляем луч $N_1N_2$ перемещаться, он будет пересекать не только прямые $M_1N_1$ и $M_2N_2$, но и $M_3M_3'$ и $M_4M_4'$. Отсюда следует, что $\infty^1$ соответствующих лучей пучка $\infty^1$ конгруэнций $C_2$ образуют одно семейство образующих поверхности второго порядка $D$, для которой $M_1N_1$, $M_2N_2$, $M_3M_3'$, $M_4M_4'$ служат образующими другой системы.

Мы только что имели одну такую поверхность второго порядка, образованную пучком конгруэнций $(C_1C_1')$. Нетрудно заметить, что обе линейчатые поверхности второго порядка $D$ совпадают. Действительно, каждый луч какой-нибудь конгруэнции пучка $(C_1C_1')$ имеет фокусы на прямых $M_3M_3'$, $M_4M_4'$ и пересекает прямые $M_1N_1$, $M_2N_2$, которые лежат в фокальных плоскостях $M_3M_1N_1$, $M_4M_2N_2$.

Следовательно, обе линейчатые поверхности опираются на одну и ту же четверку лучей, а потому совпадают.

Схематически можно изобразить всю фигуру в виде параллелепипеда. Четыре параллельных ребра будут изображать лучи конгруэнции $C(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$, $C_1(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4)$, $C_1'(\mathbf{M}_3'\mathbf{M}_4')$, $C_2(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)$; первоначальная конгруэнция $C$ и второе преобразование $C_2$ будут изображаться противоположными ребрами. Диагонали верхнего или нижнего основания в действительности не пересекаются, ибо четырехугольник основания — косой, не лежащий в одной плоскости. Каждая пара таких диагоналей описывает расслояемую пару. Линейчатая поверхность $D$ опирается на эти четыре диагонали.



Вся конфигурация обладает известной симметрией. Любые четыре параллельных стороны можно принять за лучи преобразованных конгруэнций, а четыре диагонали, соединяющие попарно их вершины, — за лучи двух пар расслояемых конгруэнций. Таким образом с такой конфигурацией связано три группы по две расслояемых пары и три линейчатых поверхности, опирающихся на диагонали противоположных граней.

Действительное расположение прямых и плоскостей в корне отличается от нашей схемы: три ребра, сходящиеся в одной вершине, лежат в одной плоскости, касательной плоскости к поверхности, описанной этой вершиной. Эта плоскость пересекается с соседними по трем диагоналям граней нашего параллелограма. Все расположение напоминает два тетраэдра, из которых один расположен так, что его вершины лежат в гранях другого.

**§ 5. Преобразование расслояемых пар.** Переход от одной к другой расслояемой паре, описанной диагоналями двух противоположных граней параллелограма, дает возможность построить особое преобразование расслояемых пар. Для этого надо построить два семейства по $\infty^1$ конгруэнций, одни из фокусов которых лежат на лучах данной пары, а другие — на лучах преобразованной пары.

Возьмем тетраэдр, связанный с заданной расслояемой парой $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$, $(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4)$, и примем обозначения предыдущего параграфа.

Пусть $(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)$, $(\mathbf{N}_3\mathbf{N}_4)$ — преобразованная пара. В качестве точек $\mathbf{N}_i$ возьмем пересечения лучей второй пары с фокальными плоскостями первой:

$$
\left.
\begin{aligned}
\mathbf{N}_1 &= a_1\mathbf{M}_3 + b_1\mathbf{M}_4 + \mathbf{M}_1, \quad & \mathbf{N}_3 &= a_3\mathbf{M}_1 + b_3\mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3, \\
\mathbf{N}_2 &= a_2\mathbf{M}_3 + b_2\mathbf{M}_4 + \mathbf{M}_2, \quad & \mathbf{N}_4 &= a_4\mathbf{M}_1 + b_4\mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_4.
\end{aligned}
\right\} \qquad (12)
$$

По условиям преобразования поверхности, расслояющие ту и другую пару, попарно составляют фокальные полости $\infty^1$ конгруэнций.

Пусть $(\mathbf{M}_1 + \lambda\mathbf{M}_2)$, $(\mathbf{M}_3 + \nu\mathbf{M}_4)$ — расслояющие поверхности первой пары. Касательные плоскости их суть:

$$(\mathbf{M}_1 + \lambda\mathbf{M}_2,\ \mathbf{M}_3,\ \mathbf{M}_4), \quad (\mathbf{M}_3 + \nu\mathbf{M}_4,\ \mathbf{M}_1,\ \mathbf{M}_2).$$

Они пересекают лучи второй пары в точках $\mathbf{N}_1 + \lambda\mathbf{N}_2$, $\mathbf{N}_3 + \nu\mathbf{N}_4$. Следовательно, поверхности $(\mathbf{N}_1 + \lambda\mathbf{N}_2)$, $(\mathbf{N}_3 + \nu\mathbf{N}_4)$ расслояют вторую пару.

Касательные плоскости их по определению проходят через второй луч:

$$(\mathbf{N}_1 + \lambda\mathbf{N}_2,\ \mathbf{N}_3,\ \mathbf{N}_4), \quad (\mathbf{N}_3 + \nu\mathbf{N}_4,\ \mathbf{N}_1,\ \mathbf{N}_2),$$

а так как $\mathbf{M}_1 + \lambda\mathbf{M}_2$ и $\mathbf{N}_1 + \lambda\mathbf{N}_2$ должны служить фокусами одного луча, то они взаимно лежат в касательных плоскостях друг друга. Для второй точки это уже выполнено; чтобы выполнить и для первой, необходимо удовлетворить уравнения:

$$(\mathbf{M}_1 + \lambda\mathbf{M}_2,\ \mathbf{N}_1 + \lambda\mathbf{N}_2,\ \mathbf{N}_3,\ \mathbf{N}_4) = 0, \quad (\mathbf{M}_3 + \nu\mathbf{M}_4,\ \mathbf{N}_3 + \nu\mathbf{N}_4,\ \mathbf{N}_1,\ \mathbf{N}_2) = 0.$$

В этих уравнениях $\lambda$ и $\nu$ надо считать произвольными, ибо каждое содержит произвольное постоянное, которому можно придать любое значение. Внося сюда значения (12) и приравнивая нулю коэфициенты при $\lambda$, $\nu$, мы придем к соотношениям:

$$b_1 = tb_3, \quad b_2 = -ta_3, \quad a_1 = -tb_4, \quad a_2 = ta_4, \tag{13}$$

где $t$ — новая неизвестная функция.

Нам осталось только потребовать, чтобы плоскости $(\mathbf{N}_1+\lambda\mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3, \mathbf{N}_4)$, $(\mathbf{N}_3+\nu\mathbf{N}_4, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$ действительно касались поверхностей $(\mathbf{N}_1+\lambda\mathbf{N}_2)$, $(\mathbf{N}_3+\nu\mathbf{N}_4)$.

Требуя, чтобы эти плоскости содержали точки $(\mathbf{N}_1+\lambda\mathbf{N}_2)_u$, $(\mathbf{N}_1+\lambda\mathbf{N}_2)_v$, $(\mathbf{N}_3+\nu\mathbf{N}_4)_u$, $(\mathbf{N}_3+\nu\mathbf{N}_4)_v$, мы получим, если исключить производные от $\lambda$ и $\nu$ с помощью уравнений (27), (27') гл. X, воспользоваться таблицей (I) и уравнениями (29a, b) гл. X для производных от $M_i$ и приравнять нулю коэфициенты при отдельных степенях $\lambda$ и $\nu$, систему:

$$\left.\begin{aligned}
a_{1u} &= \varphi a_1 + \delta a_2 + \Delta_1 b_1 + R_1 t,\\
a_{1v} &= (P + p + \psi) a_1 + q a_2 + q_1 b_1 - 1 - mt,\\
b_{1u} &= q a_1 + (P_1 + \varphi) b_1 + \delta b_2,\\
b_{1v} &= \Delta a_1 + (p + \psi) b_1 + q b_2,\\
a_{2u} &= q_1 a_1 + (p_1 + \varphi) a_2 + \Delta_1 b_2,\\
a_{2v} &= \delta_1 a_1 + (P + \psi) a_2 + q_1 b_2,\\
b_{2u} &= q a_2 + q_1 b_1 + (P_1 + p_1 + \varphi) b_2 - 1 + mt,\\
b_{2v} &= \Delta a_2 + \delta_1 b_1 + \psi b_2 + Rt,
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

где $\varphi$ и $\psi$ — вспомогательные функции.

Условие совместности состоит из трех уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_v - \psi_u + 2m = 0,\\
&m\frac{\partial \ln t}{\partial u} + R_1 \frac{\partial \ln t}{\partial v} = R_1 (P + p + \psi) + m(P_1 + p_1 + \varphi) + \frac{\varphi}{t},\\
&R\frac{\partial \ln t}{\partial u} - m\frac{\partial \ln t}{\partial v} = R(P_1 + p_1 + \varphi) - m(P + p + \psi) + \frac{\psi}{t}.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Исключая производные от $t$ из двух последних уравнений, мы получим:

$$m\varphi_v + R_1\psi_v - R\varphi_u + m\psi_u + \ldots = 0. \tag{16}$$

Ненаписанные члены не содержат производных от неизвестных функций.

Уравнения (14), (15), (16) образуют систему в инволюции и определяют $a_i$, $b_i$, $\varphi$, $\psi$, $t$ с двумя произвольными функциями одного аргумента.

Здесь можно отметить замечательный частный случай, который приводит к преобразованию Фубини [73] сопряженной пары.

Потребуем, чтобы точки $N_1$ и $N_3$ совпадали соответственно с $M_1$ и $M_3$, т. е. положим здесь

$$a_1 = 0, \quad b_1 = 0, \quad a_3 = 0, \quad b_3 = 0;$$

по формулам (13) отсюда следует:

$$b_2 = 0, \quad b_4 = 0.$$



Внося все это в уравнение (14), получим:

$$\begin{aligned}
&\delta a_2 + R_1 t = 0, \quad q a_2 - 1 - mt = 0,\\
&\Delta a_2 + Rt = 0, \quad q a_2 - 1 + mt = 0,\\
&\frac{\partial \ln a_2}{\partial u} = p_1 + \varphi, \quad \frac{\partial \ln a_2}{\partial v} = P + \psi,
\end{aligned}$$

откуда

$$m = 0, \; a_2 = \frac{1}{q}, \quad \varphi = -p_1 - \frac{\partial \ln q}{\partial u}, \quad \psi = -P - \frac{\partial \ln q}{\partial v}, \quad t = -\frac{\Delta}{Rq}.$$

Уравнения (14) и (15) удовлетворены.

Первое условие показывает, что наша пара сопряженная. Так как теперь

$$q(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2) = (\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_3 + q\mathbf{M}_2),$$

то нетрудно заметить, что луч $N_1N_2$ лежит в касательной плоскости поверхности $(M_1)$ и сопряжен лучу $M_1M_2$, и то же самое относительно лучей $M_3M_4$ и $N_3N_4$.

Таким образом мы получаем замечательную теорему Фубини:

Если две конгруэнции $R$ образуют сопряженную пару, то такую же пару представляют и любые их преобразования Лапласа.

**§ 6. Преобразование Ионаса.** Среди расслояемых пар особое место занимают сопряженные пары. По определению — это расслояемая пара конгруэнций, где каждая конгруэнция $C$, $C'$ сопряжена расслояющим поверхностям $\Sigma$.

Аналитически она характеризуется условием:

$$m = 0, \quad m_1 = 0.$$

Внося эти значения в систему (30) главы десятой, мы в точности получим формулы (6) главы девятой, определяющие преобразование Ионаса.

Таким образом каждая из вспомогательных конгруэнций, соединяющих попарно фокусы лучей расслояемой пары, есть конгруэнция Ионаса. Мы поэтому будем называть переход от одной конгруэнции $R$ к другой, образующей с первой сопряженную пару, преобразованием Ионаса.

Мы только что видели, что сопряженная пара сохраняется в преобразовании Лапласа. Иными словами, если данные конгруэнции $C$, $C'$ составляют сопряженную пару, то их преобразование Лапласа в одном и том же направлении $C_1$, $C_1'$ или $C_2$, $C_2'$ составляет тоже сопряженную пару.

Таким образом преобразование Ионаса применяется не только к данной конгруэнции $R$, но и ко всей последовательности Лапласа. Оно преобразует сразу одну последовательность $R$ в другую последовательность $R$, и это его характеризует, как мы видели в § 1 главы девятой.

Конфигурация конгруэнций и поверхностей, связанная с сопряженной парой, обладает весьма замечательными свойствами.

Мы уже видели, что обе конгруэнции пары суть конгруэнции $R$, четыре фокальных поверхности — поверхности $R$. Мы можем теперь добавить, что все расслояющие поверхности $\Sigma$, $\Sigma'$ — тоже поверхности $R$

и их система $R$ соответствует развертывающимся поверхностям конгруэнции и, следовательно, фокальным сетям $R$.

Уравнение асимптотических линий на любой поверхности $\Sigma$ или $\Sigma'$, данное формулой (39) главы десятой, теперь принимает вид:

$$du^2 - dv^2 = 0.$$

Следовательно, на каждой поверхности $\Sigma$ координатная система — изотермически сопряженная. Чтобы доказать, что это система $R$, надо показать, что хоть одна из конгруэнций касательных этой системы — конгруэнция $W$.

Формулы (40) главы десятой принимают теперь ввд:

$$\mathbf{N}_{1u} = \lambda(\mathbf{M}_4 + q_1\mathbf{N}_1),$$
$$\mathbf{N}_{1v} = \mathbf{M}_3 + (\lambda\delta_1 + p)\,\mathbf{N}_1,$$

где $\mathbf{N}_1 = \mathbf{M}_1 + \lambda\mathbf{M}_2$ — координаты точки поверхности $\Sigma$.

Составим производные для точки $\mathbf{N}_2 = \mathbf{M}_4 + q_1\mathbf{N}_1$:

$$\mathbf{N}_{2u} = (\delta_{1v} - p\delta_1)\,\mathbf{N}_1 + (\lambda q_1 - p_1)\,\mathbf{N}_2 - \delta_1\mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_2,$$
$$\mathbf{N}_{2v} = (\delta_{1u} - p_1\delta_1 + \lambda q_1\delta_1)\,\mathbf{N}_1.$$

Эти формулы прежде всего показывают, что конгруэнция $(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)$ отнесена к развертывающимся поверхностям и имеет точки $N_1$, $N_2$ своими фокусами.

Меняя постоянные, входящее в $\lambda$, мы заставим точку

$$\mathbf{N}_2 = \mathbf{M}_4 + q_1\mathbf{M}_1 + \lambda q_1\mathbf{M}_2$$

пробежать прямую $(\mathbf{M}_2,\ \mathbf{M}_4 + q\mathbf{M}_1)$. Эта прямая касается линии $u$ на поверхности $(\mathbf{M}_2)$, т. е. мы имеем один из лучей конгруэнции, полученной из конгруэнции $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$ преобразованием Лапласа в сторону $u$.

Введем еще две точки:

$$\mathbf{N}_3 = \mathbf{M}_3 + \nu\mathbf{M}_4, \quad \mathbf{N}_4 = \mathbf{M}_2 - \delta_1\mathbf{N}_3.$$

Первая из них есть точка поверхности $\Sigma'$ на втором луче $M_3M_4$, вторая лежит на прямой с координатами $(\mathbf{M}_4,\ \mathbf{M}_2 - \delta_1\mathbf{M}_3)$, т. е. на луче конгруэнции, полученной преобразованием Лапласа в сторону $u$ из конгруэнции $(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4)$.

Система производных принимает теперь вид:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{N}_{1u} &= \lambda\mathbf{N}_2, & \mathbf{N}_{1v} &= p_3\mathbf{N}_1 - \nu\mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_3, \\ \mathbf{N}_{2u} &= q_2\mathbf{N}_1 + p_2\mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_4, & \mathbf{N}_{2v} &= \delta_2\mathbf{N}_1, \\ \mathbf{N}_{3u} &= \nu\mathbf{N}_4, & \mathbf{N}_{3v} &= \mathbf{N}_1 - p_3\mathbf{N}_3 - \lambda\mathbf{N}_4, \\ \mathbf{N}_{4u} &= \mathbf{N}_2 - \delta_2\mathbf{N}_3 - p_2\mathbf{N}_4, & \mathbf{N}_{4v} &= -q_2\mathbf{N}_3, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned} p_2 &= \lambda q_1 + \nu\delta_1 - p_1, & q_2 &= \delta_{1v} - \nu q_1\delta_1 - p\delta_1, \\ p_3 &= \lambda\delta_1 + \nu q_1 + p, & \delta_2 &= \delta_{1u} + \lambda q_1\delta_1 - p_1\delta_1. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Эта таблица показывает, что касательные к линиям $u$ на любой паре расслояющих поверхностей $\Sigma$ и $\Sigma'$ образуют снова сопряженную пару конгруэнций $R$. Вторые фокусы, этих конгруэнций помещаются на преобразовании Лапласа от конгруэнций основной пары. Следовательно,



то построение, которое мы получили для преобразования Фубини сопряженных пар в конце прошлого параграфа, как предельный случай преобразования $P$ расслояемых пар, мы можем дополнить: не только конгруэнции преобразованной пары получаются как преобразования Лапласа от конгруэнций первоначальной пары, но и все расслояющие поверхности суть преобразования Лапласа от расслояющих поверхностей первой пары.

Заметим еще, что это построение можно повторять, применяя новые и новые преобразования Лапласа. Две последовательности Лапласа, получаемые из конгруэнций $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$ и $(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)$, обладают замечательными свойствами: развертывающиеся поверхности их соответствуют друг другу, и лучи второй последовательности лежат в фокальных плоскостях первой, а лучи первой проходят через фокусы второй. Говорят, что последовательность $[\mathbf{N}]$ вписана в последовательность $[\mathbf{M}]$.

Отметим, наконец, что это построение дает возможность находить по заданной поверхности или конгруэнции $R$ новые поверхности и конгруэнции: чтобы перейти от тетраэдра $(M_1, M_2, M_3, M_4)$ к тетраэдру $(N_1, N_2, N_3, N_4)$, надо только найти решение двух вполне интегрируемых систем:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_u &= q_1\lambda^2 - p_1\lambda - \delta, & \lambda_v &= \delta_1\lambda^2 + p\lambda - q, \\ \nu_u &= -\delta_1\nu^2 + p_1\nu + q, & \nu_v &= -q_1\nu^2 - p\nu + \delta. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Обратно, если даны $\lambda$, $\nu$, $p_2$, $q_2$, $p_3$, $\delta_2$, то уравнения (18) и основные уравнения дадут для $\delta_1$, $q_1$ две вполне интегрируемых системы диференциальных уравнений:

$$q_{1u} = -\lambda q_1^2 + p_2q_1 + q_2, \quad q_{1v} = \nu q_1^2 - p_3q_1 + \delta_2,$$
$$\delta_{1u} = \nu\delta_1^2 - p_2\delta_1 + \delta_2, \quad \delta_{1v} = -\lambda\delta_1^2 + p_3\delta_1 + q_2$$

и конечные уравнения для остальных функций:

$$p = p_3 - \lambda\delta_1 - \nu q_1, \qquad \delta = \nu_v + p_3\nu - \lambda\nu\delta_1,$$
$$p_1 = -p_2 + \lambda q_1 + \nu\delta_1, \quad q = \nu_u + p_2\nu - \lambda\nu q_1,$$

Следовательно, около каждой последовательности $R$ можно описать $\infty^2$ последовательностей $R$.

**§ 7. Повторение преобразований Ионаса.** Если даны два преобразования Ионаса для одной и той же конгруэнции $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$, то теорема переместительности § 3 позволит нам построить $\infty^1$ вторых преобразований $(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)$. Это будут, конечно, конгруэнции $W$, но не будут вообще конгруэнции $R$.

Так как асимптотические линии на фокальных поверхностях соответствуют, то координатная сеть на поверхностях $(\mathbf{N}_1)$, $(\mathbf{N}_2)$ будет изотермически сопряженная. Если развертывающиеся поверхности конгруэнции $(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)$ пересекают свои фокальные полости по координатной сети, то это будет не просто конгруэнция $W$, а конгруэнция $R$.

Итак, нам надо только потребовать, чтобы точки $N_{1u}$ и $N_{2u}$ лежали на прямой $N_1N_2$.

Диференцируя:

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{M}_1 + a_3\mathbf{M}_3 + a_4\mathbf{M}_4,$$
$$\mathbf{N}_2 = \mathbf{M}_2 + b_3\mathbf{M}_3 + b_4\mathbf{M}_4$$

и пользуясь формулами (10), получим [1]:

$$\mathbf{N}_{1u}=\mathbf{M}_2(\delta+Ra_4)+\mathbf{M}_3[(-R+R')\lambda+\delta b_3+Ra_3b_4]+\mathbf{M}_4(\delta+Ra_4)b_4$$
$$\mathbf{N}_{2v}=\mathbf{M}_1(\delta_1+Rb_3)+\mathbf{M}_3(\delta_1+Rb_3)a_3+\mathbf{M}_4[(R'-R)\lambda+a_4\delta_1+Rb_4a_3]$$

Следовательно, наше требование будет выполнено, если

$$\lambda(R'-R)+Ra_3b_4=Ra_4b_3,$$

откуда получим единственное значение

$$\lambda\vartheta=\frac{R'}{R}-1,\quad \vartheta=(q-q')(q_1-q_1')-(p-p')(p_1-p_1').$$

Штрихом везде обозначены величины, относящиеся ко второму преобразованию.

Так как в силу уравнений (3) главы девятой

$$\begin{aligned}\vartheta_u&=-\vartheta(p_1+p_1')+(p-p')(R-R'),\\ \vartheta_v&=-\vartheta(p+p')+(p_1-p_1')(R-R'),\end{aligned}\tag{20}$$

то нетрудно убедиться, что полученное значение $\lambda$ удовлетворяет уравнению (18) и, следовательно, действительно определяет единственную конгруэнцию $C_2$ среди преобразований второго порядка, которая соответствует развертывающимся поверхностям конгруэнций $C$, $C_1$, $C_1'$, а потому является конгруэнцией $R$.

Это решение $\lambda$ обращается в нуль и, следовательно, теряет смысл если постоянные двух преобразований равны:

$$R'=R.$$

В этом случае задача не имеет решений, т. е. среди преобразований конгруэнций $C_2$ нет конгруэнций $R$, если только $\vartheta$ не обращается в нуль. Нетрудно заметить, однако, что в этом случае уравнения (20) имеют очевидное решение:

$$\vartheta=0.$$

Достаточно выбрать начальные значения $p'$, $p_1'$, $q'$, $q_1'$ так, чтобы $\vartheta$ равнялось нулю, и оно будет тождественно нулем при всех значениях $u$, $v$, а в таком случае $\lambda$ неопределенно и, следовательно, все преобразования $C$ суть конгруэнции $R$.

---

[1] Если из уравнений системы (V), написанных для тетраэдра $p$, $q$, $p_1$, $q_1$, вычесть такие же уравнения с компонентами $p'$, $q'$, $p_1'$, $q_1'$, то получим:

$$\left.\begin{aligned}(p-p')_v&=-(q-q')\delta_1-(q_1-q_1')\delta-p^2+p'^2-R+R',\\ (p_1-p_1')_u&=-(q_1-q_1')\delta-(q-q')\delta_1-p_1^2+p_1'^2-R+R'.\end{aligned}\right\}$$

Отсюда в силу (11)

$$\left.\begin{aligned}a_{3u}&=b_3\delta+a_4\delta_1+Ra_3b_4-\lambda(R-R'),\\ a_{4u}&=a_3q+a_4p_1+b_4\delta+Ra_4b_4,\\ b_{3v}&=a_3\delta_1+b_3p+b_4q_1+Ra_3b_3,\\ b_{4v}&=a_4\delta_1+b_3\delta+Ra_3b_4-\lambda(R-R'),\end{aligned}\right\}$$



Мы видим, что преобразование конгруэнций $R$ занимают такое же место среди общих преобразований $T$, как преобразования поверхностей постоянной отрицательной кривизны в классической теории асимптотических преобразований Бианки [74].

Отсюда — те же заключения.

Если известны все преобразования $R$ первого порядка, то дальнейшее приложение метода не потребует и квадратур. Действительно, для каждой пары различных значений постоянных $R$, $R'$ мы получаем $\lambda$ в конечном виде. Подсчитав таким образом все преобразования второго порядка, мы можем прилагать те же формулы для отыскания преобразований третьего порядка и т. д.

Возьмем, например, за первоначальную конгруэнцию $R$ линейную конгруэнцию с выродившимися фокальными поверхностями:

$$\mathbf{M}_1=C_1v+C_2,\quad \mathbf{M}_2=C_3u+C_4,$$

где все $C_i$ — постоянные.

Подсчитывая определяющие величины конгруэнции, найдем, что они все равны нулю:

$$\delta=0,\ \delta_1=0,\quad \Delta=0,\quad \Delta_1=0,\quad \overline{R}=0,\ \overline{R}_1=0.$$

Это дает нам право рассматривать эту конгруэнцию как выродившуюся конгруэнцию $R$.

Система (6) главы девятой имеет общее решение:

$$q=\frac{\sqrt{R}}{A\sin\alpha+B\sin\beta},\qquad q_1=\frac{\sqrt{R}\,(A^2-B^2)}{A\sin\alpha+B\sin\beta},$$
$$p=\sqrt{R}\,\frac{A\cos\alpha-B\cos\beta}{A\sin\alpha+B\sin\beta},\quad p_1=\sqrt{R}\,\frac{A\cos\alpha+B\cos\beta}{A\sin\alpha+B\sin\beta},$$

где

$$\alpha=\sqrt{R}\,(u+v),\quad \beta=\sqrt{R}\,(u-v);\quad A,\ B,\ R=\mathrm{const}.$$

Все преобразования $R$ первого порядка определяются формулами:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_3&=C_1-(C_1v+C_2)p-(C_3u+C_4)q,\\ \mathbf{M}_4&=C_2-(C_1v+C_2)q_1-(C_3u+C_4)p_1.\end{aligned}$$

Следовательно, дальнейшее применение метода выполняется только диференцированием и алгебраическими операциями.

**§ 8. Преобразование сопряженных пар.** Наконец, можно применить к сопряженным парам $R$ преобразование $P$ расслояемых пар.

Уравнения (15) для

$$\Delta=\delta_1,\quad \Delta_1=\delta_1,\quad P=p,\quad P_1=p_1,\quad m=0,\ R=R_1$$

принимают вид:

$$\varphi_v-\psi_u=0,\tag{$21_1$}$$

$$\frac{\partial\ln t}{\partial u}=2p_1+\varphi+\frac{\psi}{Rt},\quad \frac{\partial\ln t}{\partial v}=2p+\psi+\frac{\varphi}{Rt};\tag{$21_2$}$$

условие совместности их:

$$\varphi_u-\varphi^2-2p_1\varphi=\psi_v-\psi^2-2p\psi.\tag{$21_3$}$$

Уравнения $(21_{1,3})$ составляют систему в инволюции. Они определяют $\varphi$, $\psi$ с двумя произвольными функциями одного аргумента и для каждой пары значений $\varphi$, $\psi$ дают $t$ с произвольным постоянным.

Конгруэнции $(N_1N_2)$ и $(N_3N_4)$ вообще не будут конгруэнциями $R$. Чтобы это было так, достаточно потребовать, чтобы развертывающиеся поверхности новой пары соответствовали друг другу.

Подсчитывая, найдем уравнение этих поверхностей в виде:

$$\Phi_1[\Phi_2 b_2 - \Phi_1 a_2 b_1]\,du^2 + [\Phi_2\Psi_2 + \Phi_1\Psi_1(a_1b_2 - 2a_2b_1)]\,du\,dv + \Psi_1[\Psi_2 a_1 - \Psi_1 a_2 b_1]\,dv^2 = 0,$$

$$\Psi_1[\Psi_2 a_1 - \Psi_1 a_2 b_1]\,du^2 + [\Psi_2\Phi_2 + \Psi_1\Phi_1(a_1b_2 - 2a_1b_2)]\,du\,dv + \Phi_1[\Phi_2 b_2 - \Phi_1 a_2 b_1]\,dv^2 = 0,$$

где

$$\Phi_1 = \varphi - Rb_2, \quad \Phi_2 = \varphi a_1 + R(t - a_2b_1),$$
$$\Psi_1 = \psi - Ra_1, \quad \Psi_2 = \psi b_2 + R(t - a_2b_1).$$

Требуя соответствия развертывающихся, мы найдем только два случая:

1) $\Phi_1 = 0, \quad \Psi_1 = 0,$

2) $\Phi_2 b_2 - \Phi_1 a_2 b_1 = 0, \quad \Psi_2 a_1 - \Psi_1 a_2 b_1 = 0.$

И то и другое решение удовлетворяет системе (21) и, следовательно, дает искомые преобразования.

Таким образом приходим к двум системам:

1)

$$\begin{aligned}
a_{1u} &= \delta a_2 + \delta_1 b_1 + Rt + Ra_1b_2, & a_{1v} &= qa_2 + q_1b_1 + 2pa_1 + Ra_1^2 - 1,\\
b_{1u} &= qa_1 + \delta b_2 + p_1b_1 + Rb_1b_2, & b_{1v} &= \delta a_1 + qb_2 + pb_1 + Ra_1b_1,\\
a_{2u} &= q_1a_1 + \delta_1 b_2 + p_1a_2 + Ra_2b_2, & a_{2v} &= \delta_1 a_1 + q_1b_2 + pa_2 + Ra_1a_2,\\
b_{2u} &= qa_2 + q_1b_1 + 2p_1b_2 + Rb_2^2 - 1, & b_{2v} &= \delta a_2 + \delta_1 b_1 + Rt + Ra_1b_2,\\
t_u &= a_1 + Rb_2t + 2p_1t, & t_v &= b_2 + Ra_1t + 2pt.
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
a_{1u} &= \delta a_2 + \delta_1 b_1 - \theta a_2b_1, & a_{1v} &= qa_2 + q_1b_1 + 2pa_1 - \theta a_1^2 - 1,\\
b_{1u} &= qa_1 + \delta b_2 + p_1b_1 - \theta b_1b_2, & b_{1v} &= \delta a_1 + qb_2 + pb_1 - \theta a_1b_1,\\
a_{2u} &= q_1a_1 + \delta_1 b_2 + p_1a_2 - \theta a_2b_2, & a_{2v} &= \delta_1 a_1 + q_1b_2 + pa_2 - \theta a_1a_2,\\
b_{2u} &= qa_2 + q_1b_1 + 2p_1b_2 - \theta b_2^2 - 1, & b_{2v} &= \delta a_2 + \delta_1 b_1 - \theta a_2b_1,\\
t &= \theta(a_1b_2 - a_2b_1), & \theta &= \mathrm{const}.
\end{aligned}$$

Каждая из них определяет новые конгруэнции $R$, $(N_1N_2)$ и $(N_3N_4)$, с пятью произвольными постоянными.

**§ 9. Расслояемая пара параболических конгруэнций** [75]. До сих пор мы рассматривали расслояемые пары конгруэнций, из которых по крайней мере одна $(M_1M_2)$ имела различные фокусы. Мы видели, что в таком случае и у другой конгруэнции фокусы различны и две пары фокусов лежат каждая в фокальных плоскостях другой конгруэнции. Будем искать теперь расслояемые пары параболических конгруэнций.



Если фокусы совпадают, то на единственной фокальной поверхности луч конгруэнции огибает асимптотические линии. Таким образом эта задача возвращает нас к теории поверхности.

Построим тетраэдр, первая вершина которого $M_1$ есть фокус первой конгруэнции $(M_1M_2)$. Пусть параметры $u$, $v$ суть параметры асимптотических линий на поверхности $(M_1)$ и луч $M_1M_2$ касается асимптотической $u$ на поверхности $(M_1)$.

Выберем $M_2$ так, чтобы

$$M_{1u} = M_2.$$

Возьмем вершины $M_3$ и $M_4$ на втором луче, именно: $M_3$ — там где второй луч пересекает касательную плоскость $(M_1)$, и $M_4$ — там, где второй луч пересекает плоскость $M_1M_2M_{2v}$.

При подходящем нормировании этих точек мы можем написать:

$$M_{1u} = M_2, \quad M_{1v} = -\xi M_1 - \eta M_2 + M_3, \quad M_{2v} = -aM_1 - bM_2 + M_4,$$

где $\xi$, $\eta$, $a$, $b$ — неизвестные функции, которые определяют вторую конгруэнцию, если поверхность $(M_1)$ известна.

Полагая, что координаты $M_1$ нормированы так, что выполняются уравнения:

$$M_{1uu} = \beta M_{1v} + pM_1, \quad M_{1vv} = \gamma M_{1u} + qM_1,$$

где

$$p = B + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln\gamma}{\partial u^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \ln\gamma}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{2}\beta_v,$$

$$q = A + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln\beta}{\partial v^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \ln\beta}{\partial v}\right)^2 - \frac{1}{2}\gamma_u,$$

мы можем без труда вычислить все компоненты движения тетраэдра:

$$\left.\begin{aligned}
M_{1u} &= M_2,\\
M_{1v} &= -\xi M_1 - \eta M_2 + M_3,\\
M_{2u} &= (-\beta\xi + p)M_1 - \beta\eta M_2 + \beta M_3,\\
M_{2v} &= -aM_1 - bM_2 + M_4,\\
M_{3u} &= \Xi_1 M_1 + H_1 M_2 + \beta\eta M_3 + M_4,\\
M_{3v} &= \Xi_2 M_1 + H_2 M_2 + \xi M_3 + \eta M_4,\\
M_{4u} &= A_1M_1 + B_1M_2 + (\beta_v + p + b\beta)M_3,\\
M_{4v} &= A_2M_1 + B_2M_2 + (a + \beta\gamma)M_3 + bM_4,
\end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

где

$$\Xi_1 = \xi_u + \eta p - \beta\xi\eta - a, \quad \Xi_2 = \xi_v - \xi^2 - a\eta + q,$$
$$H_1 = \eta_u + \xi - \beta\eta^2 - b, \quad H_2 = \eta_v - \xi\eta - b\eta + \gamma,$$
$$A_1 = a_u + b(p - \beta\xi) - \xi(p + \beta_v) + p_v + \beta q,$$
$$B_1 = b_u + a - b\beta\eta - \eta(p + \beta_v) + \beta\gamma,$$
$$A_2 = a_v - ab - a\xi - \beta\gamma\xi + q_u + p\gamma,$$
$$B_2 = b_v - b^2 - a\eta - \beta\gamma\eta + \gamma_u + q.$$

Пусть $(\lambda M_1 + M_2)$ и $(\nu M_3 + M_4)$ — поверхности $\Sigma$ и $\Sigma'$, которые расслояют нашу пару $(CC_1)$.

По условию касательная плоскость $\Sigma$ проходит через луч $M_3M_4$, значит, ее уравнение в текущих координатах $\mathbf{P}$:

$$(\mathbf{P},\ \mathbf{M}_3,\ \mathbf{M}_4,\ \lambda\mathbf{M}_1+\mathbf{M}_2)=0.$$

Характеристическая точка каждой плоскости этого семейства совпадает с точкой $\lambda\mathbf{M}_1+\mathbf{M}_2$. Значит, диференцируя это уравнение по $u$ и по $v$ и подставляя $\mathbf{P}=\lambda\mathbf{M}_1+\mathbf{M}_2$, мы должны получить тождество.

Развертывая определители, мы получим два уравнения:

$$(\lambda\mathbf{M}_1+\mathbf{M}_2,\ \mathbf{M}_3,\ \mathbf{M}_4,\ \lambda_u\mathbf{M}_1+\lambda\mathbf{M}_{1u}+\mathbf{M}_{2u})=0,$$
$$(\lambda\mathbf{M}_1+\mathbf{M}_2,\ \mathbf{M}_3,\ \mathbf{M}_4,\ \lambda_v\mathbf{M}_1+\lambda\mathbf{M}_{1v}+\mathbf{M}_{2v})=0,$$

или

$$\begin{aligned}\lambda_u&=\lambda^2-\lambda\eta\beta+\beta\xi-p,\\ \lambda_v&=-\eta\lambda^2+\lambda(\xi-b)+a.\end{aligned}\tag{23}$$

Каждое решение этой системы определяет поверхность $\Sigma$. Так как по условию задачи мы должны иметь $\infty^1$ поверхностей $\Sigma$, то система вполне интегрируема.

Условия интегрируемости имеют вид:

$$H_1=0,\quad \Xi_1+H_2\beta=B_1,$$
$$A_1=\beta\Xi_2.$$

Совершенно так же, требуя, чтобы касательная плоскость $\Sigma'$ проходила через луч $M_1M_2$, получим:

$$\left.\begin{aligned}\mu_u&=\mu^2-\mu\eta\beta-b\beta-p-\beta_v,\\ \mu_v&=\mu^2\eta+\mu(b-\xi)-a-\beta\gamma,\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

и как условие совместности:

$$H_1=0,\quad \Xi_1-\beta H_2=B_1,\quad A_1=\beta B_2.$$

Последнее уравнение получится, если принять во внимание условия совместности уравнений (22), которые можно написать в виде:

$$\beta_{vv}+2p_v=(\beta\gamma)_u+\beta\gamma_u.$$

Отсюда сейчас же следует:

$$H_1=0,\quad H_2=0,\quad \Xi_1=B_1,\quad A_1=\beta B_2,\quad A_1=\beta\Xi_2.\tag{25}$$

Первые два уравнения имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}\eta_u&=\eta^2\beta+b-\xi,\\ \eta_v&=\eta(b+\xi)-\gamma.\end{aligned}\right\}\tag{26a}$$

Условие совместности их:

$$B_2-\Xi_2=\eta(B_1+\Xi_1);\tag{27}$$

но если $\beta$ не нуль, что приводило бы к вырождению конгруэнции, то

$$B_2=\Xi_2.$$



Сравнивая теперь (27) и (25), найдем, если $\eta$ не нуль (что приводит к вырождению расслояемой пары, ибо лучи пересекаются):

$$\Xi_1=0,\quad \Xi_2=m,\quad B_1=0,\quad B_2=m,$$

где $m$ — вспомогательная функция.

Полностью выписанные уравнения имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}\xi_u&=\xi\eta\beta-\eta p+a,\\ \xi_v&=m+\eta a+\xi^2-q,\end{aligned}\right\}\tag{26b}$$

$$\left.\begin{aligned}b_u&=\eta b\beta+\eta(\beta_v+p)-a-\beta\gamma,\\ b_v&=m+b^2+\eta a+\eta\beta\gamma-\gamma_u-q.\end{aligned}\right\}\tag{26c}$$

Условие совместности:

$$A_1=m\beta,\quad A_2=0,\quad m_u=0,$$

или

$$\left.\begin{aligned}a_u&=m\beta-bp+b\xi\beta+\xi(\beta_v+p)-\beta q-p_v,\\ a_v&=ab+a\xi+\xi\beta\gamma-\gamma p-q_u.\end{aligned}\right\}\tag{26d}$$

Наконец, условие совместности последних двух уравнений имеет вид:

$$m_v\beta+2m\beta_v=0.$$

Итак, система (26a, b, c, d) совместна, если $m$ удовлетворяет уравнению:

$$m_u=0,\quad m_v\beta+2m\beta_v=0.\tag{28}$$

Система (28) имеет очевидное решение:

$$m=0.$$

Тогда система (26a, b, c, d), как вполне интегрируемая, дает с четырьмя произвольными постоянными для произвольной конгруэнции $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$ вторую конгруэнцию, с которой она составляет расслояемую пару, но в этом случае

$$\Xi_1=0,\quad \Xi_2=0,\quad H_1=0,\quad H_2=0,\quad B_1=0,\quad B_2=0,\quad A_1=0,\quad A_2=0,$$

и система (22) сейчас же покажет, что вторая конгруэнция выродилась в неподвижную прямую.

Если $m$ не нуль, то, исключая его из уравнения (28), получим:

$$\frac{\partial^2\ln\beta}{\partial u\,\partial v}=0.$$

Это единственное условие, налагаемое на поверхность $(\mathbf{M}_1)$. Оно показывает, что наша поверхность есть поверхность $R_0$, предельный случай поверхности $R$, когда система сопряженных линий $R$ сливается в одно семейство асимптотических.

Подходящим выбором параметров мы приведем $\beta$ к единице. Тогда $m$ будет произвольной постоянной.

**§ 10. Преобразование конгруэнций $R_0$** [76]. Для каждой поверхности $R_0$ существует $\infty^5$ расслояемых пар.

Система (22) имеет теперь вид:

$$\begin{aligned}
&M_{1u} = M_2, && M_{1v} = -\xi M_1 - \eta M_2 + M_3,\\
&M_{2u} = (p-\xi) M_1 - \eta M_2 + M_3, && M_{2v} = -aM_1 - bM_2 + M_4,\\
&M_{3u} = \eta M_3 + M_4, && M_{3v} = mM_1 + \xi M_3 + \eta M_4,\\
&M_{4u} = mM_1 + (p+b) M_3, && M_{4v} = mM_2 + (a+\xi) M_3 + bM_4.
\end{aligned}$$

Отсюда прежде всего следует, что точка $M_3$ есть фокус второго луча, который огибает на этой поверхности линию $u$.

Далее нетрудно заметить, что поверхность $(M_3)$ отнесена тоже к асимптотическим линиям.

Подсчитывая вторые производные, без труда найдем:

$$M_{3uu} = M_{3v} + (2\eta^2 + 2b - 2\xi + p) M_3,$$

$$M_{3vv} = [2\eta(b+\xi) - \gamma] M_{3u} + [2\xi^2 + 2\eta(a+\gamma) - 2\eta^2(b+\xi) + 2m - q] M_3.$$

Итак, вторая конгруэнция тоже параболическая, и развертывающиеся поверхности (совпавшие) соответствуют первой.

Наконец, как показывает наша таблица, не только фокус $M_3$ лежит в касательной плоскости поверхности $(M_1)$, но и, наоборот, касательная плоскость поверхности $(M_3)$ проходит через соответствующую точку $M_1$.

Следовательно, луч $M_1M_3$ касается обеих поверхностей.

Так как на фокальных поверхностях $(M_1)$ и $(M_3)$ асимптотические линии соответствуют друг другу, то конгруэнция $(M_1M_3)$ — конгруэнция $W$.

Она может быть охарактеризована тем, что обе фокальные поверхности имеют один и тот же коэфициент проективного линейного элемента $\beta$.

Если на поверхности $(M_1)$ провести касательные к линиям

$$\frac{du}{dv} = \eta$$

и ввести второй фокус луча

$$M_3 = \xi M_1 + \eta M_2 + M_{1v}, \quad M_2 = M_{1u},$$

то, требуя, чтобы касательные плоскости $(M_3)$ содержали точку $M_1$, мы получим систему (26a, b), где $m$ — вспомогательная функция.

Введем точку

$$M_4 = aM_1 + bM_2 + M_{2v}.$$

Условие, что поверхность $(M_3)$ отнесена к ассимптотическим линиям, так же, как и поверхность $(M_1)$, приведет к уравнениям (26c).

Наконец, требование, чтобы коэфициенты $\beta$ на обеих поверхностях $(M_1)$, $(M_3)$ совпадали, дает нам первые уравнения (26a, b).

Дополняя систему (26a, b, c, $d_1$), мы получим последние уравнения (26d) и два уравнения для $m$, т. е. вернемся к уравнениям начала этого параграфа. Асимптотические касательные $M_1M_2$ и $M_3M_4$ опишут расслояемую параболическую пару.

Конгруэнция $(M_1M_3)$ устанавливает преобразование поверхности $R_0$ в другую поверхность $R_0$ с пятью произвольными постоянными.



К этому преобразованию применима обычная теорема переместительности.

Пусть $S(M_1)$ — первоначальная поверхность $R_0$, $S_1(M_3)$, $S_1'(M_3')$ — два ее преобразования и $S_2(N)$ — поверхность, которую можно получить и из поверхности $S_1$, и исходя из поверхности $S_1'$.

Сохраняя предыдущие обозначения для поверхности $S_1$ и снабжая штрихом величины, относящиеся к поверхности $S_1'$, имеем:

$$\begin{aligned}
M_3' &= (\xi' - \xi) M_1 + (\eta' - \eta) M_2 + M_3,\\
M_4' &= (a' - a) M_1 + (b' - b) M_2 + M_4,\\
N\ &= \rho M_1 + \mu M_3 + M_4.
\end{aligned}$$

Точка $N$ лежит в касательных плоскостях поверхностей $S_1$ и $S_1'$.

Первое условие уже выполнено, второе дает:

$$\mu = -\frac{b-b'}{\eta-\eta'}.$$

Касательная плоскость поверхности (N) содержит точки $M_3$ и $M_3'$, следовательно:

$$(M_3M_3'NN_u) = 0, \quad (M_3M_3'NN_v) = 0.$$

Внося сюда значение N, получим:

$$\left.\begin{aligned}
\rho_u &= \rho(\lambda+\mu) - m,\\
\rho_v &= \rho[b + \xi + \eta(\mu-\lambda)] - m(\mu-\lambda),
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

где

$$\lambda = \frac{\xi-\xi'}{\eta-\eta'}.$$

Эта система вполне интегрируема в силу (26a, b, c, d) и определяет $\rho$ с произвольным постоянным, но поверхность (N), отнесенная к асимптотическим линиям, может не быть поверхностью $R_0$. Надо потребовать, чтобы ее коэфициент $\beta$ тоже равнялся единице.

Это приведет нас к единственному значению:

$$\rho = -\frac{m}{m-m'}(\lambda\mu + \theta)(\eta - \eta'),$$

где

$$\theta = \frac{a-a'}{\eta-\eta'}.$$

Это значение $\rho$ удовлетворяет системе (29) и определяет единственную поверхность $R_0$ среди вторых преобразований.

Особый случай будет иметь место, если постоянные преобразований $m$ и $m'$ равны между собой:

$$m = m'.$$

Чтобы задача имела решение, необходимо

$$\lambda\mu + \theta = 0, \tag{30}$$

и в таком случае все решения системы (29) будут давать поверхность $R_0$.

Так как производные от (30) в силу предыдущих уравнений обращаются в тождества, то выбором начальных условий мы всегда можем добиться выполнения уравнения (30).

Оно имеет простой смысл: это требование, чтобы существовала общая точка $Q$ у асимптотических касательных поверхностей $S_1$ и $S_1'$.

$$\mathbf{Q} = \mathbf{M}_4 + \mu \mathbf{M}_3 = \mathbf{M}_4' + \mu' \mathbf{M}_3'.$$

Мы видим, следовательно, что для всякого преобразования $S_1$ существует $\infty^3$ преобразований $S_1'$ так, что касательные к асимптотическим $u$ пересекаются.

В каждой такой точке $P$ сходятся асимптотические касательные $\infty^2$ преобразований $S_1'$.

Действительно, из уравнений (26а) получим при заданном $\lambda$ и $\mu$:

$$\begin{aligned}(\eta-\eta')_u &= -(\eta-\eta')^2 + (\eta-\eta')(2\eta-\lambda-\mu),\\ (\eta-\eta')_v &= (\eta-\eta')^2(\mu-\lambda) + (\eta-\eta')[b+\xi+\eta(\lambda-\mu)].\end{aligned}$$

Этим определяется пучок поверхностей $S_1'$; меняя $\lambda$, получим $\infty^1$ таких пучков.

Соответствующие точки поверхностей $S_1'$ одного пучка лежат на прямой

$$\mathbf{M}_3' = \mathbf{M}_3 - (\eta-\eta')\,\mathbf{P},$$

где

$$\mathbf{P} = \lambda \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$$

есть точка, в которой наша прямая пересекает луч $M_1M_2$. Так как $\lambda = \frac{\xi-\xi'}{\eta-\eta'}$ удовлетворяет уравнению (23), то поверхности (P) — те самые поверхности $\Sigma$, которые расслояют пару конгруэнций $(C, C')$. Аналогично (Q) есть одна из второго семейства поверхностей $\Sigma'$, расслояющих эту пару.

Так как

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_u &= \mathbf{M}_3 + (\lambda-\eta)\,\mathbf{P},\\ \mathbf{P}_v &= \mathbf{M}_4 + \lambda \mathbf{M}_3 - (b+\lambda\eta)\,\mathbf{P},\end{aligned}$$

то нетрудно убедиться, что поверхность (P) тоже отнесена к асимптотическим линиям и что ее коэфициент $\beta$ тоже равен единице. Далее луч $PM_3$ касается асимптотической $u$. Аналогично для (Q). Обе конгруэнции $(\mathbf{PM}_3)$ и $(\mathbf{QM}_1)$ составляют расслояемую параболическую пару. Для этой пары поверхности $(\mathbf{M}_1)$ и $(\mathbf{M}_3)$ принадлежат к расслояющим поверхностям.

Получается замечательная конфигурация четырех поверхностей $(M_1)$, (P), $(M_3)$, (Q). Косой четырехугольник $M_1PM_3Q$ образован касательными к асимптотическим $u$ наших поверхностей. Следовательно, каждая такая касательная проходит через соответствующую точку следующей поверхности в этом замкнутом цикле. Противоположные стороны четырехугольника описывают расслояемые параболические пары. Диагонали описывают две конгруэнции $W$, для которых вершины служат фокусами.

Приложение 1

# ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ

**§ 1. Соприкасающееся коническое сечение** [77]. Введем наряду с однородными проективными координатами

$$x_0,\ x_1,\ x_2$$

неоднородные:

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}.$$

Тогда плоская кривая или одна из ветвей ее, та, которую мы будем рассматривать, может быть задана одним уравнением:

$$y = f(x). \tag{1}$$

Поместим начало координат $x=0$, $y=0$ в обыкновенной точке кривой $(M)$; тогда ордината $y=f(x)$ из уравнения (1) может быть разложена вблизи точки $M$ в степенной ряд:

$$y = a_1x + \frac{1}{2}a_2x^2 + \frac{1}{3!}a_3x^3 + \ldots \tag{2}$$

Как надо выбрать две другие вершины координатного треугольника $MM_1M_2$ и точку единиц его, чтобы уравнение (2) приняло возможно более простой вид?

Мы можем непосредственно путем преобразования координат искать наиболее простую форму разложения (2), но проще воспользоваться геометрическими соображениями.

Простейший геометрический образ, связанный с кривой в данной ее точке, — касательная. Вполне естественно принять касательную за одну из сторон координатного треугольника, например за сторону $MM_1$, т. е. считать, что уравнение касательной, имеющей точку прикосновения в начале координат, есть $y=0$.

Касательная пересекает кривую в двух слившихся точках; полагая $y=0$ в уравнении (2), мы должны получить два корня $x=0$. Поэтому разложение (2) должно начинаться с членов второй степени и, значит, должно быть

$$a_1 = 0.$$

В проективной геометрии нет окружности — проективное преобразование может преобразовать ее в любое коническое сечение. Поэтому здесь нельзя рассматривать соприкасающийся круг. После касательной наиболее простой геометрический образ — соприкасающаяся кривая второго порядка. Выберем координатный треугольник так, чтобы он был наиболее хорошо связан с соприкасающимся коническим сечением.

Ось $MM_1$, очевидно, касается его в точке $M$; мы можем вершину $M_2$ взять на коническом сечении и ось $M_1M_2$ выбрать касательной к нему; таким образом третья вершина $M_1$ будет служить полюсом для стороны $MM_2$.

При подходящем выборе точки единиц уравнение конического сечения примет вид [1]:

$$y = \frac{1}{2} x^2. \tag{3}$$

Пусть кривая (3) есть соприкасающееся коническое сечение кривой (2). Так как общее уравнение кривой второго порядка содержит шесть коэфициентов, т. е. пять существенных параметров, то соприкасающееся коническое сечение имеет касание четвертого порядка с кривой (2). Это значит, что в разложении (2) члены до четвертого порядка включительно должны быть те же, что и в разложении (3).

Итак, при нашем выборе системы координат уравнение кривой принимает вид:

$$y = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{5!} a_5 x^5 + \frac{1}{6!} a_6 x^6 + \dots \tag{4}$$

При этом, конечно, исключается прямая линия, которая не может иметь соприкасающегося конического сечения в виде (3) [2].

У нас еще остался некоторый произвол в выборе координатной системы: нетрудно заметить, что, например, положение точки $M_1$ на касательной $MM_1$ или направление луча $MM_2$ остается произвольным.

---

[1] В однородных координатах $x_0$, $x_1$, $x_2$ уравнение всякой кривой второго порядка имеет вид:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{10}x_{11}x_0 + 2a_{20}x_2x_0 + a_{00}x_0^2 = 0.$$

Сторова $x_2 = 0$ есть касательная в точке $x_1 = x_2 = 0$; поэтому, полагая $x_2 = 0$, мы должвы получить в качестве решения дважды $x_1 = 0$; отсюда

$$a_{00} = 0, \quad a_{10} = 0.$$

Совершенно так же $x_0 = 0$ должно давать кратный корень $x_1 = 0$; значит

$$a_{22} = 0, \quad a_{12} = 0.$$

Наконец, принимая $x_0 = \frac{a_{11}}{a_{20}}$, приведем наше уравнение к виду (3).

[2] Соприкасающаяся кривая второго порядка есть предельное положение кривой второго порядка, когда пять точек пересечения ее с кривой (2) совпадают.

Следовательно, решая совместно уравнение (2) и (3), мы должны получить пять решений $x = 0$, $y = 0$, но, исключая $y$, имеем:

$$\frac{1}{3!} a_3x^3 + \frac{1}{4!} a_4x^4 + \frac{1}{5!} a_5x^5 + \dots = 0,$$

откуда сейчас же следует:

$$a_3 = 0, \quad a_4 = 0.$$



**§ 2. Соприкасающаяся кривая третьего порядка.** Обратимся к следующему геометрическому образу — соприкасающейся кривой третьего порядка.

Уравнение кривой третьего порядка содержит 10 коэфициентов, 9 существенных параметров, поэтому она может иметь касание восьмого порядка с кривой; но не все кривые третьего порядка проективно эквивалентны и не все точки такой кривой равноценны — она может иметь особую точку (двойную), и этой особенностью удобно воспользоваться для приведения уравнения (4) к каноническому виду. Поэтому мы сохраним в запасе один параметр и будем искать кривую третьего порядка, имеющую касание седьмого порядка с нашей кривой.

Если

$$F(x, y) \equiv \sum^{i,j,k=1,2,0} a_{ijk}x_ix_jx_k = 0 \tag{5}$$

есть уравнение этой кривой третьего порядка, то, подставляя сюда разложение (4), мы должны получить восемь корней $x = 0$; следовательно, коэфициенты при всех степенях $x$ до седьмой включительно должны быть равны нулю. Полагая их равными нулю, получим восемь соотношений между $a_{ijk}$ и коэфициентами разложения (4). Эти же соотношения можно получить иначе. Функция $y$ и ее производные до восьмого порядка включительно, вычисленные из уравнений (5) и (4), в точке $x = 0$, $y = 0$ должны совпадать. Поэтому, диференцируя уравнение (5) восемь раз подряд и подставляя каждый раз

$$x = 0,\ y = 0,\ y^{\mathrm{I}} = 0,\ y^{\mathrm{II}} = 1,\ y^{\mathrm{III}} = 0,\ y^{\mathrm{IV}} = 0,\ y^{\mathrm{V}} = a_5,$$
$$y^{\mathrm{VI}} = a_6,\ y^{\mathrm{VII}} = a_7,$$

мы получим те же восемь соотношений:

$$a_{000} = 0, \quad a_{100} = 0, \quad 2a_{110} + a_{200} = 0, \quad a_{111} + 3a_{120} = 0,$$
$$a_{220} + 2a_{112} = 0, \quad a_5a_{200} + 30a_{122} = 0,$$
$$a_6a_{200} + 12a_5a_{120} + 30a_{222} = 0,$$
$$a_7a_{200} + 14a_6a_{120} + 42a_5a_{112} + 42a_5a_{220} = 0.$$

Если $a_5$ равно нулю, то коническое сечение имеет с кривой касание по крайней мере пятого порядка. Такие точки (sextactic point) являются исключением; если кривая во всех точках имеет касание пятого порядка с соприкасающимся коническим сечением, то это коническое сечение одно и то же во всех точках кривой и кривая совпадает с ним.

Для конического сечения нельзя подобрать одного инвариантного координатного треугольника, ибо, где бы мы ни выбирали точку $M_2$ на кривой, лишь бы $M_1M_2$ было касательной, уравнение (3) не изменится.

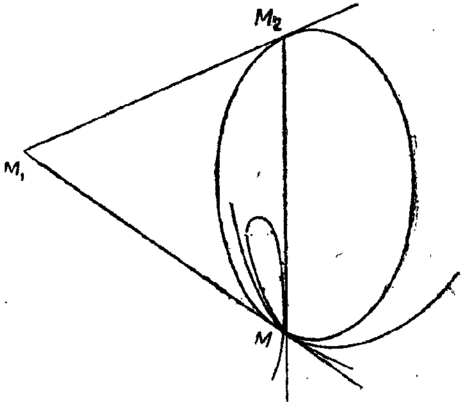
Исключая коническое сечение, мы можем считать $a_5$ отличным от нуля. Тогда мы можем положить

$$a_{110} = \lambda a_5, \quad a_{120} = \mu a_5,$$

где $\lambda$ и $\mu$ — произвольные коэфициенты; пучок кривых третьего порядка, имеющих с нашей кривой в точке $x=0$, $y=0$ касания седьмого порядка, определится уравнением:

$$\lambda\left\{a_5\left(3x^2-6y+\frac{a_5}{5}xy^2+\frac{a_6}{15}y^3\right)+\frac{a_7}{7}(2y^2-x^2y)\right\}+$$
$$+\mu\left\{a_5\left(6xy-3x^3-\frac{2}{5}a_5y^3\right)-a_6(2y^2-x^2y)\right\}=0. \qquad (6)$$

Меняя параметры $\lambda$ и $\mu$, получим различные кривые пучка. Непосредственно видно, что при $\lambda=0$ уравнение (6) не содержит первых степеней текущих координат; следовательно, кривая (6) имеет двойную точку в начале координат.




Черт. 3.

Приравнивая нулю члены второй степени

$$6a_5xy-2a_6y^2=0,$$

видим, что в двойной точке кривая имеет две действительные касательные:

$$y=0, \quad 3a_5x-a_6y=0.$$

Выберем теперь координатный треугольник так, чтобы сторона $MM_2$ служила второй касательной в двойной точке кривой третьего порядка (6). Тогда мы должны иметь:

$$a_6=0,$$

и уравнение кривой принимает вид:

$$y=\frac{1}{2}x^2+\frac{a_5}{5!}x^5+\frac{a_7}{7!}x^7+\ldots \qquad (7)$$

Положение вершин треугольника $MM_1M_2$ теперь вполне определено, но этого нельзя сказать о точке единиц $x_0=1$, $x_1=1$, $x_2=1$ координатного треугольника. Перемещая эту точку, мы можем умножить обе неоднородные координаты $x$ и $y$ на произвольные множители $\nu$ и $\rho$. Располагая этими множителями, мы можем сохранить в разложении (7) коэфициент при $x^2$ и привести к единице или вообще к любому числу коэфициент при $x^5$. Полагая

$$a_5=6, \quad a_7=18k,$$

мы получим каноническое разложение ординаты точки кривой вблизи любой не особой точки ее:

$$y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{20}x^5+\frac{k}{280}x^7+\ldots \qquad (8)$$



Соприкасающаяся кривая третьего порядка с узлом в начале имеет уравнение:

$$5x^3+4y^3-10xy=0. \qquad (9)$$

Все три точки перегиба ее лежат на прямой $M_1M_2$.

**Точка Альфана** [78] (Halphen). Пучок кривых третьего порядка всегда имеет $3\cdot3=9$ центров. Все кривые пучка (6) имеют восемь общих точек с кривой (M), а следовательно, и между собой в начале координат. Поэтому существует только одна общая точка кривых (6) помимо точки $M$. Эта точка Альфана; ее координаты:

$$x_1=490k, \quad x_2=175k^2, \quad x_0=685+25k^3.$$

Если $k=0$, то точка Альфана совпадает с точкой $M$; в этом случае кривая (9) имеет касание восьмого порядка с кривой (M).

После того как выбран инвариантный координатный треугольник $MM_1M_2$ кривой в точке $M$, все координаты разложения (8) можно рассматривать как инварианты кривой в данной ее точке. Абсцисса $x$ тоже инвариантно связана с кривой, и для бесконечно близких точек кривой ее можно рассматривать как инвариантный параметр на кривой, аналогичный длине дуги. Мы будем называть такой параметр проективной длиной дуги.

Все предыдущее исследование, которое в общем идет от Альфана, страдает тем недостатком, что не позволяет судить, сколько инвариантов можно дать произвольно и когда кривая будет определена; наконец, мы еще не имеем путей для вычисления этих инвариантов, если кривая дана в произвольной системе координат.

**§ 3. Компоненты движения координатного треугольника.** Пусть кривая (M) нам задана в проективных координатах относительно какой-то неподвижной системы координат, которая может быть, например, декартовой прямоугольной системой. Будем обозначать три однородных координаты точки $M_i$ одной буквой $\mathrm{M}_i$.

Если понадобится различить отдельные координаты, мы будем приписывать этой букве указатели наверху: $\mathrm{M}_i^1, \mathrm{M}_i^2, \mathrm{M}_i^3$.

Пусть $t$ будет то независимое переменное, от которого зависит перемещение точки $M$ по кривой. В дальнейшем мы будем считать $t=\tau$ проективной длиной дуги.

Три производных $\frac{d\mathrm{M}}{dt}$ можно рассматривать как координаты некоторой точки на плоскости; также $\frac{d\mathrm{M}_1}{dt}$ и $\frac{d\mathrm{M}_2}{dt}$; если обозначить буквами $a_i^k$ координаты этих точек относительно подвижной системы $(M, M_1, M_2)$, то по формулам преобразования координат получим:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\mathrm{M}}{dt}&=a_0^0\,\mathrm{M}+a_0^1\,\mathrm{M}_1+a_0^2\,\mathrm{M}_2,\\ \frac{d\mathrm{M}_1}{dt}&=a_1^0\,\mathrm{M}+a_1^1\,\mathrm{M}_1+a_1^2\,\mathrm{M}_2,\\ \frac{d\mathrm{M}_2}{dt}&=a_2^0\,\mathrm{M}+a_2^1\,\mathrm{M}_1+a_2^2\,\mathrm{M}_2.\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Как ни задавать коэфициенты $a_i^k$ функциями от $t$, система (10) всегда определяет кривую (M) и только одну, если не считать различными кривые, полученные проективным преобразованием.

Действительно, общий интеграл системы (10) как системы линейных однородных уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} M &= C_1X^1 + C_2X^2 + C_3X^3, \\ M_1 &= C_1X_1^1 + C_2X_1^2 + C_3X_1^3, \\ M_2 &= C_1X_2^1 + C_2X_2^2 + C_3X_2^3, \end{aligned}$$

где $X_k^i$ — частные решения системы и $C_k$ — произвольные постоянные.

Три линейно независимых решения

$$M^i = C_1^iX^1 + C_2^iX^2 + C_3^iX^3 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

очевидно, определяют кривую, полученную из кривой $(X^1, X^2, X^3)$ проективным преобразованием с коэфициентами $C_k^i$.

При нашем выборе координатного треугольника $MM_1M_2$ величины $a_i^k$ имеют вполне определенный вид.

Пусть точка $P$ с координатами $(x, y)$ — какая-нибудь неподвижная точка нашей кривой $(M)$. При изменении координатного треугольника $MM_1M_2$ координаты $(x, y)$ меняются, но координаты точки P по неподвижной системе

$$P = M + xM_1 + yM_2$$

могут только умножаться на общий множитель.

Следовательно:

$$\frac{d}{dt}(M + xM_1 + yM_2) = \lambda(M + xM_1 + yM_2), \tag{11}$$

где $\lambda$ — какая-то функция от $t$.

Пусть точка P лежит на нашей кривой.

Подставим в уравнение (11) вместо $y$ его разложение (8) и подсчитаем производную левой части, пользуясь формулами (10). Так как точки $M$, $M_1$, $M_2$ не лежат на одной прямой, то не может существовать линейной зависимости между координатами M, $M_1$, $M_2$, а следовательно, коэфициенты при M, $M_1$, $M_2$ в левой и правой частях уравнения (11) должны быть равны между собой.

Таким образом получаем три уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &a_0^0 + xa_1^0 + a_2^0\left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{k}{280}x^7 + \ldots\right] = \lambda, \\ &a_0^1 + \frac{dx}{dt} + xa_1^1 + a_2^1\left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{k}{280}x^7 + \ldots\right] = \lambda x, \\ &a_0^2 + \frac{dx}{dt}\left[x + \frac{1}{4}x^4 + \frac{k}{40}x^6 + \ldots\right] + xa_1^2 + \\ &\quad + a_2^2\left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{k}{280}x^7 + \ldots\right] = \\ &\quad = \lambda\left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{k}{280}x^7 + \ldots\right]. \end{aligned}\right\} \tag{11'}$$



Исключая $\lambda$ и $\frac{dx}{dt}$, получим:

$$\begin{aligned} &\left[a_0^1 + a_1^1x + a_2^1\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{k}{280}x^7 + \ldots\right)\right]\left(x + \frac{1}{4}x^4 + \frac{k}{40}x^6 + \ldots\right) - \\ &\quad - a_0^2 - a_1^2x - a_2^2\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{k}{280}x^7 + \ldots\right) = \\ &\quad = \left[x\left(x + \frac{1}{4}x^4 + \frac{k}{40}x^6 + \ldots\right) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{20}x^5 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{k}{280}x^7 - \ldots\right]\left[a_0^0 + xa_1^0 + a_2^0\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{k}{280}x^7 + \ldots\right)\right]. \end{aligned}$$

Это равенство является тождеством и относительно $x$, ибо можно взять любую точку на кривой (M), и относительно $t$, ибо можно взять любое положение треугольника $MM_1M_2$.

Сравнивая коэфициенты при одинаковых степенях $x$, имеем:

$$\begin{gathered} a_0^2 = 0, \quad a_0^1 = a_1^2, \quad 2a_1^1 = a_2^2 + a_0^0, \quad a_2^1 = a_1^0, \\ a_0^1 = a_2^0, \quad 5a_1^1 = a_2^2 + 4a_0^0, \quad ka_0^1 = 8a_1^0 - 7a_2^1, \end{gathered}$$

откуда

$$a_0^2 = 0, \quad a_0^0 = a_1^1 = a_2^2, \quad a_0^1 = a_2^0 = a_1^2 = a, \quad a_1^0 = a_2^1 = ka.$$

Сравнение коэфициентов при следующих степенях $x$ позволит вычислить коэфициенты $a_i$ в разложении (2).

Координаты M, $M_1$, $M_2$ однородные; мы можем все их умножить на любое число, и это число в разных точках $M$ может быть разное, т. е. мы можем умножить на любую функцию от $t$.

Условимся выбирать этот множитель так, чтобы определитель

$$(MM_1M_2) = \begin{vmatrix} M^1 & M_1^1 & M_2^1 \\ M^2 & M_1^2 & M_2^2 \\ M^3 & M_1^3 & M_2^3 \end{vmatrix}$$

всегда равнялся единице.

Диференцируя тождество

$$(MM_1M_2) = 1$$

по правилу диференцирования определителя, получим:

$$\left(\frac{dM}{dt}M_1M_2\right) + \left(M\frac{dM_1}{dt}M_2\right) + \left(MM_1\frac{dM_2}{dt}\right) = 0.$$

Подставляем сюда производные по формулам (10); каждый определитель разбивается на три по трем слагаемым одной строки, например:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dM}{dt}M_1M_2\right) &= \left(a_0^0M + a_0^1M_1 + a_0^2M_2,\ M_1,\ M_2\right) = \\ &= a_0^0(MM_1M_2) + a_0^1(M_1M_1M_2) + a_0^2(M_2MM_2) = a_0^0, \end{aligned}$$

ибо два последних члена равны нулю как определители с равными столбцами, а первый $(MM_1M_2)$ равен по условию единице. Совершая это преобразование над всеми тремя определителями, получим:

$$a_0^0 + a_1^1 + a_2^2 = 0.$$

Следовательно, все компоненты $a_i^l = 0$, и формулы (10) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{a}\frac{dM}{dt} &= M_1, \\ \frac{1}{a}\frac{dM_1}{dt} &= kM + M_2, \\ \frac{1}{a}\frac{dM_2}{dt} &= M + kM_1. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Нам осталось наложить условие, что параметр $t$ не произвольный параметр, а проективная длина дуги $\tau$.

Мы уже условились считать вблизи точки $M$ проективную дугу равной абсциссе точки $x$. Так как при перемещении точки $M$ в положительном направлении длина дуги всякой точки убывает, то и надо считать для $x = 0$

$$\frac{dx}{d\tau} = -1.$$

Подставляя $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = -\frac{d\tau}{dt}$ в равенстве (11′), немедленно имеем:

$$a = \frac{d\tau}{dt}.$$

Если $t = \tau$, то $a = 1$ и мы можем написать:

$$\frac{dM}{d\tau} = M_1, \quad \frac{dM_1}{d\tau} = kM + M_2, \quad \frac{dM_2}{d\tau} = M + kM_1. \tag{13}$$

Коэфициент $k$ можно назвать проективной кривизной кривой (M).

**§ 4. Проективные инварианты кривой.** Мы видим, что для вычисления проективной дуги и кривизны надо знать только коэфициент $a$ в формулах (12).

Составим определитель:

$$\left(M \frac{dM}{dt} \frac{d^2M}{dt^2}\right);$$

по формулам (12) мы немедленно получим:

$$\left(M \frac{dM}{dt} \frac{d^2M}{dt^2}\right) = a^3 (MM_1M_2) = a^3.$$

Следовательно:

$$d\tau = \sqrt[3]{\left(M \frac{dM}{dt} \frac{d^2M}{dt^2}\right)}\, dt.$$



Совершенно так же, если составить определитель $\left(M \frac{d^2M}{d\tau^2} \frac{d^3M}{d\tau^3}\right)$, то получим единственный инвариант — проективную кривизну $k$:

$$\left(M \frac{d^2M}{d\tau^2} \frac{d^3M}{d\tau^3}\right) = \left(M, kM + M_2, \frac{dk}{d\tau} M + 2kM_1 + M\right) =$$

$$= -2k(MM_1M_2) = -2k.$$

Следовательно:

$$k = -\frac{1}{2}\left(M \frac{d^2M}{d\tau^2} \frac{d^3M}{d\tau^3}\right),$$

но в обоих случаях координаты M нормированы так, что $(MM_1M_2) = 1$. Поэтому обе формулы в сущности определяют выбор общего множителя у четырех координат M.

Обратно, если задана проективная кривизна как функция проективной длины дуги, то кривая определена до проективного преобразования.

Это непосредственно следует из того, что система (10) определяет кривую до проективного преобразования.

Пример 1. Проективная кривизна равна нулю.

Система (13) принимает вид:

$$\frac{dM}{d\tau} = M_1, \quad \frac{dM_1}{d\tau} = M_2, \quad \frac{dM_2}{d\tau} = M,$$

откуда

$$\frac{d^3M}{d\tau^3} = M$$

и общий интеграл

$$M = C_1 e^{\tau} + e^{-\frac{\tau}{2}}\left(C_2 \cos\frac{\tau\sqrt{3}}{2} + C_3 \sin\frac{\tau\sqrt{3}}{2}\right).$$

Следовательно, в однородных координатах уравнения кривой можно записать:

$$X_0 = e^{\tau}, \quad X_1 = e^{-\frac{\tau}{2}} \cos\frac{\tau\sqrt{3}}{2}, \quad X_2 = e^{-\frac{\tau}{2}} \sin\frac{\tau\sqrt{3}}{2},$$

в неоднородных:

$$X = e^{-\frac{3}{2}\tau} \cos\frac{\tau\sqrt{3}}{2}, \quad Y = e^{-\frac{3}{2}\tau} \sin\frac{\tau\sqrt{3}}{2}.$$

Будем рассматривать $X$, $Y$ как прямоугольные декартовы координаты и перейдем к полярным координатам $\rho$ и $\varphi$. Мы получим:

$$\rho = e^{-\frac{3}{2}\tau}, \quad \varphi = \frac{\tau\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно:

$$\rho = e^{-\varphi\sqrt{3}}. \tag{a}$$

Все кривые с проективной кривизной, равной нулю, суть проективные преобразования этой кривой, подобной логарифмической спирали.

**Пример 2.** Проективная кривизна постоянна:

$$k = \text{const}.$$

Полагая

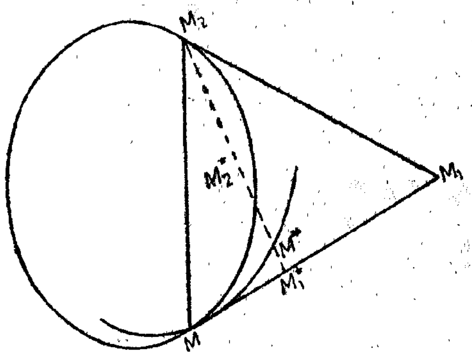
$$M = e^{r},$$

получим характеристическое уравнение:

$$r^3 - 2kr - 1 = 0.$$

Если $k < \frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$, то один корень действительный, два мнимых и кривая того же типа, как кривая (a) (аналогична логарифмической спирали).

Если $k > \frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$, то все три корня действительны.




Черт. 4.

Уравнения кривой в неоднородных координатах:

$$Y = X^{\frac{r_1 - r_2}{r_1 - r_3}},$$

где $r_1$ — положительный, $r_2$ и $r_3$ — отрицательные корни характеристического уравнения. Иначе:

$$Y = X^n,$$

если положить

$$k = \frac{3n^2 - n + 2}{2(n-2)^2}.$$

Например, для $k = 13$ получим кубическую параболу.

Наконец, если $k = \frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$, то корни равные и уравнение кривой

$$Y = X \ln X.$$

**§ 5. Геометрическое значение проективной дуги** [79]. Возьмем на кривой (M) точку $M^*$, близкую к точке $M$; пусть луч $M_2M^*$ пересекает соприкасающиеся конические сечения в точке $M_2^*$ и касательную в точке $M_1^*$.

Подсчитываем сложное отношение четырех точек $(M^*M_2M_2^*M_1^*)$ на луче $M_2M^*$. Так как в неоднородных координатах ордината точки $M_2$ равна бесконечности, а ордината $M_1^*$ как точки на оси $MM_1$ равна нулю, то

$$(M^*M_2M_2^*M_1^*) = \frac{y - y_2}{y},$$

где

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{k}{280}x^7 + \ldots$$

— ордината точки $M^*$, лежащей на кривой (M), и

$$y_2 = \frac{1}{2}x^2$$

— ордината точки $M_2^*$ с той же абсциссой, лежащей на соприкасающемся коническом сечении.



Подставляя эти значения, получим до бесконечно малых третьего порядка включительно:

$$(M^*M_2M_2^*M_1^*) = \frac{\frac{1}{20}x^5 + \frac{k}{280}x^7 + \ldots}{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5 + \ldots} = \frac{1}{10}x^3.$$

Так как вблизи точки M проективная дуга совпадает с абсциссой, то мы можем положить

$$x = -d\tau$$

и, следовательно:

$$d\tau = -\sqrt[3]{10(M^*M_2M_2^*M_1^*)}.$$

Заметим, что сложное отношение не изменится, если точку $M_2$ заменить какой-либо другой точкой на прямой $M_2M^*$, лишь бы она была на конечном расстоянии от точки $M^*$, ибо три координаты $y$, $y_1$, $y_2$ бесконечно малы и отношение вычисляется с точностью до бесконечно малых третьего порядка $x^3$. Совершенно так же можно заметить, что мы пользуемся только членами пятого порядка в разложении ординаты кривой. Поэтому упрощение уравнения кривой, связанное с соприкасающейся кривой третьего порядка, здесь не имеет значения, и третью вершину координатного треугольника $M_2$ можно брать в любой точке соприкасающегося конического сечения.

Таким образом приходим к заключению, что

$$d\tau = -\sqrt[3]{10(M^*BM_2^*M_1^*)}, \tag{14}$$

где $B$ — любая точка плоскости, не лежащая на касательной и не бесконечно близкая к $M$, а $M_2^*$ и $M_1^*$ — точки пересечения луча $M^*B$ с коническим сечением и касательной к кривой.

Мы видим, что проективная длина любой дуги кривой второго порядка равна нулю; к ней это понятие не приложимо.

Формула (14) позволяет легко вычислить проективную длину дуги кривой, заданной хотя бы в декартовых координатах:

$$Y = f(X).$$

Выбирая точку $B$ в бесконечности так, чтобы $PB$ было параллельно оси $Y$, имеем до бесконечно малых третьего порядка:

$$d\tau^3 = -10(M^*BM_2^*M_1^*) = -10\frac{Y - Y_2}{Y - Y_1},$$

где $Y = f(X)$ — ордината точки $M^*$, лежащей на заданной кривой,

$$Y_2 = g(X)$$

— точки $M_2$ соприкасающегося конического сечения и

$$Y_1 = f(X_0) + f'(X_0)(X - X_0)$$

— точки $M_1$ на касательной; $X_0$ — абсцисса точки $M$.

Разлагая $Y-Y_2$ и $Y-Y_1$ по степеням $X-X_0=dX$ и помня, что коническое сечение имеет касание четвертого порядка с кривой, следовательно, первые четыре производные в разложеиии $f(X)$ и $g(X)$ в точке $X=X_0$ равны между собой, получим:

$$d\tau^3=-10\,\frac{f(X)-g(X)}{f(X)-f(X_0)-f'(X_0)\,dX}=-\frac{10}{5!}\,\frac{f^{(V)}(X_0)-g^{(V)}(X_0)}{\frac{1}{2}f''(X_0)\,dX^3}\,dX^5=$$

$$=-\frac{1}{6}\,\frac{f^{(V)}(X_0)-g^{(V)}(X_0)}{f''(X_0)}\,dX^3. \tag{15}$$

Но для конического сечения имеет место диференциальное уравнение:

$$\left[(g'')^{-\frac{2}{3}}\right]'''=0. \tag{16}$$

Разлагая в ряд разиость

$$[f''(X)]^{-\frac{2}{3}}-[g''(X)]^{-\frac{2}{3}}=[f''(X_0)]^{-\frac{2}{3}}-[g''(X_0)]^{-\frac{2}{3}}-$$
$$-\frac{2}{3}\left\{[f''(X_0)]^{-\frac{5}{3}}f'''(X_0)-[g''(X_0)]^{-\frac{5}{3}}g'''(X_0)\right\}(X-X_0)+\ldots$$

и полагая

$$f(X_0)=g(X_0),\ f'(X_0)=g'(X_0)\ldots f^{(IV)}(X_0)=g^{(IV)}(X_0),$$

имеем:

$$[f''(X)]^{-\frac{2}{3}}-[g''(X)]^{-\frac{2}{3}}=$$
$$=-\frac{2}{3}\,[f''(X_0)]^{-\frac{5}{3}}\left\{f^{(V)}(X_0)-g^{(V)}(X_0)\right\}\frac{(X-X_0)^3}{6}+\ldots$$

Диференцируя три раза по $X$ и полагая $X=X_0$, получим:

$$\frac{d^3}{dX^3}\,[f''(X_0)]^{-\frac{2}{3}}-\frac{d^3}{dX^3}\,[g''(X_0)]^{-\frac{2}{3}}=$$
$$=-\frac{2}{3}\,[f''(X_0)]^{-\frac{5}{3}}\left\{f^{(V)}(X_0)-g^{(V)}(X_0)\right\}.$$

Следовательно, в силу (16)

$$f^{(V)}(X_0)-g^{(V)}(X_0)=-\frac{3}{2}\,\frac{\left([f''(X_0)]^{-\frac{2}{3}}\right)'''}{[f''(X_0)]^{-\frac{5}{3}}},$$

и в силу равенства (15)

$$d\tau^3=\frac{1}{4}\,\frac{\left(f''^{-\frac{2}{3}}\right)'''}{f''^{-\frac{2}{3}}}\,dx^3.$$



**§ 6. Геометрическое значение проективной кривизны.** Прямую $MM_2$ естественно назвать проективной нормалью. Будем искать огибающую проективных нормалей.

Если координаты $\mathrm{P}=\mathrm{M}+\rho\mathrm{M}_2$ определяют точку касания нормали с ее огибающей, то касательная к кривой (P) должна совпадать с нормалью $MM_2$, следовательно, при изменении $\tau$ точка $P$ должна двигаться по нормали и точка — производная $\frac{dP}{d\tau}$ лежит на $MM_2$:

$$\frac{d\mathrm{P}}{d\tau}=A\mathrm{M}+B\mathrm{M}_2;$$

$A$ и $B$ — функции от $\tau$, одни и те же для всех трех координат M.

Диференцируя P с помощью формул (13) и полагая равным нулю коэфициент при $\mathrm{M}_1$, получим

$$1+k\rho=0,$$

т. е.

$$\rho=-\frac{1}{k}.$$

Точку $P$ естественно назвать центром проективной кривизны, а $\rho$ — радиусом кривизны. Мы видим, что радиус кривизны — обратная величина кривизны. Центр кривизны лежит внутри отрезка $MM_2$, если кривизна отрицательна.

Можно получить геометрический смысл кривизны вполне аналогично тому, как это было сделано для проективной дуги.

Возьмем на кривой точку $M^*$ бесконечно близко к точке $M$ и проведем прямую $M_2M^*$, но будем рассматривать ее пересечение с соприкасающейся кривой третьего порядка (касание шестого порядка с кривой) и с соприкасающимся коническим сечением. Пусть первая точка есть $M_3^*$ и вторая $M_2^*$; обозначая их ординаты буквами $Y_3$ и $Y_2$, получим попрежнему:

$$(M^*M_2M_3^*M_2^*)=\frac{Y-Y_3}{Y-Y_2}.$$

Внося сюда [1])

$$Y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{20}x^5+\frac{k}{280}x^7+\ldots,$$

$$Y_3=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{20}x^5+\frac{3}{200}x^7+\ldots,$$

$$Y_2=\frac{1}{2}x^2,$$

получим до бесконечно малых второго порядка:

$$\frac{Y-Y_3}{Y-Y_2}=\frac{k}{14}x^2.$$

---

[1]) Разложение $Y_3$ получится всего быстрее, если в уравнение

$$5x^3+4y^3-10xy=0$$

ввести

$$y_3=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$$

и сравнить коэфициенты при одинаковых степенях $x$.

Следовательно,

$$k=\frac{14}{\sqrt[3]{100}}\lim\frac{(M^*M_2M_3^*M_2^*)}{(M^*M_2M_2^*M_1^*)^{\frac{2}{3}}}.$$

Точку $M_2$ попрежнему можно заменить произвольной точкой плоскости.

За образующий элемент плоскости можно одинаково брать точку или прямую. В первом случае кривая описывается точкой, во втором — она огибается своей касательной.

Мы можем остановиться на том же самом координатном треугольнике $MM_1M_2$. Обозначим малыми буквами линейные координаты сторон треугольника:

$$\mathrm{m}=(\mathrm{MM}_1),\quad \mathrm{m}_1=(\mathrm{MM}_2),\quad \mathrm{m}_2=(\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2).$$

Каждый раз это — три минора второго порядка матрицы, составленной из однородных координат двух точек прямой.

Например первое равенство означает

$$\mathrm{m}^1=\begin{vmatrix}\mathrm{M}^2 & \mathrm{M}_1^2\\ \mathrm{M}^3 & \mathrm{M}_1^3\end{vmatrix},\quad \mathrm{m}^2=\begin{vmatrix}\mathrm{M}^3 & \mathrm{M}_1^3\\ \mathrm{M}^1 & \mathrm{M}_1^1\end{vmatrix},\quad \mathrm{m}^3=\begin{vmatrix}\mathrm{M}^1 & \mathrm{M}_1^1\\ \mathrm{M}^2 & \mathrm{M}_1^2\end{vmatrix}.$$

Диференцируя как определитель, получим

$$\frac{d\mathrm{m}}{d\tau}=\left(\frac{d\mathrm{M}}{d\tau}\mathrm{M}_1\right)+\left(\mathrm{M}\frac{d\mathrm{M}_1}{d\tau}\right)$$

или, пользуясь формулами (13),

$$\frac{d\mathrm{m}}{d\tau}=(\mathrm{MM}_2)=\mathrm{m}_1.$$

Совершенно так же

$$\frac{d\mathrm{m}_1}{d\tau}=k\mathrm{m}+\mathrm{m}_2,\qquad \frac{d\mathrm{m}_2}{d\tau}=-\mathrm{m}+k\mathrm{m}_1.$$

## Приложение II

## КРИВЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

**§ 1. Компоненты движения координатного тетраэдра.** Пусть четыре точки $M$, $M_1$, $M_2$, $M_3$ как угодно двигаются в пространстве. Четыре однородные координаты точки $M_i$ относительно любой неподвижной системы координат (хотя бы декартовой прямоугольной) мы будем обозначать буквой $\mathrm{M}_i$. Если понадобится писать отдельные координаты, то мы будем приписывать этой букве указатели наверху: $\mathrm{M}_i^1$, $\mathrm{M}_i^2$, $\mathrm{M}_i^3$, $\mathrm{M}_i^4$.

Движение известно, если даны 16 функций параметра:

$$\mathrm{M}_i=f_i(t).$$



Для каждого значения параметра $t$ четыре точки $M$, $M_1$, $M_2$, $M_3$ определяют тетраэдр, который можно принять за координатный тетраэдр подвижной системы координат. При изменении параметра $t$ тетраэдр деформируется. Это преобразование тетраэдра мы будем называть движением.

Производные $\frac{d\mathrm{M}_i}{dt}$ можно рассматривать как координаты относительно неподвижной системы координат новых точек $\frac{d\mathrm{M}_i}{dt}$. Если обозначить буквами $a_i^k$ координаты этих точек относительно подвижной системы $(M, M_1, M_2, M_3)$, то по правилу преобразования координат сейчас же напишем основные формулы:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\mathrm{M}}{dt}&=a_0^0\mathrm{M}+a_0^1\mathrm{M}_1+a_0^2\mathrm{M}_2+a_0^3\mathrm{M}_3,\\ \frac{d\mathrm{M}_1}{dt}&=a_1^0\mathrm{M}+a_1^1\mathrm{M}_1+a_1^2\mathrm{M}_2+a_1^3\mathrm{M}_3,\\ \frac{d\mathrm{M}_2}{dt}&=a_2^0\mathrm{M}+a_2^1\mathrm{M}_1+a_2^2\mathrm{M}_2+a_2^3\mathrm{M}_3,\\ \frac{d\mathrm{M}_3}{dt}&=a_3^0\mathrm{M}+a_3^1\mathrm{M}_1+a_3^2\mathrm{M}_2+a_3^3\mathrm{M}_3.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Если движение точек $M_i$ дано, то функции $a_i^k$ известны; обратно, *16 функций $a_i^k$ определяют движение тетраэдра вплоть до проективного преобразования пространства.*

Эта теорема доказывается так же, как аналогичная теорема в геометрии на плоскости.

При изменении параметра $t$ каждая вершина тетраэдра, например точка $M$, описывает кривую.

Следовательно, *16 компонент движения вершин тетраэдра $a_i^k$ определяют кривую* (M) *вплоть до проективного преобразования пространства.*

С каждой кривой (M) связано не одно семейство тетраэдров $(M, M_1, M_2, M_3)$, ибо, очевидно, при неподвижной точке $M$ можно как угодно перемещать точки $M_1$, $M_2$, $M_3$. Поставим себе задачей подобрать к данной кривой (M) семейство тетраэдров, наиболее хорошо с ней связанное. Прежде всего естественно принять за первое ребро тетраэдра $MM_1$ касательную к кривой (M).

Мы знаем, что касательная к кривой (M) определяется точкой $\frac{d\mathrm{M}}{dt}$.

Если касательной служит прямая $MM_1$, то точка $\frac{d\mathrm{M}}{dt}$ лежит на прямой $MM_1$ и, следовательно,

$$a_0^2=0,\quad a_0^3=0.$$

Затем естественно принять за первую грань тетраэдра $MM_1M_2$ соприкасающуюся плоскость кривой (M).

Соприкасающаяся плоскость есть предельное положение плоскости, проходящей через три точки кривой $M$, $M^*$, $M^{**}$, когда эти точки в пределе совпадают.

Выберем точки $M$, $M^*$, $M^{**}$ так, чтобы они соответствовали значению параметра $t$, $t+h$, $t+2h$ [1]).

Если плоскость содержит точки $M$, $M^*$, $M^{**}$, то она содержит всякую точку $P$, координаты которой получаются линейной комбинацией координат $\mathrm{M}$, $\mathrm{M}^*$, $\mathrm{M}^{**}$:

$$\mathrm{P}=a\mathrm{M}+b\mathrm{M}^*+c\mathrm{M}^{**},$$

следовательно, содержит точки

$$\frac{\mathrm{M}^*-\mathrm{M}}{h}=\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

и

$$\frac{\mathrm{M}^{**}-2\mathrm{M}^*+\mathrm{M}}{h^2}=\frac{f(t+2h)-2f(t+h)+f(t)}{h^2},$$

где $\mathrm{M}=f(t)$ — параметрические уравнения кривой.

В пределе плоскость будет содержать точки:

$$\lim_{h=0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=f'(t)=\frac{d\mathrm{M}}{dt},$$

$$\lim_{h=0}\frac{f(t+2h)-2f(t+h)+f(t)}{h^2}=f''(t)=\frac{d^2\mathrm{M}}{dt^2}.$$

Итак, если $MM_1M_2$ есть соприкасающаяся плоскость кривой, то она содержит точки $\frac{dM}{dt}$ и $\frac{d^2M}{dt^2}$.

Подсчитывая вторую производную $\frac{d^2\mathrm{M}}{dt^2}$ по формулам (1), получим

$$\frac{d^2\mathrm{M}}{dt^2}=\left[\frac{da_0^0}{dt}+(a_0^0)^2+a_0^1a_1^0\right]\mathrm{M}+\left[\frac{da_0^1}{dt}+a_0^0a_0^1+a_0^1a_1^0\right]\mathrm{M}_1+$$
$$+a_0^1a_1^2\mathrm{M}_2+a_0^1a_1^3\mathrm{M}_3.$$

Если эта точка лежит в плоскости $MM_1M_2$, то коэфициент при $\mathrm{M}_3$ должен быть равен нулю:

$$a_0^1a_1^3=0.$$

Если первый множитель равен нулю:

$$a_0^1=0,$$

то первая строчка таблицы (1) примет вид:

$$\frac{d\mathrm{M}}{dt}=a_0^0\mathrm{M}.$$

Если это равенство имеет место для всех точек кривой, то, интегрируя, найдем

$$\mathrm{M}=Ce^{\int a_0^0dt},$$

[1]) Ограничение в выборе точек несущественно и сделано только для простоты вывода.



т. е. координаты точки $M$ с точностью до общего множителя $e^{\int a_0^0dt}$ постоянны; значит, при изменении параметра $t$ точка остается на месте.

Следовательно, $a_0^1$ может обращаться в нуль только в отдельных точках; такие точки (точки возврата) мы в дальнейшем будем исключать.

Итак, при сделанных предположениях о расположении тетраэдра

$$a_1^3=0.$$

**§ 2. Выбор нормального тетраэдра.** Можно было бы и дальше итти в упрощении таблицы (1) таким же геометрическим путем, как это, например, было проделано по отношению к плоским кривым, но теперь это было бы несколько сложнее. Поэтому мы изберем другой путь[80]: мы выберем тетраэдр $(M,M_1,M_2,M_3)$ так, чтобы таблица (1) приняла наиболее простой вид, и затем выясним геометрический смысл выбранного расположения точек $M_i$.

Если параметр $t$ не меняется, т. е. точка $M$ остается на месте, то все же координаты точек $M_i$ могут меняться и тетраэдр $(M,M_1,M_2,M_3)$ — деформироваться, именно: точку $M_1$ можно перемещать по прямой $MM_1$, точку $M_2$ — по плоскости $MM_1M_2$, точку $M_3$ — как угодно в пространстве и, наконец, каждую четверку однородных координат $M$, $M_1$, $M_2$ или $M_3$ можно умножать на любой множитель (хотя бы и функцию от $t$).

Очевидно, при неподвижной точке $M$ расположение тетраэдра $(M,M_1,M_2,M_3)$ зависит от $1+2+3+4=10$ параметров.

Пусть $\alpha$ — любой из этих параметров; тогда, очевидно, в силу сделанных предположений

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial\alpha}&=e_0^0\mathrm{M},\\
\frac{\partial\mathrm{M}_1}{\partial\alpha}&=e_1^0\mathrm{M}+e_1^1\mathrm{M}_1,\\
\frac{\partial\mathrm{M}_2}{\partial\alpha}&=e_2^0\mathrm{M}+e_2^1\mathrm{M}_1+e_2^2\mathrm{M}_2,\\
\frac{\partial\mathrm{M}_3}{\partial\alpha}&=e_3^0\mathrm{M}+e_3^1\mathrm{M}_1+e_3^2\mathrm{M}_2+e_3^3\mathrm{M}_3.
\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Здесь коэфициенты $e_i^k$ — функции от различных параметров $\alpha$ и от параметра $t$; так же надо теперь смотреть и на компоненты $a_i^k$ в таблице (1).

Итак, четыре функции $\mathrm{M}$, $\mathrm{M}_1$, $\mathrm{M}_2$, $\mathrm{M}_3$ удовлетворяют системе уравнений (1) и (2). Так как число уравнений превышает число неизвестных функций, то надо поставить вопрос о совместности системы.

Подсчитывая вторые производные $\frac{\partial^2\mathrm{M}}{\partial t\,\partial\alpha}$ из уравнений (1) и (2) и сравнивая их, мы придем к уравнениям вида

$$A\mathrm{M}+A_1\mathrm{M}_1+A_2\mathrm{M}_2+A_3\mathrm{M}_3=0.$$

Так как по условию четыре точки $M$, $M_1$, $M_2$, $M_3$ не лежат в одной плоскости, то такое равенство невозможно и, следовательно, все коэфициенты $A_i$ равны нулю.

Таким образом мы придем к 16 уравнениям, которые можно записать в виде

$$\frac{\partial a_i^k}{\partial \alpha}-\frac{\partial e_i^k}{\partial t}=\sum_{j=0,1,2,3}\left(e_i^j a_j^k-a_i^j e_j^k\right)\quad (i,\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{3}$$

Такие же уравнения можно написать для любой пары переменных

$$t,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ \alpha_6,\ \alpha_7,\ \alpha_8,\ \alpha_9,\ \alpha_{10}.$$

Заметим, что правая часть каждого уравнения составляется достаточно просто: члены $i$-й строки таблицы $e_i^k$ попарно умножаются на члены $k$-го столбца таблицы $a_i^k$, и наоборот. Приводим еще раз эти две таблицы:

| | M | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ |
|---|---|---|---|---|
| M | $a_0^0$ | $a_0^1$ | 0 | 0 |
| $M_1$ | $a_1^0$ | $a_1^1$ | $a_1^2$ | 0 |
| $M_2$ | $a_2^0$ | $a_2^1$ | $a_2^2$ | $a_2^3$ |
| $M_3$ | $a_3^0$ | $a_3^1$ | $a_3^2$ | $a_3^3$ |

| | M | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ |
|---|---|---|---|---|
| M | $e_0^0$ | 0 | 0 | 0 |
| $M_1$ | $e_1^0$ | $e_1^1$ | 0 | 0 |
| $M_2$ | $e_2^0$ | $e_2^1$ | $e_2^2$ | 0 |
| $M_3$ | $e_3^0$ | $e_3^1$ | $e_3^2$ | $e_3^3$ |

Нам надо выбрать нормальный тетраэдр в каждой точке кривой. Так как тетраэдр меняется с изменением параметров $\alpha_i$ и для каждой группы значений $\alpha_i$ в данной точке $t$ имеется свой сопровождающий тетраэдр, то задача выбора нормального тетраэдра сводится к подбору значений $\alpha_i$ (вообще как функции от $t$) так, чтобы движения тетраэдра были наиболее хорошо связаны с кривой, т. е. чтобы таблица функций $a_i^k$ приняла наиболее простой вид.

Заметим еще, что компоненты $a_i^k$ зависят, конечно, от выбора параметра $t$ на кривой. Замена параметра $t$ на $t_1=\varphi(t)$, очевидно, разделит все компоненты на производную $\varphi'(t)$. Поэтому мы будем приводить к простейшему виду не сами компоненты $a_i^k$, а их отношения, которые не зависят от выбора параметра $t$.

Для этого надо, очевидно, проинтегрировать систему (3) и выбрать такие значения $\alpha_i$ (как функции от $t$), чтобы отношения функций $a_i^k$ обращались по возможности или в нуль или в единицу, независимо от выбора произвольных функций интеграции, которые определяют кривую.

Чтобы облегчить нашу задачу, мы будем выбирать в системе (3) такие уравнения, интеграция которых не зависит от других уравнений системы. При этом за параметр $\alpha$ можно принимать поочереди один из



параметров $\alpha_j$ (или считать, что они все являются функциями от $\alpha$) так, что отдельные компоненты $e_i^k$ можно полагать в этих уравнениях равными нулю, а все остальные отличными от нуля.

Заметим прежде всего, что три из уравнений системы (3), именно те, которые содержат производные от $a_0^2, a_0^3$ и $a_1^3$, удовлетворены тождественно.

Запишем теперь те уравнения, которые содержат под знаком производной известные уже коэфициенты $e_0^1=0$, $e_1^2=0$, $e_2^3=0$:

$$\frac{\partial a_0^1}{\partial \alpha}=a_0^1\left(e_0^0-e_1^1\right);\quad \frac{\partial a_1^2}{\partial \alpha}=a_1^2\left(e_1^1-e_2^2\right);\quad \frac{\partial a_2^3}{\partial \alpha}=a_2^3\left(e_2^2-e_3^3\right). \tag{4}$$

Мы видели, что компонента $a_0^1$ может обращаться в нуль только в отдельных точках (точки возврата), которые мы условились исключать. Обозначим

$$a_0^1=a,\quad a_1^2=\lambda a;$$

мы получим для $\lambda$ уравнение

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}=\lambda\left(2e_1^1-e_0^0-e_2^2\right). \tag{a}$$

Уравнение это удовлетворено тождественно, если $\lambda=0$, т. е. если

$$a_1^2=0.$$

Если это имеет место во всякой точке кривой, то первые два уравнения таблицы (1)

$$\frac{dM}{dt}=a_0^0 M+a_0^1 M_1,$$
$$\frac{dM_1}{dt}=a_1^0 M+a_1^1 M_1$$

дадут общий интеграл

$$M=C_1\varphi_1+C_2\varphi_2,$$
$$M_1=C_1\psi_1+C_2\psi_2,$$

где $\varphi_i$, $\psi_i$ — система линейно независимых решений. Эти формулы показывают, что точка $M$ все время лежит на прямой, соединяющей точки $C_1$ и $C_2$. Линия ($M$) есть прямая.

Отдельные точки, где $a_1^2=0$, суть точки перегиба (точки со стационарной касательной). Оставляя их в стороне, мы можем предположить, что $a_1^2$ не равно нулю.

Как легко видеть, таблица $e_i^k$ содержит 10 неравных нулю членов $e_i^k$, т. е. ровно столько, сколько независимых параметров определяет при неподвижной точке $M$ положение тетраэдра $(M, M_1, M_2, M_3)$. Отсюда следует, что для произвольного параметра $\alpha$ все не равные нулю $e_i^k$ надо считать независимыми между собой, и для выбранного параметра $\alpha$ мы можем считать $2e_1^1-e_0^0-e_2^2$ не равным тождественно нулю.

Следовательно, какова бы ни была кривая (M) (кроме прямой), мы должны иметь

$$\ln\lambda = \int_{\alpha_0}^{\alpha} (2e_1^1 - e_0^0 - e_2^2)\, d\alpha.$$

Здесь верхний предел $\alpha$ — выбранный нами параметр, которому можно дать любое значение. Нижний предел — вообще некоторая функция от $t$ и от других $\alpha_j$, которая зависит от рассматриваемой кривой (M), а также от того семейства тетраэдров, которое мы ей присоединяем.

Положим теперь новое ограничение на свободу выбора тетраэдра $(M, M_1, M_2, M_3)$; положим наш параметр $\alpha$ равным $\alpha_0$, т. е. будем считать

$$\ln\lambda = 0, \quad \lambda = 1$$

и, значит,

$$a_1^2 = a. \tag{5a}$$

Мы можем представлять дело так, что один из параметров, например $\alpha_{10}$, таким образом фиксирован, а все остальные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_9$ свободны. Однако при всех их изменениях $\lambda$ остается равным единице, и, следовательно, для всякого $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_9$ уравнение (a) даст

$$2e_1^1 = e_0^0 + e_2^2. \tag{6a}$$

Как и следовало ожидать, тетраэдр обладает теперь 9 степенями свободы преобразования (при неподвижной точке $M$), и таблица $e_i^k$ содержит 9 независимых функций.

Пусть $\alpha$ — один из 9 оставшихся свободных параметров. Уравнения (3) для нового параметра $\alpha$ сохраняют свою силу, но при условии, что $e_i^k$ связаны уравнением (6a); и мы попрежнему получим уравнения (4).

Полагая теперь

$$a_2^3 = \lambda_1 a,$$

найдем

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial\alpha} = \lambda_1(-e_0^0 + e_1^1 + e_2^2 - e_3^3). \tag{b}$$

Если $\lambda_1 = 0$, т. е.

$$a_2^3 = 0,$$

то первые три уравнения (1) совпадут с уравнениями таблицы (1) приложения I. Это показывает, что кривая (M) при этом условии — плоская кривая. Естественно, что этот случай мы теперь оставим в стороне и будем считать исключенными те отдельные точки (точки со стационарной соприкасающейся плоскостью), где $a_2^3$ обращается в нуль.

Если $\lambda_1$ не нуль и параметр $\alpha$ выбран так, что $-e_0^0 + e_1^1 + e_2^2 - e_3^3$ не равно нулю, то для всякой кривой (M)

$$\ln\lambda_1 = \int_{\alpha_0}^{\alpha} (-e_0^0 + e_1^1 + e_2^2 - e_3^3)\, d\alpha,$$



где $\alpha_0$ — некоторая функция от $t$ и других параметров $\alpha_j$, определяемая выбором кривой (M) и связанных с ней тетраэдров. Если мы положим $\alpha = \alpha_0$, то получим

$$\lambda_1 = 1, \quad a_2^3 = a. \tag{5b}$$

Будем считать, что мы таким образом определим $\alpha_9$; все остальные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8$ могут меняться произвольно, но при этом

$$e_0^0 + e_3^3 = e_1^1 + e_2^2,$$

как это сейчас же следует из (b) в силу $\lambda_i = 1$. (6b)

Условимся теперь нормировать координаты точек $M$, $M_1$, $M_2$, $M_3$ так, чтобы определитель четвертого порядка, составленный из 16 однородных координат их, был равен единице.

Выписывая только одну строчку определителя, мы имеем

$$(MM_1M_2M_3) = 1.$$

Диференцируя по правилу диференцирования определителя, получим

$$\left(\frac{dM}{dt} M_1M_2M_3\right) + \left(M \frac{dM_1}{dt} M_2M_3\right) + \left(MM_1 \frac{dM_2}{dt} M_3\right) + \left(MM_1M_2 \frac{dM_3}{dt}\right) = 0.$$

Если здесь заменить производные $\frac{dM_i}{dt}$ по формулам таблицы (1), разложить каждый определитель на сумму определителей сообразно числу слагаемых, на которые распадается $\frac{dM_i}{dt}$ по формулам (1), и выбросить те определители, которые обращаются в нуль в силу равенства двух столбцов, то получим

$$\left(\frac{dM}{dt} M_1M_2M_3\right) = (a_0^0M + a_0^1M_1,\ M_1,\ M_2,\ M_3) = a_0^0(MM_1M_2M_3) = a_0^0$$

$$\left(M \frac{dM_1}{dt} M_2M_3\right) = a_1^1, \quad \left(MM_1 \frac{dM_2}{dt} M_3\right) = a_2^2, \quad \left(MM_1M_2 \frac{dM_3}{dt}\right) = a_3^3$$

и, следовательно,

$$a_0^0 + a_1^1 + a_2^2 + a_3^3 = 0. \tag{5c}$$

Совершенно так же, если продиференцировать по любому параметру $\alpha$, получим

$$e_0^0 + e_1^1 + e_2^2 + e_3^3 = 0. \tag{6c}$$

Уравнения (6a, b, c) дадут, если обозначить $e_1^1$ буквой $\gamma$,

$$e_0^0 = 3\gamma, \quad e_1^1 = \gamma, \quad e_2^2 = -\gamma, \quad e_3^3 = -3\gamma, \tag{6c'}$$

и наши две таблицы примут вид:

| | M | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ |
|---|---|---|---|---|
| M | $a_0^0$ | $a$ | 0 | 0 |
| $M_1$ | $a_1^0$ | $a_1^1$ | $a$ | 0 |
| $M_2$ | $a_2^0$ | $a_2^1$ | $a_2^2$ | $a$ |
| $M_3$ | $a_3^0$ | $a_3^1$ | $a_3^2$ | $a_3^3$ |

| | M | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ |
|---|---|---|---|---|
| M | $3\gamma$ | 0 | 0 | 0 |
| $M_1$ | $e_1^0$ | $\gamma$ | 0 | 0 |
| $M_2$ | $e_2^0$ | $e_2^1$ | $-\gamma$ | 0 |
| $M_3$ | $e_3^0$ | $e_3^1$ | $e_3^2$ | $-3\gamma$ |

**§ 3. Выбор нормального тетраэдра. Второй шаг.** Используем теперь связи (6a, b), наложенные на компоненты $e_i^k$. Мы можем взять их в более простой форме:

$$e_1^1+e_2^2=0, \quad e_0^0-3e_1^1=0.$$

Составим две линейных комбинации из уравнений (3) так, чтобы производные от $e_i^k$ были исключены:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(a_1^1+a_2^2)=a\,(e_1^0-e_3^2),$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(a_0^0-3a_1^1)=a\,(-4e_1^0+3e_2^1).$$

По условию $a$ не равно нулю, оставшиеся коэфициенты $e_i^k$ независимы и, следовательно, правые части написанных выше равенств не равны нулю.

Заменяя

$$a_1^1+a_2^2=\lambda_2 a,$$

мы получим

$$\frac{\partial\lambda_2}{\partial\alpha}+2\gamma\lambda_2=e_1^0-e_3^2.$$

Так как все оставшиеся компоненты $e_i^k$ независимы, то мы можем так выбрать параметр $\alpha$, чтобы $\gamma$ равнялось нулю, $e_1^0-e_3^2$ было отлично от нуля.

Тогда для всякой кривой (M)

$$\lambda_2=\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}(e_1^0-e_3^2)\,d\alpha,$$

где $\alpha_0$ — определенная функция от $t$ и других $\alpha_j$, зависящая от кривой (M).

Выбирая значение $\alpha=\alpha_0$, мы приведем $a_1^1+a_2^2$ к нулю и совершенно так же, используя другой параметр $\alpha$, приведем $a_0^0-3a_1^1$ к нулю:

$$a_1^1+a_2^2=0, \quad a_0^0-3a_1^1=0. \tag{5d}$$



Мы закрепим таким образом параметры $\alpha_6$ и $\alpha_7$. Свободными остаются только пять $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$, $\alpha_5$. Так как при всяком изменении их равенства (5d) должны сохраняться, то на компоненты $e_i^k$, которые соответствуют параметрам $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$, наложатся условия

$$e_1^0=e_3^2, \quad e_2^1=\frac{4}{3}e_1^0. \tag{6d}$$

Вводя новые обозначения:

$$a_1^1=c, \quad e_1^0=\beta,$$

мы напишем наши таблицы в виде:

| | M | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ |
|---|---|---|---|---|
| M | $3c$ | $a$ | 0 | 0 |
| $M_1$ | $a_1^0$ | $c$ | $a$ | 0 |
| $M_2$ | $a_2^0$ | $a_2^1$ | $-c$ | $a$ |
| $M_3$ | $a_3^0$ | $a_3^1$ | $a_3^2$ | $-3c$ |

| | M | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ |
|---|---|---|---|---|
| M | $3\gamma$ | 0 | 0 | 0 |
| $M_1$ | $\beta$ | $\gamma$ | 0 | 0 |
| $M_2$ | $e_2^0$ | $\frac{4}{3}\beta$ | $-\gamma$ | 0 |
| $M_3$ | $e_3^0$ | $e_3^1$ | $\beta$ | $-3\gamma$ |

Используем теперь уравнения (6d) и составляем новые комбинации из уравнений (3):

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(a_1^0-a_3^2)=-2\,(a_1^0-a_3^2)\gamma-a(e_2^0+e_3^1),$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(a_2^1-\frac{4}{3}a_1^0\right)=a\left(\frac{7}{3}e_2^0-e_3^1\right)-2\left(a_2^1-\frac{4}{3}a_1^0\right)\gamma.$$

Полагая

$$a_1^0-a_3^2=\lambda_3 a,$$

получим:

$$\frac{\partial\lambda_3}{\partial\alpha}+4\gamma\lambda_3+e_2^0+e_3^1=0.$$

Здесь $\gamma$ и $e_2^0+e_3^1$ независимы. Следовательно, можно так выбрать параметр $\alpha$, чтобы $\gamma$ равнялось нулю и $e_2^0+e_3^1$ было отлично от нуля. Для этого достаточно, например, сохраняя нормирование координат M, перемещать $M_2$ по прямой $MM_2$.

При таком выборе параметра $\alpha$, какова бы ни была кривая (M),

$$\lambda_3=-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}(e_2^0+e_3^1)\,d\alpha,$$

где $\alpha_0$ — вообще некоторая функция от $t$ и от других параметров $\alpha_j$.

Полагая теперь $\alpha=\alpha_0$, мы для всякой кривой (M) сумеем привести $\lambda_3$ к нулю. Совершенно так же приведем к нулю $a_2^1-\frac{4}{3}a_1^0$. Итак,

$$a_1^0=a_3^2, \quad a_2^1=\frac{4}{3}a_1^0. \tag{5e}$$

Еще два параметра, пусть, например, $\alpha_4$ и $\alpha_5$, фиксированы. Как ни менять оставшиеся свободными параметры $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, равенства (5e) будут соблюдаться и, следовательно, таблица коэфициентов $e_i^k$ для любого из этих трех параметров будет удовлетворять условиям

$$e_2^0 + e_3^1 = 0, \qquad \frac{7}{3} e_2^0 - e_3^1 = 0, \tag{6e}$$

т. е.

$$e_2^0 = 0, \quad e_3^1 = 0.$$

Обозначая $a_1^0 = b$, мы перепишем наши таблицы в виде:

| | M | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ |
|---|---|---|---|---|
| M | $3c$ | $a$ | 0 | 0 |
| $M_1$ | $b$ | $c$ | $a$ | 0 |
| $M_2$ | $a_2^0$ | $\frac{4}{3}b$ | $-c$ | $a$ |
| $M_3$ | $a_3^0$ | $a_3^1$ | $b$ | $-3c$ |

| | M | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ |
|---|---|---|---|---|
| M | $3\gamma$ | 0 | 0 | 0 |
| $M_1$ | $\beta$ | $\gamma$ | 0 | 0 |
| $M_2$ | 0 | $\frac{4}{3}\beta$ | $-\gamma$ | 0 |
| $M_3$ | $e_3^0$ | 0 | $\beta$ | $-3\gamma$ |

**§ 4. Нормальный тетраэдр кривой в пространстве.** Обращаемся к уравнениям (6e): первое дает с помощью уравнений (3)

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(a_2^0 + a_3^1) = -4\gamma(a_2^0 + a_3^1).$$

Полагая

$$a_2^0 + a_3^1 = \lambda_4 a,$$

найдем

$$\frac{\partial\lambda_4}{\partial\alpha} = -6\gamma\lambda_4.$$

Далее возможны два предположения:

1) Если $\lambda_4$ не нуль, то мы можем его привести к единице ценой нового стеснения свободы выбора тетраэдра. Мы получим тогда

$$a_2^0 + a_3^1 = a; \tag{5f}$$

останутся свободными только два параметра $\alpha_1$, $\alpha_2$, и для них

$$\gamma = 0. \tag{6f}$$

Выбирая любые два числа $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$, можем написать

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(\varepsilon_2 a_2^0 - \varepsilon_1 a_3^1) = -a(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)e_3^0.$$

Следовательно, полагая

$$\varepsilon_2 a_2^0 - \varepsilon_1 a_3^1 = \lambda_5 a,$$

имеем

$$\frac{\partial\lambda_5}{\partial\alpha} = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)e_3^0.$$



Значит, можно привести $\lambda_5$ к нулю, т. е. можно считать

$$a_2^0 = \varepsilon_1 a, \quad a_3^1 = \varepsilon_2 a, \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1, \tag{5g}$$

и тогда

$$e_3^0 = 0. \tag{6g}$$

Во всей таблице $e_i^k$ только величина $\beta$ не равна нулю; преобразование тетраэдра $(M, M_1, M_2, M_3)$ (с неподвижной точкой $M$) возможно только с одной степенью свободы.

Нетрудно заметить, что теперь

$$\frac{\partial a}{\partial\alpha} = 0,$$

так что $a$ — инвариант; если ввести новый параметр $\sigma = \int a\,dt$, который мы будем называть *проективной длиной дуги*, то в новой системе $a_i^k$ коэфициент $a_0^1 = 1$ и мы можем привести к нулю или $a_0^0$, т. е. $c$ или $a_3^0$.

Подсчитывая производную от $a_1^1$, найдем

$$\frac{\partial c}{\partial\alpha} = -\frac{1}{3}a\beta;$$

следовательно, полагая

$$c = \lambda_6 a,$$

имеем

$$\frac{\partial\lambda_6}{\partial\alpha} = -\frac{1}{3}\beta, \qquad \lambda_6 = -\frac{1}{3}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\beta\,d\alpha.$$

Выбором последнего параметра $\alpha$ можно привести $\lambda_6$ к нулю, т. е.

$$c = 0 \tag{5h}$$

и

$$\beta = 0. \tag{6h}$$

Иначе, подсчитывая $\frac{\partial a_3^0}{\partial\alpha}$, получим

$$\frac{\partial a_3^0}{\partial\alpha} = \beta a(\varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

Если $\varepsilon_1$ не равно $\varepsilon_2$, то можно привести к нулю $a_3^0$:

$$a_3^0 = 0, \tag{5h'}$$

и тогда тоже

$$\beta = 0. \tag{6h'}$$

В обоих случаях тетраэдр вполне определен, если не считать произвола в выборе постоянных $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$.

В первом случае для $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ мы получаем инвариантный тетраэдр Фубини [81], во втором случае при $3\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$ — тетраэдр Альфана [82].

Тетраэдр Фубини более симметричен, если принимать во внимание также и определение кривой в тангенциальных координатах ее соприкасающихся плоскостей; компоненты движения его проще. Зато тетраэдр Альфана гораздо лучше связан с геометрическими образами, которые можно построить в данной точке кривой.

Нетрудно заметить, что изменение постоянных $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ ($\varepsilon_1+\varepsilon_2=1$) объясняется изменением положения точки $M_3$ на оси $MM_3$; именно, полагая

$$M_3 = M_3^* + \varepsilon M \qquad (\varepsilon = \text{const.}), \quad (a)$$

мы увеличиваем $\varepsilon_1$ на величину $\varepsilon$ и одновременно уменьшаем на ту же величину $\varepsilon_2$, не затрагивая других коэфициентов $a_i^k$.

Так как теперь все $e_i^k$ равны нулю, то при неподвижной точке $M$ тетраэдр $(M, M_1, M_2, M_3)$ не может деформироваться и, следовательно, все оставшиеся коэфициенты $a_i^k$ — инварианты кривой.

Обозначая в первом случае

$$\frac{a_1^0}{a_0^1} = \frac{b}{a} = k, \qquad \frac{a_3^0}{a_0^1} = k_1,$$

получаем основную таблицу формул преобразований тетраэдра:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dM}{d\sigma} &= M_1,\\
\frac{dM_1}{d\sigma} &= kM + M_2,\\
\frac{dM_2}{d\sigma} &= \varepsilon_1 M + \frac{4}{3}kM_1 + M_3,\\
\frac{dM_3}{d\sigma} &= k_1 M + \varepsilon_2 M_1 + kM_2.
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

$k$ и $k_1$ — кривизна и кручение кривой Фубини-Чеха, $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ — два числа, которые мы еще можем выбирать произвольно, лишь бы они в сумме составили единицу.

Во втором случае та же таблица имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dM}{d\sigma} &= 3cM + M_1,\\
\frac{dM_1}{d\sigma} &= bM + cM_1 + M_2,\\
\frac{dM_2}{d\sigma} &= \varepsilon_1 M + \frac{4}{3}bM_1 - cM_2 + M_3,\\
\frac{dM_3}{d\sigma} &= \varepsilon_2 M_1 + bM_2 - 3cM_3.
\end{aligned}\right\} \qquad (7')$$

$b$ и $c$ — инварианты кривой, $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ — произвольные числа, не равные между собой и в сумме составляющие единицу [1]. Нетрудно заметить,

[1] Оба тетраэдра отличаются только выбором последнего параметра $\alpha$. Таблица значений $e_i^k$ содержит в этом случае только один неравный нулю коэфициент $\beta$, который можно привести к единице выбором параметра $\alpha$.

Следовательно, непрерывный переход от одного тетраэдра к другому может быть достигнут изменением параметра $\alpha$ от нуля до $3c$ так, что

$$\frac{dM_1^*}{d\alpha} = M, \quad \frac{dM_2^*}{d\alpha} = \frac{4}{3}M_1^*, \quad \frac{dM_3^*}{d\alpha} = M_2^*.$$

Интегрируя эту систему в означенных пределах, непосредственно получаем формулы текста.



что от таблицы (7) к таблице (7′) можно перейти заменой

$$\begin{aligned}
M_1 &\to 3cM + M_1,\\
M_2 &\to 6c^2M + 4cM_1 + M_2,\\
M_3 &\to 6c^3M + 6c^2M_1 + 3cM_2 + M_3
\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$k = 3\frac{dc}{d\sigma} + 3c^2 + b, \quad k_1 = 3c(\varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

**§ 5. Кривые линейного комплекса.** 2) Если $\lambda_4 = 0$ и, следовательно,

$$a_2^0 + a_3^1 = 0,$$

то попрежнему найдем

$$\varepsilon_2 a_2^0 = \varepsilon_1 a_3^1 = 0$$

ценой установления новой связи

$$e_3^0 = 0,$$

и, следовательно,

$$a_2^0 = 0, \quad a_3^1 = 0;$$

$\gamma$ останется пока произвольным.

Обращаясь к производной от $a_3^0$, получим

$$\frac{\partial a_3^0}{\partial \alpha} = -6\gamma a_3^0.$$

Полагая

$$a_3^0 = \lambda_7 a,$$

имеем

$$\frac{\partial \lambda_7}{\partial \alpha} = -8\gamma\lambda_7.$$

Значит, если $\lambda_7$ не нуль, то его можно привести к единице

$$a_3^0 = a$$

и тогда

$$\gamma = 0.$$

Наконец, обращаясь к производной от $a_1^1 = c$, мы опять приведем $c$ к нулю ценой полного закрепления тетраэдра.

Вводя проективную длину дуги

$$\sigma = \int a\, dt,$$

получим

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dM}{d\sigma} &= M_1,\\
\frac{dM_1}{d\sigma} &= kM + M_2,\\
\frac{dM_2}{d\sigma} &= \frac{4}{3}kM_1 + M_3,\\
\frac{dM_3}{d\sigma} &= M + kM_2.
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Эта таблица получается из таблицы (7), если там положить $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $k_1 = 1$. Она содержит только один инвариант $k$ и, очевидно, определяет частный класс кривых.

Если $\lambda_7 = 0$, т. е.

$$a_3^0 = 0,$$

то инвариантный тетраэдр остается неопределенным.

Действительно, вся система (3) сводится теперь к трем уравнениям:

$$\frac{\partial a}{\partial \alpha} = 2a\gamma,$$
$$\frac{\partial b}{\partial \alpha} = \frac{\partial \beta}{\partial t} + 2c\beta - 2b\gamma,$$
$$\frac{\partial c}{\partial \alpha} = \frac{\partial \gamma}{\partial t} - \frac{1}{3}a\beta.$$

Мы можем привести $b$ и $c$ к нулю, и тогда $\beta$ и $\gamma$ будут связаны уравнениями

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial t} - \frac{1}{3}a\beta = 0, \quad \frac{\partial a}{\partial \alpha} = 2a\gamma,$$

но теперь $\beta$ и $\gamma$ определяются из системы диференциальных уравнений, следовательно, с произвольными постоянными. Отсюда следует неопределенность инвариантного тетраэдра. Параметр $a$ тоже зависит от выбора этих постоянных; следовательно, нет одного инвариантного параметра $\sigma$. При одном из возможных выборов $\beta$, $\gamma$ и $\sigma$ таблица (1) принимает вид:

$$\frac{d\mathbf{M}}{d\sigma} = \mathbf{M}_1, \quad \frac{d\mathbf{M}_1}{d\sigma} = \mathbf{M}_2, \quad \frac{d\mathbf{M}_2}{d\sigma} = \mathbf{M}_3, \quad \frac{d\mathbf{M}_3}{d\sigma} = 0.$$

Интегрируя, получим

$$\mathbf{M} = c_1 + c_2\sigma + c_3\sigma^2 + c_4\sigma^3.$$

Следовательно, кривая ($M$) есть пространственная кривая третьего порядка, определяемая в четырех однородных координатах $M^i$ уравнениями

$$M^1 = 1, \quad M^2 = \sigma, \quad M^3 = \sigma^2, \quad M^4 = \sigma^3$$

или в неоднородных координатах $X = \frac{\mathbf{M}^2}{\mathbf{M}^1}$, $Y = \frac{\mathbf{M}^3}{\mathbf{M}^1}$, $Z = \frac{\mathbf{M}^4}{\mathbf{M}^1}$:

$$Y = X^2, \quad Z = X^3.$$

**§ 6. Тангенциальные координаты.** Чтобы получить геометрическую характеристику класса кривых (8), надо перейти к двойственным образам.

Примем за образующий элемент пространства плоскость. Нашу кривую ($M$) можно рассматривать как ребро возврата огибающей семейства ее соприкасающихся плоскостей. Примем за однородные тангенциальные координаты этой плоскости четыре минора матрицы, составленной из 12 однородных координат трех точек $M$, $M_1$ и $M_2$. Обозначим эту плоскость и ее четыре координаты буквой $\mathbf{m}$ так, что, выписывая только одну строку определителя, можно записать

$$\mathbf{m} = (\mathbf{M}\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2).$$

Введем таким же образом еще три плоскости:

$$\mathbf{m}_1 = (\mathbf{M}\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3), \quad \mathbf{m}_2 = (\mathbf{M}\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3), \quad \mathbf{m}_3 = (\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3).$$



Продиференцируем $\mathbf{m}$ по $\sigma$ по правилу диференцирования определителя; получим

$$\frac{d\mathbf{m}}{d\sigma} = \left(\frac{d\mathbf{M}}{d\sigma}\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\right) + \left(\mathbf{M}\frac{d\mathbf{M}_1}{d\sigma}\mathbf{M}_2\right) + \left(\mathbf{M}\mathbf{M}_1\frac{d\mathbf{M}_2}{d\sigma}\right).$$

Если сюда внести производные $\frac{d\mathbf{M}_i}{d\sigma}$ по формулам (7) или (8), то сейчас же заметим, что два первых определителя обратятся в нуль как определители, у которых члены одного столбца составляют линейную комбинацию двух остальных, а последний легко выражается через $\mathbf{m}_1$:

$$\frac{d\mathbf{m}}{d\sigma} = \left(\mathbf{M}, \mathbf{M}_1, \frac{4}{3}k\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3\right) = (\mathbf{M}\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3) = \mathbf{m}_1.$$

Подсчитывая таким же образом остальные производные $\frac{d\mathbf{m}_i}{d\sigma}$, мы придем к формулам, которые определяют кривую (7) или (8) в тангенциальных координатах:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathbf{m}}{d\sigma} &= \mathbf{m}_1, \\ \frac{d\mathbf{m}_1}{d\sigma} &= k\mathbf{m} + \mathbf{m}_2, \\ \frac{d\mathbf{m}_2}{d\sigma} &= -\varepsilon_2\mathbf{m} + \frac{4}{3}k\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_3, \\ \frac{d\mathbf{m}_3}{d\sigma} &= k_1\mathbf{m} - \varepsilon_1\mathbf{m}_1 + k\mathbf{m}_2, \end{aligned}\right\} \quad (9) \qquad \left.\begin{aligned} \frac{d\mathbf{m}}{d\sigma} &= \mathbf{m}_1, \\ \frac{d\mathbf{m}_1}{d\sigma} &= k\mathbf{m} + \mathbf{m}_2, \\ \frac{d\mathbf{m}_2}{d\sigma} &= \frac{4}{3}k\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_3, \\ \frac{d\mathbf{m}_3}{d\sigma} &= \mathbf{m} + k\mathbf{m}_2. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Мы видим, что таблица (10) вполне совпадает с таблицей (8), если положить

$$\mathbf{m} = \mathbf{M}, \quad \mathbf{m}_1 = \mathbf{M}_1, \quad \mathbf{m}_2 = \mathbf{M}_2, \quad \mathbf{m}_3 = \mathbf{M}_3, \qquad (11)$$

а таблица (9) ни при каком значении $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ не совпадает с таблицей (7), ибо по условию $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1$.

Формулы (11), произвольно заданные для определенного значения $\sigma$, устанавливают в пространстве корреляцию, именно: точке

$$\mathbf{P} = x_0\mathbf{M} + x_1\mathbf{M}_1 + x_2\mathbf{M}_2 + x_3\mathbf{M}_3$$

соответствует плоскость

$$\mathbf{p} = x_0\mathbf{m} + x_1\mathbf{m}_1 + x_2\mathbf{m}_2 + x_3\mathbf{m}_3.$$

В этой корреляции точка $P$ всегда принадлежит соответствующей ей плоскости $p$.

Действительно, однородные координаты плоскости $\mathbf{p}$ суть коэфициенты при текущих координатах (точечных) в уравнении плоскости, которое можно записать в виде символического произведения:

$$\Sigma\, \mathbf{p}\mathbf{Q} = \mathbf{p}^1\mathbf{Q}^1 + \mathbf{p}^2\mathbf{Q}^2 + \mathbf{p}^3\mathbf{Q}^3 + \mathbf{p}^4\mathbf{Q}^4 = 0.$$

Заменяя здесь

$$\mathbf{p} = x_0\mathbf{m} + x_1\mathbf{m}_1 + x_2\mathbf{m}_2 + x_3\mathbf{m}_3,$$
$$\mathbf{Q} = y_0\mathbf{M} + y_1\mathbf{M}_1 + y_2\mathbf{M}_2 + y_3\mathbf{M}_3,$$

получим

$$\Sigma\, \mathbf{Q}\mathbf{p} = \Sigma(y_0\mathbf{M} + y_1\mathbf{M}_1 + y_2\mathbf{M}_2 + y_3\mathbf{M}_3)(x_0\mathbf{m} + x_1\mathbf{m}_1 + x_2\mathbf{m}_2 + x_3\mathbf{m}_3) =$$
$$= y_0x_3 - y_1x_2 + y_2x_1 - y_3x_0 = 0. \qquad (12)$$

Действительно, точка $M$ принадлежит всем плоскостям тетраэдра, кроме одной $m_3$, также и остальные вершины $M_i$. Поэтому все произведения $\Sigma M_i m_k$ равны нулю, кроме четырех:

$$\Sigma M m_3 = \Sigma\, M(M_1 M_2 M_3), \quad \Sigma M_1 m_2 = \Sigma\, M_1 (M M_2 M_3),$$
$$\Sigma M_2 m_1 = \Sigma\, M_2 (M M_1 M_3), \quad \Sigma M_3 m = \Sigma\, M_3 (M M_1 M_2).$$

Каждое из этих произведений есть определитель $(M M_1 M_2 M_3)$, разложенный по элементам одной из своих колонн. Помня, что этот определитель по условию равен единице, и принимая во внимание изменение знака от перестановки столбцов, получим

$$\Sigma\, M m_3 = 1, \quad \Sigma\, M_1 m_2 = -1, \quad \Sigma\, M_2 m_1 = 1, \quad \Sigma\, M_3 m = -1. \qquad (A)$$

Раскрывая скобки в тождестве (12), мы легко обнаружим его справедливость в силу полученных значений $\Sigma M_i m_k$. Полагая в нем

$$y_i = x_i,$$

немедленно получим

$$\sum pP = 0.$$

Итак, в корреляции (11) точка всегда принадлежит соответствующей ей плоскости; следовательно, это — нулевая система некоторого (соприкасающегося) линейного комплекса.

В случае кривой (7) равенства (11) не сохраняются при изменении $\sigma$, ибо $M_i$ и $m_i$ определяются разными системами (7) и (9). Это значит, что в каждой точке кривой (7) будет своя новая соприкасающаяся нуль-система.

Для кривой (8) обе системы (8) и (10) совпадают; если равенства (11) установлены для начального значения $\sigma$, то они сохраняются и при изменении $\sigma$. Устанавливаемая ими нуль-система — одна и та же во всех точках кривой. Так как прямая $MM_1$ переходит при этом в ту же самую прямую $mm_1$, то касательные кривой $(M)$ сами себе сопряжены и, следовательно, все они принадлежат к одному линейному комплексу. Говорят коротко, что кривая (8) принадлежит линейному комплексу.

Таким образом кривые линейного комплекса характеризуются системой (8), т. е. равенством

$$\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = 0.$$

## § 7. Уравнения кривой относительно нормального тетраэдра.

Чтобы выяснить геометрический смысл полученного инвариантного тетраэдра, построим уравнение кривой $(M)$ в координатах относительно этого тетраэдра.

Обозначим буквами $x, y, z$ неоднородные координаты произвольной точки $P$ относительно тетраэдра $(M, M_1, M_2, M_3)$ так, что

$$P = M + xM_1 + yM_2 + zM_3.$$

Пусть $P$ — произвольная, но неподвижная точка кривой $(M)$ так, что согласно уравнениям кривой $(M)$ можно положить

$$y = f(x), \quad z = g(x). \qquad (a)$$

Когда изменится параметр $\sigma$ и тетраэдр сдвинется, то координаты не-



подвижной точки $P$ могут только умножиться на произвольный множитель $\lambda$, следовательно,

$$\frac{d}{d\sigma}(M + xM_1 + yM_2 + zM_3) = \lambda(M + xM_1 + yM_2 + zM_3),$$

где $\lambda$ — подходящая функция от $\sigma$.

Развертывая производную в левой части с помощью формул (7), (7′) или (8) и сравнивая коэфициенты при $M_i$, что мы вправе делать, ибо эти четыре точки не лежат в одной плоскости и координаты их не могут быть связаны линейным соотношением, мы придем к различным разложениям функций (a). Чтобы не повторять несколько раз эти выкладки, добавим диагональные члены (с коэфициентами $c$), которых нехватает в таблице (7) по сравнению с таблицей (7′), так чтобы, полагая $c = 0$, вернуться к параметрам таблицы (7), для $k_1 = 0$ и $k = b$ иметь коэфициенты таблицы (7′), а для $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$, $c = 0$ и $k_1 = 1$ — таблицу (8).

Мы получаем таким образом общие формулы:

$$3c + kx + \varepsilon_1 y + k_1 z = \lambda,$$
$$cx + 1 + \frac{4}{3} ky + \varepsilon_2 z + \frac{dx}{d\sigma} = \lambda x,$$
$$-cy + x + kz + \frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\sigma} = \lambda y,$$
$$-3cz + y + \frac{dz}{dx}\frac{dx}{d\sigma} = \lambda z.$$

Полученные соотношения — тождества и относительно $\sigma$ и относительно $x$, ибо точку $P$ можно взять где угодно на кривой $(M)$; поэтому по исключении $\lambda$ и $\frac{dx}{d\sigma}$ мы можем сравнивать коэфициенты при одинаковых степенях $x$:

$$-4cy + x + kz + \frac{dy}{dx}\left[-1 + 2cx - \frac{4}{3} ky - \varepsilon_2 z + kx^2 + \varepsilon_1 xy + k_1 xz\right] =$$
$$= kxy + \varepsilon_1 y^2 + k_1 yz,$$
$$-6cz + y + \frac{dz}{dx}\left[-1 + 2cx - \frac{4}{3} ky - \varepsilon_2 z + k_1 x^2 + \varepsilon_1 xy + k_1 xz\right] =$$
$$= kxz + \varepsilon_1 yz + k_1 z^2.$$

Внося сюда $y$ и $z$ по формулам

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \quad z = b_1 x + b_2 x^2 + \ldots, \qquad (a)$$

мы получим

$$\left.\begin{aligned}
&a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = \frac{3\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2}{60},\\
&a_6 = ca_5 + \frac{k_1}{12\cdot 6}, \quad a_7 = \frac{1}{7} kb_6 + \frac{8}{7} ca_6 - \frac{5}{21} ka_5,\\
&b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{1}{6}, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = 0,\\
&b_6 = \frac{12a_5 + 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{12\cdot 6}, \quad b_7 = \frac{5k_1}{6\cdot 12\cdot 7} + \frac{1}{7} ca_5 + \frac{6}{7} cb_6.
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Чтобы получить кривую линейного комплекса, надо положить здесь $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$, $k_1 = 1$, $c = 0$.

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{72} + \frac{k}{3\cdot 6\cdot 7\cdot 12}\, x^8 + \ldots, \\ z &= \frac{x^3}{6} + \frac{5}{6\cdot 12\cdot 7}\, x^7 + \frac{k}{4\cdot 6\cdot 81}\, x^9 + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Если $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ не нули, то мы все же можем их так подобрать, чтобы $a_5$ обратилось в нуль:

$$\varepsilon_1 = \frac{2}{5}, \quad \varepsilon_2 = \frac{3}{5};$$

если еще положить $c = 0$, то мы придем к таблице (7), и разложение примет вид:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{x^2}{2} + \frac{k_1}{12\cdot 6}\, x^6 + \ldots, \\ z &= \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{360} + \ldots; \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

если же внести $k = b$, $k_1 = 0$, придем к таблице (7′); разложение примет вид [83]:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{x^2}{2} + \frac{b}{7\cdot 360}\, x^7 + \ldots, \\ z &= \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{360} + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (15')$$

Уравнения (14), (15) или (15′) показывают, что кривая

$$y = \frac{x^2}{2}, \quad z = \frac{x^3}{6} \qquad (16)$$

имеет касание пятого порядка с кривой (M).

**§ 8. Соприкасающаяся кривая третьего порядка.** Пространственная кривая третьего порядка есть неполное пересечение двух поверхностей второго порядка, имеющих общую образующую; всегда можно выбрать эти поверхности в виде двух конусов с вершинами на кривой. Так, кривая (16) есть неполное пересечение конусов второго порядка

$$2y^2 - 3xz = 0, \quad x^2 - 2y = 0$$

с вершинами в точках $M_0$ и $M_3$ и общей образующей $M_0M_3$. Непосредственно видно, что пространственная кривая третьего порядка определяется шестью точками $P_1, P_2, \ldots, P_6$, из которых ни одна четверка не лежит в одной плоскости. Действительно, существует только один конус второго порядка с вершиной в $P_1$, содержащий пять точек $P_2, P_3, \ldots, P_6$. Также построим второй конус с вершиной в $P_6$, проходящий через $P_1, P_2, \ldots, P_5$. За вычетом общей образующей $P_1P_6$ линия пересечения этих конусов составит кривую третьего порядка, проходящую через все шесть точек.

Отсюда следует, что общее уравнение такой кривой содержит шесть независимых параметров, и, значит, соприкасающаяся пространственная кривая третьего порядка имеет с кривой (M) касание пятого порядка.

Итак, уравнения (16) определяют соприкасающуюся пространственную кривую третьего порядка.



Если исходить из уравнений (10), то получим уравнение кривой (M) в тангенциальных координатах $\xi$, $\eta$, $\zeta$. Если ввести их под условием, что плоскость $p$ с местными неоднородными координатами $\xi$, $\eta$, $\zeta$ имеет координатами относительно неподвижной системы четыре числа

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} + \xi\mathfrak{m}_1 + \eta\mathfrak{m}_2 + \zeta\mathfrak{m}_3,$$

то те же рассуждения приведут нас к двум уравнениям относительно $\xi$, $\eta$, $\zeta$. Они отличаются от уравнений (13), очевидно, только тем, что два числа $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ меняются местами и входят с обратным знаком:

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \frac{\xi^2}{2} + \frac{2\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2}{60}\,\xi^5 + \left(ca_5 + \frac{k_1}{12\cdot 6}\right)\xi^6 + \ldots, \\ \zeta &= \frac{\xi^3}{6} + \left(\frac{1}{6}\,a_5 + \frac{\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2}{12\cdot 6}\right)\xi^6 + \left(\frac{5k_1}{6\cdot 12\cdot 7} + \frac{1}{7}\,ca_5 + \frac{6}{7}\,cb_6\right)\xi^7 + \ldots \end{aligned}\right\} (13')$$

Если положить

$$\varepsilon_1 = \frac{3}{5}, \quad \varepsilon_2 = \frac{2}{5},$$

то уравнение соприкасающейся кривой третьего класса, т. е. кривой, имеющей с заданной кривой (m) шесть бесконечно близких соприкасающихся плоскостей, будет

$$\eta = \frac{\xi^2}{2}, \quad \zeta = \frac{\xi^3}{6}. \qquad (17)$$

Если $(x^*, y^*, z^*)$ есть та точка, которая соответствует плоскости $(\xi^*, \eta^*, \zeta^*)$, т. е. характеристическая точка семейства соприкасающихся плоскостей $(\xi^*, \eta^*, \zeta^*)$ вдоль кривой, то $x^*$, $y^*$, $z^*$ удовлетворяют уравнению

$$\sum (\mathrm{M} + x^*\mathrm{M}_1 + y^*\mathrm{M}_2 + z^*\mathrm{M}_3)\,(\mathfrak{m} + \xi^*\mathfrak{m}_1 + \eta^*\mathfrak{m}_2 + \zeta^*\mathfrak{m}_3) = 0$$

или в силу равенств (A)

$$-x^*\eta^* + y^*\xi^* - z^* + \zeta^* = 0,$$

а также тем двум уравнениям, которые получаются диференцированием этого уравнения, например по независимому переменному $\xi^*$ при постоянных $x^*$, $y^*$, $z^*$:

$$-x^*\frac{d\eta^*}{d\xi^*} + y^* + \frac{d\zeta^*}{d\xi^*} = 0,$$

$$-x^*\frac{d^2\eta^*}{d\xi^{*2}} + \frac{d^2\zeta^*}{d\xi^{*2}} = 0.$$

Внося сюда значения (17), немедленно получим

$$x^* = \xi^*, \quad y^* = \frac{\xi^{*2}}{2}, \quad z^* = \frac{\xi^{*3}}{6}.$$

Следовательно, уравнения второй соприкасающейся кривой третьего порядка в координатах точки напишутся тоже

$$y^* = \frac{x^{*2}}{2}, \quad z^* = \frac{x^{*3}}{6}. \qquad (17')$$

Для кривой линейного комплекса ($\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$) обе соприкасающиеся кривые совпадают, но для кривой (7) эти кривые различны: хотя уравнения (16) и (17′) и одинаковы, но системы координат различны.

Таблица (7) покажет нам[1]), что для увеличения $\varepsilon_1$ на $^1/_5$ (и уменьшения $\varepsilon_2$ на столько же) надо выбрать новую точку $M_3^*$:

$$M_3^* = M_3 - \frac{1}{5}M.$$

**§ 9. Соприкасающееся коническое сечение.** Касательная к кривой третьего порядка (16) определяется двумя точками $\left(1,\ x,\ \frac{x^2}{2},\ \frac{x^3}{6}\right)$ и $\left(0,\ 1,\ x,\ \frac{x^2}{2}\right)$, из которых вторая имеет координатами производные от координат первой.

Следовательно, параметрические уравнения этой касательной напишутся в виде

$$x_0 = 1,\quad x_1 = x + t,\quad x_2 = \frac{x^2}{2} + tx,\quad x_3 = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}t,$$

где $x$ — абсцисса точки касания и $t$ — параметр на касательной. Эта касательная пересекает плоскость $x_3 = 0$ в точке $t = -\frac{x}{3}$, т. е. в точке

$$x_0 = 1,\quad x_1 = \frac{2}{3}x,\quad x_2 = \frac{x^2}{6}.$$

Все эти точки (при переменном $x$) лежат, следовательно, на коническом сечении, которое называется *соприкасающимся коническим сечением* кривой (M). Исключая параметр $x$ и переходя к неоднородным координатам $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$, $z = \frac{x_3}{x_0}$, мы напишем уравнение этого сечения в форме

$$y = \frac{3}{8}x^2,\quad z = 0. \tag{18}$$

Совершенно так же кривая (17) дает возможность построить соприкасающийся конус второго порядка как огибающую плоскостей, проходящих через точку $M$ и через все касательные кривой (17).

Тангенциальное уравнение его в системе координат $\xi, \eta, \zeta$ $\left(\varepsilon_1 = \frac{3}{5},\ \varepsilon_2 = \frac{2}{5}\right)$ напишется так:

$$\eta = \frac{3}{8}\xi^2,\quad \zeta = 0;$$

в точечных координатах его можно написать по той или другой системе

$$3x^*z^* - 2y^{*2} = 0. \tag{18′}$$

[1]) См. формулу (a) на стр. 238, § 4.



Соприкасающаяся плоскость кривой (16) в точке $(x, y, z)$ имеет уравнение

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_0 \\ x & \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{6} & 1 \\ 1 & x & \frac{x^2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$x_0\frac{x^3}{6} - x_1\frac{x^2}{2} + x_2x - x_3 = 0, \tag{a}$$

где $x_i$ — текущие координаты.

Через произвольную точку пространства P с координатами $x_i$ проходят, очевидно, три такие плоскости; абсциссы точек прикосновения $x$ получаются решением кубического уравнения (a), если считать $x_i$ заданным и $x$ искомым. Если эти три решения обозначить $x$, $x^*$ и $x^{**}$, то уравнение плоскости, проходящей через три точки $(x)$, $(x^*)$, $(x^{**})$, с текущими координатами $y_i$ можно написать в виде

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_0 \\ x & \frac{1}{2}x^2 & \frac{1}{6}x^3 & 1 \\ x^* & \frac{1}{2}x^{*2} & \frac{1}{6}x^{*3} & 1 \\ x^{**} & \frac{1}{2}x^{**2} & \frac{1}{6}x^{**3} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Умножим первый столбец на $x_2$, второй — на $-x_1$, третий — на $x_0$ и прибавим к четвертому, умноженному на $-x_3$; тогда все элементы последнего столбца (кроме элемента первой строки) обратятся в нуль в силу (a) и уравнение примет вид:

$$y_0x_3 - y_1x_2 + y_2x_1 - y_3x_0 = 0.$$

Эта плоскость, очевидно, содержит и точку $P(x_i)$.

Таким образом устанавливается корреляция, где каждой точке пространства $P(x_i)$ соответствует плоскость (b). Так как каждая плоскость содержит соответствующую ей точку, то это — нуль-система, притом, как видно из формулы (a), та самая соприкасающаяся нуль-система, которую мы определяли формулами (6).

**§ 10. Соприкасающийся линейный комплекс.** Нетрудно теперь и непосредственно составить уравнение соприкасающегося линейного комплекса.

Обозначим буквами $p_{ik}$ однородные линейные координаты прямой относительно нашего тетраэдра. Это — шесть миноров матрицы, составленной из координат двух каких-либо точек прямой. Следовательно, касательная к кривой (13) имеет координатами миноры матрицы

$$\begin{Vmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & 1 & \frac{dy}{dx} & \frac{dz}{dx} \end{Vmatrix}.$$

Внося сюда для $y$ и $z$ разложения (13), получим для координат $\rho_{ik}$ формулы:

$$\begin{aligned}
\rho_{01} &= 1,\\
\rho_{02} &= x + \frac{1}{12} k_1 x^5 + \ldots,\\
\rho_{03} &= \frac{1}{2} x^2 + \frac{2\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{12} x^5 + \ldots,\\
\rho_{12} &= \frac{1}{2} x^2 + \frac{5}{72} k_1 x^6 + \ldots,\\
\rho_{31} &= -\frac{1}{3} x^3 - \frac{5}{72} (2\varepsilon_1 - \varepsilon_2) x^6 + \ldots,\\
\rho_{23} &= \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{36} (2\varepsilon_1 - \varepsilon_2) x^7 + \ldots
\end{aligned}$$

Внося эти разложения в уравнение комплекса

$$\sum a_{ik} \rho_{ik} = 0,$$

получим

$$a_{01} + x a_{02} + \frac{x^2}{2} (a_{03} + a_{12}) - \frac{x^3}{3} a_{31} + \frac{x^4}{12} a_{23} + \\ + \frac{x^5}{12} [k_1 a_{02} + (2\varepsilon_1 - \varepsilon_2) a_{03}] + \ldots = 0.$$

Следовательно, комплекс содержит пять бесконечно близких касательных нашей кривой, если

$$a_{01} = a_{02} = a_{31} = a_{23} = 0, \quad a_{03} = -a_{12}.$$

Уравнение соприкасающегося комплекса

$$\rho_{03} - \rho_{12} = 0. \tag{19}$$

Он содержит четыре ребра тетраэдра (7) или (7'); ребра $MM_3$ и $M_1M_2$ сопряжены.

Если

$$\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = 0,$$

т. е. для кривой (8), коэфициент при $x^5$ тоже обращается в нуль; комплекс содержит по крайней мере шесть бесконечно близких касательных, т. е. имеет касание по крайней мере пятого порядка. Так как это имеет место во всякой точке кривой, то показывает, что соприкасающийся комплекс не меняется при переходе от одной точки кривой к другой, и, действительно, подсчитывая следующие степени разложения $\rho_{03}$, $\rho_{12}$, нетрудно убедиться, что для кривой (8) уравнение (17) удовлетворено тождественно; кривая принадлежит своими касательными комплексу.

Чтобы получить соприкасающуюся поверхность второго порядка, достаточно в общее уравнение

$$\sum a_{ik} x_i x_k = 0$$

подставить $y = \frac{x_2}{x_0}$, $z = \frac{x_3}{x_0}$ по формулам (13) и обратить в нуль коэфициенты при первых степенях $x$.



Существует связка поверхностей второго порядка, имеющих с кривой касание шестого порядка:

$$\lambda (x^2 + k_1 z^2 - 2y) + \mu (2y^2 - 3xz) + \\ + \nu \left[\frac{3}{2} (2\varepsilon_1 - \varepsilon_2) z^2 + xy - 3z\right] = 0, \tag{a}$$

где $\lambda$, $\mu$, $\nu$ — произвольные параметры.

Так как три поверхности второго порядка пересекаются в восьми точках, то эта связка имеет восемь центров; из них семь совпадают с точкой $M$. Восьмой центр есть точка Саиния [84] (Sannia), присоединенная к данной точке кривой.

Точка Санния для кривой линейного комплекса ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $k_1 = 1$) и только в этом случае совпадает с соответствующей точкой кривой. Особенно простые координаты имеет точка Санния по отношению к тетраэдру Вильчинского (4''). Полагая $k_1 = 0$, получим

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \frac{2}{2\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = 10.$$

Если отправляться от двойственных образов, т. е. искать поверхности второго порядка, имеющие с кривой общие семь бесконечно близких плоскостей (касательные плоскости поверхности и соприкасающиеся плоскости кривой), то придем к плоскости Санния — общей касательной плоскости $\infty^2$ таких поверхностей второго порядка. Ее координаты относительно второго тетраэдра Вильчинского $\left(\varepsilon_1 = \frac{3}{5},\ \varepsilon_2 = \frac{2}{5},\ k_1 = 0\right)$

$$\xi^* = 0, \quad \eta^* = 0, \quad \zeta^* = -10.$$

В соприкасающейся нулевой системе ей соответствует точка

$$x^* = y^* = 0, \quad z^* = -10$$

— вторая точка Санния.

**§ 11. Точка Альфана.** Соприкасающаяся кривая третьего порядка (16) определяет связку поверхностей второго порядка, которые ее содержат. Уравнение связки получается непосредственно, если потребовать, чтобы после подстановки в общее уравнение поверхности второго порядка $y$ и $z$ из уравнений (16) оно обращалось в тождество

$$\lambda (x^2 - 2y) + \mu (2y^2 - 3xz) + \nu (xy - 3z) = 0. \tag{a}$$

Нетрудно убедиться, что среди $\infty^2$ этих поверхностей второго порядка существует $\infty^1$ конусов, определяемых условием

$$\nu^4 - 2\lambda\mu\nu^2 + 2\lambda^2\mu^2 = 0, \tag{b}$$

и $\infty^1$ поверхностей, которые входят в связку (a) § 10, т. е. имеют касание шестого порядка с кривой ($M$). Эти последние, очевидно, определяются для тетраэдра Вильчинского ($k_1 = 0$) условием

$$\nu = 0. \tag{c}$$

Рассматривая совместно условия (b) и (c), найдем только два общих решения: $\lambda=0$, $\nu=0$ и $\mu=0$, $\nu=0$; они соответствуют конусам

$$2y^2-3xz=0 \quad \text{и} \quad y=\frac{x^2}{2},$$

имеющим касание шестого порядка с кривой и проходящим через кривую (16). Вершина первого лежит в рассматриваемой точке $M$ нашей кривой; вершина второго есть точка Альфана, она совпадает в тетраэдре Вильчинского с точкой $M_3$. Точка Альфана, очевидно, лежит на соприкасающейся кривой третьего порядка, как и вершины всех конусов (b), и является единственной точкой этой кривой, откуда ее можно спроектировать конусом, имеющим касание пятого порядка с кривой (M).

Очевидно, для кривых линейного комплекса и только для них точка Альфана совпадает с соответствующей точкой кривой (M).

Отправляясь от двойственных образов, мы найдем $\infty^2$ поверхностей второго порядка, которые касаются всех соприкасающихся плоскостей кривой (12); среди них $\infty^1$ таких, которые вырождаются в совокупности плоскостей, проходящих через касательные некоторого конического сечения; из них только два, имеющих семь общих бесконечно близких плоскостей с кривой (M). Одно из этих конических сечений лежит в соприкасающейся плоскости $MM_1M_2$, а другое определяет плоскость Альфана.

В системе координат второго тетраэдра Вильчинского $\left(\varepsilon_1=\frac{3}{5},\ \varepsilon_2=\frac{2}{5},\ k_1=0\right)$ это — плоскость

$$\xi_0^*=0,\quad \xi_1^*=0,\quad \xi_2^*=0.$$

В соприкасающейся нуль-системе ей соответствует точка прикосновения — вторая точка Альфана

$$x_0^*=0,\quad x_1^*=0,\quad x_2^*=0.$$

Нетрудно заметить, что каждая из двух точек Санния, соответствующая ей точка Альфана и точка $M$ кривой лежат на одной прямой.

Совершенно так же каждая из плоскостей Альфана, соответствующая ей плоскость Сания и соприкасающаяся плоскость кривой образуют пучок; осью первого пучка служит ребро $M_1M_2$, осью второго — прямая $6cx-24c^3y=1$ в соприкасающейся плоскости.

Таким образом две плоскости Альфана, две плоскости Сания и соприкасающаяся плоскость имеют общую точку $N(0, 1, 4c, 0)$, лежащую, конечно, на ребре $M_1M_2$; ей соответствует в соприкасающейся нуль-системе плоскость $MM_3N$, содержащая четыре точки Альфана и Сания и точку $M$ кривой.

**§ 12. Главная плоскость.** Если две кривые (P) и (Q) имеют касание $n$-го порядка, то всегда можно найти такие параметры $t$ на той и другой кривой, чтобы в общей точке $t=t_0$ было

$$\mathrm{P}=\mathrm{Q},\quad \frac{d\mathrm{P}}{dt}=\frac{d\mathrm{Q}}{dt},\ \ldots,\ \frac{d^n\mathrm{P}}{dt^n}=\frac{d^n\mathrm{Q}}{dt^n}; \tag{a}$$



таким параметром может служить, например, общая абсцисса точек $P$ и $Q$. Но можно выбирать на каждой кривой и различные параметры. Производные порядка $n+1$ при этом, очевидно, не все равны, иначе кривые имели бы касание $n+1$-го порядка, но мало того, точка, определяемая координатами $\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}(\mathrm{P}-\mathrm{Q})$, при этом не лежит на касательной $\left(\mathrm{P}_1\ \frac{d\mathrm{P}}{dt}\right)$.

Действительно, если

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}(\mathrm{P}-\mathrm{Q})+A\mathrm{P}+B\,\frac{d\mathrm{P}}{dt}=0,$$

то в силу формул (a), умножая на подходящий множитель четыре координаты $\mathrm{P}$ и $\mathrm{Q}$ (например, переходя к неоднородным координатам), приведем коэфициент $A$ к нулю:

$$\frac{d^{n+1}\mathrm{Q}}{dt^{n+1}}=\frac{d^{n+1}\mathrm{P}}{dt^{n+1}}+B_1\,\frac{d\mathrm{P}}{dt}.$$

Если теперь ввести на кривой (P) новый параметр $t_1$ посредством формулы

$$t=t_1+\frac{B_1}{(n+1)!}(t_1-t_0)^{n+1}$$

так, что для $t=t_0$

$$t=t_1,\quad \frac{dt}{dt_1}=1,\ \ldots,\ \frac{d^nt}{dt_1^n}=0,\quad \frac{d^{n+1}t}{dt_1^{n+1}}=B_1,$$

то для $t=t_1=t_0$

$$\frac{d\mathrm{P}}{dt_1}=\frac{d\mathrm{P}}{dt},\ \frac{d^2\mathrm{P}}{dt_1^2}=\frac{d^2\mathrm{P}}{dt^2},\ \ldots,\ \frac{d^n\mathrm{P}}{dt_1^n}=\frac{d^n\mathrm{P}}{dt^n},\quad \frac{d^{n+1}\mathrm{P}}{dt_1^{n+1}}=\frac{d^{n+1}\mathrm{P}}{dt^{n+1}}+B_1\,\frac{d\mathrm{P}}{dt}$$

и, следовательно, опять-таки для $t=t_1=t_0$

$$\mathrm{Q}=\mathrm{P},\quad \frac{d\mathrm{Q}}{dt}=\frac{d\mathrm{P}}{dt_1},\ \ldots,\ \frac{d^n\mathrm{Q}}{dt^n}=\frac{d^n\mathrm{P}}{dt_1^n},\quad \frac{d^{n+1}\mathrm{Q}}{dt^{n+1}}=\frac{d^{n+1}\mathrm{P}}{dt_1^{n+1}},$$

т. е. обе кривые имеют касание (аналитическое) порядка $n+1$.

Итак, три точки

$$\mathrm{P},\quad \frac{d\mathrm{P}}{dt},\quad \frac{d^{n+1}(\mathrm{P}-\mathrm{Q})}{dt^{n+1}}$$

не лежат на одной прямой и, следовательно, определяют плоскость. Эта плоскость называется *главной* плоскостью соприкасающихся кривых (Halphen—Berzolari) [85].

Точки главной плоскости и только они одни обладают свойством: проекции из такой точки обеих кривых (P) и (Q) на произвольную плоскость имеют касание $n+1$-го порядка.

Действительно, если выбрать за плоскость проекции координатную плоскость $MM_1M_2$ и проектировать из противоположной вершины координатного тетраэдра $M_3$, то искомые проекции будут определяться первыми тремя координатами $P^i$ и $Q^i$ $(i=0,1,2)$.

Во всяком случае они будут иметь касание $n$-го порядка, ибо из общих уравнений прямо следует для $t=t_0$:

$$P^i=Q^i,\quad \frac{dP^i}{dt}=\frac{dQ^i}{dt},\ \ldots,\ \frac{d^nP^i}{dt^n}=\frac{d^nQ^i}{dt^n}\qquad (i=0,1,2).$$

Касание порядка $n+1$ будет иметь место, если существует постоянное $B$ так, что

$$\frac{d^{n+1}P^i}{dt^{n+1}}-\frac{d^{n+1}Q^i}{dt^{n+1}}+B\frac{dP^i}{dt}=0\qquad (i=0,\ 1,\ 2),$$

но тогда точка $M_3$, т. е. точка $P^0=P^1=P^2=0$, лежит в плоскости точек $\frac{dP}{dt}$, $\frac{d^{n+1}(P-Q)}{dt^{n+1}}$ и, следовательно, принадлежит главной плоскости.

Нетрудно заметить, что плоскость $MM_1M_3$ канонического тетраэдра Вильчинского есть главная плоскость кривой (M) и соприкасающейся кривой третьего порядка.

Действительно, эти две кривые имеют касание пятого порядка, а разности шестых производных в неоднородных координатах $x_i$ для $x=0$ равны

$$0,\ 0,\ 0,\ 2.$$

Это — координаты вершины $M_3$; вместе с точкой $M$ (соответствующая точка кривой) и точкой $M_1$ (касательная) она определяет плоскость $MM_1M_3$.

По принципу двойственности найдем, что точка $M_1$ есть главная точка соприкасающейся кривой (17) и кривой (M).

Таким образом канонический тетраэдр Вильчинского характеризуется условиями:

1) $M$ — точка кривой,

2) $MM_1$ — касательная,

3) $MM_1M_2$ — соприкасающаяся плоскость,

4) $MM_1M_3$ — главная плоскость кривой (M) и соприкасающейся кривой третьего порядка,

5) $M_1$ — главная точка кривой (M) и соприкасающейся кривой третьего класса,

6) $M_3$ — одна из точек Альфана и $M_1M_2M_3$ — одна из плоскостей Альфана,

7) наконец ребро $MM_2$ — поляра главной точки $M_1$ относительно соприкасающегося конического сечения, $M_2$ лежит на этом сечении и $M_1M_2$ служит ее касательной.

Весь тетраэдр сопряжен в соприкасающейся нулевой системе: точка кривой $M$ соответствует соприкасающейся плоскости, главная точка $M_1$ — главной плоскости, точка $M_3$ — плоскости $MM_2M_3$ и точка $M_2$ — плоскости $m$. Ребра $MM_1$ и $M_2M_3$ принадлежат соприкасающемуся линейному комплексу, остальные попарно сопряжены со своими противоположными.



Если принять во внимание формулы перехода от тетраэдра Вильчинского к тетраэдру Фубини, то легко придем к заключению, что этот последний характеризуется:

1) тем же положением точки $M$, прямой $MM_1$ и плоскости $MM_1M_2$,

2) ребро $MM_2$ лежит в соприкасающейся плоскости и пересекает прямую, соединяющую две точки Альфана,

3) соприкасающееся коническое сечение так же расположено относительно треугольника $MM_1M_2$.

# ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ И ПРИМЕЧАНИЯ

[1]. *G. H. Halphen*, Sur les invariants différentiels. Thèse, Paris 1878; Sur les invariants différentiels des courbes gauches, Journal de l'École Polytechnique, 28, 1880, стр. 1.

[2]. *E. I. Wilczynski*, Projective- differential geometry of curved surface, I, Transactions of Amer. Math. Soc., 8, 1907, стр. 233—260; II, ib., 9, 1908, стр. 79—120; III, ib., 9, 1908, стр. 293—315; IV, ib., 10, 1909, стр. 176—200; V, ib., 10, 1909, стр. 279—296. Теорию Вильчинского можно найти в прекрасной книге *Lane*, Projective differential geometry of curves and surfaces, The University of Chicago science series, 1932.

[3]. *C. Green*, Memoir on the general theory of surfaces and rectilinear congruences, Trans. of Amer. Math. Soc. 20, 1919, стр. 79—153.

[4]. *E. I. Wilczynski*, Sur la théorie générale des congruences. Mémoires publiés par la Classe des Sciences de l'Acad. de Belgique, сер. 2, т. 3, 1911, 86 стр. The general theory of Congruences, Transact. of Amer. Math. Soc., 18, 1915, стр. 311—327. Кроме цитированных работ, у него много мемуаров, посвященных отдельным вопросам проективно-диференциальной геометрии поверхности.

[5]. Общий обзор его работ и библиография см. *E. Bompiani*, I. fond. geom. della teoria proiettiva delle curve e delle superficie. App. II, Geometria proiet.-diff.; *Fubini-Čech*, т. II, стр. 671—727. По свидетельству Чеха он подготовляет к печати Geometria proiettiva differentiale negli iperspazi.

[6]. *Lucien Godeaux*, La théorie des surfaces et l'espace réglé (Géométrie projective différentielle). Actualités scientifiques et industrielles, N 138, Paris, Hermann, 1934.

[7]. Современные проблемы математики, т. II, *Картан*, Метод подвижной системы отнесения.

[8]. *Плюккер* [*Plücker*, System der Geometrie des Raumes, 1846] ввел координаты прямой в метрическом пространстве как четыре коэфициента в уравнениях прямой

$$x = az + b, \quad y = cz + d.$$

*Грассман* [*Grassman*, Lineare Ausdehnungslehre, 1844] построил проективные координаты линейного пространства любого числа измерений, погруженного в проективное пространство бо́льшего числа измерений. Для нашего пространства их снова нашел Кэли (Cayley) в 1859.

[9]. Общее понятие конгруэнции рассматривал уже *Монж* [*Monge*, Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais, 1781]. Понятие комплекса прямых встречается у *Малюса* [*Malus*, Optique, 1808]. Теория алгебраических конгруэнций и комплексов построена *Плюккером*, Neue Geometrie des Raumes.

[10]. *G. Koenigs*, La Géométrie réglée et ses applications, Thèse, Paris 1895.

[11]. Письмо к Клейну от 18 дек. 1878. Собрание сочинений, т. I, стр. 718.

[12]. Второй мемуар по проективной теории поверхностей, Amer. Math. Soc. Trans., 9, стр. 114, 1908.

[13]. *Demoulin*, Sur la quadrique de Lie, C. R., 147, 1908, стр. 493.

[14]. Эти статьи можно найти в цитированной книге „La théorie des surfaces et l'espace réglé". В последние годы появился ряд исследований огибающей поверхностей Ли. После того, как *Томсен* [*Thomsen*, Über eine liniengeometrische Behandlungsweise der projektiven Flächentheorie, Abhandl. Math. Seminar, Hamburg, 4, 1925, стр. 232—266, Sulle superficie minime proiettive, Ann. di Mat., сер. 4, 5, 1928, стр. 169—184] ввел понятие проективно-минимальной поверхности, как



поверхности, осуществляющей минимум проективной площади, т. е. минимум интеграла

$$\iint \beta\gamma \, du \, dv,$$

он показал, что асимптотические линии соответствуют на всех 5 полостях огибающей поверхностей Ли, связанных с такой поверхностью. *Майер* [*Mayer*, Contribution à l'étude des surfaces minima projectives, Bull. des Sciences Math., сер. 2, 56, 1932, стр. 146—168, 188—200], показал, что если поверхность $S$ — проективно-минимальная, то все четыре полости огибающей поверхностей Ли $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$ — тоже проективно-минимальные поверхности. Для каждой из этих поверхностей $S_i$ одна из полостей огибающей поверхностей Ли совпадет с $S$. Если $B = 0$ и $A \neq 0$, то совпадают две пары вершин четыреугольника Демулена так, что огибающая поверхностей Ли имеет только три полости: сама поверхность $(M)$ и две поверхности $(N_1)$ и $(N_2)$. Прямая $N_1 N_2$ касается обеих поверхностей $(N_1)$ и $(N_2)$ и описывает конгруэнцию $W_1$. Каждая из поверхностей $(N_1)$ или $(N_2)$ тоже имеет (кроме себя) только две полости огибающей для своих поверхностей Ли. Одна из этих полостей — поверхность $(M)$. Другая соединена с поверхностью $(M)$ конгруэнцией $W$. Таким образом имеется две последовательности поверхностей $[M]$ и $[N]$, связанных конгруэнциями $W$, так, что две поверхности одной последовательности и противоположная им поверхность другой последовательности являются тремя полостями огибающей поверхностей Ли, связанных с этой третьей поверхностью (см. Годо, цитированную в тексте книгу).

Наконец Бушин Су [*Buchin Su*, On the Surfaces whose Asymptotic Curves belong to linear Complexes, Tohoku Math. Journal, 40, 1935, стр. 408—420, 433—448, 41, стр. 1—19, 203—215] показал, что поверхности, у которых оба семейства асимптотических линий принадлежат к каким-нибудь линейным комплексам, имеют ту особенность, что все 4 полости огибающей поверхностей Ли лежат на одной и той же поверхности 2-го порядка Q. Эта поверхность Q с другой стороны соединена двумя различными способами с данной поверхностью конгруэнциями $W$. См. *Fubini-Čech*, Geom. pr.-diff., т. I, стр. 266.

[15]. Applicabilita proiettiva di due superficie, Rendiconti del Circolo di Palermo, 41, 1916, стр. 135—162. См. также *Fubini-Čech*, „Geometria pr.-diff.", т. I, гл. II, § 20, гл. IV, § 40, гл. VII и особенно § 70; т. II, гл. VIII, Изгибание комплекса и конгруэнции, т. II, гл. XI, § 103.

[16]. Sur la déformation projective des surfaces, C. R., 170, стр. 1439 и 171, стр. 27, 1920, Ann. de l'École Normale Sup., сер. 3, 37, 1920, стр. 259—356; Sur le problème général de la déformation, C. R. du Congrès Intern. des Math. de Strasbourg en 1920, Ann. de Toulouse 1921, стр. 397—406. См. также *Mentré*, Les variétés de l'espace réglé étudiées dans leurs propriétés infinitésimales projectives, Thèse, Paris 1923, 108 стр., C. R., 179, 1924, стр. 22, 181, 1925, стр. 495, 182, 1926, стр. 1073. На новую точку зрения стал *Террачини* [*Terracini*], Su alcuni elementi lineari proiettive, Ann. d. Scuola Norm di Pisa, сер. 22, 1933, стр. 401—428 и исправления к этому мемуару „Osservazioni sulla geometria pr.-diff. delle congruenze di rette", Atti d. Instit. Veneto di Sc., 94, т. 2, 1935—1936, стр. 75—86. Здесь Террачини определяет изгибание как преобразование, сохраняющее простейший инвариант поверхности или конгруэнции.

[17]. *Tzitzeica*, Sur les congruences $W$, C. R., 152, 1911, стр. 35; Sur certains réseaux conjugués, C. R., 152, 1911, стр. 1077; Sur les réseaux $R$, C. R., 153, 1911, стр. 1127. См. истор. справку Appendice I при втором томе *Fubini-Čech*, Geometria, pr.-diff., а также *Tzitzeica*, Géom. pr.-diff. des réseaux, стр. 263. *A. Demoulin*, Sur les surfaces $R$ et les surfaces $\Omega$, C. R., 153, 1911, стр. 590, 705, 797, 927; Sur les congruences qui appartiennent à un complexe linéaire et les surfaces $\Phi$, Bullet. de la Classe des Sciences de l'Acad. de Belgique, 1920, стр. 215—232.

[18]. *Fubini-Čech*, Geom. pr.-diff., т. I, гл. V, а также Rendiconti dei Lincei, сер. 5, т. 32, сем. 1, 1923, стр. 198, 301, 376, 455.

[19]. *Terracini*, Sull elemento lineare proiettivo di una superficie, Rendiconti dei Lincei, сер. 6, 4, 1926, стр. 267. Дальнейшее развитие идей Террачини см. литературу, приведенную в лит. указ. за номером [16].

[20]. *Darboux*, Sur le contact des courbes et des surfaces, Bull. des Sciences Math., (2) 4, 1880, стр. 348—364.

[21]. *Fubini-Čech*, Introduction etc., стр. 51.

[22]. *Segre*, Complementi alla teoria delle tangenti coniugate di una superficie, Rend. dei Lincei, сер. 5, **17**, сем. 2, 1908, стр. 410.

[23]. Untersuchungen über Differentialgleichungen I Forhandlinger i Videnskabs—Selskabet i Christiania, Aar 1882, nº 21, Ges. Abh., Bd. 3, стр. 537—546 и 752—761; а также письмо Ли к Клейну от 18 декабря 1878 г.

[24]. Projective differential geometry of curved surfaces, Second Memoir, Trans. Amer. Math. Soc., **9**, 1908, стр. 112. См. также *Bompiani*, Fascio di quadriche di Darboux e normale proiettiva in un punto di una superficie, Atti dei Lincei Rend. (6), **6**, сем. 2, 1927, стр. 187—190.

[25]. Una nuova generatione delle quadriche di Darboux, ib., 1928, сер. 6, 7, стр. 14—16.

[26]. *Bompiani*, Ancora sulla geom. delle superficie considerate nello spazio rigato, Rend. dei Lincei, сер. 6, **4**, сем. 2, 1926, стр. 263; *Klobouček*, Quadrique osculatrice le long d'une génératice de la surface réglée donnée par trois courbes infiniment voisines. Quadrique de Lie. L'élément de surface de 3 et 4 ordre, Bull. Intern., Classe de Science, Acad. Tchèque, Prage, Rozpravy, **35**, nº 15, 1926, стр. 342.

[27]. *I. S. Smith*, On the focal properties of homographic figures, London, Math Soc., Proceedings, **2**, 1869, стр. 196—248.

[28]. *Fubini-Čech*, Introduction à la géom. pr.-diff. des surfaces, стр. 61, *Cech*, Osservazioni sulle quadrique di Darboux, Rend. dei Lincei, сер. 6, **8**, 1928, стр. 371.

[29]. Pr.-diff. geom. of curved surfaces, Second Memoir., Trans. of Amer. Math. Soc., **9**, 1908 стр. 79—120.

[30]. *Čech*: *Fubini-Čech*, Introd. à la géom. pr.-diff. des surfaces, стр. 71—74.

[31]. Projective differential geometry of One-Parameter Families of Space Curves and Conjugate Nets on a curved surface (second Memoir), Amer. Journ., **38**, 1916, стр. 287—324; Memoir on the General Theory of Surfaces and Rectilinear Congruences, Trans. Amer. Math. Soc., **20**, 1919, стр. 79—153.

[32]. *Green*, Trans. Amer. Math. Soc., **20**, 1919, стр. 79.

[33]. *Green*, Abstract, Bull. Amer. Math. Soc., **23**, 1916, стр. 73, On the General Theory of Curved Surfaces and Rectilinear Congruences, Proceed. Nat. Acad. sc. Wash., **3**, стр. 587, 1917 и в особенности Memoir on the General Theory of Surfaces and Rectilinear Congruences, Trans. Am. Math. Soc., **20**, стр. 114, 1919.

[34]. *Čech*, Sur les systèmes trilinéaires de courbes sur une surface et sur l'applicabilité projective des surfaces, Rozpravy, Bull. intern. de l'Acad. tchéque des sciences, **30**, 1921, N 23 (по-чешски) L'intorno d'un punto d'una superficie considerato dal punto di vista proiettivo, Ann., di Mat., сер. 3, **31**, 1922, стр. 191—206. См. также *Fubini-Čech*, Geom. pr.-diff., т. I, гл. III, стр. 139 и Introduction à la géom. pr.-diff. des surfaces, т. VII, где также приведена литература.

[35]. *Fubini*, Fondamenti della geom. pr.-diff. di uno superf., Atti dei Acad. di Torino, **53**, 1918, стр. 1032, См. также *Wilczynski*, Some Generalizations of Geodisics, Trans. of Amer. Math. Soc., **23**, 1922, стр. 223.

[36]. *Cartan*, Sur la déformation projective des surfaces, Annales de l'Ecole. Normale Sup., сер. 3, **37**, 1920, стр. 259—356. См. также *Fubini-Čech*, Introduction à la géom. pr.-diff. des surfaces, гл. XIII.

Фубини вводит нормальные формы $\varphi_2$ и $\varphi_3$, исходя из других соображений. Отношение дискриминанта $R$ кубичной формы $F_3$ (см. введение) к кубу дискриминанта $A$ квадратичной формы $F_2$ есть инвариант, который зависит однако, от нормирования координат. Выбирая $R = A^3$, Фубини вводит, и нормальные координаты точки и плоскости, и нормальные формы. См. *Fubini-Čech*, Géom. pr.-diff., т. I, стр. 85.

[37]. *Fubini*, Bolletino della Unione Mat., Ital., **6**, 1927, стр. 60, также Introduction и т. д., стр. 67.

[38]. *Fubini*, Alcuni risultati di geom. pr.-diff., Rendic. dei Lineci, сер. 5, **32**, сем. 2, 1923, стр. 273 и 321; *Čech*, Sur les géodésiques project. Lincei **33**, сем. 1, 1924, стр. 15; *Bompiani*, Rappresentazione geod.-proiettiva fra due superf., Ann. di Mat., сер. 4, **3**, 1926, стр. 171—188.

[39]. Эта прямая и следующие приведены Картаном в лекциях, читанных в Сорбонне осенью 1927—1928 г.



[40]. См. мемуары Грина, указанные в [33].

[41]. *Wilczynski*, On a certain Class of Self-Projective Surfaces, Trans. of Amer. Math. Soc., **14**. 1913, стр. 421—443; *Bompiani*, Contributo alla geom. pr.-diff. di una superf., Bolletino d. Unione Mat. Ital. **3**, 1924, стр. 49—56, 97—100; *Fubini*, Alcuni risultati di geom. pr.-diff., Rend. dei Lincei, сер. 5, **32**, сем. 2, 1923, стр. 273 и 321. См. также Geom. pr.-diff., т. I, стр. 157.

[42]. *Chasles*, Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite: particulièrement sur l'hyperboloide, le paraboloide et le cône du second degré, Correspondance mathém. et physique, сер. 3, **3**, стр. 53, 1839.

[43]. Тетраэдр этот был впервые дан автором с несколько иными обозначениями в статье Sur les congruences stratifiables, Rend. del Circolo di Palermo, **53**, 1929, стр. 313.

[44]. Это преобразование было рассмотрено Лапласом как метод интегрирования диференциальных уравнений с частными производными: *Laplace*, Recherches sur le calcul intégral aux différences partielles, Mémoires de l'Ac. des Sciences de Paris, 1773, стр. 341; также Oeuvres, **9**, 1893, стр. 5. Аналитическая теория полностью изложена *Darboux*, Théorie des surfaces, 2. Там же можно найти геометрические приложения этой теории. См. также *Goursat*, Sur les équations linéaires et la méthode de Laplace, Amer. Journ. of Math., **18**, 1896, стр. 347; *Bompiani*, Sull'equazione di Laplace, Rend. Circolo Mat. di Palermo, **34**, 1912, стр. 383 (об обрывающихся последовательностях Лапласа). Теория последовательностей Лапласа одновременно и в пространстве $n$ измерений полно представлена в книге *Tzitzeica*, Géom. diff.-proj. des réseaux, 1923. См. также несколько более тяжело написанную книгу *Eisenhart*, Transformations of surfaces, Princeton 1923.

[45]. В диференциальной геометрии удобно бывает рассматривать диференциалы независимых переменных как произвольные (конечные) величины. Все теоремы о полных диференциалах сохраняют силу (конечно, кроме теоремы о главной части бесконечно малой величины). При диференцировании вдоль определенной кривой на поверхности диференциалы независимых переменных сохраняют постоянное (в данной точке) отношение. Так как каждому из этих диференциалов можно придать любое значение, то в тексте обоим диференциалам придано конечное значение так, чтобы их отношение сохраняло требуемую величину.

[46]. *М. В. Потоцкий*, Détermination des complexes dont toutes les congruences sont *W*. C. R. **199**, 1934, стр. 12.

[47]. *Wilczynski*, Sur la théorie générale des congruences, Mémoires publiés par la Classe des Sciences de l'Ac. de Belgique, сер. 2, 3, 1911, 86. стр. См. также заметки автора Sur les suites de Laplace périodiques contenant une congruence *W*, C. R., **188**, 1929. стр. 1347; Sur les suites de Laplace contenant des congruences de Wilczynski, C. R., **189**, 1929, стр. 517; *Jacques*, Sur les réseaux dont les tangents appartiennent à des complexes linéaires et les surfaces non euclidiennes à courbure totale constante, C. R. **193**, 1931, стр. 1312.

[48]. Нетрудно проследить, что последовательные фокусы $M_5, M$ в направлении $v$ последовательности Вильчинского суть

$$M_{4i+1} = \mu_i M_1 + \delta M_4; \quad M_{4i+3} = M_2 + \mu_i \delta M_3,$$

где $\mu_i$ суть последовательные подходящие дроби бесконечной периодической непрерывной дроби

$$-R-\sqrt{R^2-4} = -R + \cfrac{1}{R + \cfrac{1}{-R + \cfrac{1}{R + \cfrac{1}{-R + \ldots}}}}.$$

Следовательно, последовательные фокусы в пределе стремятся попасть на директрису. То же самое имеет место по отношению к фокусам $M_6, M_8, \ldots$ на второй директрисе.

[49]. *E. Cartan*, Sur le problème général de la déformation, C. R. du Congrès Int. des Math. de Strasbourg, 1920; также Annales de la f. des Sc. de Toulouse, 1921, стр. 397—406.

[50]. *К. Н. Тихоцкий,* Sur la transformation $K$ des congruences. C. R., **202**, стр. 1474, 1936, показал, что конгруэнция метрически неизгибаема. Приведенные в тексте условия характеризуют конформное соответствие между конгруэнциями, т. е. соответствие, при котором углы соответствующих линейчатых поверхностей сохраняются.

[51]. В цитированной [49] заметке Картан поставил проблему и указал без выкладок наиболее интересный случай проективного изгибания конгруэнций $R$. Теория Картана изложена полностью и даны некоторые приложения в диссертации его ученика *Mentré,* Les variétés de l'espace reglé étudiées dans leurs propriétés infinitésimales projectives, Thèse, Paris 1923, 108 стр. Mentré и впоследствии возвращался неоднократно к этим вопросам: Sur la déformation projective de certaines congruences de droites, C. R., **179**, 1924, стр. 22; Sur les déformations projectives simultanées d'une congruence et de ses deux surfaces focales, C. R., **181**, 1925, стр. 495; Sur les surfaces dont le réseau de déformation projective est un réseau conjugué de Koenigs, C. R., **182**, 1926, стр. 1073. Изгибание комплекса и конгруэнции затронуто во втором томе *Fubini-Čech,* Geometria proiettiva-differenciale. Здесь даны диференциальные формы конгруэнции и комплекса и снова получены результаты Картана. В последнее время к этому вопросу вернулся *Rozet,* Sur l'applicabilité projective des congruences $W$, Bull. de l'Acad. de Belgique, 19, 1933, стр. 76—84. Здесь автор ставит задачу найти изгибаемые конгруэнции $W$, но вопроса не исчерпывает. Кроме известных уже конгруэнций $R$ он указал конгруэнции с проективно-налагаемыми фокальными поверхностями. (См. *Finikoff,* Bull. de Sciences (2), **56**, 1932, стр. 117, а также *Fubini-Čech,* Introduction etc., стр. 249.) Новую идею внес Террачини. В статье Sulla deformabilita proiettiva delle congruenze rettilinee, Rend. dei Lincei, **22**, 1935, стр. 225 он сводит задачу отыскания изгибаемой конгруэнции к отысканию совместного решения двух уравнений 3-го порядка в частных производных на одну неизвестную функцию; как пример он показывает изгибаемость конгруэнции не-$W$ с двумя фокальными поверхностями 2-го порядка. Кроме того, в цитированных в [16] и [19] работах он дает линейный элемент конгруэнции, сохранение которого есть необходимое и достаточное условие изгибания конгруэнции. Правда, при этом ему приходится обобщить понятие изгибания (изгибание 1-го и 2-го рода), добавив к изгибанию еще коррелятивное преобразование. Весьма интересно введенное им понятие изгибания комплексного образа (например, поверхность и конгруэнция лучей, проходящих через точки этой поверхности), см.: Sul alcuni elem. lineairi proiett., Ann. di Pisa (2), **2**. 1933, стр. 401—428 и Sulle congr. di rette piu volte associabili rispetto a una superficie, Rend. dei Lincei, сер. 6, 18, 1933, стр. 93 и 291. Совместное изгибание пары конгруэнций см. *Finikoff,* Déformation projective d'un couple de congruences, C. R., 199, 1934, стр. 177. На эту же тему готовится к печати статья *Буторина Н. И.*

[52]. Литература приведена в [44].

[53]. Geom. pr.-diff., т. I, стр. 250.

[54]. Литература приведена в [44].

[55]. Доложено автором на Всесоюзном съезде математиков в Ленинграде весной 1934 г.

[56]. Sur la théorie générale des congruences, Mém. de l'Acad. de Belgique, сер. 2, т. 3, 1911.

[57]. Geom. pr.-diff., т. 2, стр. 583.

[58]. См., например, *Darboux,* Théorie des surfaces, т. 2, гл. VII четвертой книги, стр. 150, где дана аналитическая теория.

[59]. *G. Koenigs,* Sur les systèmes conjugués à invariants égaux, C. R., **113**, 1891, стр. 1022. См. также *Tzitzeica,* Géom. diff. proj. des réseaux, стр. 77; *Darboux,* Théorie des surfaces, т. 4, стр. 37; *Bompiani,* Sur les épuations de Laplace à invariants égaux, C. R., **160**, 1915, стр. 551, 615.

[60]. *Darboux,* Théorie des surfaces, т. 2, стр. 31.

[61]. *Darboux,* ibid., исследует сети, воспроизводящиеся после двух преобразований Лапласа.

[62]. *G. Tzitzeica,* Sur certaines congruences de droites, Journ. de Math., сер. 9, 7, 1928, стр. 189.

[63]. *H. Jonas.* Ueber die Konstruktion der $W$-Kongruenzen zu einem gegebenen Brennflächenmantel und über die Transformation der $R$-Flächen, Jahresbericht d. Deutsch. Mathem. Verein, 29, 1920, стр. 40.



[64]. *Петерсон,* Об отношениях и сродствах между кривыми поверхностями Мат. сборн. 1, 1866, стр. 391—438.

[65]. *Fubini,* Géom. pr.-diff., т. I, стр. 293.

[66]. *Segre,* Le congruenze rettilinee $W$ aderenti a due superficie rigate, Atti d. Acad. di Torino, **42**, 1907, стр. 539—550, Sulle congruenze rettilinee $W$ di cui une od ambe le falde focali sono rigate, ib., **49**, 1913, стр. 291—303; *Tortorici,* Sulle trasformazioni asintotiche della curbe e sulle congruenze $W$ a falde focali rigate, Rend. del Circolo di Palermo, **38**, 1914, стр. 357—369; Dimostrazione analitica di un teorema di Segre, Napoli Rend., сер. 3, **28**, 1922, стр. 51—54; Il problema di Bianchi. Rend. del Circolo di Palermo, **46**, 1922; Alcune osservazioni analitiche sulle congruenze rett. $W$ aderenti a due superficie rigate, Math. Zeitschr., **10**, 1921, стр. 255—282; *Егоров,* Sur les congruences $W$ à focales reglées, Rend. dei Lincei, сер. 6, **10**, сем. 2, 1929, стр. 145; *Picone,* Sulle congruenze rettilinee $W$, Rend. del Circolo di Palermo, **37**, 1914, стр. 212—244; ib., **39**, 1915, стр. 51—75; *Bianchi,* Sur la déformation des quadriques, C. R., **143**, 1906, стр. 633. Кроме Сегре и Егорова большинство перечисленных работ метрического характера.

[67]. *Finikoff,* La congruence $R$, ayant deux surfaces gauche pour les deux nappes de sa surface focale, Rend. dei Lincei, сер. 6, 12, сем. 2, стр. 302, 1930.

[68]. *Egoroff,* Sur les congruences $W$ à focales reglées, Rend. dei Lincei, сер. 6, **10**, сем. 2, 1929, стр. 145; *Finikoff,* La congruence $R$ ayant deux surfaces gauches pour les deux nappes de la surface focale, ib., 12, сем. 2, 1930, стр. 302. Общий вопрос о разложении конгруэнции на поверхности второго порядка см. *Gambier,* Annales de la Fac. des Sciences de Toulouse, сер. 3, 27, 1935, стр. 201.

[69]. *Finikoff,* Transformation $T$ des congruences de droites, Ann. d. Scuola Norm. Sup. di Pisa, сер. 2, 2, 1933, стр. 59—88.

[70] *G. Fubini,* Su alcune classi di congruenze di rette e sulle trasformazioni delle superficie $R$, Ann. di Math., (4), **1**, 1924, стр. 241. Конфигурация была исследована еще раньше Демуленом в замечательно изящной статье наполовину синтетическим методом: *Demoulin,* Sur la transformation de Guichard et sur les systèmes $K$, Bull. de l'Acad. de Bruxelles N 2—3, 1919, стр. 103. Частные метрические случаи были рассмотрены: *L. Bianchi.,* Sopra una classe di coppie di congruenze rettilinee stratificabili, Rendiconti Acad. Lincei, сер. 5, **33**, сем. 2, 1924, стр. 369; ib., 32, сем. 2, стр. 521; *Россинский,* Sopra una classe di coppie di congruenze rettilinee stratificabili, Моск. мат. сбор., **36**, 1929, стр. 7—32; *Бюшгенс* и *Россинский,* Sur les couples de congruences stratifiables et sur la déformation des surfaces, ib., стр. 339—370; *Ермолаев,* Congruences rectilignes dont les normales des deux nappes focales engendrent un couple stratifiable, Bull. des sciences, **58**, 1934, стр. 78. Проективная теория построена автором: Sur les congruences statifiables, Rendiconti di Palermo, **53**, 1929, стр. 313. См. также C. R., **185**, 1927, стр. 376; **190**, 1930, стр. 999; 191, 1930, стр. 642; *Alexander Cook,* Pairs of rectilinear congruences with generators in one-to-one correspondence, Transactions Amer. Math. Soc. **32**, 1929, стр. 31. Сопряженную пару, образованную парой сопряженных относительно поверхности прямых, исследовал *E. Čech,* Geometria proiett.-diff., I, 1926, стр. 149. Расслояемую пару с линейчатыми расслояющими поверхностями, а также сопряженную четверку, в которой четыре конгруэнции соединены в конфигурации $T$ так, что каждые две пары противоположных конгруэнций образуют расслояемую сопряженную пару, исследовал *Al. Pantazzi,* Sur les couples de congruences stratifiables par familles de surfaces reglées, Bull. Math. Soc. Roum. de Sciences, **36**, 1934, стр. 3—25; Sur les couples de congruences stratifiables, C. R., **197**, 1933, стр. 1566; Sur les quadruples stratifiables conjugués, C. R., 1934, стр. 1668; Sur les couples transformables, Ann. Roumaines de Math., **2**, 1935, стр. 1—31; Sur les couples de congruences stratifiables, Boletinu Mat. al. Soc. Rom. **33—34**, 1932, стр. 1—32; Sur les couples de congruences strat. par familles de quadriques, Mathematica **9**, 1935, стр. 223—233. О конфигурациях, связанных с расслояемыми односторонне парами писал *Vincensini,* Sur les congruences stratifiables, Journ. de Math., **13**, 1934, стр. 419—449, C. R., **196**, 1933, стр. 1272, 1565.

[71]. Этот пучок преобразований конгруэнций можно сравнить с пучком асимптотических преобразований (с помощью конгруэнций $W$) поверхностей, см. *Tortorici,* Sulle deformazioni infinitesimi etc., Rend. del Circolo di Palermo, **35**, 1913, стр. 289.

[72]. С другой точки зрения эту конфигурацию рассматривал *L. Bianchi,* Sulle

configurazioni mobili di Möbius, Rend. del Circolo di Palermo, **25**, 1908, стр. 306.

[73]. *Fubini*, Su alcune classi di congruenze di rette e sulle trasformazioni delle superficie *R*, Ann. di Mat., сер. 4, **1**, 1924, стр. 241—257.

[74]. *Luigi Bianchi*, Lezioni di Geometria differenziale, третье изд. 1927, т. 1, ч. II, гл. 16, стр. 747. Есть также в немецком переводе.

[75]. *Finikoff*, Congruences stratifiables paraboliques, Math. Zeitschr., **36**, 1933, стр. 344—357.

[76]. Кроме статьи, указанной в (75), см. *Čech*, Sur les correspondances asymptotiques entre deux surfaces, Rend. dei Lincei, сер. 6, **8**, 1928, стр. 484—486, 552—554, специально второе сообщение.

[77]. По теории плоских кривых см. цитированные во введении (см. [1] и [2]) мемуар Альфана и книги Вильчинского, Фубини - Чех и Лэн (Lane). См. также *Cartan*, Sur un problème du calcul de variations en géométrie projective plane, Мат. сборн., **34**, 1927, стр. 349—364. В последнее время была построена проективная теория сетей (réseaux) на плоскости. Ей посвящена глава X книги *Fubini-Čech*, Introduction à la géom. proj.-diff. des surfaces. Там же приведена литература.

[78]. *Halphen*, Sur les invariants differentiels, Thèse 1878, также Собрание сочинений, 1918, т. II, стр. 200. *Wilczynski*, Proj.-diff. geom. of curves and ruled surfaces, 1906, стр. 68.

[79]. *Cartan*, Sur un problème du calcul des variations en géométrie projective plane, Мат. сборн., **34**, 1927, стр. 349.

[80]. *Cartan*, Sur la déformation proj. des surfaces, Ann. de l'École Normale Sup., сер. 3, **37**, 1920, стр. 259, а также изложение этой теории в книге *Fubini-Čech*, Introduction à la géom. pr.-diff. des surfaces, стр. 218.

[81]. *Fubini-Čech*, Introduction à la géom. pr.-diff. des surfaces, гл. I.

[82]. См., например, *Lane*, Pr.-diff. geom. of curves and surfaces, гл. I.

[83]. Таблица (7¹) и разложение (15¹) отличаются только нормированием от разложения Вильчинского-Альфана, см. *Lane*, Pr.-diff. geom. of curves and surfaces, стр. 21. Таблица (7) и разложение (15) соответствуют основному тетраэдру Фубини, см. *Fubini-Čech*, Géom. pr.-diff. т. I, стр. 39.

[84]. Nuova trattazione della geom. pr.-diff. delle curve sghembe (memor. 2a), Ann. di Mat., сер. 4, **3**, 1926, стр. 18; см. также *Fubini-Čech*, Geom. pr.-diff., т. I, стр. 43; *Lane*, Pr.-diff. geom. of curves and surfaces, стр. 21.

[85]. *Halphen*, Sur les invariants differentiels des courbes ganches, Journ. de l'Ecole Polytechnique, **28**, 1880, стр. 25; см. также Oeuvres, т. 2, стр. 375. Berzolari, Sugli invarianti diff. proiett. delle curve di un iperspazio, Ann. di Mat., сер. 2, **26**, 1897, стр. 1—58.

## ОБОЗНАЧЕНИЯ

Аналитической точкой или простой точкой называется совокупность четырех чисел $M^1, M^2, M^3, M^4$, среди которых не все равны нулю. Она обозначается одной буквой прямой черного шрифта:

$$\mathbf{M} = \{ M^1, M^2, M^3, M^4 \}.$$

Если дан координатный тетраэдр, то эти четыре числа определяют геометрическую точку, которая обозначается той же буквой черного курсива.

Всякое линейное однородное уравнение между аналитическими точками распадается на четыре уравнения между их координатами.

Буквы светлого шрифта означают скаляры и имеют одно числовое значение, постоянное или переменное.

Шесть независимых миноров матрицы

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{M}_1^1 & \mathbf{M}_1^2 & \mathbf{M}_1^3 & \mathbf{M}_1^4 \\ \mathbf{M}_2^1 & \mathbf{M}_2^2 & \mathbf{M}_2^3 & \mathbf{M}_2^4 \end{Vmatrix}$$

обозначаются как внешнее произведение или просто одной строчной буквой черного шрифта:

$$\mathbf{r} = (\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2),$$

и определяют в линейных координатах Плюккера прямую, соединяющую точки $M_1$ и $M_2$.

Если все миноры равны нулю:

$$(\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2) = 0,$$

то геометрические точки $M_1$ и $M_2$ совпадают и

$$\mathbf{M}_1 = \lambda \mathbf{M}_2.$$

Четыре независимых минора третьего порядка матрицы

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{M}_1^1 & \mathbf{M}_1^2 & \mathbf{M}_1^3 & \mathbf{M}_1^4 \\ \mathbf{M}_2^1 & \mathbf{M}_2^2 & \mathbf{M}_2^3 & \mathbf{M}_2^4 \\ \mathbf{M}_3^1 & \mathbf{M}_3^2 & \mathbf{M}_3^3 & \mathbf{M}_3^4 \end{Vmatrix}$$

обозначаются, как внешнее произведение трех точек, или кратко одной буквой $\mathbf{m}$ черного шрифта:

$$\mathbf{m} = (\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_3),$$

и определяют в тангенциальных координатах плоскость, проходящую через геометрические точки $M_1, M_2, M_3$.

Если четыре минора равны нулю:

$$(\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_3) = 0,$$

то три точки $M_1, M_2$ и $M_3$, расположены на прямой и

$$\mathbf{M}_1 = \lambda\mathbf{M}_2 + \mu\mathbf{M}_3$$

Внешнее произведение точки и плоскости или двух прямых, или четырех точек есть скаляр, равный определителю:

$$\mathbf{M}_1(\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4) = (\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4) = (\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4) =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{M}_1^1 & \mathbf{M}_1^2 & \mathbf{M}_1^3 & \mathbf{M}_1^4 \\ \mathbf{M}_2^1 & \mathbf{M}_2^2 & \mathbf{M}_2^3 & \mathbf{M}_2^4 \\ \mathbf{M}_3^1 & \mathbf{M}_3^2 & \mathbf{M}_3^3 & \mathbf{M}_3^4 \\ \mathbf{M}_4^1 & \mathbf{M}_4^2 & \mathbf{M}_4^3 & \mathbf{M}_4^4 \end{vmatrix}$$

Если определитель равен нулю:

$$(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4) = 0,$$

то четыре геометрические точки $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ лежат в одной плоскости и

$$\mathbf{M}_1 = \lambda\mathbf{M}_2 + \mu\mathbf{M}_3 + \nu\mathbf{M}_4.$$

Если определитель $(\mathbf{M}_1\,\mathbf{M}_2\,\mathbf{M}_3\,\mathbf{M}_4)$ отличен от нуля, то тетраэдр $(M_1\,M_2\,M_3\,M_4)$ можно принять за координатный. Всякая точка $\mathbf{A}$ разложится на сумму:

$$\mathbf{A} = a_1\mathbf{M}_1 + a_2\mathbf{M}_2 + a_3\mathbf{M}_3 + a_4\mathbf{M}_4.$$

Четыре числа $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ являются местными координатами точки $A$ по отношению к тетраэдру $(M_1, M_2, M_3, M_4)$

Сумма вида

$$\sum a\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{i=4} a_i\mathbf{M}^i$$

есть левая часть уравнения плоскости.

Сумма вида

$$\sum a\mathbf{M}\mathbf{M} = \sum_{i,k=1}^{4} a_{ik}\mathbf{M}^i\mathbf{M}^k$$

есть левая часть уравнения поверхности второго порядка.

Сумма вида

$$\sum c\,(\mathbf{M}_1\,\mathbf{M}_2) = \sum_{(i,k)}^{4} c_{ik}\,(\mathbf{M}_1^i\ \mathbf{M}_2^k)$$

есть левая часть уравнения линейного комплекса, где $(\mathbf{M}_1^i\ \mathbf{M}_2^k)$ — текущие координаты луча.

Если дана кривая

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}\,(u),$$

то точка

$$\frac{\mathbf{M}\,(u + \Delta u) - \mathbf{M}\,(u)}{\Delta u}$$

расположена на хорде, соединяющей точки $\mathbf{M}\,(u)$ и $\mathbf{M}\,(u + \Delta u)$; следовательно, производная

$$\mathbf{M}_u = \frac{d\mathbf{M}}{du}$$



есть точка, лежащая на касательной к кривой в точке $\mathbf{M}\,(u)$. Изменяя параметры $u$ по формуле $u^* = \varphi(u)$, мы заставим точку $M_u$ пробежать всю касательную $MM_u$.

Так же вторая производная $M_{uu}$ есть точка расположенная в соприкасающейся плоскости $MM_uM_{uu}$

Если дана поверхность

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}\,(u,v),$$

то частные производные:

$$\mathbf{M}_u = \frac{\partial\mathbf{M}}{\partial u}, \quad \mathbf{M}_v = \frac{\partial\mathbf{M}}{\partial v}$$

суть точки, расположенные на касательных к координатным линиям. Они определяют касательную плоскость к поверхности $MM_uM_v$

Геометрическое место точек $M$ (кривая или поверхность) обозначается $(\mathbf{M})$. Так же обозначается геометрическое место прямых (линейчатая поверхность, конгруэнция) или плоскостей (огибающая семейства плоскостей).

Редакция *Л. С. Ермолаева.* Оформление *Е. Г. Шпак.*

Корректура *Муйжель* и *Е. Ильиной.*

Учетн. № 4136. Тираж 3.000. Сдано в набор 22/XII 1935 г. Подп. в печ. 15/IV 1937 г. Формат бумаги 62 × 94. Уч.-авт. л. 16,6. Бум. лист. $8\frac{1}{4}$. Печ. зн. в бумажн. листе 101.000. Заказ № 1994. Уполном. Главл. № Б-13811. Выход в свет Апрель 1937 г.

3-я тип. ОНТИ. Ленинград, ул. Моисеенко, 10.

## Список опечаток

| Стр. | Строка | Напечатано | Следует читать | По чьей вине |
|---|---|---|---|---|
| 13 | 20 снизу | [illegible] | [illegible] | тип. |
| 17 | 18 сверху | [illegible] | [illegible] | " |
| 22 | 10 " | преобразованной (6) | преобразованной (5) | " |
| 28 | 5 снизу | $\sum_k C_{ik} x_i$ | $\sum_k C_{ik} x_i^2$ | " |
| 31 | 14 " | $\sum b_j a_j^2$ | $\sum_j b_j a_j^2$ | " |
| 185 | 17 сверху | $q_1 s_2$ | $q_1 s^2$ | " |
| 257 | 7 снизу | $-R-\sqrt{R^2-4}$ | $\frac{-R-\sqrt{R^2-4}}{2}$ | " |

[illegible] Зак. 1994